

CARTOGRAFÍA  
MATEMÁTICA

carto-  
grafía  
mate-  
mática

MAT

Romeo Miretti  
Eleonora Cerati  
Lilian Coronel

UNIVERSIDAD  
NACIONAL DEL LITORAL



Cartografía matemática



**UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DEL LITORAL**

Rector **Enrique Mammarella**

Director de Planeamiento y Gestión Académica **Daniel Comba**

Directora Ediciones UNL **Ivana Tosti**

.....

Miretti, Romeo

Cartografía matemática / Romeo Miretti ;

Eleonora Cerati ; Lilian Coronel. - 1a ed. -

Santa Fe : Ediciones UNL, 2020.

Libro digital, PDF - (Cátedra)

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-749-193-7

1. Cartografía. 2. Geografía. 3. Matemática

Aplicada. I. Cerati, Eleonora. II. Coronel, Lilian.

III. Título.

CDD 526

.....

© Eleonora Ceratti, Lilian Coronel,  
Romeo Miretti, 2020.



© edicionesUNL, 2020

Coordinación editorial

**María Alejandra Sadrán**

Coordinación diseño

**Alina Hill**

Producción general

**Ediciones UNL**

—

[editorial@unl.edu.ar](mailto:editorial@unl.edu.ar)

[www.unl.edu.ar/editorial](http://www.unl.edu.ar/editorial)

.....



[hdl.handle.net/11185/5530](http://hdl.handle.net/11185/5530)

# Cartografía matemática

Romeo Miretti  
Eleonora Cerati  
Lilian Coronel



Los autores agradecen a quienes colaboraron en distintas etapas en la creación de este libro, en imparcial orden alfabético:  
Miguel Fleitas, José Huespe, Sebastián Orihuela y Mabel Ortega.



## Índice general

<b>1. Forma y dimensiones de la Tierra</b>	<b>15</b>
1.1. Forma y dimensiones de la Tierra	15
1.2. Definiciones	16
1.3. Elipsoide de revolución	18
1.4. Coordenadas geográficas	24
1.5. Secciones normales a una superficie	26
1.6. Líneas ortodrómicas y loxodrómicas en la esfera.	31
1.7. Líneas geodésicas y loxodrómicas en el elipsoide	38
1.8. Longitud del Ecuador, de paralelos y de meridianos en la esfera	45
1.9. Longitud del Ecuador, de los paralelos y de los meridianos en el elipsoide	46
<b>2. Cartografía</b>	<b>51</b>
2.1. Principios generales	51
2.2. El problema a resolver en cartografía	53
2.3. Proyecciones cartográficas	55
2.4. Clasificaciones y propiedades de las proyecciones cartográficas	56
2.5. Deformaciones en cartas y mapas	61
2.6. Análisis de las deformaciones de las proyecciones cartográficas	67
2.7. Escalas numéricas y gráficas	91
2.8. Elección de la escala conveniente	97
2.9. Error gráfico	98
2.10. Mediciones sobre cartas y mapas	98
2.11. Equivocaciones, faltas, errores y alteraciones	99

2.12. Origen de los errores y de las alteraciones. Canevás geodésico o astronómico	101
2.13. Sistema de proyección	102
2.14. Datos topográficos	102
2.15. Redacción cartográfica	103
2.16. Reconstrucción e impresión	104
2.17. Tipos de mediciones	105
<b>3. Proyecciones acimutales</b>	<b>109</b>
3.1. Conceptos generales	109
3.2. Proyección acimutal ortográfica polar	110
3.3. Proyección acimutal ortográfica ecuatorial	118
3.4. Proyección acimutal ortográfica oblicua	127
3.5. Proyección acimutal estereográfica polar	139
3.6. Proyección acimutal estereográfica ecuatorial	144
3.7. Proyección acimutal estereográfica oblicua	150
3.8. Proyección acimutal gnomónica polar	157
3.9. Proyección acimutal gnomónica ecuatorial	163
3.10. Proyección acimutal gnomónica oblicua	174
3.11. Proyección acimutal equidistante polar	187
3.12. Proyección acimutal equidistante ecuatorial	192
3.13. Proyección acimutal equidistante oblicua	200
3.14. Proyección acimutal equivalente polar	209
3.15. Proyección acimutal equivalente ecuatorial	214
3.16. Proyección acimutal equivalente oblicua	224
<b>4. Proyecciones cilíndricas normales</b>	<b>237</b>
4.1. Conceptos generales	237
4.2. Proyección cilíndrica normal tangente pura, central o perspectiva	238
4.3. Proyección cilíndrica normal tangente equidistante (o cuadrada)	242
4.4. Proyección cilíndrica normal tangente equivalente	245
4.5. Proyección cilíndrica normal tangente isógona en la esfera: Proyección Mercator	250
4.6. Proyección Mercator en el elipsoide	256
4.7. Proyección cilíndrica normal secante pura, central o perspectiva	258
4.8. Proyección cilíndrica normal secante equidistante(equirrectangular)	263
4.9. Proyección cilíndrica normal secante equivalente	266
4.10. Proyección cilíndrica normal secante isógona (Mercator secante en la esfera)	272
4.11. Proyección cilíndrica secante normal isógona o conforme (proyección de Mercator secante en el elipsoide)	276
4.12. Proyección de Gall	280



<b>5. Proyecciones cilíndricas transversas</b>	<b>285</b>
5.1. Conceptos generales	285
5.2. Proyección cilíndrica transversa tangente pura, central o perspectiva	287
5.3. Proyección cilíndrica transversa tangente equidistante (de Cassini, de Soldner o de Hatt)	291
5.4. Proyección cilíndrica transversa tangente equivalente	296
5.5. Proyección cilíndrica transversa tangente isógona (también Proyección cilíndrica transversa de Lambert y Proyección cilíndrica transversa de Mercator)	302
5.6. Proyección Gauss-Krüger	315
5.7. Proyección UTM (Universal Transverse Mercator)	323
<b>6. Proyecciones cónicas</b>	<b>335</b>
6.1. Proyección cónica normal tangente pura, central o perspectiva	336
6.2. Proyección cónica normal tangente equidistante o cónica simple	345
6.3. Proyección cónica normal tangente equivalente	349
6.4. Proyección cónica tangente isógona o conforme (sobre la esfera)	354
6.5. Proyección cónica normal tangente isógona (en el elipsoide)	361
6.6. Proyección cónica secante pura, central o perspectiva	366
6.7. Proyección cónica secante equidistante	373
6.8. Proyección cónica secante equivalente (De Albers)	379
6.9. Proyección cónica secante isógona (en la esfera)	386
6.10. Proyección cónica secante isógona (sobre el elipsoide). (Proyección cónica conforme de Lambert)	395
6.11. Proyecciones pseudocónicas	402
<b>7. Proyecciones convencionales</b>	<b>425</b>
7.1. Proyección sinusoidal (de Sanson o de Flansteed)	425
7.2. Proyección homolográfica (de Mollweide)	434
7.3. Proyecciones interrumpidas	445
7.4. Proyección de Ecker IV.	447
7.5. Proyección globular (o de Nicolosi)	460
7.6. Proyección aérea perspectiva	468
7.7. Proyección de Van Der Grinten	475
7.8. Proyección de Robinson	479



## Prólogo

En las actividades humanas, en gran número de ocasiones, se necesita disponer de una representación del terreno, con mayor a menor grado de minuciosidad y detalle, de las más diversas extensiones que oscilan desde una simple parcela a una provincia, un país, un continente o bien a toda la superficie terrestre.

Esta representación del terreno, con todos los detalles que interesan, se deberá realizar en un plano (papel, cartón, pizarrón, ...), y en dimensiones reducidas respecto de las medidas originales, de modo tal que la misma sea una imagen que se aproxime lo mejor posible a la realidad. Dicha representación se denomina plano, carta o mapa, según la magnitud de la superficie representada.

La Cartografía tiene por finalidad la realización del estudio, proyecto y confección de la representación gráfica, sobre un plano, de parte o de la totalidad de la superficie terrestre, de modo que entre el objeto a representar (superficie terrestre) y su imagen sobre un plano (plano, carta, mapa), exista la mayor afinidad posible, ya que la fidelidad total no es posible debido a que la superficie terrestre de referencia (considerada esférica o elipsoidal), no es desarrollable sobre un plano.

En el proceso de confección de una carta o mapa se distinguen tres etapas: a) la medición, es decir el conocimiento de la forma y dimensiones de la Tierra; b) un trazado geométrico; y c) contenido y forma de representarlo.

El destino principal que tiene este libro es el de brindar a los estudiantes universitarios el tratamiento de las principales proyecciones cartográficas y, por lo tanto, la capacidad para sus aplicaciones en el trazado y uso de cartas y mapas.

Asimismo, en vista de la creciente importancia de las cartas y mapas en el mundo moderno, y la necesidad de su correcta interpretación, se espera que este trabajo resulte también de interés para un público más amplio. Para ello, se ha procurado que pueda también ser interpretado por aquellas personas que no poseen una avanzada formación matemática; presupone un conocimiento de trigonometría esférica elemental y el empleo de cálculo diferencial e integral clásico.

Dada la variedad de las necesidades de los distintos perfiles de estudiantes, cada proyección ha sido estudiada separadamente y el libro ha sido dividido en capítulos, pero la unidad esencial del tema ha sido mantenida en todo el desarrollo.

Debido a que ciertos mapas, si se representan regiones que no abarcan gran extensión, son muy parecidos entre sí, lo que hace difícil diferenciarlos, se han considerado extensiones mayores que las que normalmente son usadas, facilitando la tarea de su identificación. En este libro, las proyecciones cónicas han sido desarrolladas para un hemisferio completo en lugar de, como es habitual, representar sólo un continente o un país.

Siendo la finalidad principal de las Proyecciones Cartográficas la de representar la superficie terrestre, es necesario previamente el conocimiento de la misma. Para ello, el primer capítulo está dedicado a la revisión de las nociones fundamentales de Geodesia Geométrica.

En el desarrollo de los capítulos siguientes se siguió, para el estudio de las proyecciones cartográficas, el orden establecido por la clasificación de acuerdo con la superficie auxiliar de proyección.

En el estudio de cada proyección se siguió la siguiente metodología:

- Explicación del dibujo de la proyección empleando métodos gráfico y analítico.
  
- Estudio del canevas (proyecciones de paralelos y meridianos). Tipos de líneas que representan cada uno. Propiedades de los mismos, en particular el análisis de las deformaciones.

- Empleo de la proyección en cartas y mapas en atlas, mapas murales, etc. con las aplicaciones correspondientes, ya sea para usuarios especializados (navegación marítima y aérea, Catastro, Estadística, vías de comunicación, Geografía, etc.) como para estudiantes, o lectores interesados.

Romeo E. Miretti



# **Capítulo 1**

## **Forma y dimensiones de la Tierra**

### **1.1 Forma y dimensiones de la Tierra**

Siendo el objeto a representar en Cartografía la superficie terrestre, es necesario conocer en primer lugar su forma y dimensiones. Aquí es donde la Cartografía, la Geodesia y la Topografía forman tres ciencias tan íntimamente relacionadas que cualquiera de ellas no puede prescindir de las otras.

Si se desea representar en un plano la correcta localización de puntos de la superficie terrestre, lógicamente se debería conocer con anterioridad la posición de dichos puntos sobre la Tierra. Entonces el planteo del problema comienza con el conocimiento de la forma y dimensiones de la Tierra. Una vez determinadas éstas, se planteará un sistema de localización que permita ubicar puntos sobre la Tierra (Coordenadas Geográficas), y por último se podrán materializar sobre la superficie terrestre una serie de puntos de los cuales se conoce su posición respecto del sistema de localización planteado.

La forma de la superficie física de la Tierra (la separación entre la superficie del terreno y el aire que lo rodea y entre la superficie del fondo de los océanos y el agua) es demasiado irregular para ser usada como superficie de referencia. La distribución de sus elementos constitutivos no es homogénea. En la superficie se presentan océanos y continentes;

su forma exterior es completamente irregular y variable con el tiempo por la acción de agentes naturales y artificiales. Además está sujeta a las acciones de la Luna, el Sol y los planetas.

Una vez determinada la forma y dimensiones de la superficie de referencia, la Geodesia y la Topografía permiten relacionar la misma con la superficie física.

## 1.2 Definiciones

### 1.2.1 La esfera terrestre

Se puede considerar entonces a la Tierra, en una primera aproximación, como una *superficie esférica* de radio  $R = 6\,370$  km. Esta longitud del radio de la esfera terrestre es aproximada y se ha redondeado para facilitar los cálculos. Se usan también las longitudes de radios de la Tierra que difieren algunos kilómetros, pero dadas las escalas pequeñas de los mapas, no resultan diferencias apreciables en el dibujo. Por otra parte, la superficie esférica se considera desprovista de desniveles, como una superficie de referencia (Figura 1.1). Al adoptar la superficie esférica como una aproximación de la forma de superficie terrestre de referencia, en lugar del elipsoide, se comete un error que, para el caso de la confección de mapas (cuyas escalas son pequeñas), resulta ser despreciable (Escala menor de 1:1 000 000).

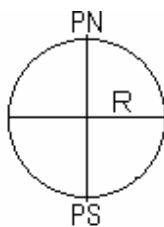


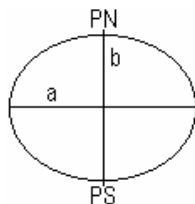
Figura 1.1: La esfera terrestre

### 1.2.2 Elipsoide de revolución

Para el dibujo de cartas, por ser sus escalas mayores, el error citado en el párrafo anterior, no se puede despreciar. En este caso se recurre a otra aproximación, que es el *elipsoide de revolución*. Se define como elipsoide de revolución a la superficie engendrada por la rotación de una



elipse alrededor de su eje menor que en el caso de la Tierra es su eje de rotación. Los semiejes de la elipse son los parámetros fundamentales del elipsoide (Figura 1.2). Las dimensiones del elipsoide terrestre han sido calculadas muchas veces, dependiendo de la información de resultados de mediciones de arcos de meridianos terrestres, dando lugar a varios elipsoides. Debido al inconveniente que ocasionaba el uso de distintos elipsoides, en el Congreso de Geodestas reunidos en Madrid en 1924, se decidió adoptar como *Elipsoide Internacional de Referencia* el calculado por Hayford, cuyas dimensiones son:  $a = 6\,378\,388m$ ;  $b = 6\,356\,912m$  y  $\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{297}$ ;  $\alpha$  se denomina el *aplastamiento* del elipsoide.



a=semieje mayor

b=Semieje menor

$$\alpha = \text{Aplastamiento o achatamiento} = \frac{a-b}{a}$$

**Figura 1.2:** El elipsoide de revolución

### 1.2.3 Geoide

Es aceptado universalmente que la mejor aproximación de la forma de la Tierra como superficie de referencia es la superficie equipotencial del nivel medio del mar, llamada *geoide*. Esta superficie es ondulada, suave y continua, y está definida como aquella que adoptan los océanos en equilibrio, supuestos prolongados a través de los continentes. Cumple la condición que en cada punto es perpendicular a la vertical del lugar (Figura 1.4). La variación o separación de la superficie del geoide con respecto a la superficie del elipsoide se denomina *ondulación del geoide*. Esas ondulaciones se producen a causa de la composición heterogénea de los materiales de la Tierra (diferencia de densidad). En la Figura 1.3 se han superpuesto las tres aproximaciones de la forma de la Tierra (esfera, elipsoide de revolución y geoide).

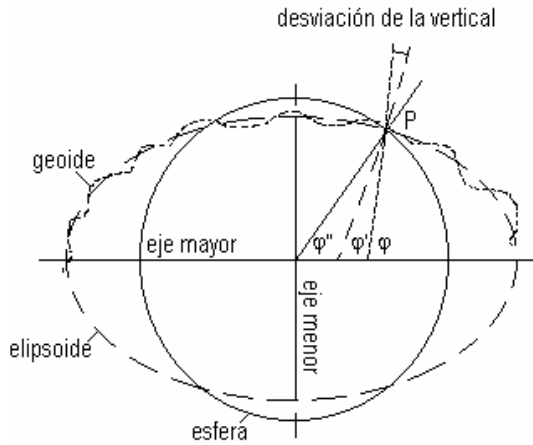


Figura 1.3: Aproximaciones de la forma de la tierra

**Nota:** La Figura 1.4 no está en escala, presentando muy exageradas las diferencias entre las superficies.

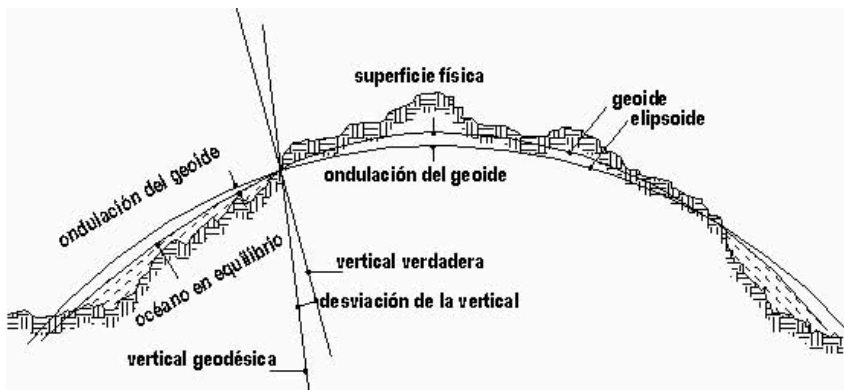


Figura 1.4: Comparación del geoide y el elipsoide

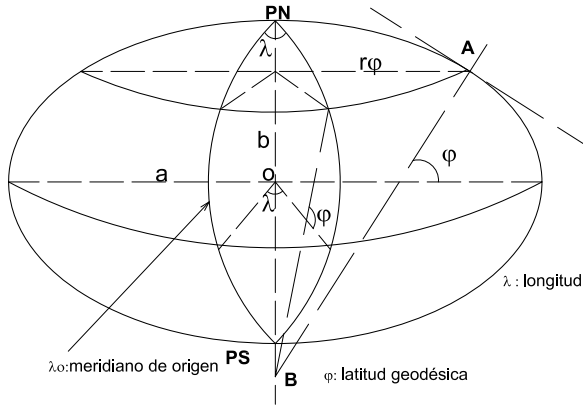
### 1.3 Elipsoide de revolución

El elipsoide de revolución es el cuerpo geométrico que “mejor” se aproxima al Geoide. El Elipsoide está engendrado por la rotación de la elipse alrededor de su eje menor (Figura 1.5).

$$\text{Aplastamiento: } \alpha = \frac{a - b}{a}$$

$$\text{Primera excentricidad: } e = \frac{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$$

Segunda excentricidad:  $e' = \frac{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{b}$



**Figura 1.5:** *Elipsoide de revolución*

El elipsoide de revolución proporciona una superficie matemática definida que permite calcular distancias geodésicas, acimutes y coordenadas. El semieje mayor (de longitud  $a$ ) y el menor (de longitud  $b$ ) se usan para determinar las dimensiones del elipsoide.

Las dimensiones del elipsoide terrestre han sido calculadas por distintos matemáticos a través del tiempo, utilizando la información disponible en cada época. En el cuadro siguiente se consignan algunos de esos valores.

Nombre	Año	Semieje mayor a (en m)	Semieje menor b (en m)	Aplastamiento	Usos actuales
Everest	1830	6 377 276	6 356 075	1:300,8	India
Bessel	1841	6 377 397	6 356 079	1 : 299,15	Alemania, Holanda, Indonesia
Airy	1858	6 377 563	6 356 257	1 : 299,33	Gran Bretaña
Clarke	1858	6 378 294	6 356 619	1 : 294,3	
Clarke	1866	6 378 206	6 356 584	1 : 295,0	Estados Unidos de América
Clarke	1880	6 378 249	6 356 515	1 : 293,5	África del Sur
Hayford	1909	6 378 388	6 356 912	1 : 297,0	Adoptado internacionalmente
Krassovsky	1948	6 378 245	6 356 863	1 : 298,3	Rusia, Países orientales
IUGG <sup>1</sup>	1967	6 378 160	6 356 775	1 : 298,25	
GRS <sup>2</sup>	1980	6 378 137	6 356 752	1 : 298,257	Estados Unidos de América
WGS <sup>3</sup>	1984	6 378 137	6 356 752	1 : 298,257	Adoptado internacionalmente

<sup>1</sup> International Union of Geodesy.

<sup>2</sup> Geodetic Reference System.

<sup>3</sup> World Geodetic System.

### 1.3.1 Sistemas de referencia regionales y geocéntricos

La Geodesia clásica no puede definir un sistema de referencia único para relacionar la superficie terrestre de todo el planeta. Es así que existen múltiples sistemas de referencia geodésicos locales (o regionales) en los que se procura el ajuste (la mayor aproximación entre el elipsoide y el geode) válido para cierta extensión (país, continente), mediante un elipsoide cuyo centro, en general, se encuentra desplazado del centro de la Tierra. Estos sistemas de referencia son los que figuran en la tabla anterior, en la columna “ Usos Actuales”. El sistema de referencia será entonces válido, a nivel regional. Este sistema pasa por un punto determinado de la superficie terrestre, adoptado como origen y que se denomina *datum*.

Por ejemplo, en EE.UU. se usó como sistema de referencia el NAD 1927 (North America Datum año 1927) adoptando el Elipsoide de Clarke 1866. El origen de este datum es un punto de la superficie terrestre llamado “Meades Ranch” en Kansas (EE.UU.). El centro del elipsoide de referencia está desplazado con respecto al centro de la Tierra (Figura 1.6).

En la República Argentina, hasta mayo de 1997, el datum oficial fue el denominado *Campo Inchauspe* (Provincia de Buenos Aires) 69 (CAI 69), determinado como origen. El elipsoide tomado como superficie de referencia es el de Hayford, cuyo centro está desplazado con respecto al centro de la Tierra.

El método explicado se fundamenta en el hecho de que los sistemas locales se adaptan en forma más precisa a una región limitada cuya superficie puede corresponder a un país o a un continente determinado.

Pero esta situación impide la vinculación entre las distintas regiones, ya que cada una cuenta con un datum diferente. Por ello es que en la actualidad, con el aporte de las distintas técnicas de medición espacial (satélites, efecto Doppler, etc.), ha sido posible definir y materializar sobre la superficie terrestre sistemas de referencia geométricos en los cuales el ajuste entre elipsoide y geode se efectúa a nivel de toda la superficie terrestre.

De acuerdo con esto, para nuestro país se decidió adoptar como nuevo datum a partir del 9 de mayo de 1997 el sistema de referencia WGS

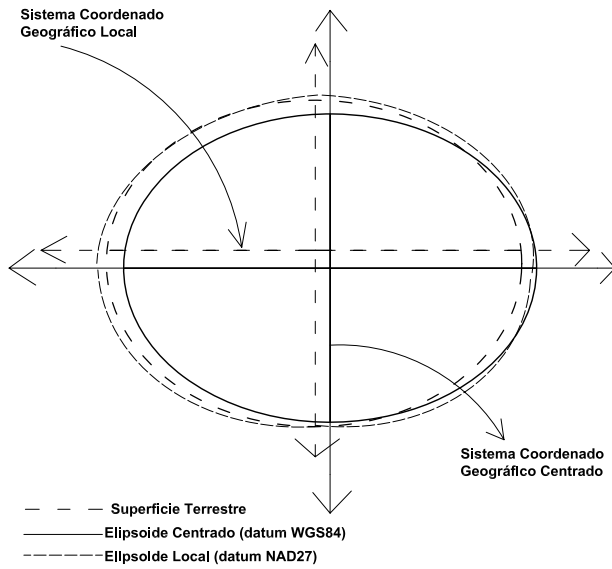


Figura 1.6: Sistemas de referencia regionales

84 (World Geodetic System) de origen satelital. Para materializarlo se desarrolló el proyecto POSGAR (Posiciones Geodésicas Argentinas). Se trata de una red de puntos distribuidos en el país y materializados en el terreno, algunos de los cuales son coincidentes con la red del sistema *Campo Inchauspe 69*, lo que permitió diseñar parámetros de conversión de un sistema a otro.

El POSGAR 94 es del tipo general concéntrico y utiliza, como ya se dijo, como elipsoide de referencia al Elipsoide Global WGS 84 (con centro en el centro de la Tierra), el que fue adoptado como sistema de referencia del Sistema de Posicionamiento Global conocido por la sigla GPS. Es un sistema satelital para determinaciones terrestres, marítimas y aéreas.

### 1.3.2 Elementos del elipsoide

En la Figura 1.5 el radio de curvatura del meridiano en el punto *A* se simboliza  $\rho$  y tiene dirección perpendicular al meridiano en ese punto. Se demuestra (ver Anexo A) que:

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.1}$$

El radio de curvatura de la sección normal al meridiano en el punto  $A$  se denomina gran normal,  $N$ , y se verifica que es igual al segmento  $AB$ , siendo (ver Anexo A):

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.2)$$

Por lo tanto, el radio de un paralelo cualquiera de latitud  $\varphi$  será:

$$r_{\theta} = N \cos \varphi \quad (1.3)$$

Supóngase un punto  $P$  donde se intersecan las tres aproximaciones de la superficie terrestre (Figura 1.3). El plano tangente en  $P$  al geoide se denomina *horizonte verdadero o astronómico*. La perpendicular en ese punto al *horizonte verdadero o astronómico* se denomina vertical verdadera o astronómica. Es la línea recta que contiene al hilo de la plomada en equilibrio en ese punto. El ángulo  $\varphi$  que forma la vertical verdadera con el plano del Ecuador se denomina latitud verdadera o astronómica, también geográfica.

El plano tangente en  $P$  al elipsoide de revolución se denomina *horizonte geodésico* y la recta normal, *vertical geodésica*. El ángulo  $\varphi'$  que forma la vertical geodésica con el plano del Ecuador se denomina *latitud geodésica*. El ángulo que forma la vertical geodésica con la verdadera se denomina *desviación de la vertical*. Este ángulo es muy pequeño y no llega a superar los 30". En el caso de cartas, la diferencia entre geoide y elipsoide es despreciable, por lo cual se adopta la superficie *elipsoidal*.

El plano tangente en  $P$  a la superficie esférica se llama *horizonte geocéntrico*. La normal se denomina *vertical geocéntrica* y el ángulo que forma esta vertical con el plano del Ecuador se llama *latitud geocéntrica* ( $\varphi''$ ).

En el caso de mapas, la diferencia entre las tres aproximaciones de la superficie terrestre es despreciable, por lo cual se adopta la superficie esférica, que es la forma más simple. Por ejemplo: supóngase una representación gráfica de una región comprendida entre los  $-30^\circ$  hasta los  $-34^\circ$  de latitud. En la esfera de radio  $R = 6\,370\,km$ , un arco de meridiano de  $4^\circ$  tiene una longitud de:

$$\frac{\pi R 4^\circ}{180^\circ} = 444\,709,88m$$

En mapas, la escala es menor de 1 : 1 000 000, por lo cual adoptar la forma esférica en lugar de la elipsoidal ocasiona un error que, dividido por un valor mayor que 1 000 000, resulta despreciable.

En el Elipsoide Internacional de Referencia (Hayford), se calcula la longitud de un arco meridiano (Ver Anexo A) entre los  $-30^\circ$  y los  $-34^\circ$  de latitud de la siguiente manera:

El arco de meridiano desde el Polo Sur hasta  $\varphi = -30^\circ$  es  $6\,682\,126,599m$ .

El arco de meridiano desde el Polo Sur hasta  $\varphi = -34^\circ$  es  $6\,238\,568,433m$ .

El arco de meridiano desde  $-30^\circ$  hasta  $-34^\circ$  es

$$6\,682\,126,599m - 6\,238\,568,433m = 443\,558,166\,m.$$

La diferencia entre esfera y elipsoide

$$\Delta S = 444\,709,88m - 443\,558,166m = 1\,151,714m.$$

La diferencia entre esfera y elipsoide  $\Delta S$  en escala 1 000 000 es:

$$\frac{1\,151,714}{1\,000\,000}m = 0,00115m = 1,15mm.$$

Teniendo en cuenta que, en general, los mapas a escalas inferiores a 1 : 1 000 000 son descriptivos, no siendo la precisión métrica una característica de principal importancia, este error de  $1,15mm$  resulta insignificante.

Como se verá más adelante (suponiendo una diferencia de longitud  $\Delta\lambda = 6^\circ$ ), para  $\varphi = 32^\circ$  se tiene que:

Longitud del arco de paralelo  $\varphi = 32^\circ$  sobre la esfera:

$$\frac{\pi\Delta\lambda R \cos\varphi}{180^\circ} = \frac{\pi\,6^\circ\,6\,370\,000m \cos 32^\circ}{180^\circ} = 565\,703,06m$$

Longitud del arco de paralelo  $\theta = 32^\circ$  sobre la elipsoide:

$$\frac{\pi\Delta\lambda N \cos\varphi}{180^\circ} = \frac{\pi\,6^\circ\,6\,384\,416m \cos 32^\circ}{180^\circ} = 566\,983,3m$$

Diferencia entre esfera y elipsoide

$$\Delta L = |565\,703,06m - 566\,983,3m| = 1\,280,24m$$

Diferencia entre esfera y elipsoide

$$\Delta L \text{ en la escala } 1\,000\,000 = \frac{1\,280,24m}{1\,000\,000} = 0,00128m = 1,28mm$$

En el proceso de confección de mapas -la representación de la superficie terrestre sobre un plano- se comete el error de considerar dicha superficie de referencia como esférica en lugar de elipsoidal; pero si este error es considerado en la escala del dibujo se obtendrá un valor pequeño que, si

es menor a  $0,2mm$ , no podrá ser apreciado por la visual normal debido al límite del poder separativo de la vista. Por ejemplo, para el caso de un mapa en escala  $1 : 6\,000\,000$  resulta:

$$\text{error máximo en el mapa} = \frac{1\,151,714m}{6\,000\,000} = 0,19mm < 0,2mm$$

Para mapas de regiones extensas, de hemisferios o planisferios de uso frecuente en atlas, o a escalas muy pequeñas, el Elipsoide es reemplazado por la superficie esférica de un radio apropiado.

Cuando, aun entre los mapas, ya sea por su extensión y/o por su escala, se excede el valor del error admisible, se adopta una superficie esférica tangente a la superficie elipsóidica en el punto central P de la región a representar (Figura 1.7), cuyo radio es una función de los parámetros del elipsoide y de la latitud de dicho punto ( $R_0 = \sqrt{\rho_0 N_0}$ ), llamada *esfera promedio*. Cuanto más extensa es la región, mayor es la diferencia entre las superficies.

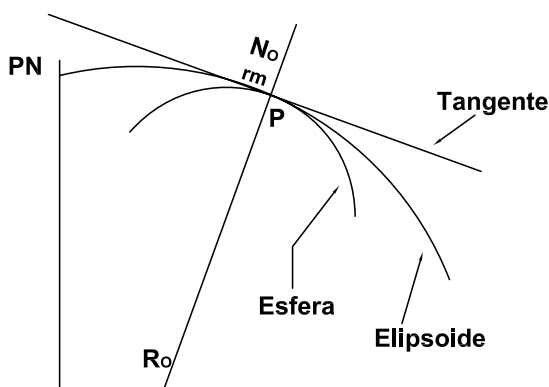


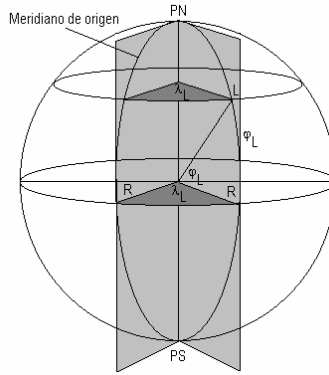
Figura 1.7: La esfera promedio y la elipsoide

## 1.4 Coordenadas geográficas

### 1.4.1 Coordenadas geográficas en la esfera

La *latitud geográfica* de un lugar es el arco de meridiano comprendido entre el Ecuador y dicho lugar. Se mide a partir del Ecuador en el sistema sexagesimal, de  $0^\circ$  a  $\pm 90^\circ$ , considerándose positiva en el hemisferio norte y negativa en el hemisferio sur (Figura 1.7). Por ejemplo,  $\varphi = +61^\circ 21' 31''$  o bien  $\varphi = 61^\circ 21' 31''$  N.





**Figura 1.8:** *Coordenadas geográficas en la esfera*

También puede definirse la latitud de un lugar como el ángulo que forma la vertical en dicho lugar con el plano del Ecuador. Se sabe que el ángulo que forma una recta con un plano es el formado por la recta con su proyección sobre el plano.

La *longitud geográfica* de un lugar es la medida angular del arco de paralelo comprendido entre un meridiano de origen (se adopta al meridiano de Greenwich) y dicho lugar. Se mide a partir del meridiano de origen en el sistema sexagesimal de  $0^\circ$  a  $\pm 180^\circ$ , siendo positivo al este y negativo al oeste (Figura 1.8).

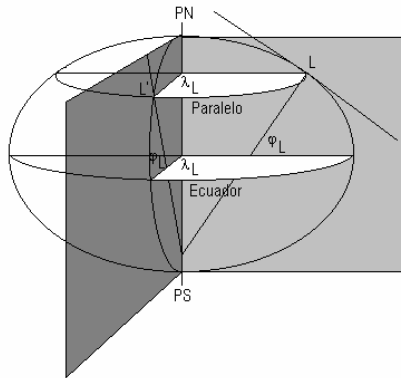
Por ejemplo,  $\lambda = +46^\circ 31' 12''$  o bien  $\lambda = 46^\circ 31' 12''$  E.

También puede definirse la longitud de un lugar como la medida del ángulo diedro cuya arista es el eje de rotación de la Tierra y sus caras son los semiplanos que contienen al meridiano de origen y el meridiano del lugar.

### 1.4.2 Coordenadas geográficas en el elipsoide

Del mismo modo que se definió para la esfera, se puede concebir un sistema de coordenadas elipsóidicas, referidas al eje de rotación de la Tierra y al Ecuador (Figura 1.9).

Cortando al elipsoide con planos cualesquiera, las secciones que se obtienen son elipses, con excepción del caso de los planos paralelos al Ecuador, es decir normales al eje de rotación, en donde las secciones son circunferencias de radio variable, llamadas paralelos elipsóidicos.



**Figura 1.9:** *Coordenadas geográficas en el elipsoide*

Dado un punto  $L$  cualquiera sobre el elipsoide, es posible trazar un plano tangente a la superficie que contiene a  $L$ . La recta que pasa por  $L$  y es perpendicular al plano tangente se denomina *normal del elipsoide* o *vertical elipsoidal*.

La *latitud elipsoidal* o *geodésica*  $\varphi_L$  del punto  $L$  se define como el ángulo entre la normal en  $L$  y el plano del Ecuador. Se mide a partir del Ecuador de  $0^\circ$  a  $\pm 90^\circ$ , siendo positiva al norte y negativa al sur del Ecuador. No se puede, como en el caso de la esfera, igualar al arco de meridiano entre el Ecuador y el punto, pues este arco es elipsoidal y no circular y entonces, no es igual al ángulo entre la normal y el plano del Ecuador.

La *longitud geodésica*  $\lambda_L$  de  $L$  es la medida del ángulo diedro entre el semiplano del meridiano que pasa por  $L$  y otro adoptado como origen. Se mide a partir del meridiano de origen de  $0^\circ$  a  $\pm 180^\circ$ , siendo positivo hacia el este y negativo hacia el oeste. También la longitud geodésica de un lugar ( $L$ ) es la medida angular del arco del paralelo geodésico de ese lugar, comprendido entre el meridiano de origen y dicho lugar.

## 1.5 Secciones normales a una superficie

### 1.5.1 Sección normal a una superficie en un punto

Es la intersección de una superficie con un plano que contiene a la perpendicular a la superficie en ese punto.

## Secciones normales en un plano

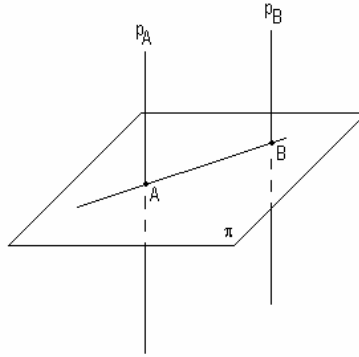


Figura 1.10: Sección normal a una superficie plana en un punto

Sean un plano  $\pi$  y un punto  $A$  del mismo. La recta perpendicular al plano  $\pi$  en  $A$  ( $p_A$ ) contiene infinitos planos perpendiculares a  $\pi$  (Figura 1.10) originando infinitas secciones normales (rectas).

Si se toman dos puntos  $A$  y  $B$  se tiene un solo plano perpendicular al plano  $\pi$ , cuya intersección con el mismo se llama *sección normal* de  $A$  que pasa por  $B$  y que contiene a  $p_B$ ; recíprocamente, partiendo desde  $B$ , se llama sección normal en  $B$  que pasa por  $A$  y que contiene a  $p_A$ . Es decir, ambas secciones normales son coincidentes.

## Secciones normales en la esfera

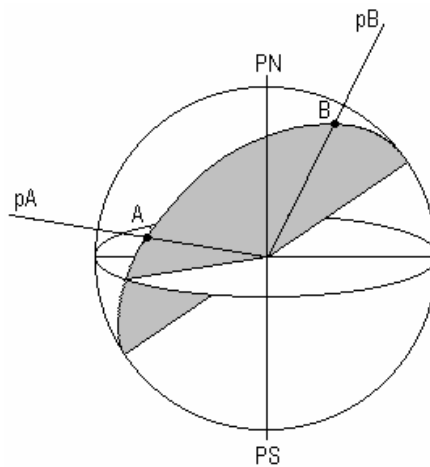


Figura 1.11: Secciones normales de la esfera

Tomando dos puntos  $A$  y  $B$  (Figura 1.11) y siendo  $p_A$  la perpendicular que pasa por  $A$ , todas las secciones normales son circunferencias máximas. Lo mismo ocurre con  $p_B$ , la perpendicular que pasa por  $B$ .

Entonces, la sección normal en  $A$  que pasa por  $B$  y que contiene a  $p_B$  es coplanar con la sección normal en  $B$  que pasa por  $A$  y que contiene a  $p_A$ . Es decir, la primera contiene al punto  $B$  y a  $p_B$  mientras que la segunda contiene al punto  $A$  y a  $p_A$ .

### Secciones normales en el elipsoide

Dado un punto  $P$  (Figura 1.12) sobre el elipsoide, existen infinitos planos que contienen a la normal al elipsoide en  $P$ . Dichos planos son llamados *planos normales* y determinan con la superficie del elipsoide curvas que se llaman *secciones normales*; todas ellas son elipses. La sección que contiene a los polos y cuyo acimut es  $0^\circ$  se denomina *sección meridiana*; aquella cuyo acimut es  $90^\circ$  se denomina *sección normal al meridiano*.

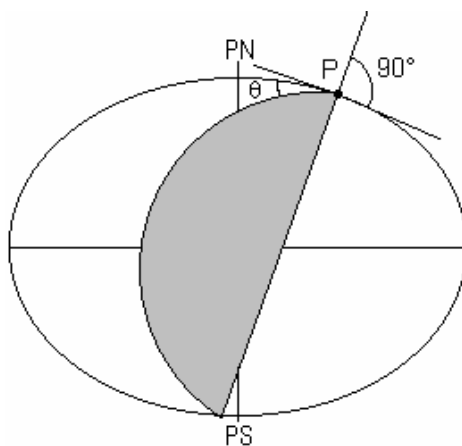


Figura 1.12: Secciones normales del elipsoide

Se llama *acimut de una sección normal* a la medida del ángulo diedro cuyas caras son los semiplanos que contienen a la sección meridiana y a la sección normal citada, siendo la arista la vertical del elipsoide en ese lugar. En la Figura 1.12, corresponde al ángulo  $\theta$ , o sea  $\theta$  es el acimut de una sección normal.

Sean  $p_A$  y  $p_B$  las normales al elipsoide en los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente (Figura 1.13). Por la normal  $p_A$  pasan infinitos planos que cortan

al elipsoide según elipses llamadas secciones normales. Una de éstas pasa por el punto  $B(s_{AB})$ . El plano que origina  $s_{AB}$  contiene la normal  $p_A$  y el punto  $B$  pero no a la normal en  $B(p_B)$ , salvo que  $A$  y  $B$  estuviesen en el Ecuador o en un mismo meridiano. Recíprocamente, por la normal  $p_B$  pasan infinitos planos que determinan secciones normales. Una de éstas pasa por el punto  $A(s_{BA})$ . El plano que origina  $s_{BA}$  contiene la normal  $p_B$  y el punto  $A$  pero no a la normal en  $A(p_A)$ , salvo que  $A$  y  $B$  estuviesen en el Ecuador o en un mismo meridiano. Recíprocamente, por la normal  $p_A$  pasan infinitos planos que determinan secciones normales. Una de éstas pasa por el punto  $B(s_{AB})$ . El plano que origina  $s_{AB}$  contiene la normal  $p_A$  y el punto  $B$  pero no a la normal en  $B(p_B)$ , salvo que  $A$  y  $B$  estuviesen en el Ecuador o en un mismo meridiano. Recíprocamente, por la normal  $p_B$  pasan infinitos planos que determinan secciones normales. Una de éstas pasa por el punto  $A(s_{BA})$ .

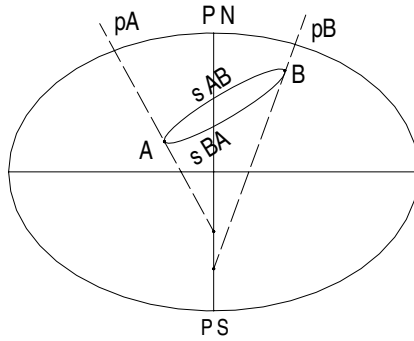


Figura 1.13: Normales al elipsoide.

### 1.5.2 Radios de curvatura

El *radio de curvatura* (Figura 1.14) en un punto de una curva dada es el radio de la circunferencia que tiene un arco infinitesimal  $ds$  común con la curva en dicho punto.

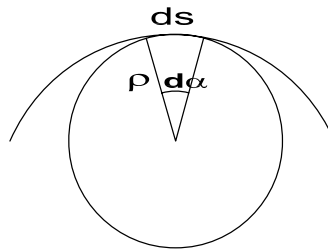


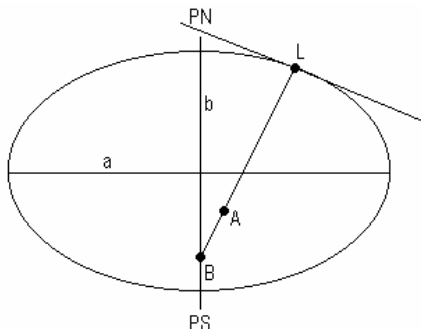
Figura 1.14

$$ds = \rho d\alpha$$

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$$

donde  $d\alpha$  está expresado en radianes.

De los infinitos radios de curvatura de las secciones normales en un punto del elipsoide, habrá uno de valor máximo y otro de valor mínimo. Se llaman *radios principales de curvatura* (Figura 1.15), y son:



**Figura 1.15:** Radios principales de curvatura.

$\rho$ : radio de curvatura del meridiano o sección meridiana en un punto  $L$ ; corresponde al acimut  $0^\circ$  y es el radio menor ( $\rho = LA$ ).

$N$ : radio de curvatura de la sección normal al meridiano; corresponde al acimut de  $90^\circ$ , y es el radio mayor. Está comprendido entre el lugar y la intersección con el eje de rotación. Se denomina gran normal ( $N = LB$ ).

Estos radios de curvatura tienen un papel importante en Cartografía, en las fórmulas de la proyección Gauss-Kruger, UTM, etcétera.

Como ya se ha dicho:

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}},$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}, \quad e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$$

donde:

$a$ : semieje mayor del elipsoide de Hayford (6 378 388m)

$b$ : semieje menor del elipsoide de Hayford (6 356 912m)

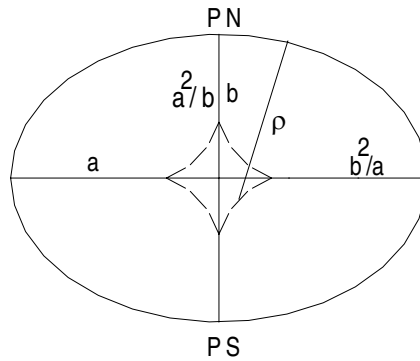
$e$ : primera excentricidad

$e^2$ : cuadrado de la primera excentricidad (0,00672265)

$e'$ : segunda excentricidad

$e'^2$ : cuadrado de la segunda excentricidad (0,0067...)

Algunos casos particulares que resultan de interés son:



**Figura 1.16:** La línea de trazos representa los puntos extremos de  $\rho$  (evoluta)

- en el Ecuador, con  $\varphi = 0^\circ$ , resulta:

$$\rho = a(1 - e^2) = a \left[ 1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right] = \frac{b^2}{a} \text{ y } N = a$$

- en el Polo, con  $\varphi = 90^\circ$ :  $\rho = \frac{a}{(1 - e^2)} = \frac{a^2}{b}$  y

$$N = \frac{a}{(1 - e^2)} = \frac{a^2}{b}; \text{ evidentemente } \rho = N$$

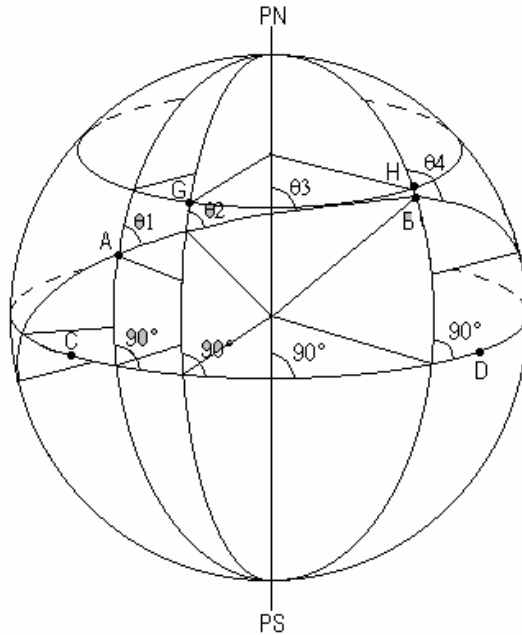
Adoptando las dimensiones del elipsoide de Hayford, se calcula:

- en el Ecuador, con  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\rho = \frac{b^2}{a} = 6\,335\,508m$  y  
 $N = a = 6\,378\,388m$
- en el Polo, con  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\rho = N = \frac{a^2}{b} = 6\,399\,936m$ .

## 1.6 Líneas ortodrómicas y loxodrómicas en la esfera.

### 1.6.1 Línea ortodrómica.

La línea ortodrómica (Figura 1.17) entre dos puntos de la superficie terrestre es la distancia más corta entre los mismos, medida sobre dicha superficie, verificándose que es el arco de circunferencia máxima que pasa por esos dos puntos. La línea corta a los meridianos con distintos ángulos, por lo tanto esa línea tiene diferentes acimutes ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  y  $\theta_4$  en la Figura 1.17). En el caso del Ecuador, los acimutes son constantes en cada intersección con los meridianos debido a que ésta se produce en forma normal.



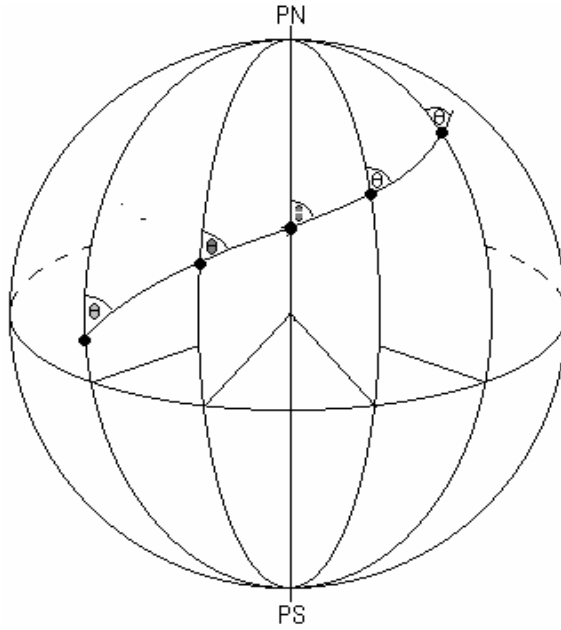
**Figura 1.17:** Línea ortodrómica.

El Ecuador es una línea ortodrómica por definición de circunferencia máxima. Es una línea loxodrómica debido a que forma ángulos constantes en la intersección con los meridianos (todos de  $90^\circ$ ). Un meridiano cualquiera también es una línea ortodrómica (pues es un arco de circunferencia máxima). Un arco de paralelo no es una línea ortodrómica pues no es un arco de circunferencia máxima.

### 1.6.2 Línea loxodrómica

La línea loxodrómica (Figura 1.18) entre dos puntos de la superficie terrestre es aquella que partiendo de uno de ellos se dirige hacia el otro intersecando a los meridianos siempre con el mismo ángulo, es decir tiene el mismo acimut  $\theta$  en todas las intersecciones con las meridianos. La línea loxodrómica no es plana sino alabeada. Se demuestra que es una línea espiral, que si se prolongara llegaría a coincidir casi con el Polo. Es decir, es una línea asintótica con el Polo. Si tenemos en cuenta la navegación, la línea loxodrómica tiene como desventaja que su recorrido es mayor que la ortodrómica, pero tiene la ventaja de mantener constante el acimut.





**Figura 1.18:** Línea loxodrómica.

Para recorridos cortos se utiliza la línea loxodrómica, ya que el acimut del recorrido de la nave cambia sólo por efecto de perturbaciones climáticas (vientos, oleajes, etc.) y el camino recorrido es muy poco mayor que la ortodrómica.

En recorridos largos, la diferencia entre ambas líneas es muy grande; para proyectar el recorrido de la nave se hace una combinación de las dos.

**Observaciones:**

1. Si los dos puntos pertenecen a un mismo paralelo, el arco  $GH$  (ver Figura 1.17) del mismo comprendido entre los dos puntos no será la línea ortodrómica, pues el paralelo es una circunferencia menor (es una línea loxodrómica), siendo el acimut en todos sus puntos de  $90^\circ$ .
2. Si los dos puntos no pertenecen al mismo paralelo ni al mismo meridiano (puntos  $A$  y  $B$  de la Figura 1.17), la línea ortodrómica será el arco de circunferencia máxima que pasa por esos dos puntos.

3. En la proyección gnomónica las líneas ortodrómicas se proyectan según rectas y las loxodrómicas son curvas (Capítulo 3). En la proyección Mercator las líneas loxodrómicas se proyectan según rectas y las ortodrómicas son curvas (Capítulo 4).

### 1.6.3 Cálculo de la longitud de una línea ortodrómica cualquiera en la esfera y de su acimut en un punto

La longitud de una línea ortodrómica se obtiene aplicando el primer caso del teorema del coseno (Figura 1.19). Se deduce que:

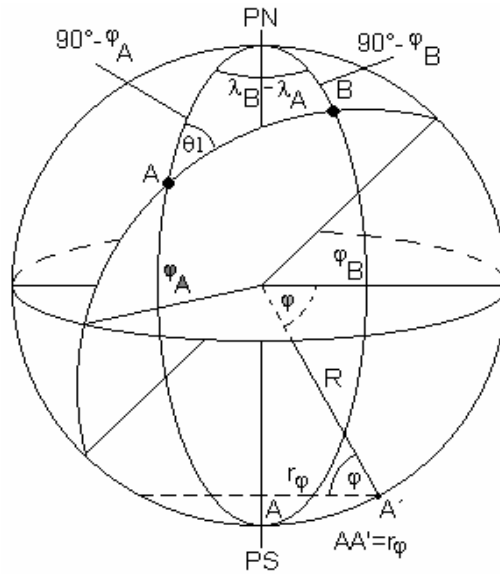


Figura 1.19: Longitud de la línea ortodrómica de A a B.

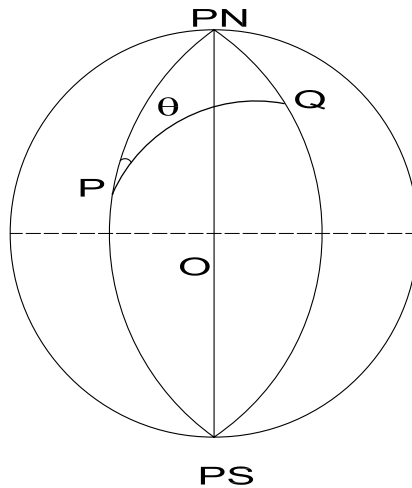
$$\cos AB = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos(\lambda_B - \lambda_A) \quad (1.4)$$

Esta fórmula es completamente general, es decir válida para cualquier lugar siempre que se respete la convención de signos para la latitud ( $\varphi$ ) y la longitud ( $\lambda$ ) de los puntos extremos de la línea ortodrómica.  $AB$  es la medida angular del arco (en sistema sexagesimal), de donde resulta que:

$$\overline{AB} = \frac{AB\pi R}{180^\circ}$$

donde  $\overline{AB}$  es la medida lineal del arco expresada en la misma unidad que  $R$  (kilómetros o metros).

El *acimut*  $\theta$  de un arco cualquiera  $PQ$  sobre una superficie en un punto (por ejemplo  $P$ ) es el ángulo que forma en  $P$  la dirección norte con la línea citada, medido en el sentido de las agujas del reloj (Figura 1.20).



**Figura 1.20:** *Acimut de PQ en P.*

Para el cálculo del acimut de arranque, o sea el acimut de  $AB$  en el punto  $A$ , la deducción de la fórmula se realiza mediante el teorema de la cotangente (Figura 1.19), llegándose a que:

$$\operatorname{tg} \varphi_B = \frac{\operatorname{sen} \varphi_A \cos(\lambda_B - \lambda_A) + \operatorname{sen}(\lambda_B - \lambda_A) \operatorname{cotg} \theta_1}{\cos \varphi_A}$$

De aquí se despeja  $\operatorname{cotg} \theta_1$ , obteniéndose la amplitud del ángulo buscado:

$$\operatorname{cotg} \theta_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_B \cos \varphi_A - \operatorname{sen} \varphi_A \cos(\lambda_B - \lambda_A)}{\operatorname{sen}(\lambda_B - \lambda_A)} \quad (1.5)$$

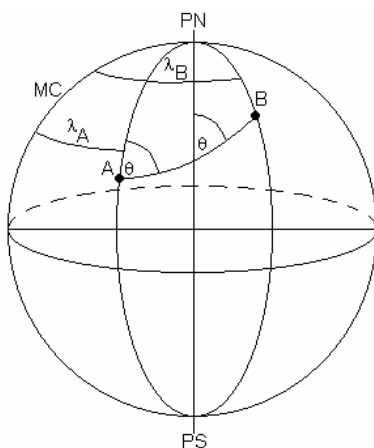
También puede calcularse la medida de  $\theta_1$  utilizando el teorema del seno:

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_B)} = \frac{\operatorname{sen}(\lambda_B - \lambda_A)}{\operatorname{sen} AB}$$

de donde se obtiene que:

$$\operatorname{sen} \theta_1 = \frac{\cos \varphi_B \operatorname{sen}(\lambda_B - \lambda_A)}{\operatorname{sen} AB} \quad (1.6)$$

Por medio de la fórmula (1.5) se calcula  $\theta_1$  en función de los datos originales, siendo preferible por ello. En cambio, a través de la fórmula (1.6) se calcula  $\theta_1$  en función de la amplitud del arco  $AB$ , calculado previamente en (1.4) y, por lo tanto, cualquier error en ese cálculo se propaga al de  $\theta_1$ .



**Figura 1.21:** Acimut de PQ en P.

**Ejemplo:** Sean los puntos  $A(\varphi_A=15^\circ, \lambda_A=20^\circ)$  y  $B(\varphi_B=45^\circ, \lambda_B=70^\circ)$ :

$$\begin{aligned} \cos AB &= \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos(\lambda_B - \lambda_A) \\ &= \sin 15^\circ \sin 45^\circ + \cos 15^\circ \cos 45^\circ \cos(70^\circ - 20^\circ) \end{aligned}$$

$\cos AB = 0,622044803$  y de aquí  $AB = 51^\circ 32' 4''$ . Entonces:

$$\overline{AB} = \frac{AB\pi R}{180^\circ} = \frac{51^\circ 32' 4'' \times \pi \times 6\,370\text{km}}{180^\circ} = 5\,729,461\text{km}.$$

El acimut se calcula a través de la fórmula (1.5):

$$\begin{aligned} \cotg \theta_1 &= \frac{\tg \varphi_B \cos \varphi_A - \sin \varphi_A \cos(\lambda_B - \lambda_A)}{\sin(\lambda_B - \lambda_A)} \\ &= \frac{\tg 45^\circ \cos 15^\circ - \sin 15^\circ \cos(70^\circ - 20^\circ)}{\sin(70^\circ - 20^\circ)} \\ &= 1,043751649 \end{aligned}$$

y de allí:  $\theta_1 = 43^\circ 46' 25''$ .

### 1.6.4 Cálculo de la longitud y del acimut de una línea loxodrómica cualquiera en la esfera

Saliendo desde  $A$  con un acimut  $\theta$ , éste debe conservarse en todos sus puntos. Es decir, debe cortar a los distintos meridianos que interseca manteniendo el valor de  $\theta$ . Por lo tanto, no tiene sentido hablar de acimut de salida e intermedios.

Para calcular el valor de  $\theta$  se debe conocer la ubicación de puntos  $A$  y  $B$  por sus coordenadas geográficas, como se deduce a continuación.

Considerando un arco infinitesimal  $ds$  de la línea loxodrómica  $AB$  y siendo  $\theta$  el acimut de la línea loxodrómica, en el triángulo  $CDE$  en la Figura 1.22 se tiene:

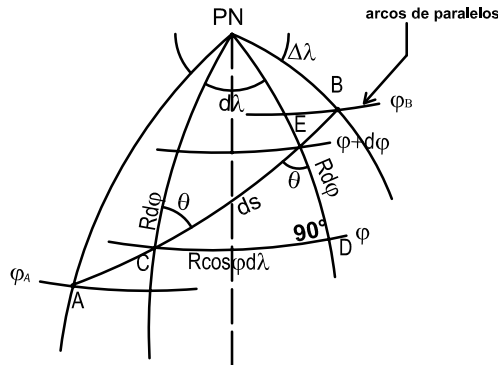


Figura 1.22: Línea loxodrómica AB.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{R \cos \varphi d \lambda}{R d \varphi}$$

de donde  $d \lambda = \operatorname{tg} \theta \frac{d \varphi}{\cos \varphi}$ . Integrando entre  $A$  y  $B$ :

$$\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d \lambda = \operatorname{tg} \theta \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \frac{d \varphi}{\cos \varphi}$$

Resolviendo la integral:

$$\lambda \Big|_{\lambda_A}^{\lambda_B} = \operatorname{tg} \theta \left[ \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right]_{\varphi_A}^{\varphi_B}$$

$$\lambda_B - \lambda_A = \operatorname{tg} \theta \left[ \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_B}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_A}{2} \right) \right]$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\lambda_B - \lambda_A}{\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_B}{2}\right) - \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_A}{2}\right)} \quad (1.7)$$

De aquí se obtiene el valor de  $\theta$ , el acimut de la línea loxodrómica. En el triángulo elemental de la Figura 1.22 se ve que:

$$ds = \frac{Rd\varphi}{\cos \theta}$$

Integrando entre  $A$  y  $B$  esta expresión:  $\int_A^B ds = \frac{R}{\cos \theta} \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} d\varphi$ , resulta:

$$\overline{AB}_{lox} = \frac{R}{\cos \theta} (\varphi_B - \varphi_A) \quad (1.8)$$

donde  $\overline{AB}_{lox}$  es la longitud de la línea loxodrómica. Algunos casos particulares de la loxodrómica son:

- Si  $\varphi_A = \varphi_B$ , en la fórmula (1.7) resulta  $\operatorname{tg} \theta \rightarrow \infty$  y, por lo tanto,  $\theta = 90^\circ$  ( $AB$  es un arco de paralelo).
- Si  $\lambda_A = \lambda_B$ , en la fórmula (1.7) resulta  $\operatorname{tg} \theta = 0$  y, por lo tanto,  $\theta = 0^\circ$  ( $AB$  es un arco de meridiano).

**Ejemplo:** Sean los puntos  $A(\varphi_A=15^\circ, \lambda_A=20^\circ)$  y  $B(\varphi_B=45^\circ, \lambda_B=70^\circ)$ :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(70^\circ - 20^\circ) \frac{\pi}{180^\circ}}{\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{45^\circ}{2}\right) - \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{15^\circ}{2}\right)}$$

De aquí se obtiene  $\theta = 54^\circ 45' 33''$ .

Entonces:

$$\overline{AB} = \frac{6\,370\,km(45^\circ - 15^\circ) \frac{\pi}{180^\circ}}{\cos 54^\circ 45' 33''} = 5\,780,297\,km$$

Se verifica que la longitud de línea ortodrómica de  $A$  a  $B$  es menor que la longitud de línea loxodrómica de  $A$  a  $B$ :

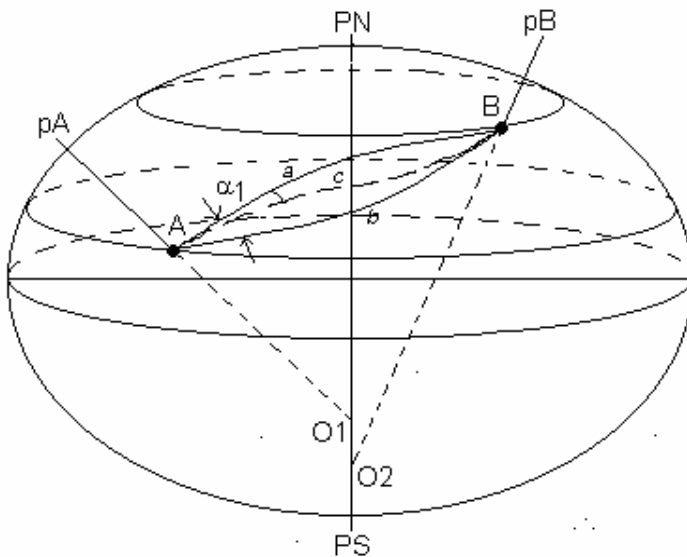
$$5\,729,461\,km < 5\,780,297\,km.$$

## 1.7 Líneas geodésicas y loxodrómicas en el elipsoide

### 1.7.1 Líneas geodésicas

En el elipsoide, las líneas de menor longitud entre dos puntos dados se llaman *geodésicas* y son curvas alabeadas (o sea que no están contenidas en un plano).

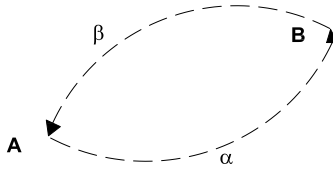
En un punto  $A$  se tiene la normal  $p_A$ , por la cual pasan infinitos planos que originan sobre el elipsoide secciones normales, una de las cuales pasa por el punto  $B$ , pero no contiene a la normal  $p_B$  que pasa por  $B$  (Figura 1.23). En el punto  $B$  se tiene la normal  $p_B$ , por la cual pasan infinitos planos que originan sobre el elipsoide secciones normales, una de las cuales pasa por el punto  $A$ , pero no contiene a  $p_A$ . En el primer caso, la sección normal (a) está determinada por el plano que contiene a  $p_A$  y al eje terrestre, que se cortan en  $O_1$ . En el segundo caso, la sección normal (b) está determinada por el plano que contiene a  $p_B$  y al eje terrestre, que se cortan en  $O_2$ . Estas dos secciones,  $A$  a  $B$  y  $B$  a  $A$ , reciben el nombre de



**Figura 1.23:** Línea geodésica.

Si se hace estación en el punto  $A$  y se coloca el teodolito de forma que su eje principal coincida con la normal al elipsoide (o normal geodésica), esta normal y el punto  $B$  definirán un plano, normal en  $A$  al elipsoide <sup>4</sup> y que corta a esta superficie según la curva  $\alpha$  (Figura 1.24).

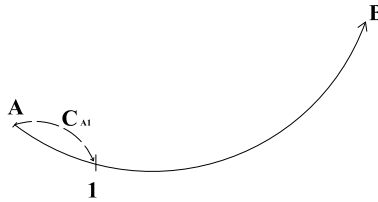
<sup>4</sup> En rigor, el eje principal del teodolito, luego del calaje con el nivel de burbuja, coincide con la normal al geoide pero se la considera coincidente con la normal al elipsoide con un error despreciable (desviación de la vertical) para fines cartográficos.



**Figura 1.24:** Curvas determinadas por las secciones normales.

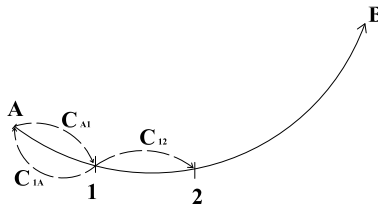
Luego, cuando se observa  $A$  desde  $B$ , el plano de la sección normal en  $B$  que pasa por  $A(B\beta A)$  no coincidirá con el de la sección en  $A(A\alpha B)$ . Este plano, normal en  $B$  al elipsoide y que pasa por  $A$ , corta al elipsoide según la línea  $\beta$ , que no coincide con la  $\alpha$ .

Si se marca un punto 1 sobre la línea  $\alpha$ , el plano determinado por la normal al elipsoide en  $A$  y el punto 1 corta al elipsoide según la curva  $C_{A1}$  (Figura 1.25).



**Figura 1.25:** Determinación de la línea geodésica (a).

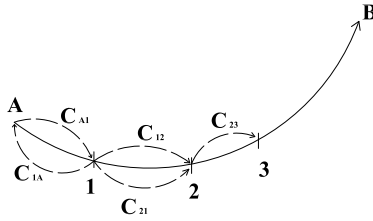
Haciendo estación con el teodolito en el punto 1, se dirige la visual al punto  $A$ , girando a continuación el aparato alrededor del eje secundario se visa al punto 2. El plano descrito por el eje de colimación del anteojo contiene la normal en 1; no es otra cosa que el plano normal al elipsoide que corta a esta superficie en la línea  $C_{12}$  (Figura 1.26).



**Figura 1.26:** Determinación de la línea geodésica (b).

Poniendo el teodolito en 2, se dirige el anteojo hacia 1 y, en forma análoga a la realizada antes, se observa un nuevo punto, 3 (Figura 1.27).





**Figura 1.27:** Determinación de la línea geodésica ( $c$ ).

Supóngase que se repite este proceso hasta llegar a  $B$  y obsérvese que las secciones normales recíprocas  $C_{A1}$  y  $C_{1A}$ ,  $C_{12}$  y  $C_{21}$ , etc., que unen dos puntos consecutivos no coinciden.

Si el número de puntos que se considera aumenta indefinidamente de manera tal que dos puntos consecutivos tiendan a confundirse, las dos secciones normales recíprocas entre dos puntos consecutivos tenderán a confundirse también y, en el límite, coincidirán. La línea que queda así definida es la geodésica.

En la Figura 1.23, la geodésica está representada por la curva  $AcB$ . En un plano, la distancia más corta entre dos puntos es la recta; en una esfera, es un arco de circunferencia máxima (línea ortodrómica) y en el elipsoide es, en general, una línea (geodésica) de doble curvatura, es decir, alabeada.

Este detalle, junto con la diferencia de longitud de las secciones normales que pertenecen a los dos puntos  $A$  y  $B$ , comienza a considerarse cuando la longitud supera los 1 000km. Por lo tanto, en los problemas corrientes de la Geodesia estos detalles no se consideran y se supone que ambas secciones normales son iguales entre sí y con la geodésica correspondiente. El ángulo que forman ambas secciones normales (Figura 1.23) no se toma en cuenta dentro del orden de los 100km, ya que se considera que es muy pequeño. Para tener una idea de su magnitud digamos que para 300km es de  $0,5''$  y para 600km es de  $2''$ . Igual criterio se adopta para la diferencia de longitud entre ambas secciones normales. Por lo tanto, en la práctica se supone que ambas secciones normales coinciden entre sí y con la geodésica entre esos dos puntos.

Si los puntos  $A$  y  $B$  están en el mismo meridiano (Figura 1.28), las

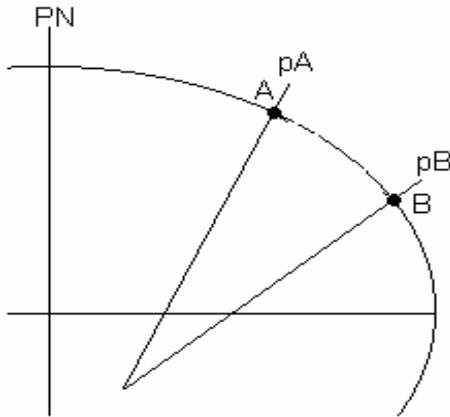


Figura 1.28: Puntos sobre un mismo meridiano.

normales en  $A$  y en  $B$  serán coplanares y, por lo tanto, la sección normal que pasa por  $B$  coincidirá con la sección normal en  $B$  que pasa por  $A$  (arco de meridiano que pasa por  $A$  y por  $B$ , que es la línea geodésica). Por lo tanto, un arco de meridiano es una línea geodésica.

Si los puntos  $A$  y  $B$  están en un mismo paralelo, las normales en ambos se cortarían en un mismo punto del eje de rotación de la Tierra (Figura 1.29); por lo tanto, las secciones normales coincidirán pues ambas normales son coplanares. Pero la sección normal  $AB$  no coincide con el arco de paralelo  $AB$ , puesto que el paralelo está determinado por un plano normal al eje de rotación, mientras que la sección normal  $AB$  se produce por el plano determinado por  $p_A$  y  $p_B$ , que no coincide con el plano del paralelo.

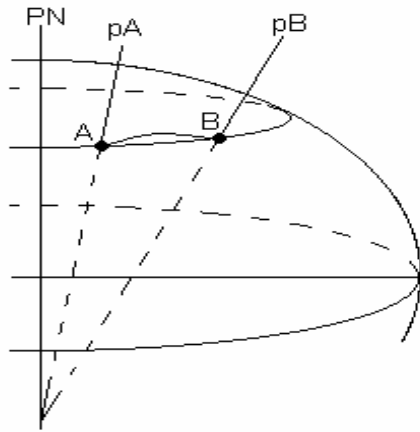
### 1.7.2 Longitud de la línea geodésica entre dos puntos $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$ y $P_2(\varphi_2, \lambda_2)$ del elipsoide

Se demuestra que  $P_1P_2$  es:

$$a \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ \frac{(1-e^2)^2}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^3} + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 (1-e^2 \sin^2 \varphi)}{[(1-e^2)(\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1 - e^2(\varphi_2 - \varphi_1))]^2 \cos^2 \varphi} \right\}^{\frac{1}{2}} d\varphi$$

Esta ecuación es completamente general, pero el cálculo de la integral es de tal complejidad que la misma debe integrarse numéricamente.

Por esta razón se calcula la longitud de la línea geodésica considerando una esfera ideal tangente al elipsoide en el punto central de la extensión

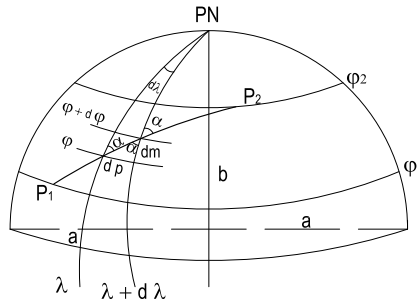


**Figura 1.29:** Puntos sobre un mismo paralelo.

en que se encuentra dicha línea geodésica. Para ello, el radio de la esfera se calcula mediante la fórmula:

$$R_0 = \sqrt{\rho_0 N_0}$$

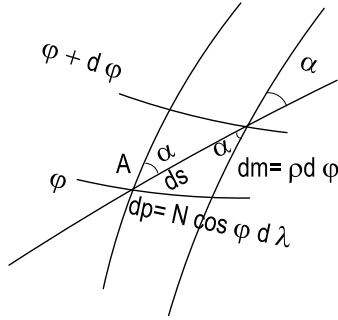
### 1.7.3 Línea loxodrómica entre dos puntos sobre el elipsoide



**Figura 1.30:** Línea loxodrómica entre dos puntos sobre el elipsoide.

La línea loxodrómica es una curva (línea  $P_1P_2$ ) que interseca a los meridianos con el mismo acimut (Figura 1.30). Observando la Figura 1.31 se ve que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dp}{dm} = \frac{N \cos \varphi d\lambda}{\rho d\varphi}$$



**Figura 1.31:** Detalle de la figura anterior.

De aquí se obtiene que:

$$d\lambda = \operatorname{tg} \alpha \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi}$$

donde  $\rho$  es el radio de curvatura del meridiano en el punto  $P_1$  y  $N$  es la gran normal. Reemplazándolos por las expresiones dadas en las fórmulas (1.1) y (1.2):

$$d\lambda = \operatorname{tg} \alpha \frac{\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{a}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \cos \varphi} d\varphi = \operatorname{tg} \alpha \frac{(1-e^2)d\varphi}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \cos \varphi}$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$\int_{P_1}^{P_2} d\lambda = \operatorname{tg} \alpha \int_{P_1}^{P_2} \frac{(1-e^2)d\varphi}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \cos \varphi}$$

Calculando ahora las integrales resulta:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \operatorname{tg} \alpha \ln \left[ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1-e \operatorname{sen} \varphi}{1-e \cos \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

pudiendo despejar de allí el valor de  $\operatorname{tg} \alpha$ , que permite obtener el valor de  $\alpha$ , el acimut de la línea loxodrómica:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \left[ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1-e \operatorname{sen} \varphi}{1-e \cos \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}}$$

Por otra parte, en la Figura 1.31 se observa que  $\cos \alpha = \frac{\rho d\varphi}{ds}$ , de donde se obtiene que  $ds = \frac{\rho d\varphi}{\cos \alpha}$ .

Resolviendo esta ecuación diferencial se obtiene la longitud de la línea loxodrómica entre  $P_1$  y  $P_2$ :

$$\int_{P_1}^{P_2} ds = \frac{1}{\cos \alpha} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho d\varphi = \frac{1}{\cos \alpha} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi$$

Entonces la longitud de la línea loxodrómica entre  $P_1$  y  $P_2$  es:

$$s_{P_1 P_2} = \frac{\text{longitud arco de meridiano (entre } \varphi_1 \text{ y } \varphi_2)}{\cos \alpha}$$

## 1.8 Longitud del Ecuador, de paralelos y de meridianos en la esfera

### 1.8.1 Longitud del Ecuador

El Ecuador es una circunferencia máxima de la esfera terrestre cuya longitud estará dada por:

$$\text{Longitud Ecuador} = 2\pi R = 2\pi \times 6\,370\text{km} = 40\,023,890\text{km}$$

$$\text{Longitud } 1^\circ \text{ Ecuador} = \frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi \times 6\,370\text{km}}{180} = 111,177\text{km}$$

$$\text{Longitud } 1' \text{ Ecuador} = \frac{2\pi R}{360 \times 60} = \frac{\pi \times 6\,370\text{km}}{180 \times 60} = 1,853\text{km}$$

$$\text{Longitud } 1'' \text{ Ecuador} = \frac{\pi \times 6\,370\text{km}}{180 \times 60 \times 60} = 0,031\text{km}$$

### 1.8.2 Longitud de un paralelo

La longitud de cada paralelo está determinada por su latitud (Figura 1.32):

$$\text{Longitud paralelo} = 2\pi r_\varphi \text{ siendo } r_\varphi = R \cos \varphi; \text{ por lo tanto:}$$

$$\text{Longitud paralelo} = 2\pi R \cos \varphi.$$

También puede decirse que es igual al producto de la longitud del Ecuador por el coseno de la latitud.

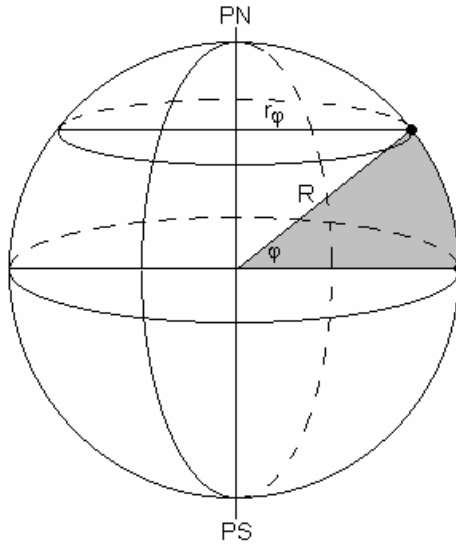
$$\text{Longitud } 1^\circ \text{ paralelo} = \frac{2\pi R \cos \varphi}{360} = \frac{\pi \times 6\,370\text{km} \cos \varphi}{180}$$

$$\text{Longitud } 1' \text{ paralelo} = \frac{\pi R \cos \varphi}{180 \times 60}$$

$$\text{Longitud } 1'' \text{ paralelo} = \frac{\pi R \cos \varphi}{180 \times 60 \times 60}$$

### 1.8.3 Longitud de un meridiano

$$\text{Longitud meridiano} = \pi R = \pi \times 6\,370\text{km} = 20\,011,945\text{km}$$



**Figura 1.32:** Longitudes sobre la esfera.

$$\text{Longitud } 1^\circ \text{ meridiano} = \frac{\pi R}{180} = \frac{\pi \times 6\,370\text{km}}{180} = 111,177\text{km}$$

$$\text{Longitud } 1' \text{ meridiano} = \frac{\pi R}{180 \times 60} = \frac{\pi \times 6\,370\text{km}}{180 \times 60} = 1,85296\text{km}$$

$$\text{Longitud } 1'' \text{ meridiano} = \frac{\pi R}{180 \times 60 \times 60} = \frac{\pi \times 6\,370\text{km}}{180 \times 60 \times 60} = 0,0308825\text{km}$$

## 1.9 Longitud del Ecuador, de los paralelos y de los meridianos en el elipsoide

### 1.9.1 Longitud del Ecuador

El Ecuador es una circunferencia cuyo radio es el semieje mayor del elipsoide. Su longitud se obtiene a través de la siguiente fórmula:

$$\text{Longitud Ecuador} = 2\pi a$$

$$\text{Longitud Ecuador} = 2 \times \pi \times 6\,378,388\text{km}$$

$$\text{Longitud Ecuador} = 40\,076,593\text{km} \text{ (Elipsoide de Hayford)}$$

$$\text{Longitud } 1^\circ \text{ Ecuador} = \frac{2\pi a}{360} = \frac{\pi a}{180}$$

$$\text{Longitud } 1^\circ \text{ Ecuador} = \frac{\pi \times 6\,378,388\text{km}}{180} = 111,323\text{km}$$

$$\text{Longitud } 1' \text{ Ecuador} = \frac{2\pi a}{360 \times 60} = 1,855\text{km}$$

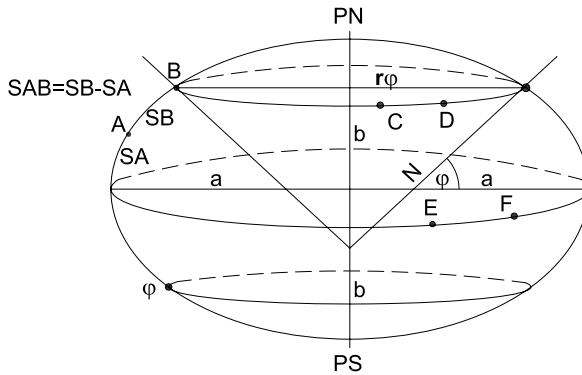


Figura 1.33: Longitud sobre el elipsoide.

$$\text{Longitud } 1'' \text{ Ecuador} = \frac{2\pi a}{360 \times 60 \times 60} = 0,031 \text{ km}$$

Longitud de un arco de Ecuador:  $EF = a\Delta\lambda_{EF} = a(\lambda_F - \lambda_E)$ , donde  $\Delta\lambda_{EF}$  es la medida del arco de Ecuador entre E y F (medida en radianes).

### 1.9.2 Longitud de un paralelo

La longitud de cada paralelo está dada de acuerdo con la latitud del mismo (Figura 1.33).

$$\text{Longitud paralelo} = 2\pi r_\varphi = 2\pi N \cos \varphi \text{ ya que } r_\varphi = N \cos \varphi$$

$$\text{Longitud } 1^\circ \text{ paralelo} = \frac{2\pi N \cos \varphi}{360} = \frac{\pi N \cos \varphi}{180}$$

$$\text{Longitud } 1' \text{ paralelo} = \frac{2\pi N \cos \varphi}{360 \times 60} = \frac{\pi N \cos \varphi}{180 \times 60}$$

$$\text{Longitud de un arco de paralelo: } CD = r_\varphi \Delta\lambda_{CD} = r_\varphi (\lambda_D - \lambda_C) = N \cos \varphi (\lambda_D - \lambda_C)$$

### 1.9.3 Longitud de un arco de meridiano a partir del Ecuador

Hay que tener en cuenta la variación de los radios de curvatura; por medio de cálculo integral se deduce que la longitud del mismo responde a la siguiente fórmula:

$$S = \alpha\varphi + \beta \text{ sen } 2\varphi + \gamma \text{ sen } 4\varphi + \delta \text{ sen } 6\varphi + \epsilon \text{ sen } 8\varphi$$

### 1.9.4 Longitud de un arco de meridiano a partir del Polo Sur

En este caso, se deduce (Ver Anexo A) que la longitud puede calcularse usando la fórmula:

$$S = \alpha(90^\circ + \varphi) + \beta \operatorname{sen} 2\varphi + \gamma \operatorname{sen} 4\varphi + \delta \operatorname{sen} 6\varphi + \epsilon \operatorname{sen} 8\varphi$$

En ambas fórmulas  $\varphi$  se expresa en grados sexagesimales y, para los parámetros del Elipsoide Internacional de Hayford ( $a = 6\,378,388\text{km}$ ;  $b = 6\,356,912\text{km}$ ), los coeficientes resultan iguales a:

$$\begin{aligned}\alpha &= 111,136536655\text{km}/^\circ \\ \beta &= -16,107034679\text{km} \\ \gamma &= 0,016976211\text{km} \\ \delta &= -0,000022266\text{km} \\ \epsilon &= 0,000000032\text{km} \\ a &= 6378,388\text{km} \\ b &= 6356,912\text{km}\end{aligned}$$

#### Ejemplos:

1. Dado un punto  $P$  en el paralelo  $\varphi = 37^\circ N$  sobre el elipsoide, se calcularán la gran normal ( $N$ ), el radio de curvatura del meridiano ( $\rho$ ) y el radio del paralelo ( $r_\varphi$ ).

$$\begin{aligned}N &= \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6\,378,388\text{km}}{(1 - 0,00672265 \operatorname{sen}^2 37^\circ)^{\frac{1}{2}}} = 6\,386,167\text{km} \\ \rho &= \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6\,378,388\text{km}(1 - 0,00672265)}{(1 - 0,00672265 \operatorname{sen}^2 37^\circ)^{\frac{3}{2}}} = 6\,358,717\text{km} \\ r_\varphi &= N \cos \varphi = 6\,386,167\text{km} \cos 37^\circ = 5\,100,220\text{km}\end{aligned}$$

2. Se calculará la longitud de un arco del paralelo  $\varphi = 43^\circ$ , de  $\Delta\lambda = 10^\circ$ , sobre el elipsoide.

$$\begin{aligned}r_\varphi &= N \cos \varphi = \frac{a \cos \varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6\,378,388\text{km} \cos 43^\circ}{(1 - 0,00672265 \operatorname{sen}^2 43^\circ)^{\frac{1}{2}}} \\ &= 4\,672,168\text{km} \\ d &= r_\varphi \Delta\lambda = 4\,672,168\text{km} 10^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = 815,447\text{km}\end{aligned}$$



3. En el elipsoide se desea calcular la longitud del arco de meridiano comprendido entre  $\varphi_1 = 23^\circ$  y  $\varphi_2 = 47^\circ$ . Para ello se calcula la longitud del arco de meridiano desde el Ecuador al punto de latitud  $\varphi_2$  y se resta la distancia del Ecuador al punto de latitud  $\varphi_1$ .

$$S_{\varphi_2} = \alpha\varphi_2 + \beta \operatorname{sen} 2\varphi_2 + \gamma \operatorname{sen} 4\varphi_2 + \delta \operatorname{sen} 6\varphi_2 + \dots$$

$$\begin{aligned} S_{47^\circ} &= 111,136536655 \frac{km}{^\circ} \times 47^\circ - 16,107034679 km \times \operatorname{sen}(2 \times 47^\circ) + \\ &0,016976211 km \times \operatorname{sen}(4 \times 47^\circ) - 0,000022266 km \times \operatorname{sen}(6 \times 47^\circ) = \\ &5207,352 km \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{23^\circ} &= 111,136536655 \frac{km}{^\circ} \times 23^\circ - 16,107034679 km \times \operatorname{sen}(2 \times 23^\circ) + \\ &0,016976211 km \times \operatorname{sen}(4 \times 23^\circ) - 0,000022266 km \times \operatorname{sen}(6 \times 23^\circ) = \\ &2544,571 km \end{aligned}$$

$$S_{47^\circ} - S_{23^\circ} = 2662,781124 km$$

4. Dados los puntos  $P_1(\varphi_1=20^\circ N; \lambda_1=160^\circ W)$  y  $P_2(\varphi_2=47^\circ N; \lambda_2=0^\circ)$  sobre el elipsoide, se desea hallar la longitud de la línea geodésica  $P_1P_2$ .

Se aproximará la longitud de dicha línea por la longitud de la línea ortodrómica entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$  considerados sobre una esfera de radio  $R_0 = \sqrt{\rho_0 N_0}$ . Se considerará el punto  $P_0$  de latitud  $\varphi_0=34^\circ N$  (un punto intermedio entre  $P_1$  y  $P_2$ ).

$$N_0 = \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6378,388 km}{(1 - 0,00672265 \operatorname{sen}^2 34^\circ)^{\frac{1}{2}}} = 6385,103 km$$

$$\rho_0 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6378,388 km(1 - 0,00672265)}{(1 - 0,00672265 \operatorname{sen}^2 34^\circ)^{\frac{3}{2}}} = 6355,538 km$$

Entonces:

$$R_0 = \sqrt{\rho_0 N_0} = \sqrt{6355,538 km \times 6385,103 km} = 6370,303 km$$

Se calculará ahora la longitud de la línea ortodrómica entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$ :

$$\begin{aligned} \cos P_1P_2 &= \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \\ &= \operatorname{sen} 20^\circ \operatorname{sen} 47^\circ + \cos 20^\circ \cos 47^\circ \cos(0^\circ - (-160^\circ)) \\ &= -0,352082009 \end{aligned}$$

$$P_1 P_2 = 110^\circ 36' 53'' \text{ y}$$

$$\frac{P_1 P_2}{180^\circ} = \frac{P_1 P_2 \pi \times R_0}{180^\circ} = \frac{110^\circ 36' 53'' \times \pi \times 6\,370,303\text{km}}{180^\circ} = 12\,298,449\text{km}$$

5. Se calculará el valor del acimut de la línea loxodrómica entre los puntos  $P_1(\varphi_1 = 20^\circ N; \lambda_1 = 160^\circ W)$  y  $P_2(\varphi_2 = 47^\circ N; \lambda_2 = 0^\circ)$  sobre el elipsoide.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\left\{ \ln \left[ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 - e \cos \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right] \right\}_{\varphi_1}^{\varphi_2}} \\ &= \frac{(0^\circ + 160^\circ) \frac{\pi}{180^\circ}}{\ln \left[ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{47^\circ}{2} \right) \left( \frac{1 - e \operatorname{sen} 47^\circ}{1 - e \cos 47^\circ} \right)^{\frac{e}{2}} \right] - \ln \left[ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{20^\circ}{2} \right) \left( \frac{1 - e \operatorname{sen} 20^\circ}{1 - e \cos 20^\circ} \right)^{\frac{e}{2}} \right]} \\ &= 4,87666484 \end{aligned}$$

Se obtiene de aquí el valor  $\alpha = 78^\circ 24' 42''$ .

**Nota:** el valor del acimut de la línea loxodrómica entre  $P_1$  y  $P_2$  sobre la esfera se calcula a través de la fórmula:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \left[ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_2}{2} \right) \right] - \ln \left[ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right]} \\ &= \frac{160^\circ \frac{\pi}{180^\circ}}{\ln \left[ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{47^\circ}{2} \right) \right] - \ln \left[ \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{20^\circ}{2} \right) \right]} \\ &= 4,854431475 \end{aligned}$$

resultando  $\alpha = 78^\circ 21' 36''$ .

6. Se hallará ahora la longitud de la línea loxodrómica entre los puntos  $P_1(\varphi_1 = 20^\circ N; \lambda_1 = 160^\circ W)$  y  $P_2(\varphi_2 = 47^\circ N; \lambda_2 = 0^\circ)$  sobre el elipsoide.

$$\text{Long. loxodrómica}_{P_1 P_2} = \frac{1}{\cos \alpha} [\alpha \varphi_2 + \beta \operatorname{sen} 2\varphi_2 + \gamma \operatorname{sen} 4\varphi_2 + \dots]_{P_1}^{P_2}$$

$$\begin{aligned} \text{Long. loxodrómica}_{P_1 P_2} &= \frac{1}{\cos 78^\circ 24' 42''} \left\{ \left[ 111,137 \frac{\text{km}}{\circ} \times 47^\circ - \right. \right. \\ &\quad 16,107\text{km} \times \operatorname{sen}(2 \times 47^\circ) + 0,016976\text{km} \times \\ &\quad \left. \operatorname{sen}(4 \times 47^\circ) \right] - \left[ 111,137 \frac{\text{km}}{\circ} \times 20^\circ \right. \\ &\quad \left. - 16,107\text{km} \times \operatorname{sen}(1 \times 20^\circ) + 0,016976\text{km} \right. \\ &\quad \left. \times \operatorname{sen}(4 \times 20^\circ) \right] \left. \right\} \\ &= 14\,909,342\text{km} \end{aligned}$$

## Capítulo 2

### Cartografía

#### 2.1 Principios generales

La Cartografía es la ciencia que estudia la representación de la totalidad o parte de la superficie terrestre sobre un plano, de modo tal que exista la mayor afinidad “posible” entre el objeto a representar (superficie terrestre) y su imagen (carta, mapa, etc.).

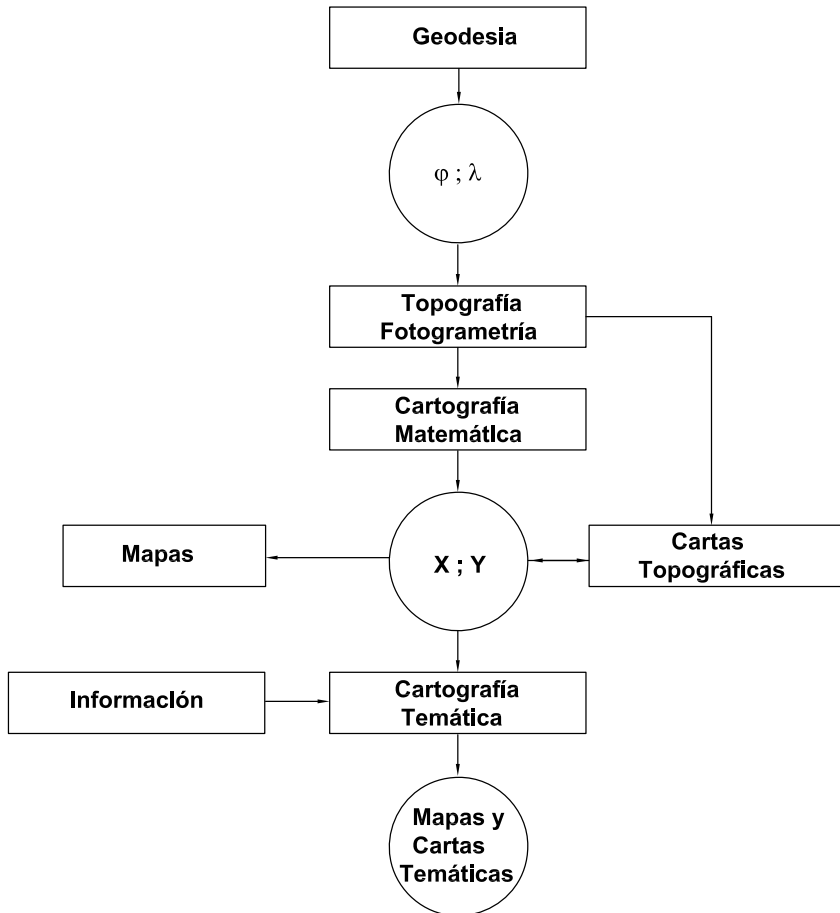
La forma de la superficie terrestre, ya estudiada en el capítulo anterior, se considera esférica o elipsoidal, de acuerdo con la precisión que exigen los mapas y cartas. Para los primeros, que abarcan la superficie terrestre íntegra (planisferios y mapamundi) o una gran extensión como países, continentes, etc., se considera la forma esférica para que la escala del mapa haga insignificante el error. Pero en el caso de las cartas, debe considerarse como superficie de referencia el elipsoide y, por lo tanto, se deberán tener en cuenta las leyes que rigen la variación de las magnitudes de los arcos de meridianos y de paralelos, vistas anteriormente.

La confección de cartas y mapas comprende tres series de operaciones bien distintas (ver Figura 2.1):

- 1) La determinación de un cierto número de puntos de referencia: planimétricos (puntos astronómicos y puntos geodésicos) y altimétricos (referencias de nivelación) que constituyen los elementos en

que están basados los puntos de referencia para los levantamientos topográficos. Estas operaciones son resorte de la **Geodesia**.

- 2) La ubicación de los objetos (o detalles) que se encuentran sobre la superficie del terreno y la representación del modelado terrestre, apoyada sobre los puntos determinados precedentemente. Estas operaciones son ejecutadas por la **Topografía** y la **Fotogrametría**.
- 3) La realización bajo una forma definitiva de cartas y mapas cuyos destinos son diversos; esto es tarea de la **Cartografía**.



**Figura 2.1:** Operaciones para la confección de cartas y mapas.

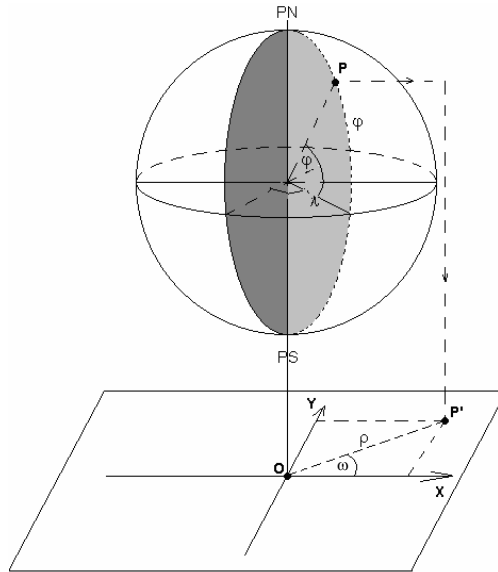
## 2.2 El problema a resolver en cartografía

Dados puntos sobre la superficie de la Tierra, se desea que queden representados en el plano.

En la superficie terrestre, un punto queda localizado por sus coordenadas geográficas latitud y longitud. En un plano, un punto se sitúa por medio de sus coordenadas planas:

- Coordenadas Polares ( $\rho$  y  $\omega$ ): módulo y argumento.
- Coordenadas Cartesianas ( $X$ ,  $Y$ ): abscisa y ordenada.

Por lo tanto, dado un punto sobre la superficie terrestre, se quiere hallar otro punto “imagen” u homólogo del primero sobre un plano.



**Figura 2.2:** *Proyección Cartográfica.*

Considérese la Tierra esférica o elipsoidal (como superficie de referencia, es decir, prescindiendo del relieve del terreno). Se debe tener en cuenta que, partiendo de una superficie esférica o elipsoidal, se pretende llegar a una plana (mapa, carta). Debido a que ni la superficie esférica ni la superficie elipsoidal son desarrollables en un plano, en esa transformación habrá inevitablemente deformaciones de las medidas originales de la esfera o del elipsoide.

La Cartografía estudia los diferentes métodos o sistemas que permiten representar en un plano parte o la totalidad de la superficie de referencia terrestre. Estos métodos son numerosos, pero todos ellos se basan en transformar las coordenadas geográficas en coordenadas planas, de modo tal que la imagen plana de la Tierra (carta, mapa) se asemeje lo mejor posible a la original (elipsoide, geoide), ya que la fidelidad rigurosa es imposible.

Estos sistemas se denominan **Proyecciones cartográficas** o **Representaciones cartográficas**; cada una de ellas es una ley o transformación analítica que indica cómo debe ubicarse cada punto de la Tierra con un único punto imagen en el plano.

El problema cartográfico consiste en representar sobre una hoja plana y con una prefijada “escala” una extensión de la superficie de referencia terrestre (o la totalidad de ella en el caso de los planisferios).

Sobre un plano se elige un sistema de ejes cartesiano ortogonal  $O, X, Y$  (Figura 2.2), de tal modo que cada punto estará individualizado mediante las coordenadas cartesianas  $X$  e  $Y$ , o bien, más raramente, mediante las coordenadas polares  $\rho = OP'$ ,  $\omega = \text{ángulo que la dirección } OP' \text{ forma con el semieje positivo } Y$  o con el semieje positivo  $X$ .

Si  $P$  es un punto de la superficie terrestre de referencia, de coordenadas  $\varphi$  y  $\lambda$ , le corresponde un punto  $P'$  del plano, de coordenadas  $\rho$  y  $\omega$  o bien  $X$  e  $Y$ . La Cartografía establece las funciones según las cuales las coordenadas del punto  $P'$  dependen de las de  $P$ , por funciones del tipo:

$$X = f_1(\varphi; \lambda)$$

$$Y = f_2(\varphi; \lambda)$$

que se llaman *ecuaciones de la carta*; por supuesto que, para el dibujo, debe multiplicarse por la escala.

$$X(\text{dibujo}) = E f_1(\varphi; \lambda)$$

$$Y(\text{dibujo}) = E f_2(\varphi; \lambda)$$

siendo  $E$  la escala:  $E = \frac{1}{M}$ .

En lo que sigue, este factor ( $E$ ) se supondrá sobreentendido.

A los efectos de las *representaciones cartográficas* o *proyecciones cartográficas*, se imagina la superficie terrestre atravesada por una red de meridianos y paralelos que tendrá una imagen en el plano, de acuerdo con las ecuaciones de representación o bien mediante construcciones gráficas o semigráficas, que serán líneas curvas o rectas, red que se denomina *canevás del mapa* o *carta*. La representación de esta red es lo que se llama *trazado geométrico* de la carta o mapa.

Dados los vértices geodésicos, con sus coordenadas geográficas, es posible hallar sus coordenadas planas por las *ecuaciones de la carta* ( $X$  e  $Y$ ); ellos constituirán el esqueleto de la representación de detalles del terreno en los cuales se apoyarán la Topografía y la Cartografía.

### 2.3 Proyecciones cartográficas

Se llama proyección cartográfica al sistema gráfico y/o analítico que permite elaborar la representación plana de la superficie terrestre (cartas, mapas, etc.).

Como se explicó anteriormente, las proyecciones cartográficas son transformaciones o representaciones que establecen una expresión matemática mediante la cual parte o la totalidad de la superficie terrestre de referencia puede ser representada en un plano.

El término “proyección” tiene comúnmente un sentido geométrico que evoca la idea de perspectiva y que se aplica perfectamente a un cierto número de sistemas, pero que no se extiende a la totalidad de los sistemas posibles. En un sentido más general, un sistema de proyección cartográfico es un medio de correspondencia analítica entre los puntos de la superficie a representar (esfera o elipsoide terrestre) y los puntos homólogos del plano (mapa, carta) tal que esta correspondencia sea continua y biunívoca. Por ello es que algunos autores prefieren utilizar la denominación de “representaciones cartográficas” en lugar de “proyecciones cartográficas”. Pero está tan difundido el uso de la última que es el que se usará, en general, en lo que sigue.

Como la superficie terrestre, considerada en primera aproximación como una esfera o -con fidelidad mayor- como un elipsoide, no es desarrollable en un plano, las figuras en la carta o mapa serán siempre imágenes defor-

madras de las figuras correspondientes del terreno.

Las magnitudes de la superficie terrestre que se deforman al desarrollar sobre el plano son los ángulos, las áreas y las distancias. Es posible eliminar una clase de deformaciones pero no conjuntamente con las otras dos. Precisamente, al eliminar una de ellas las otras clases de deformaciones aumentan. Respecto de las inevitables deformaciones, los sistemas de proyección (proyecciones cartográficas) se comportan de diversas maneras y dependiendo del destino de la carta, se preferirá que se conserven los ángulos, las áreas o las distancias, o bien que haya un equilibrio entre las deformaciones y, otras veces, que satisfagan condiciones especiales.

En la Figura 2.3 se muestra esquemáticamente el proceso de confección de cartas y mapas.

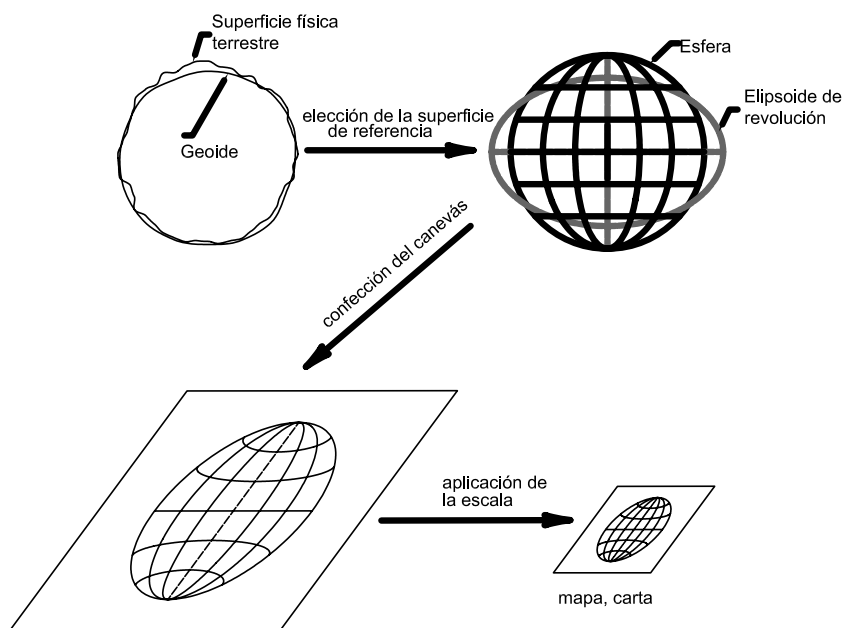


Figura 2.3: Proceso de confección de cartas y mapas.

## 2.4 Clasificaciones y propiedades de las proyecciones cartográficas

Las proyecciones cartográficas se clasifican desde distintos puntos de vista.

### 1) Clasificación según la clase de deformación



- Proyecciones **isógonas** (o **conformes**).
- Proyecciones **equivalentes** (o **equiáreas**).
- Proyecciones **equidistantes**.
- Proyecciones **afilácticas**.

Una proyección es **isógona** o **conforme** cuando se conservan los ángulos formados por direcciones cualesquiera y, por lo tanto, a una figura elemental del terreno le corresponde una figura elemental semejante en la carta o mapa. Lógicamente, en este tipo de proyecciones los meridianos y paralelos se cortan entre sí en ángulo recto. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que no todas las proyecciones en que los meridianos y los paralelos se cortan a  $90^\circ$  son isógonas. Esta propiedad es útil donde sea conveniente la conservación de ángulos y direcciones, por ejemplo en la navegación, en donde la mayor parte de las operaciones son mediciones de ángulos. Como ya se dijo anteriormente, la isogonía trae consigo un aumento en la deformación de las superficies y distancias.

Una proyección es **equivalente** o **equiárea** cuando las áreas de las figuras terrestres (sobre la esfera o elipsoide) son iguales a las áreas de las figuras correspondientes sobre la carta o mapa, lógicamente teniendo en cuenta la escala. Esta propiedad es valiosa en las actividades que requieren la representación correcta del área, como es el caso de mapas y cartas estadísticas realizadas con fines catastrales, etc., pero se consigue a expensas de un aumento en los otros tipos de deformaciones (ángulos y distancias).

Una proyección es **equidistante** cuando se conservan correctas las longitudes (teniendo en cuenta la escala) en ciertas direcciones privilegiadas, por ejemplo según los meridianos o paralelos. La diferencia con las citadas anteriormente es que en las proyecciones isógonas y equivalentes ambas propiedades son válidas para toda la extensión del mapa o carta, o toda la extensión de la proyección; en cambio, en las equidistantes se puede conservar esta propiedad sólo en forma parcial, es decir, según una dirección o direcciones de preferencia

elegida de antemano, por ejemplo en un sentido radial a partir del centro de la carta o mapa, en el sentido de los meridianos, etcétera.

Una proyección es **afláctica** cuando, sin conservar correctos los ángulos, áreas ni distancias, existe un cierto equilibrio entre esos tipos de deformaciones que constituye una solución de compromiso, compensando convenientemente y parcialmente las diversas alteraciones. En conjunto, presentan una menor distorsión general. Es por ello que son preferidas para mapas y cartas de usos no especializados, es decir, donde no haya que efectuar mediciones precisas.

## 2) Clasificación según la superficie auxiliar de proyección

Un criterio de clasificación de las proyecciones cartográficas resulta de considerar si la transformación se ha hecho directamente sobre el plano o bien sobre superficies auxiliares que luego se desarrollan en el plano.

De este modo se clasifican en:

- Proyecciones **acimutales**.
- Proyecciones por desarrollo: **cilíndricas** o **cónicas**.

Las proyecciones **acimutales** son las obtenidas directamente sobre un plano tangente a la superficie terrestre en un punto, que es el centro de la zona a representar (centro de la proyección).

Las proyecciones **cilíndricas** son aquellas en que los puntos de la superficie terrestre se consideran proyectados sobre una superficie cilíndrica que luego se desarrolla sobre un plano.

En las proyecciones **cónicas** los puntos se representan sobre una superficie cónica que luego se desarrolla sobre un plano.

Por ello es que tanto las proyecciones cilíndricas como las cónicas se suelen llamar *representaciones por desarrollo*.

## 3) Clasificación según el contacto entre la Tierra y la superficie auxiliar

Según este criterio pueden ser:

- Proyecciones **Tangentes**: la superficie auxiliar es tangente a la superficie terrestre.
- Proyecciones **Secantes**: la superficie auxiliar es secante a la superficie terrestre.

4) **Clasificación según la posición de la superficie auxiliar con respecto al eje de rotación de la Tierra**

Se tienen los siguientes casos:

a) En las proyecciones acimutales:

- **Polar**: el plano de proyección es tangente a la superficie terrestre en un Polo y, por lo tanto, es perpendicular al eje terrestre (Figura 2.4).
- **Ecuatorial**: el plano de proyección es tangente en un punto del Ecuador y, por consiguiente, es paralelo al eje terrestre (Figura 2.5).

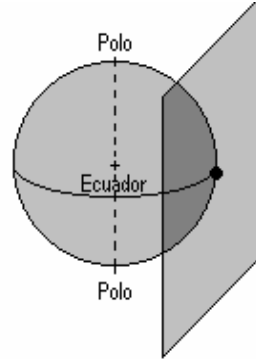
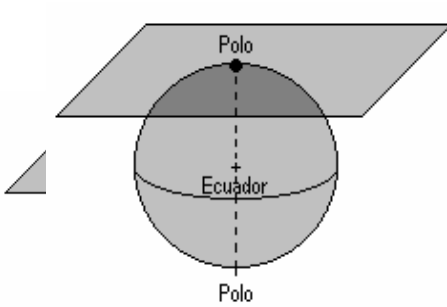


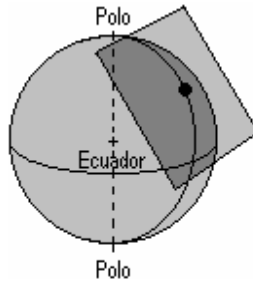
Figura 2.4: Proyección acimutal caso polar.

Figura 2.5: Proyección acimutal caso ecuatorial.

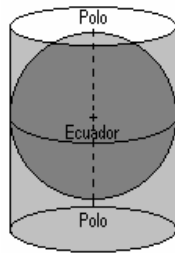
- **Oblicua**: el plano de proyección es tangente en un punto cualquiera, salvo los polos y el Ecuador, siendo oblicuo al eje terrestre (Figura 2.6).

b) En las proyecciones cilíndricas y cónicas:

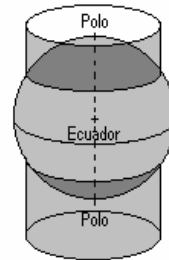
- **Normal**: la superficie auxiliar (cilíndrica o cónica) tiene su eje colineal con el eje terrestre (Figuras 2.7, 2.8, 2.9 y 2.10).



**Figura 2.6:** *Proyección acimutal caso oblicuo.*



**Figura 2.7:** *Proyección cilíndrica normal tangente.*



**Figura 2.8:** *Proyección cilíndrica normal secante.*

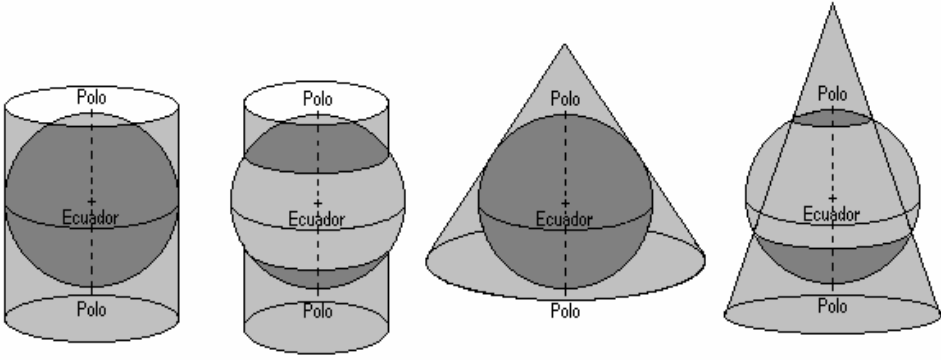
- **Transversa:** la superficie auxiliar tiene el eje perpendicular al eje terrestre (Figuras 2.11 y 2.12).
- **Oblicua:** la superficie auxiliar tiene su eje oblicuo al eje terrestre (Figura 2.13).

5) Clasificación según la forma de obtención:

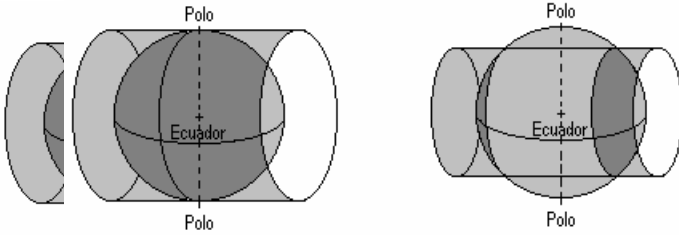
- Proyecciones **Perspectivas**
- Proyecciones **No perspectivas**

Son **perspectivas** aquellas que resultan de un proceso riguroso de las leyes y principios de perspectivas, proyecciones, etc. Por lo tanto, serían las únicas que se llamarían con propiedad “proyecciones cartográficas”.

Se denominan **no perspectivas** (o convencionales) las que resultan de condiciones establecidas intencionalmente por su creador, para conseguir las propiedades que se desean. Requieren una elaboración matemática previa para el cálculo de los elementos necesarios para



**Figura 2.10:** *Proyección cónica normal secante.*



**Figura 2.11:** *Proyección cilíndrica transversa tangente.* **Figura 2.12:** *Proyección cilíndrica transversa secante.*

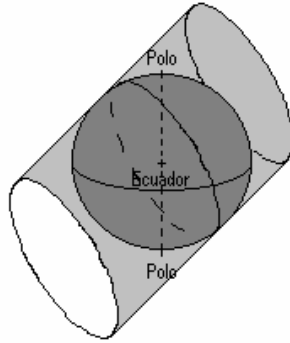
el dibujo y no obedecen a las reglas rigurosas de la perspectiva, proyección, etc. Por lo tanto, rigurosamente no deberían llamarse “proyecciones cartográficas” sino “representaciones cartográficas”, pero está muy difundido el uso del primer término, por lo que se usará la denominación común de “proyecciones cartográficas”.

## 2.5 Deformaciones en cartas y mapas

### 2.5.1 Conceptos fundamentales

La superficie terrestre de referencia, ya sea considerada como una esfera o como un elipsoide, no es desarrollable sobre un plano. Si se pretende hacerlo, inevitablemente se producirán deformaciones. Por lo tanto, es necesario conocer estas deformaciones que presentan las cartas y los mapas, y saber la intensidad de las distorsiones, el tipo de deformación, su ubicación, etcétera.

Estas distorsiones se producen en distancias, ángulos y áreas e implican deformaciones en los documentos cartográficos citados anteriormente, lo



**Figura 2.13:** *Proyección cilíndrica oblicua tangente.*

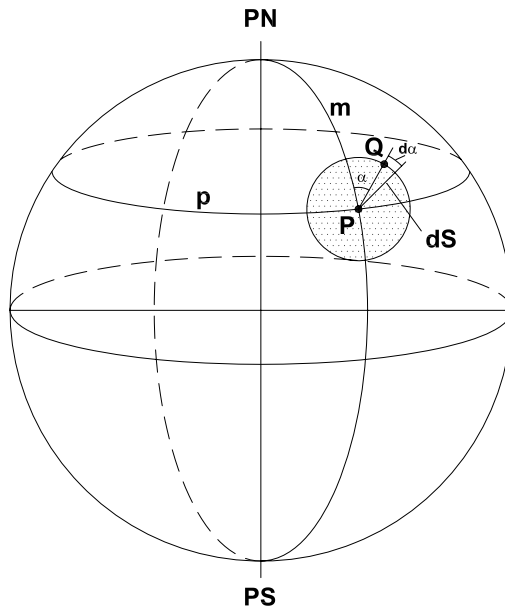
cual, teniendo en cuenta el uso que se hará de los mismos, permite el enunciado de las siguientes propiedades:

**Isogonía:** permite conservar correctos los ángulos.

**Equidistancia:** permite conservar correctas las distancias en ciertas direcciones.

**Equivalencia:** permite conservar correctas las áreas.

**Observación:** cuando no poseen ninguna de las tres propiedades, se las denomina proyecciones **aflácticas**.



**Figura 2.14:** *Círculo infinitesimal sobre la esfera.*

Considérese la esfera terrestre (Figura 2.14), es decir, en el dominio de los mapas. Tómese un punto  $P$  por el cual pasan sus correspondientes paralelo y meridiano, y sea dicho punto el centro de un círculo infinitesimal dibujado arbitrariamente más grande para permitir su estudio; como es muy pequeño, se lo puede considerar plano. Tómese un punto  $Q$  sobre la circunferencia; queda determinado así el segmento  $PQ = ds$  (diferencial de  $s$ ) que es un radio cualquiera del círculo. En la proyección (Figura 2.15) se tendrá que un punto  $Q$  se proyectará según  $Q'$ ,  $dm$  según  $dm'$ ,  $dp$  según  $dp'$  y cuando se proyecte  $ds$  se tendría  $ds'$ . Los puntos correspondientes en la proyección, a raíz de las deformaciones, no guardarán la misma relación y estarán ubicados en una elipse, salvo en las proyecciones isógonas en que se proyectarán según otro círculo de mayor o menor tamaño.

Entonces  $PQ = ds$  será  $P'Q' = ds'$  (semidiámetro de la elipse), siendo variables su longitud y su dirección. Los semiejes de la elipse se llamarán  $da$  y  $db$ .

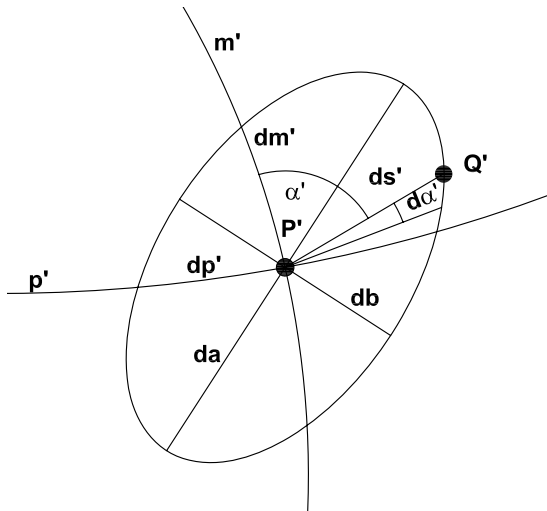


Figura 2.15: Elipse infinitesimal en la proyección.

### 2.5.2 Módulo de alteración lineal en un punto de una proyección

Es el cociente entre la medida o distancia en la proyección y su correspondiente en la esfera:  $\tau = \frac{ds'}{ds}$  siendo  $ds'$  la distancia en la proyección y  $ds$  la distancia en la esfera.

El valor de  $\tau$  es finito por ser cociente de dos infinitésimos del mismo orden (distancias infinitesimales).

Si se dibuja una elipse cuyos semidiámetros no sean  $ds'$  sino  $\tau = \frac{ds'}{ds}$ , será de tamaño finito pero semejante a la primera.

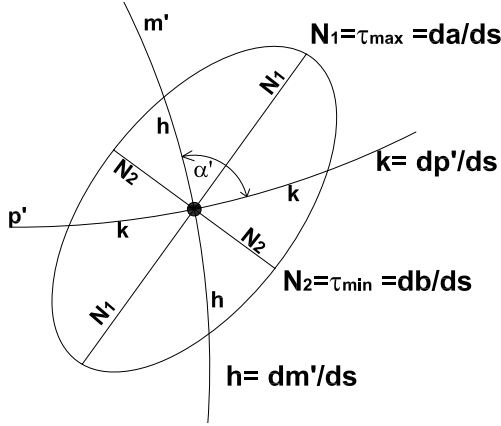


Figura 2.16: Elipse Indicatriz de Tissot.

Este concepto nos da la *elipse indicatriz de Tissot*; se puede obtener un valor de semidiámetro máximo y un valor mínimo cuando coincida con el eje mayor y menor de la elipse, respectivamente:

$$\tau_{max} = \frac{da}{ds} = N_1$$

$$\tau_{min} = \frac{db}{ds} = N_2$$

**Nota:** si el radio del círculo ( $ds$ ) se divide por  $ds$ , se obtendrá un círculo de radio unitario, pues  $\frac{ds}{ds} = 1$ .

El módulo de alteración lineal en un punto del meridiano está dado por la fórmula  $h = \frac{dm'}{ds}$ , siendo  $dm'$  la longitud de una distancia sobre el meridiano en la proyección y  $ds$  la longitud de la distancia correspondiente en la esfera.

El módulo de alteración lineal en un punto del paralelo está dado por la fórmula  $k = \frac{dp'}{ds}$ , siendo  $dp'$  la longitud de una distancia sobre el paralelo en la proyección y  $ds$  la longitud de la distancia correspondiente en la esfera.



El valor de  $\tau = \frac{ds'}{ds}$  puede ser mayor, igual o menor que uno, según la proyección y también, en la misma proyección, según la ubicación del punto  $P$  y además según la dirección de  $\tau$  para un mismo punto  $P$ . Es decir  $\tau = f(\varphi, \lambda, \alpha)$ .

Las líneas del plano de la proyección para las cuales se tiene un valor constante de  $\tau$  se denominan líneas **isométricas**.

### 2.5.3 Módulo de alteración superficial o areolar

Es el cociente entre el área medida en la proyección y su correspondiente, medida en la esfera (de la misma zona).

$$\mu = \frac{\pi \times da \times db}{\pi \times ds \times ds} = \frac{\text{área de la elipse}}{\text{área del círculo}}$$

Dado que  $\frac{da}{ds} = N_1$  y  $\frac{db}{ds} = N_2$ , reemplazando en la expresión anterior se obtiene:  $\mu = N_1 N_2$ , que puede ser mayor, igual o menor que 1. Es decir que el módulo de alteración areolar es igual al producto de los  $\tau_{max}$  y  $\tau_{min}$ . En el caso de proyecciones equivalentes la condición es que  $N_1 N_2 = 1$ .

Cuando las proyecciones de un paralelo y un meridiano se cortan a  $90^\circ$  en un punto,  $N_1$  y  $N_2$  coinciden con los módulos  $k$  y  $h$ ; entonces, si la proyección es equivalente, se cumple que  $hk = 1$ .

Cuando  $p'$  y  $m'$  no son perpendiculares, para que la proyección sea equivalente debe cumplirse que  $hk \cos \epsilon = 1$ , o bien que  $hk \sin \alpha' = 1$ , siendo  $\alpha'$  el ángulo que forman las proyecciones del paralelo y del meridiano en ese punto y  $\epsilon$  su complemento a  $90^\circ$  (Figura 2.16).

En algunas proyecciones equivalentes los meridianos son perpendiculares a los paralelos. En este caso  $h$  y  $k$  son los semiejes de la Elipse Indicatriz de Tissot ( $N_1$  y  $N_2$ ); por lo tanto  $N_1 N_2 = hk = 1$ .

### 2.5.4 Módulo de alteración angular

Es el cociente entre el incremento de un ángulo medido en la proyección y el respectivo incremento medido en la esfera:

$$\delta = \frac{d\alpha'}{d\alpha}$$

pudiendo el cociente ser mayor, igual o menor que 1.

Hay que tener en cuenta que los ángulos varían punto a punto y se considera un incremento infinitesimal en  $\alpha$ , será  $d\alpha$ ; en la proyección dicho incremento será  $d\alpha'$ . Además, varían según la dirección de  $\tau$ , es decir,  $\delta = f(\varphi, \lambda, \alpha)$ .

Si se tratara de una proyección *isógona*,  $\delta = \frac{d\alpha'}{d\alpha} = 1$  y por lo tanto  $d\alpha' = d\alpha$ .

Resolviendo la ecuación diferencial se tiene que:  $\int d\alpha' = \int d\alpha$  por lo que  $\alpha' = \alpha$ .

Como  $E = O - V$ , donde  $E$  es el *error absoluto*,  $O$  es el *valor observado* y  $V$  es el *valor verdadero*, se puede decir que el error angular que se comete es:  $\epsilon = \alpha' - \alpha = 0^\circ$ , deduciéndose que los ángulos son iguales.

Si la proyección no es isógona  $\alpha \neq \alpha'$  y, por lo tanto,  $d\alpha \neq d\alpha'$ . Se incurre en un error ( $\epsilon$ ) que se demuestra es igual a  $\epsilon_{max} = 2\text{arcsen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$ .

Si la proyección es isógona,  $\epsilon_{max} = 0^\circ = 2\text{arcsen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$ . Esto implica que  $0 = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$  y que  $N_1 = N_2$ . Por lo tanto, en toda proyección isógona, la Elipse Indicatriz de Tissot se convierte en un círculo más grande, más pequeño o igual que el correspondiente en la esfera.

**Observación:**

En una proyección isógona o conforme, todas las figuras pequeñas o elementales que se dibujan o se encuentran en la superficie de la Tierra conservan sus formas originales en la proyección. Para cualquier punto dado o localidad limitada, la relación del largo de un elemento lineal y el largo que le corresponde en el mapa es constante para todas las direcciones o acimutes en que se tome el elemento.

Si en cualquier punto de la proyección, la deformación a lo largo del paralelo y meridiano es igual, y los paralelos y meridianos en la proyección están en ángulos rectos unos con otros, la forma de cualquier superficie muy pequeña será igual en el mapa a la correspondiente región pequeña sobre la Tierra.

Se deduce de esta propiedad que esas proyecciones conservan rigurosamente las formas de figuras infinitamente pequeñas y, con un error despreciable, las formas de extensiones lo suficientemente pequeñas en relación con la esfera. Para dar una idea, se verifica que para una superfi-

cie en donde la mayor dimensión es de 2 000km, la deformación para los usos más exigentes de Cartografía es despreciable. Es decir que un círculo pequeño en la esfera tiene por proyección prácticamente un círculo; pero para regiones más extensas, la proyección del círculo se convierte en una elipse cada vez más acentuada.

## 2.6 Análisis de las deformaciones de las proyecciones cartográficas

Se representa una superficie cualquiera  $S$  sobre otra (imagen)  $S'$  cuando se establece entre ellas una correspondencia tal que a un punto de una corresponde un punto único y determinado de la otra (correspondencia biunívoca). La correspondencia debe ser bicontinua, vale decir que a un arco infinitamente pequeño de la primera superficie (Figura 2.17) corresponde un arco infinitamente pequeño de la superficie imagen. La primera superficie en este análisis es el elipsoide (cartas) o la esfera terrestre (mapas) y la segunda es un plano (proyección) (Figura 2.18); en él se adopta un sistema de ejes ortogonales, siendo generalmente el eje de las ordenadas ( $Y$ ) el que contiene a la proyección del meridiano central de la región a representar.

Las relaciones analíticas que señalan la correspondencia entre puntos de ambas superficies son llamadas *ecuaciones de representación* o *ecuaciones de la carta*.

Las ecuaciones de la representación, definidas por coordenadas cartesianas ortogonales, están dadas por expresiones del tipo:

$$X = f_1(\varphi, \lambda) \text{ o bien } X = X(\varphi, \lambda)$$

$$Y = f_2(\varphi, \lambda) \text{ o bien } Y = Y(\varphi, \lambda),$$

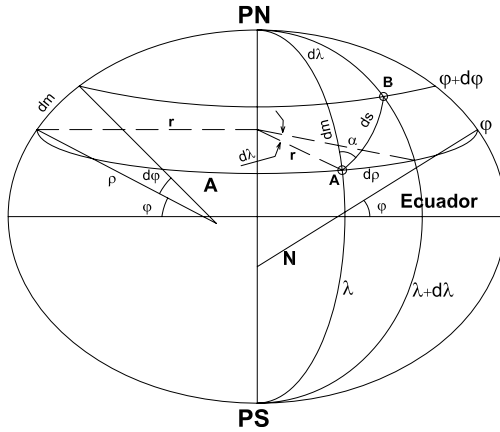
en donde  $X$  e  $Y$  son las coordenadas de los puntos en el sistema ortogonal adoptado:  $f_1(\varphi, \lambda)$ ,  $f_2(\varphi, \lambda)$ . Las características de las funciones dependerán del tipo de representación elegido.

Dada la continuidad de la representación (bicontinuidad), a incrementos diferenciales  $d\varphi$  y  $d\lambda$  de las coordenadas geográficas corresponderán los incrementos diferenciales  $dX$  y  $dY$ , definidos por las ecuaciones:

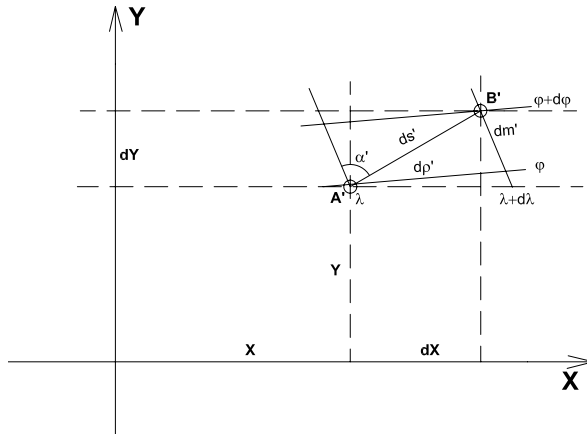
$$dX = \frac{\partial X}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial X}{\partial \lambda} d\lambda \qquad dY = \frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} d\lambda \qquad (2.1)$$

Supónganse, en la Figura 2.17, los puntos  $A$  y  $B$  sobre el elipsoide, distanciados del arco diferencial  $ds$  (medido sobre la geodésica  $AB$ ) y, en la Figura 2.18, los correspondientes puntos en la proyección referidos al sistema ortogonal  $X, Y$ , donde  $ds'$  simboliza a la distancia plana  $A'B'$ .

En la Figura 2.17 se han trazado los meridianos y paralelos de los puntos  $A$  y  $B$  y se indican los arcos diferenciales  $dm$  y  $dp$  de meridianos y paralelos; en la Figura 2.18 aparecen las correspondientes proyecciones  $dm'$  y  $dp'$  y los elementos diferenciales  $dX, dY$ .



**Figura 2.17:** Arcos diferenciales de paralelos y meridianos en el elipsoide.



**Figura 2.18:** Arcos diferenciales de paralelos y meridianos en la proyección.

### 2.6.1 Módulo de alteración lineal $\tau$

Se definió anteriormente el módulo de alteración lineal como la relación entre la magnitud lineal  $ds'$  y  $ds$  (este último en el elipsoide):

$$\tau = \frac{ds'}{ds}$$

De las Figuras 2.17 y 2.18 se deduce que:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dm^2 + dp^2 = (\rho d\varphi)^2 + (rd\lambda)^2 \\ ds'^2 &= dX^2 + dY^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

siendo  $\rho$  el radio de curvatura de la elipse meridiana en el punto  $A$  de latitud  $\varphi$  y  $r$  el radio del paralelo de latitud  $\varphi$  (en  $A$ ).

Reemplazando en la expresión del módulo de alteración lineal:

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{dX^2 + dY^2}{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2} \\ \tau^2 &= \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial X}{\partial \lambda} d\lambda\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} d\lambda\right)^2}{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Efectuando las operaciones indicadas y llamando, para abreviar:

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 \quad F = \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \quad G = \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)^2 \quad (2.4)$$

resulta:

$$\tau^2 = \frac{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2}{\rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2} \quad (2.5)$$

Según la Figura 2.17,  $\text{tg } \alpha = \frac{dp}{dm} = \frac{rd\lambda}{\rho d\varphi}$ , donde  $\alpha$  es el acimut de  $AB$ .

Por lo tanto resulta:

$$\rho d\varphi = rd\lambda \frac{1}{\text{tg } \alpha} \quad (2.6)$$

y

$$rd\lambda = \rho d\varphi \text{tg } \alpha \quad (2.7)$$

Reemplazando 2.6 en 2.5:

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \frac{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2}{r^2 d\lambda^2 \frac{1}{\text{tg } \alpha} + r^2 d\lambda^2} = \frac{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2}{r^2 d\lambda^2 \left(\frac{1}{\text{tg } \alpha} + 1\right)} \\ &= \frac{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\lambda + Gd\lambda^2}{r^2 d\lambda^2 \frac{1}{\text{sen}^2 \alpha}} \end{aligned}$$

$$\tau^2 = \frac{Ed\varphi^2 \text{sen}^2 \alpha}{r^2 d\lambda^2} + \frac{2Fd\varphi d\lambda \text{sen}^2 \alpha}{r^2 d\lambda^2} + \frac{Gd\lambda^2 \text{sen}^2 \alpha}{r^2 d\lambda^2}$$

y reemplazando según 2.7:

$$\tau^2 = \frac{E \cos^2 \alpha}{\rho^2} + \frac{2F \text{sen} \alpha \cos \alpha}{\rho r} + \frac{G \text{sen}^2 \alpha}{r^2} \quad (2.8)$$

**Nota:** teniendo en cuenta que  $E$ ,  $F$  y  $G$  dependen de la latitud  $\varphi$  y de la longitud  $\lambda$ , se deduce que el módulo de alteración lineal  $\tau$  es función de  $\varphi$ ,  $\lambda$  y  $\alpha$ , vale decir que varía no solamente de lugar a lugar sino también según sea la dirección  $\alpha$  del elemento lineal  $ds$ .

Si en lugar del elipsoide se considera una esfera de radio  $R$ , la ecuación 2.8 se transformará en:

$$\tau^2 = \frac{E \cos^2 \alpha}{R^2} + \frac{2F \text{sen} \alpha \cos \alpha}{R^2 \cos \varphi} + \frac{G \text{sen}^2 \alpha}{R^2 \cos^2 \varphi} \quad (2.9)$$

### Valores particulares del módulo $\tau$

Para líneas geodésicas contenidas en el meridiano ( $\alpha = 0^\circ$ ) según 2.8, resulta en el elipsoide:  $\tau^2 = h^2 = \frac{E}{\rho^2}$ . Entonces  $h = \frac{\sqrt{E}}{\rho}$ .

Según la ecuación 2.9, en la esfera es:

$$h = \frac{\sqrt{E}}{R} \quad (2.10)$$

Para líneas geodésicas definidas por dos puntos del paralelo ( $\alpha = 90^\circ$ ) resulta en el elipsoide:  $\tau^2 = k^2 = \frac{G}{r^2}$  de donde  $k = \frac{\sqrt{G}}{r}$  y en la esfera

$$k = \frac{\sqrt{G}}{R \cos \varphi} \quad (2.11)$$

Los arcos de paralelos no son geodésicas, pero para arcos pequeños puede aproximarse el arco de paralelo a una línea geodésica ( $dp \cong \text{geodésica}$ ) y, por lo tanto,  $\alpha \cong 90^\circ$ .

**Nota:** para el cálculo de  $\tau$ ,  $h$  y  $k$  es suficiente considerar la Tierra como esférica. De acuerdo con las expresiones 2.10 y 2.11:

$$\frac{h(\text{esfera})}{h(\text{elipsoide})} = \frac{\rho}{R}; \quad \frac{k(\text{esfera})}{k(\text{elipsoide})} = \frac{N \cos \varphi}{R \cos \varphi} = \frac{N}{R}$$

Por propiedad de las proporciones:

$$\frac{h(\text{esfera}) - h(\text{elipsoide})}{h(\text{elipsoide})} = \frac{\rho - R}{R} = \text{error relativo de } h$$

Entonces:  $e_r h = \frac{\rho - R}{R}$

$$\frac{k(\text{esfera}) - k(\text{elipsoide})}{k(\text{elipsoide})} = \frac{N - R}{R} = \text{error relativo de } k$$

Entonces:  $e_r k = \frac{N - R}{R}$

Dentro de los límites de la República Argentina (excluidas las regiones antárticas)  $\rho$  y  $N$  tienen los valores:

$$\varphi = 21^\circ; \quad \rho_{21^\circ} = 6\,343,7\text{km}; \quad N_{21^\circ} = 6\,381,1\text{km}$$

$$\varphi = 56^\circ; \quad \rho_{56^\circ} = 6\,379,7\text{km}; \quad N_{21^\circ} = 6\,393,2\text{km}$$

Puede adoptarse para la esfera el radio medio  $R_m = 6\,371\text{km}$  para el cálculo de las distancias entre puntos terrestres.

Los máximos errores relativos  $e_r h$  y  $e_r k$  se producirán en  $h$  para la latitud de  $21^\circ$  y para  $k$  en  $\varphi = 56^\circ$ . En efecto, siendo:

$$R_m = \frac{a + a + b}{3} \text{ (media aritmética de los tres ejes)} = 6\,371\,229,3\text{m}$$

$$R_S = \text{radio de la esfera cuya superficie es igual a la del elipsoide} = 6\,371\,227,7\text{m}$$

$$R_v = \text{radio de la esfera cuyo volumen es igual al del elipsoide} = 6\,371\,221,3\text{m}$$

$$e_r h = \frac{\rho_{21^\circ} - R}{R} = \frac{6\,343,7\text{km} - 6\,371,0\text{km}}{6\,371,0\text{km}} = -\frac{1}{233} = -4\text{‰}$$

$$e_r k = \frac{N_{56^\circ} - R}{R} = \frac{6\,379,2\text{km} - 6\,371,0\text{km}}{6\,371,0\text{km}} = \frac{1}{287} = 3,5\text{‰}$$

Aplicando el error relativo del 4‰ a las cifras  $h$  y  $k$  en las proyecciones, notamos que son despreciables para, por ejemplo, el ámbito de la República Argentina.

**Ejemplo:** Proyecciones acimutales polares (considerando la Tierra esférica, Figura 2.19)

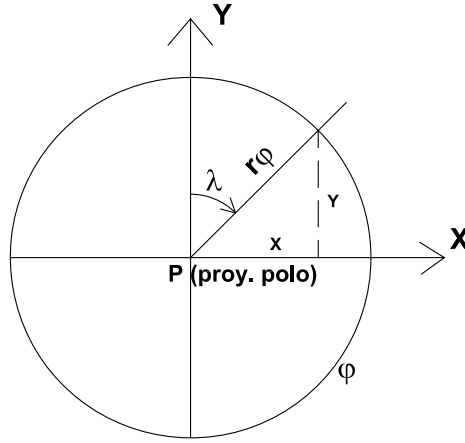
$$r_\varphi = f_1(\varphi) \quad \gamma = \delta$$

son las coordenadas polares de la proyección de un punto.

Las coordenadas ortogonales  $X$  e  $Y$  están definidas por:

$$X = r_\varphi \text{sen } \lambda$$

$$Y = r_\varphi \text{cos } \lambda$$



**Figura 2.19:** Proyección acimutal polar.

Eligiendo el sistema  $X Y$  con centro en el polo terrestre, siendo  $Y$  en dirección del meridiano central y  $X$  de modo tal que  $\lambda = 90^\circ$ , se tendrá, según 2.4:

$$E = \left( \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right)^2 = \left( \frac{\partial r_\varphi}{\partial \varphi} \sin \lambda \right)^2 + \left( \frac{\partial r_\varphi}{\partial \varphi} \cos \lambda \right)^2 = \left( \frac{\partial r_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2$$

$$F = \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = \frac{\partial r_\varphi}{\partial \varphi} \sin \lambda r_\varphi \cos \lambda + \frac{\partial r_\varphi}{\partial \varphi} \cos \lambda r_\varphi (-\sin \lambda) = 0$$

$$G = \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)^2 = (r_\varphi \cos \lambda)^2 + (-r_\varphi \sin \lambda)^2 = r_\varphi^2$$

En resumen, se tiene:

$$E = \left( \frac{\partial r_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 ; F = 0 ; G = r_\varphi^2$$

Los módulos  $h$  y  $k$  toman los siguientes valores, según 2.10 y 2.11:

$$h = \frac{\sqrt{E}}{R} = \frac{1}{R} \frac{\partial r_\varphi}{\partial \varphi} \quad k = \frac{\sqrt{G}}{R \cos \varphi} = \frac{r_\varphi}{R \cos \varphi}$$

Si se considera la proyección ortográfica polar:  $r_\varphi = R \cos \varphi$ .

$$h = \frac{1}{R} \frac{\partial R \cos \varphi}{\partial \varphi} = \frac{\partial \cos \varphi}{\partial \varphi} = \frac{\partial \sin \delta}{\partial \delta} = \cos \delta = \sin \varphi$$

(siendo  $\delta = 90^\circ - \varphi$  la colatitud)

$$\text{y } k = \frac{R \cos \varphi}{R \cos \varphi} = 1$$



### 2.6.2 Módulos de alteración lineal de dos direcciones perpendiculares (en la esfera).

Llamando  $\tau_1$  y  $\tau_2$  a los módulos de alteración lineales según los acimutes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2 = \alpha_1 \pm 90^\circ$ , según la fórmula 2.9 se tendrá, para la esfera:

$$\tau_1^2 = \frac{E}{R^2} \cos^2 \alpha_1 + \frac{2F}{R^2 \cos \varphi} \operatorname{sen} \alpha_1 \cos \alpha_1 + \frac{G \operatorname{sen}^2 \alpha_1}{R^2 \cos^2 \varphi}$$

$$\tau_2^2 = \frac{E}{R^2} \cos^2(\alpha_1 \pm 90^\circ) + \frac{2F}{R^2 \cos \varphi} \operatorname{sen}(\alpha_1 \pm 90^\circ) \cos(\alpha_1 \pm 90^\circ) + \frac{G \operatorname{sen}^2(\alpha_1 \pm 90^\circ)}{R^2 \cos^2 \varphi}$$

$$\tau_2^2 = \frac{E}{R^2} \operatorname{sen}^2 \alpha_1 - \frac{2F \cos \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_1}{R^2 \cos \varphi} + \frac{G \cos^2 \alpha_1}{R^2 \cos^2 \varphi}$$

Sumando miembro a miembro las expresiones correspondientes a  $\tau_1^2$  y a  $\tau_2^2$ :

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 = \frac{E}{R^2} + \frac{G}{R^2 \cos^2 \varphi}$$

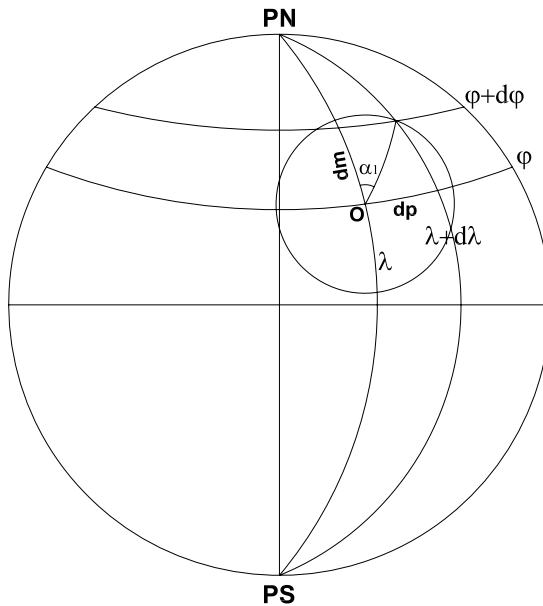


Figura 2.20: Círculo infinitesimal en la esfera.

Según 2.10 y 2.11:

$$\tau_1^2 + \tau_2^2 = h^2 + k^2 \quad (2.12)$$

La ecuación 2.12 señala que la suma de los cuadrados de los módulos de alteración lineal según dos direcciones perpendiculares entre sí en la esfera es constante. Esta propiedad se cumple en la elipse conforme a los siguientes **teoremas de Apolonio**:

- 1) *La suma de los cuadrados de dos semidiámetros conjugados es siempre igual a la suma de los cuadrados de los semiejes.*

En la Figura 2.22:  $N_1^2 + N_2^2 = h^2 + k^2$ . Por lo tanto  $\tau_1 = N_1$  y  $\tau_2 = N_2$ .

- 2) *El área del triángulo construido sobre dos diámetros conjugados es siempre igual al área del triángulo construido sobre los semiejes.*

En la Figura 2.22:  $\frac{1}{2}hk \text{sen } \alpha' = \frac{1}{2}N_1N_2$ , es decir:  $hk \text{sen } \alpha' = N_1N_2$ , donde  $\alpha'$  es el ángulo que forman en un punto las proyecciones del meridiano y del paralelo.

### 2.6.3 Ángulos entre meridianos y paralelos en la proyección

Supóngase trazado en la esfera (Figura 2.20) un círculo de centro  $O$  y radio infinitesimal  $ds$ . Por lo dicho anteriormente, en la proyección cartográfica se tendrá generalmente una elipse de semidiámetro  $ds'$  con centro  $O'$  (Figura 2.21). En la misma están representados los semidiámetros según el paralelo ( $dp'$ ) y según el meridiano ( $dm'$ ), así como sus proyecciones según los ejes  $X$  e  $Y$ . También aparecen los semiejes de la elipse  $da$  y  $db$ .

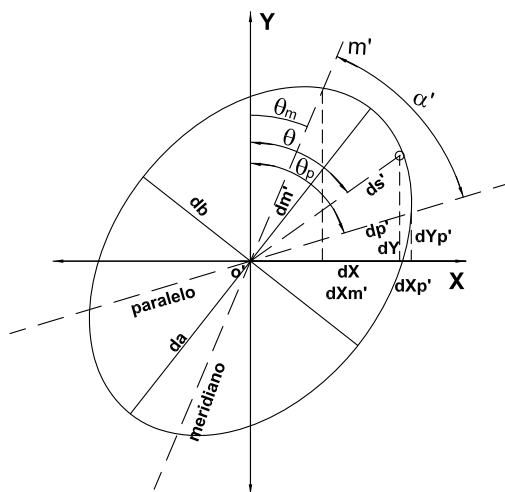


Figura 2.21: Proyección del círculo infinitesimal en la esfera.

El ángulo que se forma en la intersección de la proyección de un paralelo con la proyección de un meridiano es  $\alpha'$ , que es el mismo ángulo que

forman las proyecciones de paralelo y meridiano en la elipse de Tissot (Figura 2.22). Por lo tanto, los ángulos  $\theta_m$  y  $\theta_p$  que se determinan en la elipse de semidiámetro  $ds'$  (Figura 2.21) son los mismos de la elipse de Tissot (de semidiámetro  $\tau$ )(Figura 2.22).

En la Figura 2.21 está representada la elipse de semidiámetro  $ds'$  con centro en  $O_t$  con el semidiámetro según el meridiano ( $dm'$ ) y con el semidiámetro según el paralelo ( $dp'$ ), como también sus proyecciones sobre los ejes  $X$  e  $Y$ .

En las fórmulas 2.1:

$$dX = \frac{\partial X}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial X}{\partial \lambda} d\lambda \quad dY = \frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} d\lambda$$

se tendrá que para puntos de un paralelo  $d\varphi = 0$  y que para puntos de un meridiano  $d\lambda = 0$ . Por lo tanto:

$$dX_{p'} = \frac{\partial X}{\partial \lambda} d\lambda \quad dY_{p'} = \frac{\partial Y}{\partial \lambda} d\lambda$$

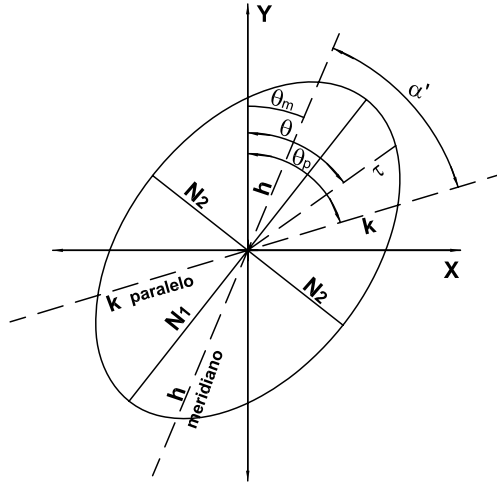


Figura 2.22: Elipse indicatriz de Tissot.

$$dX_{m'} = \frac{\partial X}{\partial \varphi} d\varphi \quad dY_{m'} = \frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi$$

Como  $(dp')^2 = (dX_{p'})^2 + (dY_{p'})^2$ , entonces:

$$(dp')^2 = \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \lambda} d\lambda \right)^2 = \left[ \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] d\lambda^2 = G d\lambda^2$$

Análogamente  $(dm')^2 = (dX_{m'})^2 + (dY_{m'})^2$  y

$$(dm')^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi} d\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2\right] d\varphi^2 = Ed\varphi^2$$

Además, se tiene que:

$$\cos \theta_m = \frac{dY_{m'}}{dm'} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi}{\sqrt{E} d\varphi} = \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$\text{y } \sin \theta_m = \frac{dX_{m'}}{dm'} = \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi} d\varphi}{\sqrt{E} d\varphi} = \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{1}{\sqrt{E}},$$

de donde:

$$\text{tg } \theta_m = \frac{\sin \theta_m}{\cos \theta_m} = \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi}}{\frac{\partial Y}{\partial \varphi}}; \text{ de aquí se obtiene } \theta_m$$

$$\cos \theta_p = \frac{dY_{p'}}{dp'} = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda} d\lambda}{\sqrt{G} d\lambda} = \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \frac{1}{\sqrt{G}} \text{ y } \sin \theta_p = \frac{dX_{p'}}{dp'} = \frac{\frac{\partial X}{\partial \lambda} d\lambda}{\sqrt{G} d\lambda} = \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{1}{\sqrt{G}}$$

$$\text{tg } \theta_p = \frac{\sin \theta_p}{\cos \theta_p} = \frac{\frac{\partial X}{\partial \lambda}}{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}}; \text{ de aquí se obtiene } \theta_p$$

En estas identidades  $\theta_m$  y  $\theta_p$  son los ángulos que forma el eje  $Y$  con las proyecciones del meridiano y del paralelo, respectivamente. El eje  $Y$  tiene dirección paralela a la proyección del meridiano central.

En la esfera, el ángulo que forman meridianos y paralelos es  $90^\circ$ ; en la proyección cartográfica, el ángulo correspondiente está dado por:

$$\alpha' = \theta_p - \theta_m \quad (2.13)$$

Por lo tanto:

$$\sin \alpha' = \sin(\theta_p - \theta_m) = \sin \theta_p \cos \theta_m - \cos \theta_p \sin \theta_m$$

$$\cos \alpha' = \cos(\theta_p - \theta_m) = \cos \theta_p \cos \theta_m + \sin \theta_p \sin \theta_m$$

y, teniendo en cuenta las expresiones anteriores:

$$\sin \alpha' = \left[ \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} - \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right] \frac{1}{\sqrt{EG}} \text{ y } \cos \alpha' = \left[ \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right] \frac{1}{\sqrt{EG}}$$

En esta última fórmula, el término entre corchetes es igual a  $F$ . Finalmente se tiene la expresión que permite obtener el valor de  $\alpha'$ :

$$\cos \alpha' = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (2.14)$$

**Ejemplo:** considérese el punto de coordenadas ( $\varphi = 40^\circ N$ ;  $\lambda = 60^\circ E$ ) en la proyección sinusoidal, cuyas coordenadas cartesianas son:

$$X = R\lambda \cos \varphi$$

$$Y = R\varphi$$

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = -R \operatorname{sen} \varphi \lambda; \quad \frac{\partial X}{\partial \lambda} = R \cos \varphi; \quad \frac{\partial Y}{\partial \varphi} = R; \quad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = 0$$

Entonces:

$$E = X_\varphi'^2 + Y_\varphi'^2 = R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \lambda^2 + R^2 = R^2 (1 + \operatorname{sen}^2 \varphi \lambda^2)$$

$$G = X_\lambda'^2 + Y_\lambda'^2 = R^2 \cos^2 \varphi$$

$$F = X_\varphi' X_\lambda' + Y_\varphi' Y_\lambda' = (-R\lambda \operatorname{sen} \varphi) R \cos \varphi = -R^2 \lambda \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha' &= \frac{-R^2 \lambda \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{\sqrt{R^2 (1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) R^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{-R^2 \lambda \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{R^2 \cos \varphi \sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \\ &= \frac{-\lambda \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \end{aligned}$$

Reemplazando por los valores de las coordenadas geográficas del punto:

$$\begin{aligned} \cos \alpha' &= \frac{-60^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \operatorname{sen} 40^\circ}{\sqrt{1 + (\frac{\pi}{3})^2 \operatorname{sen}^2 40^\circ}} = \frac{-\frac{\pi}{3} \operatorname{sen} 40^\circ}{\sqrt{1 + (\frac{\pi}{3})^2 \operatorname{sen}^2 40^\circ}} = \frac{-0,673125611}{\sqrt{1 + 0,453098009}} \\ \alpha' &= 123^\circ 56' 44'' \end{aligned}$$

Se obtiene el mismo resultado calculando  $\theta_m$  y  $\theta_p$  y restando  $\theta_p - \theta_m$ .

En efecto:

$$\begin{aligned} \cos \theta_m &= \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{1}{\sqrt{E}}}{R \sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{R}{R \sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{60^\circ \pi}{180^\circ})^2 \operatorname{sen}^2 40^\circ}} \\ &= 0,829569037. \end{aligned}$$

$$\text{Como } \operatorname{tg} \theta_m = \frac{\operatorname{sen} \theta_m}{\cos \theta_m} = \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi}}{\frac{\partial Y}{\partial \varphi}} = \frac{-R\lambda \cos \varphi}{R} = -\lambda \cos \varphi < 0,$$

entonces:  $\theta_m = -33^\circ 56' 44''$ .

Por otra parte:

$$\cos \theta_p = \frac{\frac{\partial Y}{\partial \lambda} \frac{1}{\sqrt{G}}}{R} = 0$$

$$\text{Además } \operatorname{tg} \theta_p = \frac{\operatorname{sen} \theta_p}{\cos \theta_p} = \frac{\frac{\partial X}{\partial \lambda}}{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}} = \frac{R \cos \varphi}{0} \rightarrow \infty. \text{ Por lo tanto: } \theta_p = 90^\circ.$$

Entonces:  $\alpha' = 90^\circ + 33^\circ 56' 44'' = 123^\circ 56' 44''$ .

#### 2.6.4 Valores de los semiejes de la elipse de Tissot (máxima y mínima deformación lineal). Tangentes principales

En la esfera (y también en el elipsoide), en cada punto el meridiano y el paralelo forman un ángulo de  $90^\circ$ , mientras que en la proyección forman un ángulo  $\alpha'$  dado por las fórmulas del párrafo anterior; salvo en las proyecciones isógonas, el mismo tiene un valor  $\alpha' = 90^\circ \pm \Delta\alpha$  cuando  $F$  es distinto de cero, siendo semidiámetros conjugados de la Elipse de Tissot. Las direcciones en que se encuentran los ejes de la Elipse de Tissot se denominan “direcciones principales” y, por consiguiente, forman entre sí un ángulo  $\alpha' = 90^\circ$ .

En la Figura 2.23 están dibujados en la esfera el meridiano  $m$  y el paralelo  $p_1$  formando los ángulos  $\hat{1} = \hat{2} = 90^\circ$ .

En la Figura 2.24 están trazadas las proyecciones  $m'$  y  $p'_1$  de los paralelos citados, tales que los ángulos  $\hat{1}' = 90^\circ - \Delta\alpha$  y  $\hat{2}' = 90^\circ + \Delta\alpha$ .

Si las líneas  $p_1$  y  $m$  de la esfera pasan a la posición  $m$  y  $p_2$ , respectivamente, en la proyección las correspondientes líneas iniciales  $p'_1$  y  $m'$  habrán girado hasta coincidir con  $m'$  y  $p'_2$  formando entonces el ángulo  $\hat{2}' = 90^\circ + \Delta\alpha$ .

Puede suponerse entonces que las líneas  $p_1$  y  $m$  de la esfera, formando siempre un ángulo de  $90^\circ$ , giran alrededor de su vértice hasta que sus correspondientes en la proyección  $p'_1$  y  $m'$  pasan de  $90^\circ - \Delta\alpha$  por un valor de  $90^\circ$  antes de formar un ángulo de  $90^\circ + \Delta\alpha$ . Puede imaginarse que ello ocurrirá cuando las líneas en la esfera ocupen las posiciones  $t$ , y en la proyección las posiciones  $t'$ . Tanto en la esfera como en el plano dichas líneas formarán un ángulo de  $90^\circ$ , llamándose entonces tangentes principales en la esfera y **direcciones principales** en la proyección.

Esta conclusión se enuncia en el siguiente principio, debido a Tissot:

“Existen en cada punto de la esfera dos tangentes perpendiculares entre sí, tales que sus proyecciones respectivas se cortan también en ángulo recto (*ejes de la Elipse de Tissot*) y no hay más que dos direcciones que gocen de esta propiedad, salvo que la proyección sea isógona (o conforme)”. A las tangentes que satisfagan esta condición se las llama **tangentes principales** ( $t$  de la Figura 2.23). Los acimutes de estas tangentes principales

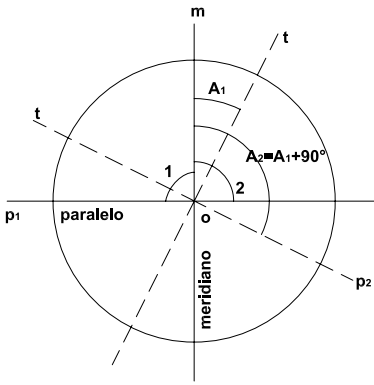


Figura 2.23: Esfera.

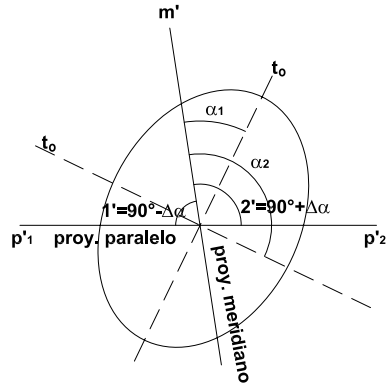


Figura 2.24: Proyección.

(en la esfera) son  $A_1$  y  $A_1 + 90^\circ$  (Figura 2.23).

El valor de los módulos de alteración lineal de las direcciones desde un punto  $O$  de la esfera está dado por la fórmula 2.9 ya deducida:

$$\tau^2 = \left( E \cos^2 A + \frac{F \operatorname{sen} 2A}{\cos \varphi} + \frac{G \operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 \varphi} \right) \frac{1}{R^2}$$

En esta expresión el módulo de alteración lineal en un punto  $O$  queda expresado en función del acimut ( $A$ ) del elemento de arco en la esfera. Si existen dos direcciones en la proyección de máxima y mínima deformación ( $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  de la Figura 2.24), correspondientes a los ejes mayor y menor de la elipse indicatriz (que es semejante a la elipse de la Figura 2.24), éstas se manifestarán sobre los acimutes  $A_1$  y  $A_2$ , que hacen máximo y mínimo el módulo de deformación lineal en la expresión anterior.

Para hallar estos dos acimutes se debe derivar dicha expresión respecto del acimut ( $A$ ) e igualar la derivada a cero.

$$\begin{aligned} \frac{d\tau^2}{dA} &= \frac{1}{R^2} \left( -E2 \cos A \operatorname{sen} A + G \frac{2 \operatorname{sen} A \cos A}{\cos^2 \varphi} + F \frac{2 \cos 2A}{\cos \varphi} \right) = 0 \\ -\operatorname{sen} 2A \left( E - \frac{G}{\cos^2 \varphi} \right) &= -2F \frac{\cos 2A}{\cos \varphi} \therefore \operatorname{tg} 2A = \frac{2F}{\cos \varphi} \frac{\cos^2 \varphi}{E \cos^2 \varphi - G} \\ \operatorname{tg} 2A &= \frac{2F \cos \varphi}{E \cos^2 \varphi - G} \end{aligned} \quad (2.15)$$

De aquí se obtienen los valores de  $A_1$  y de  $A_2 = A_1 + 90^\circ$ .

Con esta expresión es posible encontrar, para cada proyección, los valores de los acimutes  $A_1$  y  $A_2$  de las direcciones (en la esfera) de máxima y

mínima deformación (en la proyección). Para determinar cuándo es máximo o mínimo se halla la derivada segunda de  $\tau$  respecto de la variable  $A$ . Si  $\frac{d^2\tau}{dA^2} < 0$  corresponde al valor máximo y si  $\frac{d^2\tau}{dA^2} > 0$ , a un mínimo.

$$\begin{aligned}\frac{d\tau^2}{dA^2} &= \frac{1}{R^2} \left( -E \operatorname{sen} 2A + \frac{G}{\cos^2 \varphi} \operatorname{sen} 2A - \frac{2F}{\cos \varphi} \cos 2A \right) \\ \frac{d^2\tau^2}{dA^2} &= \frac{1}{R^2} \left[ 2 \cos 2A + \left( \frac{G}{\cos^2 \varphi} - E \right) - \frac{4F}{\cos \varphi} \operatorname{sen} 2A \right] \quad (2.16)\end{aligned}$$

Luego, utilizando la fórmula 2.9 se hallan los valores de  $N_1$  y  $N_2$ .

**Ejemplo:** en la proyección sinusoidal ( $X = R\lambda \cos \varphi$ ,  $Y = R\varphi$ ) ya se ha calculado que:

$$E = R^2(1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)$$

$$G = R^2 \cos^2 \varphi$$

$$F = -R\lambda \operatorname{sen} \varphi R \cos \varphi = -R^2 \lambda \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

Entonces, en el punto  $\varphi = 30^\circ$  y  $\lambda = 15^\circ$  es:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2A_1 &= \frac{2F \cos \varphi}{E \cos^2 \varphi - G} = \frac{-2R^2 \lambda \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi}{R^2(1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \cos^2 \varphi - R^2 \cos^2 \varphi} = \\ &= \frac{-2\lambda \operatorname{sen} \varphi}{(1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) - 1} = \frac{-2}{\lambda \operatorname{sen} \varphi} = \\ &= \frac{-2}{15^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \operatorname{sen} 30^\circ} = -15,27887454\end{aligned}$$

obteniéndose los valores:

$$A_1 = -43^\circ 07' 40''$$

$$A_2 = 46^\circ 52' 20''$$

En la fórmula 2.16:

$$\frac{d\tau^2}{dA^2} = \frac{2 \cos 2A}{R^2} \left[ \frac{R^2 \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} - R^2(1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \right] - \frac{4(-R^2 \lambda \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi)}{\cos \varphi} \operatorname{sen} 2A$$

se reemplaza  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\lambda = 15^\circ$  y  $A = 43^\circ 07' 40''$  y se tiene:

$$\begin{aligned}2 \cos[2(-43^\circ 07' 40'')] [1 - 1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi] + 4\lambda \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}[2(-43^\circ 07' 40'')] = \\ = -0,00223801 - 0,5224809 < 0. \text{ Se trata entonces de un } \mathbf{m\acute{a}ximo}.\end{aligned}$$

Para  $A = 46^\circ 52' 20''$  es:

$$\begin{aligned}2 \cos[2(46^\circ 52' 20'')] [1 - 1 - \lambda^2 \operatorname{sen}^2 30^\circ] + 4\lambda \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen}[2(46^\circ 52' 20'')] = \\ = 0,02238 + 0,5224809 > 0. \text{ Se tiene entonces un } \mathbf{m\acute{i}nimo}.\end{aligned}$$



**Nota 1:** estos acimutes son de las tangentes principales **sobre la esfera**. Los correspondientes en la proyección,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , serán calculados luego.

**Nota 2:** reemplazando los valores de  $A_1$  y  $A_2$  en la expresión 2.9, se calculan los valores de  $N_1$  y  $N_2$ .

$$\begin{aligned}
 N_1^2 &= \frac{E}{R^2} \cos^2 A_1 + \frac{F \operatorname{sen} 2A_1}{R^2 \cos \varphi} + \frac{G \operatorname{sen}^2 A_1}{R^2 \cos^2 \varphi} \\
 &= \frac{R^2}{R^2} (1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \cos^2 A_1 - \frac{R^2 \lambda \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{R^2 \cos \varphi} \operatorname{sen} 2A_1 + \frac{R^2 \cos^2 \varphi}{R^2 \cos^2 \varphi} \operatorname{sen}^2 A_1 \\
 &= (1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \cos^2 A_1 - \lambda \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 2A_1 + \operatorname{sen}^2 A_1 \\
 &= \cos^2 A_1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 A_1 - \lambda \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 2A_1 + \operatorname{sen}^2 A_1 \\
 &= 1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 A_1 - \lambda \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} 2A_1 \\
 &= 1 + \lambda \operatorname{sen} \varphi (\lambda \operatorname{sen} \varphi \cos^2 A_1 - \operatorname{sen} 2A_1) \\
 &= 1 + \frac{15^\circ \pi}{180^\circ} \operatorname{sen} 30^\circ \left[ \frac{15^\circ \pi}{180^\circ} \operatorname{sen} 30^\circ \cos^2 (-43^\circ 07' 40'') - \operatorname{sen} 2(-43^\circ 07' 40'') \right]
 \end{aligned}$$

$$N_1^2 = 1,139747126 \text{ y } N_1 = 1,067589399$$

$$\begin{aligned}
 N_2^2 &= 1 + \lambda \operatorname{sen} \varphi (\lambda \operatorname{sen} \varphi \cos^2 A_2 - \operatorname{sen} 2A_2) \\
 &= 1 + 0,1308996(0,1308996 \times 0,68362768 - 0,99786526) \\
 &= 0,877387604 \text{ y } N_2 = 0,936689705
 \end{aligned}$$

Se verifica que  $N_1 N_2 = 1$ .

**Nota 3:** para calcular los valores de  $N_1$  y  $N_2$  se pueden seguir distintos caminos a partir de las dos ecuaciones con dos incógnitas que se obtienen de los Teoremas de Apolonio.

$$N_1^2 + N_2^2 = k^2 + h^2$$

$$N_1 N_2 = hk \operatorname{sen} \alpha'$$

$$\text{siendo } \cos \alpha' = \frac{F}{\sqrt{EG}}, h = \frac{\sqrt{E}}{R} \text{ y } k = \frac{\sqrt{G}}{R \cos \varphi}$$

**Ejemplo:** analizando nuevamente el caso de la Proyección Sinusoidal en el punto de coordenadas  $\varphi = 30^\circ N$ ,  $\lambda = 15^\circ E$ , se verá que se obtienen los mismos valores para  $N_1$  y  $N_2$ .

$$\cos \alpha' = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{-R^2 \lambda \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{\sqrt{R^2 (1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) R^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{-R^2 \lambda \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{R^2 \cos \varphi \sqrt{(1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}}$$

$$\cos \alpha' = \frac{-15^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \operatorname{sen} 30^\circ}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi 15^\circ}{180^\circ}\right)^2 \operatorname{sen}^2 30^\circ}} = -0,129792437, \text{ obteniéndose el valor de}$$

$$\alpha' = 97^\circ 27' 27''.$$

En esta proyección:

$$h^2 = \frac{E}{R^2} = \frac{R^2(1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}{R^2} \quad k^2 = \frac{G}{R^2 \cos^2 \varphi} = \frac{R^2 \cos^2 \varphi}{R^2 \cos^2 \varphi} = 1$$

Como:

$$N_1^2 + N_2^2 = k^2 + h^2$$

$$2N_1 N_2 = 2kh \operatorname{sen} \alpha' = 2$$

Sumando miembro a miembro las dos últimas expresiones:

$$(N_1 + N_2)^2 = (k + h)^2 + 2$$

$$N_1 + N_2 = \sqrt{h^2 + k^2 + 2} = \sqrt{h^2 + 3}$$

Restando miembro a miembro las mismas expresiones que antes:

$$(N_1 - N_2)^2 = k^2 + h^2 - 2 = \sqrt{h^2 - 1}$$

Entonces:

$$N_1 = \frac{\sqrt{h^2 + k^2 + 2} + \sqrt{h^2 + k^2 - 2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + 1 + 2} + \sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + 1 - 2}}{2}$$

$$N_1 = \frac{\sqrt{4 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + \sqrt{\lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4 + 0,01713473} + 0,130899693}{2} = 1,067589378$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + 3} - \sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - 1}}{2} = 0,936689706$$

### 2.6.5 Dirección de los ejes de la elipse de Tissot

Para hallar las direcciones de los ejes de la Elipse de Tissot respecto del eje de las ordenadas ( $Y$ ) en el plano de proyección, se tiene (Figura 2.25):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dX}{dY}$$

siendo

$$\frac{dX}{dY} = \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial X}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} d\lambda} \quad (2.17)$$

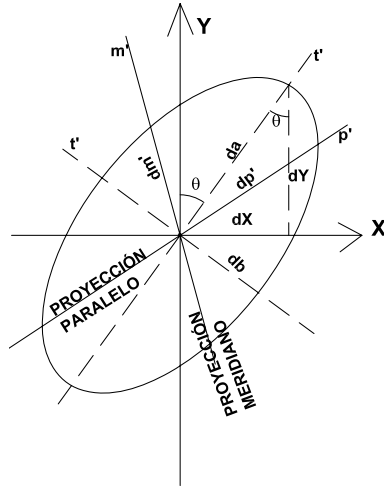


Figura 2.25: Elipse infinitesimal en la proyección.

Además, en la esfera (Figura 2.26):

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{dp}{dm} = \frac{R \cos \varphi d\lambda}{R d\varphi} \therefore d\lambda = \frac{\operatorname{tg} A d\varphi}{\cos \varphi} \quad (2.18)$$

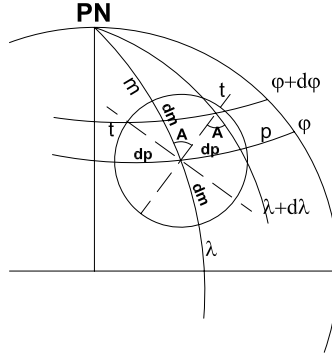


Figura 2.26: Círculo infinitesimal en la esfera.

Reemplazando 2.18 en 2.17:

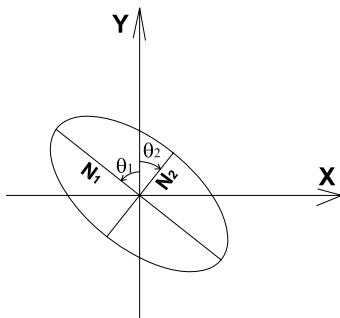
$$\frac{dX}{dY} = \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial X}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial Y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} d\lambda} = \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi} + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\operatorname{tg} A}{\cos \varphi}}{\frac{\partial Y}{\partial \varphi} + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \frac{\operatorname{tg} A}{\cos \varphi}}$$

y multiplicando por  $\cos \varphi$  numerador y denominador del segundo miembro:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dX}{dY} = \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \operatorname{tg} A}{\frac{\partial Y}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \operatorname{tg} A} \quad (2.19)$$

$\theta$  es el ángulo que forma el eje de las ordenadas, que es paralelo a la proyección del meridiano central, con la dirección de los semiejes de la Elipse de Tissot en la proyección que, en la esfera, corresponden al acimut  $A$  de la fórmula 2.18.

Por lo tanto, si se reemplaza  $A$  en la expresión 2.19 se obtendrán los valores de  $\theta$  correspondientes a los semiejes  $N_1$  y  $N_2$  de la Elipse de Tissot.



**Figura 2.27:** Elipse de Tissot para la proyección sinusoidal.

**Ejemplo:** ya se calcularon en la proyección sinusoidal, para el punto ( $\varphi = 30^\circ; \lambda = 15^\circ$ ), los valores de  $A : A_1 = -43^\circ 07' 40''$  y  $A_2 = 46^\circ 52' 20''$ .

Entonces:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{-R \lambda \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + R \cos \varphi \operatorname{tg} A_1}{R \cos \varphi} = -\lambda \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} A_1$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = -15^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \operatorname{sen} 30^\circ + \operatorname{tg}(-43^\circ 07' 40'')$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = -1,067592413$$

Entonces  $\theta_1 = -46^\circ 52' 21''$  y  $\theta_2 = 43^\circ 07' 39''$ .

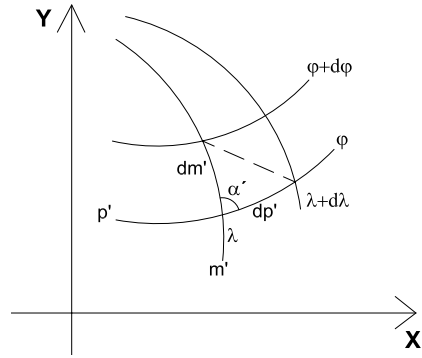
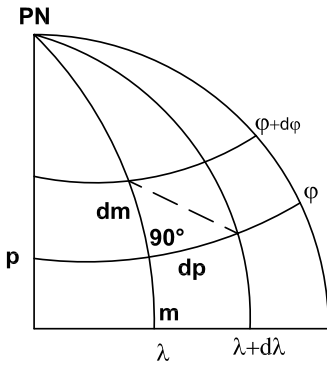
## 2.6.6 Módulo de alteración superficial

Se llama módulo de alteración superficial o areal a la relación entre las áreas diferenciales en la proyección y en la esfera.

$$\mu = \frac{dA'}{dA}$$

Si se considera un triángulo diferencial limitado por arcos de meridiano y arcos de paralelos en la esfera y en el plano, según las Figuras 2.28 y 2.29, se tiene:

$$\mu = \frac{dA'}{dA} = \frac{\frac{1}{2} dp' dm' \operatorname{sen} \alpha'}{\frac{1}{2} dp dm} = \frac{dp' dm'}{dp dm} \operatorname{sen} \alpha' = kh \operatorname{sen} \alpha'$$



**Figura 2.28:** Triángulo diferencial en la esfera. **Figura 2.29:** Proyección del triángulo diferencial.

pues, por la definición de módulo de alteración lineal en el sentido de paralelos y meridianos:

$$\frac{dp'}{dp} = k \text{ y } \frac{dm'}{dm} = h$$

Se sabe, por la segunda parte del teorema de Apolonio aplicado a la Elipse de Tissot, que el producto de dos semidiámetros conjugados por el seno del ángulo entre los mismos es igual al producto de los semiejes de la elipse:  $kh \text{sen } \alpha' = N_1 N_2$ .

Por lo tanto, el módulo de alteración superficial es igual al producto de los semiejes de la Elipse de la Tissot

$$\mu = kh \text{sen } \alpha' = N_1 N_2 \tag{2.20}$$

### 2.6.7 Deformación angular

Para facilitar el estudio analítico de las deformaciones angulares, conviene referir las coordenadas de los puntos de la proyección al sistema coordenado ortogonal, coincidente con las direcciones que corresponden a las de máxima y mínima deformación en la proyección, y en el plano adoptar los ejes de la Elipse Indicatriz como ejes de coordenadas. Sobre la superficie de la esfera, a partir de  $P$  se tiene el sistema ortogonal  $Pxy$ , y sobre la proyección, el sistema  $P'XY$ . Se imaginan los dos sistemas coincidentes, el eje de las  $X$  según el eje mayor de la elipse y el de las  $Y$  según el eje menor.

El origen de este sistema es el punto  $P$  coincidente con  $P'$  (Figura 2.30), siendo  $P$  el centro del círculo elemental, tangente a la esfera de radio  $ds$ , y  $P'$  es el centro de la elipse que resulta de la proyección del citado círculo y cuyos semiejes son  $da$  y  $db$ . En virtud de la propiedad de la elipse (ver Capítulo 1)  $\frac{Y'}{Y} = \frac{da}{db}$ . Si  $u$  es el ángulo que forma  $PQ$  con el eje  $X$  y  $u'$  el que forma  $PQ'$  con el eje  $X$ :

$$\frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} u'} = \frac{\frac{Y'}{X}}{\frac{Y}{X}} = \frac{Y'}{Y} = \frac{da}{db}$$

y dividiendo en el segundo miembro numerador y denominador por  $ds$ :

$$\frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} u'} = \frac{\frac{da}{ds}}{\frac{db}{ds}} = \frac{N_1}{N_2} \quad (2.21)$$

$$\frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} u'} = \frac{N_1 - N_2}{N_2 + N_2}$$

$$\frac{\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} - \frac{\operatorname{sen} u'}{\cos u'}}{\frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} + \frac{\operatorname{sen} u'}{\cos u'}} = \frac{\cos u' \operatorname{sen} u - \cos u \operatorname{sen} u'}{\cos u' \operatorname{sen} u + \cos u \operatorname{sen} u'} = \frac{\operatorname{sen}(u - u')}{\operatorname{sen}(u + u')} = \frac{N_1 - N_2}{N_2 + N_2}$$

$$\operatorname{sen}(u - u') = \frac{N_1 - N_2}{N_2 + N_2} \operatorname{sen}(u + u')$$

$u - u'$  es la diferencia entre una dirección en la esfera y la correspondiente dirección en la proyección, es decir, la deformación angular en esa dirección en la proyección con respecto a la esfera.

La diferencia máxima en la dirección se obtiene haciendo  $u + u' = 90^\circ$ .

$$[\operatorname{sen}(u - u')]_{\max} = \frac{N_1 - N_2}{N_2 + N_2}$$

Al  $[\operatorname{sen}(u - u')]_{\max}$  le corresponde  $(u - u')_{\max}$ , por lo tanto  $(u - u')_{\max} = \operatorname{arcsen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$  y llamando  $u - u' = \delta$ :

$$\delta_{\max} = \operatorname{arcsen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

Ésta es la **deformación máxima angular en una dirección**.

En el caso de un ángulo, por ejemplo, el  $QPM$  de la Figura 2.30:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = (u - u') + (u_1 - u'_1)$$

se deben sumar los errores máximos en las direcciones de cada lado del ángulo ( $\delta_{1\max}$  y  $\delta_{2\max}$ ).

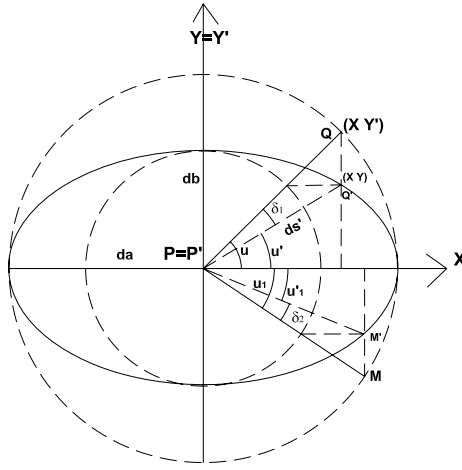


Figura 2.30: Deformación máxima angular.

$$\delta_{\max} = \delta_{1\max} + \delta_{2\max} = (u - u')_{\max} + (u_1 - u'_1)_{\max}$$

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arcsen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \quad (2.22)$$

es la **deformación máxima en un ángulo**.

### Proyecciones conformes (o isógonas)

Para que una proyección sea conforme debe ser  $u = u'$ . Por lo tanto, en la fórmula 2.21,  $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} u'$  y entonces  $\frac{\operatorname{tg} u}{\operatorname{tg} u'} = \frac{N_1}{N_2} = 1$ , lo que implica que  $N_1 = N_2$ .

Es decir, que para que la proyección sea **conforme** (o **isógona**) la elipse indicatriz de Tissot debe transformarse en una circunferencia, por cuyo motivo también  $N_1 = N_2 = h = k$ .

La otra posibilidad es que  $N_1 \neq N_2$ . Esto implica que  $\operatorname{sen} 2u = 0$  y, por lo tanto:

$$\begin{cases} u = 0^\circ \Rightarrow u' = 0^\circ \\ u = 90^\circ \Rightarrow u' = 90^\circ \end{cases}$$

### Condiciones de conformidad de las proyecciones cartográficas: Ecuaciones de Cauchy-Riemann

La obtención de estas ecuaciones se basa en el hecho de que en las proyecciones conformes debe verificarse que los semiejes de la Elipse de Tissot sean iguales.

Ya se ha visto que el módulo de alteración superficial es igual al producto de los semiejes de la elipse de Tissot (fórmula 2.20):

$$\mu = N_1 N_2$$

Además se dedujo que:

$$N_1^2 + N_2^2 = k^2 + h^2$$

Multiplicando por 2 la primera identidad, resulta:

$$2N_1 N_2 = 2\mu$$

Restando miembro a miembro las dos últimas expresiones se obtiene:

$$N_1^2 + N_2^2 - 2N_1 N_2 = k^2 + h^2 - 2\mu$$

Entonces:

$$(N_1 - N_2)^2 = k^2 + h^2 - 2\mu$$

También se demostró que:

$$\mu = kh \operatorname{sen} \alpha'$$

donde  $\operatorname{sen} \alpha' = \left[ \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} - \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right] \frac{1}{\sqrt{EG}}$ ,  $h = \frac{\sqrt{E}}{\rho}$  y  $k = \frac{\sqrt{G}}{r}$ ,

Entonces  $\mu = \frac{1}{\rho r} = \left[ \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} - \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right]$ , siendo  $\rho$  el radio de curvatura de la elipse meridiana en  $A$  (de latitud  $\varphi$ ) y  $r$  el radio del paralelo de latitud  $\varphi$ .

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} (N_1 - N_2)^2 &= \frac{1}{\rho^2} \left[ \left( \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{1}{r^2} \left[ \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)^2 \right] \\ &\quad - 2 \frac{1}{\rho r} \left[ \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} - \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right] \\ (N_1 - N_2)^2 &= \left[ \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)^2 + 2 \frac{1}{\rho r} \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right] \\ &\quad + \left[ \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right)^2 - 2 \frac{1}{\rho r} \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right) \right] \\ (N_1 - N_2)^2 &= \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial X}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right)^2 \end{aligned}$$



Como se dijo antes, debe ser  $N_1 = N_2$  y, por lo tanto, de la última igualdad resulta:

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial X}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right) = 0 \text{ y } \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial \lambda}\right) = 0$$

Entonces, en el elipsoide:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right) = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)$$

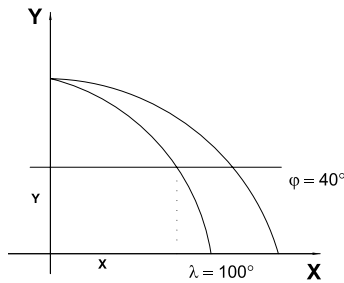
$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)$$

En la esfera:  $r = R \cos \varphi$  y  $\rho = R$ ; por lo tanto, las ecuaciones anteriores se enuncian como:

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)$$

Estas son las **ecuaciones de conformidad de Cauchy-Riemann**.



**Figura 2.31:** Proyección sinusoidal.

**Ejemplo:** se analizará si la proyección sinusoidal verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Las ecuaciones de la carta son:

$$X = R\lambda \cos \varphi$$

$$Y = R\varphi$$

Por lo tanto:

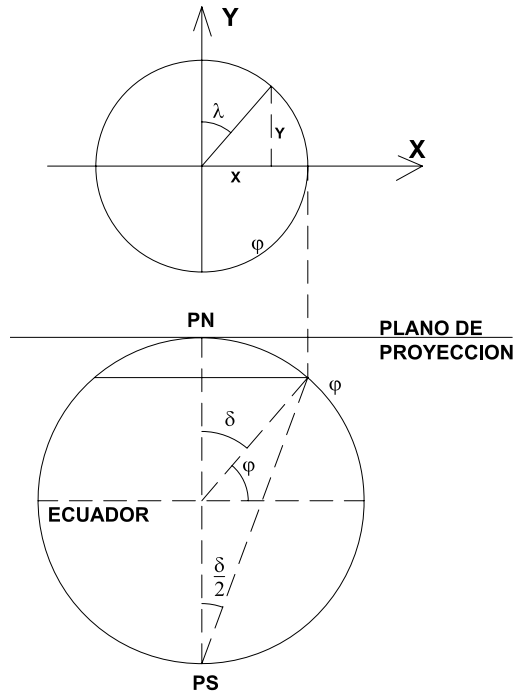
$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = -R \operatorname{sen} \varphi \lambda \quad \frac{\partial X}{\partial \lambda} = R \cos \varphi$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi} = R \quad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{1}{R} \left( \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right) = \frac{-R \operatorname{sen} \varphi \lambda}{R}; \quad -\frac{1}{R \cos \varphi} \left( \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right) = 0$$

$$\frac{1}{R} \left( \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right) = \frac{R}{R} = 1; \quad \frac{1}{R \cos \varphi} \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right) = \frac{R \cos \varphi}{R \cos \varphi} = 1$$

Evidentemente no se verifican las condiciones de conformidad de Cauchy-Riemann. Esto ocurre porque la proyección no es conforme.



**Figura 2.32:** Proyección acimutal estereográfica polar.

**Ejemplo:** se verá ahora si la proyección acimutal estereográfica polar verifica las condiciones de conformidad. Sus ecuaciones son:

$$X = r_{\varphi} \operatorname{sen} \lambda$$

$$Y = r_{\varphi} \cos \lambda$$

Estas ecuaciones pueden escribirse también en función de las coordenadas geográficas de un punto:

$$X = 2R \operatorname{tg}(90^{\circ} - \varphi) \operatorname{sen} \lambda$$

$$Y = 2R \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi) \cos \lambda$$

O también:

$$X = 2R \operatorname{tg} \delta \operatorname{sen} \lambda$$

$$Y = 2R \operatorname{tg} \delta \cos \lambda$$

siendo  $\delta = 90^\circ - \varphi$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \delta} &= 2R \sec^2 \frac{\delta}{2} \frac{1}{2} \operatorname{sen} \lambda \\ \frac{\partial X}{\partial \lambda} &= 2R \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \cos \lambda \\ \frac{\partial Y}{\partial \delta} &= 2R \sec^2 \frac{\delta}{2} \frac{1}{2} \cos \lambda \\ \frac{\partial Y}{\partial \lambda} &= -2R \sec^2 \frac{\delta}{2} \frac{1}{2} \operatorname{sen} \lambda \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{R \operatorname{sen} \delta} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = -\frac{1}{R \operatorname{sen} \delta} (-2) R \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \operatorname{sen} \lambda = \frac{2R \frac{\operatorname{sen} \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\delta}{2}} \operatorname{sen} \lambda}{R 2 \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos^2 \frac{\delta}{2}}$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial Y}{\partial \delta} = \frac{1}{R} R \sec^2 \frac{\delta}{2} \frac{\delta}{2} \cos \lambda \quad \frac{1}{R} \frac{\partial X}{\partial \delta} = \frac{1}{R} R \sec^2 \frac{\delta}{2} \frac{\delta}{2} \operatorname{sen} \lambda$$

$$\frac{1}{R \operatorname{sen} \delta} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = \frac{2R \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \cos \lambda}{R 2 \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}} = \frac{\cos \lambda}{\cos^2 \frac{\delta}{2}}$$

Reemplazando  $\delta$  por  $90^\circ - \varphi$ , resulta:

$$-\frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\cos^2 \frac{1}{2}(90^\circ - \varphi)} \quad \frac{1}{R} \frac{\partial X}{\partial \varphi} = \sec^2 \frac{1}{2}(90^\circ - \varphi) \operatorname{sen} \lambda$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} = \sec^2 \frac{1}{2}(90^\circ - \varphi) \cos \lambda \quad \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} = \frac{\cos \lambda}{\cos^2 \frac{1}{2}(90^\circ - \varphi)}$$

Como se ve, se verifican las condiciones de conformidad de Cauchy-Riemann.

## 2.7 Escalas numéricas y gráficas

### 2.7.1 Escalas numéricas

En Cartografía se define la escala como:

$$E = \frac{\text{distancia medida en el dibujo (carta, mapa) de la proyección cartográfica}}{\text{distancia correspondiente medida sobre la superficie terrestre (esfera, elipsoide)}}$$

es decir:

$$E = \frac{dp}{DE} \quad (2.23)$$

Se sabe que este cociente es una cantidad variable, pues  $dp$  se encuentra en un plano (hoja de dibujo) y  $DE$  es una distancia de una superficie que no es desarrollable sobre un plano, produciéndose inevitablemente deformaciones.

Llamando  $Dp$  a la distancia correspondiente en la proyección cartográfica (tamaño natural) y multiplicando numerador y denominador por  $Dp$ , se tiene que:

$$E = \frac{dp}{DE} = \frac{dp \times Dp}{DE \times Dp} = \left( \frac{dp}{Dp} \right) \times \left( \frac{Dp}{DE} \right)$$

El factor  $\frac{dp}{Dp}$  es el cociente entre una distancia ( $dp$ ) medida en el dibujo (carta, mapa) y la correspondiente distancia en la proyección ( $Dp$ ), medida sobre la proyección representada en tamaño natural (sin alterar sus dimensiones obtenidas por la construcción de la proyección cartográfica sobre un plano). Por lo tanto,  $\frac{dp}{Dp}$  es la escala con la cual se representa gráficamente la proyección sobre un plano; tiene un valor constante. Esta representación es fiel (de plano a plano). Se denomina **escala nominal** y es la que aparece consignada en los mapas y cartas. Algunos autores la denominan **escala principal**.

El factor  $\frac{dp}{DE}$  es el cociente entre una distancia medida en la proyección ( $Dp$ ) y la correspondiente distancia sobre la superficie terrestre ( $DE$ ), ya sea esfera o elipsoide. Por lo tanto, este cociente es el ya definido módulo de alteración lineal ( $\tau$ ) que, salvo sobre algunas líneas, es un valor variable, mayor o menor que la unidad. Por lo tanto, la escala ( $E$ ) en general también tendrá un valor variable; se denomina **escala real**.

$$E = \left( \frac{dp}{Dp} \right) \times \tau$$

Por esto es que en la bibliografía (sobre todo de origen inglés) se denomina a  $\tau$  **factor de escala** o **escala local**.

En algunas proyecciones, como las equidistantes, las direcciones a partir de uno o dos puntos tienen longitudes correctas (sin deformación); por lo tanto,  $\tau = 1$ . Sobre estas líneas la escala real ( $E$ ) es igual a la escala nominal  $\frac{dp}{Dp}$ .

En otras proyecciones, sólo sobre muy pocas líneas no existe deformación. Por ejemplo, en las proyecciones cilíndricas normales tangentes, sólo

el Ecuador y –únicamente sobre éste– la escala real es igual a la nominal ( $\tau = 1$ ).

En otras proyecciones no existen líneas o distancias que tengan longitudes sin deformación ( $\tau$  siempre es distinto de 1) y en ese caso la escala real es distinta de la escala nominal en toda la carta o mapa. Esto ocurre en la proyección gnomónica.

Fundamentalmente, se presentan tres clases de problemas a resolver en escalas:

- a) A partir del conocimiento de la dimensión en la proyección cartográfica ( $Dp$ , en la figura 2.3, 3er esquema), hallar la dimensión correspondiente en el mapa o carta topográfica ( $dp$ , en la figura 2.3, 4to esquema). Es el problema que tiene que resolver continuamente el dibujante del mapa o carta. Se resuelve utilizando la escala nominal ( $\frac{1}{M}$ ):

Distancia en el dibujo = distancia en la proyección  $\times$  escala nominal

$$dp = Dp \times \frac{1}{M}$$

- b) Conociendo una distancia en el mapa o carta ( $dp$ ) y la escala nominal del mismo ( $\frac{1}{M}$ ), hallar la distancia correspondiente en la proyección ( $Dp$ ):

$$\text{Distancia en la proyección} = \frac{\text{distancia en el mapa o carta}}{\text{escala nominal}} = \frac{dp}{\frac{1}{M}}$$

Este problema se le presenta al usuario del mapa o de la carta.

- c) Conociendo la distancia en el mapa ( $dp$ ) y la correspondiente en la proyección ( $Dp$ ), hallar la escala nominal.

Para averiguar la escala en que está confeccionado un mapa o una carta (escala nominal), y que no aparece en las referencias, se debe proceder como se describe a continuación.

En primer lugar debe identificarse la proyección utilizada, con lo cual se sabrá sobre qué líneas existe o no deformación. Pueden presentarse los casos siguientes:

a) *En la proyección existen una o varias líneas sin deformación*

( $\tau = 1$ ). En ese caso, como:

$$E = \left( \frac{dp}{Dp} \right) \times \left( \frac{Dp}{DE} \right)$$

y el factor  $\frac{Dp}{DE} = \tau = 1$  sobre la línea sin deformación, entonces:

$$E = \frac{dp}{Dp} = \frac{1}{M} \Rightarrow M = \frac{Dp}{dp},$$

siendo  $M$  el módulo o denominador de la escala.

Por ejemplo, el mapa de la Figura 2.33 está dibujado en proyección acimutal equidistante polar (Ver Capítulo 3) y se sabe que en esa proyección todas las distancias, a partir del centro de la misma, son correctas (o sea, no presentan deformación). La distancia del centro (Polo) al Ecuador en la esfera terrestre es de  $10\,000\text{km}$  ( $Dp = 10\,000\text{km}$ ) y si en el dibujo estuviera representada por un segmento de  $6,6\text{cm}$  ( $dp = 6,6\text{cm}$ ), sería:

$$M = \frac{10\,000\text{km}}{6,6\text{cm}} = \frac{1\,000\,000\,000\text{cm}}{6,6\text{cm}} = 151\,500\,000$$

La escala nominal sería entonces  $E = 1 : 151\,500\,000$ .

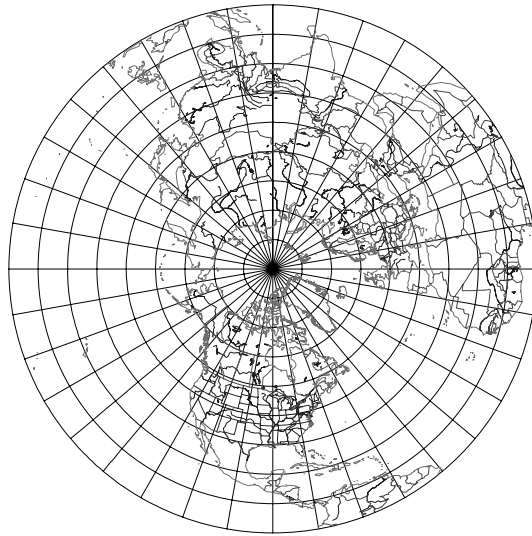
b) *En la proyección no existe ninguna línea (en ninguna dirección) de longitud correcta (todo está deformado)*. En este caso debe hallarse la distancia entre dos puntos cuya longitud en la proyección en tamaño natural se conoce ( $Dp$ ). Se mide la correspondiente en el dibujo ( $dp$ ) y se calcula el módulo de la escala nominal:

$$E_{\text{nominal}} = \frac{dp}{Dp} = \frac{1}{M}$$

es decir:

$$M = \frac{Dp}{dp}$$

Por ejemplo, el mapa de la Figura 2.34 está dibujado en la proyección gnomónica ecuatorial, siendo el centro de la proyección el punto  $O$  (intersección de la proyección del Ecuador con la proyección del meridiano central).



**Figura 2.33:** Proyección acimutal equidistante polar.

Se sabe que en la proyección en tamaño natural, la distancia del punto  $O$  a cualquier meridiano es  $Dp = R \operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0)$ , siendo  $\lambda$  la longitud geográfica del meridiano considerado y  $\lambda_0$  la longitud del meridiano central.

Para el ejemplo de la Figura 2.34,  $\lambda_0 = 80^\circ W$  y se desea conocer la distancia al meridiano de  $\lambda = 40^\circ W$ .

$$OA = Dp = 6\,370\text{km} \tan[-40^\circ - (-80^\circ)] = 6\,370\text{km} \tan 40^\circ = 5,345\text{km}.$$

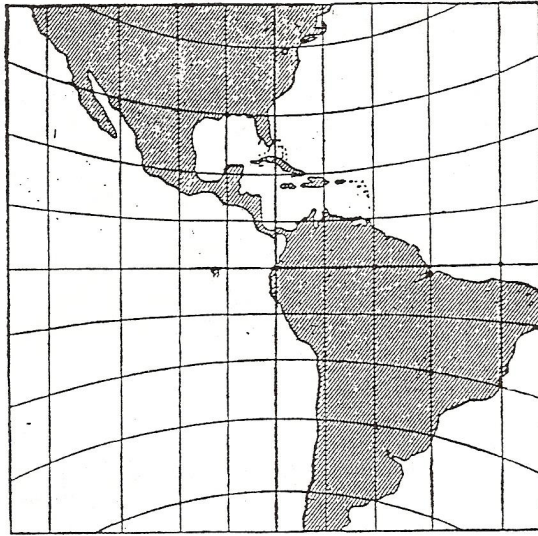
Si en el mapa  $dp = 4,4\text{cm}$ , sería:

$$M = \frac{Dp}{dp} = \frac{5\,345\text{km}}{4,4\text{cm}} = \frac{534\,500\,000\text{cm}}{4,4\text{cm}} = 121\,500\,000. \text{ Entonces la escala nominal (la que figura en el mapa) sería } E = 1 : 121\,500\,000.$$

$$\text{Escala real} = \text{Escala nominal} \times \tau.$$

### 2.7.2 Escalas gráficas

Para comodidad del uso, y sobre todo para evitar cálculos, en cartas y mapas se acompaña a la escala numérica de la escala gráfica. Ésta es un segmento de recta simple o doble, dividido en partes iguales, cada una de las cuales representa en el terreno una distancia elegida, distancia que se consigna a partir del cero, de izquierda a derecha. A la izquierda del cero, una división llamada talón está subdividida en cierto número de partes iguales, siendo generalmente diez (escala decimal), o bien en cinco partes;



**Figura 2.34:** *Proyección acimutal gnómica ecuatorial.*

sobre el talón se consignan las distancias a partir del cero de derecha a izquierda.

Por ejemplo, en la Figura 2.35 se tiene la escala gráfica correspondiente a la escala numérica 1:25 000 de tal modo que cada división representa en el terreno 500m = 0,5 km.



**Figura 2.35:** *Escala 1 : 25 000.*

$$\text{Escala nominal} = \frac{dp}{Dp} = \frac{1}{M}$$

$$\text{Entonces: } dp = \frac{Dp}{M} = \frac{500m}{25\,000} = \frac{50\,000cm}{25\,000} = 2cm.$$

El talón está dividido en cinco partes iguales, cada una de las cuales mide en el terreno  $\frac{500m}{5} = 100m$ .

Otro ejemplo está dado en la Figura 2.36.

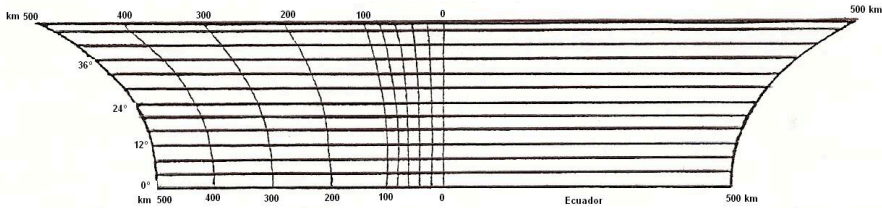


**Figura 2.36:** *Escala 1 : 50 000.*

Cuando la proyección tiene una serie de distancias que están deformadas



en forma constante en cada una de ellas, se dibuja un ábaco que consta de varias escalas gráficas paralelas y se afecta a cada una de ellas por el módulo de alteración lineal correspondiente (Figura 2.37).



**Figura 2.37:** Escala para la proyección Mercator.

Por ejemplo, se sabe que en la proyección Mercator (cilíndrica tangente isógona o conforme) posee sus paralelos (líneas rectas) con una deformación  $\tau = \sec \varphi$ . Entonces para cada paralelo se aplica la escala gráfica correspondiente a su latitud multiplicada por el factor  $\sec \varphi$  (Figura 2.37).

Escala en el Ecuador: 1: 10 000 000 (Escala nominal = escala real)

Escala en latitud 24°: 1: (10 000 000  $\cos 24^\circ = 1: 9\,135\,454$ )

Escala en latitud 48°: 1: (10 000 000  $\cos 48^\circ = 1: 6\,691\,335$ )

## 2.8 Elección de la escala conveniente

En los mapas, la elección de la escala depende esencialmente de las dimensiones del territorio a representar y de las medidas de la hoja de papel u otro material en que se desea dibujar. Por ejemplo, en una hoja de 21cm por 29,7cm la escala más grande para un mapa de Argentina continental (dimensión máxima norte-sur: 3 694 km y distancia máxima este-oeste: 1 423 km) se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Módulo escala norte - sur} &= \frac{3\,694\text{km}}{29,7\text{cm}} = \frac{369\,400\,000\text{cm}}{29,7\text{cm}} = 12\,437\,710 \\ \Rightarrow \text{Escala norte-sur} &= 1 : 12\,437\,710. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Módulo escala este - oeste} &= \frac{1\,423\text{km}}{21\text{cm}} = \frac{142\,300\,000\text{cm}}{21\text{cm}} = 6\,776\,190 \\ \Rightarrow \text{Escala este-oeste} &= 1 : 6\,776\,190. \end{aligned}$$

Se adopta la escala menor (redondeada)  $E : 1 : 13\,000\,000$ .

## 2.9 Error gráfico

Es el error que se comete cuando, deseando colocar la punta de un instrumento de dibujo o el trazado en un punto dado, en realidad se ubica ligeramente a un costado; en las mejores condiciones, utilizando un instrumento bien aguzado, este error puede ser estimado en  $\frac{1}{10}mm$ .

Teniendo en cuenta las operaciones de reproducción y de impresión, el error medio resultante puede ser evaluado en  $\frac{2}{10}mm$ .

El error gráfico también es el que comete un usuario experto en el manejo de la carta o mapa cuando efectúa una medición, por ejemplo, de la distancia entre dos puntos. Este error se traduce en la correspondiente distancia en el terreno y es tanto más grande cuanto más pequeña es la escala.

Cuando se trata de cartas topográficas, las de escala más grande deben ser elegidas de modo que el error gráfico en las mismas se traduzca en el terreno al error propio del levantamiento geodésico o topográfico. Por ejemplo, supóngase que éste sea 20 metros. Se tendrá:

$$0,2mm \times \text{módulo de la escala} = 20m$$

el módulo de la escala es:

$$M = \frac{20m}{0,2mm} = \frac{20\,000mm}{0,2mm} = 100\,000$$

resultando la escala:  $E = \frac{1}{100\,000}$ .

Como el usuario medio no tiene siempre necesidad de la máxima precisión, por las condiciones del costo y por la rapidez de la ejecución, frecuentemente se adopta una escala más pequeña, dejando la posibilidad a los usuarios más exigentes de agrandar la carta sin pérdida de precisión; por ejemplo, una carta escala 1 : 25 000 que admita un agrandamiento a 1 : 10 000 sin pérdida de precisión.

## 2.10 Mediciones sobre cartas y mapas

Se han definido anteriormente las necesidades de los usuarios en lo que concierne a las mediciones sobre las cartas –necesidades que tienen influencia sobre la elección del sistema de proyección– y se han mostrado

las relaciones recíprocas de la precisión de los levantamientos y la elección de la escala, por una parte, la escala adoptada y la precisión de las mediciones, por otra parte. Sin embargo, esos parámetros no son los únicos a tener en cuenta en el estudio de las limitaciones y posibilidades de mediciones sobre la carta en su forma definitiva, es decir, sobre la hoja editada.

El problema es complejo, pues –independientemente de los criterios que son propios a la carta y que no dependen en definitiva más que de los medios utilizados para su realización– las informaciones numéricas que se pueden extraer son funciones igualmente de instrumentos y de métodos de medición, de la ecuación del operador, y de la naturaleza misma de los elementos medidos, coordenadas horizontales o altitud de un detalle puntual, longitud o pendiente de un elemento línea, área de un elemento zonal, recuento de fenómenos, entre otros.

Luego, esas mediciones constituyen la operación de base, al menos en el estado actual de la cartografía, para la constitución de los bancos de datos que toman una importancia sin cesar creciente en las diversas ramas de la geografía y que se traducen por el pasaje de ciertos conceptos a términos numéricos o en diagramas.

El problema de la precisión de mediciones es, por lo tanto, importante, aunque no hayan suscitado hasta el presente estudios profundos y completos y aunque las nociones de precisión sean a menudo eludidas, empíricas y mal definidas. El presente título podría pues, él solo, justificar un tratado de Cartometría; se limitará al enunciado voluntariamente sumario de algunos principios de base.

## **2.11 Equivocaciones, faltas, errores y alteraciones**

Por definición, la carta es una imagen convencional que no es, y no puede ser, rigurosamente semejante al terreno representado. Cualquiera que sea la densidad de los fenómenos representados, la posibilidad de medición está condicionada, sea por una exactitud posicional (ubicación rigurosa en relación con la red de referencia), sea por una exactitud de relaciones (disposición relativa de los fenómenos uno en relación con el otro). Esas dos cualidades de la carta no coexisten más que sobre los

planos o sobre las cartas a gran escala donde la parte de convención es reducida; en el caso general, se realiza un compromiso y la exactitud de relaciones se vuelve predominante a medida que la escala decrece.

Las desviaciones en la ubicación absoluta o relativa de detalles cartográficos son imputables a equivocaciones, errores y alteraciones. Una equivocación es una desviación en principio evitable, debida a la puesta en obra defectuosa, por consiguiente de torpeza, descuido u olvido de parte de un operador. Un **error** es una desviación inevitable debido a las múltiples imperfecciones inherentes a la puesta en obra correcta de un desarrollo o proceso; el error puede ser **accidental**, por ejemplo el error de datos proveniente de la imprecisión de los levantamientos, error gráfico de redacción definido por la desviación entre posición teórica de un elemento gráfico y su trazado; el error puede ser **sistemático** cuando está inseparablemente ligado a la naturaleza misma del proceso, cualquiera que sea el operador.

Se llama **alteración**, por ejemplo, a la alteración lineal o a la alteración angular de la proyección, a la alteración semigráfica resultante del simbolismo cartográfico, a la alteración dimensional proveniente de la inestabilidad de un soporte.

La Figura 2.38 ilustra esas nociones: en (a) se ha representado con sus posiciones verdaderas y sus dimensiones reales a escala 1:5 000 un canal (trazo de la derecha), una ruta de 5 m de ancho (trazo del medio) y una línea de ferrocarril (trazo de la izquierda), la cual está bordeada por dos bosquecillos y una capilla; en (b) se notan dos equivocaciones relativas a la precisión de la capilla (ordenada falsa o inexacta defecto, equivocación) y a las formas de identificación de los bosques (mala identificación de sus límites); sobre (c) se constatan dos equivocaciones menores –debidas a la torpeza del operador– concernientes a los mismos detalles así como al trazado del canal; sin embargo, si las desviaciones que son claramente perceptibles están en el orden de la magnitud del error gráfico, por lo tanto inevitables, se tratará de errores accidentales. Por último, sobre (d), que representa los detalles precedentes dibujados con los signos convencionales de 1:25 000 agrandados a 1:5 000, se constatan alteraciones semigráficas; la exactitud de relaciones es respetada pero se ha aplicado un decalaje

planimétrico inevitable tal que un solo elemento (el canal) está rigurosamente en lugar en relación con la cuadrícula; si se hace lo mismo para la capilla (punto geodésico, por ejemplo), la disposición general de detalles será errónea.

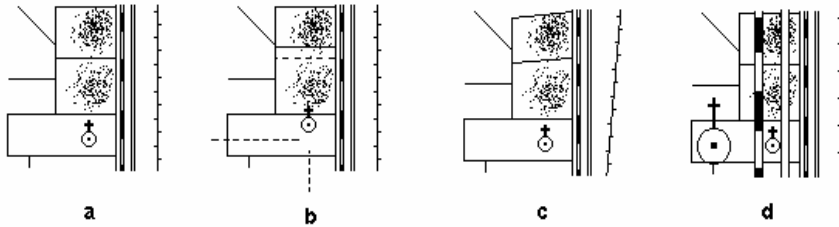


Figura 2.38: Equivocaciones, faltas, errores y alteraciones.

## 2.12 Origen de los errores y de las alteraciones. Canevás geodésico o astronómico

La exactitud posicional del fondo de carta depende en primer lugar de la precisión del canevas de base. Con técnicas modernas se puede estimar que el error medio planimétrico (o desviación típica) en la determinación de un punto geodésico es del orden de 0,10 m y que no pasa de 0,50 m para los puntos complementarios que constituyen el canevas de colocación de pares fotográficos en los levantamientos fotogramétricos. Por lo tanto, es del mismo orden o menor que el error gráfico para los planos en 1 : 5 000 y perfectamente despreciable para las cartas topográficas.

En cambio, el error medio es de alrededor de 30 m en latitud y de 50 m en longitud en la determinación de un punto astronómico por los procedimientos de campaña, en razón de las dificultades de definición a la hora de observación y de desvío de la vertical; ese desvío superior al error gráfico para la carta a escala 1:250 000 implica la existencia de un error de posición no despreciable sobre las cartas de regiones desérticas apoyadas sobre tal canevas. No obstante se conserva mejor la exactitud de relaciones si se ha tomado la precaución de espaciar suficientemente los puntos del canevas para compensar la falta de homogeneidad.

### **2.13 Sistema de proyección**

Como se ha señalado, los sistemas de proyección introducen alteraciones que son fácilmente calculables y que, por otra parte, están limitadas por diversos artificios (campo fraccionado, reducción de escala), de tal modo que su influencia sobre la validez de las mediciones efectuadas a partir de cartas a gran y mediana escala es despreciable en relación con otras fuentes de errores. Así, para una hoja de la carta de Francia a escala 1 : 50 000 situada en el borde de zona de Lambert, la alteración lineal sobre la diagonal de la hoja es del orden de 0,1 mm.

En cambio, las mediciones sobre cartas a pequeña y muy pequeña escala implican la utilización de la carta confeccionada en escala que mejor se adapta, por ejemplo en proyección equivalente para las mediciones de superficies y, en el caso particular de medición de distancias, la determinación analítica de las longitudes de segmentos a partir de las coordenadas de sus extremos (por ejemplo, por el teorema del coseno) es preferible a la medición directa.

### **2.14 Datos topográficos**

La realización del levantamiento está precedida por la construcción de las cuadrículas y de la red geográfica y por el posicionamiento en relación con la cuadrícula de puntos del canevas. El error medio cometido será del orden del error gráfico si esas operaciones son realizadas manualmente (a la regla o al compás), pero con un coordinatógrafo mecánico o electrónico la precisión práctica se estima en 0,05 mm.

Con los métodos fotogramétricos actuales, el error medio planimétrico del levantamiento depende de la precisión y de la densidad del canevas, de la naturaleza del aparato de restitución, de la escala y de la fineza de las fotografías y de la complejidad del terreno; en las determinaciones altimétricas, es necesario distinguir los errores sobre la altitud de un punto acotado, sobre la altitud y la posición de una curva de nivel y sobre la altitud de un punto cualquiera obtenido por la interpolación entre dos curvas de nivel; además de los factores precedentemente citados, interviene la pendiente del terreno, la naturaleza y densidad de la cobertura vegetal y de la equidistancia de las curvas.

En conclusión, la complejidad y la multiplicidad de los casos no permiten el enunciado simple de valores y fórmulas universalmente válidas; cuanto más, se puede afirmar que la exactitud en las relaciones es superior a la del levantamiento directo en razón de una mejor homogeneidad y que la desviación típica en planimetría es del orden del error gráfico en las condiciones óptimas. En altimetría, teniendo en cuenta la desviación precedente que afecta la posición de las curvas, se estima generalmente que el error medio sobre la altitud de un punto cualquiera es alrededor de un tercio de la equidistancia.

### **2.15 Redacción cartográfica**

El dibujo cartográfico introduce nuevos errores accidentales. A muy gran escala, y en una medida menor, a grandes escalas, ciertos detalles conservan a la vez su forma real y su lugar. En otras escalas sufren una simbolización, pero sus ejes, sus centros o los puntos de localización materializan las posiciones que servirán de base a las mediciones.

Cuando el documento resultante de los levantamientos es vuelto a dibujar en la escala original, el error medio sobre esas posiciones es evidentemente asimilable al error gráfico en las mejores condiciones, pero cuando hay reducción y ensamblaje de documentos, puede alcanzar fácilmente el doble, o sea  $0,2\text{mm} \times 2$ .

El proceso de generalización implica alteraciones de naturaleza sistemática pero de magnitud variable; se constata que la aglomeración de los signos convencionales introduce decalajes planimétricos que sobrepasan fácilmente el milímetro en cuanto se produce una acumulación de detalles. Importa entonces saber cuáles son aquellos detalles que por convención quedan en lugar y –de conocer la jerarquía atribuida a los fenómenos y a su representación– la posición del signo más importante, no decalado, constituyendo la sola base precisa para las mediciones. La generalización tiene una influencia muy importante sobre la magnitud de los detalles lineales sinuosos; las marcas identificatorias de una línea de costa, de una curva de nivel se atenúan y desaparecen cuando la escala decrece; por el contrario y excepcionalmente, ciertas sinuosidades están amplificadas para que aparezcan; ello da por resultado una reducción del tamaño muy

sensible, que –por otra parte– ya existe en el pasaje de magnitudes del terreno al dibujo del levantamiento. A título de ejemplo, la longitud o tamaño de una costa rocosa muy recortada puede variar en la relación 3 a 1 entre la carta a 1:25 000 y 1:250 000.

## **2.16 Reconstrucción e impresión**

En las diferentes etapas de un proceso cartográfico intervienen operaciones fotomecánicas; deben tomarse precauciones tanto en la puesta en obra de los procedimientos como en la climatización de los talleres y la elección de los soportes, para preservar al máximo las dimensiones del documento original. Es raro que una carta no sea policroma, y, en esta materia, el objetivo no es tanto la conservación de una estabilidad dimensional absoluta que mantenga dimensiones idénticas para las planchas relativas a los diferentes colores como para los elementos confeccionados separadamente y reagrupados seguidamente sobre una misma plancha de impresión. Prácticamente, es interesante disponer de soportes donde se pueda hacer variar ligeramente las dimensiones jugando sobre las condiciones de climatización a fin de reducir eventualmente ciertas alteraciones.

En efecto, el papel sobre el cual se imprime la carta, en definitiva, no es un soporte estable: es sensible a las variaciones higrométricas y, en menor grado, a las presiones mecánicas sufridas durante la impresión; además, las variaciones dimensionales no son ni isotropas ni totalmente reversibles, es decir que la dilatación es más importante en el sentido perpendicular a las fibras del papel que en el sentido paralelo a las fibras (sentido de fabricación) y, llevado a las condiciones iniciales, el papel no reencuentra sus dimensiones primitivas más que imperfecta y muy lentamente (Figura 2.39).

Así, el papel cambia de dimensiones en el curso de una tirada por presión entre los cilindros y por humidificación pasando de un cilindro al otro sobre las máquinas que imprimen varios colores; en un taller mal acondicionado, varía además según las condiciones atmosféricas. Estas alteraciones son, por lo tanto, sistemáticas pero no idénticas de una edición a otra y, aun, de una hoja a otra en una misma edición. Además, ellas afectan la posición relativa de detalles impresos de colores diferentes;



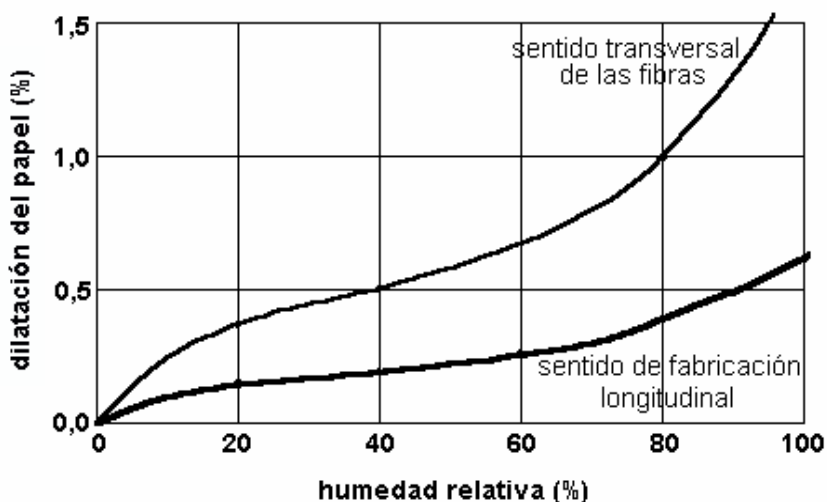


Figura 2.39: Dilatación del papel en función de la humedad relativa.

pueden alcanzar los 0,3mm.

Finalmente, la hoja impresa no es estable después del trabajo y continúa sufriendo los efectos de la variación de la humedad relativa en el curso de su estacionamiento y utilización. Esta alteración, si bien es importante, no es perjudicial pues puede ser compensada por la medición y el cálculo de coeficientes correctivos de escala, según los dos sentidos del papel.

## 2.17 Tipos de mediciones

Clasificados por orden de precisión decreciente, se pueden distinguir los siguientes métodos para los diferentes tipos de mediciones sobre las cartas:

- 1) **Coordenadas de un punto:** estimación a ojo, medida con doble decímetro, con compás de punta seca o a escuadra transportable (Figura 2.40).
- 2) **Distancia rectilínea:** medida con una tira de papel, doble decímetro, compás de punta seca o cálculo a partir de coordenadas de los extremos de la línea.
- 3) **Distancia sobre una línea sinuosa:** método expeditivo de la

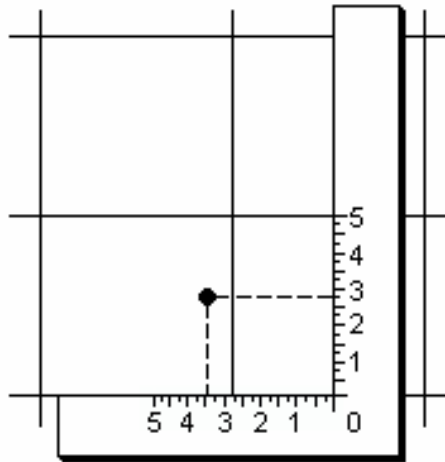
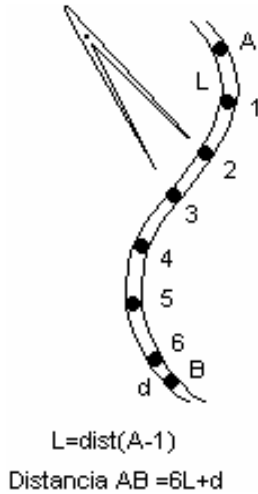


Figura 2.40: Escuadra transportable.

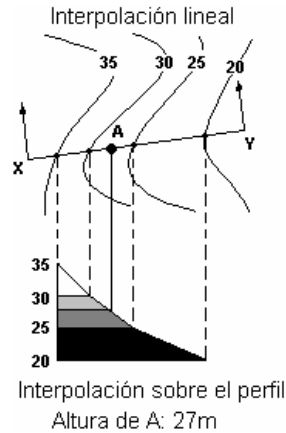
cuerda, medida con compás a abertura constante, a compás de abertura creciente y por alineamientos o con curvímeter (Figura 2.41).

- 4) **Altitud de un punto:** interpolación lineal simple entre dos curvas o interpolación sobre un perfil del terreno (Figura 2.42).
- 5) **Superficie:** descomposición en triángulos donde los lados exteriores se adaptan lo mejor posible al perímetro de la superficie a medir; división de la superficie transportada sobre un soporte homogéneo y pesado comparativo al de una muestra de superficie conocida; descomposición en cuadrados de superficie unitaria, contándose primero los cuadrados enteros comprendidos en el interior del perímetro; a partir de ello se puede elegir entre dos métodos:
  - a) contar y agregar a la cifra precedente todos los cuadrados en donde más de la mitad en cada uno están incluidos en la superficie;
  - b) contar y agregar la semisuma de los cuadrados atravesados por la línea del contorno.

Descomposición de la superficie en tiras o franjas de igual ancho y se mide las longitudes, sumando la superficie de los rectángulos; medida con



**Figura 2.41:** *Compás de punta seca.*



**Figura 2.42:** *Interpolación de altitud.*

planímetro polar a disco.

Cualquiera que sea el método utilizado, la búsqueda de un resultado preciso supone no solamente una reiteración de las medidas, sino también la eliminación de las alteraciones que son perniciosas para su sistematización.

Las medidas serán, por lo tanto, repetidas y, si es posible, en condiciones diferentes; por ejemplo en el método de los cuadrados se operará según varias orientaciones del enrejado de referencia.

Se tendrá en cuenta la alteración de generalización no efectuando mediciones más que a partir de elementos no desplazados o, en el caso contrario, se corregirá la medición del valor estimado de la alteración. Se evitará mientras sea posible medir distancias entre elementos que figuren en planchas o láminas diferentes; en caso contrario, se asegurará el examen de las marcas de los ángulos de la amplitud del decalaje posible. En mediciones de superficies sobre cartas a pequeña escala no equivalentes, se corregirán los valores obtenidos de las alteraciones imputables a la proyección, y si la región planimetrada es extensa, se la fraccionará eventualmente para aplicar a cada zona el coeficiente correctivo adecuado. Finalmente, se aplicará a todas las mediciones precitadas las correcciones relativas a las deformaciones del papel como referencia dimensional la cuadrícula en

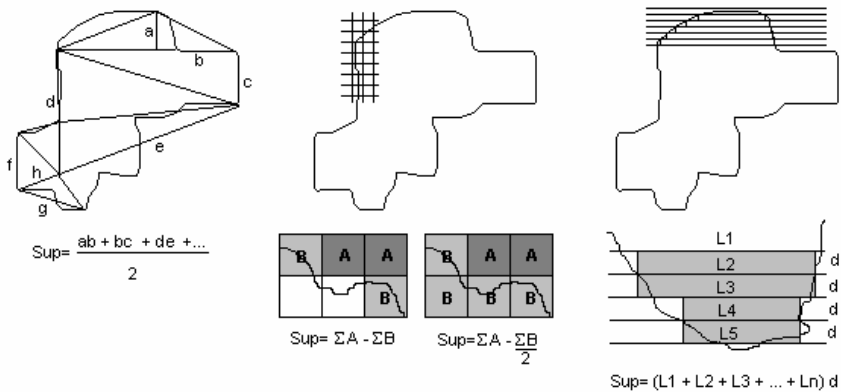


Figura 2.43: Medición de superficies.

las dos direcciones perpendiculares, de preferencia a la escala gráfica. El factor de corrección en la dirección norte-sur es:

$$CV = \frac{\text{longitud teórica sobre las líneas verticales de la cuadrícula}}{\text{longitud medida sobre las líneas verticales de la cuadrícula}}$$

$CH$  es el factor de corrección en la dirección este-oeste. Se multiplicarán por esos factores las lecturas efectuadas respectivamente sobre las ordenadas y las abscisas, en las mediciones de las coordenadas de un punto. En la medición de una superficie, se multiplicará el resultado obtenido por el factor de corrección  $C = CV \times CH$ . En la medición de una distancia o línea sinuosa, se determinará groseramente las componentes en ordenadas y sus abscisas de esta distancia,  $DH$  y  $DV$ ; el factor de corrección correspondiente será entonces:

$$\frac{CV \times DV + CH \times DH}{DV + DH}$$

## Capítulo 3

### Proyecciones acimutales

#### 3.1 Conceptos generales

Las *proyecciones acimutales*, llamadas también *cenitales*, son las obtenidas directamente sobre un plano tangente a la superficie terrestre en un punto, que es el centro de la extensión a representar; o sea, es el *centro de la proyección*.

Estas proyecciones se denominan acimutales pues en el punto de tangencia de la superficie terrestre con el plano de proyección se encuentra la proyección del Polo  $P$  (en el caso polar) o del seudo polo  $P'$  (en los casos ecuatorial y oblicuo); es en ese punto donde concurren los meridianos (caso polar) (Figura 3.1 (a)) o los seudo meridianos (casos ecuatorial y oblicuo), representados por rectas en la proyección (Figura 3.1 (b)).

El acimut de la recta que une el centro  $P$  de la proyección con el punto  $A$  está dado, en verdadera magnitud, por el ángulo  $\Delta\lambda$  que forman la proyección del meridiano central (de longitud  $\lambda_0$ ) y la proyección del meridiano que pasa por  $A$  (de longitud  $\lambda$ ) (Figura 3.1 (a)) o bien por el ángulo formado por los seudo meridianos respectivos ( $\Delta\lambda_T$ ) en el centro  $P'$  de la proyección con un punto  $A'$ .

Dado que el plano de proyección es tangente a la superficie de referencia terrestre, no existe deformación de ninguna clase en el punto de tangencia

(centro de la proyección). Además, todos los círculos máximos que pasan por el punto de tangencia serán líneas rectas sobre el plano de proyección, presentando acimutes correctos desde el centro a cualquier punto; de allí el nombre de proyecciones acimutales.

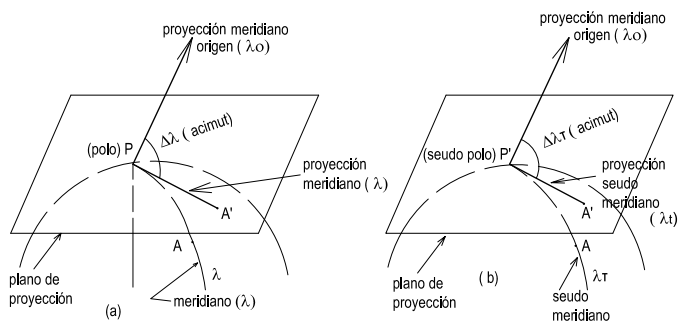


Figura 3.1: Proyecciones acimutales.

## 3.2 Proyección acimutal ortográfica polar

### 3.2.1 Dibujo de la proyección

#### 1) Método gráfico

Para la determinación de la escala hay que tener en cuenta que los radios de los paralelos son correctos (Figura 3.2).

El punto de tangencia de la esfera terrestre con el plano de proyección es el Polo; pueden presentarse dos casos: tangente en el Polo Norte y tangente en el Polo Sur; es decir, que el Polo coincide con su proyección. Para dibujar esta proyección, por ejemplo con paralelos y meridianos cada  $15^\circ$ , se hace uso de una figura auxiliar en la que se trazan los paralelos que luego se proyectan ortogonalmente sobre el plano de proyección, debido a que los rayos de proyección provienen del infinito. En el caso de los meridianos y haciendo uso de un transportador de ángulos, con vértice en el centro de la proyección se trazan ángulos de una magnitud igual a la diferencia de longitud geográfica solicitada (en la Figura 3.2 cada  $22^\circ 30'$ ).

#### 2) Método analítico

El dibujo se realiza utilizando las coordenadas polares. Se calculan

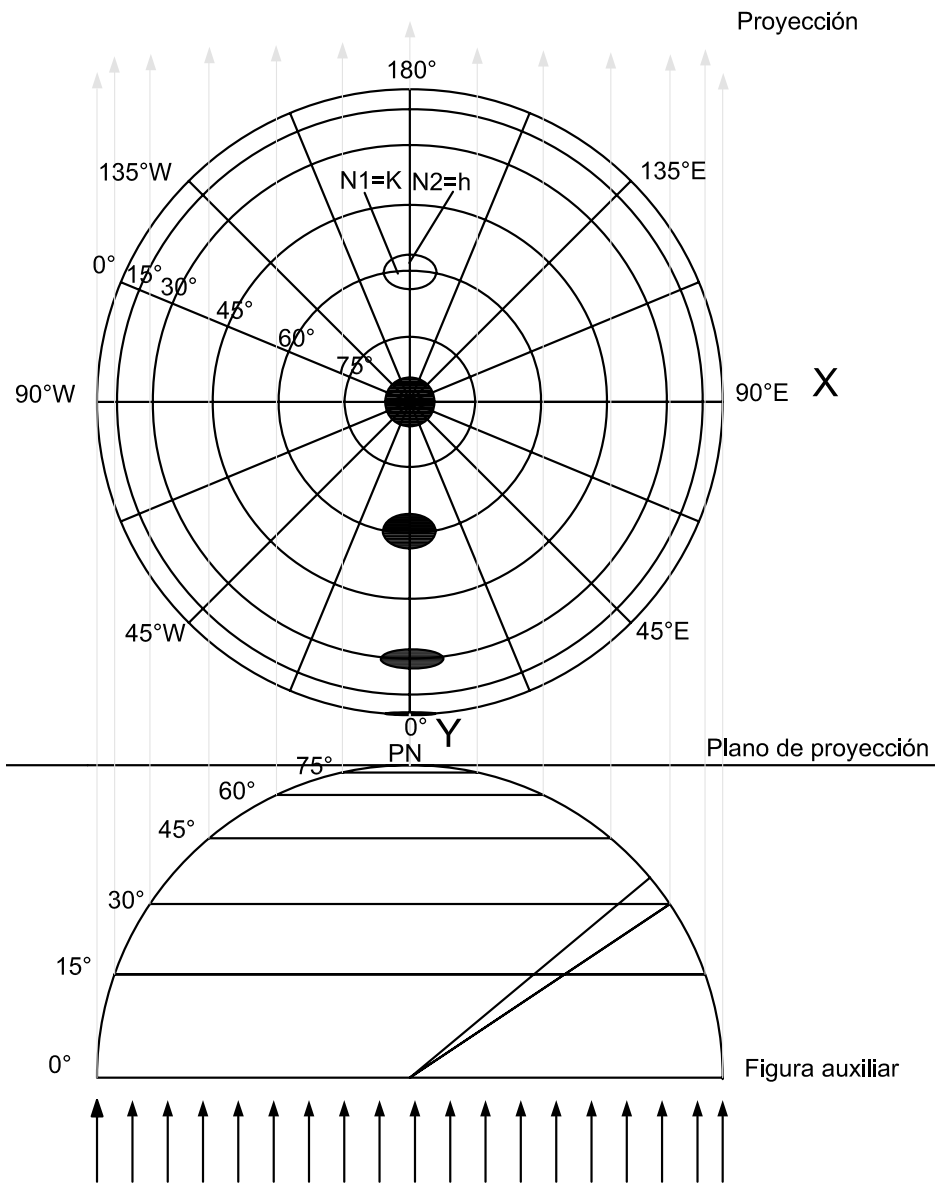


Figura 3.2: Construcción de la proyección.

los radios  $r_\varphi = R \cos \varphi$  con el intervalo elegido (en la Figura 3.2, cada  $15^\circ$ ) y se trazan las circunferencias correspondientes haciendo centro en un punto que representa la proyección del Polo. Con esto quedan trazados todos los paralelos. En cuanto a los meridianos, se trazan rectas radiales con el intervalo de longitud elegido (en la Figura 3.2, cada  $22^\circ 30'$ ).

También pueden determinarse las intersecciones de paralelos y meridianos calculando las coordenadas cartesianas de esos puntos:

$$X = r_\varphi \operatorname{sen} \Delta\lambda = R \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta\lambda$$

$$Y = r_\varphi \operatorname{cos} \Delta\lambda = R \cos \varphi \operatorname{cos} \Delta\lambda$$

Debe tenerse en cuenta que el eje positivo de las ordenadas coincide con la proyección del meridiano central y el eje de abscisas es perpendicular a él.

### Ejemplos

- 1) En la Figura 3.2, considérese el punto  $A(\varphi = 30^\circ; \lambda = 45^\circ)$ . Entonces, sus coordenadas polares son:

$$\Delta\lambda = 45^\circ$$

$$r_\varphi = 6\,370\text{km} \cos 30^\circ = 5\,516,582\text{km}$$

Sus coordenadas cartesianas son:

$$X = 5\,516,582\text{km} \operatorname{sen} 45^\circ = 3\,900,812\text{km}$$

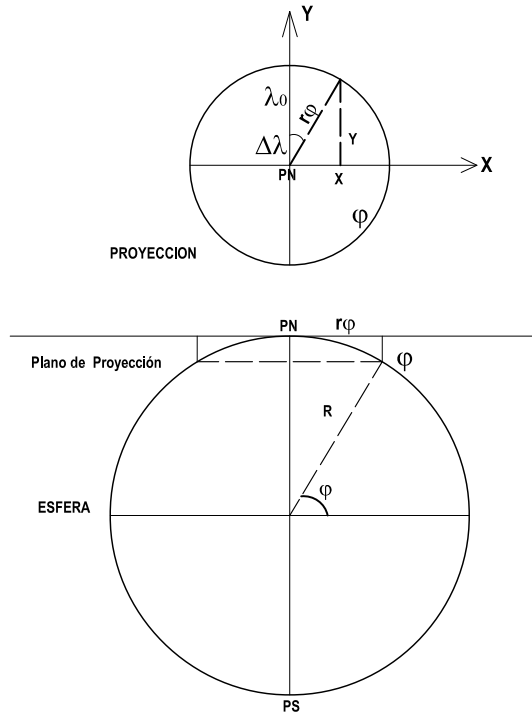
$$Y = 5\,516,582\text{km} \operatorname{cos} 45^\circ = 3\,900,812\text{km}$$

- 2) En el mapa del hemisferio Sur, en el cual el meridiano central es  $\lambda_0 = 60^\circ W$  (Figura 3.7), se desean hallar las coordenadas polares y cartesianas del punto  $(\varphi = 40^\circ S, \lambda = 10^\circ W)$ .

Las coordenadas polares son:

$$r_\varphi = 6\,370\text{km} \cos 40^\circ = 4\,879,703\text{km}$$





**Figura 3.3:** *Coordenadas planas.*

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = -10^\circ + 60^\circ = 50^\circ$$

y las coordenadas cartesianas:

$$X = r_\varphi \operatorname{sen} \Delta\lambda = 4\,879,703\text{km} \operatorname{sen} 50^\circ = 3\,738,072\text{km}$$

$$Y = r_\varphi \operatorname{cos} \Delta\lambda = 4\,879,703\text{km} \operatorname{cos} 50^\circ = 3\,136,613\text{km}$$

### 3.2.2 Características y propiedades

Los paralelos se proyectan según circunferencias concéntricas con el centro de la proyección, que se van acercando acentuadamente entre sí a medida que se avanza del Polo al Ecuador y según sus magnitudes reales. Entonces, el módulo de alteración lineal en el sentido de los paralelos,  $k$ , es:

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}} = \frac{2\pi R \operatorname{cos} \varphi}{2\pi R \operatorname{cos} \varphi} = 1$$

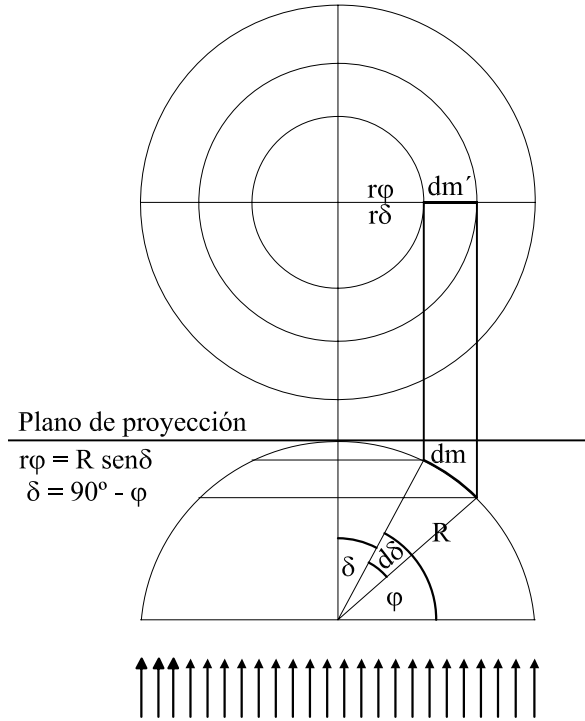
Los meridianos se proyectan según rectas radiales concurrentes en el centro de la proyección, formando entre sí ángulos correctos. Sobre los

meridianos las distancias son incorrectas, menores que las reales, y la deformación en cada punto se calcula con el módulo de alteración lineal  $h$ .

Para calcular la deformación se utiliza la relación (Figura 3.4):

$$h = \frac{dm'}{dm} = \frac{dr_\delta}{Rd\delta} = \frac{d(R\text{sen}\delta)}{Rd\delta} = \frac{R\cos\delta d\delta}{Rd\delta} = \cos\delta = \cos(90^\circ - \varphi) = \text{sen}\varphi$$

Por lo tanto  $h = \text{sen}\varphi$ .



**Figura 3.4:** Construcción auxiliar.

Como las proyecciones de paralelos y meridianos forman ángulos de  $90^\circ$ , se verifica que  $N_1 = k = 1$  y que  $N_2 = h < 1$  (Figura 3.2).

También es posible calcular  $h$  y  $k$  usando las fórmulas (2.10), (2.11) y siguientes:

$$h = \frac{\sqrt{E}}{R}; \quad k = \frac{\sqrt{G}}{R\cos\varphi}$$

Dado que:

$$X = R\cos\varphi\text{sen}\lambda$$

$$Y = R\cos\varphi\cos\lambda$$

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = -R \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \lambda \quad \text{y} \quad \frac{\partial Y}{\partial \varphi} = -R \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \lambda$$

Entonces:

$$E = \left( \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right)^2 = R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \lambda + R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{cos}^2 \lambda = R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$h = \frac{\sqrt{E}}{R} = \frac{R \operatorname{sen} \varphi}{R} = \operatorname{sen} \varphi$$

Por otra parte:  $\frac{\partial X}{\partial \lambda} = R \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \lambda$  y  $\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = -R \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} \lambda$ . Entonces:

$$k = \frac{\sqrt{G}}{R \operatorname{cos} \varphi} = \frac{R \operatorname{cos} \varphi}{R \operatorname{cos} \varphi} = 1$$

Esta proyección no es isógona pues  $h \neq k$ . El error máximo angular que se comete en un punto  $(\varphi, \lambda)$  puede calcularse utilizando la fórmula (2.22) del Capítulo 2:

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arcsen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

La proyección no es equivalente pues  $hk \neq 1$  ( $N_1 N_2 \neq 1$ ).

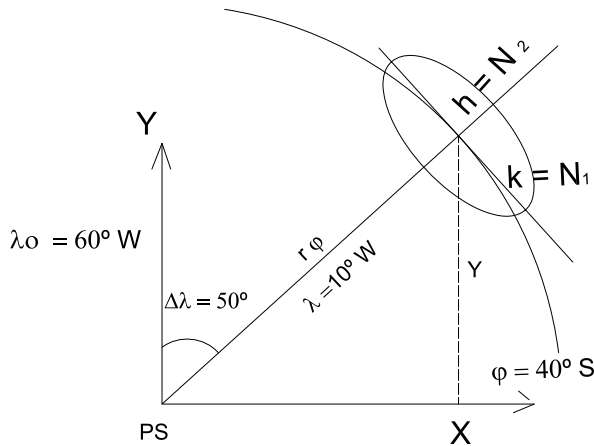


Figura 3.5: Ejemplo. Elipse indicatriz de Tissot.

### Ejemplos

- 1) Se desean calcular los valores de  $k$  y  $h$  para el punto  $(\varphi = 40^\circ \text{ S}; \lambda = 10^\circ \text{ W})$  del mapa del hemisferio sur,  $\lambda_0 = 0^\circ$  (Figura 3.7) y dibujar en escala la elipse indicatriz de Tissot.

Dado que  $N_1 = k = 1$ ,  $N_2 = h = \text{sen } \varphi = \text{cos } \delta$  y como la colatitud es  $\delta = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ , entonces  $h = \text{cos } 50^\circ = 0,6427876$ .

**Nota:** Los semidiámetros de la elipse de Tissot ( $\tau$ ) son números sin unidad. Por lo tanto, la escala en que se dibujan los mismos es  $E = \frac{d(\text{mm o cm})}{\tau}$ . Si en la Figura 3.5 fuera  $E = \frac{1,2\text{cm}}{1}$ , entonces:

$$h = \frac{1,2\text{cm}}{1} \times 0,6427876 = 0,77\text{cm}, \text{ o bien } E = \frac{1,2\text{cm}}{0,8333} \text{ y, por lo tanto,}$$

$$h = \frac{1\text{cm}}{0,8333} \times 0,6427876 = 0,77\text{cm}$$

- 2) Se calculará el valor de  $\delta_{\text{max}}$  para el punto ( $\varphi = 40^\circ S$ ;  $\lambda = 10^\circ W$ ).

$$\delta_{\text{max}} = 2 \arcsen \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} = 2 \arcsen \frac{1 - 0,6427876}{1 + 0,6427876} = 25^\circ 07' 04''$$

### 3.2.3 Usos

Por las características expuestas, se utiliza esta proyección para cartografía política o temática de las regiones polares. En la cartografía argentina se la emplea para la representación del sector antártico. Los ejemplos siguientes (Figuras 3.6) se refieren a vistas ortográficas polares de la Tierra, elaboradas para el seguimiento del agujero en la capa de ozono sobre el Polo Sur.

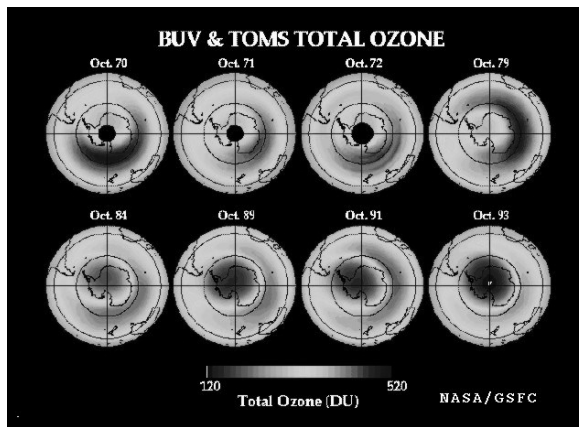


Figura 3.6: Seguimiento de la evolución del agujero de ozono en el Polo Sur.

### 3.2.4 Transformación inversa de coordenadas

Un problema interesante consiste en hallar las expresiones que permiten calcular las coordenadas geográficas de un punto a partir de sus coordenadas cartesianas, medidas en un mapa o carta. Las coordenadas cartesianas en función de las geográficas, siendo  $x$  e  $y$  medidas en un mapa o carta, son:

$$x = X E = R \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda E \quad (3.1)$$

$$y = Y E = R \cos \varphi \operatorname{cos} \Delta \lambda E \quad (3.2)$$

donde  $E$  es la escala del mapa o carta.

Dividiendo miembro a miembro las expresiones (3.1) y (3.2):

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \Delta \lambda \therefore \Delta \lambda = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$$

Si  $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0$ , entonces  $\lambda = \Delta \lambda + \lambda_0$ . Reemplazando en la expresión anterior:

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \lambda_0 \quad (3.3)$$

que permite expresar la longitud del punto en función de las coordenadas cartesianas y de la longitud del meridiano central. Despejando  $\operatorname{sen} \Delta \lambda$  y  $\operatorname{cos} \Delta \lambda$  de las expresiones (3.1) y (3.2), elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro las igualdades obtenidas, se llega a que:

$$\frac{x^2}{E^2 R^2 \operatorname{cos}^2 \varphi} + \frac{y^2}{E^2 R^2 \operatorname{cos}^2 \varphi} = 1$$

De aquí  $\frac{x^2 + y^2}{E^2 R^2 \operatorname{cos}^2 \varphi} = 1$ , de donde se obtiene que  $\frac{x^2 + y^2}{E^2 R^2} = \operatorname{cos}^2 \varphi$ , o, lo que es equivalente:  $\operatorname{cos} \varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{ER}$ . Se puede calcular entonces  $\varphi$  en función de las coordenadas cartesianas:

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{cos} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{ER} \quad (3.4)$$

#### Ejemplo

Supóngase que en un mapa dibujado en proyección acimutal ortográfica polar, en escala 1 : 72 000 000 y con meridiano central  $\lambda_0 = 60^\circ W$ , se midieron las coordenadas cartesianas de un punto  $A(x = 3,4 \text{ cm}; y = 5,85 \text{ cm})$ .

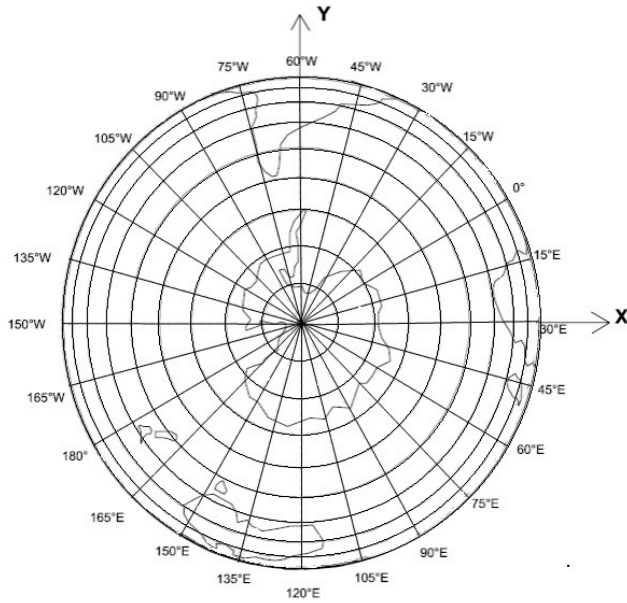


Figura 3.7: Proyección acimutal ortográfica polar  $\lambda_0 = 60^\circ W$ .

Aplicando la fórmula (3.4):

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{ER} = \arccos \frac{\sqrt{(3,4cm)^2 + (5,85cm)^2}}{\frac{1}{72\,000\,000} 637\,000\,000} = 40^\circ 06' 42''$$

Los valores obtenidos de  $\lambda$  y de  $\varphi$  están afectados por los errores inevitables en la medición de los datos sobre el mapa ( $x$  e  $y$ ) los que se miden, en general, con una regla milimetrada (Ver Capítulo 2).

### 3.3 Proyección acimutal ortográfica ecuatorial

#### 3.3.1 Dibujo de la proyección

- 1) **Método gráfico** (Ver Figura 3.8) El punto de tangencia de la esfera terrestre con el plano de proyección es un punto del Ecuador; pueden presentarse, por lo tanto, infinitos casos.

Se utiliza una figura auxiliar dibujada de tal manera que el eje terrestre sea paralelo al plano de proyección y, como los rayos de proyección provienen del infinito, dicho eje se proyecta en verdadera magnitud. Para trazar los paralelos en la figura auxiliar se toma un transportador y, haciendo centro en el punto que represente la

proyección del eje terrestre, se trazan ángulos consecutivos e iguales a la diferencia de longitud geográfica convenida. A partir de la intersección de los lados de los ángulos con el Ecuador, se trazan normales hasta cortar a la horizontal que contiene el eje terrestre en puntos que son las proyecciones de las intersecciones de los paralelos con el meridiano extremo; quedan así determinados los radios de los paralelos en dicha figura (pues  $r_\varphi = R \cos \varphi$ ).

En la proyección, esa intersección indica el lugar donde el meridiano corta al Ecuador; la intersección del meridiano con el paralelo de  $15^\circ$  indica dónde corta en la proyección el meridiano a los paralelos de  $15^\circ N$  y  $15^\circ S$ , y así sucesivamente.

En la figura auxiliar de la Figura 3.8 no se ha trazado el paralelo de  $15^\circ$ .

## 2) Método analítico

El dibujo se realiza en base a las coordenadas planas de cada punto. En primer lugar, se hallan los valores de las coordenadas ficticias (caso polar transversal)  $(\varphi_T; \lambda_T)$  del punto en la proyección ortográfica polar, donde se supone que el polo ficticio está en el centro de la proyección  $(\varphi_0 = 0^\circ; \lambda_0)$ . Se resuelve el triángulo esférico y luego se calculan las coordenadas planas (polares o cartesianas) del punto en la proyección (Figura 3.9).

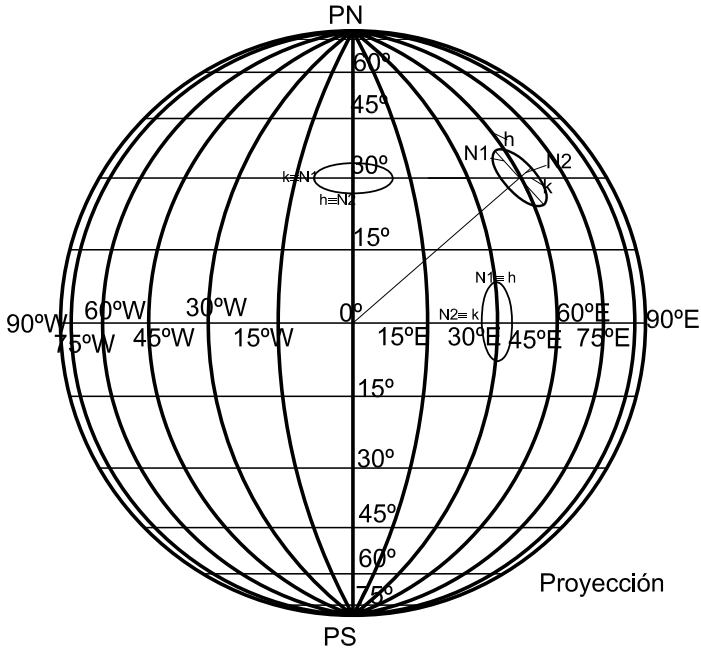
En el triángulo esférico  $PN A PN_T$ , de la Figura 3.9, por el teorema del coseno es posible obtener el valor de  $\varphi_T$ :

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \varphi_T) &= \cos(90^\circ - \varphi) \cos 90^\circ + \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi) \operatorname{sen} 90^\circ \cos \Delta\lambda \\ \cos(90^\circ - \varphi_T) &= \cos \varphi \cos \Delta\lambda \Rightarrow \varphi_T \end{aligned}$$

Aplicando al mismo triángulo el teorema del seno se obtiene el valor de  $\Delta\lambda_T$ :

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} \Delta\lambda_T}{\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi)} &= \frac{\operatorname{sen} \Delta\lambda}{\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_T)} \\ \operatorname{sen} \Delta\lambda_T &= \frac{\operatorname{sen} \Delta\lambda \cos \varphi}{\cos \varphi_T} \Rightarrow \Delta\lambda_T \end{aligned}$$

Para determinar la escala, hay que tener presente que el radio terrestre se proyecta en verdadera magnitud.



Plano de proyección

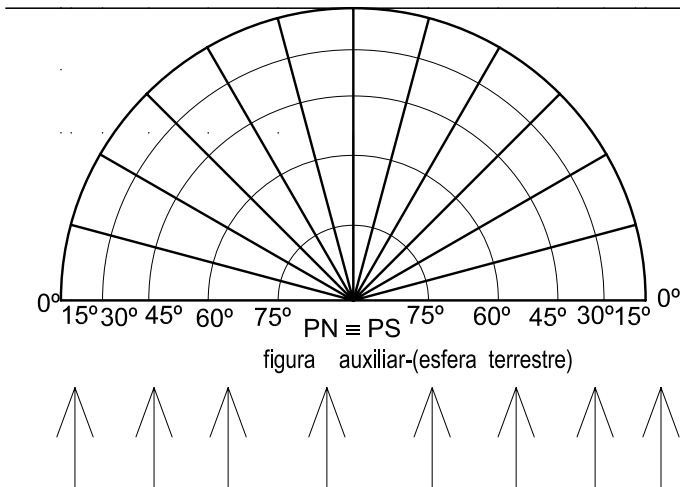


Figura 3.8: Proyección acimutal ortográfica ecuatorial.



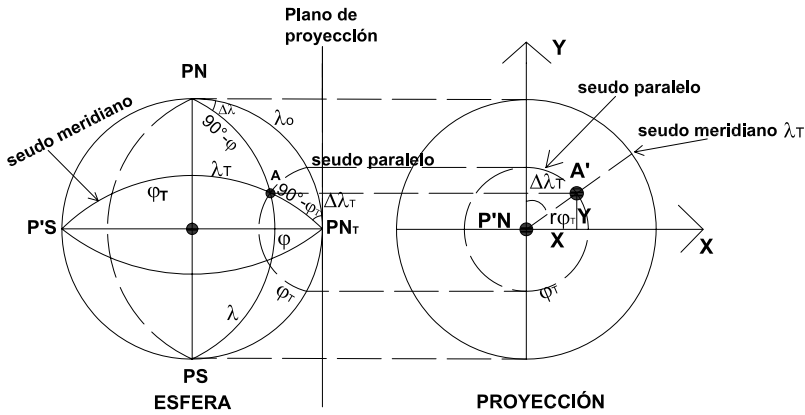


Figura 3.9: Cálculo de coordenadas planas.

También se obtiene el valor de  $\Delta\lambda_T$  al aplicar el teorema de la cotangente:

$$\text{cotg}(90^\circ - \varphi) \text{sen } 90^\circ = \cos 90^\circ \cos \Delta\lambda + \text{sen } \Delta\lambda \text{cotg } \Delta\lambda_T.$$

Se tienen así las coordenadas polares ficticias:

$$r_{\varphi_T} = R \cos \varphi_T \quad \text{y} \quad \Delta\lambda_T$$

y las coordenadas cartesianas:

$$X = r_{\varphi_T} \text{sen } \Delta\lambda_T = R \cos \varphi_T \text{sen } \Delta\lambda_T$$

$$Y = r_{\varphi_T} \cos \Delta\lambda_T = R \cos \varphi_T \cos \Delta\lambda_T$$

### Ejemplo

En la Figura 3.8 considérese el punto de coordenadas ( $\varphi = 30^\circ; \lambda = 30^\circ$ ). Entonces:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \varphi_T) &= \text{sen } \varphi_T = \cos \varphi \cos \Delta\lambda = \cos 30^\circ \cos 30^\circ \Rightarrow \varphi_T = 48^\circ 32' 25'' \\ \text{sen } \Delta\lambda_T &= \frac{\text{sen } 30^\circ \cos 30^\circ}{\cos 48^\circ 35' 25''} \Rightarrow \Delta\lambda_T = 40^\circ 53' 36'' \end{aligned}$$

Este mismo valor se obtiene por el teorema de la cotangente:

$$\text{tg } \varphi = \text{sen } \Delta\lambda \text{cotg } \Delta\lambda_T \Rightarrow \Delta\lambda_T = 40^\circ 53' 36''$$

Entonces:  $r_{\varphi_T} = 6\,370 \text{ km} \cos 48^\circ 35' 25'' = 4\,231,36 \text{ km}$ , con lo que se completa el cálculo de las coordenadas polares.

En cuanto a las coordenadas cartesianas se tiene:

$$X = r_{\varphi_T} \operatorname{sen} \Delta\lambda_T = 4\,231,36\text{km} \operatorname{sen} 40^\circ 53' 36'' = 2\,758,288\text{km}$$

$$Y = r_{\varphi_T} \operatorname{cos} \Delta\lambda_T = 4\,231,36\text{km} \operatorname{cos} 40^\circ 53' 36'' = 3\,185,001\text{km}$$

**Nota:** Igual resultado se tiene aplicando las fórmulas que se deducirán en la Proyección Acimutal Ortográfica Oblicua (Fórmulas 3.7 y 3.8), en donde  $\varphi_0 = 0^\circ$ :

$$X = R \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} \Delta\lambda = 6\,370\text{km} \operatorname{cos} 30^\circ = 2\,758,288\text{km}$$

$$Y = R \operatorname{sen} \varphi = 6\,370\text{km} \operatorname{sen} 30^\circ = 3\,185\text{km}$$

### 3.3.2 Características y propiedades

Los paralelos y el Ecuador se proyectan según rectas paralelas de longitudes incorrectas menores que las reales. Los paralelos se van acercando entre sí desde el Ecuador a los Polos. La deformación en cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ , que no coincide con  $N_1$  ni con  $N_2$ , salvo en la intersección con el meridiano central, en donde  $k = N_1$ . Es decir,  $k$  es un poco mayor que  $N_2$  y un poco menor que  $N_1$ , siendo sobre el Ecuador  $k = N_2$ . Recuérdese que  $N_2$  se dirige hacia el centro de la proyección y para obtener su valor se debe recurrir al cálculo infinitesimal, o bien calcular  $N_2 = \operatorname{sen} \varphi_T$ .

El meridiano central es el único que se proyecta según una recta, de longitud incorrecta menor que la real. Los meridianos cuya longitud geográfica difieren  $90^\circ$  al este y al oeste del meridiano central se proyectan según dos semicircunferencias de longitudes correctas ( $N_1 = 1$ ). Los demás meridianos se proyectan según semielipses que se van acercando acentuadamente entre sí al ir del meridiano central hacia el este o el oeste; se calculan las deformaciones sobre los meridianos con el módulo de alteración lineal  $h$ . Dicha deformación se acrecienta al alejarse del centro de la proyección.

Esta proyección no es isógona porque  $N_1 \neq N_2$  y tampoco es equivalente pues  $hk \operatorname{sen} \alpha' \neq 1$  (siendo  $\alpha'$  el ángulo de intersección de paralelo y meridiano) (Figura 3.10).

### 3.3.3 Usos

Se la utiliza para la confección de mapas de la Luna ya que ésta ofrece siempre la misma cara (la vista de un hemisferio con el Ecuador en el centro). También puede aplicarse a mapas terrestres, siempre que se represente una extensión que no se aleje del centro de la proyección, por ejemplo, a un mapa de un país como Ecuador. Se usa solamente cuando la superficie de referencia es esférica.

### 3.3.4 Módulos de alteración lineal

En la proyección ortográfica ecuatorial, la elipse de Tissot tiene en cada punto la misma orientación de sus ejes y las mismas dimensiones que en el caso polar para la misma ubicación, pero referida a las pseudo coordenadas  $(\varphi_T, \lambda_T)$ , que deben ser calculadas como se explicó antes. Entonces:

$$N_1 = k_T = 1$$

$$N_2 = h_T = \frac{dr_{\delta_T}}{Rd\delta_T} = \frac{d[R\text{sen } \delta_T]}{Rd\delta_T} = \frac{R\cos \delta_T d\delta_T}{Rd\delta_T} = \cos \delta_T = \text{sen } \varphi_T$$

**Ejemplo:** Se hallarán los valores de los semiejes  $N_1$  y  $N_2$ , los módulos  $h$  y  $k$  y el ángulo entre paralelo y meridiano en la proyección. Además, se calcularán los valores del módulo de alteración superficial ( $\mu$ ) y el error máximo angular en el punto de coordenadas  $(30^\circ, 30^\circ)$ , siendo  $\lambda_0 = 0^\circ$ .  $\varphi_T$  se halla resolviendo el triángulo esférico  $PN A PN_T$  de la Figura 3.9:

$$\cos(90^\circ - \varphi_T) = \text{sen } \varphi_T = \cos(90^\circ - \varphi) \cos 90^\circ + \text{sen}(90^\circ - \varphi) \text{sen } 90^\circ \cos \Delta\lambda$$

$$\text{sen } \varphi_T = 0,75 \Rightarrow \varphi_T = 48^\circ 35' 25''.$$

$$N_1 = k_T = 1$$

$$N_2 = h_T = \text{sen } \varphi_T = \text{sen } 48^\circ 35' 25'' = 0,75$$

Como  $X = R\cos \varphi \text{sen } \Delta\lambda$  e  $Y = R\text{sen } \varphi$ , entonces:

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = -R\text{sen } \varphi \text{sen } \Delta\lambda \text{ y } \frac{\partial Y}{\partial \varphi} = R\cos \varphi$$

Por lo tanto:

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$= R^2 \text{sen}^2 \varphi \text{sen}^2 \Delta\lambda + R^2 \cos^2 \varphi = R^2 (\text{sen}^2 \varphi \text{sen}^2 \Delta\lambda + \cos^2 \varphi)$$

$$\begin{aligned}
h &= \frac{\sqrt{E}}{R} = \frac{R\sqrt{\text{sen}^2\varphi \text{sen}^2\Delta\lambda + \text{cos}^2\varphi}}{R} \\
&= \sqrt{\text{sen}^2\varphi \text{sen}^2\Delta\lambda + \text{cos}^2\varphi} \\
&= \sqrt{\text{sen}^2 30^\circ \text{sen}^2 30^\circ + \text{cos}^2 30^\circ} = 0,9013878
\end{aligned}$$

Por otra parte:  $\frac{\partial X}{\partial \lambda} = R \cos \varphi \cos \Delta \lambda$  y  $\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = 0$

$$\text{Entonces: } G = \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)^2 = R^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \Delta \lambda$$

$$k = \frac{\sqrt{G}}{R \cos \varphi} = \frac{R \cos \varphi \cos \Delta \lambda}{R \cos \varphi} = \cos \Delta \lambda = 0,8660254$$

$\alpha'$  es el ángulo determinado por la proyección del paralelo y la proyección del meridiano. Como  $hk \text{sen} \alpha' = N_1 N_2$

$$\text{entonces: } \text{sen} \alpha' = \frac{N_1 N_2}{hk} = 0,96976892795 \Rightarrow \alpha' = 73^\circ 53' 52'' \text{ o bien } \alpha' = 106^\circ 06' 08''$$

Otro camino para hallar  $\alpha'$  es a través de los ángulos que las proyecciones de paralelos y meridianos forman con el eje vertical.

$$\text{tg} \theta_m = \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi}}{\frac{\partial Y}{\partial \varphi}} = \frac{-R \text{sen} \varphi \text{sen} \Delta \lambda}{R \cos \varphi} = -\text{tg} \varphi \text{sen} \Delta \lambda = -\text{tg} 30^\circ \text{sen} 30^\circ$$

$$\Rightarrow \theta_m = -16^\circ 06' 08''$$

$$\text{tg} \theta_p = \frac{\frac{\partial X}{\partial \lambda}}{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}} = \frac{-R \cos \varphi \cos \Delta \lambda}{0} \Rightarrow \theta_p = 90^\circ$$

$$\text{Entonces: } \alpha' = \theta_p - \theta_m = 106^\circ 06' 08''$$

El módulo de alteración superficial o areal  $\mu$  es:

$$\mu = hk \text{sen} \alpha' = 0,901387818 \times 0,8660254 \text{sen} 106^\circ 06' 08'' = 0,75$$

o bien:

$$\mu = N_1 N_2 = 1 \times 0,75 = 0,75$$

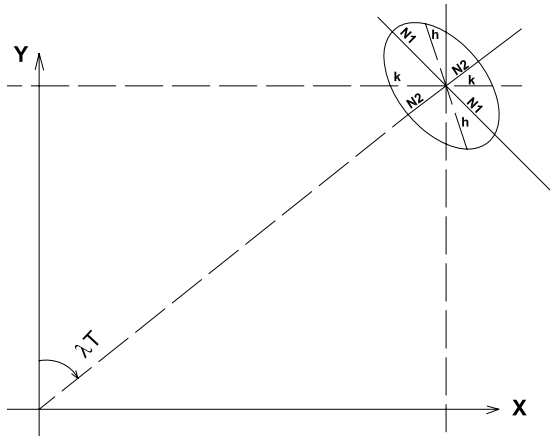
El error máximo angular es:

$$\delta_{\max} = 2 \arcsen \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} = 2 \arcsen \frac{1 - 0,75}{1 + 0,75} = 16^\circ 25' 35''$$

**Dibujo de la ubicación del punto y de la Elipse de Tissot.** Ver Figura 3.10.

### 3.3.5 Transformación inversa de coordenadas

También en esta proyección es posible hallar las expresiones que permiten calcular las coordenadas geográficas de un punto a partir de las



**Figura 3.10:** *Elipse indicatriz de Tissot.*

coordenadas cartesianas del mismo, medidas en un mapa o carta. Para resolver este problema se pueden seguir dos caminos:



**Figura 3.11:** *Proyección acimutal ortográfica ecuatorial,  $\lambda_0 = 60^\circ W$ .*

- 1) Hallar las coordenadas geográficas consideradas como pertenecientes al caso polar transversal  $(\varphi, \lambda)$  -como se ha visto en el caso polar- y luego hallar los valores de  $\varphi$  y  $\lambda$  a partir de  $\varphi_T$  y  $\lambda_T$  resolviendo el triángulo esférico correspondiente.

- 2) Hallar las coordenadas geográficas  $\varphi$  y  $\lambda$  a partir de las fórmulas de las coordenadas cartesianas del caso ecuatorial.

En el caso (1), Figura 3.12:

$$x = R \cos \varphi_T \operatorname{sen} \Delta \lambda_T E$$

$$y = R \cos \varphi_T \cos \Delta \lambda_T E$$

siendo  $E$  la escala del mapa o carta. Dividiendo ambas expresiones, resulta:

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \Delta \lambda_T$$

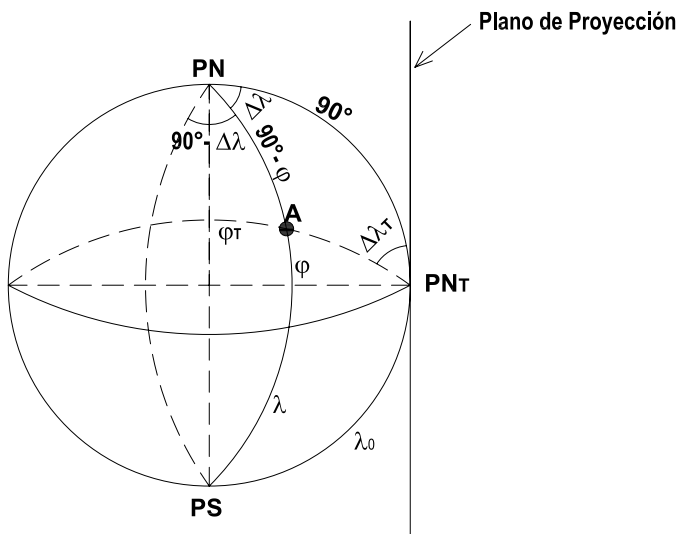


Figura 3.12: Caso polar transverso.

Entonces  $\Delta \lambda_T = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y}$  y  $\varphi_T = \operatorname{arc} \cos \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{ER}$

En la Figura 3.12 se observa que  $\operatorname{sen} \varphi = \cos \varphi_T \cos \Delta \lambda_T$ , de donde es posible obtener el valor de  $\varphi$ , y que  $\operatorname{sen} \Delta \lambda_T = \operatorname{tg} \Delta \lambda \operatorname{tg} \varphi_T$ , de donde

$$\operatorname{tg} \Delta \lambda = \frac{\operatorname{sen} \Delta \lambda_T}{\operatorname{tg} \varphi_T}$$

De aquí se calcula el valor de  $\Delta \lambda$  y el de  $\lambda = \Delta \lambda + \lambda_0$ .

#### Ejemplo:

Se desean hallar las coordenadas geográficas ( $\varphi$  y  $\lambda$ ) de un punto en un mapa en proyección acimutal ortográfica ecuatorial. Los datos son:  $\lambda_0 = 60^\circ$  y  $E = 1 : 76\,000\,000$  y se mide  $x = 3,95\text{cm}$ ,  $y = 2,85\text{cm}$ .

Entonces,

1) considerando el caso como polar transverso:

$$\Delta\lambda_T = \text{arc tg} \frac{3,95\text{cm}}{2,85\text{cm}} = 54^\circ 11' 20''$$

$$\begin{aligned} \varphi_T &= \text{arc cos} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{ER} \\ &= \text{arc cos} \frac{\sqrt{(3,95\text{cm})^2 + (2,85\text{cm})^2}}{\frac{1}{76\,000\,000} 637\,000\,000} = 54^\circ 28' 10'' \end{aligned}$$

$$\text{sen } \varphi = \text{cos } \varphi_T \text{cos } \Delta\lambda_T = \text{cos } 54^\circ 28' 10'' \text{cos } 54^\circ 11' 20'' \Rightarrow \varphi \cong 20^\circ$$

$$\text{tg } \Delta\lambda = \frac{\text{sen } \Delta\lambda_T}{\text{tg } \varphi_T} = \frac{\text{sen } 54^\circ 11' 20''}{\text{tg } 54^\circ 28' 10''} \Rightarrow \Delta\lambda = 30^\circ 04' 30''$$

$$\text{entonces: } \lambda = \Delta\lambda + \lambda_0 = 30^\circ 04' 30'' - 60^\circ = -29^\circ 55' 30'' \cong -30^\circ$$

2) utilizando las fórmulas del caso ecuatorial:

$$x = EX = ER \text{cos } \varphi \text{sen } \Delta\lambda$$

$$y = EY = ER \text{sen } \varphi$$

$$\varphi = \text{arc sen} \frac{Y}{ER} = \text{arc sen} \frac{2,85\text{cm}}{\frac{1}{76\,000\,000} 637\,000\,000\text{cm}} = 19^\circ 52' 44''$$

$$\Delta\lambda = \text{arc sen} \frac{x}{ER \text{cos } \varphi} = \text{arc sen} \frac{3,95\text{cm}}{\frac{1}{76\,000\,000} 637\,000\,000\text{cm} \text{cos } 19^\circ 52' 44''}$$

$$\Delta\lambda = 30^\circ 04' 30''$$

$$\text{De la misma manera que antes, } \lambda = \Delta\lambda + \lambda_0 \cong -30^\circ$$

### 3.4 Proyección acimutal ortográfica oblicua

#### 3.4.1 Dibujo de la proyección

1) **Método gráfico**(Figura 3.13)

Se explicará el método a través de un ejemplo. Se dibuja el canevas geográfico con paralelos y meridianos cada  $30^\circ$ , adoptándose como centro de la proyección la intersección del paralelo de  $30^\circ\text{N}$  y el meridiano de Greenwich.

Los rayos de proyección provienen del infinito, por lo tanto, inciden perpendicularmente sobre el plano de proyección, proyectándose sólo un hemisferio.

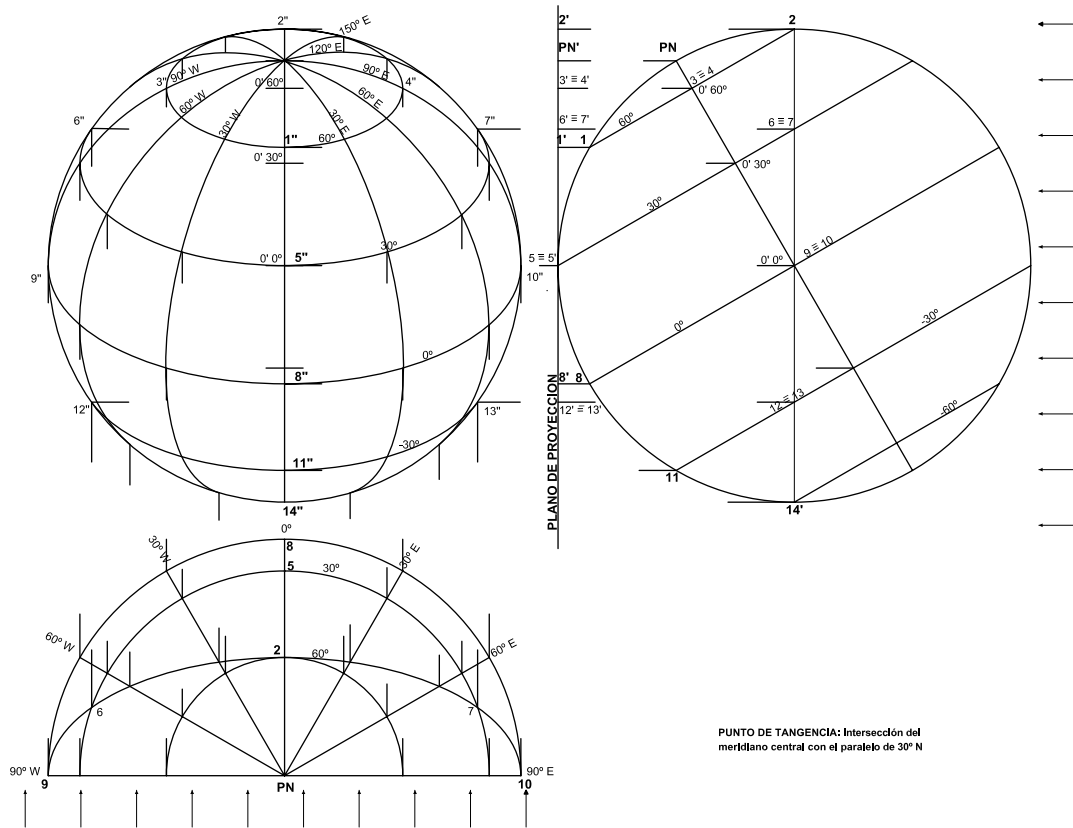


Figura 3.13: Proyección acimutal ortográfica oblicua con centro en  $(30^\circ, 0^\circ)$ .

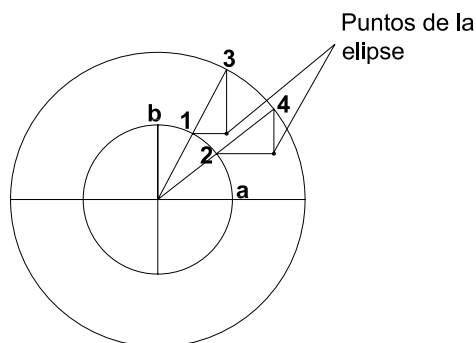


En la figura auxiliar de la derecha de la Figura 3.13, se tiene el plano de proyección tangente a la esfera terrestre en el punto de intersección citado ( $5 \equiv 5'$ ), con el eje de rotación de la tierra inclinado  $30^\circ$ . Al abatir el plano de proyección, el centro de la proyección será  $5''$ .

Para una mejor interpretación, el hemisferio que se proyecta se ha representado en líneas llenas, y el que no, se proyecta con líneas de trazo. La circunferencia máxima que determina el límite entre los hemisferios, como está contenida en un plano paralelo al plano de proyección, se proyecta en verdadera magnitud.

Como los paralelos están ubicados en planos oblicuos con respecto al plano de proyección, teniendo en cuenta la incidencia de los rayos de proyección, se proyectan según elipses o arcos de elipses. Para el caso del paralelo de  $60^\circ N$ , el eje menor de la elipse queda determinado por  $1''2''$  y el eje mayor por  $3''4''$  (diámetro del paralelo de  $60^\circ$ ). Los demás paralelos se proyectan de manera análoga.

Para proyectar los meridianos se utiliza la figura auxiliar de la parte inferior, que representa el plano del Ecuador y, sobre el mismo, el canevas de la Proyección Acimutal Ortográfica Polar. Se hallan entonces las proyecciones de las intersecciones de cada meridiano con los distintos paralelos.



**Figura 3.14:** Trazado de una elipse conociendo su eje mayor y su eje menor.

Para dibujar los paralelos, se hace centro en la intersección de los ejes de las elipses y, con radios iguales a la mitad de su magnitud, se trazan dos circunferencias concéntricas. Se unen puntos de la

circunferencia mayor con el centro ( $O$ ), determinándose los puntos 1, 2, 3 y 4 (Figura 3.14). A partir de 1 y 2 se trazan paralelas al eje  $a$ , a partir de 3 y 4 paralelas al eje  $b$ , la intersección da puntos pertenecientes a la elipse, y así sucesivamente. Luego, haciendo uso de un curvilíneo se traza la elipse.

2) **Método analítico** (Figura 3.15)

a) Utilizando las coordenadas del caso polar transverso.

Consiste en calcular las coordenadas de los puntos de intersección de paralelos y meridianos con respecto a un sistema de ejes coordenados rectangulares con origen en el centro de la proyección (punto de tangencia del plano de proyección de coordenadas  $\varphi_0, \lambda_0$ ).

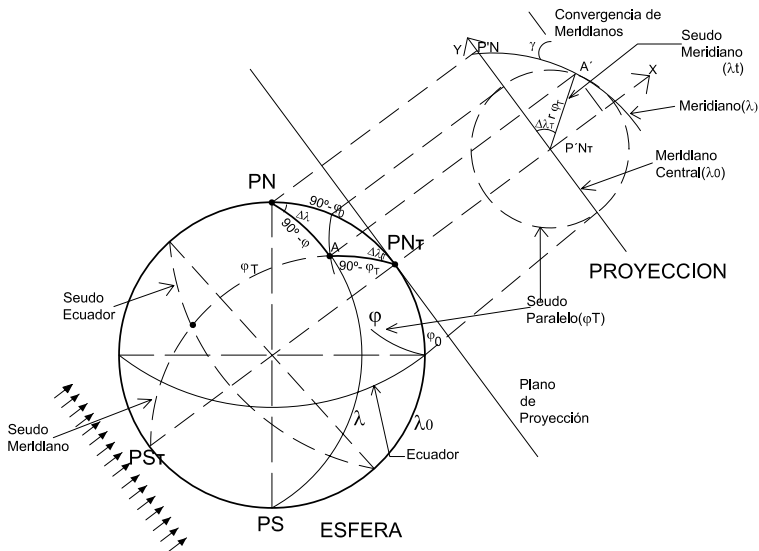


Figura 3.15: Cálculo de coordenadas planas.

$$\begin{aligned} \text{sen } \varphi_T &= \text{sen } \varphi \text{ sen } \varphi_0 + \text{cos } \varphi \text{ cos } \varphi_0 \text{ cos } \Delta\lambda \Rightarrow \varphi_T \\ \frac{\text{sen } \Delta\lambda_T}{\text{cos } \varphi} &= \frac{\text{sen } \Delta\lambda}{\text{cos } \varphi_T} \Rightarrow \text{sen } \Delta\lambda_T = \frac{\text{cos } \varphi \text{ sen } \Delta\lambda}{\text{cos } \varphi_T} \Rightarrow \Delta\lambda_T \end{aligned}$$

También por el teorema de la cotangente es posible calcular el valor de  $\Delta\lambda_T$

$$\text{cotg}(90^\circ - \varphi) \text{sen}(90^\circ - \varphi_0) = \text{cos}(90^\circ - \varphi_0) \text{cos } \Delta\lambda + \text{sen } \Delta\lambda \text{cotg } \Delta\lambda_T$$

$$\operatorname{tg} \varphi \cos \varphi_0 = \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \Delta\lambda + \operatorname{sen} \Delta\lambda \operatorname{cotg} \Delta\lambda_T$$

Se tienen entonces las coordenadas polares transversas:

$$\begin{cases} r_{\varphi_T} = R \cos \varphi_T \\ \Delta\lambda_T \end{cases}$$

y las coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} X = r_{\varphi_T} \operatorname{sen} \Delta\lambda_T \\ Y = r_{\varphi_T} \operatorname{cos} \Delta\lambda_T \end{cases}$$

b) Utilizando coordenadas geográficas

En el triángulo esférico  $PN A PN_T$  (Figura 3.15) se ha visto que:

$$\frac{\operatorname{sen} \Delta\lambda_T}{\operatorname{cos} \varphi} = \frac{\operatorname{sen} \Delta\lambda}{\operatorname{cos} \varphi_T}$$

De allí:

$$\operatorname{sen} \Delta\lambda_T \operatorname{cos} \varphi_T = \operatorname{sen} \Delta\lambda \operatorname{cos} \varphi \quad (3.5)$$

Aplicando el teorema del seno-coseno<sup>1</sup> al mismo triángulo esférico, se tiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_T) \operatorname{cos} \Delta\lambda_T &= \\ = \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_0) \operatorname{cos}(90^\circ - \varphi) - \operatorname{cos}(90^\circ - \varphi_0) \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi) \operatorname{cos} \Delta\lambda \\ \operatorname{cos} \Delta\lambda_T \operatorname{cos} \varphi_T &= \operatorname{cos} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \Delta\lambda \end{aligned} \quad (3.6)$$

Reemplazando las expresiones 3.5 y 3.6 en  $X$  e  $Y$ :

$$X = R \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} \Delta\lambda \quad (3.7)$$

$$Y = R(\operatorname{cos} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \Delta\lambda) \quad (3.8)$$

### Ejemplo

Considérese el punto del hemisferio occidental de coordenadas ( $20^\circ\text{N}$ ,  $20^\circ\text{W}$ ) en la proyección acimutal ortográfica oblicua con centro en ( $30^\circ\text{S}$ ,  $60^\circ\text{W}$ ). Se desean calcular las coordenadas planas del punto dado (Figura 3.16).  $\Delta\lambda = -20^\circ + 60^\circ$ . Entonces:

<sup>1</sup> **Teorema del seno-coseno:** el seno de un lado por el coseno de un ángulo adyacente es igual al seno del otro lado de este ángulo por el coseno del tercer lado menos el coseno del segundo lado por el seno del tercer lado por el coseno del ángulo opuesto al primer lado.



**Figura 3.16:** Proyección acimutal ortográfica oblicua ( $30^{\circ}\text{S}, 60^{\circ}\text{W}$ ).

$$\text{sen } \varphi_T = \text{sen } 20^{\circ} \text{sen}(-30^{\circ}) + \text{cos } 20^{\circ} \text{cos}(-30^{\circ}) \text{cos } 40^{\circ} \Rightarrow \varphi_T = 26^{\circ}53'51''$$

$$r_{\varphi_T} = 6\,370\text{km} \text{cos } 26^{\circ}53'51'' = 5\,680,878\text{km}$$

$$\text{sen } \Delta\lambda_T = \frac{\text{cos } 20^{\circ} \text{sen } 40^{\circ}}{\text{cos } 26^{\circ}53'51''} \Rightarrow \Delta\lambda_T = 42^{\circ}37'59''$$

También, por el teorema de la cotangente, es posible calcular  $\Delta\lambda_T$  como:

$$\text{cotg } \Delta\lambda_T = \frac{\text{tg } 20^{\circ} \text{cos}(-30^{\circ}) - \text{cos}(-30^{\circ}) \text{cos } 40^{\circ}}{\text{sen } 40^{\circ}} \Rightarrow \Delta\lambda_T = 42^{\circ}37'59''$$

$$X = 5\,680,878\text{km} \text{sen } 42^{\circ}37'57'' = 3\,847,621\text{km}$$

$$Y = 5\,680,878\text{km} \text{sen } 42^{\circ}37'57'' = 4\,179,496\text{km}$$

Por otra parte, si se calculan las coordenadas utilizando las fórmulas 3.7 y 3.8, se tiene:

$$X = 6\,370\text{km} \text{cos } 20^{\circ} \text{sen } 40^{\circ} = 3\,847,624\text{km} = 3\,847,625\text{km}$$

$$Y = 6\,370\text{km}(\text{cos}(-30^{\circ}) \text{sen } 20^{\circ} - \text{sen}(-30^{\circ}) \text{cos } 20^{\circ} \text{cos } 40^{\circ}) = 4\,179,492\text{km}$$

Los resultados, como se esperaba, coinciden con los obtenidos antes.

### 3.4.2 Características y propiedades

Esta proyección se usa solamente cuando la superficie de referencia es la esfera terrestre. En ella, los paralelos se proyectan según arcos de elipses que presentan su concavidad hacia el Polo proyectado (en la Figura 3.13, el Polo Norte) y se van acercando entre sí al alejarse del centro de la proyección, de longitudes incorrectas menores que las reales ( $k < 1$ ).

El meridiano central es el único que se proyecta según una recta, así como su opuesto; los demás meridianos se proyectan según arcos de elipse que presentan su concavidad hacia el meridiano central, acercándose entre sí a medida que se avanza desde el meridiano central hacia el este o el oeste. Las medidas tomadas sobre los meridianos son incorrectas, menores que las reales.

Esta proyección no es isógona puesto que  $h \neq k$ , y tampoco es equivalente puesto que  $N_1 N_2 \neq 1$ , es decir  $hk \operatorname{sen} \alpha' \neq 1$ .

Los semiejes de la Elipse de Tissot pueden calcularse recurriendo a la proyección polar ficticia y girando el eje terrestre un ángulo igual a  $90^\circ - \varphi_0$  (Figura 3.15).

$$\text{Entonces: } \begin{cases} N_1 = k_T = 1 \\ N_2 = h_T = \operatorname{sen} \varphi_T \end{cases}$$

$\varphi_T$  se halla resolviendo el triángulo esférico  $PN A PN_T$  (Figura 3.15). Si se considera, por ejemplo, el punto ( $20^\circ\text{N}$ ,  $20^\circ\text{W}$ ) y el centro de la proyección en ( $30^\circ\text{S}$ ,  $60^\circ\text{W}$ ) se tiene que:

$$\cos(90^\circ - \varphi_T) = \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \varphi_0) + \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi) \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_0) \cos \Delta\lambda$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \varphi_T &= \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda \\ &= \operatorname{sen} 20^\circ \operatorname{sen}(-30^\circ) + \cos 20^\circ \cos(-30^\circ) \cos 40^\circ = 0,4523958 \end{aligned}$$

$$\text{Entonces, } N_2 = h_T = \operatorname{sen} \varphi_T = 0,4523958.$$

Para hallar los valores de los módulos de alteración lineal  $h$  y  $k$  deben calcularse las derivadas parciales de  $X$  e  $Y$  :

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = -R \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \Delta\lambda \quad \frac{\partial Y}{\partial \varphi} = R(\cos \varphi_0 \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi \cos \Delta\lambda)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = R \cos \varphi \cos \Delta \lambda \quad \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = R \sin \varphi_0 \cos \varphi \sin \Delta \lambda$$

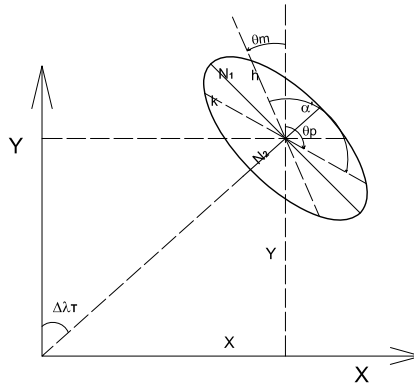
$$E = \left( \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right)^2 \quad G = \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)^2$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sqrt{E}}{R} \\ &= \sqrt{\sin^2 20^\circ \sin^2 40^\circ + (\cos(-30^\circ) \cos 20^\circ + \sin(-30^\circ) \sin 20^\circ \cos 40^\circ)^2} \\ &= 0,717316717 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{\sqrt{G}}{R \cos \varphi} \\ &= \frac{1}{\cos 20^\circ} \sqrt{\cos^2 20^\circ \cos^2 40^\circ + \sin^2(-30^\circ) \cos^2 20^\circ \sin^2 40^\circ} \\ &= 0,830733448 \end{aligned}$$

Como ya se ha visto en el Capítulo 2:  $hk \sin \alpha' = N_1 N_2$ , entonces:  $\sin \alpha' = \frac{N_1 N_2}{hk}$ . De aquí se obtiene que  $\alpha' = 49^\circ 23' 32''$  o bien que  $\alpha' = 130^\circ 36' 28''$ .

Con los valores calculados puede realizarse el dibujo, en escala conveniente, de la Elipse de Tissot (Figura 3.17):



**Figura 3.17:** Elipse indicatriz de Tissot.

### Nota

En la figura anterior, para dibujar los módulos  $h$  y  $k$  se deben calcular las direcciones de los mismos.

En el Capítulo 2 se ha visto que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_m &= \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi}}{\frac{\partial Y}{\partial \varphi}} \\ &= \frac{-R \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda}{R(\cos \varphi_0 \cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi \cos \Delta \lambda)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} 20^\circ \operatorname{sen} 40^\circ}{\cos(-30^\circ) \cos 20^\circ + \operatorname{sen}(-30^\circ) \operatorname{sen} 20^\circ \cos 40^\circ} = -0,32197932 \end{aligned}$$

$$\theta_m = -17^\circ 50' 51'' \text{ ó } \theta_m = 162^\circ 09' 09''$$

$$\operatorname{tg} \theta_p = \frac{\frac{\partial X}{\partial \lambda}}{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}} = \frac{R \cos \varphi \cos \Delta \lambda}{R \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda} = \frac{\cos 40^\circ}{\operatorname{sen}(-30^\circ) \operatorname{sen} 40^\circ} = -2,38350718$$

$$\theta_p = -67^\circ 14' 22'' \text{ ó } \theta_p = 112^\circ 45' 38''. \text{ Entonces:}$$

$$\alpha' = \theta_p - \theta_m = -67^\circ 14' 22'' - (-17^\circ 50' 51'') = 112^\circ 45' 38'' - 162^\circ 09' 09'' = -49^\circ 23' 31'' \text{ o bien}$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= 112^\circ 45' 38'' + 17^\circ 50' 51'' \\ &= -67^\circ 14' 22'' - 162^\circ 09' 09'' \\ &= -229^\circ 23' 31'' \cong 130^\circ 36' 29'' \end{aligned}$$

Debe tenerse en cuenta que cuando se calcula  $\alpha'$  a través de la expresión  $\operatorname{sen} \alpha' = \frac{N_1 N_2}{hk}$  siempre resulta un valor positivo del ángulo. El signo de este ángulo no es significativo ya que el mismo muestra la posición de las rectas tangentes a las proyecciones del paralelo y del meridiano. Lo mismo ocurre con los dos posibles valores de  $\alpha'$ , que no son otros que el par de valores suplementarios de los ángulos que forman dos rectas secantes.

El módulo de alteración lineal en el punto es:  $\mu = N_1 N_2 = 0,4523958$  y el error máximo angular en dicho punto es:

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1 - 0,4523958}{1 + 0,4523958} = 44^\circ 18' 01''.$$

### 3.4.3 Usos

Para mapas de un hemisferio de la Luna y para representar regiones de la superficie terrestre que no se alejen del centro de la proyección.

### Ejercicio

Supóngase que en la proyección acimutal ortográfica (Figura 3.16) se desean calcular las coordenadas del centro de la proyección  $(\varphi_0, \lambda_0)$ . Evidentemente  $\lambda_0 = 60^\circ W$  ya que corresponde al único meridiano que se proyecta como una línea recta.

Las ecuaciones de la carta de esta proyección son las ecuaciones 3.7 y 3.8:

$$\begin{aligned} X &= R \cos \varphi \sin \Delta \lambda \\ Y &= R(\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda) \end{aligned}$$

Se elige un punto, por ejemplo sobre el meridiano central:  $A(20^\circ N, 60^\circ W)$ . Para él es, entonces,  $\varphi = 20^\circ$ ,  $\Delta \lambda = 0^\circ$ . Sus coordenadas cartesianas son:

$$\begin{aligned} X &= 6\,370\text{km} \cos 20^\circ \sin 0^\circ = 0 \\ Y &= 6\,370\text{km}(\cos \varphi_0 \sin 20^\circ - \sin \varphi_0 \cos 20^\circ \cos 0^\circ) \end{aligned}$$

Para elegir el lugar que se supone centro de la proyección  $(\varphi_0, \lambda_0)$ , se examina el meridiano central (línea recta) y se visualiza el punto a partir del cual los paralelos se van acercando entre sí, dirigiéndose al norte y al sur. En el caso de la Figura 3.16, es la intersección del meridiano central ( $\Delta \lambda = 0^\circ$ ) con la proyección del paralelo  $\varphi = 30^\circ S$ . Se supone provisoriamente que el centro de la proyección es el punto de coordenadas  $(\varphi_0 = -30^\circ, \lambda_0 = -60^\circ)$ . Entonces:

$$Y = 6\,370\text{km}(\cos(-30^\circ) \sin 20^\circ - \sin(-30^\circ) \cos 20^\circ \cos 0^\circ) = 4\,879,70307\text{km}$$

Se mide en la proyección (mapa) el valor de  $Y$ ; luego, utilizando la escala del mapa, se halla la dimensión de  $Y$ . Si coincide con el valor medido en el mapa, se corroborará lo antes supuesto; en caso contrario, se supondrá que el centro de proyección está ubicado más al norte o más al sur.

### Nota

En caso de no figurar la escala en el mapa, se debe hallar la misma haciendo uso del conocimiento de las propiedades de la proyección.



### 3.4.4 Transformación inversa de coordenadas

Como en las proyecciones acimutales ortográficas polar y ecuatorial, se desean hallar las fórmulas que permitan calcular las coordenadas geográficas de un punto  $(\varphi, \lambda)$  a partir de las coordenadas planas cartesianas del mismo  $(X, Y)$  que se miden en un mapa o carta. Este problema puede resolverse por dos caminos:

- 1) hallando las coordenadas geográficas consideradas como pertenecientes al caso polar transversal  $(\varphi_T, \lambda_T)$ , como se ha visto en el caso polar de esta misma proyección, y a continuación hallando los valores de  $\varphi$  y  $\lambda$  en función de  $\varphi_T$  y  $\lambda_T$  resolviendo el triángulo esférico apropiado;
- 2) hallando las coordenadas geográficas  $(\varphi$  y  $\lambda)$  a partir de las fórmulas de las coordenadas cartesianas del caso oblicuo.

*Procedimiento (a):*

$$x = E X = R E \cos \varphi_T \operatorname{sen} \Delta \lambda_T$$

$$y = E Y = R E \cos \varphi_T \cos \Delta \lambda_T$$

donde  $E$  es la escala del mapa o carta. Entonces  $\lambda_T = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} + \lambda_0$  y

$$\varphi_T = \operatorname{arc} \cos \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{E R}$$

De la Figura 3.18 se tiene que:

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \cos(90^\circ - \varphi_0) \cos(90^\circ - \varphi_T) + \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_0) \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_T) \cos \Delta \lambda_T$$

$$\operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi_T + \cos \varphi_0 \cos \varphi_T \cos \Delta \lambda_T$$

de donde es posible obtener el valor de  $\varphi_T$ , y que

$$\frac{\operatorname{sen} \Delta \lambda}{\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_T)} = \frac{\operatorname{sen} \Delta \lambda_T}{\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi)}$$

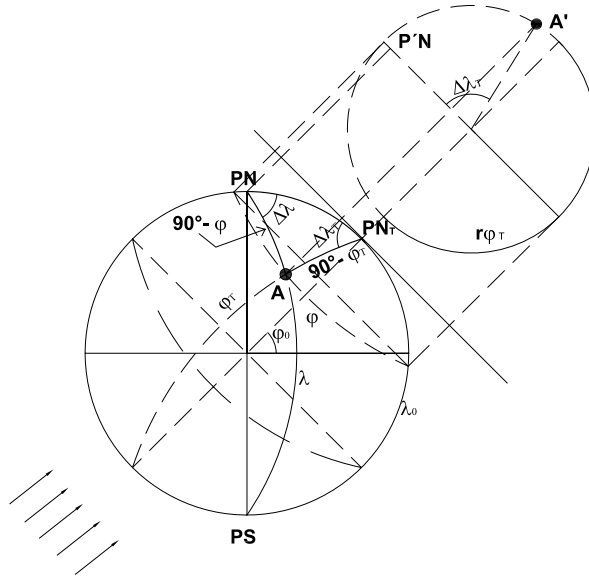
$$\operatorname{sen} \Delta \lambda = \frac{\cos \varphi_T \operatorname{sen} \Delta \lambda_T}{\cos \varphi}$$

De aquí se calcula el valor de  $\Delta \lambda$  y el de  $\lambda = \Delta \lambda + \lambda_0$ .

*Procedimiento (b):* Utilizando las fórmulas del caso oblicuo:

$$x = E X = E R \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda$$

$$y = E Y = E R (\cos \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda)$$



**Figura 3.18:** Proyección acimutal ortográfica oblicua: Coordenadas polares ficticias.

Resultan dos ecuaciones con dos incógnitas ( $\varphi$  y  $\Delta\lambda$ ) que se resuelven, obteniendo  $\varphi$  y  $\Delta\lambda$ .

### Ejemplo

Se desean hallar las coordenadas geográficas ( $\varphi$  y  $\lambda$ ) de un punto en un mapa en proyección acimutal ortográfica oblicua, que está dibujado en escala 1 : 75 800 000. El centro de la proyección es:  $\varphi_0 = 30^\circ S$  y  $\lambda_0 = 60^\circ W$ . Se miden las coordenadas cartesianas del punto A : X = 6,1cm, Y = 4,95cm. Entonces, considerando el caso como polar transverso:

$$\Delta\lambda_T = \text{arc tg} \frac{x}{y} = \text{arc tg} \frac{6,1\text{cm}}{4,95\text{cm}} = 50^\circ 56' 29''$$

$$\varphi_T = \text{arc cos} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{ER} = \text{arc cos} \frac{\sqrt{(6,1\text{cm})^2 + (4,95\text{cm})^2}}{\frac{1}{75\,800\,000} 637\,000\,000} = 20^\circ 48' 18''$$

Resolviendo el triángulo esférico correspondiente:

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \cos(90^\circ - \varphi_0) \cos(90^\circ - \varphi_T) + \text{sen}(90^\circ - \varphi_0) \text{sen}(90^\circ - \varphi_T) \cos \Delta\lambda_T$$

$$\text{sen} \varphi = \text{sen}(-30^\circ) \text{sen}(20^\circ 48' 18'') + \cos(-30^\circ) \cos(20^\circ 48' 18'') \cos(50^\circ 56' 29'')$$

$$\varphi = 19^\circ 25' 18''$$

$$\Delta\lambda = \arcsin \frac{\cos \varphi_T \sin \Delta\lambda_T}{\cos \varphi} = \arcsin \frac{\cos 20^\circ 48' 18'' \sin 50^\circ 56' 29''}{\cos 19^\circ 25' 18''}$$

$$\Delta\lambda = 50^\circ 19' 26''$$

$$\text{Entonces: } \lambda = \Delta\lambda + \lambda_0 = 50^\circ 19' 26'' - 60^\circ = -9^\circ 40' 34'' \cong -10^\circ$$

### 3.5 Proyección acimutal estereográfica polar

#### 3.5.1 Dibujo de la proyección

##### 1) Método gráfico (Figura 3.19)

El punto de vista se encuentra a una distancia igual a  $2R$  del punto de tangencia de la esfera terrestre con el plano de proyección, pudiendo presentarse dos casos: tangente en el Polo Norte y punto de vista en el Polo Sur, y tangente en el Polo Sur y punto de vista en el Polo Norte.

Se dibuja una figura auxiliar sobre un plano perpendicular al de proyección con paralelos cada  $15^\circ$  (en el caso que se presenta en la Figura 3.19); desde el punto de vista se trazan los rayos de proyección hasta interceptar el plano de proyección, quedando determinado el radio  $r_\varphi$  de cada paralelo.

Teniendo en cuenta al apartamiento se abate el plano de proyección. Con centro en el centro de la proyección se dibujan los paralelos, con radios  $r_\varphi$ . Para dibujar los meridianos se hace centro con un transportador de ángulos en el mismo punto y se trazan éstos cada  $15^\circ$  en forma consecutiva. En este caso para determinar la escala se tuvo en cuenta el radio del Ecuador.

##### 2) Método analítico (Figura 3.20)

Las coordenadas planas de un punto, conocidas sus coordenadas geográficas ( $\varphi$  y  $\lambda$ ), son:

$$\text{Coordenadas polares: } \begin{cases} r_\delta = 2R \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \text{ o bien } r_\varphi = 2R \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\varphi}{2}) \\ \Delta\lambda \end{cases}$$

Se sabe que todo ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central correspondiente. Observando en la Figura 3.19 el triángulo  $VPN A'$  (formado al tomar el paralelo de  $45^\circ$ ) se

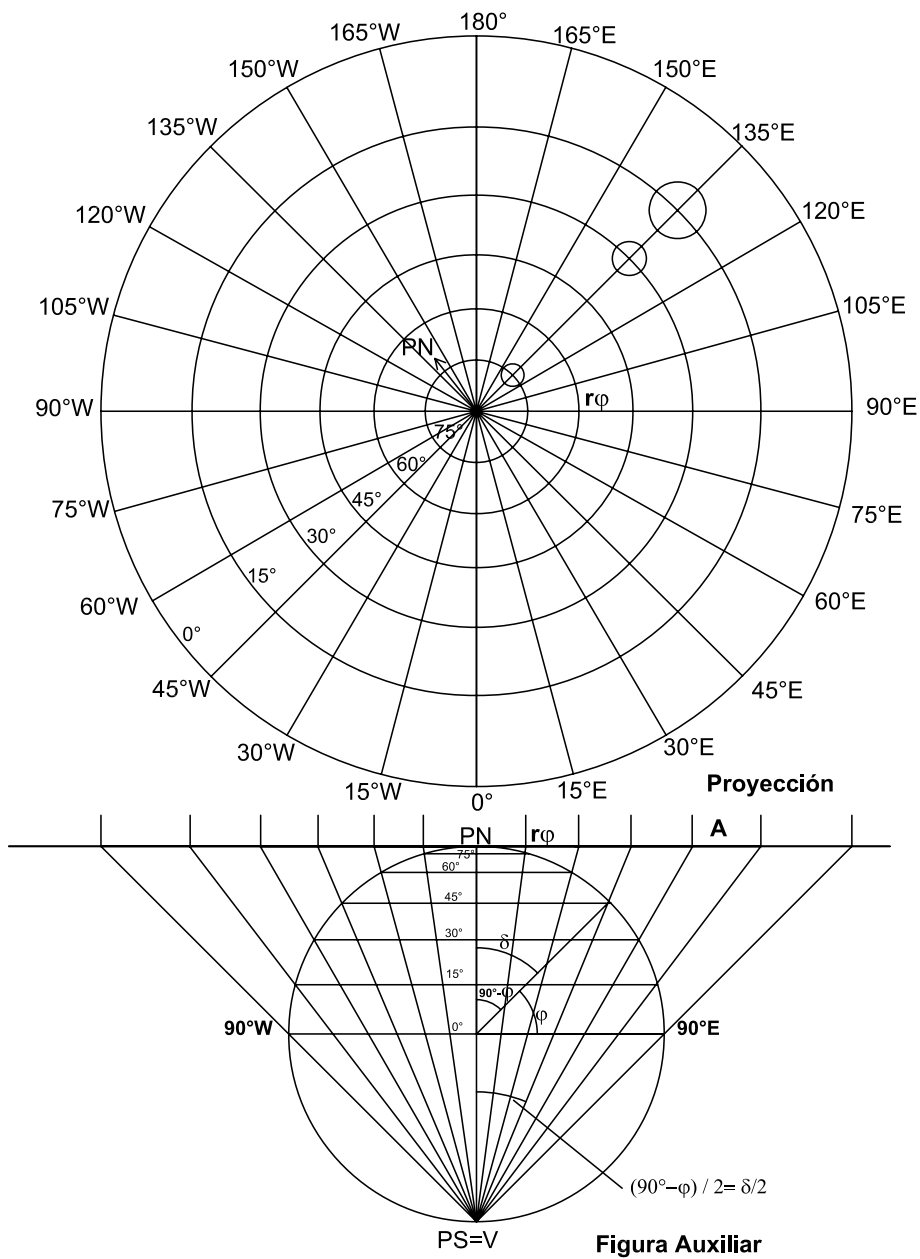


Figura 3.19: Proyección acimutal estereográfica polar.

deduce que:

$$\operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi}{2} = \frac{r_\varphi}{2R} \Rightarrow r_\varphi = 2R \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi}{2} = 2R \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$$

O bien, expresándolo en función de la colatitud<sup>2</sup> ( $\delta$ ):

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{r_\varphi}{2R} \Rightarrow r_\varphi = 2R \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$$

Coordenadas cartesianas: 
$$\begin{cases} X = r_\delta \operatorname{sen} \Delta\lambda \\ Y = r_\delta \operatorname{cos} \Delta\lambda \end{cases}$$

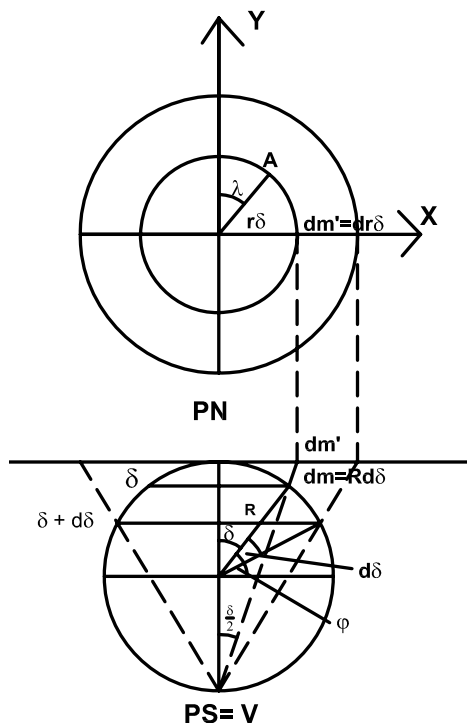


Figura 3.20: Proyección acimutal estereográfica polar.

### Ejemplo

Dado el punto  $A(\varphi = 60^\circ, \lambda = 15^\circ)$ , se desean conocer sus coordenadas planas.

$$r_\delta = 2 \times 6\,370\text{km} \operatorname{tg} \frac{30^\circ}{2} = 3\,413,673\text{km}, \Delta\lambda = 15^\circ$$

<sup>2</sup> Se definirá la colatitud como  $90^\circ - \varphi$  si el punto se ubica en el hemisferio norte y  $90^\circ + \varphi$  si lo hace en el hemisferio sur.

$$X = 3\,413,673\text{km} \operatorname{sen} 15^\circ = 883,524\text{km}$$

$$Y = 3\,413,673\text{km} \operatorname{cos} 15^\circ = 3\,297,528\text{km}$$

### 3.5.2 Características y propiedades

Los paralelos se proyectan según circunferencias concéntricas que se van separando entre sí levemente al alejarse del centro de la proyección; dichas circunferencias son de longitudes incorrectas, mayores que las reales. La deformación en cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ , y como es la misma en todo el paralelo, para la deducción de su fórmula se toma el paralelo completo.

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}} = \frac{2\pi r_\varphi}{2\pi R \operatorname{cos} \varphi} = \frac{r_\varphi}{R \operatorname{cos} \varphi}$$

Reemplazando por la expresión de  $r_\varphi$ :

$$k = \frac{r_\varphi}{R \operatorname{cos} \varphi} = \frac{2R \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{R \operatorname{sen} \delta} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}}{2 \operatorname{cos} \frac{\delta}{2} \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \operatorname{cos} \frac{\delta}{2}} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \frac{\delta}{2}}$$

Los meridianos se proyectan según rectas radiales de longitudes incorrectas, mayores que las reales, formando entre sí ángulos iguales a la diferencia de su longitud geográfica. La deformación en cada punto del meridiano se determina con el módulo de alteración lineal  $h$ .

Considerando nuevamente la colatitud  $\delta$ , se calcula el módulo de alteración lineal  $h$ :

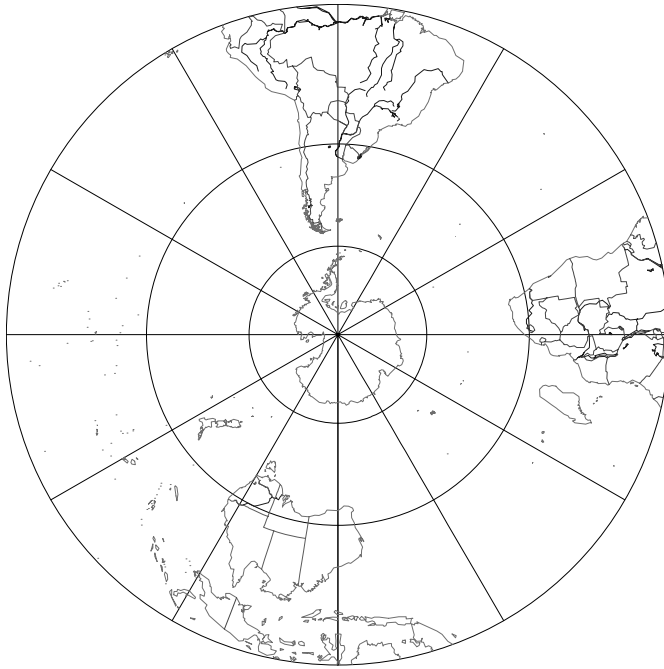
$$h = \frac{dm'}{dm} = \frac{dr_\delta}{R d\delta} = \frac{2R \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \frac{\delta}{2}} d\delta}{R d\delta} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \frac{\delta}{2}}$$

donde  $dm'$  es el diferencial en la dirección de la proyección del meridiano y  $dm$  es el diferencial en la dirección del meridiano.

Como, evidentemente,  $h = k$  la proyección es isógona o conforme, siendo la elipse indicatriz de Tissot una circunferencia. Además, no es equivalente pues  $hk \neq 1$ .

#### Ejemplos (Figura 3.21)

- 1) Considérese la ciudad de Santa Fe (República Argentina), cuya latitud es  $\varphi = 31^\circ 38' S$ . Los módulos de alteración lineal de la proyección



**Figura 3.21:** Proyección acimutal estereográfica polar. Meridiano central  $\lambda_0 = 60^\circ W$ .

acimutal estereográfica polar en ese punto son:

$$h = k = \frac{1}{\cos^2\left(45^\circ + \frac{-31^\circ 38'}{2}\right)} = 1,3119219$$

- 2) La deformación en los puntos del hemisferio norte de latitud  $\varphi = 60^\circ$  es:

$$h = k = \frac{1}{\cos^2\left(45^\circ - \frac{60^\circ}{2}\right)} = 1,0717967$$

### 3.5.3 Usos

Dado su carácter de isógona se la utiliza para la navegación aérea o marítima, sobre todo para esta última. También para mapas de regiones polares; actualmente se la utiliza como complemento de la proyección UTM, desde  $84^\circ N$  y  $80^\circ S$ , hasta los polos respectivos (sobre el elipsoide, es decir para cartas).

## 3.6 Proyección acimutal estereográfica ecuatorial

### 3.6.1 Dibujo de la proyección (Figura 3.22)

#### 1) Método gráfico

El plano de proyección es tangente a la esfera terrestre en un punto del Ecuador  $O$ , dicho de otra forma, tangente en el punto de intersección del Ecuador con un meridiano. Pueden presentarse entonces infinitos casos. En la Figura 3.22 se adoptó como meridiano de tangencia el de  $0^\circ$ .

El camino gráfico exige utilizar compases de vara para el trazado de paralelos y meridianos próximos al centro de la proyección, ya que sus radios son muy grandes. Por lo tanto, es más frecuente utilizar el camino analítico (ver inciso siguiente), en el que mediante el cálculo de las coordenadas  $(X, Y)$  de los puntos de intersección de paralelos y meridianos, es posible realizar el dibujo con curvilíneo.

En la Figura 3.22, la figura auxiliar 1, con el eje terrestre paralelo al plano de proyección y el punto de tangencia  $0 \equiv 0'$ , es utilizada para dibujar los paralelos. Los rayos de proyección que pasan por  $PN$  y  $PS$  determinan sobre el plano de proyección la medida de los radios de los meridianos de  $90^\circ E$  y  $90^\circ W$  ( $O'PN'$  o  $O'PS'$ ) y la ubicación de los Polos. La proyección del meridiano de tangencia ( $0^\circ$ ) es la recta que une las proyecciones de los Polos.

Para dibujar el paralelo de  $60^\circ$  se procede de la siguiente manera: por el punto 1 (Figura 3.22, figura auxiliar 1) pasa un rayo de proyección que intersecta al plano tangente a la esfera en  $1'$  y por  $2 \equiv 3$  pasan otros rayos de proyección que intersectan al mismo plano en  $2' \equiv 3'$ . Al abatir el plano de proyección se tienen los puntos  $1''$ ,  $2''$  y  $3''$  pertenecientes a dicho paralelo en la proyección. A continuación, se halla la mediatriz del segmento  $1'' 2''$  y donde ésta intersecta a la prolongación del segmento  $PN'' - PS''$  se apoya el compás de manera tal que el arco de circunferencia contenga a los puntos  $2''$ ,  $1''$  y  $3''$ , trazándose de esa forma el paralelo. Los restantes paralelos se trazan de la misma manera.



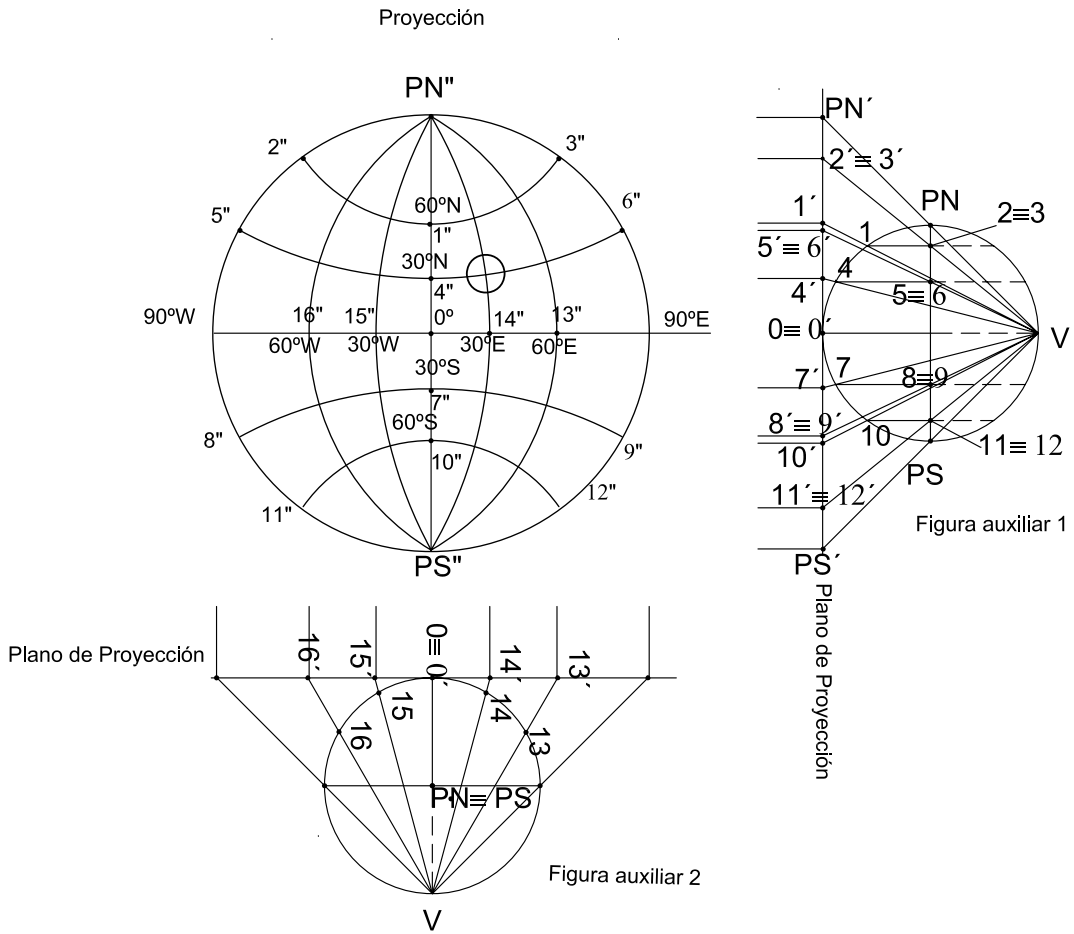
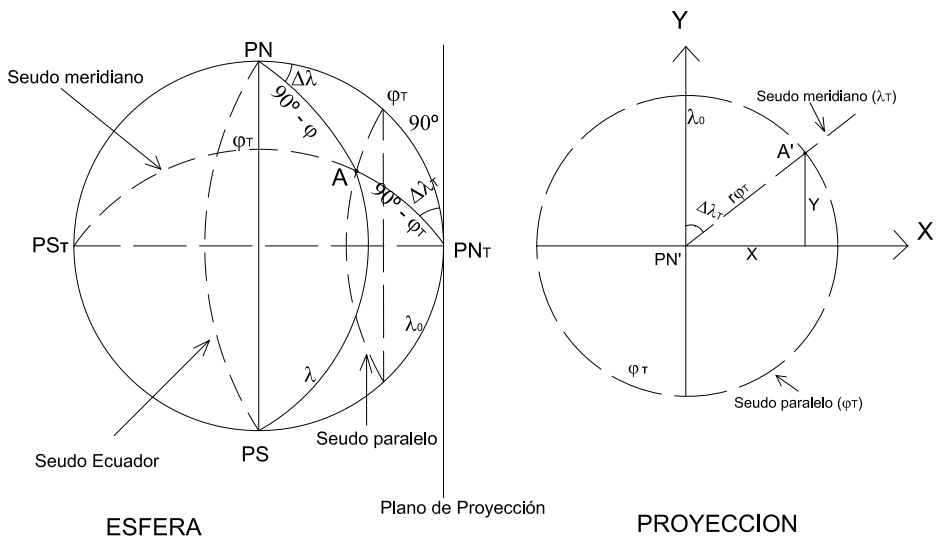


Figura 3.22: Proyección acinutal estereográfica ecuatorial. Dibujo de la proyección. Método gráfico.

Para dibujar los meridianos se utiliza la figura auxiliar 2, de la Figura 3.22, con el eje terrestre perpendicular al papel y paralelo al plano de proyección, con los meridianos concurrentes en el centro de la figura y cada  $30^\circ$  (en líneas de puntos). Desde el punto de vista  $V$ , parten rayos de proyección que pasan por la intersección del Ecuador con los meridianos (13, 14, 15 y 16) y al abatir el plano determinan ( $13'$ ,  $14'$ ,  $15'$  y  $16'$ ) en la proyección. Se utiliza la misma metodología que para los paralelos; para dibujar, por ejemplo, el meridiano de  $60^\circ E$  se halla la mediatriz de  $PN''13''$  y en la intersección de ésta con la prolongación del Ecuador, se apoya el compás trazándose el arco de circunferencia que contiene a los puntos  $PN''$ ,  $PS''$  y  $13''$ , que representa el meridiano. De la misma manera se procede con los restantes.

El Ecuador y el meridiano central se dibujan según rectas, pues son círculos de la esfera que pasan por el punto de vista.

## 2) Método analítico (Figura 3.23)



**Figura 3.23:** Cálculo de coordenadas. Caso polar transversero.

Un punto de la proyección de coordenadas  $\varphi$  y  $\lambda$  tendrá el valor correspondiente al mismo punto considerado en el caso polar trans-

verso. Se calculan las coordenadas del punto en el caso polar transverso ( $\varphi_T$  y  $\lambda_T$ ) y luego las coordenadas planas  $r_{\varphi_T}$  y  $\Delta\lambda_T$  (polares) y  $X, Y$  (cartesianas).

En el triángulo  $PN A PN_T$  (Figura 3.23), aplicando el teorema del coseno, se tiene:

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - \varphi_T) &= \cos(90^\circ - \varphi) \cos 90^\circ + \sin(90^\circ - \varphi) \sin 90^\circ \cos \Delta\lambda \\ \sin \varphi_T &= \cos \varphi \cos \Delta\lambda\end{aligned}$$

De esta expresión es posible obtener  $\varphi_T$ . Aplicando ahora el teorema del seno en el mismo triángulo:

$$\frac{\sin \Delta\lambda_T}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{\sin \Delta\lambda}{\sin(90^\circ - \varphi_T)} \Rightarrow \frac{\sin \Delta\lambda_T}{\cos \varphi} = \frac{\sin \Delta\lambda}{\cos \varphi_T},$$

entonces  $\sin \Delta\lambda_T = \frac{\cos \varphi \sin \Delta\lambda}{\cos \varphi_T}$ , de donde se obtiene el valor de  $\Delta\lambda_T$ .

Las coordenadas planas son:

Coordenadas polares:

$$\begin{aligned}r_{\varphi_T} &= 2R \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi_T}{2} \right) \\ \Delta\lambda_T &\end{aligned}$$

Coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}X &= 2R \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi_T}{2} \right) \sin \Delta\lambda \\ Y &= 2R \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi_T}{2} \right) \cos \Delta\lambda\end{aligned}$$

También es posible calcular estas coordenadas con las fórmulas del caso ecuatorial, que se obtienen de las del caso oblicuo (ver en la próxima sección) haciendo  $\varphi_0 = 0^\circ$ :

$$\begin{aligned}X &= \frac{2R \cos \varphi \sin \Delta\lambda}{1 + \cos \varphi \cos \Delta\lambda} \\ Y &= \frac{2R \sin \varphi}{1 + \cos \varphi \cos \Delta\lambda}\end{aligned}$$

### Ejemplo:

Se calcularán las coordenadas planas del punto ( $\varphi = 30^\circ N, \lambda = 60^\circ E$ ), considerando  $\lambda_0 = 0^\circ$ . Para el cálculo de las coordenadas polares transversas es necesario determinar:

$$\text{sen } \varphi_T = \cos \varphi \cos \Delta \lambda = \cos 30^\circ \cos 60^\circ = 0,4330127.$$

$$\text{Entonces: } \varphi_T = 25^\circ 39' 32''$$
$$\text{sen } \Delta \lambda_T = \frac{\cos \varphi \text{ sen } \Delta \lambda}{\cos \varphi_T} = \frac{\cos 30^\circ \text{ sen } 60^\circ}{\cos 25^\circ 39' 32''} = 0,8320503.$$

$$\text{De aquí: } \Delta \lambda_T = 56^\circ 18' 36''$$

Entonces, las coordenadas polares son:

$$r_{\varphi_T} = 2R \text{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi_T}{2} \right) = 2,6370 \text{ km} \tan \left( 45^\circ - \frac{25^\circ 39' 32''}{2} \right) = 8\,013,665 \text{ km}$$
$$\Delta \lambda_T = 56^\circ 18' 36''$$

Las coordenadas cartesianas son:

$$X = r_{\varphi_T} \text{ sen } \Delta \lambda_T = 8\,013,665 \text{ km} \text{ sen } 56^\circ 18' 36'' = 6\,667,777 \text{ km}$$

$$Y = r_{\varphi_T} \cos \Delta \lambda_T = 8\,013,665 \text{ km} \cos 56^\circ 18' 36'' = 4\,445,174 \text{ km}$$

Si se calculan estas mismas coordenadas por las fórmulas del caso ecuatorial, resultará:

$$X = \frac{2R \cos \varphi \text{ sen } \Delta \lambda}{1 + \cos \varphi \cos \Delta \lambda} = \frac{2 \times 6\,370 \text{ km} \cos 30^\circ \text{ sen } 60^\circ}{1 + \cos 30^\circ \cos 60^\circ} = 6\,667,771 \text{ km}$$
$$Y = \frac{2R \text{ sen } \varphi}{1 + \cos \varphi \cos \Delta \lambda} = \frac{2 \times 6\,370 \text{ km} \text{ sen } 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ \cos 60^\circ} = 4\,445,180 \text{ km}$$

Los semiejes de la elipse de Tissot en ese punto son:

$$k_T = \frac{2\pi r_{\varphi_T}}{2\pi R \cos \varphi_T} = \frac{2R \text{tg} \frac{90^\circ - \varphi_T}{2}}{R \cos \varphi_T} = \frac{2 \text{tg} \frac{\delta_T}{2}}{\text{sen } \delta_T} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\delta_T}{2}} \quad y$$
$$h_T = \frac{dm'}{dm} = \frac{dr_{\delta_T}}{R d_{\delta_T}} = \frac{\frac{2R d_{\delta_T}}{2 \cos^2 \frac{\delta_T}{2}}}{R d_{\delta_T}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\delta_T}{2}} = \frac{1}{\cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi_T}{2} \right)} = k_T$$
$$N_1 = N_2 = h_T = k_T = \frac{1}{\cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\varphi_T}{2} \right)} = \frac{1}{\cos^2 \left( 45^\circ - \frac{25^\circ 39' 32''}{2} \right)} = 1,396$$

### 3.6.2 Características y propiedades

El Ecuador se proyecta según una recta de longitud incorrecta, mayor que la real. Los demás paralelos se proyectan según arcos de circunferencia de longitudes incorrectas, también mayores que las reales, que se van alejando levemente desde el Ecuador hacia los polos. La deformación en cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$  que para el punto de coordenadas ( $\varphi = 30^\circ, \lambda = 60^\circ$ ) tiene un valor  $k = 1,396$ .

El meridiano central es el único que se proyecta según una recta, de longitud incorrecta mayor que la real ( $4R$  en la proyección y  $\pi R$  en la esfera). Los dos meridianos que difieren  $90^\circ$  del central se proyectan según dos semicircunferencias opuestas de longitudes incorrectas, el doble de la magnitud real. Los demás meridianos se proyectan según arcos de circunferencias que se alejan entre sí a partir del meridiano central hacia el este o el oeste, calculándose la deformación en cada meridiano con el módulo de alteración lineal  $h$ , que tiene el mismo valor que en el caso polar transversal para la misma ubicación:  $h = 1,396$  (ver ejercicio anterior).



**Figura 3.24:** Proyección acimutal estereográfica ecuatorial. Meridiano central  $\lambda_0 = 60^\circ W$ .

Como  $h = k$  la proyección es isógona, pero no es equivalente pues  $hk \neq 1$ .

El módulo de deformación superficial en el punto considerado en el ejemplo anterior es:

$$\mu = N_1 N_2 = 1,948$$

lo que significa que la deformación del área en ese punto es de 94,8%.

### 3.6.3 Usos

Dado su carácter de isógona, se utiliza esta proyección para mapas marinos y aeronáuticos, y para cualquier uso, siempre que no sea una zona muy alejada del centro de la proyección.

## 3.7 Proyección acimutal estereográfica oblicua

### 3.7.1 Dibujo de la proyección

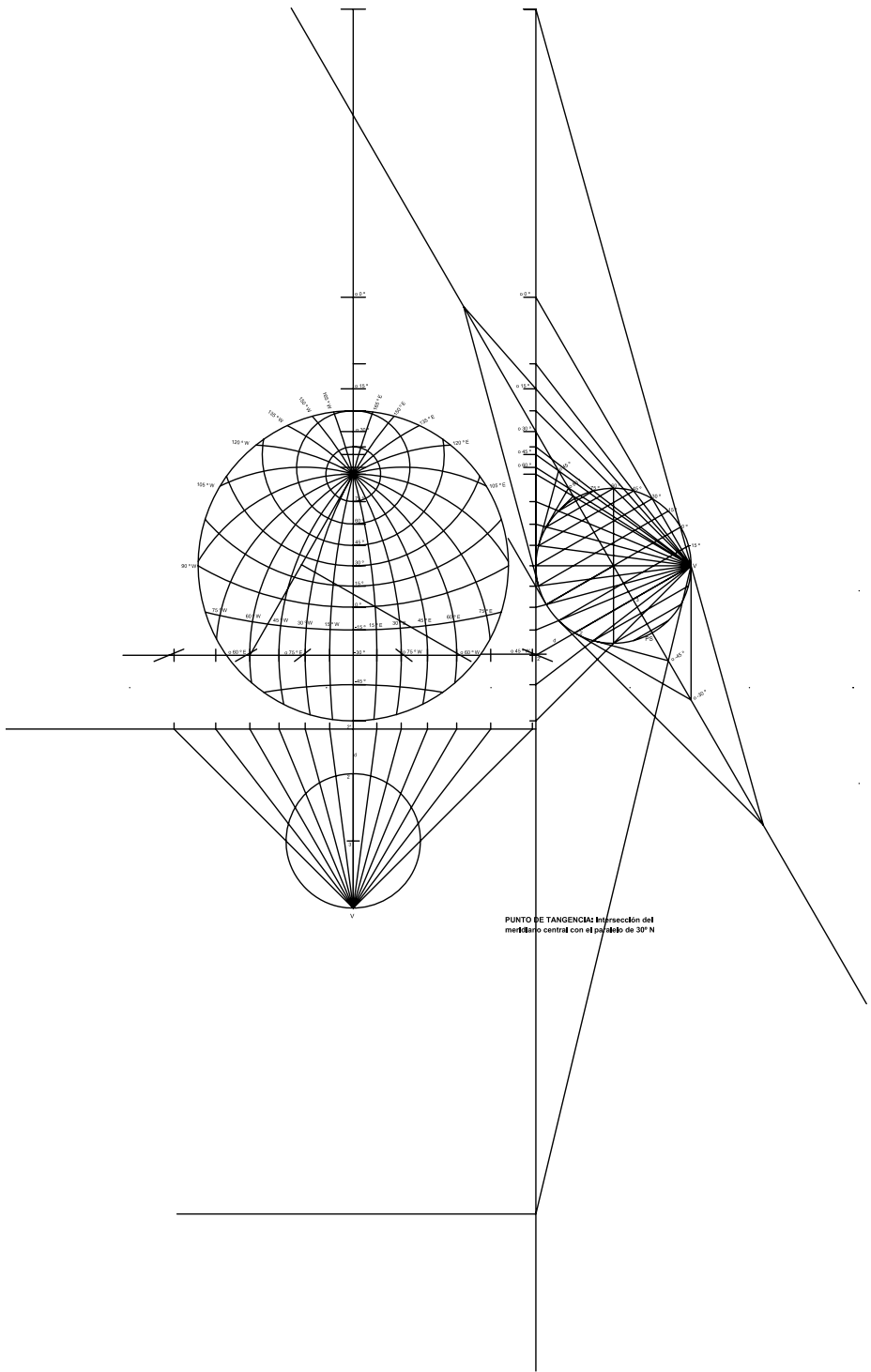
- 1) **Método gráfico** (Ver Figura 3.25) La escala está dada por la figura auxiliar de la derecha.

Se adoptó el plano de proyección tangente a la esfera terrestre en un punto de latitud  $30^\circ$  y de  $0^\circ$  de longitud (meridiano central), es decir, la figura auxiliar de la derecha de la Figura 3.25 tiene el eje  $PN - PS$  inclinado  $30^\circ$  con respecto a la vertical. Se dibuja en primera instancia la circunferencia límite del hemisferio que se proyecta, haciendo pasar los rayos de proyección por los puntos 1 y 2 de la figura auxiliar hasta interceptar al plano de proyección en  $1'$  y  $2'$ , extremos del diámetro de dicha circunferencia.

El segundo paso consiste en determinar la proyección del Polo Norte, haciendo pasar un rayo de proyección por  $PN$  que intercepte al plano de proyección en  $PN'$ , siendo  $PN''$  su proyección (al abatir el plano de proyección).

Para dibujar el paralelo de  $60^\circ$  se determinan, siguiendo la metodología anterior, los puntos 1, 3 y el centro ( $C$   $60^\circ$ ), este último a través de una recta tangente que intercepta la prolongación de  $PN - PS$ , por donde pasa un rayo de proyección hasta interceptar al plano de proyección en  $C'$   $60^\circ$ , con lo cual al abatir el plano queda determinado  $C''$   $60^\circ$  en la proyección. El paralelo de la misma latitud que el de tangencia, pero ubicado en el hemisferio sur, se proyecta según una recta, puesto que pasa por el punto de vista.

Para dibujar los meridianos, se mide en cada caso un ángulo igual a la mitad de la diferencia de longitud con el central y con vértice común en  $PN''$ , y se trazan los correspondientes lados hasta interceptar el paralelo de  $30^\circ$  S. Se halla la mediatriz de dichos segmentos



**Figura 3.25:** Proyección acimutal estereográfica oblicua.

( $PN''$  13,  $PN''$  14, etc.); si se la prolonga deberá interceptar a dicho paralelo, quedando determinados los centros (C 30°E, C 30°W, C 60°E, etc.) que permiten el trazado de los meridianos. Uniendo con una recta 1'' y 2'' se tiene la proyección del meridiano central y su opuesto.

## 2) Método analítico

Se deducirán las fórmulas que permiten calcular los elementos necesarios para el dibujo de esta proyección.

Usando una esfera como superficie terrestre, el punto de vista ( $V$ ) está ubicado diametralmente opuesto al punto de tangencia del plano de proyección  $O(\varphi_0, \lambda_0)$ . La proyección de cada punto de la superficie terrestre ( $A$ ) se obtiene con trazos que parten del punto de vista ( $V$ ), pasando por el punto  $A$  e interceptando al plano de proyección en  $A'$ .

De la Figura 3.26 se obtiene que:  $OA' = 2R \operatorname{tg} \frac{\delta_T}{2}$ .

Supóngase un sistema de ejes cartesianos rectangulares sobre el plano de proyección, de modo que el eje  $Y$  sea tangente al meridiano que pasa por  $O$  (punto de tangencia, centro de la proyección); el eje  $X$  es perpendicular al eje  $Y$ , por lo tanto tangente a la semicircunferencia máxima normal al meridiano central (Figuras 3.26 y 3.27).

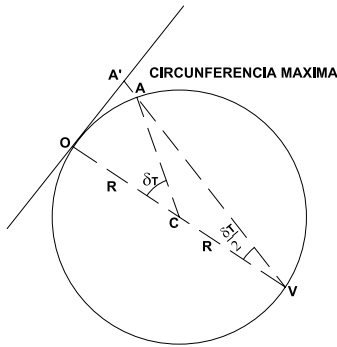


Figura 3.26

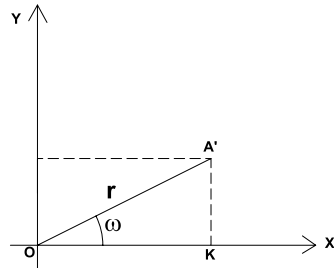


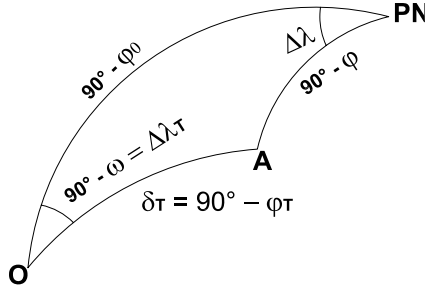
Figura 3.27

$$X = OK = OA' \cos \omega = 2R \operatorname{tg} \frac{\delta_T}{2} \cos \omega = \frac{2R \operatorname{sen} \delta_T \cos \omega}{1 + \cos \delta_T} \quad (3.9)$$



$$Y = OD = OA' \operatorname{sen} \omega = 2R \operatorname{tg} \frac{\delta_T}{2} \operatorname{sen} \omega = \frac{2R \operatorname{sen} \delta_T \operatorname{sen} \omega}{1 + \cos \delta_T} \quad (3.10)$$

En la Figura 3.28 se representa el triángulo esférico de vértices  $PN$ ,  $O$  y  $A$ .



**Figura 3.28:** Triángulo esférico  $PN O A$ .

En el mismo se observa que:

$$PN\hat{O}A = 90^\circ - \omega, \quad PNO = 90^\circ - \varphi_0 \quad \text{y que} \quad PNA = 90^\circ - \varphi$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{\operatorname{sen} \delta_T}{\operatorname{sen} \Delta \lambda} = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi)}{\operatorname{sen}(90^\circ - \omega)} = \frac{\cos \varphi}{\cos \omega}$$

De aquí se deduce que

$$\operatorname{sen} \delta_T \cos \omega = \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda \quad (3.11)$$

Aplicando ahora el teorema del coseno:

$$\cos \delta_T = \cos(90^\circ - \varphi_0) \cos(90^\circ - \varphi) + \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_0) \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi) \cos \Delta \lambda$$

$$\cos \delta_T = \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda \quad (3.12)$$

Aplicando el teorema del seno-coseno:

$$\operatorname{sen} \delta_T \cos(90^\circ - \omega) =$$

$$= \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_0) \cos(90^\circ - \varphi) - \cos(90^\circ - \varphi_0) \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi) \cos \Delta \lambda$$

$$\operatorname{sen} \delta_T \operatorname{sen} \omega = \cos \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda \quad (3.13)$$

Reemplazando las expresiones 3.11, 3.12 y 3.13 en las 3.9 y 3.10, se tiene:

$$X = \frac{2R \operatorname{sen} \varphi \cos \Delta \lambda}{1 + \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda} \quad (3.14)$$

$$Y = \frac{2R(\cos \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda)}{1 + \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda} \quad (3.15)$$

Las fórmulas 3.14 y 3.15 permiten el cálculo de las coordenadas planas de la proyección de cualquier punto de la superficie terrestre cuando se conocen las coordenadas geográficas del mismo.

### 3.7.2 Características y propiedades

Los paralelos se proyectan según circunferencias o arcos de circunferencia que se van alejando entre sí levemente al dirigirse del centro de la proyección hacia el norte o hacia el sur.

El paralelo cuya latitud coincide con la del punto de tangencia en el otro hemisferio es el único que se proyecta según una recta. Las medidas tomadas sobre los paralelos son incorrectas, mayores que las reales y se calcula la deformación en cada paralelo con el módulo de alteración lineal  $k$ .

El meridiano central y la parte visible de su opuesto son los únicos que se proyectan según una recta, los demás se proyectan según arcos de circunferencias que se van alejando entre sí, levemente, a partir del meridiano central hacia el este y el oeste. Las medidas tomadas sobre los meridianos son incorrectas, mayores que las reales, y se calcula la deformación en cada meridiano con el módulo de alteración lineal  $h$ .

Como  $h = k$  la proyección es isógona, pero no es equivalente pues  $hk \neq 1$ .

### 3.7.3 Módulos de alteración lineal y superficial

Los módulos de alteración lineal máximo y mínimo son:

$$N_1 = N_2 = h_T = k_T$$

El módulo de alteración superficial es:  $\mu = N_1 N_2$ .

### 3.7.4 Usos

Sin limitación de extensión para la navegación marítima o aérea dado su carácter de isógona; también, para mapas celestes y para cualquier uso siempre que se represente una región muy reducida cercana al centro de la proyección para que las deformaciones no sean muy grandes.

#### Nota

Una variante en el método analítico consiste en considerar una proyección acimutal estereográfica polar ficticia y calcular las coordenadas geográficas de cada punto ( $\varphi_T$  y  $\lambda_T$ ) en función de  $\varphi$  y  $\lambda$ , y hallar las coordenadas planas  $r_{\varphi_T}$  y  $\lambda_T$  (polares) y cartesianas ( $X$  e  $Y$ ).

En triángulo esférico  $PN A PN_T$  (Figura 3.29) y aplicando el teorema del coseno:

$$\cos(90^\circ - \varphi_T) = \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \varphi_0) + \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi) \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_0) \cos \Delta\lambda$$

$$\operatorname{sen} \varphi_T = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda$$

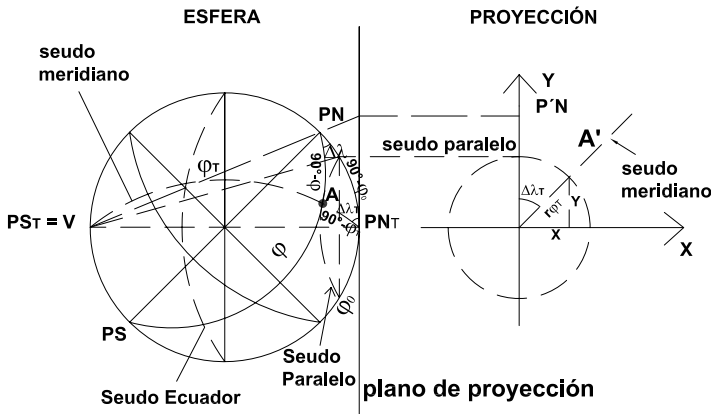


Figura 3.29: Proyección acimutal estereográfica oblicua. Caso polar ficticio.

De aquí se obtiene  $\varphi_T$ . Además, por el teorema del seno:

$$\frac{\operatorname{sen} \Delta\lambda_T}{\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi)} = \frac{\operatorname{sen} \Delta\lambda}{\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_T)} \Rightarrow \operatorname{sen} \Delta\lambda_T = \frac{\cos \varphi \operatorname{sen} \Delta\lambda}{\cos \varphi_T}$$

de donde se conoce el valor de  $\Delta\lambda_T$ .

Las coordenadas polares de  $A$  son:

$$\begin{cases} r_{\varphi_T} = 2R \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\varphi_T}{2}) \text{ o bien } r_{\delta_T} = 2R \operatorname{tg} \frac{\delta_T}{2} \\ \Delta\lambda_T \end{cases}$$

Las coordenadas cartesianas de  $A$  son:

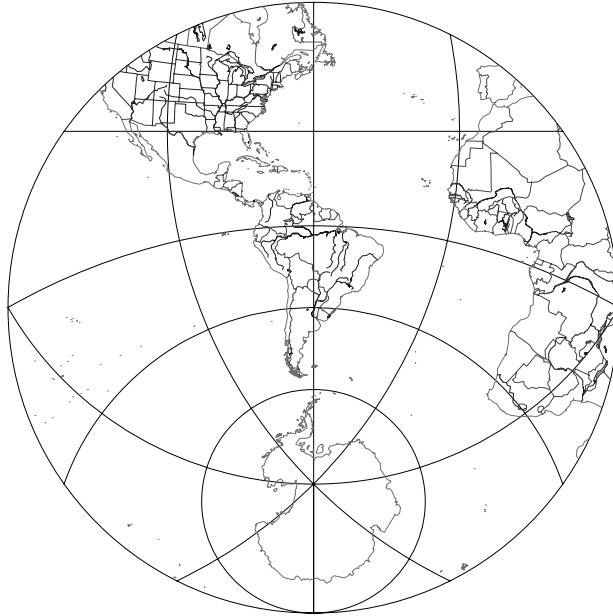
$$\begin{cases} X = r_{\varphi_T} \operatorname{sen} \Delta\lambda_T \\ Y = r_{\varphi_T} \operatorname{cos} \Delta\lambda_T \end{cases} \text{ o bien } \begin{cases} X = r_{\delta_T} \operatorname{sen} \Delta\lambda_T \\ Y = r_{\delta_T} \operatorname{cos} \Delta\lambda_T \end{cases}, \text{ entonces:}$$

$$X = 2R \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi_T}{2} \right) \operatorname{sen} \Delta\lambda_T$$

$$Y = 2R \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi_T}{2} \right) \operatorname{cos} \Delta\lambda_T$$

### Ejemplo

Sea el punto  $A(10^\circ S, 20^\circ W)$ , considérese la proyección cuyo centro es  $\varphi_0 = 30^\circ S$  y  $\varphi_0 = 60^\circ W$  (punto de tangencia del plano de proyección).



**Figura 3.30:** Proyección acimutal estereográfica oblicua, centro de la proyección ( $30^\circ S, 60^\circ W$ ).

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \varphi_T &= \operatorname{sen}(-10^\circ) \operatorname{sen}(-30^\circ) + \operatorname{cos}(-10^\circ) \operatorname{cos}(-30^\circ) \operatorname{cos}(-20^\circ + 60^\circ) \\ \Rightarrow \varphi_T &= 47^\circ 44' 42'' \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen} \Delta\lambda_T = \frac{\operatorname{cos}(-10^\circ) \operatorname{sen} 40^\circ}{\operatorname{cos} 47^\circ 44' 42''} \Rightarrow \Delta\lambda_T = 70^\circ 17' 13''$$

$$r_{\varphi_T} = 2 \times 6\,370\text{km} \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{47^\circ 44' 42''}{2} \right) = 4\,922,983\text{km}$$

$$X = 2 \times 6\,370\text{km} \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\varphi_T}{2} \right) \operatorname{sen} 70^\circ 17' 13'' = 4\,634,465\text{km}$$

$$Y = 2 \times 6\,370\text{km} \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{47^\circ 44' 42''}{2} \right) \operatorname{cos} 70^\circ 17' 13'' = 1\,660,570\text{km}$$

Usando las formulas 3.14 y 3.15:

$$\begin{aligned} X &= \frac{2R \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda_T}{1 + \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{cos} \varphi_0 \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \Delta \lambda} = \\ &= \frac{2 \times 6\,370\text{km} \operatorname{cos}(-10^\circ) \operatorname{sen} 40^\circ}{1 + \operatorname{sen}(-30^\circ) \operatorname{sen}(-10^\circ) + \operatorname{cos}(-30^\circ) \operatorname{cos}(-10^\circ) \operatorname{cos} 40^\circ} = \\ &= 4\,634,463\text{km} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2R(\operatorname{cos} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \Delta \lambda)}{1 + \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{cos} \varphi_0 \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \Delta \lambda} = \\ &= \frac{2 \times 6\,370\text{km}(\operatorname{cos}(-30^\circ) \operatorname{sen}(-10^\circ) - \operatorname{sen}(-30^\circ) \operatorname{cos}(-10^\circ) \operatorname{cos} 40^\circ)}{1 + \operatorname{sen}(-30^\circ) \operatorname{sen}(-10^\circ) + \operatorname{cos}(-30^\circ) \operatorname{cos}(-10^\circ) \operatorname{cos} 40^\circ} = \\ &= 1\,660,584\text{km} \end{aligned}$$

El módulo de alteración lineal es:

$$N_1 = N_2 = k_T = h_T = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \left( 45^\circ - \frac{47^\circ 44' 42''}{2} \right)} = 1,149$$

El módulo de alteración superficial es:  $\mu = N_1 N_2 = 1,320201$

### 3.8 Proyección acimutal gnomónica polar

Esta proyección, en sus tres casos, se usa solamente cuando la superficie de referencia es esférica.

#### 3.8.1 Dibujo de la proyección

##### 1) Método gráfico (Ver Figura 3.31)

Se utiliza una figura auxiliar tangente al plano de proyección en un Polo (Norte o Sur) y desde el punto de vista, ubicado en el centro de la esfera terrestre, parten los rayos de proyección hasta interceptar dicho plano, proyectando sobre el mismo los paralelos y los meridianos.

El radio de los paralelos queda determinado por el punto de tangencia (el Polo) y los puntos de intersección de los rayos de proyección

que pasan por cada paralelo ( $\varphi$ ) con el plano de proyección ( $r_\varphi$  o  $r_\delta$ ). Para dibujar los meridianos, se hace centro con el transportador en  $PN$  y se trazan ángulos, de  $15^\circ$  de amplitud en este caso, en forma radial.

## 2) Método analítico (Figura 3.32)

De la Figura 3.32 se deduce que:  $r_\varphi = R \cotg \varphi$  o bien, expresándolo a través de la colatitud:  $r_\delta = R \tg \delta$ .

Las coordenadas cartesianas son entonces:

$$\begin{cases} X = r_\varphi \sen \Delta\lambda = R \cotg \varphi \sen \Delta\lambda \\ Y = r_\varphi \cos \Delta\lambda = R \cotg \varphi \cos \Delta\lambda \end{cases}$$

que pueden expresarse a través de la colatitud como:

$$\begin{cases} X = R \tg \delta \sen \Delta\lambda \\ Y = R \tg \delta \cos \Delta\lambda \end{cases}$$

en donde  $\delta = 90^\circ - \varphi$  (hemisferio norte) o bien  $\delta = 90^\circ + \varphi$  (hemisferio sur).

### Ejemplo

Sea  $\lambda_0 = 60^\circ W$  y el punto de coordenadas ( $30^\circ S$ ,  $30^\circ W$ ). Entonces, la colatitud es:

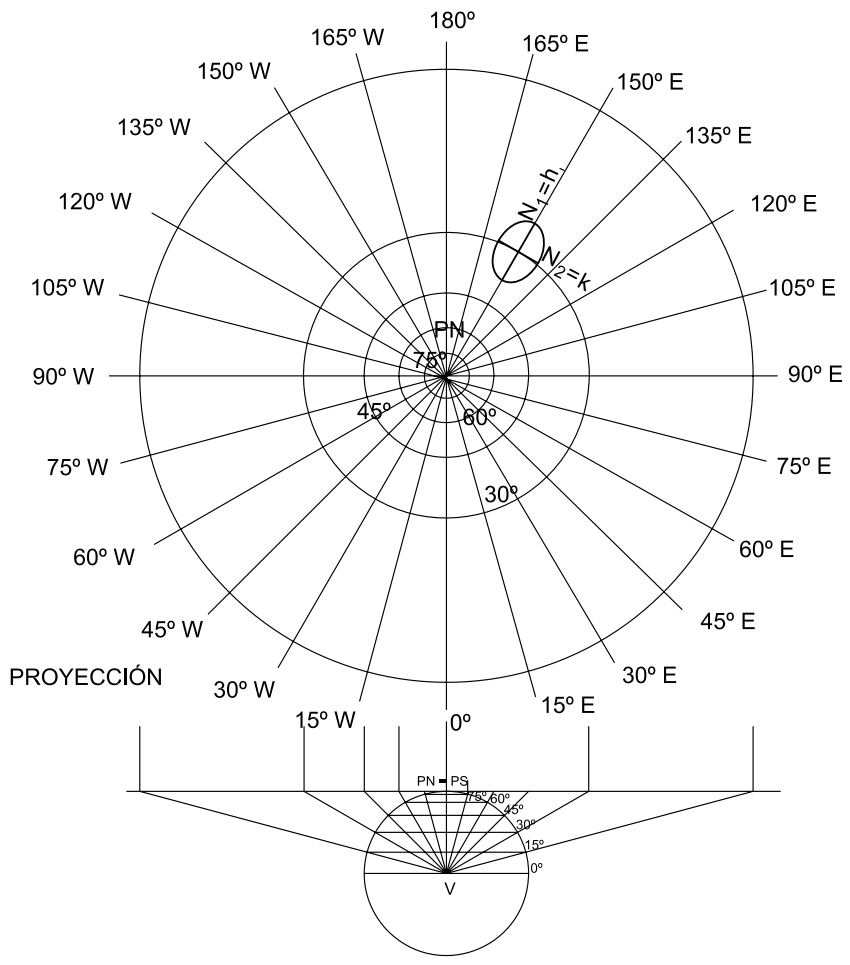
$$\delta = 90^\circ + (-30^\circ) = 60^\circ$$

y  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = -30^\circ - (-60^\circ) = 30^\circ$ . Sus coordenadas cartesianas son:

$$X = 6\,370\text{km} \tg 60^\circ \sen 30^\circ = 5\,516,582\text{km}.$$

$$Y = 6\,370\text{km} \tg 60^\circ \cos 30^\circ = 9\,554,999\text{km}.$$

Si se desea determinar la escala en la que está dibujado el mapa con el que se está trabajando, se considerará un punto sobre el meridiano central de manera tal que  $\Delta\lambda = 0^\circ$ . Si es, por ejemplo,  $\varphi = 20^\circ S$ , será  $\delta = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$  y  $r_\delta = 6\,370\text{km} \tg 70^\circ = 17\,501,431\text{km}$ . Se mide la distancia desde el Polo hasta el punto y, homogeneizando unidades, se divide la medida calculada por aquella obtenida directamente del mapa, lo que proporcionará el módulo de la escala.



**Figura 3.31:** Proyección acimutal gnomónica polar.

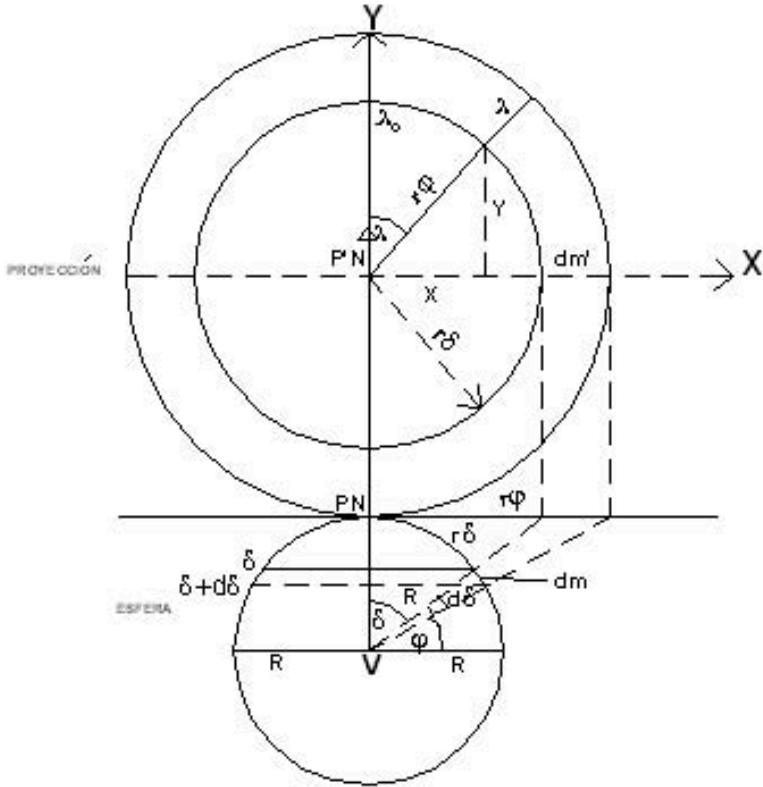


Figura 3.32: Proyección acimutal gnomónica polar. Cálculo de coordenadas.

### 3.8.2 Características y propiedades

Los paralelos se proyectan según circunferencias concéntricas en el Polo Norte, que se van distanciando entre sí en forma acentuada desde el Polo al Ecuador. Las medidas tomadas sobre los paralelos son incorrectas, mayores que las reales, y se calcula la deformación con el módulo de alteración lineal  $k$ .

$$k = \frac{2\pi r_{\varphi}}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{R \cotg \varphi}{R \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi} = \operatorname{cosec} \varphi = \sec \delta = N_2$$

Los meridianos son rectas radiales concurrentes en el Polo, y forman entre sí ángulos iguales a la diferencia de su longitud geográfica. La deformación en cada punto de los meridianos se calcula con el módulo de alteración lineal  $h$ , tomando un punto de latitud  $\varphi$ .

$$h = \frac{dm'}{dm} = \frac{dr_{\delta}}{R d\delta} = \frac{d[R \operatorname{tg} \delta]}{R d\delta} = \frac{R \frac{1}{\cos^2 \delta} d\delta}{R d\delta} = \frac{1}{\cos^2 \delta} = N_1$$



### Ejemplo

Para la ciudad de Santa Fe (Argentina), cuya latitud es  $\varphi = 31^{\circ}38'S$ , resulta:

$$N_2 = k = \sec(90^{\circ} - 31^{\circ}38') = 1,906$$

$$N_1 = h = 3,635$$

### Observaciones

En las proyecciones gnomónicas, el eje mayor de la elipse indicatriz de Tissot se dirige hacia el centro de la proyección.

Es la única proyección que cumple la propiedad de que las líneas ortodrómicas se proyectan según rectas, puesto que toda circunferencia máxima de la esfera tiene como centro el punto de vista ( $V$ ).

Esta proyección no es isógona pues  $h \neq k$ , y tampoco es equivalente pues  $hk \neq 1$ .

### Ejemplo

Considerando como en los ejemplos anteriores  $\varphi = 31^{\circ}38'$ , es:

$$N_1 N_2 = 1,906 \times 3,635 = 6,92831$$

### 3.8.3 Usos

Por la propiedad especificada sobre la línea ortodrómica es muy utilizada para navegación (marítima y aérea), pues si en un mapa de proyección gnomónica se unen dos puntos cualesquiera con una línea recta, esa recta unirá todos los puntos de la superficie terrestre que pertenecen al recorrido más corto entre los mismos.

### Observación

En un punto cualquiera de la proyección, la deformación angular máxima se calcula con la expresión:

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

### Ejemplo

En el ejemplo antes visto de la ciudad de Santa Fe (Argentina), donde  $\varphi = 31^{\circ}38'S$ , resulta:

$$\delta_{\max} = 2 \arcsin \frac{3,633 - 1,906}{3,633 + 1,906} \Rightarrow \delta_{\max} = 36^{\circ}20'03''$$

### 3.8.4 Transformación inversa de coordenadas (de cartesianas a geográficas)

Los datos son:  $\lambda_0$ , la escala  $E = \frac{1}{M}$  (siendo  $M$  el módulo de la escala),  $x$  e  $y$  las coordenadas de un punto, que se miden. Las coordenadas cartesianas son:  $X = xM$  e  $Y = yM$ . Ya se ha deducido que en la transformación acimutal gnomónica polar:

$$X = r_{\varphi} \sin \Delta\lambda = R \cotg \varphi \sin \Delta\lambda = R \operatorname{tg} \delta \sin \Delta\lambda$$

$$Y = r_{\varphi} \cos \Delta\lambda = R \cotg \varphi \cos \Delta\lambda = R \operatorname{tg} \delta \cos \Delta\lambda$$

Dividiendo miembro a miembro estas expresiones, se obtiene:

$$\frac{X}{Y} = \operatorname{tg} \Delta\lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \arcsin \operatorname{tg} \frac{X}{Y}$$

Como  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ , resulta que  $\lambda = \lambda_0 - \Delta\lambda$ . Además:

$$X^2 = R^2 \operatorname{tg}^2 \delta \sin^2 \Delta\lambda$$

$$Y^2 = R^2 \operatorname{tg}^2 \delta \cos^2 \Delta\lambda$$

$$X^2 + Y^2 = R^2 \operatorname{tg}^2 \delta (\sin^2 \Delta\lambda + \cos^2 \Delta\lambda)$$

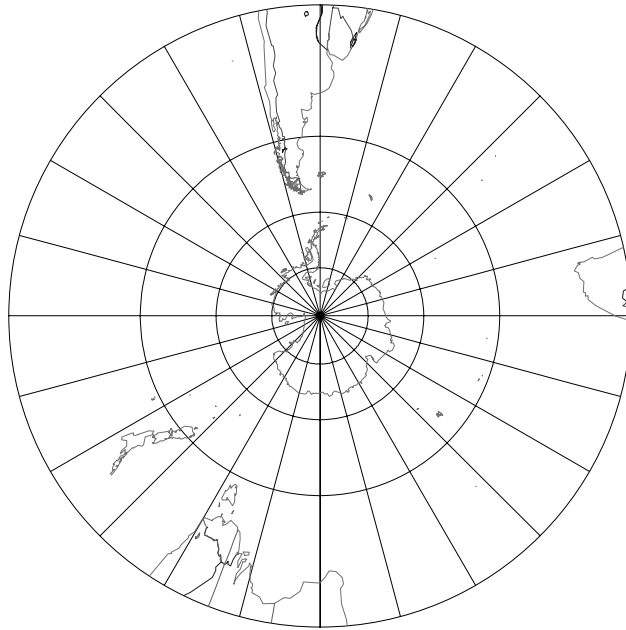
$$\text{Entonces: } \operatorname{tg}^2 \delta = \frac{X^2 + Y^2}{R^2} \Rightarrow \operatorname{tg} \delta = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{R}$$

$$\text{De aquí se obtiene } \delta = \arcsin \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{R}$$

### Ejemplo

Supóngase que en un mapa en proyección acimutal gnomónica polar, como el de la Figura 3.33, el extremo sur del continente africano tiene las coordenadas  $x = 3,55 \text{ cm}$ ,  $y = 0,60 \text{ cm}$ ;  $\varphi_0 = -90^{\circ}$  (Polo Sur),  $\lambda_0 = 60^{\circ}W$ , escala 1 : 260 000 000.

$$\text{Como } \frac{X}{Y} = \frac{xM}{yM} = \frac{x}{y} = \operatorname{tg} \Delta\lambda,$$



**Figura 3.33:** Proyección acimutal gnomónica polar.

$$\text{entonces } \frac{3,55\text{cm}}{0,60\text{cm}} = \text{tg } \Delta\lambda \Rightarrow \Delta\lambda = \text{arc tg } \frac{3,55\text{cm}}{0,60\text{cm}} = 81^{\circ}11'36''$$

$$\lambda = \Delta\lambda + \lambda_0 = 81^{\circ}11'36'' + (-60^{\circ}) = 21^{\circ}11'36''$$

$$\delta = \text{arc tg } \frac{254\,800\,000\sqrt{(3,55\text{cm})^2 + (0,60\text{cm})^2}}{637\,000\,000\text{cm}} = \pm 55^{\circ}13'29''$$

### 3.9 Proyección acimutal gnomónica ecuatorial

#### 3.9.1 Dibujo de la proyección

##### 1) Método gráfico (Ver Figura 3.34)

Se considera el plano de proyección tangente a la esfera terrestre en el punto de intersección del Ecuador y el meridiano de Greenwich, ubicándose el punto de vista en el centro de la esfera, de donde parten los rayos de proyección.

Se utilizan dos figuras auxiliares dibujadas a escala, ubicadas una a la izquierda de la Figura 3.34 y la otra en la parte inferior; la primera contiene al plano del meridiano central, apareciendo los paralelos proyectados sobre este plano como rectas paralelas, y la segunda

contiene al plano del Ecuador con el punto de vista coincidente con las proyecciones de los dos Polos y los meridianos proyectados según rectas radiales.

### **Proyección del Ecuador y del meridiano central**

Utilizando la figura auxiliar de la izquierda de la Figura 3.34, en donde la traza del plano de proyección coincide con la proyección del meridiano central, la proyección del Ecuador será una recta perpendicular a dicho meridiano; utilizando la figura auxiliar de la parte inferior de la Figura 3.34, como la traza del plano de proyección coincide con la proyección del Ecuador, la proyección del meridiano central será una recta perpendicular al Ecuador. La intersección de las dos rectas determina el centro de la proyección.

### **Proyección de los meridianos**

Haciendo uso de la figura auxiliar de la parte inferior de la Figura 3.34, parten del punto de vista rayos de proyección que interceptan la traza del plano de proyección; al abatir el mismo, las proyecciones de los meridianos son rectas paralelas de longitudes infinitas que se van separando acentuadamente entre sí al alejarse del meridiano central hacia el Este o el Oeste.

### **Proyección de los paralelos**

Se utiliza la figura auxiliar de la izquierda de la Figura 3.34; en ella parten, desde el punto de vista, los rayos de proyección que pasan por la intersección de cada paralelo con el meridiano central (puntos 1, 2, 3, ...), determinando sobre la traza del plano de proyección los puntos 1', 2', 3', ... que resultan, al abatir el plano, los puntos 1'', 2'', 3'', ... en la proyección; quedan determinados así los puntos de intersección de cada paralelo con el meridiano central.

Para encontrar las proyecciones de las intersecciones de cada paralelo con los demás meridianos se procede de la siguiente manera: se utiliza la figura auxiliar de la parte inferior de la Figura 3.34 y se toma, por ejemplo, el meridiano de 15°E. Se abate el plano que contiene a este meridiano alrededor de la proyección del mis-

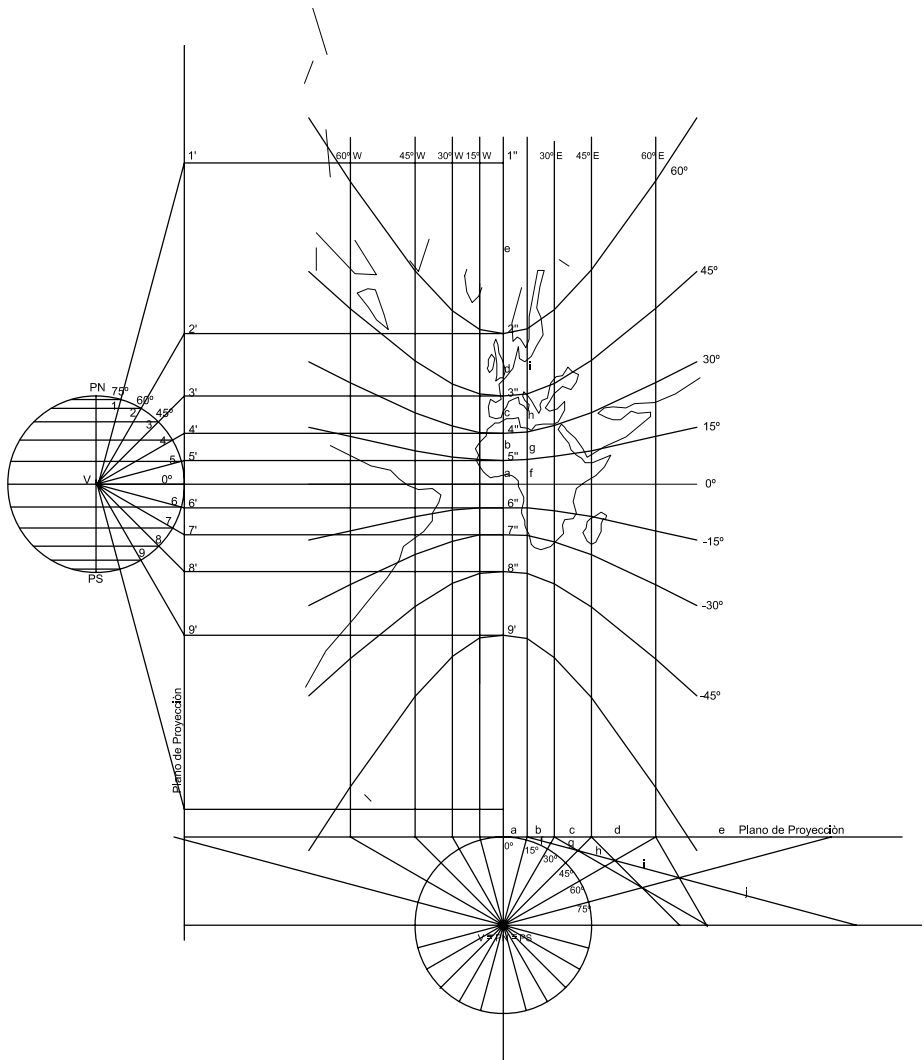


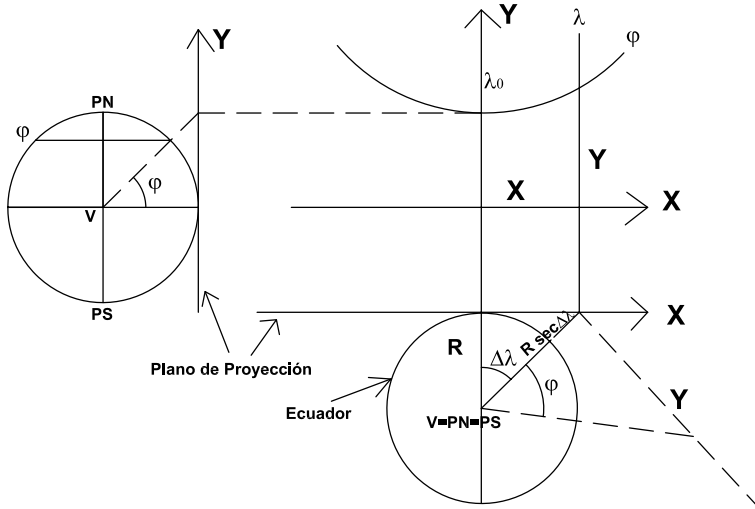
Figura 3.34: Proyección acimutal gnomónica ecuatorial.

mo, y se obtiene la proyección del meridiano abatido trazando la perpendicular en el punto  $P$ , y en la intersección con la prolongación de los radios cada  $15^\circ$  se obtendrán los segmentos  $f, g, h, i, j$ , los que, transportados a la proyección del respectivo meridiano, permiten obtener las proyecciones de las intersecciones de los paralelos con el meridiano  $15^\circ E$ . Se procede análogamente con los demás meridianos.

### Nota

En cada paralelo, los rayos de proyección que pasan por todos los puntos del mismo engendran una superficie cónica cuyo eje es paralelo al plano de proyección. Por lo tanto, en la intersección de dicha superficie cónica con el plano de proyección se tendrá una línea que es una rama de hipérbola.

### 2) Método Analítico (Figura 3.35)



**Figura 3.35:** Proyección acimutal gnomónica ecuatorial. Cálculo de coordenadas.

En la sección siguiente, correspondiente a la Proyección Acimutal Gnomónica Oblicua, se deducen las fórmulas que permiten calcular las coordenadas planas cartesianas ( $X$  e  $Y$ ) de un punto cualquiera

de la proyección en función de sus coordenadas geográficas ( $\varphi$  y  $\lambda$ ).

$$X = \frac{R \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda}{\operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda}$$

$$Y = \frac{R[\cos \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda]}{\operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda}$$

Para el caso ecuatorial  $\varphi_0 = 0^\circ$ , entonces:

$$X = \frac{R \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda}{\cos \varphi \cos \Delta \lambda} = R \operatorname{tg} \Delta \lambda$$

$$Y = \frac{R \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi \cos \Delta \lambda} = R \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sec} \Delta \lambda \quad (3.16)$$

### Ejemplo

Para el punto de coordenadas ( $\varphi = 50^\circ N; \lambda = 20^\circ W$ ) y considerando el meridiano central  $\lambda_0 = 60^\circ W$ , resulta,  $\Delta \lambda = -20^\circ - (-60^\circ) = 40^\circ$ . Entonces, las coordenadas cartesianas del punto son:

$$X = 6\,370 \operatorname{km} \operatorname{tg} 40^\circ = 5\,345,064643 \operatorname{km}$$

$$Y = 6\,370 \operatorname{km} \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{sec} 40^\circ = 9\,909,961 \operatorname{km}$$

### Nota

Se pueden deducir las expresiones 3.16 en base a lo ya explicado en el procedimiento gráfico (Figura 3.35).

También pueden deducirse las fórmulas de las coordenadas planas considerando una rotación de  $90^\circ$  del eje terrestre, con lo cual pasará a una posición  $PN_T - PS_T$  contenido en el plano del Ecuador, considerándose un caso polar ficticio (elementos trazados con líneas de puntos en la Figura 3.36).

El punto A tendrá entonces las coordenadas ficticias ( $\varphi_T$  y  $\lambda_T$ ) que se pueden calcular en función de  $\varphi$  y  $\lambda$  resolviendo el triángulo esférico  $PN$  A  $PN_T$ . Aplicando el teorema del coseno a dicho triángulo resulta:

$$\cos(90^\circ - \varphi_T) = \cos(90^\circ - \varphi) \cos 90^\circ + \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi) \operatorname{sen} 90^\circ \cos \Delta \lambda$$

$$\operatorname{sen} \varphi_T = \cos \varphi \cos \Delta \lambda$$

De aquí se obtiene el valor de  $\varphi_T$ . Si se aplica ahora el teorema del seno al mismo triángulo:

$$\frac{\operatorname{sen} \Delta \lambda_T}{\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi)} = \frac{\operatorname{sen} \Delta \lambda}{\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_T)} \therefore \operatorname{sen} \Delta \lambda_T = \frac{\cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda}{\cos \varphi_T} \Rightarrow \Delta \lambda_T$$

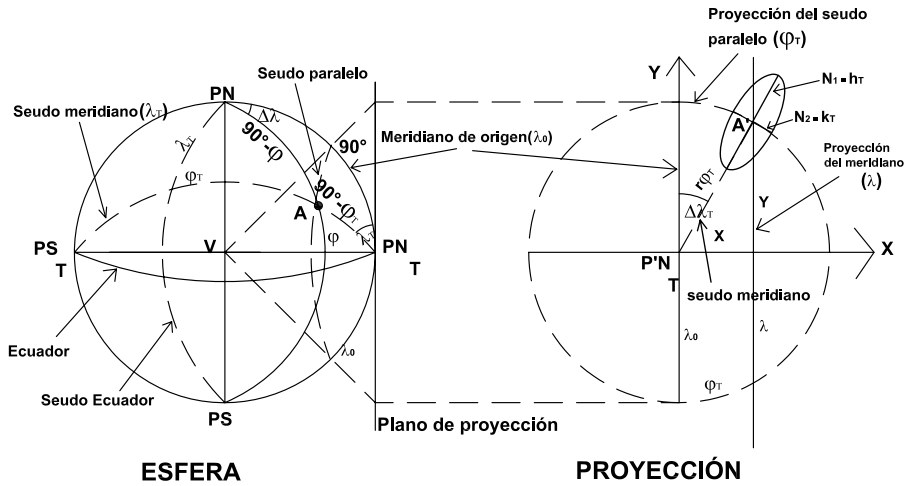


Figura 3.36: Proyección acimutal gnomónica ecuatorial. Caso polar ficticio.

En el caso polar ficticio (Figura 3.36),  $A'$  es la proyección de  $A$  y sus coordenadas planas polares son  $r_{\varphi_T}$  y  $\Delta\lambda_T$ .

### Ejemplo

Sea el punto de coordenadas  $(\varphi = 50^\circ N; \lambda = 20^\circ W)$  y el meridiano central  $\lambda_0 = 60^\circ W$ . Entonces:

$$\text{sen } \varphi_T = \cos 50^\circ \cos(-20^\circ + 60^\circ) \Rightarrow \varphi_T = 29^\circ 29' 55''.$$

$$r_{\varphi_T} = 6\,370\text{km} \cotg 29^\circ 29' 55'' = 11\,259,531\text{km}$$

Sus coordenadas cartesianas son:  $X = r_{\varphi_T} \text{sen } \Delta\lambda_T$ ;  $Y = r_{\varphi_T} \cos \Delta\lambda_T$

$$\text{sen } \Delta\lambda_T = \frac{\cos 50^\circ \text{sen } 40^\circ}{\cos 29^\circ 29' 55''} = 0,474714242 \Rightarrow \Delta\lambda_T = 28^\circ 20' 27''$$

Entonces:

$$X = 11\,259,531\text{km} \text{sen } 28^\circ 20' 27'' = 5\,345,075\text{km}$$

$$Y = 11\,259,531\text{km} \cos 28^\circ 20' 27'' = 9\,909,955\text{km}$$

### 3.9.2 Módulos de alteración lineal

Se calculan los módulos de alteración lineal máximo y mínimo en las direcciones de los meridianos y paralelos ficticios. Por lo tanto:

$$h_T = \frac{1}{\text{sen}^2 \varphi_T}; \quad k_T = \frac{1}{\text{sen } \varphi_T}$$



Para el ejemplo dado:

$$N_1 = h_T = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 29^\circ 29' 55''} = 4,124$$

$$N_2 = k_T = \frac{1}{\operatorname{sen} 29^\circ 29' 55''} = 2,031$$

Para calcular los módulos de alteración lineal  $h$  y  $k$  se utilizan las fórmulas vistas en el Capítulo 2:

$$h = \frac{\sqrt{E}}{R}; \quad k = \frac{\sqrt{G}}{R \cos \varphi}$$

A partir de las fórmulas 3.16:

$$X = R \operatorname{tg} \Delta \lambda$$

$$Y = R \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sec} \Delta \lambda$$

se calculan:

$$E = \left( \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right)^2 = 0 + \left( R \operatorname{sec} \Delta \lambda \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)^2 = \frac{R^2 \operatorname{sec}^2 \Delta \lambda}{\cos^4 \varphi}$$

$$\begin{aligned} G &= \left( \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right)^2 = \left( R \frac{1}{\cos^2 \Delta \lambda} \right)^2 + \left( R \operatorname{tg} \varphi \frac{\operatorname{sen} \Delta \lambda}{\cos^2 \Delta \lambda} \right)^2 = \\ &= \frac{R^2}{\cos^4 \Delta \lambda} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \Delta \lambda) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} h &= \frac{R \operatorname{sec} \Delta \lambda}{R \cos^2 \varphi} = \frac{\operatorname{sec} \Delta \lambda}{\cos^2 \varphi} \quad \text{y} \quad k = \frac{1}{\cos^2 \Delta \lambda} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \Delta \lambda}}{R \cos \varphi} = \\ &= \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \Delta \lambda}}{\cos^2 \Delta \lambda \cos \varphi} \end{aligned}$$

Para el caso del ejemplo anterior (punto de coordenadas  $(\varphi = 50^\circ N; \lambda = 20^\circ W)$  y meridiano central  $\lambda_0 = 60^\circ W$ ) es:

$$h = \frac{\operatorname{sec} 40^\circ}{\cos^2 50^\circ} = 3,159 \quad \text{y} \quad k = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 50^\circ \operatorname{sen}^2 40^\circ}}{\cos^2 40^\circ \cos 50^\circ} = 3,334$$

Es posible calcular también el ángulo que forman las proyecciones de meridianos y paralelos,  $\alpha'$ , a través de diferentes caminos:

- 1) a través de los módulos de alteración lineal:  $\operatorname{sen} \alpha' = \frac{N_1 N_2}{hk}$

- 2) a través del cálculo de los ángulos que forman las proyecciones del paralelo y del meridiano en un punto, con el eje paralelo al meridiano central ( $\lambda_0$ ):

$$\operatorname{tg} \theta_p = \frac{\frac{\partial X}{\partial \lambda}}{\frac{\partial Y}{\partial \lambda}} = \frac{R \frac{1}{\cos^2 \Delta \lambda}}{R \operatorname{tg} \varphi \frac{\operatorname{sen} \Delta \lambda}{\cos^2 \Delta \lambda}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda}; \operatorname{tg} \theta_m = \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi}}{\frac{\partial Y}{\partial \varphi}} = 0$$

Luego:  $\alpha' = \theta_p - \theta_m$

- 3) por medio de E, F y G:  $\cos \alpha' = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \lambda \cos \lambda}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \lambda}}$ , ya que

$$F = \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = 0 + R \frac{\sec \Delta \lambda}{\cos^2 \varphi} R \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \Delta \lambda \frac{1}{\cos \Delta \lambda} = \frac{R^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda}{\cos^3 \varphi \cos^3 \Delta \lambda}$$

Al calcular  $\alpha'$  por los distintos caminos resulta:

- 1)  $\operatorname{sen} \alpha' = \frac{4,124 \times 2,031}{3,159 \times 3,334} \Rightarrow \alpha' = 52^\circ 33' 20''$
- 2)  $\operatorname{tg} \theta_p = \frac{1}{\operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{sen} 40^\circ} \Rightarrow \theta_p = 52^\circ 32' 47'';$   
 $\operatorname{tg} \theta_m = 0 \Rightarrow \theta_m = 0^\circ 00' 00''$ .  $\alpha' = \theta_p - \theta_m = 52^\circ 32' 47''$
- 3) Resulta también  $\alpha' = 52^\circ 32' 47''$

### 3.9.3 Dirección de los ejes de la elipse de Tissot

Se obtiene por dos caminos:

- 1) Por el cálculo del acimut  $\Delta \lambda_T$  del radio  $r_{\delta_T}$  de la proyección polar transversa.

$$\operatorname{sen} \Delta \lambda_T = \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda \sec \varphi_T \Rightarrow \Delta \lambda_T, \text{ siendo } \operatorname{sen} \varphi_T = \cos \varphi \cos \Delta \lambda$$

En el ejemplo antes considerado es:

$$\operatorname{sen} \varphi_T = \cos 50^\circ \cos 40^\circ \Rightarrow \varphi_T = 29^\circ 29' 55''$$

$$\operatorname{sen} \Delta \lambda_T = \cos 50^\circ \operatorname{sen} 40^\circ \sec 29^\circ 29' 55'' \Rightarrow \Delta \lambda_T = 28^\circ 20' 27''$$

$$\alpha_1 = 28^\circ 20' 27'' \text{ (acimut de la dirección de } N_1)$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ = 118^\circ 20' 27'' \text{ (acimut de la dirección de } N_2)$$

2) Por el cálculo del ángulo de las direcciones  $N_1$  y  $N_2$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi} \cos \varphi \frac{\partial X}{\partial \lambda} \operatorname{tg} A}{\frac{\partial Y}{\partial \varphi} \cos \varphi \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \operatorname{tg} A}$$

donde  $A$  es el elemento de arco en la esfera que corresponde a los valores máximo y mínimo de  $\tau$  ( $N_1$  y  $N_2$ ).

De acuerdo con la fórmula 2.15 del Capítulo 2, las direcciones de las tangentes principales en la esfera están dadas por:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2A &= \frac{2F \cos \varphi}{E \cos^2 \varphi - G} \\ &= \frac{2 \frac{R^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda}{\cos^3 \varphi \cos^3 \Delta \lambda} \cos \varphi}{R^2 \frac{\sec^2 \Delta \lambda}{\cos^4 \varphi} \cos^2 \varphi - \frac{R^2}{\cos^4 \Delta \lambda} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \Delta \lambda)} \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda \cos \varphi}{\cos \Delta \lambda \cos \varphi - \frac{\cos^3 \varphi}{\cos \Delta \lambda} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \Delta \lambda)} \end{aligned}$$

Continuando los cálculos del ejemplo correspondiente al punto de coordenadas ( $\varphi = 50^\circ N$ ;  $\lambda = 20^\circ W$ ) y el meridiano central  $\lambda_0 = 60^\circ W$ , resulta:

$$\operatorname{tg} 2A = \frac{2 \operatorname{sen} 50^\circ \operatorname{sen} 40^\circ \cos 50^\circ}{\cos 50^\circ \cos 40^\circ - \frac{\cos^3 50^\circ}{\cos 40^\circ} (1 + \operatorname{tg}^2 50^\circ \operatorname{sen}^2 40^\circ)}$$

de donde se obtienen los valores:  $A_1 = -42^\circ 23' 39''$  y  $A_2 = A_1 + 90^\circ = 47^\circ 36' 21''$ , los que, al ser reemplazados en la expresión de  $\operatorname{tg} \alpha$ , permiten obtener:

$$\alpha_1 = 28^\circ 20' 25'' \text{ y } \alpha_2 = 118^\circ 20' 25''$$

### 3.9.4 Dibujo en escala de la elipse de Tissot

Se elige una escala apropiada, según el tamaño que se desee para el dibujo (Figura 3.37). Los elementos que aparecen en la misma son:

$O$ : centro de la proyección;

$\lambda_0$ : longitud del meridiano central;

$r_{\varphi_T}$ : distancia del centro de la proyección a la proyección del punto;

$\theta_1 = \Delta \lambda_T$ : ángulo de dirección del eje  $N_1$  de la elipse de Tissot con respecto al meridiano central;

$\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ$ : ángulo de dirección del eje  $N_2$  de la elipse de Tissot con respecto al meridiano central;

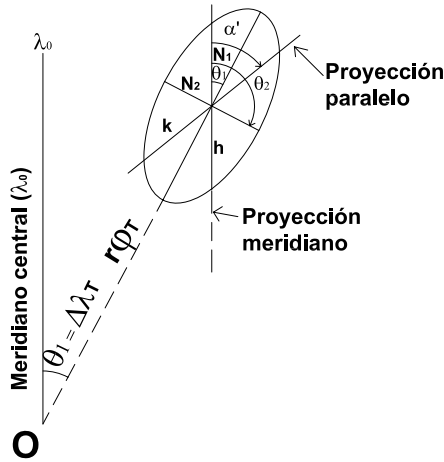


Figura 3.37: Elipse indicatriz de Tissot.

$\theta_p$ : acimut de la proyección del paralelo en el punto;  
 $\theta_m$ : acimut de la proyección del meridiano en el punto;  
 $\alpha' = \theta_p - \theta_m$ : ángulo de intersección de las proyecciones del paralelo y el meridiano.

### 3.9.5 Módulo de alteración superficial

Se calculan  $N_1$  y  $N_2$  (a través del caso polar ficticio) y luego  $\mu = N_1 N_2$ .

#### Ejemplo

En el ejemplo del que se han calculado otros elementos es:

$$\mu = N_1 N_2 = 4,124 \times 2,031 = 8,376$$

Para calcular el error que se comete se hace la diferencia entre el valor observado y el verdadero:

$$\epsilon_\mu = \mu - 1 = 8,376 - 1 = 7,376$$

lo que significa un error en las áreas de 738%.

### 3.9.6 Máxima deformación angular

$$\delta_{\max} = 2 \arcsin \operatorname{tg} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

$$\text{En el ejemplo: } \delta_{\max} = 2 \arcsin \operatorname{tg} \frac{4,124 - 2,031}{4,124 + 2,031} = 37^\circ 33'$$

### 3.9.7 Características y propiedades (Figura 3.38)



**Figura 3.38:** *Proyección acimutal gnomónica ecuatorial ( $\lambda_0 = 60^\circ W$ ).*

El Ecuador se proyecta según una recta de longitud infinita, los paralelos según curvas que resultan ser ramas de hipérbolas con la concavidad dirigida hacia el Polo respectivo, que se van distanciando acentuadamente entre sí yendo del Ecuador a los Polos (los polos se proyectan en el infinito pues los rayos de proyección que pasan por los mismos son paralelos al plano de proyección). La deformación en cada punto de los paralelos se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ .

Los meridianos se proyectan según rectas paralelas perpendiculares al Ecuador que se van distanciando entre sí en forma acentuada desde el meridiano central hacia el este o el oeste. Las medidas tomadas sobre los meridianos son incorrectas, mayores que las reales, y se calcula la deformación en cada punto con el módulo de alteración lineal  $h$ .

Esta proyección no es isógona ni equivalente; tiene la propiedad de que las líneas ortodrómicas se proyectan según rectas.

### 3.9.8 Usos

Muy utilizada para mapas de navegación (marítima, aérea) en combinación con la proyección Mercator (Capítulo 4), por la propiedad citada al final del párrafo anterior.

## 3.10 Proyección acimutal gnomónica oblicua

### 3.10.1 Dibujo de la proyección (Figura 3.39)

#### 1) Método gráfico

Se adopta un plano de proyección tangente a la esfera terrestre en el punto de intersección de un paralelo, por ejemplo el paralelo de  $45^\circ\text{N}$ , y el meridiano de Greenwich, siendo -por lo tanto- ese punto de tangencia congruente con el centro de la proyección  $(\varphi_0, \lambda_0)$ .

Se utilizan dos figuras auxiliares ubicadas una a la izquierda de la Figura 3.39 y la otra en la parte inferior. La primera contiene el plano del meridiano de Greenwich, estando el eje terrestre inclinado  $45^\circ$  y los paralelos proyectados según rectas paralelas; la segunda contiene el plano del Ecuador, con el punto de vista coincidiendo con la proyección de los Polos. Los meridianos se proyectan según rectas radiales, y a una distancia  $a$  -que se obtiene de la figura auxiliar de la izquierda de la Figura 3.39- la proyección del Ecuador.

#### Proyección del Polo Norte

Es lo primero que se proyecta a partir del punto de vista ubicado en el centro de la esfera interceptando al plano de proyección en  $P'N$ . Al abatir el plano de proyección se tiene el punto  $P''N$ .

#### Proyección del meridiano central y del Ecuador

En la figura auxiliar de la izquierda de la Figura 3.39, como la traza del plano de proyección coincide con la proyección del meridiano central, la proyección de este meridiano resulta ser una semirrecta de longitud infinita que parte desde el Polo Norte (en este caso).

Como los rayos de proyección contenidos en el plano del Ecuador

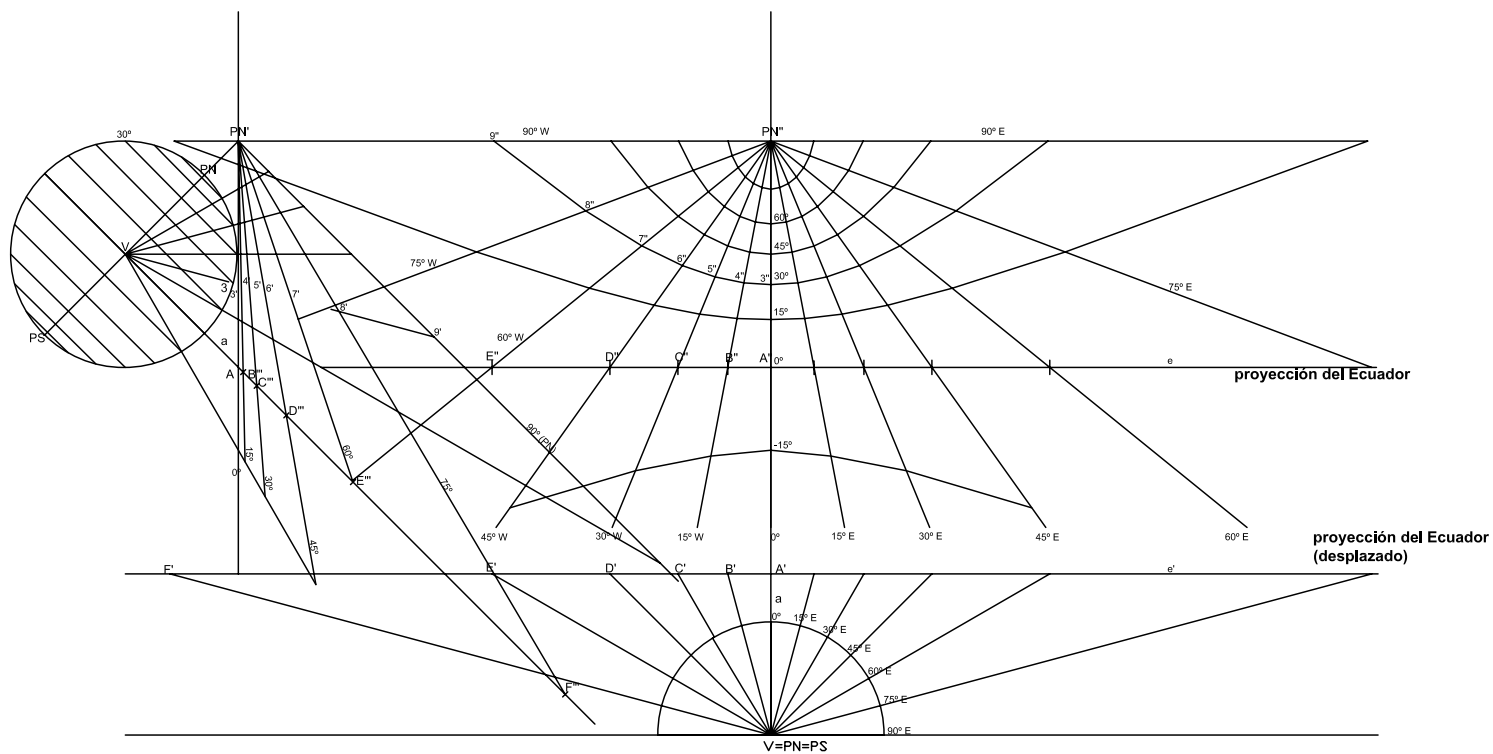


Figura 3.39: Proyección acimutal gnómica oblicua.

PUNTO DE TANGENCIA: Intersección del meridiano central con el paralelo de 45° N

interceptan al plano de proyección determinando una recta perpendicular al plano de la lámina, la parte del Ecuador que se proyecta resultará una recta ( $e$  en la Figura 3.39).

### **Proyección de los meridianos**

Utilizando la figura auxiliar de la parte inferior de la Figura 3.39, desde el punto de vista  $V$  parten rayos de proyección contenidos en los planos de los meridianos, que interceptan a la recta ubicada a una distancia  $a + R$  del punto de vista y que representa la proyección del Ecuador ( $e'$ , desplazado de su posición real ( $e$ ) para no interferir en el dibujo), en los puntos  $A', B', C', D', E', F'$ . Mediante líneas de referencia se obtienen los puntos  $A'', B'', C'', D'', E'', F''$ , que son las intersecciones de cada meridiano con el Ecuador. Trazando a partir de  $P''N$  semirrectas que pasen por los puntos citados se obtienen las proyecciones de los meridianos.

Los meridianos que difieren  $90^\circ$  hacia el este o el oeste del central se proyectan como rectas paralelas a la proyección del Ecuador que parten desde  $P''N$ .

### **Proyección de los paralelos**

Utilizando la figura auxiliar de la izquierda de la Figura 3.39 se ve que, desde el punto de vista, parten rayos de proyección que pasan por los puntos de intersección de cada paralelo con el meridiano central, interceptando a la traza del plano de proyección. Como la traza del plano de proyección coincide con la proyección del meridiano central, al abatir dicho plano se obtienen las intersecciones de cada paralelo con el meridiano de Greenwich.

Para determinar las proyecciones de los puntos de intersección de los paralelos con los demás meridianos se procede de la siguiente manera: a partir del punto de vista de la figura auxiliar de la parte inferior de la Figura 3.39 se toman los segmentos  $VB', VC', VD', VE', VF'$ , y se los transporta a las posiciones  $VB'', VC'', VD'', VE'', VF''$  (figura auxiliar de la izquierda, Figura 3.39). Uniendo  $P''N$  con  $B', C', D', E', F'$  se obtienen las proyecciones de los meridianos de  $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$  en la figura de la izquierda rebatidos



sobre el plano del meridiano de  $0^\circ$  (plano del dibujo). Uniendo  $P'N$  con  $B'''$ ,  $C'''$ ,  $D'''$ ,  $E'''$  se obtienen las longitudes de las proyecciones de los meridianos hasta el Ecuador  $P'NB''$ ,  $P'NC''$ ,  $P'ND''$ , etc., ubicados en el plano del dibujo (plano del meridiano central). Tomando un paralelo cualquiera de la figura auxiliar izquierda (Figura 3.39), por ejemplo el de latitud  $30^\circ N$ , y trazando el rayo de proyección  $V3$ , éste cortará a las proyecciones de los meridianos en los puntos  $3'$ ,  $4'$ ,  $5'$ ,  $6'$ ,  $7'$ ,  $8'$  y  $9'$ . Uniendo cada uno de estos puntos con  $P'N$  por medio de una recta, se obtienen las longitudes  $P'N3'$ ,  $P'N4'$ ,  $P'N5'$ , etc. Estos segmentos se transportan a partir de  $P''N$  sobre la proyección de cada meridiano, obteniendo los puntos  $3''$ ,  $4''$ ,  $5''$ , etc., los que unidos por una curva constituyen la proyección del paralelo de  $\varphi = 30^\circ$ .

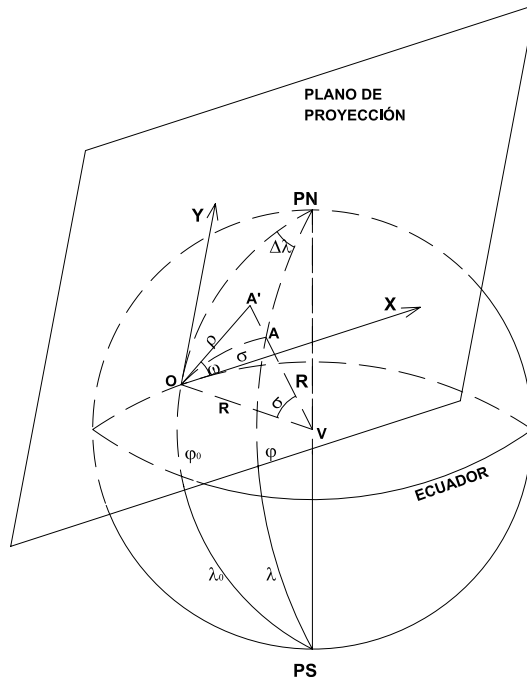
Como los rayos de proyección que parten del punto de vista  $V$  generan una superficie cónica al pasar por todos los puntos de un paralelo, según cuál sea la posición del mismo se presentan tres casos:

- a) El paralelo proyectado tiene latitud ( $\varphi = \varphi_0$ ) igual a la del punto de tangencia del plano de proyección. La proyección del paralelo resulta una parábola.
- b) El paralelo tiene latitud mayor que la del punto de tangencia ( $\varphi > \varphi_0$ ). La proyección del paralelo es una elipse.
- c) El paralelo tiene latitud menor que la del punto de tangencia ( $|\varphi| < \varphi_0$ ). La proyección del paralelo es una hipérbola.

## 2) Método analítico

Usando una esfera como superficie de referencia, el punto de vista está ubicado en el centro de la misma, y la proyección de cada punto de la superficie esférica se obtiene con un rayo que parte del punto de vista, pasando por el punto e interceptando al plano de proyección tangente a la superficie esférica.

En la Figura 3.40,  $A$  es un punto cualquiera de la superficie terrestre de latitud  $\varphi$  y longitud  $\lambda$ ;  $V$  es el punto de vista y  $R$  es el radio



**Figura 3.40:** *Proyección acimutal gnomónica oblicua.*

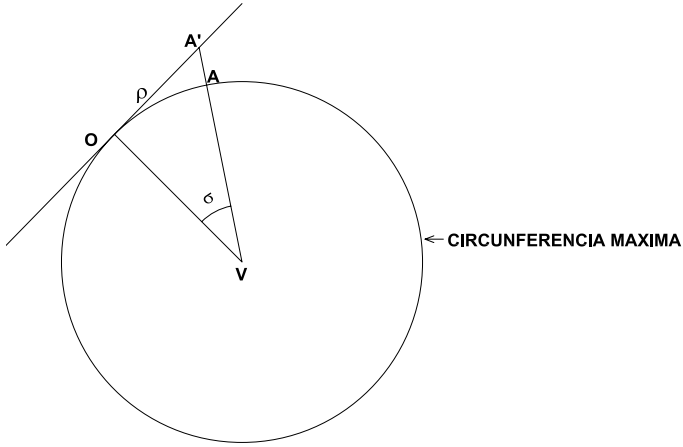
terrestre. El plano de proyección es tangente a la superficie esférica en  $O$ , de coordenadas geográficas  $\varphi_0$  (latitud) y  $\lambda_0$  (longitud). La proyección de  $A$  es  $A'$  y  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ .

Supóngase un sistema de ejes cartesianos rectangulares sobre el plano de proyección, de modo tal que el eje  $Y$  sea tangente al meridiano que pasa por  $O$  (centro de proyección) y el eje  $X$  sea perpendicular a  $Y$ , por lo tanto tangente a la circunferencia máxima perpendicular al meridiano que pasa por  $O$ .

En la Figura 3.41 se ha representado la circunferencia máxima que pasa por el punto de tangencia  $O$  del plano de proyección y por  $A$ . Se tendrá entonces:

$$\rho = R \operatorname{tg} \sigma$$

donde  $\rho$  es la distancia del origen de coordenadas a la proyección  $A'$  del punto  $A$  y  $\sigma$  es el ángulo que forman los radios terrestres que pasan por  $O$  y por  $A$ .

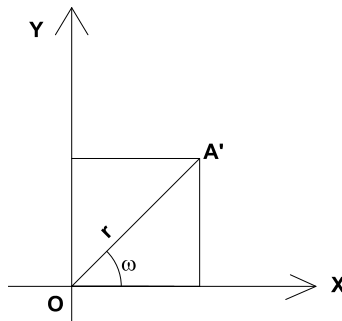


**Figura 3.41:** *Proyección acimutal gnomónica oblicua.*

En la Figura 3.42 se ha representado el sistema de coordenadas  $XY$ . De dicha figura se deduce que:

$$X = r \cos \omega = R \operatorname{tg} \sigma \cos \omega = R \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \cos \omega \quad (3.17)$$

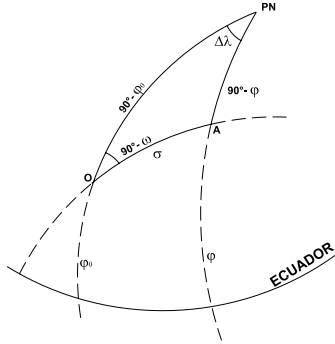
$$Y = r \operatorname{sen} \omega = R \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} \omega = R \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma} \operatorname{sen} \omega \quad (3.18)$$



**Figura 3.42:** *Proyección acimutal gnomónica oblicua. Coordenadas cartesianas.*

En la Figura 3.43, a partir del triángulo esférico  $PN O A$ , se tiene que:

$$P\hat{N}O A = 90^\circ - \omega, PNO = 90^\circ - \varphi_0 \text{ y } PNA = 90^\circ - \varphi$$



**Figura 3.43:** Triángulo esférico  $PN O A$ .

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen } \sigma}{\cos \Delta \lambda} = \frac{\text{sen}(90^\circ - \varphi)}{\text{sen}(90^\circ - \omega)} = \frac{\cos \varphi}{\cos \omega}$$

De aquí se deduce que:

$$\text{sen } \sigma \cos \omega = \cos \varphi \text{sen } \Delta \lambda \quad (3.19)$$

Aplicando el teorema del coseno se tiene que:

$$\cos \sigma = \cos(90^\circ - \varphi_0) \cos(90^\circ - \varphi) + \text{sen}(90^\circ - \varphi_0) \cos(90^\circ - \varphi) \cos \Delta \lambda$$

de donde se deduce que:

$$\cos \sigma = \text{sen } \varphi_0 \text{sen } \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda \quad (3.20)$$

Aplicando el teorema del seno-coseno:

$$\text{sen } \sigma \cos(90^\circ - \omega) = \text{sen}(90^\circ - \varphi_0) \cos(90^\circ - \varphi) - \cos(90^\circ - \varphi_0) \text{sen}(90^\circ - \varphi) \cos \Delta \lambda$$

$$\text{sen } \sigma \text{sen } \omega = \cos \varphi_0 \text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda \quad (3.21)$$

Reemplazando las expresiones 3.19, 3.20 y 3.21 en 3.17 y 3.18, se tiene:

$$X = \frac{R \cos \varphi \text{sen } \Delta \lambda}{\text{sen } \varphi_0 \text{sen } \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda} \quad (3.22)$$

$$Y = \frac{R(\cos \varphi_0 \text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda)}{\text{sen } \varphi_0 \text{sen } \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda} \quad (3.23)$$

Las fórmulas 3.22 y 3.23 permiten el cálculo de las coordenadas planas de la proyección de cualquier punto de la superficie terrestre cuando se conocen las coordenadas geográficas del mismo.

Se sabe, a priori, que los meridianos se proyectan como líneas rectas (por ser semicircunferencias máximas); por lo tanto, para trazar un meridiano en esta proyección se necesitan conocer sólo las coordenadas de dos puntos del mismo. Éstas se deben calcular lo más distantes posible: una cerca del borde superior del mapa y la otra cerca del borde inferior. Una vez trazado el meridiano en la proyección, es suficiente calcular las coordenadas  $Y$  de las intersecciones con los paralelos.

Si el mapa se extiende lo suficiente para comprender al Polo, éste deberá determinarse como un punto de concurrencia de todos los meridianos. Como para este punto es  $\varphi = 90^\circ$  y  $\Delta\lambda = 0^\circ$ , aplicando las fórmulas 3.22 y 3.23, se tiene:

$$X = \frac{R \cos 90^\circ \sin 0^\circ}{\sin \varphi_0 \sin 90^\circ + \cos \varphi_0 \cos 90^\circ \cos 0^\circ} = 0 \quad (3.24)$$

$$Y = \frac{R(\cos \varphi_0 \sin 90^\circ - \sin \varphi_0 \cos 90^\circ \cos 0^\circ)}{\sin \varphi_0 \sin 90^\circ + \cos \varphi_0 \cos 90^\circ \cos 0^\circ} = R \cotg \varphi_0 \quad (3.25)$$

Si este punto se sitúa en la proyección y se determina otro punto en cada meridiano cerca del borde inferior del mapa, se podrán dibujar los meridianos de la proyección.

Si el mapa comprende al Ecuador, se podrán calcular fácilmente las intersecciones de la recta que lo representa en la proyección con los meridianos. Para ello basta hacer en las fórmulas 3.22 y 3.23,  $\varphi = 0^\circ$ .

En efecto:

$$X = \frac{R \cos 0^\circ \Delta\lambda}{\sin \varphi_0 \sin 0^\circ + \cos \varphi_0 \cos 0^\circ \cos \Delta\lambda} = R \sec \varphi_0 \tg \Delta\lambda \quad (3.26)$$

$$Y = \frac{R(\cos \varphi_0 \sin 0^\circ - \sin \varphi_0 \cos 0^\circ \cos \Delta\lambda)}{\sin \varphi_0 \sin 0^\circ + \cos \varphi_0 \cos 0^\circ \cos \Delta\lambda} = -R \tg \varphi_0 \quad (3.27)$$

Por lo tanto, según 3.27, una recta paralela al eje de las  $X$ , a una distancia  $Y = -R \tg \varphi_0$ , representa al Ecuador. La intersección de un meridiano de longitud  $\lambda$  con esa recta se da en:

$$X = R \sec \varphi_0 \tg \Delta\lambda$$

Por lo tanto, cuando el Ecuador y el Polo Norte están ambos en el mapa, los meridianos pueden determinarse en forma muy sencilla. Los paralelos se determinan, entonces, calculando la coordenada  $Y$  de las diferentes intersecciones con estos meridianos en línea recta.

También se pueden deducir las fórmulas de las coordenadas planas considerando una rotación del eje terrestre de modo que el Polo coincida con el punto de tangencia del plano de proyección  $(\varphi_0, \lambda_0)$ , para lo cual tendrá que girar un ángulo  $90^\circ - \varphi_0$  pasando a la posición  $PN_T - PS_T$ ; se considera como un caso polar ficticio (Figura 3.44, líneas de trazos). El punto  $A$  tendrá entonces las coordenadas ficticias  $(\varphi_T, \lambda_T)$  que se pueden calcular en función de  $\varphi$  y  $\lambda$  resolviendo el triángulo esférico  $PN A PN_T$ :

Por el teorema del coseno:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \varphi_T) &= \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \varphi_0) + \sin(90^\circ - \varphi) \sin(90^\circ - \varphi_0) \cos \Delta\lambda \\ \text{sen } \varphi_T &= \text{sen } \varphi \text{sen } \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda \end{aligned}$$

De esta expresión se obtiene el valor de  $\varphi_T$ . Por el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen } \Delta\lambda_T}{\text{sen}(90^\circ - \varphi)} = \frac{\text{sen } \Delta\lambda}{\text{sen}(90^\circ - \varphi_T)} \therefore \text{sen } \Delta\lambda_T = \frac{\cos \varphi \text{sen } \Delta\lambda}{\cos \varphi_T}$$

de donde se obtiene  $\Delta\lambda_T$ .

En el caso polar ficticio (Figura 3.44),  $A'$  es la proyección de  $A$  y sus coordenadas planas polares son  $r_{\varphi_T}$  y  $\Delta\lambda_T$ , siendo  $r_{\varphi_T} = R \cotg \varphi_T$  y  $\Delta\lambda_T = \text{arc sen } \frac{\cos \varphi \text{sen } \Delta\lambda}{\cos \varphi_T}$ .

### Ejemplo

Sea el punto de coordenadas  $(\varphi = 60^\circ N; \lambda = 75^\circ E)$ ; el punto de tangencia de la esfera terrestre con el plano de proyección es el punto  $(\varphi_0 = 45^\circ; \lambda_0 = 0^\circ)$ . Se desean calcular las coordenadas del punto dado.

$$\text{sen } \varphi_T = \text{sen } 60^\circ \text{sen } 45^\circ + \cos 60^\circ \cos 45^\circ \cos 75^\circ \Rightarrow \varphi_T = 44^\circ 44' 20''.$$

$$r_{\varphi_T} = R \cotg \varphi_T = 6\,370 \text{ km} \cotg 44^\circ 44' 20'' = 6\,428,326 \text{ km}$$

$$\Delta\lambda_T = \text{arc sen } \frac{\cos 60^\circ \text{sen } 75^\circ}{\cos 44^\circ 44' 44''} = 42^\circ 50' 15''$$

Sus coordenadas cartesianas son:

$$X = r_{\varphi_T} \text{sen } \lambda_T = 6\,428,326 \text{ km} \text{sen } 42^\circ 50' 15'' = 4\,370,756 \text{ km}$$

$$Y = r_{\varphi_T} \cos \lambda_T = 6\,428,326 \text{ km} \cos 42^\circ 50' 15'' = 4\,713,795 \text{ km}$$

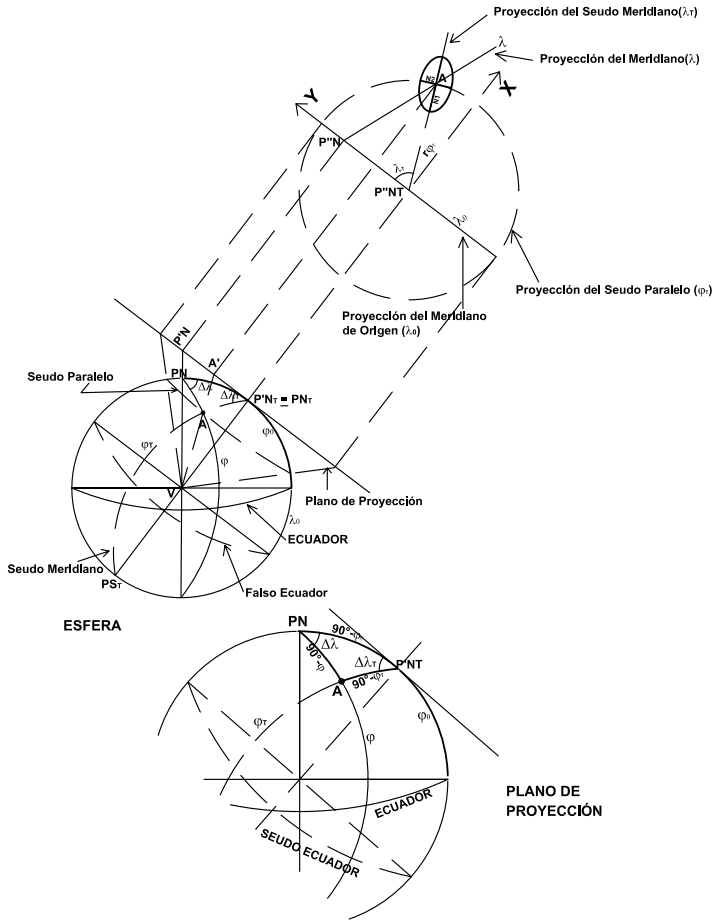


Figura 3.44: Proyección acimutal gnomónica oblicua.

Si se calculan utilizando las fórmulas 3.22 y 3.23 será:

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{R \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda}{\operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda} \\
 &= \frac{6\,370 \text{ km} \cos 60^\circ \operatorname{sen} 75^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 60^\circ + \cos 45^\circ \cos 60^\circ \cos 75^\circ} = 4\,370,744 \text{ km} \\
 Y &= \frac{R(\cos \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda)}{\operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda} \\
 &= \frac{6\,370 \text{ km}(\cos 45^\circ \operatorname{sen} 60^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ \cos 60^\circ \cos 75^\circ)}{\operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 60^\circ + \cos 45^\circ \cos 60^\circ \cos 75^\circ} = 4\,713,762 \text{ km}
 \end{aligned}$$

### 3.10.2 Módulos de alteración lineal

Para calcular los módulos de alteración lineal  $h$  y  $k$  deben utilizarse las fórmulas del Capítulo 2:

$$h = \frac{\sqrt{E}}{R}, \quad k = \frac{\sqrt{G}}{R \cos \varphi}$$

Se deben calcular las derivadas parciales de  $X$  e  $Y$ , evaluarlas en el punto elegido y luego proceder al cálculo de  $E$ ,  $G$ ,  $h$  y  $k$ .

Para calcular los valores máximo y mínimo,  $N_1$  y  $N_2$ , es posible recurrir a las coordenadas polares transversas:

$$h_T = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi_T}, \quad k_T = \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi_T}$$

Para el ejemplo anterior:

$$N_1 = h_T = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 44^\circ 44' 00''} = 2,018; \quad N_2 = k_T = \frac{1}{\operatorname{sen} 44^\circ 44' 20''} = 1,421.$$

#### Nota

Los valores de  $N_1$  y  $N_2$ , así como la dirección del semieje mayor ( $\lambda_T$ ), permiten dibujar en escala la elipse de Tissot.

### 3.10.3 Módulo de alteración superficial

Se calcula con los valores de  $N_1$  y  $N_2$ :  $\mu = N_1 N_2$ .

En el ejemplo:  $\mu = N_1 N_2 = 2,018 \times 1,421 = 2,868$ . Por lo tanto, la alteración superficial en ese punto es 186,8%.

### 3.10.4 Máxima deformación angular

Está dada por la fórmula:  $\delta_{\max} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$ .

#### Ejemplo

En el punto que se ha considerado como ejemplo en esta proyección, de coordenadas ( $\varphi = 60^\circ N$ ;  $\lambda = 75^\circ E$ ) y con el centro de la proyección en ( $\varphi_0 = 45^\circ$ ;  $\lambda_0 = 0^\circ$ ):

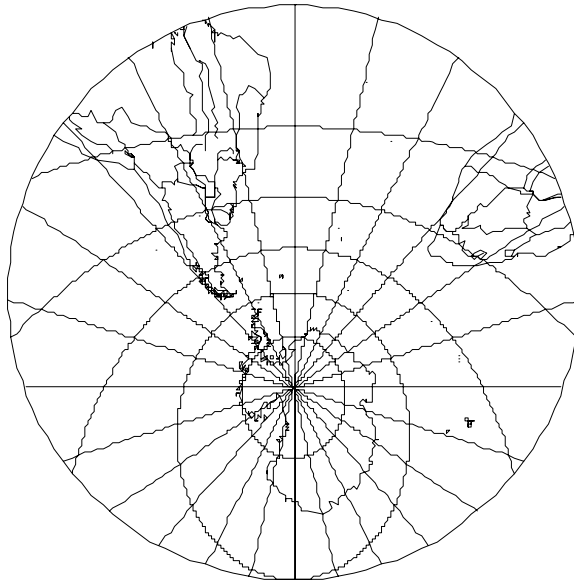
$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{2,018 - 1,421}{2,018 + 1,424} = 19^\circ 51' 39''$$

### 3.10.5 Características y propiedades (Figura 3.45)

El Ecuador se proyecta según una recta de longitud infinita. Los meridianos se proyectan como semirrectas concurrentes en el Polo Norte (en



este caso), de longitud infinita, que se van alejando entre sí al avanzar del meridiano central hacia el este o el oeste. Las medidas tomadas sobre los meridianos son incorrectas, mayores que las reales (ver *Módulos de alteración lineal*).



**Figura 3.45:** Proyección acimutal gnomónica oblicua. Centro de proyección (60°S, 30°W).

Los valores de los semiejes de la Elipse de Tissot en cada uno de los puntos de la proyección  $(\varphi; \lambda)$  se obtienen calculando los valores de los mismos para el caso polar con las coordenadas transversas  $(\varphi_T, \lambda_T)$ :

$$\text{sen } \varphi_T = \text{sen } \varphi \text{sen } \varphi_0 + \text{cos } \varphi \text{cos } \varphi_0 \text{cos } \Delta\lambda \Rightarrow \varphi_T$$

$$\text{sen } \Delta\lambda_T = \frac{\text{cos } \varphi \text{sen } \Delta\lambda}{\text{cos } \varphi_T} \Rightarrow \Delta\lambda_T$$

Luego se calculan los semiejes de la elipse de Tissot:

$$h_T = \frac{1}{\text{sen}^2 \varphi_T} \quad k_T = \frac{1}{\text{sen } \varphi_T}$$

Los paralelos cuya latitud es mayor que la latitud del punto de tangencia se proyectan según arcos de elipses. El paralelo cuya latitud coincide con la latitud del punto de tangencia se proyecta según una parábola. Los paralelos cuya latitud es menor que la latitud del punto de tangencia se proyectan según ramas de hipérbolas.

La deformación en cada punto de los paralelos se analiza con el módulo de alteración lineal  $k$ , que resulta ser siempre  $k > 1$ . Esta proyección no es isógona pues  $h \neq k$  y tampoco es equivalente, pues:  $hk \operatorname{sen} \theta \neq 1$ . Tiene la importante propiedad de que las líneas ortodrómicas se proyectan según rectas.

### 3.10.6 Usos

Para la navegación (marítima y aérea) junto con la proyección Mercator (ver Capítulo 4). También se usa para mapas celestes.

#### Ejercicio

Se desea hallar la escala en que está dibujado el mapa anterior; supóngase que se desconoce la latitud del punto de tangencia del plano de proyección ( $\varphi_0$ ). Se supondrá que  $\varphi_0 = -60^\circ$ .

En la Figura 3.46:

$$EO' + O'P'S = R \operatorname{tg} \varphi_0 + R \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi_0) = R[\operatorname{tg} \varphi_0 + \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi_0)]$$

$$AP''S = 6\,370 \operatorname{km} [\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ] = 14\,710,885 \operatorname{km}$$

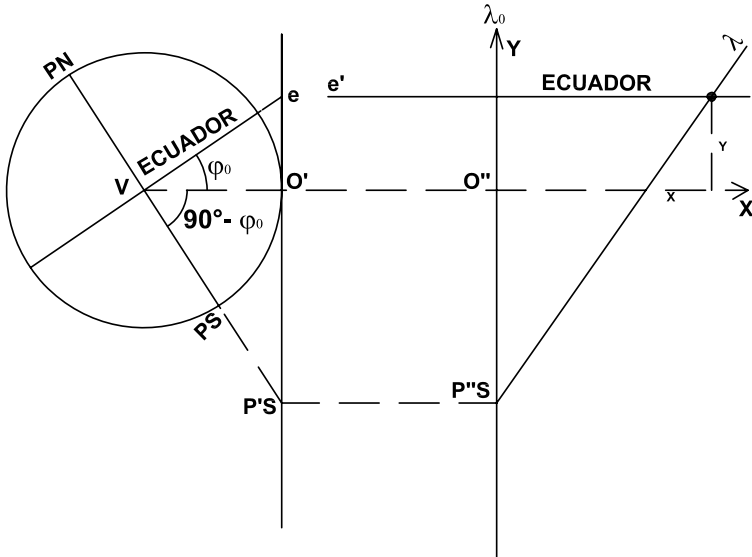


Figura 3.46: Proyección acimutal gnómica oblicua.

Si en el mapa se midiera 5,5cm, el módulo de la escala sería entonces:

$$M = \frac{1\,471\,088\,500\text{cm}}{5,5\text{cm}} \cong 267\,500\,000$$

y la escala sería 1 : 267 500 000, en el supuesto de que  $\varphi_0 = -60^\circ$ .

Para verificar si es realmente la escala en que está confeccionado el mapa, debe verificarse su valor para las coordenadas de un punto cualquiera, por ejemplo para  $(\varphi = 0^\circ, \lambda = 15^\circ W)$ . Para dicho punto es  $\Delta\lambda = -15^\circ + 60^\circ = 45^\circ$ , y sus coordenadas cartesianas son:

$$X = \frac{R \operatorname{tg} \Delta\lambda}{\cos \varphi_0} = \frac{6\,370\text{km} \operatorname{tg} 45^\circ}{\cos(-60^\circ)} = 12\,740\text{km} \text{ (en escala } X = 4,76\text{cm)}.$$

$$Y = \frac{R(-\operatorname{sen} \varphi_0 \cos \Delta\lambda)}{\cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda} = \frac{6\,370\text{km}(-\operatorname{sen}(-60^\circ))}{\cos(-60^\circ)} = 11\,033,163\text{km}$$

(en escala  $Y=4,12\text{cm}$ ). Si los valores de las coordenadas cartesianas coinciden con los del mapa, el punto  $(\varphi_0 = 60^\circ S, \lambda_0 = 30^\circ W)$  será el centro de la proyección y la escala del mapa será 1 : 267 500 000, de lo contrario deberá formularse otra hipótesis y verificarse de manera similar.

### 3.11 Proyección acimutal equidistante polar

#### 3.11.1 Dibujo de la proyección (Figura 3.47)

No resulta de proyectar desde un punto de vista los paralelos y meridianos, sino que se impone la condición de que, a partir del centro de la proyección, todas las distancias son correctas en sentido radial, pudiendo presentarse dos casos: tangente en el Polo Norte o tangente en el Polo Sur.

Por lo tanto, para la determinación de la escala en que se va a dibujar la proyección, se deberán tener en cuenta las distancias reales de los meridianos y el papel disponible para el dibujo.

$$E : \frac{1}{M} = \frac{d}{D} \therefore M = \frac{D}{d}$$

donde  $E$  es la escala,  $M$  es el módulo de la escala,  $d$  es la longitud del segmento que representa a un meridiano y  $D$  es la longitud de un meridiano. Si, por ejemplo, se representa un meridiano por un segmento de

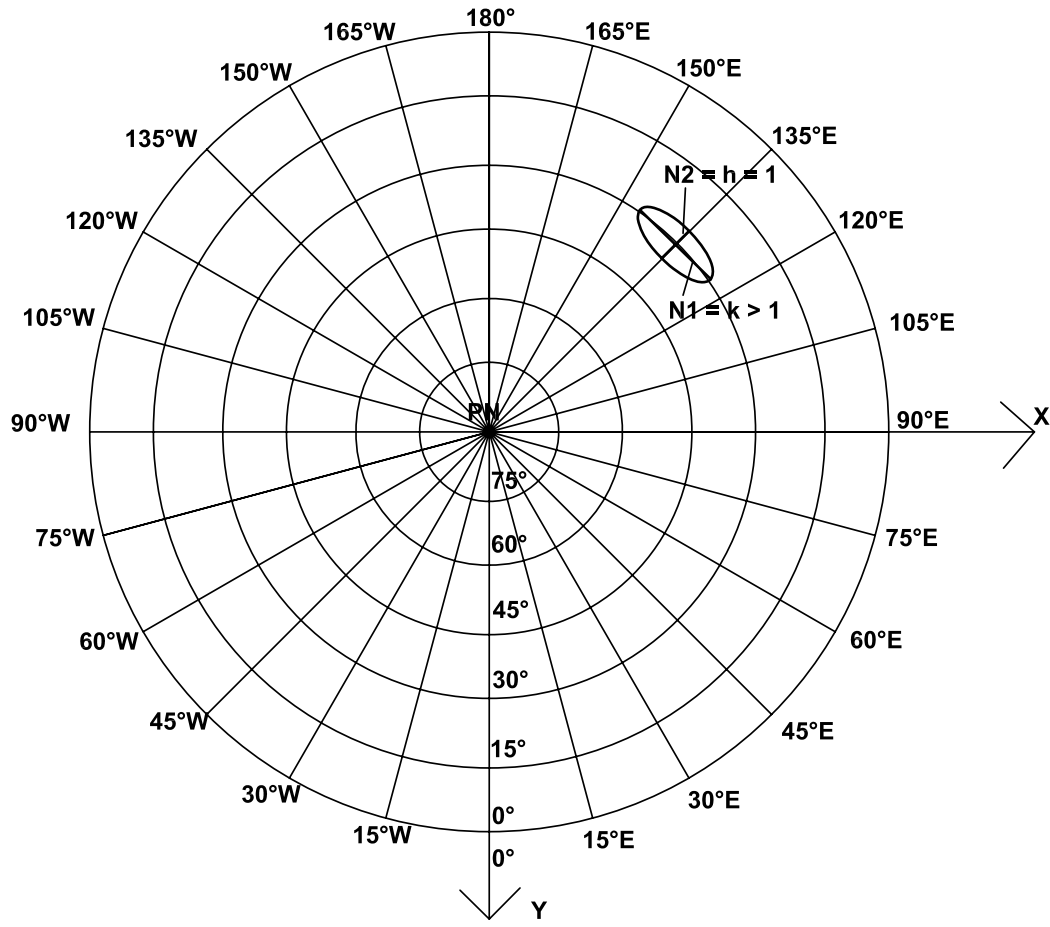


Figura 3.47: Proyección acimutal equidistante polar.

13,7cm, resultará:

$$M = \frac{2\,000\,000\,000\text{cm}}{13,70\text{cm}} \text{ se redondea } M = 146\,000\,000 \Rightarrow E = 1:146\,000\,000.$$

Se elige el centro de la proyección, como también la diferencia de longitud y latitud para dibujar paralelos y meridianos. En la Figura 3.47,  $PN$  es el centro de la proyección y la diferencia de longitud es de  $15^\circ$ .

Para dibujar los paralelos se hace centro con el compás en  $PN$  y se trazan circunferencias concéntricas cuyos radios serán iguales a la distancia sobre un meridiano desde el Polo Norte a cada uno de los paralelos elegidos respectivamente ( $r_\delta$ ).

Para dibujar los meridianos, se coloca un transportador de ángulos con su centro en  $PN$ , midiéndose ángulos consecutivos en sentido radial cada  $15^\circ$ .

Las coordenadas planas de un punto cualquiera  $(\varphi, \lambda)$  de la proyección son:

Coordenadas polares  $\begin{cases} r_\varphi = R\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = R\delta \\ \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 \end{cases}$ , donde  $\lambda_0$  es la longitud del meridiano central.

Coordenadas cartesianas:  $\begin{cases} X = r_\varphi \text{sen } \Delta\lambda \\ Y = r_\varphi \text{cos } \Delta\lambda \end{cases}$

### Ejemplo

En una proyección acimutal equidistante polar, cuyo meridiano central es el de  $\lambda_0 = 0^\circ$ , se considera el punto de coordenadas  $(\varphi = 15^\circ; \lambda = 30^\circ)$ . Se desean calcular sus coordenadas planas.

$$r_\varphi = 6\,370\text{km}(90^\circ - 15^\circ) \frac{\pi}{180^\circ} = 8\,338,310\text{km} \text{ o bien}$$

$$r_\delta = 6\,370\text{km} \times 75^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = 8\,338,310\text{km}$$

$$\Delta\lambda = 30^\circ - 0^\circ = 30^\circ$$

$$X = 8\,338,310\text{km} \text{sen } 30^\circ = 4\,169,155\text{km}$$

$$Y = 8\,338,310\text{km} \text{cos } 30^\circ = 7\,221,188\text{km}$$

### 3.11.2 Características y propiedades

Los paralelos se proyectan según circunferencias concéntricas equiespaciadas, de longitudes incorrectas mayores que las reales. Su deformación

se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ ; para su determinación se considera el paralelo completo, pues la deformación es la misma en toda su extensión.

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}} = \frac{2\pi r_\varphi}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{r_\varphi}{R \cos \varphi}$$

Como  $r_\varphi = \frac{(90^\circ - \varphi)\pi R}{180^\circ}$ , reemplazando en la expresión de  $k$ :

$$k = \frac{(90^\circ - \varphi)\pi R}{R \cos \varphi 180^\circ} = \frac{(90^\circ - \varphi)\pi}{\cos \varphi 180^\circ} > 1$$

Si se utiliza la colatitud  $\delta$  será  $r_\delta = R\delta$ , entonces:

$$k = \frac{2\pi r_\delta}{2\pi R \text{sen } \delta} = \frac{R\delta}{R \text{sen } \delta} = \frac{\delta}{\text{sen } \delta} > 1$$

Los meridianos se proyectan según rectas radiales concurrentes en uno de los Polos (Polo Norte en la Figura 3.47) formando entre sí ángulos iguales a la diferencia de su longitud geográfica, y de longitudes correctas debido a la condición impuesta. Por lo tanto el valor del módulo de alteración lineal es  $h = 1$ .

Como  $h \neq k$ , esta proyección no es isógona, pero tampoco es equivalente, pues como  $h = 1 = N_2$  y  $k = N_1 > 1$ , resulta  $hk \neq 1$ .

En un punto cualquiera de la proyección, la deformación angular máxima se calcula con la expresión.

$$\delta_{\max} = 2\text{arcsen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} = 2\text{arcsen} \frac{N_1 - 1}{N_1 + 1}$$

### Ejemplo

En la proyección acimutal equidistante polar, con meridiano central en  $\lambda_0 = 0^\circ$ , se considera la ciudad de Santa Fe (Argentina), de latitud  $\varphi = 31^\circ 38' S$ . Allí:

$$k = \frac{58^\circ 22' \frac{\pi}{180^\circ}}{\text{sen } 58^\circ 22'} = 1,197 = N_1, h = N_2 = 1$$

$$\delta_{\max} = 2\text{arcsen} \frac{1,197 - 1}{1,197 + 1} = 10^\circ 17' 20''$$

Obsérvese que la deformación angular máxima resulta menor que en la *proyección acimutal gnomónica polar*, en donde era de  $36^\circ 20' 03''$ .

### 3.11.3 Usos(Figura 3.48)

Se utiliza principalmente para mapas de regiones polares, puesto que además de la ventaja de las distancias radiales correctas, las deformaciones cerca del centro de la proyección son pequeñas. También suele emplearse para representar hemisferios para los atlas, ya que los mapas son a muy pequeña escala, apareciendo la deformación dividida por el módulo de la misma. Puede representarse más de un hemisferio, hasta la totalidad de la superficie terrestre, pero entonces las deformaciones son muy grandes, salvo en sentido radial.

Pueden calcularse las fórmulas sobre el elipsoide, que son teóricamente exactas, para mapas y cartas de toda la superficie terrestre, pero es innecesario, pues la diferencia entre los errores para las superficies esférica y elipsoidal es insignificante comparada con otros errores básicos de la proyección en el caso polar.



**Figura 3.48:** *Proyección acimutal equidistante polar.*

### 3.12 Proyección acimutal equidistante ecuatorial

#### 3.12.1 Dibujo de la proyección

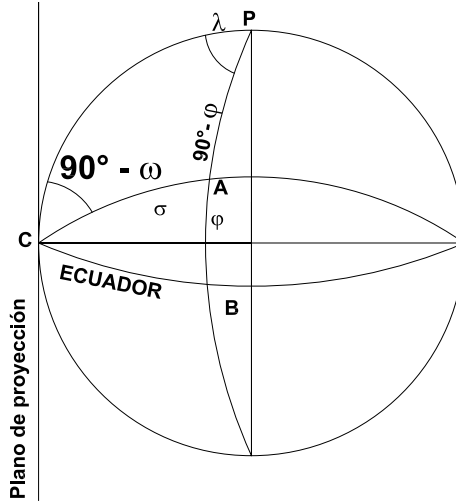


Figura 3.49: Proyección acimutal equidistante ecuatorial.

Esta proyección cumple la condición de que, a partir del centro de la proyección, todas las medidas son correctas. Por lo tanto, tienen longitud correcta tanto el Ecuador como el meridiano central, que se proyectan según rectas perpendiculares entre sí. Los otros paralelos son curvas trascendentes y los otros meridianos son curvas trascendentes concurrentes en los Polos. Los meridianos cuyas longitudes geográficas difieren  $90^\circ$  al este y  $90^\circ$  al oeste del meridiano central aparecen según dos semicircunferencias opuestas divididas en partes iguales por los paralelos (Figura 3.52).

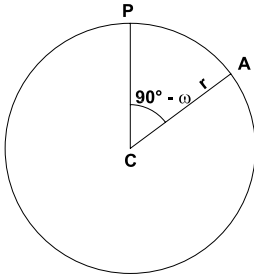


Figura 3.50: Coordenadas polares.

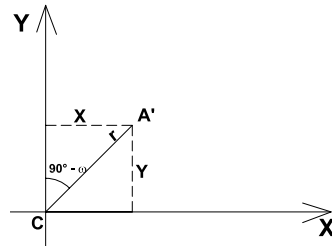


Figura 3.51: Coordenadas cartesianas.



En relación con el centro de la proyección, las coordenadas polares de un punto  $A$  de la proyección son  $r$  y  $90^\circ - \omega$  (Figura 3.50), cuyas fórmulas se deducen en función de las coordenadas geográficas  $(\varphi, \lambda)$  del punto del cual  $A$  es la proyección. Sea  $C$  el punto de tangencia del plano de proyección, o sea el punto de intersección del Ecuador con el meridiano que se adopta como origen (Figura 3.49). En el triángulo esférico  $CAB$ , rectángulo en  $B$ , se tiene:

$$\text{sen}(90^\circ - \sigma) = \cos \varphi \cos \lambda$$

$$\cos \sigma = \cos \varphi \cos \lambda$$

donde  $\sigma$  representa el arco de círculo máximo  $CA$ . De allí se deduce que:

$$r = \sigma R \quad (3.28)$$

Además,  $\text{sen } \lambda = \text{tg } \varphi \text{tg}(90^\circ - \omega)$ , de donde:

$$\text{tg}(90^\circ - \omega) = \text{sen } \lambda \text{cotg } \varphi \quad (3.29)$$

También  $\text{tg}(90^\circ - \omega)$  puede calcularse a través de:

$$\text{sen } \varphi = \cos(90^\circ - \omega) \text{sen } \sigma$$

$$\cos(90^\circ - \omega) = \text{sen } \varphi \text{cosec } \sigma \quad (3.30)$$

Calculando ahora las coordenadas cartesianas  $X$  e  $Y$  (Figura 3.51), se tiene:

$$X = r \text{sen}(90^\circ - \omega) = \sigma R \text{sen}(90^\circ - \omega) \quad (3.31)$$

$$Y = r \cos(90^\circ - \omega) = \sigma R \cos(90^\circ - \omega) \quad (3.32)$$

Las fórmulas 3.31 y 3.32 permiten calcular las coordenadas cartesianas de cualquier punto y dibujar el canevas con el intervalo que se desee. Por ejemplo, considerando el meridiano central de  $0^\circ$  (Greenwich), para  $A(\varphi = 30^\circ N; \lambda = 75^\circ E)$ , se tiene:

$$\cos \sigma = \cos 30^\circ \cos 75^\circ = 0,22414387$$

por lo que  $\sigma = 77^\circ 02' 51''$ .

$$r = 8565,946 \text{ km}$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \omega) = \operatorname{sen} 75^\circ \operatorname{cotg} 30^\circ = 1,6730326 \Rightarrow (90^\circ - \omega) = 59^\circ 07' 57''.$$

Entonces:

$$X = 8\,565,946 \text{ km} \operatorname{sen} 59^\circ 07' 57'' = 7\,352,632 \text{ km};$$

$$Y = 8\,565,946 \text{ km} \operatorname{cos} 59^\circ 07' 57'' = 4\,394,796 \text{ km}.$$

Estos valores se llevarán a la escala de la figura. El contorno es una circunferencia de radio  $r$ :

$$r = 90^\circ 6\,370 \text{ km} \frac{\pi}{180^\circ} = 10\,006 \text{ km}.$$

En la Tabla de la Proyección Acimutal Equidistante Ecuatorial (Tabla 3.1), se consignan los valores de  $X$  e  $Y$  con un intervalo de  $15^\circ$  entre meridianos y paralelos.

Calculando en una escala apropiada los valores, en centímetros, de  $X$  e  $Y$  de la tabla anterior, se dibuja la Figura 3.52.

### 3.12.2 Características y propiedades

Las distancias a partir del centro de la proyección son todas correctas en sentido radial. Los ejes  $X$  e  $Y$  permiten acotar en escala los valores de las coordenadas de cualquier punto en la proyección, dadas por las fórmulas 3.31 y 3.32.

La construcción analítica de la proyección se hace mediante las coordenadas planas polares, o por medio de las coordenadas cartesianas, o bien mediante las coordenadas planas del caso polar ficticio ( $r_{\varphi_T}$  y  $\Delta\lambda_T$ ) y las coordenadas cartesianas  $X$  e  $Y$  calculadas a través de ellas.

En el triángulo esférico  $PN A PN_T$  (Figura 3.53) se tiene:

$$\operatorname{cos}(90^\circ - \varphi_T) = \operatorname{cos}(90^\circ - \varphi) \operatorname{cos} 90^\circ + \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi) \operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{cos} \Delta\lambda$$

$$\operatorname{sen} \varphi_T = \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \Delta\lambda.$$

De aquí se obtiene el valor de  $\varphi_T$ . Entonces:

$$r_{\varphi_T} = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_T\right) R \quad (3.33)$$

Si se aplica ahora el teorema del seno al mismo triángulo:

$$\frac{\operatorname{sen} \Delta\lambda_T}{\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi)} = \frac{\operatorname{sen} \Delta\lambda}{\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_T)} \therefore \operatorname{sen} \Delta\lambda_T = \frac{\operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} \Delta\lambda}{\operatorname{cos} \varphi_T} \Rightarrow \Delta\lambda_T \quad (3.34)$$

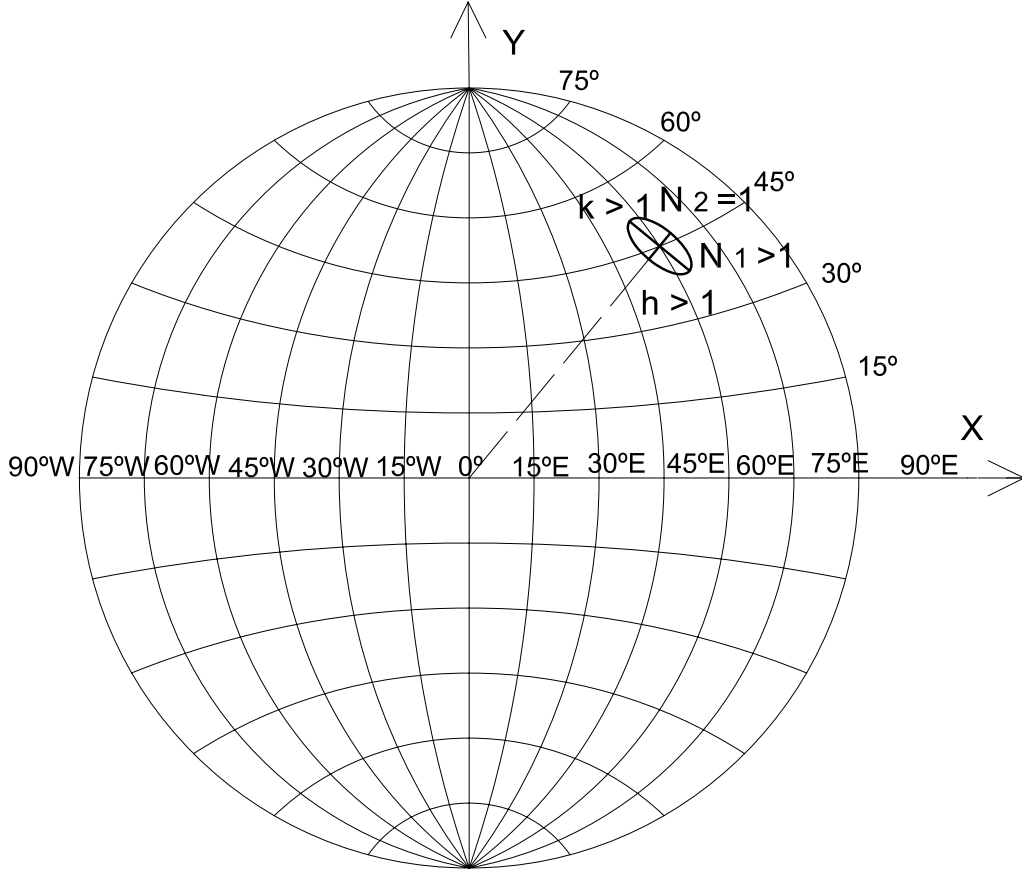


Figura 3.52: Proyección acimutal equidistante ecuatorial.

$\varphi$	$\lambda = 0^\circ$		$\lambda = 15^\circ$		$\lambda = 30^\circ$		$\lambda = 45^\circ$		$\lambda = 60^\circ$		$\lambda = 75^\circ$		$\lambda = 90^\circ$	
	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$
$0^\circ$	0	0	1668	0	3335	0	5003	0	6671	0	8338	0	10006	0
$15^\circ$	0	1668	1629	1687	3256	1745	4878	1849	6492	2008	8091	2245	9665	2589
$30^\circ$	0	3335	1511	3371	3014	3480	4498	3674	5952	3968	7353	4395	8665	5003
$45^\circ$	0	5003	1307	5050	2598	5195	3851	5446	5043	5823	6137	6353	7075	7075
$60^\circ$	0	6671	1005	6721	1984	6873	2912	7132	3755	7510	4471	8017	5003	8666
$75^\circ$	0	8338	589	8375	1138	8490	1646	8679	2075	8942	2400	9272	2590	9665
$90^\circ$	0	10006	0	10006	0	10006	0	10006	0	10006	0	10006	0	10006

**Tabla 3.1:** PROYECCIÓN ACIMUTAL EQUIDISTANTE ECUATORIAL.

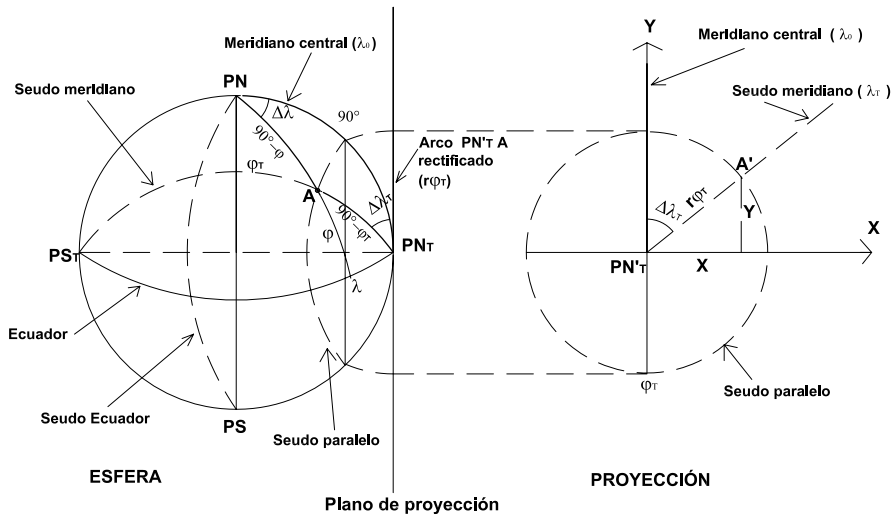


Figura 3.53: Caso polar ficticio.

Las expresiones 3.33 y 3.34 son las coordenadas polares ficticias, en la proyección, del punto de coordenadas  $(\varphi, \lambda)$ , mientras que las coordenadas cartesianas son:

$$X = r_{\varphi_T} \operatorname{sen} \Delta\lambda_T$$

$$Y = r_{\varphi_T} \operatorname{cos} \Delta\lambda_T$$

Se deduce también que:

$$\begin{cases} X = R \frac{\psi}{\operatorname{sen} \psi} \operatorname{sen} \Delta\lambda \operatorname{cos} \varphi \\ Y = R \frac{\psi}{\operatorname{sen} \psi} \operatorname{sen} \varphi \end{cases} \quad (3.35)$$

siendo  $\psi = \operatorname{arc} \operatorname{cos}[\operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \Delta\lambda]$

### Ejemplo

Considerando el meridiano central  $\lambda_0 = 0^\circ$  y el punto de coordenadas  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 60^\circ$ , se desean conocer sus coordenadas planas.

$$\operatorname{sen} \varphi_T = \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \Delta\lambda = \operatorname{cos} 45^\circ \operatorname{cos} 60^\circ \Rightarrow \varphi_T = 20^\circ 42' 17''.$$

$$\operatorname{sen} \Delta\lambda_T = \frac{\operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} \Delta\lambda}{\operatorname{cos} \varphi_T} = \frac{\operatorname{cos} 45^\circ \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{cos} 20^\circ 42' 17''} \Rightarrow \Delta\lambda_T = 40^\circ 53' 36''.$$

$$r_{\varphi_T} = R(90^\circ - \varphi_T) \frac{\pi}{180^\circ} = 7\,704,074 \text{ km}$$

Entonces:

$$X = r_{\varphi_T} \operatorname{sen} \lambda_T = 7\,704,074 \text{ km} \operatorname{sen} 40^\circ 53' 36'' = 5\,043,494 \text{ km}$$

$$Y = r_{\varphi_T} \operatorname{cos} \lambda_T = 7\,704,074 \text{ km} \operatorname{cos} 40^\circ 53' 36'' = 5\,823,738 \text{ km}$$

Aplicando las fórmulas 3.35 se obtiene:  $\psi = \operatorname{arc} \operatorname{cos}[\operatorname{cos} 45^\circ \operatorname{cos} 60^\circ] = 69^\circ 17' 43''$  y entonces:

$$X = 6\,370 \text{ km} \frac{69^\circ 17' 43'' \frac{\pi}{180^\circ}}{\operatorname{sen} 69^\circ 17' 43''} \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{cos} 45^\circ = 5\,043,497 \text{ km}$$

$$Y = 6\,370 \text{ km} \frac{69^\circ 17' 43'' \frac{\pi}{180^\circ}}{\operatorname{sen} 69^\circ 17' 43''} \operatorname{sen} 45^\circ = 5\,823,729 \text{ km}$$

El meridiano central es el único que se proyecta según una recta y, como tiene sentido radial, su longitud es correcta. Los dos meridianos cuyas longitudes geográficas difieren  $90^\circ$  al este o al oeste del meridiano central se proyectan según dos semicircunferencias opuestas de longitudes incorrectas, mayores que las reales. Los demás meridianos se proyectan según curvas trascendentes que cortan al Ecuador en partes iguales, necesiéndose para dibujarlas determinar puntos sobre cada meridiano que se ubican mediante las coordenadas  $X$  e  $Y$ .

La deformación en cada punto de cada meridiano se calcula con el módulo de alteración lineal  $h$ . Los módulos de alteración lineal  $N_1$  y  $N_2$  se deducen del caso polar ficticio. Para el punto del ejemplo anterior:

$$N_1 = k_T = \frac{(90^\circ - \varphi_T)\pi}{180^\circ \operatorname{cos} \varphi_T} = \frac{(90^\circ - 20^\circ 42' 17'')\pi}{180^\circ \operatorname{cos} 20^\circ 42' 17''} = 1,293$$

$$N_2 = h_T = 1$$

El valor máximo del error angular en un punto está dado por:

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

que, en el ejemplo antes considerado, es:

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1,293 - 1}{1,293 + 1} = 14^\circ 40' 58''$$

El Ecuador se proyecta según una recta de longitud correcta pues tiene sentido radial. Los paralelos son curvas trascendentes que cortan al meridiano central en partes iguales. La deformación en cada punto de cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ .

En general, los módulos de alteración lineal se calculan por las fórmulas:  $h = \frac{\sqrt{E}}{R}$  y  $k = \frac{\sqrt{G}}{R \cos \varphi}$ , y el ángulo  $\alpha'$ , formado en un punto  $(\varphi, \lambda)$  de la proyección por la proyección del paralelo y el meridiano, se calcula a través de cualquiera de las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{sen} \alpha' = \frac{N_1 N_2}{hk}; \alpha' = \theta_p - \theta_m; \cos \alpha' = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Esta proyección no es isógona, puesto que  $k \neq h$  y tampoco es equivalente ya que  $hks \operatorname{sen} \alpha' \neq 1$ , siendo  $\alpha'$  el ángulo de intersección entre paralelos y meridianos.



**Figura 3.54:** Proyección acimutal equidistante ecuatorial,  $\lambda_0 = 60^\circ W$ .

### 3.12.3 Usos

Para mapas de regiones que se encuentran no muy alejadas del centro de la proyección, para que las deformaciones no sean muy grandes. También es utilizada para mapas de comunicaciones radiales, ubicando la emisora en el centro de la proyección. Se la utiliza también para mapas aeronáuticos, ubicando la base aérea en el centro de la proyección. Suele

encontrarse en atlas para mapas de hemisferios, tanto del oriental como del occidental.

Existen fórmulas aproximadas para el cálculo de coordenadas sobre el elipsoide (caso ecuatorial).

### 3.13 Proyección acimutal equidistante oblicua

#### 3.13.1 Dibujo de la proyección (Figura 3.58)

En esta proyección solamente el meridiano central está representado por una línea recta. Los otros meridianos y los paralelos están representados por curvas que no son arcos de circunferencias. El contorno, que representa un círculo máximo, es una circunferencia de radio  $\frac{\pi R}{2}$  cuando se representa un hemisferio. Supóngase el plano de proyección tangente a la superficie terrestre en el punto de coordenadas  $O'(\varphi_0, \lambda_0)$  (Figura 3.55) y considérese  $\lambda_0 = 0^\circ$  (meridiano de Greenwich). Las coordenadas polares del punto  $A$ , de coordenadas geográficas  $(\varphi, \lambda)$ , en esta proyección son  $(r, 90^\circ - \omega)$  (Figura 3.57), siendo  $r$  igual a la longitud del arco de circunferencia máxima entre  $O'$  y  $A$ ,  $\sigma$ , o sea:  $r = \sigma R$ .

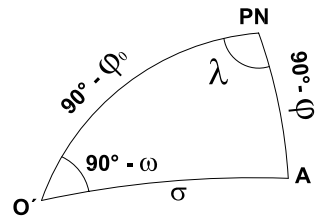
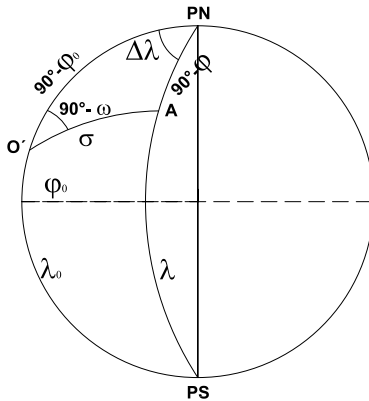


Figura 3.55: Proyección acimutal equidistante oblicua.

Figura 3.56: Triángulo esférico.

Considerando los triángulos esféricos de las Figuras 3.55 y 3.56 y aplicando el teorema del coseno:

$$\cos \sigma = \cos(90^\circ - \varphi_0) \cos(90^\circ - \varphi) + \sin(90^\circ - \varphi_0) \sin(90^\circ - \varphi) \cos \Delta \lambda$$

$$\cos \sigma = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda \quad (3.36)$$



Aplicando ahora el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen}(90^\circ - \omega)}{\text{sen}(90^\circ - \varphi)} = \frac{\text{sen } \Delta\lambda}{\text{sen } \sigma} \therefore \text{sen}(90^\circ - \omega) = \cos \varphi \text{sen } \Delta\lambda \text{ cosec } \sigma \quad (3.37)$$

pudiendo obtener de las fórmulas 3.36 y 3.37 las coordenadas polares de A.

Por el teorema del seno-coseno:

$$\begin{aligned} \text{sen } \sigma \cos(90^\circ - \omega) &= \\ &= \cos(90^\circ - \varphi) \text{sen}(90^\circ - \varphi_0) - \text{sen}(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \varphi_0) \cos \Delta\lambda \end{aligned}$$

$$\text{Entonces } \cos(90^\circ - \omega) = \frac{\text{sen } \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \text{sen } \varphi_0 \cos \Delta\lambda}{\text{sen } \sigma}$$

Pueden calcularse ahora las coordenadas rectangulares X e Y (Figura 3.57):

$$X = r \text{sen}(90^\circ - \omega) = R \text{cosec } \sigma \cos \varphi \text{sen } \Delta\lambda = R \frac{\sigma}{\text{sen } \sigma} \cos \varphi \text{sen } \Delta\lambda \quad (3.38)$$

$$Y = r \cos(90^\circ - \omega) = R \frac{\sigma}{\text{sen } \sigma} (\text{sen } \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \text{sen } \varphi_0 \cos \Delta\lambda) \quad (3.39)$$

donde  $\sigma$  se obtiene de la ecuación 3.36.

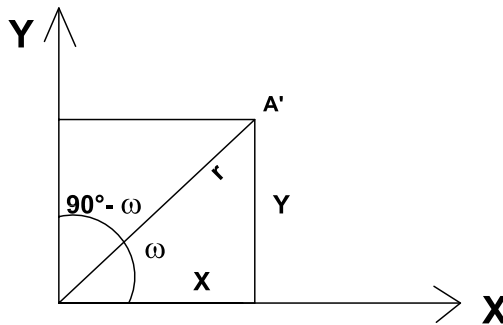


Figura 3.57: Coordenadas planas.

Se puede completar el canevas calculando las coordenadas X e Y de los puntos donde los paralelos y meridianos cortan el contorno del hemisferio. Para ello, en las ecuaciones anteriores se hace  $\sigma = 90^\circ$  y después se realizan transformaciones algebraicas y trigonométricas tendientes a eliminar ya sea  $\varphi$  o bien  $\Delta\lambda$ . Se tiene entonces, a partir de la ecuación 3.36, que:

$$\cos 90^\circ = \text{sen } \varphi \text{sen } \varphi_0 + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta\lambda$$

Por lo tanto:

$$0 = \text{sen } \varphi \text{sen } \varphi_0 + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta\lambda$$

$$\begin{aligned}
-\operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi &= \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda \\
-\operatorname{tg} \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi &= \cos \Delta \lambda \\
\operatorname{tg}^2 \varphi_0 \operatorname{tg}^2 \varphi &= \cos^2 \Delta \lambda = 1 - \operatorname{sen}^2 \Delta \lambda \\
\operatorname{sen}^2 \Delta \lambda &= 1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \operatorname{tg}^2 \varphi
\end{aligned}$$

Por otra parte, si se considera la ecuación 3.37, se tendrá:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(90^\circ - \omega) &= \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda \operatorname{cosec} 90^\circ \\
\operatorname{sen}(90^\circ - \omega) &= \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda \\
\operatorname{sen} \Delta \lambda &= \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - \omega)}{\cos \varphi}
\end{aligned}$$

Igualando ambas expresiones para  $\operatorname{sen}^2 \Delta \lambda$ , resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}^2(90^\circ - \omega)}{\cos^2 \varphi} &= 1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \operatorname{tg}^2 \varphi \\
\operatorname{sen}^2(90^\circ - \omega) &= \cos^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \operatorname{sen}^2 \varphi \quad (3.40)
\end{aligned}$$

A partir de esta expresión, en la que sólo aparece  $\varphi$ , y utilizando las fórmulas 3.38 y 3.39, se calculan las coordenadas de los puntos de intersección de los paralelos con la circunferencia del contorno.

Como ya se ha visto antes:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(90^\circ - \omega) &= \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda \\
\operatorname{sen}^2(90^\circ - \omega) &= \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \Delta \lambda \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Considerando nuevamente:

$$\operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi = \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 \varphi_0 \operatorname{sen}^2 \varphi &= \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi \cos^2 \Delta \lambda \\
\operatorname{sen}^2 \varphi_0 (1 - \cos^2 \varphi) &= \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi \cos^2 \Delta \lambda \\
\operatorname{sen}^2 \varphi_0 - \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi &= \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi \cos^2 \Delta \lambda \\
\operatorname{sen}^2 \varphi_0 &= \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi \cos^2 \Delta \lambda \\
\operatorname{sen}^2 \varphi_0 &= \cos^2 \varphi (\operatorname{sen}^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \Delta \lambda)
\end{aligned}$$

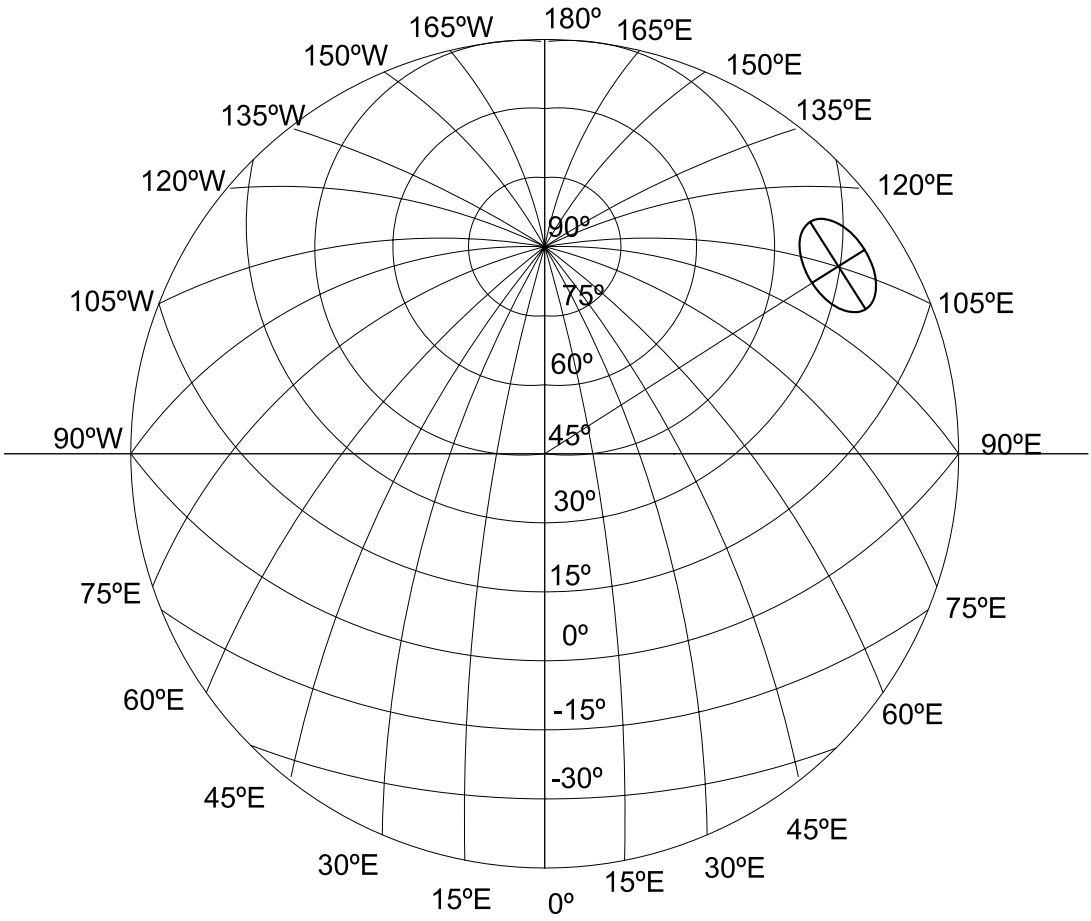


Figura 3.58: Proyección acimutal equidistante oblicua.

$$\cos^2 \varphi = \frac{\text{sen}^2 \varphi_0}{\text{sen}^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \Delta \lambda} \quad (3.42)$$

Reemplazando 3.42 en 3.41, se obtiene otra expresión para  $\text{sen}^2(90^\circ - \omega)$  que sólo depende de  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \text{sen}^2(90^\circ - \omega) &= \frac{\text{sen}^2 \varphi_0 \text{sen}^2 \Delta \lambda}{\text{sen}^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \Delta \lambda} \\ \text{sen}^2(90^\circ - \omega) &= \frac{\text{sen}^2 \Delta \lambda}{1 + \cotg^2 \varphi_0 \cos^2 \Delta \lambda} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Pueden calcularse entonces las coordenadas de los puntos de intersección de los meridianos con la circunferencia de contorno, utilizando las fórmulas 3.38 y 3.39.

En la Figura 3.58 se ha dibujado a escala el canevas de la proyección acimutal equidistante de un hemisferio cuyo centro (punto de tangencia del plano de proyección) es el punto de intersección del meridiano de Greenwich ( $\lambda_0 = 0^\circ$ ) y el paralelo  $\varphi_0 = 45^\circ$ .

Para el punto  $P(\varphi = 30^\circ N, \lambda = 120^\circ E)$ , aplicando la fórmula 3.36 se tiene:

$$\begin{aligned} \cos \sigma &= \text{sen} \varphi_0 \text{sen} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda = \\ &= \text{sen} 45^\circ \text{sen} 30^\circ + \cos 45^\circ \cos 30^\circ \cos 120^\circ = 0,04736717274, \end{aligned}$$

por lo tanto:  $\sigma = 87^\circ 17' 06''$  y  $r = \frac{\sigma \pi R}{180^\circ} = 904,131 \text{ km}$ .

Aplicando la fórmula 3.37, se tiene:  $\text{sen}(90^\circ - \omega) = \cos \varphi \text{sen} \Delta \lambda \text{cosec} \sigma = \cos 30^\circ \text{sen} 120^\circ \text{cosec} 87^\circ 17' 06'' = 0,75084281325$ , entonces:  $(90^\circ - \omega) = 48^\circ 39' 48''$ .

Utilizando las fórmulas 3.38 y 3.39:

$$\begin{aligned} X &= 9\,704,131 \text{ km} \text{sen} 48^\circ 39' 48'' = 7\,286,265 \text{ km}. \\ Y &= 9\,704,131 \text{ km} \cos 48^\circ 39' 48'' = 6\,409,407 \text{ km}. \end{aligned}$$

En la Tabla 3.3 se consignan las coordenadas  $X$  e  $Y$  de los puntos de intersección de los paralelos con los meridianos, con intervalos de  $15^\circ$  (en kilómetros).

Para hallar las coordenadas de los puntos de intersección de los paralelos con el contorno (perímetro del hemisferio), se utilizan las fórmulas 3.40, 3.38 y 3.39. Por ejemplo, para el punto de intersección del paralelo de latitud  $\varphi = 30^\circ$  con el contorno se calcula:

$$\text{sen}^2(90^\circ - \omega) = \cos^2 30^\circ - \text{tg}^2 45^\circ \text{sen}^2 30^\circ$$

por lo tanto:  $(90^\circ - \omega) = 45^\circ$ .

Entonces:

$$X = 90^\circ \frac{\pi \times 6\,370\text{km}}{180^\circ} \text{sen } 45^\circ = 7\,075,291\text{km}$$

$$Y = 90^\circ \frac{\pi \times 6\,370\text{km}}{180^\circ} \text{cos } 45^\circ = 7\,075,291\text{km}.$$

En la Tabla 3.2 se consignan los valores de las coordenadas  $X$  e  $Y$  de los puntos de intersección de los paralelos con el contorno, en kilómetros.

$\varphi$	$X$	$Y$
$-30^\circ$	7075	-7075
$-15^\circ$	9312	-3663
$45^\circ$	0	10006
$30^\circ$	7075	7075
$15^\circ$	9312	3663

**Tabla 3.2:** PROYECCIÓN ACIMUTAL EQUIDISTANTE OBLICUA.

Para hallar las coordenadas de los puntos de intersección de los meridianos con el contorno se utilizan las fórmulas 3.43, 3.38 y 3.39.

$$\text{sen}(90^\circ - \omega) = \frac{\text{sen}^2 \Delta\lambda}{1 + \text{cotg}^2 \varphi_0 \text{cos}^2 \Delta\lambda} = \frac{\text{sen}^2 75^\circ}{1 + \text{cotg}^2 45^\circ \text{cos}^2 75^\circ} = 0,874436559$$

$$(90^\circ - \omega) = 69^\circ 14' 47''$$

Entonces:

$$X = 90^\circ \frac{\pi \times 6\,370\text{km}}{180^\circ} \text{sen } 69^\circ 14' 47'' = 9\,357\text{km}$$

$$Y = 90^\circ \frac{\pi \times 6\,370\text{km}}{180^\circ} \text{cos } 69^\circ 14' 47'' = 3\,546\text{km}.$$

En la Tabla 3.4 se consignan los valores de las coordenadas  $X$  e  $Y$  de los puntos de intersección del contorno con los meridianos.

La construcción analítica de la proyección también puede hacerse mediante las coordenadas planas del caso polar ficticio  $(r_{\varphi_T}$  y  $\Delta\lambda_T$ ) o  $X$  e  $Y$ .

En el triángulo esférico  $PN A PN_T$  (Figura 3.59) se observa que:

$$\text{cos}(90^\circ - \varphi_T) = \text{cos}(90^\circ - \varphi) \text{cos}(90^\circ - \varphi_0) + \text{sen}(90^\circ - \varphi) \text{sen}(90^\circ - \varphi_0) \text{cos } \Delta\lambda$$

$$\text{sen } \varphi_T = \text{sen } \varphi \text{sen } \varphi_0 + \text{cos } \varphi \text{cos } \varphi_0 \text{cos } \Delta\lambda$$

1	$\varphi = -45^\circ$		$\varphi = -30^\circ$		$\varphi = -15^\circ$		$\varphi = 0^\circ$		$\varphi = 15^\circ$	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
0°	0	-10006	0	-8338	0	-6671	0	-5003	0	-3335
15°	-	-	1956	-8247	1945	-6558	1849	-4878	1682	-3207
30°	-	-	3904	-7969	3876	-6216	3673	-4499	3331	-2817
45°	-	-	5835	-7496	5774	-5631	5446	-3851	4911	-2157
60°	-	-	-	-	7619	-4778	7132	-2912	6230	-1208
75°	-	-	-	-	-	-	8679	-1645	7661	73
90°	-	-	-	-	-	-	10006	0	8679	1645
105°	-	-	-	-	-	-	-	-	9299	3586
120°	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
135°	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
150°	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
165°	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
180°	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

1	$\varphi = 30^\circ$		$\varphi = 45^\circ$		$\varphi = 60^\circ$		$\varphi = 75^\circ$		$\varphi = 90^\circ$	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
0°	0	-1668	0	0	0	1668	0	3335	0	5003
15°	1454	-1543	1172	106	837	1753	448	3384	0	5003
30°	2870	-1172	2304	438	1637	2005	871	3530	0	5003
45°	4204	-547	3350	982	2361	2421	1245	3765	0	5003
60°	5406	340	4262	1740	2970	2988	1550	4079	0	5003
75°	6409	1495	4983	2704	3421	3690	1753	4457	0	5003
90°	7132	2912	5446	3851	3673	4499	1849	4878	0	5003
105°	7468	4571	5579	5142	3686	5373	1819	5315	0	5003
120°	7286	6409	5310	6504	3432	6255	1661	5739	0	5003
135°	-	-	4584	7826	2900	7073	1378	6115	0	5003
150°	-	-	3394	8957	2107	7742	986	6413	0	5003
165°	-	-	1812	9730	1110	8184	515	6604	0	5003
180°	-	-	0	10006	0	8338	0	6671	0	5003

**Tabla 3.3:** PROYECCIÓN ACIMUTAL EQUIDISTANTE OBLICUA.

$\varphi$	$X$	$Y$
75° 105°	9357	-3546 3546
60° 120°	7750	-6328 6328
45° 135°	5776	8170
30° 150°	3782	9264
15° 165°	1863	9831

**Tabla 3.4:** PROYECCIÓN ACIMUTAL EQUIDISTANTE OBLICUA.

De aquí se obtiene el valor de  $\varphi_T$ . Aplicando el teorema del seno al mismo triángulo:

$$\frac{\text{sen } \Delta\lambda_T}{\text{sen}(90^\circ - \varphi)} = \frac{\text{sen } \Delta\lambda}{\text{sen}(90^\circ - \varphi_T)}$$

$$\frac{\text{sen } \Delta\lambda_T}{\cos \varphi} = \frac{\text{sen } \Delta\lambda}{\cos \varphi_T} \therefore \text{sen } \Delta\lambda_T = \frac{\cos \varphi \text{ sen } \Delta\lambda}{\cos \varphi_T}$$

De esta expresión se obtiene el valor de  $\Delta\lambda_T$ . Es posible calcular entonces las coordenadas polares ficticias:

$$r_{\varphi_T} = R \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_T \right)$$

$$\Delta\lambda_T$$

y las coordenadas cartesianas:

$$X = R \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_T \right) \text{sen } \Delta\lambda_T$$

$$Y = R \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_T \right) \cos \Delta\lambda_T$$

**Ejemplo**(Ver Figura 3.58)

Sea el punto de coordenadas ( $\varphi = 30^\circ N; \lambda = 105^\circ E$ ), siendo el centro de la proyección  $\lambda_0 = 0^\circ, \varphi_0 = 45^\circ N$ .

$$\text{sen } \varphi_T = \text{sen } 30^\circ \text{sen } 45^\circ + \cos 30^\circ \cos 45^\circ \cos 105^\circ \Rightarrow \varphi_T = 11^\circ 14' 54''$$

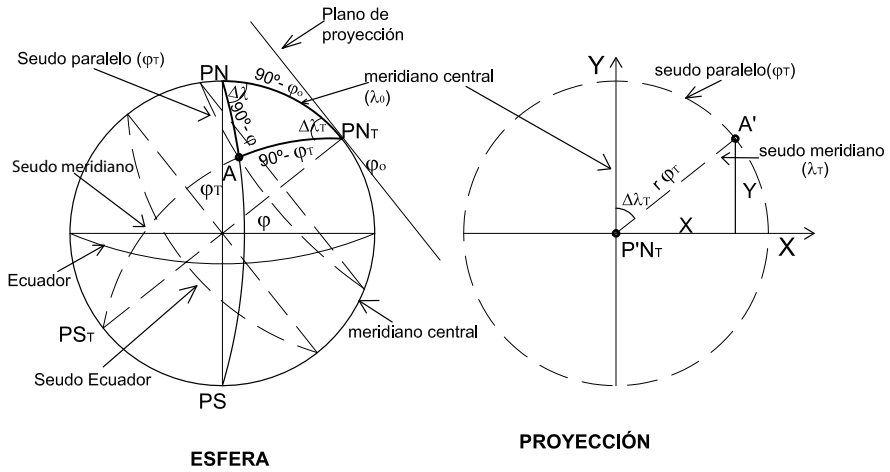


Figura 3.59: Proyección acimutal equidistante oblicua. Caso polar ficticio.

$$\operatorname{sen} \Delta \lambda_T = \frac{\cos 30^\circ \operatorname{sen} 105^\circ}{\cos 11^\circ 14' 54''} \Rightarrow \Delta \lambda_T = 58^\circ 31' 42''.$$

Las coordenadas polares del punto son:

$$\begin{cases} r_{\varphi_T} = 6\,370\text{km} (90^\circ - 11^\circ 14' 54'') \frac{\pi}{180^\circ} = 8\,755,411\text{km} \\ \Delta \lambda_T = 58^\circ 31' 42'' \end{cases}$$

### 3.13.2 Características y propiedades

El meridiano central y su opuesto son los únicos que se proyectan según una recta, de longitud correcta. Los demás meridianos se proyectan según curvas trascendentes, concurrentes en el polo Norte (en el caso de la Figura 3.58) de longitudes incorrectas mayores que las reales; se calcula la deformación con el módulo de alteración lineal  $h$ .

En general:  $h = \frac{\sqrt{E}}{R}$  y  $k = \frac{\sqrt{G}}{R \cos \varphi}$  y el ángulo  $\alpha'$ , formado en un punto  $(\varphi, \lambda)$  por la proyección del paralelo y la proyección del meridiano, se calcula a través de cualquiera de las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{sen} \alpha' = \frac{N_1 N_2}{hk} \text{ o bien } \alpha' = \theta_p - \theta_m \text{ o bien } \cos \alpha' = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

En la Elipse de Tissot se calculan los semiejes  $N_1$  y  $N_2$  (en la Figura 3.58 dibujados en el punto de coordenadas  $(\varphi = 30^\circ N; \lambda = 105^\circ E)$  que no coinciden en este caso con  $h$  ni con  $k$ ). Para hallar los valores de  $N_1$  y  $N_2$



se puede recurrir también al caso polar ficticio (Figura 3.59):

$$\begin{aligned} N_1 = k_T &= \frac{2\pi r \varphi_T}{2\pi R \cos \varphi_T} = \frac{R(90^\circ - \varphi_T) \frac{\pi}{180^\circ}}{R \cos \varphi_T} = \frac{(90^\circ - \varphi_T) \frac{\pi}{180^\circ}}{\cos \varphi_T} \\ N_2 = h_T &= 1 \end{aligned}$$

### Ejemplo

Para el punto  $\varphi = 30^\circ N, \lambda = 105^\circ E$ , siendo el centro de la proyección  $\varphi_0 = 45^\circ N, \lambda_0 = 0^\circ$ :

$$N_1 = k_T = \frac{(90^\circ - 11^\circ 14' 54'') \frac{\pi}{180^\circ}}{\cos 11^\circ 14' 54''} = 1,401; N_2 = h_T = 1$$

Esta proyección no es isógona pues  $h \neq k$ , ni tampoco es equivalente, pues  $hk \operatorname{sen} \alpha' \neq 1$  (o bien  $N_1 N_2 \neq 1$ ).

Existen fórmulas aproximadas para calcular las coordenadas en el elipsoide (caso oblicuo).

## 3.14 Proyección acimutal equivalente polar

### 3.14.1 Dibujo

No resulta de la proyección, desde un punto de vista, de los paralelos y meridianos, sino que se impone la condición de que las áreas sean correctas. Para dibujar esta proyección (Figura 3.61) es necesario calcular el radio de los paralelos en la proyección mediante la fórmula que se deduce a continuación (Figura 3.60).

El área del casquete esférico se calcula a través de la fórmula:

$$\text{Área casquete esférico} = 2\pi R h.$$

Pero:  $h = PNA = PNO - AO$ .

Entonces:  $h = R - R \operatorname{sen} \varphi = R(1 - \operatorname{sen} \varphi)$  y

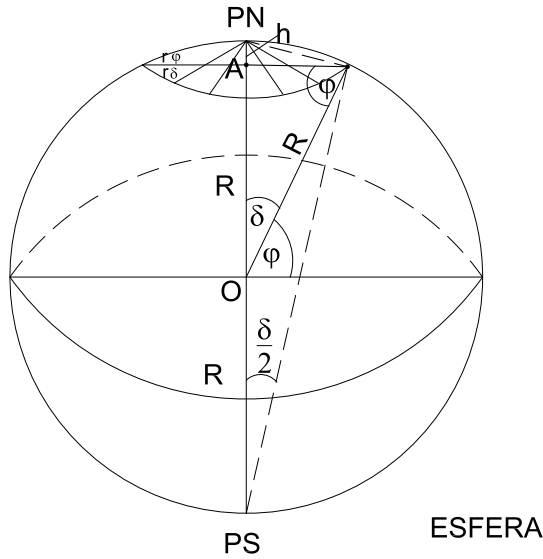
$$\text{Área casquete esférico} = 2\pi R R(1 - \operatorname{sen} \varphi) = 2\pi R^2(1 - \operatorname{sen} \varphi). \quad (3.44)$$

En la proyección:

$$\text{Área del círculo} = \pi(r_\varphi)^2 \quad (3.45)$$

Por ser la proyección equivalente debe ser 3.44 = 3.45, es decir:

$$2\pi R^2(1 - \operatorname{sen} \varphi) = \pi(r_\varphi)^2,$$



**Figura 3.60:** Proyección acimutal equivalente polar. Cálculo del radio de la proyección de un paralelo.

de donde:  $r_\varphi = R\sqrt{2(1 - \operatorname{sen}\varphi)}$ , que puede expresarse también en función de la colatitud  $\delta$ :  $(r_\delta)^2 = 2R^2(1 - \cos\delta)$ .

Como  $1 = \operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{2} + \cos^2 \frac{\delta}{2}$  y  $\cos\delta = \cos^2 \frac{\delta}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{2}$ ,

resulta:  $1 - \cos\delta = 2\operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{2}$

Reemplazando en la expresión de  $(r_\delta)^2$ :

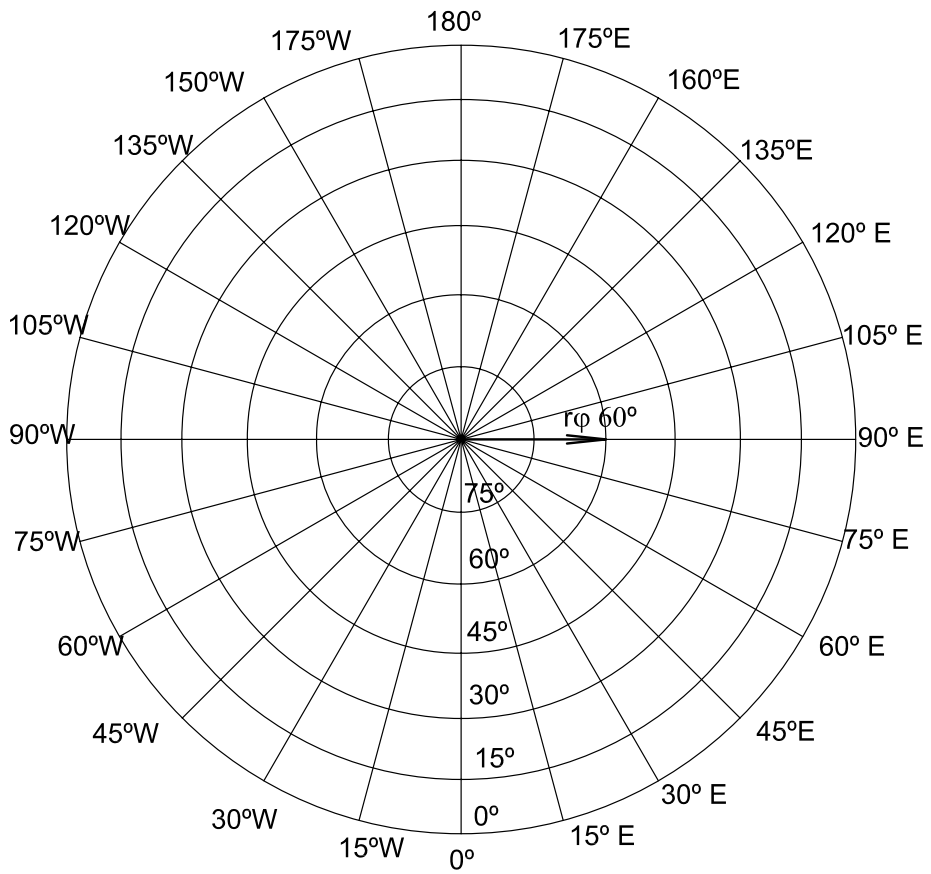
$$(r_\delta)^2 = 2R^2 2\operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{2}$$

$$r_\delta = \sqrt{4R^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{2}} = 2R \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}. \quad (3.46)$$

En función de  $\varphi$ :

$$r_\varphi = 2R \operatorname{sen} \left( 45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (3.47)$$

En la Tabla 3.5 aparecen los valores del radio de la proyección del paralelo para valores de la latitud cada  $15^\circ$ . Para dibujar los paralelos se hace centro en  $PN$  con el compás y tomando el radio  $r_\varphi$  correspondiente a cada paralelo, en escala, se trazan los mismos. Para dibujar los meridianos se hace centro con el transportador de ángulos en  $PN$  y, en forma radial,



**Figura 3.61:** *Proyección acimutal equivalente polar.*

se miden ángulos iguales a la longitud geográfica elegida (cada 15° en la Figura 3.61).

Esta proyección presenta dos casos: el centro de la proyección en el Polo Norte y el centro de la proyección en el Polo Sur.

$\varphi$	$r_\varphi [km]$
90°	0,00
75°	1.662,90
60°	3.297,35
45°	4.875,39
30°	6.370,00
15°	7.755,62
0°	9.008,54

**Tabla 3.5:** PROYECCIÓN ACIMUTAL EQUIVALENTE POLAR.

#### Nota

De la expresión 3.46, se sabe que:  $r_\delta = 2R \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}$ .

Se deduce del triángulo  $PN A PS$  (Figura 3.62) que:  $PN A = 2R \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}$  y, por lo tanto  $r_\delta = PN A$ .

Las coordenadas cartesianas son (Figura 3.63):

$$X = r_\varphi \operatorname{sen} \Delta\lambda$$

$$Y = r_\varphi \operatorname{cos} \Delta\lambda$$

o bien

$$X = r_\delta \operatorname{sen} \Delta\lambda$$

$$Y = r_\delta \operatorname{cos} \Delta\lambda$$

### 3.14.2 Características y propiedades

Los paralelos se proyectan según circunferencias concéntricas que se van acercando levemente entre sí desde el Polo al Ecuador. La longitud de cada paralelo es incorrecta, mayor que la real, calculándose su deformación con

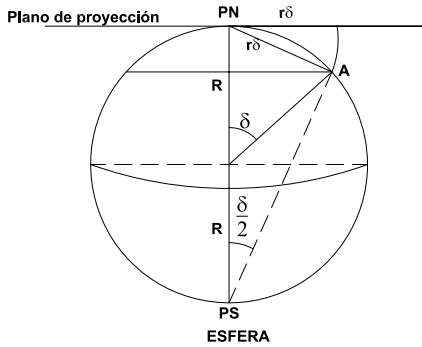


Figura 3.62: En la esfera.

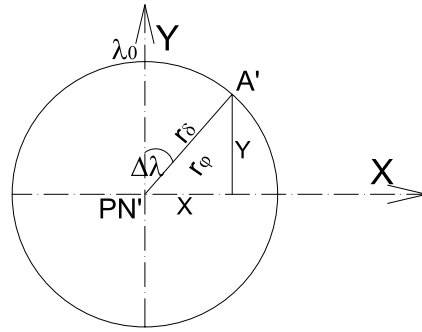


Figura 3.63: En la proyección.

el modulo de alteración lineal  $k$ .

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}} = \frac{2\pi r\varphi}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{r\varphi}{R \cos \varphi}$$

que, en función de la colatitud  $\delta$ , se expresa como:

$$k = \frac{2R \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}}{R \operatorname{sen} \delta} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}} = \sec \frac{\delta}{2}$$

o sea:  $k = \sec \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$ .

Los meridianos se proyectan según rectas radiales de longitudes incorrectas menores que las reales; se calcula su deformación con el módulo de alteración lineal  $h$ :

$$h = \frac{dm'}{dm}$$

siendo  $dm$  el arco infinitesimal de meridiano y  $dm'$  la proyección de  $dm$  (Figura 3.64).

$$dm = R d\varphi = R d\delta$$

y

$$dm' = dr_\varphi = d \left[ 2R \operatorname{sen} \frac{90^\circ - \varphi}{2} \right] = d \left[ 2R \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \right] = R \cos \frac{\delta}{2} d\delta.$$

$$\text{Entonces } h = \frac{R \cos \frac{\delta}{2} d\delta}{R d\delta} = \cos \frac{\delta}{2} = \cos(90^\circ - \varphi).$$

Como  $k = N_1$  y  $h = N_2$ , resulta  $N_1 N_2 = 1$ , por lo que la proyección es equivalente. Como  $N_1 \neq N_2$ , esta proyección no es isógona.

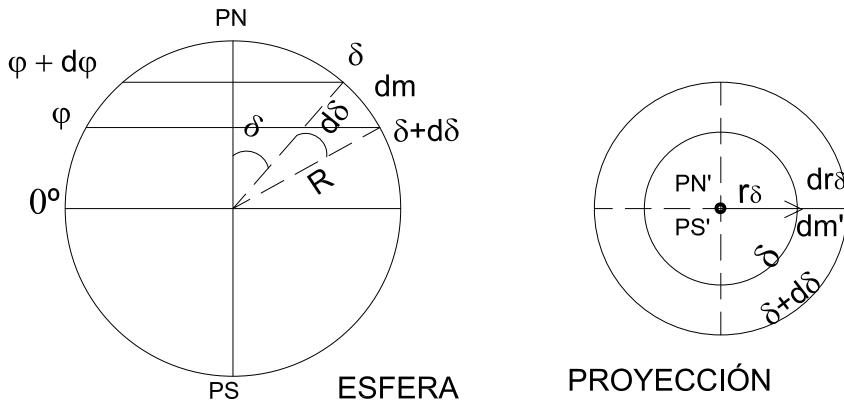


Figura 3.64: Cálculo del módulo de alteración lineal  $h$ .

En un punto cualquiera de la proyección, la deformación angular máxima se calcula con la expresión :

$$\delta_{\max} = 2 \arcsen \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

### Ejemplo

Considérese la ciudad de Santa fe (Argentina), ubicada en la latitud  $\varphi = 31^{\circ}38' S$ .

$$k = \frac{2 \operatorname{sen}(45^{\circ} + \frac{31^{\circ}38'}{2})}{\cos(-31^{\circ}38')} = 2,0515564$$

$$h = \cos \frac{-90^{\circ} - (-31^{\circ}38')}{2} = 0,873,$$

$$\delta_{\max} = 2 \arcsen \frac{1,145391465 - 0,873063952}{1,145391465 + 0,873063952} = 15^{\circ}30'28''$$

### 3.14.3 Usos(Figura 3.65)

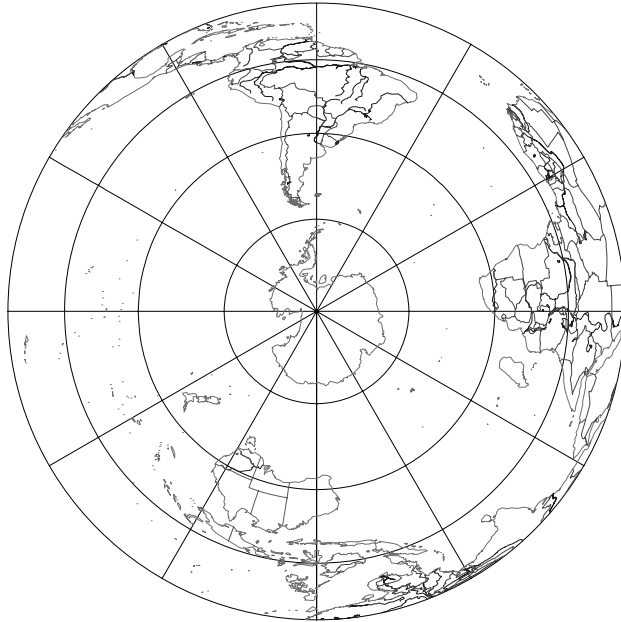
Como toda proyección equivalente, se presta para mapas políticos y con fines estadísticos. Existen fórmulas para el elipsoide (caso polar).

## 3.15 Proyección acimutal equivalente ecuatorial

### 3.15.1 Dibujo (Figura 3.70)

El dibujo se realiza mediante el cálculo de los valores de las coordenadas  $X$  e  $Y$  , cuyas fórmulas se deducen a continuación.

En esta proyección la condición de equivalencia se traduce en que el área de un casquete esférico de base  $A_1A_2$  y altura  $h$  (Figura 3.66) es



**Figura 3.65:** Proyección acimutal equivalente polar.

igual al área de un círculo cuyo centro es el centro de la proyección (el punto  $O'$  de tangencia del plano de proyección es un punto del Ecuador) (Figura 3.67).

En la Figura 3.66, el área del casquete esférico es  $2\pi Rh$ , y en la Figura 3.67, el área del círculo equivalente es  $\pi r_A^2$ , por lo tanto:

$$\pi r_A^2 = 2\pi Rh$$

$$r_A^2 = 2Rh$$

Además:

$$h = R - R \cos \sigma = R(1 - \cos \sigma).$$

Entonces:

$$r_A^2 = 2R^2(1 - \cos \sigma) \therefore r_A = R\sqrt{2(1 - \cos \sigma)}.$$

Por identidades trigonométricas se sabe que:  $1 - \cos \sigma = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma}{2}$ , por lo tanto:

$$r_A = 2R \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \tag{3.48}$$





$r_A$  y  $90^\circ - \omega$  son las coordenadas polares del punto  $A$ . Para hallar las coordenadas rectangulares (Figura 3.69), se suponen los ejes  $X$  e  $Y$  en el plano de proyección tangente en  $O'$  (centro de la proyección). Como:

$$X = r_A \operatorname{sen}(90^\circ - \omega)$$

$$Y = r_A \operatorname{cos}(90^\circ - \omega),$$

resulta:

$$X = 2R \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen}(90^\circ - \omega) \quad (3.51)$$

$$Y = 2R \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \operatorname{cos}(90^\circ - \omega) \quad (3.52)$$

Las fórmulas 3.51 y 3.52 permiten calcular las coordenadas de cualquier punto y dibujar el canevas con paralelos y meridianos, con el meridiano central que se desee.

En la Tabla 3.6 (Tabla de la proyección acimutal equivalente ecuatorial) se consignan los valores de  $X$  e  $Y$  con un intervalo de  $15^\circ$  entre paralelos y entre meridianos. Por ejemplo, para el punto  $A'$  ( $\varphi = 45^\circ$  y  $\lambda = 30^\circ$ ), siendo  $\lambda_0 = 0^\circ$  (meridiano central) y aplicando la fórmula 3.49, se tiene:

$$\operatorname{cos} \sigma = \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} \Delta \lambda$$

$$\operatorname{cos} \sigma = \operatorname{cos} 45^\circ \operatorname{cos} 30^\circ = 0,612372435.$$

Por lo tanto:

$$\sigma = 52^\circ 14' 20''.$$

Aplicando ahora la fórmula 3.48, resulta:

$$r_A = 2 \times 6\,370\,km \operatorname{sen} 26^\circ 07' 10'' = 5\,608,707\,km.$$

Por la fórmula 3.50 puede calcularse:

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \omega) = \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda = \operatorname{cotg} 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = 0,5.$$

Entonces

$$(90^\circ - \omega) = 26^\circ 33' 54''.$$

También con las fórmulas 3.51 y 3.52 pueden calcularse las coordenadas rectangulares del punto:

$$X = 2R \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \operatorname{sen}(90^\circ - \omega) = 2 \times 6\,370\,km \operatorname{sen} 26^\circ 07' 10'' \operatorname{sen} 26^\circ 33' 54'' = 2\,508,286\,km.$$

$\varphi$	$\lambda = 0^\circ$		$\lambda = 15^\circ$		$\lambda = 30^\circ$		$\lambda = 45^\circ$		$\lambda = 60^\circ$		$\lambda = 75^\circ$		$\lambda = 90^\circ$	
	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$
$0^\circ$	0	0	1663	0	3297	0	4876	0	6370	0	7755	0	9008	0
$15^\circ$	0	1663	1620	1677	3210	1721	4742	1797	6188	1915	7518	2086	8701	2331
$30^\circ$	0	3297	1490	3324	2949	3405	4344	3547	5643	3763	6811	4071	7801	4504
$45^\circ$	0	4876	1217	4910	2509	5016	3677	5201	4742	5475	5657	5857	6370	6370
$60^\circ$	0	6370	957	6406	1881	6517	2737	6706	3489	6978	4093	7341	4504	7801
$75^\circ$	0	7755	540	7783	1054	7864	1516	8000	1900	8187	2180	8424	2331	8701
$90^\circ$	0	9008	0	9008	0	9008	0	9008	0	9008	0	9008	0	9008

**Tabla 3.6:** PROYECCIÓN ACIMUTAL EQUIVALENTE ECUATORIAL.

$$Y = 2R \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \cos(90^\circ - \omega) = 2 \times 6370 \text{ km} \operatorname{sen} 26^\circ 07' 10'' \cos 26^\circ 33' 54'' = 5016,583 \text{ km}.$$

El contorno es una circunferencia de radio  $R\sqrt{2} = 9008 \text{ km}$ , pues  $r_A^2 = 2R \times R = 2R^2$ .

El dibujo de la proyección (Figura 3.70) se hace mediante las coordenadas planas polares ( $r_\varphi$  y  $\lambda$ ) o cartesianas  $X$  e  $Y$ , como recién se ha visto, o bien utilizando las coordenadas planas del caso polar ficticio (o transversal) ( $r_{\varphi_T}$  y  $\lambda_T$ ) o ( $X$  e  $Y$ ), como se describe a continuación.

En el triángulo esférico  $PN A PN_T$  (Figura 3.71) se tiene que:

$$\cos(90^\circ - \varphi_T) = \cos(90^\circ - \varphi) \cos 90^\circ + \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi) \operatorname{sen} 90^\circ \cos \Delta\lambda$$

$$\operatorname{sen} \varphi_T = \cos \varphi \cos \Delta\lambda.$$

De esta expresión se obtiene el valor de  $\varphi_T$  y, por lo tanto, de  $\delta_T$ . Además:

$$\frac{\operatorname{sen} \Delta\lambda_T}{\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi)} = \frac{\operatorname{sen} \Delta\lambda}{\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_T)} \text{ y } \operatorname{sen} \Delta\lambda_T = \frac{\cos \varphi \operatorname{sen} \Delta\lambda}{\cos \varphi_T}$$

De aquí se obtiene  $\Delta\lambda_T$ . Entonces:

$$\text{Coordenadas polares} \begin{cases} r_{\delta_T} = 2R \operatorname{sen} \frac{\delta_T}{2} \\ \Delta\lambda_T \end{cases}$$

$$\text{Coordenadas cartesianas} \begin{cases} X = r_{\varphi_T} \operatorname{sen} \Delta\lambda_T \\ X = r_{\varphi_T} \cos \Delta\lambda_T \end{cases}$$

### Ejemplo

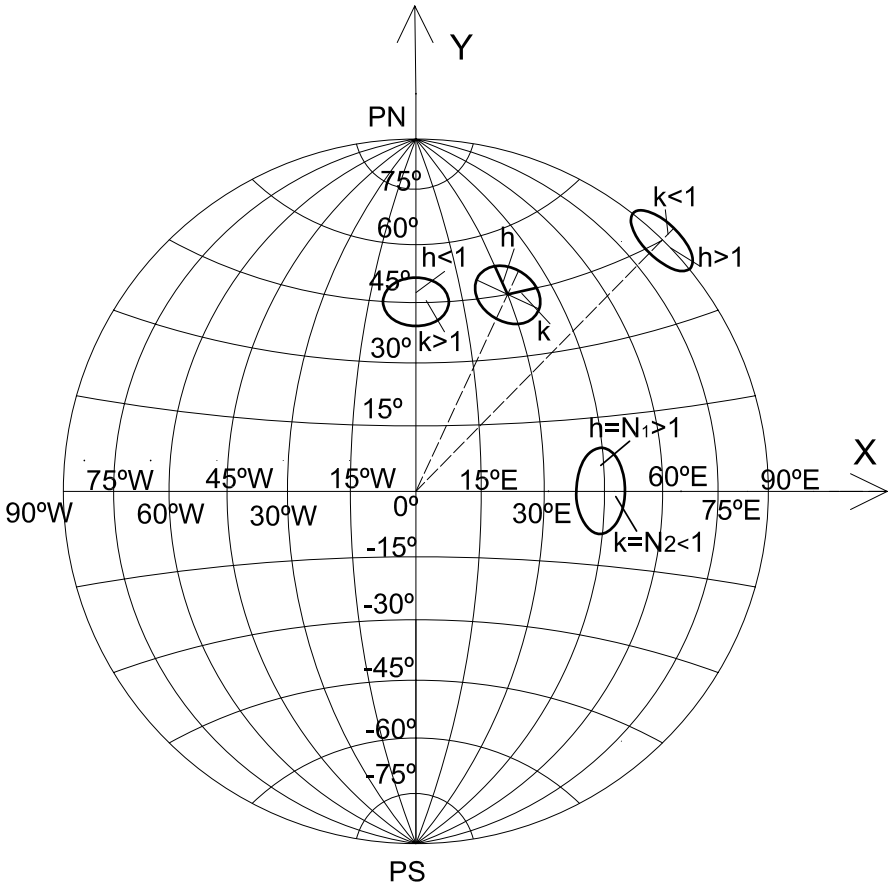
Sea el punto  $A(45^\circ, 30^\circ)$ . Se considera el Polo Norte ficticio en  $PN_T(0^\circ, 0^\circ)$ .

Empleando las coordenadas transversas:

$$\operatorname{sen} \varphi_T = \cos 45^\circ \cos 30^\circ \Rightarrow \varphi_T = 37^\circ 45' 40'' \Rightarrow \delta_T = 52^\circ 14' 20''.$$

Si se utilizan las fórmulas para las coordenadas de la proyección acimutal equivalente oblicua (Fórmulas 3.58 y 3.59) al final de este capítulo, para el caso ecuatorial, en el que  $\varphi_0 = 0^\circ$ , se tiene:

$$\begin{aligned} X &= R\sqrt{2(1 - \cos \varphi \cos \Delta\lambda)} \operatorname{sen} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{sen} \Delta\lambda}{\operatorname{tg} \varphi} \right\}. \\ Y &= R\sqrt{2(1 - \cos \varphi \cos \Delta\lambda)} \cos \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{sen} \Delta\lambda}{\operatorname{tg} \varphi} \right\}. \end{aligned}$$



**Figura 3.70:** *Proyección acimutal equivalente ecuatorial.*

Para el punto  $A(45^\circ, 30^\circ)$ :

$$X = 6\,370\text{km} \sqrt{2(1 - \cos 45^\circ \cos 30^\circ)} \operatorname{sen} \left\{ \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ} \right\} = 2\,508,284\text{km}$$

$$Y = 6\,370\text{km} \sqrt{2(1 - \cos 45^\circ \cos 30^\circ)} \operatorname{cos} \left\{ \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ} \right\} = 5\,016,569\text{km}$$

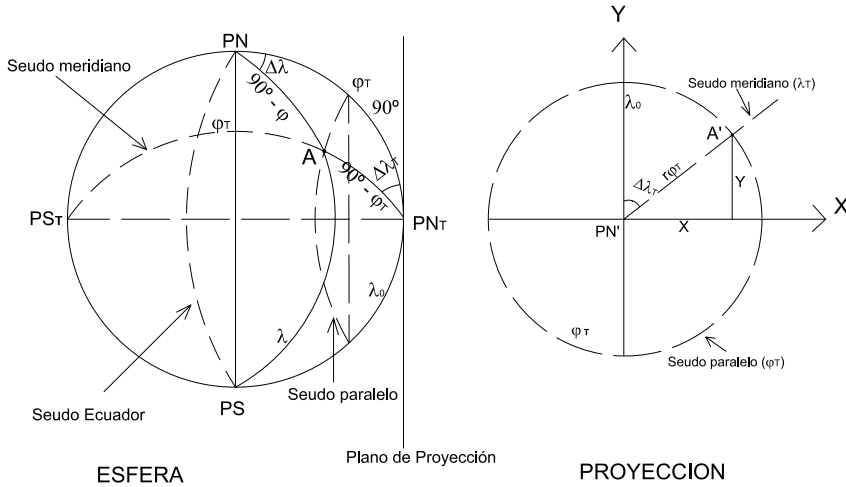


Figura 3.71: Cálculo de coordenadas planas. Caso polar ficticio.

### 3.15.2 Módulos de alteración lineal máximo y mínimo

$$N_1 = k_T = \frac{2\pi r \delta_T}{2\pi R \operatorname{sen} \delta_T} = \frac{2R \operatorname{sen} \frac{\delta_T}{2}}{R \operatorname{sen} \delta_T} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\delta_T}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\delta_T}{2} \operatorname{cos} \frac{\delta_T}{2}} = \frac{1}{\operatorname{cos} \frac{\delta_T}{2}}$$

$$N_2 = h_T = \operatorname{cos} \frac{\delta_T}{2}$$

Para el punto  $A$  del ejemplo anterior:

$$N_1 = k_T = \frac{1}{\operatorname{cos} \frac{52^\circ 14' 20''}{2}} = 1,113736782;$$

$$N_2 = h_T = \operatorname{cos} \frac{52^\circ 14' 20''}{2} = 0,89787822.$$

### 3.15.3 Módulo de alteración superficial o areal

$$\mu = N_1 N_2 = 1$$

### 3.15.4 Error máximo angular

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

Para el punto  $A(45^\circ, 30^\circ)$ :

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1,114 - 0,898}{1,114 + 0,898} = 12^\circ 19' 33''.$$

### 3.15.5 Características y propiedades(Figura 3.72)



**Figura 3.72:** *Proyección acimutal equivalente ecuatorial.*

El meridiano central es el único que se proyecta según una recta. Su longitud es incorrecta menor que la real (Ver Tabla 3.6).

Los dos meridianos cuyas longitudes geográficas difieren en  $90^\circ$  al este y oeste del meridiano central se proyectan según dos semicircunferencias opuestas de longitudes incorrectas mayores que las reales, calculándose su deformación con el módulo de alteración lineal  $h$ . Los demás meridianos

se proyectan según curvas trascendentes que se van acercando entre sí al ir del meridiano central hacia el este o el oeste.

El Ecuador se proyecta según una recta, y la deformación en cada punto estará dada por el módulo de alteración lineal  $k$  que coincide con  $N_2$  (semieje menor de la elipse indicatriz de Tissot). Los demás paralelos son curvas trascendentes que cortan al meridiano central en partes que se van acortando levemente del Ecuador al Polo, calculándose la deformación con el módulo de alteración lineal  $k$ .

Esta proyección no es isógona pues, como se verá,  $h \neq k$ . Es equivalente pues  $hk \operatorname{sen} \alpha' = 1$  (o bien  $N_1 N_2 = 1$ ).

### 3.15.6 Módulos de alteración lineal $h$ y $k$

Un procedimiento para calcular los módulos de alteración lineal se basa en el teorema de Nicolosi, el que permite asegurar que

$$N_1^2 + N_2^2 = h^2 + k^2 \quad (3.53)$$

$$N_1 N_2 = hk \operatorname{sen} \alpha' \quad (3.54)$$

siendo  $\alpha'$  el ángulo de intersección entre paralelos y meridianos en la proyección. Este ángulo se puede calcular por medio de alguna de las expresiones siguientes:

$$\alpha' = \theta_p - \theta_m \text{ o bien } \cos \alpha' = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Otro camino para calcular los módulos de alteración lineal es utilizar las expresiones:

$$h = \frac{\sqrt{E}}{R} \text{ y } k = \frac{\sqrt{G}}{R \cos \varphi}$$

#### Ejercicio

Calcular los módulos de alteración lineal para el punto  $A(45^\circ, 30^\circ)$ , considerando el Polo Norte ficticio en  $(0^\circ, 0^\circ)$ .

### 3.15.7 Usos

Como toda proyección equivalente, se presta para mapas con fines estadísticos, también para mapas políticos porque une a la ventaja de ser equivalente el hecho de que deforma poco.

### 3.16 Proyección acimutal equivalente oblicua

#### 3.16.1 Dibujo (Ver Figura 3.77)

El dibujo se realiza mediante el cálculo de las coordenadas  $X$  e  $Y$ , con respecto a un sistema de ejes cuyo origen es el centro de la proyección, coincidiendo el eje  $Y$  con el meridiano central.

En esta proyección la condición de equivalencia se traduce en que el área de un casquete esférico cualquiera es igual al área de un círculo cuyo centro es el centro de la proyección (el punto de tangencia del plano de proyección  $O'(\varphi_0; \lambda_0)$ , Figura 3.73).

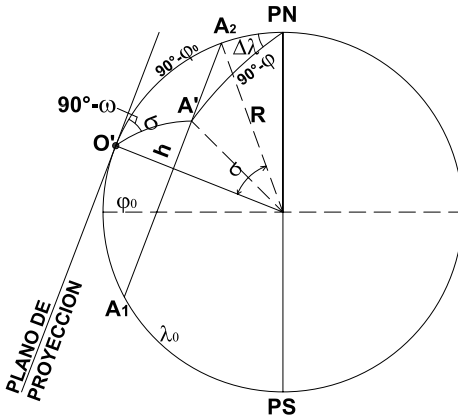


Figura 3.73: En la esfera.

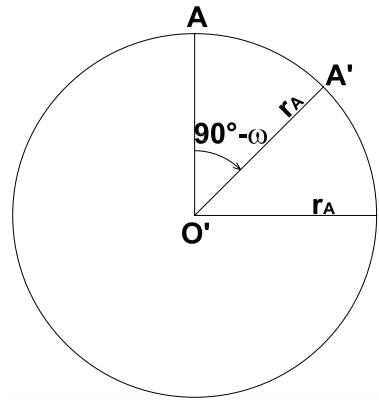


Figura 3.74: En la proyección.

En la Figura 3.73, el área del casquete esférico  $A_1O'A_2$  es  $2\pi Rh$ , y en la Figura 3.74, el área del círculo que es su proyección es  $\pi r_A^2$ , por lo tanto:

$$r_A^2 = 2Rh.$$

Además:

$$h = R - R\cos\sigma = R(1 - \cos\sigma).$$

Entonces:

$$r_A^2 = 2R^2(1 - \cos\sigma) \therefore r_A = R\sqrt{2(1 - \cos\sigma)}$$

Por identidades trigonométricas se sabe que:  $1 - \cos\sigma = 2\sin^2\frac{\sigma}{2}$ , por lo



tanto:

$$r_A = 2R \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \quad (3.55)$$

En la Figura 3.73:

$$\cos \sigma = \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta\lambda \quad (3.56)$$

donde  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ . Conociendo el valor de  $\sigma$ , se puede calcular  $r_A$  a través de la fórmula 3.55.

Para calcular el azimut  $90^\circ - \omega$  (Figura 3.75):

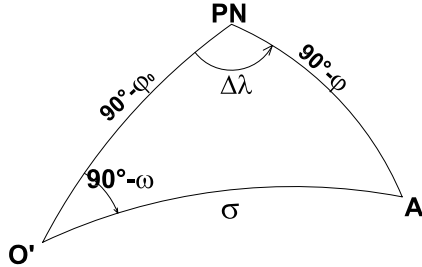


Figura 3.75: Triángulo esférico  $PN O' A$ .

$$\operatorname{tg} \varphi \cos \varphi_0 = \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \Delta\lambda + \operatorname{sen} \Delta\lambda \operatorname{cotg}(90^\circ - \omega)$$

de donde:

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \omega) = \frac{\operatorname{sen} \Delta\lambda}{\operatorname{tg} \varphi \cos \varphi_0 - \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \Delta\lambda} \quad (3.57)$$

Para pasar de las coordenadas polares  $(r_A; 90^\circ - \omega)$  a las coordenadas cartesianas (Figura 3.76), se considera un sistema de ejes  $X$  e  $Y$  en el plano de proyección con origen en  $O'$ . Como:

$$\begin{aligned} X &= r_A \operatorname{sen}(90^\circ - \omega) \\ Y &= r_A \cos(90^\circ - \omega), \end{aligned}$$

resulta:

$$X = R\sqrt{2(1 - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_0 - \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda)} \operatorname{sen} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{sen} \Delta\lambda}{\cos \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \Delta\lambda} \right\} \quad (3.58)$$

$$Y = R\sqrt{2(1 - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_0 - \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda)} \cos \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{sen} \Delta\lambda}{\cos \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \Delta\lambda} \right\} \quad (3.59)$$

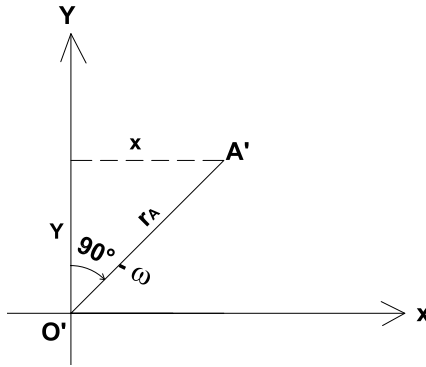


Figura 3.76: Coordenadas planas.

Para cada par  $(\varphi, \lambda)$  se calculan las coordenadas polares; a partir de ellas se pueden calcular las coordenadas cartesianas con las fórmulas 3.58 y 3.59 y así dibujar el canevas de la proyección.

Por ejemplo, para calcular las coordenadas  $X$  e  $Y$  del punto  $P(\varphi = 60^\circ, \lambda = 45^\circ)$ :

$$\cos \sigma = \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda$$

$$\cos \sigma = \sin 40^\circ \sin 60^\circ + \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 45^\circ = 0,827508009$$

Por lo tanto:  $\sigma = 39^\circ 09' 23,06''$ .

Aplicando ahora la fórmula 3.55, resulta:

$$r_A = 2 \times 6\,370\text{km} \sin 19^\circ 34' 41,53'' = 3\,741,439\text{km};$$

Por la fórmula 3.57 puede calcularse:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(90^\circ - \omega) &= \frac{\sin \Delta \lambda}{\operatorname{tg} \varphi \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 \cos \Delta \lambda} \\ &= \frac{\sin 45^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ \cos 40^\circ - \sin 40^\circ \cos 45^\circ} = 0,8106155644. \end{aligned}$$

Entonces

$$(90^\circ - \omega) = 39^\circ 01' 44''.$$

Las coordenadas rectangulares del punto son:

$$X = r_A \sin(90^\circ - \omega) = 3\,741,439\text{km} \sin 39^\circ 01' 44'' = 2\,356,030\text{km}$$

$$Y = r_A \cos(90^\circ - \omega) = 3\,741,439\text{km} \cos 39^\circ 01' 44'' = 2\,906,457\text{km}$$

En la Tabla 3.9, **Tabla de coordenadas cartesianas** para  $\varphi_0 = 40^\circ$ , se consignan los valores, en kilómetros, de las coordenadas  $X$  e  $Y$  cada  $15^\circ$ .

El hemisferio, teniendo como centro el centro de la proyección, está representado por una circunferencia de radio  $R\sqrt{2} = 6\,370\text{km}\sqrt{2} = 9\,008,54\text{km}$ . Este valor resulta de igualar el área de un hemisferio con el área de un círculo:  $2\pi R^2 = \pi r^2$ ; de aquí se obtiene que  $r = R\sqrt{2}$ .

Para completar el canevas se pueden calcular las coordenadas de los puntos donde los meridianos y los paralelos cortan a la circunferencia de contorno. Para eso basta, en las fórmulas que dan las coordenadas polares  $\sigma$  y  $(90^\circ - \omega)$ , hacer  $\sigma = \frac{\pi}{2}$  y eliminar alternativamente  $\lambda$  y  $\varphi$ . Se tendrá así:

- Para los puntos de intersección de los paralelos con el contorno:

$$\begin{aligned}\cos 90^\circ &= \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta\lambda \\ -\sin \varphi_0 \sin \varphi &= \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta\lambda \\ -\operatorname{tg} \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi &= \cos \Delta\lambda \\ \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \operatorname{tg}^2 \varphi &= \cos^2 \Delta\lambda = 1 - \sin^2 \Delta\lambda \\ \sin^2 \Delta\lambda &= 1 - \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \operatorname{tg}^2 \varphi.\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \omega) &= \frac{\sin \Delta\lambda \cos \varphi}{\sin 90^\circ} \\ \sin^2(90^\circ - \omega) &= \sin^2 \Delta\lambda \cos^2 \varphi \\ \sin^2(90^\circ - \omega) &= \cos^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi\end{aligned}\tag{3.60}$$

Reemplazando luego en las ecuaciones 3.58 y 3.59, se obtienen los valores de  $X$  e  $Y$ :

$$\begin{aligned}X &= R\sqrt{2}\sin(90^\circ - \omega) \\ Y &= R\sqrt{2}\cos(90^\circ - \omega)\end{aligned}\tag{3.61}$$

En la Tabla 3.7, **Tabla Intersección de los paralelos con el contorno**, se consignan los valores, en kilómetros, de las coordenadas  $X$  e  $Y$  con intervalos de  $15^\circ$ , de los puntos de intersección.

- Para los puntos de intersección de los meridianos con la circunferencia de contorno:

$$\begin{aligned}
 1 &= \text{sen } \varphi_0 \text{ sen } \varphi + \text{cos } \varphi_0 \text{ cos } \varphi \text{ cos } \Delta\lambda \\
 \text{sen}^2 \varphi_0 \text{ sen}^2 \varphi &= \text{cos}^2 \varphi_0 \text{ cos}^2 \varphi \text{ cos}^2 \Delta\lambda \\
 \text{sen}^2 \varphi_0 (1 - \text{cos}^2 \varphi) &= \text{cos}^2 \varphi_0 \text{ cos}^2 \varphi \text{ cos}^2 \Delta\lambda \\
 \text{sen}^2 \varphi_0 &= \text{cos}^2 \varphi_0 \text{ cos}^2 \varphi \text{ cos}^2 \Delta\lambda + \text{sen}^2 \varphi_0 \text{ cos}^2 \varphi \\
 \text{sen}^2 \varphi_0 &= \text{cos}^2 \varphi (\text{cos}^2 \varphi_0 \text{ cos}^2 \Delta\lambda + \text{sen}^2 \varphi_0) \\
 \text{cos}^2 \varphi &= \frac{\text{sen}^2 \varphi_0}{\text{cos}^2 \varphi_0 \text{ cos}^2 \Delta\lambda + \text{sen}^2 \varphi_0}
 \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
 \text{sen}(90^\circ - \omega) &= \text{sen } \Delta\lambda \text{ cos } \varphi \\
 \text{sen}^2(90^\circ - \omega) &= \text{sen}^2 \Delta\lambda \text{ cos}^2 \varphi
 \end{aligned}$$

$\varphi$	$X(km)$	$Y(km)$
- 45°	3465	-8315
- 30°	6825	-5880
- 15°	8478	-3044
0°	9008	0
15°	8478	3044
30°	6825	5880
45°	3465	8315

**Tabla 3.7:** *Tabla de intersección de los paralelos con el contorno.*

$$\begin{aligned}
 \text{sen}^2(90^\circ - \omega) &= \frac{\text{sen}^2 \Delta\lambda \text{ sen}^2 \varphi_0}{\text{cos}^2 \varphi_0 \text{ cos}^2 \Delta\lambda + \text{sen}^2 \varphi_0} = \frac{\text{sen}^2 \Delta\lambda \text{ sen}^2 \varphi_0}{\text{cos}^2 \varphi_0 \text{ cos}^2 \Delta\lambda + 1 - \text{cos}^2 \varphi_0} \\
 \text{sen}^2(90^\circ - \omega) &= \frac{\text{sen}^2 \Delta\lambda \text{ sen}^2 \varphi_0}{1 - \text{cos}^2 \varphi_0 (1 - \text{cos}^2 \Delta\lambda)} = \frac{\text{sen}^2 \Delta\lambda \text{ sen}^2 \varphi_0}{1 - \text{cos}^2 \varphi_0 \text{ sen}^2 \Delta\lambda} \\
 \text{sen}^2(90^\circ - \omega) &= \frac{\text{sen}^2 \Delta\lambda \text{ sen}^2 \varphi_0}{1 - \text{cos}^2 \varphi_0 \text{ sen}^2 \Delta\lambda} \quad (3.62)
 \end{aligned}$$

Utilizando luego las ecuaciones 3.61 se obtienen los valores de  $X$  y de  $Y$ .

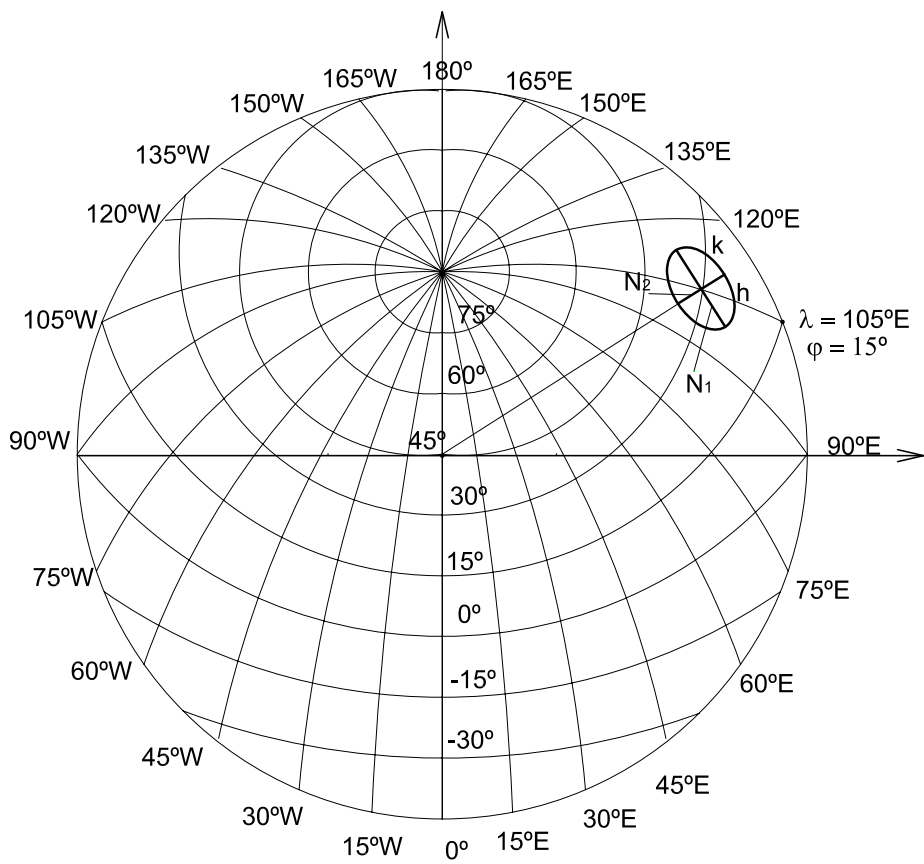


Figura 3.77: Proyección acimutal equivalente oblicua.

En la Tabla 3.8, Tabla de Intersección de los meridianos con el contorno, se consignan los valores en kilómetros de las coordenadas  $X$  e  $Y$  con intervalos de  $15^\circ$ , de los puntos de intersección. Por ejemplo, para hallar las coordenadas del punto de intersección del paralelo  $\varphi = 15^\circ$  con el contorno, se utiliza la ecuación 3.60 para calcular  $(90^\circ - \omega)$ .

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2(90^\circ - \omega) &= \cos^2 15^\circ - \operatorname{tg}^2 40^\circ \operatorname{sen}^2 15^\circ = 0,885847736 \\ (90^\circ - \omega) &= 70^\circ 15' 12''.\end{aligned}$$

Luego, a partir de las fórmulas 3.61:

$$\begin{aligned}X &= 6\,370\text{km}\sqrt{2}\operatorname{sen}70^\circ 15' 12'' = 8\,478\text{km}, \\ Y &= 6\,370\text{km}\sqrt{2}\cos70^\circ 15' 12'' = 3\,044\text{km}.\end{aligned}$$

Para hallar las coordenadas del punto de intersección del meridiano de longitud  $\lambda = 135^\circ$  con el contorno se utiliza la fórmula 3.62 para calcular  $(90^\circ - \omega)$ :

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2(90^\circ - \omega) &= \frac{\operatorname{sen}^2 135^\circ \operatorname{sen}^2 40^\circ}{1 - \cos^2 40^\circ \operatorname{sen}^2 135^\circ} = 0,292374012 \\ (90^\circ - \omega) &= 32^\circ 43' 57''.\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}X &= 6\,370\text{km}\sqrt{2}\operatorname{sen}32^\circ 43' 57'' = 8\,478\text{km}, \\ Y &= 6\,370\text{km}\sqrt{2}\cos32^\circ 43' 57'' = 3\,044\text{km}.\end{aligned}$$

El dibujo de la proyección se hace mediante las coordenadas planas polares ( $r_\varphi$  y  $\lambda$ ), o cartesianas  $X$  e  $Y$ , o bien mediante las coordenadas planas del caso polar ficticio ( $r_{\varphi_T}$  y  $\lambda_T$ )(Figura 3.78).

En el triángulo  $PN A PN_T$  (Figura 3.78), por el teorema del coseno:

$$\cos(90^\circ - \varphi_T) = \cos(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \varphi_0) + \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi) \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_0) \cos \Delta\lambda$$

$$\operatorname{sen} \varphi_T = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \Delta\lambda$$

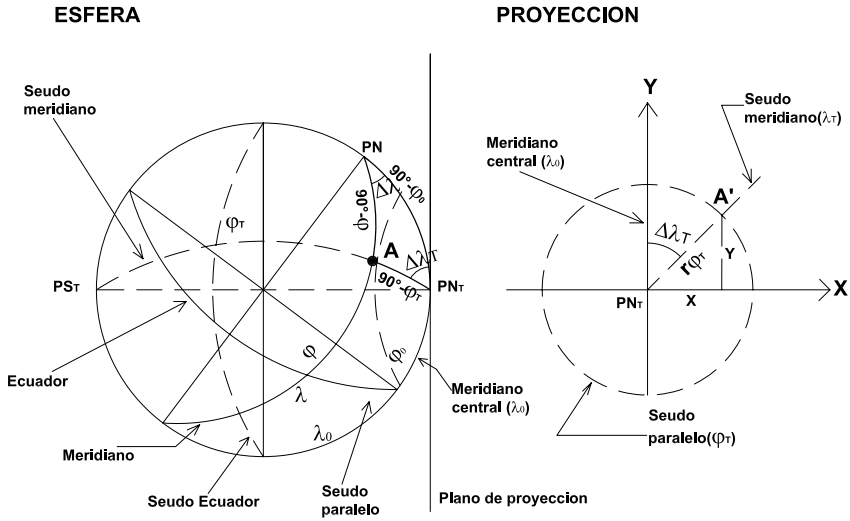


Figura 3.78: Caso polar ficticio.

De esta ecuación se obtienen los valores de  $\varphi_T$  y de  $\delta_T$ . En el mismo triángulo, por el teorema del seno:

$$\frac{\text{sen } \Delta\lambda_T}{\text{sen}(90^\circ - \varphi)} = \frac{\text{sen } \Delta\lambda}{\text{sen}(90^\circ - \varphi_T)}$$

Por lo tanto  $\text{sen } \Delta\lambda_T = \frac{\cos \varphi \text{ sen } \Delta\lambda}{\cos \varphi_T}$ . De aquí se obtiene el valor de  $\Delta\lambda_T$ . En la proyección acimutal equivalente polar (caso transversal) es

$$r_{\varphi_T} = R\sqrt{2(1 - \text{sen } \varphi_T)}$$

o bien  $r_{\delta_T} = R \text{sen } \frac{\delta_T}{2}$ , pudiendo considerarse entonces las coordenadas polares  $r_{\delta_T}$  y  $\Delta\lambda_T$ . Se tiene entonces:

$$X = r_{\delta_T} \text{sen } \Delta\lambda_T$$

$$Y = r_{\delta_T} \cos \Delta\lambda_T$$

**Ejemplo**(utilizando las coordenadas del caso polar ficticio)

Considérese  $PN_T$  el punto  $(40^\circ N, 0^\circ)$  y  $A(45^\circ N, 75^\circ E)$ . Entonces:

$$\text{sen } \varphi_T = \text{sen } 45^\circ \text{sen } 40^\circ + \cos 45^\circ \cos 40^\circ \cos 75^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi_T = 36^\circ 29' 32'' \text{ y } \delta_T = 53^\circ 30' 28''.$$

$\lambda$	$X(km)$	$Y(km)$
15°	1529	8878
30°	3134	8445
45°	4871	7578
60°	6702	6020
75°	8315	3467
90°	9008	0
105°	8315	3467
120°	6702	6020
135°	4871	7578
150°	3134	8445
165°	1529	8878

**Tabla 3.8:** *Tabla de intersección de los meridianos con el contorno.*

$$\operatorname{sen} \lambda_T = \frac{\cos 45^\circ \operatorname{sen} 75^\circ}{\cos 36^\circ 29' 32''} \Rightarrow \lambda_T = 58^\circ 09' 59''$$

$$r_{\delta_T} = 2R \operatorname{sen} \frac{\delta_T}{2} = 2 \times 6\,370\,km \frac{\operatorname{sen} 53^\circ 30' 28''}{2} = 5\,735,026\,km.$$

$$X = r_{\delta_T} \operatorname{sen} \lambda_T = 5\,735,026\,km \operatorname{sen} 58^\circ 09' 59'' = 4\,872,383\,km$$

$$Y = r_{\delta_T} \cos \lambda_T = 5\,735,026\,km \cos 58^\circ 09' 59'' = 3\,024,964\,km.$$

### 3.16.2 Características y propiedades (Figuras 3.77 y 3.79)

El meridiano central, y parte de su opuesto, es el único que se proyecta según una recta de longitud incorrecta menor que la real. Los demás meridianos se proyectan según curvas trascendentes concurrentes en el Polo, que se van acercando entre sí en forma leve al alejarse del meridiano central hacia el este o el oeste.

El Ecuador y los demás paralelos se proyectan según curvas trascendentes que cortan al meridiano central y se acercan entre sí levemente al alejarse del centro de la proyección hacia el norte o el sur. La deformación en los paralelos es variable en cada punto y su valor está dado por el módulo de alteración lineal  $k$  que puede ser mayor, igual o menor que 1.

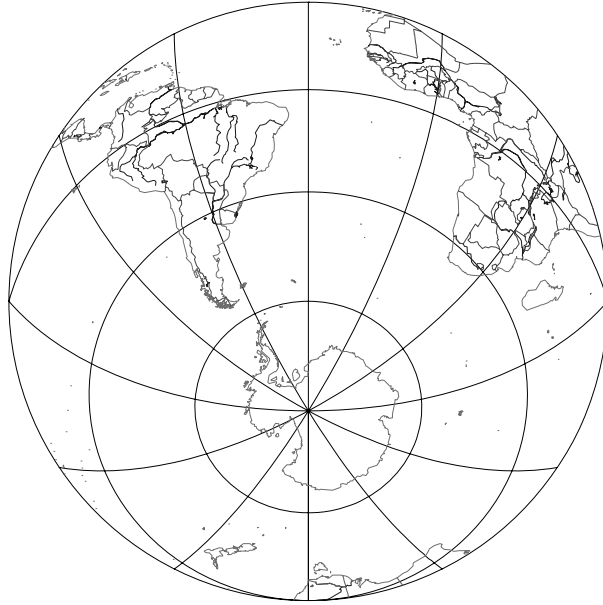
La deformación en cada punto de los meridianos se calcula con el módulo



$\varphi$	$\lambda = 0^\circ$		$\lambda = 15^\circ$		$\lambda = 30^\circ$		$\lambda = 45^\circ$		$\lambda = 60^\circ$		$\lambda = 75^\circ$		$\lambda = 90^\circ$	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
-45°	0	-8607	1595	-8546	3158	-8364	-	-	-	-	-	-	-	-
-30°	0	-7307	1758	-7221	3484	-6962	5150	-6531	6722	-5928	-	-	-	-
-15°	0	-5883	1810	-5578	3583	-5460	5283	-4929	6962	-4177	8301	-3195	-	-
0°	0	-4357	1768	-4241	3493	-3888	5130	-3298	6634	-2462	7949	-1370	9008	0
15°	0	-2758	1642	-2637	3237	-2275	4734	-1669	6080	-815	7213	293	8057	1655
30°	0	-1110	1442	-995	2833	-648	4123	-71	5255	734	6167	1762	6787	3002
40°	0	0	1270	108	2489	429	3609	961	4575	1698	5329	2628	5805	3732
45°	0	555	1172	657	2296	562	3323	1464	4200	2156	4872	3025	5282	4046
60°	0	2212	840	2291	1639	2524	2356	2906	2951	3425	3381	4062	3611	4790
75°	0	3831	448	3876	871	4009	1242	4225	1540	4511	1742	4855	1831	5236
90°	0	5384	0	5284	0	5384	0	5384	0	5384	0	5384	0	5384

$\varphi$	$\lambda = 105^\circ$		$\lambda = 120^\circ$		$\lambda = 135^\circ$		$\lambda = 150^\circ$		$\lambda = 165^\circ$		$\lambda = 180^\circ$	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
-45°	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-30°	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-15°	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0°	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
15°	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
30°	7028	4428	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
40°	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
45°	5367	5181	5071	6367	4351	7511	-	-	-	-	-	-
60°	3604	5571	3339	6353	2809	7075	2035	7665	1070	8054	0	8189
75°	1798	5630	1637	6011	1355	6349	968	6615	505	6786	0	6845
90°	0	5384	0	5384	0	5384	0	5384	0	5384	0	5384

**Tabla 3.9:** PROYECCIÓN ACIMUTAL EQUIVALENTE OBLICUA – TABLA DE COORDENADAS CARTESIANAS (en km) PARA  $\varphi_0 = 40^\circ$ .



**Figura 3.79:** Proyección acimutal equivalente oblicua,  $\lambda_0 = 30^\circ W$ .

de alteración lineal  $h$  cuyo valor se encuentra comprendido entre  $N_1$  y  $N_2$ .

### 3.16.3 Módulos de alteración lineal máximo y mínimo $N_1$ y $N_2$

$$N_1 = k_T = \frac{2\pi r_{\varphi_T}}{2\pi R \cos \varphi_T} = \frac{r_{\delta_T}}{\sin \delta_T} = \frac{2R \sin \frac{\delta_T}{2}}{2R \sin \frac{\delta_T}{2} \cos \frac{\delta_T}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{\delta_T}{2}}$$

$$N_2 = h_T = \cos \frac{\delta_T}{2}.$$

Evidentemente,  $N_1 N_2 = 1$ .

Si se calculan en el punto  $A(45^\circ N, 75^\circ E)$  del ejemplo anterior, resultará:

$$N_1 = k_T = \frac{1}{\cos \frac{53^\circ 30' 28''}{2}} = 1,1198855; \quad N_2 = h_T = \cos \frac{\delta_T}{2} = 0,8929484.$$

Los módulos de alteración lineal pueden calcularse a través de las fórmulas generales  $h = \frac{\sqrt{E}}{R}$  y  $k = \frac{\sqrt{G}}{R \cos \varphi}$ .

El ángulo  $\alpha'$  que forman en su intersección las proyecciones de paralelos y meridianos puede obtenerse a través de cualquiera de las siguientes

expresiones:

$$\operatorname{sen} \alpha' = \frac{N_1 N_2}{hk}; \quad \alpha' = \theta_p - \theta_m; \quad \cos \alpha' = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

#### 3.16.4 Error máximo angular

Está dado por la fórmula:  $\delta_{\max} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$ .

Si se calcula en el punto  $A(45^\circ N, 75^\circ E)$  será:

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1,1198855 - 0,8929484}{1,1198855 + 0,8929484} = 12^\circ 56' 50''.$$

Esta proyección no es isógona pues  $h \neq k$ , verificándose que es equivalente ya que  $hk \operatorname{sen} \alpha' = 1$ .

#### 3.16.5 Usos

Como toda proyección equivalente, es apropiada para mapas con fines estadísticos como también para mapas de regiones que no se alejen mucho del centro de la proyección para que las deformaciones sean pequeñas.



## Capítulo 4

### Proyecciones cilíndricas normales

#### 4.1 Conceptos generales

En estas proyecciones la superficie de proyección es un cilindro tangente a la superficie terrestre a lo largo del Ecuador o secante a la misma en dos paralelos ubicados simétricamente al norte y al sur del Ecuador. En ambos casos el eje de la superficie cilíndrica contiene al eje de la Tierra y los rayos de proyección parten desde el centro de la Tierra.

Una vez proyectada la superficie terrestre sobre la superficie cilíndrica se desarrolla esta última en un plano. Si bien algunas proyecciones no se obtienen por métodos proyectivos, la idea es la misma. Además, podrá observarse que todas estas proyecciones tienen un aspecto similar: tanto los meridianos como los paralelos son líneas rectas que, además, se cortan perpendicularmente. Más precisamente, los paralelos son líneas rectas paralelas entre sí dispuestas horizontalmente y los meridianos son líneas rectas paralelas entre sí dispuestas verticalmente.

Una de las proyecciones más usadas para representar planisferios es la proyección Mercator, que es una proyección cilíndrica normal tangente isógona (Figura 4.11 y 4.13). Publicada en 1569 por el matemático, geógrafo y cartógrafo Gerhard Kremer, conocido como Gerardus Mercator. Su uso muy difundido para la navegación se debe a que en ella las líneas

loxodrómicas (aquellas de acimut constante) se representan como rectas.

## 4.2 Proyección cilíndrica normal tangente pura, central o perspectiva

**Nota:** También recibe el nombre de proyección cilíndrica gnomónica.

### 4.2.1 Dibujo de la proyección

#### 1) Método gráfico (Figura 4.1)

En una primera etapa se considera una superficie cilíndrica cuyo eje contiene al eje terrestre, siendo la superficie cilíndrica tangente a la esfera terrestre a lo largo del Ecuador. Desde el centro de la superficie terrestre, donde está ubicado el punto de vista, se proyectan los paralelos y meridianos sobre dicha superficie cilíndrica.

En una segunda etapa se supone cortada la superficie cilíndrica a lo largo de la generatriz opuesta al meridiano central, desarrollándola sobre un plano.

#### 2) Método analítico (Figura 4.2) Las coordenadas cartesianas de un punto son: $X = R\lambda$ e $Y = R \operatorname{tg} \varphi$ , donde $\lambda$ está expresado en radianes. Estas ecuaciones corresponden al caso en el que el meridiano central es $\lambda_0 = 0^\circ$ . En el caso general, $X = R\Delta\lambda$ , siendo $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ .

### 4.2.2 Características y propiedades

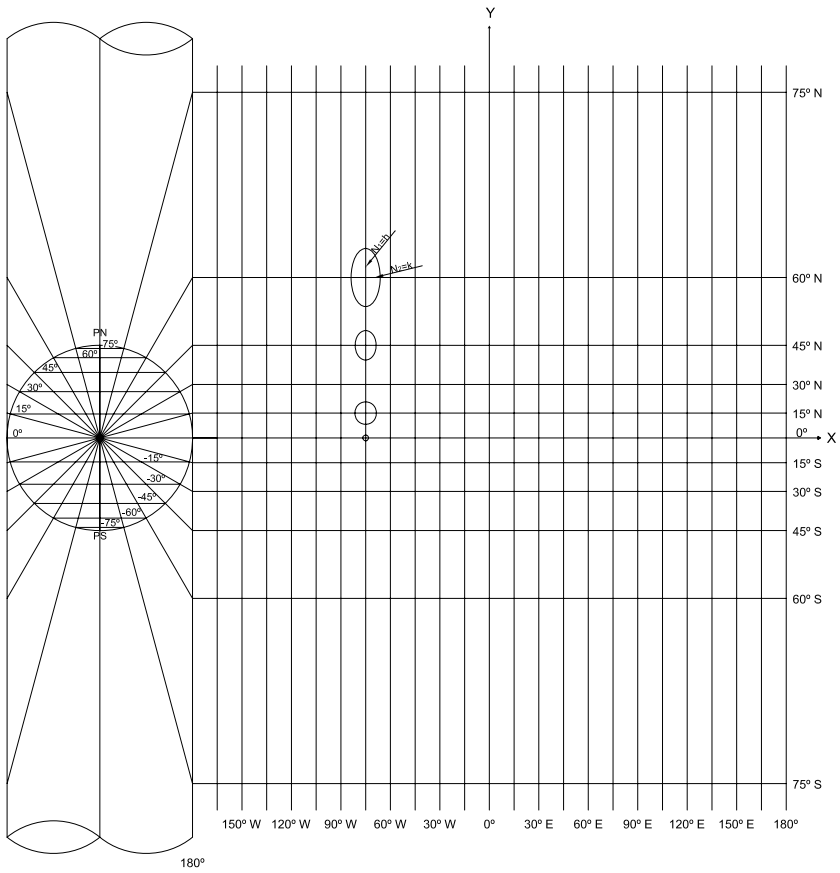
El Ecuador se proyecta según una recta de longitud correcta; los demás paralelos se proyectan según rectas paralelas al Ecuador, que se van distanciando acentuadamente entre sí al ir del Ecuador hacia los Polos. La proyección de los Polos está a una distancia infinita.

Las medidas tomadas sobre los paralelos son incorrectas y mayores que las reales; se calcula la deformación en cada uno de ellos con el módulo de alteración lineal  $k$ .

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}} = \frac{2\pi R}{2\pi R \cos \varphi} = \sec \varphi$$

#### Ejemplo

Sea  $\varphi = 60^\circ S$ ; por lo tanto  $k = \sec(-60^\circ) = 2$ . Además, se cumple que  $k = N_2$  (eje menor de la Elipse de Tissot).



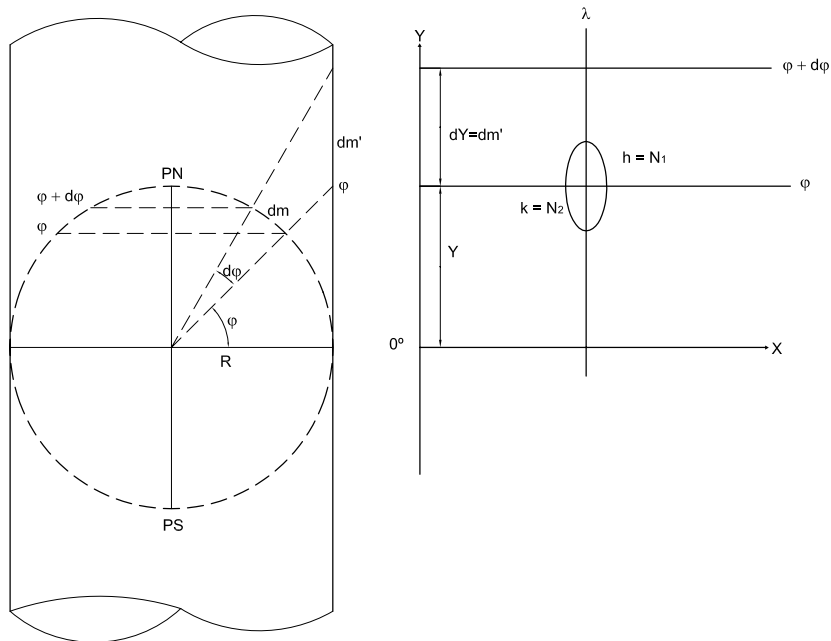
**Figura 4.1:** *Proyección cilíndrica normal tangente pura, central o perspectiva.*

Los meridianos se proyectan según rectas paralelas, perpendiculares a los paralelos y equiespaciados, de longitudes incorrectas e infinitas. La deformación en cada punto de meridiano se calcula con el módulo de alteración lineal  $h$ . Como la deformación varía en cada punto de un intervalo, debe utilizarse un arco infinitesimal.

En la Figura 4.2,  $dm$ =arco diferencial de meridiano y  $dm'$ =proyección de  $dm$ . Por lo tanto:

$$h = \frac{dm'}{dm} = \frac{dY}{Rd\varphi} = \frac{d[R\operatorname{tg}\varphi]}{Rd\varphi} = \frac{R\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi}{Rd\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi} = \sec^2\varphi = N_1$$

es el eje mayor de la Elipse de Tissot.



**Figura 4.2:** Proyección cilíndrica normal tangente pura: Cálculo de coordenadas cartesianas y módulos de alteración lineal.

### Ejemplo

Sea  $\varphi = 60^\circ S$ . Por lo tanto:  $h = \frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2(-60^\circ)} = \frac{1}{0,25} = 4$

Esta proyección no es isógona, pues  $h \neq k$  y tampoco es equivalente, pues  $N_1N_2 \neq 1$ .



### 4.2.3 Deformación angular

En un punto cualquiera de la proyección la deformación angular máxima se calcula con la expresión:

$$\delta_{\max} = 2\text{arc sen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} = 2\text{arc sen} \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

### 4.2.4 Módulo de alteración superficial

En un punto cualquiera de la proyección el módulo de alteración superficial se calcula con la fórmula:

$$\mu = N_1 N_2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos^3 \varphi}$$

#### Ejemplo

Sea  $\varphi = 60^\circ$ ,  $\delta_{\max} = 2\text{arc sen} \frac{4,0015 - 2}{4,0015 + 2} = 38^\circ 57' 46''$  y  $\mu = N_1 N_2 = 4,0015 \times 2 = 8,003$

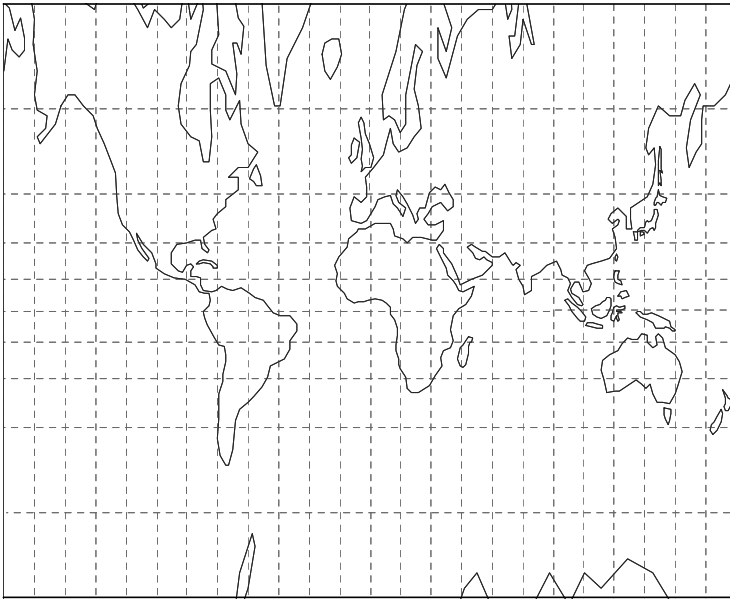


Figura 4.3: Planisferio en proyección cilíndrica normal tangente pura,  $\lambda_0 = 0^\circ$ .

### 4.2.5 Usos

Es poco utilizada, sólo para mapas de zonas ubicadas en estrechas fajas a ambos lados del Ecuador, para que así la deformación no sea importante.

### 4.2.6 Transformación inversa de la proyección

Consiste en determinar una expresión que permita calcular los valores de las coordenadas geográficas de un punto, dadas las coordenadas cartesianas del mismo en el mapa o carta, y la escala ( $E$ ) en que se ha dibujado.

Si  $X$  es la abscisa del punto medida en la carta o mapa (en centímetros),  $Y$  es la ordenada del punto medida también en el mapa y  $E$  es la escala del mapa o carta, de las ecuaciones de la carta se obtendrán las siguientes igualdades:

$$X = R\Delta\lambda E$$

$$Y = R \operatorname{tg} \varphi E$$

siendo  $X$  e  $Y$  las coordenadas del punto medidas en el mapa o carta.

De la primera de ellas es posible obtener:  $\Delta\lambda = \frac{X}{RE}$ . Como  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ , entonces  $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ . De la segunda,  $\frac{Y}{RE} = \operatorname{tg} \varphi$ ; es decir:  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Y}{RE}$ .

#### Ejemplo

En un planisferio confeccionado en la proyección cilíndrica normal tangente pura, en escala 1 : 169 000 000, con meridiano central  $\lambda_0 = 0^\circ$ , se obtienen las coordenadas  $X = -8,9\text{cm}$  e  $Y = -6,5\text{cm}$ .

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \frac{X}{RE} = \frac{-8,9\text{cm}}{6\,370\text{km} \frac{1}{169\,000\,000}} \frac{180^\circ}{\pi} \\ &= \frac{-8,9\text{cm} \times 169\,000\,000}{637\,000\,000\text{cm}} \frac{180^\circ}{\pi} = -135^\circ 17' 18'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{Y}{RE} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{-6,5\text{cm}}{6\,370\text{km} \frac{1}{169\,000\,000}} \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{-6,5\text{cm} \times 169\,000\,000}{637\,000\,000\text{cm}} = -59^\circ 53' 29'' \end{aligned}$$

## 4.3 Proyección cilíndrica normal tangente equidistante (o cuadrada)

### 4.3.1 Dibujo de la proyección (Figura 4.4)

Para dibujar esta proyección se impone la condición de que las distancias sobre los meridianos sean correctas. Por otra parte, tiene las características comunes a todas las proyecciones cilíndricas tangentes.

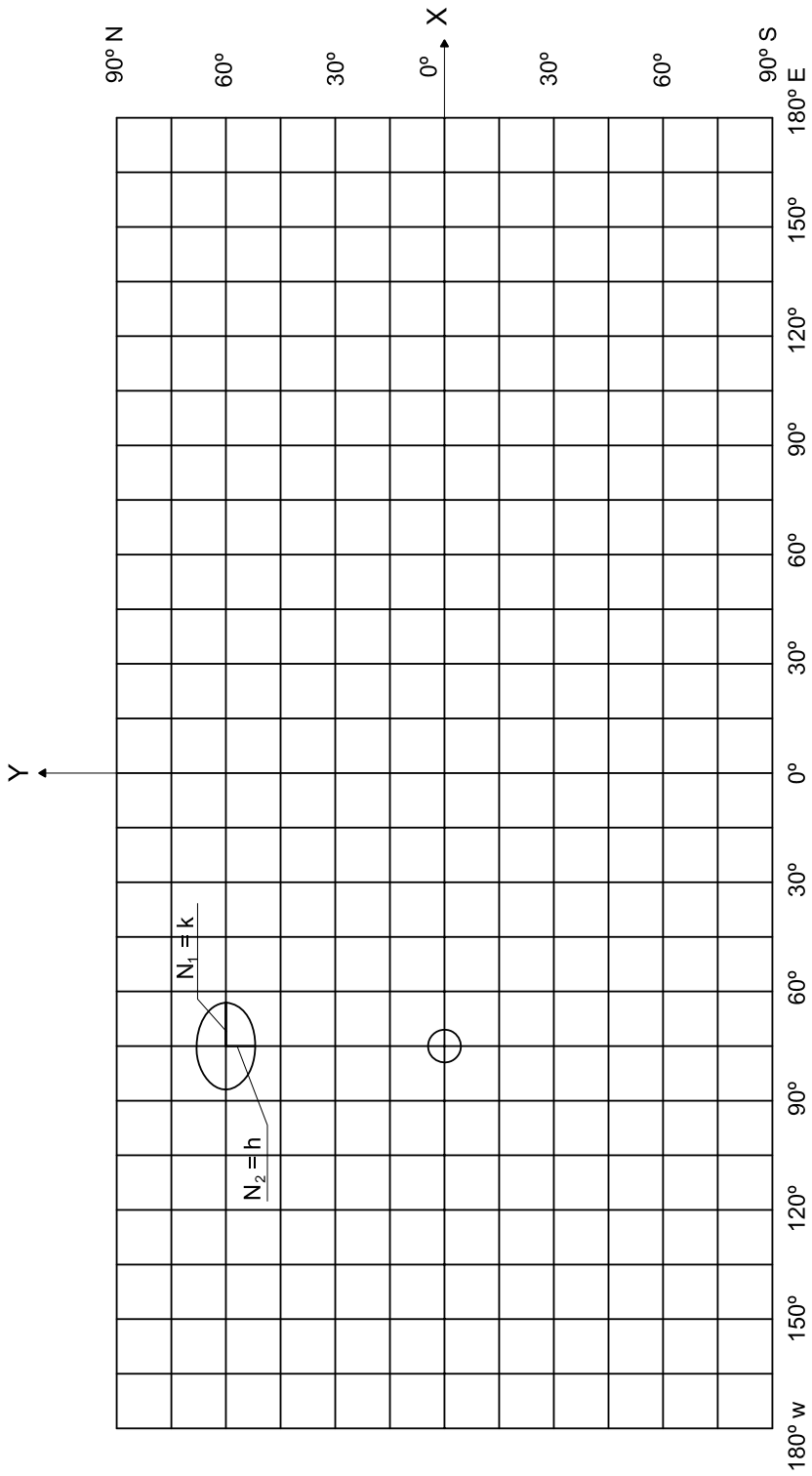
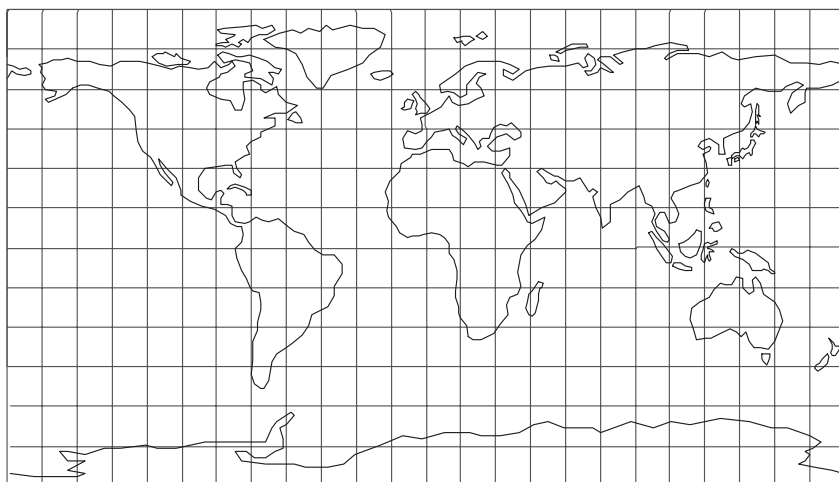


Figura 4.4: Proyección cilíndrica tangente equidistante.

Una vez determinada la escala de la proyección, teniendo en cuenta el papel disponible para su dibujo, se traza el Ecuador y se lo divide en partes iguales de acuerdo con la diferencia de longitud geográfica de los meridianos que se van a proyectar. Se divide a los meridianos de  $180^\circ$  en partes iguales de acuerdo con la diferencia de latitud geográfica en que se proyectarán los paralelos, luego se unen con rectas dichos puntos, y se trazan de esa manera los paralelos.

Las coordenadas cartesianas de un punto son:  $X = R\lambda$  e  $Y = R\varphi$ , expresando  $\lambda$  y  $\varphi$  en radianes.



**Figura 4.5:** Proyección cilíndrica tangente equidistante;  $\lambda_0 = 0^\circ$ .

### 4.3.2 Características y propiedades

El Ecuador es de longitud correcta; los paralelos se proyectan según rectas paralelas al Ecuador, equiespaciadas, de longitudes incorrectas mayores que las reales. Su deformación se calcula con el módulo de alteración lineal  $k = N_1 > 1$ . Recuérdese que  $N_1$  es la longitud del semieje mayor de la Elipse de Tissot.

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}} = \frac{2\pi R}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} = \sec \varphi$$

### Ejemplo

Si  $\varphi = 60^\circ N, k = \sec 60^\circ = 2$ .

Si  $\varphi = 45^\circ N, k = \sec 45^\circ = 1,414213564$ .

La deformación sobre los paralelos aumenta al ir del Ecuador hacia los Polos, como lo muestran los ejemplos anteriores. Los Polos se proyectan según rectas de longitudes iguales al Ecuador (deformación infinita).

Los meridianos se proyectan según rectas equiespaciadas de longitudes iguales y correctas (según la condición impuesta). Por lo tanto,  $h = 1 = N_2$  (longitud del semieje menor de la Elipse de Tissot).

Se cumple siempre que  $k > h$ , pues  $k > 1$  y  $h = 1$  y, por lo tanto, la Elipse de Tissot tendrá el eje mayor coincidente con la proyección del paralelo. Esta proyección no es isógona, pues  $h \neq k$  y tampoco es equivalente, pues  $hk \neq 1$ .

La deformación angular máxima está dada por la fórmula:

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\frac{1}{\cos \varphi} - 1}{\frac{1}{\cos \varphi} + 1} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

### Ejemplo

Reemplazando por los valores hallados para  $\varphi = 45^\circ$ , resulta:  $\delta_{\max} = 19^\circ 45' 31''$ .

### 4.3.3 Usos

Se utiliza para mapas de regiones ecuatoriales en una faja a ambos lados del Ecuador que no se aleje mucho del mismo, para que las deformaciones no sean excesivas. Deforma menos que la proyección cilíndrica normal tangente pura. Es usada para planisferios o regiones con pocos datos geográficos. También para mapas índices.

### 4.4 Proyección cilíndrica normal tangente equivalente

#### Dibujo de la proyección (Figura 4.6)

Se calcula la distancia de cada paralelo al Ecuador de tal modo que el área en la proyección sea la misma que la correspondiente en la esfera terrestre, teniendo en cuenta la fórmula que se deduce a continuación:

$$\text{Área zona esférica} = 2\pi Rh \quad (4.1)$$

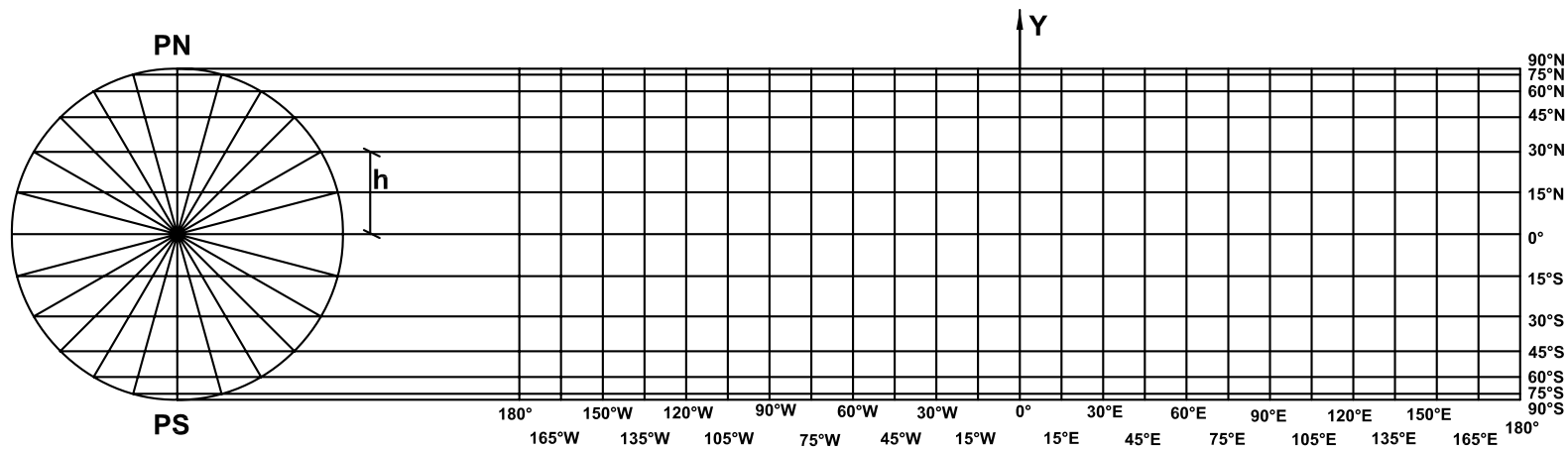


Figura 4.6: Proyección cilíndrica tangente equivalente.

$$h = R \operatorname{sen} \varphi \quad (4.2)$$

Reemplazando 4.2 en 4.1:

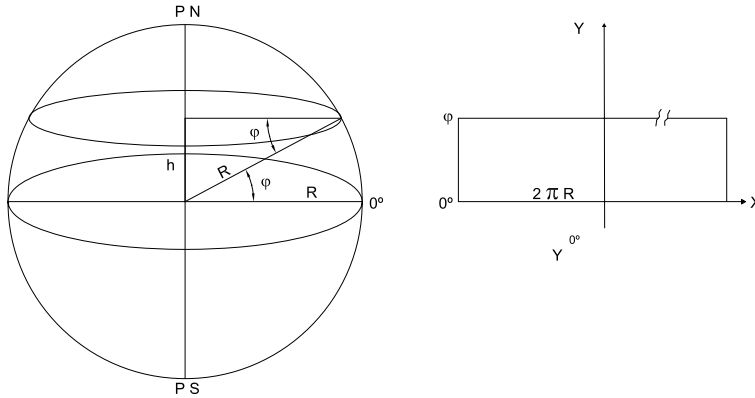
$$\text{Área zona esférica} = 2\pi R^2 \operatorname{sen} \varphi \quad (4.3)$$

$$\text{Área del rectángulo en la proyección} = 2\pi RY \quad (4.4)$$

Como es equivalente 4.3=4.4, entonces:

$$2\pi R^2 \operatorname{sen} \varphi = 2\pi RY$$

$$Y = R \operatorname{sen} \varphi \quad (4.5)$$



**Figura 4.7:** Cálculo de las coordenadas cartesianas.

De 4.2 y 4.5 se deduce que  $h = Y$ . Por lo tanto, la distancia en la proyección desde el Ecuador a un paralelo ( $Y$ ) es igual a la distancia entre los planos del Ecuador y del paralelo en la esfera terrestre ( $h$ ).

Para dibujar los meridianos se trazan rectas paralelas equiespaciadas perpendiculares al Ecuador, teniendo en cuenta la diferencia de longitud geográfica entre los mismos.

#### 4.4.1 Coordenadas cartesianas de un punto de la proyección

Ubicando el eje  $X$  coincidente con el Ecuador y el eje  $Y$  con el meridiano central que se desea ( $\lambda_0$ ), se tienen las coordenadas:

$$X = R\Delta\lambda \text{ siendo } \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0, \text{ expresado en radianes;}$$

$$Y = R \operatorname{sen} \varphi$$

### Ejemplo

Supóngase que se tiene un mapa dibujado en la proyección cilíndrica tangente equivalente, en escala 1 : 127 420 000, meridiano central  $\lambda_0=0^\circ$ . Se desean conocer las coordenadas planas del punto ( $\varphi=75^\circ N$ ,  $\lambda=60^\circ W$ ).

$$X = 6\,370\text{km}(-60^\circ)\frac{\pi}{180^\circ} = -6\,670,648\text{km} \quad \text{En escala } X = 5,2\text{cm}.$$

$$Y = 6\,370\text{km}\sin 75^\circ = 6\,152,948\text{km} \quad \text{En escala } Y = 4,8\text{cm}.$$

Se analizará la resolución del problema inverso (conociendo las coordenadas planas hallar las coordenadas geográficas) a través de un ejemplo.

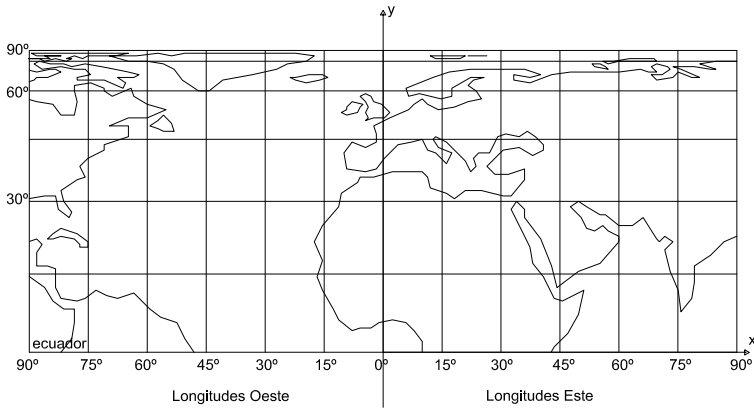


Figura 4.8: Representación de un cuarto de planisferio.

### Ejemplo

Supóngase que se tiene un mapa como el del ejemplo anterior en el que se miden  $X = 4,7\text{cm}$  e  $Y = 3\text{cm}$ . Entonces:

$$\lambda = \frac{X}{R} = \frac{0,047\text{m} \cdot 127\,420\,000}{6\,370\,000\text{m}} = 0,940147566 \text{ (en radianes)} = 53^\circ 51' 59''$$

$$\sin \varphi = \frac{Y}{R} = \frac{0,03\text{m} \cdot 127\,420\,000}{6\,370\,000\text{m}} = 0,6600941 \Rightarrow \varphi = 36^\circ 52' 36''$$

#### 4.4.2 Características y propiedades

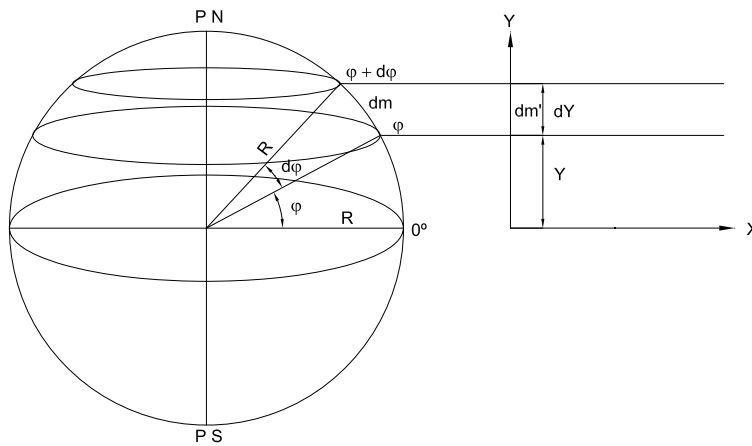
El Ecuador se proyecta según una recta de longitud correcta y los demás paralelos según rectas paralelas al Ecuador que se van acercando entre sí en forma acentuada al ir del Ecuador a los Polos (éstos se proyectan según rectas, por lo que la deformación es infinita).



Las medidas tomadas sobre los paralelos son incorrectas, mayores que las reales y su deformación se calcula según el módulo de alteración lineal  $k = N_1$  (semieje mayor de la Elipse de Tissot).

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}} = \frac{2\pi R}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} = \sec \varphi$$

Los meridianos se proyectan según rectas paralelas equiespaciadas, perpendiculares al Ecuador, de longitudes incorrectas menores que las reales, calculándose su deformación (en cada punto del meridiano) con el módulo de alteración lineal  $h = N_2$  (semieje menor de la Elipse de Tissot).



**Figura 4.9:** Cálculo de los módulos de alteración lineal.

Si  $dm$  = diferencial de arco meridiano y  $dm'$  = proyección de  $dm$ , entonces  $dm = R d\varphi$  y  $dm' = dY = d[R \text{sen } \varphi] = R \cos \varphi d\varphi$ , resultando:

$$h = \frac{dm'}{dm} = \frac{R \cos \varphi d\varphi}{R d\varphi} = \cos \varphi$$

Esta proyección no es isógona, pues  $h \neq k$ , y se verifica que es equivalente, pues  $hk = 1$ .

La deformación angular máxima está dada por la fórmula:

$$\delta_{\max} = 2 \text{arc sen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} = 2 \text{arc sen} \frac{\frac{1}{\cos \varphi} - \cos \varphi}{\frac{1}{\cos \varphi} + \cos \varphi} = 2 \text{arc sen} \frac{1 - \cos^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi}$$

### Ejemplo

Sea  $\varphi = 60^\circ S$ . Entonces:  $N_2 = h = \cos(-60^\circ) = 0,5$  y  $N_1 = k = \frac{1}{\cos 60^\circ} =$

2,0. Obsérvese que  $hk = 1$ . La deformación angular máxima resulta:  $\delta_{\max} = 2\text{arc sen } \frac{2-0,5}{2+0,5} = 73^{\circ}44'23''$ .

#### 4.4.3 Usos

Es muy utilizada para mapas de temas estadísticos (distribución de cultivos, suelos, etc.) sobre todo para regiones ecuatoriales, pues no hay mucha deformación, o sea sin límite de áreas; pero para otros usos sólo es apropiada en una faja a ambos lados del Ecuador.

**Observación:** La distancia de la proyección de un paralelo a la proyección del Ecuador es igual a la distancia del plano del paralelo al plano del Ecuador en la esfera.

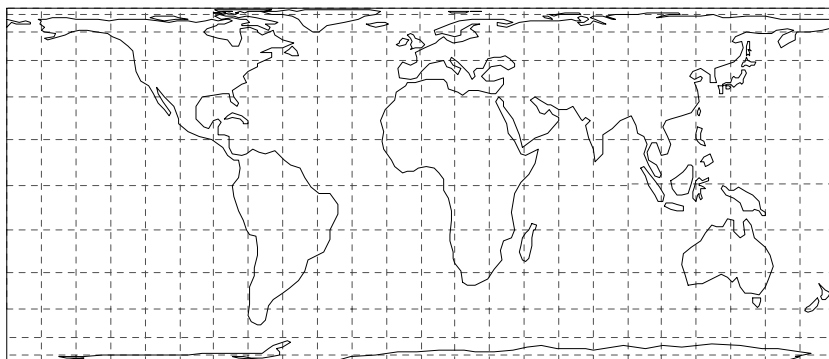


Figura 4.10: Proyección cilíndrica tangente equivalente,  $\lambda_0 = 0^{\circ}$ .

#### 4.5 Proyección cilíndrica normal tangente isógona en la esfera: Proyección Mercator

**Dibujo de la proyección** (Figura 4.11)

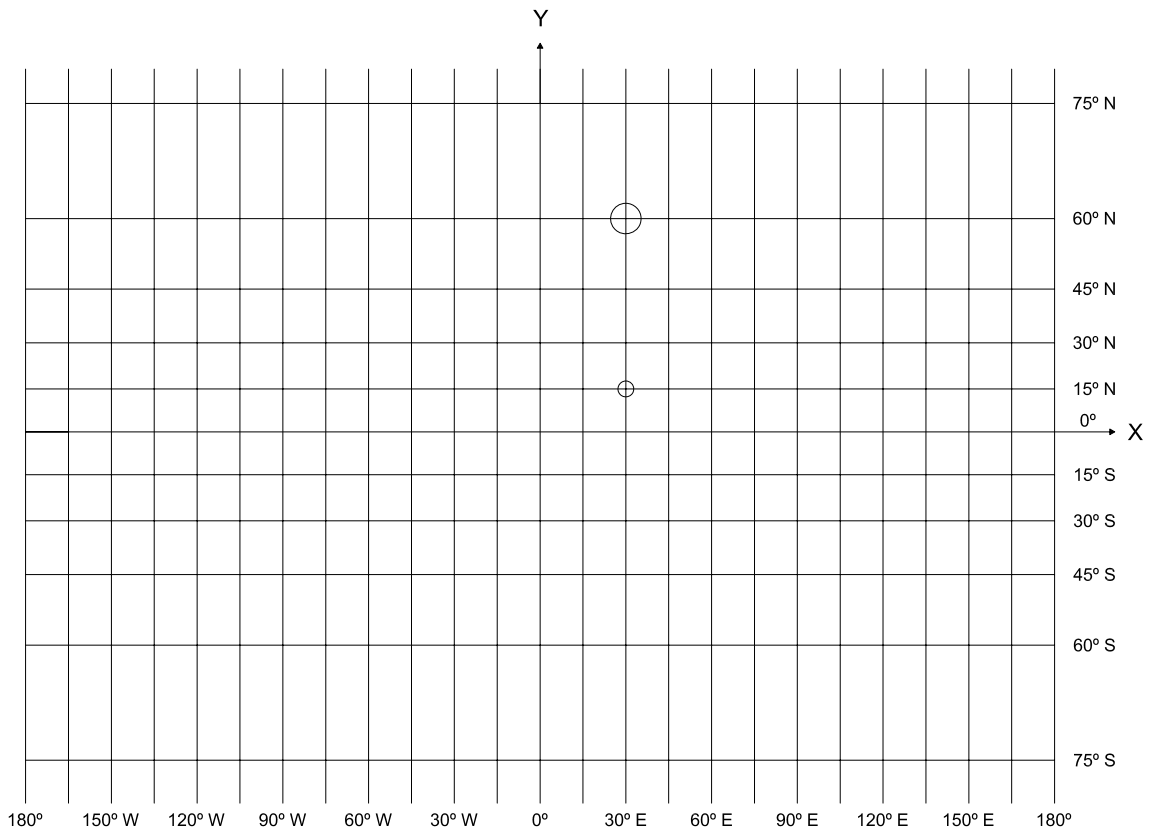
El primer paso consiste en trazar el Ecuador teniendo en cuenta que el mismo es de longitud correcta, lo que permite determinar la escala del dibujo.

$$\frac{1}{M} = \frac{d}{D} ; M = \frac{D}{d}$$

Si, por ejemplo, se desea dibujar el Ecuador de 16,80cm de longitud:

$$M = \frac{4\,002\,389\,040\text{cm}}{16,80\text{cm}} = 238\,237\,442,857$$

Figura 4.11: Proyección Mercator.



se redondeará a  $E = 1 : 240\,000\,000$ .

Para dibujar los paralelos se debe determinar la distancia de los mismos con respecto al Ecuador, a través de la fórmula

$$Y = R \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

que se deduce a continuación, pasando luego los valores obtenidos a la escala elegida.

En la Figura 4.12 se observa que, como la proyección es isógona, debe verificarse que  $\hat{1} = \hat{1}'$ ,  $\hat{2} = \hat{2}'$ ,  $\hat{3} = \hat{3}'$  y, por lo tanto, los triángulos  $PTQ$  y  $P'T'Q'$  deben ser semejantes, siendo proporcionales sus lados homólogos.

Se tiene entonces:

$$\frac{T'Q'}{TQ} = \frac{P'T'}{PT} = \frac{P'Q'}{PQ}$$

siendo  $T'Q' = dY$ ,  $TQ = Rd\varphi$ ,  $P'T' = dX$  y  $PT = Rd\lambda \cos \varphi$ . Reemplazando:

$$\frac{dY}{Rd\varphi} = \frac{dX}{Rd\lambda \cos \varphi} = \frac{Rd\lambda}{Rd\lambda \cos \varphi}$$

entonces:

$$dY = \frac{Rd\varphi}{\cos \varphi}$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$\int dY = \int \frac{Rd\varphi}{\cos \varphi}$$

se tiene:

$$Y = R \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

de donde, calculando la integral:

$$Y = R \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Los meridianos se trazan perpendicularmente a los paralelos a una distancia entre ellos que depende de sus diferencias de longitud geográfica. Se divide el Ecuador en partes iguales.

De las identidades antes planteadas se tiene que:  $dX = Rd\lambda$ . Integrando:  $\int dX = Rd\lambda$ , resulta:  $X = R \int d\lambda$ .

Entonces  $X = R\lambda$ , estando  $\lambda$  expresado en radianes y siempre que se adopte como eje de ordenadas el meridiano de Greenwich. En caso contrario,  $X = R(\lambda - \lambda_0)$ , siendo  $\lambda_0$  la longitud del meridiano que coincide con el eje de ordenadas.

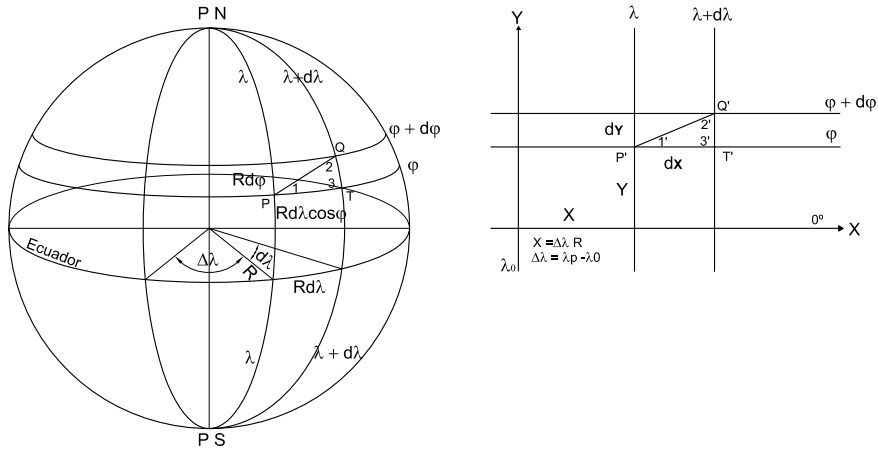


Figura 4.12: Proyección Mercator. Cálculo de coordenadas.

### 4.5.1 Transformación inversa de las coordenadas de la proyección Mercator sobre la esfera

En un mapa en proyección Mercator en escala  $E$ , se tienen las ecuaciones de las coordenadas cartesianas

$$x = ER\Delta\lambda; y = ER \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

De la primera de ellas se obtiene el valor de  $\Delta\lambda$  en radianes:  $\Delta\lambda = \frac{x}{ER}$ .

Como  $\lambda = \Delta\lambda - \lambda_0$ , entonces  $\Delta\lambda = \lambda + \lambda_0$  y

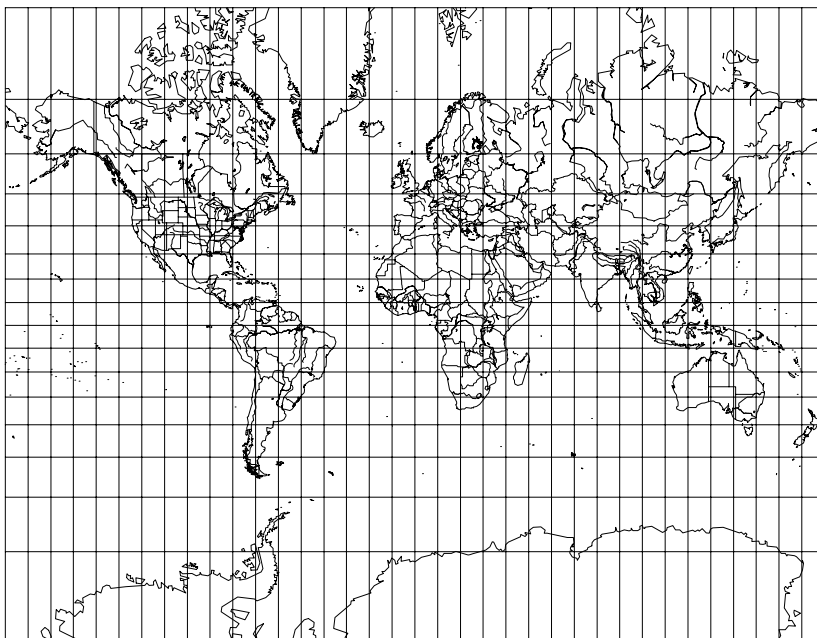
$$\lambda = \frac{x}{ER} + \lambda_0$$

De la segunda ecuación debe obtenerse el valor de  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \frac{y}{ER} &= \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \\ e^{\frac{y}{ER}} &= \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \\ \frac{\varphi}{2} &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{\frac{y}{ER}} - 45^\circ \\ \varphi &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{\frac{y}{ER}} - 90^\circ \end{aligned}$$

#### Ejemplo

En un mapa en proyección Mercator en escala  $1 : 160\,000\,000$ , cuyo meridiano central es  $0^\circ$ , se midieron las coordenadas de un punto  $A$



**Figura 4.13:** *Proyección Mercator,  $\lambda_0 = 0^\circ$*

obteniendo:  $x = 5,55cm$ ,  $y = 10,00cm$ . Se desean hallar las coordenadas geográficas de ese punto.

$$\Delta\lambda = \frac{5,55cm}{\frac{1}{160\,000\,000} 637\,000\,000cm} \frac{180^\circ}{\pi} = 79^\circ 52' 20''$$

Como  $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $\lambda = \Delta\lambda = 79^\circ 52' 20''$ . Por otra parte:

$$\varphi = 2 \arctan e^{\frac{y}{ER}} - 90^\circ = 2 \arctan e^{\frac{10cm \times 160\,000\,000}{637\,000\,000cm}} - 90^\circ = 80^\circ 43' 28''$$

#### 4.5.2 Características y propiedades

El Ecuador se proyecta según una recta de longitud correcta y los demás paralelos lo hacen según rectas de longitudes incorrectas, mayores que las reales, paralelas al Ecuador, que se van distanciando acentuadamente entre sí al alejarse del Ecuador hacia el norte o hacia el sur. La deformación en cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ . Los Polos no se proyectan pues están a una distancia infinita del Ecuador.

$$Y_{90^\circ} = R \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{90^\circ}{2} \right) \therefore Y_{90^\circ} \rightarrow \infty$$

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}}$$

$$k = \frac{2\pi R}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \therefore k = \sec \varphi$$

Los meridianos se proyectan según rectas paralelas equiespaciadas de longitudes infinitas. La deformación en cada punto de los meridianos se calcula con el módulo de alteración lineal  $h = \frac{dm'}{dm}$ , donde:

$$\begin{aligned} dm' &= dY = d[R \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)] = R \frac{1}{\operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} \frac{1}{\cos^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} \frac{1}{2} d\varphi = \\ &= \frac{Rd\varphi}{2 \operatorname{sen} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} = \frac{Rd\varphi}{\operatorname{sen} 2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} \end{aligned}$$

y  $dm = Rd\varphi$ . Entonces:

$$h = \frac{Rd\varphi}{\operatorname{sen} 2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) Rd\varphi} = \frac{1}{\operatorname{sen} (90^\circ + \varphi)} = \frac{1}{\cos \varphi}$$

Es decir  $h = k$ . Además, como  $k = h = N_1 = N_2$ , la Elipse de Tissot resulta una circunferencia.

### Ejemplo

Sea  $\varphi = 60^\circ$ . Entonces:  $k = \sec 60^\circ = 2 = h$ .

Se verifica que esta proyección es isógona pues  $h = k$ , pero no es equivalente pues  $hk \neq 1$  ( $hk = \sec^2 \varphi$ ).

### 4.5.3 Propiedad fundamental

Las líneas loxodrómicas se proyectan según rectas pues, como es isógona, las direcciones de las loxodrómicas son correctas.

### 4.5.4 Usos

Para mapas de navegación en combinación con la gnomónica y, en general, para planisferios. Hasta el siglo XIX la mayor parte de los planisferios se dibujaba en proyección Mercator.

Se emplea también para mapas de temas meteorológicos para las regiones tropicales. En astronomía, se usa para planisferios celestes (faja del Ecuador Celeste).

## 4.6 Proyección Mercator en el elipsoide

### 4.6.1 Dibujo

Para su dibujo es necesario deducir las fórmulas que permiten obtener los valores de las coordenadas  $X$  e  $Y$ . Considérense para ello dos puntos, por ejemplo  $P$  y  $Q$  infinitamente próximos, por los que pasan sus correspondientes paralelos y meridianos (ver Figura 4.14).

Como la proyección es isógona, los ángulos respectivos son iguales. Entonces:

$$\hat{1} = \hat{1}', \hat{2} = \hat{2}', \hat{3} = \hat{3}'$$

Por lo tanto los triángulos  $PTQ$  y  $P'T'Q'$  son semejantes, siendo proporcionales sus lados homólogos. Se tiene entonces:

$$\frac{P'T'}{PT} = \frac{T'Q'}{TQ} = \frac{P'Q'}{PQ}$$

siendo  $P'T' = ad\lambda$ ,  $PT = N \cos \varphi d\lambda$ ,  $T'Q' = dY$  y  $TQ = \rho d\varphi$ .

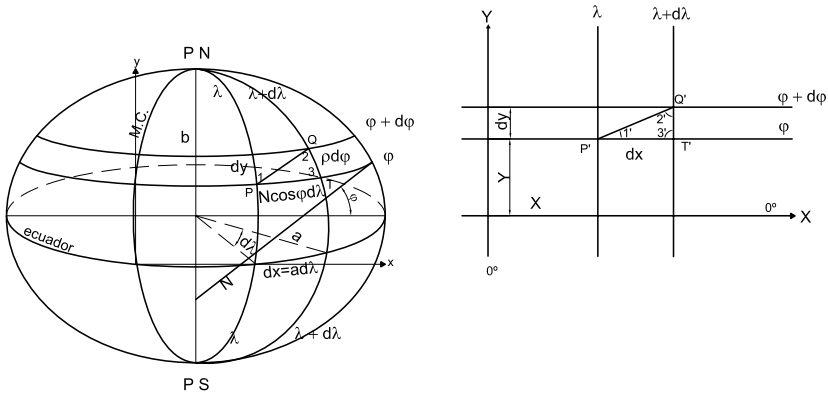


Figura 4.14: Proyección Mercator en el elipsoide. Cálculo de coordenadas.

Por lo tanto:  $\frac{dY}{\rho d\varphi} = \frac{ad\lambda}{N \cos \varphi d\lambda}$ ; despejando:

$$dY = \frac{a\rho d\varphi}{N \cos \varphi}$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$\int dY = \int \frac{a\rho d\varphi}{N \cos \varphi}$$



$$Y = a \int \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi}$$

Pero  $\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$  y  $N = \frac{a}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} Y &= a \int \frac{\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi}{\frac{a}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \cos \varphi} \\ &= a \int \frac{a(1-e^2)(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi}{a(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos \varphi} \\ &= a \int \frac{(1-e^2) d\varphi}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \cos \varphi} \end{aligned}$$

Calculando la integral:  $Y = a \left[ \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1-e \operatorname{sen} \varphi}{1+e \operatorname{sen} \varphi} \right]$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} dX &= a d\lambda \\ \int dX &= a \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

Entonces  $X = a\Delta\lambda$  siendo  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$

#### 4.6.2 Características y propiedades

El Ecuador se proyecta según una recta de longitud correcta ( $2\pi a$ ). Los paralelos se proyectan según rectas de longitudes incorrectas mayores que las reales, que se van distanciando entre sí al ir del Ecuador hacia los Polos (éstos no se proyectan pues se encuentran a una distancia infinita). La deformación en cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ ,

La distancia de cada paralelo al Ecuador se determina con la ordenada  $Y$  cuya fórmula se dedujo más arriba.

Los meridianos se proyectan según rectas paralelas equiespaciadas perpendiculares al Ecuador y de longitudes infinitas; su deformación en cada punto se calcula con el módulo de alteración  $h$ .

#### 4.6.3 Módulo de alteración lineal

Como la proyección es isógona  $h = k$ , entonces se deduce que:

$$N_1 = N_2 = h = k = \frac{2\pi a}{2\pi N \cos \varphi} = \frac{a}{N \cos \varphi} = \frac{a(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{a \cos \varphi} = \frac{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{\cos \varphi}$$

Esta proyección no es equivalente pues:  $N_1 N_2 = \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}{\cos^2 \varphi} \neq 1$

#### 4.6.4 Usos

Para cartas topográficas, pues como se trabaja con escalas mayores, debe considerarse a la superficie terrestre como un elipsoide de revolución. Esto se debe a que la diferencia entre el elipsoide y la esfera tiene representación en la escala, pues el error al confundir ambas superficies (elipsoide y esfera) en las cartas resulta dividido por el módulo de la escala de la carta que es menor que el módulo de la escala del mapa.

### 4.7 Proyección cilíndrica normal secante pura, central o perspectiva

#### 4.7.1 Dibujo

Se obtiene en dos etapas:

- 1) Se considera una superficie cilíndrica que intercepta a la esfera terrestre a lo largo de dos paralelos que en valor absoluto tienen la misma latitud, el punto de vista está en el centro de la Tierra, y los paralelos y meridianos se proyectan sobre dicha superficie cilíndrica.
- 2) Se supone cortada la superficie cilíndrica a lo largo de una generatriz y desarrollándose sobre un plano; los paralelos en donde se intercepta con la superficie terrestre reciben el nombre de paralelos base ( $\varphi_0$  y  $-\varphi_0$ ).

#### 4.7.2 Procedimiento analítico

Se supone el eje  $X$  coincidente con la proyección del Ecuador y el eje  $Y$  con la del meridiano central.

La proyección del Ecuador es una recta de longitud igual a la de los dos paralelos bases ( $2\pi R \cos \varphi_0$ ). La distancia de la proyección del Ecuador a la de un paralelo  $\varphi$  es (ver Figura 4.15):

$$Y = AC = VA \operatorname{tg} \varphi = R \cos \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi = \cos \varphi_0 R \operatorname{tg} \varphi$$

$$Y = \cos \varphi_0 R \operatorname{tg} \varphi$$

$$\text{En el punto } \varphi = \varphi_0, Y_{\varphi} = \cos \varphi_0 R \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\cos \varphi_0} = R \operatorname{sen} \varphi_0$$

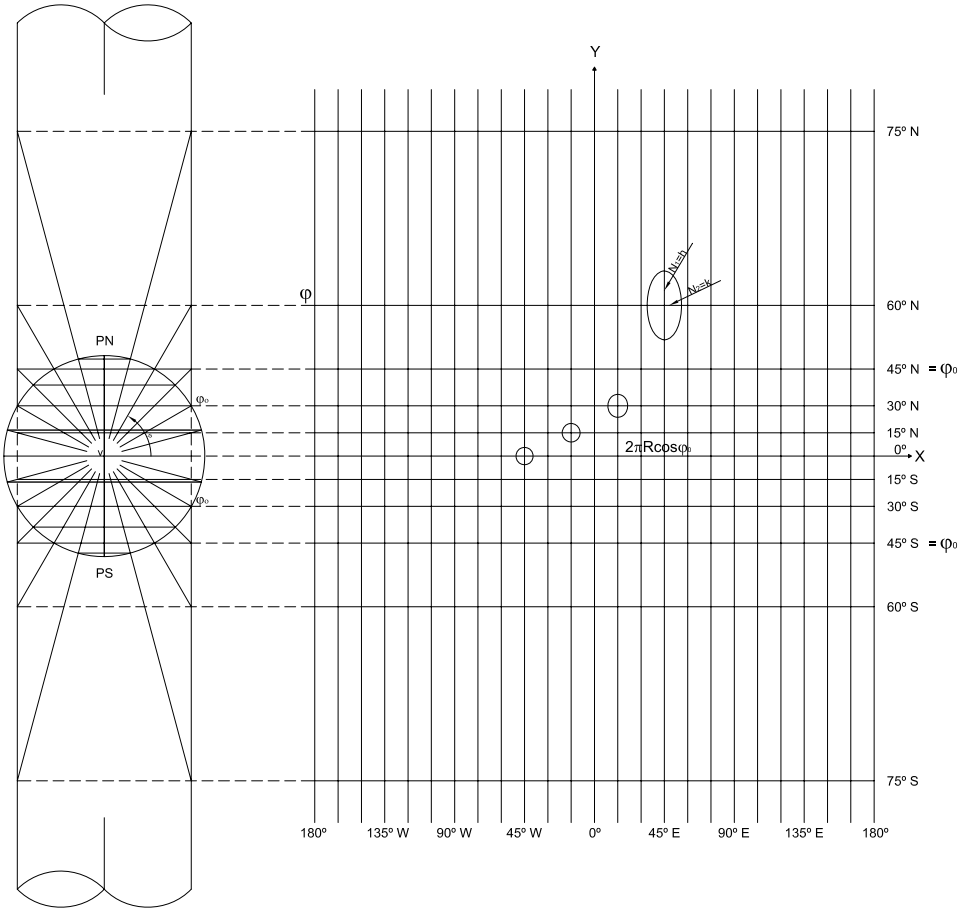


Figura 4.15: Proyección cilíndrica normal secante pura.

La abscisa de un punto será:  $X = (\lambda - \lambda_0)R \cos \varphi_0$ , si los valores de las longitudes ( $\lambda$  y  $\lambda_0$ ) están expresados en radianes y  $X = (\lambda - \lambda_0) \frac{\pi}{180^\circ} R \cos \varphi_0$  si dichas longitudes están expresadas en grados.

Si se considera un eje  $X'$  coincidente con la proyección del paralelo  $\varphi_0$ :

$$Y' = Y - Y'_{\varphi_0} = \cos \varphi_0 R \operatorname{tg} \varphi - \cos \varphi_0 R \operatorname{tg} \varphi_0 = \cos \varphi_0 R [\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \varphi_0]$$

$$X' = \cos \varphi_0 (\lambda - \lambda_0) \frac{\pi}{180^\circ} R$$

### Ejemplo

Considérese un planisferio dibujado en la proyección cilíndrica secante pura, en escala 1 : 370 000 000, con meridiano central  $\lambda_0 = 0^\circ$  y paralelos base en  $30^\circ$  y  $-30^\circ$ . Se desean conocer las coordenadas del punto  $A(\varphi = 60^\circ, \lambda = 90^\circ)$ .

De acuerdo con las fórmulas recién halladas:

$$Y = \cos 30^\circ 6\,370\,km \operatorname{tg} 60^\circ = 9\,554,9999\,km$$

$$Y \text{ (en escala)} = 2,58\,cm.$$

$$X = \cos 30^\circ (90^\circ - 0^\circ) \frac{\pi}{180^\circ} 6\,370\,km = 8\,665,4262\,km$$

$$X \text{ (en escala)} = 3,05\,cm.$$

Si, en cambio, se considera un eje  $X'$  coincidente con la proyección del paralelo  $\varphi_0 = 30^\circ$ ,

$$Y' = \cos 30^\circ 6\,370\,km [\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ] = 6\,370,0011\,km.$$

$$Y' \text{ (en escala)} = 2,34\,cm$$

Si  $\varphi = 15^\circ$  y  $\lambda = 90^\circ$ , entonces:

$$Y' = \cos 30^\circ 6\,370\,km [\operatorname{tg} 15^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ] = -7\,066,832\,km,$$

$$Y' \text{ (en escala)} = -1,89\,cm$$

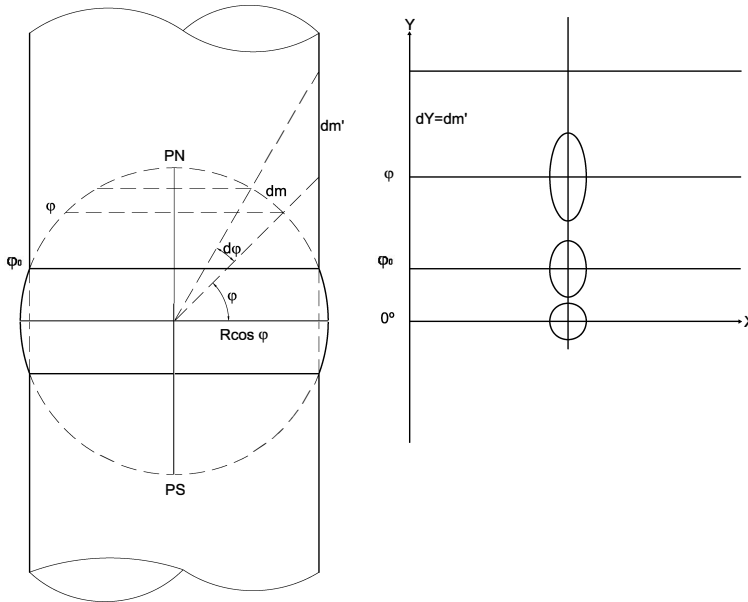
### 4.7.3 Características y propiedades

El Ecuador se proyecta según una recta de longitud incorrecta menor que la real, igual a la de los paralelos bases ( $2\pi R \cos \varphi_0$ ).

Los paralelos se proyectan según rectas paralelas al Ecuador que se van distanciando acentuadamente entre sí al avanzar del Ecuador hacia los Polos (éstos no se proyectan, pues están a una distancia infinita).

Los paralelos bases se proyectan según rectas de longitudes correctas ( $k = 1$ ). Los paralelos que se encuentran entre los paralelos bases (de

latitudes en valor absoluto menores que las de éstos a ambos lados del Ecuador) se proyectan según rectas de dimensiones menores que las reales:  $k < 1$ . Los ubicados entre los paralelos bases y los Polos se proyectan según rectas de dimensiones mayores que las reales:  $k > 1$ .



**Figura 4.16:** Proyección cilíndrica normal secante pura: Módulos de alteración lineal.

La deformación en cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ :

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}} = \frac{2\pi R \cos \varphi_0}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}$$

De esta expresión resulta evidente que

$$\text{si } \varphi = \varphi_0 \Rightarrow k = 1, \text{ si } \varphi < \varphi_0 \Rightarrow k < 1, \text{ si } \varphi > \varphi_0 \Rightarrow k > 1$$

Los meridianos se proyectan según rectas equiespaciadas de longitud infinita y perpendiculares a los paralelos. La deformación en cada punto de los meridianos se calcula con el módulo de alteración lineal  $h$ :

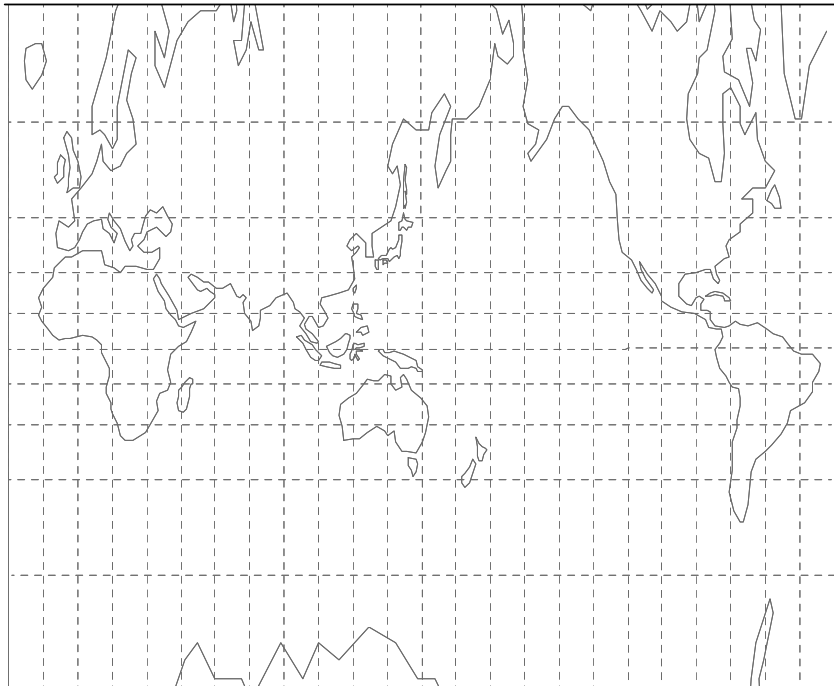
$h = \frac{dm'}{dm}$ , donde  $dm' = dY = d[R \cos \varphi_0 \operatorname{tg} \varphi] = R \cos \varphi_0 \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi$  y  $dm = R d\varphi$ . Entonces:

$$h = \frac{R \cos \varphi_0 \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi}{R d\varphi} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos^2 \varphi}$$

Evidentemente  $h = \frac{1}{\cos \varphi} k$ . De esta expresión se deduce que:

$$\text{si } \varphi = \varphi_0 \Rightarrow h > 1 (h > k), \text{ si } \varphi < \varphi_0 \Rightarrow h > k, \text{ si } \varphi > \varphi_0 \Rightarrow h > k.$$

Si, en particular,  $\varphi = 0^\circ, h < 1 (h = k)$ .



**Figura 4.17:** Proyección cilíndrica secante pura.

### Ejemplos

- 1)  $\varphi = 15^\circ; \varphi_0 = 30^\circ. k = \frac{\cos 30^\circ}{\cos 15^\circ} = 0,896575464 < 1; h = \frac{\cos 30^\circ}{\cos^2 15^\circ} = 0,9282 \Rightarrow h > k.$
- 2)  $\varphi = 60^\circ N; \varphi_0 = \pm 30^\circ. k = \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 1,7320508 > 1; h = \frac{\cos 30^\circ}{\cos^2 60^\circ} = 3,464 \Rightarrow h > k.$
- 3)  $\varphi = 30^\circ N; k = 1; h = \frac{\cos 30^\circ}{\cos^2 30^\circ} = 1,455 \Rightarrow h > k.$
- 4)  $\varphi = 0^\circ; k = h = \cos 30^\circ = 0,8660254.$

Como los valores de  $h$  y de  $k$  son, en general, diferentes, se deduce que esta proyección no es isógona. Tampoco es equivalente, pues  $\mu = hk \neq 1$ .

#### 4.7.4 Usos

Debido a las deformaciones esta proyección sólo es utilizada para mapas en una franja angosta a ambos lados de los paralelos bases.

#### Observación

En un punto cualquiera de la proyección, la deformación angular máxima se calcula a través de la expresión:

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arcsen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

#### Ejemplo:

La deformación angular en los puntos en que  $\varphi = 60^\circ N$ , siendo  $\varphi_0 = \pm 30^\circ$ , es:

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arcsen} \frac{3,46573 - 1,73205}{3,46573 + 1,73205} = 38^\circ 58' 04''$$

### 4.8 Proyección cilíndrica normal secante equidistante(equirrectangular)

#### 4.8.1 Dibujo (Figura 4.18)

Se impone la condición de que las distancias sobre los meridianos sean correctas, así también, por definición, la longitud de los paralelos bases.

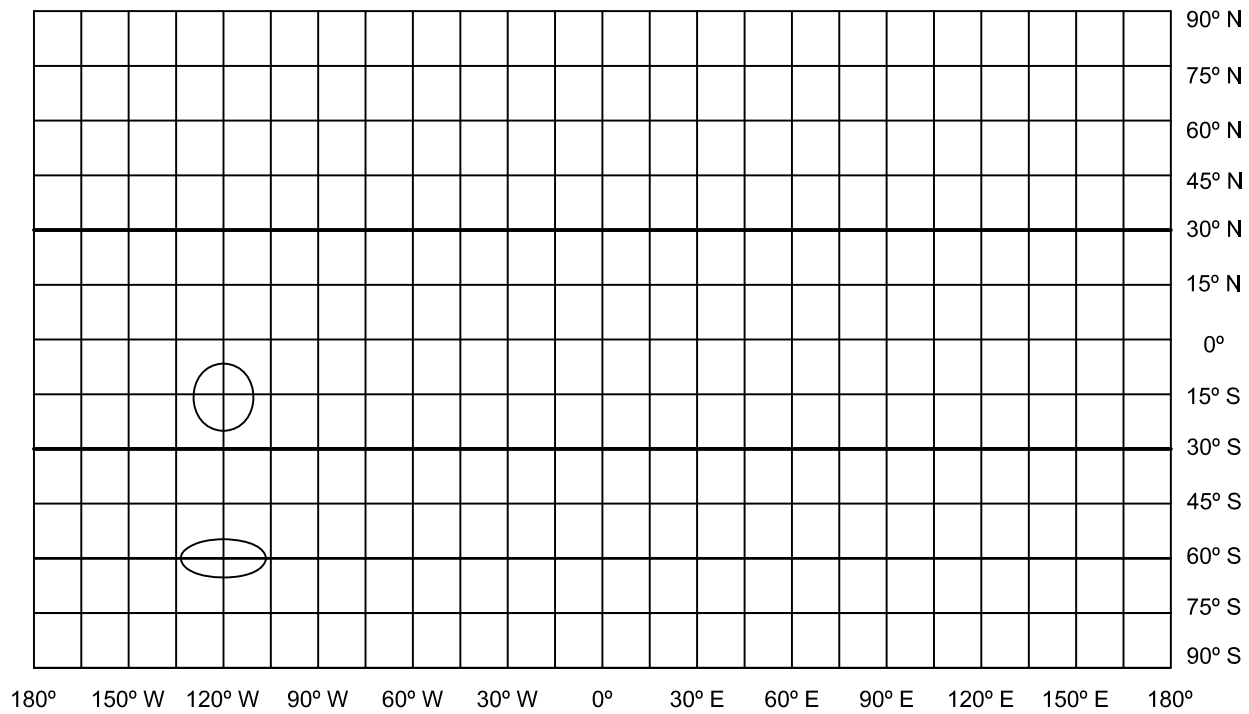
#### 4.8.2 Características y propiedades

Los meridianos tienen longitudes correctas; los paralelos se proyectan según rectas de longitudes incorrectas menores o mayores que las reales según se encuentren respectivamente entre los paralelos bases a ambos lados del Ecuador o exteriormente a ellos.

La deformación en cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ , cuyo valor entre los paralelos bases es menor que 1 y fuera de los paralelos bases es mayor que 1.

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}} = \frac{2\pi R \cos \varphi_0}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}$$

Los meridianos se proyectan según rectas equiespaciadas, perpendiculares a los paralelos y de longitudes correctas, debido a la condición impuesta. Es decir, en esta proyección las distancias en sentido norte-sur son correctas. Resulta entonces  $h = 1$ .



**Figura 4.18:** *Proyección cilíndrica normal secante equidistante.*



Resumiendo:

$$\varphi < \varphi_0 \Rightarrow k < 1 \Rightarrow k < h;$$

$$\varphi > \varphi_0 \Rightarrow k > 1 \Rightarrow k > h;$$

$$\varphi = \varphi_0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow k = h;$$

$$\varphi = 0^\circ \Rightarrow k < 1 \Rightarrow k < h;$$

Esta proyección no es isógona, pues  $h \neq k$  y tampoco es equivalente, pues  $hk \neq 1$ .

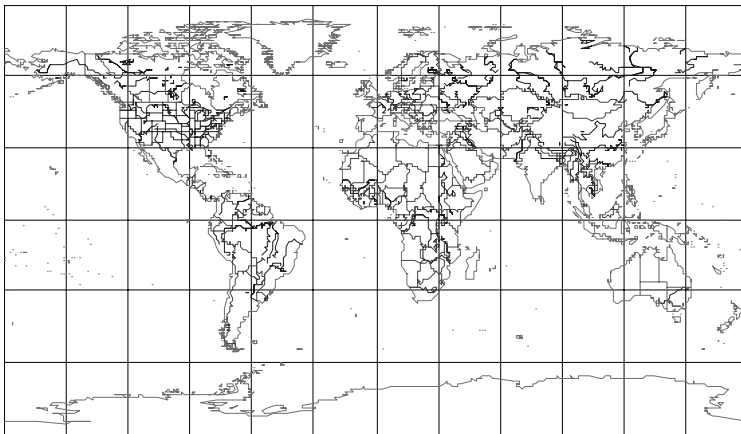
### Ejemplos

$$1) \quad \varphi = 15^\circ; \varphi_0 = 30^\circ : k = \frac{\cos 30^\circ}{\cos 15^\circ} = 0,896575464$$

$$2) \quad \varphi = 60^\circ N; \varphi_0 = 30^\circ : k = \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 1,7320508$$

### 4.8.3 Usos

Para mapas de regiones ubicadas en una franja angosta a ambos lados de los paralelos bases pues, aunque no hay deformación en el sentido norte-sur, sí la hay en el sentido este-oeste (Figura 4.19).



**Figura 4.19:** Proyección cilíndrica normal secante equidistante ( $\varphi_0 = 30^\circ$ ).

## 4.9 Proyección cilíndrica normal secante equivalente

### 4.9.1 Dibujo (Figura 4.20)

Se impone la condición de que las áreas en la proyección sean iguales a sus correspondientes en la esfera. Para dibujar los meridianos se trazan rectas paralelas y equiespaciadas, perpendiculares a los paralelos, teniendo en cuenta la diferencia de longitud geográfica entre ellos.

Para dibujar los paralelos se debe calcular la distancia de cada uno de ellos desde el paralelo base o el Ecuador, según se desee, con las fórmulas que se deducen a continuación.

### 4.9.2 Cálculo del Y

Es la distancia a partir del paralelo base (Ver Figura 4.21).

En la esfera:

$$\text{Área de la zona esférica } (\varphi_0 - \varphi) = 2\pi Rh,$$

siendo  $h = R\text{sen } \varphi - R\text{sen } \varphi_0 = R(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0)$ . Reemplazando:

$$\text{Área de la zona esférica: } (\varphi_0 - \varphi) = 2\pi R^2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0) \quad (4.6)$$

En la proyección:

$$\text{Área del rectángulo} = 2\pi R \cos \varphi_0 Y \quad (4.7)$$

siendo Y medida desde el paralelo  $\varphi_0$  hasta el paralelo  $\varphi$ .

Como la proyección es equivalente 4.6 = 4.7, entonces:

$$2\pi R^2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0) = 2\pi R \cos \varphi_0 Y$$

$$R(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0) = \cos \varphi_0 Y$$

de donde:

$$Y = \frac{R(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0)}{\cos \varphi_0}$$

### 4.9.3 Cálculo de Y' (a partir del Ecuador) (Figura 4.22)

$$\text{Área de la zona esférica } (\varphi_0 - \varphi) = 2\pi Rh'$$

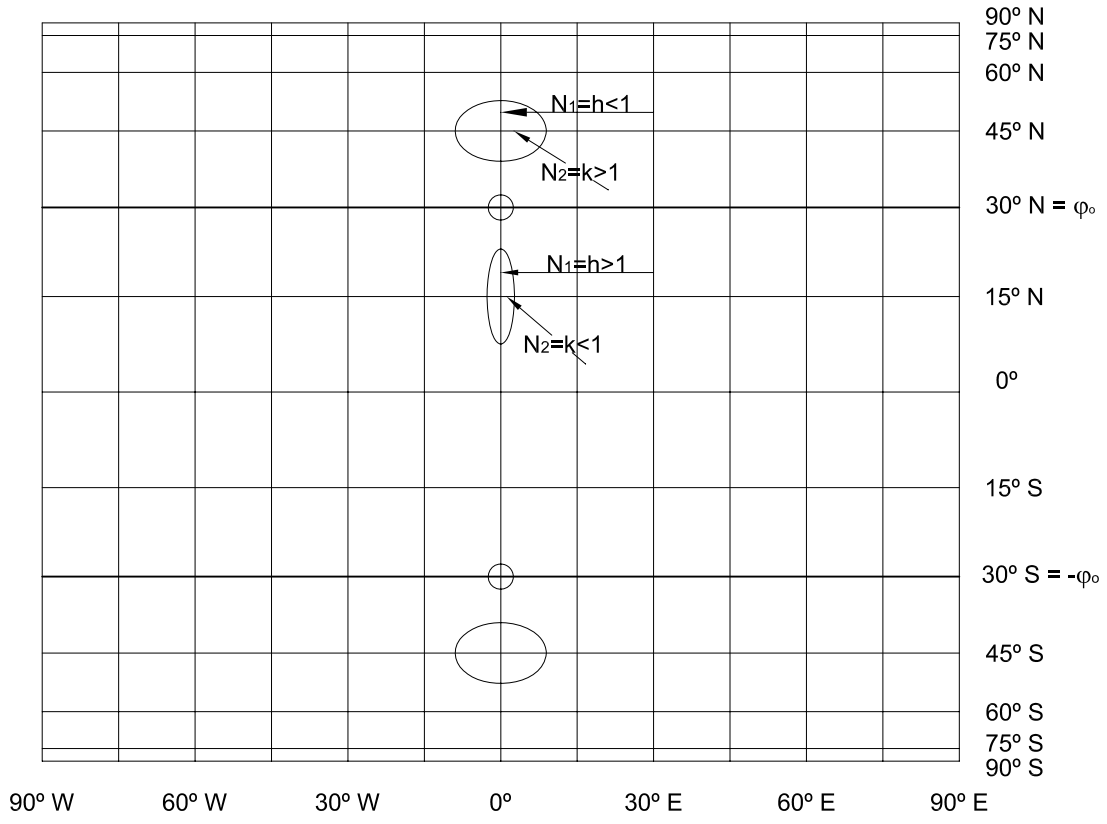
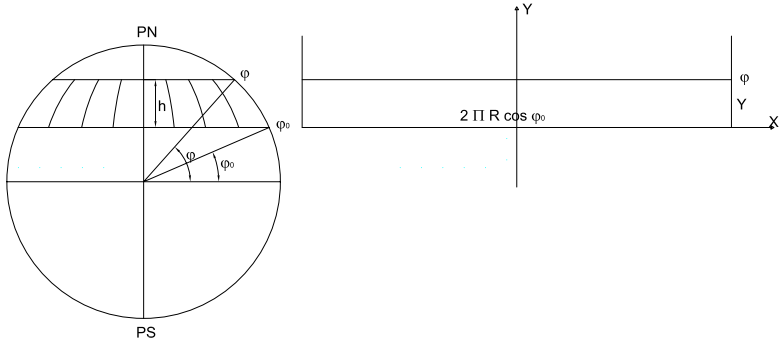


Figura 4.20: Proyección cilíndrica normal secante equivalente.



**Figura 4.21:** Proyección cilíndrica normal secante equivalente. Cálculo de coordenadas a partir del paralelo base  $\varphi_0$ .

siendo  $h' = R \operatorname{sen} \varphi$ . Por lo tanto:

$$\text{Área de la zona esférica } (0^\circ - \varphi) = 2\pi R^2 \operatorname{sen} \varphi \quad (4.8)$$

$$\text{Área del rectángulo} = 2\pi R \cos \varphi_0 Y' \quad (4.9)$$

Como la proyección es equivalente debe ser 4.8 = 4.9 entonces:

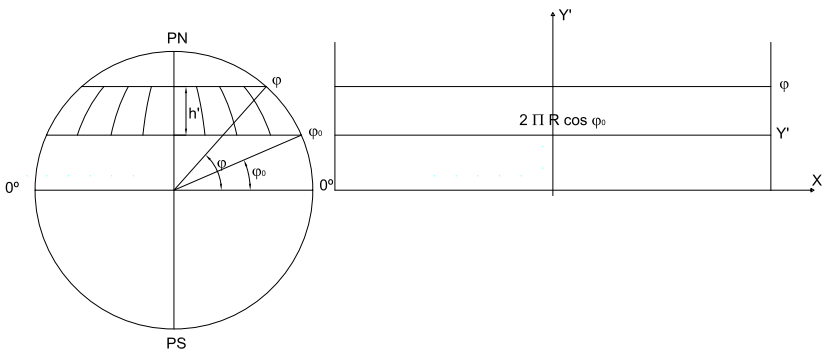
$$2\pi R^2 \operatorname{sen} \varphi = 2\pi R \cos \varphi_0 Y'$$

$$R \operatorname{sen} \varphi = \cos \varphi_0 Y'$$

de donde:

$$Y' = \frac{R \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi_0}$$

midiendo  $\varphi$  desde el paralelo al Ecuador.



**Figura 4.22:** Proyección cilíndrica normal secante equivalente. Cálculo de coordenadas a partir del Ecuador.

#### 4.9.4 Características y propiedades

Los paralelos se proyectan según rectas paralelas al Ecuador, que se van acercando acentuadamente entre sí al ir del Ecuador hacia los Polos (los Polos son rectas de longitudes iguales a las de los paralelos bases).

La deformación en cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ . Todos los paralelos tienen la misma longitud que los paralelos bases. Como en las otras proyecciones cilíndricas normales secantes:

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}} = \frac{2\pi R \cos \varphi_0}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}$$

Obsérvese que:

$$\text{si } \varphi = 0^\circ \Rightarrow k < 1;$$

$$\text{si } 0^\circ < \varphi < \varphi_0 \Rightarrow k < 1;$$

$$\text{si } \varphi = \varphi_0 \Rightarrow k = 1;$$

$$\text{si } \varphi > \varphi_0 \Rightarrow k > 1.$$

#### Ejemplos

$$\varphi = 15^\circ N; \varphi_0 = 30^\circ : k = \frac{\cos 30^\circ}{\cos 15^\circ} = 0,896575464, k < 1$$

$$\varphi = 60^\circ N; \varphi_0 = 30^\circ : k = \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 1,7320508, k > 1$$

Como se ve en los ejemplos, las longitudes de los paralelos son incorrectas, menores que las reales dentro de los paralelos bases a ambos lados del Ecuador, y mayores que las reales fuera de los paralelos bases hacia el Polo Norte o hacia el Polo Sur.

Los meridianos se proyectan según rectas paralelas equiespaciadas, perpendiculares a los paralelos y de longitud incorrecta. La deformación en cada punto de los meridianos se calcula con el módulo de alteración lineal  $h : h = \frac{dm'}{dm}$ , siendo  $dm' = dY' = d \left[ R \frac{\text{sen } \varphi}{\cos \varphi_0} \right] = \frac{R}{\cos \varphi_0} \cos \varphi d\varphi$  y  $dm = Rd\varphi$ . Entonces:  $h = \frac{R \cos \varphi d\varphi}{Rd\varphi \cos \varphi_0} = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0}$ .

Nótese que este valor es recíproco del de  $k$ . Por lo tanto,  $hk = 1$ .

Obsérvese que:

$$\text{si } \varphi = 0^\circ \Rightarrow h > 1;$$

$$\text{si } 0^\circ < \varphi < \varphi_0 \Rightarrow h > 1;$$

$$\text{si } \varphi = \varphi_0 \Rightarrow h = 1;$$

si  $\varphi > \varphi_0 \Rightarrow h < 1$ .

### Ejemplos

$$\varphi = 15^\circ; \varphi_0 = 30^\circ N : h = \frac{\cos 15^\circ}{\cos 30^\circ} = 1,11535507, h > 1.$$

$$\varphi = 60^\circ N; \varphi_0 = 30^\circ N : h = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = 0,57735027, h < 1$$

Como muestran los valores obtenidos en los ejemplos, las longitudes de arcos de meridiano en la proyección considerados dentro de los paralelos bases son mayores que las reales y fuera de los paralelos base dichas longitudes son menores que las reales.

Se verifica que esta proyección no es isógona pues  $h \neq k$ , pero sí que es equivalente, pues  $hk = 1$ .

La máxima deformación angular se calcula con la expresión:

$$\delta_{\max} = 2 \arcsen \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

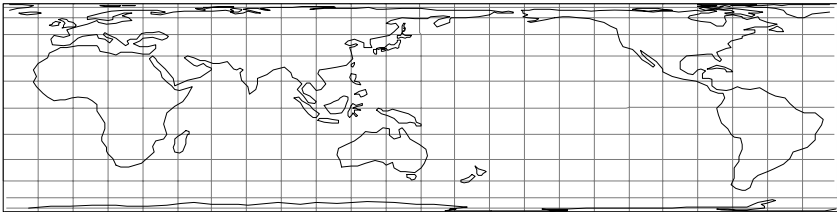
### Ejemplo

Para  $\varphi = 60^\circ$  y  $\varphi_0 = 30^\circ N$  resulta

$$\delta_{\max} = 2 \arcsen \frac{1,7320508 - 0,577214892}{1,7320508 + 0,577214892} = 60^\circ 00' 42''$$

### 4.9.5 Usos

Como toda proyección equivalente, es utilizada para mapas con fines estadísticos, políticos y catastrales.



**Figura 4.23:** Proyección cilíndrica normal secante equivalente ( $\varphi_0 = \pm 30^\circ$ ).

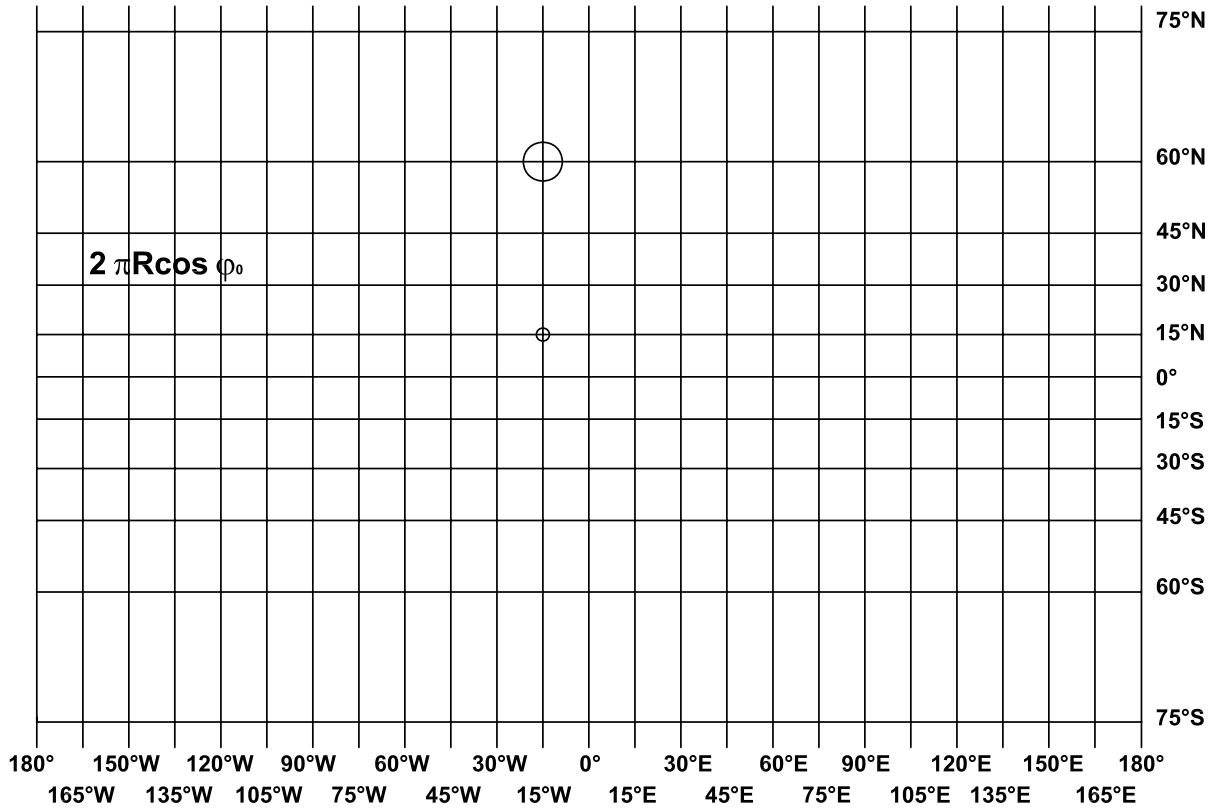


Figura 4.24: Proyección Mercator secante en la esfera.

## 4.10 Proyección cilíndrica normal secante isógona (Mercator secante en la esfera)

### 4.10.1 Dibujo:(Figura 4.24)

Una vez determinada la escala, teniendo en cuenta que sobre los paralelos bases las longitudes son correctas, se traza el Ecuador con la longitud del paralelo base y se lo divide en partes iguales de acuerdo con la diferencia de longitud geográfica estipulada para dibujar los meridianos. Se trazan estos últimos perpendiculares al Ecuador y espaciados entre sí  $R \cos \varphi_0 \Delta \lambda$  (expresando  $\Delta \lambda$  en radianes) o bien  $R \cos \varphi_0 \Delta \lambda \frac{\pi}{180^\circ}$  (si se expresa  $\Delta \lambda$  en el sistema sexagesimal).

Como la proyección es isógona, los ángulos respectivos son iguales. En las Figuras 4.25 y 4.26 se observa que  $\hat{1} = \hat{1}'$ ;  $\hat{2} = \hat{2}'$  y  $\hat{3} = \hat{3}'$ . Por lo tanto, el triángulo  $P_1P_2P_3$  es semejante al triángulo  $P'_1P'_2P'_3$ , resultando proporcionales sus lados homólogos. Entonces  $\frac{P'_2P'_3}{P_2P_3} = \frac{P'_1P'_3}{P_1P_3}$

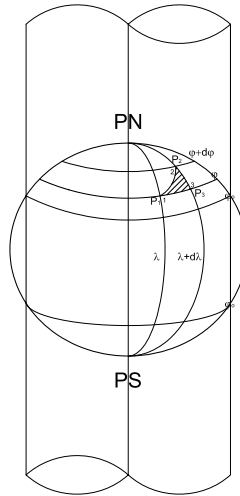


Figura 4.25: Proyección Mercator secante en la esfera. Cálculo de coordenadas.

Reemplazando por sus valores:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{Rd\varphi} &= \frac{R \cos \varphi_0 d\lambda}{R \cos \varphi d\lambda} \\ dY &= \frac{\cos \varphi_0 d\lambda R d\varphi}{\cos \varphi d\lambda} \end{aligned}$$



Integrando:

$$\int dY = R \cos \varphi_0 \int \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi$$

$$Y = R \cos \varphi_0 \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$$

Por otra parte:

$$dX = R \cos \varphi_0 d\lambda$$

$$\int dX = R \cos \varphi_0 \int d\lambda$$

$$X = R \cos \varphi_0 \lambda$$

Si el meridiano de origen no es el meridiano de  $0^\circ$  (Greenwich), sino el de longitud  $\lambda_0$ :

$$X = R \cos \varphi_0 (\lambda - \lambda_0)$$

### Nota

Cuando se utiliza la proyección Mercator secante para una región alejada del Ecuador, éste no aparece en el mapa, por lo cual es necesario tener una expresión que permita el cálculo de las ordenadas ( $Y'$ ) con respecto al paralelo base ( $\varphi_0$ ) (Figura 4.26):

$$Y' = Y - Y_{\varphi_0} = R \cos \varphi_0 \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - R \cos \varphi_0 \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

Nótese que el segundo término del miembro de la derecha es una constante.

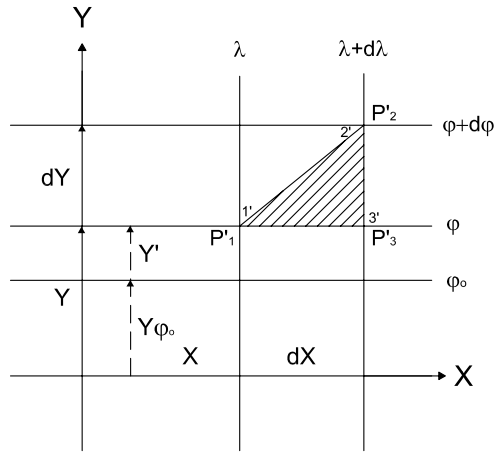
### Ejemplo

En un mapa de la Península Antártica en proyección Mercator secante en la esfera, dibujado en escala 1 : 1 500 000, con paralelo base en  $\varphi_0 = 67^\circ 15' S$  y meridiano central en  $\lambda_0 = 64^\circ W$ , se desean hallar las coordenadas de un punto ( $\varphi = 62^\circ S, \lambda = 52^\circ W$ ) con respecto al sistema de ejes ( $\varphi_0, \lambda_0$ ) (Figura 4.27).

$$Y' = R \cos \varphi_0 \left[ \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right) \right]$$

$$= 6\,370\,km \cos(-67^\circ 15') \left[ \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{62^\circ}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{67^\circ 15'}{2} \right) \right]$$

$$Y' = 528,543\,km$$

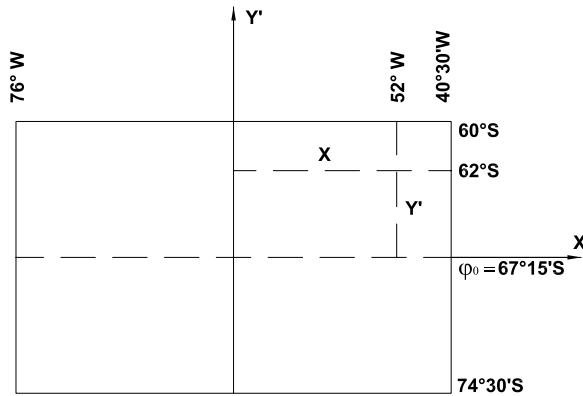


**Figura 4.26:** Proyección Mercator secante en la esfera. Coordenadas cartesianas.

En el mapa, en escala 1 : 1 500 000, es una longitud:  $Y' = 35,24cm$ .

$$X = R \cos \varphi_0 (\lambda - \lambda_0) = 6\,370km \cos 67^\circ 15' \left[ -52^\circ - (-64^\circ) \right] \frac{\pi}{180^\circ} = 515,922km.$$

En el mapa, en escala 1 : 1 500 000, es una longitud:  $X = 34,39cm$ .



**Figura 4.27:** Cálculo de coordenadas. Ejemplo.

#### 4.10.2 Características y propiedades

Los paralelos y el Ecuador se proyectan según rectas de longitudes incorrectas a excepción de los paralelos bases que son de longitudes reales.

Los paralelos se van alejando entre sí al alejarse del Ecuador. La deformación en cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ .

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}} = \frac{2\pi R \cos \varphi_0}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}$$

### Ejemplos

$$1) \quad \varphi = 15^\circ N, \text{ siendo } \varphi_0 = 30^\circ N : k = \frac{\cos 30^\circ}{\cos 15^\circ} = 0,896575464; k < 1$$

$$2) \quad \varphi = 60^\circ N, \text{ siendo } \varphi_0 = 30^\circ : k = \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 1,7320508; k > 1$$

Como se observa en los valores obtenidos en los ejemplos, las longitudes de los paralelos entre los paralelos bases son menores que las reales, y fuera de los paralelos bases, dirigiéndose hacia los Polos, mayores que las reales. Es decir:

$$\text{si } \varphi > \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi < \cos \varphi_0 \Rightarrow k > 1;$$

$$\text{si } \varphi < \varphi_0 \Rightarrow \cos \varphi > \cos \varphi_0 \Rightarrow k < 1.$$

Los meridianos se proyectan según rectas paralelas equiespaciadas perpendiculares a los paralelos, de longitudes infinitas. La deformación en cada punto del meridiano se calcula con el módulo de alteración lineal  $h$ ,  $h = \frac{dm'}{dm}$ , donde

$$\begin{aligned} dm' = dY &= d \left[ R \cos \varphi_0 \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\ &= R \cos \varphi_0 \frac{1}{\operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \cos^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} \frac{1}{2} \\ &= \frac{R \cos \varphi_0}{2 \operatorname{sen} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} \\ &= R \cos \varphi_0 \frac{d\varphi}{\operatorname{sen} 2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} \\ &= \frac{R \cos \varphi_0 d\varphi}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

y  $dm = R d\varphi$

$$\text{Entonces } h = \frac{R \cos \varphi_0 d\varphi}{\cos \varphi} \frac{1}{R d\varphi} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}$$

$$\text{Por lo tanto, } h = k = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}$$

Con los demás valores obtenidos se deduce que las longitudes tomadas sobre los meridianos entre los paralelos bases son menores que las reales y fuera de los paralelos bases son mayores que las reales. Además, se observa que los valores de  $h$  y  $k$  son iguales en cada punto; por lo tanto, la proyección es isógona. No es equivalente pues  $hk \neq 1$ .

### 4.10.3 Usos

Para mapas de navegación.

## 4.11 Proyección cilíndrica secante normal isógona o conforme (proyección de Mercator secante en el elipsoide)

El Ecuador está representado por una recta de longitud igual a la de los paralelos base:  $2\pi N_0 \cos \varphi_0$ . Los meridianos son rectas paralelas de longitud infinita equiespaciadas perpendiculares al Ecuador y separadas entre sí una amplitud  $N_0 \cos \varphi_0 \Delta\lambda$  (en radianes), o bien  $N_0 \cos \varphi_0 \Delta\lambda \frac{\pi}{180^\circ}$  (en grados sexagesimales).

Los paralelos están a una distancia  $Y$  del Ecuador de acuerdo con la condición de isogonía o conformidad que se deduce a continuación.

Como se observa en la Figura 4.28:  $\hat{1} = \hat{1}'$ ,  $\hat{2} = \hat{2}'$ ,  $\hat{3} = \hat{3}'$ . Por lo tanto, los triángulos  $P_1P_2P_3$  y  $P'_1P'_2P'_3$  son semejantes y sus lados homólogos son proporcionales:

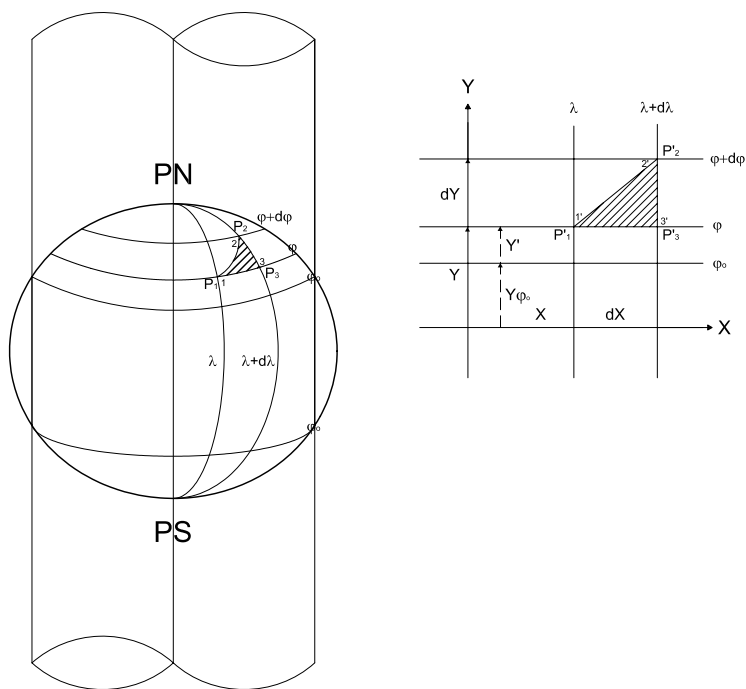
$$\frac{P'_3P'_2}{P_2P_3} = \frac{P'_1P'_3}{P_1P_3}$$

Como  $P'_3P'_2 = dY$ ,  $P'_1P'_3 = dX = N_0 \cos \varphi_0 d\lambda$ ,  $P_3P_2 = \rho d\varphi$  y  $P_1P_3 = N \cos \varphi d\lambda$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{\rho d\varphi} &= \frac{N_0 \cos \varphi_0 d\lambda}{N \cos \varphi d\lambda} \\ dY &= \frac{\rho d\varphi N_0 \cos \varphi_0}{N \cos \varphi} \\ \int dY &= N_0 \cos \varphi_0 \int \frac{a(1-e^2)(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}} \cos \varphi} \\ Y &= N_0 \cos \varphi_0 \left[ \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi} \right] \\ dX &= N_0 \cos \varphi_0 d\lambda \\ \int dX &= N_0 \cos \varphi_0 \int d\lambda \end{aligned}$$

$X = N_0 \cos \varphi_0 \lambda$ , si  $\lambda_0 = 0^\circ$  (meridiano de Greenwich) y

$X = N_0 \cos \varphi_0 d\Delta\lambda$ , siendo  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ , si el meridiano central es de longitud  $\lambda_0$ .



**Figura 4.28:** Proyección de Mercator secante en el elipsoide. Cálculo de coordenadas.

### Nota

Cuando se aplica la proyección Mercator secante a una región lejana al Ecuador, éste no aparece en la carta por lo que es necesario tener una expresión que permita el cálculo de las ordenadas ( $Y$  en la Figura 4.28), con origen en el paralelo base ( $\varphi_0$ ).

$$Y' = Y - Y_{\varphi_0} = N_0 \cos \varphi_0 \left[ \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \right] - N_0 \cos \varphi_0 \left[ \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi_0}{1 + e \operatorname{sen} \varphi_0} \right]$$

### Ejemplos

Se tiene una carta “Islas Malvinas”, en escala 1 : 500 000 en la latitud media  $\varphi_0 = 52^\circ S$  en proyección Mercator, que comprende una ex-

tensión según el croquis de la Figura 4.29. Se desean calcular las coordenadas del punto ( $\varphi = 51^\circ S; \lambda = 56^\circ 30' W$ ), siendo el meridiano central  $\lambda_0 = 59^\circ 30' W$ .

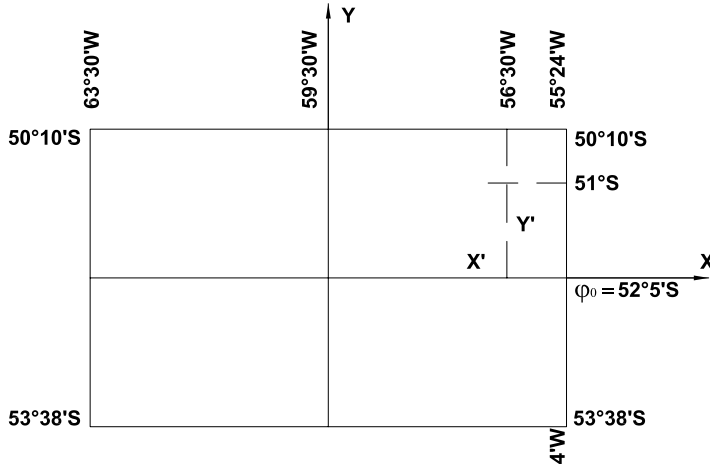


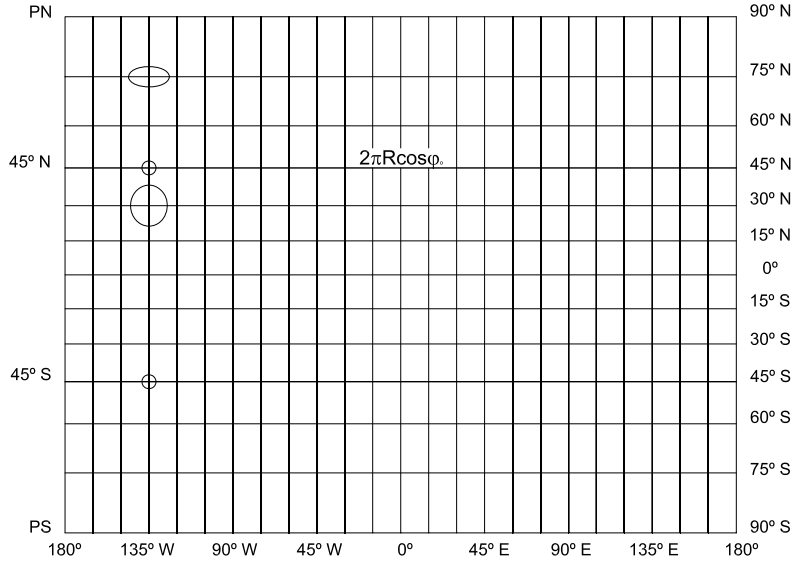
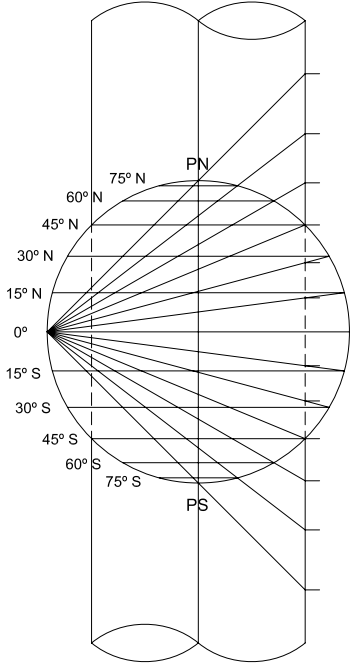
Figura 4.29: Proyección de Mercator secante en el elipsoide. Ejemplo.

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_0)^{\frac{1}{2}}} \cos \varphi (\lambda - \lambda_0) \\
 X &= \frac{6\,378,388 \text{ km}}{(1 - 0,006722670022 \operatorname{sen}^2(-52^\circ))^{\frac{1}{2}}} \cos(-52^\circ) (-56^\circ 30' + 59^\circ 30') \frac{\pi}{180^\circ} \\
 &= 206,032 \text{ km}.
 \end{aligned}$$

En la escala de la carta resulta  $X = 41,2 \text{ cm}$ .

$$\begin{aligned}
 Y' &= Y - Y_{\varphi_0} = N_0 \cos \varphi_0 \left[ \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \right] - \\
 &\quad - N_0 \cos \varphi_0 \left[ \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_0}{2} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi_0}{1 + e \operatorname{sen} \varphi_0} \right] \\
 Y' &= 6\,391,376 \text{ km} \times \cos(-52^\circ) \left\{ \left[ \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{51^\circ}{2} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \operatorname{sen}(-51^\circ)}{1 + e \operatorname{sen}(-51^\circ)} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - N_0 \cos \varphi_0 \left[ \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{52^\circ}{2} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \operatorname{sen}(-52^\circ)}{1 + e \operatorname{sen}(-52^\circ)} \right] \right\} \\
 Y' &= 110,0396 \text{ km}. \text{ En la escala de la carta es } Y' = 22,01 \text{ cm}.
 \end{aligned}$$

Figura 4.30: Proyección de Gall.



## 4.12 Proyección de Gall

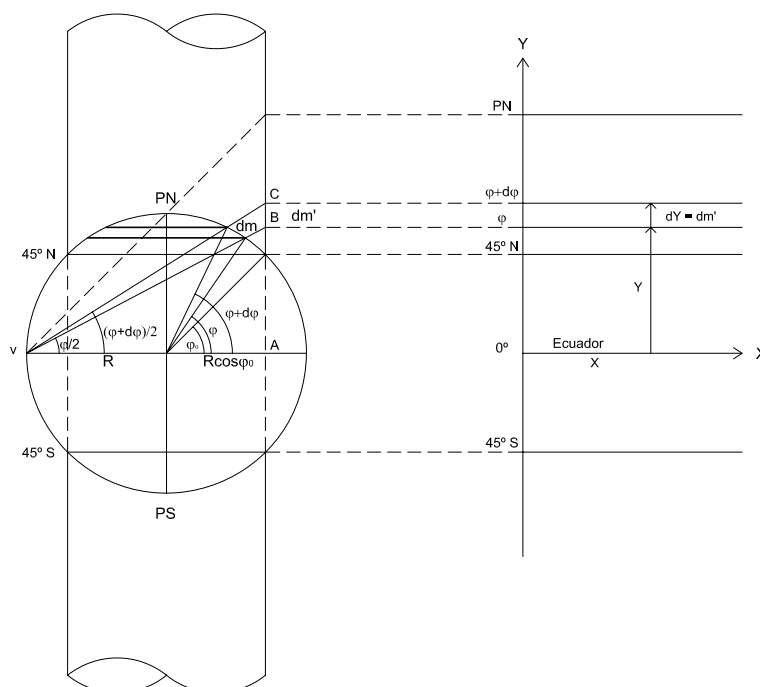
### 4.12.1 Dibujo de la proyección

Resulta de un proceso gráfico basado en proyectar desde un punto del Ecuador que se desplaza por el mismo, los puntos de la superficie de referencia esférica sobre la generatriz opuesta de una superficie cilíndrica que intercepta a la superficie terrestre a lo largo de los paralelos de 45°N y 45°S (ver Figuras 4.30 y 4.32).

**Proceso analítico**(ver Figura 4.31)

$$Y = (R + R \cos \varphi_0) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = R(1 + \cos \varphi_0) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

$$X = R \cos \varphi_0 \lambda$$



**Figura 4.31:** Proyección de Gall. Cálculo de coordenadas.



### 4.12.2 Características y propiedades

El Ecuador y los paralelos se proyectan según rectas paralelas de longitudes iguales a la de los paralelos bases. La deformación en cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ .

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}} = \frac{2\pi R \cos \varphi_0}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}$$

siendo  $\varphi_0 = \pm 45^\circ$ .

#### Ejemplos

- 1)  $\varphi = 30^\circ$ , siendo  $\varphi_0 = 45^\circ N$  :  $k = \frac{\cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} = 0,8164965803$ .
- 2)  $\varphi = 60^\circ N$ , siendo  $\varphi_0 = 45^\circ$  :  $k = \frac{\cos 45^\circ}{\cos 60^\circ} = 1,41421356$ .
- 3)  $\varphi = 90^\circ N$ , siendo  $\varphi_0 = 45^\circ$  :  $k = \frac{\cos 45^\circ}{\cos 90^\circ} \rightarrow \infty$

Como se observa en los valores obtenidos, la longitud de los paralelos entre los paralelos bases es menor que la real y fuera de los paralelos bases, mayor que la real.

Los meridianos se proyectan según rectas paralelas, equiespaciadas, perpendiculares a los paralelos, calculándose la deformación en cada punto de meridiano con el módulo de alteración lineal  $h$ . Los meridianos son de longitudes finitas e incorrectas mayores que las reales en los arcos comprendidos entre  $45^\circ$  y los Polos, y menores que las reales entre los paralelos de  $45^\circ$  norte y sur.

$$h = \frac{dm'}{dm} = \frac{dY}{Rd\varphi} = \frac{d[R(1 + \cos \varphi_0) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}]}{Rd\varphi} = \frac{(1 + \cos \varphi_0) \frac{1}{2} d\varphi}{d\varphi \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{(1 + \cos \varphi_0)}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Como  $1 = \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} + \operatorname{cos}^2 \frac{\varphi}{2}$  y  $\cos \varphi = \operatorname{cos}^2 \frac{\varphi}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}$ , sumando miembro a miembro es:  $1 + \cos \varphi = 2 \operatorname{cos}^2 \frac{\varphi}{2}$ , de donde se obtiene que:  $\operatorname{cos}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{2}$ . Reemplazando esta expresión en  $h$ :

$$h = \frac{1 + \cos \varphi_0}{2 \frac{1 + \cos \varphi}{2}} = \frac{1 + \cos \varphi_0}{1 + \cos \varphi}$$

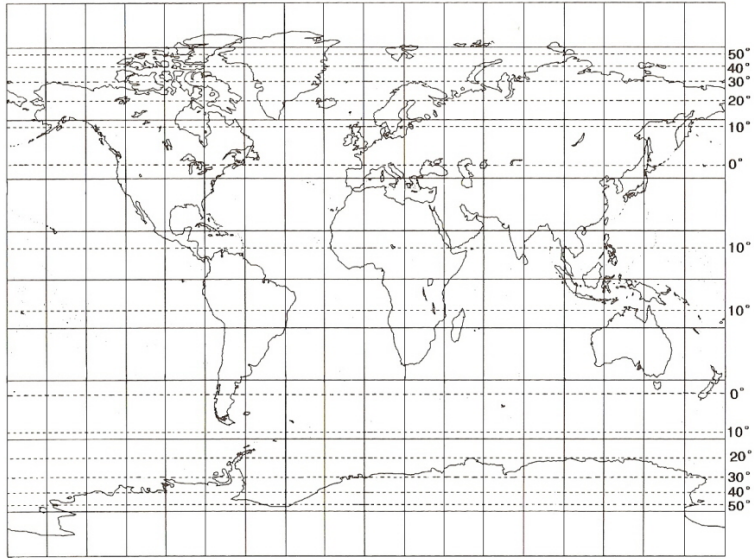


Figura 4.32: Proyección de Gall.

### Ejemplos

- 1)  $\varphi = 30^\circ$ , siendo  $\varphi_0 = 45^\circ$  :  $h = \frac{1 + \cos 45^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = 0,9148357$ .
- 2)  $\varphi = 60^\circ$ , siendo  $\varphi_0 = 45^\circ$  :  $h = \frac{1 + \cos 45^\circ}{1 + \cos 60^\circ} = 1,1380711$ .

#### 4.12.3 Cálculo de $N_1$ y $N_2$ (semiejes de la Elipse de Tissot)

Puesto que paralelos y meridianos se cortan a  $90^\circ$ ,  $N_1$  y  $N_2$  deben ser iguales a  $h$  o a  $k$ . Se calculan entonces los valores de  $h$  y de  $k$ : el mayor será  $N_1$  y el menor será  $N_2$ .

En los ejemplos anteriores es:

para  $\varphi = 30^\circ$ ,  $k = 0,816496583$  y  $h = 0,9149149$ ; por lo tanto  $N_1 = h$  y  $N_2 = k$  (Ver Figura 4.30);

para  $\varphi = 75^\circ$ ,  $k = 4302,73205081$  y  $h = 1,35611769$ ; por lo tanto  $N_1 = k$  y  $N_2 = h$  (Ver Figura 4.30);

para  $\varphi = \pm 45^\circ$ ,  $k = h = N_1 = N_2 = 1$  (Ver Figura 4.30).

### Otras propiedades

No es isógona pues  $N_1 \neq N_2$ .

El módulo de alteración angular es  $\delta_{\max} = 2 \arcsen \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$ .

Para  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\delta_{\max} = 2 \arcsen \frac{0,9149149 - 0,816496583}{0,9149149 + 0,816496583} = 11^\circ 17' 46''$ .

Para  $\varphi = 60^\circ$ ,  $\delta_{\max} = 2 \arcsen \frac{1,41421356 - 1,138156442}{1,41421356 + 1,138156442} = 12^\circ 25' 05''$ .

### Nota

Las líneas que unen puntos de igual deformación angular son rectas paralelas al Ecuador (Ver Figura 4.32). Las líneas de igual deformación angular aparecen en líneas de rayas.

#### 4.12.4 Aplicaciones

La proyección de Gall se encuentra en algunos atlas. No es equivalente ni isógona pero da una buena representación del mundo: evita las excesivas deformaciones de la proyección Mercator en las altas latitudes y disminuye las deformaciones de las proyecciones equivalentes.



## Capítulo 5

### Proyecciones cilíndricas transversas

#### 5.1 Conceptos generales

En estas proyecciones la superficie de proyección es un cilindro tangente a la superficie terrestre a lo largo de dos meridianos terrestres opuestos (el meridiano central y su opuesto), de modo que el eje de la superficie cilíndrica es normal al eje de la Tierra.

Para relacionar estas proyecciones cilíndricas con las normales, se considera que en estas últimas la superficie cilíndrica gira  $90^\circ$ , con lo cual el eje se dispone perpendicular al eje terrestre y contiene a los seudo Polos. La circunferencia de tangencia será el seudo Ecuador (Figura 5.1). Los seudo meridianos son las semicircunferencias máximas que pasan por los seudo Polos y los seudos paralelos serán las circunferencias menores paralelas al seudo Ecuador.

Con las hipótesis citadas se tendrá que las seudo coordenadas de un punto son: la seudo latitud -latitud transversa ( $\varphi_T$ )- y la seudo longitud -longitud transversa ( $\lambda_T$ )-. Es por esto que se deducirán las mismas fórmulas antes obtenidas, con el reemplazo de  $\varphi$  por  $\varphi_T$  y de  $\lambda$  por  $\lambda_T$ .

Una vez obtenidas las fórmulas en función de  $\varphi_T$  y  $\lambda_T$  para cada tipo de proyección, se referirán a los valores de  $\varphi$  y  $\lambda$ , para lo cual se resuelve el triángulo esférico formado por el punto considerado ( $A$ ) de la superficie

terrestre, el Polo terrestre y el seudo Polo.

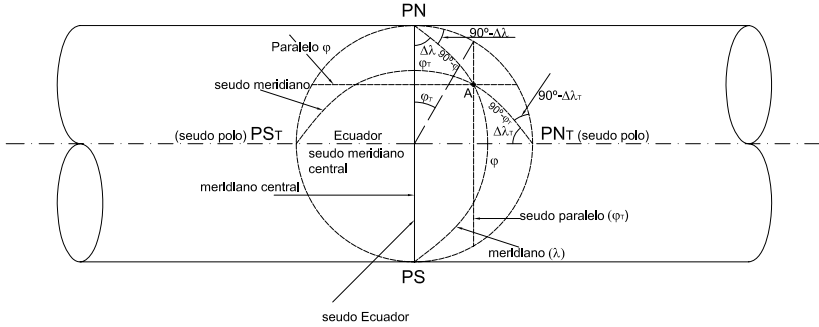


Figura 5.1: Proyecciones cilíndricas transversas.

### 5.1.1 Relaciones entre las coordenadas geográficas ( $\varphi$ y $\lambda$ ) y las seudo coordenadas

En la Figura 5.1, por el teorema del coseno, se tiene que:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \varphi) &= \cos 90^\circ \cos(90^\circ - \varphi_T) + \sin 90^\circ \sin(90^\circ - \varphi_T) \cos(90^\circ - \Delta\lambda_T) \\ \text{sen } \varphi &= \cos \varphi_T \text{ sen } \Delta\lambda_T \end{aligned} \quad (5.1)$$

Además:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \varphi_T) &= \cos(90^\circ - \varphi) \cos 90^\circ + \sin(90^\circ - \varphi) \sin 90^\circ \cos(90^\circ - \Delta\lambda) \\ \text{sen } \varphi_T &= \cos \varphi \text{ sen } \Delta\lambda \end{aligned} \quad (5.2)$$

A partir de esta ecuación es posible obtener  $\varphi_T = \arcsen[\cos \varphi \text{ sen } \Delta\lambda]$ .

Aplicando el teorema del seno al mismo triángulo, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}(90^\circ - \varphi)}{\text{sen}(90^\circ - \Delta\lambda_T)} &= \frac{\text{sen}(90^\circ - \varphi_T)}{\text{sen}(90^\circ - \Delta\lambda)} \\ \frac{\cos \varphi}{\cos \Delta\lambda_T} &= \frac{\cos \varphi_T}{\cos \Delta\lambda} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\cos \varphi \cos \Delta\lambda = \cos \varphi_T \cos \Delta\lambda_T \quad (5.3)$$

Dividiendo miembro a miembro las expresiones 5.1 y 5.3, se tiene:

$$\text{tg } \varphi \text{ sec } \Delta\lambda = \text{tg } \Delta\lambda_T$$

pudiendo obtenerse el valor de

$$\Delta\lambda_T = \text{arc tg}[\text{tg}\varphi \sec\Delta\lambda] \quad (5.4)$$

Las proyecciones cilíndricas transversas tangentes pueden clasificarse en los siguientes tipos:

- Pura, central o perspectiva.
- Equidistante (de Cassini, de Soldner o de Hatt).
- Equivalente.
- Conforme (de Gauss), llamada también Mercator Transversa.

## 5.2 Proyección cilíndrica transversa tangente pura, central o perspectiva

### 5.2.1 Dibujo de la proyección

Se supone la superficie terrestre con la superficie de proyección cilíndrica tangente a lo largo de dos meridianos opuestos, siendo el eje de la superficie cilíndrica normal al eje terrestre. El centro de proyección, o punto de vista, se encuentra en el centro de la esfera terrestre (Figura 5.2).

Para deducir las fórmulas de las coordenadas cartesianas de la proyección de un punto de la superficie terrestre en esta proyección, se hallan las coordenadas de la proyección cilíndrica normal tangente pura supuesta girada  $90^\circ$  la esfera terrestre, en función de las coordenadas geográficas ficticias ( $\varphi_T$  y  $\lambda_T$ ) y resolviendo el triángulo esférico mencionado en los conceptos generales. De acuerdo con lo visto en la *Proyección cilíndrica normal tangente pura* (Capítulo 4), las coordenadas son:

$$\begin{cases} X = R\Delta\lambda_T \\ Y = R\text{tg}\varphi_T \end{cases}$$

En el triángulo esférico  $PN A PN_T$  de la Figura 5.1, y según la fórmula 5.4:

$$\Delta\lambda_T = \text{arc tg}[\text{tg}\varphi \sec\Delta\lambda]$$

Por lo tanto:

$$X = R\Delta\lambda_T = R\text{arc tg}[\text{tg}\varphi \sec\Delta\lambda] \quad (5.5)$$

$\varphi \setminus \lambda$		0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	X	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Y	0,000	1706,836	3677,721	6370,000	11033,164	23773,164	$\infty$
15°	X	1667,662	1723,705	1911,377	2307,330	3133,736	5113,332	10005,973
	Y	0,000	1644,727	3513,397	5956,671	9724,767	16516,324	23773,164
30°	X	3335,324	3431,768	3745,577	4361,166	5459,548	7321,469	10005,973
	Y	0,000	1465,074	3060,049	4934,181	7222,901	9724,767	11033,164
45°	X	5002,986	5113,383	5459,548	6085,366	7052,537	8392,696	10005,973
	Y	0,000	1185,819	2407,634	3677,712	4934,180	5956,671	6370,000
60°	X	6670,648	6765,432	7052,537	7536,982	8215,780	9061,100	10005,973
	Y	0,000	831,329	1644,727	2407,634	3060,049	3513,397	3677,721
75°	X	8338,310	8392,696	8553,515	8813,196	9157,606	9564,917	10005,973
	Y	0,000	427,670	831,329	1185,819	1465,074	1644,727	1706,836
90°	X	10005,973	10005,973	10005,973	10005,973	10005,973	10005,973	10005,973
	Y	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

**Tabla 5.1:** PROYECCIÓN CILÍNDRICA TRANSVERSA TANGENTE PURA.



Además, por la fórmula 5.2  $\varphi_T = \arcsen[\cos\varphi \operatorname{sen}\Delta\lambda]$  y, entonces:

$$Y = R \operatorname{tg}[\arcsen(\cos\varphi \operatorname{sen}\Delta\lambda)] \quad (5.6)$$

Las expresiones 5.5 y 5.6 permiten calcular las coordenadas cartesianas de un punto cualquiera de la proyección cilíndrica transversa tangente pura. En la Figura 5.2 se ha dibujado la proyección utilizando las coordenadas de los puntos que aparecen en la Tabla 5.1.

### 5.2.2 Características y propiedades

El meridiano central se proyecta según un segmento de recta de longitud correcta. El Ecuador lo hace en una recta normal al meridiano central, de longitud infinita. Los meridianos, con excepción del central, se proyectan según curvas trascendentes cuyas concavidades están dirigidas al meridiano central.

Las proyecciones de los paralelos son curvas trascendentes que presentan sus concavidades hacia los Polos respectivos y cortan al meridiano central en partes iguales.

En esta proyección un punto cualquiera presenta una deformación en sentido norte-sur que se puede calcular con el módulo de alteración lineal transverso de los paralelos de la proyección cilíndrica normal tangente pura ( $k_T$ ). En el Capítulo 4 se ha deducido que en la proyección cilíndrica normal tangente pura  $k = \sec\varphi$ ; en la proyección cilíndrica transversa tangente pura será entonces:

$$k_T = \sec\varphi_T$$

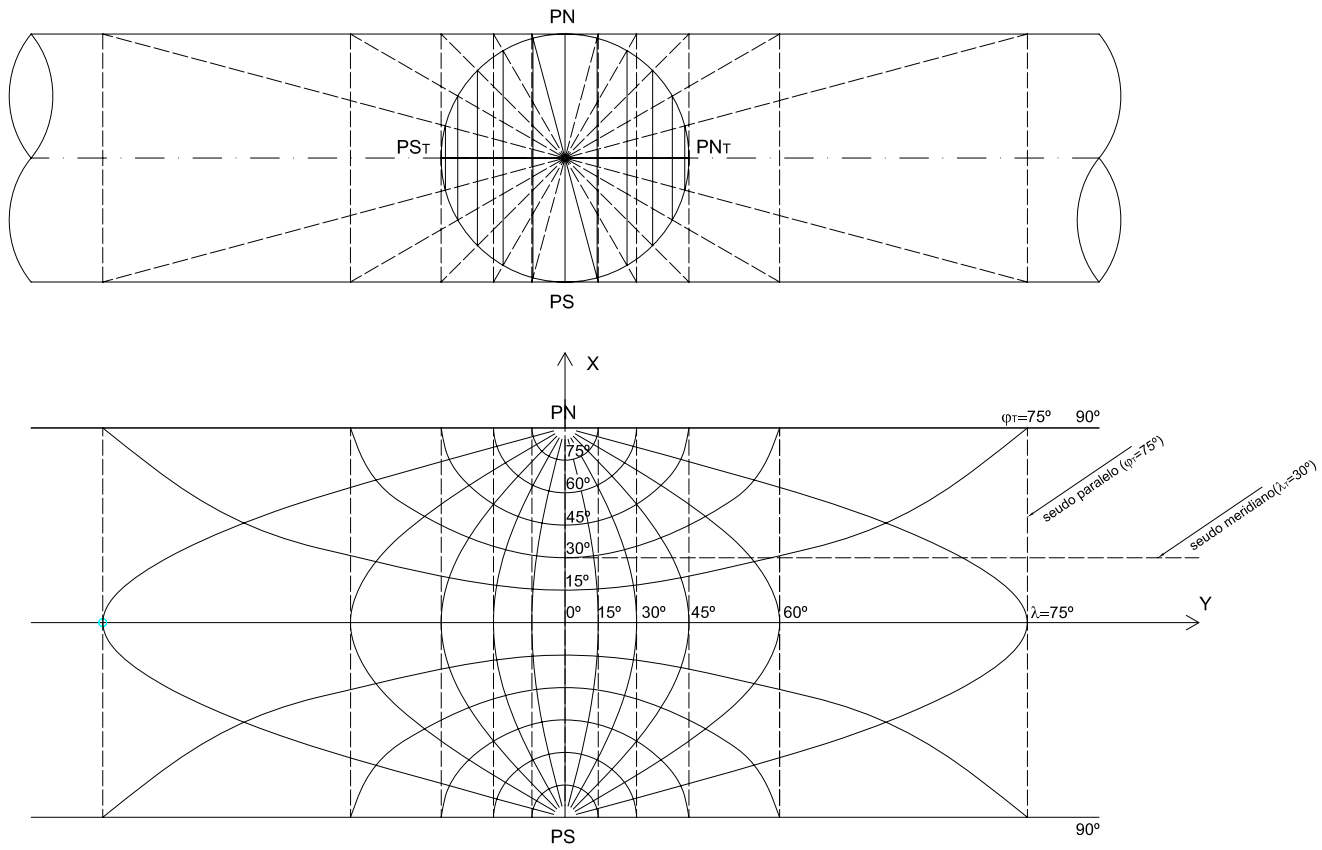
siendo  $\varphi_T = \arcsen[\cos\varphi \operatorname{sen}\Delta\lambda]$ . Por lo tanto:

$$N_2 = k_T = \sec[\arcsen(\cos\varphi \operatorname{sen}\Delta\lambda)] \quad (5.7)$$

En un punto, la deformación en el sentido este-oeste está dada por:

$$N_1 = h_T = \sec^2\varphi_T = \sec^2[\arcsen(\cos\varphi \operatorname{sen}\Delta\lambda)] \quad (5.8)$$

De acuerdo con las expresiones 5.7 y 5.8, en un punto de esta proyección la deformación en el sentido este-oeste es mayor que en el sentido norte-sur.



**Figura 5.2:** Proyección cilíndrica transversa tangente pura, central o perspectiva.

Esta proyección no es isógona pues  $N_2 \neq N_1$ ; tampoco es equivalente pues  $N_1 N_2 \neq 1$ .

**Ejemplo:**

En la Figura 5.2 se considera el punto  $A(\varphi = 30^\circ N; \lambda = 60^\circ E)$ . Se desea:

- a) hallar los valores de las coordenadas cartesianas;
- b) hallar los valores de los módulos de alteración lineal en el sentido norte-sur ( $k_T$ ) y en el sentido este-oeste ( $h_T$ );
- c) dibujar la Elipse de Tissot en el punto (en escala).
- d) Hallar el valor del error máximo angular.

a)  $X = R \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} \varphi \sec \lambda) = 6\,370 \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} 30^\circ \sec 60^\circ) = 5\,459,548 \operatorname{km}$

$$Y = R \operatorname{tg}[\operatorname{arc\,sen}(\cos \varphi \operatorname{sen} \lambda)] =$$

$$= 6\,370 \operatorname{km} \operatorname{tg}[\operatorname{arc\,sen}(\cos 30^\circ \operatorname{sen} 60^\circ)] = 7\,222,901 \operatorname{km}$$

b)  $k_T = N_2 = \sec[\operatorname{arc\,sen}(\cos \varphi \operatorname{sen} \lambda)] =$

$$= \sec[\operatorname{arc\,sen}(\cos 30^\circ \operatorname{sen} 60^\circ)] = 1,51186$$

$$h_T = N_1 = \sec^2[\operatorname{arc\,sen}(\cos \varphi \operatorname{sen} \lambda)] =$$

$$= \sec^2[\operatorname{arc\,sen}(\cos 30^\circ \operatorname{sen} 60^\circ)] = 2,285721$$

c) Ver figura 5.3.

d)  $\delta_{\max} = 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} = 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{2,285721 - 1,51186}{2,285721 + 1,51186} = 23^\circ 30' 56''$

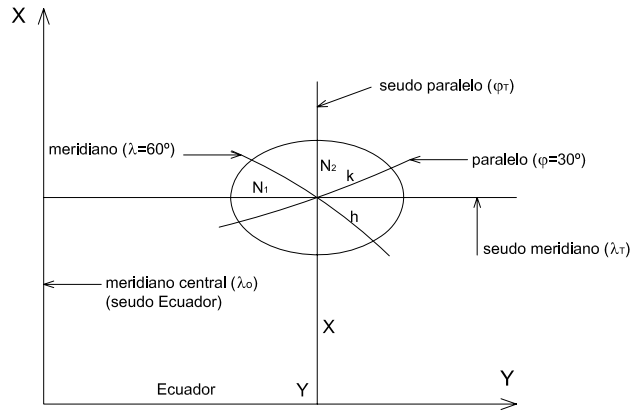
**5.2.3 Usos**

Por presentar gran deformación en sentido este-oeste se presta sólo para ser usada para representar regiones poco extendidas a ambos lados del meridiano central.

**5.3 Proyección cilíndrica transversa tangente equidistante (de Cassini, de Soldner o de Hatt)**

**5.3.1 Dibujo de la proyección (Figura 5.4)**

Se obtiene, a partir de las ecuaciones de representación, relacionando las coordenadas geográficas  $\varphi$  y  $\lambda$  y las pseudo coordenadas, como se expli-



**Figura 5.3:** *Elipse indicatriz de Tissot.*

cara en Conceptos generales al comienzo de este capítulo, a partir de la proyección cilíndrica normal tangente equidistante; en ella las ecuaciones de las coordenadas cartesianas son:

$$X = R\Delta\lambda$$

$$Y = R\varphi$$

En la proyección transversa se considera girado  $90^\circ$  el eje de la superficie cilíndrica de proyección, con lo cual las coordenadas cartesianas resultan:

$$X = R\Delta\lambda_T$$

$$Y = R\varphi_T$$

Aplicando las relaciones entre las coordenadas  $(\varphi$  y  $\lambda)$  y las pseudo coordenadas  $(\varphi_T$  y  $\lambda_T)$  se tiene:

$$\text{sen } \varphi_T = \cos \varphi \text{ sen } \Delta\lambda$$

$$\text{tg } \Delta\lambda_T = \text{tg } \varphi \text{ sec } \Delta\lambda$$

obteniéndose de estas ecuaciones  $\varphi_T = \text{arc sen}(\cos \varphi \text{ sen } \Delta\lambda)$  y  $\Delta\lambda_T = \text{arc tg}(\text{tg } \varphi \text{ sec } \Delta\lambda)$ . Entonces:

$$X = R \text{arc tg}(\text{tg } \varphi \text{ sec } \Delta\lambda)$$

$$Y = R \text{arc sen}(\cos \varphi \text{ sen } \Delta\lambda)$$

En la Figura 5.4 se ha dibujado la proyección utilizando las coordenadas de los puntos que aparecen en la Tabla 5.2.

### 5.3.2 Características y propiedades

El meridiano central queda representado por un segmento de recta de longitud correcta. Los demás meridianos son curvas trascendentes que presentan su concavidad hacia el meridiano central y cortan al Ecuador en partes iguales. La deformación según las líneas rectas paralelas al meridiano central (seudo paralelos) está dada por el módulo de alteración lineal ficticio  $k_T$ :

$$k_T = \sec \varphi_T = \frac{1}{\cos \varphi_T} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_T}}$$

donde  $\sin \varphi_T = \cos \varphi \sin \Delta\lambda$ .

Por lo tanto:  $k_T = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \Delta\lambda}}$ . Por ejemplo, en el Ecuador,  $\varphi = 0^\circ$  y  $\cos \varphi = 1$ , entonces:

$$k_T = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \Delta\lambda}} = \frac{1}{\cos \Delta\lambda} \therefore \cos \Delta\lambda = \frac{1}{k_T}$$

En el Ecuador:  $\varphi_T = \Delta\lambda = \arccos \frac{1}{k_T}$ , y su ordenada es  $Y_T = R\varphi_T$ .

El Ecuador está representado por una recta de longitud correcta, cortada en partes iguales por los meridianos. Todas las rectas paralelas al Ecuador (seudo meridianos) son de longitud correcta ( $h_T = 1$ ).

Por lo tanto, la elipse de Tissot en un punto tiene su eje mayor ( $N_1 = k_T$ ) paralelo al meridiano central y el eje menor ( $N_2 = h_T$ ) paralelo al Ecuador.

Los paralelos se representan según curvas trascendentes que tienen su concavidad dirigida hacia el Polo respectivo. La Figura 5.4 muestra el canevas con el meridiano central de  $0^\circ$  entre  $90^\circ\text{E}$  y  $90^\circ\text{W}$  con intervalos de  $15^\circ$  entre meridianos y entre paralelos.

Esta proyección no es isógona. El error máximo angular se calcula con:

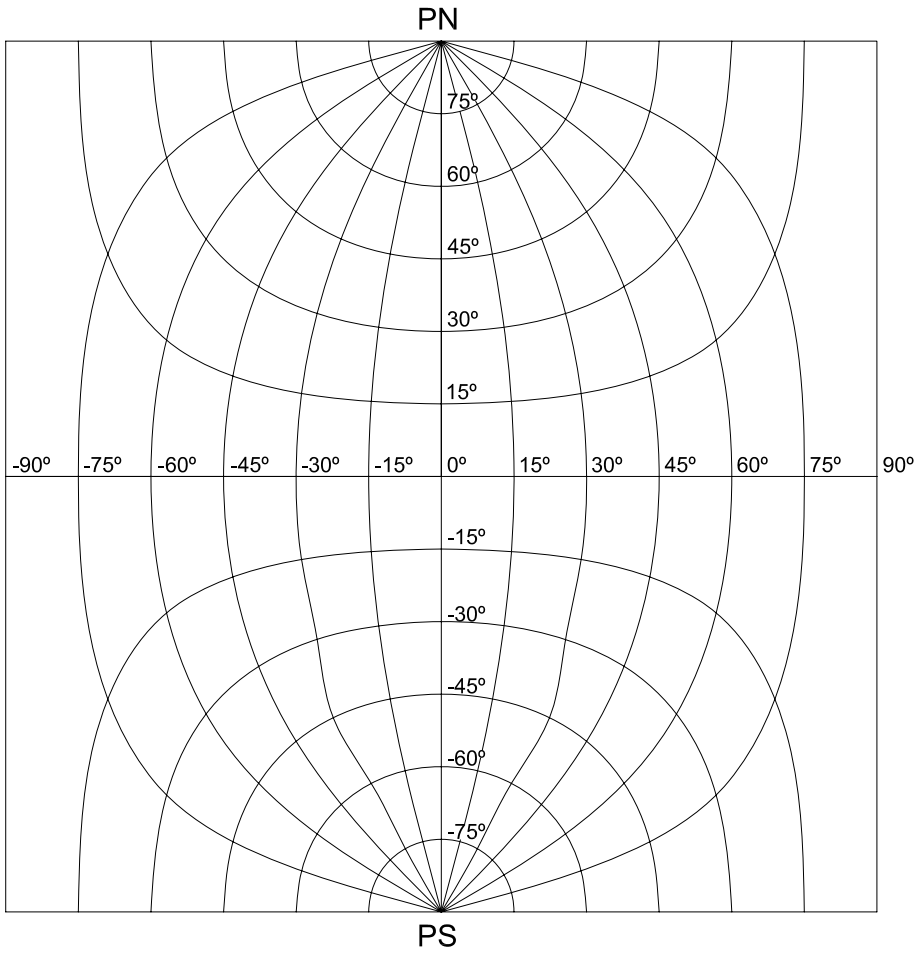
$$\delta_{\max} = 2 \arcsen \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

Tampoco es equivalente. El módulo de alteración areal(o superficial) es:

$$\mu = N_1 N_2 > 1$$

$\varphi \setminus \lambda$		0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	X	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Y	0	1668	3335	5003	6671	8338	10006
15°	X	1668	1724	1911	2307	3134	5113	10006
	Y	0	1610	3210	4789	6312	7661	8338
30°	X	3335	3432	3746	4362	5460	7321	10006
	Y	0	1440	2853	4198	5402	6312	6671
45°	X	5003	5113	5460	6085	7053	8393	10006
	Y	0	1173	2302	3335	4198	4789	5003
60°	X	6671	6765	7053	7537	8216	9061	10006
	Y	0,000	834	1610	2302	2852	3211	3335
75°	X	8338	8393	8554	8813	9158	9565	10006
	Y	0,000	427	827	1172	1440	1610	1668
90°	X	10006	10006	10006	10006	10006	10006	10006
	Y	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

**Tabla 5.2:** PROYECCIÓN CILÍNDRICA TRANSVERSA TANGENTE EQUIDISTANTE.



**Figura 5.4:** *Proyección cilíndrica transversa tangente equidistante.*

### Ejemplo:

En la proyección cilíndrica transversa tangente equidistante, con meridiano central  $\lambda_0 = 0^\circ$ , y considerando el punto  $A(\varphi = 30^\circ N; \lambda = 60^\circ E)$ , se desean calcular los valores de:

- las coordenadas cartesianas del punto  $A$  en la proyección;
  - los módulos de alteración lineal en el punto  $A$  en el sentido norte-sur ( $k_T$ ) y este-oeste ( $h_T$ );
  - el error máximo angular y el módulo de alteración areal.
  - También, dibujar en escala la Elipse de Tissot en  $A$ .
- a)

$$\begin{aligned} X &= R \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \varphi \sec \Delta \lambda) \\ &= 6\,370 \operatorname{km} \operatorname{arc} \operatorname{sen}[\cos 30^\circ \operatorname{sen} 60^\circ] = 5\,402,155 \operatorname{km} \\ Y &= R \operatorname{arcsen}(\cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda) \\ &= 6\,370 \operatorname{km} \operatorname{arc} \operatorname{tg}[\operatorname{tg} 30^\circ \sec 60^\circ] = 5\,459,548 \operatorname{km} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} k_T &= \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \Delta \lambda}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 30^\circ \operatorname{sen}^2 60^\circ}} \\ &= 1,51186 = N_1 \\ h_T &= 1 = N_2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \delta_{\max} &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{1,51186 - 1}{1,51186 + 1} = 23^\circ 30' 57'' \\ \mu &= N_1 N_2 = 1,51186 \end{aligned}$$

d) Elipse de Tissot: Ver Figura 5.5.

### 5.4 Proyección cilíndrica transversa tangente equivalente

Es el aspecto transverso de la proyección CILÍNDRICA NORMAL EQUIVALENTE: se considera girada  $90^\circ$  la superficie cilíndrica tangente, con lo cual su eje se ubica perpendicular al eje terrestre.



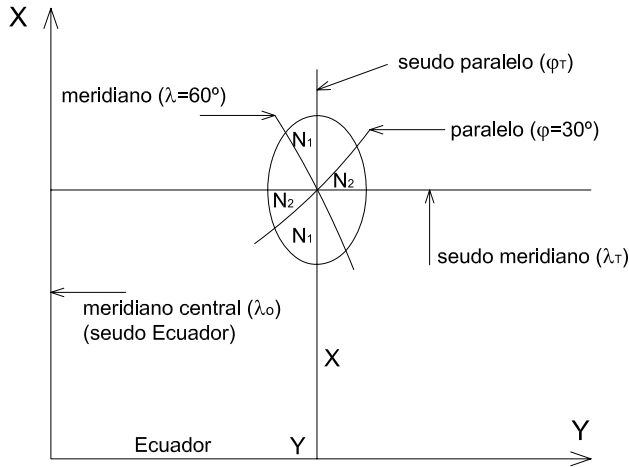


Figura 5.5: Elipse de Tissot.

#### 5.4.1 Dibujo de la proyección: (Figura 5.6)

En la proyección cilíndrica normal tangente equivalente se dedujeron las ecuaciones de las coordenadas cartesianas

$$X = R\Delta\lambda \quad Y = R\text{sen}\varphi$$

Después del giro de  $90^\circ$  del eje de la superficie cilíndrica de proyección, las ecuaciones de las coordenadas cartesianas resultan:

$$X = R\Delta\lambda_T \quad Y = R\text{sen}\varphi_T$$

Se sabe, a partir de las relaciones entre las coordenadas geográficas ( $\varphi$  y  $\lambda$ ) y las seudo coordenadas ( $\varphi_T$  y  $\lambda_T$ ) que:

$$\text{sen}\varphi_T = \cos\varphi\text{sen}\Delta\lambda$$

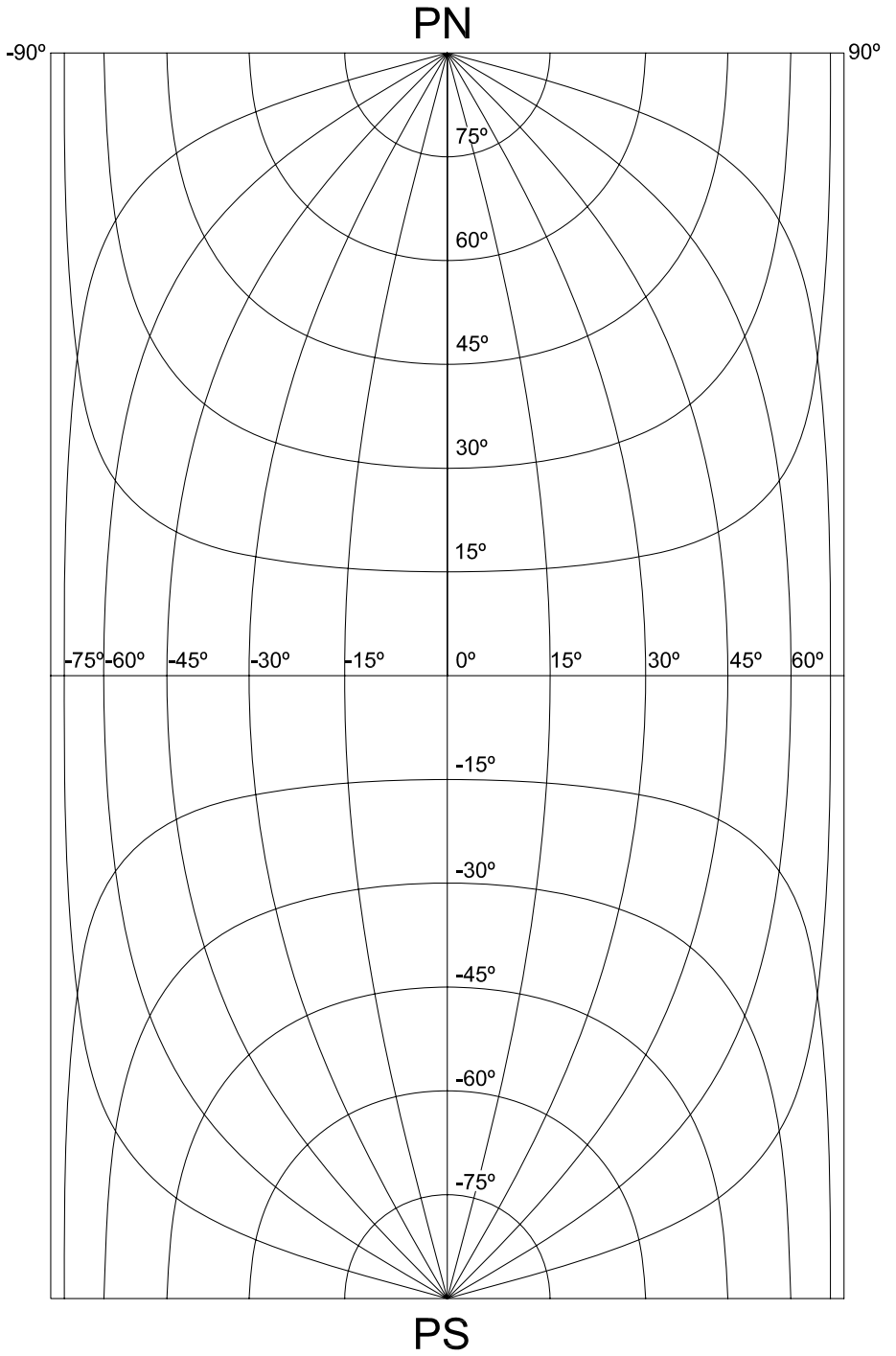
$$\text{tg}\Delta\lambda_T = \text{tg}\varphi\text{sec}\Delta\lambda$$

obteniéndose  $\varphi_T = \text{arc sen}(\cos\varphi\text{sen}\Delta\lambda)$  y  $\Delta\lambda_T = \text{arc tg}(\text{tg}\varphi\text{sec}\Delta\lambda)$ .

Por lo tanto:

$$X = R \text{arc tg}(\text{tg}\varphi\text{sec}\Delta\lambda)$$

$$Y = R\cos\varphi\text{sen}\Delta\lambda$$



**Figura 5.6:** *Proyección cilíndrica transversa tangente equivalente.*

Estas ecuaciones permiten calcular las coordenadas de los puntos que, unidos convenientemente con líneas continuas, permiten construir por puntos los meridianos y paralelos (Ver Tabla 5.3 y Figura 5.6).

### 5.4.2 Características y propiedades

El meridiano central queda representado por un segmento de recta de longitud correcta. Los meridianos cuyas longitudes geográficas difieren  $90^\circ$  con respecto al central se proyectan según segmentos de rectas paralelas al Ecuador. Los demás meridianos se representan según curvas trascendentes. Las rectas paralelas al meridiano central (seudo paralelos) tienen una deformación lineal dada por el módulo de deformación lineal ficticio  $k_T$ :

$$N_1 = k_T = \frac{1}{\cos \varphi_T} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_T}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \Delta \lambda}}$$

El Ecuador se proyecta según una recta de longitud incorrecta. Los paralelos se representan según curvas trascendentes que presentan sus concavidades hacia el Polo respectivo.

Las rectas paralelas al Ecuador representan a los pseudo meridianos. En cada uno de ellos la deformación está dada por el módulo de alteración lineal  $h_T = \cos \varphi_T$ .

$$N_2 = h_T = \cos \varphi_T = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_T} = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \Delta \lambda}$$

Esta proyección no es isógona. El error máximo angular se calcula con:

$$\delta_{\max} = 2 \arcsin \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

Se trata de una proyección equivalente; el módulo de alteración areal (o superficial) es:

$$\mu = N_1 N_2 = h k \sin \alpha' = 1$$

### 5.4.3 Usos

Para mapas que tratan temas estadísticos.

#### Ejemplo:

En la proyección cilíndrica transversa tangente equivalente, con meridiano central  $\lambda_0 = 0^\circ$ , y considerando el punto  $A(\varphi = 30^\circ N; \lambda = 60^\circ E)$ , se desean calcular los valores de:

$\varphi \setminus \lambda$		0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0°	X	0	0	0	0	0	0	0
	Y	0	1649	3185	4504	5517	6153	6370
15°	X	1668	1724	1911	2307	3134	5113	10006
	Y	0	1593	3076	4351	5329	5943	6152
30°	X	3335	3432	3746	4362	5460	7321	10006
	Y	0	1428	2758	3901	4778	5328	5516
45°	X	5003	5113	5460	6085	7053	8393	10006
	Y	0	1166	2252	3185	3901	4351	4504
60°	X	6671	6765	7053	7537	8216	9061	10006
	Y	0	824	1593	2252	2758	3076	3185
75°	X	8338	8393	8554	8813	9158	9565	10006
	Y	0	426	824	1166	1428	1593	1649
90°	X	10006	10006	10006	10006	10006	10006	10006
	Y	0	0	0	0	0	0	0

**Tabla 5.3:** PROYECCIÓN CILÍNDRICA TRANSVERSA TANGENTE EQUIVALENTE.

- a) las coordenadas cartesianas del punto A en la proyección;
- b) los módulos de alteración lineal en el punto A en el sentido norte-sur ( $k_T$ ) y este-oeste ( $h_T$ );
- c) el error máximo angular y el módulo de alteración areal.
- d) También, dibujar en escala la Elipse de Tissot en A.
- a)  $X = R \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} \varphi \sec \Delta \lambda) = 6\,370 \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} 30^\circ \sec 60^\circ) = 5\,459,548 \operatorname{km}$   
 $Y = R \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda = 6\,370 \operatorname{km} \cos 30^\circ \operatorname{sen} 60^\circ$
- b)  $N_1 = k_T = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \Delta \lambda}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 30^\circ \operatorname{sen}^2 60^\circ}} = 1,51186$   
 $N_2 = h_T = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \Delta \lambda} = \sqrt{1 - \cos^2 30^\circ \operatorname{sen}^2 60^\circ} = 0,661437835$
- c)  $\delta_{\max} = 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} = 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{1,51186 - 0,661437835}{1,51186 + 0,661437835} = 46^\circ 04' 17''$   
 $\mu = N_1 N_2 = 1$
- d) Elipse de Tissot (Figura 5.7)

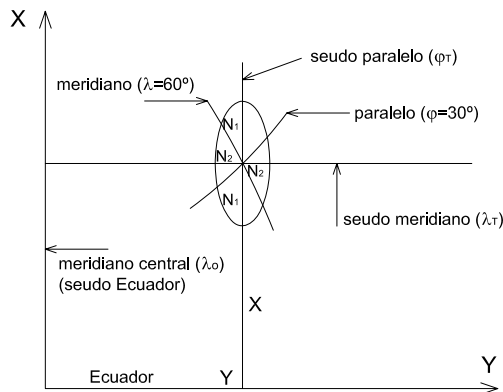


Figura 5.7: Elipse de Tissot.

## 5.5 Proyección cilíndrica transversa tangente isógona (también Proyección cilíndrica transversa de Lambert y Proyección cilíndrica transversa de Mercator)

### 5.5.1 Dibujo

Se considera girada la proyección Mercator en  $90^\circ$ , lo que implica que el Ecuador se convierte en falso meridiano de origen (seudo meridiano) y el meridiano de origen en falso Ecuador (seudo Ecuador). Trabajando con los pseudo paralelos y pseudo meridianos (seudo latitudes y seudo longitudes), se pueden deducir las fórmulas de las coordenadas  $X$  e  $Y$ . Como la proyección es isógona (Ver Figura 5.8) los triángulos  $PWQ$  y  $P'W'Q'$  son semejantes.

Entonces  $\hat{W} = \hat{W}'$ ;  $\hat{P} = \hat{P}'$  y  $\hat{Q} = \hat{Q}'$ . Además sus lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{W'Q'}{WQ} = \frac{W'P'}{WP}$$

es decir:

$$\frac{dY}{Rd\varphi_T} = \frac{dX}{R\cos\varphi_T d\lambda_T}$$

Pero  $dX = Rd\lambda_T$ , entonces

$$dY = \frac{Rd\lambda_T d\varphi_T}{\cos\varphi_T d\lambda_T} = \frac{Rd\varphi_T}{\cos\varphi_T}$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \int dY &= \int \frac{Rd\varphi_T}{\cos\varphi_T} \\ Y &= R \int \frac{d\varphi_T}{\cos\varphi_T} \\ Y &= R \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_T}{2} \right) \end{aligned}$$

A partir de la expresión  $dX = Rd\lambda_T$ :

$$\begin{aligned} \int dX &= \int Rd\lambda_T \\ X &= R \int d\lambda_T \\ X &= R\Delta\lambda_T \end{aligned}$$

El problema se produce en el pasaje de las fórmulas que relacionan las longitudes y latitudes falsas con las verdaderas, pues estas fórmulas su-

ministran las coordenadas  $X$  e  $Y$  en función de las longitudes y latitudes transversas.

### 5.5.2 Fórmulas para el cálculo de las coordenadas $X$ e $Y$ en función de $\varphi$ y $\lambda$

Dado que  $Y = R \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_T}{2} \right) = R \ln \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{2} (90^\circ + \varphi_T) \right]$ , llamando  $90^\circ + \varphi_T = \alpha$ , se tiene que:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cos} \frac{\alpha}{2}}$$

Para calcular  $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$  y  $\operatorname{cos} \frac{\alpha}{2}$  se parte de las expresiones:  $1 = \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2}$  y  $\operatorname{cos} \alpha = \operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$ . Restándolas miembro a miembro resulta:

$$1 - \operatorname{cos} \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{2}}$$

Sumándolas ahora miembro a miembro se tiene:

$$1 + \operatorname{cos} \alpha = 2 \operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} \alpha}{2}}$$

Reemplazando estas expresiones en la de la  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ :

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} \alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha}}$$

Como  $\alpha = 90^\circ + \varphi_T$ ,

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos}(90^\circ + \varphi_T)}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos}(90^\circ + \varphi_T)}{2}}} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} \varphi_T}{1 - \operatorname{sen} \varphi_T}}$$

Entonces:

$$Y = R \ln \left( \frac{1 + \operatorname{sen} \varphi_T}{1 - \operatorname{sen} \varphi_T} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Y = \frac{R}{2} \ln \left( \frac{1 + \operatorname{sen} \varphi_T}{1 - \operatorname{sen} \varphi_T} \right)$$

Pero, resolviendo el triángulo esférico  $PN P PN_T$  (Figura 5.8), se tiene  $\operatorname{sen} \varphi_T = \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda$ . Entonces:

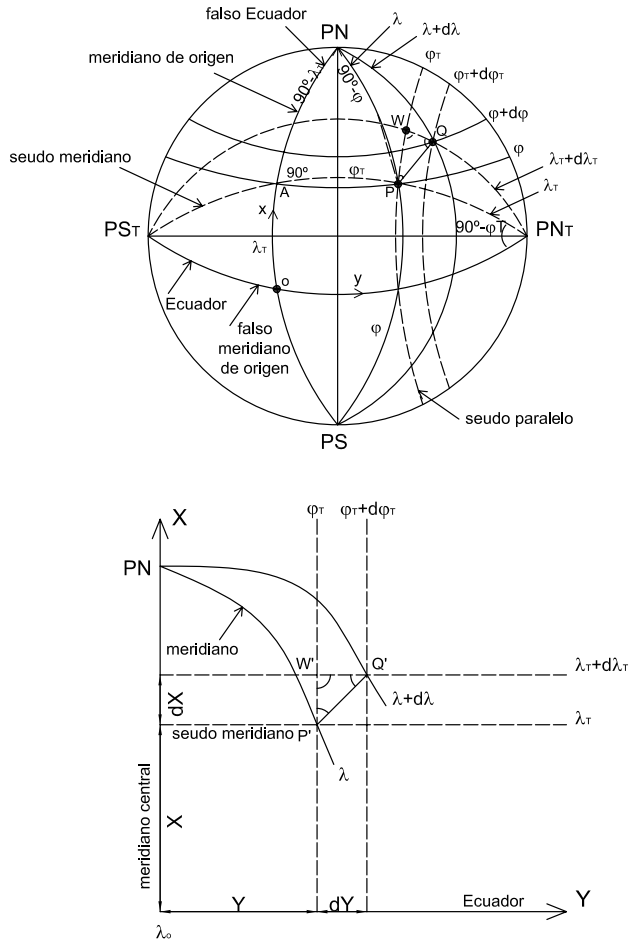


Figura 5.8: Proyección cilíndrica transversa tangente isógona. Cálculo de coordenadas.

$$Y = \frac{R}{2} \ln \left( \frac{1 + \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda}{1 - \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda} \right)$$

$$X = R \Delta \lambda_T$$

Aplicando las leyes de Neper al triángulo  $PN A P$  (Figura 5.8):



$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(90^\circ - \Delta\lambda) &= \operatorname{tg} \varphi_T \operatorname{tg}(90^\circ - \lambda_T) \\ \cos \Delta\lambda &= \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} \lambda_T \\ \cos \Delta\lambda &= \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \lambda_T} \\ \operatorname{tg} \lambda_T &= \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sec} \Delta\lambda\end{aligned}$$

Entonces  $X = R \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \varphi \operatorname{sec} \Delta\lambda)$ , donde el ángulo se expresa en radianes.

### Ejemplo:

Para calcular las coordenadas del punto ( $\varphi = 30^\circ, \lambda = 60^\circ$ ), siendo el meridiano central  $\lambda_0 = 0^\circ$ , se reemplazan estos valores en las fórmulas recién deducidas:

$$\begin{aligned}Y &= 6\,370\,km \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos 30^\circ \operatorname{sen} 60^\circ}{1 - \cos 30^\circ \operatorname{sen} 60^\circ} = 6\,197,724\,km \\ X &= 6\,370\,km \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{sec} 60^\circ) \frac{\pi}{180^\circ} = 5\,459,548\,km\end{aligned}$$

### 5.5.3 Cálculo de los módulos de alteración lineal $h$ y $k$

Como la proyección es isógona:

$$h = k = h_T = k_T = \frac{1}{\cos \varphi_T} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi_T}}$$

pero  $\operatorname{sen} \varphi_T = \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda$ , entonces:

$$h_T = k_T = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \lambda}}$$

### 5.5.4 Características y propiedades

El Ecuador se proyecta según una recta de longitud infinita y la deformación en cada punto se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ :

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 0^\circ \operatorname{sen}^2 \Delta\lambda}} = \frac{1}{\cos \Delta\lambda}$$

Los demás paralelos se proyectan según curvas trascendentes que cortan el meridiano central en partes iguales, estando sus concavidades dirigidas hacia el polo respectivo, sus longitudes son incorrectas, mayores que las

reales, y se verifica que la deformación en cada paralelo, como en el Ecuador, aumenta al alejarse del meridiano central.

En efecto, en la fórmula  $k_T = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \lambda}}$ ,  $\varphi$  es constante y por lo tanto  $\cos^2 \varphi$  es también constante. Por consiguiente, al aumentar  $\lambda$  aumenta  $\operatorname{sen}^2 \lambda$  y, en consecuencia,  $k_T$  aumenta.

Los meridianos cuyas longitudes geográficas difieren  $90^\circ$  con respecto al meridiano central se proyectan según rectas de longitudes incorrectas paralelas al Ecuador, calculándose la deformación en cada punto con el módulo de alteración lineal  $h$ . En este caso  $\lambda = 90^\circ$ , entonces:

$$h = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \lambda}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi}$$

Por lo tanto, sobre la proyección de estos meridianos, al aumentar la latitud, disminuye la deformación. Se cumple también que al alejarse del meridiano central la deformación aumenta (pues disminuye la latitud).

Los demás meridianos se proyectan según curvas trascendentes que presentan sus concavidades hacia el meridiano central, y se van alejando acentuadamente entre sí al alejarse del meridiano central. Los paralelos y meridianos se cortan a  $90^\circ$ . La deformación en cada punto de los meridianos se calcula con el módulo de alteración lineal  $h$ .

La proyección es isógona pues  $h = k$ , pero no es equivalente pues  $hk \neq 1$ .

### 5.5.5 Usos

Se presta para mapas de regiones que se extienden poco de este a oeste, para que las deformaciones no sean importantes, no habiendo límites en el sentido norte-sur. Por ejemplo, para Chile y Argentina.

Esta proyección pierde, para el navegante, la ventaja de la proyección Mercator, ya que las líneas loxodrómicas dejan de tener como imágenes segmentos de rectas.

### 5.5.6 Fórmula de la proyección cilíndrica tangente transversa isógona en función de la distancia de cada punto al meridiano central

En lo que sigue, las letras  $x$  e  $y$  representan las coordenadas esféricas ortogonales<sup>1</sup> de un punto en la esfera, mientras que  $X$  e  $Y$  representan las coordenadas del mismo punto en la proyección. Se tiene, por ser isógona la proyección, que los triángulos  $PWQ$  y  $P'Q'W'$  son semejantes (ver Figura 5.8).

Entonces:  $\frac{dY}{dy} = \frac{dX}{dx \cos \frac{y}{R}}$ , siendo  $\frac{y}{R} = \varphi_T$  (en radianes)

Como  $dX = dx$ , y haciendo  $\frac{y}{R} = \alpha$  (en radianes):

$$dY = \frac{1}{\cos \frac{y}{R}} dy = \frac{1}{\cos \alpha} dy$$

El desarrollo en serie del coseno de un ángulo es:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots \\ \cos \frac{y}{R} &\cong 1 - \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} + \dots \end{aligned}$$

En esta expresión, el último término se desprecia por el tamaño del denominador. Reemplazando en  $dY$ :

$$dY \cong \frac{1}{1 - \frac{y^2}{2R^2}} dy$$

Multiplicando numerador y denominador por  $\left(1 + \frac{y^2}{2R^2}\right)$ :

$$dY \cong \frac{1 + \frac{y^2}{2R^2}}{1 - \frac{y^4}{4R^4}} dy$$

Se desprecia  $\frac{y^4}{4R^4}$ , resultando:  $dY \cong \left[1 + \frac{y^2}{2R^2}\right] dy$ .

<sup>1</sup> Los ejes coordenados de este sistema son dos circunferencias máximas de la esfera terrestre. En la Figura 5.8 se toma como eje de las abscisas el meridiano de origen en  $O$  y sentido positivo hacia el Polo Norte y como eje de las ordenadas el Ecuador con origen en  $O$  y sentido positivo hacia el este. Las coordenadas del punto  $P$  quedan determinadas por la circunferencia máxima que pasa por  $P$  y es normal a  $Ox$ , por los arcos de circunferencia máxima  $x = OA$ ,  $y = AP$ .

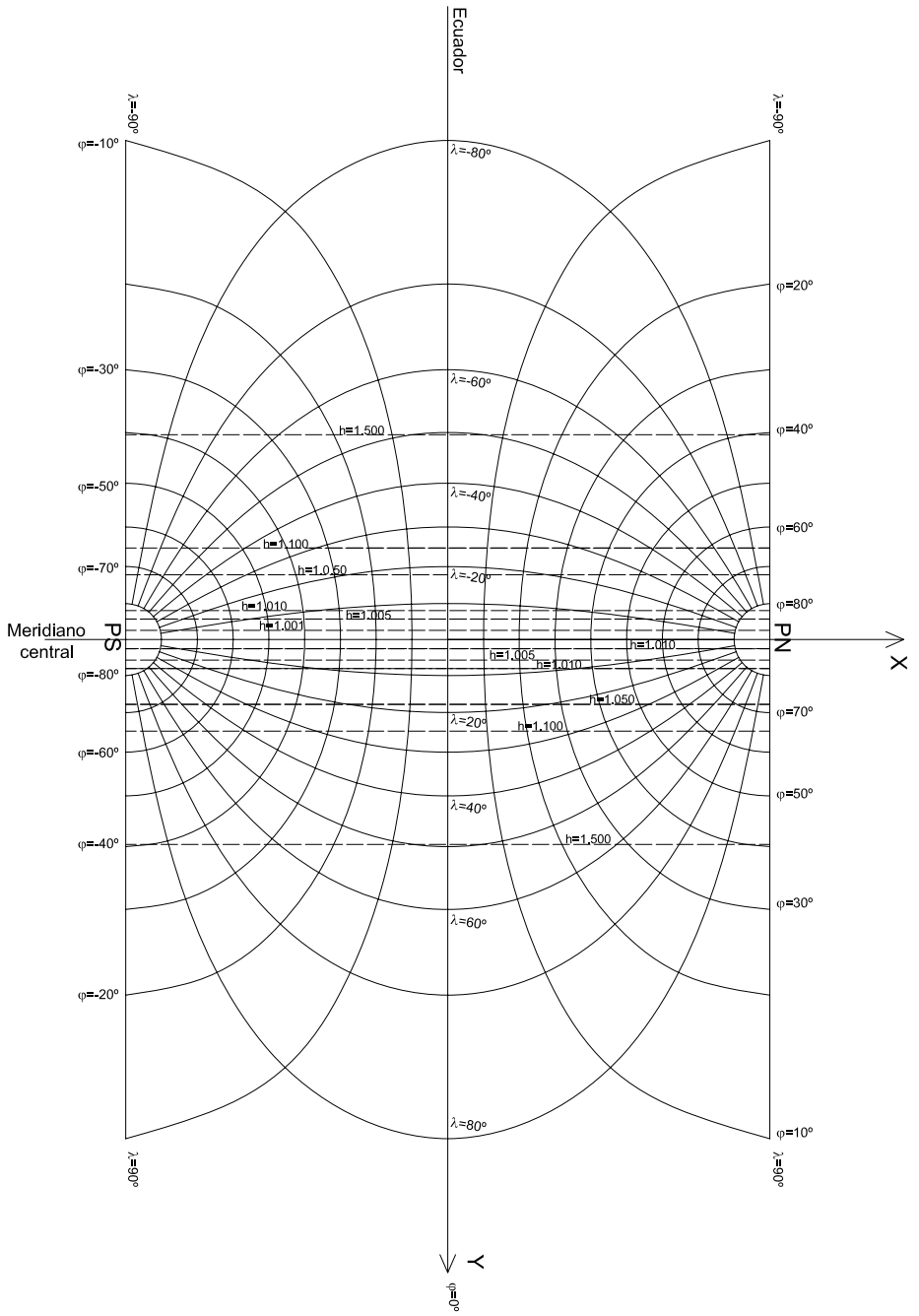


Figura 5.9: Mapa de un hemisferio en proyección cilíndrica tangente transversa isógona.

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \int dY &\cong \int \left[ 1 + \frac{y^2}{2R^2} \right] dy \\ Y &\cong \int dy + \frac{1}{2R^2} \int y^2 dy \\ Y &\cong y + \frac{1}{2R^2} \frac{y^3}{3} \\ Y &\cong y + \frac{y^3}{6R^2} \end{aligned}$$

aumentando  $\frac{y^3}{6R^2}$  al alejarse del meridiano central y despreciándose  $\frac{y^3}{6R^2}$  cerca del meridiano central.

### 5.5.7 Cálculo aproximado de los módulos de alteración lineal $h$ y $k$ .

Recuérdese que, por ser isógona la proyección (Figura 5.8), los triángulos  $PWQ$  y  $P'Q'W'$  son semejantes.

De allí:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dy} &= \frac{dX}{dx \cos \frac{y}{R}} \quad y \quad \frac{y}{R} = \varphi_T \\ \frac{dY}{dy} &= h \\ \frac{dX}{dx \cos \frac{y}{R}} &= k \\ h = k &= \frac{1}{\cos \frac{y}{R}} \end{aligned}$$

Desarrollando en serie  $\cos \frac{y}{R}$  y reemplazando:

$$h = k = \frac{1}{1 - \frac{y^2}{2R^2}} = \frac{1 + \frac{y^2}{2R^2}}{1 - \frac{y^4}{4R^4}} \quad (\text{se desprecia}) \Rightarrow h = k = 1 + \frac{y^2}{2R^2}$$

#### Ejemplo:

Se desea hallar el error que se comete en la ubicación de la localidad de Bernardo de Yrigoyen (Misiones, Argentina) con respecto al meridiano central  $64^\circ W = -64^\circ$ , en un mapa de la República Argentina confeccionado en escala  $E = 1 : 2\,500\,000$ , en la proyección cilíndrica transversa tangente isógona. Además, hallar el valor de los módulos  $h$  y  $k$  en ese mismo punto.

- a) Utilizar fórmulas rigurosas
- b) Utilizar fórmulas aproximadas (y en función de las distancias al meridiano central).

**Datos:** coordenadas geográficas de Bernardo de Yrigoyen:  $\varphi = -26^\circ 15' 15''$ ,  
 $\lambda = -53^\circ 38' 52''$

a)

$$Y = \frac{R}{2} \ln \frac{1 + \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda}{1 - \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda}$$

$\Delta \lambda = \lambda - (-64^\circ) = -23^\circ 38' 52'' + 64^\circ = 10^\circ 21' 08''$ . Por lo tanto:

$$Y = \frac{6\,370\,km}{2} \ln \frac{1 + \cos(-26^\circ 15' 15'') \operatorname{sen}(10^\circ 21' 08'')}{1 - \cos(-26^\circ 15' 15'') \operatorname{sen}(10^\circ 21' 08'')} = 1\,035,626\,km$$

Nótese que este valor es el observado en la proyección. Por otra parte:

$$\operatorname{sen} \varphi_T = \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda.$$

Reemplazando:  $\operatorname{sen} \varphi_T = \cos(-26^\circ 15' 15'') \operatorname{sen}(10^\circ 21' 08'')$

$$\varphi_T = 09^\circ 16' 27''$$

Entonces:  $y = R \varphi_T = 1\,031,078\,km$  (verdadero en la esfera). Por otra parte, para determinar el error que se comete debe calcularse la diferencia entre el valor observado y el valor verdadero:

$$\epsilon = 1\,035,626\,km - 1\,031,078\,km = 4,548\,km$$

En el mapa, teniendo en cuenta la escala, es  $\epsilon = 1,8\,mm$ .

Los módulos de alteración lineal valen:

$$\begin{aligned} h = k &= \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \Delta \lambda}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(-26^\circ 15' 15'') \operatorname{sen}^2(10^\circ 21' 08'')}} = 1,013 \end{aligned}$$

b) Se utilizarán aquí las fórmulas del cálculo aproximado.

$$Y = y + \frac{y^3}{6R^2} = 1\,031,078\,km + \frac{(1\,031,078\,km)^3}{6 \times (6\,370\,km)^2} = 1\,035,581\,km$$

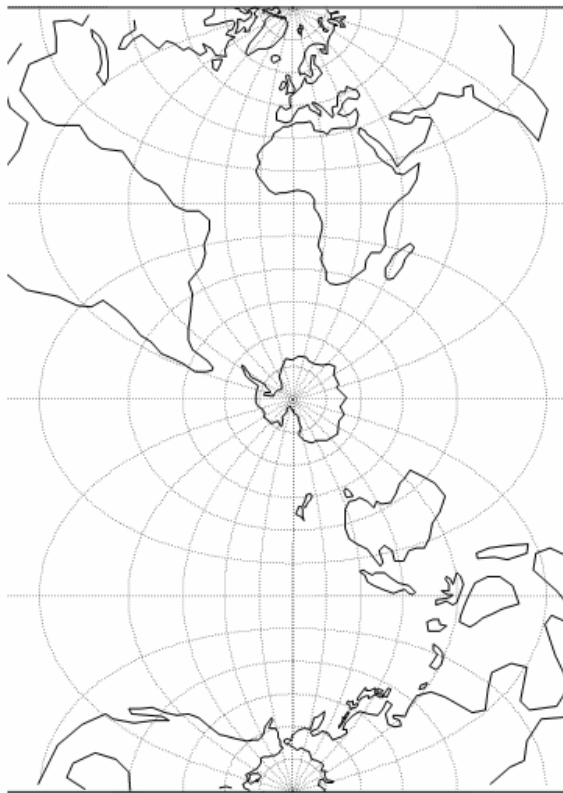
El error es:  $\epsilon = 1\,035,581\,km - 1\,031,078\,km = 4,503\,km$ .

$$h = k = 1 + \frac{y^2}{2R^2} = 1 + \frac{1\,031,078^2}{2(6\,370\,km)^2} = 1,013$$

Por lo tanto, por las fórmulas rigurosas y aproximadas se obtuvieron valores prácticamente iguales para el error sobre el mapa y para los módulos de alteración lineal.

### **Observaciones**

Utilizando las fórmulas de las coordenadas de la proyección cilíndrica tangente transversa isógona se obtienen valores de las distancias que, no alejándose mucho del meridiano central, resultan muy cercanas a las distancias reales; por lo tanto, el error que se comete en mapas es despreciable.



**Figura 5.10:** *Proyección cilíndrica transversa tangente isógona.*

### 5.5.8 Desarrollo en serie de las ecuaciones cartesianas

Las ecuaciones cartesianas de la proyección cilíndrica transversa tangente isógona, suponiendo la Tierra esférica, son:

$$\begin{aligned} X &= R \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} \varphi \sec \Delta \lambda) \\ Y &= \frac{R}{2} \ln \frac{1 + \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda}{1 - \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda} \\ h &= k = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \Delta \lambda}} \end{aligned}$$

Para su posterior comparación con las fórmulas que expresan las coordenadas en la proyección de Gauss-Krüger, que se trata más adelante en este mismo capítulo, se desarrollan en serie las funciones que aparecen en las fórmulas anteriores y se obtiene:

$$\begin{aligned} X &= R\varphi + \frac{\Delta \lambda^2 R \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{2} + \frac{\Delta \lambda^4 R \operatorname{sen} \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2)}{24} \\ Y &= \Delta \lambda R \cos \varphi + \frac{\Delta \lambda^3 R \cos^3 \varphi (1 - t^2)}{6} + \frac{\Delta \lambda^5 R \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4)}{120} + \dots \\ h &= 1 + \frac{\Delta \lambda^2 R \cos^2 \varphi}{2} + \frac{\Delta \lambda^4 R \cos^4 \varphi (5 - 4t^2)}{24} + \dots \end{aligned}$$

siendo  $t = \operatorname{tg} \varphi$ .

#### Ejemplo:

Hallar las coordenadas cartesianas y los módulos de alteración lineal de Bernardo de Irigoyen, en la proyección cilíndrica transversa tangente isógona, cuyo meridiano central es  $\lambda_0 = -64^\circ$ . Las coordenadas geográficas de Bernardo de Irigoyen son:  $\varphi = -26^\circ 15' 15''$  y  $\lambda = -53^\circ 38' 52''$ ; resulta  $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0 = -53^\circ 38' 52'' + 64^\circ = 10^\circ 21' 08''$ .

Reemplazando estos valores en las fórmulas recién obtenidas:

$$\begin{aligned} X &= 6\,370\,km(-26^\circ 15' 15'') \frac{\pi}{180^\circ} + \\ &+ \frac{(10^\circ 21' 08'' \frac{\pi}{180^\circ})^2 6\,370\,km \operatorname{sen}(-26^\circ 15' 15'') \cos(-26^\circ 15' 15'')}{24} + \\ &+ \frac{(10^\circ 21' 08'' \frac{\pi}{180^\circ})^4 6\,370\,km \operatorname{sen}(-26^\circ 15' 15'') \varphi \cos^3(-26^\circ 15' 15'')}{24} \\ &.[5 - \operatorname{tg}^2(-26^\circ 15' 15'')] = -2\,960,551\,km \end{aligned}$$



Calculando el valor de  $X$  con la fórmula exacta se tiene:  $X = -2\,960,554\text{km}$ .

$$\begin{aligned}
 Y &= (10^\circ 21' 08'' \frac{\pi}{180^\circ}) 6\,370\text{km} \cos(-26^\circ 15' 15'') + \\
 &+ \frac{(10^\circ 21' 08'' \frac{\pi}{180^\circ})^3 6\,370\text{km} \cos^3(-26^\circ 15' 15'') [1 - \text{tg}^2(-26^\circ 15' 15'')]}{24} + \\
 &+ \frac{(10^\circ 21' 08'' \frac{\pi}{180^\circ})^5 6\,370\text{km} \cos^5(-26^\circ 15' 15'')}{120} \cdot \\
 &\cdot [5 - 18 \text{tg}^2(-26^\circ 15' 15'') + \text{tg}^4(-26^\circ 15' 15'')] = 1\,035,626\text{km}
 \end{aligned}$$

Este mismo valor de  $Y$  se obtendrá si se lo calcula con la fórmula exacta.

$$\begin{aligned}
 h &= 1 + \frac{(10^\circ 21' 08'' \frac{\pi}{180^\circ})^2 \cos^2(-26^\circ 15' 15'')}{2} + \\
 &+ \frac{(10^\circ 21' 08'' \frac{\pi}{180^\circ})^4 \cos^4(-26^\circ 15' 15'') [5 - 4 \text{tg}^4(-26^\circ 15' 15'')]}{24} \\
 &= 1,013242692
 \end{aligned}$$

### 5.5.9 Función inversa: cálculo de las coordenadas geográficas en función de las coordenadas cartesianas

Las fórmulas siguientes permiten calcular las coordenadas cartesianas de un punto de la proyección cilíndrica transversa tangente isógona en función de las coordenadas geográficas transversas ( $\varphi_T$  y  $\lambda_T$ ):

$$Y = R \ln \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_T}{2} \right) \quad (5.9)$$

$$X = R \Delta \lambda_T \quad (5.10)$$

Para referirlas a las coordenadas geográficas ( $\varphi$  y  $\lambda$ ) deben efectuarse artificios matemáticos que permiten llegar a la expresión:

$$Y = \frac{R}{2} \ln \frac{1 + \text{sen } \varphi_T}{1 - \text{sen } \varphi_T}$$

Por lo tanto,

$$\frac{2Y}{R} = \ln \frac{1 + \text{sen } \varphi_T}{1 - \text{sen } \varphi_T} \Rightarrow e^{\frac{2Y}{R}} = \frac{1 + \text{sen } \varphi_T}{1 - \text{sen } \varphi_T} \quad (5.11)$$

Restando de 1 ambos miembros de la igualdad anterior, se tiene:

$$1 - e^{\frac{2Y}{R}} = 1 - \frac{1 + \text{sen } \varphi_T}{1 - \text{sen } \varphi_T} = \frac{1 - \text{sen } \varphi_T - 1 - \text{sen } \varphi_T}{1 - \text{sen } \varphi_T} = \frac{-2 \text{sen } \varphi_T}{1 - \text{sen } \varphi_T} \quad (5.12)$$

Sumando 1 a ambos miembros de 5.11:

$$1 + e^{\frac{2Y}{R}} = 1 + \frac{1 + \text{sen } \varphi_T}{1 - \text{sen } \varphi_T} = \frac{2}{1 - \text{sen } \varphi_T} \quad (5.13)$$

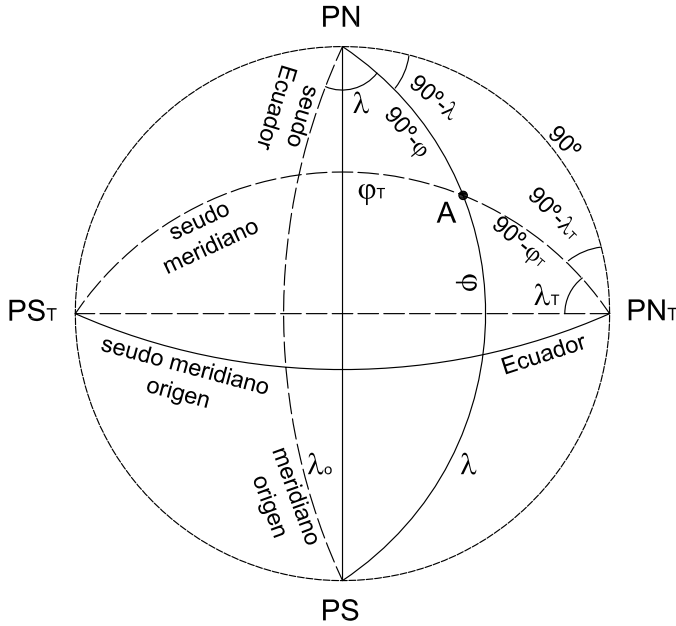
Dividiendo miembro a miembro 5.12 y 5.13:

$$\frac{1 - e \frac{2Y}{R}}{1 + e \frac{2Y}{R}} = -\operatorname{sen} \varphi_T$$

Entonces:

$$\varphi_T = \operatorname{arcsen} \left[ -\frac{1 - e \frac{2Y}{R}}{1 + e \frac{2Y}{R}} \right] = \operatorname{arcsen} a, \text{ siendo } a = -\frac{1 - e \frac{2Y}{R}}{1 + e \frac{2Y}{R}}$$

De 5.10:  $\Delta\lambda_T = \frac{X}{R}$



**Figura 5.11:** Cálculo de las coordenadas geográficas en función de las cartesianas.

En el triángulo esférico  $PN A PN_T$  se verifica que:

$$\cos(90^\circ - \varphi) = \cos 90^\circ \cos(90^\circ - \varphi_T) + \operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_T) \cos(90^\circ - \lambda_T)$$

Entonces  $\operatorname{sen} \varphi = \cos \varphi_T \operatorname{sen} \lambda_T$ , y por lo tanto:

$$\varphi = \operatorname{arcsen} \left[ \cos(\operatorname{arcsen} a) \operatorname{sen} \frac{X}{R} \right]$$

Además:

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - \varphi_T) &= \sin 90^\circ \sin(90^\circ - \varphi) \cos(90^\circ - \lambda) \\ \sin \varphi_T &= \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \lambda &= \sec \varphi \sin \varphi_T \\ \sin \lambda &= \sec \varphi \sin(\arcsen a) = a \sec \varphi \\ \lambda &= \arcsen[a \sec \varphi]\end{aligned}$$

**Ejemplo:**

En un mapa confeccionado en la proyección cilíndrica transversa tangente isógona, cuyo meridiano central es  $\lambda_0 = 0^\circ$ , se tienen las coordenadas cartesianas de un punto:  $Y = 6\,197,724\text{km}$ ,  $X = 5\,459,548\text{km}$ . Se desean conocer las coordenadas geográficas de dicho punto.

$$\begin{aligned}a &= -\frac{1 - e \frac{2Y}{R}}{1 + e \frac{2Y}{R}} = \frac{6}{8} = 0,75 \\ \varphi &= \arcsen \left[ \cos(\arcsen 0,75) \sin \frac{5\,459,548\text{km}}{6\,370\text{km}} \right] = 30^\circ \\ \lambda &= \arcsen[\sec 30^\circ \times 0,75] = 60^\circ\end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto es el de  $30^\circ$  de latitud norte y  $60^\circ$  de longitud este.

**5.6 Proyección Gauss-Krüger**

Carl Friedrich Gauss, conocido como el "príncipe de las matemáticas", nació en Brunswic (hoy Alemania) en 1777 y murió en Göttingen (Alemania) en 1855. Gauss trabajó en todas las ramas de la matemática pura y aplicada de su época, llegando su legado hasta nuestros días. Entre los años 1821 y 1848 fue consejero científico de los gobiernos de Hanover y de Dinamarca y se le encargó hacer un reconocimiento geodésico extensivo. Los problemas que se le presentaron en la determinación de la forma precisa de una porción de la superficie terrestre le sugirieron estudios más profundos y generales relativos a las superficies alabeadas, entre ellos la medida de la curvatura de una superficie y la teoría de la representación conforme. A partir de ellos creó una transformación de una superficie (el elipsoide) en otra (un plano), utilizando variable compleja y representación conforme.

La proyección de Gauss posee dos ejes coordenados, el meridiano central (eje de las abscisas, vertical) y el Ecuador (eje de las ordenadas, horizontal) de modo tal que las coordenadas Gauss de un punto son:

- la **ordenada Gauss**: distancia de la proyección del punto a la proyección del meridiano central, siendo positivo al este y negativo al oeste de dicho meridiano, midiéndose también en metros o kilómetros.
- la **abscisa Gauss**: distancia de la proyección del punto a la proyección del Ecuador, que es positiva en el hemisferio norte y negativa en el hemisferio sur, y se mide en metros o kilómetros;

Los valores sobre el eje de las abscisas son correctos, por lo tanto, al ser el meridiano central la única recta de longitud correcta, las deformaciones aumentan al alejarse del mismo llegando a ser intolerables, no sólo para cartas sino también para mapas.

Para solucionar este problema, en 1919 el geodesta L. Krüger, del Instituto de Postdam, reformó la proyección de Gauss de la siguiente manera: en lugar de un solo sistema de ejes coordenados introdujo 120, de modo tal que los ejes de abscisas coincidieran con los meridianos centrales de husos o fajas meridianas de tres grados de amplitud en el sentido esteoeste y el eje de las ordenadas sea el Ecuador para los puntos ubicados en el hemisferio norte.

Para los puntos ubicados en el hemisferio sur, los ejes de abscisas son los mismos meridianos centrales (también 120 sistemas de coordenadas) y los ejes de ordenadas son las rectas imaginarias que pasan por el Polo Sur y son perpendiculares al meridiano central de cada faja. Además, hay que tener en cuenta que para cartas topográficas, debido a la escala, tiene importancia el error de confundir el elipsoide con la esfera. Por lo tanto, para ellas Krüger adaptó las fórmulas de sus coordenadas teniendo en cuenta la forma del elipsoide en lugar de la de la esfera.

La deducción de las fórmulas de las coordenadas Gauss-Krüger para aplicarlas a las cartas topográficas (trabajando con el elipsoide y no con la esfera) exige la aplicación de la teoría de variable compleja y del cálculo infinitesimal.

### 5.6.1 Definición de las coordenadas Gauss-Krüger (en la cartografía argentina)

La *ordenada Gauss-Krüger* de un punto de la proyección es la distancia de la proyección del mismo hasta el meridiano central de la faja a que pertenece. Es por esto que, para fines cartográficos, nuestro país se ha dividido en siete fajas Gauss-Krüger numeradas del uno al siete; la denominación 1 (uno) coincide con la faja cuyo meridiano central es el de 72°W. Siendo  $\lambda_0$  la longitud al meridiano central de la faja, la numeración de las fajas responde a la siguiente fórmula:

$$\text{Número de faja} = \frac{75^\circ + \lambda_0}{3^\circ}$$

$$\text{Si } \lambda_0 = -72^\circ$$

$$\text{Número de faja} = \frac{75^\circ - 72^\circ}{3^\circ} = 1$$

Como la ordenada se mide positiva al este y negativa al oeste, para evitar los valores negativos se atribuye la ordenada arbitraria de 500km (500 000m) a los puntos del meridiano central de cada faja; y para individualizar cada faja se suma una cantidad arbitraria de 1000km a cada meridiano central a partir de la faja número 1. De este modo la ordenada queda siempre positiva y, además, queda individualizada cada faja. Por lo tanto, si  $i$  es el número de la faja Gauss-Krüger -que, por lo tanto, varía de 1 a 7- la ordenada Gauss-Krüger será:

$$Y_{GK} = i10^3 km + 500km + Y'$$

donde  $Y'$  es el valor de la ordenada Gauss-Krüger a partir del meridiano central de la faja y vale:

$$\begin{aligned} Y' = & \frac{\Delta\lambda \cos \varphi N}{1!} + \\ & + \frac{\Delta\lambda^3 \cos^3 \varphi N}{3!} (1 - t^2 + \eta^2) + \\ & + \frac{\Delta\lambda^5 \cos^5 \varphi N}{5!} (5 - 18t^2 + t^4 + \\ & + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2 + 13\eta^4 - 64t^2\eta^4 + 4\eta^6 - 24t^2\eta^6) + \dots \end{aligned}$$

Para la precisión de cálculos fundamentales se utilizan los tres primeros términos, limitando en el tercero hasta  $58t^2\eta^2$  inclusive:

$$Y' = \frac{\Delta\lambda \cos \varphi N}{1!} + \frac{\Delta\lambda^3 \cos^3 \varphi N}{3!} (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{\Delta\lambda^5 \cos^5 \varphi N}{5!} (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2)$$

Para los cálculos de agrimensura se consideran los dos primeros términos de la fórmula anterior (recuadrados). Para fines cartográficos sólo se usa la parte recuadrada, tomando en el segundo término hasta  $t^2$  inclusive (ver **Nota** luego).

La fórmula anterior da valores negativos de las  $Y'$  para los puntos ubicados al oeste del meridiano central de cada faja y positivos para los puntos ubicados al este del mismo. En ella las letras representan:

$$\begin{aligned}
 t &= \operatorname{tg} \varphi \\
 \eta^2 &= e'^2 \cos^2 \varphi \\
 e'^2 &= \frac{a^2 - b^2}{b^2}, \text{ la segunda excentricidad} \\
 N &= \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}, \text{ la gran normal} \\
 \Delta \lambda &= \lambda - \lambda_0, \text{ siendo } \lambda_0 \text{ la longitud geográfica del meridiano central de la faja.}
 \end{aligned}$$

La ordenada Gauss-Krüger resulta entonces:

$$Y_{GK} = i10^3 km + 500km + \frac{\Delta \lambda \cos \varphi N}{1!} + \frac{\Delta \lambda^3 \cos^3 \varphi N}{3!} (1 - t^2 + \eta^2)$$

despreciándose el último término para ciertas escalas.

La *Abscisa Gauss-Krüger* de un punto de la proyección es la distancia de la proyección del mismo al Ecuador si está en el hemisferio norte y a la recta que pasa por el Polo Sur perpendicular al meridiano central de cada faja, si el punto está en el hemisferio sur. Su fórmula es:

$$\begin{aligned}
 X_{GK} &= S + \frac{\Delta \lambda^2 \cos^2 \varphi N t}{2!} + \frac{\Delta \lambda^4 \cos^4 \varphi N t}{4!} (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \\
 &\quad + \frac{\Delta \lambda^6 \cos^6 \varphi N t}{6!} (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 + 330\eta^2 t^2) + \dots
 \end{aligned}$$

siendo  $S$  la longitud del arco de meridiano sobre el elipsoide desde el Polo Sur hasta la latitud del punto considerado sobre el elipsoide (para los puntos del hemisferio sur), es decir:

$$S = \alpha(90^\circ + \varphi) + \beta \operatorname{sen} 2\varphi + \gamma \operatorname{sen} 4\varphi + \delta \operatorname{sen} 6\varphi + \epsilon \operatorname{sen} 8\varphi + \dots$$

Allí:

$$\alpha = +111\,136,536655m/^{\circ}$$

$$\beta = -16\,108,034678m$$

$$\gamma = +16,976211m$$

$$\delta = -0,022266m$$

$$\epsilon = +0,000032m$$

**Nota:** Para fines cartográficos se desprecian los términos de los que resultan distancias, en la carta (cuya escala se conoce), menores al poder separativo de la vista (o límite del error gráfico); el mismo se considera igual a 0, 2mm.

Por ejemplo, para la confección de una carta en escala 1 : 500 000, la abscisa y la ordenada se necesitan con una aproximación de

$$0,2mm \times 500\,000 = 100m.$$

Se tendrán en cuenta entonces los términos parciales sólo hasta la centena de metros.

### 5.6.2 Módulos de alteración lineal

Se deduce que

$$h = k = 1 + \Delta\lambda^2 \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) + \frac{\Delta\lambda^4 \cos^4 \varphi}{24} (5 - 4t^2 + 14\eta^2 - 28t^2\eta^2)$$

debiendo expresarse  $\Delta\lambda$  en radianes.

Una fórmula aproximada en función de la distancia y (en la esfera) desde el punto al meridiano central es:

$$h = k = 1 + \frac{y^2}{2R_0^2} + \frac{y^4}{24R_0^4}$$

siendo  $R_0 = \sqrt{\rho_0 N_0}$  el radio de la “esfera local” (ver Capítulo 1), es decir una esfera cuyo centro coincide con el centro del elipsoide y cuyo radio es la media geométrica del radio de curvatura y de la gran normal de un punto apropiado sobre el elipsoide.

### 5.6.3 Convergencia de meridianos

El ángulo que forma la proyección del meridiano ( $\lambda$ ) con la proyección del meridiano central ( $\lambda_0$ ) en el punto ( $\varphi, \lambda$ ) es:

$$\gamma = \Delta\lambda \operatorname{sen} \varphi + \frac{\Delta\lambda^3}{3} \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \dots$$

**Ejemplo:**

Hallar las coordenadas Gauss-Krüger de un punto cuyas coordenadas geográficas son  $\varphi = 34^\circ S$ ,  $\lambda = 57^\circ 30'$ . La escala es  $E = 1 : 400\,000$ . La proyección del punto está ubicada en la faja número 6, cuyo meridiano central es  $\lambda_0 = 57^\circ$ .

$$Y_{GK} = i10^3 km + 500 km + \frac{\Delta\lambda \cos \varphi N}{1!}$$

donde  $N = \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} = 6\,385,104 km$ . Reemplazando:

$$\begin{aligned} Y_{GK} &= 6 \times 1\,000 km + 500 km + 0^\circ 30' \frac{\pi}{180^\circ} \cos(-34^\circ 00') 6\,385,104 km \\ &= 6\,453,806 km \\ X_{GK} &= S + \frac{\Delta\lambda^2 \cos^2 \varphi N t}{2!} + \frac{\Delta\lambda^4 \cos^4 \varphi N t}{4!} (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \\ &\quad + \frac{\Delta\lambda^6 \cos^6 \varphi N t}{6!} (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 + 330\eta^2 t^2) \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula correspondiente y reemplazando los valores, resulta que  $S = 6\,238,426 km$ . Además,

$$\begin{aligned} \eta^2 &= e'^2 \cos^2 \varphi \\ e' &= 0,0067681705 \text{ (teniendo en cuenta el elipsoide de Hayford)} \\ \eta^2 &= 0,046517855 \\ t &= \operatorname{tg}(-34^\circ) = -0,674508516 \\ \Delta\lambda &= -0^\circ 30' \frac{\pi}{180^\circ} = -0,0087266462 \end{aligned}$$

Entonces:  $X_{GK} = 6\,238,313 km$

Los coeficientes de alteración lineal para  $\varphi = -34^\circ$ , son

$$\begin{aligned} h = k &= 1 + \Delta\lambda^2 \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) + \frac{\Delta\lambda^4 \cos^4 \varphi}{24} (5 - t^2 + 14\eta^2 - 28t^2 \eta^2) + \dots \\ &= 1,000060498 \end{aligned}$$



Calculados por la fórmula aproximada

$$h = k = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}$$

donde  $\rho_1 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = 6\,355,538\text{km}$  y  $R = \sqrt{\rho_1 N_1} = 6\,370,303\text{km}$ , resultan:

$$h = k = 1,00002617$$

### Observación

Por razones prácticas se extienden las coordenadas hasta dos grados al este y al oeste del meridiano central, excediendo de esta manera 30 minutos (es decir, medio grado) de cada lado de la faja; así los puntos situados cerca de los bordes de la faja tienen sus coordenadas en los dos sistemas vecinos y, por lo tanto, en los levantamientos topográficos que exceden el borde de la faja se trabaja en un solo sistema.

En las cartas topográficas se ha trazado una cuadrícula de coordenadas Gauss-Krüger en el borde de cada hoja; frente a las líneas del cuadrículado se han impreso las coordenadas en kilómetros, lo que permite obtener las coordenadas del punto que interese. Teniendo en cuenta la escala de la carta, se deberá medir la distancia en  $X$  y en  $Y$  que separa al punto considerado de un cruce de cuadrícula próximo, y agregar esos valores a las coordenadas del cruce elegido. Para la determinación de la distancia debe utilizarse la escala de coordenadas que figura en la información marginal de la carta.

#### 5.6.4 Cálculo de las coordenadas geográficas $(\varphi, \lambda)$ en función de las coordenadas Gauss-Krüger $(X, Y)$

La operación recíproca también es posible por medio de la cuadrícula. Es decir, es posible hallar las coordenadas geográficas en función de las coordenadas Gauss-Krüger. Las fórmulas, cuya deducción exige la aplicación de elementos de cálculo en variable compleja y de cálculo infinitesimal, y que se expresan en radianes, son:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \frac{Y}{N_1 \cos\varphi_1} - \frac{Y^3}{6N_1^3 \cos\varphi_1} (1 + 2t_1^2 + \eta_1^2) \\ \varphi &= \varphi_1 - \frac{Y^2}{2N_1} (1 + \eta^2) + \frac{Y^2}{2N_1} (5 + 3t_1^2)\end{aligned}$$

donde  $\varphi_1$  es la latitud del punto del meridiano central que es pie de la perpendicular trazada de la proyección del punto al meridiano central de la carta.

Se calcula  $S$  y luego, mediante la fórmula  $\varphi_1 = \frac{S}{\alpha} - 90^\circ$ , se calcula  $\varphi_1$  por sucesivas iteraciones.

### 5.6.5 Alteraciones lineales en el sistema Gauss-Krüger en el ámbito de la Argentina

Teniendo en cuenta sólo los dos primeros términos de la expresión de  $h$ , se tiene:

$$h = k = 1 + \Delta\lambda^2 \cos^2 \varphi (1 + \eta^2)$$

Para el extremo norte del país ( $\varphi = -22^\circ$ ), en el borde de la faja ( $\Delta\lambda = 1,5^\circ$ ) se produce el mayor valor de  $h$ :

$$h = k = 1 + \left(1,5^\circ \frac{\pi}{180^\circ}\right)^2 \cos^2(-22^\circ)(1 + 0,005818392) = 1,000594273$$

ya que  $\eta^2 = e'^2 \cos^2(-22^\circ) = 0,005818392$ . Para una distancia de  $10\,000m$ , el error asume un valor de:

$$10\,005,94273m - 10\,000m = 5,94273m.$$

Para una carta en escala  $1 : 25\,000$ , ese error es de  $\frac{5\,942,73mm}{25\,000} = 0,2377m$ . Para una carta en escala  $1 : 50\,000$ , el error es la mitad ( $0,1188m$ ). Para propósitos cartográficos estas deformaciones son insignificantes, pero para propósitos topográficos, y con más razón en las operaciones de orden geodésico, un error de, por ejemplo,  $5,94m$  en una distancia de  $10\,000$  metros es muy importante, por lo cual se impone la necesidad de corregir todas las distancias por el módulo de alteración lineal.

Por lo tanto, en los trabajos topográficos, incluidos los de mensura, las mediciones obtenidas en el terreno deben asociarse con el valor del módulo  $h$  y sus resultados deben compararse con los obtenidos en función de las coordenadas Gauss-Krüger de los puntos trigonométricos o poligonales de precisión que sirvieron para apoyo geodésico o topográfico.

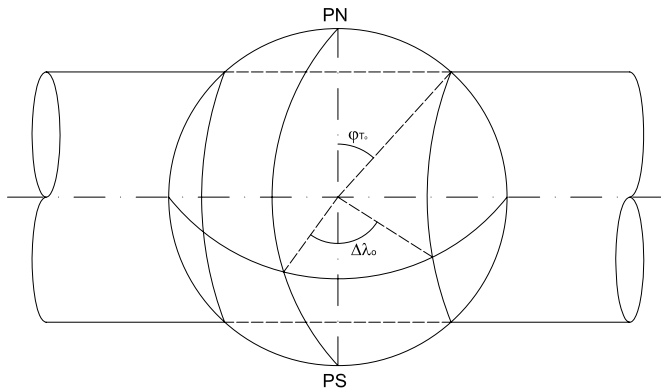


Figura 5.12: Proyección UTM.

### 5.7 Proyección UTM (Universal Transverse Mercator)

Esta proyección se aplica al elipsoide. La superficie terrestre entre las latitudes  $80^{\circ}\text{S}$  y  $84^{\circ}\text{N}$  se considera dividida en 60 zonas con un ancho de  $6^{\circ}$  en sentido este-oeste. Estas zonas se numeran de 1 a 60, estando la 1 comprendida entre  $180^{\circ}$  y  $174^{\circ}\text{W}$ , con el meridiano central de longitud  $177^{\circ}\text{W}$ . El número de cada zona se obtiene de la expresión:

$$\text{número de zona} = \frac{183^{\circ} + \lambda_0}{6^{\circ}}$$

siendo  $\lambda_0$  la longitud del meridiano central, considerada con el signo correspondiente. A su vez, cada zona se considera dividida en intervalos de  $8^{\circ}$  de latitud desde  $80^{\circ}\text{S}$  hasta  $72^{\circ}\text{N}$  y desde  $72^{\circ}\text{N}$  hasta  $84^{\circ}\text{N}$  denominados con letras desde la *C* a la *X* omitiéndose la *I* y la *O*, para evitar confusiones. Cada una de estas divisiones de zonas se denomina *cuadrilátero*; cada uno de ellos tiene superpuesta una *cuadrícula* de 100 000m (100km) de lado cuyas rectas verticales son paralelas al meridiano central y permiten obtener rápidamente los valores de las coordenadas de cada punto, denominadas Este y Norte. La coordenada Este mide la distancia al meridiano central y, para evitar valores negativos de la misma, se le asigna a dicho meridiano una coordenada de 500 000m (500km). La coordenada Norte da la distancia al Ecuador, en el hemisferio norte a partir del Ecuador y en el hemisferio sur se asigna una coordenada de 10 000 000m (10 000km) al Ecuador con lo cual se consiguen siempre valores positivos.

Como ya se ha mencionado, el sistema de proyección UTM utiliza como

superficie de referencia el elipsoide de revolución. En nuestro país es el Elipsoide de Hayford (Internacional) y, en Estados Unidos, el de Clarke 1866. Quizás sea el sistema más usado en el mundo: es el que adoptaron EE. UU. y muchas naciones de Europa.

El meridiano central aparece reducido en la proyección respecto de sus medidas reales. Si se consideran valores aproximados, por ejemplo sobre la esfera, la longitud del mismo es igual a la de las circunferencias secantes:

$$2\pi R \cos \varphi_{T_0}$$

Por lo tanto, se reduce su longitud en un factor (módulo de alteración lineal)  $k_0$  tal que:

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{2\pi R \cos \varphi_{T_0}}{2\pi R} \\ k_0 &= \cos \varphi_{T_0} \end{aligned}$$

que depende de la posición secante de la superficie cilíndrica. Para expresar  $k_0$  en función de sus coordenadas geográficas:

$$k_0 = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \varphi_{T_0}} = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi \text{sen}^2 \Delta\lambda}$$

Haciendo  $\varphi = 0^\circ$ , se tiene la longitud del punto en que la circunferencia menor corta al Ecuador:

$$\begin{aligned} k_0 &= \sqrt{1 - \text{sen}^2 \Delta\lambda_0} \\ k_0 &= \cos \Delta\lambda_0 \\ \cos \varphi_{T_0} &= \cos \Delta\lambda_0 \\ \varphi_{T_0} &= \Delta\lambda_0 \end{aligned}$$

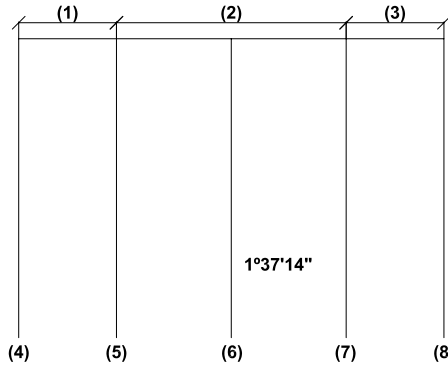
En la proyección UTM el módulo de alteración lineal en el meridiano central se establece como

$$\begin{aligned} k_0 &= 1 - \frac{1}{2\,500} \\ k_0 &= 0,9996 \end{aligned}$$

Es decir, los valores de las distancias sobre el meridiano central aparecen reducidas según:

$$k_0 = \cos \Delta\lambda_0 = 0,9996 \Rightarrow \Delta\lambda_0 = 1^\circ 37' 14''$$

En la Figura 5.13 se ilustra lo anterior. Existen dos zonas: de ampliación (1 y 3) y de reducción (2).



**Figura 5.13:** Zona de ampliación y reducción en una zona UTM.

En la Figura 5.13: (1)Ampliación; (2)Reducción; (3)Ampliación;

- |                        |   |
|------------------------|---|
| (4) Meridiano extremo; | $k = 1,001$ $E = 166000m$                   |
| (5) Línea de secancia; | $k = 1$ $E = 320\ 000m$                     |
| (6) Meridiano central; | $k = 0,9996$ $E = 500\ 000m$ por convención |
| (7) Línea de secancia; | $k = 1$ $E = 680\ 000m$                     |
| (8) Meridiano extremo; | $k = 1,001$ $E = 834000m$                   |

siendo  $E$  la coordenada este (distancia convencional en la proyección hacia el este).

En el sistema UTM, como ya se ha mencionado, los husos son de  $6^\circ$  de amplitud,  $3^\circ$  a cada lado del meridiano central. La ampliación de la zona meridiana, respecto de la de Gauss-Krüger, se hace compatible con los módulos de alteración lineal en los extremos, por haber introducido en el meridiano central el factor  $h_0 = 0,9996$ .

Las líneas de secancia se encuentran situadas a unos 180 km a ambos lados del meridiano central pues, aproximadamente:

$$1^\circ 37' 14'' \frac{\pi R}{180^\circ} \cong 180,169km; Y = R \cos \varphi_0 \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{1^\circ 37' 14''}{2} \right) = 180,121km$$

Los meridianos extremos están, aproximadamente:

$$3^\circ 00' 00'' \frac{\pi R}{180^\circ} \cong 333,532km; Y = R \cos \varphi_0 \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{3^\circ}{2} \right) = 333,551km$$

Las zonas de  $6^\circ$  de amplitud están limitadas por los meridianos múltiplos de  $6^\circ$ , coincidiendo con los husos de la carta mundial al millonésimo.

Cada sistema debe ser prolongado 30 minutos sobre los contiguos, es decir, los puntos pertenecientes a cada zona tienen coordenadas en la propia y en la contigua, creándose así una zona de superposición de  $1^\circ$  de ancho.

No se usan las letras *X* e *Y* para designar las coordenadas sino N(norte) y E (este).

El origen de las coordenadas planas, en cada zona, es el cruce del Ecuador con el meridiano central. La coordenada N se mide a partir del Ecuador (0m) para el hemisferio norte, pero para el hemisferio sur se asigna en el Ecuador la coordenada N igual a 10 000 000m, evitando valores negativos, es decir, se adopta un falso origen a 10 000 000m al sur del Ecuador.

La coordenada E se mide a partir del meridiano central, positiva al este y negativa al oeste. Para evitar los valores negativos se adjudica al meridiano central la coordenada 500 000m (ver Figuras 5.14 y 5.15).

El número de zona es el mismo que en la Carta Internacional al millonésimo, esto es, de 1 a 60, a contar del meridiano opuesto al de Greenwich. El meridiano central de  $177^\circ\text{W}$  corresponde a la zona 1, el de  $171^\circ\text{W}$  la zona 2, y así cada  $6^\circ$  (ver Figura 5.16).

Como ya se ha dicho, en el sistema de cuadrícula UTM la superficie terrestre comprendida entre las latitudes  $84^\circ\text{N}$  y  $80^\circ\text{S}$  ha sido dividida en husos de un ancho de  $6^\circ$  de longitud llamados *zonas*. Se numeran de 1 a 60 hacia el este, empezando en el meridiano de  $180^\circ$ . La zona 1 tiene por meridiano central el de  $177^\circ$  de longitud oeste y sus bordes son los meridianos de  $180^\circ\text{W}$  y  $174^\circ\text{W}$ . Cada zona es dividida en cuadriláteros que tienen una altura de  $8^\circ$  de latitud. Cada “cuadrilátero” está limitado al este y al oeste por los arcos de meridianos con una diferencia de longitud geográfica de  $3^\circ$  al este y al oeste del meridiano central y al norte y al sur por los arcos de paralelos cada  $8^\circ$ . Por ejemplo, en la Figura 5.15 se tiene el “cuadrilátero” limitado al sur por el Ecuador, al norte por el arco del paralelo de  $8^\circ$  (Fila N) y por los meridianos de  $3^\circ\text{E}$  y  $3^\circ\text{W}$ . Las filas de cuadriláteros tienen asignadas letras consecutivas de la *C* a la *X*

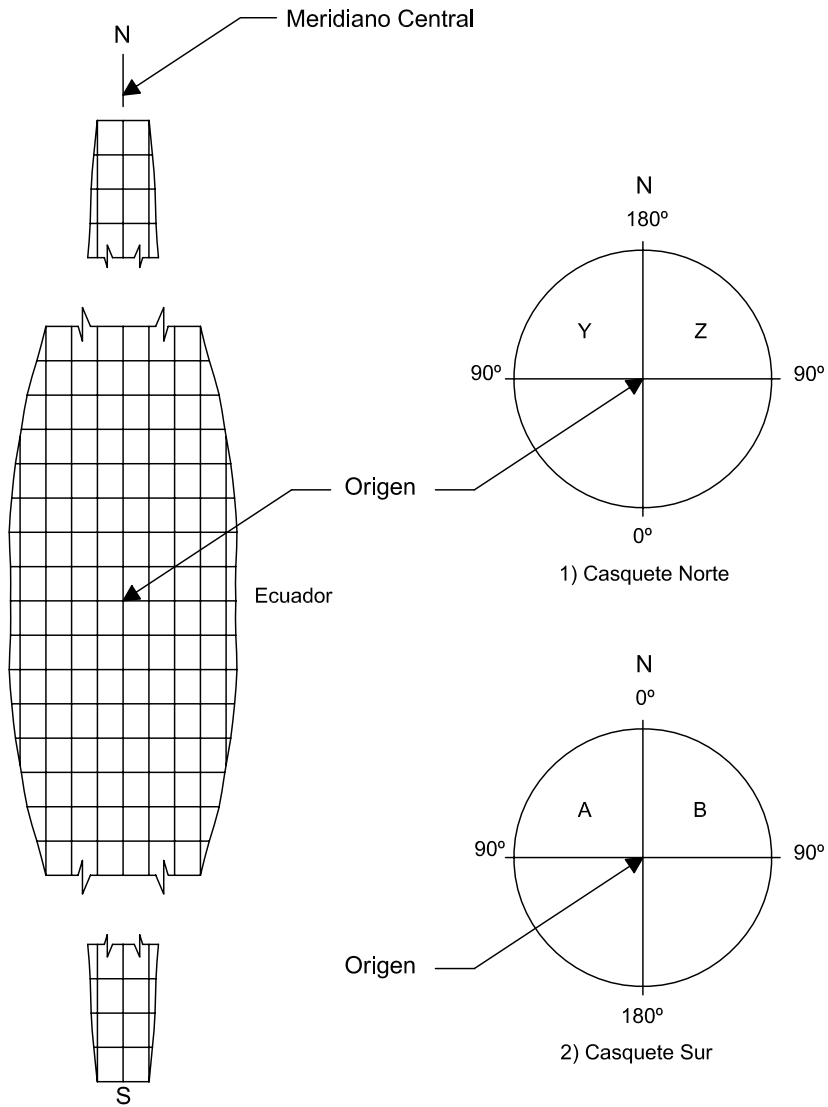


Figura 5.14: Zonas UTM.

(omitiendo la  $I$  y la  $O$  para evitar confusiones), empezando en los  $80^\circ$  de latitud sur (ver Figura 5.16). La fila  $X$  tiene  $12^\circ$  de latitud, extendiéndose de los  $72^\circ\text{N}$  a los  $84^\circ\text{N}$ . Cada cuadrilátero es denominado por un número y una letra y es dividido en cuadrados de  $100\,000\text{m}$  designados mediante un sistema de combinación de letras.

Dentro de cada zona, al meridiano central de la zona se le asigna un valor de coordenada este de  $500\,000\text{m}$ .

El módulo de alteración lineal es:

$$h = k = \frac{1}{\cos \varphi_T} = \frac{1}{(1 - \text{sen}^2 \varphi_T)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \text{sen}^2 \Delta \lambda}}$$

Si  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\cos \varphi = 1$  y por lo tanto:

$$h = k = \frac{1}{\sqrt{(1 - \text{sen}^2 \Delta \lambda)}} = \frac{1}{\cos \Delta \lambda} = \frac{1}{\cos 3^\circ} = 1,00097$$

### 5.7.1 Sistema UPS (Proyección Universal Estereográfica)

En el sistema de cuadrícula UPS, utilizado para las zonas polares en lugar del sistema UTM, cada casquete polar circular está dividido en dos mitades por los meridianos de  $0^\circ$  y de  $180^\circ$ . En el casquete polar norte la mitad oeste (longitud oeste) es designada zona de cuadrícula  $Y$ , y la mitad este,  $Z$ . En el casquete polar sur, la mitad de la longitud oeste se designa como  $A$  y la mitad este como  $B$ .

En las áreas polares se asignan arbitrariamente las abscisas y las ordenadas del sistema de cuadrícula. En ambas zonas, la abscisa  $2\,000\,000\text{m}$  este coincide con la línea de meridiano  $0^\circ \equiv 180^\circ$ . La ordenada  $2\,000\,000\text{m}$  Norte coincide con la línea de meridiano  $90^\circ\text{E} - 90^\circ\text{W}$ .

De acuerdo con lo expresado antes, la coordenada  $E$  para las líneas de secancia son  $680\,000\text{m}$  y  $320\,000\text{m}$  al este y al oeste del meridiano, respectivamente. Las coordenadas  $E$  de los meridianos de borde de faja son  $834\,000\text{m}$  y  $166\,000\text{m}$  al este y al oeste.

La correspondencia entre los números de zonas de las coordenadas UTM y el número de fajas de la Proyección Gauss-Krüger para el territorio continental de Argentina, de acuerdo con las convenciones adoptadas, aparece en la tabla 5.4.



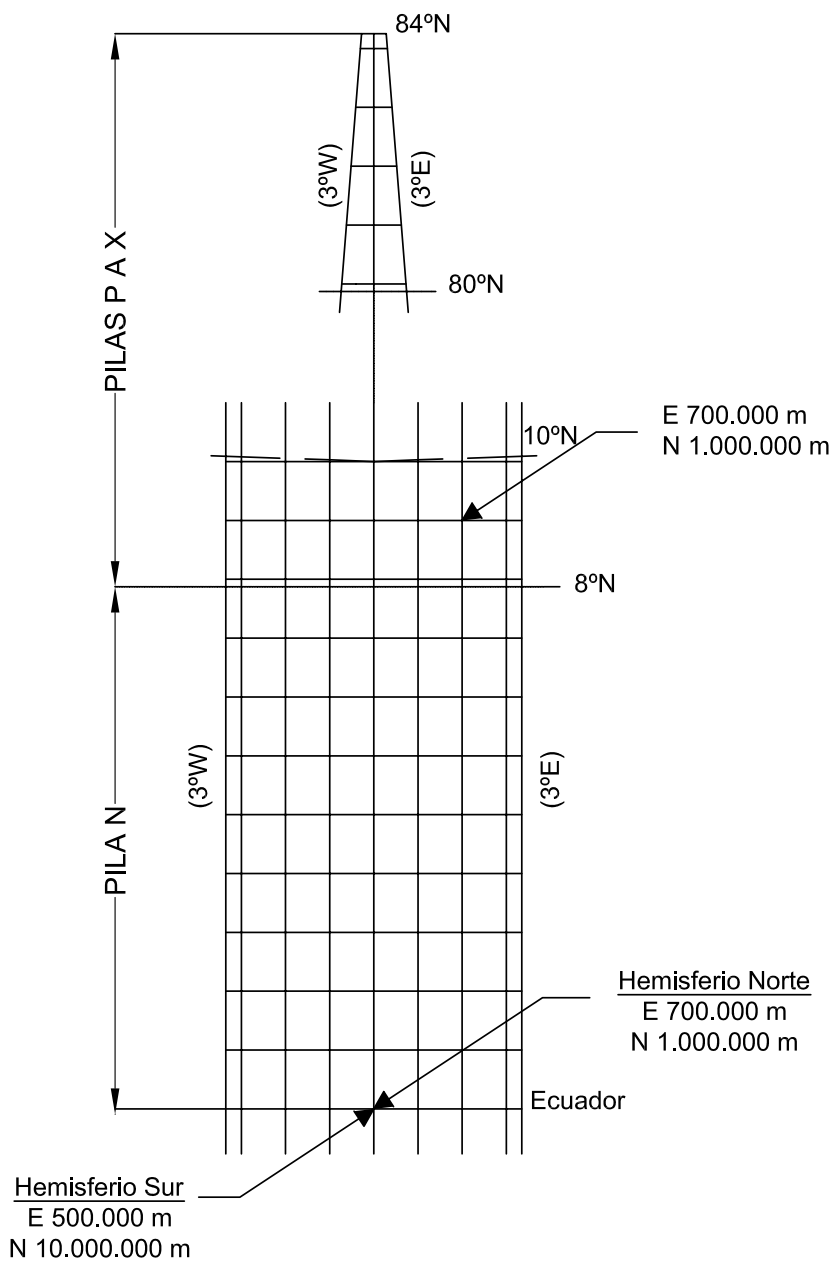
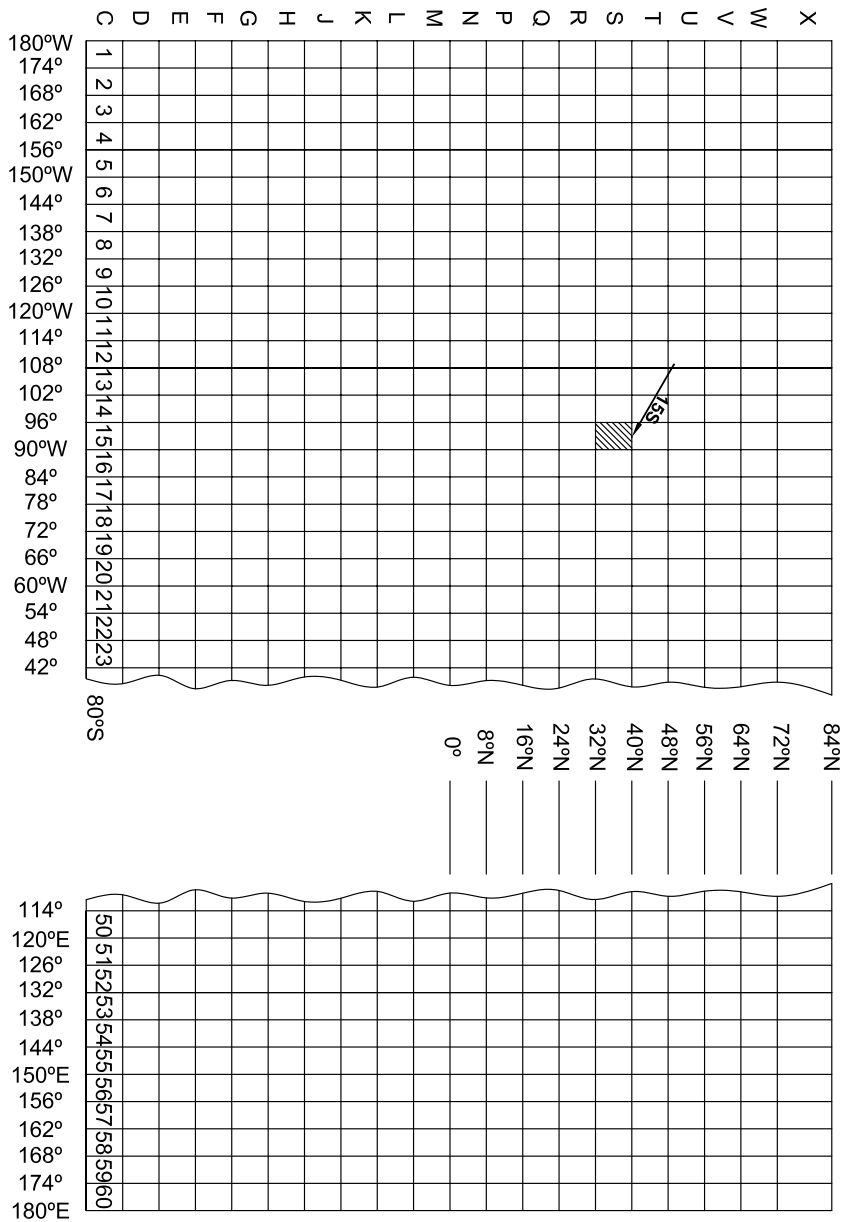


Figura 5.15: Cuadrícula superpuesta a una zona de la proyección UTM.



**Figura 5.16:** Numeración de las zonas UTM y las designaciones con letras de la cuadrícula de la zona de 6° por 8°.

En el sistema UTM el número de la zona puede determinarse por medio de la siguiente expresión:

$$n^{\circ} \text{ zona} = \frac{183^{\circ} + \lambda_0}{6^{\circ}}$$

donde  $\lambda_0$  es la longitud del meridiano central y se debe introducir con su signo.

Meridiano central	Zona UTM	Faja Gauss-Krüger
-51°	22	-
-54°		7
-57°	21	6
-60°		5
-63°	20	4
-66°		3
-69°	19	2
-72°		1
-75°	18	-

Tabla 5.4

### 5.7.2 Fórmulas de las coordenadas UTM

Se deduce que:

$$N = k_0 \left[ B + \frac{(\Delta\lambda)^2 \cos^2 \varphi N t}{2} + \frac{(\Delta\lambda)^4 \cos^4 \varphi N (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4)}{24} + \frac{(\Delta\lambda)^6 \cos^6 \varphi N t (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 + 330\eta^2 t^2)}{720} \right]$$

$$E = 500\,000m + k_0 \left[ \Delta\lambda \cos \varphi N + \frac{(\Delta\lambda)^3 \cos^3 \varphi N (1 - t^2 + \eta^2)}{6} + \frac{(\Delta\lambda)^5 \cos^5 \varphi N t (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 18\eta^2 t^2)}{120} \right]$$

donde  $k_0 = 0,9996$ ,

$B$  es la longitud de arco de meridiano desde el Ecuador hasta el punto,

$$t = \operatorname{tg} \varphi$$

$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi$ , donde  $e'^2$  es la segunda excentricidad,

$N = \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$  es la gran normal y

$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  siendo  $\lambda_0$  la longitud del meridiano central de la zona a la que pertenece el punto, expresando  $\Delta\lambda$  en radianes.

En el hemisferio sur se suma 10 000 000m a la coordenada  $N$ .

Se deduce además que los módulos de alteración lineal son:

$$h = k = k_0 \left[ 1 + \frac{\Delta\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) + \frac{\Delta\lambda^4 \cos^4 \varphi}{24} (5 - t^2 + 14\eta^2 - 28t^2\eta^2) \right]$$

y que la expresión de la convergencia de meridianos es:

$$\gamma = \Delta\lambda \sin \varphi + \frac{\Delta\lambda^3 \cos^3 \varphi}{3} t(1 + 3\eta^2) + \frac{\Delta\lambda^5 \cos^5 \varphi}{15} t(2 + \eta^3)$$

Una forma abreviada de representar las ecuaciones de la proyección UTM es la siguiente:

$$\begin{aligned} N &= FN + 0,9996X \\ E &= FE + 0,9996Y \end{aligned}$$

en donde  $X$  e  $Y$  son las coordenadas básicas de un punto como se calculan a continuación;  $FN$  y  $FE$  son los valores del falso norte y falso este, respectivamente.

Las ecuaciones para las coordenadas a ser usadas en las ecuaciones anteriores están dadas, para el elipsoide, por:

$$\begin{aligned} X &= S + \frac{\Delta\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi N t + \frac{\Delta\lambda^4 \cos^4 \varphi N t}{24} (5 - t^2 + 9\eta^2) \\ Y &= \Delta\lambda \cos \varphi N + \frac{\Delta\lambda^3 \cos^3 \varphi}{3} N (1 - t^2 + \eta^2) \end{aligned}$$

en donde  $S$  es la distancia a lo largo del meridiano desde el Ecuador a la latitud  $\varphi$  en el elipsoide y las restantes letras tienen igual significado que en las fórmulas anteriores.

Para las ecuaciones de la proyección UPS (Universal Polar Estereográfica) se tienen las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} N &= 2\,000\,000 + X \\ E &= 2\,000\,000 + Y \end{aligned}$$

siendo  $X$  e  $Y$  las fórmulas de las coordenadas en la proyección acimutal estereográfica polar:

$$X = \rho \cos \Delta \lambda \text{ (zona norte UPS)}$$

$$X = -\rho \cos \Delta \lambda \text{ (zona sur UPS)}$$

$$Y = \rho \operatorname{sen} \Delta \lambda$$

En esta expresión  $\rho$  es la coordenada polar de una proyección estereográfica secante basada en el elipsoide como superficie terrestre.

### Ejemplo:

Considerar un punto sobre el elipsoide terrestre (Elipsoide Internacional de Hayford,  $a = 6\,378\,388\text{m}$ ,  $b = 6\,356\,912\text{m}$ ) de coordenadas  $\varphi = 2^\circ$ ,  $\Delta \lambda = 2^\circ$  siendo  $\lambda_0 = 63^\circ W$ . Se desean hallar las coordenadas UTM.

Zona: 20.

$$E = 500000m + 0,9996Y$$

$$Y = \Delta \lambda \cos \varphi N + \frac{\Delta \lambda^3 \cos^3 \varphi}{3} N(1 - t^2 + \eta^2)$$

$$e^2 = 0,006722653187$$

$$N = 6\,378\,440,227m$$

$$t = \operatorname{tg} \varphi = 0,0349207$$

$$\eta^2 = 0,006759909693$$

$$Y = 222\,559,3169m$$

$$E = 500\,000m + 0,9996Y = 722\,470,2931m$$

$$N = 0,9996X \text{ (la coordenada Norte).}$$

$$X = S + \frac{\Delta \lambda^2}{2} \cos^2 \varphi N t + \frac{\Delta \lambda^4 \cos^4 \varphi N t}{24} (5 - t^2 + 9\eta^2)$$

$$S \cong \alpha \varphi + \beta \operatorname{sen} 2\varphi + \gamma \operatorname{sen} 4\varphi + \delta \operatorname{sen} 6\varphi + \epsilon \operatorname{sen} 8\varphi$$

$$\alpha = 111,136336655km/^\circ$$

$$\beta = -16,107034679km$$

$$\gamma = 0,016976211km$$

$$\delta = -0,000022266km$$

$$\epsilon = 0,000000032km$$

$$S \cong 221,1514613km = 221\,151,4613m$$

$$X = 221\,287,0683m \Rightarrow N = 0,9996X = 221\,198,55m$$



## Capítulo 6

### Proyecciones cónicas

Las proyecciones cónicas se usan preferentemente para mostrar regiones en las que la mayor extensión se encuentra en el sentido este-oeste, en latitudes intermedias, es decir, en las zonas templadas.

El nombre de *cónicas* se debe a que las proyecciones cónicas más elementales, llamadas *perspectivas*, pueden ser obtenidas colocando una superficie cónica sobre la esfera terrestre (o el elipsoide) con el eje de la superficie cónica colineal con el eje terrestre, siendo tangente a lo largo de un determinado *paralelo base* cuya latitud es elegida por el cartógrafo (cónicas tangentes), o secante a lo largo de dos *paralelos bases*. Después de proyectar desde un punto de vista ubicado en el centro de la Tierra, los paralelos y meridianos sobre esa superficie cónica, se considera la misma cortada según una generatriz y extendida sobre un plano; resultan así las proyecciones de los paralelos arcos de circunferencias concéntricos, y las de los meridianos semirrectas concurrentes en un punto.

Las llamadas *proyecciones cónicas no perspectivas* tienen las características generales citadas en el párrafo anterior, pero no resultan de proyectar desde un punto de vista determinado sobre la superficie cónica, sino que se imponen propiedades, como la isogonía, la equivalencia, etc., condiciones que serán cumplidas mediante una determinada separación de las

proyecciones de los paralelos, en cada caso.

Finalmente, están las *proyecciones pseudocónicas*, que poseen algunas características de las cónicas citadas, por ejemplo, paralelos como arcos de circunferencias y meridianos como líneas curvas; las más conocidas son la policónica y la de Bonne.

## 6.1 Proyección cónica normal tangente pura, central o perspectiva

### 6.1.1 Dibujo de la proyección

#### Método gráfico

Se obtiene en dos etapas (ver Figura 6.1).

- Se supone una superficie cónica cuyo eje contiene al eje terrestre, siendo la superficie cónica tangente a la esfera terrestre a lo largo de un paralelo que se denomina paralelo base, de tangencia o estándar. Desde el centro de la Tierra, donde está el punto de vista, se proyectan paralelos y meridianos sobre dicha superficie cónica.
- Se supone cortada la superficie cónica a lo largo de una generatriz y se desarrolla sobre un plano.

### 6.1.2 Cálculo del ángulo de amplitud $\alpha$

El ángulo de amplitud  $\alpha$  es el que resulta al desarrollar la superficie cónica en el plano. En el triángulo  $PN'AV$  (Figura 6.1) se tiene que  $PN'A = r_0$ . Además:  $\text{tg}(90^\circ - \varphi_0) = \frac{PN'A}{R}$ ; de donde  $PN'A = R \text{tg}(90^\circ - \varphi_0)$ , obteniéndose que:

$$r_0 = R \cotg \varphi_0$$

Se sabe que :  $\text{arco} = \text{radio} \times \text{ángulo en radianes}$ ; entonces, como el paralelo base se proyecta en verdadera magnitud:

$$\alpha_{\text{rad}} = \frac{2\pi \cos \varphi_0 R}{r_0}$$

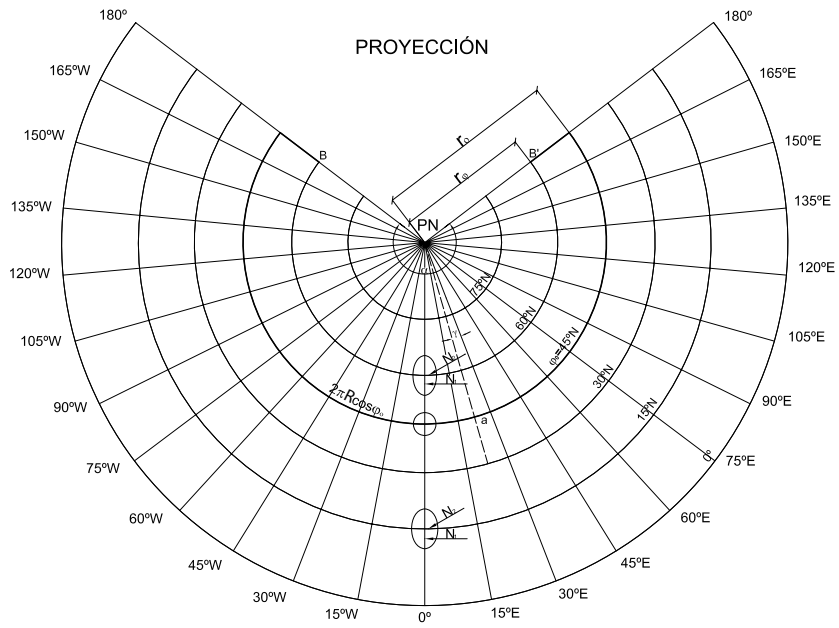
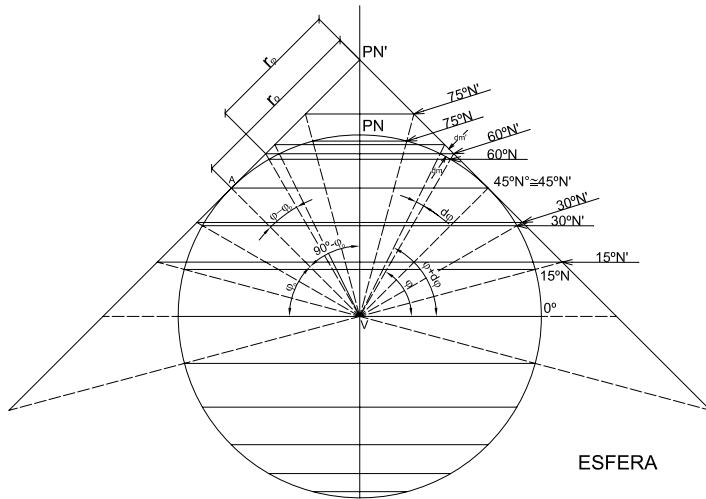
Reemplazando  $r_0$ :

$$\alpha_{\text{rad}} = \frac{2\pi \cos \varphi_0 R}{R \cotg \varphi_0}$$

Pero  $\cotg \varphi_0 = \frac{\cos \varphi_0}{\text{sen } \varphi_0}$ , entonces:

$$\alpha_{\text{rad}} = \frac{2\pi \cos \varphi_0 \text{sen } \varphi_0}{\cos \varphi_0}$$





**Figura 6.1:** *Proyección cónica normal tangente pura, central o perspectiva.*

$$\alpha_{\text{rad}} = 2\pi \text{sen } \varphi_0$$

Si se desea expresar el ángulo en grados:

$$\alpha^{\circ} = \frac{2\pi \text{sen } \varphi_0 360^{\circ}}{2\pi}$$

$$\alpha^{\circ} = 360^{\circ} \text{sen } \varphi_0$$

Para la Figura 6.1,  $\varphi_0 = 45^{\circ}$ , entonces  $\alpha = 360^{\circ} \text{sen } 45^{\circ} = 254^{\circ}33'30''$ .

### 6.1.3 Cálculo del ángulo $\gamma$

Este valor angular es determinado por dos meridianos cualesquiera en la proyección, siendo menor que la diferencia de longitud geográfica  $\Delta\lambda$  entre los mismos.

$\gamma_{\text{rad}} = \frac{a}{r_0}$  siendo  $a$  la longitud del arco del paralelo base entre dos meridianos; además  $a = R \cos \varphi_0 \Delta\lambda$ , si  $\Delta\lambda$  se expresa en radianes, entonces:

$$\gamma_{\text{rad}} = \frac{R \cos \varphi_0 \Delta\lambda_{\text{rad}}}{R \cotg \varphi_0}$$

Pero  $\cotg \varphi_0 = \frac{\cos \varphi_0}{\text{sen } \varphi_0}$ , por lo tanto:  $\gamma_{\text{rad}} = \frac{\cos \varphi_0 \text{sen } \varphi_0 \Delta\lambda_{\text{rad}}}{\cos \varphi_0} = \text{sen } \varphi_0 \Delta\lambda_{\text{rad}}$

Si se expresa el ángulo en grados será:

$$\gamma^{\circ} = \text{sen } \varphi_0 \Delta\lambda^{\circ}$$

**Nota:** El valor  $n = \text{sen } \varphi_0$  se denomina constante del cono, y tiene la misma expresión en todas las proyecciones cónicas tangentes.

#### Observación:

Para diferenciar esta proyección en un mapa de una proyección acimutal polar se procede de la siguiente manera: se coloca un triple decímetro o escalímetro coincidiendo con un meridiano y se lo desliza en forma paralela al mismo hasta intersectar otro meridiano (cualquiera), y se traza dicha paralela. El ángulo forma la paralela con el meridiano se mide con un transportador de ángulos ( $\gamma$  en la Figura 6.2).

Si el valor angular es igual a la diferencia de longitud geográfica entre los meridianos, se tratará de una proyección acimutal polar; si es menor, se tratará de una proyección cónica. Además, mediante esta técnica, es posible determinar el paralelo base.

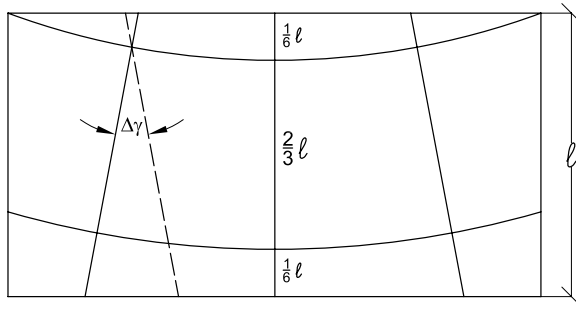


Figura 6.2: Ángulo que forman la proyección de dos meridianos.

Como se dedujo anteriormente:  $\gamma^{\circ} = \text{sen } \varphi_0 \Delta \lambda^{\circ}$ , por lo tanto:

$$\text{sen } \varphi_0 = \frac{\gamma^{\circ}}{\Delta \lambda^{\circ}}$$

de donde se obtiene que:

$$\varphi_0 = \text{arcsen } \frac{\gamma^{\circ}}{\Delta \lambda^{\circ}}$$

#### 6.1.4 Método analítico

Se considera un sistema de ejes coordenados, donde el eje  $X$  es tangente a la proyección del paralelo base en el punto de intersección con el meridiano central y el eje  $Y$  coincide con la proyección del meridiano central ( $\lambda_0$ ). Se calculan las coordenadas de cada punto y se unen con arcos de circunferencias.

En la Figura 6.1 se ve que

$$\begin{aligned} \gamma &= \Delta \lambda \text{sen } \varphi_0 \\ r_{\varphi} &= R[\text{cotg } \varphi_0 - \text{tg}(\varphi - \varphi_0)], \end{aligned}$$

mientras que en la Figura 6.3 se observa que las coordenadas cartesianas son:

$$\begin{cases} X = r_{\varphi} \text{sen } \gamma \\ Y = r_0 - r_{\varphi} \text{cos } \gamma \end{cases}$$

Si, por ejemplo:  $\varphi_0 = 45^{\circ}$ ,  $\varphi = 75^{\circ}$  y  $\lambda = 60^{\circ}$ , siendo  $\lambda_0 = 0^{\circ}$ , resulta  $\Delta \lambda = 60^{\circ}$  y

$$\gamma = 60^{\circ} \text{sen } 45^{\circ} = 42^{\circ} 25' 35''$$

$$r_{\varphi} = 6\,370\text{km}[\text{cotg } 45^{\circ} - \text{tg}(75^{\circ} - 45^{\circ})] = 2\,692,2792\text{km}$$

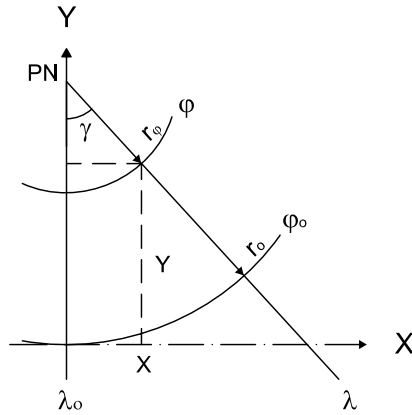


Figura 6.3: Proyección cónica tangente pura. Cálculo de coordenadas.

$$r_0 = R \cotg \varphi_0 = 6\,370 \text{ km}.$$

Con estos valores las coordenadas cartesianas son:

$$X = 2\,692,2792 \text{ km} \operatorname{sen} 42^\circ 25' 35'' = 1\,816,325 \text{ km}$$

$$Y = 6\,370 \text{ km} - 2\,692,2792 \text{ km} \operatorname{cos} 42^\circ 25' 35'' = 4\,382,708 \text{ km}$$

### 6.1.5 Características y propiedades

Los paralelos se proyectan según arcos de circunferencias concéntricas con la proyección del Polo, siendo el paralelo base el único de dimensión correcta. Los demás paralelos tienen dimensiones mayores que las reales y se van separando entre sí acentuadamente al alejarse del paralelo base hacia el norte o hacia el sur. La deformación en cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ . El Polo se proyecta según un punto.

Recuérdese que  $k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}}$ . En la Figura 6.4  $k = \frac{BB'}{2\pi R \operatorname{cos} \varphi}$ , donde arco  $BB' = \alpha r_\varphi$ , pero  $\alpha = 2\pi \operatorname{sen} \varphi_0$ . Reemplazando: arco  $BB' = 2\pi \operatorname{sen} \varphi_0 r_\varphi$ .

$$\text{Además: } r_\varphi = r_0 - R[\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0)] \text{ y } r_0 = R \cotg \varphi_0.$$

Entonces:

$$r_\varphi = R \cotg \varphi_0 - R[\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0)]$$

$$r_\varphi = R[\cotg \varphi_0 - \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0)]$$

Además:

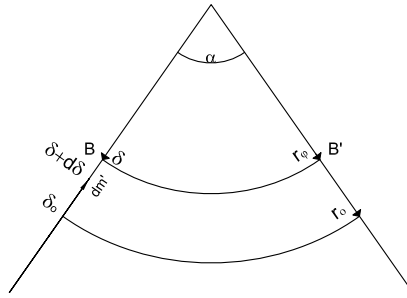


Figura 6.4: Cálculo del módulo de alteración lineal  $k$ .

$$BB' = 2\pi \operatorname{sen} \varphi_0 R [\operatorname{cotg} \varphi_0 - \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0)],$$

entonces:

$$k = \frac{2\pi \operatorname{sen} \varphi_0 R [\operatorname{cotg} \varphi_0 - \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0)]}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{\operatorname{sen} \varphi_0 [\operatorname{cotg} \varphi_0 - \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0)]}{\cos \varphi}$$

$$k = \frac{\cos \varphi_0 - \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0)}{\cos \varphi} = \frac{\cos \varphi_0 - \operatorname{sen} \varphi_0 \frac{\operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0)}{\cos(\varphi - \varphi_0)}}{\cos \varphi}$$

$$k = \frac{\cos \varphi_0 \cos(\varphi - \varphi_0) - \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0)}{\cos \varphi \cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{\cos \varphi}{\cos(\varphi - \varphi_0) \cos \varphi}$$

$$k = \frac{1}{\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

**Ejemplo:**

Si  $\varphi = 60^\circ N$  y  $\varphi_0 = 45^\circ N$  :  $k = \frac{1}{\cos(60^\circ - 45^\circ)} = 1,035276182$ .

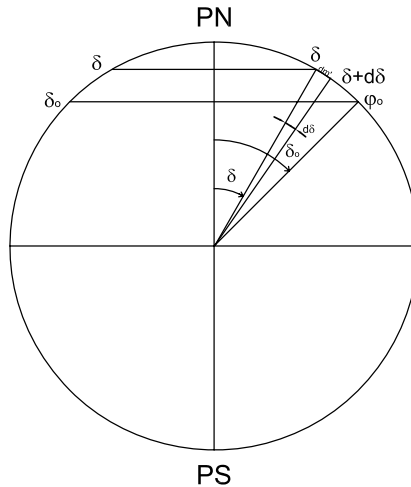


Figura 6.5: Cálculo del módulo de alteración lineal  $h$ .

Los meridianos se proyectan según rectas concurrentes en el Polo, de longitudes incorrectas mayores que las reales, formando entre sí ángulos iguales pero de amplitudes menores que las reales. La deformación en cada punto de los meridianos se calcula con el módulo de alteración lineal  $h$ , siendo  $h = \frac{dm'}{dm}$ .

$$dm' = dr_\varphi = d[R \cotg \varphi_0 - R \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0)] = dR[\cotg \varphi_0 - \operatorname{tg}(\varphi - \varphi_0)]$$

Como  $\delta_0 = 90^\circ - \varphi_0$  y  $\delta = 90^\circ - \varphi$ , entonces

$$dm' = Rd[\operatorname{tg} \delta_0 - \operatorname{tg}(90^\circ - \delta - 90^\circ + \delta_0)]$$

$$dm' = Rd[\operatorname{tg} \delta_0 - \operatorname{tg}(\delta_0 - \delta)] = R \left[ 0 - \frac{1}{\cos 2(\delta_0 - \delta)} (-1) \right] d\delta$$

Entonces:  $dm' = R \frac{1}{\cos^2(\delta_0 - \delta)} d\delta$ ; además  $dm = R d\delta$ , por lo tanto:

$$h = \frac{dm'}{dm} = \frac{R \frac{1}{\cos^2(\delta_0 - \delta)} d\delta}{R d\delta} = \frac{1}{\cos^2(\delta_0 - \delta)}$$

$$h = \frac{1}{\cos^2(\delta_0 - \delta)} = \frac{1}{\cos^2(90^\circ - \varphi_0 - 90^\circ + \varphi)} = \frac{1}{\cos^2(\varphi - \varphi_0)}$$

Por lo tanto, como  $N_1 > N_2$ ,  $N_1 = h$  y  $N_2 = k$ .

### Ejemplos:

$$a) \delta_0 = 45^\circ, \delta = 60^\circ: h = \frac{1}{\cos^2(45^\circ - 60^\circ)} = 1,071797;$$

$$k = \frac{1}{\cos(45^\circ - 60^\circ)} = 1,035276176.$$

$$b) \varphi = 0^\circ, \varphi_0 = 45^\circ; k = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ [\cotg 45^\circ - \operatorname{tg}(0^\circ - 45^\circ)]}{\cos 0^\circ} = 1,41421356;$$

$$h = \frac{1}{\cos^2(45^\circ - 90^\circ)} = 2.$$

$$c) \varphi = \varphi_0 = 45^\circ; k = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ [\cotg 45^\circ - \operatorname{tg}(45^\circ - 45^\circ)]}{\cos 45^\circ} = 1,$$

$$h = \frac{1}{\cos^2(45^\circ - 45^\circ)} = 1.$$

Como las proyecciones de meridianos y paralelos se cortan a  $90^\circ$ ,  $h$  y  $k$  son los semiejes de la Elipse de Tissot:  $N_1 = h$ ,  $N_2 = k$ .

Esta proyección no es isógona, pues  $h \neq k$  y tampoco es equivalente, pues  $hk \neq 1$ .

Observación: En un punto cualquiera de la proyección, la deformación

angular máxima está dada por la fórmula:

$$\delta_{\max} = 2\text{arcsen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

y la deformación en el área está dada por el módulo de alteración superficial

$$\mu = N_1 N_2$$

**Ejemplos:**

a)  $\varphi = 60^\circ N; \varphi_0 = 45^\circ N; \delta_{\max} = 2\text{arcsen} \frac{1,071889442 - 1,035276182}{1,071889442 + 1,035276182} = 1^\circ 59' 28''$

b)  $\varphi = 60^\circ; \varphi_0 = 30^\circ$ .

$$N_1 = h = \frac{1}{\cos^2(60^\circ - 30^\circ)} = 1,333; N_2 = k = \frac{1}{\cos^2(60^\circ - 30^\circ)} = 1,1547.$$

$$\delta_{\max} = 2\text{arcsen} \frac{1,333 - 1,1547}{1,333 + 1,1547} = 8^\circ 12';$$

$$\mu = N_1 N_2 = 1,333 \times 1,1547 = 1,539.$$

c)  $\varphi = 15^\circ; \varphi_0 = 30^\circ$ .

$$N_1 = h = \frac{1}{\cos^2(15^\circ - 30^\circ)} = 1,071797; N_2 = k = \frac{1}{\cos^2(15^\circ - 30^\circ)} = 1,035276.$$

$$\delta_{\max} = 2\text{arcsen} \frac{1,071797 - 1,035276}{1,071797 + 1,035276} = 1^\circ 59' 11'';$$

$$\mu = N_1 N_2 = 1,071797 \times 1,035276 = 1,109605711.$$

### 6.1.6 Transformación inversa de coordenadas (de coordenadas cartesianas a geográficas)

Las ecuaciones cartesianas de esta proyección son:

$$X = R[\text{cotg} \varphi_0 - \text{tg}(\varphi - \varphi_0)] \text{sen}(\Delta \lambda \text{sen} \varphi_0) \quad (6.1)$$

$$Y = R \text{cotg} \varphi_0 - R[\text{cotg} \varphi_0 - \text{tg}(\varphi - \varphi_0)] \text{cos}(\Delta \lambda \text{sen} \varphi_0) \quad (6.2)$$

De la ecuación 6.2:

$$Y - R \text{cotg} \varphi_0 = -R[\text{cotg} \varphi_0 - \text{tg}(\varphi - \varphi_0)] \text{cos}(\Delta \lambda \text{sen} \varphi_0) \quad (6.3)$$

Elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro 6.1 y 6.3 para despejar  $\varphi$ :

$$X^2 + Y^2 - 2YR \cotg \varphi_0 + \cotg^2 \varphi_0 = R^2 [\cotg \varphi_0 - \tg(\varphi - \varphi_0)]^2 \cdot [\text{sen}^2(\Delta\lambda \text{sen } \varphi_0) + \text{cos}^2(\Delta\lambda \text{sen } \varphi_0)]$$

$$\begin{aligned} [\cotg \varphi_0 - \tg(\varphi - \varphi_0)]^2 &= \frac{1}{R^2} [X^2 + Y^2 - 2YR \cotg \varphi_0 + R^2 \cotg^2 \varphi_0] \\ \cotg \varphi_0 - \tg(\varphi - \varphi_0) &= \frac{1}{R} [X^2 + Y^2 - 2YR \cotg \varphi_0 + R^2 \cotg^2 \varphi_0]^{\frac{1}{2}} \\ \tg(\varphi - \varphi_0) &= \cotg \varphi_0 - \frac{1}{R} [X^2 + Y^2 - 2YR \cotg \varphi_0 + R^2 \cotg^2 \varphi_0]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \text{arctg} \left\{ \cotg \varphi_0 - \frac{1}{R} [X^2 + Y^2 - 2YR \cotg \varphi_0 + R^2 \cotg^2 \varphi_0]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (6.4)$$

Realizando ahora el cociente entre las expresiones 6.1 y 6.3 para despejar  $\lambda$ , resulta:

$$\frac{X}{Y - R \cotg \varphi_0} = -\tg(\Delta\lambda \text{sen } \varphi_0)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 &= \frac{1}{\text{sen } \varphi_0} \text{arctg} \frac{X}{R \cotg \varphi_0 - Y} \\ \lambda &= \lambda_0 + \frac{1}{\text{sen } \varphi_0} \text{arctg} \frac{X}{R \cotg \varphi_0 - Y} \end{aligned} \quad (6.5)$$

**Nota:**

En las expresiones 6.4 y 6.5:

$$\begin{aligned} X &= xM \\ Y &= yM \end{aligned}$$

siendo  $x$  e  $y$  las coordenadas del punto medidas en el mapa o carta y  $M$  el módulo de la escala.

### Ejemplo

En un mapa en proyección cónica tangente pura se midieron las coordenadas cartesianas de un punto y se obtuvo  $x = 4,8\text{cm}$ ,  $y = 2,5\text{cm}$ .



Se sabe que la escala del mapa es  $E = 1 : 160\,000\,000$  y que el centro es el punto  $(\varphi_0 = 45^\circ N, \lambda_0 = 0^\circ)$ . Se desean conocer las coordenadas geográficas  $(\varphi$  y  $\lambda)$  del punto dado.

$$X = xM = 4,8\text{cm} \times 1\,600 = 7\,680\text{km}$$

$$Y = yM = 2,5\text{cm} \times 1\,600 = 4\,000\text{km}.$$

Utilizando la fórmula 6.4:

$$X = xM = 4,8\text{cm} \times 1\,600 = 7\,680\text{km}$$

$$Y = yM = 2,5\text{cm} \times 1\,600 = 4\,000\text{km}.$$

$$\varphi = 45^\circ + \arctg \left\{ \cotg 45^\circ - \frac{1}{6\,370\text{km}} [(7\,680\text{km})^2 + (4\,000\text{km})^2 - 2 \times 4\,000\text{km} \times 6\,370\text{km} \cotg 45^\circ + (6\,370\text{km})^2 \cotg^2 45^\circ]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$\varphi = 45^\circ - 14^\circ 40' 06'' = 30^\circ 19' 54''.$$

Con la expresión 6.5:

$$\lambda = \frac{1}{\text{sen } 45^\circ} \arctg \frac{7\,680\text{km}}{6\,370\text{km} \cotg 45^\circ - 4\,000\text{km}} = 103^\circ 01' 32''$$

## 6.2 Proyección cónica normal tangente equidistante o cónica simple

### 6.2.1 Dibujo

Tiene el aspecto común a todas las proyecciones normales tangentes, imponiéndose aquí la condición de que todos los meridianos tengan longitudes correctas ( $h = 1$ ).

El paralelo base es elegido por el cartógrafo, quien tiene en cuenta el lugar que le interesa representar para que haya menor deformación. Es decir, conociendo el paralelo base  $(\varphi_0)$ , se pueden calcular la amplitud del ángulo  $\alpha$  y el radio del paralelo base  $(r_0)$ :

$$\alpha^\circ = 360^\circ \text{sen } \varphi_0; \quad r_0 = R \cotg \varphi_0.$$

#### Cálculo de $r_\varphi$

Cuando  $\varphi_0$  y  $\varphi$  están expresados en radianes,  $r_\varphi$  se calcula a través de la expresión:

$$r_\varphi = r_0 - (\varphi - \varphi_0)R = R \cotg \varphi_0 - R(\varphi - \varphi_0) = R[\cotg \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0)].$$

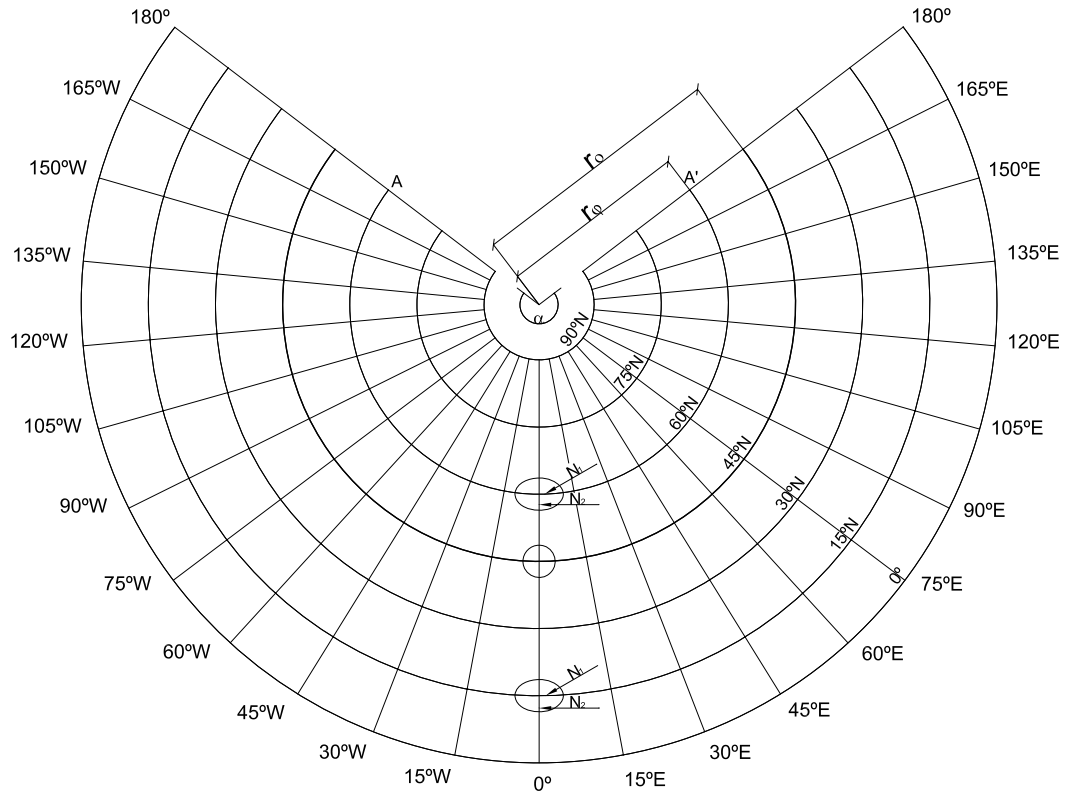


Figura 6.6: Proyección cónica normal tangente equidistante.

Si las latitudes están expresadas en grados sexagesimales:

$$\begin{aligned} r_{\varphi} &= r_0 - (\varphi - \varphi_0) \frac{\pi R}{180^\circ} = R \cotg \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0) \frac{\pi R}{180^\circ} \\ &= R \left[ \cotg \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0) \frac{\pi}{180^\circ} \right]. \end{aligned}$$

Por medio de esta fórmula se calculan los radios de los paralelos, permitiendo su dibujo.

Para dibujar los meridianos se hace uso de un transportador de ángulos, dividiéndose el valor de la amplitud de  $\alpha$  por el número de meridianos que se ha decidido dibujar. También aquí  $\gamma = \Delta \lambda \operatorname{sen} \varphi_0$ .

En la latitud  $\varphi = 90^\circ$  resulta  $r_{90^\circ} = R[\cotg \varphi_0 - (90^\circ - \varphi_0)] \neq 0$ .

Por lo tanto, el Polo Norte y el Polo Sur se proyectan como arcos de circunferencias.

### 6.2.2 Características y propiedades

Los paralelos se proyectan según arcos de circunferencias concéntricas en un punto que no es el Polo; dichos arcos están equiespaciados. Las dimensiones de los paralelos, salvo la del paralelo base, son incorrectas y mayores que las reales. La deformación en cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$  que, como se ha expresado antes, se calcula como:

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}}$$

En este caso resulta  $k = \frac{r_{\varphi} \alpha}{2\pi R \cos \varphi}$ , siendo  $r_{\varphi} = r_0 - (\varphi - \varphi_0) \frac{\pi R}{180^\circ}$  y  $r_0 = R \cotg \varphi_0$ . Si  $\varphi$  y  $\varphi_0$  están expresados en grados, entonces:

$$r_{\varphi} = R \left[ \cotg \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0) \frac{\pi}{180^\circ} \right]$$

como  $\alpha = 2\pi \operatorname{sen} \varphi_0$ , resulta:

$$r_{\varphi} \alpha = R \left[ \cotg \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0) \frac{\pi}{180^\circ} \right] 2\pi \operatorname{sen} \varphi_0.$$

Reemplazando en la expresión de  $k$ :

$$k = \frac{R \left[ \cotg \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0) \frac{\pi}{180^\circ} \right] 2\pi \operatorname{sen} \varphi_0}{2\pi R \cos \varphi}$$

Entonces:

$$N_1 = k = \frac{[\cotg \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0) \frac{\pi}{180^\circ}] \operatorname{sen} \varphi_0}{\cos \varphi}$$

$$N_2 = h = 1.$$

**Nota:** Como los paralelos y los meridianos se cortan a  $90^\circ$ ,  $N_1$  y  $N_2$  coinciden con  $k$  y con  $h$ .

### Ejemplos

a) Si  $\varphi = 60^\circ N$  y  $\varphi_0 = 45^\circ N$ , resulta  $N_1 = k = 1,044$  y  $N_2 = h = 1$ .

b) Si  $\varphi = 15^\circ N$  y  $\varphi_0 = 45^\circ N$ , es  $N_1 = k = 1,115$  y  $N_2 = h = 1$ .

Los meridianos se proyectan según rectas concurrentes en un punto que no es el Polo, sino el vértice del ángulo de amplitud  $\alpha$ ; forman entre sí ángulos iguales e incorrectos, menores que los reales. La deformación sobre los meridianos es nula por la condición impuesta. Recuérdese que el ángulo determinado por dos meridianos cualesquiera en la proyección es  $\gamma = \Delta \lambda \operatorname{sen} \varphi_0$ .

Esta proyección no es isógona, pues  $h \neq k$  y tampoco es equivalente, pues  $hk \neq 1$ .

La deformación angular máxima en un punto de la proyección está dada por la fórmula:

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arcsen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

### Ejemplos:

a)  $\varphi = 60^\circ N; \varphi_0 = 45^\circ N; \delta_{\max} = 2 \operatorname{arcsen} \frac{1,044 - 1}{1,044 + 1} = 2^\circ 28' 01''$

b)  $\varphi = 60^\circ N; \varphi_0 = 30^\circ N$ .

$$\begin{aligned} k &= \frac{[\cotg 30^\circ - 30^\circ \frac{\pi}{180^\circ}] \operatorname{sen} 30^\circ}{\cos 60^\circ} \\ &= \frac{[1,732051 - 0,5235987]0,5}{0,5} = 1,0284523 > 1 \\ k &= N_1 = 1,2084523 \end{aligned}$$

$$h = N_2 = 1$$

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arcsen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} = 2 \operatorname{arcsen} \frac{1,20844523 - 1}{1,20844523 + 1} = 10^\circ 49' 56'';$$

### 6.2.3 Usos

Muy utilizada para mapas de atlas de países que no se extienden mucho en el sentido norte - sur, pues al alejarse del paralelo base aumentan las deformaciones.

### 6.2.4 Coordenadas de un punto en la proyección

Las coordenadas cartesianas de un punto  $(\varphi, \lambda)$  son:

$$\begin{aligned} X &= r_{\varphi} \operatorname{sen} \gamma = [r_0 - R(\varphi - \varphi_0)] \operatorname{sen} \gamma \\ Y &= r_0 - r_{\varphi} \cos \gamma = r_0 - [r_0 - R(\varphi - \varphi_0)] \cos \gamma, \end{aligned}$$

siendo  $\gamma = \Delta \lambda \operatorname{sen} \varphi_0$ ,  $r_{\varphi} = r_0 - R(\varphi - \varphi_0)$  y  $r_0 = R \cotg \varphi_0$  y  $r_0 = R \cotg \varphi_0$

## 6.3 Proyección cónica normal tangente equivalente

### 6.3.1 Dibujo

Tiene el aspecto común a todas las proyecciones cónicas tangentes, pero se impone la condición de que las áreas sean correctas.

Se halla el radio de un paralelo cualquiera de la proyección. Se iguala el área de la superficie terrestre comprendida entre el paralelo de tangencia y el correspondiente al radio hallado (la zona esférica comprendida entre el paralelo de latitud  $\varphi$  y el paralelo base de latitud  $\varphi_0$ ) con el área del trapecio circular cuyas bases son las proyecciones de esos dos paralelos.

El área de la zona esférica  $(\varphi_0, \varphi)$  es (Figura 6.8):

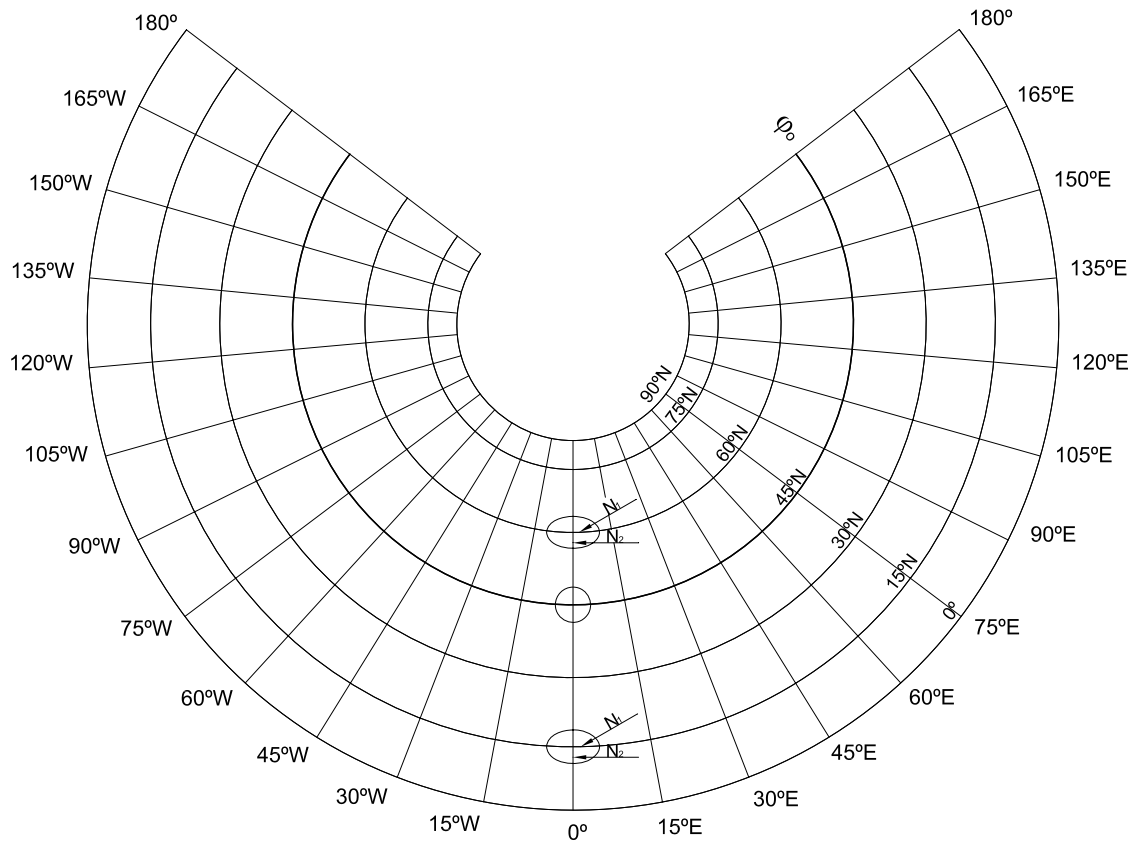
$$\text{Área zona esférica } (\varphi_0, \varphi) = 2\pi R h,$$

pero  $h = R \operatorname{sen} \varphi - R \operatorname{sen} \varphi_0 = R[\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi_0]$ . Reemplazando:

$$\text{Área zona esférica } (\varphi_0, \varphi) = 2\pi R^2 [\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi_0] \quad (6.6)$$

Por otra parte, el área del trapecio circular es la diferencia de las áreas de los dos sectores circulares:

$$\text{Área trapecio circular } (\varphi_0, \varphi) = \frac{2\pi R \cos \varphi_0}{2} r_0 - \frac{r_{\varphi} \alpha r_{\varphi}}{2}$$



**Figura 6.7:** Proyección cónica normal tangente equivalente.

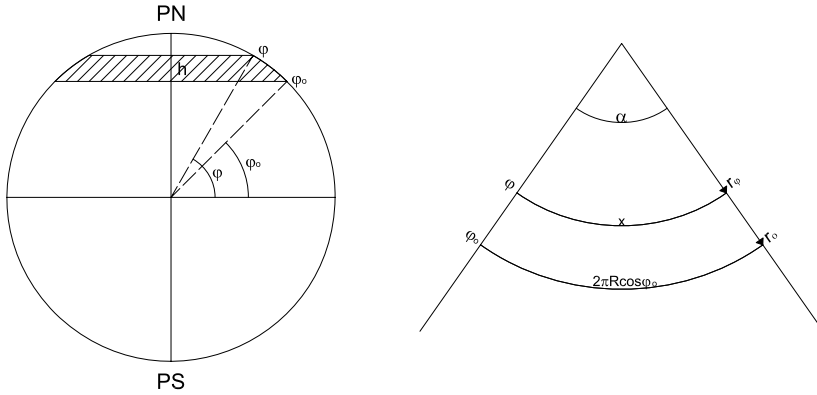


Figura 6.8: Cálculo del radio de un paralelo.

pero  $r_0 = R \cotg \varphi_0$ , entonces:

$$\text{Área trapecio circular}(\varphi_0, \varphi) = \frac{2\pi R \cos \varphi_0 R \cotg \varphi_0}{2} - \frac{\alpha r_\varphi^2}{2} \quad (6.7)$$

Como la proyección es equivalente, 6.6 = 6.7 y, por lo tanto:

$$2\pi R^2 [\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0] = \pi R^2 \cos \varphi_0 \frac{\cos \varphi_0}{\text{sen } \varphi_0} - \frac{\alpha r_\varphi^2}{2} \quad (6.8)$$

resultando una ecuación en  $r_\varphi$ .

Como además  $\alpha = 2\pi \text{sen } \varphi_0$ ,

$$2\pi R^2 (\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0) = \pi R^2 \frac{\cos^2 \varphi_0}{\text{sen } \varphi_0} - \frac{2\pi \text{sen } \varphi_0 r_\varphi^2}{2}$$

Multiplicando ambos miembros de esta última ecuación por (-1) y resolviendo:

$$\pi R^2 \frac{\cos^2 \varphi_0}{\text{sen } \varphi_0} - 2\pi R^2 (\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0) = \pi \text{sen } \varphi_0 r_\varphi^2$$

$$r_\varphi^2 = \frac{\pi R^2 \left[ \frac{\cos^2 \varphi_0}{\text{sen } \varphi_0} - 2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0) \right]}{\pi \text{sen } \varphi_0} = R^2 \left[ \cotg^2 \varphi_0 - \frac{2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0)}{\text{sen } \varphi_0} \right]$$

$$r_\varphi = \sqrt{R^2 \left[ \cotg^2 \varphi_0 - \frac{2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0)}{\text{sen } \varphi_0} \right]} = R \sqrt{\cotg^2 \varphi_0 - \frac{2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0)}{\text{sen } \varphi_0}}$$

$$r_\varphi = \frac{R}{\text{sen } \varphi_0} \sqrt{1 + \text{sen } \varphi_0 (\text{sen } \varphi_0 - 2 \text{sen } \varphi)}$$

Esta fórmula permite hallar el radio de cualquier paralelo. Por ejemplo, a una escala  $E = 1 : 100\,000\,000$  y siendo  $\varphi_0 = 45^\circ$ , se tiene:

$$r_{0^\circ} = 11\,033\text{km}; \text{ en escala: } 11,00\text{cm}$$

$$r_{15^\circ} = 9\,594\text{km}; \text{ en escala: } 19,60\text{cm}$$

$$r_{30^\circ} = 8\,023\text{km}; \text{ en escala: } 8,00\text{cm}$$

$$r_{45^\circ} = 6\,372\text{km}; \text{ en escala: } 6,40\text{cm}$$

$$r_{60^\circ} = 4\,727\text{km}; \text{ en escala: } 4,70\text{cm}$$

$$r_{75^\circ} = 3\,298\text{km}; \text{ en escala: } 3,30\text{cm}$$

$$r_{90^\circ} = 2\,640\text{km}; \text{ en escala: } 2,60\text{cm}$$

### 6.3.2 Características y propiedades

Los paralelos se proyectan según arcos de circunferencias concéntricas que se van acercando entre sí al alejarse del paralelo base hacia el norte o hacia el sur. Las dimensiones de los paralelos son incorrectas, mayores que las reales, calculándose la deformación en cada paralelo con el módulo de alteración lineal  $k$  (Figura 6.7).

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}}$$

La longitud del paralelo en la proyección es  $x = r_\varphi \alpha_{rad}$ , siendo:

$$r_\varphi = R \sqrt{\cotg^2 \varphi_0 - \frac{2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0)}{\text{sen } \varphi_0}} \text{ y } \alpha = 2\pi \text{sen } \varphi$$

Entonces:

$$\begin{aligned} k &= \frac{R \sqrt{\cotg^2 \varphi_0 - \frac{2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0)}{\text{sen } \varphi_0}} 2\pi \text{sen } \varphi}{2\pi R \cos \varphi} \\ &= \frac{\text{sen } \varphi_0 \sqrt{\cotg^2 \varphi_0 - \frac{2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0)}{\text{sen } \varphi_0}}}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Si  $\varphi = 15^\circ N$  y  $\varphi_0 = 45^\circ N$ :

$$N_1 = k = \frac{\text{sen } 45^\circ \sqrt{\cotg^2 45^\circ - \frac{2(\text{sen } 15^\circ - \text{sen } 45^\circ)}{\text{sen } 45^\circ}}}{\cos 15^\circ} = 1,102447407.$$



Los meridianos se proyectan según rectas concurrentes en un punto que no es el Polo (es el vértice del ángulo de amplitud  $\alpha$ ) de longitudes incorrectas, menores que las reales (debido a la condición de equivalencia impuesta, al ser la proyección de los paralelos de mayor longitud de los reales, la proyección de los meridianos deberá ser de longitud menor que los reales). El Polo se proyecta según un arco de circunferencia. La deformación en los meridianos se calcula con el módulo de alteración lineal  $h, h = \frac{dm'}{dm}$ , donde:

$$\begin{aligned} dm' = dr_\varphi &= d \left[ R \sqrt{\cotg^2 \varphi_0 - \frac{2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0)}{\text{sen } \varphi_0}} \right] \\ &= Rd \left[ \cotg^2 \varphi_0 - \frac{2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0)}{\text{sen } \varphi_0} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= R \frac{1}{2} \left[ \cotg^2 \varphi_0 - \frac{2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0)}{\text{sen } \varphi_0} \right]^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{2 \cos \varphi}{\text{sen } \varphi_0} \right) d\varphi \\ &= \frac{-R \cos \varphi d\varphi}{\text{sen } \varphi_0 \sqrt{\cotg^2 \varphi_0 - \frac{2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0)}{\text{sen } \varphi_0}}} \end{aligned}$$

En esta expresión el signo menos indica que cuando se incrementa  $\varphi$  se produce un incremento en sentido contrario de  $r_\varphi$  y puede suprimirse para el cálculo de  $h$ . Si se trabaja con las colatitudes ( $\delta_0$  y  $\delta$ ), no aparecerá el signo menos, pues cuando se incrementa  $\delta$  se produce un incremento en el mismo sentido de  $r_\delta$ .

Como  $dm = Rd\varphi$ :

$$h = -\frac{\cos \varphi}{\text{sen } \varphi_0 \sqrt{\cotg^2 \varphi_0 - \frac{2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_0)}{\text{sen } \varphi_0}}}$$

Esta expresión es recíproca de la de  $k$  y, por lo tanto, su producto es 1 (correspondiéndose con el hecho de que la proyección sea equivalente). Esta proyección no es isógona pues  $h \neq k$ .

La deformación angular máxima en un punto de la proyección está dada por la fórmula:

$$\delta_{\max} = 2 \text{arc sen } \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

### Ejemplo:

Retomando el ejemplo anterior:  $\varphi = 15^\circ N$   $\varphi_0 = 45^\circ N$ .

$$N_2 = h = -\frac{\cos 15^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ \sqrt{\cotg^2 45^\circ - \frac{2(\operatorname{sen} 15^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ)}{\operatorname{sen} 45^\circ}}} = -0,9070727 \text{ y}$$

$$\delta_{\max} = 11^\circ 09' 48''.$$

### 6.3.3 Usos

Como toda proyección equivalente, es utilizada para mapas con fines estadísticos y políticos. También, para cartas catastrales cuando se toma como superficie de referencia el elipsoide.

## 6.4 Proyección cónica tangente isógona o conforme (sobre la esfera)

### 6.4.1 Dibujo

Tiene el aspecto común a todas las proyecciones cónicas tangentes, pero se impone la condición de que todos los ángulos sean correctos. La fórmula que da el valor del radio de un paralelo cualquiera, es:

$$r_\varphi = Rc \left[ \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi}{2} \right]^{\operatorname{sen} \varphi_0} \quad (6.9)$$

O bien  $r_\delta = Rc \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right]^{\operatorname{cos} \delta_0}$ , siendo  $\delta$  la colatitud. También:

$$r_\varphi = C \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right]^{\operatorname{cos} \delta_0} = C \left[ \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi}{2} \right]^{\operatorname{sen} \varphi_0}$$

donde  $C$  una constante, cuyo valor se obtiene por medio de una expresión que se deduce a continuación (Figuras 6.10 y 6.11).

El módulo de alteración lineal en el sentido de los meridianos es  $h = \frac{dm'}{dm}$ , donde  $dm = Rd\delta$  y  $dm' = dr_\delta$ . Por lo tanto :

$$h = \frac{dr_\delta}{Rd\delta}$$

Por otra parte, el módulo de alteración lineal en el sentido de los paralelos es  $k = \frac{dp'}{dp}$ , donde  $dp = R\operatorname{sen} \delta d\lambda$  y  $dp' = r_\delta d\gamma = r_\delta d[\lambda \operatorname{sen} \varphi_0] = r_\delta \operatorname{cos} \delta_0 d\lambda$ . Por lo tanto:

$$k = \frac{r_\delta \operatorname{cos} \delta_0 d\lambda}{R\operatorname{sen} \delta d\lambda}$$

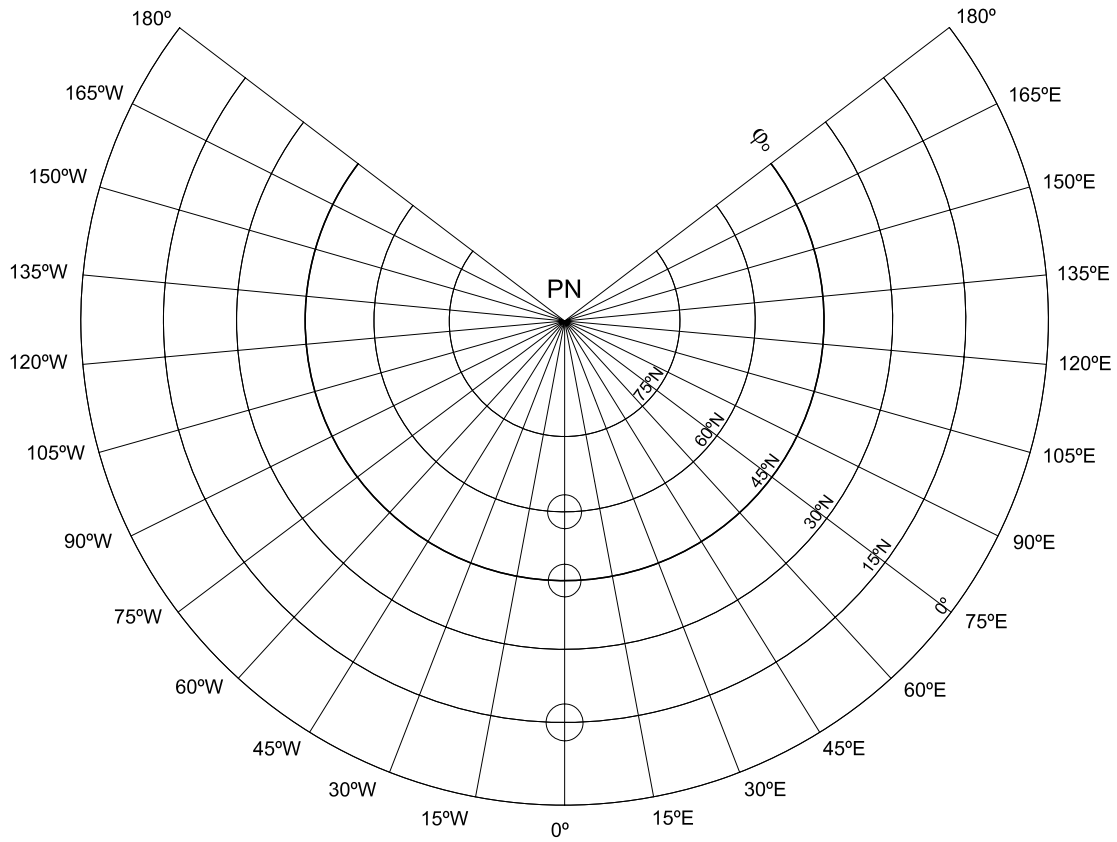
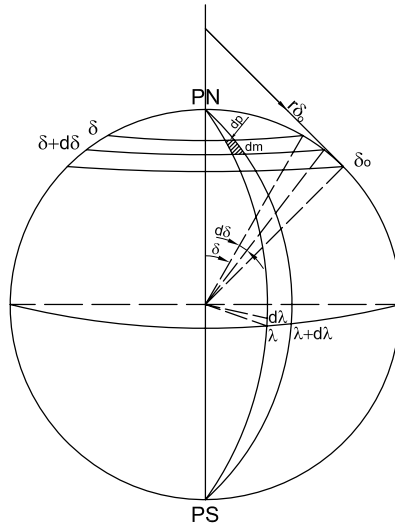


Figura 6.9: Proyección cónica tangente isógona.



**Figura 6.10:** Cálculo de  $r_\delta$ , en la esfera.

Por ser isógona la proyección:

$$h = k$$

$$\frac{dr_\delta}{Rd\delta} = \frac{r_\delta \cos \delta_0}{R \operatorname{sen} \delta} \therefore \frac{dr_\delta}{r_\delta} = \frac{\cos \delta_0}{\operatorname{sen} \delta} d\delta$$

Resolviendo la ecuación diferencial :

$$\ln r_\delta = \cos \delta_0 \int \frac{d\delta}{\operatorname{sen} \delta} = \cos \delta_0 \left[ \ln \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} + C \right]$$

$$\ln r_\delta = \cos \delta_0 \ln \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} + C \cos \delta_0$$

$$\ln r_{\delta_0} = \cos \delta_0 \ln \operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} + C \cos \delta_0$$

Restando miembro a miembro estas dos últimas expresiones se tiene:

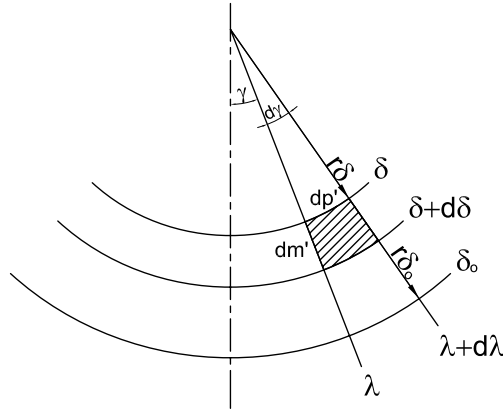
$$\ln r_\delta - \ln r_{\delta_0} = \cos \delta_0 \left( \ln \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \right)$$

$$\text{Entonces: } \ln \frac{r_\delta}{r_{\delta_0}} = \cos \delta_0 \ln \left[ \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2}} \right] = \ln \left[ \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2}} \right]^{\cos \delta_0}$$

$$r_\delta = r_{\delta_0} \left[ \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2}} \right]^{\cos \delta_0}$$

Entonces:

$$r_\delta = \frac{r_{\delta_0}}{\left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \right]^{\operatorname{sen} \varphi_0}} \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right]^{\operatorname{sen} \varphi_0} = C \left[ \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi}{2} \right]^{\operatorname{sen} \varphi_0} \quad (6.10)$$



**Figura 6.11:** Cálculo de  $r_\delta$ , en la proyección.

De aquí resulta que:  $r_{\delta_0} = C \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \right]^{\operatorname{sen} \varphi_0}$  y por lo tanto:

$$C = \frac{r_{\delta_0}}{\left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \right]^{\operatorname{sen} \varphi_0}} = \frac{R \operatorname{tg} \delta_0}{\left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \right]^{\operatorname{sen} \varphi_0}} \quad (6.11)$$

Si  $\varphi = 0^\circ$ , entonces  $\delta = 90^\circ$  y  $r_{0^\circ} = C [\operatorname{tg} 45^\circ]^{\operatorname{sen} \varphi_0} = C$ , entonces  $C$  es igual al radio de la proyección del Ecuador. También a partir del radio del paralelo base  $r_{\varphi_0} = R \operatorname{cotg} \varphi_0$ , se deduce que:

$$R \operatorname{cotg} \varphi_0 = R c \left[ \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi_0}{2} \right]^{\operatorname{sen} \varphi_0}$$

$$c = \frac{\operatorname{cotg} \varphi_0}{\left[ \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi_0}{2} \right]^{\operatorname{sen} \varphi_0}} \quad (6.12)$$

Reemplazando el valor de  $c$  en (6.9), se calcula  $r_\varphi$ :  $r_\varphi = C \left[ \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi}{2} \right]^{\operatorname{sen} \varphi_0}$ , siendo  $C = \frac{R \operatorname{cotg} \varphi_0}{\left[ \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi_0}{2} \right]^{\operatorname{sen} \varphi_0}}$  Las coordenadas cartesianas resultan entonces:

$$X = r_\varphi \operatorname{sen} \gamma = C \left[ \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi}{2} \right]^{\operatorname{sen} \varphi_0} \operatorname{sen}(\Delta \lambda \operatorname{sen} \varphi_0)$$

$$Y = R \operatorname{cotg} \varphi_0 - C \left[ \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi}{2} \right]^{\operatorname{sen} \varphi_0} \cos(\Delta \lambda \operatorname{sen} \varphi_0)$$

**Ejemplo:**

Para  $\varphi_0 = 45^\circ$ ,  $\varphi = 75^\circ N$ ,  $\lambda_0 = 0^\circ$  y  $\lambda = 105^\circ E$ :

$$C = \frac{R \cotg 45^\circ}{\left[ \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} \right]^{\operatorname{sen} 45^\circ}} = \frac{6\,370\,km}{0,41421350,7071067} = 11\,879,625\,km.$$

Este valor es el radio de la proyección del Ecuador.

$$\begin{aligned} r_\varphi &= 11\,879,625\,km \left[ \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi}{2} \right]^{\operatorname{sen} \varphi_0} \\ &= 11\,879,625\,km \left[ \operatorname{tg} \frac{90^\circ - 75^\circ}{2} \right]^{\operatorname{sen} 45^\circ} = 2\,832,3378\,km \end{aligned}$$

Si se considera una escala de 1 : 100 000 000,  $r_\varphi$  deberá dibujarse de 2,83cm.

También pueden calcularse sus coordenadas polares:

$$\begin{aligned} r_\delta &= C \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right]^{\cos \delta_0} = 11\,879,625\,km \left[ \operatorname{tg} \frac{15^\circ}{2} \right]^{\cos 45^\circ} = 2\,832,3378\,km \\ \gamma &= \Delta\lambda \operatorname{sen} \varphi_0 = \Delta\lambda \cos \delta_0 = 105^\circ \cos 45^\circ = 74^\circ 14' 46,33'' \end{aligned}$$

**Coordenadas cartesianas**

Se dispone el eje  $Y$  colineal con la proyección del meridiano central y el eje  $X$  en la intersección de la proyección del meridiano central con la proyección del paralelo base ( $\varphi_0$ ) (Figura 6.12).

$$\begin{cases} X = r_\delta \operatorname{sen} \gamma \text{ siendo } \gamma = \Delta\lambda \cos \delta_0 \\ Y = r_{\delta_0} - r_\delta \cos \gamma \end{cases}$$

**Ejemplos:**

Para  $\varphi_0 = 45^\circ$ ,  $\varphi = 75^\circ N$ ,  $\lambda_0 = 0^\circ$  y  $\lambda = 105^\circ E$ :

Se ha calculado  $r_\delta = 2\,832,3378\,km$ .

$$\begin{aligned} r_{\delta_0} &= C \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \right]^{\cos \delta_0} = 11\,879,625\,km \left[ \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} \right]^{\cos 45^\circ} = 6\,369,9998\,km \\ \gamma &= 105^\circ \cos 45^\circ = 74^\circ 14' 46,33'' \end{aligned}$$

Entonces:

$$X = 2\,832,3378\,km \operatorname{sen} 74^\circ 14' 46,33'' = 2\,725,946\,km$$

$$Y = 6\,369,9998\,km - 2\,832,3378\,km \cos 74^\circ 14' 46,33'' = 5\,601,004\,km.$$

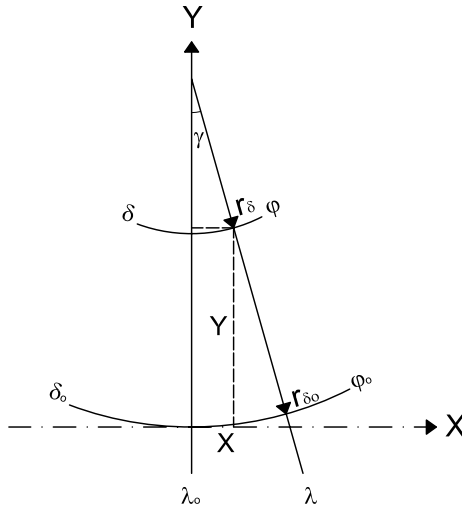


Figura 6.12: Coordenadas cartesianas.

### 6.4.2 Características y propiedades

Los paralelos se proyectan según arcos de circunferencias concéntricas en el Polo, que se van distanciando entre sí en forma leve al ir del paralelo base hacia el norte o hacia el sur.

El paralelo base es el único de longitud correcta; los demás paralelos son de longitudes incorrectas mayores que las reales, calculándose la deformación en cada paralelo con el módulo de alteración lineal  $k$ . El Polo se proyecta según un punto pues  $r_{90^\circ} = 0$ .

Recuérdese que  $k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}}$ . Entonces:  
 $k = \frac{r_\varphi \alpha_{rad}}{2\pi R \cos \varphi}$  donde  $r_\varphi$  puede obtenerse de la expresión 6.9 y  $\alpha = 2\pi \text{ sen } \varphi_0$ .

Reemplazando:

$$k = \frac{Rc \left[ \text{tg } \frac{90^\circ - \varphi}{2} \right]^{\text{sen } \varphi_0} 2\pi \text{ sen } \varphi_0}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{c \left[ \text{tg } \frac{90^\circ - \varphi}{2} \right]^{\text{sen } \varphi_0} \text{ sen } \varphi_0}{\cos \varphi} = \frac{c \left[ \text{tg } \frac{\delta}{2} \right]^{\cos \delta_0} \cos \delta_0}{\text{sen } \delta} \quad (6.13)$$

donde  $c = \frac{C}{R}$ .

Los meridianos se proyectan según rectas concurrentes en el Polo de longitudes incorrectas mayores que las reales, calculándose la deformación en cada punto con el módulo de alteración lineal  $h$ ,  $h = \frac{dm'}{dm}$ , donde

$dm = R d\delta$  y

$$\begin{aligned}
 dm' &= dr_\delta = d \left[ C \left( \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^{\cos \delta_0} \right] = C \cos \delta_0 \left( \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^{\cos \delta_0 - 1} \frac{1}{\cos^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{2} d\delta \\
 &= C \cos \delta_0 \left( \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^{\cos \delta_0} \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \cos^2 \frac{\delta}{2}} d\delta \\
 &= C \cos \delta_0 \left( \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^{\cos \delta_0} \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}} d\delta \\
 &= C \frac{\cos \delta_0}{\operatorname{sen} \delta} \left( \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^{\cos \delta_0} d\delta
 \end{aligned}$$

Por lo tanto :

$$h = \frac{c \cos \delta_0 \left( \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^{\cos \delta_0}}{\operatorname{sen} \delta} \quad (6.14)$$

### Nota

Las fórmulas (6.13) y (6.14) coinciden, es decir  $h = k$  (y por lo tanto verifican la condición de isogonía). La proyección no es equivalente pues  $hk \neq 1$ .

### Ejemplo:

Para  $\varphi = 15^\circ$  y  $\varphi_0 = 45^\circ$ , reemplazando estos valores en las fórmulas por las cuales se calculan  $k$  y  $h$ , se tiene  $k = h = 1,1356117696$ .

### 6.4.3 Usos

Esta proyección, llamada también de Albers, es muy utilizada en mapas y cartas de navegación aérea, y para cualquier zona no muy alejada del paralelo base.

### Ejemplo:

Para  $\varphi_0 = 30^\circ, \lambda_0 = 0^\circ, \varphi = 60^\circ N, \lambda = 90^\circ E, \delta_0 = 60^\circ$  y  $\delta = 30^\circ$ :

$$C = \frac{6\,370\,km \operatorname{tg} 60^\circ}{\left( \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} \right)^{\cos 60^\circ}} = 14\,520,4598\,km \text{ es el radio de la proyección del Ecuador.}$$



Las coordenadas polares del punto ( $60^\circ\text{N}$ ,  $90^\circ\text{E}$ ) son:

$$r_{60^\circ} = 14\,520,4598\text{km} \left( \text{tg} \frac{30^\circ}{2} \right)^{\cos 60^\circ} = 7\,516,3413\text{km}$$

$$\gamma = \Delta\lambda \text{sen} \varphi_0 = \Delta\lambda \cos \delta_0 = 90^\circ \cos 60^\circ = 45^\circ.$$

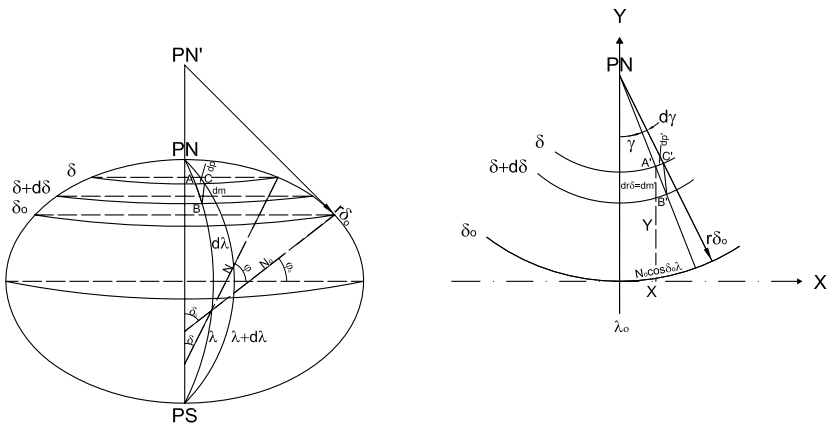
Sus coordenadas cartesianas son:

$$X = r_\delta \text{sen} \gamma = 7\,516,3413\text{km} \text{sen} 45^\circ = 5\,314,855\text{km}$$

$$\begin{aligned} Y &= r_{\delta_0} - r_\delta \cos \gamma = Y = R \text{tg} \delta_0 - r_\delta \cos \gamma = \\ &= 6\,370\text{km} \text{tg} 60^\circ - 7\,516,3413\text{km} \cos 45^\circ = 5\,718,2808\text{km} \end{aligned}$$

## 6.5 Proyección cónica normal tangente isógona (en el elipsoide)

### 6.5.1 Cálculo de coordenadas



**Figura 6.13:** Proyección cónica normal tangente isógona en el elipsoide. Cálculo de coordenadas.

Como la proyección es conforme, los triángulos elementales  $A'B'C'$  y  $ABC$  (Figura 6.13) son semejantes, por lo que los ángulos correspondientes son congruentes y los lados homólogos son proporcionales:

$$\hat{1}' = \hat{1}, \hat{2}' = \hat{2}, \hat{3}' = \hat{3} \text{ y } \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$$

En dichos triángulos  $A'B' = dr_\delta$ ;  $AB = \rho d\delta$ ;  $A'C' = r_\delta d\gamma$ ;  $AC = N \text{sen} \delta d\lambda$ , siendo  $\delta$  la colatitud. Reemplazando estas expresiones en las identidades anteriores:

$$\frac{dr_\delta}{\rho d\delta} = \frac{r_\delta d\gamma}{N \text{sen} \delta d\lambda}$$

Como  $\gamma = \Delta\lambda \cos \delta_0 = (\lambda - \lambda_0) \cos \delta_0$ ,  $d\gamma = d\lambda \cos \delta_0$ , entonces:

$$\frac{dr_\delta}{\rho d\delta} = \frac{r_\delta d \cos \delta_0}{N \text{sen} \delta}$$

$$\frac{dr_\delta}{r_\delta} = \frac{\rho d\delta \cos \delta_0}{N \sin \delta} = \frac{\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \cos^2 \delta)^{\frac{3}{2}}} d\delta \cos \delta_0}{\frac{a}{(1-e^2 \cos^2 \delta)^{\frac{1}{2}}} \sin \delta} = \frac{(1-e^2)d\delta \cos \delta_0}{(1-e^2 \cos^2 \delta) \sin \delta}$$

Resolviendo la ecuación diferencial que queda planteada:

$$\int \frac{dr_\delta}{r_\delta} = \int \frac{(1-e^2)d\delta \cos \delta_0}{(1-e^2 \cos^2 \delta) \sin \delta} d\delta$$

$$\ln r_\delta = \cos \delta_0 \ln \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta}{1-e \cos \delta} \right)^{\frac{e}{2}} \right] = \ln \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta}{1-e \cos \delta} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\cos \delta_0}$$

$$\ln r_{\delta_0} = \ln \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta_0}{1-e \cos \delta_0} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\cos \delta_0}$$

Restando miembro a miembro las dos últimas expresiones:

$$\ln \frac{r_\delta}{r_{\delta_0}} = \ln \frac{\left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta}{1-e \cos \delta} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\cos \delta_0}}{\left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta_0}{1-e \cos \delta_0} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\cos \delta_0}}$$

De allí:

$$r_\delta = \frac{N_0 \operatorname{tg} \delta_0}{\left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta_0}{1-e \cos \delta_0} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\cos \delta_0}} \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta}{1-e \cos \delta} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\cos \delta_0}$$

Las coordenadas cartesianas son:

$$X = r_\delta \operatorname{sen} \gamma$$

$$Y = r_{\delta_0} - r_\delta \operatorname{cos} \gamma$$

donde  $\gamma = \Delta \lambda \cos \delta_0$

**Ejemplos:**

Si  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\lambda = 75^\circ$ ,  $\varphi_0 = 30^\circ N$  y  $\lambda_0 = 0^\circ$

$$N_0 = \frac{a}{(1-e^2 \cos^2 \delta_0)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6\,378,388 \text{ km}}{(1-0,00672267 \cos^2 45^\circ)^{\frac{1}{2}}} = 6\,389,135 \text{ km}$$

$$C = \frac{N_0 \operatorname{tg} \delta_0}{\left[ \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} \left( \frac{1+0,081991889 \cos 60^\circ}{1-0,081991889 \cos 60^\circ} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\cos 60^\circ}} = 14\,539,607 \text{ km}$$

$$r_\delta = 14\,539,607 \text{ km} \left[ \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} \left( \frac{1+0,081991889 \cos 45^\circ}{1-0,081991889 \cos 45^\circ} \right)^{0,040995944} \right]^{\cos 45^\circ}$$

$$= 7\,822,595\text{km}.$$

$$\gamma = \Delta\lambda \cos \delta_0 = 75^\circ \cos 60^\circ = 37^\circ 30'. \text{ Entonces:}$$

$$X = 9\,357,607\text{km} \sin 37^\circ 30' = 5\,696,550\text{km};$$

$$Y = 11\,066,306\text{km} - 9\,357,607\text{km} \cos 37^\circ 30' = 3\,642,417\text{km}.$$

### 6.5.2 Características y propiedades

Los paralelos se proyectan según arcos de circunferencias concéntricas en la proyección del Polo, que se van distanciando levemente entre sí a partir del paralelo base ( $\varphi_0$ ). Este paralelo es el único de longitud correcta; los demás paralelos son de longitudes mayores que las reales. La deformación en cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$  que, como se sabe, se realiza a través del cociente entre la longitud del paralelo en la proyección y la longitud del paralelo en el elipsoide.

$$k = \frac{\alpha r_\delta}{2\pi N \sin \delta} = \frac{2\pi \cos \delta_0 r_\delta}{2\pi N \sin \delta} = \frac{r_\delta \cos \delta_0}{N \sin \delta}$$

#### Nota:

Se puede observar que la deformación en cada paralelo depende solamente de la latitud  $\varphi$  (o de la colatitud  $\delta$ ) y no de la longitud  $\lambda$ , por lo cual la proyección es adecuada para áreas extendidas en dirección este-oeste. Los meridianos se proyectan según rectas concurrentes en la proyección del Polo de longitudes mayores que las reales, variando la deformación en cada meridiano a partir del paralelo base. La deformación en la dirección del meridiano en cada punto se halla con el módulo de alteración lineal  $h$ .

$$h = \frac{dm'}{dm} = \frac{dr_\delta}{\rho d\delta} = \frac{r_\delta d\lambda \cos \delta_0}{N \sin \delta d\lambda} = \frac{r_\delta \cos \delta_0}{N \sin \delta}$$

Por ser isógona, resulta  $h = k$ .

#### Ejemplo

Calcular las coordenadas polares y cartesianas de un punto ( $\varphi = 45^\circ N, \lambda = 75^\circ E$ ), siendo  $\lambda_0 = 0^\circ$ , en una proyección cónica tangente isógona en la esfera, sabiendo que  $\varphi_0 = 30^\circ N$ . Además, calcular las coordenadas del mismo punto en la proyección citada en el elipsoide.

*En la esfera:*

$$X = r_\delta \sin \gamma$$

$$Y = r_{\delta_0} - r_{\delta} \cos \gamma$$

$$\text{siendo } \gamma = \Delta \lambda \operatorname{sen} \varphi_0 = \Delta \lambda \cos \delta_0 \text{ y } r_{\varphi} = Rc \left( \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi}{2} \right)^{\operatorname{sen} \varphi_0}.$$

$$c = \frac{\operatorname{cotg} \varphi_0}{\left( \operatorname{tg} \frac{90^\circ - \varphi_0}{2} \right)^{\operatorname{sen} \varphi_0}} = \frac{\operatorname{cotg} 30^\circ}{\left( \operatorname{tg} \frac{90^\circ - 30^\circ}{2} \right)^{\operatorname{sen} 30^\circ}} = 2,2795$$

$$\gamma = 75^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = 37^\circ 30'$$

$$r_{45^\circ} = 6370 \operatorname{km} \cdot 2,2795 \left( \operatorname{tg} \frac{90^\circ - 45^\circ}{2} \right)^{\operatorname{sen} 30^\circ} = 6370 \operatorname{km} \cdot 2,2795 (\operatorname{tg} 22^\circ 30')^{0,5} =$$

$$9345,256 \operatorname{km}$$

$$r_{\varphi_0} = 6370 \operatorname{km} \frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{(\operatorname{tg} 30^\circ)^{0,5}} (\operatorname{tg} 30^\circ)^{0,5} = 11033,164 \operatorname{km}.$$

$$X = r_{45^\circ} \operatorname{sen} 37^\circ 30' = 9345,256 \operatorname{km} \operatorname{sen} 37^\circ 30' = 5689,031 \operatorname{km}$$

$$Y = r_{30^\circ} - r_{45^\circ} \cos 37^\circ 30' = 11033,164 \operatorname{km} - 9345,256 \operatorname{km} \cos 37^\circ 30' =$$

$$3169,0734 \operatorname{km}.$$

En el elipsoide:

$$\gamma = \Delta \lambda \operatorname{sen} \varphi_0 = 37^\circ 30'$$

$$N = \frac{6378,388 \operatorname{km}}{(1 - 0,00672267 \cos^2 45^\circ)^{\frac{1}{2}}} = 6389,135 \operatorname{km}$$

$$C = \frac{6389,135 \operatorname{km} \operatorname{tg} 60^\circ}{\left\{ \frac{1 - \cos 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ} \left[ \frac{1 + e \cos 60^\circ}{1 - e \cos 60^\circ} \right]^{\frac{e}{2}} \right\}^{\frac{\cos 60^\circ}{2}}} = 14564,581 \operatorname{km}.$$

$$r_{45^\circ} = 14564,581 \operatorname{km} \left\{ \frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ} \left[ \frac{1 + e \cos 45^\circ}{1 - e \cos 45^\circ} \right]^{\frac{e}{2}} \right\}^{0,25} = 9396,012 \operatorname{km}.$$

$$r_{\delta_0} = N \operatorname{tg} 60^\circ = 6389,135 \operatorname{km} \operatorname{tg} 60^\circ = 11066,306 \operatorname{km}.$$

$$X = r_{\delta} \operatorname{sen} \gamma = 9396,012 \operatorname{km} \operatorname{sen} 37^\circ 30' = 5719,930 \operatorname{km}$$

$$Y = r_{\delta_0} - r_{\delta} \cos \gamma = 11066,306 \operatorname{km} - 9396,012 \operatorname{km} \cos 37^\circ 30' = 3611,949 \operatorname{km}$$

$$k = \frac{\alpha r_{\delta}}{2\pi N \operatorname{sen} \delta} = \frac{2\pi \cos \delta_0 r_{\delta}}{2\pi N \operatorname{sen} \delta} = \frac{r_{\delta} \cos \delta_0}{N \operatorname{sen} \delta} =$$

$$\frac{9396,012 \operatorname{km} \cos 60^\circ}{6389,135 \operatorname{km} \operatorname{sen} 45^\circ} = 1,039887841$$

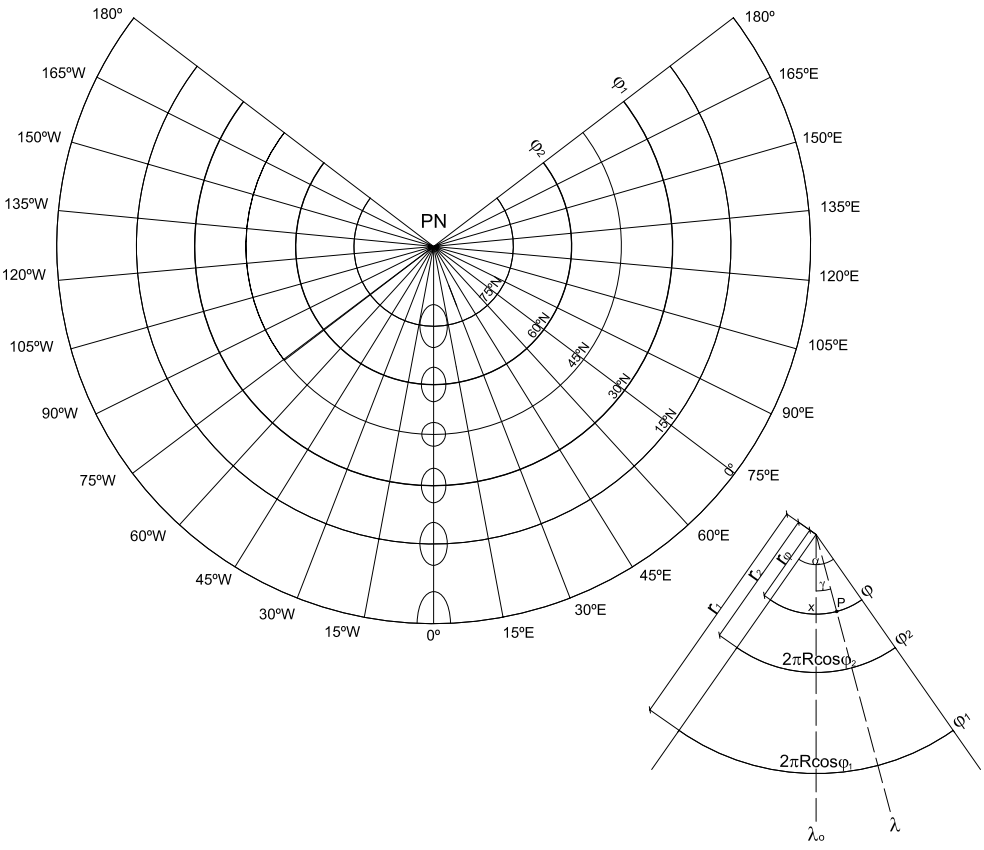
$$k = h \cong 1,039887841.$$

En la esfera:

$$h = k = \frac{\alpha r_{\delta}}{2\pi R \operatorname{sen} \delta} = \frac{2\pi \operatorname{sen} \delta_0 r_{\delta}}{2\pi R \operatorname{sen} \delta} = \frac{\operatorname{sen} \varphi_0 r_{\delta}}{R \operatorname{sen} \delta} = \frac{9345,256 \operatorname{km} \operatorname{sen} 30^\circ}{6370 \operatorname{km} \operatorname{sen} 45^\circ} =$$

$$1,037377378.$$

Figura 6.14: Proyección cónica secante pura, central o perspectiva.



## 6.6 Proyección cónica secante pura, central o perspectiva

### 6.6.1 Dibujo

Se obtiene en dos etapas:

- Se considera una superficie cónica cuyo eje contiene al eje terrestre que intersecta a la esfera terrestre a lo largo de dos paralelos, llamados *paralelos bases*. Desde el centro de la esfera terrestre, donde está el punto de vista, se proyectan paralelos y meridianos sobre la superficie cónica.
- Se supone cortada la superficie cónica a lo largo de una generatriz y se desarrolla sobre un plano.

#### Cálculo de los radios de los paralelos bases ( $r_1$ y $r_2$ ) en la proyección

En la Figura 6.15, en el triángulo  $PN'A'A$ , se tiene que  $AA' = PN'A \operatorname{sen} \varphi_0$ . Por lo tanto:

$$AA' = PN'A \operatorname{sen} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad (6.15)$$

ya que  $\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$  y  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son las latitudes de los paralelos base.

En el triángulo  $VA'A$ :

$$AA' = R \cos \varphi_2 \quad (6.16)$$

Igualando (6.15) y (6.16), y siendo  $PN'A = r_2$ :

$$r_2 \operatorname{sen} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = R \cos \varphi_2$$

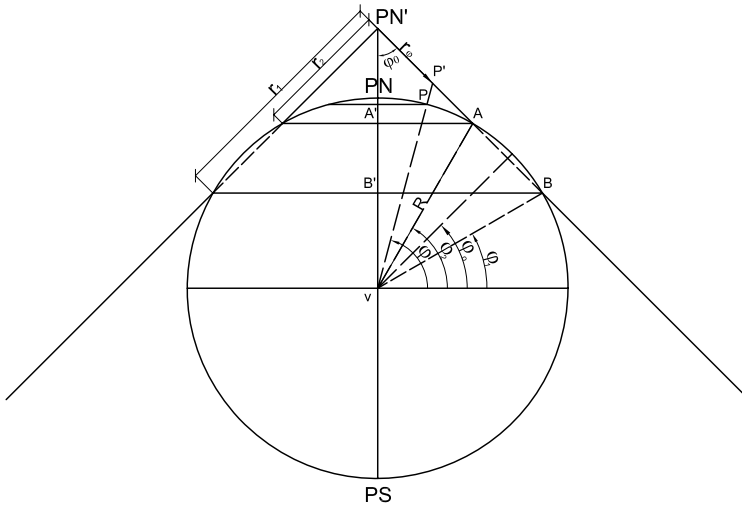
$$r_2 = \frac{R \cos \varphi_2}{\operatorname{sen} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}$$

En el triángulo  $PN'B'B$ :  $BB' = PN'B \operatorname{sen} \varphi_0$ . Entonces:

$$BB' = PN'B \operatorname{sen} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad (6.17)$$

En el triángulo  $VB'B$  es:

$$BB' = R \cos \varphi_1 \quad (6.18)$$



**Figura 6.15:** Cálculo de los radios de los paralelos.

Igualando (6.18) y (6.19), y siendo  $PN'B = r_1$ :

$$r_1 \operatorname{sen} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = R \cos \varphi_1$$

$$r_1 = \frac{R \cos \varphi_1}{\operatorname{sen} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}$$

### Cálculo del ángulo de amplitud $\alpha$

Se sabe que :  $\text{arco} = \text{radio} \times \text{ángulo en radianes}$ ; tomando uno cualquiera de los paralelos bases se tiene:

$$2\pi R \cos \varphi_2 = r_2 \alpha_{rad}$$

$$\alpha_{rad} = \frac{2\pi R \cos \varphi_2}{\frac{R \cos \varphi_2}{\operatorname{sen} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}} \text{ pero } \operatorname{sen} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \operatorname{sen} \varphi_0, \text{ entonces:}$$

$$\alpha_{rad} = 2\pi \operatorname{sen} \varphi_0$$

$$\alpha^\circ = \frac{2\pi \operatorname{sen} \varphi_0 360^\circ}{2\pi} = 360^\circ \operatorname{sen} \varphi_0$$

### Nota

$\operatorname{sen} \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$  se conoce como la constante del cono, para la proyección central o pura.

Entonces  $\gamma = \Delta \lambda \operatorname{sen} \varphi_0$

## 6.6.2 Procedimiento analítico

### a) Coordenadas polares

#### Cálculo de $r_\varphi$

Para su cálculo se aplicará el teorema del seno. En el triángulo  $PN'VP'$ :  $\frac{PN'P'}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{PN'V}{\sin P'}$ . Además,  $PN'V = PN'A' + A'V$ . En el triángulo  $PN'A'A$ :  $\frac{PN'A'}{\sin(90^\circ - \varphi_0)} = \frac{AA'}{\sin \varphi_0}$ . Por lo que  $PN'A' = AA' \frac{\sin(90^\circ - \varphi_0)}{\sin \varphi_0}$ . Pero  $AA' = R \cos \varphi_2$  y  $\sin(90^\circ - \varphi_0) = \cos \varphi_0$ . Entonces:  $PN'A' = \frac{R \cos \varphi_2 \cos \varphi_0}{\sin \varphi_0} = R \cos \varphi_2 \cotg \varphi_0$ . Por otra parte  $A'V = R \sin \varphi_2$ ; reemplazando:

$$PN'V = R \cos \varphi_2 \cotg \varphi_0 + R \sin \varphi_2 = R[\cos \varphi_2 \cotg \varphi_0 + \sin \varphi_2]$$

$$\hat{P}' = 180^\circ - [\varphi_0 + (90^\circ - \varphi)]$$

$$\hat{P}' = 90^\circ - (\varphi_0 - \varphi), \text{ entonces } \sin[90^\circ - (\varphi_0 - \varphi)] = \cos(\varphi_0 - \varphi)$$

Haciendo  $PN'P' = r_\varphi$ , resulta:

$$\begin{aligned} r_\varphi &= \frac{R[\cos \varphi_2 \cotg \varphi_0 + \sin \varphi_2] \cos \varphi}{\cos(\varphi_0 - \varphi)} \\ &= \frac{R[\cos \varphi_2 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 \sin \varphi_2] \cos \varphi}{\sin \varphi_0 \cos(\varphi_0 - \varphi)} \\ &= \frac{R \cos(\varphi_0 - \varphi_2) \cos \varphi}{\sin \varphi_0 \cos(\varphi_0 - \varphi)} \end{aligned}$$

$\gamma$  y  $r_\varphi$  son las coordenadas polares de un punto de la proyección  $(\varphi, \lambda)$  siendo el centro de la proyección el punto  $(\varphi_0, \lambda_0)$ .

### b) Coordenadas cartesianas

Las coordenadas cartesianas de la proyección son:

$$\begin{aligned} X &= r_\varphi \sin \gamma \\ Y &= r_{\varphi_1} - r_\varphi \cos \gamma \end{aligned}$$

siendo  $\gamma = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0 = \Delta \lambda \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ , en un sistema de ejes cartesianos en donde el eje  $Y$  coincide con la proyección del meridiano central y el eje  $X$  es tangente a la proyección del paralelo base



$\varphi_1$  en su intersección con el eje  $Y$ . Si se considera el eje  $X$  la recta tangente a la proyección del paralelo base  $\varphi_2$  en su intersección con el eje  $Y$ , las coordenadas resultarán:

$$\begin{aligned} X &= r_\varphi \operatorname{sen} \gamma \\ Y &= r_{\varphi_2} - r_\varphi \cos \gamma \end{aligned}$$

### 6.6.3 Módulos de alteración lineal

El módulo de alteración lineal en la dirección de un paralelo es:

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}}$$

Por otra parte, como: arco = radio  $\times$  ángulo en radianes

$$a = r_\varphi \alpha_{rad}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{R[\cos \varphi_2 \cotg \varphi_0 + \operatorname{sen} \varphi_2] \cos \varphi}{\cos(\varphi_0 - \varphi)} 2\pi \operatorname{sen} \varphi_0 \\ &= \frac{R \cos(\varphi_2 - \varphi_0) \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi_0 \cos(\varphi_0 - \varphi)} 2\pi \operatorname{sen} \varphi_0 \\ &= \frac{2\pi R \cos(\varphi_2 - \varphi_0) \cos \varphi}{\cos(\varphi_0 - \varphi)} \end{aligned}$$

Como la longitud del paralelo en la esfera es  $2\pi R \cos \varphi$ ,

$$k = \frac{2\pi R \cos(\varphi_2 - \varphi_0) \cos \varphi}{2\pi R \cos \varphi \cos(\varphi_0 - \varphi)} = \frac{\cos(\varphi_2 - \varphi_0)}{\cos(\varphi_0 - \varphi)}$$

$k = N_2$ , semieje menor de la Elipse de Tissot.

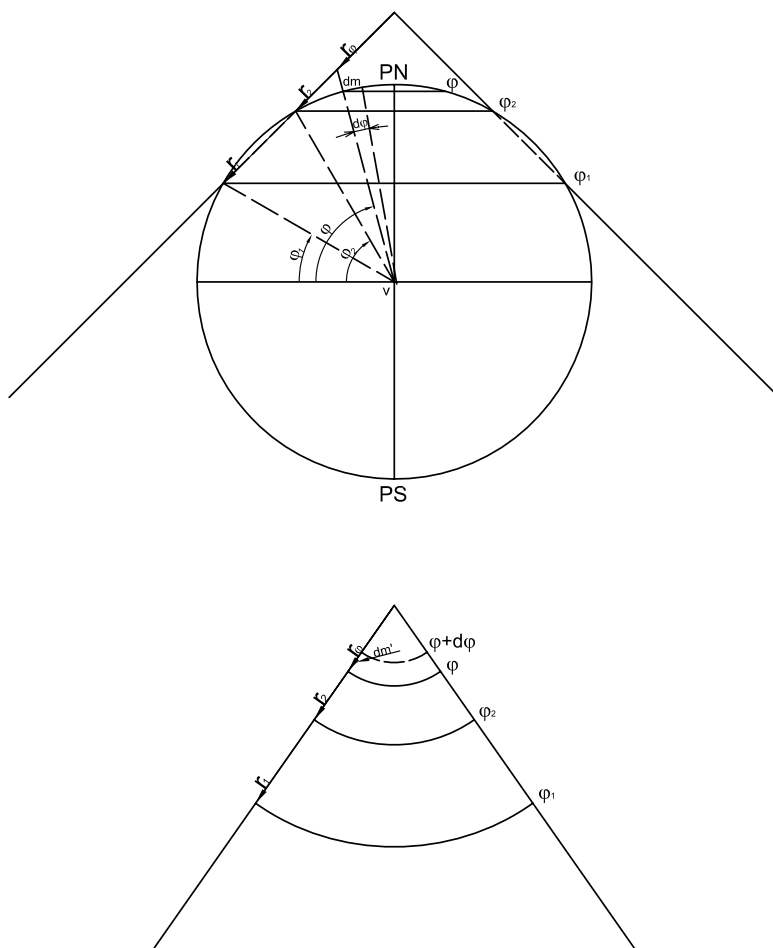
#### Módulo de alteración lineal en un meridiano

$$h = \frac{dm'}{dm} = \frac{dr_\varphi}{Rd\varphi}$$

$$\begin{aligned} dr_\varphi &= R(\cos \varphi_2 \cotg \varphi_0 + \operatorname{sen} \varphi_2) d \frac{\cos \varphi}{\cos(\varphi_0 - \varphi)} \\ &= R(\cos \varphi_2 \cotg \varphi_0 + \operatorname{sen} \varphi_2) \frac{-\operatorname{sen} \varphi \cos(\varphi_0 - \varphi) - \cos \varphi \operatorname{sen}(\varphi_0 - \varphi)}{\cos^2(\varphi_0 - \varphi)} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} h &= - \frac{(\cos \varphi_2 \cotg \varphi_0 + \operatorname{sen} \varphi_2) [\operatorname{sen} \varphi \cos(\varphi_0 - \varphi) + \cos \varphi \operatorname{sen}(\varphi_0 - \varphi)]}{\cos^2(\varphi_0 - \varphi)} \\ &= - \frac{(\cos \varphi_2 \cotg \varphi_0 + \operatorname{sen} \varphi_2) \operatorname{sen} \varphi_0}{\cos^2(\varphi_0 - \varphi)} = - \frac{\cos \varphi_2 \cos \varphi_0 + \operatorname{sen} \varphi_2 \operatorname{sen} \varphi_0}{\cos^2(\varphi_0 - \varphi)} \end{aligned}$$



**Figura 6.16:** Cálculo de los módulos de alteración lineal.

$$h = -\frac{\cos(\varphi_2 - \varphi_0)}{\cos^2(\varphi_0 - \varphi)}$$

$h = N_1$  (semieje mayor de la Elipse de Tissot).

**Nota:**

El signo menos indica que cuando la variable  $\varphi$  se incrementa, la función  $r_\varphi$  se reduce y por lo tanto  $dr_\varphi$  resulta negativo.

**Ejemplos:**

a)  $\varphi_1 = 30^\circ; \varphi_2 = 60^\circ; \varphi = 75^\circ$ .

$$k = \frac{\cos(60^\circ - 45^\circ)}{\cos(45^\circ - 75^\circ)} = \frac{\cos 15^\circ}{\cos(-30^\circ)} = 1,115$$

b)  $\varphi_1 = 30^\circ; \varphi_2 = 60^\circ; \varphi = 15^\circ$ .

$$k = \frac{\cos(60^\circ - 45^\circ)}{\cos(45^\circ - 15^\circ)} = \frac{\cos 15^\circ}{\cos 30^\circ} = 1,115$$

Aplicando las fórmulas deducidas anteriormente, se obtienen los siguientes valores:

$$r_{\varphi_1} = 7801,63km, r_{\varphi_2} = 4504,27km,$$

$$\alpha = 254^\circ 33' 30''.$$

$$r_{0^\circ} = 12305,90km$$

$$r_{15^\circ} = 9705,35km$$

$$r_{45^\circ} = 6152,95km$$

$$r_{75^\circ} = 2600,27km$$

$$r_{90^\circ} = 0,0km.$$

**6.6.4 Características y propiedades**

Los paralelos se proyectan según arcos de circunferencias concéntricos en el Polo, siendo los paralelos bases de longitudes correctas; los demás paralelos son de longitudes incorrectas. Entre los paralelos bases, las longitudes son menores que las reales, y fuera de ellos, mayores que las reales. Los paralelos se van distanciando entre sí en forma acentuada al alejarse de los paralelos bases en un sentido o en otro.

**Ejemplos:**

Aplicando la fórmula deducida anteriormente para el cálculo de  $k$ , en el caso de los ejemplos anteriores se tiene que:

para  $\varphi = 0^\circ$ ,  $k = 1,366$

para  $\varphi = 15^\circ$ ,  $k = 1,115$

para  $\varphi = 30^\circ$ ,  $k = 1$

para  $\varphi = 45^\circ$ ,  $k = 0,966$

para  $\varphi = 60^\circ$ ,  $k = 1$

para  $\varphi = 75^\circ$ ,  $k = 1,115$

para  $\varphi = 90^\circ$ ,  $k = 1,366$ .

En los paralelos bases  $k = 1$ , observándose que entre los paralelos bases el valor de  $k$  es menor que 1, en los paralelos bases es igual a 1 y al Norte y al Sur de ellos es mayor que 1.

Los meridianos se proyectan según rectas concurrentes en el Polo formando ángulos iguales e incorrectos, menores que los reales.

### Cálculo del ángulo $\gamma$

Este valor angular es determinado por dos meridianos cualesquiera en la proyección, siendo menor que la diferencia de longitud geográfica  $\Delta\lambda$  entre los mismos.

$$\gamma_{rad} = \Delta\lambda_{rad} \operatorname{sen} \varphi_0;$$

$$\gamma^\circ = \Delta\lambda^\circ \operatorname{sen} \varphi_0$$

La deformación en cada punto de un meridiano está dada por la expresión ya deducida:

$$h = \frac{\cos(\varphi_2 - \varphi_0)}{\cos^2(\varphi_0 - \varphi)}$$

### Ejemplos:

Aplicando la fórmula anterior para el cálculo de  $h$  y tomando valor absoluto:

Para

$$\varphi = 0^\circ, h = 1,932$$

$$\varphi = 15^\circ, h = 1,288$$

$$\varphi = 30^\circ, h = 1,03528$$

$$\varphi = 45^\circ, h = 0,966$$

$$\varphi = 60^\circ, h = 1,03528$$

$$\varphi = 75^\circ, h = 1,2879$$

$$\varphi = 90^\circ, h = 1,932$$

### Nota

Debe tomarse el valor absoluto para  $h$ , pues el signo menos indica solamente que cuando la variable  $\varphi$  se incrementa, la función  $r_\varphi$  se reduce y, por lo tanto,  $dr_\varphi$  resulta negativo.

Esta proyección no es isógona, pues  $h \neq k$  ni tampoco es equivalente, pues  $hk \neq 1$ .

## 6.6.5 Usos

Como las deformaciones son muy grandes, se usa sólo para mapas de una estrecha franja a ambos lados de los paralelos bases.

## 6.7 Proyección cónica secante equidistante

### 6.7.1 Dibujo

Tiene el aspecto común a todas las proyecciones cónicas secantes, pero se impone la condición de que las distancias a lo largo de los meridianos son correctas ( $h = 1$ ).

**Cálculo de los radios de los paralelos bases  $r_1$  y  $r_2$**  (Figura 6.18)  
 $\frac{r_1}{r_2} = \frac{2\pi R \cos \varphi_1}{2\pi R \cos \varphi_2} \therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}$ . Por teoría de las proporciones, puede afirmarse que:  $\frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\cos \varphi_2} = \frac{r_1 - r_2}{r_2}$  y como  $r_1 - r_2 = (\varphi_2 - \varphi_1)R$ , entonces:

$$\frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\cos \varphi_2} = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)R}{r_2} \Rightarrow r_2 = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)R \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}$$

Además:

$$r_1 = \frac{r_2 \cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \Rightarrow r_1 = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)R \cos \varphi_1}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}$$

En general (Figura 6.19):

$$r_\varphi = r_1 - (\varphi - \varphi_1)R = R \left[ \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) \cos \varphi_1}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2} - (\varphi - \varphi_1) \right]$$

$$r_\varphi = R \left[ \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) \cos \varphi_1 + \varphi_1 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2} - \varphi \right]$$

$$r_\varphi = R \left[ \frac{\varphi_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_1 + \varphi_1 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2} - \varphi \right]$$

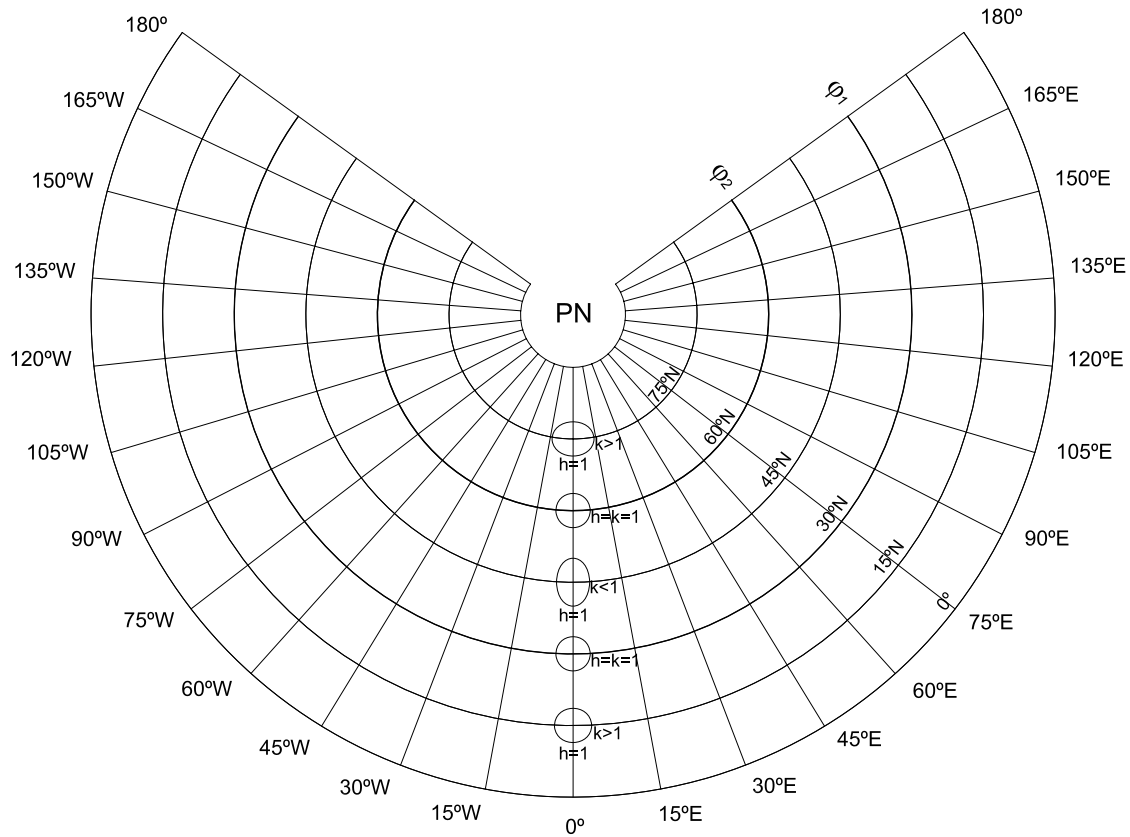
$$r_\varphi = R \left[ \frac{\varphi_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2} - \varphi \right]$$

Por otra parte:

$$\alpha = \frac{2\pi R \cos \varphi_1}{r_1} = \frac{2\pi R \cos \varphi_1 (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)}{R(\varphi_2 - \varphi_1) \cos \varphi_1}$$

$$\alpha = 2\pi \frac{(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)}{\varphi_2 - \varphi_1}$$

El factor que acompaña a  $2\pi$  en el cálculo de  $\alpha$  se denomina *constante*



**Figura 6.17:** Proyección cónica secante equidistante.

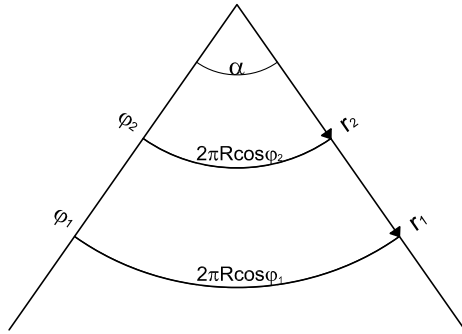


Figura 6.18: Cálculo de los radios de los paralelos bases  $r_1$  y  $r_2$ .

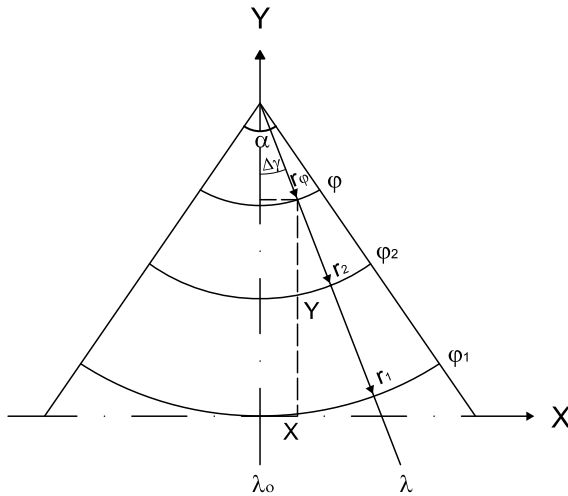


Figura 6.19: Cálculo de las coordenadas cartesianas de un punto.

del cono. Recordar que  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  están expresados en radianes.

$$\text{constante del cono} = \frac{(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)}{\varphi_2 - \varphi_1}$$

**Ejemplos:**

Para el caso en que los paralelos bases son  $\varphi_1 = 30^\circ N$  y  $\varphi_2 = 60^\circ N$ , aplicando las fórmulas deducidas anteriormente, se tiene que:

$$\alpha = 251^\circ 39' 38''$$

$$r_{0^\circ} = 11226,79km$$

$$r_{15^\circ} = 9559,13km$$

$$r_{30^\circ} = 7891,46km$$

$$r_{45^\circ} = 6223,80km$$

$$r_{60^\circ} = 4556,14km$$

$$r_{75^\circ} = 2888,48km$$

$$r_{90^\circ} = 1220,82km$$

La constante del cono es 0,69905702.

### 6.7.2 Características y propiedades

Los paralelos se proyectan según arcos de circunferencia concéntricos en un punto que no es la proyección del Polo sino el vértice del ángulo de amplitud  $\alpha$ , equiespaciados debido a que la longitud de los meridianos es correcta. Los paralelos bases son de longitudes correctas, mientras que los demás paralelos son de longitudes incorrectas, mayores que las reales fuera de los paralelos bases y menores que las reales entre ellos. La deformación en cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ :

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}}$$

$$k = \frac{r_\varphi \alpha_{rad}}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{R \left[ \frac{\varphi_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2} - \varphi \right] 2\pi \frac{(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)}{\varphi_2 - \varphi_1}}{2\pi R \cos \varphi}$$

$$= \left[ \frac{\varphi_2 \cos \varphi_1 - \varphi_1 \cos \varphi_2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2} - \varphi \right] \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{(\varphi_2 - \varphi_1) \cos \varphi}$$

$$k = \frac{(\varphi_2 - \varphi) \cos \varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi) \cos \varphi_2}{(\varphi_2 - \varphi_1) \cos \varphi}$$

Si los ángulos están expresados en grados sexagesimales, se tendrá la misma expresión, pues se simplifica el factor  $\frac{\pi}{180^\circ}$  en numerador y denominador.

#### Ejemplos:

Aplicando la fórmula anterior se obtienen los siguientes valores para  $k$ :

$$\text{para } \varphi = 15^\circ, N_1 = k = 1,086 > 1$$

$$\text{para } \varphi = 45^\circ, N_2 = k = 0,966 < 1$$

$$\text{para } \varphi = 75^\circ, N_1 = k = 1,225 > 1$$

Los meridianos se proyectan según rectas concurrentes en el vértice del ángulo de amplitud, de longitudes correctas por la condición impuesta,



$h = 1$ ; forman entre sí ángulos iguales e incorrectos, menores que la diferencia de longitud geográfica entre ellos. En efecto:

$$\text{para } \varphi = 15^\circ, N_2 = h = 1$$

$$\text{para } \varphi = 45^\circ, N_1 = h = 1$$

$$\text{para } \varphi = 75^\circ, N_2 = h = 1$$

El ángulo que forma un meridiano con el meridiano central está dado por:

$$\gamma = \Delta\lambda \frac{(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)}{(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

siendo  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  y estando los ángulos expresados en radianes.

El ángulo que forman entre sí dos meridianos de longitudes  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  es  $\gamma = \Delta\lambda \frac{(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)}{(\varphi_2 - \varphi_1)}$  (Figura 6.20). En esta expresión,  $\Delta\lambda$  es la diferencia de longitud geográfica entre ambos meridianos. Por ejemplo (ver Figura 6.17), para  $\Delta\lambda = 15^\circ$  y con paralelos bases  $\varphi_1 = 30^\circ N$  y  $\varphi_2 = 60^\circ N$ , se tiene:

$$\Delta\gamma = 15^\circ \frac{(\cos 30^\circ - \cos 60^\circ)}{60^\circ - 30^\circ} \frac{180^\circ}{\pi} = 10^\circ 29' 09'' < 15^\circ.$$

### 6.7.3 Usos

En mapas de regiones no muy alejadas de los paralelos bases para evitar las grandes deformaciones.

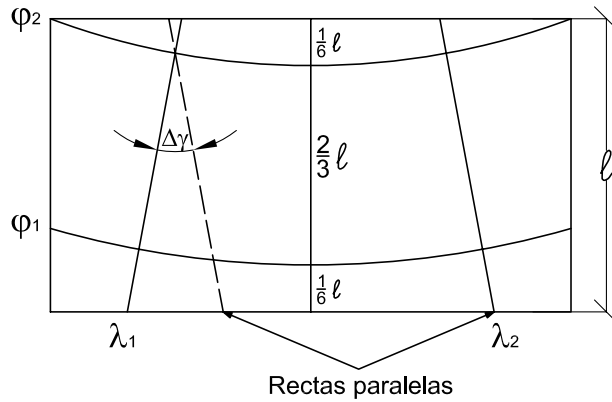
#### Observación

En el dibujo de la proyección, se eligen los dos paralelos bases de modo que en la hoja del mapa, para repartir deformaciones, deben estar los paralelos bases hasta 1/6 de los bordes (ver Figura 6.20).

Para averiguar si la proyección es cónica tangente o cónica secante, se mide el ángulo  $\Delta\gamma$  con el transportador de ángulos, teniendo en cuenta que  $\Delta\gamma = \Delta\lambda \text{sen } \varphi_0$  (si esto se cumple, es cónica tangente). Recordar que  $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$  y que  $\varphi_0$  es la latitud del paralelo base.

Si no se cumple que  $\Delta\gamma = \Delta\lambda \text{sen } \varphi_0$ , la proyección será cónica secante y se calculará el valor de  $\Delta\gamma$  como  $\Delta\gamma = \Delta\lambda \times \text{constante del cono}$ . Para el caso de la proyección cónica secante equidistante es

$$\Delta\gamma = \Delta\lambda \frac{(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)}{(\varphi_2 - \varphi_1)}$$



**Figura 6.20:** Ubicación de los paralelos bases en el mapa y ángulo que forman la proyección de dos meridianos.

#### 6.7.4 Coordenadas cartesianas

Considérese el eje  $Y$  coincidente con la proyección del meridiano central y el eje  $X$  tangente a un paralelo base ( $\varphi_1$ ) en su intersección con el eje  $Y$ :

$$X = r_\varphi \operatorname{sen} \Delta\gamma$$

$Y = r_{\varphi_1} - r_\varphi \cos \Delta\gamma$ , siendo  $\Delta\gamma$  el producto de  $\Delta\lambda$  por la constante del cono.

#### Ejemplos:

Sean  $\varphi_1 = 30^\circ$ ,  $\varphi_2 = 60^\circ$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\lambda_0 = 0^\circ$  y  $\lambda = 75^\circ$  en un mapa en la proyección cónica secante equidistante en escala 1: 100 000 000. Tomando el eje  $X$  tangente al paralelo  $\varphi_1$ :

$$\Delta\gamma = 75^\circ \frac{\cos 30^\circ - \cos 60^\circ}{60^\circ - 30^\circ} \frac{180^\circ}{\pi} = 52^\circ 25' 45''$$

$X = r_\varphi \operatorname{sen} \Delta\gamma = 6\,223,80\text{km} \operatorname{sen} 52^\circ 25' 45'' = 4\,932,985\text{km}$ ; en escala  $X = 4,93\text{cm}$ .

$Y = r_{\varphi_1} - r_\varphi \cos \Delta\gamma = 7\,891,80\text{km} - 6\,223,80\text{km} \cos 52^\circ 25' 45'' = 4\,096,549\text{km}$ ; en escala  $Y = 4,096\text{cm}$ .

## 6.8 Proyección cónica secante equivalente (De Albers)

### 6.8.1 Dibujo

Tiene el aspecto común a todas las proyecciones cónicas secantes, pero se impone la condición de que las áreas sean correctas; basándose en ella se deducen las fórmulas que permiten calcular los elementos necesarios para el dibujo.

#### Cálculo de los radios de los paralelos bases $r_1$ y $r_2$

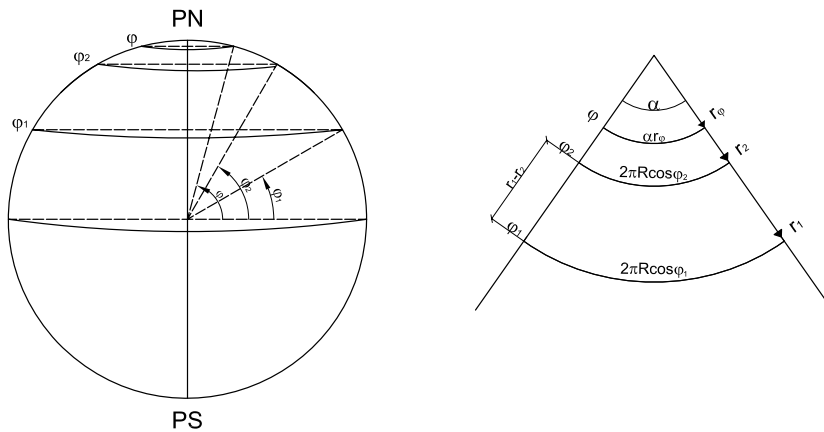


Figura 6.21: Cálculo de los radios de las proyecciones de los paralelos bases.

El área del trapecio circular cuyas bases son arcos de paralelos bases limitados por los lados del ángulo  $\alpha$  es:

Área del trapecio circular:

$$\frac{2\pi R \cos \varphi_1 + 2\pi R \cos \varphi_2}{2} (r_1 - r_2) = \pi R (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) (r_1 - r_2)$$

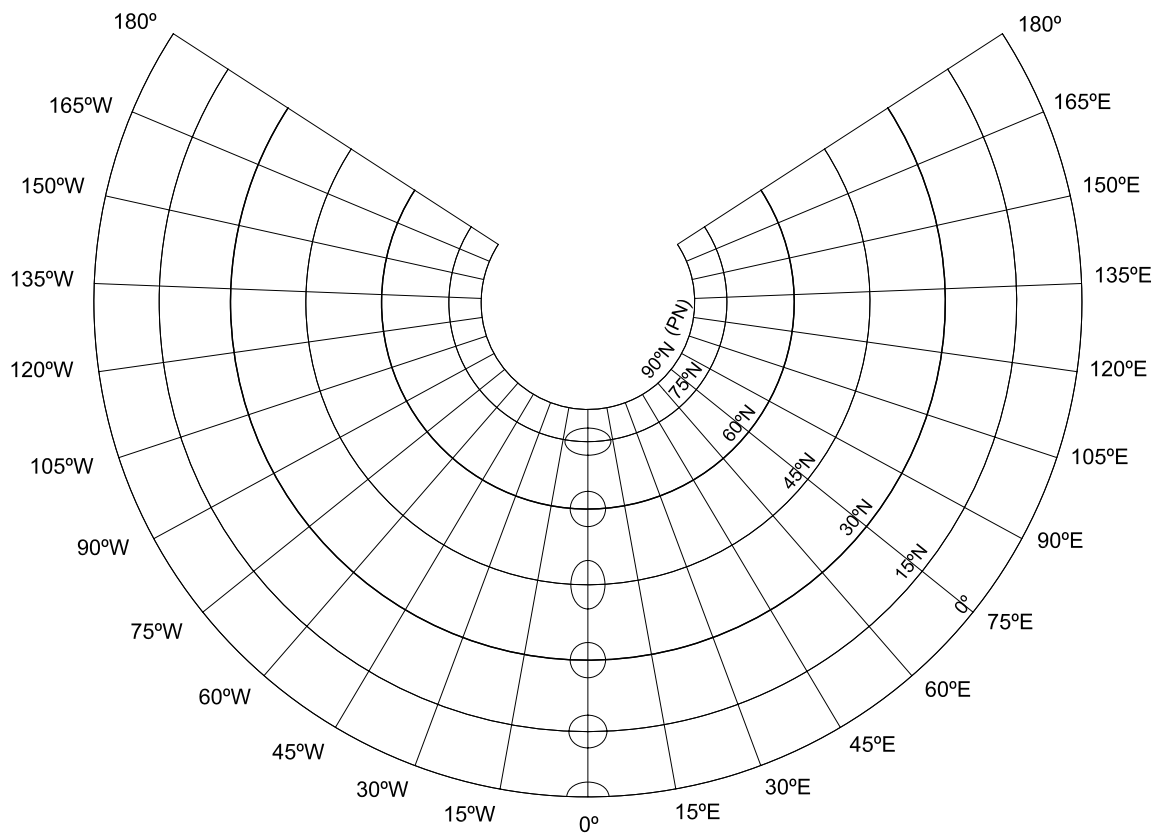
Por propiedad de las proporciones, se tiene que:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2\pi R \cos \varphi_1}{2\pi R \cos \varphi_2} \cdot \frac{r_1}{r_2} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}$$

Entonces  $\frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\cos \varphi_2} = \frac{r_1 - r_2}{r_2}$  y  $r_1 - r_2 = \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\cos \varphi_2} r_2$

Reemplazando en la expresión original:

$$\text{Área del trapecio circular} = \pi R (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\cos \varphi_2} r_2 \quad (6.19)$$



**Figura 6.22:** Proyección cónica secante equivalente.

Por otra parte, el área de la zona esférica comprendida entre los paralelos de latitudes  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  es:

$$\text{Área zona esférica} = 2\pi Rh$$

siendo  $h = R\text{sen } \varphi_2 - R\text{sen } \varphi_1 = R(\text{sen } \varphi_2 - \text{sen } \varphi_1)$ . Entonces:

$$\text{Área zona esférica} = 2\pi R^2(\text{sen } \varphi_2 - \text{sen } \varphi_1) \quad (6.20)$$

Como la proyección es equivalente, deben ser iguales las expresiones (6.19) y (6.20):

$$\begin{aligned} 2\pi R^2(\text{sen } \varphi_2 - \text{sen } \varphi_1) &= \pi R(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2}{\cos \varphi_2} r_2 \\ 2R(\text{sen } \varphi_2 - \text{sen } \varphi_1) &= \frac{\cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2}{\cos \varphi_2} r_2 \\ r_2 &= \frac{2R(\text{sen } \varphi_2 - \text{sen } \varphi_1) \cos \varphi_2}{\cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2} = \frac{2R(\text{sen } \varphi_2 - \text{sen } \varphi_1) \cos \varphi_2}{1 - \text{sen}^2 \varphi_1 - 1 + \text{sen}^2 \varphi_2} \\ &= \frac{2R(\text{sen } \varphi_2 - \text{sen } \varphi_1) \cos \varphi_2}{(\text{sen } \varphi_2 - \text{sen } \varphi_1)(\text{sen } \varphi_2 + \text{sen } \varphi_1)} = \frac{2R \cos \varphi_2}{\text{sen } \varphi_2 + \text{sen } \varphi_1} \end{aligned}$$

También por propiedad de las proporciones:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \text{ y } r_1 = \frac{r_2 \cos \varphi_1}{\cos \varphi_2}$$

entonces:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \frac{2R(\text{sen } \varphi_2 - \text{sen } \varphi_1) \cos \varphi_2}{\cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2} = \frac{2R(\text{sen } \varphi_2 - \text{sen } \varphi_1) \cos \varphi_1}{1 - \text{sen}^2 \varphi_1 - 1 + \text{sen}^2 \varphi_2} \\ &= \frac{2R(\text{sen } \varphi_2 - \text{sen } \varphi_1) \cos \varphi_1}{(\text{sen } \varphi_2 - \text{sen } \varphi_1)(\text{sen } \varphi_2 + \text{sen } \varphi_1)} = \frac{2R \cos \varphi_1}{\text{sen } \varphi_2 + \text{sen } \varphi_1} \end{aligned}$$

### Cálculo del ángulo de amplitud $\alpha$

Se sabe que  $\text{arco} = \text{radio} \times \text{ángulo en radianes}$ . Entonces:  $2\pi R \cos \varphi_2 = r_2 \times \alpha_{rad}$  y

$$\begin{aligned} \alpha_{rad} &= \frac{2\pi R \cos \varphi_2}{r_2} = \frac{2\pi R(\text{sen } \varphi_2 + \text{sen } \varphi_1) \cos \varphi_2}{2R \cos \varphi_2} = \frac{2\pi(\text{sen } \varphi_2 + \text{sen } \varphi_1)}{2} \\ \alpha_{rad} &= 2\pi \frac{(\text{sen } \varphi_2 + \text{sen } \varphi_1)}{2} \end{aligned}$$

siendo  $\frac{(\text{sen } \varphi_2 + \text{sen } \varphi_1)}{2}$  la constante del cono.

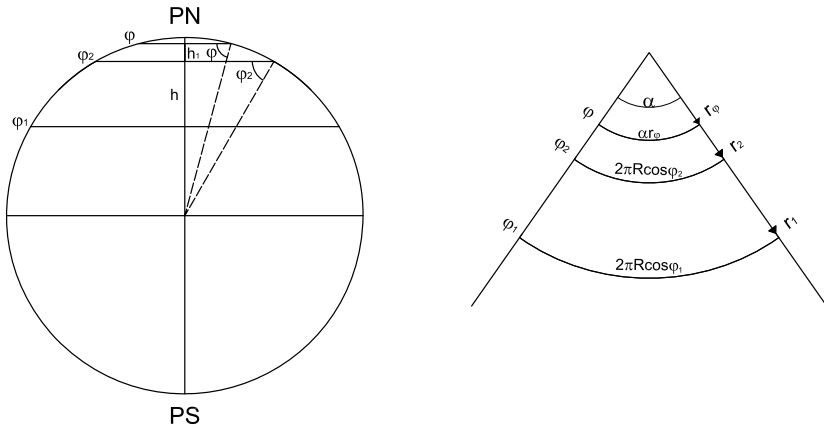
**Cálculo del radio de cualquier paralelo  $r_\varphi$** (Figura 6.23)

El área de la zona esférica comprendida entre los paralelos de latitudes  $\varphi$  y  $\varphi_2$  es:

$$\text{Área zona esférica} = 2\pi R h$$

siendo  $h = R \text{sen } \varphi - R \text{sen } \varphi_2 = R(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_2)$ . Entonces:

$$\text{Área zona esférica } (\varphi, \varphi_2) = 2\pi R^2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_2) \quad (6.21)$$



**Figura 6.23:** Cálculo del radio de la proyección de un paralelo.

La correspondiente superficie en la proyección es el trapecio circular comprendido entre las proyecciones del paralelo de latitud  $\varphi$  y de uno de los paralelos base, por ejemplo el de latitud  $\varphi_2$ .

$$\text{Área trapecio circular } (\varphi, \varphi_2) = \frac{2\pi R \cos \varphi_2 r_2}{2} - \frac{r_\varphi^2 \alpha}{2} \quad (6.22)$$

Como la proyección es equivalente, deben ser iguales las expresiones (6.21) y (6.22):

$$\begin{aligned} 2\pi R^2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_2) &= \frac{2\pi R \cos \varphi_2 r_2}{2} - \frac{r_\varphi^2 \alpha}{2} \\ 4\pi R^2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_2) &= 2\pi R \cos \varphi_2 r_2 - r_\varphi^2 \alpha \\ 4\pi R^2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_2) - 2\pi R \cos \varphi_2 r_2 &= -r_\varphi^2 \alpha \\ r_\varphi^2 &= \frac{2\pi R \cos \varphi_2 r_2 - 4\pi R^2(\text{sen } \varphi - \text{sen } \varphi_2)}{\alpha} \end{aligned}$$

$$r_{\varphi} = \sqrt{\frac{2\pi R \cos \varphi_2 r_2 - 4\pi R^2 (\sin \varphi - \sin \varphi_2)}{\alpha}}$$

Se ha observado antes que  $\alpha_{rad} = \frac{2\pi R \cos \varphi_2}{r_2}$ . Reemplazando en la expresión de  $r_{\varphi}^2$ :

$$r_{\varphi}^2 = \frac{2\pi R \cos \varphi_2 r_2 - 4\pi R^2 (\sin \varphi - \sin \varphi_2)}{2\pi R \cos \varphi_2} r_2$$

Multiplicando en el numerador ambos términos por  $r_2$  y distribuyendo el denominador, se tiene:

$$r_{\varphi}^2 = \frac{2\pi R \cos \varphi_2 r_2^2}{2\pi R \cos \varphi_2} - \frac{4\pi R^2 (\sin \varphi - \sin \varphi_2) r_2}{2\pi R \cos \varphi_2} = r_2^2 - \frac{2R (\sin \varphi - \sin \varphi_2) r_2}{\cos \varphi_2}$$

Entonces:

$$r_{\varphi} = \sqrt{r_2^2 - \frac{2R (\sin \varphi - \sin \varphi_2) r_2}{\cos \varphi_2}} \text{ o bien } r_{\varphi} = \sqrt{r_1^2 - \frac{2R (\sin \varphi - \sin \varphi_1) r_1}{\cos \varphi_1}}$$

Si  $\varphi_1 = 30^\circ N$  y  $\varphi_2 = 60^\circ N$ , aplicando las fórmulas deducidas anteriormente se tiene que:

$$r_{0^\circ} = 11164 km$$

$$r_{15^\circ} = 9690 km$$

$$r_{30^\circ} = 8076 km$$

$$r_{45^\circ} = 6374 km$$

$$r_{60^\circ} = 4663 km$$

$$r_{75^\circ} = 3143 km$$

$$r_{90^\circ} = 2414 km, \text{ siendo } \alpha = 245^\circ 53' 04''.$$

### 6.8.2 Características y propiedades

Los paralelos se proyectan según arcos de circunferencia concéntricos en el vértice del ángulo de amplitud  $\alpha$ , que se van acercando acentuadamente entre sí al alejarse de los paralelos bases hacia fuera; entre los paralelos bases se van separando a los efectos de lograr el área correcta. La deformación en cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ :

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}}$$

$$\begin{aligned}
k &= \frac{r_\varphi \alpha_{rad}}{2\pi R \cos \varphi} \\
&= \left[ r_1^2 - \frac{2R(\sin \varphi - \sin \varphi_1)}{\cos \varphi_1} r_1 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{2\pi \frac{(\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1)}{2}}{2\pi R \cos \varphi} \\
&= \left[ r_1^2 - \frac{2R(\sin \varphi - \sin \varphi_1)}{\cos \varphi_1} r_1 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{(\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1)}{2R \cos \varphi} \\
k &= r_\varphi \frac{(\sin \varphi_2 + \sin \varphi_1)}{2R \cos \varphi} \tag{6.23}
\end{aligned}$$

**Ejemplos:**

Si  $\varphi_1 = 30^\circ N$  y  $\varphi_2 = 60^\circ N$ , para  $\varphi = 15^\circ$ ,  $k = 1,08$  y para  $\varphi = 45^\circ$ ,  $k = 0,996$ .

El valor de  $k$  es menor que 1 entre los paralelos bases, igual a 1 sobre ellos y mayor que 1 por fuera de los mismos.

Los meridianos se proyectan según rectas concurrentes en el vértice del ángulo de amplitud, que no es la proyección del Polo (la misma es un arco de circunferencia), calculándose la deformación con el módulo de deformación lineal  $h$ .

$$\begin{aligned}
h &= \frac{dm'}{dm} = \frac{dr_\varphi}{Rd\varphi} \\
dr_\varphi &= d \left[ r_1^2 - \frac{2R(\sin \varphi - \sin \varphi_1)}{\cos \varphi_1} r_1 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \left[ r_1^2 - \frac{2R(\sin \varphi - \sin \varphi_1)}{\cos \varphi_1} r_1 \right]^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{-2Rr_1}{\cos \varphi_1} \cos \varphi \right) d\varphi \\
h &= \frac{r_1 \cos \varphi}{\cos \varphi_1 \left[ r_1^2 - \frac{2R(\sin \varphi - \sin \varphi_1)}{\cos \varphi_1} r_1 \right]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{r_1 \cos \varphi}{\cos \varphi_1 r_\varphi} \\
&= \frac{2R \cos \varphi_1 \cos \varphi}{(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) \cos \varphi_1 r_\varphi} \\
h &= \frac{2R \cos \varphi}{(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) r_\varphi} \tag{6.24}
\end{aligned}$$



### Nota 1

El signo (-) de la expresión de  $dr_\varphi$  significa que cuando la variable independiente  $\varphi$  se incrementa, la función  $r_\varphi$  decrece. Para  $h$  se toma el valor absoluto, pues interesa la magnitud de la deformación y no su sentido. En cambio, si se trabaja con la colatitud  $\delta$ , en lugar de  $\varphi$ , resultará  $h$  positivo.

### Nota 2

De (6.23) y (6.24) se verifica que  $k = \frac{1}{h}$ , por lo tanto  $hk = 1$ , o sea:  $N_1 N_2 = 1$ .

### Ejemplos:

Sean  $\varphi_1 = 30^\circ N$  y  $\varphi_2 = 60^\circ N$ .

Para  $\varphi = 75^\circ$ ,  $k = r_\varphi \frac{(\text{sen } \varphi_2 + \text{sen } \varphi_1)}{2R \cos \varphi} = 3\,143\text{km} \frac{(\text{sen } 30^\circ + \text{sen } 60^\circ)}{2 \times 6\,370\text{km} \cos 75^\circ} = 1,4927$ ;  $h = 0,6699$ . Por lo tanto  $k = N_1$  y  $h = N_2$ .

Para  $\varphi = 15^\circ$ ,  $k = 6\,960\text{km} \frac{(\text{sen } 30^\circ + \text{sen } 60^\circ)}{2 \times 6\,370\text{km} \cos 15^\circ} = 1,0756$ ;  $h = 0,9267$ . También  $k = N_1$  y  $h = N_2$ .

Para  $\varphi = 45^\circ$ ,  $k = 6\,374\text{km} \frac{(\text{sen } 30^\circ + \text{sen } 60^\circ)}{2 \times 6\,370\text{km} \cos 45^\circ} = 0,9665$ ;  $h = 1,0347$ . En este caso  $h = N_1$  y  $k = N_2$ .

### Nota 3

En el intervalo de  $\varphi_2$  a  $90^\circ$  y para  $\varphi < \varphi_1$ , la Elipse de Tissot tiene su eje mayor en el sentido del paralelo y en el intervalo entre  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , el eje mayor tiene la dirección del meridiano.

El valor de  $h$  es igual a 1 sobre los paralelos bases (en la intersección del meridiano con dichos paralelos), mayor que 1 entre los paralelos bases y menor que 1 fuera de los paralelos bases.

Esta proyección no es isógona pues  $h \neq k$ ; como ya se vio antes, es equivalente pues  $hk = 1$ .

### 6.8.3 Usos

Como toda proyección equivalente, es usada para mapas con fines estadísticos y cartas topográficas catastrales (en este último caso deben usarse fórmulas deducidas sobre el elipsoide de revolución).

En un mapa realizado en esta proyección, para determinar la ubicación

de los paralelos bases, se sigue el procedimiento citado para la proyección cónica secante equidistante, pero donde  $\Delta\gamma = \Delta\lambda \frac{\text{sen } \varphi_1 + \text{sen } \varphi_2}{2}$

### 6.8.4 Coordenadas cartesianas

Cuando se representa una extensión limitada, un país o un continente, los valores de  $r_\varphi$  superan los límites del dibujo; entonces, para el dibujo se recurre a las coordenadas cartesianas de los puntos de intersección de las proyecciones de paralelos y meridianos. Para ello se considera el eje  $Y$  coincidente con el meridiano central y el eje  $X$  tangente a un paralelo base ( $\varphi_1$  o  $\varphi_2$ ). Supóngase que se adopta como centro  $(\varphi_1, \lambda_0)$ .

$$X = r_\varphi \text{sen } \Delta\gamma \text{ siendo } \Delta\gamma = \Delta\lambda \times \text{constante del cono} = \Delta\lambda \frac{\text{sen } \varphi_1 + \text{sen } \varphi_2}{2}.$$

$$Y = r_1 - r_\varphi \cos \Delta\gamma.$$

**Ejemplos:**

Si  $\varphi_1 = 30^\circ N$ ,  $\varphi_2 = 60^\circ N$ ,  $\lambda_0 = 0^\circ$  y  $\lambda = 105^\circ$ :

$$\Delta\gamma = \Delta\lambda \frac{\text{sen } \varphi_1 + \text{sen } \varphi_2}{2} = 105^\circ \frac{\text{sen } 30^\circ + \text{sen } 60^\circ}{2} = 71^\circ 42' 59''$$

$$X = r_\varphi \text{sen } \Delta\gamma = 3\,143\text{km} \cdot \text{sen } 71^\circ 42' 59'' = 2\,948\text{km}.$$

$$Y = r_{\varphi_1} - r_\varphi \cos \Delta\gamma = 8\,076\text{km} - 2\,984,32\text{km} \cdot \cos 71^\circ 42' 59'' = 7\,139,755\text{km}.$$

## 6.9 Proyección cónica secante isógona (en la esfera)

### 6.9.1 Dibujo

En primer lugar deben calcularse los elementos necesarios para el dibujo, cuyas fórmulas se deducen a continuación (Figura 6.25).

Por ser isógona debe cumplirse que  $h = k$ , siendo  $h = \frac{dr_\delta}{Rd\delta}$  y  $k = \frac{2\pi nr\delta}{2\pi R \text{sen } \delta} = \frac{nr\delta}{R \text{sen } \delta}$  donde  $\delta$  es la colatitud,  $n$  es la constante del cono, y  $\alpha = 2\pi n$ . Entonces:

$$\frac{dr_\delta}{Rd\delta} = \frac{nr_\delta}{R \text{sen } \delta}$$

$$\frac{dr_\delta}{r_\delta} = \frac{nd\delta}{\text{sen } \delta}$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$\int \frac{dr_\delta}{r_\delta} = n \int \frac{d\delta}{\text{sen } \delta}$$

$$\ln r_\delta = n \ln \text{tg } \frac{\delta}{2}$$

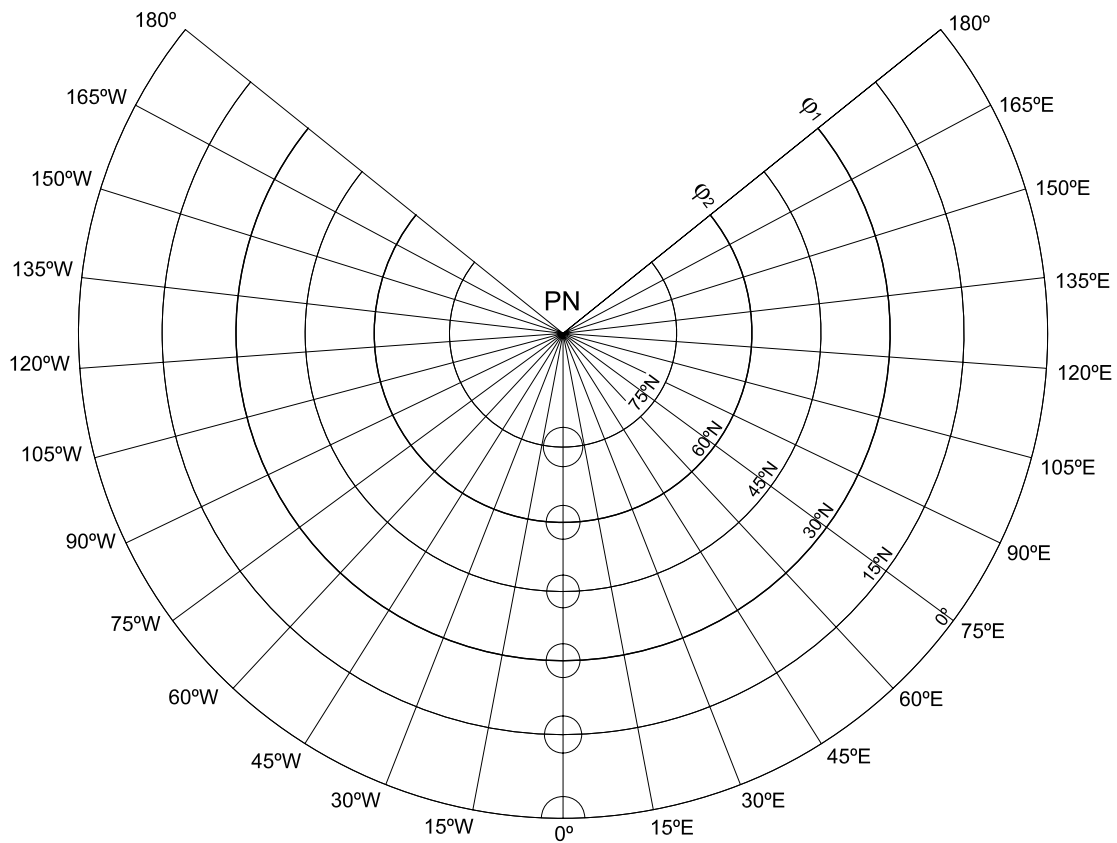


Figura 6.24: Proyección cónica secante isógona.

Esta expresión es aplicable a cualquier radio  $r_\delta$  y por lo tanto:

$$\ln r_{\delta_1} = n \ln \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \quad (6.25)$$

$$\ln r_{\delta_2} = n \ln \operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2} \quad (6.26)$$

$$\ln r_{\delta_1} - \ln r_{\delta_2} = n \left( \ln \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2} \right)$$

Aplicando propiedades de los logaritmos:

$$\ln \frac{r_{\delta_1}}{r_{\delta_2}} = n \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2}} \quad (6.27)$$

Como  $r_{\delta_1} = \frac{2\pi R \operatorname{sen} \delta_1}{2\pi n}$  y  $r_{\delta_2} = \frac{2\pi R \operatorname{sen} \delta_2}{2\pi n}$ , entonces  $\frac{r_{\delta_1}}{r_{\delta_2}} = \frac{\operatorname{sen} \delta_1}{\operatorname{sen} \delta_2}$  y

$$\ln \frac{r_{\delta_1}}{r_{\delta_2}} = \ln \frac{\operatorname{sen} \delta_1}{\operatorname{sen} \delta_2} \quad (6.28)$$

De (6.27) y (6.28):

$$\ln \frac{\operatorname{sen} \delta_1}{\operatorname{sen} \delta_2} = n \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2}}$$

$$\ln \operatorname{sen} \delta_1 - \ln \operatorname{sen} \delta_2 = n \left( \ln \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2} \right)$$

La constante del cono es

$$n = \frac{\ln \operatorname{sen} \delta_1 - \ln \operatorname{sen} \delta_2}{\ln \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2}}$$

Por otra parte:

$$\ln r_\delta = n \ln \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}$$

$$\ln r_{\delta_1} = n \ln \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2}$$

$$\ln \frac{r_\delta}{r_{\delta_1}} = n \left[ \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2}} \right]$$

$$\frac{r_\delta}{r_{\delta_1}} = \left[ \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2}} \right]^n$$

$$r_\delta = \frac{R \operatorname{sen} \delta_1}{n \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \right]^n} \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right]^n$$

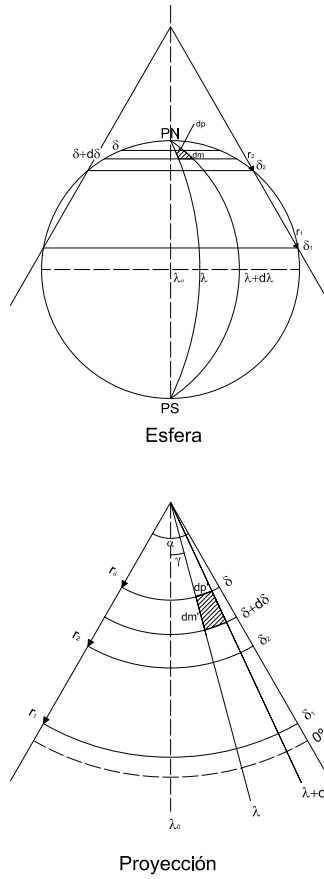


Figura 6.25: Cálculo de los radios de los paralelos.

ya que  $r_{\delta_1} = \frac{R \text{sen } \delta_1}{n}$ . Entonces el radio de un paralelo cualquiera es:

$$r_{\delta} = m \left[ \text{tg } \frac{\delta}{2} \right]^n$$

siendo:  $m = \frac{R \text{sen } \delta_1}{n \left[ \text{tg } \frac{\delta_1}{2} \right]^n}$  o bien  $m = \frac{R \text{sen } \delta_2}{n \left[ \text{tg } \frac{\delta_2}{2} \right]^n}$ .

### 6.9.2 Coordenadas cartesianas de un punto $(\varphi, \lambda)$

El eje  $Y$  coincide con el meridiano central y el eje  $X$  es la recta perpendicular al meridiano central en su intersección con cualquiera de los dos paralelos bases.

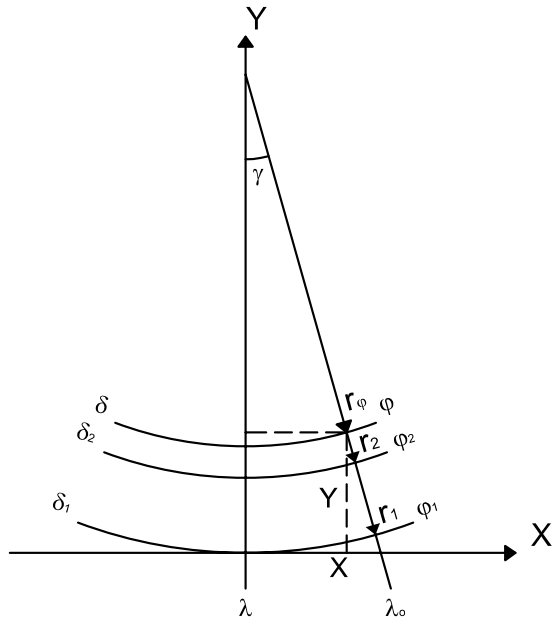


Figura 6.26: Cálculo de las coordenadas cartesianas.

Sea  $X$  en la intersección con el paralelo base de colatitud  $\delta_1$  y  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ , (Figura 6.26)

$$X = r_\delta \operatorname{sen} \gamma, \text{ siendo } \gamma = n\Delta\lambda$$

$$Y = r_{\delta_1} - r_\delta \operatorname{cos} \gamma$$

### Ejemplos:

Se desea dibujar la proyección **cónica secante isógona (de Lambert)** entre los paralelos de  $25^\circ$  y  $50^\circ$  de latitud norte y entre los meridianos de  $65^\circ$  y  $125^\circ$  de longitud oeste para un mapa de EE.UU. en escala 1 : 18 600 000, siendo los paralelos bases:  $\varphi_1 = 33^\circ$  y  $\varphi_2 = 45^\circ$  ( $\delta_1 = 57^\circ$  y  $\delta_2 = 45^\circ$ )(Figura 6.27).

La constante del cono es:

$$n = \frac{\ln \operatorname{sen} \delta_1 - \ln \operatorname{sen} \delta_2}{\ln \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2}} = \frac{\ln \operatorname{sen} 57^\circ - \ln \operatorname{sen} 45^\circ}{\ln \operatorname{tg} \frac{57^\circ}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2}} = 0,630477689.$$

Los radios de los paralelos bases son:

$$r_{\delta_1} = \frac{R \operatorname{sen} \delta_1}{n} = \frac{6370 \operatorname{km} \operatorname{sen} 57^\circ}{0,630477689} = 8473,466 \operatorname{km}.$$

En escala  $r_{\delta_1} = 45,54 \operatorname{cm}$ .

$$r_{\delta_2} = \frac{R \operatorname{sen} \delta_2}{n} = \frac{6\,370 \operatorname{km} \operatorname{sen} 45^\circ}{0,630477689} = 744,218 \operatorname{km}.$$

En escala  $r_{\delta_1} = 38,40 \operatorname{cm}$ .

El ángulo entre dos meridianos consecutivos es:

$$\Delta\gamma = n\Delta\lambda = 5^\circ \times 0,630477689 = 3^\circ 09' 08,6''.$$

El radio del paralelo de latitud  $\varphi = 50^\circ$  ( $\delta = 40^\circ$ ) vale:

$$m = \frac{R \operatorname{sen} \delta_1}{n \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \right]^n} = \frac{6\,370 \operatorname{km} \operatorname{sen} 57^\circ}{0,630477689 \left[ \operatorname{tg} \frac{57^\circ}{2} \right]^{0,630477689}} = 12\,453,35143 \operatorname{km}$$

$r_\delta = r_{40^\circ} = 12\,453,35143 \operatorname{km} \left[ \operatorname{tg} \frac{40^\circ}{2} \right]^{0,630477689} = 6\,584,883043 \operatorname{km}$ . En escala  $r_{40^\circ} = 35,39 \operatorname{cm}$ .

### Nota:

Se observa que las medidas de los radios de las proyecciones de los paralelos son incómodas para dibujar, pues requieren de un compás de vara. Además, el dibujo excede el tamaño de la hoja. Por lo tanto, conviene calcular las coordenadas cartesianas de los puntos de intersección de los paralelos y meridianos.

### Ejemplos:

En el caso del ejemplo anterior, para el punto ( $\varphi = 50^\circ N$ ;  $\lambda = 70^\circ W$ ), o sea ( $\delta = 40^\circ$ ;  $\lambda = -70^\circ$ ) y meridiano central  $\lambda_0 = 95^\circ W = -95^\circ$ , tomando como eje  $X$  la recta perpendicular al meridiano central en su intersección con el paralelo  $\delta_1 = 57^\circ$ :

$$X = r_\delta \operatorname{sen} \gamma$$

$$Y = r_{\delta_1} - r_\delta \cos \gamma$$

siendo  $\gamma = n\Delta\lambda = 0,630477689(-70^\circ + 95^\circ) = 15^\circ 45' 43''$ .

$$X = 6\,584 \operatorname{km} \operatorname{sen} 15^\circ 45' 43'' = 1\,788,725 \operatorname{km};$$

$$X \text{ (en escala)} = 11,54 \operatorname{cm}.$$

$$Y = 8\,473,466 \operatorname{km} - 6\,584,883 \operatorname{km} \cos 15^\circ 45' 43'' = 2\,136,184 \operatorname{km};$$

$$Y \text{ (en escala)} = 13,78 \operatorname{cm}.$$

### 6.9.3 Módulos de alteración lineal $k$ y $h$

$$k = \frac{\alpha r_\varphi}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{2\pi n r_\varphi}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{n r_\delta}{R \operatorname{sen} \delta} = \frac{nm \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right]^n}{R \operatorname{sen} \delta}$$

Continuando con el desarrollo:

$$k = \frac{nm \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right]^n}{R \operatorname{sen} \delta} = \frac{R \operatorname{sen} \delta_1}{n \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \right]^n} \frac{n \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right]^n}{R \operatorname{sen} \delta} = \frac{\operatorname{sen} \delta_1}{\operatorname{sen} \delta} \left[ \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2}} \right]^n$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} h &= \frac{dm'}{dm} = \frac{dr_\varphi}{Rd\varphi} = \frac{dr_\delta}{Rd\delta} = \frac{d \left[ m \left( \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right)^n \right]}{Rd\delta} = \frac{md \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right]^n}{Rd\delta} = \\ &= \frac{mn \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right]^{n-1} \frac{1}{\cos^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{2} d\delta}{Rd\delta} = \frac{mn \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right]^n}{2R \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \cos^2 \frac{\delta}{2}} = \\ &= \frac{mn \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right]^n}{2R \operatorname{sen} \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}} = \frac{mn \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \right]^n}{R \operatorname{sen} \delta} \end{aligned}$$

Se verifica que  $h = k$ , dada la isogonía de la proyección.

#### Ejemplo (Figura 6.24)

En una proyección cónica secante isógona, de paralelos bases  $\varphi_1 = 30^\circ$ ,  $\delta_1 = 60^\circ$ ,  $\frac{\delta_1}{2} = 30^\circ$  y  $\varphi_2 = 60^\circ$ ,  $\delta_2 = 30^\circ$ ,  $\frac{\delta_2}{2} = 15^\circ$ , calcular los radios de los paralelos, cada  $15^\circ$  de latitud. Reemplazando estos valores en las fórmulas antes deducidas se tiene:

$$n = 0,7155667$$

$$m = 11\,421,576\,km$$

$$\alpha = 257^\circ 36' 15''$$

$$r_{0^\circ} = 11\,421,576\,km$$

$$r_{15^\circ} = 9\,449,784\,km$$

$$r_{30^\circ} = 7\,709,388\,km$$

$$r_{45^\circ} = 6\,078,892\,km$$

$$r_{60^\circ} = 4\,451,017\,km$$

$$r_{75^\circ} = 2\,676,818\,km$$

$$r_{90^\circ} = 0,000\,km$$



$\lambda$	$\gamma = n\lambda$
0°	0° 00'00"
15°	10° 44'01"
30°	21° 28'01"
45°	32° 12'02"
60°	42° 56'02"
75°	53° 40'03"
90°	64° 24'04"
105°	75° 08'04"
120°	85° 52'05"
135°	96° 36'05"
150°	107° 20'06"
165°	118° 04'07"
180°	128° 48'07"

**Tabla 6.1**

#### 6.9.4 Características y propiedades

Los paralelos se proyectan según arcos de circunferencias concéntricos de longitudes incorrectas que, fuera de los paralelos bases, se alejan entre sí levemente y son mayores que los reales; entre los paralelos bases se acercan levemente y son menores que los reales. La deformación en cada paralelo se calcula con el módulo de alteración lineal  $k$ , que sobre los paralelos bases es igual a uno, fuera de los paralelos bases es mayor que uno y entre los paralelos bases es menor que uno.

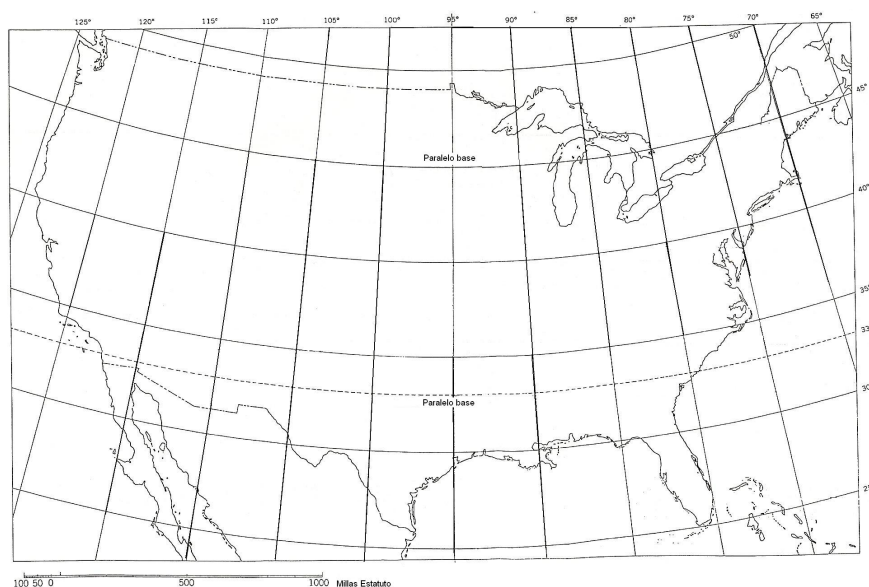
Los meridianos se proyectan según rectas concurrentes en el Polo, formando ángulos incorrectos, menores que los reales. La deformación en cada punto de los meridianos se calcula con el módulo de alteración lineal  $h$ . El valor de  $h$  es igual a uno sobre los paralelos bases, menor que uno entre los paralelos bases y mayor que uno fuera de ellos.

Esta proyección no es equivalente pues  $hk \neq 1$ . Es isógona, verificándose que  $h = k$ .

## 6.9.5 Usos

La mayoría de las cartas y mapas aeronáuticos están confeccionados en esta proyección. Es adecuada para regiones extendidas de este a oeste, principalmente.

Por ejemplo, en un mapa de los Estados Unidos, a escala 1 : 5 000 000, con los paralelos bases  $\varphi_1 = 33^\circ N$  y  $\varphi_2 = 45^\circ N$ , el error máximo entre  $30^\circ 30' N$  y  $47^\circ 30' N$  es 0,5 a 1%. El error máximo se produce al sur de Florida.



**Figura 6.27:** Proyección cónica secante conforme de Lambert; paralelos base  $\varphi_1 = 33^\circ N$  y  $\varphi_2 = 45^\circ N$ . Milla (estatuto) = 1 609,31 m..

### Observación

Los ángulos que forman los meridianos entre sí son iguales a:

$$\gamma = \Delta\lambda n \text{ (radianes)}$$

siendo  $n$  la constante del cono:  $n = \frac{\ln \operatorname{sen} \delta_1 - \ln \operatorname{sen} \delta_2}{\ln \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2}}$ ,  $\Delta\lambda$  la diferencia de longitud con respecto al meridiano central y la convergencia de meridianos.

### Ejemplos:

Los elementos necesarios para el dibujo de la proyección cónica normal secante isógona del hemisferio norte, con paralelos y meridianos cada  $15^\circ$ , meridiano central  $\lambda_0 = 0^\circ$  y paralelos bases  $\varphi_1 = 30^\circ N$  y  $\varphi_2 = 60^\circ N$ , en escala 1:160 000 000 se consignan en las tablas 6.1 y 6.2.

Las constantes son:

$$n = \frac{\ln \operatorname{sen} 60^\circ - \ln \operatorname{sen} 30^\circ}{\ln \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{30^\circ}{2}} = 0,715566834$$

$$m = \frac{R \operatorname{sen} \delta_1}{n \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \right]^n} = \frac{6\,370\,km \operatorname{sen} 60^\circ}{0,715566834 \left[ \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} \right]^{0,715566834}} = 11\,421,573\,km.$$

Si se calcula  $m$  utilizando el valor de  $\delta_2$ , se obtendrá el mismo valor:

$$m = \frac{R \operatorname{sen} \delta_2}{n \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2} \right]^n} = \frac{6\,370\,km \operatorname{sen} 30^\circ}{0,715566834 \left[ \operatorname{tg} \frac{30^\circ}{2} \right]^{0,715566834}} = 11\,421,573\,km.$$

## 6.10 Proyección cónica secante isógona (sobre el elipsoide). (Proyección cónica conforme de Lambert)

### 6.10.1 Dibujo

Por ser una proyección isógona debe ser  $h = k$ , siendo  $\frac{dm'}{dm} = \frac{dr_\delta}{\rho d\delta}$  y  $\frac{dp'}{dp} = \frac{nd\lambda r_\delta}{d\lambda N \operatorname{sen} \delta} = \frac{nr_\delta}{N \operatorname{sen} \delta}$  (ver Figuras 6.28 y 6.29); entonces:  $\frac{dr_\delta}{\rho d\delta} = \frac{nr_\delta}{N \operatorname{sen} \delta}$ . De aquí:

$$\frac{dr_\delta}{r_\delta} = \frac{n\rho d\delta}{N \operatorname{sen} \delta}$$

Resolviendo la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \int \frac{dr_\delta}{r_\delta} &= n \int \frac{\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \cos^2 \delta)^{\frac{3}{2}}} d\delta}{\frac{a}{(1-e^2 \cos^2 \delta)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{sen} \delta} \\ &= n \int \frac{a(1-e^2)d\delta}{(1-e^2 \cos^2 \delta) \operatorname{sen} \delta} \end{aligned}$$

$$\ln r_\delta = n \ln \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta}{1-e \cos \delta} \right)^{\frac{e}{2}} \right] \quad (6.29)$$

$\varphi$	$\delta$	$r_\delta = m[\text{tg} \frac{\delta}{2}]^n [\text{km}]$	$r_\delta$ en escala [cm]
90°	0°	0,000	0,00
75°	15°	2 678,818	1,78
60°	30°	4 451,017	2,97
45°	45°	6 078,892	4,05
30°	60°	7 709,388	5,14
15°	75°	9 449,784	6,30
0°	90°	11 421,576	7,61

**Tabla 6.2**

La fórmula (6.29) es general y puede aplicarse a cualquier paralelo :

$$\ln r_{\delta_1} = n \ln \left[ \text{tg} \frac{\delta_1}{2} \left( \frac{1 + e \cos \delta_1}{1 - e \cos \delta_1} \right)^{\frac{e}{2}} \right] \quad (6.30)$$

$$\ln r_{\delta_2} = n \ln \left[ \text{tg} \frac{\delta_2}{2} \left( \frac{1 + e \cos \delta_2}{1 - e \cos \delta_2} \right)^{\frac{e}{2}} \right]$$

Restando miembro a miembro las dos expresiones anteriores:

$$\begin{aligned} \ln r_{\delta_1} - \ln r_{\delta_2} &= n \left\{ \ln \left[ \text{tg} \frac{\delta_1}{2} \left( \frac{1 + e \cos \delta_1}{1 - e \cos \delta_1} \right)^{\frac{e}{2}} \right] - \ln \left[ \text{tg} \frac{\delta_2}{2} \left( \frac{1 + e \cos \delta_2}{1 - e \cos \delta_2} \right)^{\frac{e}{2}} \right] \right\} \\ n &= \frac{\ln r_{\delta_1} - \ln r_{\delta_2}}{\ln \left[ \text{tg} \frac{\delta_1}{2} \left( \frac{1 + e \cos \delta_1}{1 - e \cos \delta_1} \right)^{\frac{e}{2}} \right] - \ln \left[ \text{tg} \frac{\delta_2}{2} \left( \frac{1 + e \cos \delta_2}{1 - e \cos \delta_2} \right)^{\frac{e}{2}} \right]} \end{aligned} \quad (6.31)$$

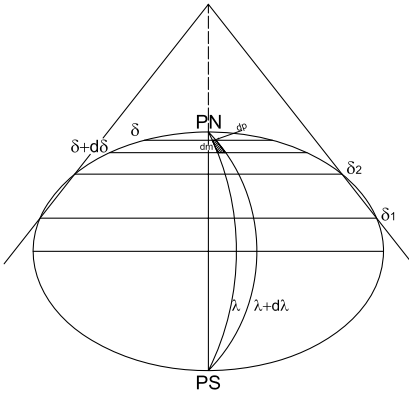
Observar en la Figura 6.29 que:

$$r_{\delta_1} = \frac{2\pi N_1 \text{sen} \delta_1}{\alpha} \quad \text{y} \quad r_{\delta_2} = \frac{2\pi N_2 \text{sen} \delta_2}{\alpha}$$

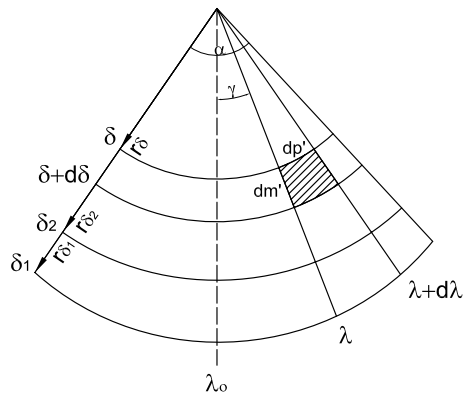
Entonces:

$$\frac{r_{\delta_1}}{r_{\delta_2}} = \frac{N_1 \text{sen} \delta_1}{N_2 \text{sen} \delta_2} \quad \text{y} \quad \ln \frac{r_{\delta_1}}{r_{\delta_2}} = \ln \frac{N_1 \text{sen} \delta_1}{N_2 \text{sen} \delta_2}$$

$$\ln r_{\delta_1} - \ln r_{\delta_2} = \ln N_1 \text{sen} \delta_1 - \ln N_2 \text{sen} \delta_2 \quad (6.32)$$



**Figura 6.28:** Cálculo de los radios de los paralelos en las bases.



**Figura 6.29:** Cálculo de los radios de los paralelos en la proyección.

Reemplazando (6.32) en (6.31):

$$n = \frac{\ln(N_1 \operatorname{sen} \delta_1) - \ln(N_2 \operatorname{sen} \delta_2)}{\ln \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta_1}{1-e \cos \delta_1} \right)^{\frac{e}{2}} \right] - \ln \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta_2}{1-e \cos \delta_2} \right)^{\frac{e}{2}} \right]} \quad (6.33)$$

Para hallar la expresión que permite calcular  $r_\delta$  se restan las expresiones (6.29) y (6.30):

$$\begin{aligned} \ln r_\delta - \ln r_{\delta_1} &= \ln \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta}{1-e \cos \delta} \right)^{\frac{e}{2}} \right] - \ln \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta_1}{1-e \cos \delta_1} \right)^{\frac{e}{2}} \right] \\ \ln \frac{r_\delta}{r_{\delta_1}} &= \ln \frac{\left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta}{1-e \cos \delta} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^n}{\left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta_1}{1-e \cos \delta_1} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^n} \\ r_\delta &= \frac{r_{\delta_1}}{\left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta_1}{1-e \cos \delta_1} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^n} \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta}{1-e \cos \delta} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^n \end{aligned} \quad (6.34)$$

En la Figura 6.29 se observa que:  $r_{\delta_1} = \frac{2\pi N_1 \operatorname{sen} \delta_1}{n 2\pi} = \frac{N_1 \operatorname{sen} \delta_1}{n}$ . Reemplazando esta expresión en (6.34) se tiene:

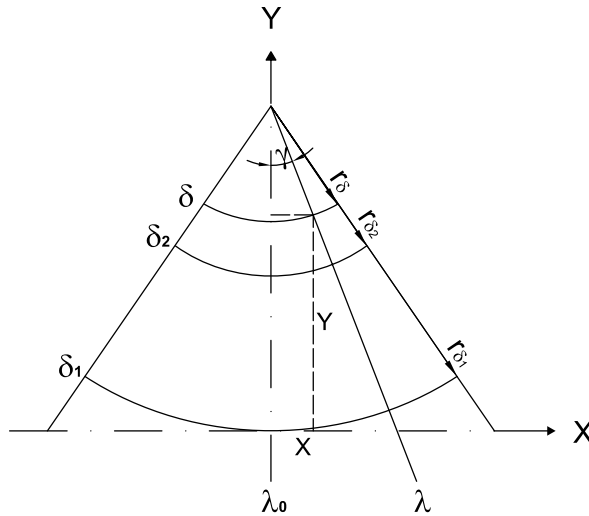
$$\begin{aligned} r_\delta &= \frac{N_1 \operatorname{sen} \delta_1}{n \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta_1}{1-e \cos \delta_1} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^n} \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta}{1-e \cos \delta} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^n. \text{ Es decir:} \\ r_\delta &= C \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta}{1-e \cos \delta} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^n \end{aligned}$$

donde la constante  $C$  es:

$$C = \frac{N_1 \operatorname{sen} \delta_1}{n \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_1}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta_1}{1-e \cos \delta_1} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^n} \text{ o bien } C = \frac{N_2 \operatorname{sen} \delta_2}{n \left[ \operatorname{tg} \frac{\delta_2}{2} \left( \frac{1+e \cos \delta_2}{1-e \cos \delta_2} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^n}$$

La otra coordenada polar es:  $\gamma = n\Delta\lambda$

**Coordenadas cartesianas** (Figura 6.30)



**Figura 6.30:** Coordenadas cartesianas.

Las coordenadas cartesianas son:

$$\begin{cases} X = r_\delta \operatorname{sen} \gamma \\ Y = r_{\delta_1} - r_\delta \cos \gamma \end{cases}$$

siendo:  $\gamma = n\Delta\lambda$

**Ejemplos:**

Hallar las coordenadas cartesianas del punto ( $\varphi = 75^\circ, \lambda = 45^\circ$ ) en una proyección cónica secante isógona, sobre el elipsoide, con paralelos bases

$\varphi_1 = 30^\circ N$  y  $\varphi_2 = 60^\circ$  y meridiano central  $\lambda = 0^\circ$ .

$$N_1 = \frac{a}{(1 - e^2 \cos^2 \delta_1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6\,378,388\text{km}}{(1 - e^2 \cos^2 60^\circ)^{\frac{1}{2}}} = 6\,383,755\text{km},$$

$$N_2 = \frac{a}{(1 - e^2 \cos^2 \delta_2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6\,378,388\text{km}}{(1 - e^2 \cos^2 30^\circ)^{\frac{1}{2}}} = 6\,394,529\text{km},$$

$$n = \frac{\ln(6\,383,755\text{km} \operatorname{sen} 60^\circ) - \ln(6\,394,529\text{km} \operatorname{sen} 30^\circ)}{\ln \left[ \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} \left( \frac{1+e \cos 60^\circ}{1-e \cos 60^\circ} \right)^{\frac{e}{2}} \right] - \ln \left[ \operatorname{tg} \frac{30^\circ}{2} \left( \frac{1+e \cos 30^\circ}{1-e \cos 30^\circ} \right)^{\frac{e}{2}} \right]} = 0,715671582.$$

$$C = \frac{6\,383,755\text{km} \operatorname{sen} 60^\circ}{0,715671582 \left[ \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} \left( \frac{1+e \cos 60^\circ}{1-e \cos 60^\circ} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{0,715671582}} = 11\,417,707\text{km}.$$

$$r_{\delta_1} = \frac{6\,383,755\text{km} \operatorname{sen} 60^\circ}{0,715671582} = 7\,724,904\text{km}.$$

Las coordenadas polares son:

$$r_\delta = 11\,417,707\text{km} \left[ \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} \left( \frac{1+e \cos 60^\circ}{1-e \cos 60^\circ} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{0,715671582} = 2\,687,830\text{km}.$$

$$\gamma = n45^\circ = 0,715671582 \times 45^\circ = 32^\circ 15' 19''.$$

Las coordenadas cartesianas son:

$$X = r_\delta \operatorname{sen} \gamma = 2\,687,830\text{km} \operatorname{sen} 32^\circ 15' 19'' = 1\,434,475\text{km}.$$

$$Y = r_{\delta_1} - r_\delta \cos \gamma = 7\,724,904\text{km} - 2\,687,830\text{km} \cos 32^\circ 15' 19'' = 5\,451,866\text{km}.$$

### 6.10.2 Características y propiedades

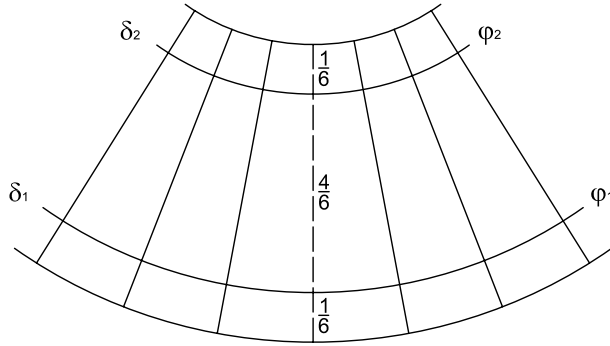
Los meridianos se proyectan como líneas rectas que concurren en un punto y forman entre sí ángulos de magnitud  $\Delta\gamma = n\Delta\lambda$ , siendo  $n$  la constante del cono y  $\Delta\lambda$  la diferencia entre las longitudes de ambos meridianos. El ángulo que forma un meridiano ( $\lambda$ ) con el meridiano central ( $\lambda_0$ ) es:  $\gamma = n(\lambda - \lambda_0)$ .

Los paralelos son arcos de circunferencia concéntricos cuyo centro es el punto de intersección de los meridianos. Los paralelos se van separando levemente entre sí en las latitudes mayores y menores de ambos paralelos bases mientras que entre los mismos se acercan levemente entre sí.

En general, para la distribución igual de las deformaciones, los paralelos bases se toman aproximadamente a un sexto de los bordes superior e inferior del meridiano central del mapa (Figura 6.31). En algunos casos, puede ser conveniente aproximar más los paralelos bases para obtener mayor exactitud en el centro del mapa, a expensas de los márgenes superior e inferior.

Los dos paralelos bases tienen longitudes correctas. Entre los paralelos bases, tanto los arcos de paralelos como los segmentos de meridianos se deforman por reducción y fuera de ellos por aumento, de acuerdo con los valores de los módulos de alteración lineal en el sentido de los paralelos

( $k$ ) y de los meridianos ( $h$ ). Esta proyección es especialmente conveniente para mapas en los que la dimensión que predomina es la de este a oeste.



**Figura 6.31:** Ubicación de los paralelos bases.

Los valores de los módulos de alteración lineal son:

$$k = \frac{2\pi nr_\delta}{2\pi N \cos \varphi} = \frac{nr_\delta}{2\pi N \sin \delta}; \quad h = \frac{dm'}{dm} = \frac{dr_\delta}{\rho d\delta}$$

En esta proyección las líneas ortodrómicas (geodésicas), si bien no son líneas rectas, son curvas que se apartan levemente de las mismas. Por ejemplo, la distancia de la ciudad de Pittsburg (Estados Unidos) a Estambul (Turquía) medida sobre la línea ortodrómica es de, aproximadamente, 5 277 millas terrestres (8 493 km). La distancia entre esos dos puntos medida en el mapa (proyección cónica secante isógona) es de 5 258 millas terrestres (8 462 km), lo que significa un error de:

$$\epsilon = \frac{8\,462 - 8\,493}{8\,493} 100 = -0,4\%.$$

Los errores de impresión y de deformación del papel exceden frecuentemente ese porcentaje de error.

Para la confección de cartas en la proyección de Lambert se adopta un falso origen para las abscisas de los puntos del meridiano central (Figura 6.32) que coincide con el eje  $Y$ . Esto se hace para no tener valores negativos para  $X$  en la región a representar. Las coordenadas cartesianas son entonces:

$$X = r_\delta \sin \gamma + C$$

$$Y = r_{\delta_1} - r_\delta \cos \gamma.$$



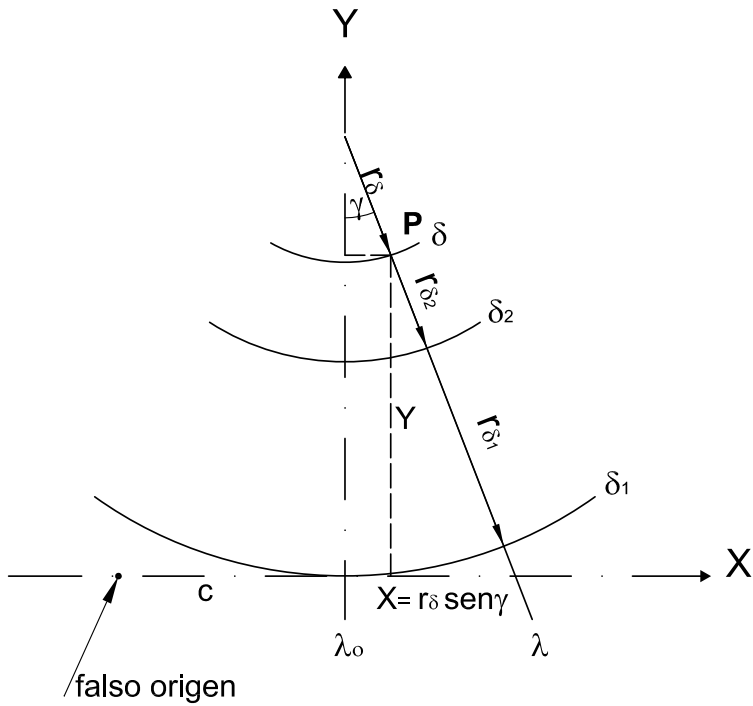


Figura 6.32: Cálculo de coordenadas cartesianas.

siendo  $r_\delta$  y  $\gamma$  las coordenadas polares. Confeccionado el canevas de la región cartografiada (líneas de trazo continuo en la Figura 6.33), se superpone una cuadrícula (líneas de trazos interrumpidos en la Figura 6.33) donde las rectas verticales son paralelas al meridiano central de la carta.

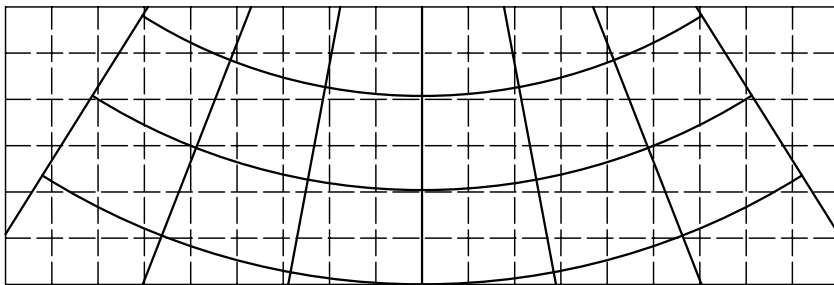


Figura 6.33: Proyección cónica conforme de Lambert en el elipsoide: Cuadrícula superpuesta al canevas.

### **6.10.3 Usos**

Se usa principalmente para canevas de regiones que se extienden poco en latitud, para que las deformaciones no sean excesivas. Por ejemplo, en EE. UU. se confeccionan en esta proyección las cartas de los Estados como el de Washington, de limitada extensión norte-sur.

## **6.11 Proyecciones pseudocónicas**

### **6.11.1 Proyección policónica (en la esfera)**

Es una proyección pseudocónica porque sus paralelos son arcos de circunferencias como en las cónicas, pero no son concéntricos. Sus meridianos son curvas trascendentes, salvo el meridiano central que es una recta de longitud correcta.

#### **Dibujo de la proyección**

**Método gráfico** (Ver Figura 6.34)

En una primera etapa se considera una serie de superficies cónicas cuyo eje común contiene al eje terrestre, siendo las superficies cónicas tangentes a la esfera terrestre a lo largo de varios paralelos de latitudes que varían de manera uniforme, incluso el Ecuador, puesto que las generatrices de un cilindro se unen en el infinito. En el caso del Ecuador, la superficie cónica se transforma en cilíndrica.

En el caso de los polos, la superficie cónica se convierte en un plano y el Polo se proyecta entonces como un punto.

En una segunda etapa se suponen cortadas las superficies cónicas a lo largo de una generatriz y se desarrollan sobre un plano. El Ecuador queda representado por una recta de longitud correcta; el meridiano central se proyecta según una recta de longitud correcta y normal al Ecuador, quedando dividido en partes iguales por los paralelos.

Los paralelos resultan representados por arcos de circunferencias, de longitudes correctas, no concéntricos, que pasan por las divisiones del meridiano ya mencionadas; sus centros se obtienen por medio de la figura auxiliar de la Figura 6.34, como el extremo del segmento de la generatriz de la superficie cónica respectiva, desde el vértice al punto de tangencia

sobre la esfera. Luego, cada paralelo se divide en arcos cuyo ángulo central es  $\Delta\gamma = \Delta\lambda \operatorname{sen} \varphi$ , siendo  $\Delta\lambda$  la diferencia de longitud entre dos meridianos sucesivos. Finalmente, uniendo cada punto de división de los paralelos se obtienen los meridianos.

### Método analítico

En la Figura 6.34 se tiene que:

- El Ecuador, representado por la recta  $AOB$  de longitud correcta, se considera coincidente con el eje  $X$ .
- El meridiano central, representado por la recta  $PN O PS$ , de longitud correcta, coincide con el eje  $Y$ . Sobre el meridiano central, para un paralelo de latitud  $\varphi$ , se tiene  $OH = R\varphi$ , donde  $\varphi$  está expresado en radianes.
- Cualquier paralelo está representado por un arco de radio  $CP = CH = r_\varphi = R \operatorname{cotg} \varphi$  y está dividido en partes iguales por los meridianos. Cada arco tiene una amplitud  $\Delta\gamma = \Delta\lambda \operatorname{sen} \varphi$ .
- Los meridianos, salvo el central, son curvas trascendentes que se trazan uniendo punto por punto las divisiones de los paralelos. Un punto  $P$  de latitud  $\varphi$  y de longitud  $\lambda$  estará determinado por la intersección del paralelo definido anteriormente y un radio  $r_\varphi$  del mismo que forma un ángulo  $\gamma$  con el central, siendo:

$$\gamma \text{ (en radianes)} = \frac{HP}{r_\varphi}.$$

Sobre los paralelos las longitudes son correctas, por lo tanto:

$$HP = \Delta\lambda R \cos \varphi$$

siendo  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ , medido en radianes.

$$\gamma = \frac{\Delta\lambda R \cos \varphi}{R \operatorname{cotg} \varphi} = \frac{\Delta\lambda \cos \varphi}{\operatorname{cotg} \varphi} = \Delta\lambda \operatorname{sen} \varphi$$

Por lo tanto  $X = r_\varphi \operatorname{sen} \gamma$ .

$$\text{Como } r_\varphi = \frac{\Delta\lambda R \cos \varphi}{R \operatorname{sen} \varphi} = R \operatorname{cotg} \varphi,$$

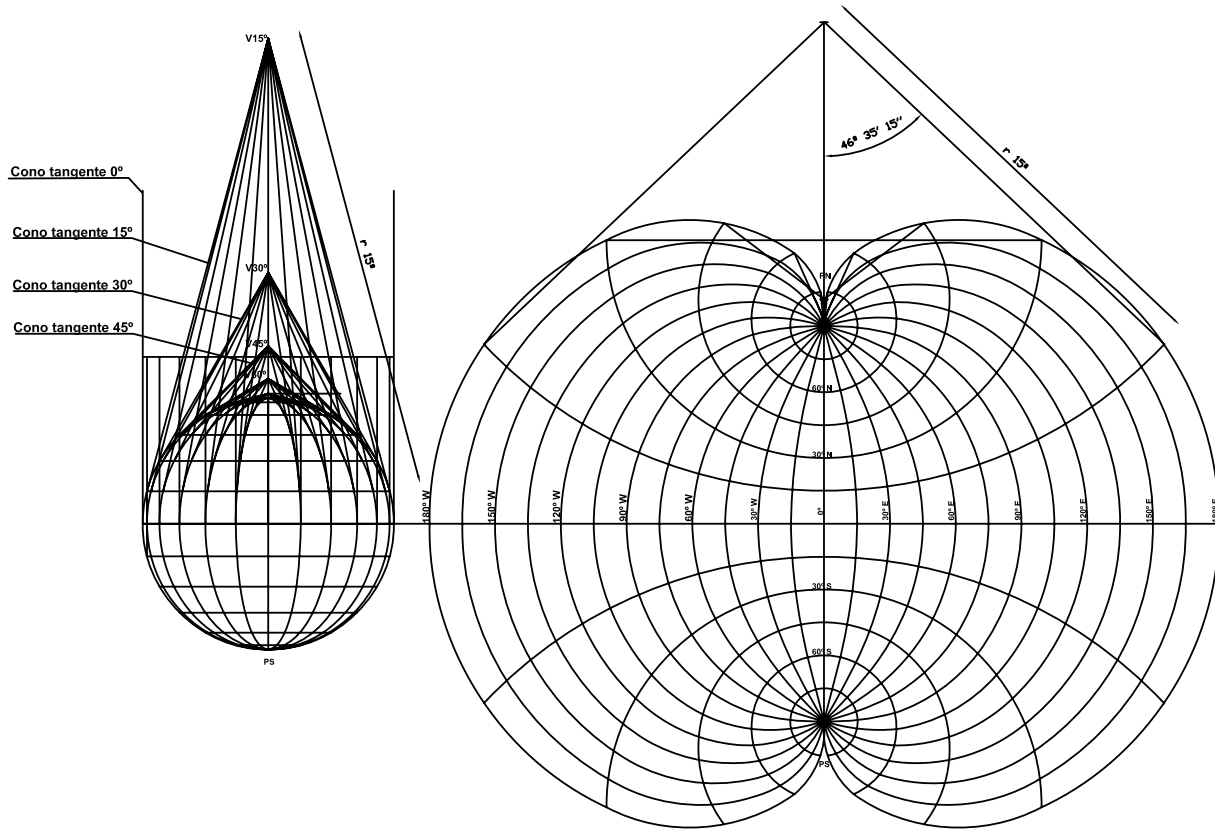


Figura 6.34: Proyección policónica.

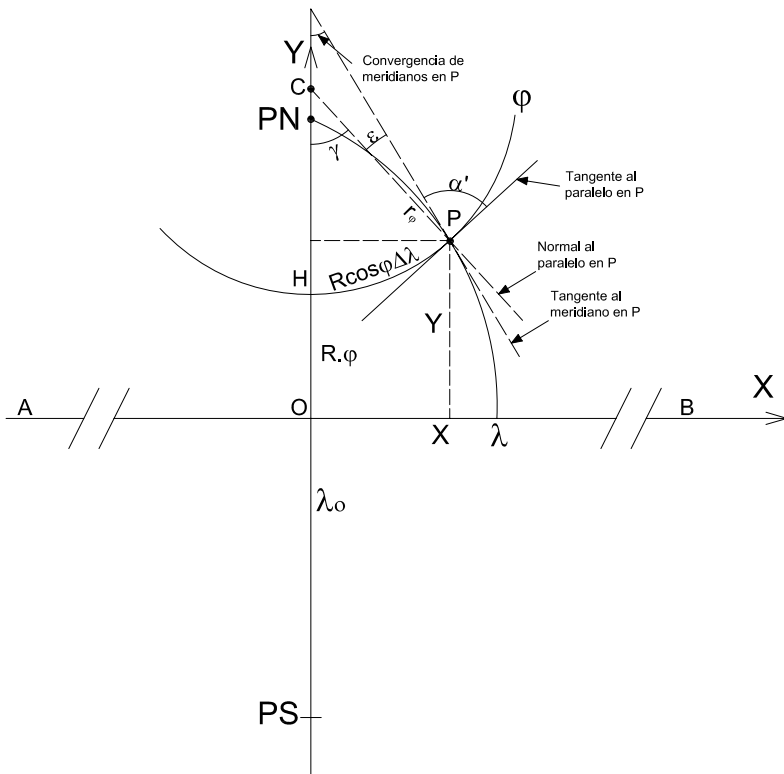


Figura 6.35: Coordenadas cartesianas.

$$\begin{aligned}
 X &= R \cotg \varphi \operatorname{sen} \gamma = R \cotg \varphi \operatorname{sen}[\Delta \lambda \operatorname{sen} \varphi] \\
 Y &= R \varphi + r_{\varphi} - r_{\varphi} \cos \gamma = R \varphi + R \cotg \varphi - R \cotg \varphi \cos \gamma \\
 Y &= R(\varphi + \cotg \varphi - \cotg \varphi \cos \gamma) = R[\varphi + \cotg \varphi(1 - \cos \gamma)] \\
 Y &= R\{\varphi + \cotg \varphi[1 - \cos(\Delta \lambda \operatorname{sen} \varphi)]\}.
 \end{aligned}$$

### Ejemplos:

En un planisferio (Figura 6.36), confeccionado en la proyección policónica, con meridiano central  $\lambda_0 = 0^\circ$ , se desean conocer las coordenadas cartesianas del punto ( $\varphi = 45^\circ N, \lambda = 60^\circ W$ ).

$$\gamma = -60^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = -42^\circ 25' 35''$$

$$X = 6\,370 \operatorname{km} \cotg 45^\circ \operatorname{sen}(-42^\circ 25' 35'') = -4\,297,420 \operatorname{km}$$

$$\begin{aligned}
 Y &= R \left[ \varphi \frac{\pi}{180^\circ} + \cotg \varphi (1 - \cos \gamma) \right] \\
 &= 6\,370 \operatorname{km} \left[ 45^\circ \frac{\pi}{180^\circ} + \cotg 45^\circ (1 - \cos(-42^\circ 25' 35'')) \right] = 6\,671,00 \operatorname{km}
 \end{aligned}$$

**Ejemplo** (Figura 6.37)

En el mapa de parte del continente americano en la proyección policónica, cuyo meridiano central es  $\lambda_0 = 100^\circ W$ , se desean conocer las coordenadas del punto ( $\varphi = 40^\circ N, \lambda = 70^\circ W$ ).

$$\gamma = \Delta\lambda \operatorname{sen} \varphi = (-70^\circ + 100^\circ) \operatorname{sen} 40^\circ = 19^\circ 17' 01''$$

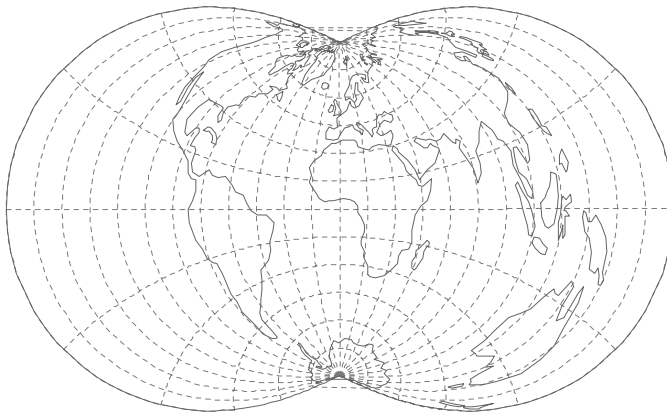
$$X = R \cotg \varphi \operatorname{sen} \gamma = 6\,370\,km \cotg 40^\circ \operatorname{sen} 19^\circ 17' 01'' = 2\,507\,km$$

$$Y = R \left[ \varphi \frac{\pi}{180^\circ} + \cotg \varphi (1 - \cos \gamma) \right] = \\ = 6\,370\,km \left[ 40^\circ \frac{\pi}{180^\circ} + \cotg 40^\circ (1 - \cos 19^\circ 17' 01'') \right] = 4\,873\,km$$

**Características y propiedades**(Figura 6.36, 6.34 y 6.37)

El Ecuador se proyecta según una recta de longitud correcta, los paralelos según arcos de circunferencias no concéntricos que cortan al meridiano central en partes iguales y, como todos son paralelos bases, sus longitudes son correctas ( $k = 1$ ). Además, son cortados en partes iguales por los meridianos.

El meridiano central es el único que se proyecta según una recta de longitud correcta, perpendicular al Ecuador en su punto medio. Los demás meridianos se proyectan según curvas trascendentes que presentan su concavidad hacia el meridiano central, cortando a cada paralelo en partes iguales; los meridianos son de longitudes incorrectas, mayores que las reales.



**Figura 6.36:** Planisferio en proyección policónica  $\lambda_0 = 0^\circ$ .

La deformación en cada punto de los meridianos se calcula con el módulo de alteración lineal  $h$ , aumentando las deformaciones al alejarse del meridiano central. Pero recién 900km al este o al oeste de dicho meridiano las deformaciones alcanzan el 1%. El módulo de alteración lineal es igual a 1 en el meridiano central. Se demuestra que  $h = (1 + 2 \cotg^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2}) \sec \varepsilon$ , siendo  $\varepsilon$  el complemento a  $90^\circ$  del ángulo  $\alpha'$  de intersección de paralelos y meridianos. También se demuestra que  $|\operatorname{tg} \varepsilon| = \frac{\gamma - \operatorname{sen} \gamma}{\sec^2 \varphi - \cos \gamma}$ .

Los valores de los módulos de alteración lineal máximo ( $N_1$ ) y mínimo ( $N_2$ ) (semiejes de la Elipse de Tissot) se hallan con las expresiones:

$$N_1 \cong 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \cos^2 \varphi, N_2 = 1$$

Como en la proyección los meridianos cortan a los paralelos en ángulos distintos de  $90^\circ$ , no es necesario calcular los módulos de alteración lineal  $h$  y  $k$  para determinar que no es isógona.

Se deduce gráficamente que esta proyección no es equivalente, pues al encerrar un área entre dos arcos de paralelos que tienen longitudes correctas y dos arcos de meridianos que tienen longitudes incorrectas mayores que las reales, aplicando la fórmula de un trapecio circular, se obtendrá un valor de área mayor que el real.

La proyección no es conforme, ni equivalente ni equidistante pero proporciona, sin embargo, una buena representación de un huso entero de longitud limitada siempre a algunas decenas de grados, según la precisión que se desee tener (carta topográfica o carta general). Es un muy buen compromiso de deformaciones (afiláctica).

El módulo de alteración areal es:

$$\mu = hk \operatorname{sen} \alpha' = hk \cos \varepsilon$$

### Ejemplos:

Para los datos del ejemplo anterior, se calculan las deformaciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{\gamma - \operatorname{sen} \gamma}{\sec^2 \varphi - \cos \gamma} = \frac{\Delta \lambda \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen}(\Delta \lambda \operatorname{sen} \varphi)}{\sec^2 \varphi - \cos(\Delta \lambda \operatorname{sen} \varphi)} = \\ &= \frac{19^\circ 17' 1,06'' \frac{\pi}{180^\circ} - \operatorname{sen} 19^\circ 17' 1,06''}{\sec^2 40^\circ - \cos 19^\circ 17' 1,06''} = 0,00839897765. \end{aligned}$$



**Figura 6.37:** Mapa de parte del Continente Americano en proyección policónica.

De aquí se obtiene que:  $\varepsilon = 0^{\circ}28'34''$ . Entonces:

$$h = \left( 1 + 2 \cot^2 40^{\circ} \sin^2 \frac{19^{\circ}17'1,06''}{2} \right) \sec 0^{\circ}28'34'' = 1,079721391.$$

$$N_1 \cong 1 + \frac{1}{2} \left( 30^{\circ} \frac{\pi}{180^{\circ}} \right)^2 \cos^2 40^{\circ} = 1,88044; \quad N_2 = 1.$$

Además:  $\mu = 1,079721391 \cos 0^{\circ}28'34'' = 1,079684119$ .

### Usos

Para mapas de países que se extienden no más allá de los 700 km al este y al oeste del meridiano central, para que la deformación no sea muy grande.

Se usa también para cartas topográficas, mediante el procedimiento de considerar “fajas” comprendidas entre meridianos, análogamente a la proyección de Gauss-Krüger. Cada faja es considerada con referencia a un meridiano central (en el elipsoide).



El Instituto Geográfico Militar, para sus cartas topográficas, utilizaba la proyección policónica, reemplazada posteriormente por la de Gauss-Krüger (1927).

Todas las cartas oficiales para uso civil de los Estados Unidos, elaboradas por el Coast and Geodetic Survey, sobre todo en las escalas 1 : 62 500, 1 : 125 000 y 1 : 250 000, están en esta proyección. El territorio está dividido en 7 husos de  $9^\circ$  de amplitud con  $1^\circ$  de superposición entre uno y otro. Brasil la adoptó para las cartas en escalas 1 : 300 000, 1 : 500 000 y otras del Servicio Geográfico Militar. Argentina la empleó para las cartas anteriores a 1927 (en escalas 1 : 25 000, 1 : 50 000, 1 : 100 000, 1 : 500 000). Numerosas cartas de colonias británicas están también en proyección policónica y aparece en cartas aeronáuticas de Canadá y EE.UU.

En algunos atlas se encuentran mapas en esta proyección.

### 6.11.2 Proyección policónica (en el elipsoide)

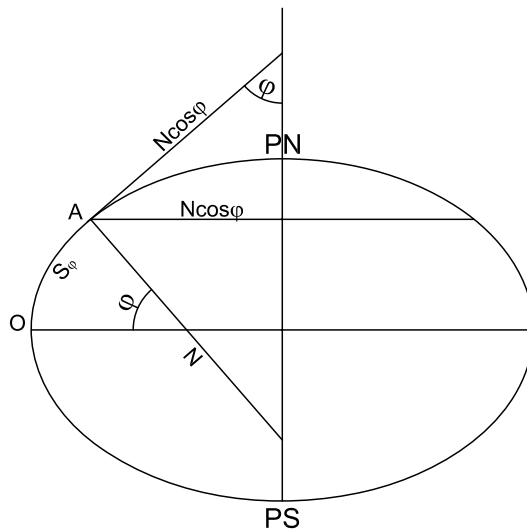


Figura 6.38: En el elipsoide.

#### Conceptos generales

La ventaja principal de esta proyección es su fácil construcción. El meridiano central es una recta de longitud correcta (arco de meridiano del elipsoide).

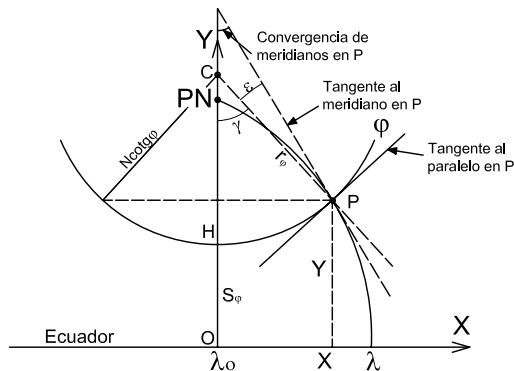


Figura 6.39: En la proyección.

Los paralelos se representan como arcos de circunferencias no concéntricas de radio  $r_\varphi = N \cotg \varphi$ , que cortan al meridiano central en partes iguales<sup>1</sup>. El centro  $C$  de cada paralelo de latitud  $\varphi$  se encuentra sobre la prolongación del meridiano central a una distancia  $Y_C$  del Ecuador (Figura 6.39):

$$Y_C = S_\varphi + N \cotg \varphi$$

siendo  $N$  la gran normal para la latitud  $\varphi$  del paralelo y  $S_\varphi = OH$  la longitud del arco de meridiano desde el Ecuador hasta la latitud  $\varphi$  (Figuras 6.38 y 6.39). (Ver: Longitud de un arco de meridiano a partir del Ecuador en el elipsoide. Capítulo 1)

Un punto  $P$  de latitud  $\varphi$  y longitud  $\lambda$  está determinado por la intersección del paralelo y un radio  $r_\varphi$  del mismo que forma un ángulo con el central, siendo:

$$\gamma \text{ (en radianes)} = \frac{HP}{r_\varphi}$$

$HP$  representa la longitud del arco  $HP$ .

Sobre los paralelos las longitudes son correctas, por lo tanto:

$$HP = \Delta \lambda N \cos \varphi$$

$$\gamma(\text{rad}) = \frac{\Delta \lambda N \cos \varphi}{N \cotg \varphi} = \Delta \lambda \sen \varphi$$

<sup>1</sup> Estrictamente hablando, no son partes iguales, pues en un meridiano en distintas latitudes varía la dimensión lineal de los arcos.

Las coordenadas cartesianas son:

$$X = r_{\varphi} \operatorname{sen} \gamma = N \cotg \varphi \operatorname{sen} \gamma \quad (6.35)$$

$$Y = S_{\varphi} + N \cotg \varphi - N \cotg \varphi \cos \gamma = S_{\varphi} + N \cotg \varphi (1 - \cos \gamma), \quad (6.36)$$

siendo  $S_{\varphi} = a(1 - e^2) \int \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$ .

Como:

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} \\ \cos \gamma &= \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} \\ 1 - \cos \gamma &= 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

La fórmula 6.36 se puede expresar también:

$$Y = S_{\varphi} + 2N \cotg \varphi \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} \quad (6.37)$$

### Nota

Si en el mapa no aparece el Ecuador, conviene hacer un traslado del eje paralelo al Ecuador de manera tal que pase por el paralelo de latitud menor ( $\varphi_0$ ) (en valor absoluto). (Ver Figura 6.40.)

Entonces:

$$\begin{aligned} X &= N \cotg \varphi \operatorname{sen} \gamma \\ Y &= \Delta S + 2N \cotg \varphi \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

siendo:  $\Delta S = S_{\varphi} - S_{\varphi_0}$

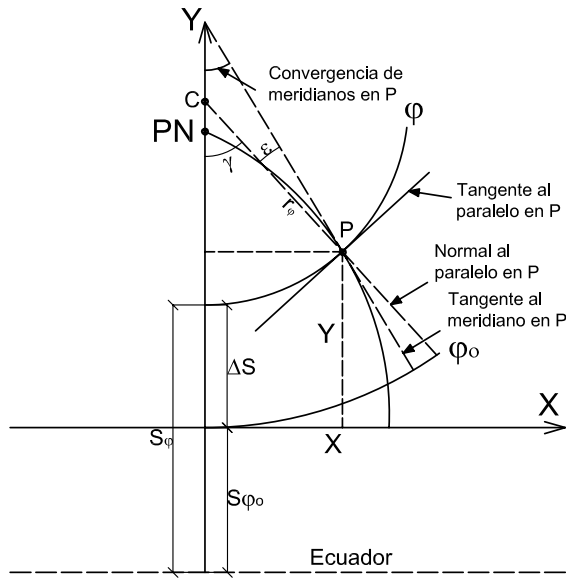
$S_{\varphi}$ : distancia del Ecuador al paralelo de latitud  $\varphi$  sobre el meridiano central.

$S_{\varphi_0}$ : distancia del Ecuador al paralelo de latitud  $\varphi_0$  sobre el meridiano central.

El aspecto de un canevas en proyección policónica es el que muestra la Figura 6.34.

### Módulos de alteración lineal

Dado que no hay deformación en el sentido de los paralelos, en cada punto  $k = 1$ . La deformación en un punto en el sentido del meridiano se



**Figura 6.40:** Coordenadas cartesianas cuando el eje de abscisas es tangente al paralelo de latitud  $\varphi_0$ .

calcula a través de la expresión:

$$h = \frac{\left[ 1 - e^2 + 2(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \gamma}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \right]}{(1 - e^2) \cos D}$$

siendo  $D = \operatorname{arctg} \frac{\gamma - \operatorname{sen} \gamma}{\frac{\operatorname{sen}^2 \varphi - \cos \gamma - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$  y  $\Delta \gamma = \Delta \lambda \operatorname{sen} \varphi$

### 6.11.3 Proyección de Bonne

Es una proyección pseudocónica porque sus paralelos son arcos de circunferencias concéntricas como en las proyecciones cónicas, pero sus meridianos son curvas trascendentes, salvo el meridiano central que es una recta de longitud correcta. Además, tiene un solo paralelo base (Figura 6.41).

#### Dibujo

(Figura 6.42)

El cartógrafo elige el paralelo base de latitud  $\varphi_0$  y, como la longitud del meridiano central es correcta, puede determinarse el radio de la proyección del paralelo base.

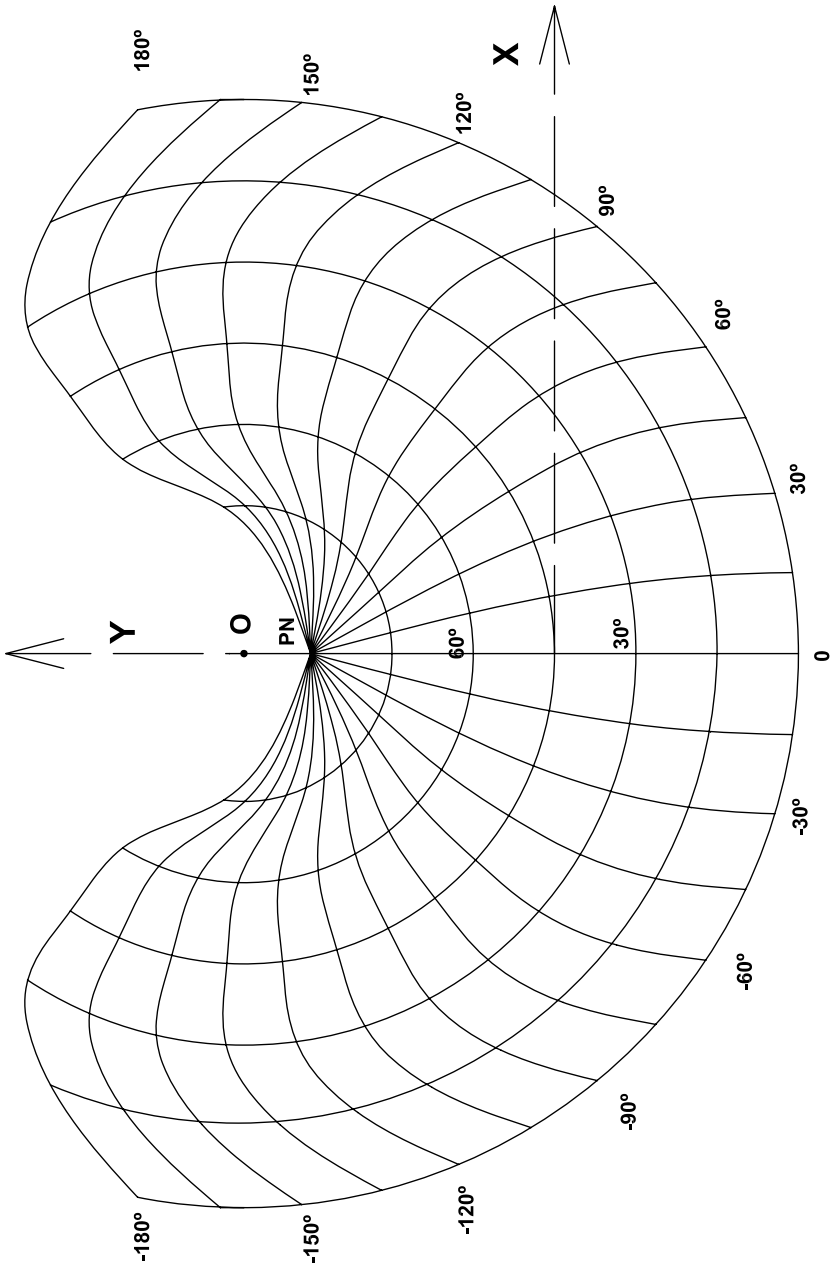


Figura 6.41: Proyección de Bonne. Paralelo base  $\varphi_0 = 45^\circ N$ .

El radio del paralelo base es:

$$r_{\varphi_0} = R \cotg \varphi_0$$

y el radio del Ecuador:

$$r_{0^\circ} = r_{\varphi_0} + \varphi_0 \frac{\pi}{180^\circ} R$$

El correspondiente a los demás paralelos se halla de la siguiente manera:

$$r_\varphi = r_{\varphi_0} + (\varphi_0 - \varphi) \frac{\pi R}{180^\circ} = R \left[ \cotg \varphi_0 + (\varphi_0 - \varphi) \frac{\pi}{180^\circ} \right] = R \left[ \cotg \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0) \frac{\pi}{180^\circ} \right]$$

cuando las latitudes están expresadas en grados sexagesimales.

Para el cálculo del ángulo de amplitud ( $\alpha$ ) se tiene en cuenta que la longitud de un arco es igual al producto de la longitud del radio por la amplitud del ángulo, expresada en radianes.

$$2\pi R \cos \varphi_0 = r_{\varphi_0} \alpha$$

$$2\pi R \cos \varphi_0 = R \cotg \varphi_0 \alpha, \text{ entonces: } \alpha = \frac{2\pi \cos \varphi_0}{\cotg \varphi_0}$$

Pero  $\cotg \varphi_0 = \frac{\cos \varphi_0}{\sin \varphi_0}$ , por lo que, para el paralelo base,  $\alpha = 2\pi \sin \varphi_0$ , cuando  $\alpha$  se expresa en radianes y  $\alpha = 360^\circ \sin \varphi_0$ , si  $\alpha$  se expresa en grados.

Recuérdese que  $\alpha$  es el ángulo entre los meridianos extremos del paralelo base. Para un  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  le corresponde en la proyección un ángulo  $\Delta\gamma = \Delta\lambda \sin \varphi_0$ .

Para dibujar los meridianos hay que tener en cuenta la diferencia de longitud geográfica entre los mismos, lo que permite obtener los puntos de intersección con los paralelos.

Sobre el Ecuador

$$a_{0^\circ} = \Delta\lambda \frac{\pi R}{180^\circ} \quad (6.38)$$

Sobre un paralelo de latitud  $\varphi$

$$a_\varphi = a_{0^\circ} \cos \varphi \quad (6.39)$$

donde  $\varphi$  es la latitud correspondiente a  $a_\varphi$ .

$$\gamma^\circ = \frac{a_\varphi}{r_\varphi} \frac{180^\circ}{\pi} \quad (6.40)$$

o bien, expresándolo en radianes:

$$\gamma(rad) = \frac{a_\varphi}{r_\varphi} \quad (6.41)$$

donde, en 6.38,  $a_{0^\circ}$  es un arco de Ecuador y  $\Delta\lambda$  es la diferencia de longitud entre dos meridianos; en 6.39  $a_\varphi$  es un arco de paralelo y en 6.40,  $\gamma$  es el ángulo de cada división de cada paralelo.

### Ejemplo

Para  $\varphi_0 = 45^\circ$  y  $\Delta\lambda = 15^\circ$ , se calculan los elementos necesarios para el dibujo de la proyección.

$\varphi$	$r_\varphi$ (km)	$a_\varphi$	$\gamma = n\lambda$
$0^\circ$	11 373	1668	$8^\circ 24'11''$
$15^\circ$	9 705	1611	$9^\circ 30'39''$
$30^\circ$	8 038	1444	$10^\circ 17'35''$
$45^\circ$	6 370	1179	$10^\circ 36'17''$
$60^\circ$	4 702	834	$10^\circ 09'45''$
$75^\circ$	3 035	432	$8^\circ 09'20''$
$90^\circ$	1 367	0	$0^\circ 00'00''$

Tabla 6.3

### Coordenadas cartesianas

Las coordenadas polares deducidas anteriormente ( $r_\varphi$  y  $\Delta\gamma$ ) permiten dibujar la proyección, pero puede ocurrir que esto sea incómodo cuando el centro común a todos los paralelos ( $O$ ) esté muy alejado. Entonces conviene utilizar las coordenadas cartesianas de cualquier punto  $A(\varphi, \lambda)$  con respecto a un sistema de ejes. En dicho sistema  $X$  coincide con la tangente al paralelo base en su intersección con el meridiano central, e  $Y$  coincide con el meridiano central.

$$\begin{cases} X = r_\varphi \operatorname{sen} \Delta\gamma \\ Y = r_{\varphi_0} - r_\varphi \operatorname{cos} \Delta\gamma \\ \begin{cases} X = [r_{\varphi_0} + R(\varphi_0 - \varphi)] \operatorname{sen} \Delta\gamma \\ Y = r_{\varphi_0} - [r_{\varphi_0} + R(\varphi_0 - \varphi)] \operatorname{cos} \Delta\gamma, \text{ siendo } \Delta\gamma = \frac{R \operatorname{cos} \varphi \Delta\lambda}{r_\varphi} \end{cases} \end{cases}$$

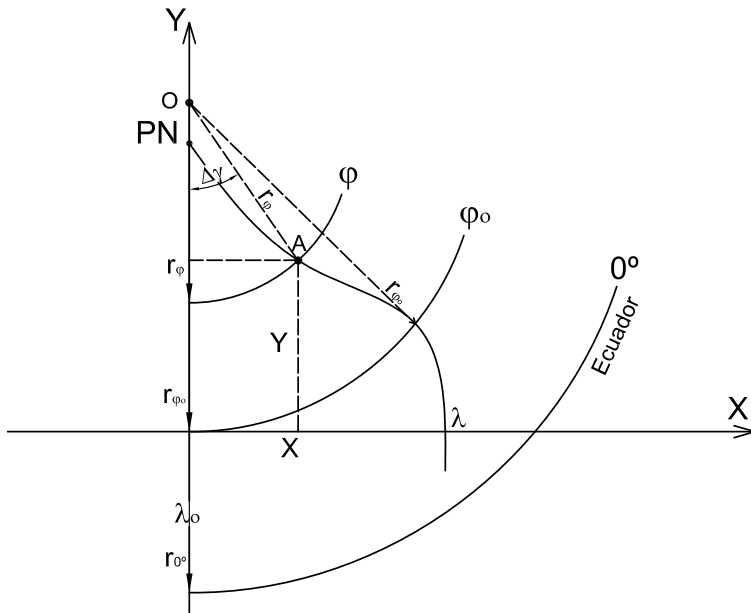


Figura 6.42: Radios de paralelos y coordenadas cartesianas.

**Ejemplos:**

Sea la proyección de Bonne con paralelo base  $\varphi_0 = 45^\circ$ , y sea el punto

$(\varphi = 75^\circ, \lambda = 120^\circ)$ .

$$\Delta\gamma = \frac{R \cos \varphi \Delta\lambda}{r_\varphi} = \frac{6\,370\text{km} \cos 75^\circ 120^\circ}{3\,034,676\text{km}} = 65^\circ 11' 37''$$

$$r_{\varphi_0} = 6\,370\text{km} \cotg 45^\circ = 6\,370\text{km}$$

$$r_\varphi = 6\,370\text{km} + 6\,370\text{km}(45^\circ - 75^\circ) \frac{\pi}{180^\circ} = 3\,034,676\text{km}$$

$$X = 3\,034,676\text{km} \sen 65^\circ 11' 37'' = 2\,554,669\text{km}$$

$$Y = 6\,370\text{km} - 3\,034,676\text{km} \cos 65^\circ 11' 37'' = 5\,096,792\text{km}$$

**Características y propiedades**(Figura 6.41)

El Ecuador y los paralelos se proyectan según arcos de circunferencias concéntricas equiespaciados y de longitudes correctas ( $k = 1$ ).

El centro común a todos los paralelos ( $O$ ) no coincide con el Polo sino con el centro del paralelo base. Cada uno de los paralelos es intersectado o dividido por los meridianos en partes iguales.

El meridiano central es el único que se proyecta según una recta de longitud correcta; los demás meridianos se proyectan según curvas tras-



cedentes de longitudes incorrectas mayores que las reales, presentando la concavidad hacia el meridiano central y aumentando la deformación al alejarse de dicho meridiano.

La deformación en cada punto de un meridiano está dada por el módulo de alteración lineal  $h$ :

$$h = \sqrt{1 + (\Delta\lambda \operatorname{sen} \varphi - \Delta\gamma)^2} \text{ siendo } \Delta\gamma = \frac{\Delta\lambda \cos \varphi R}{r_\varphi}$$

El ángulo que forma cada paralelo con cada meridiano ( $\alpha'$ ) se puede determinar a partir de la expresión  $hk \operatorname{sen} \alpha' = N_1 N_2 = 1$ , verificándose esta expresión por ser equivalente la proyección. Como además  $k = 1$ ,  $\operatorname{sen} \alpha' = \frac{1}{h}$  y, por lo tanto,  $\alpha' = \operatorname{arcsen} \frac{1}{h}$ .

**Ejemplos:**

Para  $\Delta\lambda = 120^\circ$ ,  $\varphi_0 = 45^\circ$  y  $\varphi = 75^\circ$ ,  $\Delta\gamma = \frac{120^\circ \cos 75^\circ 6\,370\text{km}}{3\,034,676\text{km}} \frac{\pi}{180^\circ} = 1,13784$ .

Además,  $\Delta\lambda \operatorname{sen} \varphi = 120^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \operatorname{sen} 75^\circ = 2,02303$ .

Entonces:  $h = \sqrt{1 + (2,02303 - 1,13784)^2} = 1,3355$

Como  $hk \operatorname{sen} \alpha' = 1$ ,  $\operatorname{sen} \alpha' = \frac{1}{kh} = \frac{1}{h} = \frac{1}{1,3355}$ . Por lo tanto, el ángulo de intersección del paralelo  $\varphi = 75^\circ$  con el meridiano  $\lambda = 120^\circ$  es  $\alpha' = 48^\circ 29' 06''$ .

Por otra parte,

$$N_1 = \frac{\sqrt{h^2 + 3} + \sqrt{h^2 - 1}}{2} = 1,53616 \text{ y}$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{h^2 + 3} - \sqrt{h^2 - 1}}{2} = 0,65097.$$

*Verificación:* Debe cumplirse que  $N_1^2 + N_2^2 = h^2 + k^2$ . En efecto:  $N_1^2 + N_2^2 = 2,3597568 + 0,42376696 = 2,78352$  y  $h^2 + k^2 = 2,7835$

Como los meridianos (salvo el meridiano central) cortan a los paralelos formando ángulos distintos de  $90^\circ$ , es posible afirmar que la proyección no es isógona, sin necesidad de verificar las expresiones de  $h$  y  $k$ .

Gráficamente podemos verificar que es equivalente, teniendo en cuenta que los paralelos son de longitudes correctas y que la distancia entre los mismos también es correcta.

## Usos

Como toda proyección equivalente, se utiliza para mapas estadísticos sin ninguna limitación de superficie (todo un hemisferio), y para mapas políticos siempre que se represente a un país o un continente y no a toda la superficie terrestre, por la magnitud de las deformaciones.

Esta proyección conviene para mapas de regiones comprendidas en una cruz orientada según los puntos cardinales, para que las deformaciones no sean muy intensas.

## Observación

Se puede confundir fácilmente con la *proyección acimutal equidistante oblicua*; para diferenciarlas se debe tener en cuenta que en la proyección de Bonne los paralelos son equiespaciados, pues son circunferencias concéntricas. En la proyección equidistante oblicua los paralelos son curvas trascendentes no paralelas entre sí.

Para identificar en forma definitiva la proyección, se hallan las coordenadas cartesianas ( $X; Y$ ) de un punto cualquiera de la proyección de coordenadas geográficas ( $\varphi, \Delta\lambda$ ).

Si se disponen los ejes coordenados de manera tal que el eje  $X$  sea tangente a la proyección del paralelo de latitud  $\varphi_0$  y el eje  $Y$  coincida con el meridiano central, se tendrá:

$$\begin{cases} X = r_\varphi \operatorname{sen} \Delta\gamma \\ Y = r_\varphi - r_\varphi \cos \Delta\gamma \end{cases}$$

## Ejemplos:

En una proyección de Bonne,  $X$  coincide con la proyección del paralelo  $\varphi = 45^\circ$  y  $\lambda_0 = 0^\circ$ . Considérese el punto:  $\varphi = 45^\circ; \lambda = 60^\circ W$ .

$$\Delta\gamma = \Delta\lambda \operatorname{sen} \varphi = 60^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = 42^\circ 25' 35''$$

$$X = R \cotg 45^\circ \operatorname{sen} 42^\circ 25' 35'' = 4\,297,4733 \text{ km.}$$

$$Y = R \cotg 45^\circ (1 - \cos 42^\circ 25' 35'') = 1\,668,0195 \text{ km}$$

## Otro ejemplo

Si  $\lambda_0 = 76^\circ$  y el punto es  $\varphi = 20^\circ; \lambda = 96^\circ W$ .

$$\Delta\gamma = \Delta\lambda \operatorname{sen} \varphi = 20^\circ \operatorname{sen} 20^\circ = 6^\circ 50' 25,45''$$

$$X = R \cotg 20^\circ \operatorname{sen} 6^\circ 50' 25,45'' = 2\,201,0413 \text{ km}$$

$$Y = R \cotg 20^\circ (1 - \cos 6^\circ 50' 25,45'') = 124,58 \text{ km}$$

**Transformación inversa (de coordenadas cartesianas a geográficas)**

Supóngase que, midiendo en el mapa, se han obtenido valores  $x$  e  $y$  de la ubicación de un punto en un sistema de ejes cartesianos. Para obtener las coordenadas cartesianas del punto es necesario calcular  $X = xM$  e  $Y = yM$ , donde  $M$  es el módulo de la escala. Se ha visto antes que:

$$\begin{aligned} X &= r_\varphi \operatorname{sen} \frac{R \cos \varphi \Delta \lambda}{r_\varphi} \\ Y &= R \cotg \varphi_0 - r_\varphi \cos \frac{R \cos \varphi \Delta \lambda}{r_\varphi} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{X}{r_\varphi} = \operatorname{sen} \frac{R \cos \varphi \Delta \lambda}{r_\varphi} \quad (6.42)$$

$$\frac{R \cotg \varphi_0 - Y}{r_\varphi} = \cos \frac{R \cos \varphi \Delta \lambda}{r_\varphi} \quad (6.43)$$

Elevando al cuadrado ambas expresiones y sumándolas, resulta:

$$\begin{aligned} \left(\frac{X}{r_\varphi}\right)^2 + \left(\frac{R \cotg \varphi_0 - Y}{r_\varphi}\right)^2 &= 1 \\ X^2 + (R \cotg \varphi_0 - Y)^2 &= r_\varphi^2 \\ r_\varphi &= \sqrt{X^2 + (R \cotg \varphi_0 - Y)^2} \end{aligned} \quad (6.44)$$

De la expresión (6.42) se tiene que  $\frac{R \cotg \varphi \Delta \lambda}{r_\varphi} = \operatorname{arcsen} \frac{X}{r_\varphi}$  y  $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{r_\varphi}{R \cotg \varphi} \operatorname{arcsen} \frac{X}{r_\varphi}$ . Por lo tanto:

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{r_\varphi}{R \cotg \varphi} \operatorname{arcsen} \frac{X}{r_\varphi}$$

De la expresión (6.44):  $R \cotg \varphi_0 - R(\varphi - \varphi_0) = \sqrt{X^2 + (R \cotg \varphi_0 - Y)^2}$

$$R[\cotg \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0)] = \sqrt{X^2 + (R \cotg \varphi_0 - Y)^2}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \cotg \varphi_0 - \frac{1}{R} \sqrt{X^2 + (R \cotg \varphi_0 - Y)^2}$$

### Ejemplos:

En un mapa en la proyección de Bonne, en escala 1: 127 000 000, se tiene un punto de coordenadas  $x = 5\text{cm}$  e  $y = 2,5\text{cm}$  con respecto a un par de ejes cartesianos que pasan por el punto ( $\varphi_0 = 30^\circ, \lambda_0 = 0^\circ$ ). Se desean conocer las coordenadas geográficas del punto.

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{r_\varphi}{R \cos \varphi} \arcsen \frac{X}{r_\varphi} \text{ y}$$
$$\varphi = \varphi_0 + \cotg \varphi_0 - \frac{1}{R} \sqrt{X^2 + (R \cotg \varphi_0 - Y)^2}$$

$$X = xM = -5\text{cm} \times 127\,000\,000 = -6\,350\text{km}$$

$$Y = yM = 2,5\text{cm} \times 127\,000\,000 = 3\,175\text{km}$$

$$r_\varphi = \sqrt{X^2 + (R \cotg \varphi_0 - Y)^2} =$$
$$= \sqrt{(-6\,350\text{km})^2 + (6\,370\text{km} \cotg 30^\circ - 3\,175\text{km})^2} = 10\,103,12996\text{km}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \cotg \varphi_0 - \frac{1}{R} \sqrt{X^2 + (R \cotg \varphi_0 - Y)^2}$$
$$= 30^\circ \frac{\pi}{180^\circ} + \cotg 30^\circ - \frac{1}{6\,370\text{km}} \sqrt{(-6\,350\text{km})^2 + (6\,370\text{km} \cotg 30^\circ - 3\,175\text{km})^2} =$$
$$= 0,146002146 \text{ radianes.}$$

O bien:  $\varphi = 38^\circ 21' 55,11''$ .

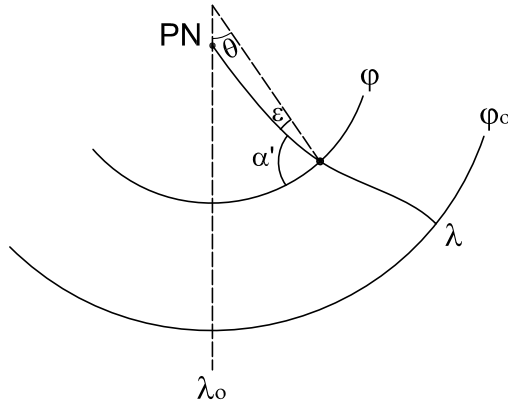
$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\varphi}{R \cos \varphi} \arcsen \frac{X}{r_\varphi} =$$
$$= 0^\circ + \frac{10\,103,12996\text{km}}{6\,370\text{km} \cos 38^\circ 21' 55,11''} \arcsen \frac{-6\,350\text{km}}{10\,103,12996\text{km}} = -78^\circ 46' 16,48''.$$

### Ejercicio

En un mapa en escala 1: 126 600 000 en proyección de Bonne, con meridiano central de  $\lambda_0 = 0^\circ$  y paralelo base  $\varphi_0 = 30^\circ N$ , hallar:

- Las coordenadas polares y cartesianas del punto ( $\varphi = 45^\circ N, \lambda = 150^\circ E$ ).
- Los valores de los módulos de alteración lineal  $h$  y  $k$  en ese punto.
- La medida del ángulo ( $\alpha'$ ) que forman al cortarse el paralelo y el meridiano en ese punto.

- d) Los valores de los semiejes de la Elipse de Tissot en el punto mencionado en (a).
- e) Dibujar, en escala, la Elipse de Tissot en ese punto.



**Figura 6.43:** Proyección de Bonne. Transformación inversa de coordenadas.

- a) Las coordenadas polares son:

$$r_{\varphi} = R[\cotg \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0)] = 6\,370\,km \left[ \cotg 30^{\circ} - (45^{\circ} - 30^{\circ}) \frac{\pi}{180^{\circ}} \right] =$$

$$9\,365,502\,km \text{ (en escala } 7,4\,cm \text{)}.$$

$$\theta = \frac{\Delta \lambda \cos \varphi R}{r_{\varphi}} = \frac{\Delta \lambda \cos \varphi R}{R[\cotg \varphi_0 - (\varphi - \varphi_0)]}$$

$$= \frac{150^{\circ} \cos 45^{\circ}}{\cotg 30^{\circ} - (45^{\circ} - 30^{\circ}) \frac{\pi}{180^{\circ}}} = 72^{\circ}08'29''.$$

$$X = r_{\varphi} \sin \theta = 9\,365,502\,km \sin 72^{\circ}08'29'' = 8\,914,236\,km \text{ (en escala } 7,04\,cm \text{)}.$$

$$Y = r_{\varphi_0} - r_{\varphi} \cos \theta = 6\,370\,km \cotg 30^{\circ} - 9\,365,502\,km \cos 72^{\circ}08'29'' = 8\,161,054\,km \text{ (en escala } 6,45\,cm \text{)}.$$

b)  $h = \sqrt{1 + (\Delta \lambda \sin \varphi - \theta)^2} = \sqrt{1 + (150^{\circ} \sin 45^{\circ} - 72^{\circ}08'29'' \frac{\pi}{180^{\circ}})^2} = 1,1621438.$

$$k = 1.$$

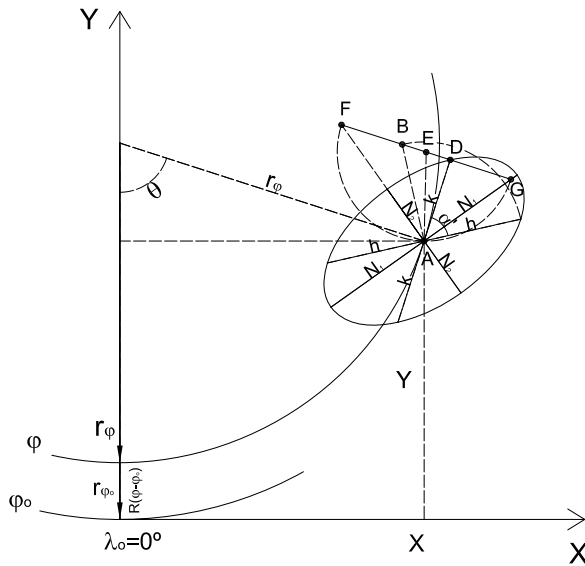
- c) Ya se ha deducido que el ángulo que forman paralelos y meridianos al intersectarse en un punto verifica que  $\sin \alpha' = \frac{1}{h} = \frac{1}{1,1621438}$ ; por lo tanto  $\alpha' = 59^{\circ}22'13''$

d) Según el Teorema de Apolonio, se cumple que:

$$\begin{cases} N_1^2 + N_2^2 = h^2 + k^2 \\ N_1 N_2 = hk \operatorname{sen} \alpha' = 1 \text{ (por ser la proyección equivalente)} \end{cases}$$

Para obtener los valores de  $N_1$  y  $N_2$  se eleva miembro a miembro la primera igualdad al cuadrado y se multiplica por 2 la segunda. Luego se suman las expresiones obtenidas:

$$(N_1 + N_2)^2 = h^2 + k^2 + 2.$$



**Figura 6.44:** Proyección de Bonne. Elipse de Tissot en un punto.

Entonces:  $N_1 + N_2 = \sqrt{h^2 + 1 + 2} = \sqrt{h^2 + 3}$ .

Si ahora se realizan las mismas operaciones antes descritas, pero se restan las expresiones obtenidas, se tendrá:

$$(N_1 - N_2)^2 = h^2 + k^2 - 2.$$

Entonces:  $N_1 - N_2 = \sqrt{h^2 + 1 - 2} = \sqrt{h^2 - 1}$ .

Sumando las expresiones para  $N_1 + N_2$  y para  $N_1 - N_2$ , se obtiene

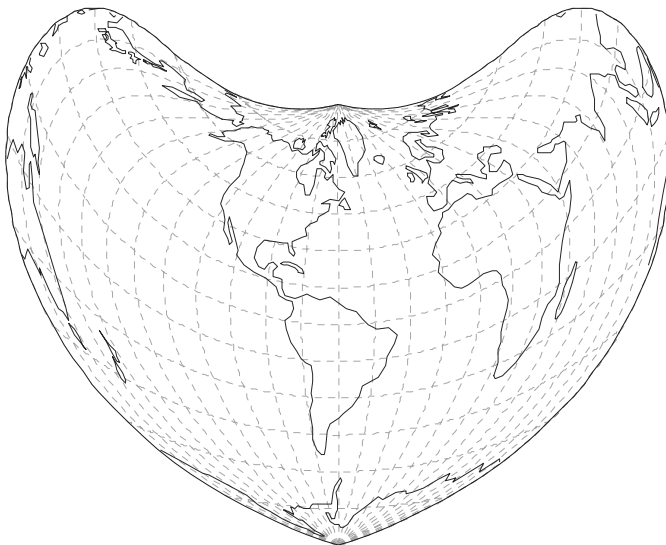
el valor de  $N_1$ , y restándolas el de  $N_2$ :

$$N_1 = \frac{\sqrt{h^2 + 3} + \sqrt{h^2 - 1}}{2} = 1,33895 \text{ y}$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{h^2 + 3} - \sqrt{h^2 - 1}}{2} = 0,74685$$

e) Dibujo de la Elipse de Tissot. Para dibujar la elipse de Tissot se procede de la siguiente manera:

- $k$  se traza normal a  $r_\varphi$  y  $h$  se traza formando un ángulo  $\alpha'$  con  $k$ ,
- se gira  $h$   $90^\circ$  alrededor de  $A$  (línea de puntos) llegando a  $B$ ,
- haciendo centro en la mitad de la distancia  $BD$  (punto  $E$ ) se traza un semicírculo (de puntos) de radio  $EA$  que corta a la recta  $BD$  en  $F$  y  $G$ ,
- uniendo  $F$  y  $G$  con  $A$  (centro de la elipse) se tienen las direcciones de los ejes de la elipse,
- las longitudes de los semiejes son  $N_1 = FD$  y  $N_2 = DG$ .



**Figura 6.45:** Proyección de Bonne.





## Capítulo 7

### Proyecciones convencionales

Existen varias proyecciones, algunas de uso frecuente, que no están comprendidas entre los sistemas tratados en los capítulos anteriores. Han sido agrupadas en este capítulo ya que se diferencian de las anteriores porque no están ideadas de modo que cumplan las leyes de la perspectiva o de la proyectiva o una modificación de las mismas, sino con el objeto de preservar alguna cualidad especial que se considera importante para una aplicación particular. Algunas fueron concebidas para obtener una proyección simple desde el punto de vista matemático o gráfico. Puesto que cada autor de este tipo de proyecciones formula una convención o condición que se aplica en las mismas, existe una extensa variedad de representaciones cartográficas de esta clase.

A diferencia de las proyecciones analizadas en los capítulos previos, no hay un principio básico específico a aplicar en todos los casos. Por lo tanto, en las proyecciones tratadas en este capítulo es necesario aplicar un procedimiento particular para cada caso.

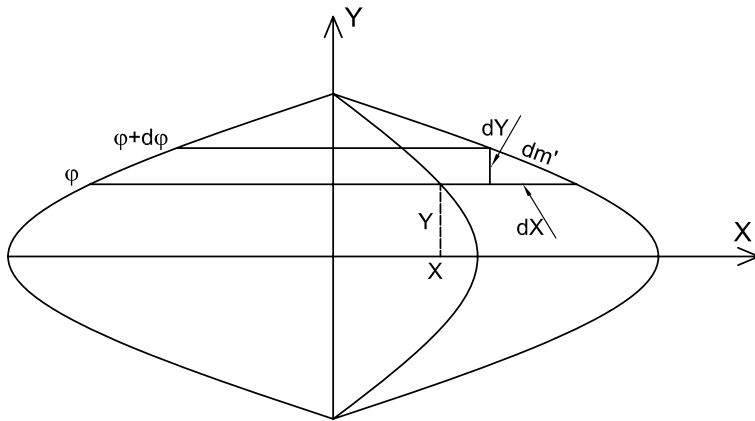
#### 7.1 Proyección sinusoidal (de Sanson o de Flansteed)

La proyección sinusoidal es el caso ecuatorial (o meridiano) de la proyección de Bonne en el que el paralelo base es el Ecuador (Ver Proyección

de Bonne, Capítulo 6); por ello, algunos autores la denominan también cilíndrica o pseudocilíndrica.

En la proyección de Bonne, adoptando  $\varphi_0 = 0^\circ$  (Ecuador),  $r_\varphi$  se vuelve infinito para todas las latitudes ( $r_{\varphi_0} = R \cotg \varphi_0$ ); por lo tanto, los paralelos están representados por líneas rectas paralelas, de longitudes correctas, cortando al meridiano central, que es una recta de longitud correcta en partes iguales. Dividiendo cada paralelo en partes iguales (de magnitud  $R\Delta\lambda \cos \varphi$ ) y uniendo los puntos de igual longitud ( $\lambda$ ), se obtienen los meridianos que resultan sinusoides, de allí su nombre.

Las coordenadas de un punto  $(\varphi, \lambda)$  serán, por lo tanto (Figura 7.1):



**Figura 7.1:** Proyección sinusoidal. Coordenadas cartesianas

$$X = R\lambda \cos \varphi$$

$$Y = R\varphi$$

Si consideramos constante  $\lambda$ , se tendrá para el meridiano la ecuación de una senoide. Si consideramos fijo  $\varphi$ , resultará para el paralelo la ecuación de una recta paralela al Ecuador.

### 7.1.1 Características y propiedades de la proyección

El Ecuador es una recta de longitud correcta que está dividida en partes iguales de longitud  $R\Delta\lambda$  (expresando  $\Delta\lambda$  en radianes). El meridiano central, de longitud correcta, es una recta perpendicular al Ecuador en su punto medio y está dividido en partes iguales de longitud  $R\Delta\varphi$  (estando expresado  $\Delta\varphi$  en radianes).

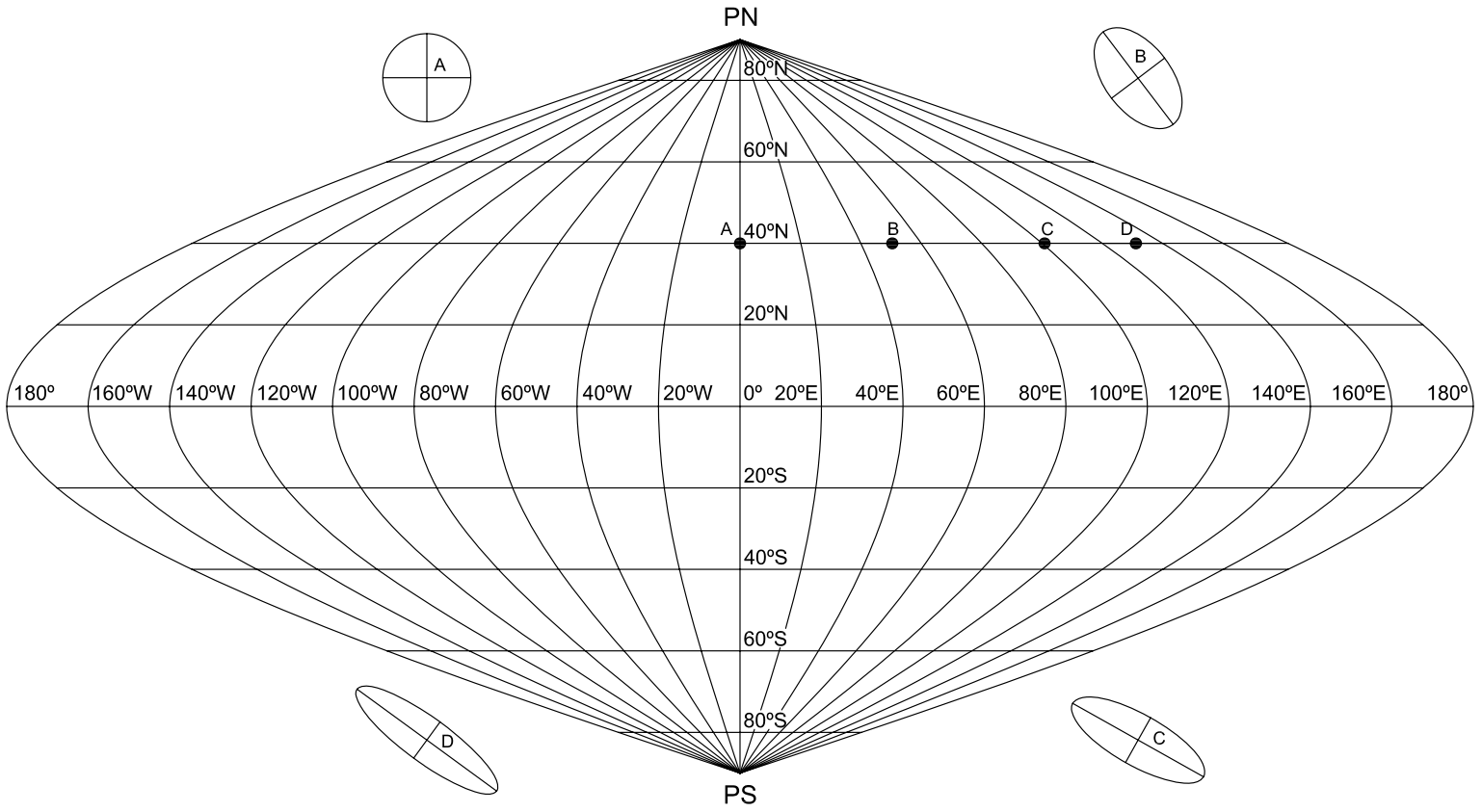


Figura 7.2: Proyección sinusoidal.

Los paralelos aparecen como rectas paralelas al Ecuador de longitudes correctas y están, cada uno de ellos, divididos por los meridianos en partes iguales a  $R \cos \varphi \Delta \lambda$ . Resulta  $k = 1$ .

Los meridianos (salvo el central) se proyectan según curvas sinusoidales. La deformación en cada punto de un meridiano está dada por el módulo de alteración lineal  $h$ :

$$h = \frac{dm'}{dm}$$

siendo  $dm'$  un arco infinitesimal de meridiano en la proyección (Figura 7.1). Obsérvese que:

$$\begin{aligned} dm' &= \sqrt{(dX)^2 + (dY)^2} \\ dX &= d[R\lambda \cos \varphi] = -R\lambda \operatorname{sen} \varphi d\varphi (\lambda \text{ es constante en cada meridiano}) \\ dY &= d[R\varphi] = Rd\varphi \\ dm' &= \sqrt{R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \lambda^2 (d\varphi)^2 + R^2 (d\varphi)^2} = \sqrt{R^2 (\operatorname{sen}^2 \varphi \lambda^2 + 1) (d\varphi)^2} \\ &= Rd\varphi \sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \end{aligned}$$

$dm$  es un arco infinitesimal de meridiano en la esfera terrestre,  $dm = Rd\varphi$ .

Por lo tanto: 
$$h = \frac{Rd\varphi \sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}{Rd\varphi}$$

Entonces, expresando  $\lambda$  en radianes,  $h = \sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$

El módulo de alteración lineal en los paralelos es siempre  $k = 1$ , dado que tienen longitud correcta. Por ser un caso particular de la proyección de Bonne, se trata de una proyección equivalente.

Aunque los semiejes de la elipse de Tissot, salvo en el Ecuador y en el meridiano central, no coinciden con  $h$  y  $k$  (ver Figura 7.2), se deduce más adelante que:

$$N_1 = \frac{\sqrt{h^2 + 3} + \sqrt{h^2 - 1}}{2} \quad \text{y} \quad N_2 = \frac{\sqrt{h^2 + 3} - \sqrt{h^2 - 1}}{2}$$

Además, por ser la proyección equivalente,  $N_1 N_2 = 1$ .

### Ejemplos:

Para el punto  $\varphi = 60^\circ N, \lambda = 120^\circ E$  se tiene que  $k = 1$  y

$$h = \sqrt{1 + \left(120^\circ \frac{\pi}{180^\circ}\right)^2 \operatorname{sen}^2 60^\circ} = 2,071, \text{ entonces:}$$

$$N_1 = \frac{\sqrt{2,071^2 + 3} + \sqrt{2,071^2 - 1}}{2} = 2,2566968 \text{ y}$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{2,0712^2 + 3} - \sqrt{2,0712^2 - 1}}{2} = 0,4431255$$

Se verifica que  $N_1 N_2 = 1$ .

### 7.1.2 Dedución de las fórmulas de $N_1$ y $N_2$ (semiejes de la Elipse de Tissot)

Según el teorema de Apolonio, en la elipse la suma de los cuadrados de los semiejes ( $N_1$  y  $N_2$ ) es igual a la suma de los cuadrados de dos semidiámetros conjugados ( $h$  y  $k$ ).

$$N_1^2 + N_2^2 = k^2 + h^2 \quad (7.1)$$

También, por ser la proyección equivalente, se cumple que:

$$N_1 N_2 = 1 \quad (7.2)$$

(7.1) y (7.2) son dos ecuaciones con dos incógnitas ( $N_1$  y  $N_2$ ), pues  $h$  y  $k$  se obtienen de expresiones ya deducidas. Multiplicando ambos miembros de (7.2) por 2, se tiene:

$$2N_1 N_2 = 2 \quad (7.3)$$

Sumando miembro a miembro (7.1) y (7.3):

$$N_1^2 + N_2^2 + 2N_1 N_2 = k^2 + h^2 + 2$$

Se sabe que en esta proyección  $k = 1$ , entonces:

$$\begin{aligned} N_1^2 + N_2^2 + 2N_1 N_2 &= h^2 + 3 \\ (N_1 + N_2)^2 &= h^2 + 3 \\ N_1 + N_2 &= \sqrt{h^2 + 3} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Restando miembro a miembro (7.1) y (7.3) y operando en forma similar, se tiene:

$$N_1 - N_2 = \sqrt{h^2 - 1} \quad (7.5)$$

Sumando las expresiones (7.4) y (7.5):

$$\begin{aligned} 2N_1 &= \sqrt{h^2 + 3} + \sqrt{h^2 - 1} \\ N_1 &= \frac{\sqrt{h^2 + 3} + \sqrt{h^2 - 1}}{2} \end{aligned}$$

Restando ahora (7.4) y (7.5):

$$\begin{aligned} 2N_2 &= \sqrt{h^2 + 3} - \sqrt{h^2 - 1} \\ N_2 &= \frac{\sqrt{h^2 + 3} - \sqrt{h^2 - 1}}{2} \end{aligned}$$

### 7.1.3 Ángulo de intersección entre paralelos y meridianos

Por tratarse de un caso particular de la proyección de Bonne, la proyección sinusoidal posee la propiedad de equivalencia, es decir:

$$hk \operatorname{sen} \theta = 1$$

y además se cumple que  $k = 1$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{1}{hk} = \frac{1}{h} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \\ \theta &= 2 \operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \end{aligned}$$

#### Ejemplos:

Sea el punto de coordenadas  $\varphi = 40^\circ N$ ,  $\lambda = 100^\circ E$ , y siendo  $\lambda_0 = 0^\circ$ :

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \operatorname{arcsen} \frac{1}{h} = \frac{1}{\sqrt{1 + (100^\circ \frac{\pi}{180^\circ})^2 \operatorname{sen}^2 40^\circ}} \\ \theta &= 41^\circ 42' 46'' \end{aligned}$$

#### Nota

Como puede notarse en la Figura 7.2,  $N_1$  y  $N_2$  (en la Elipse de Tissot) no son colineales con  $h$  y  $k$ . Las direcciones de  $N_1$  y  $N_2$  se determinan luego.

En la Figura 7.3 se representa un planisferio en esta proyección con el dibujo de la Elipse de Tissot en paralelos y meridianos cada  $30^\circ$ .

Esta proyección no es isógona ( $h \neq k$ ). El error máximo angular en un punto  $(\varphi, \lambda)$  está dado por:

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arcsen} \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

#### Ejemplos:

Para el punto  $(\varphi = 40^\circ N, \lambda = 120^\circ E)$ , y siendo  $\lambda_0 = 0^\circ$ ,  $N_1 = 2,2566968$  y  $N_2 = 0,4431255$ , entonces:

$$\delta_{\max} = 2 \operatorname{arcsen} \frac{2,2566968 - 0,4431255}{2,2566968 + 0,4431255} = 84^\circ 24' 09''$$

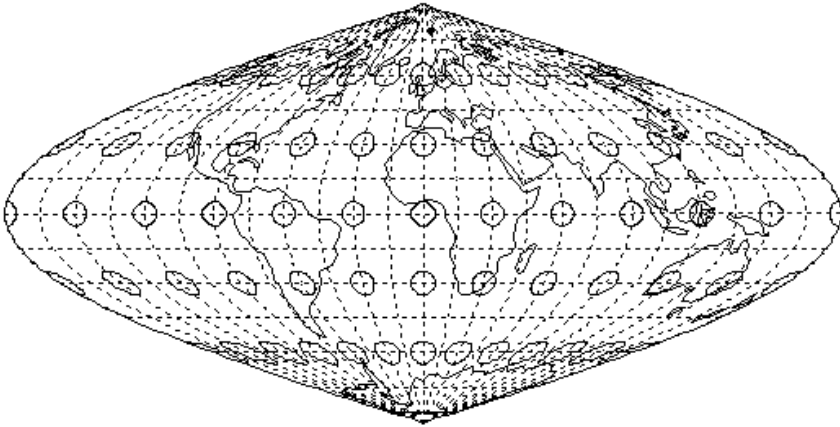


Figura 7.3: Elipses de Tissot en la proyección sinusoidal.

#### 7.1.4 Usos

Para mapas de temas estadísticos, dado que es equivalente; para cualquier uso siempre que no sea necesario alejarse mucho del meridiano central, para evitar grandes deformaciones. En los planisferios, en los bordes del mapa, los meridianos resultan muy oblicuos con respecto de los paralelos, y por lo tanto las formas están muy distorsionadas (ver en la Figura 7.3 las elipses de Tissot).

Es frecuentemente usada para mapas de África, Oceanía, Sudamérica y algunas veces para Australia.

#### 7.1.5 Direcciones de $N_1$ y $N_2$ (Semiejes de la Elipse de Tissot)

Denominando con  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  los ángulos que forman  $N_1$  y  $N_2$  en un punto  $(\varphi, \lambda)$  de la proyección con respecto al eje  $Y$  (ver Capítulo 2), se tiene que:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \operatorname{tg} A_1}{\frac{\partial Y}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \operatorname{tg} A_1} \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \operatorname{tg} A_2}{\frac{\partial Y}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \operatorname{tg} A_2}$$

resultando  $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$  y siendo  $A_1$  y  $A_2$  los acimutes de las direcciones principales en el punto  $(\varphi, \lambda)$  correspondiente de la esfera.

Se demuestra que:  $\operatorname{tg} 2A = \frac{2F \cos \varphi}{E \cos^2 \varphi - G}$

donde  $F = \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda}$ ,  $E = \left( \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right)^2$  y

$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)^2$$

**Ejemplos:**

Para el punto considerado en el ejemplo anterior ( $\varphi = 40^\circ N$ ,  $\lambda = 120^\circ E$ ):

$$X = R\lambda \cos \varphi$$

$$Y = R\varphi$$

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 = R^2 \lambda^2 (-\operatorname{sen} \varphi)^2 + R^2 = R^2 (\lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + 1)$$

$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)^2 = R^2 \cos^2 \varphi$$

$$F = \frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial X}{\partial \lambda} + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = -R\lambda R \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2A &= \frac{2F \cos \varphi}{E \cos^2 \varphi - G} \\ &= \frac{-2\lambda \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi R^2 \cos \varphi}{R^2 (1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \cos^2 \varphi - R^2 \cos^2 \varphi} \\ &= \frac{-2\lambda \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi (1 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - 1)} \\ &= \frac{-2\lambda \operatorname{sen} \varphi}{\lambda^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \\ &= \frac{-2}{\lambda \operatorname{sen} \varphi} = \frac{-2}{120^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \operatorname{sen} 40^\circ} = -1,485606823 \end{aligned}$$

Entonces  $2A = -56^\circ 03' 16''$  y, por lo tanto:

$$A_1 = -28^\circ 01' 38'' \text{ y } A_2 = 61^\circ 58' 22''.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{\frac{\partial X}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \operatorname{tg} A_1}{\frac{\partial Y}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \operatorname{tg} A_1} \\ &= \frac{-R\lambda \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + R \cos \varphi \operatorname{tg} A_1}{R \cos \varphi + 0} \\ &= -\lambda \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{tg} A_1 \\ &= -120^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \operatorname{sen} 40^\circ + \operatorname{tg}(-28^\circ 01' 38'') \\ &= -1,878570248 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\alpha_1 = -61^\circ 58' 22''$  y  $\alpha_2 = 28^\circ 01' 38''$ .

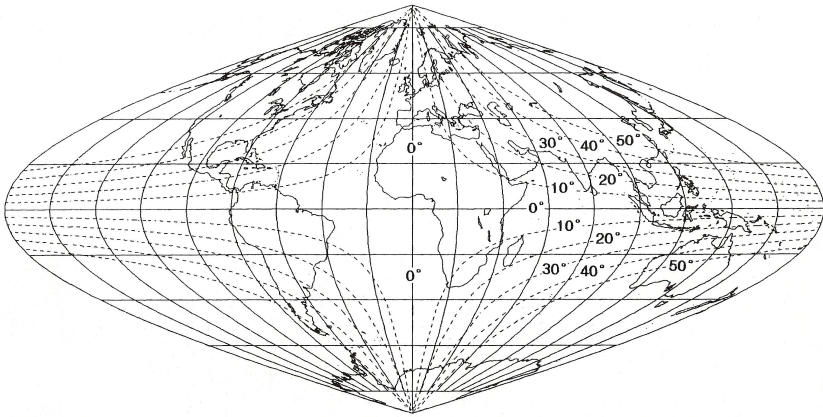
### Nota

Otro camino para hallar las dimensiones de  $N_1$  y  $N_2$  y sus direcciones, cuando se conocen las dimensiones y direcciones de los módulos de

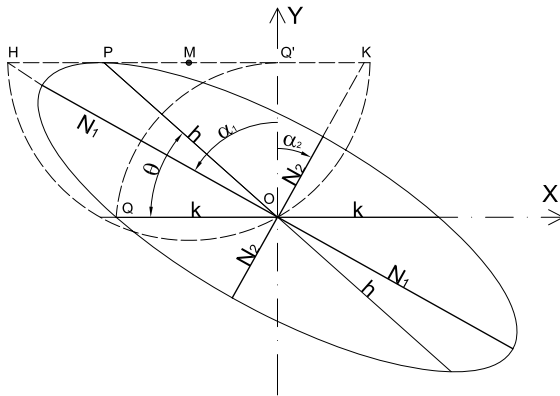


alteración lineal  $h$  y  $k$ , es el siguiente procedimiento gráfico.

En la Figura 7.5, sea  $O$  el centro de la Elipse de Tissot,  $k = OQ$  y  $h = OP$ . Si se gira  $OQ$   $90^\circ$  alrededor del punto  $O$  se tendrá  $OQ'$ . Se unen  $P$  y  $Q'$  por una recta y se halla su punto medio,  $M$ . Haciendo centro con el compás en  $M$ , y con radio  $MO$ , se traza una semicircunferencia hasta cortar la recta  $PQ'$  en  $H$  y  $K$ . Se demuestra (Pedro Puig Adam (1961): *Curso de Geometría Métrica (Tomo II)*, Lección 34. Madrid. *Nuevas Gráficas*.) que  $HQ' = N_1$  y que  $Q'K = N_2$ . Uniendo  $O$  con  $H$  y con  $K$  se obtienen las direcciones de  $N_1$  y  $N_2$ .



**Figura 7.4:** Proyección sinusoidal. Paralelos y meridianos cada  $20^\circ$ . Las líneas de trazos indican igual deformación angular máximas..



**Figura 7.5:** Elipse indicatriz de Tissot.

### 7.1.6 Transformación inversa (de coordenadas cartesianas a geográficas)

Las coordenadas cartesianas son:

$$\begin{cases} X = R\Delta\lambda \cos \varphi \\ Y = R\varphi \end{cases}$$

De manera inmediata se obtiene que  $\varphi = \frac{Y}{R}$ . Por otra parte, de la primera ecuación:  $\lambda = \lambda_0 + \frac{X}{R \cos \frac{Y}{R}}$ .

#### Ejemplos:

En un planisferio dibujado en proyección sinusoidal, con una escala de 1 : 160 000 000, se tiene un punto cuyas coordenadas cartesianas miden  $x = -4,4cm$  e  $y = -3,85cm$ . El meridiano central es  $\lambda_0 = 0^\circ$ . Se desean conocer las coordenadas geográficas del punto.

$$X = xM = -4,4cm \times 160\,000\,000 = -704\,000\,000cm = 7\,040km$$

$$Y = yM = -3,85cm \times 160\,000\,000 = -616\,000\,000cm = -6\,160km$$

$$\varphi = \frac{-6\,160km}{6\,370km} \frac{\pi}{180^\circ} = -55^\circ 24' 25''$$

$$\Delta\lambda = 0^\circ + \frac{-7\,040km}{6\,370km \cos(-55^\circ 24' 25'')} \frac{\pi}{180^\circ} = -111^\circ 31' 58''$$

## 7.2 Proyección homolográfica (de Mollweide)

### 7.2.1 Dibujo

Es una proyección equivalente, por lo tanto las áreas deben ser correctas. Para deducir los valores de los elementos que permiten el dibujo de esta proyección (Figura 7.6), se considera un hemisferio cuya área es:

$$\text{Área hemisfero} = 2\pi R^2 \quad (7.6)$$

Ésta debe ser igual a la de un círculo de radio  $R_1 > R$

$$\text{Área Círculo} = \pi R_1^2 \quad (7.7)$$

$$2\pi R^2 = \pi R_1^2$$

$$R_1 = \sqrt{2R^2}$$

$$R_1 = R\sqrt{2}$$

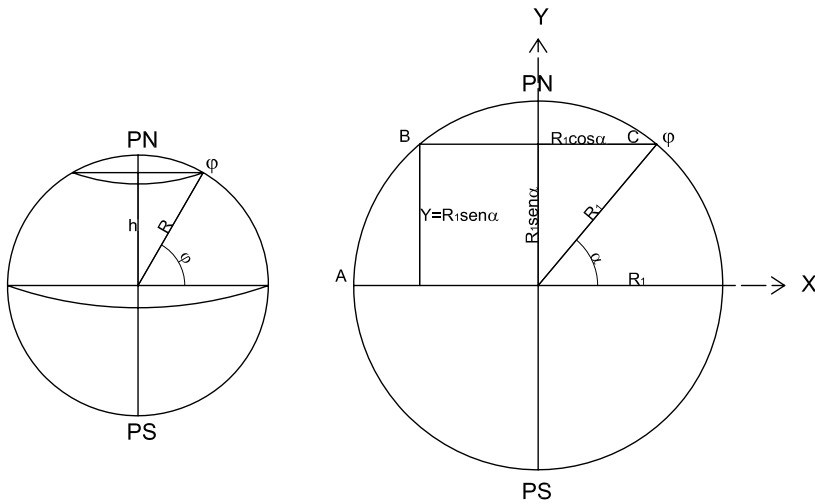


Figura 7.6: Proyección de Mollweide. Cálculo de coordenadas.

Por otra parte,

$$\text{Área } \frac{1}{2} \text{ zona esférica}(0^\circ, \varphi) = \frac{2\pi Rh}{2} \text{ siendo } h = R \text{sen } \varphi$$

$$\text{Área } \frac{1}{2} \text{ zona esférica}(0^\circ, \varphi) = \pi R^2 \text{sen } \varphi \quad (7.8)$$

$$\text{Área en la proyección } (0^\circ, \varphi) = 2 \left[ \frac{R_1 \cos \alpha R_1 \text{sen } \alpha}{2} + \frac{R_1 \alpha R_1}{2} \right]$$

$$\text{Área en la proyección } (0^\circ, \varphi) = R_1^2 \cos \alpha \text{sen } \alpha + R_1^2 \alpha$$

$$\text{Área en la proyección } (0^\circ, \varphi) = R_1^2 \left[ \frac{1}{2} \text{sen } 2\alpha + \alpha \right] \text{ pero } R_1 = R\sqrt{2},$$

$$R_1^2 = 2R^2$$

$$\text{Área en la proyección } (0^\circ, \varphi) = 2R^2 \left[ \frac{1}{2} \text{sen } 2\alpha + \alpha \right] \quad (7.9)$$

Como 7.8=7.9, resulta la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\pi \text{sen } \varphi = \text{sen } 2\alpha + 2\alpha \quad (7.10)$$

Para resolverla se parte de un método gráfico y, aplicando la fórmula

$$Y = R_1 \text{sen } \alpha \quad (7.11)$$

se puede dibujar el canevas geográfico calculando las distancias del Ecuador a cada paralelo. El procedimiento es el que se describe a continuación.

En la fórmula 7.10 se dan valores a la variable  $\alpha$  y se calculan los respectivos valores para  $\varphi$ . Se confecciona un gráfico cuyas abscisas son los valores de  $\alpha$ , y cuyas ordenadas, los valores de  $\varphi$ . Dando a  $\varphi$  valores con intervalos constantes, se calculan los valores respectivos de  $\alpha$  (Figura 7.7) y con la fórmula 7.11 se calculan las distancias de cada paralelo al Ecuador.

### Observaciones

Para hallar la distancia de cada paralelo el Ecuador, se iguala el área de zona esférica comprendida entre el paralelo y el Ecuador, con el área de  $ABCD$  (Figura 7.6). Luego se divide cada paralelo en partes iguales, de acuerdo con el intervalo que se desea para los meridianos, y se dibujan éstos uniendo con una curva suave los puntos de división (ver Figura 7.8).

Para obtener el planisferio se procede del siguiente modo:

- Se prolonga cada paralelo a ambos lados una longitud igual a la mitad del paralelo y se divide en partes iguales de acuerdo con el intervalo elegido para los meridianos.
- Se unen los puntos de división y se dibujan los meridianos (ver Figura 7.8).

### 7.2.2 Cálculo de las coordenadas de un punto $(\varphi, \lambda)$ (Figura 7.6)

Como  $\frac{X}{2R_1 \cos \alpha} = \frac{\lambda}{\pi}$ , entonces:  $X = \frac{\lambda 2R_1 \cos \alpha}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}R\lambda \cos \alpha}{\pi}$

Además,  $Y = R_1 \sin \alpha = \sqrt{2}R \sin \alpha$ .

#### Ejemplos:

Calcular las coordenadas cartesianas para el punto  $(\varphi = 60^\circ N, \lambda = 120^\circ E)$ .

Para  $\varphi = 60^\circ, \alpha = 49^\circ 25'$  (Ver Figura 7.7), entonces:

$$X = \frac{2\sqrt{2} \cdot 6370 \text{ km} \cdot 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cos 49^\circ 25'}{\pi} = 7\,813,973 \text{ km}$$

$$Y = \sqrt{2} \cdot 6370 \text{ km} \sin 49^\circ 25' = 6\,841,631 \text{ km}$$

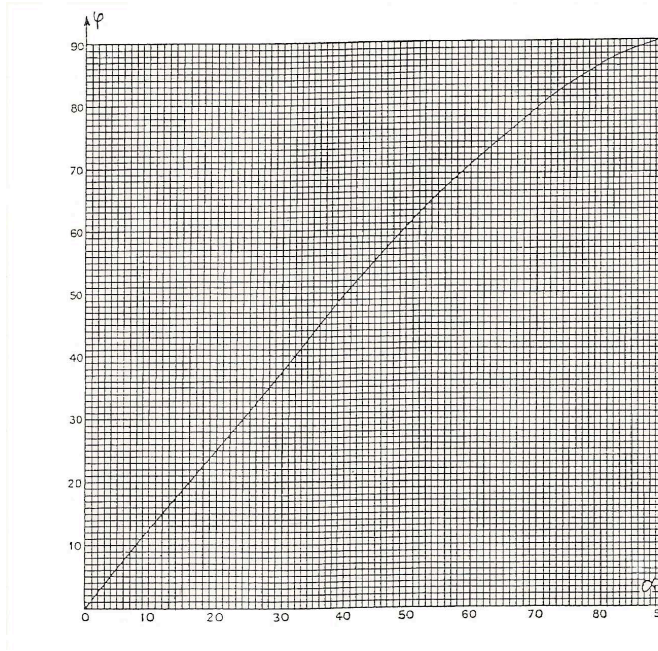


Figura 7.7: Proyección homográfica. Cuadro para el método gráfico.

### 7.2.3 Características y propiedades

El Ecuador se proyecta según una recta de longitud incorrecta menor que la real. En efecto:

$$\text{Ecuador en la proyección} = 4R_1 = 4R\sqrt{2} = 5,65R$$

$$\text{Ecuador en la esfera} = 2\pi R = 6,28R$$

Los paralelos se proyectan según rectas paralelas al Ecuador, que se van acercando entre sí al ir desde el Ecuador hacia los Polos. El módulo de alteración lineal en un punto en la dirección del paralelo se calcula a través de la expresión:

$$k = \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}}$$

$$k = \frac{4R_1 \cos \alpha}{2\pi R \cos \varphi}, \text{ pero } R_1 = R\sqrt{2}, \text{ entonces } k = \frac{4R\sqrt{2} \cos \alpha}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{2\sqrt{2} \cos \alpha}{\pi \cos \varphi}$$

$$\text{Para } \varphi = 60^\circ, k = \frac{4\sqrt{2} \cos \alpha}{2\pi \cos \varphi} = \frac{2\sqrt{2} \cos 49^\circ 25'}{\pi \cos 60^\circ} = 1,17139632$$

$$\text{Para } \varphi = 20^\circ, k = 0,922.$$

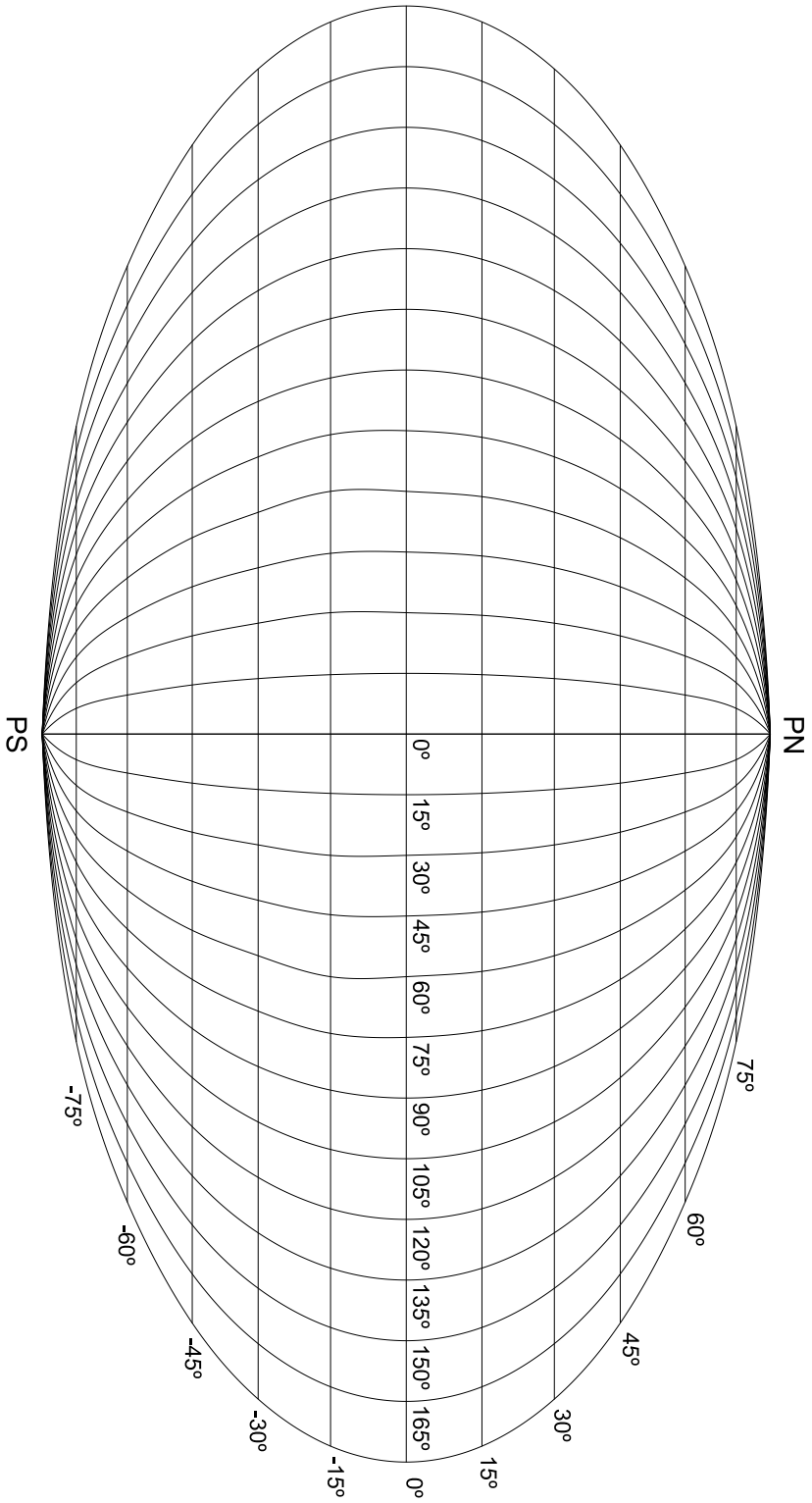


Figura 7.8: Proyección homográfica de Mollweide.

Para $\alpha =$	$\varphi =$	Para $\varphi =$	$\alpha =$
10°	12°43'	10°	08°00'
20°	25°16'	20°	15°45'
30°	37°31'	30°	24°00'
40°	49°18'	40°	32°00'
50°	60°22'	50°	40°30'
60°	70°30'	60°	49°25'
70°	79°18'	70°	59°30'
80°	86°18'	80°	71°00'
90°	90°00'	90°	90°00'

Tabla 7.1

Se demuestra que en las latitudes 40°44'12'' norte y sur las dimensiones de las proyecciones de los paralelos son correctas. Entre estas latitudes y los Polos, las longitudes de los paralelos son mayores que las reales y entre las mismas, los paralelos son menores que los reales.

El meridiano central es el único que se proyecta según una recta. Los dos meridianos cuya longitudes geográficas difieren en 90° con respecto al central, se proyectan según dos semicircunferencias opuestas de longitudes incorrectas. Los demás meridianos se proyectan según semielipses, calculándose la deformación en cada punto con el módulo de alteración lineal  $h$ .

$$h = \frac{\text{longitud del arco diferencial de meridiano en la proyección}}{\text{longitud del arco diferencial de meridiano en la esfera}} = \frac{dm'}{dm}$$

El cálculo de las longitudes involucradas requiere del cálculo infinitesimal, obteniéndose  $h = \frac{1}{k \cos \varepsilon}$ , donde  $\varepsilon$  es el complemento del ángulo de intersección de los paralelos con los meridianos ( $\alpha'$ ).

Se verifica, además, que  $\text{tg} \varepsilon = \frac{2}{\pi} \text{tg} \alpha \cdot \Delta \lambda$ . En efecto (ver Figura 7.9):

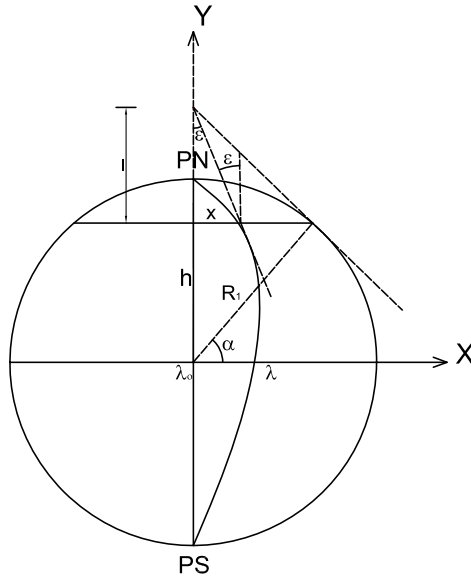
$$\text{tg} \varepsilon = \frac{X}{l}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{R_1 \cos \alpha}{l}$$

Dividiendo miembro a miembro ambas expresiones y despejando  $\text{tg}\varepsilon$ :

$$\text{tg}\varepsilon = \frac{\text{tg}\alpha X}{R_1 \cos \alpha}$$

Como  $\frac{X}{R_1 \cos \alpha} = \frac{\Delta\lambda}{\frac{\pi}{2}}$ , entonces:



**Figura 7.9:**  $\varepsilon$ , complemento del ángulo de intersección de un paralelo con un meridiano.

$$X = \frac{2R_1 \cos \alpha \Delta\lambda}{\pi}$$

Reemplazando en la expresión de  $\text{tg}\varepsilon$ :

$$\text{tg}\varepsilon = \frac{\text{tg}\alpha 2R_1 \cos \alpha \Delta\lambda}{\pi R_1 \cos \alpha}$$

$$\text{tg}\varepsilon = \frac{2\Delta\lambda \text{tg}\alpha}{\pi}$$

**Ejemplos:**

- a) Calcular el módulo de alteración lineal  $h$  para el punto ( $\varphi = 60^\circ, \lambda = 30^\circ$ ).

$\text{tg}\varepsilon = \frac{2}{\pi} 30^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \text{tg} 49^\circ 25'$ , entonces  $\varepsilon = 21^\circ 15' 46''$  (complemento del ángulo de intersección del paralelo con el meridiano). Reemplazando



en la fórmula los valores obtenidos:

$$h = \frac{1}{1,171 \cos 21^{\circ}15'46''} = 0,916349614$$

- b) Calcular el módulo de alteración lineal  $h$  para el punto ( $\varphi = 20^{\circ}, \lambda = 30^{\circ}$ ).

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2}{\pi} 30^{\circ} \frac{\pi}{180^{\circ}} \operatorname{tg} 25^{\circ}16', \text{ entonces } \varepsilon = 10^{\circ}02'14''.$$

Reemplazando en la fórmula los valores obtenidos:

$$h = \frac{1}{k \cos \varepsilon} = \frac{1}{0,922 \cos 10^{\circ}02'14''} = 1,10146$$

En cada meridiano, el arco comprendido entre las latitudes  $40^{\circ}44'12''$  norte y sur tiene una longitud mayor que la real, y los dos arcos comprendidos entre dichas latitudes y los Polos, dimensiones menores que las reales.

Conocidos los valores de  $h$  y de  $k$  se pueden hallar  $N_1$  y  $N_2$  (los semiejes de la elipse de Tissot), como se hizo en la proyección sinusoidal, obteniéndose:

$$N_1 = \frac{\sqrt{h^2 + k^2 + 2} + \sqrt{h^2 + k^2 - 2}}{2} \text{ y } N_2 = \frac{\sqrt{h^2 + k^2 + 2} - \sqrt{h^2 + k^2 - 2}}{2}$$

### Ejemplos:

Ya se ha calculado que cuando  $\varphi = 60^{\circ}, k = 1,17139632$  y  $h = 0,916349614$ . Entonces:

$$N_1 = 1,256286025 \text{ y } N_2 = 0,795997073$$

### Ejercicio:

- a) Hallar los módulos de alteración lineal  $h$  y  $k$  en el punto ( $\varphi = 50^{\circ}N, \lambda = 100^{\circ}E$ ) de la proyección de Mollweide, con meridiano central  $\lambda_0 = 0^{\circ}$ .

Para ello es necesario obtener el valor de  $\alpha$  del gráfico que aparece en la Figura 7.7. El mismo es  $\alpha = 40^{\circ}37'30''$ . Entonces:

$$k = \frac{2\sqrt{2} \cos \alpha}{\pi \cos \varphi} = \frac{2\sqrt{2} \cos 40^{\circ}37'30''}{\pi \cos 50^{\circ}} = 1,063060438$$

Como  $h = \frac{1}{k \cos \varepsilon}$ , debe calcularse el valor de  $\varepsilon$ , el que se obtiene de la expresión  $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2\Delta \lambda \operatorname{tg} \alpha}{\pi}$ .

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2\Delta\lambda \operatorname{tg} \alpha}{\pi} = \frac{2 \times 100^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \operatorname{tg} 40^\circ 37' 30''}{\pi} = 0,953178686. \text{ Entonces } \varepsilon = 43^\circ 37' 36'' \text{ y } h = \frac{1}{k \cos \varepsilon} = \frac{1}{1,063060438 \cos 43^\circ 37' 36''} = 1,299549939$$

b) Para el punto del inciso (a), hallar los valores de los semiejes de la elipse de Tissot ( $N_1$  y  $N_2$ ).

Conociendo los valores de  $h$  y de  $k$  se calcula:

$$N_1 = \frac{\sqrt{h^2 + k^2 + 2} + \sqrt{h^2 + k^2 - 2}}{2} = 1,550078581$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{h^2 + k^2 + 2} - \sqrt{h^2 + k^2 - 2}}{2} = 0,465128583$$

Como control de los cálculos realizados puede verificarse que  $N_1^2 + N_2^2 = k^2 + h^2$ .

## 7.2.4 Usos

Esta proyección se utiliza fundamentalmente para planisferios.

## 7.2.5 Transformación inversa (de coordenadas cartesianas a coordenadas geográficas)

**Ejemplo:**

En un planisferio en escala 1 : 269 000 000 confeccionado en la proyección de Mollweide con meridiano central  $\lambda_0 = 0^\circ$ , se tiene un punto del que se miden las coordenadas cartesianas:  $x = 3,8\text{cm}$ ,  $y = -1,55\text{cm}$ .

Se desean conocer sus coordenadas geográficas.

Se demostró que:

$$\pi \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} 2\alpha + 2\alpha. \quad (7.12)$$

Además:

$$X = \frac{2\sqrt{2}R\Delta\lambda \cos \alpha}{\pi} \quad (7.13)$$

$$Y = \sqrt{2}R \operatorname{sen} \alpha \quad (7.14)$$

$$X = xM = 3,8\text{cm} \times 269\,000\,000 = 1\,022\,200\,000\text{cm} = 10\,222\text{km}.$$

$$Y = yM = -1,55\text{cm} \times 269\,000\,000 = -416\,950\,000\text{cm} = -4\,169,5\text{km}.$$

De la expresión 7.12:  $\varphi = \arcsen \frac{\text{sen } 2\alpha + 2\alpha}{\pi}$ . De la expresión 7.14 se puede obtener la expresión para calcular  $\alpha$ :

$$\alpha = \arcsen \frac{Y}{\sqrt{2}R} = \arcsen \frac{-4\,169,5\text{km}}{\sqrt{2} \times 6\,370\text{km}} = -27^{\circ}34'14''$$

Reemplazando los valores obtenidos en la expresión 7.13:

$$\Delta\lambda = \frac{X\pi}{2\sqrt{2}R\cos\alpha} = \frac{10\,222\text{km} \times \pi}{2\sqrt{2} \times 6\,370\text{km} \cos(-27^{\circ}34'14'')} = 115^{\circ}12'24''$$



**Figura 7.10:** Proyección de Mollweide de un hemisferio. Meridiano central de  $60^{\circ} E$

**Ejercicio:** En un planisferio en proyección homolográfica (de Mollweide) cuyo meridiano central es  $\lambda_0 = 0^{\circ}$  se desean conocer, del punto  $A(\varphi = 60^{\circ}N, \lambda = 30^{\circ}E)$ , los siguientes elementos:

- las coordenadas cartesianas,
- los módulos de alteración lineal  $h$  y  $k$ ,
- el ángulo que forman en ese punto las proyecciones del meridiano y del paralelo,
- los valores de los semiejes de la elipse de Tissot y sus orientaciones,
- el dibujo, en escala, de la elipse de Tissot.

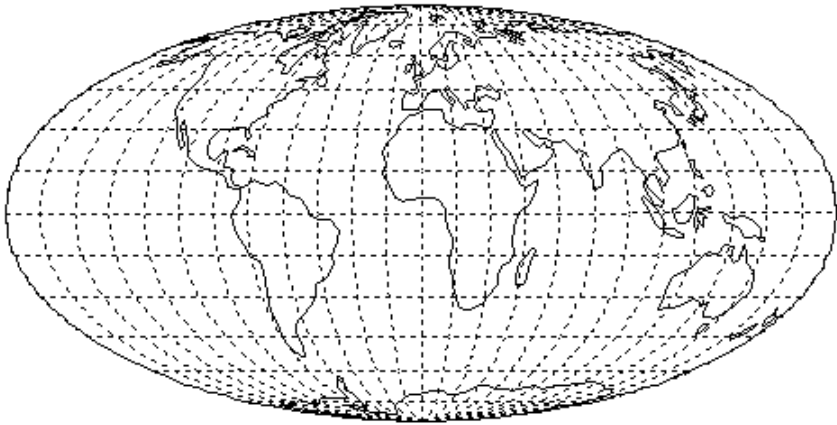


Figura 7.11: Planisferio en proyección de Mollweide. Meridiano central de  $0^\circ$ .

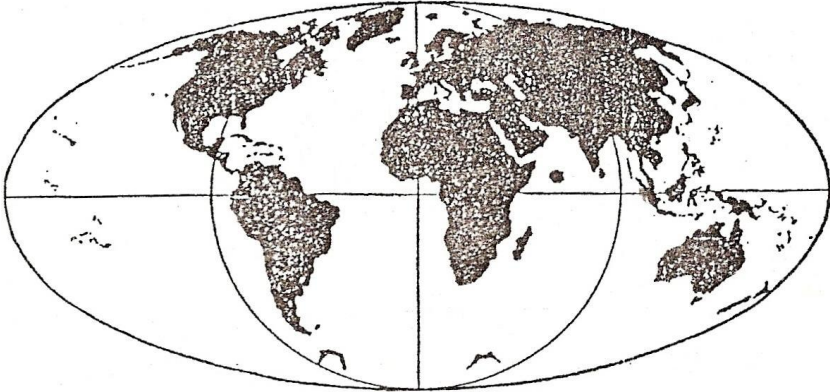


Figura 7.12: Planisferio en proyección de Mollweide dibujados: Meridiano central de  $0^\circ$ . Meridiano de  $90^\circ$  E y de  $90^\circ$  W. Meridianos de  $180^\circ$ .

- Del gráfico de la Figura 7.7 se obtiene el valor de  $\alpha = 49^\circ 25'$ .

$$X = \frac{2\sqrt{2}R\Delta\lambda \cos \alpha}{\pi} = \frac{2\sqrt{2} \times 6\,370\text{km} \cos 49^\circ 25' \times 30^\circ \frac{\pi}{180^\circ}}{\pi} = 1\,953,512\text{km}$$

$$Y = \sqrt{2}R \sin \alpha = \sqrt{2} \times 6\,370\text{km} \sin 49^\circ 25' = 6\,841,631\text{km}.$$

- $k = \frac{2\sqrt{2} \cos \alpha}{\pi \cos \varphi} = \frac{2\sqrt{2} \cos 49^\circ 25'}{\pi \cos 60^\circ} = 1,171407554.$

$$h = \frac{1}{k \cos \varepsilon}. \text{ Debe calcularse entonces el valor de } \varepsilon:$$

$$\text{tg } \varepsilon = \frac{2\Delta\lambda \text{tg } \alpha}{\pi} = \frac{2 \times 30^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \text{tg } 49^\circ 25'}{\pi} = 0,389135702. \text{ Entonces}$$

$$\varepsilon = 21^\circ 15' 46'' \text{ y}$$

$$h = \frac{1}{k \cos \varepsilon} = \frac{1}{1,171407554 \cos 21^\circ 15' 46''} = 0,916030804.$$

- El ángulo que forman las proyecciones de paralelos y meridianos en el punto es  $\alpha' = 90^\circ - \varepsilon = 68^\circ 44' 14''$ .

- Conociendo los valores de  $h$  y de  $k$  se calculan:

$$N_1 = \frac{\sqrt{h^2 + k^2 + 2} + \sqrt{h^2 + k^2 - 2}}{2} = 1,255915 \text{ y}$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{h^2 + k^2 + 2} - \sqrt{h^2 + k^2 - 2}}{2} = 0,796232229.$$

La orientación de  $N_1$  y  $N_2$  se consigue con el método gráfico detallado en la Figura 7.5.

- Dibujo en escala de la elipse de Tissot: Figura 7.13

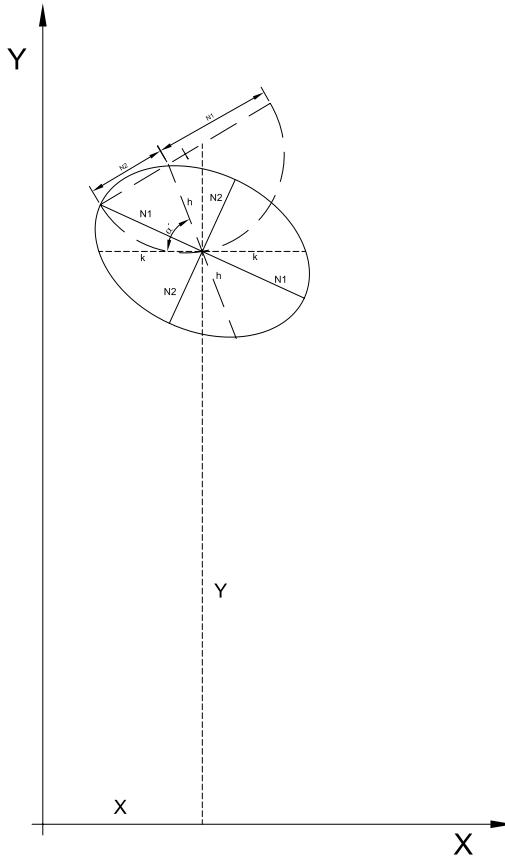
### 7.3 Proyecciones interrumpidas

Las más conocidas son la Proyección Sinusoidal Interrumpida, la Proyección de Mollweide Interrumpida y la Proyección de Goode.

#### 7.3.1 Proyección Sinusoidal Interrumpida y Proyección de Mollweide Interrumpida

Se basan en el siguiente principio: se supone cortada la superficie terrestre a lo largo de un meridiano o de un semimeridiano, de modo tal que el corte origine la formación de husos y semihusos sobre la superficie terrestre, cada uno con un meridiano o semimeridiano central. De esta manera las deformaciones, que dependen de la distancia al meridiano central, se acentúan hacia los bordes de los husos. Según la distancia al meridiano central, serán menores en los bordes de cada huso o semihuso que en el mismo lugar en la proyección sin interrumpir (ver Figura 7.18).

Los cortes sobre los meridianos se realizan de acuerdo con la conveniencia según el tema a estudiar; por ejemplo, existen las proyecciones interrumpidas de los continentes, que son aquellas en que los cortes se hacen en los meridianos que atraviesan los océanos, quedando los continentes íntegramente comprendidos dentro de un huso o semihuso. En otros casos interesa, para estudios oceanográficos, cortar sobre los meridianos que atraviesan los continentes (ver Figuras 7.15, 7.16, 7.17).



**Figura 7.13:** *Elipse indicatriz de Tissot. Proyección de Mollweide.*

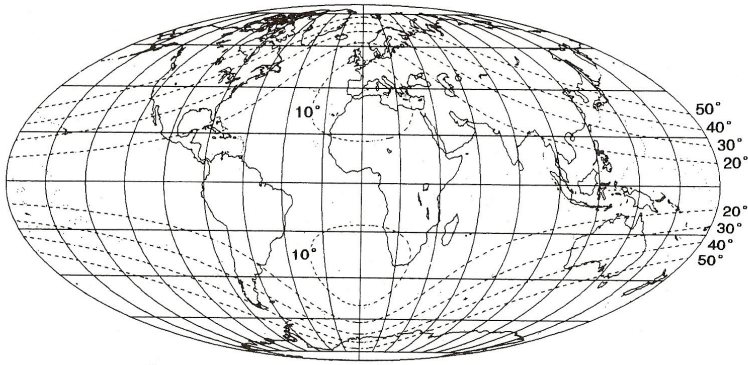
### 7.3.2 Características y propiedades

Son las mismas que las de las proyecciones sin interrumpir (ver Proyección Sinusoidal y Proyección de Mollweide, respectivamente).

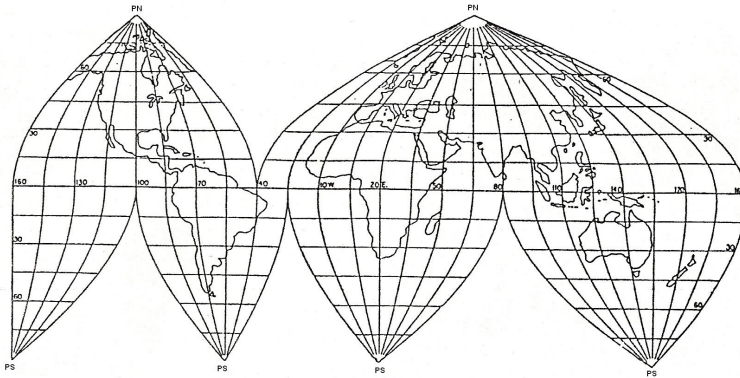
### 7.3.3 Proyección Interrumpida de Goode (Ver Figura 7.19)

Se basa en el siguiente principio: se considera la superficie de la Proyección Sinusoidal Interrumpida entre los paralelos de latitudes  $40^{\circ}44'12''$  norte y sur y se le adosa la Proyección Interrumpida de Mollweide entre esas latitudes y los Polos.

Se tiene así una proyección que presenta menos deformaciones que las proyecciones Sinusoidal Interrumpida y de Mollweide Interrumpida, pues



**Figura 7.14:** Proyección de Mollweide. Paralelos y meridianos cada  $20^\circ$ . Las líneas de trazos son líneas de igual deformación angular máxima.



**Figura 7.15:** Proyección sinusoidal interrumpida (de los continentes).

se utilizó de ambas la parte menos deformada: las latitudes menores de  $40^\circ 44' 12''$  norte y sur de la Proyección Sinusoidal Interrumpida y, entre esas latitudes y los Polos, la de Mollweide Interrumpida.

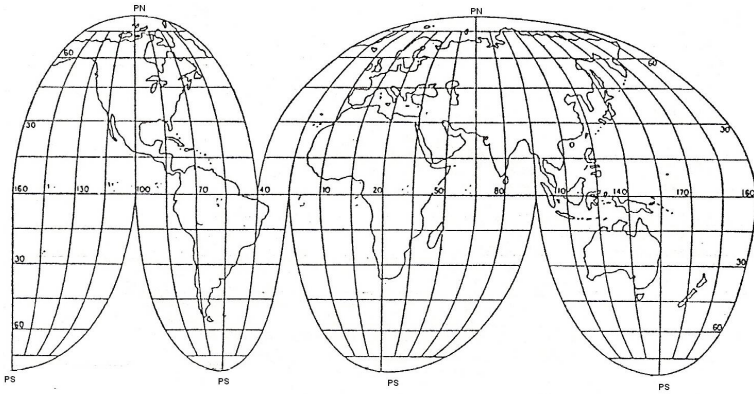
## 7.4 Proyección de Ecker IV.

Se trata de una proyección equivalente.

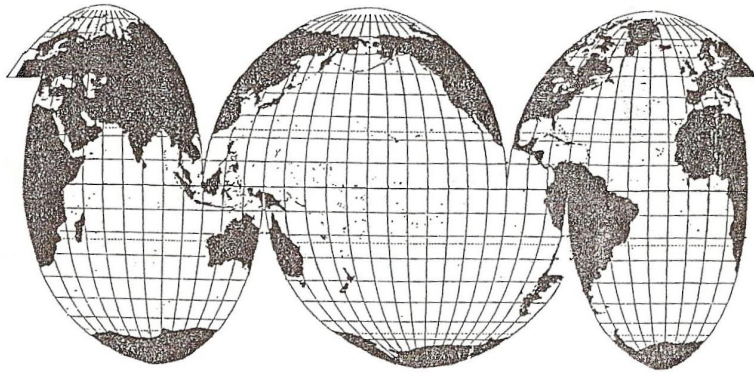
### 7.4.1 Dibujo

En el planisferio los Polos están representados por rectas paralelas al Ecuador y de una longitud igual a la mitad del mismo y los meridianos de los bordes este y oeste según dos semicircunferencias (Figura 7.20).

Para obtener la fórmula que permite calcular la distancia de cualquier



**Figura 7.16:** Proyección de Mollweide (homográfica) interrumpida (de los continentes).



**Figura 7.17:** Proyección de Mollweide interrumpida (de los océanos).

paralelo al Ecuador deben igualarse las áreas en la esfera y en la proyección.

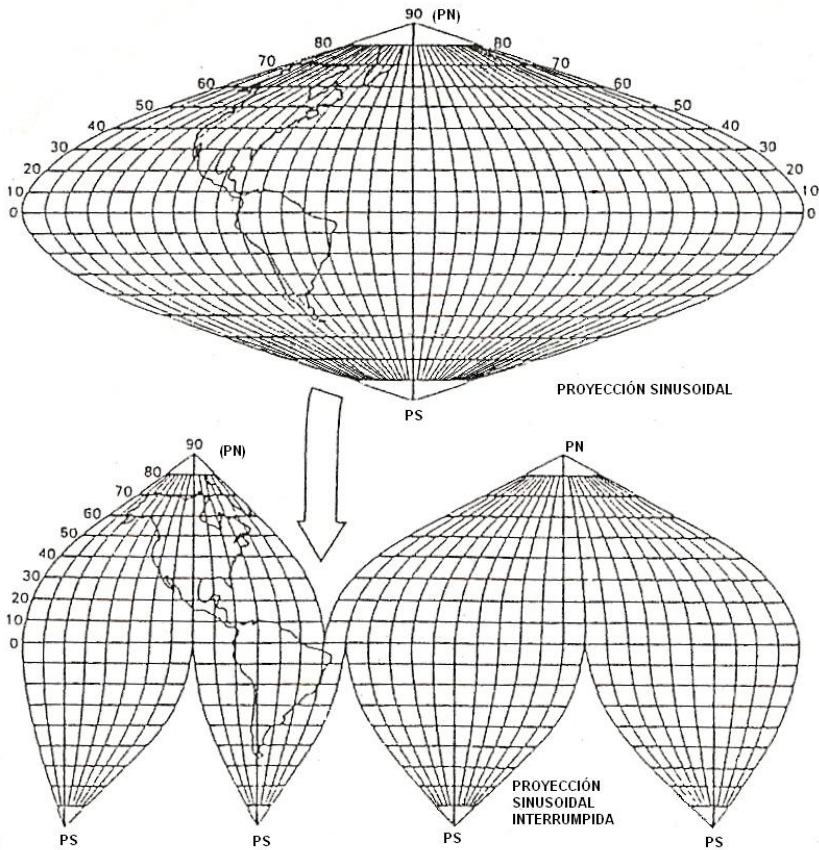
$$\text{Área superficie terrestre} = 4\pi R^2 \quad (7.15)$$

$$\text{Área proyección} = 2R_1^2 + 2\frac{\pi R_1^2}{2} \text{ (Figura 7.20)}$$

$$\text{Área proyección} = R_1^2(4 + \pi) \quad (7.16)$$

Por la condición de equivalencia antes mencionada, deben igualarse las





**Figura 7.18:** El continente americano representado en proyección sinusoidal y en proyección sinusoidal interrumpida. Puede apreciarse la menor deformación en el segundo caso.

expresiones 7.15 y 7.16:

$$4\pi R^2 = R_1^2(4 + \pi)$$

$$R_1^2 = \frac{4\pi R^2}{(4 + \pi)}$$

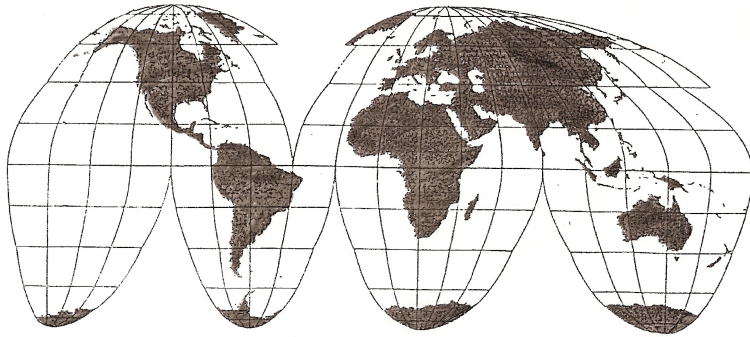
$$R_1 = \sqrt{\frac{4\pi R^2}{(4 + \pi)}}$$

$$R_1 = 2R\sqrt{\frac{\pi}{(4 + \pi)}} = 2R\sqrt{\frac{\pi^2}{\pi(4 + \pi)}} = \frac{2R\pi}{\sqrt{\pi(4 + \pi)}}, \text{ siendo } R = 6\,370\text{km};$$

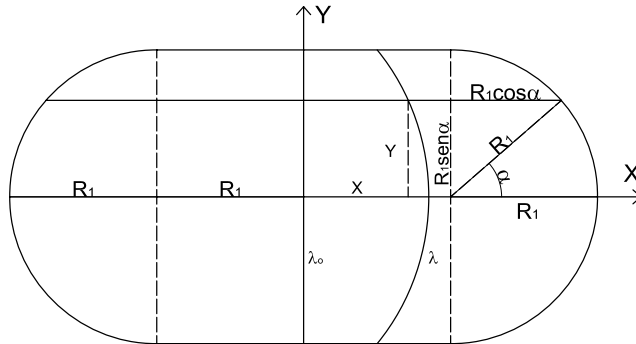
$$R_1 = 8\,449,808\text{km}.$$

Tomando un paralelo cualquiera de latitud  $\varphi$  se tiene:

$$\text{Área zona esférica } (0^\circ; \varphi) = 2\pi R h$$



**Figura 7.19:** Proyección de Goode (homolosinusoidal).



**Figura 7.20:** Cálculo de coordenadas en la proyección de Ecker IV.

siendo  $h = R \text{sen } \varphi$ , entonces

$$\text{Área zona esférica}(0^\circ; \varphi) = 2\pi R^2 \text{sen } \varphi \quad (7.17)$$

El área en la proyección (ver Figura 7.20) entre el Ecuador y el paralelo de latitud  $\varphi$  es:

$$\text{Área en la proyección}(0^\circ; \varphi) = 2 \left[ R_1 R_1 \text{sen } \alpha + \frac{R_1 \text{sen } \alpha R_1 \cos \alpha}{2} + \frac{R_1 \alpha R_1}{2} \right]$$

$$\text{Área en la proyección}(0^\circ; \varphi) = 2 \left[ R_1^2 \text{sen } \alpha + \frac{R_1^2 \text{sen } \alpha \cos \alpha}{2} + \frac{R_1^2 \alpha}{2} \right]$$

Como  $\text{sen } \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \text{sen } 2\alpha$ :

$$\text{Área en la proyección}(0^\circ; \varphi) = 2R_1^2 \left[ \text{sen } \alpha + \frac{\text{sen } 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right] \quad (7.18)$$

Como la proyección es equivalente:

$$2\pi R^2 \operatorname{sen} \varphi = 2R_1^2 \left[ \operatorname{sen} \alpha + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right]$$

pero  $R_1 = 2R\sqrt{\frac{\pi}{(4+\pi)}}$ , entonces  $R_1^2 = \frac{4R^2\pi}{4+\pi}$ . Reemplazando :

$$\pi R^2 \operatorname{sen} \varphi = \frac{4R^2\pi}{4+\pi} \left[ \operatorname{sen} \alpha + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right]$$

$$\text{Por lo tanto: } \operatorname{sen} \varphi = \frac{4}{4+\pi} \left[ \operatorname{sen} \alpha + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right]$$

Entonces:

$$(4+\pi) \operatorname{sen} \varphi = 4 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha + 2\alpha \quad (7.19)$$

Esto permite calcular la distancia de cualquier paralelo al Ecuador a través de la fórmula

$$Y = R_1 \operatorname{sen} \alpha \quad (7.20)$$

El valor de  $\alpha$  se obtiene del modo siguiente: en forma análoga a la explicada para la proyección de Mollweide, en la fórmula 7.19 se dan valores al ángulo  $\alpha$  en intervalos constantes, y se calculan los correspondientes valores de  $\varphi$ , con los cuales se confecciona un gráfico cuyo eje de abscisas corresponde a los valores de  $\alpha$  y las ordenadas son los valores de  $\varphi$ . Luego, en el gráfico, se seleccionan intervalos constantes de  $\varphi$  y se hallan los correspondientes valores de  $\alpha$ . Con estos últimos, aplicando la fórmula 7.20 se hallan las distancias de la proyección de cada paralelo a la proyección del Ecuador. En la tabla 7.2 se consignan los valores de  $\varphi$  cada  $5^\circ$ , los correspondientes valores de  $\alpha$  y las distancias de un paralelo al Ecuador.

### Ejemplo

Se desea dibujar un planisferio en Proyección Eckert IV con paralelos y meridianos cada  $15^\circ$ , con meridiano central  $\lambda_0 = 0^\circ$ , siendo la escala 1 : 296 000 000.

Se dibuja en escala el Ecuador, cuya longitud es  $4R_1 = 33\,799,232\text{km}$  (en escala 11,42cm). Luego se traza el meridiano central perpendicular al Ecuador en su punto medio, de longitud  $2R_1 = 16\,899,616\text{km}$  (en escala 5, 71cm).

$\varphi$	$\alpha$	$Y_\varphi = R_1 \text{ sen } \alpha$
0°	0° 00'00"	0, 000km
5°	4°27'54"	657, 818km
10°	8°56'12"	1 312, 615km
15°	13°25'12"	1 961, 094km
20°	17°55'18"	2 600, 145km
25°	22°27'30"	3 227, 924km
30°	27°01'42"	3 839, 855km
35°	31°38'30"	4 432, 813km
40°	36°18'42"	5 003, 784km
45°	41°02'42"	5 548, 580km
50°	45°51'30"	6 063, 751km
55°	50°45'54"	6 544, 869km
60°	55°46'54"	6 987, 152km
65°	60°56'00"	7 385, 597km
70°	66°14'42"	7 733, 909km
75°	71°45'12"	8 024, 929km
80°	77°30'06"	8 249, 567km
85°	83°33'18"	8 396, 406km
90°	90°00'00"	8 449, 808km

**Tabla 7.2**

A continuación se dibujan los Polos, que están representados por dos rectas perpendiculares al meridiano central en sus extremos y de longitudes iguales a la mitad del Ecuador (en escala 5, 71cm). Luego se divide cada mitad del Ecuador en partes iguales y haciendo centro con el compás en el punto medio, con un radio  $R_1 = 8\,449,808\text{km}$  (en escala 2,85cm), se trazan dos semicircunferencias opuestas, quedando así el perímetro del planisferio.

Para trazar los paralelos, se dibujan rectas paralelas al Ecuador a una distancia  $Y$  de éste (ver valores calculados en la Tabla 7.3). Dichos valores deberán luego calcularse en la escala correspondiente.

Se divide ahora el Ecuador y cada paralelo en intervalos iguales de 15° de diferencia de longitud geográfica (en este caso, 24 partes iguales). Por los puntos de división del Ecuador y los paralelos, se trazan las curvas representativas de los meridianos.

$\varphi$	Y	En escala
0°	0, 000km	0, 00cm
5°	657, 818km	0,22cm
10°	1 312, 615km	0,44cm
15°	1 961, 094km	0,66cm
20°	2 600, 145km	0,88cm
25°	3 227, 924km	1,09cm
30°	3 839, 855km	1,30cm
35°	4 432, 813km	1,50cm
40°	5 003, 784km	1,69cm
45°	5 548, 580km	1,87cm
50°	6 063, 751km	2, 05cm
55°	6 544, 869km	2, 21cm
60°	6 987, 152km	2, 36cm
65°	7 385, 597km	2, 50cm
70°	7 733, 909km	2, 61cm
75°	8 024, 929km	2, 71cm
80°	8 249, 567km	2, 79cm
85°	8 396, 406km	2, 84cm
90°	8 449, 808km	2, 85cm

Tabla 7.3

#### 7.4.2 Coordenadas cartesianas de un punto

Cada paralelo está dividido en partes iguales. Por lo tanto, se puede escribir la siguiente proporción (Figura 7.20):

$$\frac{X}{R_1 + R_1 \cos \alpha} = \frac{\lambda}{\pi}$$

Por lo tanto:

$$X = \frac{R_1(1 + \cos \alpha)\lambda}{\pi}$$

en donde  $R_1 = \frac{2R\pi}{\sqrt{\pi(4 + \pi)}}$

Entonces:  $X = \frac{2R(1 + \cos \alpha)\lambda}{\sqrt{\pi(4 + \pi)}}$  o bien  $X = \frac{2R(1 + \cos \alpha)\Delta\lambda}{\sqrt{\pi(4 + \pi)}}$

Además:  $Y = R_1 \sin \alpha = \frac{2R\pi}{\sqrt{\pi(4 + \pi)}} \sin \alpha.$

### Ejemplos:

Cálculo de las coordenadas cartesianas del punto ( $\varphi = 45^\circ N, \lambda = 120^\circ E$ ) en un planisferio dibujado en la proyección de Eckert IV, con meridiano central  $\lambda_0 = 0^\circ$ .

Para  $\varphi = 45^\circ$  se tiene  $\alpha = 41^\circ 02' 42''$  (ver Tabla 7.2).

$$X = \frac{2 \times 6\,370\,km(1 + \cos 41^\circ 02' 42'') 120^\circ \frac{\pi}{180^\circ}}{\sqrt{\pi(4 + \pi)}} = 981,735\,km.$$

$$Y = \frac{2 \times 6\,370\,km \times \pi}{\sqrt{\pi(4 + \pi)}} \sin 41^\circ 02' 42'' = 5\,548,580\,km.$$

### Nota

Para hallar la distancia, en la proyección, de los paralelos de longitud correcta ( $\varphi = \pm 40^\circ 30'$ ) hasta el Ecuador, se igualan las longitudes de dichos paralelos en la esfera y en la proyección:

$$2\pi R \cos 40^\circ 30' = 2R_1 + 2R_1 \cos \alpha = 2R_1(1 + \cos \alpha).$$

$$2\pi R \cos 40^\circ 30' = 2 \frac{2R\pi}{\sqrt{\pi(4 + \pi)}} (1 + \cos \alpha).$$

$$1 + \cos \alpha = \cos 40^\circ 30' \frac{\sqrt{\pi(4 + \pi)}}{2}.$$

$$\cos \alpha = \cos 40^\circ 30' \frac{\sqrt{\pi(4 + \pi)}}{2} - 1$$

De aquí se obtiene que  $\alpha = 36^\circ 47' 4,22''$ , lo que permite calcular

$$Y = R_1 \sin \alpha = 8\,449,808\,km \sin 36^\circ 47' 4,22'' = 5\,059,797\,km.$$

### Ejercicio

Calcular el error máximo angular ( $\delta_{\max}$ ) en el punto ( $\varphi = 45^\circ, \lambda = 120^\circ$ ) de la proyección de Eckert IV, siendo el meridiano central  $\lambda_0 = 0^\circ$ .

$$\delta_{\max} = 2\arcsen \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} = 2\arcsen \frac{1,319635115 - 0,757785228}{1,319635115 + 0,757785228} = 31^\circ 22' 58''.$$

### 7.4.3 Características y propiedades

El Ecuador se proyecta según una recta de longitud incorrecta, menor que la real, ya que en la proyección es  $4R_1 = 33\,799,232\text{km}$ , mientras que en la esfera mide  $2\pi R = 40\,023,890\text{km}$ . Los paralelos se proyectan según rectas paralelas al Ecuador que se van acercando acentuadamente entre sí al ir del Ecuador hacia los Polos. Se demuestra que las dimensiones de los paralelos de latitudes  $40^\circ 30'$  norte y sur son correctas; los paralelos de latitudes menores que las citadas se proyectan con longitudes menores que las reales y los comprendidos entre las latitudes  $40^\circ 30'$  norte y sur y los Polos tienen dimensiones mayores que en la esfera. Las deformaciones en cada punto en la dirección del paralelo están dadas por el módulo de alteración lineal  $k$ .

$$\begin{aligned} k &= \frac{\text{longitud del paralelo en la proyección}}{\text{longitud del paralelo en la esfera}} \\ &= \frac{2R_1 + 2R_1 \cos \alpha}{2\pi R \cos \varphi} = \frac{2R_1(1 + \cos \alpha)}{2\pi R \cos \varphi} \\ k &= \frac{2R \sqrt{\frac{\pi}{4+\pi}}(1 + \cos \alpha)}{\pi R \cos \varphi} = \frac{\frac{2R\pi}{\sqrt{\pi(4+\pi)}}(1 + \cos \alpha)}{\pi R \cos \varphi} = \frac{2(1 + \cos \alpha)}{\sqrt{\pi(4+\pi)} \cos \varphi} \end{aligned}$$

Para la latitud  $\varphi = 40^\circ 30'$  ( $\alpha = 36^\circ 47' 4,22''$ ) el valor de  $k$  es:

$$k = \frac{2(1 + \cos 36^\circ 47' 4,22'')}{\sqrt{\pi(4+\pi)} \cos 40^\circ 30'} = 1$$

### Ejemplos:

Calcular el módulo de alteración lineal  $k$  en cada caso para la latitud que se indica.

- $\varphi = 30^\circ N$ . En este caso  $\alpha = 27^\circ 1' 42''$ .

$$k = \frac{2(1 + \cos 27^\circ 1' 42'')}{\sqrt{\pi(4+\pi)} \cos 30^\circ} = 0,9218669 \cong 0,922 < 1.$$

- $\varphi = 60^\circ N$ . En este caso  $\alpha = 55^\circ 46' 54''$ .

$$k = \frac{2(1 + \cos 55^\circ 46' 54'')}{\sqrt{\pi(4 + \pi)} \cos 60^\circ} = 1,319366 > 1.$$

El meridiano central es el único que se proyecta según una recta. Su longitud es menor que la real:  $2R_1 = 16\,899,616\text{km}$ , siendo en la esfera de  $20\,011,945\text{km}$ . Los dos meridianos cuyas longitudes geográficas difieren  $180^\circ$  al este y al oeste se proyectan según dos semicircunferencias de longitudes incorrectas.

En cada meridiano, el arco comprendido entre las latitudes de  $40^\circ 30'$  norte y sur en esta proyección tiene una longitud mayor que la real y, entre esas latitudes y los Polos, dimensiones menores que las reales. La deformación en cada punto de un meridiano está dada por el módulo  $h$ .

La región ecuatorial está fuertemente alargada en el sentido norte-sur. Esto da el aspecto característico a esta proyección que, por el contrario, ofrece una representación satisfactoria para las zonas templadas.

Esta proyección no es isógona ya que  $h \neq k$ , pero es equivalente, pues  $hk \cos \varepsilon = 1$ .

#### 7.4.4 Cálculo de los semiejes de la elipse de Tissot

Según el Teorema de Nicolosi:

$$N_1 N_2 = hk \operatorname{sen} \alpha'$$

donde  $\alpha'$  es el ángulo que forman el paralelo y el meridiano en el punto. Además, como la proyección es equivalente  $hk \operatorname{sen} \alpha' = 1$ . Entonces:

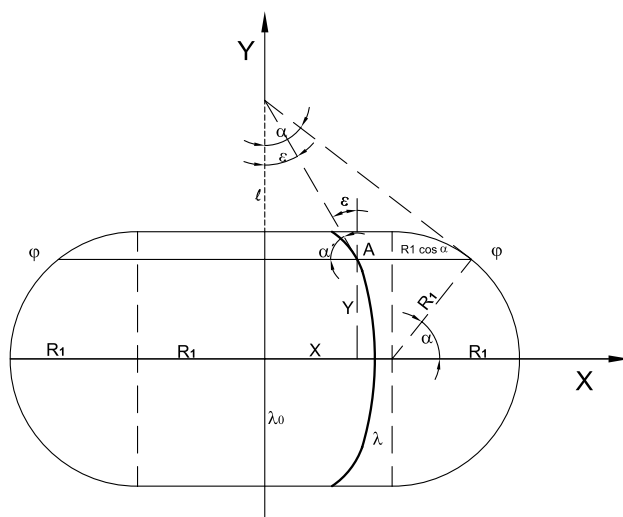
$$h = \frac{1}{k \operatorname{sen} \alpha'}$$

Además (ver Figura 7.21):  $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{X}{l}$  y  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_1 + R_1 \cos \alpha}{l}$ . Entonces:

$$\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{X}{R_1(1 + \cos \alpha)} = \frac{\lambda R_1(1 + \cos \alpha)}{\pi R_1(1 + \cos \alpha)} = \frac{\lambda}{\pi}$$

De aquí que  $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\lambda}{\pi} \operatorname{tg} \alpha$ , de donde es posible obtener el valor de  $\varepsilon$  y, por lo tanto, el de  $\alpha' = 90^\circ - \varepsilon$ .





**Figura 7.21:** Proyección de Eckert IV. Cálculo de  $N_1$  y  $N_2$

Ya se ha deducido, para otras proyecciones equivalentes (ver Proyección sinusoidal, sección 7.1), que:

$$N_1 = \frac{\sqrt{h^2 + k^2 + 2} + \sqrt{h^2 + k^2 - 2}}{2} \text{ y } N_2 = \frac{\sqrt{h^2 + k^2 + 2} - \sqrt{h^2 + k^2 - 2}}{2}$$

### Ejercicio

En un planisferio dibujado en escala 1 : 127 420 000 en la proyección de Eckert IV, con meridiano central  $\lambda_0 = 0^\circ$ , para el punto ( $\varphi = 45^\circ N, \lambda = 120^\circ E$ ), calcular:

- las coordenadas cartesianas del punto,
- el ángulo de intersección del paralelo y el meridiano en ese punto ( $\alpha'$ ),
- los valores de los módulos de alteración lineal  $h$  y  $k$ ,
- los valores de los semiejes de la elipse de Tissot  $N_1$  y  $N_2$  y su dirección, y
- dibujar la elipse de Tissot en escala conveniente.

Solución:

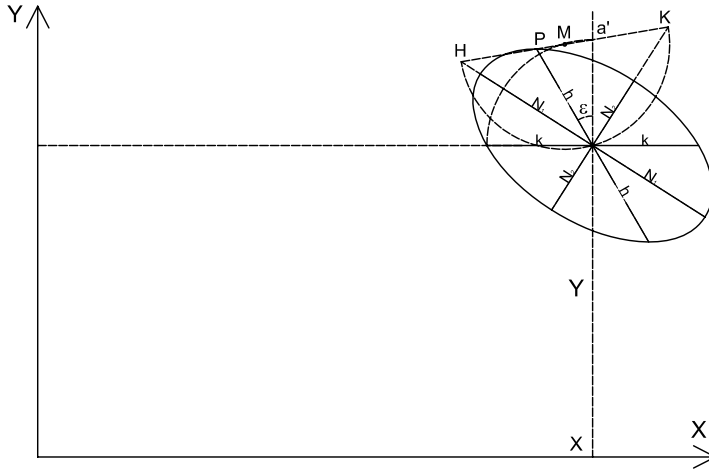


Figura 7.22: Elipse indicatriz de Tisserot

- a) Para  $\varphi = 45^\circ$  se tiene  $\alpha = 41^\circ 02' 42''$  (ver Tabla 7.2).

$$X = \frac{2 \times 6\,370\text{km}(1 + \cos 41^\circ 02' 42'') 120^\circ \frac{\pi}{180^\circ}}{\sqrt{\pi(4 + \pi)}} = 9881,735\text{km}.$$

$$X \text{ (en escala)} = 7,75\text{cm}.$$

$$Y = \frac{2 \times 6\,370\text{km} \times \pi}{\sqrt{\pi(4 + \pi)}} \text{sen } 41^\circ 02' 42'' = 5\,548,580\text{km}.$$

$$Y \text{ (en escala)} = 4,35\text{cm}.$$

b)  $\text{tg } \varepsilon = \frac{\lambda}{\pi} \text{tg } \alpha = \frac{120^\circ}{180^\circ} \text{tg } 41^\circ 02' 42'' = 0,580444381.$

Entonces  $\varepsilon = 30^\circ 07' 58''$  y  $\alpha' = 90^\circ - 30^\circ 07' 58'' = 59^\circ 52' 2''.$

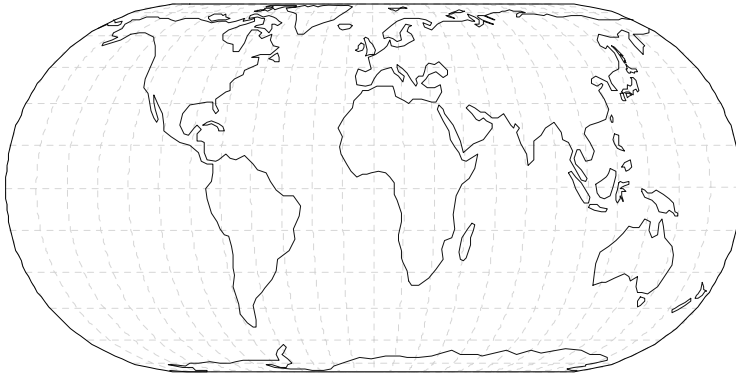
- c)

$$k = \frac{2(1 + \cos \alpha)}{\sqrt{\pi(4 + \pi)} \cos \varphi} = \frac{2(1 + \cos 41^\circ 02' 42'')}{\sqrt{\pi(4 + \pi)} \cos 45^\circ} = 1,047490665$$

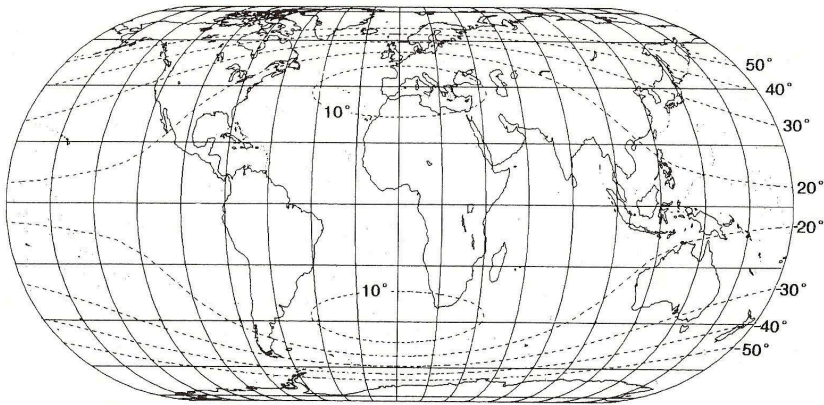
$$h = \frac{1}{k \text{sen } \alpha'} = \frac{1}{1,047490665 \text{sen } 59^\circ 52' 2''} = 1,103829084.$$

- d)

$$N_1 = \frac{\sqrt{h^2 + k^2 + 2} + \sqrt{h^2 + k^2 - 2}}{2} = 1,319635115;$$



**Figura 7.23:** Proyección de Eckert IV



**Figura 7.24:** Proyección de Eckert IV. Paralelos y meridianos cada 20°. Líneas de igual deformación angular máxima

$$N_2 = \frac{\sqrt{h^2 + k^2 + 2} - \sqrt{h^2 + k^2 - 2}}{2} = 0,757785228.$$

e) Dibujo de la Elipse Indicatriz de Tissot: Figura 7.22.

Para dibujar la figura 7.22 se siguió el procedimiento gráfico aplicado en la Figura 7.5

### 7.4.5 Usos

Para mapas y planisferios estadísticos.

## 7.5 Proyección globular (o de Nicolosi)

### 7.5.1 Cálculo de coordenadas

Observar los triángulos que se mencionan a continuación en la Figura 7.25.

En el triángulo  $ABP$ :  $\frac{BP}{AB} = \frac{\text{sen } P\hat{A}B}{\text{sen}(90^\circ - \frac{\delta}{2})}$ ; o sea

$$\frac{BP}{AB} = \frac{\text{sen } P\hat{A}B}{\cos \frac{\delta}{2}} \quad (7.21)$$

En el triángulo  $P'AB$ :  $\frac{AB}{BP'} = \frac{\text{sen } \frac{\delta}{2}}{\text{sen}(90^\circ - P\hat{A}B)}$ ; o sea

$$\frac{AB}{BP'} = \frac{\text{sen } \frac{\delta}{2}}{\cos P\hat{A}B} \quad (7.22)$$

Multiplicando miembro a miembro las igualdades 7.21 y 7.22, resulta:

$$\frac{BP}{BP'} = \frac{\text{sen } P\hat{A}B \text{sen } \frac{\delta}{2}}{\cos P\hat{A}B \cos \frac{\delta}{2}}. \text{ Por lo tanto, } \frac{BP}{BP'} = \text{tg } P\hat{A}B \text{tg } \frac{\delta}{2}$$

En el triángulo  $PA'B$ ,  $P\hat{A}B = P\hat{A}A' + A'\hat{A}B = \frac{\delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\delta + \varepsilon}{2}$

En el triángulo  $CAO$ , es

$$\gamma = \delta + \varepsilon \quad (7.23)$$

Por lo tanto el ángulo  $P\hat{A}B = \frac{\gamma}{2}$  y

$$\frac{BP}{BP'} = \text{tg } \frac{\gamma}{2} \text{tg } \frac{\delta}{2} \quad (7.24)$$

Dado que el meridiano central es de longitud correcta:

$$\frac{BP}{BP'} = \frac{R\delta}{R(\pi - \delta)} = \frac{\delta}{\pi - \delta} \quad (7.25)$$

Como 7.24 = 7.25,

$$\frac{\delta}{\pi - \delta} = \text{tg } \frac{\gamma}{2} \text{tg } \frac{\delta}{2} \therefore \text{tg } \frac{\gamma}{2} = \frac{\delta}{\pi - \delta} \text{cotg } \frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{\gamma}{2} \quad (7.26)$$

De 7.23  $\varepsilon = \gamma - \delta$

En el triángulo  $COA$ , es

$$\frac{r_p}{R\frac{\pi}{2}} = \frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } \varepsilon} \therefore r_p = R\frac{\pi}{2} \frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } \varepsilon} \quad (7.27)$$

y

$$\frac{Y_c}{OA} = \frac{\text{sen}(180^\circ - \gamma)}{\text{sen } \varepsilon} \therefore Y_c = R\frac{\pi}{2} \frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \varepsilon} \quad (7.28)$$

En el triángulo  $POQ$ :

$$\operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{OQ}{PO} = \frac{R\lambda}{R\frac{\pi}{2}} = \frac{2\lambda}{\pi} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{2\lambda}{\pi} \quad (7.29)$$

Mientras que en el triángulo  $C'OP$ ,  $r_m = PO \operatorname{cosec} \mu$

$$r_m = R \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec} \mu \quad (7.30)$$

También en  $C'OP$ :

$$C'O = PO \cotg \mu \therefore X_{c'} = \frac{\pi}{2} R \cotg \mu \quad (7.31)$$

En  $N$  el paralelo y el meridiano no se cortan a  $90^\circ$ , por no ser isógona la proyección. El error angular

$$\iota = C'\hat{N}C - \frac{\pi}{2} \therefore C'\hat{N}C = \frac{\pi}{2} + \iota$$

siendo  $C'NC$  el ángulo que forman las proyecciones del meridiano y el paralelo que pasan por  $N$  y, por lo tanto, el ángulo que forman las tangentes en  $N$  que, en la esfera, es de  $90^\circ$ .

En el triángulo  $C'SN$ , debido a la propiedad de los ángulos interiores de un triángulo:

$$C'\hat{S}N = \pi - C'\hat{N}C = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \iota\right) = \frac{\pi}{2} - \iota$$

Por lo tanto:  $N\hat{C}'S = \iota$  y  $\operatorname{sen} \iota = \frac{NS}{C'N} = \frac{NS}{C'P} = \frac{NS}{\frac{OP}{\operatorname{sen} \mu}} = \frac{NS \operatorname{sen} \mu}{\frac{\pi}{2} R}$

Se demuestra que  $NN_1 = AA_1$ . En efecto:  $CP \times CP' = CA \times CA_1$  porque "Si desde un punto del plano de una circunferencia se trazan secantes a la misma, el producto de las distancias de dicho punto a los puntos de intersección de cada secante, es una constante"

Esto es lo que se conoce como potencia de un punto respecto de una circunferencia.

Aplicando el mismo razonamiento al arco  $PNN_1P'$ , se tiene que:

$$CP \times CP' = CN \times CN_1$$

De lo anterior:  $CA \times CA_1 = CN \times CN_1$ . Entonces:  $CA(CA + AA_1) = CN(CN + NN_1)$ . Pero  $CA = CN$  y  $\therefore AA_1 = NN_1$ .

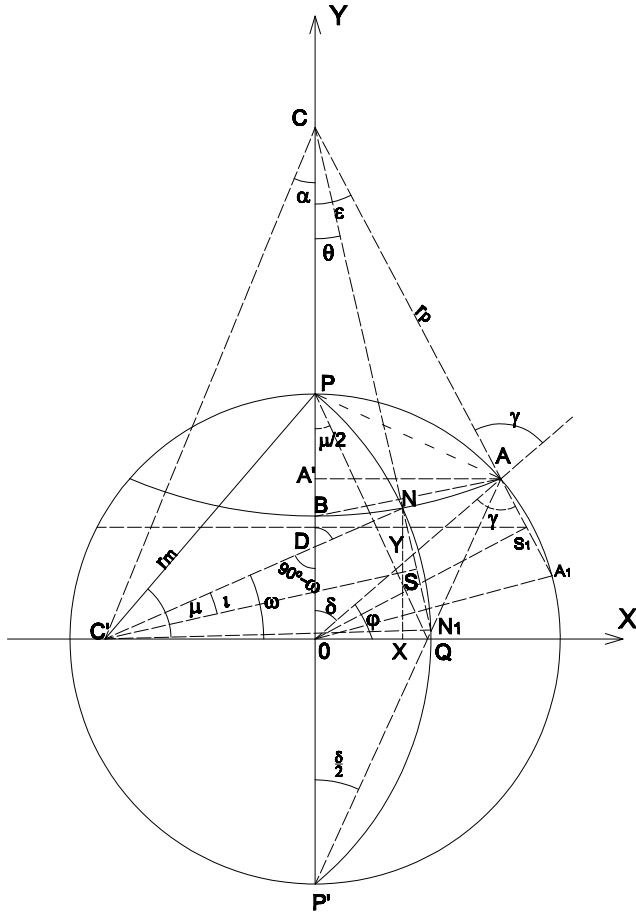


Figura 7.25: Proyección globular: Cálculo de coordenadas.

Como  $NS = \frac{NN_1}{2}$  y  $AS_1 = \frac{AA_1}{2}$ , resulta  $NS = AS_1 = OA \cos \gamma = \frac{\pi}{2} R \cos \gamma$ .

Entonces

$$\operatorname{sen} \iota = \frac{\frac{\pi}{2} R \cos \gamma \operatorname{sen} \mu}{\frac{\pi}{2} R} \therefore \operatorname{sen} \iota = \cos \gamma \operatorname{sen} \mu \quad (7.32)$$

De 7.28 y 7.31 ,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{X_{c'}}{Y_c} \quad (7.33)$$

de donde se obtiene  $\alpha$ .

En el triángulo  $C'NC$ :

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \theta)}{r_m} = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ + \iota)}{CC'} \therefore \operatorname{sen}(\alpha + \theta) = \frac{r_m \cos \iota}{CC'}$$

$$\text{siendo } CC' = \frac{X_{c'}}{\text{sen } \alpha} = \frac{\frac{\pi}{2} R \cotg \mu}{\iota \text{sen } \alpha} \text{ y } r_m = \frac{\frac{\pi}{2} R}{\text{sen } \mu}.$$

$$\text{sen}(\alpha + \theta) = \frac{\frac{\pi}{2} R \cos \iota \text{sen } \alpha}{\frac{\pi}{2} R \cotg \mu \text{sen } \mu}. \text{ Por lo tanto:}$$

$$\text{sen}(\alpha + \theta) = \frac{\cos \iota \text{sen } \alpha}{\cos \mu} \quad (7.34)$$

En el triángulo  $DNC$  se verifica que:  $90^\circ - \omega + \theta + 90^\circ + \iota = 180^\circ$ , o sea  $-\omega + \theta + \iota = 0$ . Por lo tanto:

$$\omega = \theta + \iota \quad (7.35)$$

Finalmente:

$$X = r_p \text{sen } \theta \quad (7.36)$$

$$X = r_m \text{sen } \omega$$

### Ejemplo 1:

En el mapa del continente americano (Figura 7.26), con meridiano central  $\lambda_0 = 80^\circ W$ , se desean conocer las coordenadas cartesianas del punto ( $\varphi = 60^\circ N, \lambda = 20^\circ W$ ).

De acuerdo con los datos  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = -20^\circ - (-80^\circ) = 60^\circ$  y  $\delta = 30^\circ$ .

Reemplazando estos valores en las fórmulas antes deducidas:

$$\text{En 7.26 } \text{tg } \frac{\gamma}{2} = \frac{30^\circ}{180^\circ - 30^\circ} \cotg \frac{30^\circ}{2} \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = 36^\circ 44' 16,92'' \Rightarrow \gamma = 73^\circ 28' 33,85'' \cong 78^\circ 28' 34''.$$

$$\text{En 7.23 } \varepsilon = \gamma - \delta = 43^\circ 28' 33,85'' \cong 43^\circ 28' 34''.$$

$$\text{Aplicando 7.47 } r_p = 6\,370\text{km} \frac{\pi}{2} \frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{sen } 43^\circ 28' 34''} = 7\,271,238\text{km}.$$

$$\text{Según 7.28 } Y_C = 6\,370\text{km} \frac{\pi \text{sen } 73^\circ 28' 34''}{2 \text{sen } 43^\circ 28' 34''} = 13\,941,878\text{km}.$$

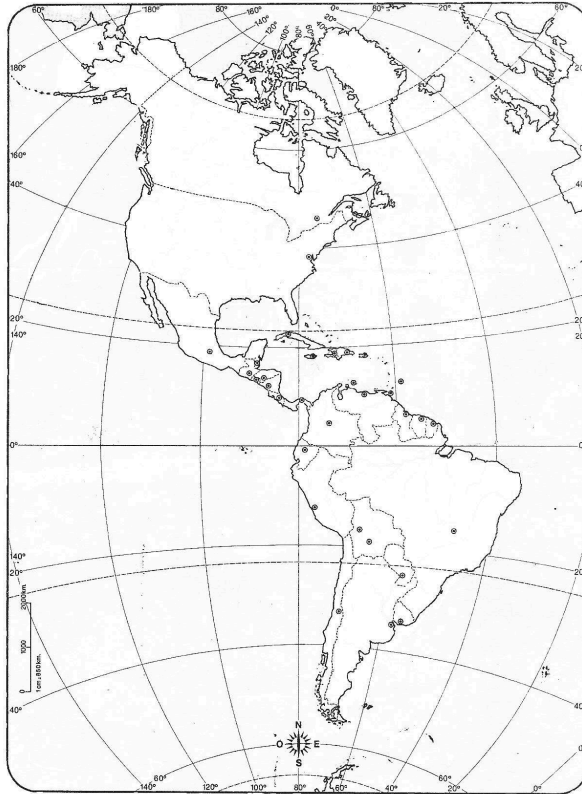
$$\text{En 7.29 } \text{tg } \frac{\mu}{2} = \frac{2\Delta\lambda \frac{\pi}{180^\circ}}{\pi} = \frac{2\Delta\lambda}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\mu}{2} = 33^\circ 41' 24'' \Rightarrow \mu = 67^\circ 22' 48''.$$

$$\text{Por 7.30 } r_m = 6\,370\text{km} \frac{\pi}{2} \text{cosec } 67^\circ 22' 48'' = 10\,839,814\text{km}.$$

$$\text{De acuerdo con 7.31: } X_{c'} = \frac{\pi}{2} 6\,370\text{km} \cotg 67^\circ 22' 48'' = 4\,169,183\text{km}.$$

$$\text{Por 7.32 } \text{sen } \iota = \cos 73^\circ 28' 34'' \text{sen } 67^\circ 22' 48'' \Rightarrow \iota = 15^\circ 13' 14''.$$

Se calcula  $\text{tg } \alpha = \frac{4\,169,183\text{km}}{13\,941,878\text{km}}$  según 7.33, de donde se obtiene que  $\alpha = 16^\circ 38' 56''$ .



**Figura 7.26:** Proyección globular o de Nicolosi del continente americano,  $\lambda_0 = 80^\circ W$

También, por 7.34,  $\text{sen}(\alpha + \theta) = \frac{\cos 15^\circ 13' 14'' \text{sen } 16^\circ 38' 56''}{\cos 67^\circ 22' 48''}$ , por lo que  $\alpha + \theta = 45^\circ 57' 14''$  y  $\theta = 29^\circ 18' 18''$ .

Por 7.35  $\omega = 29^\circ 18' 18'' + 15^\circ 13' 14'' = 44^\circ 31' 32''$ .

De acuerdo con todo lo anterior se tiene que:

$$X = 7\,271,238\text{km} \text{sen } 29^\circ 18' 18'' = 3\,558,970\text{km}.$$

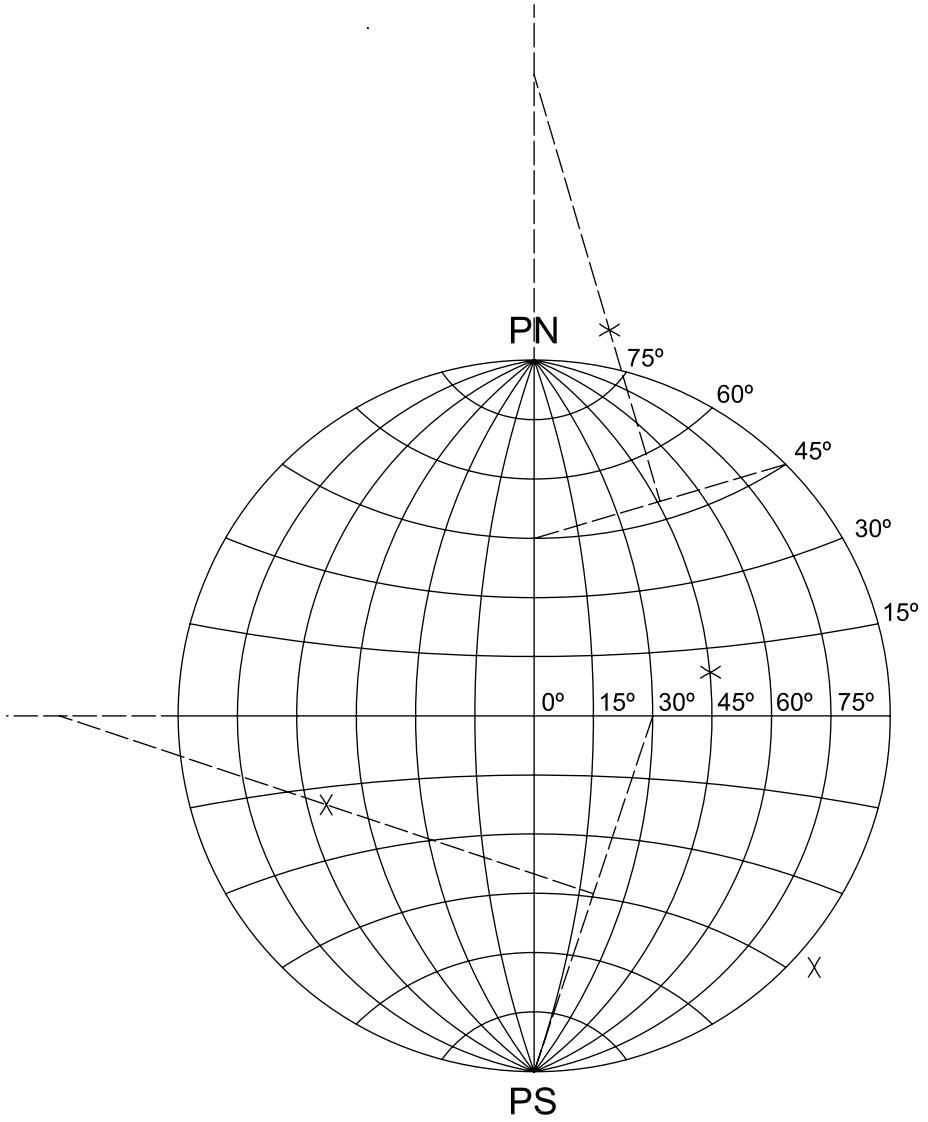
$$Y = 10\,839,814\text{km} \text{sen } 44^\circ 31' 32'' = 7\,601,174\text{km}.$$

**Ejemplo 2:**

En el mapa de un hemisferio terrestre en proyección globular (Figura 7.27), con meridiano central  $\lambda_0 = 0^\circ$ , se desean conocer las coordenadas cartesianas del punto ( $\varphi = 60^\circ N, \lambda = 75^\circ E$ ).

$$\text{En 7.26 } \text{tg } \frac{\gamma}{2} = \frac{30^\circ}{180^\circ - 30^\circ} \text{cotg } \frac{30^\circ}{2} \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = 36^\circ 44' 17'' \Rightarrow \gamma = 73^\circ 28' 34''.$$





**Figura 7.27:** *Proyección globular de un hemisferio,  $\lambda_0 = 0^\circ$ .*

Entonces  $\varepsilon = \gamma - \delta = 43^\circ 28' 34''$ .

$$\text{En 7.27 } r_p = 6\,370\text{km} \frac{\pi}{2} \frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{sen } 43^\circ 28' 34''} = 7\,271,238\text{km}.$$

$$\text{A partir de 7.28: } Y_C = 6\,370\text{km} \frac{\pi}{2} \frac{\text{sen } 73^\circ 28' 34''}{\text{sen } 43^\circ 28' 34''} = 13\,941,878\text{km}.$$

$$\text{En 7.29 } \text{tg } \frac{\mu}{2} = \frac{2\Delta\lambda \frac{\pi}{180^\circ}}{\pi} = \frac{2\Delta\lambda}{180^\circ} \Rightarrow \frac{\mu}{2} = 39^\circ 48' 20'' \Rightarrow \mu = 79^\circ 36' 40''.$$

$$\text{Por 7.30 } r_m = 6\,370\text{km} \frac{\pi}{2} \text{cosec } 79^\circ 36' 40'' = 10\,172,740\text{km}.$$

$$\text{De acuerdo con 7.31: } X_{c'} = \frac{\pi}{2} 6\,370\text{km} \text{cotg } 79^\circ 36' 40'' = 1\,834,434\text{km}.$$

$$\text{Por 7.32 } \text{sen } \iota = \cos 73^\circ 28' 34'' \text{sen } 79^\circ 36' 40'' \Rightarrow \iota = 16^\circ 14' 44''.$$

Reemplazando en 7.33 los valores calculados:  $\text{tg } \alpha = \frac{1\,834,434\text{km}}{13\,941,878\text{km}}$ , lo que permite obtener el valor del ángulo  $\alpha = 7^\circ 29' 45''$ .

Según la fórmula 7.34,  $\text{sen}(\alpha + \theta) = \frac{\cos 16^\circ 14' 44'' \text{sen } 7^\circ 29' 45''}{\cos 79^\circ 36' 40''}$ , de donde se obtiene que  $\alpha + \theta = 43^\circ 59' 26''$ . Por lo tanto  $\theta = 36^\circ 29' 41''$ .

$$\text{Por 7.35 } \omega = 36^\circ 29' 41'' + 16^\circ 14' 44'' = 52^\circ 44' 25''.$$

De todo lo antes calculado y a partir de las fórmulas 7.36, se obtienen las coordenadas buscadas:

$$X = 7\,271,238\text{km} \text{sen } 36^\circ 29' 41'' = 4\,324,560\text{km}.$$

$$Y = 10\,172,740\text{km} \text{sen } 52^\circ 44' 25'' = 8\,096,476\text{km}.$$

## 7.5.2 Características y propiedades(para un hemisferio)

El meridiano central es una recta de longitud correcta ( $\pi R$ ) dividida por los paralelos en partes iguales. Los demás meridianos son arcos de circunferencia de longitudes mayores que en la esfera. Los meridianos de diferencia de longitud  $\pm 90^\circ$  con el central se representan según semi-circunferencias opuestas de radio igual a  $\frac{\pi R}{2}$ . Los meridianos dividen al Ecuador en partes iguales. La deformación en cada punto de un meridiano

está dada por:

$$h = \left( 1 + 2 \frac{\frac{\pi}{2} Y_C \cos \varphi - r_p}{R \frac{\pi}{2} \sin \varphi - \varphi R} \sec^2 \frac{\theta}{2} \right) \sec \iota$$

Para el ejemplo 1 anterior se tiene:

$$\begin{aligned} h &= \left( 1 + 2 \frac{\frac{\pi}{2} 13\,941,878 \text{ km} \cos 60^\circ - 7\,271,238 \text{ km}}{6\,370 \text{ km} \frac{\pi}{2} \sin 60^\circ - 60^\circ \frac{\pi}{180^\circ} 6\,370 \text{ km}} \sec^2 \frac{29^\circ 18' 18''}{2} \right) \sec 15^\circ 13' 14'' \\ h &= 1,280935 \end{aligned}$$

El Ecuador se representa según una recta de longitud correcta. Los paralelos son arcos de circunferencia que intersecan a los meridianos del perímetro y al meridiano central en puntos que limitan arcos proporcionales a los homólogos de la esfera terrestre. En un paralelo, cada punto presenta una deformación dada por:

$$k = \frac{r_p \sen \theta}{R \sen(90^\circ - \varphi) \cos \iota} \frac{1}{\Delta \lambda}$$

En el ejemplo 1 anterior se tiene:

$$k = \frac{7\,271,238 \text{ km} \sen 29^\circ 18' 18''}{R \sen(90^\circ - 60^\circ) \cos 15^\circ 13' 14''} \frac{180^\circ}{60^\circ \pi} = 0,552921978.$$

El ángulo en la intersección del paralelo y el meridiano en un punto es:

$$\alpha' = 90^\circ - \iota = 74^\circ 46' 46''.$$

Los semiejes de la Elipse de Tissot en un punto (empleando el teorema de Nicolosi) son:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\sqrt{h^2 + k^2 + 2hk \sen \alpha'} + \sqrt{h^2 + k^2 - 2hk \sen \alpha'}}{2} \\ N_2 &= \frac{\sqrt{h^2 + k^2 + 2hk \sen \alpha'} - \sqrt{h^2 + k^2 - 2hk \sen \alpha'}}{2} \end{aligned}$$

los que, reemplazando por los valores obtenidos para el ejemplo 1, resultan:  $N_1 = 1,29081$  y  $N_2 = 0,52944$

Esta proyección no es isógona pues  $N_1 \neq N_2$ . El error máximo angular en un punto está dado por:

$$\delta_{\max} = 2 \arcsen \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$$

que, para el punto del ejemplo 1 antes considerado, vale:

$$\delta_{\max} = 2 \arcsen \frac{1,29081 - 0,52944}{1,29081 + 0,52944} = 49^{\circ}27'6''$$

Esta proyección tampoco es equivalente, pues  $N_1 N_2 = hk \sen \alpha' \neq 1$ .

Para el caso del ejemplo 1 resulta:

$$N_1 N_2 = 1,29081 \times 0,52944 = 0,683406446.$$

### 7.5.3 Dibujo de la Elipse de Tissot

En la Figura 7.25 el punto  $N$  se encuentra en la intersección del paralelo de colatitud  $\delta$  (latitud  $\varphi$ ) y el meridiano de longitud  $\lambda$ . Se han calculado anteriormente los valores para el punto ( $\varphi = 60^{\circ}N, \lambda = 20^{\circ}W$ ) en un mapa en el que  $\lambda_0 = 80^{\circ}W$  (Figura 7.26), obteniendo los siguientes valores:

$$X = 3\,558,970\text{km}$$

$$Y = 7\,601,174\text{km}$$

$$h = 1,28094$$

$$k = 0,55292$$

$$\alpha = 74^{\circ}46'46''$$

$$N_1 = 1,29081$$

$$N_2 = 0,52944$$

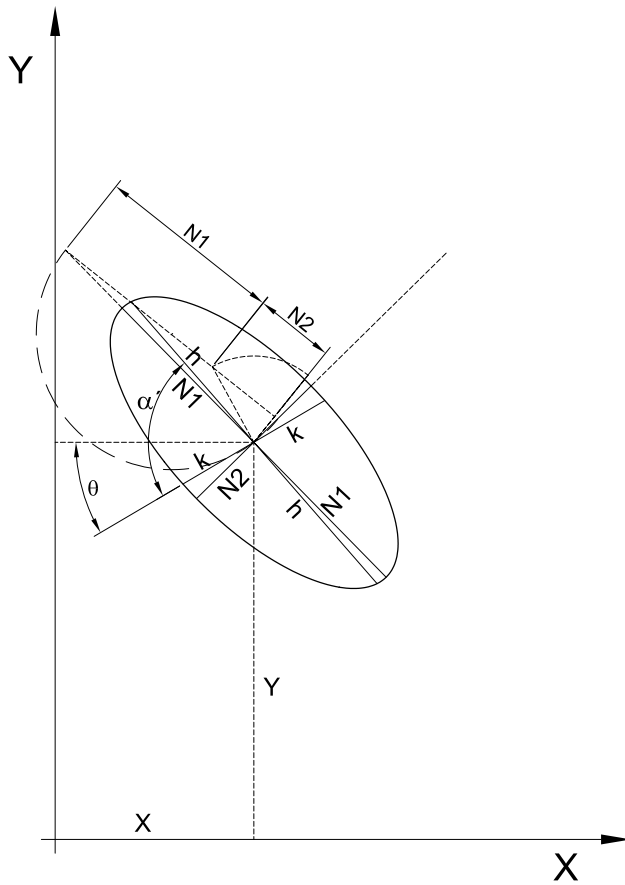
$$\theta = 29^{\circ}18'18''.$$

Para este ejemplo se ha ubicado el punto y dibujado la elipse de Tissot por el método gráfico descrito en la sección 7.1.5 (Figura 7.28)

### 7.6 Proyección aérea perspectiva

Con el uso de satélites y aviones adquiere importancia la elaboración de mapas para mostrar la superficie terrestre vista desde tales vehículos (naves). La proyección aérea perspectiva es una respuesta a esta necesidad. Se deducirá el caso general (caso oblicuo), cuando el centro de la proyección –punto de tangencia del plano de proyección– tiene coordenadas conocidas  $\varphi_0$  y  $\lambda_0$ .

En la Figura 7.29 se representa la posición del punto de vista  $V$  constituido por el vehículo espacial. El punto  $O$ , de coordenadas  $\varphi_0$  y  $\lambda_0$ , es el punto nadir del vehículo y punto de tangencia del plano de proyección.



**Figura 7.28:** Proyección globular. Elipse Indicatriz de Tissot

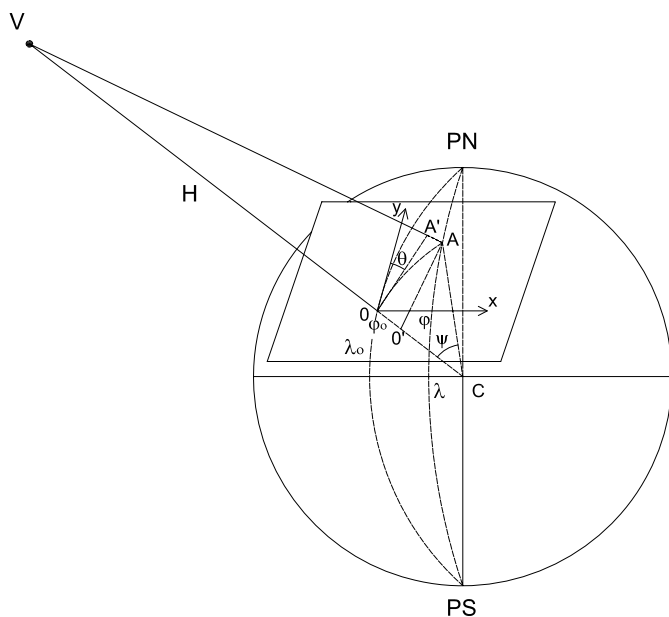
La altura del vehículo sobre la superficie terrestre es  $H$ . El punto  $A$  de la Tierra tiene coordenadas geográficas  $\varphi$  y  $\lambda$ . El punto  $A'$  sobre el plano es la intersección del rayo de proyección  $VA$  con dicho plano.

En la Figura 7.29, con centro en  $O$ , se considera un par de ejes coordenados, estando  $Y$  situado en dirección norte y  $X$  en dirección este.  $\psi$  es el ángulo que forman los radios  $CO$  y  $CA$ . En dicha figura se tiene:

$$O'A = R \operatorname{sen} \psi \quad (7.37)$$

siendo  $O'A$  la paralela a  $OA'$  y perpendicular al radio  $CO$ . Además:

$$CO' = R \operatorname{cos} \psi \quad (7.38)$$



**Figura 7.29:** *Proyección aérea perspectiva*

$$OO' = R - CO' = R - R \cos \psi = R(1 - \cos \psi) \quad (7.39)$$

En el plano de la proyección, las coordenadas polares del punto  $A'$  con respecto a  $O$  y al eje  $OY$  son  $OA'$  y el acimut  $\theta$ .

En la Figura 7.29 se observa también que los triángulos  $VOA'$  y  $VO'A$  son semejantes; por lo tanto:

$$\frac{OA'}{H} = \frac{O'A}{H + OO'}$$

de donde se obtiene que:

$$OA' = O'A \frac{H}{H + OO'}. \quad (7.40)$$

Reemplazando 7.37 y 7.39 en 7.40 resulta:

$$OA' = R \operatorname{sen} \psi \frac{H}{H + R(1 - \cos \psi)}.$$

Las coordenadas cartesianas de  $A'$  son:

$$X = OA' \operatorname{sen} \theta$$

$$Y = OA' \operatorname{cos} \theta$$

o sea:

$$X = R \operatorname{sen} \frac{H}{H + R(1 - \cos \psi)} \operatorname{sen} \theta$$

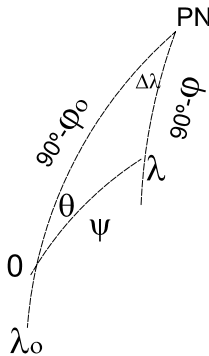
$$Y = R \operatorname{sen} \frac{H}{H + R(1 - \cos \psi)} \cos \theta$$

Resolviendo el triángulo esférico  $OPNA$  (Figura 7.30), se obtienen las expresiones de  $\psi$  y  $\theta$  en función de  $\varphi$  y  $\lambda$ . Por el teorema del coseno se tiene que:

$$\cos \psi = \cos(90^\circ - \varphi_0) \cos(90^\circ - \varphi) + \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_0) \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi) \cos \Delta \lambda$$

o sea:

$$\cos \psi = \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda \quad (7.41)$$



**Figura 7.30:** Triángulo esférico

Por otra parte, aplicando el teorema del seno se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen}(90^\circ - \varphi)} = \frac{\operatorname{sen} \Delta \lambda}{\operatorname{sen} \psi}$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda}{\operatorname{sen}}$$

Si ahora se aplica el teorema del seno-coseno a dicho triángulo se tiene la relación:

$$\operatorname{sen} \psi \cos \theta = \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi_0) \cos(90^\circ - \varphi) - \cos(90^\circ - \varphi_0) \operatorname{sen}(90^\circ - \varphi) \cos \Delta \lambda$$

O, lo que es lo mismo:

$$\operatorname{sen} \psi \cos \theta = \cos \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda$$

De allí es posible obtener la expresión de  $\cos \theta$  en función de los datos conocidos:

$$\cos \theta = \frac{\cos \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda}{\operatorname{sen} \psi}$$

Se pueden calcular entonces las coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} X = R \left[ \frac{H}{H+R(1-\cos \psi)} \right] \cos \varphi \operatorname{sen} \Delta \lambda \\ Y = R \left[ \frac{H}{H+R(1-\cos \psi)} \right] (\cos \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi \cos \Delta \lambda) \end{cases} \quad (7.42)$$

### Nota

Si  $H \rightarrow \infty$ , el factor entre corchetes de las expresiones 7.42 tenderá a 1 y se reducirá al caso oblicuo de la proyección acimutal ortográfica.

### Ejemplos:

Hallar las coordenadas cartesianas de un punto  $(\varphi, \Delta \lambda)$  de la proyección aérea perspectiva.

Datos

$$H = 7\,000\text{km}; \varphi_0 = 45^\circ; \lambda_0 = 0^\circ; \varphi = 40^\circ; \lambda = 40^\circ.$$

Aplicando la fórmula 7.41:  $\cos \psi = \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 40^\circ + \cos 45^\circ \cos 40^\circ \cos 40^\circ = 0,869467032$ , es posible obtener ahora las coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} X &= 6\,370\text{km} \left[ \frac{7\,000\text{km}}{7\,000\text{km} + 6\,370\text{km}(1 - 0,869467)} \right] \cos 40^\circ \operatorname{sen} 40^\circ \\ &= 2803,588\text{km} \\ Y &= 6\,370\text{km} \left[ \frac{7\,000\text{km}}{7\,000\text{km} + 6\,370\text{km}(1 - 0,869467)} \right] \times \\ &\quad (\cos 45^\circ \operatorname{sen} 40^\circ - \operatorname{sen} 45^\circ \cos 40^\circ \cos 40^\circ) = 225,311\text{km} \end{aligned}$$

### Ejercicio

#### Dibujo del canevas para los datos del ejemplo anterior

Dibujar en escala conveniente el canevas de la proyección aérea perspectiva con los meridianos y paralelos cada  $10^\circ$ .



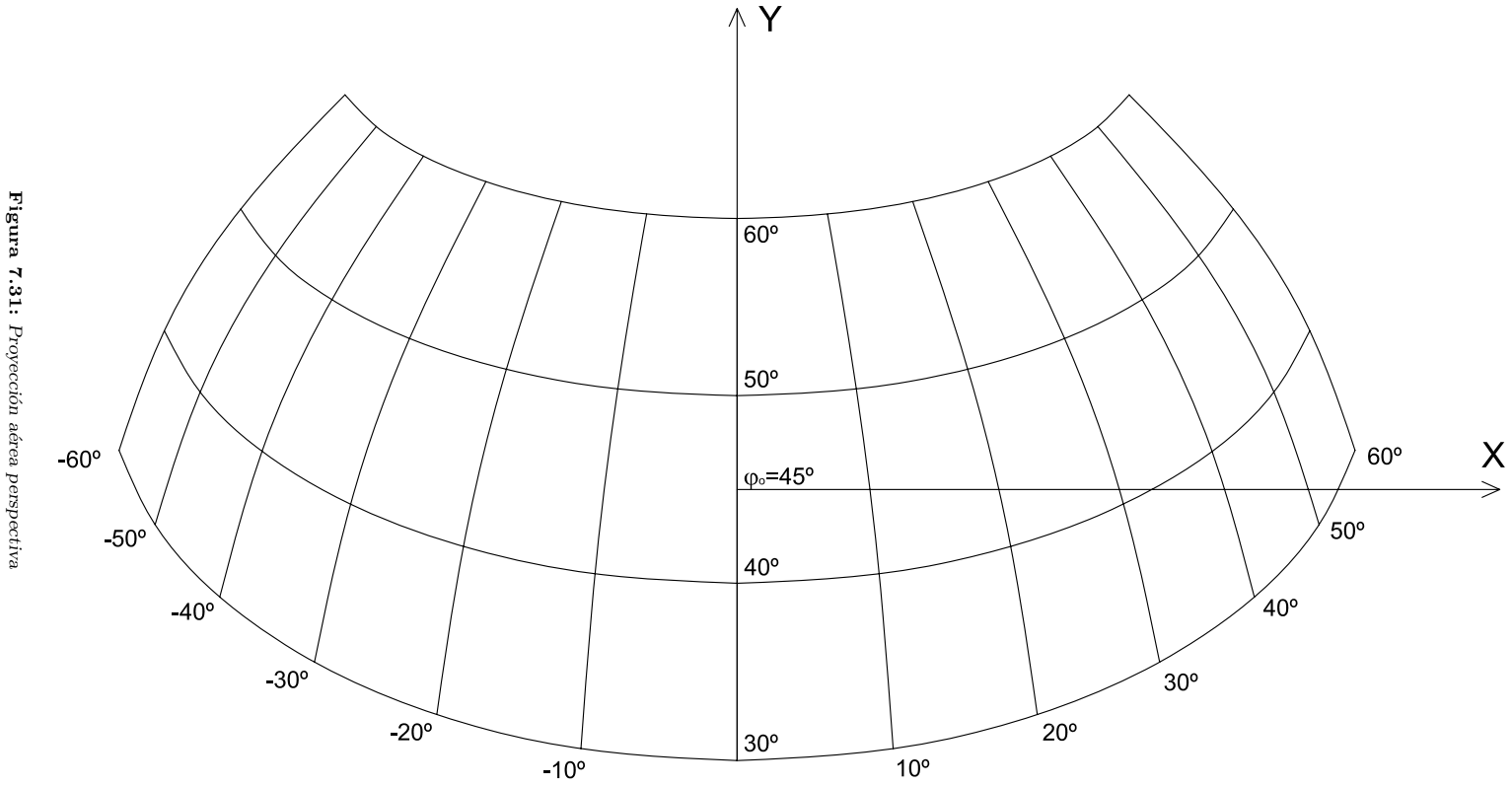


Figura 7.31: Proyección aérea perspectiva

$\varphi \downarrow \lambda \rightarrow$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
30° X	0,000	921,567	1772,268	2494,687	3053,252	3435,541	3647,957
Y	-1599,093	-1529,058	-1327,645	-1018,452	-633,780	-207,516	230,391
40° X	0,000	838,172	1615,344	2281,296	2803,588	3169,087	3380,960
Y	- 553,266	- 497,315	- 335,943	- 86,869	225,311	574,265	936,099
50° X	0,000	704,149	1361,738	1933,444	2392,164	2724,622	2929,919
Y	- 553,266	593,385	709,631	890,640	1120,267	1380,647	1654,860
60° X	0,000	533,905	1037,056	1482,621	1850,599	2129,137	2314,246
Y	1599,093	1624,577	1698,857	1815,832	1966,572	2140,757	2328,057

**Tabla 7.4:** PROYECCIÓN AÉREA PERSPECTIVA.

Considerar el centro de la proyección en el punto ( $\varphi_0 = 45^\circ; \lambda_0 = 0^\circ$ ). Dibujar los paralelos de latitudes desde  $30^\circ\text{N}$  a  $60^\circ\text{N}$  y los meridianos de  $0^\circ$  a  $60^\circ$  este y oeste.

Solución: Empleando las fórmulas 7.42 se confecciona la Tabla 7.4, en la que se consignan, para cada latitud y longitud, los valores de  $X$  e  $Y$  en kilómetros.

## 7.7 Proyección de Van Der Grinten

La proyección de Van der Grinten proporciona la representación de la totalidad de la superficie terrestre dentro de un círculo. Originalmente, su empleo estuvo vinculado a la confección de un mapa base. Se comenzará por el procedimiento geométrico que permite confeccionarlo y luego se analizarán las ecuaciones de sus coordenadas cartesianas, sin deducirlas.

### 7.7.1 Dibujo de la proyección

En la Figura 7.32, el Ecuador está dado por la recta  $EE'$ , de longitud correcta ( $2\pi R$ ). El meridiano central es la recta  $NS$  de longitud incorrecta. Los otros meridianos son arcos de circunferencia que pasan por los polos y dividen al Ecuador en partes iguales. Los paralelos son también arcos circulares cuyo trazado está determinado por el procedimiento siguiente:

- Se unen con una recta los puntos  $E$  y  $N$ .
- Se toma una latitud arbitraria  $A'$  sobre  $ON$ ; suponiendo que la latitud varía linealmente a lo largo del meridiano central:

$$\frac{OA'}{ON} = \frac{\varphi}{\frac{\pi}{2}}$$

Por lo tanto  $OA' = 2ON \frac{\varphi}{\pi}$

- Se traza  $AA'$  paralela al Ecuador, que intersecta a  $EN$  en  $B$ .
- Se une  $B$  con  $E'$ , cortando al meridiano central en  $C'$ .
- Se traza por  $C'$  la recta  $CC'$  paralela al Ecuador, obteniendo  $C''$ , que es uno de los puntos de la proyección del paralelo, siendo el simétrico  $C$ , otro punto del mismo.

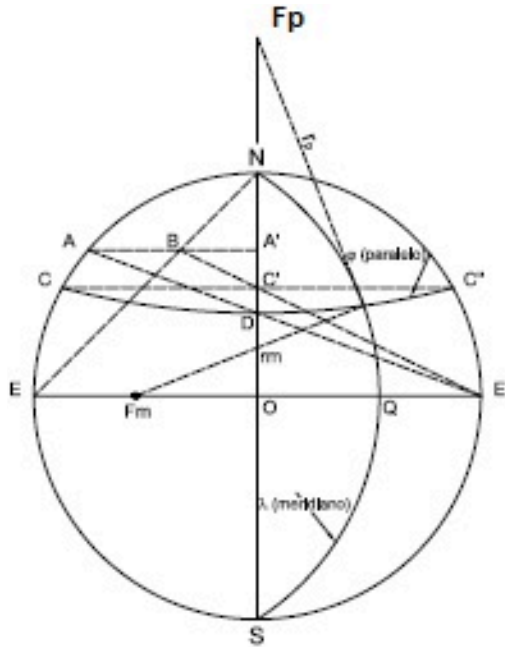


Figura 7.32:  $F_m$  : centro del arco  $NQS$ .  $F_p$  : centro del arco  $CDC''$

- Se une  $A$  con  $E'$ , obteniéndose  $D$  en la intersección con el meridiano central.
- Se halla el centro del arco de circunferencia que pasa por esos tres puntos y se traza el arco  $CDC''$ .

La proyección del paralelo de latitud  $\varphi$  es un arco de circunferencia que pasa por  $C$ ,  $D$  y  $C''$ .

Para el trazado de un meridiano de longitud  $\Delta\lambda$ , que es también un arco de circunferencia, se tienen dos puntos  $N$  y  $S$ . Falta únicamente un tercer punto ( $Q$ ) del Ecuador tal que:

$$\frac{OQ}{OE'} = \frac{\Delta\lambda}{\pi},$$

por la proporcionalidad entre longitudes  $\Delta\lambda$  y distancias a partir de  $O$ . De aquí:  $OQ = OE' \frac{\Delta\lambda}{\pi}$ . El meridiano es el arco de circunferencia que pasa por  $N$ ,  $Q$  y  $S$ .

### 7.7.2 Procedimiento analítico

Requiere de un proceso algo extenso y que escapa al propósito de este libro, por lo que se dará, de manera sucinta, un resumen de fórmulas. En primer lugar es necesario definir dos ángulos auxiliares  $\psi$  y  $\theta$ , en función de la latitud y de la longitud del punto ( $\varphi$  y  $\Delta\lambda$ ).

$$\psi = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{\Delta\lambda} - \frac{\Delta\lambda}{\pi} \right); \quad \theta = \arcsen \frac{2\varphi}{\pi}$$

Luego es necesario definir algunas expresiones auxiliares:

$$G = \frac{\cos\theta}{\sen\theta + \cos\theta - 1}; \quad P = G \left( \frac{2}{\sen\theta} - 1 \right); \quad Q = \psi^2 + G$$

Con la sustitución de esas variables y expresiones auxiliares se obtienen expresiones de las coordenadas cartesianas en un sistema de ejes en el cual el eje  $X$  se toma colineal con la proyección del Ecuador y el eje  $Y$  con la del meridiano central:

$$X = \frac{\pm\pi R \left\{ \psi(G - P^2) + [\psi^2(G - P^2)^2 - (P^2 + \psi^2)(G^2 - P^2)]^{\frac{1}{2}} \right\}}{P^2 + \psi^2}$$

$$Y = \frac{\pm\pi R \left\{ PQ - \psi[(\psi^2 + 1)(P^2 + \psi^2) - Q^2]^{\frac{1}{2}} \right\}}{P^2 + \psi^2}$$

El signo elegido para la coordenada  $X$  depende del signo de  $\Delta\lambda$ . Esto se cumple para  $-180^\circ \leq \Delta\lambda \leq 180^\circ$ . El signo elegido para la ordenada  $Y$  depende del signo de  $\varphi$ .

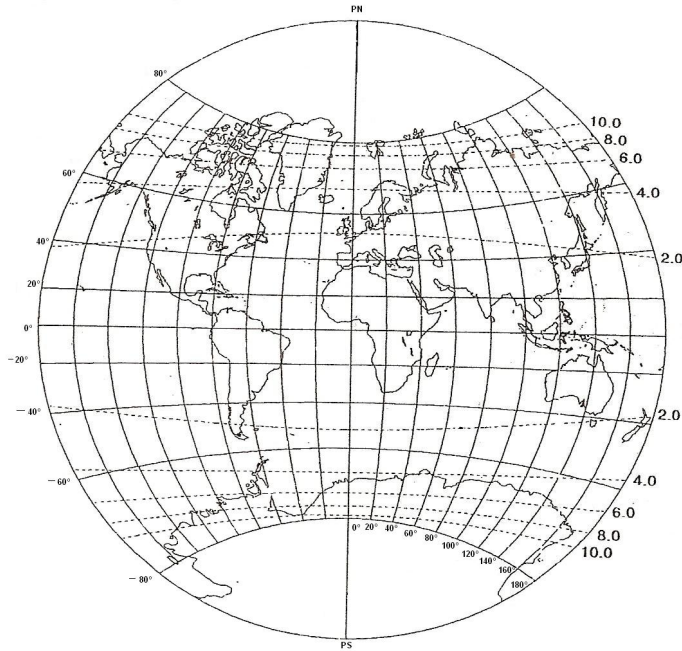
#### Casos particulares

Si  $\varphi = 0^\circ$  (Ecuador) ó  $\Delta\lambda = 0^\circ$  (meridiano central), las ecuaciones de  $X$  e  $Y$  se volverán indeterminadas. En esos dos casos son necesarias ecuaciones simplificadas. Si  $\varphi = 0^\circ$  las coordenadas están dadas por:

$$\begin{cases} X = R\Delta\lambda \\ Y = 0 \end{cases}$$

Si  $\Delta\lambda = 0^\circ$ , las coordenadas son:

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = \pm\pi R \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$



**Figura 7.33:** Proyección de Van der Griten ( $\lambda_0 = 0^\circ$ ) con paralelos y meridianos cada  $10^\circ$ . Líneas de trazos: Líneas de igual deformación angular máxima

### 7.7.3 Características y propiedades

El Ecuador se proyecta en un segmento de recta de longitud correcta. Los restantes paralelos son arcos de circunferencia de longitud incorrecta, mayor que la real, aumentando del Ecuador hacia los polos. En estos últimos  $k \rightarrow \infty$ . La fórmula del módulo de deformación ( $k$ ) tiene una forma compleja y su valor, por ejemplo en el paralelo de  $60^\circ$  de latitud, varía desde 1,708 en la intersección con el meridiano central hasta 1,789 en su intersección con el meridiano de  $\Delta\lambda = 180^\circ$ .

El meridiano central es una recta de deformación variable desde el centro hasta los polos en que  $h \rightarrow \infty$ . Los demás meridianos son arcos de circunferencia que cortan al Ecuador en partes iguales. En el Ecuador tienen un módulo de deformación lineal  $h = 1$  y en los polos  $h \rightarrow \infty$ . En su intersección con el paralelo de  $60^\circ$ ,  $h$  varía entre 1,537 para el meridiano central hasta 2,598 en los meridianos en que  $\Delta\lambda = 180^\circ$ . También la fórmula del módulo  $h$  tiene una expresión compleja.

Esta proyección no es equivalente; presenta su mínima distorsión de área a lo largo del Ecuador y su máxima deformación en el área en las regiones polares. Tampoco es isógona (o conforme); presenta una distorsión de las formas que se incrementa desde el Ecuador a los polos.

#### 7.7.4 Usos

Es usada para planisferios. La extensión representada con menor deformación está entre los paralelos de latitudes  $75^\circ$  norte y sur.

#### Ejemplos:

En una proyección de Van Der Grinten, con meridiano central  $\lambda_0 = 10^\circ$ , hallar las coordenadas cartesianas del punto ( $\varphi = 80^\circ N, \lambda = 140^\circ E$ ).

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{\Delta\lambda} - \frac{\Delta\lambda}{\pi} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi 180^\circ}{130^\circ \pi} - \frac{130^\circ \pi}{\pi 180^\circ} \right) = 0,33120 \text{ radianes.}$$

$$\theta = \arcsen \frac{2\varphi}{\pi} = \arcsen \frac{2 \times 80^\circ}{180^\circ} = 62^\circ 44' 2''$$

Con estos valores, se obtiene:

$$G = \frac{\cos \theta}{\sen \theta + \cos \theta - 1} = \frac{\cos 62^\circ 44' 2''}{\sen 62^\circ 44' 2'' + \cos 62^\circ 44' 2'' - 1} = 1,32019,$$

$$P = G \left( \frac{2}{\sen \theta} - 1 \right) = 1,32019 \left( \frac{2}{\sen 62^\circ 44' 2''} - 1 \right) = 1,65024;$$

$$Q = \psi^2 + G = 0,33120^2 + 1,32019 = 1,42988.$$

Las coordenadas cartesianas son:

$$X = \frac{\pm \pi R \left\{ (G - P^2) + [\psi^2(G - P^2)^2 - (P^2 + \psi^2)(G^2 - P^2)]^{\frac{1}{2}} \right\}}{P^2 + \psi^2}$$

$$= \frac{\pi R \left\{ -0,46471 + [0,21595 + 2,77743]^{\frac{1}{2}} \right\}}{2,83298} = 8\,938,878 \text{ km}$$

$$Y = \frac{\pm \pi R \left\{ PQ - \psi[(\psi^2 + 1)(P^2 + \psi^2) - Q^2]^{\frac{1}{2}} \right\}}{P^2 + \psi^2}$$

$$= \frac{\pi R \{ 2,35965 - 0,34724 \}}{2,83298} = 14\,215,530 \text{ km.}$$

### 7.8 Proyección de Robinson

Desarrollada por A. H. Robinson en 1963, su objetivo principal fue obtener una proyección para los planisferios que minimizara el aspecto de

las deformaciones angular y superficial. Las dimensiones y coordenadas fueron elegidas para dar un aspecto adecuado para un planisferio.

Es una proyección pseudocilíndrica, pues el Ecuador y todos los paralelos son líneas rectas paralelas. Los paralelos de  $38^\circ$  de latitud norte y sur son los únicos que tienen longitudes correctas ( $k = 1$ ) (ver Figuras 7.34 y 7.35). Los paralelos hasta las latitudes  $38^\circ$  norte y sur están igualmente espaciados y, más allá de esos límites, decrece su separación. Los polos son rectas de longitud igual a 0,5322 veces la longitud del Ecuador; éste, a su vez, posee una longitud de 0,8447 veces la longitud que posee en la esfera terrestre.

El Ecuador y los paralelos están divididos en partes iguales por los meridianos. El meridiano central es una recta perpendicular al Ecuador de una longitud igual a 0,5072 veces la longitud del Ecuador en la proyección. Los demás meridianos son curvas cóncavas hacia el meridiano central.

### 7.8.1 Dibujo de la proyección

El dibujo de esta proyección se realiza en base a los valores dados en una tabla que consigna las distancias desde el Ecuador a los paralelos a lo largo del meridiano central ( $\ell_m$ ) y la longitud de los paralelos en cada latitud desde el meridiano central ( $\ell_p$ ) —es decir, de la mitad del paralelo— (ver Tabla 7.5). El valor de  $\ell_m$  consignado en dicha tabla corresponde a un radio terrestre unitario ( $R = 1$ ). Por lo tanto:

$$\begin{aligned} Y_\varphi &= R\ell_m \\ X_\varphi &= R\ell_p \frac{\lambda^\circ}{180^\circ} \end{aligned}$$

(porque los meridianos dividen en partes iguales a los paralelos).

#### Ejemplos:

Hallar las coordenadas de ( $\varphi = 0^\circ; \lambda = 180^\circ$ ), adoptando  $R = 6\,370\text{km}$ .

$$\begin{aligned} Y_\varphi &= R\ell_m = R \times 0 = 0\text{km} \\ X_\varphi &= R\ell_p \frac{\lambda^\circ}{180^\circ} = 6\,370\text{km} \times 2,628 \frac{180^\circ}{180^\circ} = 16\,740,36\text{km}. \end{aligned}$$

#### Nota



En la esfera, la mitad del Ecuador es 20 000km, mientras que en esta proyección es  $0,8447 \times 20\ 000\text{km} = 16\ 894\text{km}$ .

### Ejemplos:

Hallar las coordenadas del punto ( $\varphi = 42^\circ 30'$ ;  $\lambda = 50^\circ$ ), adoptando  $R = 6\ 378\text{km}$ . Emplear interpolación lineal para valores intermedios de la Tabla 7.5.

Dado que a  $\varphi = 40^\circ$  le corresponde  $\ell_m = 0,669$  y a  $\varphi = 45^\circ$  le corresponde  $\ell_m = 0,752$ , para  $\varphi = 42^\circ 30'$  es  $\ell_m = 0,7105$ . Entonces:

$$Y_\varphi = R\ell_m = 6\ 378\text{km} \times 0,7105 = 4\ 531,569\text{km}.$$

Como a  $\varphi = 40^\circ$  le corresponde  $\ell_p = 2,422$  y a  $\varphi = 45^\circ$  le corresponde  $\ell_p = 2,356$ , para  $\varphi = 42^\circ 30'$  es  $\ell_p = 2,389$ . Entonces:

$$X_\varphi = R\ell_p \frac{\lambda^\circ}{180^\circ} = 6\ 378\text{km} \times 2,389 \frac{50^\circ}{180^\circ} = 4\ 232,512\text{km}.$$

### Ejercicio

Verificar la escala en la proyección de Robinson.

Por ejemplo, se sabe que en esta proyección el Ecuador está representado por una recta que mide 0,8447 veces la longitud del Ecuador en la esfera terrestre:

Ecuador en la proyección =  $0,8447 \times 2\pi \times 6\ 370\text{km} = 33\ 808,18022\text{km}$ .

Midiendo en el mapa la longitud del Ecuador, por ejemplo de 18,75cm, resulta el módulo de la escala:

$$M = \frac{3\ 380\ 818\ 022\text{cm}}{18,75\text{cm}} = 180\ 310\ 000 \cong 180\ 000\ 000.$$

## 7.8.2 Características y propiedades

Las formas presentan muy poca deformación dentro de los  $45^\circ$  desde el origen y a lo largo del Ecuador (ver Figura 7.34). Dentro de los  $45^\circ$  del origen y a lo largo del Ecuador, la distorsión en las áreas es muy pequeña (ver Figura 7.35).

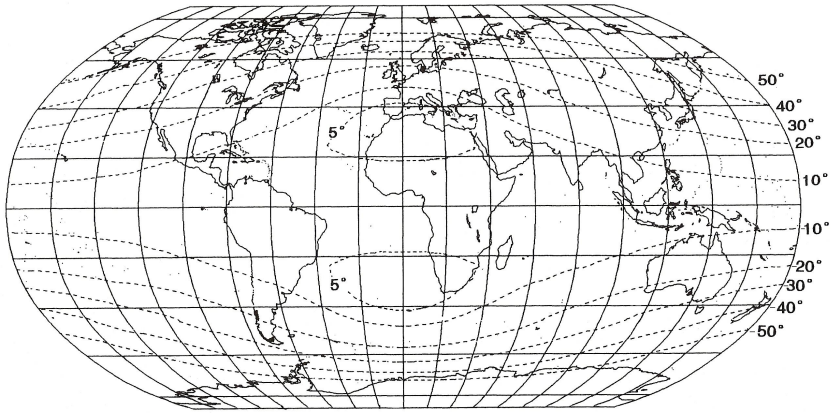
No es isógona (Figura 7.34) ni es equivalente. La deformación en las áreas es constante a lo largo de rectas paralelas al Ecuador (ver Figura 7.35).

$\varphi$	$l_m$	$l_p$
0°	0, 000	2, 628
5°	0, 084	2, 625
10°	0, 167	2, 616
15°	0, 251	2, 602
20°	0, 334	2, 582
25°	0, 418	2, 557
30°	0, 502	2, 522
35°	0, 586	2, 478
40°	0, 669	2, 422
45°	0, 756	2, 356
50°	0, 833	2, 281
55°	0, 913	2, 195
60°	0, 991	2, 099
65°	1, 066	1, 997
70°	1, 138	1, 889
75°	1, 206	1, 769
80°	1, 267	1, 633
85°	1, 317	1, 504
90°	1, 349	1, 399

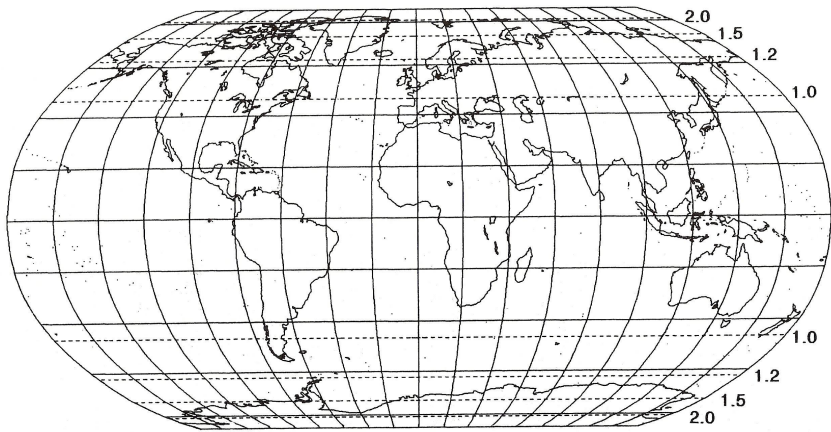
**Tabla 7.5:** PROYECCIÓN DE ROBINSON.

### 7.8.3 Usos

Se usa para planisferios y mapas temáticos murales o mapas de pequeña escala en atlas. Esta proyección fue adoptada en 1988 por la National Geographic Society (EE. UU.) para sus planisferios.



**Figura 7.34:** Proyección de Robinson ( $\lambda_0 = 0^\circ$ ) con paralelos y meridianos cada  $20^\circ$ . Líneas de puntos: líneas de igual deformación angular máxima.



**Figura 7.35:** Proyección de Robinson ( $\lambda_0 = 0^\circ$ ) con paralelos y meridianos cada  $20^\circ$ . Líneas de puntos: líneas de igual deformación en áreas.



## Anexo A

### Cálculo de las normales principales

#### Normal principal

$N$  La gran normal o normal principal en un punto  $M$  del elipsoide es el segmento comprendido entre el punto  $M$  considerado y la intersección de la normal en él con el eje menor de la elipse meridiana por  $M$ . Dicho eje es el del elipsoide. Recuérdese que la normal a un plano en un punto se obtiene considerando la perpendicular al plano tangente en dicho punto.

Dicho segmento, la gran normal, se representa con la letra  $N$ . Considérese para su cálculo una sección del elipsoide que contenga al eje  $PP'$  (Figura A.1); dicha sección será una elipse meridiana. Considérense también dos circunferencias: una de radio  $a$  circunscrita a la elipse y otra de radio  $b$  inscrita en ella (Figura A.2). Se analizará cómo calcular la tangente en un punto  $A$  y, a partir de allí, la normal.

Sea  $A$  el punto sobre la elipse cuyas coordenadas son  $(x, y)$  y considérese el punto sobre la circunferencia de radio  $a$  de abscisa  $x$ . Este punto tiene una ordenada  $y'$  tal que:  $x^2 + y'^2 = a^2$  (1).

Por ser semejantes los triángulos de la Figura A.2:  $\frac{y'}{y} = \frac{a}{b} \therefore y' = y \frac{a}{b}$

Reemplazando esta igualdad en (1):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \frac{a}{b} &= a^2 \\ x^2 b^2 + y^2 a^2 &= a^2 b^2 \end{aligned} \quad (I)$$

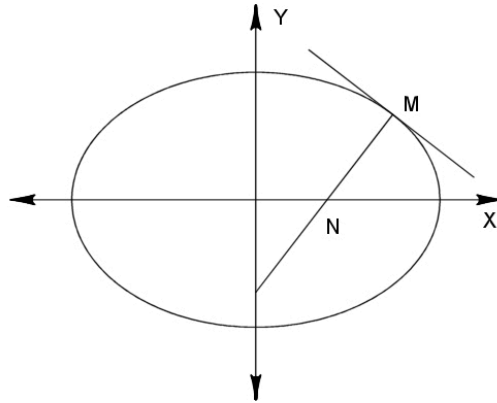


Figura A.1: N, la gran normal en M.

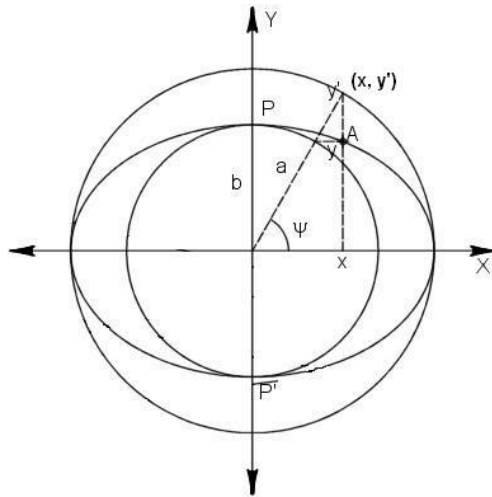


Figura A.2: Sección del elipsoide.

Dividiendo miembro a miembro por  $a^2b^2$ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se obtiene la ecuación estándar de la elipse.

En esta elipse, otro elemento importante es  $c$ , la distancia del centro de la elipse a cada uno de los focos:  $c^2 = a^2 - b^2$

El achatamiento de la elipse se describe a través de:

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$$

Cuanto más semejante a una circunferencia sea la elipse, más próximo estará el valor de  $\alpha$  a cero.

Se define también la excentricidad o primera excentricidad como:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

De allí:  $e = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ , de donde se obtiene que

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

La segunda excentricidad es:

$$e' = \frac{c}{b} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$$

También puede expresarse el achatamiento en función de la excentricidad:

$$\alpha = 1 - \frac{b}{a}. \text{ Entonces } \frac{b}{a} = 1 - \alpha(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{O sea: } b = a(1 - \alpha) = a(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$$

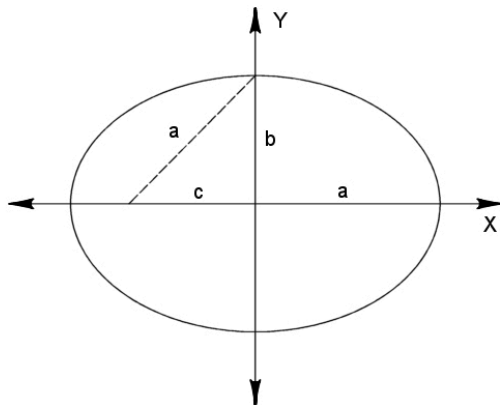


Figura A.3: Semiejes y ubicación de un foco en la elipse.

Se desea obtener una expresión para la abscisa del punto  $A$  que dependa sólo de las coordenadas geográficas de dicho punto y de los parámetros de la elipse meridiana (o sea, del elipsoide). Para ello se reemplaza la expresión anterior (para  $b$ ) en la ecuación I:

$$x^2 a^2 (1 - e^2) + y^2 a^2 = a^2 a^2 (1 - e^2)$$

$$\text{o bien: } x^2 (1 - e^2) + y^2 = a^2 (1 - e^2)$$

Derivando (respecto de  $x$ ):

$$2x(1 - e^2) + 2yy' = 0, \text{ siendo } y' = \frac{dy}{dx}.$$

$$2yy' = -2x(1 - e^2) \quad (\text{II})$$

Por definición, la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \text{tg}(90^\circ - \varphi) = -\text{cotg } \varphi$$

Entonces, reemplazando en II:

$$y = \frac{-x(1 - e^2)}{-\text{cotg } \varphi} = \frac{x(1 - e^2)}{\text{cotg } \varphi} = x(1 - e^2) \text{tg } \varphi$$

y en I:

$$x^2 b^2 + x^2 (1 - e^2)^2 a^2 \text{tg}^2 \varphi = a^2 b^2$$

$$x^2 a^2 (1 - e^2) + x^2 (1 - e^2)^2 a^2 \text{tg}^2 \varphi = a^2 a^2 (1 - e^2)$$

$$x^2 [1 + (1 - e^2) \text{tg}^2 \varphi] = a^2$$

$$x^2 = \frac{a^2}{1 + (1 - e^2) \text{tg}^2 \varphi} = \frac{a^2}{1 + (1 - e^2) \frac{\text{sen}^2 \varphi}{\text{cos}^2 \varphi}} = \frac{a^2 \text{cos}^2 \varphi}{\text{cos}^2 \varphi + \text{sen}^2 \varphi - e^2 \text{sen}^2 \varphi}$$

$$x^2 = \frac{a^2 \text{cos}^2 \varphi}{1 - e^2 \text{sen}^2 \varphi} \text{ y por lo tanto } x = \frac{a \text{cos } \varphi}{(1 - e^2 \text{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

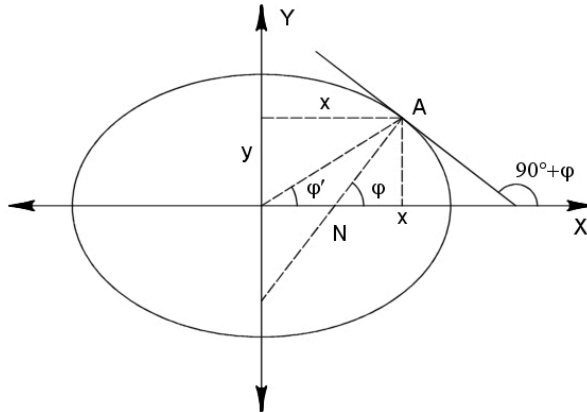


Figura A.4: Cálculo de la gran normal.

En la Figura A.4 se observa que:  $\text{cos } \varphi = \frac{x}{N}$ , entonces:

$$N = \frac{x}{\text{cos } \varphi} = \frac{a \text{cos } \varphi}{\text{cos } \varphi (1 - e^2 \text{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$



$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

**Ejemplo:**

Para Santa Fe,  $\varphi = 31^\circ 38'$ ,  $e^2 = 0,00672375$ ,  $a = 6\,378,388\text{km}$ .

$$N = \frac{6\,378,388\text{km}}{(1 - 0,00672375 \operatorname{sen}^2 31^\circ 38')^{\frac{1}{2}}} = 6\,384,294\text{km}$$

¿Qué ocurre si se considera un punto del hemisferio norte de latitud opuesta a la de Santa Fe?

**Ejercicio:**

Calcular  $N$  para: a) el Polo Sur, b) un punto sobre el Ecuador.

**Radio de curvatura  $\rho$  en un punto del meridiano**

Sobre una elipse meridiana sean dos puntos próximos  $A$  y  $B$  y sea  $Q$  el punto de intersección de las normales a ambos cuando  $B$  se acerca a  $A$ .

Cuando el punto  $B$  tiende hacia  $A$ , o sea cuando el arco  $AB = ds$  tiende a cero, el punto hacia el cual tiende  $Q$  es el centro de curvatura de la curva en  $A$ .

Como  $ds = \rho d\varphi$ , entonces  $\rho = \frac{ds}{d\varphi}$ , siendo  $d\varphi$  el ángulo que forman ambas normales.  $\rho$  se llama *radio de curvatura* de la curva en  $A$ .

Al círculo de centro  $Q$  y radio  $\rho$  se lo llama círculo osculador a la curva en  $A$  y es una circunferencia que, localmente, se asemeja a la curva en  $A$ , es decir, tiene la misma curvatura que la curva en  $A$ .

La curvatura de la curva en un punto es la inversa del radio de curvatura de la curva en ese punto.

Para calcular  $\rho$ , obsérvese que, en la Figura A.2:

$$\operatorname{sen} \psi = \frac{y'}{a} \Rightarrow y' = a \operatorname{sen} \psi$$

Ya se vio que, por semejanza de triángulos, resulta:

$$\frac{y'}{y} = \frac{a}{b}, \text{ entonces } \frac{a \operatorname{sen} \psi}{y} = \frac{a}{b}$$

Además, en la misma Figura A.2 se ve que:

$$\begin{cases} x = a \cos \psi \\ y = b \operatorname{sen} \psi \end{cases} \quad (\text{III})$$

Por definición:  $\rho = \frac{ds}{d\varphi}$  y  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

De III:

$$\text{Si } dx = -a \operatorname{sen} \psi d$$

$$dy = b \cos \psi d\psi$$

$$\text{Por lo tanto: } ds = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi} d$$

Se dedujo, al calcular  $N$ , que

$$x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

y

$$y = x(1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi \quad (\text{IV})$$

Entonces:

$$y = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi = \frac{a \operatorname{sen} \varphi (1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

Llamando  $\omega^2 = 1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$ , para abreviar, resulta:

$$\begin{aligned} x &= a \frac{\cos \varphi}{\omega} \\ y &= a \frac{\operatorname{sen} \varphi (1 - e^2)}{\omega} \end{aligned} \quad (\text{V})$$

$$\text{Como } \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2: y = \frac{b^2 \operatorname{sen} \varphi}{a \omega}$$

$$\text{De } y = \frac{x(1 - e^2)}{\operatorname{cotg} \varphi} \text{ se tiene que:}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{1}{1 - e^2} \frac{y}{x} = \frac{1}{1 - e^2} \frac{b \operatorname{sen} \psi}{a \cos \psi} = \frac{1}{1 - e^2} \frac{b}{a} \operatorname{tg} \\ &= \frac{a^2 b}{b^2 a} \operatorname{tg} \psi = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \end{aligned}$$

donde  $\varphi$  es la latitud geodésica.

Derivando la expresión anterior:

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{a}{b} \frac{d\psi}{\cos^2 \psi} \Rightarrow d\psi = \frac{b \cos^2 \varphi}{a \cos^2 \psi} d\varphi$$

De III y V:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \psi = a \frac{\cos \varphi}{\omega} \Rightarrow \cos \psi = \frac{\cos \varphi}{\omega} \\ y &= b \operatorname{sen} \psi = \frac{b^2 \operatorname{sen} \varphi}{a \omega} \Rightarrow \operatorname{sen} \psi = \frac{b \operatorname{sen} \varphi}{a \omega} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 ds &= \sqrt{a^2 \frac{b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{a^2 \omega^2} + b^2 \frac{\cos^2 \varphi}{\omega^2}} d\psi \\
 &= \frac{b}{\omega} \frac{b \cos^2 \psi}{a \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{b^2 \cos^2 \varphi}{a\omega} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \\
 &= \frac{b^2}{a\omega^3} d\varphi
 \end{aligned}$$

Volviendo al cálculo de  $\rho$ :

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{ds}{d\varphi} = \frac{b^2}{a} \frac{d\varphi}{\omega^3} \frac{1}{d\varphi} = \frac{b^2}{a} \frac{1}{\omega^3} \\
 \rho &= \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

**Ejemplos:**

a) En el Ecuador  $\varphi = 0^\circ$ . Entonces

$$N = a = 6\,378,388\text{km}$$

$$\rho = a(1-e^2) = a \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a} = \frac{(6\,356,912\text{km})^2}{6\,378,388\text{km}} = 6\,335,50831\text{km}$$

b) En Santa Fe  $\varphi = 31^\circ 38' S$ . Ya se ha calculado  $N$  y el radio de curvatura es:

$$\frac{6\,378,388\text{km}(1-0,0067226458)}{(1-0,0067226458 \operatorname{sen}^2 31^\circ 38')^{\frac{3}{2}}} = 6\,353,123\text{km}$$

**Resumiendo:**

Tanto  $N$  como  $\rho$ , llamados radios de curvatura principales, dependen únicamente de la latitud  $\varphi$  (aparte de los parámetros  $a$  y  $e$  del elipsoide), por lo que todos los puntos sobre un paralelo tendrán los mismos radios de curvatura principales. Recordar que el radio de un paralelo en un punto es:

a) en la esfera:  $R \cos \varphi = r_\varphi$

b) en el elipsoide:  $N \cos \varphi = r_\varphi$

Un elemento de un arco de paralelo vendrá dado por:  $N \cos \varphi d\lambda$

Un arco infinitesimal de meridiano mide:

a) en la esfera:  $ds = R d\varphi$ ;

b) en el elipsoide:  $ds = \rho d\varphi$ .

### Cálculo de la longitud de un arco de meridiano en el elipsoide

Se sabe que la longitud del arco de elipse meridiana correspondiente a una diferencia de latitudes  $d\varphi$  es:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho d\varphi \quad (\text{VI})$$

ya que, siendo  $\rho = \frac{ds}{d\varphi}$ , entonces  $ds = \rho d\varphi$ .

Para calcular la longitud de arco de elipse meridiana es necesario desarrollar  $\varphi$  en serie.

### El radio de curvatura $\rho$ en serie.

Se ha visto en el apartado anterior que:

$$\rho = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}}$$

donde  $a$  y  $e$  son constantes propias del elipsoide que se fije y  $\varphi$  es la latitud del punto donde se calcula el radio de curvatura.

Haciendo  $a(1 - e^2) = R$  y  $e^2 \sin^2 \varphi = x$ , resulta  $\rho(x) = R(1 - x)^{-\frac{3}{2}}$

Según el desarrollo de Mc Laurin:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \rho(0) + \frac{\rho'(0)}{1!}x + \frac{\rho''(0)}{2!}x^2 + \frac{\rho'''(0)}{3!}x^3 + \dots \\ \rho(0) &= R \\ \rho'(x) &= \frac{d\rho}{dx} = R \left( -\frac{3}{2} \right) (1-x)^{-\frac{3}{2}} (-1) = R \frac{3}{2} (1-x)^{-\frac{5}{2}} \\ \rho'(0) &= \frac{3}{2}R \\ \rho''(x) &= \frac{d^2\rho}{dx^2} = \frac{3}{2}R \left( -\frac{5}{2} \right) (1-x)^{-\frac{7}{2}} (-1) = \frac{15}{4}R(1-x)^{-\frac{7}{2}} \\ \rho''(0) &= \frac{15}{4}R \\ \rho'''(x) &= \frac{15}{4}R - \left( \frac{7}{2} \right) (1-x)^{-\frac{9}{2}} (-1) = \frac{105}{8}R(1-x)^{-\frac{9}{2}} \\ \rho'''(0) &= \frac{105}{8}R \end{aligned}$$

Entonces:

$$\rho(x) = R + \frac{3}{2}Rx + \frac{15}{4}\frac{R}{2}x^2 + \frac{105}{8}\frac{R}{6}x^3 + \dots$$

$$\rho(0) = R \left( 1 + \frac{3}{2}e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{15}{8}e^4 \operatorname{sen}^4 \varphi + \frac{35}{16}e^6 \operatorname{sen}^6 \varphi + \dots \right)$$