100 2019 · Año del Centenario de la Universidad Nacional del Litoral

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS

MAESTRÍA EN DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS

RESOLUCIONES DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA ESPACIAL. ERRORES Y DIFICULTADES EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA

Prof. Marcela Evangelina Götte

Directora: Mg. Ana María Mántica

Octubre de 2019

Dedicatoria

*A **Dios**, por nunca dejarme sola.*

A mi papá, por enseñarme a no bajar nunca los brazos.

A mi mamá, porque seguro comparte conmigo este momento.

Agradecimientos

A ***Ana María***, directora, amiga, profesora, consejera y mucho más…, por su paciencia, sus enseñanzas, su tiempo, su dedicación, su ejemplo de perseverancia… imposible terminar este trabajo sin su acompañamiento y cariño.

A mi amiga María Susana, compañera de investigación junto a Ana, por su aliento de siempre y por compartir su apasionamiento por la enseñanza de la matemática.

A los docentes e investigadores que participaron en este proyecto, por sus aportes y tiempo dedicado y a los que me alentaron a terminarlo.

A los alumnos del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias por colaborar a través de sus producciones.

A la Facultad de Humanidades y Ciencias por dejarme crecer profesional y personalmente.

No es inusual que los estudiantes con un desempeño satisfactorio en geometría plana fallen en el espacio. Su imaginación espacial se ve atenuada por el ejercicio excesivo y unilateral de la geometría plana.

H. Freudenthal

INDICE

RESUMEN

Este trabajo tiene por finalidad detectar y analizar dificultades y errores cometidos por futuros profesores de matemática de la cátedra Geometría Euclídea Espacial de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral en la realización de demostraciones geométricas tridimensionales y elaborar una categorización de los errores detectados.

El enfoque de esta investigación es cualitativo y el alcance del estudio es exploratorio y descriptivo. En una primera instancia se realiza un análisis de documentos representados por exámenes parciales individuales escritos de los alumnos de la cátedra mencionada. A partir de estos datos y de aportes de referentes en la temática se construye una primera categorización de errores. En una segunda etapa se circunscribe el análisis de resoluciones de problemas de demostración que involucran a los conceptos de paralelismo y perpendicularidad y se diseña un instrumento que involucra estos conceptos. Este instrumento se implementa en una cohorte posterior a la de los estudiantes que proporcionan los exámenes parciales de la primera instancia. Se analizan los artefactos obtenidos de esta implementación, se produce una nueva categorización de errores teniendo en cuenta además referentes teóricos y la categorización anterior. Esta categorización se envía a expertos para contribuir a la validez de este estudio.

A partir de los aportes realizados por los expertos consultados, el acrisolado de las categorizaciones anteriores y los aportes de los referentes teóricos se establece una jerarquización de la tipificación de los errores obteniendo una categoría final que consta de cuatro tipos de errores con subtipos en cada una. Uno de ellos atiende a cuestiones generales referidas a la escritura en el lenguaje matemático, otros dos tipos referidos a las cuestiones de la prueba en matemática, por un lado a los fundamentos de la acción de demostrar y por otro a la demostración en sí misma y por último uno que presenta cuestiones referidas al empleo de analogías en el trabajo geométrico tridimensional.

Se presenta además una incipiente descripción de dificultades que surgen a partir de los instrumentos analizados y se exhiben someramente relaciones entre ellas y los errores que se presentan en la tipología final.

CAPÍTULO 1

PROBLEMA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

En este trabajo se pretende investigar el porqué de las dificultades de los alumnos al resolver los problemas planteados en la cátedra de Geometría Euclídea Espacial (GEE) del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral. El análisis de las dificultades y de los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje de la matemática puede proveer de información acerca de cómo se construye el conocimiento, así como del estado en que éste se encuentra, imprescindible a la hora de realimentar los procesos de enseñanza y de aprendizaje con el fin de mejorar los resultados.

La geometría euclídea se funda en las siguientes normas: enunciar, sin definición los conceptos primeros; admitir, sin demostración, ciertas propiedades que relacionan estos conceptos enunciando los axiomas correspondientes y a partir de éstas, demostrar las restantes propiedades o teoremas. En el *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario* (2010) se expresa que una particularidad de esta geometría es su eje vertebrador (el sistema axiomático euclídeo para la organización y comunicación de los conocimientos geométricos) y se plantea su relevancia en trabajarlo en la formación del profesor de matemática.

Lo propio de la GEE, marco en el que se desarrolla este estudio, son los problemas de demostraciones de propiedades que se deducen de los axiomas o de otras propiedades demostradas anteriormente.

Desde Aristóteles se ha considerado la demostración como un concepto clave que forma parte de la esencia de las Matemáticas. Según Dreyfus (2000), la demostración entendida en un sentido amplio, donde el énfasis se pone más en la esencia del razonamiento que en los detalles, debería estar presente en todos los componentes del currículum de matemática. Tendría que ser una idea dominante que intervendría en el tratamiento de cada tema y determinar la naturaleza de lo que sucede en la clase de matemática (Rico, 1995).

Dentro del campo educativo, las primeras demostraciones a que se enfrentan los estudiantes, en el currículum de matemática, son las geométricas, que van desde formas inductivas y empíricas hasta formas de razonamientos deductivos en años superiores.

Pese a su importancia y a las investigaciones dedicadas a este tema[1], subsisten dificultades en la comprensión y realización de demostraciones en general y geométricas en particular.

Itzcovich (2005) plantea que para que los alumnos puedan involucrarse en el trabajo con demostraciones no es suficiente con la presentación de buenos problemas. Es necesario que los estudiantes se vayan apropiando de ciertos recursos y técnicas que son propias de los procesos de demostración en matemática. Sería simple si se pudiera aislar ese conjunto de técnicas y enseñarlas de "una vez y para siempre" con el objetivo de que los alumnos las apliquen. Lamentablemente las cosas son mucho más complejas: las técnicas van apareciendo en la medida en que constituyen recursos posibles para enfrentar problemas, y son los problemas los que "reclaman" ciertas técnicas.

En este trabajo se procura detectar, analizar y clasificar los errores de los alumnos de la cátedra GEE, futuros docentes, en el trabajo con demostraciones geométricas con el fin de contar con aportes para optimizar el abordaje de la geometría 3D (particularmente las relaciones de paralelismo y perpendicularidad) y de los procesos de demostración inherentes al método axiomático deductivo. Además se pretenden observar dificultades que tienen estos alumnos al resolver problemas en esta temática.

A partir de lo expuesto se plantea, en esta investigación, la siguiente pregunta:

[1] Estas investigaciones se explicitan en la sección 2.1.

¿Cuáles son los errores y dificultades que manifiestan los alumnos de profesorado en Matemática al realizar demostraciones geométricas tridimensionales?

1.2. OBJETIVO GENERAL

Detectar y analizar dificultades y errores cometidos por futuros profesores de matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la UNL en la realización de demostraciones geométricas tridimensionales. Categorizar los errores detectados.

1.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Reflexionar sobre el papel del error en Educación Matemática.
- Investigar los errores que cometen los futuros profesores en Matemática en las demostraciones geométricas tridimensionales.
- Proponer una clasificación de los errores detectados.
- Indagar sobre las dificultades que presentan los alumnos del profesorado en Matemática al realizar demostraciones geométricas en 3D.

1.4. ORGANIZACIÓN DE LA MEMORIA

El informe de esta investigación se dispone en: cinco capítulos, las referencias bibliográficas y seis anexos.

En el capítulo 1 se plantea el problema de investigación, justificando su importancia y pertinencia. Se describen las motivaciones que originan el estudio, se enuncia la pregunta que lo motiva y los objetivos que se pretenden abordar.

En el capítulo 2 se presenta, un primer apartado donde se exponen algunas categorizaciones referidas al error en Educación Matemática como preludio de las categorizaciones que se desprenden de este trabajo. En un segundo apartado se presentan distintas definiciones de errores y de dificultades y se explicitan las que se consideran en esta tesis. Además se presentan particularidades propias del quehacer matemático en general y peculiaridades del quehacer geométrico que permiten fundamentar las distintas categorizaciones de errores, producto de esta investigación.

El capítulo 3 se presenta en tres apartados. El primero describe el contexto en que se lleva a cabo el estudio. En el segundo apartado se explicitan el tipo y los alcances de la investigación y en el tercero se describen las fases en las que se realiza esta tesis.

El capítulo 4 consta de seis secciones. La primera es la introducción del capítulo y la segunda presenta la primera clasificación de errores considerada en esta investigación. La tercera sección presenta una comparación de los conceptos de paralelismo y perpendicularidad entre la geometría Euclídea plana y la geometría Euclídea espacial, el diseño y aplicación de un instrumento para ajustar la tipología de la sección anterior y se expone además una nueva categorización de los errores. La cuarta sección contiene la consulta realizada a expertos con el fin de revisar, depurar, reorganizar y perfeccionar la tipología que se presenta en el apartado anterior lo que contribuye a la validez de este estudio. En la quinta sección se presenta la tipología final de este estudio con ejemplos de cada tipo y finalmente se exhibe una descripción de las dificultades detectadas.

En el capítulo 5 se exponen las conclusiones y perspectivas de este estudio. En el primer apartado se retoman los objetivos de la investigación y se reflexiona considerando los aportes expuestos en el marco de referencia y lo elaborado en lo depurado de las tipologías de errores presentadas. En el segundo apartado se expresan las cuestiones derivadas del trabajo y posibles líneas de investigación a partir de lo obtenido en este estudio.

CAPÍTULO 2

MARCO DE REFERENCIA

En el primer apartado de este capítulo se presentan algunas categorizaciones referidas al error en Educación Matemática como preludio de las categorizaciones que se exponen en esta investigación. Se exhiben a continuación tres clasificaciones de errores, una propuesta por Radatz (1979); otra por Movshovitz - Hadar; Zaslavksy e Inbar (1987) y otra por Esteley y Villarreal (1996). Estas tres clasificaciones hacen referencia a una categorización de errores en la resolución de problemas. También se presenta una clasificación de errores en geometría euclídea plana de Franchi y Hernández de Rincón (2004), otra en el ámbito del álgebra abstracta de Selden y Selden (2003) y una tercera respecto a los errores relacionados con la traducción entre los códigos lingüísticos de la geometría euclídea de Radillo Enríquez (2011).

En el segundo apartado se presentan distintas definiciones de errores y de dificultades (RAE, 2014; Pérez Porto y Gardey, 2012; Godino, Batanero y Font, 2003; Rico, 1995; Brousseau, 2007; Lupiáñez Gómez, 2009; Radillo Enríquez, 2011; Socas, 2000) y se explicitan las que se consideran en este trabajo. Además se presentan particularidades propias del quehacer matemático en general (Socas, 2000; Radillo Enríquez y Varela, 2007; Ortega y Ortega, 2001; Weber, 2002- 2013; Vinner, 1991; Polya, 1970; Bachelard, 2000; De Castro, 2012; Zaslavksy y Ron, 1998; Selden y Selden, 2003; Rey Pastor y Puig Adam, 1948; Fetisov, 1973) y peculiaridades del quehacer geométrico (Dienes, 1970; Guillén, 2010; Freudenthal, 1983; Volkert, 2008; Itzcovich y Broitman, 2001; Cohen, 2000; Berté, 1999; Fischbein, 1993; Laborde, 1996; Vinner, 1991; Mántica, 2011) para fundamentar las distintas categorizaciones de errores que se proponen en este trabajo.

2.1. ESTADO DEL ARTE

Rico (1997) considera al error como uno de los puntos en los que se establece una línea divisoria entre dos estereotipos de profesor de matemáticas, por un lado, el que considera que el error es un dato objetivo que muestra el desconocimiento de un alumno o de un grupo de alumnos y que debe ser controlado, corregido o, en su defecto, penalizado; y por otro, el que sostiene que el error es la muestra de un conocimiento parcialmente construido, resultado de un proceso en curso a cuya evolución el profesor debe contribuir, cuando ello sea posible, evitando provocar bloqueos, rechazos o sanciones. Propone una alternativa a la primera postura, sosteniendo que los errores y las ideas imprecisas de los alumnos tienen una dimensión positiva. El conflicto entre sus conocimientos anteriores y determinadas situaciones que no encajan con ellos es un paso necesario para reorganizarlos, enriquecerlos y ajustarlos, es decir que se produzca un aprendizaje significativo. El papel del profesor no consiste en evitar el error ni en ignorarlo, sino que debe transmitir a sus alumnos la sensación de que lo que saben es adecuado para determinadas situaciones, aunque no lo es para otras nuevas y que progresar requiere reconocer estas contradicciones y superarlas.

Las principales líneas de investigación relativas a errores en el aprendizaje se articulan alrededor de cuatro polos, a saber: estudios relativos al análisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican, y clasificaciones de errores detectados; estudios dedicados al tratamiento curricular de los errores del aprendizaje en matemáticas; estudios dedicados a determinar qué conviene que aprendan los profesores en formación en relación con los errores que cometen los alumnos y por último, trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen una determinada clase de análisis sobre errores.

Esta investigación se centra en la primera de las líneas nombradas.

Radatz (1979), referente en esta temática, realiza una clasificación de errores en resolución de problemas a partir del procesamiento de la información y establece cinco categorías generales:

- Errores debidos a dificultades de lenguaje. Señala que el aprendizaje de los conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera.

- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades para muchos jóvenes y niños en la realización de tareas matemáticas.

- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. En este tipo de errores se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática.

- Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información.

- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Este tipo de errores surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

Por su parte, Movshovitz - Hadar; Zaslavksy e Inbar (1987) hacen una clasificación empírica de errores en matemática en alumnos de secundaria, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizada por expertos. Determinan seis categorías descriptivas:

- Datos mal utilizados. Se incluyen aquellos errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno.

- Interpretación incorrecta del lenguaje. Se incluyen los errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descriptos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.

- Inferencias no válidas lógicamente. Esta categoría incluye aquellos errores que se producen por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico.

- Teoremas o definiciones deformados. Se incluyen aquí aquellos errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable.

- Falta de verificación en la solución. Se incluyen aquí los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.

- Errores técnicos. Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores de manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.

Esteley y Villarreal (1996) realizaron la siguiente categoría recabando información en alumnos de primer año de ciencias agropecuaria de la Universidad Nacional de Córdoba en temas de funciones, límite y continuidad:

- Errores al operar (con números reales en cálculos, planteo y resolución de ecuaciones).
- No empleo o uso parcial de la información.
- No verificación de resultados parciales o totales, lo cual se manifiesta en desconexión entre lo analítico y lo gráfico, respuestas consecutivas incoherentes entre sí, etc.
- Empleo incorrecto de propiedades y definiciones.
- No verificación de condiciones de aplicabilidad de teoremas, definiciones, etc.
- Deducción incorrecta de información o invención de datos.
- Errores de lógica. Justificaciones inadecuadas de proposiciones y uso inadecuado del lenguaje.
- Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo.

Franchi y Rincón (2004) realizan una investigación donde proponen una tipología de errores en el área de la geometría plana. En ella consideran tipologías de errores en otras áreas, la experiencia de las investigadoras y un estudio exploratorio realizado durante dos semestres con alumnos de Geometría de la Facultad de ingeniería de LUZ, Venezuela. La tipología consta de ocho categorías:

- Errores de pre- requisitos: se evidencian cuando los alumnos utilizan inadecuadamente las notaciones del álgebra, de los conjuntos, etc., cuando ejecutan mal operaciones que involucran potencias, raíces, simplificaciones, etc. y cuando utilizan inadecuadamente los instrumentos de dibujo.
- Errores propios del lenguaje geométrico: se evidencian cuando el estudiante utiliza inadecuadamente las notaciones de las figuras y elementos geométricos, demuestra o intenta demostrar una proposición geométrica que no se le pide en un problema geométrico, cuando plantea una ecuación o proposición en discordancia con el enunciado de un problema dado y cuando

utiliza inadecuadamente la terminología geométrica o describe defectuosamente la construcción de figuras geométricas.

- Errores gráficos: un estudiante incurre en estos errores cuando dibuja una figura geométrica que no corresponde con el enunciado del problema propuesto, cuando toma mal un dato de una figura o lo ignora en la solución o demostración del problema.

- Errores de razonamiento: se manifiestan cuando el alumno añade hipótesis que no están dadas en la solución o demostración de un problema; intenta demostrar o resolver un problema sin utilizar algún dato; usa un axioma, teorema o corolario sin que se tengan las hipótesis requeridas para su aplicación; interpreta y usa inadecuadamente una definición; usa el recíproco de una implicación como verdadera y usa una implicación que no es verdadera.

- Errores de transferencia: se presentan cuando el estudiante transforma defectuosamente una situación problemática real en un problema geométrico o cuando aplica defectuosamente conocimientos propios de otras asignaturas o disciplinas en un problema planteado.

- Errores de técnica: se identifican estos errores cuando el estudiante utiliza un algoritmo correcto en la solución de un problema pero lo aplica en forma defectuosa; enuncia proposiciones ciertas sin justificaciones o mal justificadas o cuando utiliza un algoritmo adecuado para la solución o demostración de un problema pero no llega a su solución.

- Errores de tecnología: ocurren cuando el estudiante selecciona un procedimiento, algoritmo o ecuación en forma incorrecta o, en las demostraciones, cuando se violentan las reglas de la lógica.

- Errores azarosos: se pueden detectar cuando los alumnos transcriben mal una cantidad o símbolo o sustituyen mal un dato en una ecuación dada, manipulan inadecuadamente los signos algebraicos o cuando ejecutan mal operaciones aritméticas.

Radillo Enríquez (2011) centra su investigación en los errores relacionados con la traducción entre los códigos lingüísticos de la geometría euclídea que presentan los estudiantes del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad de Guadalajara en México. Sostiene que "[…] el planteamiento de una demostración requiere un *proceso de traducción* de la representación verbal a sus correspondientes representaciones gráfica y simbólica" (p. 431). Plantea tres tipos de errores en la solución de problemas de la geometría euclídea, no excluyentes entre sí y pudiendo cada tipo de error tener consecuencias en los otros. El primer tipo incumbe al factor lingüístico y los otro dos a las particularidades de la asignatura. Los tipos de errores son:

- Errores de representación, ya sea verbal, gráfica y/o simbólica, así como los procesos de traducción entre éstas;
- Errores deductivos o de razonamiento, en cuanto a la lógica seguida para solucionar un problema dado;
- Errores axiomáticos o de aplicación de teoría, relativos a la disponibilidad funcional de los conocimientos previos necesarios para resolver el problema.

Selden y Selden (2003) realizan un estudio con alumnos de álgebra abstracta, enseñada en universidades de los Estados Unidos, Turquía y Nigeria. Proponen una clasificación de los errores que cometen los estudiantes al realizar una prueba, en dos grandes tipos: los que se basan en conceptos erróneos subyacentes y otros que son de naturaleza técnica que se observan repetidamente. Respecto a los primeros consideran los siguientes subtipos:

- Comenzar la prueba por la tesis: consideran un error de este tipo cuando los estudiantes empiezan la demostración con la conclusión y llegan a una verdad obvia sosteniendo que la prueba está completa.
- Los nombres confieren existencia: este error ocurre cuando un estudiante intenta resolver una ecuación, sin cuestionar si existe una solución.
- Las diferencias aparentes, son reales: este error ocurre cuando los objetos que tienen nombres diferentes se consideran diferentes. La idea errónea subyacente es que hay una correspondencia uno a uno entre los nombres y los objetos matemáticos.
- Usar el inverso de un teorema: la idea errónea consiste en equiparar una implicación y su inverso.
- Las leyes de los números reales son universales: se consideran errores de este tipo cuando aplican las reglas de los números reales sin discriminar el contexto.

- Conservación de las relaciones: este tipo de error ocurre cuando los estudiantes consideran que hacer lo mismo a ambos lados de cualquier ecuación preserva la ecuación.
- Interpretación indistinta entre elementos y conjuntos: los estudiantes entienden las proposiciones que involucran elementos más fácilmente que las proposiciones equivalentes sobre conjuntos.

Respecto a los errores de naturaleza técnica consideran los siguientes subtipos:

- Símbolos sobre extendidos: este error ocurre cuando se usa un símbolo para dos conceptos distintos. Dichos errores pueden indicar una comprensión incompleta de una estructura matemática.
- Debilitar un teorema: este error ocurre cuando lo que se usa es más fuerte que la hipótesis o cuando lo que se prueba es más débil que la conclusión.
- Inflexibilidad de notación: este error surge de la incapacidad de adaptar la notación de un contexto a otro.
- Uso indebido de teoremas: al aplicar un teorema, un error de este tipo surge de la incomprensión o el descuido parcial de la hipótesis o la interpretación errónea de la conclusión.
- Circularidad: este error consiste en utilizar en la demostración de un teorema una proposición equivalente a la que se está probando.
- Prueba localmente ininteligible: en este error, no se pueden entender ni la prueba en su conjunto ni la mayoría de las oraciones individuales. El formato es aceptable, las palabras "teorema" y "prueba" aparecen junto con muchos símbolos, y la mayoría de las oraciones son sintácticamente correctas, sin embargo, las afirmaciones son incomprensibles o incorrectas.
- Sustituir sin justificar: este error consiste en obtener una proposición de otra utilizando una sustitución injustificable.
- Ignorar cuantificadores: este error resulta de no notar restricciones en las variables, se piensa que una variable se cuantifica universalmente cuando no es así.
- Agujeros: este tipo de error consiste en afirmar que una proposición se deriva inmediatamente de resultados previamente establecidos cuando en realidad se requiere un argumento considerable.

- Uso de información fuera de contexto: en este tipo de error se usa un argumento de un contexto incorrectamente en otro porque aparecen símbolos idénticos en ambos escenarios.

Ramírez Uclés (2012) en el marco del programa de Estímulo del Talento Matemático en Andalucía realiza un estudio que se propone diseñar buenas prácticas docentes para la mejora de la visualización, con estudiantes entre 14 y 16 años. Para delimitar los errores y dificultades a considerar en el diseño de intervención de la investigación realiza una contrastación entre los errores detectados en una prueba piloto y la revisión bibliográfica realizada. Presenta así los siguientes tipos de errores y dificultades.

- Error al relacionar plano y espacio: falsa analogía plano-espacio. Los alumnos confunden propiedades en el plano con las correspondientes en el espacio. Se detectaron errores al establecer analogías entre las propiedades del plano y del espacio como la de aplicar a un tetraedro propiedades similares a la suma de los ángulos de un triángulo.

- Error al generalizar: no discutir todos los casos posibles y razonar limitándose a ejemplos concretos. Se detecta que los alumnos razonan visualmente apoyándose en ejemplos concretos limitados. Estos ejemplos pueden provenir tanto de imágenes como de objetos particulares. Aunque podríamos englobar ambos errores en la falta de generalidad, consideramos necesario diferenciar el error que se manifiesta al no discutir todos los casos posibles, que identificamos con falta de exhaustividad en la argumentación visual. Este error se manifiesta cuando el alumno no ha distinguido todos los resultados posibles necesarios para razonar sobre casos generales.

- Errores en los contenidos de enriquecimiento: Confundir los elementos matemáticos de razonamiento y confundir los elementos de contenido matemático. Se aprecia que los alumnos tienen dificultades en los procesos de visualización espacial, en concreto confunden la posición de los lados del sólido a partir de su dibujo y no siempre reconocen la posición de los planos en la representación plana del icosaedro al señalarlos en el dibujo. Interpretan que los alumnos manifiestan dependencia del hecho visual (no ven la perspectiva y lo juzgan por la longitud en la representación plana), se muestran confusos al distinguir los lados (si eran lados de triángulos o diagonales…) y tienen dificultades para imaginar la sección de la figura sólida. También los alumnos cometen distintos tipos de errores como:

conmutar los datos, cambiar de estructura, invertir la operación, omitir una operación, cambiar el significado de una relación y emplear incorrectamente una estimación.

- Dificultades para la comunicación de las argumentaciones visuales. Además de las dificultades propias de los contenidos geométricos, señala algunas complicaciones para comprender el razonamiento espacial, como las basadas en la influencia de la percepción, la captación de diferencias entre los diagramas y los objetos que representan y dificultades con la utilización de diagramas y dibujos.

- Dificultad en la terminología. Se ha detectado la dificultad para comunicar con éxito la información visual. El desconocimiento de la terminología adecuada y el uso del lenguaje no-convencional puede tener implicaciones en la forma en que se interpretan las figuras por lo que los alumnos deberían practicar usando frecuentemente representaciones verbales para desarrollar fluidez conversacional. En algunos estudios se han detectado errores de comunicación relacionados con el uso de códigos verbales y gráficos, como los errores relacionados con el uso de códigos verbales que llevaban a nombrar las partes de los objetos usando palabras de la vida diaria, o correspondiente a la geometría 2D (por ejemplo lado en vez de cara, cuadrado en vez de cubo), y usar expresiones ambiguas o expresiones incorrectas referidas a la posición o el movimiento del objeto.

- Dificultad en la necesidad de utilizar movimientos o elementos del entorno. Cuando las personas tienen dificultades en resolver problemas de visualización espacial, espontáneamente producen gestos para ayudarse, gestos que pueden mejorar el rendimiento. Cuando resuelven más problemas, los aprendizajes espaciales proporcionados por los gestos empiezan a interiorizarse y la frecuencia de gesticulación disminuye. La influencia de una ayuda visual en el proceso de resolución de problemas espaciales está relacionada con la naturaleza de las operaciones mentales. Si bien el disponer de un objeto concreto puede facilitar la argumentación, cuando el sujeto es incapaz de construir conscientemente un camino para la solución, la percepción del objeto no le permite descubrir las relaciones espaciales para resolver el problema.

- Dificultad para verbalizar los procesos mentales. Una dificultad añadida en el estudio de los procesos con imágenes mentales, es expresarlos verbalmente. Los alumnos deben verbalizar cuando visualizan y visualizar cuando verbalizan. En actividades de comunicación verbal de elementos visuales entre compañeros se detecta la aparición de ambigüedades en las descripciones y que los participantes cometen errores derivados de la falta de conciencia de sus operaciones mentales.

- Dificultad para describir las representaciones visuales. En tareas de copiar un dibujo en perspectiva se demuestra que la principal dificultad no es sólo de tipo perceptivo, sino también cognitiva, pues muestran carencias de habilidades de reconocimiento de posiciones en el espacio y de relaciones espaciales.

Las investigaciones referenciadas anteriormente se proponen en contextos diferentes, sea por el nivel académico de los estudiantes o por los conceptos matemáticos estudiados, al de este trabajo. No obstante, estos aportes se consideran fundamentalmente para realizar la primera de las categorizaciones de esta investigación (Sección 4.2).

2.2. REFERENTES TEÓRICOS

2.2.1. Conceptos de dificultad y de error

La vigésima tercera edición del diccionario de la Real Academia Española (RAE, 2014) define error como “concepto equivocado o juicio falso”. La segunda acepción del término, en dicho diccionario, señala que el error puede ser también una “acción desacertada o equivocada”.

En la página web https://definicion.de se define que “Un **error** es **algo equivocado o desacertado**. Puede ser una acción, un concepto o una cosa que no se realizó de manera correcta”. (Pérez Porto y Gardey, 2012).

Godino, Batanero y Font (2003) sostienen que “Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar” (p. 73).

Rico (1995) considera que “Cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión propuesta” (p. 76).

Brousseau (2007) utiliza el concepto de obstáculo para cambiar la concepción de error como fracaso y señala que:

> Un obstáculo se manifiesta a través de errores, pero esos errores en un mismo sujeto están unidos entre sí por una fuente común: una manera de conocer, una concepción característica, coherente aunque no correcta, un "conocimiento" anterior que tuvo éxito en todo un dominio de acciones (p.45).

Este autor manifiesta que un obstáculo no siempre es un conocimiento falso, nombrando por ejemplo el caso de los números decimales. Hace referencia a la multiplicación de este tipo de números y la influencia que tiene el tratamiento de la multiplicación de números naturales como una repetición de sumas con lo cual el producto es mayor que cada factor; lo cual en el conjunto de los decimales no siempre es verdadero. Otro aspecto que considera es que el alumno no logra distinguir "el número natural 4 que tenía un antecesor, del "mismo" 4 pero ahora decimal que no lo tiene. El obstáculo es, por lo tanto, un conocimiento perfectamente legítimo e inevitable". (Brousseau, 2007, p. 46)

Lupiáñez Gómez (2009) sostiene que el error, respuesta incorrecta proporcionada por el alumno, es la manifestación visible de una dificultad. "El error es observable directamente en las actuaciones de los escolares, en sus respuestas a las cuestiones y tareas que les demanda el profesor" (p. 103).

Para Radillo Enríquez (2011) el término dificultad es sinónimo de obstáculo. Sostiene que "Los errores son considerados solamente como transgresiones a las normas establecidas" (p. 430).

Socas (2000) sostiene que las "dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores. El error va a tener procedencias diferentes, pero, en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste" (p. 125).

En la página web https://definicion.de se expresa que la palabra **dificultad** proviene del término latino *difficultas*. El concepto hace referencia al **problema**, **brete** o **aprieto** que surge cuando una persona intenta lograr algo. Las dificultades, por lo tanto, son **inconvenientes** o **barreras** que hay que superar para conseguir un determinado objetivo (Pérez Porto y Gardey, 2012).

La vigésima tercera edición del diccionario de la Real Academia Española (RAE, 2014) define dificultad como "*Embarazo, inconveniente, oposición o contrariedad que impide conseguir, ejecutar o entender algo bien y pronto".*

Godino, Batanero y Font (2003) afirman que "El término dificultad indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja" (p. 73).

Dada la diversidad de acepciones que se le otorga a los términos error y dificultad, se explicita a continuación el significado que se otorga, en esta investigación, a cada uno de ellos.

Error es una práctica que lleva inherente conceptos equivocados o procedimientos inacabados, que se visualizan a través de la producción de los estudiantes.

Dificultad es un inconveniente o barrera que impide a un individuo comprender un concepto o ejecutar correctamente una tarea.

Una dificultad puede manifestarse a través de un error pero un error puede deberse a más de una dificultad. De esto, la manifestación evidente de una dificultad puede ser un error aunque no siempre es así.

2.2.2. Algunas particularidades del hacer matemático

En este apartado se seleccionan algunas ideas que sirven de fundamento a este trabajo, específicamente teniendo en cuenta algunas particularidades del quehacer matemático.

Respecto a la simbología y estructura del lenguaje matemático.

Respecto a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos Socas (2000) manifiesta que se presentan diversos conflictos. Este autor expone como primer conflicto, entre el uso del lenguaje ordinario y el lenguaje matemático, al de la precisión. “El lenguaje habitual usado en la comunicación puede expresar su significado aunque se cometan abusos morfosintácticos, tales como roturas de reglas gramaticales o faltas de ortografía” (p. 127). En cambio el lenguaje de las matemáticas está sometido a determinadas reglas, es más preciso y su significado está dado por una interpretación rigurosa de sus signos. Un segundo conflicto señalado es el que provoca el uso de términos que tienen un significado en el lenguaje común que difiere del significado en el lenguaje matemático. Esto también se presenta cuando el significado del lenguaje común y el matemático es el mismo, en este caso el problema es determinar que efectivamente el significado es el mismo.

Radillo Enríquez y Varela (2007) también hacen referencia a la relación entre el lenguaje matemático y el cotidiano y afirman que hay términos que tienen significados que son próximos en ambos lenguajes y otros que son diferentes lo que provoca dificultades en el uso por parte de los estudiantes. Sostienen que “El lenguaje matemático es un sistema de símbolos que fija lógicamente los conocimientos sobre las relaciones y conexiones entre los objetos y procesos del mundo real, y sus propiedades; posee un vocabulario, una sintaxis y una notación propia” (p. 265). Además consideran que realizar una demostración “requiere el pasaje de un planteamiento verbal a una representación gráfica y simbólica” (p. 267). Hay términos del lenguaje matemático que requieren más de una condición para expresarlo simbólicamente, toman como ejemplo de esta situación el concepto de mediatriz que necesita de las condiciones de recta perpendicular al segmento y de punto medio.

Asimismo, respecto a la cuestión del lenguaje matemático, Ortega y Ortega (2001) sostienen que la matemática tiene

> un lenguaje particular, específico, el cual simplifica, en algunos casos, la comunicación, y por otro lado clarifica y designa de una manera exacta, sin posible confusión, sus contenidos. En este lenguaje, que podemos llamar lenguaje matemático, las afirmaciones son presentadas de una manera propia, siendo tajantes, con demostraciones de su veracidad, y sin

> permitir ambigüedades. Todos y cada uno de los símbolos de escritura definidos y utilizados tienen una tarea determinada, exacta, sin solapamientos ni posibles equívocos, mientras que también la estructura de su presentación es idónea para su perfecta comprensión (p. 3).

El conocimiento defectuoso de este lenguaje matemático, el cual involucra tanto la simbología como la estructura y presentación de los contenidos, puede llevar a cometer errores de construcción o de interpretación, lo que complejiza la comunicación en el área y puede originar errores y confusiones. En cuanto a la particular simbología matemática, con signos que la caracterizan ($\forall$, $\exists$, !, $\perp$, $\subset$, $\in$, entre otros), tiene un significado preciso y debe ser conocida por los estudiantes para poder interpretar lo que se quiere expresar con ella. Consideran también que el rigor y el uso del lenguaje matemático debe estar supeditado al nivel de conocimiento de los estudiantes con los que se trabaja. (Ortega y Ortega, 2001).

Weber (2013) sostiene que en general las pruebas en los cursos de nivel superior requieren el uso de notación formal y que para los estudiantes son complejas estas cuestiones. Dentro de los aspectos notacionales resalta la dificultad del uso de cuantificadores señalando que habitualmente los estudiantes ignoran como cuantificar las distintas variables en una proposición. Este autor destaca que en distintos momentos de la carrera académica de un estudiante se requieren diferentes tipos de justificación aunque esto rara vez se explicita. Señala que el estudiante suele recibir mensajes mixtos, dado que en general los libros de texto matemáticos ofrecen en algunos casos una explicación intuitiva, en otros un ejemplo y en otros casos una prueba rigurosa para justificar una proposición aunque la transición entre pensamiento intuitivo, empírico y riguroso no está explícitamente marcada. Esto puede llevar a los estudiantes a adquirir creencias matemáticas indeseables sobre el rigor, la explicación y las pruebas, y puede explicar parcialmente por qué los estudiantes presentan argumentos informales como pruebas en cursos avanzados.

Respecto a lo inherente de las demostraciones.

La capacidad de construir pruebas es una habilidad crucial en matemáticas avanzadas abordada desde diferentes aspectos por numerosos investigadores.

Weber (2002) sostiene que aunque los estudiantes estén en un nivel académico en el que saben lo que constituye una prueba y pueden razonar deductivamente, recitar y manipular definiciones, y hacer inferencias válidas, no garantiza que puedan construir nada más que pruebas muy triviales. Lo que los estudiantes pueden probar utilizando estos aspectos instrumentales es a menudo limitado y recomienda utilizar una comprensión intuitiva del concepto con el que están trabajando antes de poder construir pruebas. Encuentra en diversas investigaciones, acerca de esta temática, que los estudiantes a veces pueden expresar la definición de un concepto aunque tienen poca comprensión del mismo. Estos estudiantes no pueden, por ejemplo, describir el concepto con sus propias palabras o generar ejemplos y cuando se les pide que escriban pruebas que involucran este concepto no saben cómo empezar. Al escribir una prueba, hay muchas inferencias válidas que se pueden obtener aunque es poco probable construirla al derivar inferencias de una manera fortuita. Para construir pruebas no triviales, los estudiantes universitarios necesitan estrategias y heurísticas que les ayuden a decidir cómo deben atacar los problemas. Weber (2013) en sus investigaciones encuentra que los estudiantes universitarios no pueden construir una prueba sin solicitar ayuda al docente aunque se les brinde una sugerencia para comenzar, siendo sus estrategias, en general, ineficaces y rudimentarias. Por ejemplo, para probar una afirmación B, estos estudiantes universitarios a menudo intentan encontrar algún teorema de la forma *A implica B*, incluso cuando el antecedente no es coherente o no es pertinente en el contexto que se utiliza.

Asimismo, las definiciones formales juegan un papel crucial en las matemáticas avanzadas. Respecto a la relevancia de la comprensión de un concepto como parte fundamental de una demostración, también Vinner (1991) aboga por construir una comprensión intuitiva de un concepto matemático antes de dar una definición precisa. Después de que los alumnos comprendan la esencia de ese concepto, se les puede dar una definición formal o propiciar que los estudiantes puedan generarla. Sostiene que depender exclusivamente del enunciado de una definición tiene graves debilidades dado que, generalmente, hasta los estudiantes de matemática de nivel superior utilizan su comprensión intuitiva de un concepto mucho más que la definición del concepto. Por lo tanto, rara vez se utilizará una definición que no sea coherente con la comprensión intuitiva de un concepto por parte de un estudiante.

Otros aspectos vinculados con la demostración son los procesos de generalización, de particularización y el papel de las analogías en la comprensión de los contenidos matemáticos.

Para Polya (1970) "la generalización consiste en pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero; o pasar del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya el conjunto limitado" (p. 97). Por otra parte, la particularización "consiste en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dado a la consideración de un conjunto más pequeño -o incluso de un solo objeto- contenido en el conjunto dado". Estos dos procesos pueden considerarse inversos.

Bachelard (2000) sostiene que "Hay en efecto un goce intelectual peligroso en una generalización precoz y fácil" (p. 66) y también advierte sobre los peligros de las analogías aplicados a conceptos abstractos como lo son los matemáticos.

Respecto de los errores provocados por las analogías, De Castro (2012) afirma que

> el razonamiento analógico consiste en transferir parte del conocimiento de un dominio fuente a un dominio meta. Este tipo de razonamiento supone la existencia de dos procesos diferentes: el de recuperación, o búsqueda de información proveniente de una situación conocida, y el de extrapolación, o aplicación del conocimiento del dominio fuente al dominio meta a través del establecimiento de una correspondencia entre los dos dominios (p. 49).

En relación a este tipo de razonamiento advierte los peligros de establecer analogías entre dos situaciones diferentes basadas en características superficiales.

Asimismo, Zaslavsky y Ron (1998) realizan un trabajo en el que exploran la forma en que los estudiantes usan los contraejemplos para refutar una afirmación matemática, cómo consideran el empleo de los contraejemplos, de qué manera establecen contraejemplos y cuáles son las dificultades que encuentran al refutar una proposición mediante un contraejemplo. Estos investigadores encontraron que los estudiantes no comprenden que un contraejemplo es suficiente para refutar una proposición. Por otro lado sostienen que la mayoría de los estudiantes piensan que si una afirmación específica es válida en muchos casos, entonces debe ser correcta. Concluyen de su investigación que los estudiantes no entienden que si una proposición es válida en casos específicos (incluso si son infinitos) esto no garantiza que sea correcta para todos los casos. Además, encontraron que, en la mayoría de los casos, los estudiantes usan argumentos intuitivos y empíricos para probar todo tipo de afirmaciones, es decir, se basan principalmente en ejemplos y en casos individuales lo que es apropiado cuando se trata de afirmaciones cuya justificación o refutación puede realizarse con un ejemplo o con un contraejemplo. Por el contrario, la mayoría de las veces, una proposición requiere una prueba deductiva para su justificación o refutación y esto acarrea muchas dificultades. La importancia del empleo de los ejemplos en el pensamiento matemático, en el aprendizaje y en la enseñanza de la matemática continúa siendo tema de agenda de esta autora (Zaslavsky, 2010-2014 y Zaslavsky, Aricha-Metzer y Thoms, 2016).

Por su parte Selden y Selden (2003), realizan un estudio con alumnos universitarios donde caracterizan y catalogan errores de razonamiento en Álgebra Abstracta. Un error de razonamiento clásico y extremadamente persistente que detectan es el uso del inverso del teorema a demostrar. Este error consiste en equiparar una implicación y su contraria. Incluso los estudiantes a los que se les ha enseñado que existe una diferencia entre estas implicaciones cometen este error, especialmente cuando el teorema es complicado. La base de este concepto erróneo parece ser la imprecisión del lenguaje cotidiano. Las personas a menudo usan la construcción "si, entonces" cuando quieren decir "si y solo sí". Cuando alguien dice "si llueve, no iré", a menudo también quiere decir, pero no dice explícitamente, "y si no lo hace, lo haré", que es lógicamente equivalente a lo contrario. Los autores de libros de texto pueden reforzar esta confusión cuando establecen definiciones usando "si", pero en realidad significa "si y solo sí".

Las contribuciones en matemática y en geometría en particular de Rey Pastor, Puig Adam y Fetisov, que se presentan a continuación, son de tal relevancia que se consideran como una referencia ineludible en este trabajo, a pesar del momento en el que se escribieron.

Rey Pastor y Puig Adam (1948) señalan que debido a las imperfecciones de los medios materiales y de los sentidos no puede considerarse a la experiencia por sí sola como base para establecer las verdades en matemáticas. También la intuición (experiencia imaginativa) es insuficiente como criterio de certeza y advierten el peligro que conlleva dejarse llevar por ligeras apreciaciones intuitivas. Es por ello que es necesaria la deducción aunque algunas de las deducciones se deben apoyar en propiedades indemostrables cuya verdad se debe postular. No obstante, para que el edificio lógico sea fecundo en aplicaciones prácticas es necesario que los postulados estén en concordancia con la realidad por lo que se recurre a la experiencia e intuición. Esto muestra que la experiencia y la intuición son inherentes a la geometría aún en niveles avanzados de estudio.

En cuanto a la distinción entre postulado y teorema sostienen que no es intrínseca sino que depende de la ordenación que se adopte para la organización lógica. Esta ordenación se puede hacer de diversidad de formas pero una vez adoptado un ordenamiento debe respetarse insistiendo en que cada teorema debe sólo apoyarse en teoremas anteriores, advirtiendo que de lo contrario se establece un círculo vicioso. Otra falta lógica frecuente que advierten es "la de apoyar una demostración en proposiciones implícitamente admitidas en el razonamiento y que no han sido previamente establecidas de un explícito" (Rey Pastor y Puig Adam, 1948, p. 44). También advierten acerca del uso de la demostración por reducción al absurdo[2] señalando que para los estudiantes tiene el inconveniente de ser una prueba indirecta y por tanto menos convincente que una demostración directa. Señalan que un error habitual, con estos métodos para demostrar, es considerar como fin el llegar a contradecir la tesis en lugar de la hipótesis. "La contradicción de la tesis es el punto de partida; la contradicción de la hipótesis es el punto de llegada, que termina la demostración por quedar así probado el contrarrecíproco" (pp. 55- 56).

Rey Pastor y Puig Adam (1948) señalan además los peligros del método reductivo[3] en geometría. Por un lado, al realizar una demostración se puede descansar en la intuición de una posible solución y de este modo se pierden

[2] Se considera en esta investigación una distinción entre la demostración por reducción al absurdo y demostración por el contrarrecíproco. Estos autores, sin embargo, lo consideran equivalentes.

[3] El método reductivo consiste en un doble proceso deductivo: dada una proposición que se quiere demostrar, se considera válida y se sustituye por otra que es consecuencia de ella, de esta nueva se deduce otra y así se llega a una condición consecuencia de las anteriores y que es válida por ser un postulado o un teorema probado. Luego se debe probar, por deducciones en sentido inverso, que de esta última condición se deducen o resultan las primeras. Sólo si se sustituye por proposiciones equivalentes, es decir, se sustituye por una proposición que no solo es consecuencia de ella sino equivalente, no es necesario el proceso inverso. De lo contrario el proceso es incompleto o incluso erróneo.

otras soluciones por haber fijado solamente la atención en una situación particular. Por otro lado, a veces se desechan, en el proceso deductivo inverso, algunos elementos obtenidos sin probar que no satisfacen el problema, sino por una imposibilidad de probar que lo satisfacen.
Asimismo, es de destacar de esta obra (Rey Pastor y Puig Adam, 1948), la exposición que presentan respecto a las seudo demostraciones, dentro de las cuales se encuentran los paralogismos, es decir, falsas demostraciones que conducen a conclusiones absurdas. En primer lugar señalan a los paralogismos *intuitivos*, en los cuales la experiencia con sus imperfecciones y la intuición con sus espejismos conducen a conclusiones erróneas. Por otro lado mencionan los paralogismos *gráficos*, que consisten en apoyar las demostraciones en esquemas, tomando de ellos relaciones particulares o incluso, relaciones absurdas. Otros paralogismos que señalan son el de *extrapolación*, que consiste en una "extensión falsa o indebida al contenido de la hipótesis o a la aplicación de la tesis de un teorema" (p. 130); el de *enumeración incompleta*, donde se divide la demostración en casos y se omiten algunos de ellos y el de *petición de principio* que consiste en introducir en el razonamiento una propiedad no demostrada. Finalmente, exponen los paralogismos que surgen de aplicar indebidamente algunos principios lógicos del razonamiento como por ejemplo, confundir una proposición con su contraria o recíproca o aceptar por válida la recíproca o contraria de una proposición habiendo demostrado la directa.

Fetisov (1973) sostiene que la geometría es fundamentalmente una ciencia deductiva y de allí que las demostraciones son necesarias para que las aseveraciones tengan un fundamento riguroso para ser consideradas verdaderas. Una demostración está construida correctamente si se apoya en axiomas y proposiciones demostradas previamente, no en lo que es obvio. La demostración es necesaria para establecer la generalidad de la proposición tratada, es decir, su aplicabilidad a todos los casos particulares. Expone distintas advertencias respecto a los errores que frecuentemente se presentan en las demostraciones. Un tipo de error que señala es el de tomar en las demostraciones casos particulares, accidentales, no considerar la situación general, advirtiendo que una posible causa de ello es basar los argumentos en diagramas. Un tanto similar a este tipo de error, aunque lo señala como más difícil de advertir, es el de las demostraciones incompletas. Presenta además el caso en que se concluye en una demostración que un objeto que se está buscando no existe, dado que por el método que se busca no se puede encontrar. Otro error que señala es el de utilizar en una demostración una proposición que no se ha probado todavía, llama a este error "tautologías" e indica que se presentan en forma disimuladas, es decir, no son evidentes. Asimismo se exponen en este texto los requisitos de una demostración correcta: basar la demostración de una propiedad en axiomas o teoremas previamente demostrados; justificar todas las deducciones mediante las cuales se establece la demostración y, tener presente que el propósito de la demostración es establecer la veracidad de la proposición no sustituyéndola por otra.

2.2.3. Algunas particularidades del trabajo en geometría

En este apartado se presentan algunas ideas que sirven de fundamento a este trabajo específicamente teniendo en cuenta algunas particularidades del tratamiento de la geometría tridimensional y de los conceptos geométricos.

Existen posturas diversas con respecto a si la enseñanza de la geometría del espacio debe preceder a la del plano o viceversa. Al respecto Dienes (1970) afirma que es sensato comenzar con la enseñanza de la geometría sólida en la educación básica.

Sostiene también esta postura de iniciar el estudio por la geometría de los sólidos Guillén (2010) quien cita, entre otras razones, que los objetos del entorno y los sólidos figuran como contextos a partir de los que se pueden constituir objetos mentales iniciales sobre los conceptos de plano y recta y sus relaciones (paralelismo y perpendicularidad).

Freudenthal (1983; citado en Guillén, 2010) ha defendido en múltiples ocasiones la iniciación en geometría a partir de los sólidos. Sostiene diferentes razones. Una de ellas deriva de la concepción de la enseñanza de la geometría que se tiene en el nivel elemental, tradicionalmente se comienza por la enseñanza intuitiva de la geometría de los sólidos. Otra razón proviene del hecho que

> el espacio con sus sólidos es más concreto que el plano con sus figuras; en el espacio hay multitud de relaciones; en el plano el camino hacia el análisis lógico es más corto; el espacio es más intuitivo y facilita más las actividades creativas (p. 25).

Por otro lado, considera a los sólidos como una de las aproximaciones para las figuras planas o las rectas. En el análisis fenomenológico de “planos” y “rectas” que se presenta en Freudenthal (1983; citado en Guillén, 2010) los “objetos del entorno figuran como contextos a partir de los que se pueden constituir objetos mentales iniciales sobre estos conceptos y sus relaciones (igualdad, paralelismo, perpendicularidad)” (p. 26). Este autor alerta sobre las consecuencias que tiene en los estudiantes ejercitarlos sólo en la geometría plana que va en detrimento de la imaginación espacial. Sucede a menudo que los alumnos que no tienen dificultades en la geometría plana fallan en la espacial.

Volkert (2008), por su parte, propone empezar con un curso de "geometría intuitiva" tomando los objetos tridimensionales de la realidad (pelotas, cajas, envases, etc.) y a partir de ellos determinar las figuras planas (aristas, caras y secciones de los objetos tridimensionales). Esta propuesta que, según este autor, es la única manera de conectar las experiencias de los estudiantes con los hechos básicos necesarios para hacer geometría, es completamente al revés de la presentación propuesta por Euclides. Esto se debe a que propone un trabajo intuitivo contrariamente al sistemático formulado por Euclides. El problema se presenta cuando posterior a una enseñanza propedéutica, de manera intuitiva, en estudios superiores se requiere una sistematización de la geometría sólida. Surgen así dificultades intrínsecas de la geometría sólida que obstaculizan esa enseñanza sistemática. Por un lado Volkert (2008) sostiene que la geometría sólida es mucho más complicada que su contraparte en el plano dado que, por ejemplo, en la geometría del plano hay sólo un tipo de ángulos mientras que en la geometría sólida hay tres tipos. Así también, la relación de perpendicularidad en el plano se define entre rectas mientras que en la geometría sólida se define entre rectas, entre rectas y planos y entre planos. Otra fuente de dificultad que señala es que la representación de los objetos de la geometría sólida es esencialmente bidimensional. Las representaciones son entonces difícil de entender dado que el parecido a los objetos representados es más débil que en la geometría del plano. Por otro lado, manifiesta el problema de la intuición y la evidencia que se potencia en la geometría sólida lo cual genera suposiciones implícitas. A partir de lo mencionado, concluye que la enseñanza de la geometría sólida en la escuela es un tema peligroso ya que la necesidad de esta enseñanza sistemática tiende a petrificar sus argumentos. Hay aspectos en el que la enseñanza de la geometría sólida, que como ciencia, es influenciada por el desarrollo sistemático de la misma. La decisión de Euclides del rigor y del ordenamiento de temas puso a la geometría sólida en el final de los temas tratados, generando una separación estricta entre la geometría del plano y la sólida.

Por su parte Itzcovich y Broitman (2001) señalan que no existen estudios didácticos que posibiliten afirmar que el estudio de la geometría 2D deba preceder a la de 3D o viceversa.

De la revisión de libros de educación superior, que presentan un estudio sistemático de la geometría, se puede afirmar que en todos (Puig Adam, 1980; Tirao, 1979; Ferraris, 1991; Garguichevich, 2007; Fernández Val, 2004; Sánchez Mármol y Pérez Beato, 1947), se parte de la geometría plana y luego, tomando a ésta como base, se estudia la geometría del espacio.

Por otro lado, Cohen (2000) afirma que los conceptos básicos como recta y plano y los conceptos de interrelación entre ellos, como perpendicularidad y paralelismo, son generalmente conocidos en el contexto de la geometría plana. Su extensión al espacio tridimensional no cambia su significado básico, pero se amplía la variedad de posibles relaciones entre ellos. Estas nuevas posibilidades necesitan una capacidad de visualización, que es a menudo bastante limitada en los estudiantes que están acostumbrados a ver todo en un plano. Incluso si los estudiantes son conscientes de la existencia de diferentes planos y direcciones, tienden a ver sólo un plano a la vez. Este tipo de conflictos suele ser un terreno en el que podrían surgir fácilmente conceptos erróneos.

Por su parte Berté (1999), señala que un obstáculo para el aprendizaje de la perpendicularidad son las direcciones que denomina privilegiadas: horizontal y vertical. "El modelo de ángulo recto no está explícito en la mente de los alumnos y permanece ligado a contextos especiales, vertical y horizontal especialmente" (p. 118). Sostiene que estas direcciones privilegiadas tienen su raíz en la experiencia de mantenerse de pie que da la horizontal y la vertical y por tanto el ángulo recto.

Respecto a la formación de conceptos geométricos Fischbein (1993) arguye que las figuras geométricas poseen simultáneamente características conceptuales y figurales. Este autor denomina a las figuras geométricas conceptos figurales por esa doble naturaleza. Una figura geométrica puede ser descripta a partir de sus propiedades intrínsecamente conceptuales. Sin embargo, una figura geométrica no es un mero concepto, es una imagen, una imagen visual. Posee una propiedad que los conceptos usuales no poseen: incluye una representación mental de propiedad espacial. Cuando se plantea una situación problemática las condiciones consideradas en la resolución no dependen del dibujo en sí mismo, son impuestas por definiciones y teoremas. En la geometría las imágenes pueden ser exhaustivamente controladas por el concepto. El concepto figural constituye sólo el límite ideal de un proceso de fusión e integración entre las facetas lógicas y figurales. En condiciones psicológicas usuales las características conceptuales y figurales de un concepto figural permanecen relativamente dependientes de los dos sistemas con sus limitaciones específicas. Este hecho básico conduce muy a menudo a contradicciones, conflictos, tensiones internas, a una disolución total del concepto figural en sus dos componentes básicos. En principio la fusión entre figura y concepto debería ser absoluta, pero es la organización conceptual la que debería dictaminar, completamente las propiedades figurales y relaciones. Sin embargo, se trata de una situación ideal que usualmente puede ser alcanzada en la mente formada del matemático.

Laborde (1996) sostiene que el dibujo puede ser considerado como un significante de un referente teórico. La figura geométrica consiste en el emparejamiento de un referente dado con todos sus dibujos; queda entonces definida como el conjunto de pares formados por dos elementos, siendo el primer elemento el referente y el segundo uno de los dibujos que lo representa (este segundo elemento se toma del universo de todos los dibujos posibles del referente). El término figura geométrica así entendido remite al establecimiento de una relación entre un objeto geométrico y sus posibles representantes. Visto así, las relaciones entre un dibujo y su referente construidas por un sujeto, constituyen el significado, para este sujeto, de la figura geométrica asociada. Interesa subrayar la complejidad de las relaciones entre el dibujo y el objeto geométrico ya que el paso de uno a otro es objeto de una interpretación. Un mismo dibujo geométrico se puede interpretar de múltiples formas y, en particular, la percepción interviene en la construcción de una interpretación siempre y cuando el lector no tenga sólidos conocimientos teóricos geométricos que le permitan ir más allá de la primera lectura perceptiva. Los aspectos perceptivos del dibujo pueden entorpecer o por el contrario favorecer la lectura geométrica para los alumnos, al atraer la atención sobre elementos del dibujo no pertinentes para su lectura.

Por otro lado, Vinner (1991; citado en Mántica, 2011) sostiene que cuando escuchamos el nombre de un concepto conocido muy rara vez viene a nuestra mente la definición del concepto, sino que esta palabra nos hace evocar “algo” formado por un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias. Este “algo” es lo que este autor denomina imagen conceptual. En la formación de conceptos geométricos la imagen conceptual que se crea en la mente de los estudiantes está formada por los diversos dibujos, figuras o representaciones que recuerdan como ejemplo de este concepto junto con el conjunto de propiedades que asocian al mismo. Es decir, la imagen de un concepto es correcta cuando le permite al estudiante discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que lleva asociada son todas relevantes. En la formación de la imagen de un concepto juegan un papel importante, la propia experiencia y los ejemplos que se han visto o utilizado tanto en el contexto escolar como extraescolarmente. Vinner (1991; citado en Mántica, 2011) sostiene que la actividad de los estudiantes está basada sólo en sus imágenes del concepto y que la definición es inactiva o no existe.

CAPÍTULO 3

MARCO METODOLÓGICO

Este capítulo se presenta en tres apartados. El primero describe el contexto en que se lleva a cabo este estudio. En el segundo apartado se explicitan el tipo y los alcances de la investigación y en el tercero se describen las fases en las que se realiza esta tesis.

3.1. CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

En esta investigación se estudian errores y dificultades en el trabajo con demostraciones geométricas que tienen los alumnos de la cátedra Geometría Euclídea Espacial (GEE) del profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral.

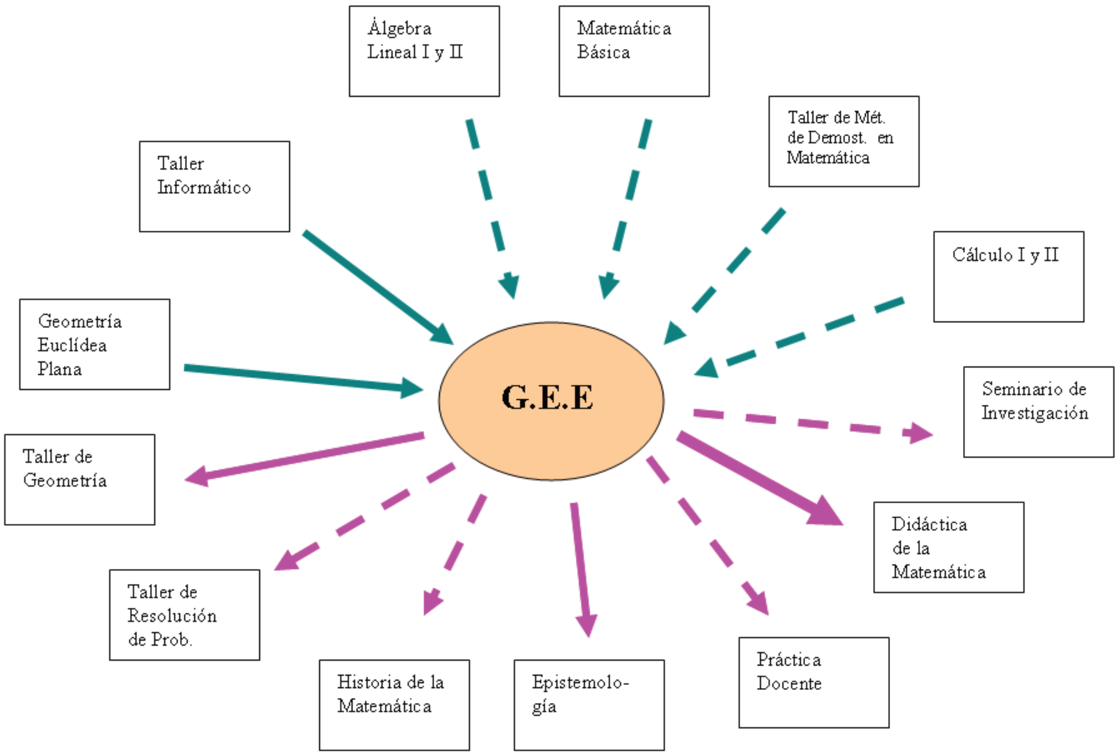
Esta carrera se estructura cuatrimestralmente en cinco años. La asignatura GEE se ofrece en el primer cuatrimestre de tercer año. Tiene como materias correlativas a Geometría Euclídea Plana y Taller Informático. Cabe aclarar que estas correlatividades son sólo para rendir la asignatura, pudiendo asistir cualquier alumno aunque no las tenga cursadas o aprobadas. Además de la Geometría Euclídea Plana y el Taller Informático, los alumnos tienen el cursado de las materias Matemática Básica (donde, además de otros contenidos, se desarrollan conceptos de lógica), Taller de Métodos de Demostración en Matemática, Cálculo I y II; Álgebra Lineal I y II, entre otras. Así, los alumnos tienen además del bagaje de sus estudios de la escuela obligatoria, experiencias en este nivel en temas de geometría Euclídea y en métodos de demostraciones deductivas al momento de cursar esta asignatura.

En el cuatrimestre siguiente al cursado de GEE los alumnos tienen, según el plan de estudios, el Taller de Geometría, el cual tiene como objetivo principal que los alumnos utilicen y resignifiquen los conceptos trabajados en Geometría Euclídea Plana y Geometría Euclídea Espacial para la resolución de distintas situaciones planteadas, adoptando un punto de vista orientado a la enseñanza. Por ese motivo, no se desarrollan nuevos contenidos. La Geometría Euclídea Espacial es correlativa de este taller.

En el segundo cuatrimestre del cuarto año, se indican para cursar dos asignaturas que se articulan directamente con GEE: Taller de Resolución de Problemas y Didáctica de la Matemática. Para el cursado de esta última es requisito tener aprobada la GEE. El taller de Resolución de Problemas se propone desarrollar la habilidad de resolver problemas de distintas ramas de la matemática e interrelacionar temas de las asignaturas cursadas, dentro de los cuales aparecen los de GEE, e incentivar la valoración crítica e importancia del uso de las TIC en la enseñanza de la Matemática. En la Didáctica de la Matemática, se trabajan la didáctica específica de la geometría, de la aritmética, del cálculo y del álgebra. También se realiza la selección, secuenciación y organización de los contenidos de la escuela secundaria, el análisis de textos escolares y de los diseños curriculares del nivel. Todo ello requiere de la sólida formación en las distintas áreas dentro de las cuales está la geometría euclídea.

En el quinto año se encuentran las asignaturas Epistemología de la Matemática, Historia de la Matemática, Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática y la Práctica Docente. Todas ellas requieren para su aprobación tener a la GEE aprobada. En las dos primeras asignaturas mencionadas, es evidente la vinculación de la geometría euclídea como objeto de estudio y como paso para el surgimiento de las otras geometrías. En el Seminario los alumnos pueden elegir un área, como la geometría, para realizar una primera investigación en didáctica. En la Práctica Docente los alumnos se enfrentan, entre otros desafíos, a planificar temas de la escuela secundaria y del nivel universitario, dentro de los cuales pueden presentarse los de la GEE.

En el siguiente esquema se muestran las relaciones de la GEE con otras asignaturas del plan. Las flechas con líneas punteadas indican que las asignaturas no son directamente correlativas, sino que hay una dependencia desde los contenidos o a través de otra asignatura. Las otras materias se encuentran desconectadas entre sí en el esquema pero se debe a que no es intención determinar las relaciones entre ellas en este contexto, sino sólo mostrar las relaciones con la asignatura GEE que es de donde se toman los insumos para esta investigación.



Específicamente referido a los tópicos de la cátedra, ésta se estructura en tres unidades. En la primera se trabajan las propiedades de incidencia, ordenación y sentido en el espacio; la propiedad general de las figuras convexas; los conceptos de superficie poliédrica y de poliedro convexo y no convexo. Dentro de esta unidad se analizan demostraciones del teorema de Euler, destacando similitudes y diferencias. En la segunda unidad se desarrollan las transformaciones en el espacio, concepto y axiomas de movimiento y congruencia en el espacio, las simetrías (axial, central y especular) y perpendicularidad en el espacio; la traslación y paralelismo en el espacio; giro y movimiento helicoidal. Rectas cortadas por planos paralelos, homotecia y semejanza en el espacio. En la última unidad se desarrollan los conceptos de poliedros y cuerpos redondos, propiedades métricas de caras y triedros de un anguloide y de los poliedros convexos. También la geometría en la superficie esférica y la comparación entre las geometrías en la superficie esférica y la euclídea. Por último, el concepto de medida, en el que se obtienen las fórmulas que permiten el cálculo de área y volumen de los poliedros y cuerpos redondos estudiados en la cátedra.

Se abordan problemas de formulación y validación de conjeturas, incluyendo en la mayoría de los casos a la demostración formal. Asimismo se incluyen problemas en los que se solicita describir figuras planas o tridimensionales, problemas de construcciones, problemas de cálculos de medidas de ángulos diedros o de elementos de figuras planas determinadas por intersecciones de figuras tridimensionales con planos. También problemas de determinación de elementos o de áreas o de volúmenes de poliedros o figuras de revolución.

Los textos que se indican en el programa de la asignatura para los estudiantes son *Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Fundamentos* de Pedro Puig Adam (1980) y para la unidad de volumen se toma también el texto *Espacio. Geometría Métrica* de Cristina Ferraris (1991). El texto de Puig Adam presenta el desarrollo de los temas de la geometría Euclídea plana y posteriormente la del espacio por lo tanto los estudiantes tienen como cimiento o "caja de herramientas"[4] todas las definiciones, propiedades y procesos de demostración que les brinda la Geometría Euclídea Plana, asignatura previa a GEE.

Se trabaja en la cátedra de la siguiente forma: al comienzo del cuatrimestre se entrega a los alumnos además del programa y la bibliografía de la asignatura, un cronograma para las 15 semanas de clases con los temas que se abordan en cada semana, se indica además la semana en la que se realiza el parcial y un taller, instancias obligatorias para la regularización de la materia. En cada semana se dictan dos clases una de "teoría" y otra de "práctica", aunque esta denominación es a los efectos de la organización de los horarios de dictado ya que la forma de trabajo es similar en ambas. Los alumnos tienen que estudiar el tema pautado en dicha semana y en la clase de teoría se discuten las dudas sobre las definiciones y teoremas con las que tuvieron dificultades. También se consultan las dudas, se plantean para algunos teoremas nuevas demostraciones, en caso de existir una en el texto de estudio, o se proponen y discuten las demostraciones que realizan los alumnos. Si es necesario se hacen sugerencias para comenzar a escribir una demostración. Se explicita el sistema axiomático que se trabaja y las definiciones que están en los textos de base. Dichos axiomas, definiciones y ordenamiento de teoremas y propiedades no se negocian aunque se expone a los alumnos que en otros textos puede aparecer distinto orden, distintas definiciones y distintos sistemas axiomáticos pero que en la cátedra se trabajará con esta base. Debido a este acuerdo, se propone a los alumnos la utilización de una guía (realizada por ellos) que contiene el ordenamiento de las definiciones, teoremas y propiedades que se elige para trabajar la materia. Como el ordenamiento no se modifica, y dado que no tiene sentido la memorización del orden que se elige, es que se permite la utilización de la guía en los parciales y en el examen final. Con esta guía también se trabaja en las clases de práctica. La guía contiene el concepto a definir en el caso de una definición

[4] Itzcovich, H. (2005).

pero no la misma, y en el caso de teoremas o propiedades el enunciado además del nombre si es que existe.

3.2. ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN

Esta es una investigación cualitativa. Según McMillan y Schumacher (2005)

> La investigación cualitativa describe y analiza las conductas sociales colectivas e individuales, las opiniones, los pensamientos y las percepciones. El investigador interpreta fenómenos según los valores que la gente le facilita. Los estudios cualitativos son importantes para la elaboración de la teoría, el desarrollo de las normas, el progreso de la práctica educativa, la explicación de temas sociales y el estímulo de conducta. (p. 400)

La investigación cualitativa se ocupa de “la comprensión de los fenómenos sociales desde la perspectiva de los participantes. Esto ocurre a través de la participación, hasta cierto punto, del investigador en la vida de los sujetos durante la investigación” (McMillan y Schumacher, 2005, p. 19). “Es un estudio en profundidad con el uso de técnicas cara a cara para la recogida de los datos en su entorno natural” (p. 620). Estos autores sostienen que el estudio cualitativo ayuda a los lectores a entender las perspectivas múltiples de la situación según las personas estudiadas por lo cual es de índole etnográfico, lo que implica que se busca tener en cuenta la subjetividad en el análisis e interpretación de los datos.

Una característica de este tipo de investigación es que los datos estudiados están expresados en palabras, frases y afirmaciones antes que datos numéricos. Un empleo cuidadoso, de estos datos, proporcionará resultados replicables e información válida de los fenómenos estudiados (Mc Knight, Magid, Murphy y Mc Knigt, 2000).

Según McMillan y Schumacher (2005) la investigación cualitativa utiliza principalmente razonamiento inductivo para sugerir una interpretación de una situación particular.

> Los problemas de investigación cualitativa se reformulan varias veces después de que el investigador haya comenzado la recogida de datos. El problema de investigación se define inicialmente al planificar el estudio, se reformula durante el comienzo de la recogida de datos y, de nuevo si es necesario, se reformula a lo largo de la recogida de datos. (p. 110)

En una primera etapa de la investigación se realiza un análisis de documentos representados por exámenes parciales individuales escritos de los alumnos de la cátedra GEE. En una segunda etapa se analizan documentos representados por los escritos entregados por pares de estudiantes que realizan un taller en el marco de la cátedra y el análisis del audio de las grabaciones realizadas a dos binomios de estudiantes que resuelven dicha tarea.

Según lo expresado hasta aquí, el enfoque de esta investigación es cualitativo y según el alcance del estudio a realizar es exploratorio y descriptivo dependiendo de la fase en que se encuentre, las cuales se detallan en el apartado 3.3.

Según Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio (2003) “Los estudios exploratorios se efectúan normalmente, cuando el objetivo es examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes” (p. 115). Si bien existen estudios sobre errores y dificultades, la mayoría no se refieren a errores geométricos. Aquellas investigaciones, a las cuales se tuvo acceso, que abordan el tema de errores geométricos no refieren específicamente a errores que involucran las relaciones de paralelismo y perpendicularidad en 3D ni en contextos similares al de este trabajo con estudiantes del profesorado en Matemática. Estas son las razones por las que se afirma que el alcance de este estudio es exploratorio. Según estos autores, el valor de este tipo de estudios consiste en que permiten “establecer prioridades para investigaciones futuras o sugerir afirmaciones y postulados” (p. 116).

Por otro lado, se puede considerar también que el alcance de este estudio es descriptivo ya que en éstos, “Con mucha frecuencia, el propósito del investigador consiste en describir situaciones, eventos y hechos. Esto es, decir cómo es y cómo se manifiesta determinado fenómeno” (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2003, p.117). Sostienen que en un estudio descriptivo se selecciona una serie de cuestiones y se recolecta información sobre cada una de ellas para así relatar lo que se investiga. En este estudio se pretende especificar y caracterizar errores de los estudiantes del profesorado en matemática al resolver problemas referidos a las relaciones de paralelismo y perpendicularidad en 3D, detallando los rasgos importantes de este fenómeno.

3.3. FASES DEL ESTUDIO

Esta investigación consta de cinco fases que se detallan en los siguientes apartados.

En la primera fase se procesan parciales de estudiantes de la cátedra GEE de la FHUC y se esboza una incipiente tipología de errores.

En la segunda fase se hace una comparación entre la geometría Euclídea plana y espacial referida a los conceptos de paralelismo y de perpendicularidad. Se diseña un cuestionario y se implementa con estudiantes de la cátedra GEE de una cohorte posterior a la de donde se obtienen los datos de la fase 1. Se produce una nueva categorización y se aplica a los parciales y al nuevo instrumento.

En la tercera fase se realiza una consulta a expertos con el fin de contribuir a la validez del estudio.

En la cuarta fase se realiza una nueva categorización teniendo en cuenta las categorizaciones anteriores, los aportes teóricos presentados en el capítulo 2 y lo producido en la consulta a expertos.

En la quinta fase se presenta un acercamiento a las dificultades detectadas, empleando los diálogos recogidos en el segundo instrumento y la vinculación de las mismas con errores detectados en las categorías anteriormente producidas.

FASE 1

El tema *errores y dificultades* es abordado por numerosas investigaciones en educación matemática (Capítulo 2) pero éstas son realizadas en otros contextos al que se desarrolla el presente estudio ya sea por el nivel educativo de los estudiantes que participan o por los conceptos matemáticos estudiados. Es por esto que la primera fase es de tipo exploratoria, ya que el estado del arte expuesto en el capítulo anterior muestra que hay “ideas vagamente relacionadas con el tema de estudio” (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2003, p. 115). En esta fase se realiza el estudio sobre artefactos escritos, parciales de estudiantes, y se esboza una primera categorización de errores.

Se seleccionan pruebas de un parcial de la asignatura que consta de tres problemas.

1. a) Determinar una condición necesaria y suficiente para que una recta sea paralela a un plano. Demostrar. b) Demostrar que dos rectas son perpendiculares si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra. 2. Dada la proposición: "Por un punto A del espacio puede trazarse uno y sólo un plano paralelo a dos rectas a y b cualesquiera. a) Determinar si es verdadera o falsa. b) Si es verdadera demostrarla y si es falsa determinar las condiciones para que sea verdadera y demostrarla. 3. a) Obtener y demostrar que transformación se obtiene al componer una simetría especular por una traslación de vector perpendicular al plano de simetría. b) Determinar los elementos de la transformación resultante.

Cuadro 1: Consignas del parcial.

Se consideran para el análisis los problemas 1.b) y 2 ya que incluyen los conceptos objeto de estudio en esta investigación. Sólo se escogen las pruebas que tienen por los menos uno de estos dos problemas resueltos.

En una primera instancia se leen varias veces las demostraciones y luego se desglosan en fragmentos y se organizan las producciones en tablas (**Anexo A**). En dichas tablas los fragmentos describen, en el orden realizado por el estudiante, la demostración o en caso de ser necesario se transcribe parte de la misma y se adjunta la representación gráfica, en caso de que exista.

Frag.	Descripción de la resolución	Comentarios
1		

Tabla 1: Ejemplo de tabla utilizada en la fase 1.

La columna "Frag." contiene los números de fragmentos de la resolución del problema descripto en la fila correspondiente. Estos fragmentos, que respetan el orden de las argumentaciones, son tomados por el investigador para facilitar la descripción de "tramos" de las producciones de los estudiantes. La columna "Descripción de la resolución" contiene un resumen de la resolución del alumno, o en algunos casos transcripciones de párrafos significativos y el dibujo realizado, si existe. La columna "Comentarios" contiene acotaciones o aclaraciones referentes a los pasos correspondientes por parte de la investigadora. En la última fila de cada cuadro se agregan comentarios acerca de cuestiones que se destacan en el análisis, en algunos casos se escribe la proposición que se demuestra o intenta demostrar en la producción, teniendo en cuenta los elementos (hipótesis, supuestos, etc.) que se utilizan.

Se analiza la demostración por más que se detecte un error que la invalida, como por ejemplo que no se pruebe lo que se pide o que esté incompleta o que se considere otra propiedad que no es la dada, entre otras. En todos los casos, se analiza la propiedad que el estudiante propone.

Se realiza un cuadro para cada uno de los problemas de los parciales analizados y se denominan con Cuadro Análisis E-P, donde E toma un valor numérico 1 o 2 dependiendo del problema que corresponde del parcial y P toma un valor numérico, entre 01 y 14, asignado a ese parcial (**Anexos A** y **B**). En el Capítulo 4 estos cuadros análisis se referencian utilizando, por ejemplo, la expresión CA 2-04-6, que refiere al cuadro análisis del problema 2, del parcial 04, fragmento 6.

Se realiza un listado de los errores que se detectan en esta primera instancia considerando los aportes de los trabajos referenciados en el estado del arte (Capítulo 2). Así se establecen dos grandes tipos, los generales, que pueden ser de cualquier área de matemática y, los particulares, referidos específicamente a la geometría del espacio (Sección 4.2). Esta clasificación surge del análisis de las producciones escritas de los estudiantes. Es una primera aproximación donde el énfasis está puesto en detectar los errores lo más objetivamente posible poniendo el acento no en las causas del error sino en lo que hace el estudiante. No se busca en esta instancia evitar solapamientos ni establecer el menor número de categorías. Es una clasificación exploratoria realizada en función de un registro sistemático elaborado a partir de la experiencia adquirida en la enseñanza de la geometría espacial a estudiantes del profesorado en matemática por varios años. Se busca también un formato de presentación que haga accesible la interpretación de las demostraciones y de los errores.

El parcial de la cohorte seleccionada lo realizan 21 estudiantes de los cuales 14 cumplen la condición de haber realizado al menos uno de los problemas a analizar. Se enumeran correlativamente del 01 al 14 dichos artefactos escritos, se presenta a continuación un cuadro que muestra el problema analizado de cada parcial que forma parte del estudio.

Examen parcial	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
Ejercicio 1b	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Ejercicio 2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	x	✓	x	✓	x	✓	✓

Tabla 2: Ejercicios considerados en el artefacto analizado.

FASE 2

Luego de la categorización presentada en la Fase 1 se hace una comparación del concepto de paralelismo y del concepto de perpendicularidad en la geometría Euclídea plana y en la geometría Euclídea espacial (Sección 4.3).

A partir de esta comparación con el propósito de ajustar la tipología, se diseña y aplica un instrumento, un cuestionario que consta de dos problemas que involucran los conceptos de paralelismo y perpendicularidad en 3D.

1. Sea la siguiente proposición: “Dadas $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$ rectas cualesquiera y A un punto tal que A $\notin \overleftrightarrow{a}$ y A $\notin \overleftrightarrow{b}$, existe por A un único plano paralelo a $\overleftrightarrow{a}$ y a $\overleftrightarrow{b}$”. Determinar si es verdadera o falsa. Si es verdadera, demostrarla. Si es falsa, determinar las condiciones para que sea verdadera y demostrarla.

2. Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si un plano α contiene a una recta $\overleftrightarrow{a}$ perpendicular a otra recta $\overleftrightarrow{r}$, entonces el plano α es perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{r}$.
b) Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.
c) Dos rectas alabeadas son siempre perpendiculares.
d) Si una recta es perpendicular a dos rectas de un plano α, es perpendicular al plano α.
e) En un tetraedro regular, las aristas alabeadas son perpendiculares.
f) Dos rectas son perpendiculares si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra.

Cuadro 2: Consignas del cuestionario a resolver por pares de alumnos.

Este cuestionario se implementa en una clase de GEE, de una cohorte posterior a la de donde se toman los artefactos de la Fase 1, con formato taller y con carácter de requisito obligatorio para obtener la regularidad de la asignatura. En este taller los estudiantes trabajan en parejas, autorizan que se graben en audio las interacciones y que se empleen junto con sus producciones escritas en este trabajo de investigación. Con esta modalidad de trabajo en binomios se pretende precisar los errores y vislumbrar las dificultades de los estudiantes en las resoluciones, a partir de las producciones escritas, los registros de las interacciones y los diálogos que se producen en forma espontánea en el binomio. Se cuenta con la producción escrita del taller, que se presenta en el **Anexo C**, de dos binomios (F y L - I y A) denominando a las alumnas con una letra de sus nombres, con el objetivo de preservar su anonimato. Además, del binomio F y L, se dispone de la transcripción de la grabación del intercambio entre las alumnas la cual se detalla en el **Anexo D**. Este anexo se presenta mediante una tabla de tres columnas: la primera numera correlativamente las intervenciones de las alumnas, la segunda la inicial de la alumna que participa y en la tercera se reproduce textualmente lo que expresa la alumna que interviene. Con la intención de facilitar la detección de los diálogos cuando las integrantes cambian la proposición a la que se refieren es que se presenta una fila gris indicando esta acción.

A partir del análisis de estos artefactos escritos, de la primera categorización y de los aportes de referentes teóricos que se mencionan en el Capítulo 2 se realiza una nueva tipología (sección 4.3). Esta categorización cuenta con siete tipos de errores: tres que refieren a la imprecisión en el empleo del lenguaje matemático y de las definiciones, axiomas y propiedades geométricas. Dos que refieren a la acción de demostrar; uno que apunta al empleo de representaciones gráficas y otro referido a la extrapolación de propiedades. A partir de este análisis se confeccionan los cuadros donde se procesa la información con el formato diseñado para el análisis del primer instrumento. Se categorizan aquí los artefactos escritos en estas dos instancias con la nueva tipología.

FASE 3

Se realiza una consulta a 4 expertos, docentes investigadores universitarios que se desempeñan en profesorados en matemática y que se vinculan de distintas maneras a la temática de esta investigación. Tres de estos investigadores son de la Universidad Nacional del Litoral y uno de la Universidad Nacional del Comahue.

A cada experto se le envía un correo electrónico con dos archivos (**Anexo E** y **Anexo Ea**).

El primer archivo contiene:

- La descripción de tres de las siete categorías (TIII, TV y TVII) que se presentan en la **Fase 2**, informándoles que la categorización completa consta de siete. Sólo se envían estas tres categorías con el fin de no hacer excesiva la tarea de los expertos y se eligen estas tres porque son en las que se presenta divergencia.

- Las respuestas al cuestionario que se describe en la **Fase 2**, de dos parejas de alumnos. Las mismas se presentan en una tabla con tres columnas. La primera columna enumera los fragmentos de la resolución del problema presentado en dicha fila. Estos fragmentos, que respetan el orden de las argumentaciones, son tomados por "tramos" para facilitar la categorización de errores de las producciones. La segunda columna contiene las respuestas escritas dadas por cada pareja. La tercera columna es para que el experto coloque, en caso de hallarlo, el tipo de error que considere y para realizar comentarios si lo cree pertinente. En una última fila se solicita un comentario general que permita una mejor interpretación de las categorizaciones realizadas.

  Se agregan notas al pie con los enunciados de las definiciones y de los teoremas utilizados por los estudiantes dado que no son estándar en todos los textos de geometría.

El segundo de los archivos (**Anexo Ea**) contiene:

- Un texto con los valores de verdad de las proposiciones del cuestionario presentado en la **Fase 2** y algunas consideraciones, a los fines de facilitar el trabajo solicitado a los expertos. Esto no interfiere en la categorización dado que lo que se pretende es determinar el tipo de error, en caso de que exista.

Todos los expertos enviaron la tarea que se pide. Uno de ellos solo analiza la primera consigna y tres de ellos solicitan un encuentro presencial con la investigadora para consultar dudas sobre el material que emplean los alumnos.

Se utilizan diversas combinaciones de técnicas para obtener datos válidos. McMillan y Schumacher (2005) sostienen que "La mayoría de los investigadores ajustan las decisiones sobre las estrategias de recopilación de datos durante el estudio" (p.401). Según estos investigadores "la validez de los diseños cualitativos es el grado en el que las interpretaciones y los conceptos poseen significados recíprocos entre los participantes y el investigador" (p. 414) y además sostienen que esta estrategia con varios métodos "permite la triangulación en la recopilación y análisis de los datos" (p. 415).

En este estudio se utilizan distintas estrategias para mejorar la validez del diseño: las resoluciones de un parcial escrito individual (Fase 1), las respuestas escritas al cuestionario en parejas de estudiantes (Fase 2) y la

consulta a los expertos (Fase 3). Éstas se realizan para determinar si lo que observa el investigador es realmente lo que ocurre, es decir que el error que se establece realmente corresponde a la tipología en la que se encuadra, o si existen errores que no fueron establecidos en la investigación. Estas cuestiones contribuyen a la validez del estudio.
En la sección 4.4 se presenta un análisis de la devolución realizada por los expertos.

FASE 4

Con los aportes realizados por los expertos (**Fase 3**), el acrisolado de las categorizaciones generadas en las fases anteriores (**Fases 1** y **2**) y con los aportes de los referentes teóricos (**Capítulo 2**) se establece una jerarquización en la tipificación de los errores obteniendo una nueva y final categoría (Sección 4.5). Ésta no intenta establecer generalizaciones universales libres de contexto sino que, como toda investigación cualitativa, presenta generalizaciones ligadas al contexto en que se desarrolla (McMillan y Schumacher, 2005).
En esta nueva categoría se describen cuatro tipos de errores con sus respectivos subtipos y se presentan ejemplos representativos de cada uno de ellos. Se expresa la tipología en términos del error en lugar de señalar la o las causas que lo provocan. Una de las categorías atiende a cuestiones generales referidas a la escritura en el lenguaje matemático, otras dos refieren a las cuestiones de la prueba en matemática - por un lado a los fundamentos de la acción de demostrar y por otro a la demostración en sí misma- y por último una que presenta cuestiones referidas al empleo de analogías en el trabajo geométrico.

FASE 5

En esta fase se presenta una incipiente descripción de dificultades que surgen a partir de diferentes aportes: de lo analizado en la realización de la tipología de errores; de observaciones e interacciones con los estudiantes que se fueron sistematizando en el transcurso del dictado de la cátedra Geometría Euclídea Espacial y de lo expresado por los alumnos en diálogos, registrados en audio, que se produjeron durante la resolución del instrumento que se describe en la Fase 2. También se esboza una embrionaria vinculación de las mismas con errores detectados en las categorías anteriormente producidas (Sección 4.6).

CAPÍTULO 4

ACRISOLADO DE TIPOLOGÍAS DE ERRORES Y ESBOZO DE DIFICULTADES

4.1. ORGANIZACIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se presenta el análisis y la discusión del trabajo de campo realizado con el objetivo de detectar, analizar y categorizar errores cometidos por futuros profesores de matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias y un bosquejo de la relación entre algunos de ellos y las dificultades encontradas en la realización de demostraciones geométricas tridimensionales.

En el punto 4.2 se presenta la primera clasificación considerada en esta investigación. La misma exhibe una tipología general ya que los errores no son específicos de la geometría o de la geometría del espacio en particular. En estos primeros bosquejos se pone el acento en reconocer el error y en interpretar la demostración más que en encontrar una clasificación exhaustiva y sin solapamiento, resulta así una clasificación exploratoria. También se busca un formato de presentación que haga accesible la interpretación de las demostraciones y de los errores.

En el apartado 4.3 se presenta una comparación de los conceptos de paralelismo y perpendicularidad entre la geometría Euclídea plana y la geometría Euclídea espacial con el fin de comprender y categorizar con mayor precisión los errores hallados en la primera categorización. A partir de esta comparación, se diseña y aplica un instrumento para ajustar la tipología con la intención de reducir el número de tipos de errores, examinar solapamientos y lograr mayor precisión en la descripción de los errores. Se presenta en este apartado una nueva categorización que consta de siete tipos de errores.

En el punto 4.4 se presenta el instrumento que se envía a cuatro expertos y el análisis de las respuestas obtenidas con el fin de revisar, depurar, reorganizar y perfeccionar la tipología que se presenta en el apartado anterior. Esta consulta contribuye a la validez de este estudio.

En el punto 4.5 se presenta, a partir de las dos categorizaciones anteriores y de la consulta realizada a expertos, la tipología final de este estudio con ejemplos de cada tipo.

En el punto 4.6 se presenta una descripción de las dificultades detectadas, que no pretende ser exhaustiva, y su vinculación con algunos de los errores categorizados en los apartados anteriores.

4.2. LOS PRIMEROS BOSQUEJOS

En esta primera clasificación de errores se establecen dos grandes tipos, los generales, que pueden ser de cualquier área de matemática y, los particulares, referidos específicamente a la geometría del espacio. Esta clasificación surge del análisis de las producciones obtenidas del estudio de artefactos escritos, parciales de estudiantes de GEE (Cuadro 1, Cap. 3) y de aportado por los referentes que se exponen en la sección 2.1. Es una primera aproximación donde el énfasis está puesto en detectar los errores lo más objetivamente posible poniendo el acento no en las causas del error sino en lo que hace el estudiante. No se busca en esta instancia evitar solapamientos ni establecer el menor número de categorías.
Se considera que no es necesario explicar los errores generales, sección 4.2.1, debido a su naturaleza pero si se cree conveniente ilustrar con ejemplos algunos de ellos lo cual se expone en la sección 4.2.3 utilizando dos cuadros análisis que se han realizado en esta primera etapa. Los errores particulares se describen brevemente en la sección 4.2.2.

4.2.1. Tipos de errores generales

G1- *Demuestra otra proposición distinta a la pedida.*

G2- *Escribe mal la tesis, la hipótesis o ambas.*

G3- *Hace un dibujo que no representa la situación planteada.*

G4- *Para la demostración emplea elementos que están en la representación.*

G5- *Usa en la demostración una proposición posterior a la que prueba.*

G6- *Demuestra algo que tiene por construcción o hipótesis.*

G7- *Contradice la hipótesis o un paso anterior de la demostración. Deduce incorrectamente información, no justifica todos los pasos o inventa datos.*

G8- *Emplea incorrectamente equivalencias lógicas entre proposiciones: recíproco o inversa.*

G9- *Considera mal el antecedente de una proposición (agrega, quita o considera el consecuente como el antecedente). No verifica las condiciones de aplicabilidad de teoremas, definiciones, etc.*

G10- *Uso impreciso del lenguaje o escritura geométrica.*

G11- *Mal uso de axiomas: los demuestra, los modifica, los contradice,... Tratamiento incorrecto de axiomas.*

4.1.1. Tipos de errores particulares de la Geometría Euclídea Espacial.

P1- *Si una recta tiene un punto en un plano, está incluida en dicho plano.*

Se afirma que sabiendo que un punto de una recta está en un plano, toda la recta está incluida en el mismo. Se ignora el axioma que exige que dos puntos de una recta estén en el plano para asegurar que la recta lo está.

P2- *Dos rectas alabeadas están incluidas en un plano o dos rectas determinan un plano.*

En el desarrollo de la demostración se llega a que dos rectas alabeadas están incluidas en un plano o que dos rectas siempre determinan un plano, incluyendo en este caso a las alabeadas.

P3- *Si una recta es perpendicular a una recta de un plano, es perpendicular a ese plano.*

Para afirmar que una recta es perpendicular a un plano, es necesario demostrar que es perpendicular a dos rectas secantes del mismo. Se considera erróneamente la perpendicularidad entre una recta y un plano a partir de la perpendicularidad con sólo una recta de ese plano.

P4- *Dos rectas alabeadas son siempre perpendiculares.*

Dos rectas alabeadas pueden ser perpendiculares o no. Sin embargo, se encuentra en las demostraciones que parten de dos rectas con la condición de ser alabeadas y se concluye que son perpendiculares.

P5- *Dos puntos determinan un plano o el plano determinado por dos puntos es único.*

Tres puntos no alineados o dos rectas secantes o dos rectas paralelas determinan un plano. Se alega erróneamente que un plano queda determinado por sólo una recta.

P6- *Dos rectas cruzadas se cortan en sus prolongaciones.*

Se concluye que las rectas cruzadas se cortan en un punto. Se visualiza en la prolongación de la representación gráfica de las rectas cruzadas en dos dimensiones que éstas se intersecan.

P7- *Empleo incorrecto del concepto de perpendicularidad.*

Se considera que dos rectas perpendiculares son secantes o que existe una única perpendicular a otra recta o que dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí. Estas afirmaciones son válidas en 2D pero no en 3D.

4.2.2. Ejemplos de las categorizaciones iniciales

En el **Anexo A** se puede encontrar el registro del procesamiento de las demostraciones teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente. Sin embargo, se cree conveniente, como se dijo, presentar breves ejemplos de algunas de estas categorías en este apartado.

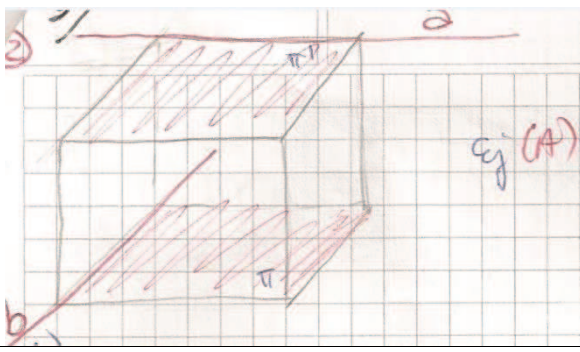
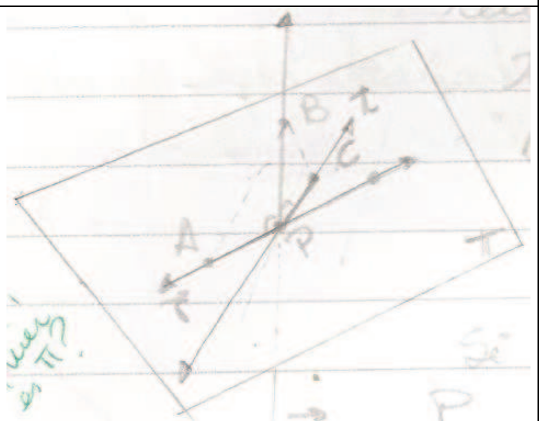
Frag.	Descripción de la resolución
1	"Si **a** y **b** son //⇒**a** y **b** determinan un plano π ⇒ por un punto del espacio exterior[5] a dicho plano π pueden trazarse un solo plano // a ambas, ya que el lugar geométrico de todas las // a un plano por un punto exterior P es otro plano // ⇒ podemos trazar por A una recta // a, por ejemplo la recta **a** ⇒ esa recta estará contenida en un plano // a π, en este caso es verdadera ⇒ solo puede trazarse un solo plano"
2	"Si **a** y **b** son secantes ⇒ **a** y **b** también determinan un plano π ⇒ como en el caso anterior, por un punto del espacio exterior a dicho plano π se puede trazar solo un plano, el que pasa por una recta // a una recta del plano por el punto A ⇒ también en este caso es verdadero"
3	"Si **a** y **b** son cruzadas ⇒ ambas están contenidas en planos // (ver Ej. (A))⇒ si el punto A no pertenece ni a las rectas ni a los planos // ⇒ por ese punto A podemos trazar solo un plano paralelo a ambas, dicho plano será 1 plano paralelo a los 2 planos // entre sí, en que están contenidas las rectas **a** y **b**" 

Tabla 3: Cuadro Análisis **2-02** del Anexo A.

[5] El subrayado es del estudiante.

En el fragmento 1 se considera que se presenta un error tipo **G1** ya que al agregar la condición de que el punto sea exterior al plano que las rectas determinan, se convierte en otra propiedad distinta a la dada, en la que el punto es exterior a dichas rectas. Además se presenta también un error tipo **P5**, el estudiante parece considerar que existe sólo un plano que pasa por una recta puesto que el plano que pasa por la paralela a **a** por A coincide con el del lugar geométrico de las paralelas al plano π por A. Además, aparece un ejemplo de error tipo **G7** ya que no justifica que el plano paralelo a π por A sea paralelo a las rectas dadas.
En el fragmento 3, aparece un error tipo **G4** dado que el estudiante justifica sólo a partir del dibujo realizado.

Frag.	Descripción de la resolución
1	“Hipótesis) **r** y **s** perpendiculares Tesis) Demostrar que por **r** se puede trazar un plano π perpendicular a **s**"
2	Considera que si **r** y **s** son perpendiculares, pueden ser secantes o cruzadas. 
3	“Si las rectas se cortan en un punto P y siendo A un punto perteneciente a π y **r** y B otro punto perteneciente a **s**; estos tres puntos APB me determinan un triángulo recto por ser $\hat{P}$ recto”
4	“Luego tomo otra recta secante a **r**, **t** tal que se intersectan en P y que contiene al punto C, a igual distancia de P que A y a igual distancia de B que A”
5	Concluye que los triángulos BPC y APB son congruentes por tener respectivamente los tres lados iguales.
6	“Por ser el triángulo BPC congruente con APB y $\hat{APB} = \hat{CPB}$ rectos, quiere decir que A y C estarán alineados ”

7	"de donde A y C están en el mismo plano determinado por las rectas secantes **r** y **t** y éste es único"
8	"Luego por ser **s** perpendicular a **r** y como **r** y **t** determinan al plano π, el cual será perpendicular a **s** por ser **r** y **t** perpendiculares a **s**. **t** será perpendicular a **s** por construcción"
9	"Si las rectas **r** y **s** fueran cruzadas por propiedad sus prolongaciones se cortarían y estaríamos en el caso anterior"

Tabla 4: Cuadro Análisis **1-05** del Anexo A.

En el fragmento 1 de esta resolución se considera que se presenta un error tipo **G8** ya que considera el recíproco de la propiedad a demostrar[6] lo cual se evidencia en cómo escribe la hipótesis y tesis.

En el fragmento 3 aparece un error que se cataloga como **G7** dado que el plano π está en la tesis como el que se tiene que determinar. También se presenta en este fragmento un error tipo **G10** pues debería decir triángulo rectángulo en lugar de triángulo recto.

Por otro lado, en el fragmento 4, no determina la existencia del punto C. C podría ser cualquiera de los infinitos puntos que están en la intersección de la superficie esférica de centro P y radio PA y la superficie esférica de centro B y radio BA. Considerando a C en el plano que **r** y **s** determinan, **t** coincide con **r**, pues A, P y C están alineados con lo cual se considera que es un ejemplo de un error tipo **G7**.

La afirmación del fragmento 5 es correcta en el caso que C no pertenezca al plano que **r** y **s** determinan, por lo cual se considera que manifiesta un error tipo **G7**.

En el fragmento 6, afirma que los puntos A y C están alineados debido a la congruencia de dos triángulos que tienen vértices en esos puntos, desatendiendo que por axioma dos puntos determinan una única recta. Se cataloga este error como **G11**.

En el fragmento 7, A y C están en el mismo plano que el que contiene a las rectas **r** y **t** porque A está en **r** y C está en **t**, no porque estén alineados. No es correcto afirmar que este plano es único, pues si A, P y C están alineados, existen infinitos planos que contienen a la recta AP= **r** y PC= **t** pues son coincidentes. Se considera que es un error de tipo **G6**.

[6] Dos rectas son perpendiculares si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra.

En el fragmento 8 deduce incorrectamente que $\pi \perp$ **s**, lo cual se cataloga como error tipo **G7**.

En el fragmento 9 afirma que las rectas cruzadas se cortan en las prolongaciones, lo cual se considera error tipo **P6**.

4.3. VUELTA A LOS CONCEPTOS GEOMÉTRICOS Y AJUSTE DE TIPOLOGÍA

De acuerdo a los errores hallados en las demostraciones, particularmente referidos a la geometría, y observando que en varios casos se consideran cuestiones que en la geometría del plano son propiedades, es que se realiza la siguiente comparación entre la geometría Euclídea plana y la geometría Euclídea espacial, referida específicamente a los conceptos de paralelismo y perpendicularidad con el fin de comprender con mayor claridad las extrapolaciones realizadas por los estudiantes.

Geometría Euclídea Plana	Geometría Euclídea Espacial
Tanto el paralelismo como la perpendicularidad se definen entre rectas.	Se definen paralelismo y perpendicularidad entre rectas, planos y rectas y planos.
Las rectas perpendiculares son secantes.	Las rectas perpendiculares pueden ser secantes o alabeadas.
Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela a ésta.	
Por un punto pasa una única perpendicular a una recta.	Por un punto pasan infinitas rectas perpendiculares a otra.
Dos rectas perpendiculares a otra son paralelas entre sí o coincidentes.	Dos rectas perpendiculares a otra son paralelas, coincidentes, secantes o alabeadas.
	Rectas incluidas en planos perpendiculares pueden ser paralelas, oblicuas o perpendiculares.

	Por un punto exterior a un plano pasan infinitas rectas paralelas a él.
Si una recta corta a otra, corta a todas sus paralelas.	Si una recta corta a otra no corta a todas sus paralelas.
	Si un plano corta a otro, corta a todos sus paralelos.
	Si un plano corta a una recta, corta a todas sus paralelas.
	Existe una única recta perpendicular a un plano por un punto.

Tabla 5: Comparación de conceptos en 2D y 3D.

A partir de esta comparación se plantea un nuevo instrumento para ajustar la tipología. Se diseñan dos actividades que se implementan en una clase con formato taller y con carácter de requisito obligatorio para obtener la regularidad de la asignatura, las consignas se presentan en el Cuadro 2 del Capítulo 3.

El cuestionario consta de dos problemas que relacionan los conceptos de paralelismo y perpendicularidad en 3D. El primer problema es una reformulación del problema 2 del parcial en el que se acota la consideración de los casos posibles. El segundo es un problema en el que se debe justificar si las proposiciones dadas son verdaderas o falsas. Las mismas consideran las relaciones de paralelismo y/o perpendicularidad entre rectas y entre rectas y planos. El inciso f es una reformulación del 1b) del parcial.

En ese taller los estudiantes trabajan en parejas con la intención de, a partir de los registros de las interacciones y diálogos, precisar los errores y vislumbrar las dificultades de los estudiantes en las resoluciones.

A partir del análisis de las categorías presentadas en el apartado 4.2 se realiza un ajuste de la tipología con la intención de reducir el número de tipo de errores, examinar solapamientos y lograr mayor precisión en la descripción de los errores. Esta categorización cuenta con siete tipos de errores: tres que refieren a la imprecisión en el empleo del lenguaje matemático y de las definiciones, axiomas y propiedades geométricas. Dos que refieren a la acción

de demostrar; uno que apunta al empleo de representaciones gráficas y otro referido a la extrapolación de propiedades.
La nueva tipología queda de la siguiente forma:

Tipo I (TI) Imprecisión en la redacción de la demostración o notación matemática o geométrica en particular: se tipifican así a los errores cuando se redactan incorrectamente los pasos de una demostración o se utilizan símbolos o relaciones de la teoría de conjunto en forma incorrecta o se utiliza simbología propia. El uso incorrecto de los cuantificadores lógicos (existe, para todo) es considerado dentro de esta categoría.

Ampliación: Se utilizan expresiones del lenguaje común que no son correctas en una demostración. Los símbolos de la teoría de conjunto se utilizan sin respetar sus especificaciones y con respecto a los cuantificadores, suele suceder que no se explicitan cuando es necesario hacerlo. Esta categoría incluye a la **G10** de la clasificación anterior.

Tipo II (TII) Determinación incorrecta de la hipótesis o tesis de una proposición: se explicitan incorrectamente la tesis o la hipótesis de una proposición.

Ampliación: Aunque no es requisito de la consigna discriminar explícitamente la hipótesis y tesis de una propiedad, en algunos casos los estudiantes lo hacen y en ese caso se determina si es correcta o no. Esta categoría incluye a las **G1** y **G2** de la clasificación anterior.

Tipo III (TIII) Tratamiento incorrecto de teoremas o propiedades: se tipifican así a los errores lógicos, casos en que se utiliza un teorema ya probado pero se debilitan las condiciones del mismo agregando hipótesis que no se tienen. También cuando se considera el recíproco o la inversa de la propiedad que se debería utilizar o se establece un *círculo vicioso,* definido éste como el que “Consiste en pretender demostrar una proposición por otra y ésta, directamente o indirectamente, por la primera” (Vidal, 1981, p.153). Se afirma que una proposición es verdadera y falsa sin trabajar con reducción al absurdo.

Ampliación: Esta categoría incluye a **G1**, **G5**, **G8** y **G9** y también a **P3** y **P4** de la clasificación anterior.

Tipo IV (TIV) Tratamiento incorrecto de axiomas o definiciones: este tipo de errores se evidencia cuando se intenta demostrar un axioma, se lo modifica o se lo contradice o no se respeta una definición acordada.

Ampliación: las definiciones acordadas que pueden diferir, según el texto utilizado, y que hacen a este trabajo se detallan a en el cuadro 3. Por ejemplo, Garguichevich (2007), denomina ortogonales a las rectas que aquí se nombran como alabeadas perpendiculares y las define ortogonales si por un punto de una de ellas se puede trazar una recta paralela a la otra de modo que estas resulten perpendiculares. Esta autora considera la relación de paralelismo cuando los elementos (rectas o planos) no tienen puntos en común o todos los puntos de uno están en el otro.
Esta categoría incluye a **G9** y **G11** y también a **P1**, **P2** y **P5** de la clasificación anterior.

Definición de rectas alabeadas perpendiculares: Dos rectas alabeadas son perpendiculares si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra. **Definición de rectas paralelas:** Dos rectas son paralelas si no tienen puntos en común. **Definición de planos paralelos:** Dos planos son paralelos si no tienen puntos en común.

Cuadro 3: Definiciones acordadas por la cátedra GEE.

Tipo V (TV) Demostraciones incompletas: se tipifica así a un error si no se justifica un paso de la demostración (agujeros); en el caso de tener que demostrar la existencia y unicidad, sólo se considera la existencia, por ejemplo; se consideran casos accidentales o extremos sin considerar la situación general en las demostraciones; se agregan condiciones a los elementos que no se tienen por hipótesis o, se justifica que un objeto no existe porque no se puede hallar por el método por el que se está tratando de construir. "Si no se puede encontrar un objeto que se está buscando, mediante un método determinado, esto no significa que el objeto no existe" (Fetisov, 1973, p. 39)

Ampliación: En el caso de TIII se agregan condiciones a un teorema que se tiene dentro de los trabajados en la cátedra y aquí se agregan condiciones a los elementos (puntos, rectas, planos, etc.) que no están dados en la proposición. Esta categoría incluye a **G6** y **G7** de la clasificación anterior.

Tipo VI (TVI) Uso defectuoso de representaciones gráficas en las demostraciones: se considera a un error de este tipo cuando se extraen relaciones o emplean elementos de una representación gráfica en la demostración sin justificación o se realiza un dibujo que no representa la situación planteada.

Ampliación: Aunque no se pide explícitamente una representación en la consigna, algunos alumnos la realizan y es en este caso en que se valora su corrección. Esta categoría incluye a **G3** y **G4** y también a **P6** de la clasificación anterior.

Tipo VII (TVII) Extrapolación de relaciones a distintos conceptos o propiedades a distintos contextos: se consideran errores de este tipo cuando se sacan de contexto propiedades válidas en el plano pero que no lo son cuando los elementos que intervienen no están en un plano. También cuando se mantienen las relaciones (paralelismo, perpendicularidad, incidencia, etc.) que establece un teorema pero se modifican los elementos (punto, recta, plano) entre los que se establecen esas relaciones.

Ampliación: Extrapolar significa según el diccionario[7], "aplicar las conclusiones obtenidas en un determinado campo del saber a otro dominio distinto, para deducir consecuencias". Por ejemplo la proposición, no verdadera para rectas que no son coplanares: "Dos rectas perpendiculares a otra son paralelas entre sí", puede entenderse en el plano o también extrapolarse del teorema "dos planos perpendiculares a otro son paralelos entre sí", sustituyendo planos por rectas. También se puede considerar la propiedad "Si una recta corta a otra, corta a todas sus paralelas" que puede pensarse en el plano o de la propiedad de planos "si un plano corta a una recta, corta a todas sus paralelas". Esta categoría incluye a **P7** de la clasificación anterior.

Esta nueva tipología agrupa las categorías de la anterior, de modo de hacer más eficaz la clasificación y tratar que no haya solapamientos en las mismas. A partir de esta nueva categoría se vuelven a catalogar las producciones con las que se inició esta investigación, la que se puede encontrar en el **Anexo B**. Se aplica esta categorización también a las resoluciones escritas de las producciones recogidas con el nuevo instrumento, **Anexo C**, sin tener en cuenta las interacciones registradas en los audios. Se adjunta en las tres

[7] Enciclopedia Espasa en línea: http://espasa.planetasaber.com/search/results.asp?txt=extrapolar

tablas siguientes una síntesis de los tipos de errores en los dos instrumentos utilizados con el fin de facilitar la detección en los **Anexos B** y **C**. También éstas contribuyen a la visualización de la distribución de los errores.

En esta tabla se presenta el resumen de lo categorizado en 14 parciales respecto del primer problema analizado, referido al **Anexo B**.

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
TI	x	x	x		x	x	x	x	x	x		x	x	
TII	x		x		x	x		x	x	x	x			
TIII		x	x	x	x	x						x		x
TIV			x	x	x				x		x	x		
TV	x	x	x	x	x	x			x		x		x	
TVI	x	x	x		x				x		x	x		
TVII	x	x	x	x			x	x	x		x	x	x	x

Tabla 6: Cuadro resumen del problema 1 del parcial.

En esta tabla se presenta el resumen de lo categorizado en 14 parciales respecto del segundo problema analizado, referido al **Anexo B**.

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
TI	x	x	x	x	x	x	x		x		x		x	
TII							x							
TIII	x		x	x	x	x	x		x		x			
TIV		x	x	x	x	x			x				x	x
TV	x	x	x	x	x	x	x		x		x		x	x
TVI		x	x											x
TVII			x	x		x	x		x				x	x

Tabla 7: Cuadro resumen del problema 2 del parcial.

En la tabla que se exhibe a continuación se expone el resumen de lo categorizado por los dos grupos respecto del segundo instrumento que se presenta en el **Anexo C**.

	Grupo 1: F y L.							Grupo 2: I y A						
	Problema 1	Problema 2						Problema 1	Problema 2					
		a	b	c	d	e	f		a	b	c	d	e	f
TI	x			x				x		x	x			x
TII	x													
TIII	x		x	x			x	x	x			x		x
TIV										x				
TV	x	x		x			x	x		x	x	x	x	
TVI					x									
TVII	x		x	x				x		x				x

Tabla 8: Cuadro resumen de los problemas del taller.

4.4. CONSULTA A EXPERTOS. VALIDACIÓN DE LA TIPOLOGÍA

Se envía a cuatro expertos la producción escrita del cuestionario y un recorte de la nueva tipología en función de lo que se quiere discernir (**Anexo E**). Además un archivo que contiene los valores de verdad de las proposiciones del cuestionario (**Anexo Ea**).

Puesto que hay categorías que no presentan demasiados inconvenientes para distinguirlas y con el fin de no hacer excesiva la tarea de los expertos es que se envía sólo tres de las siete categorías, a saber, la TIII, TV y TVII, informándoles que la categorización completa consta de siete categorías.

Se presenta a continuación una tabla que contiene la síntesis del tipo de error detectado por cada uno de los expertos en cada problema del cuestionario correspondiente a la fase 2 de la investigación.

	E1(M)	E2 (MS)	E3(G)	E4(F)	E5	%
P1	III	III		III	III	75
	V	V	V	V	V	100
	VII			VII	VII	50
P2a	No responde a estos ítems.		III		III	33
		V		V		0
						-
P2b			III	III	III	66
		V		V	V	66
		VII	VII	VII	VII	100
P2c		III	III	III		0
		V			V	33
						-
P2d		III		III	III	66
			V		V	33
						-
P2f				III	III	33
		V	V			0
		VII			VII	33

Tabla 9: Cuadro síntesis de respuestas de expertos.

Cada columna corresponde a un experto que se numeran del 1 al 4 y se caracterizan con la inicial de su nombre. La columna 5 corresponde a la categorización realizada por el autor de este trabajo y la última columna es el porcentaje de coincidencia entre los expertos y la tesista. Cada fila corresponde a cada uno de los problemas del cuestionario.

Al analizar las respuestas de los expertos y el resumen de la tabla se visualizan las siguientes cuestiones:

- No se presentan errores que no fueran considerados en la tipología general. Sin embargo, los expertos explicitan errores que no se les dio de la tipología, como por ejemplo el TI (errores de notación) y TIV (tratamiento incorrecto de definiciones).
- En el problema 2a y 2f los expertos exponen que se presenta el error TV y en el problema 2c suponen el error TIII el cual no ha sido considerado en nuestra categorización.
  Respecto al problema 2a los dos expertos que consideran TV aluden en los comentarios al mal uso de la definición de recta perpendicular a un plano. El error al que aluden referido al mal empleo de las definiciones corresponde a TIV de la tipología, el cual no estaba disponible en la categoría entregada a los expertos, no obstante por los comentarios explicitados se infiere qué error están considerando. Este error no está fuera de la categorización propuesta.
  En el problema 2f los dos expertos que consideran TV aluden a que es un caso particular por considerar rectas secantes, lo que podría encuadrarse en un caso particular del recíproco de la proposición dada.
  En el problema 2c los estudiantes justifican que la proposición es falsa empleando un teorema, es decir, consideran que para que sea verdadero deben tenerse las hipótesis de un teorema dado en la cátedra. Los expertos consideran este error proveniente de cuestiones lógicas y en nuestra categorización se considera una justificación incompleta. En la nueva categorización (sección 4.5) se establece el error de justificar una proposición falsa como una subcategoría específica.
- Uno de los expertos manifiesta utilizar otra definición de paralelismo entre rectas y planos (las rectas incluidas en un plano las considera paralelas) lo cual le ocasionó inconvenientes para catalogar los errores dados. Debió poner especial atención en el uso de esas definiciones.

- Otro de los expertos cuestiona el teorema de perpendicularidad entre rectas perpendiculares a un plano: *Si una recta es perpendicular a un plano, lo es a toda recta de éste.* Pregunta si las rectas consideradas deben pasar por el pie de la perpendicular.
- El tratamiento incorrecto de teoremas y propiedades (TIII) en algunos casos es considerado por los expertos como demostraciones incompletas (TV), lo cual se manifiesta en los comentarios realizados.

Con los aportes realizados por los expertos y de las categorizaciones presentadas hasta el momento se decide revisar, depurar, reorganizar y perfeccionar la tipología. No se contemplan nuevos errores dado que los expertos no lo proponen y además no se considera necesario. Sin embargo, se establece una jerarquización en la tipificación de los errores atendiendo particularmente a los comentarios realizados por los expertos y al acrisolado generado en las etapas anteriores.

4.5. LA TIPOLOGÍA

A partir de sucesivas revisiones de las categorías anteriores se vuelven a redefinir, agrupándolas en cuatro tópicos con subtipos en cada una. Esta tipología final se presenta en este apartado con ejemplos en cada una[8].

Se presentan las siguientes cuatro categorías como una tipología para la clasificación de errores en las demostraciones de estudiantes de Geometría Euclídea Espacial del Profesorado en Matemática, objeto de esta investigación. Una de ellas atiende a cuestiones generales referidas a la escritura en el lenguaje matemático, otras dos referidas a las cuestiones de la prueba en matemática - por un lado a los fundamentos de la acción de demostrar y por otro a la demostración en sí misma- y por último una que expone cuestiones referidas al empleo de analogías en el trabajo geométrico.

- ✓ El lenguaje matemático. T1
    - o Redacción incorrecta. T1.a
    - o Uso incorrecto de la simbología matemática. T1.b
- ✓ Lo fundamental de la *demostrabilidad*. T2
    - o Determinación incorrecta de hipótesis o de tesis. T2.a

[8] Los ejemplos de esta sección se refieren al cuadro de análisis del Anexo B a menos que se especifique lo contrario.

    - Tratamiento incorrecto de axiomas o definiciones. T2.b
- ✓ Lo esencial de la demostración. T3
    - Ejemplijismo. T3.a
    - Quasilogismos. T3.b
    - Cuasisofisma. T3.c
- ✓ Las analogías entre conceptos o propiedades. T4
    - Aplicación de propiedades del plano no válidas en 3D. T4.a
    - Falsos dilemas. T4.b
    - Extrapolación incorrecta de relaciones entre conceptos o propiedades. T4.c

Se describen los cuatro tipos de errores con sus respectivos subtipos y se presentan ejemplos representativos de cada uno de ellos. Se expresa la tipología en términos del error en lugar de señalar la o las causas que lo provocan ya que, como lo sostiene Radatz (1979), es muy difícil hacer una clara separación entre las posibles causas de un error, dado que hay una estrecha interacción entre las mismas. Dado que un mismo problema puede dar lugar a errores de diferentes fuentes y el mismo error puede surgir de diferentes procesos de resolución del problema es que se intenta hacer hincapié en la descripción del error en la forma lo más fiel posible.

4.5.1. El lenguaje matemático. Tipo 1 (T1)

Se considera dentro de este tipo a los errores de redacción o escritura en las demostraciones o el uso erróneo del lenguaje propio de las matemáticas. Se recalca que los estudiantes son alumnos avanzados del profesorado en matemática por lo que no es sólo una cuestión formal considerar estos errores sino de adecuación al nivel académico en que se encuentran. Se toman como elementos característicos los siguientes dos subtipos:

4.5.1.1. Redacción incorrecta. T1.a.

Se señala dentro de esta categoría la redacción incorrecta de algunos pasos o fragmentos de una demostración o utilización de escritura propia (no convencional) sin aclararla o el uso de expresiones del lenguaje común. De la lectura completa de la escritura puede interpretarse lo que el estudiante quiere establecer aunque se considera que no es la forma apropiada.

- Por ejemplo en el fragmento **CA 1-01-7** se establece que una recta es perpendicular a otra porque está incluida en un plano que *contiene* a todas las perpendiculares a esa recta. Es incorrecto decir que el plano contiene a todas las perpendiculares sin enunciar que todas tienen un punto en común. De la redacción que precede a este fragmento se deduce que las rectas que considera son secantes en un punto, aunque esto no se hace explícito. De otra forma, podría redactar que todas las rectas del plano son perpendiculares a la recta.

- En el fragmento **CA 2-04-6** el estudiante utiliza notaciones propias sin aclararlas previamente. Con **r** $\cap$ **a'** indica que las rectas **r** y **a'** son secantes y con ***bb'*** indica el plano que determinan las rectas **b** y **b'**.

- Otro ejemplo se puede hallar en el fragmento **CA 2-13-1** donde se utiliza la frase *no tienen ningún punto en común* para indicar la relación entre dos rectas cruzadas. Esta expresión se refiere al lenguaje común ya que desde el lenguaje especializado (en lógica) es lo mismo que decir que las rectas son coincidentes, contrario a lo que afirma.

4.5.1.2. Uso incorrecto de la simbología matemática. T1.b.

Se incluye en esta categoría la consideración en forma incorrecta de relaciones de pertenencia, inclusión, etc. En algunos casos se escribe simbólicamente en forma incorrecta esas relaciones y en otros se realiza en forma coloquial. También se considera en este subtipo el uso incorrecto de los cuantificadores lógicos, tanto su escritura o falta de ellos como la interpretación de su significado.

- Por ejemplo, en **CA 1-07-2**, **CA 1-09-1** y **CA 2-04-3** se escribe simbólicamente que una recta pertenece a un plano, que un plano está incluido en una recta y que un punto está incluido en una recta respectivamente.

- En el fragmento **CA 1-08-2**, donde se establece simbólicamente la hipótesis y tesis de la propiedad que enuncia en el fragmento 1, falta explicitar en la tesis que existe un plano β que contiene a la recta **r** y es perpendicular a **s**. Aquí se nota la ausencia del cuantificador existencial ya que de la forma escrita se establece que cualquier plano que contenga a la recta **r** será perpendicular a la recta **s**, lo cual es incorrecto.

- En **CA 1-02-3**, es incorrecto el uso del cuantificador lógico *para todo*, ya que de la afirmación: existen *infinitos* planos que pasan por la recta **a** y son perpendiculares a un plano π deduce que *todo* plano que pasa por la recta **a** es perpendicular al plano π. Considera como expresiones equivalentes a *infinitos* y *todo*.

- En el problema 1 (**Anexo C**), el grupo 2 toma para resolverlo tres casos: rectas paralelas, secantes y cruzadas. En el tercer caso, por la recta **a** trazan el plano α paralelo a la recta **b** y por la recta **b**, el plano β paralelo a la recta **a**. Afirman, erróneamente, que los planos α y β se intersecan en una recta **t.** Luego argumentan que esa recta **t** es paralela a las rectas **a** y **b** por el teorema 3.16[9]. Sostienen que cualquier recta del plano *α* es paralela a la recta **b**, de igual modo para cualquier recta de β. Así **t** que se considera en *α* y β es por ese teorema paralela a **a** y **b**. Esto es erróneo ya que cualquier recta del plano α paralelo a **b** no cumple esa condición. Lo que dice el teorema es que existe una recta que cumple esa condición, no que cualquier recta de ese plano es paralela a la dada como el grupo alega. Consideran erróneamente el cuantificador existencial.

4.5.2. Lo fundamental de la *demostrabilidad*. Tipo 2 (T2)

Se utiliza el término "*demostrabilidad*" aludiendo a los cimientos de la acción o proceso de demostrar. Se consideran aquí como bases de esta acción: hipótesis y tesis de la proposición, axiomas y definiciones acordadas.

Establecer las hipótesis y la tesis en un teorema o propiedad es esencial para realizar su demostración, siendo equivalente al reconocimiento de los datos e incógnita de un problema de resolver, en la terminología de Polya (1970). Muchas veces las proposiciones están enunciadas en términos de una implicación, donde la primera parte es la hipótesis y la segunda es la tesis, pero en otras ocasiones, como en el caso de uno de los problemas analizados en este trabajo, no es directo establecer estos elementos por el lugar que ocupan en la proposición.

Es además ineludible, en el nivel académico de los estudiantes cuyas producciones se toman en este trabajo, considerar los errores que están relacionados con el sistema axiomático en la geometría Euclídea. El mismo se

[9] Teorema 3.16: *Una recta a, no incluida en un plano a, es paralela a a sí y sólo sí existe en a una recta a' paralela a a.*

funda en las siguientes normas: enunciar sin definición los conceptos primeros; admitir sin demostración, ciertas propiedades que relacionan estos conceptos enunciando los axiomas correspondientes y deducir lógicamente las restantes propiedades o teoremas (Puig Adam, 1980).

Se toman los siguientes dos subtipos en esta categoría:

4.5.2.1. Determinación incorrecta de hipótesis o de tesis. T2.a

Se consideran errores de este tipo cuando se explicitan incorrectamente las hipótesis o la tesis de la propiedad que se pide demostrar o cuando no se distingue entre la hipótesis y la tesis. También cuando no se utiliza la hipótesis ya que esto denota que no se reconoce su función en el proceso de demostrar o cuando no se demuestra todo lo requerido en la proposición. Asimismo se incluye dentro de esta categoría a las justificaciones en las que se debilitan las condiciones de la hipótesis de un teorema.

- En el **CA** del grupo F-L del problema 1 (**Anexo C**), se ignora parte de la tesis de la propiedad, específicamente se ignora la unicidad del plano que reúne las condiciones pedidas.

- En **CA 1-01-2** se consideran como hipótesis dos rectas **a** y **b**, incluidas en planos α y β respectivamente y α perpendicular a la recta **b**. En la tesis se indica que el plano β es perpendicular a la recta **a**. De esta escritura, cualquier plano que contiene a **b** es perpendicular a **a**, a menos que el plano β tenga otras condiciones que no están explicitadas en la hipótesis. De cualquier modo, la hipótesis y la tesis no se corresponden con la proposición dada.

- En **CA 1-06-1** se escribe en la hipótesis '**a**, **b** rectas' y en la tesis '**a** y **b** son perpendiculares si por **a** o por **b** se puede trazar un plano perpendicular a **b** o a **a** respectivamente'. Se evidencia que no distingue cuál es la hipótesis y cuál es la tesis.

- En **CA 1-08**[10], se expresa que demostrará que "Sean **r** y **s** cruzadas, si por una de ellas puede trazarse un plano perpendicular α a la otra **r**, también por **r** puede trazarse un plano perpendicular β a **s**". De esto considera como hipótesis "**r** y **s** rectas cruzadas, **s** incluida en el plano α que es

[10] Sólo se hace hincapié en el tipo de error que se pretende ejemplificar en este apartado. Los otros errores que también aparecen en este párrafo pueden consultarse en el Anexo B.

perpendicular a **r** y cuya intersección es el punto R y que **r** está incluida en el plano β". Como tesis propone que "β es perpendicular a **s**". No es correcta la escritura de la hipótesis y de la tesis. Debería escribir, a partir de la proposición que expone, como hipótesis "**r** y **s** cruzadas; $\mathbf{s} \subset \alpha$; $\alpha \perp \mathbf{r}$; $\mathbf{r} \cap \alpha = \{R\}$" y como tesis, "$\exists\ \beta \perp \mathbf{s}$ y $\mathbf{r} \subset \beta$". Otro error detectado correspondiente a este subtipo es que no utiliza que las rectas **r** y **s** son cruzadas en la demostración, el cual puede consultarse en el fragmento 3.

4.5.2.2. Tratamiento incorrecto de axiomas o definiciones. T2.b.

Los conceptos trabajados en Geometría Euclídea forman parte de una amplia red de relaciones que los ligan, lo que conlleva una diversidad de organizaciones posibles de esos conceptos. Los axiomas y definiciones pueden variar de un texto a otro pero una vez establecidos no deben quebrantarse. Respecto al tratamiento de los axiomas, se detallan errores donde no se respeta su condición, ya sea porque se lo quiere demostrar o se los contradice. Se considera también en este subtipo la transgresión de definiciones acordadas.

- Por ejemplo, se establece en **CA 1-09-5** que por una recta pasa un único plano y en **CA 1-02-2** se construye un plano por una recta y un punto de ella en contradicción al axioma que establece que por tres puntos no alineados pasa un plano y sólo uno.

- En **CA 1-05-6** se intenta demostrar que dos puntos están alineados, desconociendo que por axioma dos puntos determinan una recta.

- En **CA 1-03-7** se establece que una recta está incluida en un plano por tener el plano con la recta un punto en común y en **CA 2-04-1** se transgrede el axioma que determina que por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una paralela a dicha recta.

- En el caso de las definiciones, en **CA 1-11-6** no se respeta la definición de recta perpendicular a un plano ya que considera que una recta incluida en un plano es perpendicular a él y en **CA 1-13-2** se transgrede la definición de rectas secantes, dado que se afirma que dos rectas con un punto en común son secantes, dejando de lado que es necesario que tenga un único punto en común.

- En **CA 2-04-1** se quebranta la definición de rectas paralelas y de recta paralela a un plano ya que se considera a las rectas coincidentes y a la recta incluida en un plano como casos de estas definiciones.

4.5.3. Lo esencial de la demostración. Tipo 3 (T3)

Se considera como *lo esencial de la demostración* a la resolución del problema dado y a la justificación del encadenamiento realizado para justificar la validez del razonamiento.

Se incluye en esta categoría de errores a aquellos que involucran una transgresión a los requerimientos de una demostración en el nivel académico de los estudiantes, particularmente en lo referido al empleo de los ejemplos en la justificación de las afirmaciones, a las inferencias y a lo completo e ilación de las justificaciones en las demostraciones. Se consideran tres subtipos:

4.5.3.1. Ejemplijismo. T3.a.

Ejemplijismo. Esta palabra surge de relacionar el término espejismo (apariencia engañosa de algo) con ejemplo y decidir. Por un lado al no poder encontrar un ejemplo para decidir la existencia de un objeto, los estudiantes afirman que el objeto no existe y por otro lado sostienen que una proposición es falsa citando un teorema con otra tesis, en lugar de utilizar un contraejemplo.

- Ante el requerimiento de determinar si la proposición *Dos rectas alabeadas son siempre perpendiculares* es verdadera o falsa, grupo F-L (**Anexo C**) responde que es falsa y lo justifica considerando que sólo son perpendiculares si se cumple el teorema *Dadas dos rectas cruzadas r y s, si por una de ellas s se puede trazar un plano α perpendicular a la otra r, por ésta se puede trazar un plano β perpendicular a s*, el cual tiene otra tesis, distinta a la de la proposición dada.

- Puede estudiarse este tipo de error en el **CA 2-13-1** y también en el **CA 2-03** donde se alega la imposibilidad de hallar el plano paralelo por un punto exterior a dos rectas alabeadas por la imposibilidad de hallar el plano que contenga a ambas rectas. La imposibilidad de construcción del plano a partir de este camino no asegura que el mismo no exista. Sólo puede afirmarse que por este método de construcción no puede obtenerse.

4.5.3.2. Quasilogismo. T3.b.

Quasilogismo. Esta palabra surge para considerar los argumentos que en apariencia corresponden a una ley lógica.

Se considera en este subtipo a los errores en que se realizan razonamientos que no son válidos[11]. Por un lado se toman los casos en los que se vulnera alguna regla de inferencia o ley lógica como por ejemplo, el Modus Ponens[12], regla de contradicción[13], etc. y por otro donde se produce un círculo vicioso. Se incluye también en este subtipo al error de considerar el recíproco de la propiedad dada, ya que si bien no se vulnera una ley de inferencia, se considera que se desconocen las equivalencias entre una proposición y las asociadas a ella (contrarrecíproco, recíproca e inversa).

- Por ejemplo en **CA 2-04** se realiza el razonamiento de afirmar el consecuente. Se presenta el razonamiento de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} p \wedge q \rightarrow s \\ s \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

  Donde la proposición p es "el plano α es paralelo a π"; la proposición q es "**r** es perpendicular a α" y la proposición s es "**r** corta a π".

- También ocurre este razonamiento de afirmar el consecuente pero en una proposición cuantificada en **CA 1-03-8** donde se puede establecer lo siguiente:

$$\begin{array}{l} \forall x\ [p(x) \rightarrow q(x)] \\ q(m) \\ \hline \therefore\ p(m) \end{array}$$

[11] "Un razonamiento es válido si el condicional que tiene como antecedente la conjunción de las premisas, y como consecuente la conclusión, es una tautología" (Panizza, 2005, p. 24)
[12] Considerado de Grimaldi (1998), p. 85.
[13] Ibídem p. 87.

Donde la proposición p(x) es "$s \perp \beta$"; la proposición q(x) es "$s \perp x$, $x \subset \beta$", donde especificando en m quedan las proposiciones q(m) de la forma "$s \perp m$, $m \subset \beta$" y p(m) es "$s \perp \beta$".

- En el **CA 2-04** se transgrede una de las leyes lógicas al sostener que una proposición es verdadera y falsa a la vez. En el fragmento 2, se establece como verdadera la proposición 'Por un punto A del espacio puede trazarse un plano paralelo a dos rectas **a** y **b** cualesquiera'. Demuestra por casos para las rectas secantes y paralelas y el punto A perteneciente o no a una de ellas. En el caso de rectas cruzadas, analiza el caso en que A pertenece a una de ellas y el caso en que A no pertenece a las rectas. En este último, afirma que no es posible construir el plano paralelo a las rectas, por lo cual se debe obviar aunque no establece nuevas condiciones para la proposición, contradiciendo la afirmación que la proposición dada es verdadera.

- En **CA 1-03** se enuncia para demostrar una proposición que está en el texto y se utiliza para probarla una propiedad posterior a ella, estableciéndose un círculo vicioso.

- En el **CA** del grupo I-A (**Anexo C**) del problema 2f y en el **CA 1-14** se ejemplifica el error de considerar el recíproco de la propiedad dada.

4.5.3.3. Cuasisofisma. T3.c.

Cuasisofisma. Esta palabra surge para considerar los argumentos que son exiguos para justificar un razonamiento.

Se considera un error de este tipo cuando hay un "agujero" en la demostración, es decir, falta justificar algún paso en el encadenamiento lógico. En algunos casos es correcta la implicación aunque falte justificar y en otros casos no se trata de una condición suficiente para lo que se afirma presentando además otro tipo de error. Es decir, en algunos casos, aunque no se justifique, la implicación es correcta si bien queda en manos del lector establecer las razones por lo cual esto es así, mientras en otras ocasiones la implicación es válida en ciertos casos excepcionales. Por esta razón también se incluye aquí a los casos particulares, es decir, casos donde no se tienen en cuenta todas las condiciones relativas entre los conceptos que se involucran o donde se ignora una parte de la tesis. También se considera dentro de esta categoría a los errores donde el estudiante utiliza una representación gráfica para justificar una proposición, sin otra justificación formal. Se consideran estos errores cuando se hace referencia explícita a un dibujo o se evoca a uno.

- Por ejemplo en **CA 1-09** en el fragmento 4, se considera que tres puntos no alineados determinan un plano, sin justificar el por qué dichos puntos no están alineados. En el fragmento 3 afirma que dos triángulos son rectángulos sin justificarlo.

- En el **CA 2-05-2** se omite justificar por qué el plano que determinan dos rectas por un punto A, paralelas respectivamente a dos rectas cruzadas es paralelo a las rectas cruzadas, que es lo que tiene que demostrar. Además considera un caso particular ya que si el punto tiene una posición relativa específica respecto a las rectas cruzadas (si A pertenece al plano paralelo a una de las rectas y contiene a la otra), el plano que establece no cumple la condición de ser paralelo a las rectas.

- En el **CA 2-06** se afirma que la proposición “por un punto A del espacio puede trazarse un único plano paralelo a dos rectas **a** y **b** cualesquiera” es verdadera y se realiza la demostración considerando tres casos respecto a las posiciones relativas de las dos rectas: que las rectas sean secantes, paralelas o cruzadas. En los dos primeros casos considera que las rectas determinan un plano y de acuerdo a la posición del punto A respecto a este plano, determina el plano buscado aunque no justifica porqué el plano paralelo al plano que determinan las rectas por el punto A es paralelo a las rectas. Esta afirmación es correcta teniendo en cuenta la definición de recta y plano que utiliza pero es necesario justificarla. En el caso de rectas cruzadas, realiza una construcción auxiliar: la recta perpendicular **p** a la recta **b** por el punto A, suponiendo que A pertenece a la recta **a**. Luego traza el plano perpendicular a **p** por A y afirma que contiene a **a**, lo cual es correcto sólo para ciertas posiciones de A y de **a** respecto a **b**.

- En el fragmento 2 del **CA 2-01** se afirma que existe un único plano paralelo a dos rectas por un punto exterior a ellas únicamente cuando las rectas son secantes. Esta afirmación es incorrecta pues hay casos de rectas no considerados en esta afirmación donde la proposición es verdadera y además en caso de rectas secantes sólo en ciertas posiciones particulares del punto A la proposición es verdadera (exterior al plano que las rectas secantes determinan).

- En el **CA 2-06** se omite demostrar parte de la tesis, en este caso la unicidad del plano paralelo a las dos rectas consideradas en la proposición dada.

- En el **CA 2-14** se utiliza la representación de rectas que incluyen a las aristas de cubos y planos que incluyen a las caras de esos cubos para justificar, desde ese dibujo, que no existe un único plano paralelo a dos rectas cruzadas por un punto A. De lo escrito, parece que el estudiante no considera otros elementos (planos y rectas) fuera de esta representación del hexaedro regular.

- También en el **CA 2-02-3** se utiliza una representación de un cubo, como en el ejemplo anterior, pero en este caso para justificar la existencia de un plano paralelo a dos rectas cruzadas, que se representan incluyendo a aristas del mismo.

- En el fragmento 9 del **CA 1-05** se afirma que al prolongar dos rectas cruzadas estas se cortarían y por tanto se analiza este caso como el de rectas secantes, evidenciando que considera la representación tridimensional en el plano como una representación en 2D.

4.5.4. Las analogías entre conceptos o propiedades. Tipo 4 (T4)

Muchos aprendizajes extraescolares se realizan por semejanzas, buscando parecidos, aplicando lo que funciona en una “cosa” a otra “cosa” similar. También en la escuela se utiliza esta metodología de anclar a las estructuras conocidas los conceptos nuevos para sentirse seguro. Las analogías favorecen la habilidad para transferir conocimientos de unos dominios a otros pero a veces se quebrantan o se ignoran los límites de aplicabilidad, realizando interpretaciones inadecuadas. Se consideran tres subtipos dentro de esta tipología:

4.5.4.1. Aplicación de propiedades del plano no válidas en 3D. T4.a.

Se cataloga a errores como de este tipo cuando se sacan de contexto propiedades válidas en el plano pero que cuando los elementos que intervienen no están en un plano dejan de serlo.

- Por ejemplo, en el plano, por un punto existe una única recta perpendicular a otra, en cambio en el espacio existen infinitas rectas perpendiculares a otra por un punto. Este error se puede observar en el **CA 1-13-1** donde el estudiante cita un teorema (del plano) aunque está trabajando en 3D. Similar a esta propiedad es la unicidad de la mediatriz de un segmento que es válido en el plano pero no en las tres dimensiones como se afirma en **CA 1-09-5**.

- También aparece el error que proviene de extender la propiedad del plano donde dos rectas perpendiculares siempre son secantes a las rectas perpendiculares en 3D donde éstas pueden ser secantes o alabeadas, por ejemplo en **CA 1-14-1**.

- En el plano si una recta corta a otra, corta a todas sus paralelas, pero en 3D no es verdadera esta propiedad que se afirma, por ejemplo, en el **CA 2-04-6**.

4.5.4.2. Falsos dilemas. T4.b.

Se toma la expresión *falso dilema* cuando se considera en la demostración una proposición alternativa, que no se corresponde con la proposición a demostrar. Se considera dentro de esta categoría a los errores en los cuales se suplanta la proposición a demostrar por otra que involucra relaciones o conceptos similares pero que no es lógicamente equivalente a la dada.

- Por ejemplo en varios casos, como en **CA 1-07**, ante el requerimiento de demostrar que “dos rectas son perpendiculares si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra”, se reemplaza por la propiedad “Dadas dos rectas cruzadas **r** y **s**, si por una de ellas **r** se puede trazar un plano α perpendicular a **s**, por ésta se puede trazar un plano β perpendicular a **r**” que es un teorema que se presenta y demuestra en el libro de texto, que tiene elementos similares a los de la proposición dada pero que no es equivalente a la misma.

- Asimismo puede visualizarse otro aspecto de este tipo de error en los fragmentos 1 y 2 del **CA 2-02** donde se pide analizar el valor de verdad de la proposición "Por un punto A del espacio puede trazarse uno y sólo un plano paralelo a dos rectas **a** y **b** cualesquiera" y el estudiante establece en el caso de rectas coplanares (paralelas o secantes) la existencia y unicidad del plano paralelo al plano que las rectas determinan por el punto A, reemplazando esta propiedad por la dada ya que no la relaciona con la existencia y unicidad del plano paralelo a las rectas por el punto A.

4.5.4.3. Extrapolación incorrecta de relaciones entre conceptos o propiedades. T4.c.

Se incluye en esta categoría a los errores donde se extrapolan sin control o sin justificación propiedades que cumple una parte o subconjunto al todo o universo o viceversa, es decir, del todo a cada una de las partes. Asimismo se considera un error de este tipo cuando se extiende la demostración a otros casos similares sin analizar su adecuación.

- Por ejemplo en el fragmento 4 del **CA 1-04**, se afirma que una recta es perpendicular a un plano por ser perpendicular a una recta incluida en dicho plano, extendiendo la propiedad de un subconjunto del plano (una recta) a todo el plano. Algo similar ocurre, por ejemplo en el **CA 2-09-2** donde a partir de considerar que un punto es exterior a dos rectas coplanares se afirma que es exterior al plano que estas rectas determinan.

- En el **CA 2-11-2** se considera que la demostración de la existencia y unicidad de un plano paralelo a dos rectas paralelas por un punto exterior a ellas es *igual* al caso en que las rectas son secantes, no analizando las diferencias entre ambas situaciones. A diferencia de lo que ocurre con rectas secantes, en el caso en que las rectas son paralelas existen infinitos planos paralelos a ambas por un punto exterior a ellas, no siendo ambas situaciones de demostración equiparables, por lo menos completamente.

4.6. DIFICULTADES: ALGUNAS CONSIDERACIONES

En los trabajos en los cuales se hace referencia a errores y dificultades analizados en el marco teórico no se explicitan las diferencias entre estos términos.

Aunque escapa a los objetivos de esta tesis realizar una tipología de dificultades y establecer una exhaustiva vinculación entre los errores y las dificultades detectadas, se presenta en este apartado una incipiente descripción y vinculación entre ellas y los errores categorizados en el apartado anterior. Estas dificultades surgen de lo analizado en la realización de la tipología de errores y de registros de interacciones entre los estudiantes que se fueron sistematizando en el transcurso de los dictados de la cátedra Geometría Euclídea Espacial. Las dificultades, como se considera en la sección 2.2.1 del marco de referencia, son inconvenientes o barreras que hay que superar para conseguir o cumplir una tarea determinada. Una dificultad puede manifestarse a través de un error pero un error puede deberse a más de una dificultad. De esto, la manifestación evidente de una dificultad puede ser un error aunque no siempre es así. Por esto, se esbozan posibles dificultades a través de los errores que se catalogan en los apartados anteriores y también a partir de lo expresado por los alumnos en diálogos, registrados en audio, que se produjeron durante la resolución del taller.

Se esbozan someramente algunas de las dificultades detectadas. Los estudiantes tienen dificultades en:

D1. El reconocimiento de la hipótesis y la tesis en una proposición.
D2. La determinación del valor de verdad de una proposición.
D3. La ilación en las demostraciones.
D4. Empleo de los conceptos de perpendicularidad y paralelismo en 3D.

D1. El reconocimiento de la hipótesis y la tesis en una proposición

A los estudiantes se les presenta una barrera al tener que determinar la hipótesis y la tesis de una proposición.
Esta dificultad puede manifestarse en errores respecto a la determinación de la hipótesis y tesis (T2a) o puede inducirlos a tomar el recíproco de la propiedad dada (T3b) o utilizar un teorema en una demostración sin que se cumplan las hipótesis del mismo vulnerando así su aplicabilidad (T4b)[14].

[14] Se hace referencia a los errores de la tipología de la sección 4.5.

En el diálogo que se presenta para determinar el valor de verdad de la proposición "Dos rectas son perpendiculares si por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra" se evidencia que los estudiantes consideran que la primera parte del enunciado de la proposición es su hipótesis, es decir, "dos rectas son perpendiculares". Se expone parte del diálogo en el que se muestra lo anteriormente manifestado (para mayor información puede leerse el fragmento completo en el **Anexo D** desde el número 479 al 521).

497	F	Si son cruzadas ya sabemos que se cumple el teorema…, por el teorema. Pará. Si son secantes, determinan un plano…
498	L	Y por una de ellas determino un plano… Ah, no. Pero… para las que están en un mismo plano… sean perpendiculares. Vamos a geometría plana…
499	F	Claro. Pero yo digo. Está bien, están en un mismo plano y son perpendiculares. Por ejemplo estas dos. Podés construir un plano así…
506	L	Sabemos que son perpendiculares… son secantes y perpendiculares. Entonces tenemos un plano… dos rectas que son perpendiculares que se cortan… No. Empezá de vuelta… dos rectas perpendiculares…
507	F	Secantes determinan un plano.
508	L	Pero perpendiculares.
509	F	Sí. Sí.
510	L	Porque ahí dice que son perpendiculares por hipótesis.
511	F	Sí. Sí.
512	L	Entonces podemos construir un plano perpendicular al que ellas determinan y que podemos considerar a una de las otras y que…

Se visualiza en este fragmento de la discusión que consideran las posibles posiciones de dos rectas perpendiculares: secantes o alabeadas y buscan un teorema disponible que les permita relacionar estas rectas con un plano.

D2. El tratamiento del valor de verdad de una proposición

A los estudiantes se les presenta una barrera al tener que determinar si una proposición es verdadera o falsa. Esta dificultad se evidencia en las interacciones de los alumnos que se exponen en los siguientes fragmentos del **Anexo D**:

28	L	Porque ahora cuando estemos demostrando, recién ahí se nos va a plantear el problema de que si faltan condiciones o no. Y ahí vamos a saber si es verdadero o falso.

O en este fragmento:

107	F	El tema es que tenemos que determinar cuáles van a ser verdaderas. Quiero decir, si va a ser verdadero o falso.
108	L	Es que eso es lo que te estoy diciendo. Este ya vimos que es…
109	F	Que es falso porque necesitamos que sea secante…??
110	L	No, no. Es falso. Hay que agregar una condición…
111	F	A mí lo que me da la duda, no sé por qué… porque si determinamos si es verdadero o falso así como está nos tendría que dar verdadero o no. ¿Cómo determino si es verdadero o falso?
112	L	Si lo podemos demostrar o no.

O en este otro fragmento:

528	L	La del tetraedro no sé cómo hacerla, pero cuando lleguemos ahí lo volvemos a ver…
529	F	Lo que yo no sé cómo justificar que es verdadero o falso…
530	L	Si lo demostramos, es verdadero.

Asimismo, los estudiantes conocen la función del contraejemplo (como se expresa en el fragmento que se expone a continuación) pero se evidencia la dificultad en determinar el uso del mismo para justificar la falsedad de una proposición.

450	L	Pero el plano este no es paralelo a esta. Y ya está. Encontramos un contraejemplo.
451	F	Una recta es perpendicular a dos rectas de un plano, es perpendicular al plano…
452	L	Esta recta es perpendicular a esta y a esta… ¿Así es la hipótesis?
453	F	Sí.
454	L	Dice, es para… es perpendicular al plano que determinan. Y no!, porque este plano que las contiene a las dos, que es el único no es perpendicular a esta. Ya está…
455	F	Claro, porque es depende como la tomás. Si tomamos estas dos sería perpendicular.
456	L	Y si yo tomo este y este, sí… Porque este plano si es perpendicular. Pero para ser un contraejemplo…
492	L	Lo que tenemos que decir es falso porque ponemos como un contraejemplo donde no se cruzan.

Por otro lado, los estudiantes relacionan el establecer la verdad o no de una proposición a si lo pueden demostrar (T3a). Sin embargo, que no puedan demostrar la proposición no asegura que una proposición sea falsa. Puede deberse a una imposibilidad por parte del estudiante en establecer la demostración. Se pueden recordar aquí teoremas, como por ejemplo de la teoría de números -el pequeño teorema de Fermat-, que aunque no se encontraba el modo de refutarlo, pasó mucho tiempo en aparecer una demostración formal de ese resultado.

Otra particularidad se presenta al justificar que una proposición es falsa (T4b).

419	F	Dice: dos rectas alabeadas son siempre perpendiculares. Falso.
420	L	Falso. Sólo si cumplen el teorema 3… Acá!, el 3.4 o el 3.5. El 3.5. Si una recta r es perpendicular a dos… No. El 3.3, el teorema 3.3. Solamente si cumplen este teorema. Sólo es verdadero si por una de ellas puedo trazar un plano perpendicular al otro.
421	F	Claro, sólo si se cumple el teorema 3.3. Pero también pueden ser paralelas o cualquier cosa…
422	L	No. Cruzadas no más… porque nosotros después, más adelante, lo vimos el otro día con la profe, que podemos sacar cuanto mide ese ángulo, por las proyecciones, vos proyectás las dos rectas y ves cual es el ángulo. Y si el ángulo es recto…
423	F	Son perpendiculares.
424	L	Pero si no, no.

En este afán, los estudiantes aluden a un teorema que establece ciertas relaciones similares a la planteada en la proposición dada y justifican diciendo que es falsa porque no se dan las condiciones de tal teorema. Por ejemplo, ante la proposición “Dos rectas alabeadas son siempre perpendiculares” los estudiantes aluden a dos teoremas que relacionan las rectas alabeadas y la relación de perpendicularidad entre rectas y entre recta y plano. Uno de los teoremas aludidos es el que afirma que “Si una recta es perpendicular a un plano lo es a toda recta de éste” y el otro establece que “Dadas dos rectas cruzadas r y s, si por una de ellas s se puede trazar un plano α perpendicular a la otra r, por ésta se puede trazar un plano β perpendicular a s”. Dichos teoremas no establecen relación de perpendicularidad entre dos rectas alabeadas cualesquiera consideradas en la proposición dada.

D3. La ilación en las demostraciones

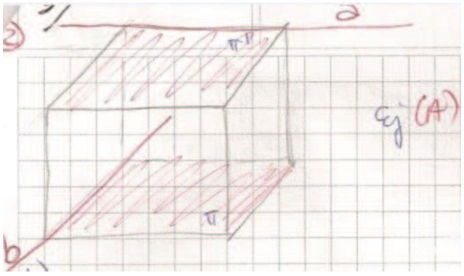
A los estudiantes se les presenta una barrera al tener que escribir una demostración formal. Esta dificultad se evidencia en demostraciones que se presentan como descripción de una imagen de las relaciones que son realizadas en el papel o en objetos concretos (paredes, mesas, lápices, etc.) o donde lo que se visualiza o imagina cumple con las condiciones que se tienen que probar.

En los siguientes fragmentos se evidencia que los estudiantes utilizan elementos físicos del entorno para representarse la situación. Esto puede ser una barrera en la escritura formal porque al tomarlos, al momento de hilar las sentencias de la demostración, no encuentran sustentos teóricos que las avalen. Esto puede apreciarse al leer reiteradamente en el diálogo completo la expresión: "Después cuando lo vamos a pasar lo escribimos bien. Pero esa es la idea".

73	L	Entonces, vos que decís. ¿Nos alcanza o no? Porque pensándolo es, este plano por ejemplo del techo es paralelo al piso, todas las rectas que estén en el piso van a ser paralelas a ese plano.
74	F	Claro.
130	L	Así. Es que para mí esta no va a ser… porque sabés cómo me la imagino yo? Por ejemplo cruzadas? Una así y otra así.
131	F	¿Y cómo hacés el plano paralelo, digamos?
132	L	¿Por dónde trazaríamos el plano paralelo a estas dos?
133	F	Si lo hacés a ésta no va a ser a ésta…
352	F	Yo digo… si tenemos un punto a y tenemos el punto… porque nosotros sabemos que estas son perpendiculares…¿no? Yo me la imagino como que tengo dos papeles así y una recta que la cruza…
465	F	Y capaz que si vos lo ves así, una que está así, supongamos que está parada y todas las otras la van a cruzar así…

Esta dificultad puede vincularse al error de hacer referencia explícita a un dibujo o evocar a uno en la escritura de la demostración (T3c).

"Si **a** y **b** son cruzadas ⇒ ambas están contenidas en planos // (ver Ej. (A))⇒ si el punto A no pertenece ni a las rectas ni a los planos // ⇒ por ese punto A podemos trazar solo un plano paralelo a ambas, dicho plano será 1 plano paralelo a los 2 planos // entre sí, en que están contenidas las rectas **a** y **b**"



Cuadro 4: Cuadro Análisis 2-02. Anexo B

También se puede conectar esta dificultad con los errores respecto a la escritura de una demostración (T1a) ya que al realizar descripciones de la situación se acercan más a explicaciones intuitivas que a demostraciones rigurosas, como se ilustra en el Cuadro 4.

D4. Empleo de los conceptos de perpendicularidad y paralelismo en 3D

Una barrera que se observa en este estudio es respecto a los conceptos de paralelismo y perpendicularidad. En particular esta dificultad se ve agravada por las relaciones que se presentan entre elementos que no son siempre de la misma especie. Es decir, en 3D estas relaciones se dan entre rectas, entre planos, y entre rectas y planos. Esta dificultad puede manifestarse, entre otros, en errores respecto a la aplicación de propiedades del plano no válidas en 3D (T4.a); o a la extrapolación incorrecta de relaciones entre conceptos o propiedades (T4.c); o al tratamiento incorrecto de axiomas y de definiciones (T2.b) o a un cuasisofismo (T3.c), particularmente lo que refiere a la utilización de una representación gráfica para justificar una proposición.
En la bibliografía empleada en la cátedra Geometría Euclídea Espacial se utiliza el término rectas perpendiculares para referirse tanto a las rectas secantes como a las rectas alabeadas. Este hecho provoca una dificultad, dado que al utilizar el concepto de rectas perpendiculares los estudiantes evocan naturalmente el concepto entre rectas secantes, perfectamente legítimo en un plano, pero no consideran todas las relaciones posibles de rectas en 3D. Asimismo, en esta bibliografía, la relación de paralelismo es considerada sólo en el caso que los elementos (rectas, planos, rectas y planos) no tienen puntos en común. En otras asignaturas del plan de estudio, distintas al área de geometría, esta relación de paralelismo incluye a las rectas o planos coincidentes o a rectas incluidas en un plano. Esta barrera, que se presenta en los alumnos, proviene de extrapolar el concepto del dominio conocido al nuevo. La elección de una definición no es ingenua, lleva a obtener relaciones distintas dependiendo de cuál se adopte.
Se pueden apreciar estas dificultades en la justificación de las proposiciones “dos rectas perpendiculares son secantes” o en la proposición “por un punto existe una única recta perpendicular a otra recta” o en “dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí”, que son verdaderas siempre en 2D pero en 3D lo son cuando todas las rectas están en un mismo plano. Ilustra esto el siguiente fragmento del diálogo de los estudiantes.

241	F	Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí. Ésta es verdadera por teorema.
262	L	Entonces ponemos que es verdadera.

Los estudiantes consideran verdadera a la proposición evocando un teorema del plano, que no encuentran disponible en el material bibliográfico (dado que el teorema es de Geometría Plana). A partir de esto no vuelven a cuestionarse el valor de verdad de dicha proposición y buscan alguna propiedad disponible en el material bibliográfico para avalarlo.

643	F	Eh… 3.29… Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos entre sí
644	L	Donde alfa paralelo a beta.
645	F	Y como la a pertenece a alfa y b pertenece a beta, entonces las rectas son paralelas

Esto puede leerse con más detalle, en el **Anexo D**, en la líneas de 241 a 262; de 367 a 415 y de 585 a 645.

Por otro lado, se presenta una barrera en la fusión entre la definición y la imagen del concepto de perpendicularidad entre rectas no coplanares. En este concepto subyace el concepto de recta perpendicular a un plano. El conjunto de imágenes de planos perpendiculares están asociadas, casi exclusivamente, a un espacio donde caras de ortoedros están incluidas en esos planos. Esto se visualiza en lo afirmado en la siguiente línea.

468	L	Lo que pasa que estoy pensando otros planos que no sean las caras… porque nosotras nos estamos imaginando que los planos que la contienen son las caras…

En el documento escrito del otro grupo puede leerse:

3	"Pero en el caso del tetraedro regular los diedros que forman las caras que contienen las aristas alabeadas forman ángulos distintos a 90º "

Tabla 10: Grupo 2, problema 2 e. Anexo C.

646	L	En el tetraedro no sé…. De última pongámosle falso. Para mí es falso…
647	F	Yo no sé. No lo veo. Ahí supuestamente lo es pero no los veo….

Se observa que visualizan solo un plano a la vez, en este caso el que contiene a una cara del tetraedro y a la arista considerada. No tienen en cuenta que existen infinitos planos que contienen a dicha arista y por tanto no consideran el apropiado para demostrar la propiedad, que es un plano no disponible en la representación del tetraedro.

Como se mencionó anteriormente excede a los fines de esta tesis profundizar en las dificultades. Lo presentado en este apartado es sólo un incipiente comienzo que se considera fecundo para tratarse en futuras investigaciones.
Se presenta un cuadro que pretende hacer visible las relaciones entre las dificultades manifestadas y los errores de la tipología fruto de esta tesis.

	T1		**T2**		**T3**			**T4**		
	a	**b**	**a**	**b**	**a**	**B**	**c**	**a**	**b**	**c**
D1			x			x			x	
D2					x				x	
D3	x						x			
D4		x		x			x	x		x

Tabla 11: Vinculación entre errores y dificultades

CAPÍTULO 5

DISCUSIONES, CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

5.1. RETORNANDO A LOS OBJETIVOS PROPUESTOS

5.1.1. El error en Educación Matemática

Los autores tomados en el marco teórico sostienen que el error es lo que se manifiesta a través de una producción. Se aprecian dos posturas respecto a la concepción de error. Por un lado se lo presenta como un conocimiento inacabado, válido en un contexto pero no en otro (Brousseau, 2007; Socas, 2000). Por otro, se lo presenta como una acción que se aleja de lo aceptado como correcto por la comunidad matemática (Rico, 1997; Godino, Batanero y Font, 2003; Lupiañez Gómez, 2009; Radillo Enríquez, 2011). Ambas acepciones se vislumbran en las definiciones de error encontradas en los diccionarios consultados.

En este trabajo los errores detectados corresponden en algunos casos a un conocimiento inacabado y en otros casos son juzgados como lo que se aleja de la resolución correcta, como la manifestación de una práctica que no coincide con lo aceptado por la comunidad matemática.

Por lo dicho anteriormente es que, en este estudio, se define al *error como una práctica que lleva inherente conceptos equivocados o procedimientos inacabados, que se visualizan a través de la producción de los estudiantes* (Capítulo 2).

En lo que refiere a lo que no coincide con lo aceptado por la comunidad matemática, se puede citar, por ejemplo, la escritura de la simbología de las relaciones entre un elemento y un conjunto (pertenencia) o entre dos conjuntos (inclusión) o el uso del lenguaje natural en las demostraciones formales. Asimismo, la determinación y escritura de la hipótesis y la tesis en una proposición. Respecto a conocimientos que son perfectamente legítimos en un dominio pero no en otro se puede citar aquellas proposiciones que en el contexto de la geometría plana son verdaderas y no lo son en la geometría tridimensional. Un caso similar a lo presentado en la sección 2.2.1 donde se propone considerar que el alumno no distingue el número natural 4 que tenía un antecesor del “mismo” 4 que en los decimales no lo tiene se presenta con la relación de perpendicularidad entre rectas. En el plano, por un punto de una recta existe una única recta perpendicular a ella, pero en 3D en cada uno de los infinitos planos que incluyen a dicha recta ocurre esto. Por tanto, en 3D por un punto de una recta existen infinitas rectas perpendiculares a ella.

5.1.2. Detección y clasificación de errores en geometría 3D en estudiantes de profesorado en matemática

En una primera instancia se realiza una clasificación exploratoria y se produce un listado de errores que se detectan a partir del análisis de parciales, del registro realizado en varias cohortes de estudiantes del profesorado en matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias en la cátedra Geometría Euclídea Espacial y de los aportes de trabajos referidos a esta temática consultados. Teniendo en cuenta las características y similitudes de los errores hallados se establecen dos grandes tipos, once generales, es decir que pueden ser de cualquier área de matemática y, siete particulares, referidos específicamente a la geometría del espacio. En esta primera aproximación el énfasis está puesto en detectar los errores lo más objetivamente posible poniendo el acento en lo que hace el estudiante y no en las causas que provocan el error. No pretende ser exhaustiva ni evitar solapamientos.

A partir de este listado de errores, de la revisión bibliográfica y del análisis de lo recogido en la implementación de un nuevo instrumento se realiza una nueva tipología. Esta categorización cuenta con siete tipos de errores: tres que refieren a la imprecisión en el empleo del lenguaje matemático y de las definiciones, axiomas y propiedades geométricas. Dos que refieren a la acción de demostrar; uno que apunta al empleo de representaciones gráficas y otro referido a la extrapolación de propiedades.

Con los aportes obtenidos en una consulta a expertos, el acrisolado de las categorizaciones anteriores y con los aportes de los referentes teóricos se establece una jerarquización en la tipificación de los errores obteniendo una nueva y final categoría. En esta nueva categoría se describen cuatro tipos de errores. Uno de los tipos atiende a cuestiones generales referidas a la escritura en el lenguaje matemático, otro hace referencia a los fundamentos de la acción de demostrar, otro a la demostración en sí misma, y por último uno que presenta cuestiones referidas al empleo de analogías en el trabajo geométrico. Cada uno de ellos presenta subtipos. El siguiente cuadro muestra la relación entre la tipología anterior y esta tipología final.

		TI.	TII.	TIII.	TIV.	TV.	TVI.	TVII.
T1	**a**	✓						
	b	✓						
T2	**a**		✓			✓		
	b				✓			
T3	**a**					✓		
	b			✓				
	c					✓	✓	
T4	**a**							✓
	b			✓				
	c							✓

Tabla 12: Relación de categorizaciones secciones 4.3 y 4.5.

Teniendo en cuenta los referentes considerados en el Capítulo 2 y el análisis de los instrumentos presentado en el Capítulo 4, se presentan conclusiones y discusiones referidas a las cuestiones particulares que se toman en la tipología final de este estudio. Se consideran para ello tres apartados, uno referido a lo que involucra al *lenguaje matemático*, otro referido a la *prueba en matemática* y finalmente una concerniente a las *analogías en el trabajo geométrico*. Estos apartados se originan en función de ordenar la lectura de estas conclusiones, no obstante se finaliza estableciendo relaciones entre ellos ya que hay cuestiones que los atraviesan.

Respecto a *El lenguaje matemático*

Se evidencian dos aspectos referidos a la estructura propia del lenguaje matemático. Un aspecto refiere al empleo de los términos propios de la disciplina y otro a la estructura y a la presentación de los contenidos.

Socas (2000), Radillo Enríquez y Varela (2007), Ortega y Ortega (2001) y Weber (2013) destacan la particularidad de la simbología matemática que permite expresar sin ambigüedades, con precisión y rigurosidad las afirmaciones de esta disciplina. Señalan que los símbolos en matemática tienen un significado preciso que debe ser conocido por los estudiantes, lo cual no siempre ocurre. El deficiente uso de esta característica se presenta en la tipología final como *uso incorrecto de la simbología matemática.*

En el estudio se evidencia el mal uso de los símbolos en cuanto a la relación entre *elementos* y *conjuntos* o entre *conjuntos* tanto en la escritura simbólica como coloquial. Además respecto del uso de cuantificadores se visualiza por un lado la omisión y por otro el mal uso de ellos. Se detecta que algunos sujetos consideran como expresiones equivalentes a *infinitos* y *todo* (Zaslavsky y Ron, 1998). Por otro lado, Radillo Enríquez y Varela (2007) señalan que hay conceptos matemáticos que requieren más de una condición para expresarlo simbólicamente. En la proposición "dos rectas **r** y **s** son perpendiculares si por una de ellas **r**, se puede trazar un plano β perpendicular a la otra **s**" está implícito en la misma que existe un plano β que contiene a la recta **r** y es perpendicular a **s.** Al expresar esta propiedad los alumnos omiten considerar este cuantificador existencial, de lo que escriben, se establece que cualquier plano que contenga a la recta **r** será perpendicular a la recta **s**, lo cual es incorrecto.

En cuanto a la precisión del lenguaje y a la rigurosidad de la presentación de los enunciados, Ortega y Ortega (2001) y Weber (2013) señalan que ambas están supeditadas al nivel académico de los estudiantes. En este estudio, como se mencionó a lo largo del trabajo, son estudiantes avanzados del profesorado en matemática, carrera de grado de la Universidad Nacional del Litoral, por lo cual es pertinente tener especialmente en cuenta este aspecto en la tipología.

Otra característica destacada por Socas (2000) y por Radillo Enríquez y Varela (2007) es que en el lenguaje usual hay términos que tienen el mismo significado y otros que tienen diferente significado al matemático, lo cual provoca un conflicto ya sea para distinguirlos o para determinar que el significado es efectivamente el mismo. Asimismo el lenguaje ordinario no requiere de la misma precisión que el lenguaje matemático para ser comprendido.

Las irregularidades respecto a particularidades referidas a la escritura de las demostraciones y la influencia del lenguaje cotidiano sobre el uso que hacen los estudiantes del lenguaje matemático se presentan en la tipología final bajo la denominación de *redacción incorrecta.*

En el estudio se encuentra la expresión *rectas cruzadas* con un significado del lenguaje común, distinto al que refiere Puig Adam (1980)[15] para designar a las rectas alabeadas. Usualmente los estudiantes emplean este término para designar, por ejemplo, a calles que se cortan. En matemática este término refiere a rectas no coplanares y por tanto que no se intersecan.

Asimismo, la expresión *no tienen ningún punto en común* para indicar la relación entre dos rectas cruzadas, los estudiantes la emplean según la acepción del lenguaje común. Desde el lenguaje de la lógica esta expresión indica que las rectas son coincidentes, pues es una doble negación, contradiciendo el concepto de rectas cruzadas.

Además, el vocablo "un" es interpretado en ocasiones como artículo y en otras ocasiones como pronombre numeral cardinal. Este error se evidencia cuando los estudiantes deducen que dos rectas con *un* punto en común son secantes. El "un" que los estudiantes utilizan es pronombre numeral cardinal y ellos lo emplean como artículo, dado que dos rectas con un punto común (*un* con acepción artículo) pueden ser coincidentes dado que, según esta acepción, podrían tener más de uno.

Respecto a la *Prueba en matemática*

Weber (2002- 2013) presenta a la prueba como un problema a resolver por los estudiantes universitarios pues sostiene que éstos necesitan estrategias y heurísticas que le ayuden a decidir cómo encararlas. Esta noción sobre la prueba sintoniza con lo que Polya (1970) considera problemas de demostrar y es el modo de considerar el trabajo con demostraciones en la propuesta metodológica de la cátedra GEE. Las irregularidades respecto a particularidades referidas a la prueba en matemática se consideran en la tipología final bajo la denominación de *lo fundamental de la demostrabilidad*, que refiere a los fundamentos de la acción de demostrar, y de *lo esencial de la demostración*, que refiere a la demostración en sí misma.

Para resolver un problema de demostrar una proposición es necesario mostrar de un modo concluyente la exactitud de la afirmación enunciada. Para esto, es imprescindible determinar los elementos estructurales que son la premisa y la conclusión, es decir, establecer hipótesis y tesis. Generalmente las proposiciones se enuncian en términos de una implicación

[15] Texto base de la cátedra GEE.

donde la primera parte es la hipótesis y la segunda es la tesis pero en ocasiones, como en el caso de uno de los problemas analizados en esta investigación, no es posible establecer estos elementos por el lugar que ocupan en la proposición. Si bien no es requerimiento de la consigna explicitar hipótesis y tesis en los problemas de los instrumentos analizados, se vislumbran los errores en torno a esta cuestión a través del análisis de la demostración o de lo escrito, si lo hacen.

En el estudio se presentan errores donde se ignora en la demostración parte de la tesis de una propiedad o donde hipótesis y tesis enunciadas no se corresponden con la proposición dada o donde no se puede distinguir cuál es la hipótesis y cuál es la tesis. También se encontró que parte de la hipótesis no se utiliza en la resolución del problema.

Se considera en este punto el aspecto referido al uso defectuoso de definiciones y de axiomas o postulados (Rey Pastor y Puig Adam, 1948; Vinner, 1991; Fischbein, 1993; Laborde, 1996; Weber, 2002- 2013 y Selden y Selden, 2003).

En un concepto confluyen imágenes, impresiones, experiencias, representaciones, ejemplos, propiedades intrínsecas y la definición. La definición establece condiciones necesarias y suficientes que quedan ocultas muchas veces en las definiciones al emplear el "si" cuando en realidad significa "sí y sólo sí". Todas estas características generan tensiones en el uso del concepto al punto que muchas veces los estudiantes no pueden describir el concepto con sus propias palabras o no pueden presentar ejemplos o transgreden o contradicen las definiciones como se evidencia en este trabajo.

Específicamente la definición que algunos alumnos toman de rectas, recta y plano o planos paralelos no condice con la definición acordada en la cátedra al considerar que la intersección puede no ser vacía. En este sentido, uno de los expertos consultados manifiesta el esfuerzo demandado al catalogar los errores ya que considera una definición (respecto al paralelismo) distinta a la convenida en la cátedra. Es habitual que ambas definiciones coexistan en los textos de geometría de nivel superior. Por ejemplo Puig Adam (1980) y Sánchez Mármol y Pérez Beato (1947) consideran la misma definición[16] que la que se toma en la cátedra, en cambio Ferraris (1991), Fernández Val (2004) y Garguichevich (2007) toman otra definición[17] que la acordada en GEE. Este

[16] El paralelismo se considera con intersección vacía entre los elementos intervinientes.
[17] El paralelismo se considera con intersección vacía entre los elementos intervinientes, o con todos sus puntos comunes o uno incluido en el otro.

acuerdo no es trivial dado que considerar una u otra definición puede modificar las condiciones que se deben imponer al establecer el valor de verdad de una de las proposiciones analizadas en los instrumentos de esta investigación. Muchas veces los estudiantes consideran las representaciones disponibles que pueden no coincidir con la definición acordada. Como señala Vinner (1991) rara vez el estudiante utilizará una definición que no sea coherente con la comprensión intuitiva que posee de dicho concepto.

También dentro de los errores que surgen en este trabajo están los referidos al uso incorrecto de axiomas. Se encuentra que los estudiantes en unos casos contradicen o transgreden los axiomas o los desconocen o intentan demostrarlos. Este error se visualiza entre otros, en el caso de un alumno que determina un plano tomando una recta y un punto de ella, ignorando el axioma de determinación del plano o en otro alumno que pretende demostrar que dos puntos están alineados.

Con respecto a la demostración en sí misma, que en la tipología se menciona como *lo esencial de la demostración* se consideran errores que involucran una transgresión a los requerimientos de una demostración según el nivel académico en el que se realiza este estudio. Se consideran particularmente tres subtipos, uno que refiere al empleo de los ejemplos en la justificación de las afirmaciones, otro a las inferencias y por último el que alude a lo completo e ilación de las justificaciones en las demostraciones. Weber (2013) sostiene que los estudiantes universitarios no pueden construir una prueba sin solicitar ayuda al profesor aunque se les brinde una sugerencia para comenzar. Sus estrategias, en general, son ineficaces y rudimentarias.

Se instituyen en este trabajo los términos ejemplijismo, quasilogismo y cuasisofisma con el fin de englobar distintas acciones sobre aspectos propios de la demostración.

El vocablo ejemplijismo, como se menciona en el capítulo 4, relaciona el término espejismo con ejemplo y decidir. En ocasiones, los estudiantes afirman que un objeto no existe al no poder encontrar un ejemplo para decidir su existencia o sostienen que una proposición es falsa citando un teorema con otra tesis, en lugar de utilizar un contraejemplo. La palabra quasilogismo surge para considerar los argumentos que en apariencia corresponden a una ley lógica (paralogismos). Por su lado, cuasisofisma apunta a considerar los argumentos que son exiguos para justificar un razonamiento.

En el análisis realizado se detecta que los estudiantes concluyen que un objeto buscado no existe dado que intentan construirlo por un método y no lo logran (Rey Pastor y Puig Adam, 1948; Fetisov, 1973). Se presenta el caso en que dicen que no hay plano paralelo a dos rectas cruzadas ya que no pueden construir un plano con dichas rectas. Así la imposibilidad de determinar ese plano lo alegan a la imposibilidad de existencia del plano determinado por esas rectas cruzadas.

En algunos casos, en los instrumentos analizados en este estudio, para justificar que una proposición es falsa no se emplea un contraejemplo, sino que la justifican aludiendo a un teorema en el que coincide la conclusión aunque las premisas consideradas no son coherentes con las premisas de la proposición a justificar (Weber, 2002- 2013). Cuando se pretende afirmar que no todas las rectas alabeadas son perpendiculares, se justifica con la condición que deben cumplir dos rectas alabeadas para ser perpendiculares. Los estudiantes no consideran la especificidad del contraejemplo como forma de refutar una proposición (Zaslavsky y Ron, 1998).

Se consideran, por otro lado, en la tipología final errores que vulneran leyes lógicas (Zaslavsky y Ron, 1998; Rey Pastor y Puig Adam, 1948; Weber, 2013 y Selden y Selden, 2003). Se presenta, en ocasiones, el empleo incorrecto de la regla de inferencia Modus Ponens donde se afirma el consecuente para concluir el antecedente lo cual es un razonamiento fallido, tanto con proposiciones cuantificadas como no cuantificadas. Asimismo utilizan en una demostración una propiedad que es posterior a la dada, lo que algunos de estos autores denominan círculo vicioso o tautología. Por otra parte, los estudiantes presentan un error de razonamiento clásico y muy persistente como es el probar el recíproco del teorema que se debe demostrar.

Se manifiestan también errores que refieren a argumentos que son exiguos para justificar los pasos de un razonamiento (Zaslavsky y Ron, 1998; Rey Pastor y Puig Adam, 1948 y Fetisov, 1973)

Respecto a los agujeros en las demostraciones, es decir, cuando basan una demostración en proposiciones implícitamente admitidas en el razonamiento y no son previamente establecidas (petición de principio), hay distintos tipos. Por un lado, cuando no se justifica un paso en una demostración puede ocurrir que la implicación sea correcta, porque es válida pero en otros casos la implicación no es válida. En el primer caso, el agujero puede pasar desapercibido en la lectura o corrección de esa demostración. Consideramos también dentro de los cuasisofismas los casos particulares. Este tipo de agujero en la demostración se presenta ya que se omite demostrar algún caso (enumeración incompleta) o no se justifica por qué se seleccionan éstos y no otros. Los estudiantes usan argumentos intuitivos y empíricos para probar todo tipo de afirmaciones. Se basan en ejemplos y casos individuales, por ello se considera dentro de esta particularidad, el error cuando se hace referencia explícita a un dibujo realizado.

Respecto a las *Analogías en el trabajo geométrico*

Las analogías, procedimientos que usualmente se emplean para adquirir prácticas o experiencias de la vida cotidiana, favorecen la habilidad para transferir conocimientos de un dominio fuente a un dominio meta. En esta transferencia a veces se quebrantan o se ignoran los límites de aplicabilidad, realizando recuperaciones o extrapolaciones inadecuadas. Las generalizaciones o particularizaciones en lo referido a la geometría en 2D y 3D se realiza, en ocasiones, sin la debida vigilancia conceptual lo que provoca errores que en esta tipología se consideran bajo los aspectos de *aplicación de propiedades del plano no válidas en 3D*, *falsos dilemas* y *extrapolación incorrecta de relaciones entre conceptos o propiedades* (De Castro, 2012; Polya, 1970; Volkert, 2008; Cohen, 2000; Berté, 1999; Rey Pastor y Puig Adam, 1948; Guillén, 2010; Bachelard, 2000; Fischbein, 1993)

Respecto a las propiedades de perpendicularidad entre rectas, los alumnos en general las visualizan en un plano, propiedad que es válida en cada uno de los infinitos planos que existen en 3D[18] pero ignoran que están en ese contexto de validez (se quedan en el plano), no logran una real fusión entre el concepto de perpendicularidad y las imágenes disponibles. Esto muestra que la experiencia y la intuición son inherentes a la geometría aún en niveles avanzados de estudio y el hábito de trabajar tantos años en 2D es muy fuerte y hace que los estudiantes no puedan desapegarse de este concepto de rectas perpendiculares (Rey Pastor y Puig Adam, 1948). Esto sintoniza con lo que se consideran *falsos dilemas* dado que hasta el momento de comenzar el estudio de la geometría en 3D, tercer año de la carrera, las rectas perpendiculares

[18] "Por un punto pasan infinitas rectas perpendiculares a otra rectas" y "Si dos rectas son perpendiculares entonces son secantes o alabeadas".

siempre fueron rectas secantes y esta relación de perpendicularidad se estableció sólo entre rectas. Cohen (2000) sostiene que la extensión en el espacio tridimensional del concepto de perpendicularidad no cambia su significado base pero amplía las posibles relaciones entre ellos. Subraya además que la capacidad de visualización muchas veces es limitada y es propio con lo que los estudiantes están acostumbrados a ver en el plano.

Respecto a *cuestiones transversales*

El nivel académico de los estudiantes que forman parte de este estudio exige una geometría sistemática. La sistematización de la geometría genera polémica entre diversos autores respecto a la pertinencia de comenzar el estudio de la geometría 2D antes que la 3D o viceversa. Autores como Volkert (2008), Dienes (1970), Guillén (2010) y Freudenthal (1983; citado en Guillén, 2010) recomiendan comenzar la enseñanza por una geometría intuitiva tomando objetos tridimensionales de la realidad y a partir de ellos ir a la geometría 2D. Cuando posterior a esa enseñanza intuitiva se requiere de una sistematización de la geometría tridimensional aparecen conflictos propios de ésta, respecto a su enseñanza formal. En esta investigación se presenta esta particularidad ya que la pluralidad de las posibles relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre elementos, que se amplía en 3D, hace que aparezca exacerbado el uso de propiedades similares, equivalentes o no, donde intervienen los elementos y relaciones pero que no respetan hipótesis o tesis de la proposición dada. El ordenamiento habitual para la enseñanza superior comienza con la geometría 2D y separada de la del espacio. Esto afecta a definiciones de algunos conceptos geométricos particularmente referidos a la relación de paralelismo pues al definir rectas paralelas se establece que estas rectas tienen intersección vacía pero es tácito, en general, que son coplanares dado que no puede suceder otra posibilidad en el plano. Al trabajar en 3D, esta condición tácita genera conflictos con la definición de rectas paralelas y rectas alabeadas.

Por otro lado, la formación de los conceptos geométricos se ve atravesada por diversos aspectos, en particular las definiciones por expresiones que no se corresponden con el lenguaje cotidiano. En especial, el empleo de la expresión *sí* en el lenguaje cotidiano se interpreta como *sí y solo sí* aunque no lo sea. En una definición formal, en ocasiones se refuerza esta interpretación incorrecta dado que se utiliza la expresión *sí* cuando en realidad significa *sí y solo sí.* Este empleo erróneo se extiende en proposiciones que no son bicondicionales y son tomadas como tal o en el empleo equivocado del recíproco de la propiedad dada (Selden y Selden, 2003).

Asimismo, es habitual que los estudiantes consideren que si una proposición es válida en casos específicos lo es para todos los casos, es decir extienden la propiedad que cumple un conjunto de objetos al todo. Esto se evidencia cuando se consideran expresiones equivalentes a *infinitos* y *todo*. Es decir, el mal uso de los cuantificadores lleva a generalizaciones que no siempre son correctas (Zaslavsky y Ron, 1998; Polya, 1970).

5.1.3. Dificultades que presentan los alumnos del profesorado en Matemática al realizar demostraciones geométricas en 3D

En general las dificultades, como sostiene Socas (2000), se conectan en redes complejas y se manifiestan en los alumnos en forma de errores. Así una dificultad puede manifestarse a través de un error pero un error puede deberse a más de una dificultad es por esto que en el análisis realizado se hace hincapié en la descripción de los errores en la forma lo más neutral posible, sin especular en posibles causas o razones por los cuales se cometen. Se considera en este estudio que la manifestación evidente de una dificultad puede ser un error aunque no siempre es así.

Para el análisis particular de las dificultades se diseña un instrumento específico, un cuestionario que se implementa en la cátedra GEE con formato de taller, en el que se decide el trabajo en parejas porque el debate entre pares y el intercambio de ideas permite vislumbrar con mayor claridad las dificultades.

En las discusiones de los grupos se evidencia que los estudiantes al tener que determinar el valor de verdad de una proposición, consideran casi sin dudar la verdad de la misma, basándose, en general, en propiedades del plano. Luego buscan entre las propiedades y teoremas disponibles la que "encaja" con lo que tienen que justificar. Vale la pena resaltar que buscan la propiedad en la guía por la tesis de la proposición que tienen, forzando luego las hipótesis para poder utilizarla. Una pareja justifica, al tener que determinar el valor de verdad de una proposición[19], que las rectas son paralelas utilizando el teorema que afirma que si dos planos son perpendiculares a una recta, son paralelos entre sí y considerando erróneamente que rectas incluidas en planos paralelos son paralelas. El otro grupo utiliza el teorema que afirma que dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas entre sí; la tercera recta dada en la proposición la construyen por los puntos de intersección de las rectas, consideradas desde el principio como paralelas, y un plano perpendicular a ellas.

Otro aspecto que se detecta como una dificultad para estos estudiantes es lo referido a la relación de perpendicularidad, abordada tanto por Berté (1999) como por Cohen (2000). Utilizan en las discusiones, representaciones de rectas incluidas en paredes del salón, que tiene forma de ortoedro, para auto convencerse de sus afirmaciones e inducir a su compañero a que las acepten. Además los dos grupos mencionados, llevan a un plano las tres rectas dadas, visualizando dichas rectas en la mesa de trabajo, donde la propiedad es verdadera, aunque al no justificarla con esta propiedad del plano, ignoran que están en ese contexto de validez.

Asimismo, utilizan las condiciones de rectas perpendiculares en el plano, es decir, que son secantes y forman ángulos de 90º, y a partir de esta definición, representan las posiciones relativas en el espacio, aunque siguen estando incluidas en un mismo plano. Luego argumentan en base a esa representación mental, escindiendo las componentes figural y conceptual de la figura, en este caso de las tres rectas y sus posiciones relativas en el espacio (Fischbein, 1993).

En síntesis, la imagen conceptual que tienen los estudiantes está formada por los diversos dibujos, figuras o representaciones que recuerdan del plano y que son influenciadas por las direcciones privilegiadas horizontal y vertical, que tienen que ver tanto con cuestiones culturales, como con construcciones arquitectónicas regionales particularmente ortoédricas (Vinner, 1991; Berté, 1999). También como sostiene Cohen (2000) es posible apreciar, en el análisis realizado, que si bien en algunas ocasiones ponen de manifiesto explícitamente estar trabajando en tres dimensiones, razonan con un plano a la vez.

[19] Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

5.2. CUESTIONES DERIVADAS DE LA INVESTIGACIÓN

5.2.1. Producciones generadas por este estudio

Innovaciones respecto a la enseñanza de la GEE en FHUC

✓ Reflexionando sobre lo analizado en esta investigación respecto a los errores que se presentan en el tratamiento de perpendicularidad entre rectas, se realiza una propuesta para denominar particularmente las relaciones entre dos rectas en el espacio, estableciendo el término perpendiculares para las rectas secantes y el término ortogonal para cualquier par de rectas, secantes o alabeadas, de manera que el ángulo entre ellas es recto.

✓ Se propone como recurso didáctico para la cátedra el uso de software en 3D, en los cuales los estudiantes deben poner en juego en las construcciones las propiedades de los conceptos trabajados y el software brinda una retroalimentación a partir de las propiedades que están implícitas en el diseño del mismo. Estos software permiten visualizar figuras en 3D y relaciones entre conceptos, considerando distintos puntos de vista en contraposición con las representaciones en soporte papel que no sólo son estáticas sino que se representan figuras tridimensionales en el plano lo que conlleva convenios no siempre conocidos por los estudiantes. Algunos software específicos recomendados son Cabri 3D, Geometria y GeoGebra 5.0 y sus versiones posteriores, de los cuales los dos últimos son libres.

✓ Se elabora un módulo para trabajar con los estudiantes de profesorado en matemática, de FHUC, que presenta una estructura y escritura diferente a los libros de texto utilizados en la cátedra para el tratamiento de la geometría del espacio. Se encuentra en prensa un libro, producto de este módulo, ***Geometría en 3D***, en Ediciones UNL.

Difusión de los resultados parciales de esta investigación

✓ Avances parciales de esta investigación o relacionadas con la temática de la misma se presentan en Jornadas o Congresos de Educación Matemática para su crítica y enriquecimiento a partir de los aportes de colegas. Se detallan, las ponencias y artículos publicados que abordan la problemática que se estudia en esta tesis cuya coautoría involucra a la tesista.

- *Estudio de particularidades del aprendizaje de la geometría tridimensional***,** presentado en XXXVI Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina y publicado en la Revista de Educación Matemática.

- *La enseñanza de la geometría en 2d, ¿es un obstáculo para el aprendizaje de la geometría en 3d? El caso de la perpendicularidad.* XXXVII Reunión de Educación Matemática.

- *Clasificación de poliedros en estudiantes del profesorado de matemática: Análisis previo.* Presentado en el evento XXXVIII Reunión de Educación Matemática. Argentina

- *Cómo utilizan los estudiantes del profesorado de matemática a la demostración como herramienta de prueba. Estudio de un caso al caracterizar una familia de poliedros.* 2016. En Memorias de la VI REPEM, Argentina: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa.

- *La importancia del desconcierto en el trabajo geométrico en entornos dinámicos.* Conferencia en el marco del VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE CABRI 2016. Universidad de Medellín. Colombia. Octubre de 2016.

- *Mi familia es un poliedro. Estudio de la utilización de clasificaciones de poliedros por futuros profesores en matemática.* Berlín: Editorial Académica Española, 2017.

- *Propuesta para estudiantes de carreras no matemáticas que desestabilizan sus imágenes conceptuales.* 2017. En VI Jornadas de Educación Matemática y III Jornadas de Investigación en Educación Matemática: memorias. Argentina: UNL.

- *Propuestas en ambientes dinámicos que ponen en jaque imágenes conceptuales.* Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas. Volumen: 101, julio de 2019. Pp: 7 – 18. En web: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/101/Articulos_01.pdf

5.2.2. Posibles líneas derivadas de este estudio

El interés por el estudio de las particularidades de la enseñanza de la geometría tridimensional es una temática en agenda de investigación en educación matemática. Se destacan, por ejemplo, los estudios de Ramírez Uclés, Flores Martínez y Ramírez Uclés (2018) que identifican errores específicos de la argumentación visual y derivados del uso incorrecto de los elementos de razonamiento, contenidos y procedimientos matemáticos. Patkin (2012) realiza un estudio donde explora si los estudiantes saben cuándo usar una prueba deductiva y cuándo un ejemplo es suficiente para probar o refutar afirmaciones geométricas. Estas investigaciones se realizan con estudiantes cuyas edades se corresponden con los de escuela secundaria de Argentina. Con futuros profesores Patkin y Plaksin (2018) estudian la comprensión relacional y la percepción espacial con respecto a los ángulos en las pirámides.

Algunas líneas con las que se puede continuar profundizando en temáticas derivadas de esta tesis son:

- Estudiar con mayor profundidad las relaciones entre dificultades y errores.
- Realizar una categorización detallada de las dificultades de estudiantes de profesorado en matemática que surgen en geometría 3D.
- Analizar en forma minuciosa las definiciones y sus implicaciones. Establecer definiciones equivalentes.
- Estudiar qué geometría se genera considerando las propiedades extrapoladas por los estudiantes. Las implicaciones erróneas, que formulan los estudiantes, si se consideran como propiedades podrían definir una nueva geometría.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bachelard, G. (2000) La formación del espíritu científico. México DF: Siglo veintiuno editores.

- Berté, A. (1999). *Matemática dinámica.* Buenos Aires: AZ editora.

- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

- Cohen, N. (2000). Misconceptions in 3-D Geometry Basic Concepts. En P*roceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychological of Mathematical Education.* Hiroshima: Japan.

- De Castro, C. (2012). *Estimación en Cálculo con Números Decimales: Dificultad de las Tareas y Análisis de Estrategias y Errores con Maestros en Formación* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

- Dienes, Z. (1970). *La construcción de las matemáticas.* Barcelona: Vicens-Vives.

- Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del currículum. En M. Gorgorió i Solá y J. Deulofeu Piquet (coords.) *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 125-136). Barcelona, España: Graó.

- Esteley, C. y Villarreal, M. (1996). Análisis y categorización de errores en Matemática. *Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional de Córdoba. 11* (1), 16-35.

- Fernández Cano, A. (1995). Metodologías de la Investigación en Educación Matemática. En L. Berenguer, et al. (Eds.). *Investigación en el Aula de Matemáticas* (pp. 47-65). Granada, España: SAEM Thales.

- Fernández Val, W. (2004). *Geometría métrica. Plano y espacio.* Uruguay: Kapelusz.

- Ferraris, C. (1991). *Espacio. Geometría Métrica.* Bariloche: Universidad Nacional del Comahue.

- Festisov, A. (1973). *La demostración en geometría.* México: Editorial Limusa-Wiley.

- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 139 - 162.

- Franchi, L. y Hernández de Rincón, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *Educere*, *8* (24), 63- 71.

- Franchi, L. y Hernández de Rincón, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. Parte II. *Educere*, *8* (25), 196- 204.

- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel.

- Garguichevich, G. (2007). *Geometría del plano y del espacio*. Rosario: UNR Editora.

- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Godino (dir.) *Didáctica de la matemática para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

- Grimaldi, R. (1998). *Matemáticas discreta y combinatoria. Una introducción con aplicaciones*. México: Addison Wesley Longman.

- Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). Lleida: SEIEM.

- Hernández Sampieri, R.; Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2003). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

- Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Buenos Aires: Zorzal.

- Itzcovich, H. y Broitman, C. (2001). Documento N° 3 Orientaciones didácticas para la enseñanza de la geometría en la EGB. Disponible en: http://servicios2.abc.gov.ar/lainstitucion/sistemaeducativo/educprimaria/areascurriculares/matematica/geometria.pdf

- Laborde, C. (1996). Cabri Geómetra o una nueva relación con la geometría. Investigación y didáctica de las matemáticas. En L. Puig (Ed.).

Investigar y enseñar variedades de la educación matemática (pp. 33- 48). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

- Lupiáñez Gómez, J. (2009). Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

- Mántica, A. (2011). Referentes teóricos para un estudio didáctico de la geometría. En A. Mántica y M. Dal Maso (comps.). *La geometría en el Triángulo de las Bermudas. Reflexiones y aportes para recuperarla en el aula* (pp. 13- 33). Santa Fe: Ediciones UNL.

- Mc Knight, C., Magid, T., Murphy, E. & Mc Knigt, M. (2000). *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician.* Rhode Island: American Mathematical Society.

- McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa. Una introducción conceptual.* Madrid: Pearson Educación.

- Ministerio de Educación. (2010). Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Áreas: Biología, Física, Matemática y Química. Disponible en: https://cedoc.infd.edu.ar/upload/Matematica.pdf

- Movshovitz- Hadar, N.; Zaslavksy, O. & Inbar, S. (1987). An empirical clasification model for errors in high school Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*, 3- 14.

- Ortega, J. F. y Ortega, J. A. (2001). Matemáticas: ¿Un problema de lenguaje? Rect@. Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA Recuperado de https://doaj.org/article/983f0ead221340a084f82d2f87012d9b el 8 de febrero de 2016.

- Panizza, M. (2005). *Razonar y Conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

- Patkin, D. (2012). High school students' perceptions of geometrical proof proving and refuting geometrical claims of the 'for every…' and 'there exists' type. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43* (8), 985-998.

- Patkin, D. & Plaksin, O. (2019). Comprensión procesal y relacional de los maestros de matemática previos al servicio con respecto a la percepción espacial de los ángulos en las pirámides. *Revista Internacional de Educación Matemática en Ciencia y Tecnología*, *50* (1), 121-140, DOI: 10.1080 / 0020739X. 2018.1480808

- Pérez Porto, J. y Gardey, A. (2012). Definicion.de: Definición de error Recuperado de https://definicion.de/error/ el 10 noviembre 2016.

- Polya, G. (1970). *Cómo plantear y resolver problemas*. México D.F.: Trillas.

- Puig Adam, P. (1980). *Curso de geometría métrica. Tomo I Fundamentos.* Madrid: Gómez Puig Ediciones.

- Radatz, H. (1979). Error analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics*, *6*, 163-172.

- Radillo Enríquez, M. (2011). Obstáculos y errores en el aprendizaje de la geometría euclideana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático, en el nivel licenciatura. *ALME 24*, 429- 437. Recuperado el 15 de noviembre de 2015.

- Radillo Enríquez, M. y Varela, S. (2007). Obstáculos en el aprendizaje de la geometría euclideana, relacionados con la traducción entre códigos del lenguaje matemático. En R. Abrate y M. Pochulu (Comps.) *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática* (pp.263-280). Villa María: Universidad Nacional de Villa María.

- Ramírez Uclés, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

- Ramírez Uclés, R; Flores Martínez, P, y Ramírez Uclés, I. (2018). Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa 21* (1), 29-56.

- Real Academia Española RAE. (2014). *Diccionario de la lengua española* (23.ª ed.). Disponible en https://dle.rae.es/

- Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1948). *Metodología de la matemática elemental.* Buenos Aires: Ibero- Americana.

- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). México D.F.: Bogotá: "una empresa docente" & Grupo Editorial Iberoamérica.

- Rico, L. (1997). Reivindicación del error en el aprendizaje de las Matemáticas. *Epsilon, 38*, 185- 198.

- Sánchez Mármol, L. y Pérez Beato, M. (1947). *Geometría. Métrica, proyectiva y sistemas de representación.* Tomo I y II. Madrid: S.A.E.T.A.

- Selden, A. & Selden, J. (2003). Errors and misconceptions in college level theorem proving. Tennessee Technological University Department of Mathematics Tech Report No. 2003-3. Recuperado de http://math.tntech.edu/techreports/TR_2003_3.pdf el 12 de agosto de 2016.

- Socas, M. (2000). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en Educación secundaria. En L, Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

- Tirao, J. (1979). *El Plano.* Buenos Aires: Docencia.

- Vidal, H. (1981). *Lógica.* Buenos Aires: Ediciones Braga.

- Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematicas. En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Volkert, K. (2008). *The problem of solid geometry.* Recuperado de http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/WG1/Papers/VOLK.pdf controlar el 7 de julio de 2011.

- Weber, K. (2002). Beyond proving and explaining: Proofs that justify the use of definitions and axiomatic structures and proofs that illustrate technique. *For the Learning of Mathematics*, *22*(3), 14-17.

- Weber, K. (2013). Students' difficulties with proof. MAA Research sampler 8 recuperado de https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/research-sampler-8-students-difficulties-with-proof el 12 de febrero de 2016.

- Zaslavsky, O. (2010). The explanatory power in mathematics: Challenges for teaching. In M. Stein & L. Kucan (Eds.) *Instructional explanations in the disciplines* (p. 107- 128) Boston, MA Springer Science+Business Media, LLC.

- Zaslavsky, O. (2014). Thinking with and through examples. In S. Oesterle, C. Nicol, P. Liljedah and D. Allan (Eds.) *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *36* (1), 21-34. Vancouver, Canada: PME.

- Zaslavsky, O., Aricha-Metzer, I. & Thoms, M. (2016). Generic use of examples for proving. *Presented at NCTM Research Conference*. San Francisco, CA. Recuperado de https://s3.amazonaws.com/conference-handouts/2016-nctm-sf-research/pdfs/NCTM%202016_Generic%20Use%20of%20Examples%20for%20Proving.pdf el 6 de septiembre de 2017.

- Zaslavsky, O. & Ron, G. (1998). Students' understandings of the role of counter-examples. In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, v.4 (pp. 225 - 232)

Euclides ha sido el genio del mal, particularmente para la historia de las matemáticas y para la enseñanza de las matemáticas, tanto en los niveles introductorios como avanzados.

I. LAKATOS