UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Humanidades y Ciencias

Especialización en Didáctica de la Matemática

Trabajo Final Integrador

Título: Uso de software de geometría dinámica para la validación de propiedades de los triángulos

Alumna: Claudia Roxana Boxler (roxy.boxler@gmail.com)

Directora: Natalia Sgreccia (nataliasgreccia@gmail.com)

Fecha de entrega: Octubre 2020

Índice

Resumen

En este trabajo se desarrolla y analiza una secuencia didáctica sobre la validación de las propiedades de desigualdad triangular y suma de ángulos interiores de triángulos por medio de construcciones dinámicas, aprovechando las ventajas que ofrece GeoGebra para explorar, investigar y observar regularidades. Se busca promover el planteo de conjeturas y su validación, fomentando la necesidad de justificar sus respuestas. Con este trabajo se espera brindar una solución, en parte, a las dificultades en el desarrollo de procesos de validación de los estudiantes, avanzando desde explicaciones basadas en la observación y razonamientos inductivos, a demostraciones deductivas informales, permitiéndoles adquirir conocimientos significativos.

Se enmarca en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento (EOS), tomando como principales referentes teóricos diversos trabajos de Godino, Batanero, Font, Planas, entre otros. Para llevar a cabo el análisis de la secuencia, se tienen en cuenta los niveles de razonamiento de los estudiantes, los elementos involucrados en las tareas, así como los tipos de tareas y de demostraciones, y varios de los niveles de análisis didáctico para la valoración de la idoneidad didáctica de la propuesta. Para finalizar, se esbozan posibles resoluciones de los estudiantes, dificultades e intervenciones docentes al implementar la secuencia.

Uso de software de geometría dinámica para la validación de propiedades de los triángulos

1. Introducción

En este trabajo se pretende arribar el problema de la validación en el aula de matemática por medio de la elaboración de una propuesta didáctica enfocada en el uso del software GeoGebra como herramienta para la realización de conjeturas y validaciones sobre propiedades de los triángulos. Dicha propuesta se enmarca en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento (EOS) y está orientada a estudiantes de segundo año del Ciclo Básico Común (CBC) de la Escuela Normal "José María Torres" de la ciudad de Paraná, donde la autora se desempeña como docente en la actualidad.

Para la elaboración de dicha propuesta se tienen en cuenta los lineamientos del Diseño Curricular de Secundaria de la Provincia de Entre Ríos (2010), en los que se plantea la caracterización y clasificación de triángulos, proponiendo la "exploración de las condiciones necesarias para que la construcción de una figura sea posible, analizando en qué casos la solución es única, en qué casos se obtienen infinitas soluciones y en qué casos es imposible" (p.40). Además, se establece la validación de propiedades, como por ejemplo la propiedad triangular y la suma de ángulos interiores en triángulos. Si bien estos contenidos son planteados para primer año del CBC, el Plan de Estudios de Educación Secundaria de la Universidad Autónoma de Entre Ríos (UADER, 2012), universidad a la que pertenece la institución escolar a la cual está destinada la propuesta, propone para segundo año en el eje "Geometría y mediciones" el estudio de "Triángulos: Elementos. Propiedades y Clasificación (…)" (p.156). Por su parte, en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios estipulados por el Consejo Federal de Educación (2011) se establecen como objetivos para segundo año del CBC, "la producción y validación de conjeturas sobre relaciones y propiedades geométricas, avanzando desde las argumentaciones empíricas hacia otras más generales" (p.17).

Por otro lado, en Argentina en el año 2010 se puso en marcha el Programa Conectar Igualdad, el cual buscó "dotar a los establecimientos educativos de todos los niveles de educación obligatoria de gestión estatal con los mejores recursos tecnológicos para garantizar la plena implementación de la iniciativa y así ampliar su alcance" (Ministerio de Educación de la Nación, s.f). En base a esto, se consideró que:

> La entrega masiva de computadoras portátiles en las escuelas promoverá un clima propicio para el uso cotidiano de la tecnología integrando las actividades pedagógicas en el aula, el aprendizaje de los alumnos, fortaleciendo procesos de formación y de práctica docente y multiplicando recursos para la enseñanza (Consejo Federal de Educación, 2010, p.16).

A pesar de ello, luego de una búsqueda por las bibliotecas escolares de la ciudad de Paraná, se constató que los libros de texto enviados a las escuelas desde el Ministerio de Educación Provincial, a partir del 2011, poseen escasas o nulas propuestas de trabajo con software de geometría dinámica. Como excepción, se puede mencionar un material específico proporcionado por el Ministerio de Educación (2011), denominado *Geometría: Serie para la enseñanza del modelo 1 a 1*, destinado a brindar apoyo a los docentes en el uso de las computadoras portátiles en las aulas, en el marco del Programa Conectar Igualdad. Sin embargo, dicho material solo presenta, con relación al estudio de los triángulos, una secuencia sobre el Teorema de Pitágoras y otra sobre la suma de ángulos exteriores de un triángulo, utilizando como recurso el software GeoGebra. En relación con esta escasa correlación entre los lineamientos curriculares y los materiales brindados por el Estado, Conejo Garrote et al. (2019) expresan la relevancia que tienen los libros de texto dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula:

> (…) es innegable que los libros de texto juegan un papel y tienen una influencia muy importante en ellos, aunque el rol que se le asigne y los usos de ellos que se hagan puedan diferir mucho de unos docentes a otros. Como afirma Schubring (1987), en la práctica los libros de texto pueden llegar a determinar la enseñanza de un país más que los propios currículos promulgados por las órdenes ministeriales (p.135).

Por otra parte, es sabido que en la era digital que se transita actualmente, los docentes no solo cuentan con libros de texto como material de trabajo. Particularmente en la última década, los recursos digitales se han vuelto cada vez más accesibles y, a su vez, se van incrementando constantemente. Sin embargo, "más" no siempre significa "mejor". Por ello, es importante que los docentes sean capaces de buscar, discernir y seleccionar aquellos materiales de calidad, en el sentido de curadores de materiales, también inspirarse en materiales disponibles para crear nuevos, siendo prosumidores. Además, es necesario saber secuenciarlos y adaptarlos a los grupos de estudiantes con los que interactúan día a día en las aulas, de modo que los conocimientos que se pretenden desarrollar les presenten un desafío y, a su vez, resulten acordes a los niveles de razonamiento y saberes previos que poseen.

Lo expresado anteriormente, y como se plantea en los lineamientos curriculares tanto a nivel provincial como nacional, refleja la necesidad de brindar a los estudiantes situaciones que les permitan desarrollar estrategias de validación, aprovechando a su vez los recursos tecnológicos como herramientas para tal fin.

2. Objetivo

Este trabajo tiene por objetivo la *elaboración de una secuencia didáctica que permita a los estudiantes relacionar, conjeturar, justificar, contrastar y validar propiedades geométricas, empleando como recurso un software de geometría dinámica*. Específicamente, *se estudia la* *desigualdad triangular y la suma de los ángulos interiores de un triángulo, utilizando el software GeoGebra*. Esta secuencia es complementada con el análisis de su potencialidad, exponiendo posibles resoluciones de los estudiantes y eventuales intervenciones docentes.

3. Fundamentación

La Geometría es una rama de la Matemática cuyo estudio tiene la particularidad de poder percibirse por medio de la vista y producir imágenes mentales a partir de ello. Aquí intervienen dos procesos distintos, el primero se relaciona con la visión y el segundo con la visualización, lo que conlleva variadas dificultades al momento de aprender geometría. "La confusión entre los dos procesos contribuye a que se crea que la representación (en papel o computadora) es el objeto geométrico que se está estudiando" (Larios Osorio et al., 2017, p.42). Sin embargo, parece ser que esta confusión forma parte del aprendizaje de la geometría. "En términos semióticos la representación (dibujo) sirve al individuo para acceder al objeto (geométrico) a través del otorgamiento de significados, todo esto dentro de un contexto que le da sentido" (Larios Osorio et al., 2017, p.42).

Esto se sustenta en la Teoría de Conceptos Figurales (Fischbein, 1993), donde se considera a los objetos geométricos como una mezcla entre el dibujo (representación particular de una figura) y concepto (en relación con la definición teórica del objeto con sus respectivas propiedades). Estos objetos "son entonces entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición y tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales tales como idealidad, abstracción, generalidad y perfección" (Fischbein, 1993, p.143).

Existen diversos autores, como Arcavi y Hadas (2000), que manifiestan que la utilización del software GeoGebra en el trabajo de la geometría favorece la visualización y, en consecuencia, la comprensión de las figuras geométricas como conceptos figurales, y no meros dibujos, puesto que el dinamismo del software admite el arrastre, lo que permite una manipulación directa y continua de los objetos. De esta forma se pueden estudiar sus variaciones, observando qué cambia (características particulares de una representación gráfica) y qué permanece constante (propiedades del objeto en cuestión).

> Esta operación, como elemento de una herramienta que funciona como mediador semiótico entre objetos geométricos e individuos, (…) puede ser utilizada como medio para que el alumno siga un proceso no necesariamente lineal (avances y retrocesos), que le lleve a desarrollar habilidades de razonamiento y de observación al permitir diferenciar progresivamente entre dibujo (representación) y figura (relación conceptual entre dibujo y objeto geométrico) (Larios Osorio et al., 2017, pp.42-43).

Por su parte, Novembre et al. (2015) expresan que la Geometría dinámica permite "observar propiedades geométricas, relaciones entre objetos, validar o no las construcciones" (p.37) y destacan que es una de las utilidades más importantes que poseen los programas, puesto que esto no puede verse reflejado en el trabajo con lápiz y papel. "Con GeoGebra, los alumnos no están haciendo un dibujo, sino comunicando su procedimiento de construcción a un programa" (p.37). Los estudiantes obtienen retroalimentación constante por medio de la manipulación directa de sus construcciones al utilizar la función de arrastre, ya que si los objetos obtenidos se deforman, son llevados a buscar otras estrategias. En este caso, "se trata de usar el arrastre no como un medio de constatación, sino para elaborar conjeturas o para realizar una construcción y validar la estrategia utilizada" (p.38).

Además, el uso de un software de Geometría dinámica para el trabajo con figuras geométricas, como plantean Arcavi y Hadas (2000), presenta ciertas características que "tienen el potencial de nutrir, siempre que ellos estén acompañados convenientemente por materiales del currículo y prácticas del aula" (p.25). La utilización del software proporciona no solo la visualización de la figura construida y la realización de mediciones, sino que también permite transformar fácilmente y con rapidez las construcciones, experimentando así con un gran número de ejemplos variados y pudiendo observar regularidades que los lleven a plantear una conjetura. Para ello, es importante guiar a los estudiantes para buscar casos extremos, que salgan de los ejemplos estereotipados (Barrantes et al., 2015) con los que generalmente llegan al aula, mediante la elaboración de preguntas que cumplan un papel significativo en la profundidad e intensidad de un aprendizaje experimental, que les exijan hacer predicciones explícitas.

Como sugieren Arcavi y Hadas (2000), "el reto es encontrar situaciones en las cuales el resultado de la actividad sea inesperado o contra-intuitivo, de tal forma que la sorpresa (o el desconcierto) generado cree una clara diferencia con las predicciones explícitamente enunciadas" (p.26). Con estas sorpresas se busca la retroalimentación, que los estudiantes se motiven a volver a verificar, revisar y reformular la predicción, infundiendo la necesidad de buscar una justificación y realizar una prueba o demostración. "Se trata de un enorme desafío que los alumnos asuman como parte del trabajo identificar las razones que explican por qué valen ciertas propiedades, más allá de lo 'visible'" (Broitman e Itzcovich, 2008, p.62). Sin embargo, conviene tener en cuenta que no todos los estudiantes disponen de los mismos recursos y conocimientos para validar ciertas afirmaciones, por lo que "será necesario entonces considerar válidas -intuitivamente o por medio de un trabajo exploratorio- relaciones que para la matemática deberían ser demostradas rigurosamente" (pp.62-63).

García y López (2008) manifiestan que es recomendable, siempre que sea posible, solicitar a los estudiantes que expliquen y justifiquen sus afirmaciones en base a resultados y propiedades que ya conocen, puesto que "de esta manera convertimos las actividades en tareas de demostración fomentando la cultura de la argumentación lógica y el desarrollo de su habilidad para comunicarse" (p.52). Respecto a esto, Bernardis y Moriena (2007) expresan que "el desafío será diseñar actividades para lograr que los alumnos valoren la necesidad de justificar sus construcciones y conjeturas" (p.56).

Teniendo en cuenta que este trabajo se centra en estudiantes de segundo año del CBC, cabe considerar que existe una diversidad en las formas de razonamiento que poseen, por lo que resulta importante plantear situaciones que permitan resolverse de diferentes maneras dependiendo de los niveles de razonamiento con los que cuenten. Por lo general, en relación con el año de escolaridad en el que se encuentran, las estrategias de validación que emplean pertenecen al nivel 2 de razonamiento que plantea Van Hiele (Gutiérrez, 2007), aunque también es posible que aparezcan razonamientos de los niveles 1 y 3, dependiendo del trabajo previo con situaciones que los hayan estimulado a razonar, establecer relaciones, explicar, justificar, probar, etc. El nivel 1 de Van Hiele se basa en descripciones o exhibiciones de características físicas de las figuras, en las cuales no se logran desarrollar razonamientos matemáticos, aunque sí los estudiantes son capaces de explicar sus respuestas, utilizando un lenguaje informal. Por su parte, en el nivel 2 se utilizan razonamientos inductivos, basados en la observación y manipulación de ejemplos concretos a partir de los cuales generalizan propiedades matemáticas. Utilizan demostraciones del tipo empírico, es decir, comprobando que la conjetura se verifica en un número limitado de ejemplos. Por último, el nivel 3 agrupa los razonamientos y demostraciones con carácter informal, en el que necesitan apoyarse en la manipulación de un ejemplo concreto como guía, sin utilizar simbología matemática formal. Los restantes dos niveles (4 y 5) no suelen abordarse, ni son recomendables, en el nivel básico del secundario. Esto se debe a que, según la teoría de Van Hiele, antes de comenzar un estudio de geometría orientado hacia la demostración formal, es necesario ayudar a los estudiantes a progresar gradualmente desde niveles inferiores de pensamiento geométrico. "Se considera que enfrentar a los estudiantes prematuramente a la demostración formal puede conducirlos a solo intentos de memorización y a confundir el propósito de la demostración" (Battista y Clements, 1995; citado en Götte et al., 2009, p.1).

4. Marco teórico-metodológico

En esta sección se delimitan los términos matemáticos más destacados involucrados en este trabajo (apartado 4.1), se describen las principales herramientas y funciones que proporciona GeoGebra (apartado 4.2) y se recorren los constructos teórico-metodológicos utilizados para la elaboración y análisis de la secuencia (apartado 4.3).

4.1. Vocabulario matemático

Para lograr una mayor comprensión del contenido expuesto en este trabajo, es necesario delimitar el sentido en el que son utilizados los términos matemáticos que se involucran con mayor frecuencia (conjetura, visualización, verificación, generalización, argumentación, razonamiento, validación, explicación, prueba y demostración). Para ello, se toman como referentes los trabajos de Álvarez Alfonso et al. (2014), Balacheff (2000), Recio (2001) y Godino y Recio (2001).

En este trabajo se utiliza el término **conjetura** siguiendo la definición planteada en Álvarez Alfonso et al. (2014), donde se la concibe como una observación que realiza una persona acerca de las características de determinados objetos o las relaciones que se dan entre estos, creyendo, en principio, en su veracidad. Indican que, una vez que la persona obtiene certeza de su verdad (según su visión), dicha observación deja de ser una conjetura y se convierte en un hecho. Asimismo, entienden a la **visualización** como el "proceso de observar el objeto matemático para identificar sus características y las relaciones que se establecen entre ellas, fundamentándose en los esquemas cognitivos previos que tiene el observador sobre tales objetos" (p.77). Esta visualización habilita la creación de imágenes mentales, las cuales permiten referirse a objetos matemáticos sin que se encuentren necesariamente presentes.

Respecto a la **verificación**, estos autores se refieren a ella como un proceso en el que "se busca probar si la conjetura es válida en algunos nuevos casos o por el contrario que se muestre que la conjetura es falsa (puede ser a través de un contraejemplo)" (p.79). También esbozan que la **generalización** de la conjetura implica la concepción de esta como afirmación verdadera para cualquier caso del contexto estudiado, convirtiéndose en una regla generalmente aceptada. Siempre que se pretenda garantizar la verdad o falsedad de una afirmación, está presente la **argumentación**. En este sentido, Álvarez Alfonso et al. (2014) plantean que los argumentos aceptados como válidos dependen del contexto en el que se esté desarrollando la actividad matemática. Por ejemplo, para estudiantes de primaria, verificar una propiedad general en muchos ejemplos podría ser un argumento válido, mientras que en un ámbito universitario o científico, no sería suficiente.

Por su parte, Balacheff (2000) utiliza el término **razonamiento** "para designar la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información" (p.13). A su vez, considera el proceso de **validación** como esa misma actividad "cuando tenga como fin asegurarse de la validez de una proposición y, eventualmente, producir una explicación (una prueba o una demostración)" (p.13). Se entiende por **explicación** a un discurso que para el locutor establece y garantiza la validez de un enunciado, arraigado en sus conocimientos y en sus propias reglas de decisión de la verdad. Esta explicación adquiere la posición de **prueba** cuando es aceptada por una comunidad (por ejemplo, dentro de un aula). Y considera a la demostración como una forma particular de prueba, donde la veracidad de un enunciado se deduce de una serie de enunciados que le preceden, organizados siguiendo un conjunto bien definido de reglas. Es decir, en esta concepción, una demostración implica la validación de una propiedad por medio de un sistema axiomático deductivo.

Sin embargo, Recio (2001) sostiene que, en la actualidad, en el ámbito escolar se le designa a la demostración matemática un significado menos formalista, más abierto. "Junto al pensamiento estrictamente deductivo, se resalta también la necesidad de potenciar otros modos validativos de tipo empírico-inductivo, la formulación de conjeturas, los ejemplos y contraejemplos, los procesos de generalización, etc." (p.31). En consonancia con esto, en Godino y Recio (2001) se define al término **demostración** en un sentido genérico, como "objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas (o argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión" (p.406). En este trabajo se utiliza el término demostración en este último sentido.

4.2. GeoGebra

Además de los términos matemáticos involucrados en el trabajo, es importante tener en claro el vocabulario tecnológico que interviene. Por ello, en este apartado se definen las principales herramientas y funciones de interés que proporciona el software GeoGebra, así como los principales atributos que presenta el trabajo con geometría dinámica.

En primer lugar, es importante dejar en claro lo que se entiende por **software de geometría dinámica**. Es un programa informático que permite la creación y manipulación de construcciones geométricas, a partir de objetos tales como puntos, rectas, círculos, así como de las dependencias que pueden relacionar unos objetos con otros. La principal característica que posee es el dinamismo, esto es, el usuario puede manipular la construcción deslizando algunos elementos y el software automáticamente realiza los cómputos para mover los elementos dependientes manteniendo la construcción (Manzano Mozo, 2017). En GeoGebra, este movimiento se consigue mediante el **arrastre**, "función del software que permite mover o arrastrar un elemento de un objeto geométrico, que deforma dicho objeto preservando todas las propiedades geométricas que se usaron para su construcción" (García López, 2011, p.19). Dicha función se ejecuta a través de la herramienta *Elige y mueve*, la cual permite seleccionar un objeto desplazable haciendo clic en él, arrastrarlo y soltarlo en otra posición del plano.

Otra herramienta importante que interviene en este trabajo es el ***Deslizador***. Es la representación gráfica de un número o ángulo libre, que permite variar y ajustar su valor[1]. Dicha herramienta es implementada en la secuencia para que los estudiantes exploren la variabilidad de las amplitudes de ángulos y la incidencia en la posibilidad de construcción de triángulos, favoreciendo de este modo la elaboración de conjeturas.

García López (2011) menciona que este software, de uso libre y de fácil acceso, motiva a los estudiantes en la "búsqueda de demostraciones y facilita este proceso al posibilitar la generación de modo rápido y sencillo de gran cantidad de ejemplos sobre los que razonar y argumentar" (p.54), lo que a su vez mejora la visualización y la contextualización de las propiedades de los conceptos y procesos matemáticos. Esto, sumado a muchos otros atributos

[1] https://wiki.geogebra.org/es/Herramienta_de_Deslizador

y funciones que proporciona GeoGebra (como la ejecución de acciones del usuario con precisión y rigor, la retroalimentación inmediata y efectiva, la necesidad de pensar y razonar los problemas en términos de propiedades matemáticas, la priorización de la reflexión y el análisis de resultados al requerir menos tiempo para hacer representaciones y cálculos), influye de forma positiva en el aprendizaje de los contenidos geométricos.

4.3. Principales constructos teórico-metodológicos

Para la elaboración de la secuencia didáctica se opta por una estrategia de aprendizaje basada en el modelo llamado "aproximativo" (centrado en la construcción del saber por el alumno) que plantea Charnay (1994), en la cual el rol que cumple el docente es proponer y organizar una serie de tareas con distintos obstáculos (variables didácticas) y organizar las diferentes fases del trabajo (experimentación, formulación de conjeturas, validación institucionalización). El objetivo es que sea el estudiante quien ensaye soluciones, busque regularidades, plantee conjeturas, las confronte con las de sus compañeros y las valide.

En cuanto al análisis didáctico de la secuencia, en primer lugar, se caracterizan las tareas propuestas considerando algunas variables que proponen Moreno y Ramírez (2016). Estas son:

- **La meta o finalidad**: se refiere a la expectativa de aprendizaje que trabaja la tarea.
- **La formulación**: es el modo en que esa tarea se presenta. Puede ser un texto escrito, un material, un vídeo, etc.
- **Los materiales y recursos**: que se necesitan para la ejecución de la tarea.
- **El tipo de agrupamiento**: hace referencia al modo en que se dispone a los estudiantes para la realización de la tarea. La elección de un tipo de agrupamiento u otro depende de las intenciones educativas del docente.
- **La situación de aprendizaje o contexto**: en el que se propone la acción.
- **La temporalización**: indica la duración estimada de la tarea.

Además, se estudian los tipos de tareas matemáticas planteadas desde tres puntos de vista diferentes que esbozan García y López (2008):

- **Tareas de conceptualización**: relacionadas con la construcción de conceptos y relaciones geométricas.
- **Tareas de investigación**: enfocadas al estudio de las características, propiedades y relaciones entre objetos geométricos con el propósito de darles un significado.
- **Tareas de demostración**: que tienen como objetivo fomentar la capacidad para elaborar conjeturas o procedimientos de resolución de problemas que deben ser explicados, probados o demostrados utilizando argumentos lógicos.

En cuanto a las tareas de demostración[2], se clasifican según las posibles funciones que cumplen, tomando como referente el trabajo de De Villiers (1996), retomado en Bernardis y Moriena (2007). Desde esta perspectiva se pueden mencionar las siguientes funciones de la demostración matemática:

- **Explicación**: profundización del porqué de la veracidad de una afirmación.
- **Descubrimiento**: exploración, descubrimiento e invención de nuevos resultados.
- **Verificación**: construcciones sencillas que permiten dar una prueba empírica que confirma una conjetura dada.
- **Sistematización**: organización de resultados dentro de un sistema deductivo de axiomas, definiciones y teoremas.
- **Comunicación**: transmisión del conocimiento matemático resultante.

De Villiers (1993) explica que, aunque las funciones anteriores "(…) pueden ser diferenciadas unas de otras, a menudo están intrincadamente relacionadas en casos específicos. En algunos, ciertas funciones pueden dominar sobre otras, en otros casos, algunas de estas funciones son inexistentes" (p.26).

A su vez, se realiza un estudio de la secuencia en base a niveles o tipos de análisis aplicables a un proceso de estudio matemático, desarrollados en diversos trabajos llevados a cabo en el marco del EOS (D'Amore et al., 2007; Font y Contreras, 2008; Godino et al., 2009), citados en los trabajos de Alsina y Domingo (2010) y Font et al. (2010). Estos autores han propuesto cinco niveles:

1) **Tipos de problemas y sistemas de prácticas**: se orienta a identificar prácticas matemáticas implicadas en las actividades, descomponiendo cada una en secuencias de episodios y siguiendo su curso temporal.
2) **Configuraciones de objetos y procesos matemáticos**: consiste en identificar los objetos (situaciones-problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas, y también los que emergen de ellas.
3) **Trayectorias e interacciones didácticas**: orientado, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción y su puesta en relación con los aprendizajes de los estudiantes.
4) **Sistema de normas y metanormas**: estudia la compleja trama de reglamentaciones, directrices curriculares y acuerdos de aula (tanto explícitos como implícitos) que soportan y condicionan los procesos de estudio.

[2] Se considera el término demostración en su sentido amplio, abarcando los distintos tipos de validación (explicación, prueba y demostración formal propiamente dicha).

5) **Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio**: se basa en los cuatro análisis previos y constituye una síntesis final orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

Resulta importante aclarar, como señalan Font et al. (2010), que es posible seleccionar solo algunos de los niveles de análisis de acuerdo a las características particulares del proceso que se pretende analizar desde el EOS. En este trabajo, se aplican el primer y segundo nivel de análisis puesto que son fundamentales en la planificación del proceso de estudio. También se aplica el nivel 4, haciendo hincapié en el sistema de normas involucradas en la planificación de la secuencia, en función de los diseños curriculares, y de los acuerdos didácticos a realizar con el grupo de clase. No se analiza en este trabajo el nivel 3, puesto que está orientado a la interacción que se produce entre los estudiantes y con el docente al llevar la secuencia al aula. Del mismo modo, no se analiza el nivel 5, puesto que para valorar la idoneidad didáctica global de un proceso de instrucción "se necesita disponer de un análisis longitudinal previo y amplio que el análisis de los niveles 1, 2, 3 y 4 (…) no proporciona" (Font et al., 2010, p.3).

Para finalizar, se hace una descripción de las posibles resoluciones de los grupos de estudiantes y se sugieren potenciales intervenciones docentes. En esta descripción se efectúa una distinción entre construcciones blandas y robustas (Healy, 2000). Las construcciones blandas son aquellas que se realizan a partir de la percepción visual, sin utilizar todas las propiedades geométricas necesarias, por lo que al utilizar la función arrastre del software, la construcción se deforma. Por otra parte, una construcción robusta se concreta utilizando las propiedades geométricas involucradas y, por lo tanto, al aplicar el arrastre de puntos, la figura las mantiene. Así, mediante el desplazamiento se puede ir de lo particular a una familia de figuras que conservan las propiedades geométricas.

Resumidamente, de acuerdo a lo expresado y a los objetivos del presente trabajo, los constructos teórico-metodológicos que servirán de categorías centrales para analizar la secuencia en cuestión serán los siguientes cinco:

- Niveles de razonamiento
- Elementos de las tareas
- Tipos de tareas y de demostraciones
- Niveles de análisis didáctico
- Posibles resoluciones y conflictos al implementar la secuencia

5. Desarrollo

Se presenta, en primer término, la secuencia didáctica diseñada (apartado 5.1) y posteriormente se efectúa un análisis detallado de la misma (apartado 5.2).

5.1. Secuencia

Para la elaboración de la secuencia se toman como referencia los trabajos realizados en Itzcovich (2005), Broitman e Itzcovich (2008), Cappelletti y Costoya (2008), Podestá (2011) y Novembre et al. (2015).

Para llevar a cabo esta propuesta se utiliza la Versión 6.0 de GeoGebra Geometría[3], software libre y de fácil acceso, que puede descargarse o utilizarse de forma online a través del sitio web de GeoGebra. Si bien es probable que los estudiantes hayan tenido experiencias anteriores con el software en primer año del CBC, es necesario destinar una clase previa a la implementación de la secuencia, donde realicen un trabajo exploratorio de las herramientas que presenta este programa, comprender y/o recordar el significado de cada una y su forma de usar, cómo construir ángulos y figuras, medir longitudes y amplitudes de ángulos, modificar nombres y ocultar objetos, entre otros. Para mayor comodidad y visualización, se recomienda que cada grupo trabaje al menos con una computadora, siendo óptimo que cada integrante tenga la propia.

Además del uso de herramientas de GeoGebra, se requiere que los estudiantes cuenten con los siguientes saberes previos: construcción y clasificación de ángulos según su amplitud; ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal; cálculo de perímetro de figuras; definición de circunferencia como lugar geométrico; concepto de triángulo, elementos y clasificación según lados y según ángulos; triángulos iguales o congruentes.

Antes de la implementación de la secuencia se recomienda acordar varias cuestiones en el grupo de clase (Gutiérrez, 2007). Respecto a los contenidos matemáticos aceptables para demostrar una conjetura, solo pueden utilizar aquellas definiciones y propiedades que ya han estudiado previamente, aunque estas últimas no necesariamente hayan sido demostradas, sino que fueron aceptadas como verdaderas. En relación con las formas de expresarse para comunicar sus razonamientos, se sugiere un equilibrio entre un vocabulario intuitivo y el uso de términos matemáticos (incorporando estos últimos progresivamente). La respuesta solo se acepta si, además de ser correcta, es acompañada por un argumento verbal (aunque tenga algunas imprecisiones matemáticas).

Se propone que los estudiantes trabajen en grupos de 4 miembros, preferentemente cada uno con una computadora desde la cual accede al software. Como se mencionó anteriormente, la secuencia se basa en el modelo aproximativo del aprendizaje, por lo que son los estudiantes quienes van construyendo su conocimiento, otorgando al docente el rol de guía y organizador de las fases de trabajo. Es importante que se les brinde el tiempo necesario para la lectura,

[3] En la actualidad, el software GeoGebra está dividido en diversas aplicaciones (tanto en versión de escritorio como para celulares), como Calculadora gráfica, Graficadora 3D, Geometría, entre otras; cada una de las cuales posee funciones específicas. En particular, para esta secuencia se elige la aplicación Geometría por considerarse la más idónea, ya que está equipada con herramientas para el trabajo con geometría sintética, su vista gráfica tiene ocultos los ejes coordenados y la cuadrícula, y la vista algebraica también está oculta.

comprensión de las consignas y planteo de interrogantes que surjan de la misma. Luego de esto, se sugiere dejar que los estudiantes, en grupos, comiencen a experimentar con el software, realizar las construcciones, buscar regularidades, esbozar conjeturas y buscar validarlas, o en caso de refutarlas, reformular las conjeturas y nuevamente probar su validez.

Es fundamental solicitar a los estudiantes que redacten los pasos que realizaron, los interrogantes y debates que surgieron en el grupo, y todos los razonamientos que tuvieron, así como la justificación de sus respuestas, puesto que esto sirve para el posterior análisis.

Esta secuencia está dividida en tres partes. Al terminar cada parte, se propone realizar una puesta en común de los grupos donde se genere un debate mediante el que se confronten las conjeturas planteadas, y las formas de validación y contrastación utilizadas, lo que enriquece las producciones. Por último, es necesaria la institucionalización de los conceptos y propiedades arribadas por parte del docente.

A continuación, se presenta la secuencia a través de sus tres partes, de acuerdo a la particularidad de las construcciones que se solicitan (según los datos brindados), y teniendo en cuenta las propiedades que se pretenden estudiar. Cada una de dichas partes (I a III) presenta sus objetivos, contenidos y consignas a desarrollar.

Parte I

Objetivos

- Distinguir entre construcciones blandas (se deforman) y robustas (no se deforman).
- Identificar propiedades y conceptos geométricos involucrados en las figuras para la realización de construcciones robustas, discerniendo las herramientas de GeoGebra más apropiadas para tal fin.
- Reconocer la función de arrastre como medio para verificar construcciones de figuras a partir de propiedades geométricas.
- Observar cambios y permanencias en construcciones de figuras a partir de la utilización de la función de arrastre.
- Formular conjeturas y validarlas o refutarlas a través de explicaciones o pruebas sencillas.
- Desarrollar el hábito de fundamentar las respuestas a través de propiedades y conceptos geométricos.
- Iniciar producciones escritas donde se plasmen los procesos, razonamientos y argumentos involucrados en la resolución de las actividades.

Contenidos

- Invariantes geométricos en geometría dinámica.
- Construcciones de triángulos según condiciones dadas.

Consignas

En grupos de cuatro integrantes, utilicen GeoGebra para realizar las siguientes construcciones y responder.

Aclaración. Para cada construcción que se solicite, abran un nuevo archivo y guárdenlo colocando como título el número de la actividad y los apellidos de los integrantes del grupo. Ejemplo: *Parte I. Construcción1. (Apellidos).ggb*. Además, a las respuestas a las actividades deben registrarlas en sus carpetas.

1) Construyan un triángulo ABC isósceles, con $\overline{AB} = \overline{AC}$. Si mueven alguno de sus vértices, ¿sigue siendo un triángulo isósceles? Si la respuesta es "no", y el triángulo se deforma, busquen otra forma de construirlo de modo que soporte el arrastre y siga siendo $\overline{AB} = \overline{AC}$. En caso de que la respuesta haya sido "sí", redacten cómo realizaron la construcción.

2) Construyan un triángulo rectángulo DEF. Si arrastran los vértices, ¿sigue siendo rectángulo? De ser así, expliquen cómo lo construyeron. Si se deforma, busquen otra forma de construirlo para que mantenga la condición original.

3) Realicen la siguiente construcción, registrando en sus carpetas la herramienta utilizada en cada paso, y luego respondan:

- **i.** Tracen un segmento $\overline{GH}$ de 7 unidades de longitud.
- **ii.** En H, tracen una circunferencia con un radio de 6 unidades.
- **iii.** Ubiquen en la circunferencia un punto I.
- **iv.** Determinen el triángulo GHI.
- **v.** Midan los lados del triángulo.

a) ¿Cuántas unidades mide el lado $\overline{HI}$?

b) Si se desea que el lado $\overline{GI}$ mida 3 unidades, ¿qué pasos pueden agregar en la construcción para que esto sea así?

c) Realicen nuevamente la construcción, anexando los pasos que describieron en el ítem anterior. Si se desliza algún vértice, ¿los lados mantienen las longitudes pedidas? Si no es así, reformulen los pasos de construcción para lograrlo.

4) Natalia, Esteban y Marcela analizan la consigna del punto anterior, y llegan a la conclusión de que para lograr que en el triángulo GHI el lado $\overline{GI}$ mida 3 unidades, luego de los dos primeros pasos indicados en la construcción, deben:

- Realizar una circunferencia con centro en G y radio de 3 unidades.
- Buscar la intersección de las dos circunferencias que quedan trazadas.
- Designar a uno de esos puntos como I.
- Trazar el triángulo GHI.

a) Sin realizar la construcción, respondan: ¿ese triángulo cumplirá con la condición pedida? ¿Por qué creen que funciona, o no, ese procedimiento propuesto por los chicos?

b) Realicen la construcción que detallan Natalia y sus amigos, ¿a qué distancia se encuentra el punto I de los puntos G y H? El triángulo determinado, ¿cumple con la condición pedida?

c) ¿Qué creen que sucederá si consideran al otro punto de intersección como I? ¿Por qué?

d) Denominen al otro punto de intersección como I' y tracen el triángulo GHI'. ¿Cumple con la condición pedida?, ¿en qué se diferencia con el triángulo GHI?

Parte II

Objetivos

- Explorar y realizar conjeturas sobre la cantidad de soluciones y las condiciones de posibilidad de la construcción de triángulos a partir de dos y tres segmentos de longitudes dadas.
- Reconocer construcciones imposibles.
- Validar las conjeturas realizadas utilizando como recurso la función de arrastre que proporciona GeoGebra.
- Determinar que la longitud de tres lados es una condición suficiente para construir un único triángulo.
- Arribar a la propiedad de desigualdad triangular.
- Continuar el desarrollo de producciones escritas donde se plasmen los procesos, razonamientos y argumentos involucrados en la resolución de las actividades.

Contenidos

- Construcción dinámica de triángulos a partir de sus lados.
- Propiedad de desigualdad triangular.

Consignas

1) Realicen la siguiente construcción y luego respondan:

a) Construyan un triángulo ABC en el cual el lado $\overline{AB}$ mida 4 unidades y el lado $\overline{BC}$ mida 6 unidades. Redacten cómo realizaron la construcción.

b) Modifiquen el triángulo construido para obtener uno distinto, manteniendo las condiciones iniciales.

c) ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir con esas condiciones? ¿Por qué?

d) Al mover uno de los vértices del triángulo, ¿qué cambia y qué se mantiene?

e) ¿Qué dato agregarían para asegurar que solo se puede construir un único triángulo con esas condiciones?

f) ¿Cuánto debería medir el lado $\overline{AC}$ para maximizar el perímetro del triángulo? ¿Y para que el perímetro sea mínimo?

2) Construyan, si es posible, los triángulos que se piden a continuación:

a) Un triángulo cuyas longitudes de lados sean 3, 5 y 7 unidades. ¿Es la única construcción posible? Si la respuesta es "no", construyan un triángulo distinto que respete esas condiciones. Si la respuesta es "sí", expliquen por qué.

b) Un triángulo cuyos lados midan 3, 8 y 12 unidades. ¿Cuántos triángulos pudieron construir? ¿Por qué creen que sucede eso?

c) Un triángulo cuyos lados midan 9, 4 y 5 unidades. ¿Cuántos triángulos pudieron construir? ¿Por qué?

3) Sin hacer la construcción, decidan y justifiquen si es posible construir un triángulo cuyos lados midan:

a) 6, 10 y 15 unidades

b) 4, 7 y 11 unidades

c) 2, 1 y 5 unidades

d) 20, 13 y 4 unidades

e) 9, 16 y 5 unidades

f) 13, 12 y 5 unidades

4) Verifiquen las respuestas del punto anterior realizando las construcciones posibles.

5) Redacten las condiciones que deben cumplir las longitudes de tres segmentos para que sea posible construir un triángulo con ellos. *Ayuda*. Observen las construcciones posibles e imposibles de los puntos anteriores y busquen una relación entre las longitudes de dos de los segmentos con la longitud del tercer segmento.

Parte III

Objetivos

- Explorar cambios y permanencias en las figuras, utilizando la función de arrastre y los deslizadores que ofrece GeoGebra.
- Indagar y realizar conjeturas sobre la cantidad de soluciones y las condiciones de posibilidad de la construcción de triángulos a partir de dos y tres ángulos de amplitudes dadas.
- Determinar que la amplitud de tres ángulos no es una condición suficiente para construir un único triángulo.
- Validar conjeturas por medio de la función de arrastre y los deslizadores de GeoGebra, e iniciarse en el desarrollo de demostraciones lógico-deductivas informales.

- Arribar a la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
- Profundizar el desarrollo de producciones escritas donde se plasmen los procesos, razonamientos y argumentos involucrados en la resolución de las actividades.

Contenidos

- Construcción dinámica de triángulos a partir de sus ángulos.
- Propiedad de suma de ángulos interiores de un triángulo.

Consignas

1) Construyan un triángulo ABC que tenga el ángulo interior $B\hat{A}C$ de 40° y el ángulo interior $A\hat{B}C$ de 65°.

a) Redacten cómo realizaron la construcción.

b) ¿Es el único triángulo que se puede construir con esas condiciones?

c) ¿Qué sucede si arrastran los vértices del triángulo? ¿Qué cambia y qué queda igual?

d) ¿Es posible que siempre se puedan construir triángulos a partir de dos ángulos?

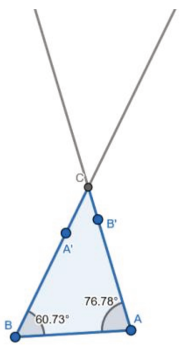
2) A partir de la construcción 1 dada[4], utilicen los deslizadores "a" y "b", ubicados en la vista algebraica, que modifican las amplitudes de los ángulos $\text{A}\hat{\text{B}}\text{C}$ y $\text{B}\hat{\text{A}}\text{C}$ respectivamente, y exploren si es posible construir, en cada caso, triángulos con:

a) Un ángulo interior de 45° y uno de 30° de amplitud.

---

[4]Se entrega a los grupos de estudiantes un archivo de GeoGebra titulado "*Construcción 1*" en el que se observa la construcción de la Fig. 1, y se describe a continuación:

- Se construye un segmento $\overline{AB}$.
- Con la herramienta *Ángulo de amplitud dada*, se selecciona el punto A y luego el B, y se ingresa como amplitud la letra a. El software crea así el punto A' y un deslizador en la vista algebraica con el cual se puede modificar el valor de a, por lo que al moverlo cambia la amplitud del ángulo $A\hat{B}A'$. Luego se traza la semirrecta $\overrightarrow{BA'}$.
- Del mismo modo, utilizando nuevamente la herramienta *Ángulo de amplitud dada* se selecciona el punto B y luego el punto A, y como amplitud se ingresa b. El software crea el punto B' y otro deslizador en la vista algebraica, que al moverlo cambia la amplitud del ángulo $B\hat{A}B'$. Luego se traza la semirrecta $\overrightarrow{AB'}$.
- Finalmente, se busca la intersección de las semirrectas, obteniendo así el punto C, y se traza el polígono ABC.



	Nombre	Descripción
1	Punto A	
2	Punto B	
3	Segmento f	Segmento [A, B]
4	Número a	
5	Punto A'	A rotado por el ángulo a
6	Ángulo α	Ángulo entre A, B, A'
7	Semirrecta g	Semirrecta que pasa por B, A'
8	Número b	
9	Punto B'	B rotado por el ángulo -b
10	Ángulo β	Ángulo entre B', A, B
11	Semirrecta h	Semirrecta que pasa por A, B'
12	Punto C	Intersección de h, g
13	Triángulo t1	Polígono B, C, A
13	Segmento a_1	Segmento [B, C]
13	Segmento b_1	Segmento [C, A]

Figura 1. Protocolo de Construcción (Parte III, actividad 2)

b) Un ángulo interior de 90° y uno de 80° de amplitud.

c) Un ángulo interior de 110° y uno de 50° de amplitud.

d) Un ángulo interior de 170° y uno de 10° de amplitud.

e) Dos ángulos interiores de 90° de amplitud.

f) Un ángulo interior de 145° y uno de 90° de amplitud.

3) ¿Fue posible construir todos los triángulos solicitados en el punto anterior? ¿Por qué creen que desaparece el punto C en algunas ocasiones al modificar con los deslizadores el valor de uno o ambos ángulos?

4) Natalia, Esteban y Marcela continúan resolviendo las actividades y, analizando la pregunta anterior, se produce la siguiente conversación:

- Natalia: Con dos ángulos agudos siempre se puede construir un triángulo; en cambio, con dos ángulos obtusos no.
- Esteban: Entonces para poder construir un triángulo a partir de dos ángulos, estos ¡sí o sí tienen que ser agudos!
- Marcela: Esto significa que no se puede construir un triángulo utilizando un ángulo obtuso.

a) ¿Están de acuerdo con los chicos? ¿Están afirmando lo mismo? Justifiquen su respuesta.

b) ¿Qué sucede en el caso de los ángulos rectos para formar triángulos?

5) Observen las construcciones de triángulos posibles realizados en la actividad 2 y determinen la amplitud del ángulo $A\hat{C}B$ con la herramienta "Ángulo".

a) ¿Qué sucede con dicho ángulo si se arrastran los vértices del triángulo?

b) Registren en una tabla como la siguiente las amplitudes de los ángulos de cada triángulo construido:

Ítem	**Amplitud de $A\hat{B}C$**	**Amplitud de $B\hat{A}C$**	**Amplitud de $A\hat{C}B$**

6) Prevean si es posible realizar las construcciones que se piden e indiquen cuántos triángulos se pueden obtener con esas condiciones. Luego, utilizando la construcción de la actividad 2, exploren y comprueben o refuten sus conjeturas relativas a triángulos que tengan, en cada caso, ángulos interiores con las siguientes amplitudes:

a) 40°, 60° y 80°

b) 60°, 70° y 90°

c) 30°, 50° y 65°

d) 30°, 50° y 100°

7) Observen las amplitudes de los tres ángulos de cada triángulo que lograron construir:

a) ¿Qué similitud encuentran? ¿Qué relación pueden establecer?

b) Esa relación, ¿se cumple para cualquier triángulo? Si la respuesta es "no", grafiquen un triángulo en el que no se verifique y busquen otra relación que sea general para cualquier triángulo. Si la respuesta es "sí", ¿cómo pueden comprobarlo?

8) Natalia y sus compañeros están buscando una relación entre los ángulos interiores de los triángulos. Luego de pensar un rato, se produce la siguiente conversación:

- Esteban: ¡Tengo una idea!, si construimos un triángulo cualquiera ABC y trazamos una recta paralela al lado $\overline{AB}$, que contenga al vértice C, podemos trabajar con los ángulos que se forman por dos paralelas cortadas por una transversal.
- Marcela: No entiendo, para eso necesitamos tres rectas, y en tu procedimiento solo construís una.
- Natalia: Si trazamos las rectas que contienen los lados del triángulo se puede apreciar mejor…

Y realizan la construcción que encontrarán en el archivo de GeoGebra titulado "Construcción 2"[5]

a) Observen los ángulos interiores del triángulo y establezcan igualdades con los ángulos que tienen al punto C como vértice, utilizando sus conocimientos sobre ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal. *Ayuda*. Observen primero los ángulos formados por las dos rectas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DE}$, cortadas por la transversal $\overleftrightarrow{AC}$, y luego con la transversal $\overleftrightarrow{BC}$ pueden nombrar los ángulos mediante tres puntos o utilizar letras griegas para denotarlos.

[5] Se entrega a los grupos de estudiantes un archivo de GeoGebra titulado "*Construcción 2*" que contiene la construcción que se muestra en la Fig. 2, y se detalla a continuación:
- Se trazan tres rectas no paralelas y se construye el polígono ABC a partir de la intersección de dichas rectas.
- Se marcan los ángulos interiores de ABC (ocultando sus amplitudes, para hacerlo de forma general).
- Se traza una recta i paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, que contiene al punto C.
- Se ubican dos puntos en la recta i: el punto D en el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{BC}$ que contiene al punto A y el punto E en el semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AC}$ que contiene al punto B.
- Se ubican los puntos F y G en $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ respectivamente, para que los estudiantes puedan determinar todos los ángulos con vértice en C.

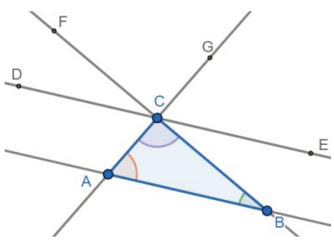


Figura 2. Protocolo de Construcción (Parte III, actividad 8)

b) Elijan tres ángulos consecutivos con vértice en C, ¿pudieron hacerles corresponder a cada uno de ellos una igualdad con los ángulos interiores del triángulo ABC? Registren dichas igualdades, justificando con la clasificación de ángulos.

c) ¿Cómo son estos tres ángulos consecutivos con vértice en C? ¿Qué ángulo determinan? ¿Cuánto mide?

d) A partir del punto anterior y teniendo en cuenta las igualdades planteadas en b), ¿qué pueden concluir respecto a los ángulos interiores de un triángulo?

e) Esta relación, ¿se cumplirá para todo triángulo?

f) Redacten la propiedad que cumplen los ángulos de todos los triángulos.

Se deja abierta la posibilidad futura de continuar la secuencia con el trabajo de construcciones de triángulos a partir de lados y ángulos, analizando su existencia y unicidad. Esto permite indagar y conjeturar qué condiciones son necesarias y suficientes saber para poder construir un único triángulo, lo que da pie al estudio de los criterios de congruencia de triángulos así como también a los de semejanza.

5.2. Análisis de la secuencia

A continuación se realiza un análisis didáctico de la secuencia, teniendo en cuenta la pertinencia y la potencialidad de la misma en función del curso al que está destinado (segundo año del CBC). Dicho análisis está seccionado en cinco subapartados (5.2.1 a 5.2.5), de acuerdo a las categorías centrales de interés presentadas marco teórico-metodológico.

5.2.1. Niveles de razonamiento

Un desarrollo de las formas de argumentar o demostrar de los estudiantes, a través de los años, supone un avance de los razonamientos empíricos de nivel 1 de Van Hiele hasta ser capaces de adquirir un razonamiento lógico deductivo formal (nivel 5).

En el curso escolar en el que se ubica esta propuesta, es esperable que a partir de esta secuencia los estudiantes logren desprenderse de razonamientos puramente visuales y físicos (nivel 1) y alcancen razonamientos inductivos (observando las regularidades que mantiene un conjunto de figuras), siendo capaces de realizar demostraciones de tipo empírico, comprobando sus conjeturas en una cantidad de casos particulares (nivel 2). La peculiaridad de esta secuencia es que al utilizar el software GeoGebra, con solo arrastrar un objeto o mover un deslizador, se puede observar una sucesión casi continua de figuras que verifican la conjetura (lo que refuerza la veracidad de la misma), o bien, hallar algún contraejemplo que la refute. Sin embargo, es necesario que los estudiantes comprendan la limitación de las demostraciones empíricas. Es por esto que, al finalizar la secuencia, se busca introducirlos al razonamiento lógico deductivo informal (nivel 3), apoyándose en un ejemplo concreto como guía y en preguntas que orientan a encadenar una serie de conocimientos previos de forma deductiva para lograr validar su conjetura.

5.2.2. Elementos de las tareas

Teniendo en cuenta los datos que describen las tareas matemáticas mencionados en Moreno y Ramírez (2016), se puede caracterizar a la secuencia propuesta a través de la información que se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. Elementos de las tareas matemáticas en la secuencia

Datos de las tareas	Descripción
Meta o finalidad	Si bien la meta de la secuencia está dada en los objetivos planteados para cada parte de la misma, se pueden mencionar, de forma general, la principal meta o finalidad de cada parte: **Parte I**: explorar construcciones dinámicas con el software GeoGebra, distinguiendo aquellas blandas de las robustas, y valorar las ventajas que estas últimas brindan al mantener las propiedades geométricas con el arrastre. **Parte II**: arribar a la propiedad de la desigualdad triangular aprovechando el dinamismo del software como herramienta para conjeturar y validar o refutar sus ideas por medio del arrastre. **Parte III**: abordar a la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo por medio de la exploración con los deslizadores del software, e introducirlos en la realización de demostraciones sencillas.
Formulación	Las consignas son dadas de forma escrita y han sido presentadas en el apartado 5.1. Se dividen en tres partes (I a III): la primera está conformada por cuatro actividades, la segunda por cinco, mientras que la última por ocho. La mayoría de las actividades, a su vez, están subdivididas en ítems. Se procura una enunciación concisa que invite al accionar reflexivo por parte de los estudiantes.
Materiales y recursos	Computadoras con acceso a internet, o bien con el programa GeoGebra Geometría descargado. Además, lápiz, goma y papel para el registro de las respuestas.
Tipo de agrupamiento	Trabajo en grupos de cuatro estudiantes, agrupados libremente, los cuales deben conservarse en cada una de las tres partes de la secuencia. El trabajo en pequeños grupos alienta la colaboración y comparación de hallazgos entre pares.
Contexto	En la sala de informática o en el aula con laboratorio móvil. De ser necesario, como última opción, pueden usar celulares[6].
Temporalización	Cuatro clases de 80 minutos, distribuidas en dos semanas (una clase para cada parte de la secuencia y una adicional para integrar las conclusiones). De no terminar una parte en clase, se continúa en la próxima, ya que es fundamental poder observar la interacción entre los estudiantes y con el docente al momento de resolver las actividades.

5.2.3. Tipos de tareas y de demostraciones

De acuerdo a lo expresado en el apartado 4.3, se pueden distinguir los tipos de tareas que se proponen siguiendo la clasificación esbozada por García y López (2008). Cada actividad planteada no se corresponde necesariamente con un único tipo de tarea pero, por lo general,

[6] Aunque no es recomendable, ya que resulta un trabajo más engorroso debido la dificultad de observación de las construcciones por el tamaño de la pantalla. Además, en algunos casos, se obstaculiza la visibilidad de longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos por superposición de elementos.

hay uno que se destaca más. En la secuencia se proponen actividades en las que intervienen mayoritariamente tareas de investigación y de demostración. Las tareas de conceptualización aparecen como cierre para plasmar las relaciones geométricas halladas utilizando las tareas anteriores. A su vez, las tareas de demostración se clasifican según las funciones que cumplen, siguiendo las categorías propuestas por De Villiers (1996).

En relación con esta última categorización, no se considera aquí la función de demostración como sistematización, ya que en el nivel educativo de interés no se trabaja con demostraciones dentro de un sistema deductivo de axiomas, definiciones y teoremas. Respecto a la función de la demostración como comunicación, De Villiers (1996) sostiene que está presente todo el tiempo, ya que el profesor necesita renegociar continuamente con sus alumnos los criterios acerca de qué constituye una explicación, una demostración, etc. Esta función puede analizarse una vez implementada la secuencia, al momento de la interacción con los grupos de estudiantes y en la posterior puesta en común y debate; por lo que se omite en este análisis a priori.

En la Tabla 2 se retoman extractos de los enunciados de las consignas en los que se ve reflejado el tipo de tarea que se involucra en cada caso[7], para llevar a cabo su clasificación.

Tabla 2. Tipos de tareas en la Parte I de la secuencia

	Extracto de consigna	Tipo de tarea		
		Investigación	**Demostración**	**Conceptualización**
1	Si **mueven** alguno de sus vértices, ¿sigue siendo un triángulo isósceles? Si la respuesta es "no", **busquen otra forma** de construirlo.	**X**		
2	Si **arrastran** los vértices, ¿sigue siendo rectángulo? Si se deforma, **busquen otra forma** de construirlo para que mantenga la condición original.	**X**		
3	a) ¿Cuántas unidades mide el lado $\overline{HI}$?	**X**		
	b) Si se desea que el lado $\overline{GI}$ mida 3 unidades, ¿**qué pasos pueden agregar** en la construcción para que esto sea así?	**X**	**X**	
	c) Si se **desliza** algún vértice, ¿los lados mantienen las longitudes pedidas? Si no es así, **reformulen** los pasos de construcción para lograrlo.	**X**	**X**	
4	a) ¿**Por qué** creen que funciona o no ese procedimiento…?		**X**	
	b) ¿A qué distancia se encuentra el punto I de los puntos G y H? El triángulo determinado, ¿**cumple con la condición pedida**?	**X**	**X**	

[7] Para evitar la pérdida de sentido de los enunciados, en algunos casos se transcribe el párrafo o una oración completa de la consigna, por lo que se destacan en negrita las palabras que refieren al tipo de tarea involucrada. Esto se utiliza también en las Tablas 4 y 6.

c) ¿Qué creen que sucederá si consideran al otro punto de intersección como *I*? ¿**Por qué**?		**X**	
d) ¿**Cumple con la condición** pedida?, ¿**en qué se diferencia** con el triángulo *GHI*?	**X**	**X**	

En la Tabla 3 se detallan las funciones presentes en las tareas de demostración de la primera parte de la secuencia.

Tabla 3. Tipos de demostración en la Parte I de la secuencia

Actividad		**Tipo de demostración**		
		Explicación	**Descubrimiento**	**Verificación**
3	b)	X		
	c)			X
4	a)	X		
	b)			X
	c)	X		
	d)			X

En la primera parte de la secuencia predominan las tareas de investigación, acompañadas de tareas de demostración como explicación y verificación. Esto se debe a que tiene por finalidad que los estudiantes exploren e indaguen diversas construcciones así como la robustez de las mismas. Esta parte no involucra la conceptualización de nuevas definiciones, relaciones ni propiedades. Este trabajo exploratorio es necesario, puesto que es el puntapié inicial para llevar a cabo las actividades de la Parte II.

En la Tabla 4 se distinguen los tipos de tareas involucrados en la segunda parte de la secuencia, seguida de la Tabla 5, en la que se clasifican los tipos de demostraciones que intervienen.

Tabla 4. Tipos de tareas en la Parte II de la secuencia

Extracto de consigna		**Tipo de tarea**		
		Investigación	**Demostración**	**Conceptualización**
1	a) **Construyan** un triángulo ABC en el cual el lado $\overline{AB}$ mida 4 unidades y el lado $\overline{BC}$ mida 6 unidades.	**X**		
	b) **Modifiquen** el triángulo para obtener uno distinto, manteniendo las condiciones iniciales.	**X**		
	c) ¿**Cuántos triángulos** diferentes se pueden construir con esas condiciones? ¿**Por qué**?	**X**	**X**	
	d) Al mover uno de los vértices del triángulo, ¿**Qué cambia y qué se mantiene**?	**X**		
	e) ¿**Qué dato agregarían** para asegurar que solo se puede construir un único triángulo con esas condiciones?		**X**	

	f) ¿**Cuánto debería medir** el lado $\overline{AC}$ para maximizar el perímetro del triángulo? ¿Y para que el perímetro sea mínimo?		**X**	
2	a) ¿Es la **única** construcción posible? Si la respuesta es “no”, construyan un triángulo distinto que respete esas condiciones. Si la respuesta es “sí”, **expliquen por qué**.	**X**	**X**	
	b) y c) ¿**Cuántos** triángulos pudieron construir? ¿**Por qué**?	**X**	**X**	
3	Sin hacer la construcción, **decidan y justifiquen** si es posible construir.		**X**	
4	**Verifiquen** las respuestas.		**X**	
5	**Redacten las condiciones** que deben cumplir las longitudes de tres segmentos para que sea posible construir un triángulo con ellos.			**X**

Tabla 5. Tipos de demostración en la Parte II de la secuencia

Actividad		**Tipo de demostración**		
		Explicación	**Descubrimiento**	**Verificación**
1	c)	X		
	e)	X		
	f)		X	
2	a), b) y c)	X	X	
3		X		
4				X

Las Tablas 4 y 5 permiten observar que la Parte II comienza con tareas de investigación, donde los estudiantes exploran la posibilidad de construcciones de triángulos teniendo como datos medidas de lados, por medio de GeoGebra. A partir de estas, avanzan a tareas de demostración en las cuales explican los resultados de sus exploraciones, descubren resultados inesperados, verifican sus construcciones y conjeturas, o bien las refutan y reformulan. Este proceso los guía a concluir en la conceptualización de la desigualdad triangular.

Por su parte, en la Tabla 6 se presenta la clasificación de la última parte de la secuencia, según los tipos de tareas propuestas, y en la Tabla 7 se identifican los tipos de demostraciones que intervienen.

Tabla 6. Tipos de tareas en la Parte III de la secuencia

Extracto de consigna		**Tipo de tarea**		
		Investigación	**Demostración**	**Conceptualización**
1	**Construyan** un triángulo *ABC*. a) Redacten cómo realizaron la construcción.	**X**		
	b) ¿Es el **único** triángulo que se puede construir con esas condiciones?	**X**		

	c) ¿Qué sucede si **arrastran** los vértices del triángulo?	**X**		
	d) ¿**Es posible** que siempre se pueda construir triángulos a partir de dos ángulos?	**X**		
2	A partir de la construcción dada, **exploren** si es posible construir, en cada caso, triángulos con…	**X**		
3	¿Fue posible construir todos los triángulos solicitados en el punto anterior? ¿**Por qué** creen que desaparece el punto *C* en algunas ocasiones…?		**X**	
	a) **Justifiquen** su respuesta		**X**	
4	b) ¿**Qué sucede** en el caso de los ángulos rectos para formar triángulos?	**X**		
5	a) ¿**Qué sucede** con dicho ángulo si se arrastran los vértices del triángulo?	**X**		
6	**Prevean** si es posible realizar las construcciones que se piden… Luego, **exploren** y **comprueben** o **refuten** sus conjeturas…	**X**	**X**	
	a) ¿Qué similitud **encuentran**? ¿Qué relación pueden **establecer**?	**X**		
7	b) Esa relación, ¿**se cumple para cualquier triángulo**? Si la respuesta es "no", grafiquen un triángulo en el que no se **verifique** y busquen otra relación ... Si la respuesta es "sí", ¿**cómo pueden comprobarlo**?		**X**	
	a) **Observen** y **establezcan** igualdades	**X**		
	b) Registren dichas igualdades, **justificando** con la clasificación de ángulos.		**X**	
8	c) ¿Cómo son estos tres ángulos…? ¿Qué ángulo determinan? ¿Cuánto mide?		**X**	
	d) ¿Qué pueden **concluir** respecto a los ángulos interiores de un triángulo?		**X**	
	e) Esta relación, ¿**se cumplirá para todo triángulo**?		**X**	
	f) **Redacten** la propiedad…			**X**

Tabla 7. Tipos de demostración en la Parte III de la secuencia

Actividad		**Tipo de demostración**		
		Explicación	**Descubrimiento**	**Verificación**
3		X		
4	a)	X	X	X
6			X	X
7	b)	X	X	X
8	b), c), d) y e)			X

Las Tablas 6 y 7 permiten observar que en la Parte III se utiliza una estructura similar a la usada en parte anterior, comenzando con tareas de investigación y de demostración, aunque esta vez con la finalidad de concluir en la conceptualización de la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Cabe destacar, en esta última parte, la importancia de las tareas de demostración, puesto que se busca un avance en las formas de validación de los estudiantes, guiándolos a pasar de explicaciones y demostraciones inductivas por medio de la verificación de muchos casos particulares, a una demostración deductiva informal, en transición del nivel 2 al 3 de razonamiento de Van Hiele.

Para concluir este subapartado, se resume en la Tabla 8 la clasificación de la secuencia según los tipos de tareas y de demostraciones.

Tabla 8. Tipos de tareas y de demostraciones en la secuencia

Actividad		Tipo de tarea	Tipo de demostración
Parte I	**1**	Investigación	
	2	Investigación	
	3	Investigación y demostración	Explicación y verificación
	4	Investigación y demostración	Explicación y verificación
Parte II	**1**	Investigación y demostración	Explicación y descubrimiento
	2	Investigación y demostración	Explicación y descubrimiento
	3	Demostración	Explicación
	4	Demostración	Verificación
	5	Conceptualización	
Parte III	**1**	Investigación	
	2	Investigación	
	3	Demostración	Explicación
	4	Demostración	Explicación, descubrimiento y verificación
	5	Investigación	
	6	Investigación y demostración	Descubrimiento y verificación
	7	Demostración	Descubrimiento, explicación y verificación
	8	Investigación, demostración y conceptualización	Verificación

En general, en la secuencia predominan las tareas de investigación y demostración. Si bien la primera parte es exploratoria, las dos siguientes tienen la finalidad de conceptualizar una propiedad geométrica en particular. Para ello se requiere de un trabajo progresivo con los estudiantes, que los guíen a desarrollar las propiedades por medio de la búsqueda de regularidades que les permitan hacer conjeturas y validarlas. La utilización de GeoGebra es de suma conveniencia en este tipo de tareas, ya que su dinamismo favorece la visualización de (in)variantes en las construcciones geométricas.

5.2.4. Niveles de análisis didáctico

Como se mencionó en el apartado 4.3, la secuencia propuesta se estudia en función de tres de los cinco niveles de análisis didáctico. Se comienza con la descripción de las situaciones-problema presentadas y las prácticas matemáticas necesarias para su resolución (nivel 1) y se continúa con las configuraciones de objetos y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas (nivel 2). A partir de allí, se dirige hacia el estudio de las normas y metanormas que regulan las prácticas matemáticas (nivel 4).

- **Nivel de análisis didáctico 1: tipos de problemas y sistemas de prácticas**

Este nivel de análisis se aplica, sobre todo, a la planificación y a la implementación de un proceso de estudio y pretende estudiar las prácticas matemáticas planificadas y realizadas en dicho proceso. Permite descomponerlo en una secuencia de episodios y, para cada uno, describir las prácticas realizadas siguiendo su curso temporal. También posibilita caracterizar una configuración epistémica global (previa y emergente) que determina las prácticas planificadas y realizadas (Godino et al., 2008).

En este trabajo se estudian solo las prácticas planificadas y la configuración epistémica previa. En cuanto a las prácticas realizadas y la configuración epistémica emergente, pueden ser descriptas luego de implementada la secuencia.

Para analizar la propuesta en base al primer nivel, se usan como guía los interrogantes planteados en Godino et al. (2008): ¿Qué problemas y prácticas se contemplan en el proceso de instrucción analizado? ¿Cómo se secuencian?

Las actividades propuestas son abiertas, por lo que permiten diversas formas de resolución y, dependiendo el nivel de razonamiento que posean los estudiantes, son más o menos desafiantes para ellos.

En la Parte I se propone la realización de cuatro actividades, a fin de que los estudiantes exploren distintas construcciones, analicen la robustez de las mismas a través de los procedimientos utilizados, las verifiquen mediante el arrastre y aprecien la importancia de lograr construcciones sólidas a partir de la aplicación de propiedades geométricas.

Además, se pretende que los estudiantes adquieran el hábito de explicar y fundamentar los procedimientos que utilizan, por lo que se pide que plasmen de forma escrita lo realizado. Esto también permite un análisis a futuro de las producciones, para revisar los razonamientos, conjeturas, explicaciones, pruebas y contrastaciones utilizadas para validar sus construcciones, y comparar las estrategias puestas en juego por los distintos grupos.

En cuanto a la Parte II, está orientada a que los estudiantes indaguen y conjeturen sobre la cantidad de soluciones y las condiciones de posibilidad de la construcción de triángulos a partir de dos y tres segmentos de longitudes dadas, así como el reconocimiento de construcciones imposibles, para luego arribar a la propiedad de la desigualdad triangular. Nuevamente se les solicita registrar los procesos, razonamientos y argumentos involucrados en las construcciones realizadas, para continuar desarrollando el hábito de plasmar de forma escrita sus explicaciones, esperando que se centren cada vez más en lo matemático que en lo meramente observable.

Respecto a la Parte III de la secuencia, se propone indagar acerca de la existencia y la unicidad de las construcciones de triángulos a partir de las amplitudes de sus ángulos, para luego derivar en la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. En esta sección, se agrega el uso de deslizadores de GeoGebra como una herramienta que posibilita explorar los cambios y las permanencias en las construcciones, permitiendo realizar conjeturas que luego deben ser validadas. Respecto a los procedimientos de validación, se busca introducirlos a las demostraciones informales, por medio de una actividad final. Cabe recordar que los estudiantes asisten a segundo año del CBC, por lo que han tenido prácticamente nulo contacto con este tipo de validación, y hasta el momento han utilizado la función de arrastre de GeoGebra como instrumento para contrastar sus conjeturas.

Como en las secciones anteriores, se busca reforzar también el trabajo con el desarrollo escrito de los razonamientos y procedimientos que explican o fundamentan sus producciones.

➢ **Nivel de análisis didáctico 2: configuraciones de objetos y procesos matemáticos**

Este nivel se centra en los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y también los que emergen de ellas.

En cuanto a los objetos matemáticos primarios, Godino et al. (2007) proponen la siguiente tipología:

- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual...)
- Situaciones-problema (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios...)
- Conceptos-definición (introducidos mediante definiciones o descripciones)
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos...)
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo...)
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo...)

Para la realización de este análisis se tienen en cuenta los objetos involucrados en el planteamiento de la secuencia. No se mencionan los objetos emergentes puesto que estos pueden distinguirse luego de la implementación de la secuencia, a partir del análisis de las observaciones del docente durante su interacción con los estudiantes.

En la Tabla 9 se describen los objetos matemáticos primarios que intervienen en las prácticas de la primera parte de la secuencia propuesta.

Tabla 9. Objetos matemáticos primarios en la secuencia: Parte I

Objetos	Descripción
Lenguajes	Geométrico (triángulo isósceles y rectángulo, circunferencia, radio, intersección de circunferencias, distancia). Gráfico (construcciones de segmentos, rectas, y figuras). Métrico (unidades de medida de longitud). Aritmético (números naturales, racionales). Propios del software GeoGebra (construcción, arrastre, herramientas -Segmento de longitud dada, Ángulo dada su amplitud, Circunferencia: centro y radio-).
Problemas	1, 2 y 3) Problemas intra-matemáticos de construcciones robustas de triángulos. 4) Problema contextualizado en el que se debe analizar la propuesta de personajes ficticios sobre una construcción, realizarla y analizarla.
Conceptos	Triángulo (elementos y clasificación). Circunferencia. Polígono. Longitud. Uso elemental de GeoGebra (función arrastre, construcciones blandas y robustas).
Proposiciones	Los triángulos isósceles tienen dos lados de igual longitud. Los triángulos rectángulos tienen un ángulo recto. Los puntos de una circunferencia equidistan de su centro. Dos triángulos son iguales si sus tres lados y sus tres ángulos correspondientes son iguales. Con tres segmentos, de ser construible, se determina un único triángulo. Una construcción es blanda (se deforma) si al arrastrar alguno de sus elementos, la figura pierde al menos una de las condiciones iniciales. Una construcción es robusta (resiste el arrastre) si se construye de manera tal que al mover alguno de sus elementos, la figura mantiene las condiciones iniciales.
Procedimientos	Construir triángulos que cumplan las condiciones solicitadas y verificar su robustez por medio del arrastre. Arrastrar vértices de un triángulo para indagar los cambios y permanencias. Relacionar los elementos de la circunferencia que intervienen en la construcción del triángulo. Registrar de forma escrita los procesos y razonamientos utilizados.
Argumentos	Explicación de las construcciones realizadas, basándose en propiedades y conceptos geométricos. Justificación de la respuesta por medio de una explicación asociada al concepto de circunferencia y argumentación de la respuesta basándose en el uso de la función arrastre como verificación. Justificación de la respuesta en relación con el concepto figural que posean de triángulo. Fundamentación de la respuesta en función de la idea de igualdad de triángulos.

En esta primera parte (Tabla 9), se involucran lenguajes, conceptos, relaciones y propiedades ya conocidos por los estudiantes. Puesto que el trabajo en esta parte es por medio de problemas exploratorios, la importancia recae en los procedimientos que utilizan para realizar las construcciones propuestas y las argumentaciones que esbozan para justificar sus respuestas.

Por otro lado, en la Tabla 10 se mencionan los objetos matemáticos primarios que intervienen en la práctica planteada de la Parte II.

Tabla 10. Objetos matemáticos primarios en la secuencia: Parte II

Objetos	Descripción
Lenguajes	Geométrico (triángulos, lados, perímetro). Gráfico (construcciones de segmentos, triángulos y circunferencias). Métrico (unidades de medida de longitud, perímetro máximo y mínimo). Aritmético (números naturales, racionales). Términos propios del software GeoGebra (construcción, arrastre, herramientas -Segmento de longitud dada, Distancia o longitud, Polígono, Circunferencia: centro y radio-).
Problemas	1 a 5) Problemas intra-matemáticos de construcción de triángulos a partir de longitudes de segmentos dadas, análisis de condiciones de existencia y unicidad de los mismos y búsqueda de regularidades para formular conjeturas que luego deben validar.
Conceptos	Triángulo. Circunferencia. Polígonos. Longitud. Perímetro de figuras. Uso elemental de GeoGebra (función arrastre, construcciones blandas y robustas).
Proposiciones	A partir de dos segmentos, se pueden construir infinitos triángulos. A partir de tres segmentos, de ser construible, se determina un único triángulo. La suma de dos lados de un triángulo es mayor al lado restante.
Procedimientos	Realizar construcciones robustas de triángulos a partir de condiciones iniciales, modificarlos mediante arrastre de sus vértices para construir otros. Observar cambios y permanencias. Explorar cantidad de soluciones, imposibilidad de construcción a partir de dos y tres lados. Calcular perímetros, buscar el máximo y el mínimo. Buscar regularidades entre las construcciones realizadas. Redactar conjeturas y verificarlas a través de pruebas sencillas o refutarlas mediante contraejemplos. En ambos casos, brindar explicaciones. Generalizar regularidades halladas en casos particulares. Redactar la propiedad de la desigualdad triangular. Registrar de forma escrita los procesos y razonamientos utilizados.
Argumentos	Explicación de la posibilidad o imposibilidad de construcción en base a la exploración dinámica y verificación por medio del arrastre. Justificación de las respuestas basándose en representaciones mentales de la figura, utilizando un vocabulario intuitivo. Argumentación de las respuestas por medio de la verificación. Explicación de las condiciones pedidas en base a lo trabajado previamente.

En esta segunda parte (Tabla 10), se continúa trabajando con lenguajes y conceptos ya conocidos por los estudiantes. Asimismo, se centra en la construcción de la propiedad geométrica de la desigualdad triangular. Se hace hincapié tanto en los procedimientos que los estudiantes realizan, como en las proposiciones que surgen de su análisis e interacción, y los argumentos que esbozan para validar sus conjeturas. Al momento de la planificación de la secuencia, se ha previsto que los argumentos aceptables sean acordes a los niveles de razonamiento de los estudiantes del curso al que está destinado.

Respecto a los objetos matemáticos primarios previos que intervienen en la última parte de la secuencia (III), se los detalla en la Tabla 11.

Tabla 11. Objetos matemáticos primarios en la secuencia: Parte III

Objetos	Descripción
Lenguajes	Geométrico (triángulos, ángulos, rectas paralelas y transversales). Gráfico (construcciones de ángulos, rectas, triángulos). Métrico (unidades de medición angular). Aritmético (números naturales, racionales, suma de amplitudes de ángulos). Términos propios del software GeoGebra (arrastre, deslizadores, construcciones, vista gráfica, herramientas -Ángulo dada su amplitud, Polígono-).
Problemas	1, 2, 3, 5, 6 y 7) Problemas intra-matemáticos de construcción de triángulos a partir de amplitudes de ángulos, así como el análisis de variabilidad de una construcción dada, y de sus condiciones de posibilidad. 4 y 8) Problemas contextualizados, conectados entre sí y con el problema contextualizado de la Parte I.
Conceptos	Ángulos (y su clasificación según amplitud, posición, entre paralelas cortadas por una transversal). Triángulo. Polígonos. Uso elemental de GeoGebra (arrastre, deslizador, construcciones blandas y robustas).
Proposiciones	No siempre es posible construir un triángulo a partir de dos ángulos. Si es posible construir un triángulo a partir de dos ángulos, entonces se pueden construir infinitos triángulos con dichos ángulos. A partir de tres ángulos, si es una construcción posible, se pueden construir infinitos triángulos con esos ángulos. Los ángulos correspondientes entre dos paralelas cortadas por una transversal son iguales. Los ángulos alternos entre dos paralelas cortadas por una transversal son iguales. Los ángulos conjugados entre dos paralelas cortadas por una transversal son suplementarios. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre 180°.
Procedimientos	Realizar construcciones de triángulos a partir de ángulos dados como datos y modificarlos mediante arrastre de sus vértices para construir otros distintos. Observar cambios y permanencias utilizando el arrastre y deslizadores. Explorar cantidad de soluciones, imposibilidad de construcción a partir de dos y tres ángulos. Buscar regularidades entre las construcciones obtenidas. Enunciar conjeturas y verificarlas o refutarlas a través de construcciones. Redactar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de todo triángulo. Efectuar una demostración deductiva informal utilizando preguntas-guía. Registrar de forma escrita los procesos y razonamientos seguidos.
Argumentos	Explicación de las respuestas por medio de propiedades y conceptos geométricos. Justificación de las respuestas basándose en la verificación a través del uso de deslizadores y del arrastre. Argumentación de las respuestas en base a las construcciones mentales de triángulos. Construcción de contraejemplos como justificación para refutar conjeturas. Argumentación de una respuesta por medio de demostración informal.

Esta última parte (Tabla 11), abarca diversos lenguajes, en su mayoría geométricos y gráficos, que van de la mano de conceptos y propiedades estudiadas previamente por los estudiantes. Estos objetos son los que les servirán para analizar las construcciones y validar sus conjeturas por medio de argumentos basados en razonamientos matemáticos, más allá de lo observable a simple vista. Si bien la exploración es necesaria para la búsqueda de regularidades y la elaboración de ideas, también es importante fomentar la abstracción por medio de problemas intra-matemáticos, los cuales favorecen el desarrollo de la concepción de los triángulos como conceptos figurales, y no como meros dibujos. Esto permite a los estudiantes avanzar en los niveles de razonamiento que poseen, y de esta forma pueden derivar en el desarrollo y la demostración deductiva (informal) de la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Por otro lado, es importante mencionar que la emergencia de los objetos de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación (Godino et al., 2007). Siguiendo esta categorización, a continuación se analizan los procesos matemáticos involucrados en las prácticas matemáticas propuestas, separando la información en tres tablas, una para cada parte de la secuencia[8].

Tabla 12. Procesos matemáticos identificados en la secuencia: Parte I

Actividad		Procesos matemáticos				
		Elaboración de procedimientos	**Problematización**	**Enunciación**	**Argumentación**	**Comunicación**
Parte I	**1**	X	X			X
	2	X	X			X
	3	X	X		X	X
	4		X	X	X	X

En la Parte I (Tabla 12), todas las actividades implican procesos de problematización, ya que se presentan problemas abiertos a los estudiantes que los desafían a encontrar una estrategia de resolución. También intervienen procesos de comunicación en todas las actividades, al solicitarles que redacten los procedimientos que realizan (comunicación escrita) y, en el momento de la puesta en común, los grupos deben expresar los resultados y conclusiones obtenidas (comunicación oral).

Además, las primeras tres actividades implican procesos de elaboración de procedimientos, puesto que deben explorar y encontrar los pasos que los lleven a realizar las construcciones robustas solicitadas. Por su parte, la actividad 4 involucra el proceso de enunciación, ya que en el ítem c) se pretende que realicen una conjetura respecto al triángulo que se determina. Asimismo, las últimas dos actividades involucran procesos de argumentación, al solicitarles justificar las respuestas que realizan.

[8] Se omite en las Tablas 12 a 14 el proceso de definición, ya que dicho proceso no forma parte de esta secuencia.

Tabla 13. Procesos matemáticos identificados en la secuencia: Parte II

Actividad		Procesos matemáticos				
		Elaboración de procedimientos	Problematización	Enunciación	Argumentación	Comunicación
Parte II	1	X	X		X	X
	2	X	X		X	X
	3		X		X	X
	4	X			X	X
	5			X		X

Respecto a la Parte II (Tabla 13), al igual que en la primera parte, los procesos de comunicación se encuentran presentes en todas las actividades. La elaboración de procedimientos está involucrada en las actividades 1, 2 y 4 puesto que se espera que produzcan un conjunto de pasos que los guíen a obtener las construcciones propuestas. Los procesos de problematización aparecen en las primeras tres actividades, al abarcar problemas abiertos en los que deben examinar las posibles resoluciones y no se indican procedimientos específicos para implementar.

Por su parte, la actividad 5 es la única de esta parte en la que no se encuentra presente el proceso de argumentación. Esto se debe a que el objetivo de dicha actividad es enunciar la propiedad cuya justificación es dada en las actividades previas.

Tabla 14. Procesos matemáticos identificados en la secuencia: Parte III

Actividad		Procesos matemáticos				
		Elaboración de procedimientos	Problematización	Enunciación	Argumentación	Comunicación
Parte III	1	X	X			X
	2		X			X
	3		X		X	X
	4		X	X	X	X
	5			X		X
	6		X	X	X	X
	7	X	X	X	X	X
	8	X	X	X	X	X

Por otro lado, en la Parte III de la secuencia, los procesos de elaboración de procedimientos disminuyen notoriamente, debido a que se brinda a los estudiantes construcciones ya armadas con las cuales interactuar. Los procesos de problematización están presentes en la mayoría de las actividades, puesto que se busca desafiar a los estudiantes para que cuestionen y utilicen sus conocimientos previos para la resolución de los problemas que se les presentan. Los procesos de argumentación adquieren cada vez más importancia, pasando por diversas formas de validación.

Los procesos de enunciación abarcan tanto actividades en las que se espera que los estudiantes expresen ideas surgidas de la visualización (4.b), como actividades donde se solicita la enunciación de predicciones (6) y aquellas en las que se pretende que expresen la relación que pueden establecer a partir de lo trabajado (7 y 8). Por último, al igual que en las partes anteriores, todas las actividades involucran procesos de comunicación tanto en la redacción de los procedimientos como en la puesta en común.

- **Nivel de análisis didáctico 4: identificación del sistema de normas y metanormas**

La dimensión normativa de los procesos de estudio abarca desde las regulaciones explícitas en el nivel más general de las directrices curriculares, hasta los hábitos, costumbres, tradiciones originadas posiblemente de manera implícita en el nivel más particular de la relación docente-alumnos. Hay diferentes criterios de clasificación de las normas: según el momento en que intervienen, según el aspecto del proceso de instrucción a que se refieren, según su origen, y según el tipo y grado de coerción (Godino et al., 2008).

Siguiendo el interrogante planteado por estos autores: "¿Cuáles son las principales normas que intervienen en las distintas facetas del proceso de estudio?" (p.17), se pueden mencionar:

- *Normas curriculares*

En cuanto a las directrices curriculares, cabe señalar que la propuesta se rige por los lineamientos de:

- El Diseño Curricular de Secundaria de la Provincia de Entre Ríos (Consejo General de Educación, 2010), en el que se plantea la caracterización y clasificación de triángulos, así como la exploración sobre las condiciones necesarias para la unicidad y existencia de triángulos y la validación de propiedades (para primer año de secundaria).
- El Plan de Estudios de Educación Secundaria de la Universidad Autónoma de Entre Ríos (UADER, 2012), universidad a la que pertenece la institución escolar a la cual está destinada la secuencia, propone para segundo año en el eje "Geometría y mediciones" el estudio de los elementos, las propiedades y la clasificación de triángulos.
- Los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios, estipulados por el Consejo Federal de Educación (2011), establecen como objetivos para segundo año del CBC, "la producción y validación de conjeturas sobre relaciones y propiedades geométricas, avanzando desde las argumentaciones empíricas hacia otras más generales" (p.17).

Por otra parte, en este trabajo se estudian las normas que regulan las prácticas operativas y discursivas de los procesos de estudio de los estudiantes. Entre ellas, se pueden mencionar:

- *Normas epistémicas*

Como se mencionó en el apartado 5.1, antes de la implementación de la secuencia se debe acordar con los estudiantes que:

- Solo pueden utilizar aquellas definiciones y propiedades que han estudiado previamente para demostrar una conjetura, aunque estas últimas no necesariamente hayan sido demostradas, sino que fueron aceptadas como verdaderas.

- Debe haber un equilibrio entre un vocabulario intuitivo y el uso de términos matemáticos al expresarse para comunicar sus razonamientos.
- La respuesta solo se acepta si, además de ser correcta, se anexa un argumento verbal que la acompañe (aunque tenga imprecisiones matemáticas).

• *Normas que regulan las interacciones*
  - El docente interviene durante la implementación de la secuencia para resolver dificultades de los alumnos (siendo guía).
  - Se realizan puestas en común y debates luego de la culminación de cada parte de la secuencia, cumpliendo el docente el rol de mediador.

• *Normas que regulan el uso de los materiales en el aula*
  - Guardar todas las construcciones en archivos con el número de la actividad y los apellidos de los integrantes del grupo.
  - Para cada actividad, abrir un nuevo archivo.
  - Registrar en la carpeta los razonamientos y procedimientos realizados.
  - No borrar lo redactado al darse cuenta de alguna equivocación; aclarar debajo de lo ya escrito cuál fue el razonamiento y/o procedimiento que les permitió notar el error.

5.2.5. Posibles resoluciones y conflictos al implementar la secuencia

Godino et al. (2008) plantean la necesidad de atender a las dificultades y conflictos potenciales que pueden tener los estudiantes al realizar las prácticas matemáticas. Es por ello que a continuación se hace una descripción de cada actividad de la secuencia propuesta, con las posibles resoluciones y dificultades que pueden presentarse. Se mencionan, además, potenciales intervenciones docentes y respuestas a las que se pretende arribar.

Parte I

En la actividad 1 se solicita construir un triángulo isósceles. Puede ocurrir que realicen “a ojo” la construcción, trazando dos segmentos similares, o bien que midan con una regla sobre la pantalla para trazar dos segmentos de igual longitud con un extremo en común, y luego trazar el tercer lado uniendo los extremos restantes. Aquí es importante remarcar que GeoGebra funciona con unidades internas propias del software, y no con centímetros u otras unidades de medición usadas habitualmente por los estudiantes[9]. Se espera que el arrastre les permita observar que este tipo de construcciones no son robustas y, por lo tanto, deben buscar otras herramientas que ofrece el software para realizar la construcción solicitada.

[9] Esto se debe a que GeoGebra posee la función Zoom, mediante la cual se puede aproximar o alejar la construcción, y de este modo no se conservan las unidades de longitud externas como el centímetro, el milímetro, etc.

Otra construcción blanda puede ser utilizando la herramienta *Segmento de longitud dada* [10], trazando dos segmentos de igual longitud $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, sin extremos en común, luego arrastrar los segmentos para hacer coincidir por ejemplo el punto A con D y, por último, trazar el segmento $\overline{BC}$. En este caso, al arrastrar los extremos, el triángulo se desarmaría (Fig. 3).

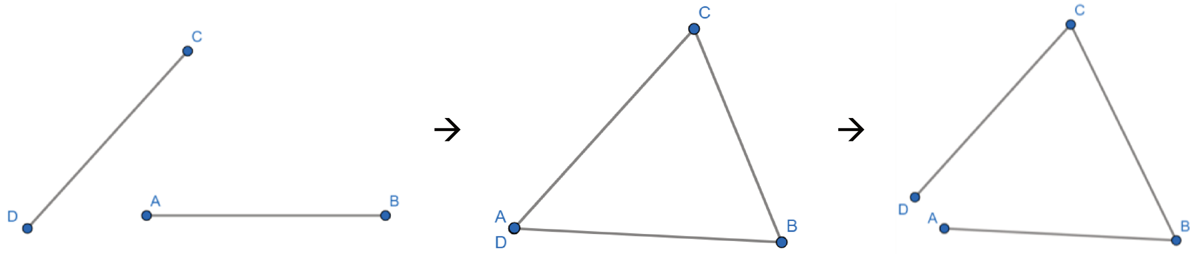
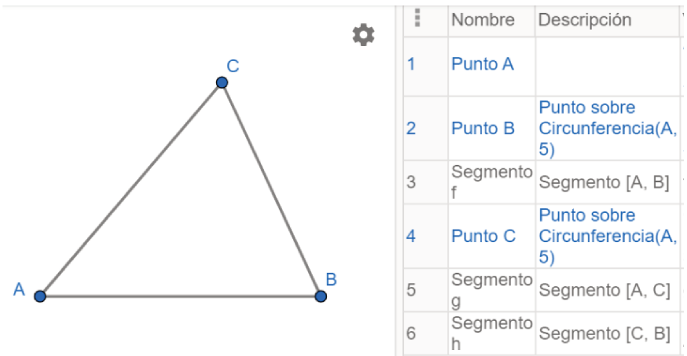


Figura 3. Secuencia de construcción blanda (Parte I, actividad 1)

Al surgir este tipo de construcciones, conviene orientar a los estudiantes haciéndoles ver que para lograr que las condiciones se mantengan, es necesario utilizar alguna herramienta de GeoGebra que las garantice, puesto que la percepción sola no alcanza.

En cuanto a construcciones que resistan el arrastre, pueden trabajar con la herramienta *Segmento de longitud dada*, trazando dos segmentos con un extremo en común y de igual longitud, y luego unir los otros dos extremos (Fig. 4). En este caso, al mover un vértice, la longitud de los lados iguales no cambia, pero sí lo hace la longitud del tercer lado.



	Nombre	Descripción
1	Punto A	
2	Punto B	Punto sobre Circunferencia(A, 5)
3	Segmento f	Segmento [A, B]
4	Punto C	Punto sobre Circunferencia(A, 5)
5	Segmento g	Segmento [A, C]
6	Segmento h	Segmento [C, B]

Figura 4. Protocolo de construcción robusta 1 (Parte I, actividad 1)

Otra forma de realizar la construcción es utilizar la herramienta *Rotación*, dando la amplitud del ángulo de rotación. De esta forma quedan determinados dos puntos que se encuentran a la misma distancia del punto utilizado como centro de la rotación. Al unirlos se determina un triángulo isósceles (Fig. 5), en cuyo caso al arrastrar un vértice se modifica simultáneamente la longitud de los lados iguales, pero el ángulo determinado por ellos mantiene su amplitud.

[10] Esta herramienta utiliza implícitamente -de sostén- una circunferencia, cuyo centro es el primer punto seleccionado, y su radio es la distancia asignada como longitud del segmento.

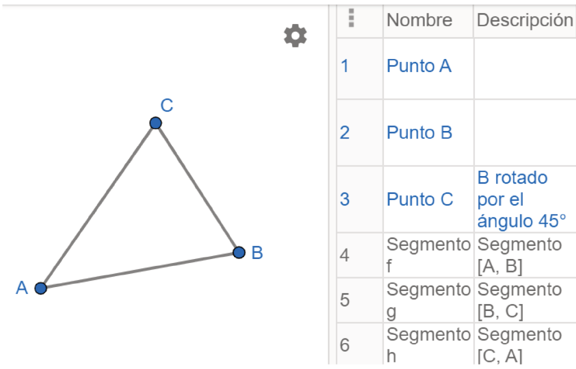


Figura 5. Protocolo de construcción robusta 2 (Parte I, actividad 1)

Una construcción robusta, que es poco probable surja en el grupo de estudiantes, por no ser tan intuitiva y requerir de construcciones auxiliares, consiste en el trazado de un segmento y de dos circunferencias de igual radio con centro en cada extremo del segmento (al igual que como se realizaría a mano con regla y compás), utilizando la herramienta *Circunferencia: centro y radio*. De este modo, uniendo los extremos con uno de los puntos de intersección de las circunferencias se obtiene un triángulo isósceles, que modifica su tamaño y la forma con el arrastre, pero manteniendo la igualdad de dos de sus lados (Fig. 6). Con este procedimiento cabe tener en cuenta que si el radio elegido para la construcción de las circunferencias es menor a la mitad del segmento inicial (ya sea la medida original o la que adquiere al desplazar uno de sus extremos), ocurre que las circunferencias no se intersecan y no se determina el triángulo.

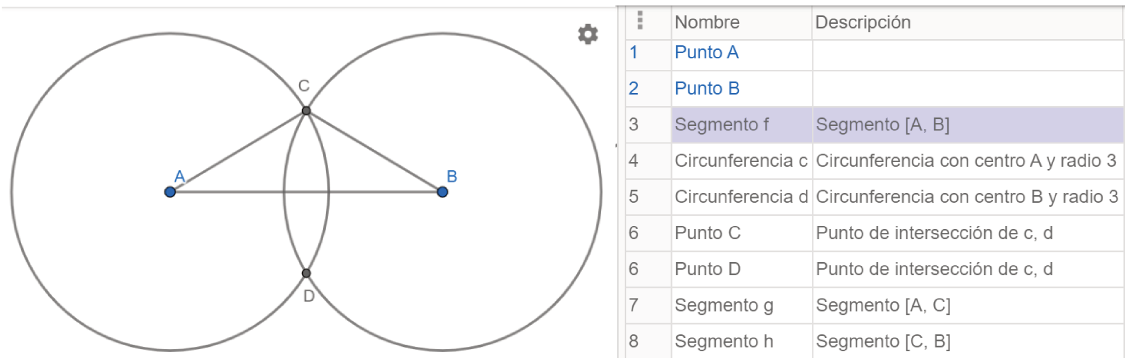
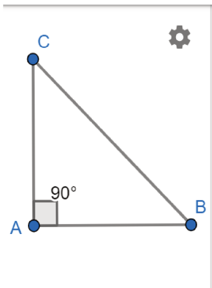


Figura 6. Protocolo de construcción robusta 3 (Parte I, actividad 1)

La actividad 2 es similar a la anterior, dado que se busca que los estudiantes realicen diversas construcciones y analicen su robustez, así como reforzar la importancia que tiene en ello la utilización de propiedades geométricas. La diferencia con la actividad 1 radica en que esta vez no se centra en la clasificación del triángulo según sus lados sino respecto a sus ángulos; en particular, se busca que exploren la construcción de un triángulo con un ángulo interior recto.

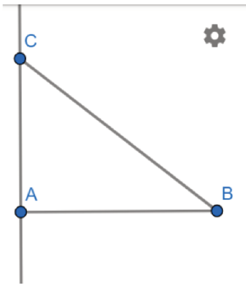
Una posible construcción blanda que puede surgir es utilizar el borde de la página como guía para construir un ángulo recto, apoyar una escuadra en la pantalla, o simplemente buscar trazar lo más preciso posible, un segmento horizontal y otro vertical, y luego trazar un tercer segmento para determinar un triángulo. Al mover un vértice, se observa que esas construcciones no resisten el arrastre, lo que conlleva a buscar otras herramientas para la construcción de un ángulo recto.

Algunos pueden recurrir a construcciones robustas utilizando la herramienta *Ángulo dada su amplitud* (Fig. 7), otros trazar una recta (también puede ser una semirrecta o segmento) y una recta perpendicular a esta, luego determinar un punto en cada una y finalmente dibujar el triángulo rectángulo trazando el segmento $\overline{BC}$ (Fig. 8).



	Nombre	Descripción
1	Punto A	
2	Punto B	
3	Segmento f	Segmento [A, B]
4	Punto C	B rotado por el ángulo 90°
5	Ángulo α	Ángulo entre B, A, C
6	Segmento g	Segmento [A, C]
7	Segmento h	Segmento [C, B]

Figura 7. Construcción robusta 1 (Parte I, actividad 2)



	Nombre	Descripción
1	Punto A	
2	Punto B	
3	Segmento f	Segmento [A, B]
4	Recta g	Recta que pasa por A perpendicular a f
5	Punto C	Punto sobre g
6	Segmento h	Segmento [C, B]

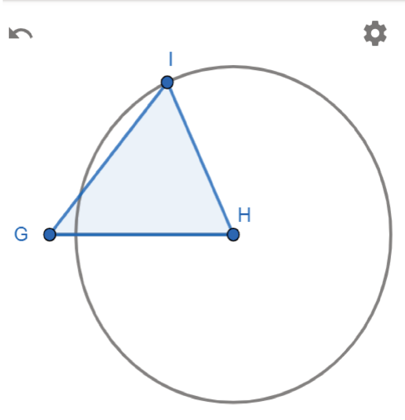
Figura 8. Construcción robusta 2 (Parte I, actividad 2)

Estas actividades los conducen a la necesidad de requerir de propiedades y conceptos teóricos de geometría para su correcta resolución. Se puede agregar como consejo-guía al momento de llevarlo a la práctica, que pueden utilizar construcciones auxiliares y luego ocultarlas para que se aprecie mejor el triángulo. Es interesante que al momento de realizar la puesta en común se retomen las distintas construcciones realizadas por los grupos de estudiantes para que visualicen que existe más de una construcción posible, y que se genere un debate en cuanto a los procedimientos utilizados y su relación con la robustez de la figura obtenida.

Resulta importante destacar algunas de las ventajas que aporta el software GeoGebra a la secuencia. Los ítems donde dice arrastrar, mover, deslizar, o ver qué se modifica y qué se mantiene, no se pueden realizar con regla y compás (o bien sería muy engorroso y conllevaría mucho tiempo). Además, aporta precisión en los gráficos y requiere el uso de propiedades geométricas para lograr construcciones robustas.

Respecto a la actividad 3, se busca guiar a los estudiantes en una construcción robusta (Fig. 9), aplicando propiedades y conceptos geométricos. Además, pueden vincularla y compararla con las construcciones previamente realizadas. Para aquellos que no hayan logrado concretar una construcción robusta en los puntos anteriores, se pretende que exploren las herramientas que ofrece el software e identifiquen cuáles les permiten realizar las construcciones solicitadas. Se puede orientar en la puesta en común hacia un debate en el que se analice la construcción y razonen por qué es robusta.

Los interrogantes del punto a) tienen el propósito de guiarlos para que razonen y concluyan que, al desplazar los vértices, el lado $\overline{HI}$ no cambia su longitud puesto que, por construcción, es un radio de la circunferencia construida a partir del vértice y la medida del radio, de modo que esta es fija y no varía (Fig. 10).



	Nombre	Descripción
1	Punto G	
2	Punto H	Punto sobre Circunferencia(G, 7)
3	Segmento f	Segmento [G, H]
4	Circunferencia c	Circunferencia con centro H y radio 6
5	Punto I	Punto sobre c
6	Triángulo t1	Polígono G, I, H
6	Segmento h	Segmento [G, I]
6	Segmento g	Segmento [I, H]
6	Segmento i	Segmento [H, G]

Figura 9. Protocolo de construcción robusta (Parte I, actividad 3)

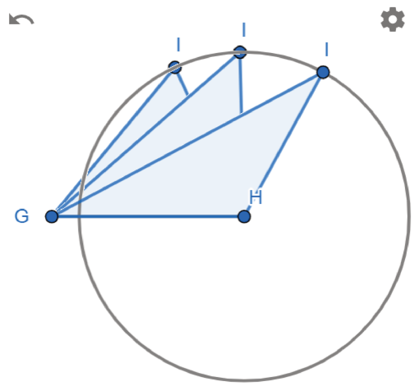
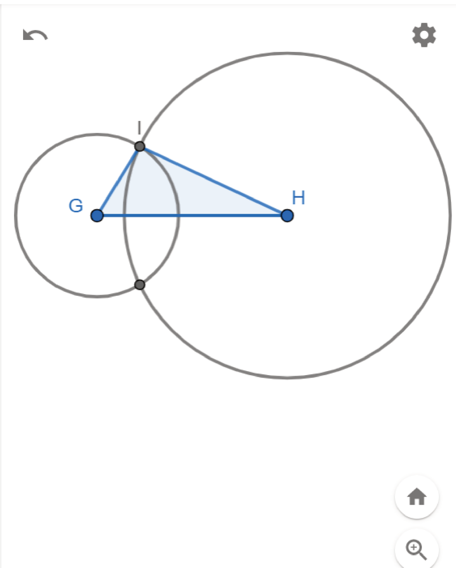


Figura 10. Familia de triángulos que se obtienen al desplazar el vértice I sobre la circunferencia c) (Parte I, actividad 3)

En el ítem b) se pretende que los estudiantes observen cómo se construyó el lado de longitud 6 unidades y con ello conjeturen que pueden construir de igual forma el tercer segmento con longitud 3 unidades. Posiblemente, no todos logren darse cuenta de ello en una primera instancia o, al menos, no lo consideren necesario y crean que con solo mover el vértice I hasta lograr que $\overline{GI}$ mida 3 unidades es suficiente. Es por ello que se plantea el ítem c), donde se pretende que validen su conjetura, o bien la refuten y reformulen para lograr la construcción pedida. Es allí donde pueden apreciar que ese simple procedimiento de "ir probando" hasta obtener la medida deseada no es suficiente, y requiere de la utilización de conceptos y propiedades para que la construcción sea robusta, esto es, que cumpla en términos geométricos con lo establecido. Aquí puede suceder que para probar la robustez arrastren solo el vértice G, observen que las longitudes se mantienen iguales, puesto que lo único que logran es que la figura se traslade sobre el plano, y afirmen erróneamente que la construcción es robusta. En este caso el docente debe intervenir preguntando qué sucedería si arrastran otro de los vértices y otorgar tiempo a que lo hagan.

Con el punto 4 se espera que los estudiantes contrasten su procedimiento anterior con la construcción dinámica que se propone. Además, en el ítem a), al solicitar que no realicen la construcción, se pretende que los estudiantes se representen mentalmente la figura construida, relacionándola con las propiedades y conceptos geométricos involucrados, y anticipen si funciona o no. De esta forma se fomenta la construcción mental de la figura geométrica del triángulo como un concepto figural, a partir de sus propiedades, y no como un mero dibujo.

Con el ítem b), se busca que comprueben o refuten su conjetura, y verifiquen que dicha construcción permite obtener el triángulo solicitado (Fig. 11). Si entre los grupos de estudiantes no ha surgido este tipo de construcción, esta actividad permite resaltar la utilización de la herramienta *Circunferencia: centro y radio*. Es importante que el docente haga hincapié en esta herramienta durante la puesta en común, ya que resulta de gran utilidad para la resolución de las actividades posteriores.



	Nombre	Descripción
1	Punto G	
2	Punto H	Punto sobre Circunferencia(G, 7)
3	Segmento f	Segmento [G, H]
4	Circunferencia c	Circunferencia con centro H y radio 6
5	Circunferencia d	Circunferencia con centro G y radio 3
6	Punto I	Punto de intersección de d, c
6	Punto B	Punto de intersección de d, c
7	Triángulo t1	Polígono G, I, H
7	Segmento h	Segmento [G, I]
7	Segmento g	Segmento [I, H]
7	Segmento i	Segmento [H, G]

Figura 11. Protocolo de construcción (Parte I, actividad 4)

En el ítem c) se pretende que indaguen qué sucede con el otro punto de intersección, y concluyan que ambos puntos cumplen las condiciones pedidas, por la construcción realizada (Fig. 12). Sin embargo, es probable que consideren que no es lo mismo si utilizan el otro punto y crean que se determina un triángulo distinto, aunque logren ver una cierta simetría en ellos.

La importancia del ítem c) reside en que se les solicita que realicen predicciones explícitas acerca del resultado que creen que obtendrán, siempre requiriendo que justifiquen su respuesta. Este tipo de actividades les genera expectativas y motivaciones para la experimentación real, lo cual se pide en el ítem siguiente.

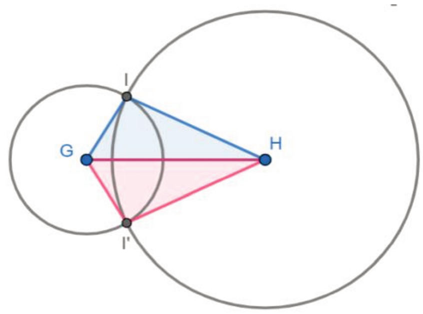


Figura 12. Triángulos congruentes (Parte I, actividad 4)

En el ítem d) se espera que logren comparar los triángulos obtenidos y concluir que son iguales, aunque estén en otra posición. Aquí puede surgir la discusión en la puesta en común al decir que son distintos, que están "al revés", "espejados", etc. Se les puede pedir que recuerden qué condiciones deben cumplir dos triángulos para ser iguales. Si bien se estipula que los estudiantes posean este concepto como conocimiento previo, puede aparecer la idea primaria de la superposición de figuras como condición de igualdad. En este caso, el docente indagará qué supone el hecho de que puedan superponerse y qué condiciones deben cumplirse para que esto ocurra. En definitiva, se procurará ayudarlos a ver que las posiciones del plano en las que se encuentran no constituyen una condición necesaria para determinar su igualdad, por lo que el hecho de que estén "girados" (producto de una rotación) o "espejados" (resultado de una simetría) no influye. De esta forma se los orienta a comprender y recordar que es necesaria la igualdad de los tres lados y los tres ángulos correspondientes para determinar su congruencia. Luego de esto se les puede sugerir que agreguen las construcciones que crean necesarias para verificarlo. Se espera que observen que las longitudes de los lados se corresponden y que marquen los ángulos interiores de ambos triángulos para comparar las amplitudes (Fig. 13).

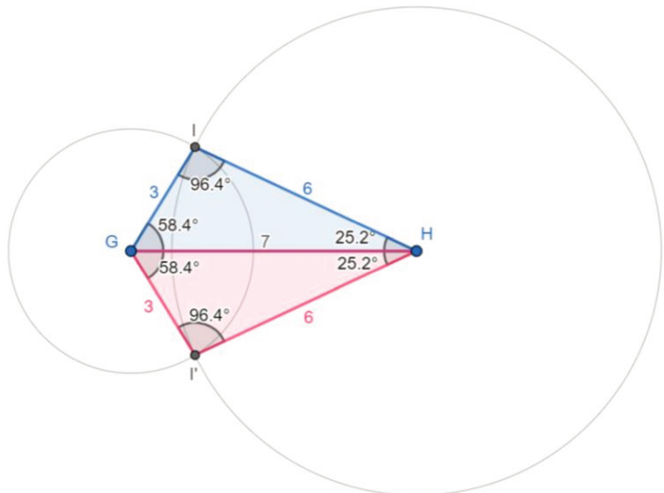


Figura 13. Comparación de triángulos a través de la amplitud de sus ángulos y la longitud de sus lados (Parte I, actividad 4)

El hecho de que la consigna planteada genere un resultado contra-intuitivo para los estudiantes, los conduce a la necesidad de analizar sus conocimientos y predicciones, realizando una retroalimentación que les permita generar un aprendizaje significativo.

Esto resulta un puntapié para la realización de la Parte II de esta secuencia, donde los estudiantes exploran las relaciones y propiedades geométricas a través del software.

Como cierre de esta primera parte, se puede generar el debate sobre qué sucede si se consideran otras longitudes para dos lados de un triángulo, esperando que generalicen, por medio de inducción a partir de la construcción que realizaron, que se obtienen infinitos triángulos a partir de dos lados cualesquiera.

Parte II

Antes de iniciar esta segunda parte, resulta oportuno advertir a los estudiantes que tengan en cuenta lo trabajado durante la resolución y el debate producido en la Parte I así como las aclaraciones docentes, como por ejemplo que GeoGebra trabaja con unidades internas propias del sistema (no con centímetros) y que, para verificar mediante arrastre la robustez de los triángulos construidos, deben probar desplazando todos los vértices. Además se espera que las nuevas construcciones que realicen sean robustas, considerando las construcciones previamente realizadas, puesto que continuamente se les solicita que modifiquen los triángulos mediante el arrastre, manteniendo las condiciones iniciales.

En la actividad 1 se busca trabajar las familias de triángulos que se determinan con dos segmentos de longitudes dadas. En el ítem a) es posible que algunos estudiantes manifiesten que no pueden construir el triángulo debido a que les falta la medida del tercer lado; aquí es oportuno aclarar que los datos que no se brindan, quedan abiertos a la determinación por cada grupo de estudiantes.

Se espera que no surjan construcciones blandas como las planteadas en la primera parte (utilización de la regla sobre la pantalla, medición aproximada, segmentos separados y luego desplazados para hacer coincidir sus extremos, entre otras); aunque si ocurriera en algunos grupos, las descartarían en el punto b) al solicitarles que modifiquen el triángulo manteniendo las condiciones iniciales. Sin embargo, puede ocurrir que el o los grupos de estudiantes mantengan su concepción errónea de que este tipo de construcciones son robustas, debido a que verifican la robustez desplazando cuidadosamente los vértices del triángulo buscando mantener las longitudes de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, ya sea midiendo con la regla o calculando "a ojo", o bien tratando de que no se separen los extremos de los segmentos para no desarmar el triángulo, dependiendo de los procedimientos que hayan realizado en su construcción. En casos así, se los puede orientar explicando que para cualquier lugar que arrastren cada vértice en el plano se deben mantener las condiciones iniciales. Además se les puede recomendar que para controlar las medidas de cada lado se puede utilizar la herramienta *Distancia o longitud*.

Respecto a las construcciones robustas que pueden surgir en el ítem a), una de ellas consiste en utilizar la herramienta *Segmento de longitud dada*, y trazar $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, con el extremo B en común y teniendo en cuenta las longitudes que se solicitan en la consigna, luego trazar el segmento $\overline{AC}$ o utilizar la herramienta *Polígono* para determinar el triángulo ABC (Fig. 14).

Figura 14. Protocolo de construcción robusta 1 (Parte II, actividad 1)

Otra construcción viable, aunque posiblemente no todos los estudiantes la consideren necesaria, es seguir el procedimiento de la actividad 3 de la Parte I, utilizando las herramientas *Segmento de longitud dada* para la construcción de $\overline{AB}$, y la herramienta *Circunferencia: centro y radio* para determinar $\overline{BC}$, o biceversa. Posteriormente determinar el triángulo ABC trazando el segmento $\overline{AC}$, o utilizando la herramienta *Polígono* (Fig. 15).

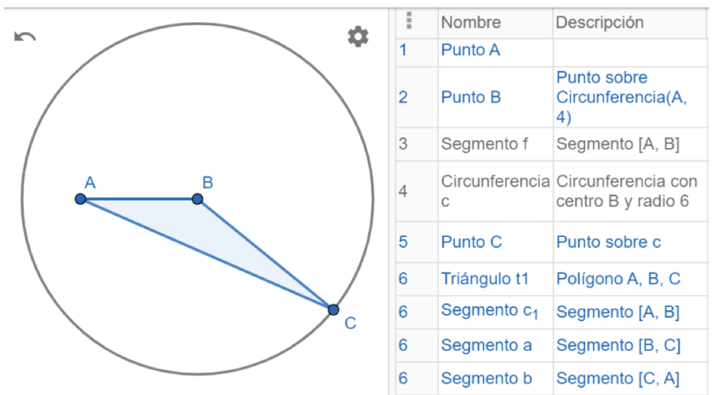


Figura 15. Protocolo de construcción robusta 2 (Parte II, actividad 1)

En las dos últimas construcciones, en función de la amplitud del ángulo $A\hat{B}C$, varía la longitud del tercer segmento. De esto también depende la existencia o no del triángulo, puesto que si $A\hat{B}C = 180°$, los puntos A, B y C se alinean, y el triángulo desaparece.

En el ítem b) se busca aprovechar la ventaja del dinamismo que ofrece el software, por lo que las construcciones realizadas no son un mero dibujo (como lo sería con lápiz y papel) sino que permiten, a través del arrastre, la obtención de una familia de figuras, que comparten ciertas condiciones. En este caso, se determina una familia de triángulos que tienen en común la longitud de dos de los lados (Fig. 16). Se espera que los estudiantes exploren a través del arrastre, observen esto y distingan que lo que varía es la longitud del tercer lado. También pueden observar que los ángulos interiores modifican su amplitud, aunque es probable que al no haber mencionado el concepto de ángulos hasta el momento, pasen por alto esta posibilidad.

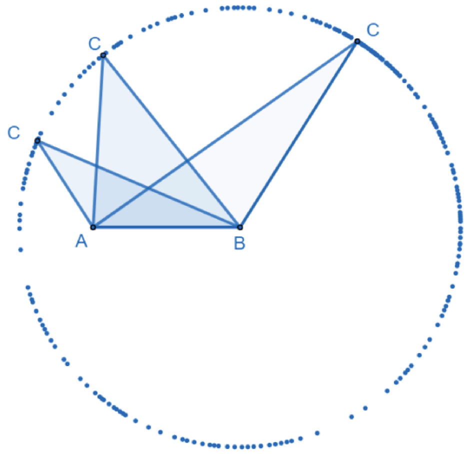


Figura 16. Desplazamiento del punto C, con la función Mostrar rastro activada (Parte II, actividad 1)

En los ítems c) y d) el propósito es que realicen conclusiones a partir de lo observado, respondiendo que se pueden obtener infinitos triángulos distintos (también pueden expresar que se obtienen "muchos triángulos" si aún continúan en el nivel 1 de razonamiento), al desplazar los vértices, variando así la longitud del lado $\overline{AC}$ y la amplitud del ángulo $A\hat{B}C$.

Si el grupo de estudiantes utiliza la herramienta *Distancia o longitud* para determinar la medida de $\overline{AC}$, puede surgir también la idea de que es posible determinar solo 7 triángulos distintos, si es que consideran como longitudes posibles solamente a números naturales (en este caso puede medir 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9 unidades), puesto que en la institución para la que está orientada esta secuencia los estudiantes de segundo año trabajan solo con números enteros, y los conocimientos que poseen de números racionales son los que han trabajado durante su educación primaria (y puede variar dependiendo de la escuela en la cual hayan transitado esa etapa). Resulta importante remarcarles que, si bien en el año en el que están no se trabaja con ese tipo de números, se hace una excepción al estudiar Geometría, puesto que los conocimientos previos que poseen son suficientes para la realización de esta secuencia. También conviene que el software esté configurado para mostrar cifras decimales, y en la puesta en común debatir si es posible que un lado mida, por ejemplo, 2,5 unidades u otros valores decimales. Resumidamente, se los orienta a notar que hay un intervalo con muchas (infinitas) medidas posibles para ese lado (lo que no es sinónimo a "cualquier" medida), generando así un debate alrededor de las concepciones de infinito que poseen.

En la pregunta e), posiblemente solo contesten que hay que fijar la longitud del tercer lado para obtener un único triangulo. Sin embargo, también se puede fijar el ángulo $A\hat{B}C$ y de esta forma obtener un único triángulo, aunque es probable que los estudiantes pasen por alto esta posibilidad, por lo mencionado anteriormente. Si no surge esta conjetura, es conveniente no entrar en ese debate porque se desvía del objetivo de la secuencia[11].

En cuanto a las interrogantes planteados en el ítem f), se pretende que exploren mediante arrastre la menor y mayor longitud que puede adquirir el lado $\overline{AC}$ para hallar el menor y mayor perímetro posible de $A\hat{B}C$. Con esto se espera que implícitamente observen que se determinan infinitos triángulos distintos a partir de dos segmentos, pero a su vez existe una limitación en la longitud del tercer segmento. Se les puede sugerir, mientras realizan la actividad, que utilicen la herramienta *Distancia o longitud* para poder apreciar la variación de la longitud de $\overline{AC}$ a medida que deslizan un vértice. Aquí puede ocurrir, como se mencionó antes, que si solo consideran como longitudes posibles a números naturales, respondan que el lado $\overline{AC}$ debería medir 9 unidades para maximizar el perímetro del triángulo, y 3 unidades para minimizarlo. Se espera que en la puesta en común se retome la posibilidad de considerar las expresiones decimales como medidas válidas. En cuanto a esto, puede ocurrir que algunos consideren la mínima longitud posible de 2 unidades, que otros planteen que es 2,1 u otros valores cercanos mayores que 2. Lo mismo puede ocurrir con la máxima medida posible, que seguramente gire en torno a las 9,9 y 10 unidades.

Es probable que solo consideren los valores que les brinda el software, y esto depende de la configuración que tiene sobre la cantidad de cifras decimales. Aquí puede surgir un debate sobre cuáles son exactamente esos valores que maximizan y minimizan el perímetro del triángulo. Puede que algunos estudiantes distingan que si los tres puntos están alienados, el triángulo no existe. Si, por el contrario, este razonamiento no surge en los grupos de estudiantes, es necesario orientarlos mediante preguntas como, por ejemplo, ¿el lado $\overline{AC}$ puede medir 10 unidades?, ¿qué sucede si hacen que adquiera esa medida desplazando un vértice?, ¿lo que obtienen sigue siendo un triángulo?, ¿por qué sucede esto? De este modo se los guía a concluir que el lado $\overline{AC}$ no puede medir 10 unidades, ya que los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se alinean. Con preguntas similares se los orienta a que reconozcan que tampoco puede medir 2 unidades, puesto que los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se superponen, por lo que en ambos casos al tomar esas medidas el triángulo se transforma en una línea (Fig. 17). Puede surgir el interrogante sobre si una línea puede considerarse como un triángulo “aplastado” o “aplanado”, aquí es necesario remarcar que si los puntos están alineados, no existe triángulo. También pueden

[11] Sí se puede utilizar para una próxima secuencia complementaria a esta, en la que se trabajen los criterios de congruencia de triángulos, reabriendo el debate sobre esta actividad planteando interrogantes con el objetivo de que tomen en consideración la medida del ángulo, como los siguientes: ¿pueden agregar algún otro dato en vez de la longitud de $\overline{AC}$ para determinar un único triángulo?, ¿qué otros elementos posee un triángulo? Una vez que surja el concepto de ángulo, se puede preguntar ¿con agregar el valor de cualquiera de los ángulos es suficiente para que la figura sea única? Se los puede invitar a explorar qué sucede con ello en sus computadoras, desplazando los vértices.

manifestar que al tomar valores cercanos al “valor límite”, el triángulo que se forma es “muy fino” o “angosto”, pero se debe dejar en claro que si bien la superficie que ocupan es pequeña, sigue siendo un triángulo.

Debido a los conocimientos superficiales que poseen sobre números racionales, como se mencionó anteriormente, puede dejarse esa respuesta abierta a los distintos valores que propongan, haciendo ver que en caso del mínimo, siempre van a encontrar otro número más chico, y a la vez mayor a 2. Respecto a la búsqueda del máximo valor, pueden surgir un poco más intuitivamente las respuestas 9,9; 9,99; 9,999; hasta que concluyan que siempre pueden encontrar un número más grande (menor que 10) agregando en las cifras decimales el 9 repetidamente (infinitamente).

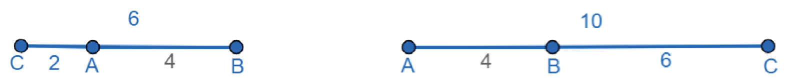


Figura 17. Puntos alineados (Parte II, actividad 1)

De esta forma se espera concluir grupalmente que para minimizar el perímetro es necesario tomar un valor mayor a 2, el más cercano posible y, del mismo modo, para maximizarlo tomar un valor menor que 10, el más cercano posible. Esto los conduce a tener presente el concepto de desigualdad, que necesitan para poder arribar a la propiedad de la desigualdad triangular.

Esto se vincula y se profundiza en la actividad 2, donde se solicita construir tres triángulos, de los cuales solo el primero es posible. Tanto el segundo como el tercero son construcciones imposibles, puesto que no se cumple la desigualdad triangular. En el caso del ítem b) la suma de dos de los lados es menor al tercer lado, y en el ítem c) la suma de dos de sus lados es igual al restante. Al aclarar en la consigna que construyan “si es posible” da el indicio de que existen casos en los que no pueden realizar la construcción. Esto implica que no solo deben construir triángulos, sino también analizar si la construcción es o no posible.

Aquí, para realizar las construcciones, pueden surgir muchas variantes. En esta actividad se da libertad a los nombres de los puntos. Se espera que a esta altura del trabajo logren reutilizar algunas de las estrategias de construcciones robustas utilizadas previamente, o bien idear nuevas. Sin embargo, es probable que aún surjan construcciones blandas. Aquí es necesario volver a remarcar la importancia de las construcciones robustas para poder analizar las propiedades que cumple la figura.

Puede ocurrir que tracen los tres segmentos por separado, utilizando la herramienta *Segmento de longitud dada*, y traten de superponer los extremos por medio del arrastre (Fig. 18), o bien trazar tres segmentos consecutivos con las medidas que se indican y desplazar los extremos hasta lograr determinar el triángulo (Fig. 19). Aquí surge en el ítem b) que no es posible unir los extremos debido a la longitud de los segmentos (Fig. 20). También puede aparecer la posibilidad de construir el triángulo del ítem c), por no hacer coincidir de forma precisa los extremos de los segmentos (Fig. 21). Si esto último sucede, se debe intervenir pidiendo que utilicen la herramienta *Aproximar* y así ven que en realidad los puntos se acercan pero no coinciden.

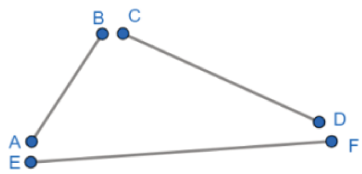


Figura 18. Construcción blanda 1 (Parte II, actividad 2)

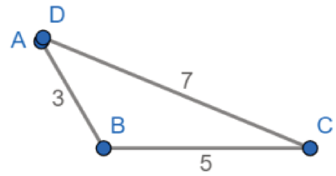


Figura 19. Construcción blanda 2 (Parte II, actividad 2)

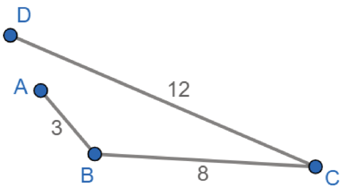


Figura 20. Imposibilidad de construcción del ítem b) (Parte II, actividad 2)

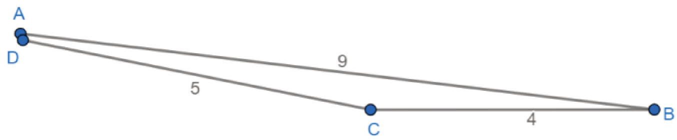
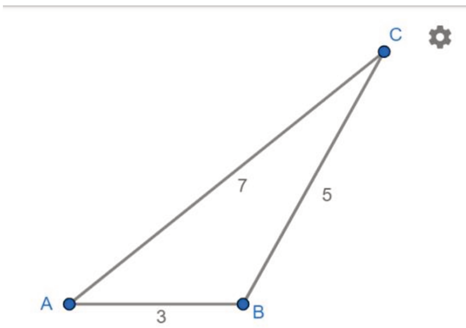


Figura 21. Posible construcción errónea del ítem c) (Parte II, actividad 2)

Una tercera construcción posible de presentarse es utilizando nuevamente la herramienta *Segmento de longitud dada*, pero esta vez trazando los dos primeros segmentos con un extremo en común. Luego trazan el tercer segmento, y utilizando la herramienta *Distancia o Longitud*, buscan arrastrando los vértices para que el tercer segmento mida lo que se solicita (Fig. 22). En este caso, esta es una construcción blanda, puesto que al desplazar alguno de los vértices el triángulo pierde una de las condiciones pedidas (la longitud del tercer lado). Sin embargo, este procedimiento permite observar que existe una limitación respecto a la longitud del tercer lado, como se trabajó en la actividad 1 de esta segunda parte, lo cual sirve de guía para conjeturar la desigualdad triangular.

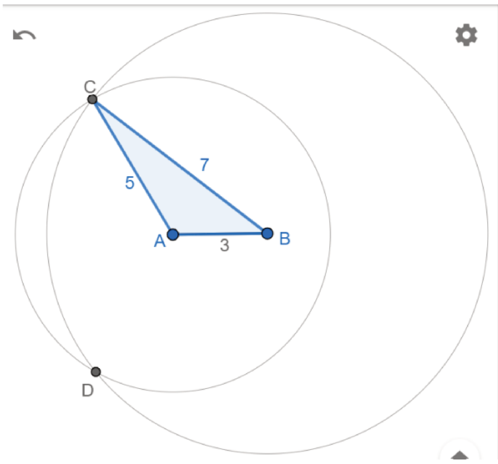


	Nombre	Descripción
1	Punto A	
2	Punto B	Punto sobre Circunferencia(A, 3)
3	Segmento f	Segmento [A, B]
4	Punto C	Punto sobre Circunferencia(B, 5)
5	Segmento g	Segmento [B, C]
6	Segmento h	Segmento [A, C]

Figura 22. Protocolo de construcción blanda 3 (Parte II, actividad 2)

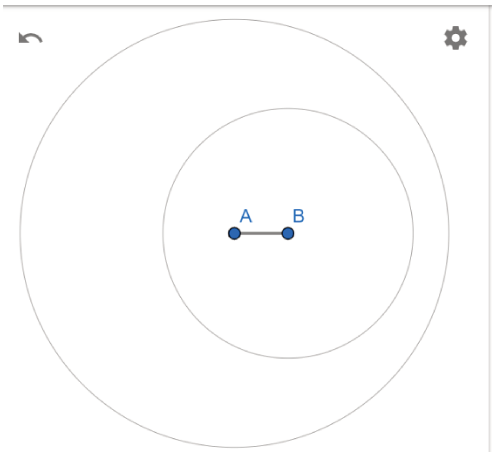
Es esperable que aparezca, al menos en algunos grupos de estudiantes, la construcción robusta ya mencionada varias veces utilizando la herramienta *Segmento de longitud dada* para trazar el primer segmento, luego con la herramienta *Circunferencia: centro y radio* trazar dos circunferencias con vértice en los extremos del primer segmento, cuyos radios sean las longitudes de los otros dos segmentos indicados. De esta forma en el primer ítem encuentran dos puntos de intersección entre las circunferencias, pueden optar por uno de ellos y determinar el triángulo (Fig. 23). Se espera que concluyan que, aunque se pueden determinar dos triángulos, estos son iguales, por lo que con esos tres segmentos se construye un único triángulo, como se trabajó en la Parte I. En el segundo ítem ocurre que las circunferencias no se intersecan (Fig. 24) y deben razonar por qué ocurre esto. Por su parte, en el tercer ítem, sucede que las circunferencias se intersecan en un solo punto, sobre el segmento inicialmente trazado (Fig. 25), de lo se desprende que, como todos los puntos están alineados, no es posible construir un triángulo.

Si este procedimiento no surge entre los grupos de estudiantes, el docente puede proponerlo como una opción viable, puesto que se trata de la única construcción robusta en la que se evidencian los casos en los que es posible construir un triángulo y en los que no, dependiendo de la intersección de las circunferencias (en dos puntos, en uno o en ninguno). Esto les sirve para realizar las siguientes actividades.



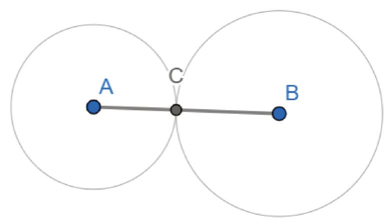
	Nombre	Descripción
1	Punto A	
2	Punto B	Punto sobre Circunferencia(A, 3)
3	Segmento f	Segmento [A, B]
4	Circunferencia c	Circunferencia con centro A y radio 5
5	Circunferencia d	Circunferencia con centro B y radio 7
6	Punto C	Punto de intersección de c, d
6	Punto D	Punto de intersección de c, d
7	Triángulo t1	Polígono B, C, A
7	Segmento a	Segmento [B, C]
7	Segmento b	Segmento [C, A]
7	Segmento c_1	Segmento [A, B]

Figura 23. Protocolo de construcción robusta del ítem a (Parte II, actividad 2)



	Nombre	Descripción
1	Punto A	
2	Punto B	Punto sobre Circunferencia(A, 3)
3	Segmento f	Segmento [A, B]
4	Circunferencia d	Circunferencia con centro B y radio 7
5	Circunferencia c	Circunferencia con centro A y radio 12

Figura 24. Protocolo de construcción del ítem b) (Parte II, actividad 2)



	Nombre	Descripción
1	Punto A	
2	Punto B	Punto sobre Circunferencia(A, 9)
3	Segmento f	Segmento [A, B]
4	Circunferencia d	Circunferencia con centro B y radio 5
5	Circunferencia c	Circunferencia con centro A y radio 4
6	Punto C	Punto de intersección de c, d

Figura 25. Protocolo de construcción del ítem c) (Parte II, actividad 2)

Estas construcciones les permiten experimentar y observar que no siempre es posible determinar un triángulo a partir de tres segmentos, por lo que es importante generar una discusión sobre las razones por las que sucede esto, aproximándose así a conjeturar la propiedad de desigualdad triangular. En la construcción del ítem a), puede ocurrir que consideren que al arrastrar un vértice y rotar la figura, obtienen triángulos distintos, por lo que se puede retomar el debate generado con la actividad 4 de la Parte I sobre el concepto de triángulos iguales. Respecto a las construcciones imposibles, se espera que todos logren observar que no pueden determinar los triángulos, y que lo que varíe sea en cuanto a la fundamentación. Pueden expresar, en cuanto al ítem b), que "no llega", "no cierra", "no se unen", "uno de los segmentos tiene que ser más largo" o bien "uno de los segmentos debe ser más corto". En el ítem c) pueden manifestar que "se forma una línea", e incluso puede surgir, si no ocurrió en el debate del punto anterior, el interrogante sobre si una línea puede considerarse como un triángulo "aplastado" o "aplanado". Es posible que algunos estudiantes reconozcan que, en este último caso, la suma de los dos primeros lados es exactamente igual a la longitud del tercer lado. Este es un primer indicio para conjeturar la desigualdad triangular.

En el punto 3 se busca trabajar, ya no intentando hacer construcciones, sino creando la imagen mental de la figura para realizar predicciones. Esto les permite aproximarse a la propiedad de la desigualdad triangular y analizar en qué situaciones no es posible su construcción. Solo el primero y el último son construibles; el objetivo es que logren afirmarlo diciendo que al sumar cualesquiera dos de sus lados, el resultado es mayor que el lado restante.

Influye mucho el orden en que se presentan los datos, puesto que seguramente respeten ese orden al momento de buscar construir mentalmente el triángulo. En los primeros tres ítems se ubica último el segmento más largo. Esto los induce a comenzar construyendo mentalmente los dos primeros segmentos, y a reconocer en los ítems b) y c) que el tercer segmento es demasiado largo, o bien que los dos primeros son muy cortos. Esto se debe a que en b), el tercer lado es igual a la suma de los primeros dos lados, y en c), es mayor. Una posible conjetura a la que pueden arribar es que la longitud del tercer lado no puede igualar ni superar la longitud de los primeros dos segmentos juntos. Para lograr esto necesitan de un gran manejo del triángulo como concepto figural; por ello es muy probable que no todos lleguen a esta conjetura y posiblemente haya estudiantes que incluso no logren discernir mentalmente cuáles ternas determinan triángulos y cuáles no. En este último caso, necesitan recurrir a la representación gráfica que se plantea en el punto 4 para poder distinguirlo.

A partir del ítem d) de la actividad 3, estratégicamente se ubican primero los segmentos más largos. De este modo, si los estudiantes logran plantear la conjetura previamente mencionada y deciden probarla solo con las longitudes de los dos primeros segmentos, los conduce erróneamente a creer que los últimos tres triángulos son posibles de construir. Ya sea que lo imaginen mentalmente o que hagan la representación en el software solicitada en el punto 4, el hecho de distinguir que no es posible construir triángulos con los segmentos de los ítems d) y e), genera el desconcierto en los estudiantes que los induce a indagar los motivos, conllevándolos a reformular su conjetura. Pueden expresar que el tercer segmento es demasiado corto y que, por ejemplo en el punto d), es necesario que mida más de 8 unidades y en el caso de e), se requiere que mida más de 5 unidades. Probablemente el hecho de tener esos dos casos en los que no es posible construir un triángulo, los conduzca a considerar que el último tampoco se forma, además de lo contra-intuitivo que resulta la diferencia entre la longitud de los dos primeros segmentos y el tercero, la cual es muy marcada. Allí se genera la sorpresa de que sí es posible y, entonces, compararán con los ítems anteriores para hallar en qué difiere esta terna de las anteriores. También se espera que disciernan que no influye el orden en que estén dados los segmentos, y así poder avanzar en la precisión de sus respuestas, reformulando en su conjetura inicial el hecho de que no necesariamente se trata de los dos primeros lados, sino que cualquier par de lados de un triángulo deben sumar más que el lado restante. Esta actividad fomenta la retroalimentación, o feedback, que favorece el aprendizaje significativo en los estudiantes.

En la actividad 5, se espera que utilicen la información recabada con las actividades anteriores para enunciar una generalización. En este punto de la secuencia se acepta como validación la verificación empírica a través del software de las conjeturas planteadas.

Es probable que las condiciones a las que arriben no estén expresadas de manera formal como se las encuentra en un libro de texto escolar. Algunas de las conclusiones posibles son: “dos lados juntos deben superar al otro lado del triángulo”, o deben “ser más largos que el otro lado”, también pueden agregar que hay que probar con todos los lados del triángulo para asegurarlo. Por lo que, durante el debate, se sugiere guiar a los estudiantes haciendo interrogantes como ¿a qué se refieren con dos lados “juntos”?, ¿con qué operación matemática asocian eso? Luego del debate es necesario realizar la institucionalización de la propiedad por parte del docente concluyendo que “en todo triángulo la suma de las medidas de dos de sus lados es siempre mayor a la medida del lado restante”.

Parte III

En la actividad 1, se propone la construcción de un triángulo a partir de las amplitudes de dos de sus ángulos interiores. En esta actividad pueden surgir varias construcciones blandas, puesto que aún no han trabajado con la construcción de ángulos dada su amplitud. Una de ellas, puede ser "a ojo", considerando que $B\hat{A}C = 40°$ es casi la mitad de un ángulo recto y el ángulo $A\hat{B}C = 65°$ se aproxima a dos tercios del ángulo recto (sin considerar el uso de fracciones, solo de modo intuitivo dividir en tres el ángulo de 90° y tomar dos de esas partes).

Otra construcción blanda es trazando un triángulo cualquiera y con la herramienta *Ángulo* marcar cada ángulo interior para luego desplazar los vértices hasta lograr obtener las amplitudes dadas. O bien, trazar dos ángulos separados con la herramienta *Ángulo dada su amplitud* y unir los puntos que se determinan mediante segmentos. Luego, superponer sus lados hasta determinar un triángulo (Fig. 26).

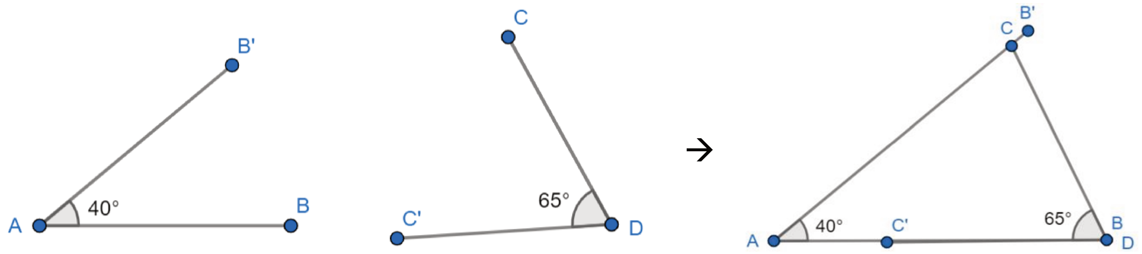


Figura 26. Secuencia de construcción blanda (Parte III, actividad 1)

Todas las construcciones mencionadas hasta el momento son blandas puesto que se deforman con el arrastre. Una vez que comprueben esto, los grupos de estudiantes deben buscar otro procedimiento que les permita arribar a construcciones que resistan el arrastre.

Se espera que emerja al menos en un grupo de estudiantes la construcción robusta a partir del trazado del segmento $\overline{AB}$, y utilizando sus extremos como vértices de los ángulos $B\hat{A}C = 40°$ y $A\hat{B}C = 65°$ construidos con la herramienta *Ángulo dada su amplitud*. Luego, buscando la intersección de las semirrectas $\overrightarrow{AB'}$ y $\overrightarrow{BA'}$ se ubica el punto C, y con la herramienta *Polígono* se determina el triángulo ABC (Fig. 27).

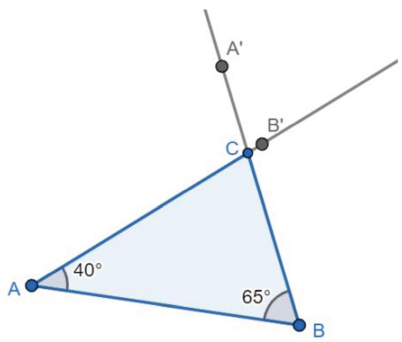


Figura 27. Construcción robusta (Parte III, actividad 1)

Posiblemente, luego del trabajo que los estudiantes han realizado en las secciones anteriores, les sea intuitivo considerar que se pueden determinar infinitos triángulos al leer el ítem b). Aquí la diferencia es que lo que varía es la longitud de los tres lados al arrastrar los vértices. Podría suceder que algunos no se fijen en el tercer ángulo que se forma e ignoren que mantiene su amplitud, al igual que los dos ángulos construidos inicialmente. Emerge como necesario en la puesta en común debatir sobre ello. Se puede sugerir marcar el tercer ángulo para que observen qué sucede con él al modificar el triángulo. Al notar que el tercer ángulo conserva su amplitud, será un primer indicio para considerar que a partir de tres ángulos no siempre es posible la construcción de un triángulo.

Puede surgir que son todos triángulos iguales, ya que mantienen la forma. Será elemental retomar el concepto de triángulos iguales, hasta que logren ver que si bien mantiene las amplitudes de los ángulos, las longitudes de los lados varían, por lo que los triángulos son distintos. Cabe aclarar que con esta actividad no se pretende trabajar la noción de semejanza, por lo que es innecesario ahondar en esta discusión, ya que se desvía del objetivo de la secuencia. En todo caso se podría insinuar que comprenden una familia de triángulos que en Matemática se estudia especialmente, particularmente en la escuela ellos lo harán luego.

En el ítem d), teniendo en cuenta el trabajo previo, es posible que consideren que siempre se pueda construir triángulos a partir de dos ángulos. Es probable que al leer esta pregunta, imaginen mentalmente ángulos agudos, puesto que es lo más estereotipado. Por lo que, al realizar la actividad 2, seguramente les genere sorpresa, al contradecirse su idea intuitiva con las construcciones imposibles que se presentan, a partir de dos ángulos como datos. Al refutar empíricamente ese pensamiento inicial, se los convoca a revisarlo y reformularlo, logrando la retroalimentación.

En la actividad 2 se introduce la utilización de deslizadores, que permiten variar las amplitudes de los ángulos $A\widehat{B}C$ y $B\widehat{A}C$, y de esta forma explorar las posibles construcciones así como la limitación de las amplitudes de los triángulos. El hecho de brindar la construcción ya realizada es una variable didáctica facilitadora, puesto que de tener que realizarla los estudiantes, resultaría una tarea demandante que no aportaría demasiado al objetivo de esta actividad. De este modo el trabajo se centra pura y exclusivamente en la exploración y el análisis sobre la posibilidad de construcción de los triángulos indicados.

Al solicitar que exploren “si es posible construir”, y teniendo en cuenta lo trabajado en las secciones anteriores, prepara a los estudiantes a enfrentarse a situaciones en las cuales sea imposible obtener lo solicitado. En cuanto a esto, los primeros tres triángulos que se proponen son posibles de construir, mientras que los últimos tres comprenden construcciones imposibles.

Al mover los deslizadores, los estudiantes pueden observar que en algunas ocasiones el punto C desaparece y, de este modo, "se borra" el triángulo. Los interrogantes del punto 3 tienen la intención que los estudiantes logren ver que las semirrectas $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ dejan de tener un punto de intersección. Aquí puede ocurrir que en realidad sí existe el punto C, pero queda fuera de la pantalla por estar ampliada la construcción. Se les puede indicar que alejen un poco la imagen para observarlo mejor. Esto también podría confundirlos en los casos donde las construcciones son imposibles, puesto que los estudiantes pueden considerar que si bien no se observa el punto C en la pantalla, alejando reiteradamente la imagen pueden llegar a encontrarlo. Aquí resulta importante la intervención docente al preguntar si consideran que es posible que esas semirrectas lleguen a cortarse en algún punto, esperando que noten la imposibilidad de hallar una intersección entre ellas, puesto que si observan detenidamente en los ítems d) y e), las semirrectas son paralelas, o bien, a medida que se alejan de los puntos A y B, están cada vez más distanciadas en el ítem f). Una diferencia entre los dos casos que se plantean, donde no se observa el punto C en la pantalla, es el hecho de que si el polígono sigue existiendo (coloreado en azul) significa que el triángulo existe, y cuando este desaparece, el triángulo deja de existir.

La actividad 4 apunta a buscar una regularidad para determinar en qué casos es posible la construcción de un triángulo dados dos ángulos. Aquí se pretende que analicen los supuestos que se proponen y los contrasten con las ideas que poseen. Deben refutar aquellos que no son ciertos, dando lugar a que los reformulen para generar sus propias conjeturas.

Los grupos de estudiantes deben discernir que los supuestos planteados no están afirmando lo mismo. Posiblemente algunos estén de acuerdo con las tres afirmaciones propuestas. Es allí donde se intervendrá indicando que observen cuáles fueron las construcciones posibles y cuáles las imposibles, también pueden continuar explorando mediante los deslizadores y probando con distintas amplitudes de ángulos. La más visible e intuitiva de corroborar es la afirmación de Natalia. Es correcta, ya que con dos ángulos agudos, las semirrectas siempre se intersecan, puesto que se "cierran" o se aproximan a medida que se alejan de los puntos A y B. Y con dos ángulos obtusos no se puede determinar un triángulo, debido a que las semirrectas $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ nunca se intersecan, ya que se distancian a medida que se alejan de A y B.

Sin embargo, las otras dos afirmaciones son incorrectas. En efecto, se espera que sean capaces de observar que si bien en el ítem d) de la actividad 2 no pudieron determinar un triángulo utilizando un ángulo obtuso, en la construcción c) sí pudieron, por lo que las afirmaciones de Esteban y Marcela son erróneas. Esto los conduce a interrogarse por qué en algunos casos es posible, mientras que en otros no.

Por su parte, en el ítem ii) se hace referencia a la construcción de un triángulo a partir de dos ángulos rectos, donde deben observar que es una construcción imposible debido a que, como lo ven en la actividad 2.e), las semirrectas $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ que quedan determinadas son paralelas.

Hasta aquí, los estudiantes son conscientes de que no siempre es posible construir un triángulo a partir de dos ángulos y que estos no pueden ser ambos obtusos o rectos. Una vez observadas estas restricciones, es necesario orientarlos a especificar aún más las condiciones de posibilidad.

Para ello, en la actividad 5 se propone que determinen la amplitud del tercer ángulo ($A\hat{C}B$) en la construcción dada en la actividad 2. Allí, pueden observar que dicho ángulo conserva su amplitud al desplazar los vértices, lo que da el indicio de que hay una relación entre las tres amplitudes de los ángulos. Al solicitar que registren en la tabla las amplitudes de los ángulos, se espera que la disposición de los datos tabulados les permita acceder con mayor facilidad a los valores y los ayude posteriormente a hallar la regularidad entre los mismos. Este punto no debería generarles mayor dificultad, puesto que solo involucra observar y registrar información, y constituye una preparación para la actividad siguiente.

Por su parte, en la actividad 6, se propone que anticipen lo que ocurre con las construcciones. Allí, solo la primera y la última construcción son posibles. Es probable que, teniendo en cuenta lo concluido anteriormente, consideren erróneamente que estos son todos posibles de construir, puesto que ninguno posee dos ángulos obtusos o rectos. Esta actividad les permite reconocer que esta condición, si bien es necesaria, no es suficiente. Además, pueden observar que con tres ángulos agudos, no siempre es posible la determinación de un triángulo. Por su parte, los puntos c) y d) tienen en común los primeros dos ángulos. Esto no es casualidad. Se ubican así con el objetivo de hacerles notar la dependencia del tercer ángulo en relación a los dos primeros. Este desconcierto creado por la diferencia con sus predicciones, los conduce a buscar una justificación y a reformular sus conjeturas.

Los interrogantes de la actividad 7 tienen por objetivo orientar las reflexiones de los estudiantes para que planteen conjeturas, las refuten y las reformulen hasta llegar a enunciar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Al preguntar si la relación que han planteado se cumple para cualquier triángulo y cómo pueden comprobarlo, se espera que exploren con los deslizadores, para que puedan discernir si es una condición particular de la imagen que observan o si es una relación generalizable para todo triángulo.

Al finalizar la actividad 7, se puede plantear un debate en el aula con lo realizado hasta el momento. Si no ha surgido la propiedad, se recomienda hacer preguntas-guía como: ¿tienen algo en común las ternas de ángulos de cada triángulo que pudieron construir?, ¿por qué si un triángulo tiene ángulos interiores de 30° y 50°, sí o sí el tercer ángulo debe medir 100°?, ¿por qué no puede, por ejemplo, medir 65°? Teniendo en cuenta las construcciones posibles de la actividad 2 y la 6, ¿qué tienen en común la terna de ángulos 90°, 80° y 10° con la terna 110°, 50° y 20°?, ¿y con la terna 40°, 60° y 80°?

Si no logran establecer la relación entre la suma de los ángulos interiores de cada triángulo, se puede preguntar directamente, ¿cuánto suma cada terna de ángulos? Al obtener por resultado 180° en todos los casos, se puede cuestionar, ¿se cumplirá siempre esto?, ¿para cualquier triángulo? Hasta ahora probaron con casos particulares, ¿de qué forma pueden comprobar que esto se cumple para todo triángulo?

La importancia de esta última pregunta recae en generar la necesidad en los estudiantes de recurrir a una nueva forma de validación. Cabe recordar que en el curso en el que se encuentran, no se han enfrentado aún a demostraciones lógico-deductivas, ya que hasta el momento solo han realizado demostraciones empíricas utilizando las funciones de arrastre y deslizadores para la verificación de conjeturas. Sin embargo, no pueden quedarse con la mera observación de casos particulares. Aunque esto pueda servirles como instrumento para elaborar conjeturas, es fundamental que vayan incorporando la utilización de demostraciones deductivas informales como una forma de validar propiedades. Seguramente no ha de surgir de ellos mismos, sin realizarles un planteo a modo disparador, puesto que no están familiarizados con este tipo de trabajo. Por ello, se propone la actividad 8, para guiarlos en este proceso de transición del nivel 2 al nivel 3 de razonamiento de Van Hiele.

El hecho de presentar la construcción como una propuesta de un grupo de estudiantes ficticios, en la actividad 8, permite que sea una introducción más amena a la demostración, y no un simple instructivo de procedimientos a seguir. Para evitar la confusión en el proceso de construcción, se brinda un archivo de GeoGebra con la construcción ya realizada. De este modo, se hace hincapié pura y exclusivamente en el análisis de la figura determinada, a partir de los interrogantes que se plantean.

La primera dificultad que puede surgir en algunos grupos de estudiantes, respecto a esta actividad, es que no logren distinguir gráficamente las transversales para trabajarlas por separado. Se les puede sugerir ocultar primero la recta $\overleftrightarrow{BC}$, para trabajar con la transversal $\overleftrightarrow{AC}$, y viceversa. Aquí surgen los conceptos de igualdad de ángulos. Se especifica que establezcan igualdades para evitar que agreguen los ángulos conjugados, que son suplementarios, ya que puede generarles confusiones al tener tanta información.

Es importante aclararles que están trabajando con un ejemplo genérico, por lo que no es necesario ni relevante identificar la amplitud particular de los ángulos. Si no recuerdan todas las propiedades que cumplen estos ángulos, con la herramienta *Relación* pueden comprobar la igualdad entre ellos sin necesidad de determinar el valor de cada uno.

Probablemente establezcan más relaciones de las necesarias para la demostración. A continuación se detallan todas las relaciones de igualdad entre ángulos que pueden encontrar (Fig. 28).

Considerando los ángulos determinados por las rectas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DE}$, cortadas por la transversal $\overleftrightarrow{AC}$, se pueden establecer las siguientes igualdades:

$A\hat{C}D = C\hat{A}B$ Por ser alternos internos

$G\hat{C}E = C\hat{A}B$ Por ser correspondientes

Por su parte, considerando los ángulos determinados por las rectas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DE}$, cortadas por la transversal $\overleftrightarrow{BC}$, se pueden establecer las siguientes igualdades:

$D\hat{C}F = A\hat{B}C$ Por ser correspondientes

$E\hat{C}B = A\hat{B}C$ Por ser alternos internos

Además, se puede determinar que:

$F\hat{C}G = A\hat{C}B$ Por ser opuestos por el vértice

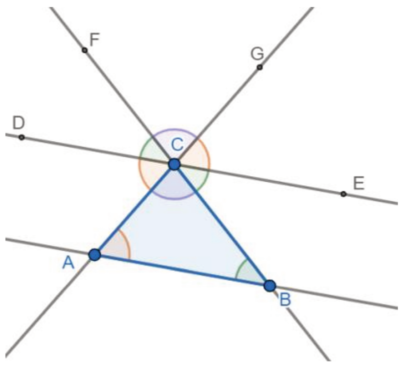


Figura 28
(Parte III, actividad 8)

No necesariamente deben surgir todas estas relaciones; con obtener una igualdad para cada ángulo interior del triángulo es suficiente para responder los interrogantes planteados y llegar a la demostración buscada. Es por ello que en el ítem b) se indica que elijan solo tres de esos ángulos con vértice en C, con la condición de que sean consecutivos. De cualquier forma que los seleccionen, pueden establecer una relación uno a uno con cada ángulo interior del triángulo.

En el ítem c), se espera que logren reconocer que los tres ángulos seleccionados son suplementarios ya que determinan un ángulo llano, es decir, suman 180°. Con el interrogante del ítem d), se pretende que asocien las igualdades previamente planteadas con los ángulos interiores del triángulo y afirmen que estos suman 180°.

Respecto al ítem e), se busca que observen que sin importar el triángulo que grafiquen, al trazar una recta paralela a un lado que contenga al vértice opuesto, ocurre que se mantiene la igualdad de los ángulos alternos y correspondientes y, por lo tanto, la suplementariedad de los ángulos interiores del triángulo. Es decir que, sin importar la amplitud de los ángulos, la propiedad se cumple para todo triángulo.

Es probable que algunos grupos expresen, en el ítem f), que los ángulos interiores de un triángulo "juntos miden 180°", o "son suplementarios". Finalmente, luego de la puesta en común y el debate, debe hacerse la institucionalización de la propiedad, dejando asentado que "la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°".

6. Conclusiones

Los estudiantes suelen padecer la Matemática, debido al trabajo mecanicista con el que frecuentemente se trabaja en las aulas. Este rechazo muchas veces es un desencadenante de no entender la materia, puesto que los conocimientos no son significativos para ellos. Al mismo tiempo, muchas veces les resulta difícil resolver actividades que implican poner en juego su razonamiento, así como expresarlos ya sea en forma oral o escrita, puesto que no están acostumbrados a esta metodología de trabajo. Por ello resulta necesario introducirlos paulatinamente en situaciones que los desafíen a pensar, cuestionar, investigar, buscar regularidades y argumentar sus respuestas.

Se considera que mediante el presente trabajo se ha atendido al objetivo del estudio relativo a la elaboración de una secuencia didáctica que permita a los estudiantes relacionar, conjeturar, justificar, contrastar y validar las propiedades de desigualdad triangular y suma de los ángulos interiores de un triángulo, utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra. Se ha procurado aportar con una propuesta didáctica que cumple con las características mencionadas, acorde al grupo de estudiantes de la institución a la que está destinada, aprovechando los beneficios que proporciona el software.

Es importante dejar a los estudiantes explorar, conocer el software, para luego desafiarlos a realizar diversas construcciones que, posiblemente, en papel y lápiz serían engorrosas (y en ocasiones realizadas “a ojo”, sin utilizar propiedades geométricas) y, de salir mal, frustrantes. El dinamismo que ofrece el software permite apreciar una numerosa cantidad de construcciones con solo arrastrar un punto, mientras que de la forma tradicional les demandaría mucho más tiempo. Con esta secuencia se busca contribuir en el avance de las formas de validación de los estudiantes, logrando introducirlos en la demostración deductiva informal.

En un principio el tema de este trabajo surge como una necesidad de afrontar -al menos parcialmente- la escasez de materiales, que trabajen la validación de propiedades geométricas con recursos tecnológicos, brindados por el Estado a las escuelas de la ciudad. Sin embargo, con el transcurso del tiempo y luego de una búsqueda por la web, se encuentran numerosos materiales digitales: Ministerio de Educación e Innovación (2018b); Serrano et al. (s.f.); Losada et al. (2007-2012); Almirón y Fernández Lescano (2020), entre otros. Algunos de ellos resultan de gran utilidad para llevar a cabo procesos de exploración y de validación en Matemática. También hay nutridos materiales para trabajar diversos contenidos geométricos con GeoGebra: Götte y Mántica (2019); Vargas (s.f.); Ministerio de Educación e Innovación (2018a); Segade Pampín y Naya Riveiro (2018); Didoné y Miotti (2014), entre otros. Esto lleva a reflexionar que no siempre es necesario crear secuencias desde cero, sino también lograr inspirarse en secuencias ya armadas y adaptarlas a la realidad del grupo de estudiantes al que se quiere destinar.

La realización de este trabajo permite observar que la planificación y elaboración de una secuencia implica tener en cuenta diversos factores. Toda actividad matemática involucra lenguajes, conceptos y propiedades. Para que una propuesta sea significativa es necesario tener en claro estos objetos, planificarla de acuerdo a los conocimientos previos que poseen los estudiantes y aceptar argumentos acordes al nivel de razonamiento que poseen. Esto implica conocer el grupo de estudiantes a los que está dirigida, el contexto institucional y social en el que están inmersos, así como la accesibilidad a recursos. También implica tener en cuenta las normas involucradas (tanto explícitas como implícitas) desde los lineamientos curriculares hasta los acuerdos profesor-estudiantes dentro del aula.

Sucintamente, se considera que tener conocimiento sobre estas cuestiones permite adaptar y secuenciar los contenidos a trabajar, para que los estudiantes logren aprendizajes significativos, esto es, que porten sentidos para ellos. Asimismo, es necesario buscar un equilibrio entre los factores mencionados y la dificultad de la secuencia, de modo que les resulte una actividad desafiante y que, a su vez, sean capaces de resolverla. En palabras de Charnay (1994), la propuesta "debe permitir al alumno utilizar los conocimientos anteriores…, no quedar desarmado frente a ella. Pero, sin embargo, debe ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a hacer evolucionar los conocimientos anteriores, a cuestionarlos, a elaborar nuevos" (p.61). Al respecto, se concluye que con propuestas que fomenten el razonamiento, el planteo de interrogantes, así como la necesidad de justificar sus afirmaciones, se puede lograr promover el pensamiento crítico en los estudiantes.

Es importante destacar que, para lograr formar estudiantes críticos, es necesario formar docentes críticos, capaces de pensar, razonar, cuestionar y cuestionarse. Esto comprende un potencial tanto de crear como así también de buscar materiales ya elaborados, distinguir aquellos que son de calidad, seleccionarlos, adaptarlos, mejorarlos y secuenciarlos en función de los grupos de estudiantes a los que están dirigidos. En otras palabras, involucra docentes abiertos a seguir aprendiendo y capacitándose continuamente.

Por último, aunque en este trabajo solo se realiza un análisis a priori de la propuesta, es relevante mencionar posibles futuras líneas de acción. En cuanto a la secuencia, puede ampliarse incluyendo el estudio de los criterios de congruencia y de semejanza de triángulos. Respecto al análisis de las producciones de los estudiantes, se pueden distinguir los niveles de razonamiento de Van Hiele que intervienen, examinar los tipos de arrastres utilizados siguiendo la clasificación esbozada en Gutiérrez (2008) y completar los cinco niveles de análisis de la idoneidad didáctica del proceso de estudio. También resulta pertinente estudiar las demostraciones que realizan los estudiantes, siguiendo las categorías y subcategorías que plantea Balacheff (2000). Si bien la implementación de la propuesta y su posterior análisis no se realizan en este trabajo, debido a los límites de extensión del mismo, se proponen estas pautas como puntapié para posibles próximos estudios. Esta propuesta se encuentra a la espera de su puesta a prueba. A partir de los resultados que se obtengan, se podrán hacer modificaciones y adaptaciones necesarias para favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

Considero que la elaboración detallada de este trabajo, acompañada con la investigación y el estudio de referentes en el tema, me ha permitido fortalecer como profesora en Matemática y también me ha brindado la posibilidad de realizar una instancia de síntesis integral de lo abordado durante la Especialización. Gracias.

7. Referencias bibliográficas

Almirón, J.E. y Fernández Lezcano, G.A. (11 de septiembre de 2020). La Desigualdad Triangular como objeto matemático y como objeto a enseñar [Archivo de Video]. Youtube. Disponible en: https://youtu.be/SxDPX0VBNkI.

Alsina, A. y Domingo, M. (2010). Idoneidad Didáctica de un Protocolo Sociocultural de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(1), 7-32. Disponible en: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Alsina_Domingo_RELIME2010.pdf.

Álvarez Alfonso, I., Bautista, L.A., Carranza Vargas, E. y Soler-Álvarez, M.N. (2014). Actividades Matemáticas: Conjeturar y Argumentar. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *85*, 75-90. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/3681/2/A%CC%81lvarez2014ActividadesNumeros85.pdf.

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *5*(1), 25-45. Disponible en: https://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2014/01/s71-material-de-referencia.pdf.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente. Disponible en: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133/document.

Barrantes, M., López, M. y Fernández, M.A. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*, *9*(2), 107-127. Disponible en: http://dehesa.unex.es/bitstream/handle/10662/5619/1887-3987_9_2_107.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Bernardis, S. y Moriena, S. (2007). Geometría Dinámica: Un Recurso para Iniciar a los Estudiantes en las Demostraciones. *Yupana*, *1*(4), 53-66. Disponible en: https://doi.org/10.14409/yu.v1i4.256.

Broitman, C. e Itzcovich, H. (2008). La geometría como medio para "entrar en la racionalidad". Una secuencia para la enseñanza de los triángulos en la escuela primaria. En C. Broitman (Comp.). *Enseñar Matemática: Nivel Inicial y Primario*. Colección Formación Docente Nº 4 (pp.55-86). Buenos Aires: 12(entes).

Cappelletti, G. y Costoya, M. (2008). *Matemática Geometría*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Disponible en: https://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/media/matematica/geometria_media.pdf.

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Saiz (Comps.). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp.51-64). Buenos Aires: Paidós Educador. Disponible en: http://instituto20.com.ar/archivos/Didactica%20de%20matematicas%20-%20Aportes%20y%20reflexiones.pdf.

Conejo Garrote, L., Arce Sánchez, M. y Ortega del Rincón, T. (2019). La demostración matemática y los libros de texto de Bachillerato: evolución a través de las leyes educativas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *100*, 135-138. Disponible en: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/100/Articulos_25.pdf.

Consejo Federal de Educación (2010). *Las Políticas de Inclusión Digital Educativa: El Programa Conectar Igualdad*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Disponible en: http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL004843.pdf.

Consejo Federal de Educación (2011). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Matemática. Ciclo Básico común 1° y 2°/ 2° y 3° Años*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Disponible en: http://www.bnm.me.gov.ar/giga1/documentos/EL004315.pdf.

Consejo General de Educación (2010). *Diseño curricular de la provincia de Entre Ríos. Tomo I*. Paraná: Ministerio de Gobierno, Justicia y Educación de Entre Ríos. Disponible en: https://isptconcordia-ers.infd.edu.ar/sitio/upload/Dise%F1o-Curricular-de-Educacion-Secundaria-Tomo-I.pdf.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon. Revista de la SAEM Thales*, (26), 15-29. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/280527242_EL_PAPEL_Y_LA_FUNCION_DE_LA_DEMOSTRACION_EN_MATEMATICAS.

De Villiers, M. (1996). Algunos desarrollos en enseñanza de la geometría. En *The Future of Secondary School Geometry, SOSI Geometry Imperfected Conference*. Pretoria: University of South Africa. Disponible en: http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/future.pdf.

Didoné, A. y Miotti, A. (2014). Una propuesta para la enseñanza de la geometría: de la exploración a la demostración con recursos tecnológicos. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. Buenos Aires, noviembre. Disponible en: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjZ7NnZ5JjsAhX9HrkGHdpWDXYQFjAAegQIBhAC&url=https%3A%2F%2Fwww.oei.es%2Fhistorico%2Fcongreso2014%2Fmemoriactei%2F254.pdf&usg=AOvVaw0_COxkkY0fAB1WJpAjjCq0.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162. Disponible en: http://web.math.unifi.it/users/dolcetti/Fischbein.pdf.

Font, V., Planas, N. y Godino, J.D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/282325707_Modelo_para_el_analisis_didactico_en_educacion_matematica.

García López, M. (2011). *Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula*. Tesis Doctoral. Almería: Universidad de Almería. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/1768/2/Garcia2011Evolucion.pdf.

García, S. y López, O. (2008). *La enseñanza de la geometría*. Ciudad de México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. Disponible en: https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D401.pdf.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/ontosemiotic_approach.pdf.

Godino, J.D., Font, V. y Wilhelmi M. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, *38*, 25-49. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/282325706_Analisis_didactico_de_procesos_de_estudio_matematico_basado_en_el_enfoque_ontosemiotico.

Godino, J.D. y Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicancias para la educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias didácticas*, *19*(3), 405-414. Disponible en: https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21763/21597

Götte, M. y Mántica, A.M. (2019). 111 propuestas en ambientes dinámicos que ponen en jaque imágenes conceptuales. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *101*, 7-18. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/14804/1/Gotte2019111.pdf.

Götte, M., Renzulli, F. y Scaglia, S. (2009). *Propuesta para trabajar la conjetura y validación de propiedades geométricas*. Santa Fe: Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.

Gutiérrez, A. (2007). Geometría, demostración y ordenadores. *Actas de las 13as JAEM* (p.s.n.). Granada: Universidad de Granada. Disponible en:

https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwiJgN6d55jsAhXUK7kGHQ9nDkgQFjAAegQIBRAC&url=http%3A%2F%2Fcefire.edu.gva.es%2Fpluginfile.php%2F49585%2Fmod_folder%2Fcontent%2F0%2Fgeometria_demostracion_ordenadores.pdf%3Fforcedownload%3D1&usg=AOvVaw0_3gjh9KMJKV0vm19i_d1s.

Gutiérrez, A. (2008). *Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica*. Valencia: Universidad de Valencia. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/1312/1/Gutierrez2005Aspectos_SEIEM_27.pdf.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 103-117. Hiroshima: Universidad de Hiroshima. Disponible en: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED452031.pdf#page=138.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires: Libros del Zorzal. Disponible en: https://juliobaigorria.files.wordpress.com/2016/04/iniciacic3b3n-al-estudio-didc3a1ctico-de-la-geometrc3ada-horacio-itzcovich.pdf.

Larios Osorio, V., Pino-Fan, L.R. y González González, N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (12), 39-57. Disponible en: https://www.aiem.es/index.php/aiem/issue/view/15/AIEM%2C%20n%C3%BAmero%2012.

Losada, R., Sada, M., Mora, J.A. y Arranz, J.M. (2007-2012). *Geometría. Geometría Dinámica*. Disponible en: https://geometriadinamica.es/geometra-dinmica-mainmenu-108.

Manzano Mozo, F.J. (2017). *Mecanismos articulados para trazar curvas como recurso educativo digital para la didáctica de las matemáticas en Secundaria y Bachillerato*. Tesis Doctoral. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid. Disponible en: https://www.researchgate.net/profile/Javier_Manzano3/publication/321825929_Mecanismos_articulados_para_trazar_curvas_como_recurso_educativo_digital_para_la_didactica_de_las_matematicas_en_Secundaria_y_Bachillerato/links/5a339e78458515afb691dc69/Mecanismos-articulados-para-trazar-curvas-como-recurso-educativo-digital-para-la-didactica-de-las-matematicas-en-Secundaria-y-Bachillerato.pdf.

Ministerio de Educación e Innovación (2018a). *Construcciones de cuadriláteros con GeoGebra. Profundización NES*. Buenos Aires: Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Disponible en: https://www.buenosaires.gob.ar/sites/gcaba/files/profnes_matematica_-_construcciones_de_cuadrilateros_con_geogebra_-_estudiantes_-_final.pdf.

Ministerio de Educación e Innovación (2018b). *Matemática: la calculadora de triángulos rectángulos. Profundización NES*. Buenos Aires: Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Disponible en: https://www.buenosaires.gob.ar/sites/gcaba/files/profnes_mate_y_prog_-_la_calculadora_de_triangulos_-_docentes_-_final.pdf.

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Coords.). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesorado de secundaria.* (pp.243-257). Madrid: Pirámide. Disponible en: https://www.academia.edu/35883789/Elementos_de_Did%C3%A1ctica_de_la_Matem%C3%A1tica_para_el_Profesor_de_Secundaria.

Novembre, A., Nicodemo, M. y Coll, P. (2015). *Matemática y TIC - Orientaciones para la enseñanza*. Buenos Aires: ANSES. Disponible en: http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/conectarigualdad-matematica-1-tic.pdf.

Podestá, P. (Comp.) (2011). *Geometría: Serie para la enseñanza del modelo 1 a 1*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Disponible en: https://openlibra.com/es/book/download/geometria-serie-para-la-ensenanza-en-el-modelo-1-a-1.

Recio, A.M. (2001). La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. *Quinto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática. Almería*, septiembre. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/39485226_La_demostracion_en_matematica_Una_aproximacion_epistemologica_y_didactica.

Segade Pampín, M.E. y Naya Riveiro, C. (2018). Secuencia didáctica para el estudio de los triángulos en Educación Primaria con Geogebra y un primer análisis. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *98*, 163-177. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/12893/1/Segade2018Secuencia.pdf.

Serrano, M., Peña, J. y Vera S. (s.f.). Cuadriláteros. *Educ.ar*. Disponible en: https://cdn.educ.ar/dinamico/UnidadHtml__get__e3901b2e-c84e-11e0-8368-e7f760fda9_40/index.htm.

Universidad Autónoma de Entre Ríos (2012). *Plan de Estudios de Educación Secundaria*.

Disponible en: http://fhaycs-uader.edu.ar/files/2016/normativas_escuelas/PLAN_DE_ESTUDIOS_RES_1540-12.pdf.

Vargas, E.B. (s.f.). Aprendiendo sobre triángulos y sus propiedades con Geogebra. *Educ.ar*. Disponible en: https://mencioneseducaciondigital.educ.ar/experiencia/1994.

Bibliografía enviada desde el Ministerio de Educación a las instituciones escolares

Berman, A., Dacunti, D., Pérez, M. y Veltri, A. (2011). *Matemática II*. Buenos Aires: Nuevamente Santillana.

Chemello, G., Agrasar, A., Crippa, M. y Díaz, A. (2011). *Matemática 8: Anexo teórico + trabajos prácticos*. Buenos Aires: Longseller.

Podestá, P. (2011). *Geometría: Serie para la enseñanza del modelo 1 a 1*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Sessa, C., Borsani, V., Lamela, C. y Murúa, R. (2018). *Hacer Matemática 1/2* (1ª ed, 1ª reimp). Buenos Aires: Estrada.