

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL



DOCTORADO EN INGENIERÍA

**Estimación y control
simultáneos de sistemas no
lineales sujetos a perturbaciones
acotadas utilizando métodos de
horizonte móvil**

Nestor Nahuel Deniz

FICH

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

INTEC

INSTITUTO DE DESARROLLO TECNOLÓGICO PARA LA INDUSTRIA
QUÍMICA

CIMEC

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DE MÉTODOS COMPUTACIONALES

$\text{sinc}(i)$

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN SEÑALES, SISTEMAS E
INTELIGENCIA COMPUTACIONAL

Tesis de Doctorado **2020**



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química
Centro de Investigación de Métodos Computacionales
Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

**ESTIMACIÓN Y CONTROL SIMULTÁNEOS
DE SISTEMAS NO LINEALES SUJETOS
A PERTURBACIONES ACOTADAS
UTILIZANDO MÉTODOS DE
HORIZONTE MÓVIL**

Nestor Nahuel Deniz

Tesis remitida al Comité Académico del Doctorado
como parte de los requisitos para la obtención
del grado de
DOCTOR EN INGENIERÍA
Mención Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas
de la
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

2020



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química
Centro de Investigación de Métodos Computacionales
Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia
Computacional

ESTIMACIÓN Y CONTROL SIMULTÁNEOS
DE SISTEMAS NO LINEALES SUJETOS
A PERTURBACIONES ACOTADAS
UTILIZANDO MÉTODOS DE
HORIZONTE MÓVIL

Nestor Nahuel Deniz

Lugar de Trabajo:

$\text{sinc}(i)$

Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional.
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas.
Universidad Nacional del Litoral

Director:

Dr. Leonardo Luis Giovanini

$\text{sinc}(i)$ -CONICET-UNL

Jurado Evaluador:

Dr. Ernesto Kofman

CIFASIS-CONICET

Dr. José Luis Godoy

INTEC-CONICET-UNL

Dr. Antonio Ferramosca

INTEC-CONICET-UTN FRRq

Dr. Pablo Lotito

PLADEMA-CNEA

2020

2020

Año del General
Manuel Belgrano



ACTA DE EVALUACIÓN DE TESIS DE DOCTORADO

En la sede de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral, a los veintidós días del mes de mayo del año dos mil veinte, se reúnen en forma virtual los miembros del Jurado designado para la evaluación de la Tesis de Doctorado en Ingeniería titulada “*Estimación y control simultáneos de sistemas no lineales sujetos a perturbaciones acotadas utilizando métodos de horizonte móvil*”, desarrollada por el Ing. Néstor Nahuel DENIZ, DNI N° 32.695.848. Ellos son: Dr. Ernesto Javier Kofman, Dr. José Luis Godoy, Dr. Antonio Ferramosca y Dr. Pablo Andrés Lotito.

La presentación oral y defensa de la Tesis se efectúa bajo la modalidad virtual según lo establecido por resolución de Rector N° 529/ 20 y resolución de Decano ad Referéndum N° 078/20.

Luego de escuchar la Defensa Pública y de evaluar la Tesis, el Jurado resuelve:

*Aprobar la evaluación en virtud de las mejoras introducidas en el nuevo documento de la Tesis, de la correcta exposición de los resultados en la defensa pública y de la sólida respuesta a las preguntas de los jurados.
El jurado, por unanimidad, decide además otorgar la calificación de Distinguido (9).*

Sin más, se da por finalizado el Acto Académico con la firma de los miembros del jurado al pie de la presente.-----

.....
Dr. Ernesto Javier Kofman

.....
Dr. José Luis Godoy

.....
Dr. Antonio Ferramosca

.....
Dr. Pablo Andrés Lotito

Dr. José Luis Macor
DNI 14830760
Secretario de Posgrado
FICH

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y
Ciencias Hídricas
Secretaría de Posgrado

Ciudad Universitaria – C.C. 217
Ruta Nacional N° 168 – Km 472,4
(3000) Santa Fe – Argentina
Tel: (54)(0342) 4575 233 / 245 / 246 – int. 103
Fax: (54) (0342) 4575 224
E-mail: posgrado@fich.unl.edu.ar

2020

Año del General
Manuel Belgrano



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Santa Fe, 22 de Mayo de 2020.

Como miembros del Jurado Evaluador de la Tesis de Doctorado en Ingeniería titulada "*Estimación y control simultáneos de sistemas no lineales sujetos a perturbaciones acotadas utilizando métodos de horizonte móvil*", desarrollada por el Ing. Néstor Nahuel DENIZ, en el marco de la Mención "Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas", certificamos que hemos evaluado la Tesis y recomendamos que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor en Ingeniería.

La aprobación final de esta disertación estará condicionada a la presentación de dos copias encuadradas de la versión final de la Tesis ante el Comité Académico del Doctorado en Ingeniería.

.....
Dr. Ernesto Javier Kofman

.....
Dr. José Luis Godoy

.....
Dr. Antonio Ferramosca

.....
Dr. Pablo Andrés Lotito

Santa Fe, 22 de Mayo de 2020.

Certifico haber leído la Tesis, preparada bajo mi dirección en el marco de la Mención "Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas" y recomiendo que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor en Ingeniería.

.....
Dr. Leonardo Luis Giovanini
Director de Tesis

Dr. José Luis Mécor
DNI 14030760
Secretario de Posgrado
FICH.

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y
Ciencias Hídricas

Secretaría de Posgrado

Ciudad Universitaria – C.C. 217
Ruta Nacional Nº 168 – Km 472,4
(3000) Santa Fe – Argentina
Tel: (54)(0342) 4575 233 / 245 / 246 – int. 103
Fax: (54) (0342) 4575 224
E-mail: posgrado@fich.unl.edu.ar

DECLARACIÓN DEL AUTOR

Esta tesis ha sido remitida como parte de los requisitos para la obtención del grado académico de Doctor en Ingeniería - Mención Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas ante la Universidad Nacional del Litoral y ha sido depositada en la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas para que esté a disposición de sus lectores bajo las condiciones estipuladas por el Reglamento de la mencionada Biblioteca.

Citaciones breves de esta tesis son permitidas sin la necesidad de un permiso especial, en la suposición de que la fuente sea correctamente citada. Solicitudes de permiso para la citación extendida o para la reproducción parcial o total de este manuscrito serán concebidos por el portador legal del derecho de propiedad intelectual de la obra.

Aclaración:

La presente tesis se encuentra organizada bajo el formato de Tesis por Compilación, aprobado en la resolución N° 255/17 (Expte. N° 888317-17) por el Comité Académico de la Carrera Doctorado en Ingeniería, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral (UNL). De dicha resolución:

“En el caso de optar por la Tesis por Compilación, ésta consistirá en una descripción técnica de al menos 30 páginas, redactada en español e incluyendo todas las investigaciones abordadas en la tesis. Se deberán incluir las secciones habituales indicadas a continuación en la Sección Contenidos de la Tesis. Los artículos científicos publicados por el autor, en el idioma original de las publicaciones, deberán incluirse en un Anexo con el formato unificado al estilo general de la Tesis indicado en la Sección Formato. El Anexo deberá estar encabezado por una sección donde el tesista detalle para cada una de las publicaciones cuál ha sido su contribución. Esta sección deberá estar avalada por su director de Tesis. El documento central de la Tesis debe incluir referencias explícitas a todas las publicaciones anexadas y presentar una conclusión que muestre la coherencia de dichos trabajos con el hilo conceptual y metodológico de la tesis. Los artículos presentados en los anexos podrán ser artículos publicados, aceptados para publicación (en prensa) o en revisión.”

Agradecimientos

A mi familia por el apoyo incondicional. A mi director, Dr. Leonardo Giovanini, por las numerosas y fructíferas discusiones en frente al pizarrón, a mis compañeros del $\text{sinc}(i)$, y a Natalia, por la paciencia casi inagotable.

Finalmente, quiero agradecer a las siguientes instituciones:

- $\text{sinc}(i)$: Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional.
- Facultad de Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral.
- CONICET: Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

Nestor Nahuel Deniz

Santa Fe, 19 de noviembre de 2019.

Índice general

| | |
|--|-----------|
| Resumen | xiv |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Principio de separación | 2 |
| 1.2. Objetivos | 5 |
| 1.3. Antecedentes | 6 |
| 1.4. Organización de la tesis | 8 |
| 2. Elementos para el análisis de sistemas no lineales | 10 |
| 2.1. Conceptos y definiciones | 10 |
| 3. Estimación de estados con horizonte móvil | 16 |
| 3.1. Estimación robusta | 17 |
| 3.1.1. Esquema de estimación propuesto | 17 |
| 3.1.2. Relación entre MHE , FIE y el costo de arribo | 18 |
| 3.1.3. Análisis de estabilidad | 19 |
| 3.1.4. Ejemplo | 23 |
| 3.2. Estimación adaptativa politópica | 27 |
| 3.2.1. Esquema de estimación propuesto | 28 |
| 3.2.2. Esquema de estimación dual | 29 |
| 3.2.3. Excitación persistente | 30 |
| 3.2.4. Análisis de estabilidad de la estimación dual | 31 |
| 3.2.5. Estabilidad robusta | 32 |
| 3.2.6. Ejemplos | 35 |
| 4. Estimación y control simultáneos | 41 |
| 4.1. Estimación y control simultáneos | 43 |
| 4.2. Relación con MHE y MPC | 44 |
| 4.3. Estabilidad robusta | 45 |
| 4.3.1. Ventana de estimación | 45 |
| 4.3.2. Ventana de control | 46 |
| 4.3.3. Cálculo de la longitud del horizonte de control | 51 |

| | |
|---|------------|
| 4.3.4. Ejemplos | 52 |
| 5. Aplicaciones | 62 |
| 5.1. Problema de guiado | 64 |
| 5.2. Problema de navegación | 65 |
| 5.3. Planeamiento de trayectorias | 67 |
| 5.4. Ejemplo | 68 |
| 6. Conclusiones y Trabajos Futuros | 73 |
| 6.1. Conclusiones | 73 |
| 6.2. Artículos | 74 |
| 6.3. Trabajos futuros | 74 |
| Anexos | 77 |
| A. Robust stability of moving horizon estimation for nonlinear systems with bounded disturbances using adaptive arrival cost | 80 |
| B. Multiple model approach for robust state estimation in presence of model uncertainty and bounded disturbances | 106 |
| C. Simultaneous state estimation and control for nonlinear systems subject to bounded disturbances | 138 |
| D. Towards autonomy in unmanned vehicles using receding horizon strategies | 160 |
| E. MPC for nonlinear systems: a comparative review of discretization methods | 176 |
| F. Moving Horizon Estimation for GNSS-IMU sensor fusion | 194 |

Índice de figuras

| | |
|---|----|
| 3.1. Comparación entre los diferentes algoritmos de estimación de horizonte móvil ADAP (trazo rojo), MAX (trazo azul), FIEMAX (trazo verde) y el estado real del sistema (trazo negro solido) para diferentes longitudes del horizonte de estimación ($N = 2, 5$ y 10). | 24 |
| 3.2. Comparación de la evolución de $\text{tr}(P_{k-N}^{-1})$ usada por el estimador ADAP para ruido de medición variante en el tiempo (rojo) y constante (azul). | 26 |
| 3.3. Comparación entre los diferentes algoritmos de estimación de horizonte móvil. IT. DUAL (azul), NOCONVEXO (rojo) y estado real (negro) con dos modelos fijos y $N_e = 3$ | 36 |
| 3.4. Coeficientes de mezcla de los modelos. | 37 |
| 3.5. Evolución del costo en función del tiempo y del número de iteraciones. | 37 |
| 3.6. Tiempos de ejecución de los algoritmos. IT. DUAL (azul), NOCONVEXO (roja). | 38 |
| 3.7. Comparación entre los diferentes algoritmos de estimación de horizonte móvil. IT. DUAL (azul), NOCONVEXO (rojo) y estado real (negro) con diez modelos fijos y $N_e = 3$ | 38 |
| 3.8. Coeficientes de mezcla de los modelos en escala logaritmica. | 39 |
| 3.9. Evolución del costo en función del tiempo y del número de iteraciones con diez modelos. | 39 |
| 3.10. Tiempos de ejecución de los algoritmos. IT. DUAL (barra azul), NOCONVEXO (barra roja) con diez modelos. | 40 |
| 4.1. Evolución de los estados x_1 y x_2 , acciones de control u_1 y u_2 , y tiempo de computo para $MHE+MPC$ (rojo) y $MHE-MPC$ simultáneo (azul). | 54 |
| 4.2. Evolución de los estados x_1, x_2 y x_3 , acciones de control u_1 y u_2 , y tiempo de computo para $MHE+MPC$ (rojo) y $MHE-MPC$ simultáneo (azul) con horizontes $N_e = 15$ y $N_c = 15$ | 56 |
| 4.3. Evolución de los estados x_1, x_2 y x_3 , acciones de control u_1 y u_2 , y tiempo de computo para $MHE+MPC$ (rojo) y $MHE-MPC$ simultáneo (azul) con horizontes $N_e = 15$ y $N_c = 5$ | 57 |

| | | |
|-------|---|----|
| 4.4. | Estados reales x_k (negro) y estimados por el <i>MHE</i> independiente (rojo). | 57 |
| 4.5. | Evolución de los estados x_1 y x_2 para el problema de regulación para <i>MHE+MPC</i> (rojo) y <i>MHE-MPC</i> simultáneo (azul) con horizontes $N_e = 10$ y $N_c = 25$. | 58 |
| 4.6. | Evolución de las acciones de control u_k y tiempos de computo utilizados para el problema de regulación por <i>MHE+MPC</i> (rojo) y <i>MHE-MPC</i> simultáneo (azul) con horizontes $N_e = 10$ y $N_c = 25$. | 59 |
| 4.7. | Evolución de los estados x_1 y x_2 para el problema de regulación para <i>MHE+MPC</i> (rojo) y <i>MHE-MPC</i> simultáneo (azul) con horizontes $N_e = 5$ y $N_c = 25$. | 59 |
| 4.8. | Evolución de las acciones de control u_k y tiempos de computo utilizados para el problema de regulación por <i>MHE+MPC</i> (rojo) y <i>MHE-MPC</i> simultáneo (azul) con horizontes $N_e = 5$ y $N_c = 25$. | 60 |
| 4.9. | Evolución de los estados x_1 y x_2 para el problema de regulación para <i>MHE+MPC</i> (rojo) y <i>MHE-MPC</i> simultáneo (azul) con horizontes $N_e = 2$ y $N_c = 25$. | 60 |
| 4.10. | Evolución de las acciones de control u_k y tiempos de computo utilizados para el problema de regulación por <i>MHE+MPC</i> (rojo) y <i>MHE-MPC</i> simultáneo (azul) con horizontes $N_e = 2$ y $N_c = 25$. | 61 |
| 5.1. | Trayectorias calculada, verdadera y estimada | 70 |
| 5.2. | Acciones de control | 71 |
| 5.3. | Errores de guiado | 71 |
| 5.4. | Errores de estimación | 72 |

Índice de tablas

| | |
|---|----|
| 3.1. Error cuadrático medio promediado sobre 300 simulaciones y para diferentes horizontes. | 26 |
| 4.1. Horizontes de control para restricciones $ u_1 \leq 0.25, u_2 \leq 0.25$ | 53 |
| 4.2. Horizontes de control para restricciones $ u_1 \leq 0.15, u_2 \leq 0.15$ | 53 |
| 4.3. Valores numéricos de los parámetros del CSTR. | 55 |

Notación

| | |
|---|--|
| \mathbb{R} | conjunto de los números reales. |
| $\mathbb{R}_{\geq 0}$ | conjunto de los números reales mayores o iguales que cero. |
| \mathbb{R}^n | espacio de n dimensiones. |
| $\mathbb{R}^{m \times n}$ | espacio de $m \times n$ dimensiones. |
| \mathbb{Z} | conjunto de los números enteros. |
| $\mathbb{Z}_{\geq a}$ | conjunto de los números enteros mayores o igual a a . |
| \exists | existe al menos un elemento. |
| $ x $ | norma euclídea del vector x ; valor absoluto del escalar x . |
| \in | es un elemento de. |
| \forall | para todo. |
| \implies | implica. |
| $\not\implies$ | no implica. |
| \impliedby | es implicado. |
| $\not\impliedby$ | no es implicado. |
| $a := b$ | a es definido igual a b . |
| $a =: b$ | b es definido igual a a . |
| $V(\cdot)$ | función V . |
| $V : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ | La función V mapea el conjunto \mathbb{A} al conjunto \mathbb{B} . |
| x | vector de estados del sistema. |
| x_k | vector de estados del sistema a tiempo k . |
| \hat{x} | vector de estados a tiempo j estimado en tiempo k . |
| $\hat{x}_{j k}$ | vector de estado estimado a tiempo j del sistema calculada en tiempo k . |
| \mathbf{x} | secuencia infinita de los elementos, $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$. |
| $\mathbf{x}_{[a,b]}$ | secuencia finita de los elementos, $\mathbf{x} = (x_a, \dots, x_b)$, $b > a$, $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. |
| $\ \mathbf{x}\ $ | superior de la secuencia infinita, $\ \mathbf{x}\ := \sup_{i \geq 0} x_i $. |
| $\ \mathbf{x}\ _{[a,b]}$ | superior de la secuencia finita $\ \mathbf{x}\ _{[a,b]} := \sup_{a \leq i \leq b} x_i $. |
| $\text{tr}(A)$ | traza de la matriz A . |
| $\lambda(A)$ | autovalores de la matriz A . |
| $\lambda_{\min}(A)$ | mínimo autovalor de la matriz A . |
| $\lambda_{\max}(A)$ | máximo autovalor de la matriz A . |
| A^{-1} | inversa de la matriz A . |
| A^T | transpuesta de la matriz A . |
| s.t. | sujeto a. |
| \oplus | suma de Minkowski. |
| \ominus | diferencia de Pontryagin (o diferencia de Minkowski). |
| $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ | unión de los conjuntos A y B . |
| $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$ | intersección de los conjuntos A y B . |

| | |
|---------------------------|---|
| $A \subseteq B$ | el conjunto A es un subconjunto del conjunto B . |
| $A \subset B$ | el conjunto A es un subconjunto propio del conjunto B . |
| $A \supset B$ | el conjunto A es un superconjunto propio del conjunto B . |
| $A \supseteq B$ | el conjunto A es un superconjunto del conjunto B . |
| $\Psi(r, s)$ ¹ | costo de la función objetivo con variables de optimización r y s . |
| $\Psi^*(r^*, s^*)$ | costo óptimo de la función objetivo. |
| $\Psi^{(i)}$ | costo incurrido en la i -ésima iteración, $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. |
| Ψ_C | Costo de control. |
| $\Psi_{C,k}$ | Costo de control a tiempo k . |
| Ψ_{C,k,N_c} | Costo de control a tiempo k con N_c términos. |
| Ψ_E | Costo de estimación. |
| $\Psi_{E,k}$ | Costo de estimación a tiempo k . |
| Ψ_{E,k,N_e} | Costo de estimación a tiempo k con N_e términos. |
| Ψ_M | Costo de estimación del modelo. |
| \mathbb{R}^{Ψ_E} | Dominio de \mathbb{R}^{Ψ_E} . |
| \mathbb{R}^{Ψ_M} | Dominio de \mathbb{R}^{Ψ_M} . |
| \mathbf{e} | Punto fijo de \mathbb{R}^{Ψ_E} . |
| \mathbf{m} | Punto fijo de \mathbb{R}^{Ψ_M} . |
| $d(a, b)$ | Distancia euclídea entre los puntos a y b . |
| $\mathbf{0}$ | secuencia de ceros de dimensión apropiada. |
| I | matriz identidad de dimensiones apropiadas. |
| N_e | horizonte de estimación. |
| N_c | horizonte de control. |

¹Cuando quede claro por el contexto, los argumentos de las formulaciones de los problemas de optimización serán omitidos. De igual manera se omitirán los argumentos de las funciones.

Resumen

En esta tesis se aborda el problema de estimación y control simultáneos de sistemas no lineales sujetos a perturbaciones acotadas mediante técnicas de horizonte móvil. La tesis está compuesta de tres partes. La primer parte se enfoca en el problema de estimación de estados en sistemas no lineales sujeto a perturbaciones acotadas. El método de estimación propuesto utiliza un mecanismo de adaptación que actualiza el costo de arriba en función del error de estimación. En la segunda parte se aborda el problema de estimación cuando se conoce de manera parcial el modelo del sistema. La estimación simultánea de los estados y parámetros del modelo del sistema resulta en la formulación de un problema con restricciones no convexas. Para evitar resolver este tipo de problema, se propone un esquema de estimación dual que estima estados y parámetros del modelo dentro de un esquema de iteración de punto fijo. La iteración consiste en resolver de manera secuencial dos problemas. El primero estima los estados del sistema utilizando el modelo disponible, mientras que el segundo mantiene constante la trayectoria estimada, y calcula los parámetros óptimos del modelo. Para un mismo instante de tiempo, se resuelven varias iteraciones de estimación dual, hasta alcanzar un criterio de detención.

La tercer parte constituye el tema central de ésta tesis, y consiste en complementar el estimador con un controlador, resolviendo ambos problemas de manera simultánea. El problema de control se encarga de calcular las entradas óptimas que llevará a los estados del sistema a la zona de operación deseada. Los problemas de estimación y control pueden resolverse de manera independiente. Para preservar la estabilidad y optimalidad de las soluciones al resolver ambos problemas por separado, deben satisfacerse las condiciones sobre las cuales es válido aplicar el principio de separación. Cuando existen perturbaciones externas actuando sobre el sistema, validar el principio de separación puede convertirse en un problema desafiante. Sin embargo, cuando el sistema es lineal, el ruido es gaussiano, no existen restricciones sobre los estados y/o entradas y se conoce perfectamente el modelo del sistema, es posible separar el estimador del observador y mantener la estabilidad y optimalidad. Empero, cuando no se cumplen las condiciones mencionadas, en general, no es posible separar el estimador del controlador sin perder al menos la optimalidad de las soluciones. Algunos resultados pueden obtenerse para sistemas particulares, y bajo

condiciones muy restrictivas. El problema puede tornarse aun mas desafiante si no se dispone de un modelo preciso del sistema y existen restricciones sobre los estados y/o entradas.

En esta tesis formulamos los problemas de estimación y control como un solo problema en el cual se estima la trayectoria de estados y se calcula la secuencia de acciones de control que llevará el estado del sistema a la zona de operación deseada, a pesar de las perturbaciones, ruidos de medición, incertidumbre y restricciones actuando sobre el sistema. Esta formulación conjunta de los problemas de estimación y control hace innecesaria la verificación de la validez del principio de separación para cada caso particular. Estabilidad y convergencia son establecidas en función de las longitudes de los horizontes de estimación y control para las perturbaciones y las propiedades del sistema dados. Casos de simulación son utilizados para validar los resultados y comparar el desempeño de los algoritmos propuestos con los del estado del arte.

Abstract

This thesis deals with the problem to solve simultaneously the estimation and control problem for nonlinear systems subject to bounded disturbances by mean of receding horizon techniques. The thesis has three main sections. The first part focuses on the problem of state estimation for nonlinear systems subject to bounded disturbances. The proposed estimation method makes use of an adaptive technique which updates the arrival-cost weight matrix as a function of the estimation error. The second part regards the estimation problem for the case when there is no available a model of the system. As the simultaneous state and parameters estimation arise in the formulation of a non-convex problem, we propose a scheme of dual iteration which estimates the state and parameters of the system within a fixed-point iteration formulation. The fixed-point iteration consists of solving sequentially the state estimation with the latest available model, and then, maintaining constant the state trajectory estimates the parameters of the system. For the same sampling-instant, several iterations of the dual estimation are solved until a stop criterion is reached.

The third section consists of complement the estimator with a controller. The control problem deals with the computation of the optimal control actions, according to a performance index, required to steer the system to the desired operation zone. The estimation and control problems can be solved independently one of another. To preserve the stability and optimality of solutions when both problems are solved separated, the separation principle must be satisfied. When external noises and disturbances are present on the system, verify the separation principle can be a very challenging problem. However, for linear unconstrained systems, estimation and control problems can be separated maintaining stability and optimality of the solutions. Some results were obtained for particular nonlinear systems under very conservative assumptions. The problem can turn even more challenging when there is no model of the system available, and there exist constraints on the states and inputs.

In this thesis, we formulate the estimation and control problems as one, which simultaneously estimates the optimal state trajectory and compute the sequence of control actions which will steer the system to the desired operation region, despite the disturbances, noise measurements, uncertainties and constraints present on the

system. This formulation is independent on the conditions for which the separation principle is valid and avoid to verify it of formulating one for each particular case. Moreover, the minimum horizon lengths required for both the estimator and controller to guarantee stability and neglect the uncertainty in the initial conditions are analyzed. Stability and convergence analysis is given, as well as experiments to validate and compare the proposed algorithms with the available in the state of the art.

1 Introducción

En este capítulo se introducen los elementos esenciales asociados a la estimación y control y se provee una descripción general del problema de estimación y control simultáneos. La técnica de control empleada en esta tesis es la conocida como *Control Predictivo* (*MPC* - del inglés *Model Predictive Control*). *MPC* calcula las acciones de control óptimas a aplicar al sistema a partir de la predicción del comportamiento futuro del mismo, construida a partir de un modelo dinámico del sistema y la condición inicial en cada instante [1], [2], [3], [4]. Esto pone en evidencia la importancia de disponer de un modelo preciso. La decisión óptima depende del estado inicial del sistema, y cuando éste no puede ser medido, o es afectado por ruido, es necesario reconstruirlo. Para esto se utiliza la información disponible, que en general, son las mediciones de la salida del sistema. Existen varias técnicas de estimación y una de ellas está inspirada en el controlador predictivo. Esta técnica es conocida como *estimación de horizonte móvil* (*MHE* - del inglés *Moving Horizon Estimation*). Dentro de esta técnica de estimación existen dos grandes variantes: Un enfoque consiste en deslizar sólo uno de los horizontes, dejando fijo el que coincide con la medición inicial. Esto implica que en cada instante de tiempo en que se disponga de una medición nueva, la cantidad de muestras a incorporar en la formulación aumentará. Esta técnica se la conoce como *estimador de información completa* (*FIE* - del inglés *Full Information Estimator*). Como el *FIE* tiene en cuenta todas las mediciones disponibles, el error de estimación será, en general, menor en comparación con otras técnicas. Sin embargo, el *FIE* carece de importancia práctica, ya que a medida que la ventana incrementa su longitud, el problema se vuelve intratable desde un punto de vista computacional. Sin embargo, tiene una gran utilidad como estándar de comparación. La otra variante consiste en estimar los estados del sistema utilizando sólo una cantidad fija de información [5] y se la conoce genéricamente como *MHE*. Cuando se dispone de una medición nueva, se incorpora ésta última a la ventana, y se descarta la más vieja. Ambos horizontes, el inicial y el final, se deslizan simultáneamente. La información que queda fuera de la ventana se resume en un término extra que se conoce como *costo de arribo*. Esta información queda resumida en el vector \bar{x}_{k-N} , siendo la mejor estimación disponible del vector de estados del sistema al comienzo de la ventana de estimación. Cuanto mejor se logre resumir la información fuera de la ventana, el desempeño de *MHE* se aproximará al del *FIE*. En [6] se propuso un algoritmo adaptativo para sistemas lineales que ajusta los pesos de la matriz del costo de arribo en función del error de estimación, mejorando de esta manera el desempeño del estimador.

La estimación del estado actual del sistema $\hat{x}_{k|k}$ será la condición inicial para el *MPC*, a partir de la cual realizará la predicción de la evolución del sistema para tomar la mejor decisión posible. Cuanto mejor sea la estimación $\hat{x}_{k|k}$, más se parecerán las trayectorias de estados calculadas por el controlador y la real del sistema. Aquí se hace visible la estrecha relación entre estimador y controlador. Un interrogante que surge es si el estimador y el controlador pueden diseñarse de manera independiente uno del otro, simplificando el proceso de diseño.

1.1. Principio de separación

Uno de los principios fundamentales en la teoría de control es el **principio de separación**, que establece que los problemas de estimación y de control pueden desacoplarse sin perder la optimalidad de las soluciones [7]. Esto implica que el diseño del controlador puede realizarse suponiendo que se dispone de la medición de x_k , aunque no sea así y sólo se disponga del estimado $\hat{x}_{k|k}$. A continuación, presentaremos uno de los resultados más notables del principio de separación (para mayores detalles, ver [7], [8], [9], [10], [11], entre otros). Consideremos un sistema lineal de tiempo discreto

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Gw_k, \\y_k &= Cx_k + v_k,\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estados del sistema, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ es la acción de control, $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ es la salida medida, $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ y $v_k \in \mathbb{R}^{n_v}$ son los ruidos de proceso y medición, respectivamente, ambos con distribución normal y media cero, $A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ es la matriz de la dinámica del sistema, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ es la matriz de entrada, $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ es la matriz de la salida y $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$ es la matriz de entrada de los ruidos de proceso. Supongamos que la ley de control del sistema está dada por

$$u_k = -K\hat{x}_{k|k},\tag{1.2}$$

donde la matriz $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ es la ganancia del controlador, y el observador posee la siguiente estructura

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k} &= (A - LC)\hat{x}_{k|k} + Bu_k + L(y_k + v_k) + Gw_k, \\u_k &= -K\hat{x}_{k|k},\end{aligned}\tag{1.3}$$

siendo $L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$ la matriz de ganancia del estimador. El error de estimación está dado por $e_k = x_k - \hat{x}_{k|k}$, y su dinámica puede ser obtenida a partir de las ecuaciones

(1.1) y (1.3) como

$$\begin{aligned}
e_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Gw_k - ((A - LC) \hat{x}_{k|k} + Bu_k + L(y_k + v_k) + Gw_k), \\
&= (A - LC) x_k - (A - LC) \hat{x}_{k|k} - Lv_k, \\
&= (A - LC) e_k - Lv_k,
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Introduciendo (1.2) en (1.1) se tendrá que

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Gw_k, \\
&= Ax_k - BK \hat{x}_{k|k} + Gw_k, \\
&= (A - BK) x_k + BK e_k + Gw_k,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

y definiendo el nuevo vector de estados ampliados $z_k := [x_k, e_k]^T$, se puede expresar el sistema como

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ e_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - BK) & BK \\ 0 & (A - LC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ e_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

De la ecuación (1.6) puede observarse que el sistema será estable si los autovalores de los bloques $(A - BK)$ y $(A - LC)$ son estables. El primer bloque depende de las matrices A , B y K y el segundo de las matrices A , C y L . Por lo tanto, la estabilidad del estimador es independiente de la estabilidad del controlador. Si el sistema es controlable y observable, una elección adecuada de las matrices K y L garantizarán que el sistema ampliado sea estable. Este resultado prueba que cuando el sistema es lineal, aún si es afectado por ruidos de proceso y medición, el principio de separación es aplicable y la estimación puede separarse del control. Mas aún, cuando los ruidos de proceso y medición poseen distribución normal con media cero, las soluciones óptimas a los problemas independientes de estimación y control corresponden al filtro de *Kalman* y al *regulador lineal cuadrático (LQR)*, respectivamente [12].

Supongamos ahora que sólo se dispone de un modelo aproximado, en donde $\Delta A \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\Delta B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $\Delta C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ representan la incertidumbre sobre las matrices del sistema. Supondremos además que la incertidumbre está acotada por una cantidad finita, y, sin pérdida de generalidad, supondremos que $\Delta G = \mathbf{0}$ por simplicidad. Entonces la ecuación del observador será

$$\hat{x}_{k+1|k} = (A + \Delta A - L(C + \Delta C)) \hat{x}_{k|k} + (B + \Delta B) u_k + L(y_k + v_k) + Gw_k \tag{1.7}$$

Supongamos que la ley de control es la dada por la Ecuación (1.3). El error de estimación

es $e_k = x_k - \hat{x}_{k|k}$. La dinámica del error puede expresarse en este caso como sigue

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Gw_k - ((A + \Delta A - L(C + \Delta C)) \hat{x}_{k|k} + \\ &\quad (B + \Delta B)u_k + L(y_k + v_k) + Gw_k), \\ &= (A - LC)e_k - (\Delta A - L\Delta C)\hat{x}_{k|k} + \Delta Bu_k - Lv_k. \end{aligned} \quad (1.8)$$

definiendo el vector de estados ampliados $z_k := [x_k, \hat{x}_{k|k}, e_k]^T$, la dinámica del sistema estará dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \hat{x}_{k+1|k} \\ e_{k+1} \end{bmatrix} &= \\ \begin{bmatrix} (A - BK) & 0 & BK \\ LC & (A + \Delta A - L(C + \Delta C) - (B + \Delta B)K) & 0 \\ 0 & -(\Delta A - L\Delta C - \Delta BK) & (A - LC) \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} x_k \\ \hat{x}_{k|k} \\ e_k \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} G & 0 \\ G & L \\ 0 & -L \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Las ecuaciones (1.8) y (1.9) sugieren que para el caso de sistemas lineales con incertidumbre de modelado, las dinámicas del estimador y controlador quedan acopladas. En este caso no se puede anticipar resultado alguno respecto de la estabilidad del sistema ampliado. Asimismo, el cálculo de las matrices K y L queda en función de cantidades desconocidas, pero acotadas. Si se dispusiera de un mecanismo de estimación del modelo, tal que $\Delta A \rightarrow 0$, $\Delta B \rightarrow 0$ y $\Delta C \rightarrow 0$ con $k \rightarrow \infty$, la Ecuación (1.9) se reduce a la Ecuación (1.6).

El problema gana complejidad si además se incorporan restricciones sobre los estados y/o entradas, de manera tal que $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ y $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}$. Si bien el problema de control de sistemas con restricciones ha sido abordado en la literatura [13], [14], las condiciones bajo las cuales el principio de separación es válido, podrían dejar de cumplirse, y separar los problemas de estimación y control podría resultar en el mejor de los casos, en la pérdida de optimalidad de las soluciones.

Hasta aquí se ha visto como interactúan la estimación y el control en la dinámica de sistemas lineales con y sin incertidumbre sujetos a perturbaciones acotadas. Cuando el sistema presenta no linealidades, el análisis se torna más desafiante. En cada caso se deberá analizar las condiciones de validez del principio de separación. En [15] por ejemplo, se enuncia un principio de separación que es válido para el posicionamiento dinámico de una clase específica de embarcaciones. En [16] se enuncia un principio de separación que es válido para sistemas no lineales de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B[f(x, z) + G(x, z)u], \\ \dot{z} &= \psi(x, z, u), \\ y &= Cx, \\ \zeta &= q(x, z), \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde la entrada al sistema es $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ y $\zeta \in \mathbb{R}^{n_z}$ son mediciones de las salidas, $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ y $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ constituyen el vector de estados. En [17] se enuncia un principio de separación para una clase de sistemas no lineales con retardo que satisfacen ciertas condiciones relajadas de tipo triangular.

Por lo tanto, el principio de separación tiene validez sólo cuando el sistema es lineal y no existe incertidumbre de modelado. Si además existen restricciones en los estados y/o entradas, o si los ruidos de proceso y medición no tienen distribución normal, se pierde la optimalidad de las soluciones. Sin embargo, abordar el problema de estimación y control bajo estas condiciones tiene un gran interés práctico porque representan la mayoría de los problemas de utilidad. En este caso, tres posibles metodologías se pueden seguir:

- 1) Analizar y validar un principio de separación para el sistema específico.
- 2) Suponer la validez del principio de separación y realizar la estimación y el control del sistema de manera independientes uno del otro, resignando la optimalidad de las soluciones.
- 3) Resolver los problemas de estimación y control de manera simultáneas, teniendo en cuenta el acople entre estimador y controlador.

En ésta tesis se abordará el problema de estimación y control mediante un enfoque simultáneo. Las razones y motivos de tal elección se darán a continuación, así como también los objetivos generales y específicos del presente trabajo.

1.2. Objetivos

El objetivo general de esta tesis consiste en el desarrollo y análisis de algoritmos de estimación y control simultáneos para sistemas no lineales sujetos a perturbaciones y restricciones. Los objetivos específicos son enumerados a continuación:

- Desarrollo y análisis de un algoritmo de estimación robusto para sistemas no lineales sujeto a perturbaciones acotadas utilizando el algoritmo de adaptación del costo de arribo propuesto en [6].
- Incorporar al algoritmo de estimación robusta la estimación de parámetros del sistema. La estimación de los parámetros se aborda desde un enfoque de múltiples modelos. Para evitar la formulación de un problema con restricciones no convexas, se plantea resolver un esquema de iteración dual.
- Incorporar a la formulación del problema de estimación el controlador, resolviendo de manera simultánea la estimación de los estados, y el cálculo de las acciones de control para llevar el estado del sistema a la zona de operación deseada, a pesar de los ruidos actuantes sobre el sistema.
- Analizar la estabilidad y la convergencia para cada uno de los algoritmos desarrollados.

-
- Comparar el desempeño de los algoritmos desarrollados con los del estado del arte.

1.3. Antecedentes

Desde su aparición, hace mas de 4 décadas, muchos avances se han logrado en control predictivo. Pruebas de estabilidad, convergencia y robustez para sistemas no lineales y/o variantes en el tiempo son hoy en día resultados conocidos, [1], [18], [19], [20], [21]. El control de grandes plantas es posible mediante la implementación del controlador predictivo descentralizado con la capacidad de manejar restricciones globales y locales [22], y junto con el desarrollo de nuevos algoritmos numéricos y la capacidad de cómputo disponible los hacen atractivo para su implementación en tiempo real en la industria, [23], [24].

Inspirado en el controlador predictivo, surgen técnicas de estimación de horizonte móvil basadas en optimización capaces de incorporar las restricciones físicas del sistema de manera natural en la formulación del problema [25], [26], [27], [28]. Las dos mas populares son el *FIE* y *MHE*. En el primero, se formula el problema utilizando toda la información disponible, y, conforme avanza el tiempo, el problema de optimización a resolver es cada vez mas complejo. Se han demostrado estabilidad robusta global asintótica para el caso de ruido convergente en [29] y para el caso de ruido acotado en [30]. Sin embargo, la prueba de convergencia al estado real para perturbaciones convergentes se resistía, y no fue hasta [1] que se presenta una demostración, con elementos tomados de [30] y [31]. Sin embargo, debido a la complejidad creciente del problema, es imposible su implementación practica, y sólo se lo suele utilizar como una medida de comparación. Su variante con ventana de longitud fija, *MHE*, permite la implementación práctica del estimador. Sólo N_e mediciones son tenidas en cuenta, siendo N_e la longitud de la ventana. La ventana abarca los instantes de tiempos entre $k - N_e$ y k . La información anterior al instante $k - N_e$ es resumida en el costo de arribo. Por supuesto, cuanto mejor sea la técnica con la que se resume esta información, el desempeño de *MHE* se acercará al del *FIE*. Si bien el grado de madurez de *MHE* es menor en comparación con el de *MPC*, varios resultados interesantes se han obtenido. En [27] se presenta un esquema de *MHE* con restricciones para sistemas lineales, mientras que en [28] y [32] se introducen resultados de estabilidad y convergencia para sistemas no lineales. Por otra parte, en [6] se aplica un mecanismo que ajusta los pesos de penalización del costo de arribo en función del error de estimación para sistemas lineales. Si bien en los últimos años se ha visto un incremento del interés por las técnicas de estimación de horizonte móvil, el grado de madurez de esta técnica está lejos de alcanzar la de *MPC*.

El tema central de esta tesis combina *MHE* y *MPC* en una única formulación que resuelve de manera simultánea ambos problemas. Estimación y control simultáneos es un área de investigación casi inexplorada pero con creciente interés por la comunidad científica. En [33] se diseña un controlador robusto con realimentación de la salida (*robust output feedback controller*) para sistemas lineales. La estimación del estado se realiza mediante un *observador de Luenberger*, y el error de estimación converge a un conjunto invariante. El controlador garantiza para todas las realizaciones posibles de trayectorias de los esta-

dos la existencia de un tubo centrado en la trayectoria nominal cuya sección a lo largo de la ventana representa un espacio invariante. Si bien no resuelve de manera simultánea ambos problemas, se considera en el diseño del controlador el error en la estimación y las condiciones necesarias para garantizar la factibilidad del problema en presencia de error de estimación y restricciones en los estados y/o entradas. En [34] se aborda el mismo problema, pero el estado no es estimado mediante un observador de Luenberger sino con *MHE*, lo que permite incorporar las restricciones de estimación, y para el cual los autores demuestran que el error de estimación converge hacia un conjunto invariante, el cual es tenido en cuenta para el diseño del *MPC*. Las primeras publicaciones sobre estimación y control simultáneos utilizando técnicas de horizonte móvil (*MHE* y *MPC*) se dan en [35] para sistemas lineales de tiempo discreto. Si bien allí se utiliza un estimador de horizonte móvil (*MHE*), no incorpora restricciones, por lo que el estimador es equivalente a un filtro de Kalman [36]. Los autores proponen la solución simultánea de *MHE* con *MPC* mediante programación multiparamétrica, donde los estados estimados y las mediciones forman parte de los parámetros en la formulación. La estrategia de los autores es similar a la utilizada en [33], reemplazando el observador de Luenberger de [33] por un *MHE* sin restricciones. En [35] se argumenta en favor de la resolución simultánea de estimación y control debido a que las restricciones presentes en el controlador romperían las condiciones bajo las cuales es válido aplicar el principio de separación. En [37], los autores amplían la formulación de *MHE* y *MPC* simultáneos incorporando restricciones en el estimador. La metodología propuesta es similar a la presentada en [35], y se plantea el cálculo de la cota máxima del error de estimación para posteriormente diseñar un controlador robusto basado en tubos en función de esta cota, evitando violar las restricciones del sistema. El siguiente paso en estimación y control simultáneos se da con el trabajo [38], el cual no sólo extiende la formulación del problema de estimación y control simultáneos a sistemas no lineales, sino que plantea el problema desde un enfoque *min-max*. En esta formulación, las perturbaciones pasadas y futuras son maximizadas, de modo de garantizar que el estimador-controlador sea robusto frente al peor caso. Es decir, se supone que las perturbaciones actuantes sobre el sistema son las más perniciosas, así como también la incertidumbre sobre la condición inicial. Los autores demuestran en este trabajo que la formulación propuesta, bajo ciertas condiciones de observabilidad y controlabilidad para sistemas no lineales, garantiza la estabilidad de la trayectoria de estados. Los resultados presentados en [38] son derivados suponiendo la existencia de un punto de ensilladura (*saddle-point*), que garantiza que el problema *min-max* tenga solución. En [39], los autores explicitan cuáles son las condiciones suficientes para que la formulación *min-max* tenga solución, es decir, exista un punto de ensilladura. Para el caso estándar con función de costo cuadrática, los autores muestran que el problema tiene solución si el sistema es observable, y los pesos de penalización en la función objetivo son elegidos de manera adecuada. Los autores profundizan sobre la formulación y el método numérico de resolución del problema *min-max* en [40], donde introducen un método de optimización de punto interior que les permite resolver de manera eficiente la formulación *min-max* del problema de estimación y control simultáneos. En

[41] abordan el problema más desafiante de estimación y control simultáneos de sistemas no lineales incorporando incertidumbre paramétrica al problema. Se supone que la incertidumbre está acotada, y el problema de optimización *min-max* maximiza también respecto de la incertidumbre.

En la presente tesis, el problema de estimación y control simultáneos se aborda desde una perspectiva diferente a las adoptadas en [37] y [40]. El problema se formula como una minimización, en la cual el costo de etapa de los ruidos de proceso dentro de la ventana de control se configura con signo negativo. El problema de estimación con incertidumbre paramétrica es abordado mediante un esquema de estimación dual con múltiples modelos, soslayando la formulación de un problema con restricciones no convexas. El algoritmo propuesto en esta tesis permite controlar de manera efectiva un sistema no lineal sujeto a ruidos, perturbaciones y restricciones, sin necesidad de validar el principio de separación. Análisis de estabilidad, convergencia y robustez son realizados bajo ciertas condiciones estándares en la literatura.

1.4. Organización de la tesis

Esta tesis se encuentra organizada bajo el formato de Tesis por compilación de la siguiente forma:

- En la presente sección se describió la motivación y los problemas a abordar dentro del marco de la tesis. Se describe el principio de separación y se muestra su validez para sistemas lineales sin restricciones e incertidumbre. Además, Se presentaron los antecedentes y las técnicas existentes en el estado del arte. Por último, se establecieron los objetivos y se resumieron los resultados obtenidos.
- En la sección 2 se introducen los conceptos y definiciones necesarios para abordar las secciones siguientes.
- La sección 3 presenta el algoritmo de estimación para sistemas no lineales con perturbaciones acotadas. Se describen los principales desafíos en la estimación de estados en sistemas no lineales mediante técnicas de horizonte móvil. Luego se incorpora a la formulación del estimador la incertidumbre sobre el modelo. Estabilidad y convergencia son analizados para este nuevo esquema.
- La sección 4 es donde el problema de estimación presentado en la sección 3 se lo complementa con el problema de control, formulados ambos como un solo problema de optimización. Condiciones sobre la longitud del horizonte para garantizar estabilidad en control y rechazar los efectos de la incertidumbre en la condición inicial de la estimación son dadas.
- La sección 5 presenta un caso de aplicación, en el cual los algoritmos desarrollados en las secciones 3 y 4 son aplicados al problema de navegación autónoma de vehículos terrestres.

-
- Finalmente, en la sección 6 se presentan las conclusiones generales y específicas de la tesis, y los trabajos futuros a abordar.

2 Elementos para el análisis de sistemas no lineales

En esta sección se introducirán las definiciones necesarias para el desarrollo de los resultados de las siguientes secciones. Las definiciones son las necesarias para formalizar los conceptos de estabilidad y detectabilidad en el análisis de sistemas no lineales. Estas nociones hacen referencia a la estabilidad *entrada-estado*, *estado-salida* y *entrada-estado-salida*.

2.1. Conceptos y definiciones

En lo siguiente consideraremos un sistema no lineal de tiempo discreto con la siguiente estructura

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + w_k, \\y_k &= h(x_k) + v_k,\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde $x_k \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ es el estado del sistema, $u_k \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ es la entrada o acción de control, $w_k \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{n_w}$ es el ruido de proceso, $y_k \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{n_y}$ es la medición de la salida y $v_k \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n_v}$ es el ruido de medición, con $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. La función $f(x_k, u_k)$ es localmente Lipschitz en sus argumentos y $f(0, 0) = 0$. Los conjuntos $\mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{Y}, \mathcal{V}$ se suponen convexos y compactos, y además contienen el origen en su interior. Cuando se consideren sistemas autónomos, la estructura será la siguiente

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= f(x_k) + w_k, \\y_k &= h(x_k) + v_k,\end{aligned}\tag{2.2}$$

con $f(x_k)$ localmente Lipschitz y $f(0) = 0$. La función $h(\cdot) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ se supone continua y diferenciable ($h(\cdot) \in C^1$) para todos los casos.

Cuando el sistema bajo consideración sea de tiempo continuo, la notación a utilizar será la siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + w(t), \\y(t) &= h(x(t)) + v(t),\end{aligned}\tag{2.3}$$

con $f(\cdot)$ nuevamente una función localmente Lipschitz en $x(t)$ y $h(\cdot) \in C^1$.

Consideremos el vector de estados en tiempo discreto x_k . Cuando sea necesario referirse a una componente en particular del vector x_k , la notación a utilizar será $x_{i,k}$, donde $i \in \mathbb{Z}_{[1, n_x]}$. En cambio, si el sistema es de tiempo continuo, al referirse a una componente en particular del vector de estados, la notación que se utilizará será $x_i(t)$, con $i \in \mathbb{Z}_{[1, n_x]}$.

Definición 1. *Solución de los sistemas (2.1) y (2.2). La solución del sistema (2.1) a tiempo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ con condición inicial x_0 , habiendo evolucionado bajo la influencia de las secuencias admisibles de controles $\mathbf{u} := [u_0, u_1, \dots, u_{k-1}]$ y ruido de proceso $\mathbf{w} :=$*

$[w_0, w_1, \dots, w_{k-1}]$, se denota como $x_k(x_0, \mathbf{w}, \mathbf{u})$. Mientras que la solución del sistema (2.2) a tiempo k , habiendo evolucionado bajo la acción de la secuencia admisible de ruidos de proceso \mathbf{w} y condición inicial x_0 se expresa como $x_k(x_0, \mathbf{w})$.

Definición 2. Función \mathcal{L} . $\zeta(r) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ pertenece al grupo de funciones \mathcal{L} , si $\zeta(r)$ es positiva, estrictamente decreciente conforme su argumento r crece y $\lim_{r \rightarrow \infty} \zeta(r) = 0$. Ejemplo: la función $f(t) = f_0 e^{-Kt}$ es una función $\mathcal{L} \forall K > 0, f_0 > 0$.

Definición 3. Función \mathcal{K} . $\gamma(r) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ pertenece al grupo de funciones \mathcal{K} , si $\gamma(0) = 0$, $\gamma(r)$ es positiva y estrictamente creciente con su argumento. Ejemplo: la función $f(t) = 1 - e^{-Kt}$ es una función $\mathcal{K} \forall K > 0$.

Definición 4. Función \mathcal{K}_∞ . $\rho(r) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ pertenece al grupo de funciones \mathcal{K}_∞ , si $\rho(r)$ es una función \mathcal{K} y además $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \infty$. Ejemplo: $f(t) = e^{Kt} - 1$ es una función $\mathcal{K}_\infty \forall K > 0$.

Definición 5. Función \mathcal{KL} . $\beta(r, s) : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ pertenece al grupo de funciones \mathcal{KL} , si la función $\beta(r, \cdot)$ es una función $\mathcal{K} \forall r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $\beta(\cdot, s)$ es una función $\mathcal{L} \forall s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ejemplo: $f(s, t) = f_0 (1 - e^{-K_1 s}) e^{-K_2 t}$ es una función $\mathcal{KL} \forall K_1 > 0, K_2 > 0, f_0 > 0$.

Definición 6. Conjunto robusto invariante. El conjunto $\mathcal{X}_{inv} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ se denomina robusto invariante si para todo $x_0 \in \mathcal{X}_{inv}$ y para cualquier $w_k \in \mathcal{W}$, se cumple que $x_{k+1} \in \mathcal{X}_{inv} \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, con x_{k+1} dado por (2.2).

Definición 7. Conjunto robusto invariante controlado. Consideremos el sistema (2.1), el conjunto $\mathcal{X}_{inv_c} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ se denomina robusto invariante controlado si existe un control $u_k \in \mathcal{U}$ (asegurando la existencia y unicidad de la solución para el sistema (2.1) a lazo cerrado) tal que para todo $x_0 \in \mathcal{X}_{inv_c}$, $w_k \in \mathcal{W}$, la condición $x_k \in \mathcal{X}_{inv_c}$ se cumple para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Definición 8. Estabilidad asintótica. El sistema (2.2) es asintóticamente estable si existe una función $\beta \in \mathcal{KL}$ tal que para toda condición inicial $x_0 \in \mathcal{X}$, $\forall w_k \in \mathcal{W}$ se cumple la siguiente desigualdad

$$|x_k(x_0, \mathbf{w})| \leq \beta(|x_0|, k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (2.4)$$

Definición 9. Estabilidad entrada-a-estado (Input-to-State Stability - ISS). El sistema (2.2) es ISS si existen funciones $\beta \in \mathcal{KL}$, $\gamma_w \in \mathcal{K}$ tal que para toda condición inicial x_0 y secuencias admisibles de ruidos de proceso \mathbf{w} se cumple la siguiente desigualdad

$$|x_k(x_0, \mathbf{w})| \leq \beta(|x_0|, k) + \gamma_w(\|\mathbf{w}\|_{[0, k-1]}) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (2.5)$$

La misma propiedad puede establecerse en función de la secuencias de controles \mathbf{u} en lugar de \mathbf{w} con $\gamma_u \in \mathcal{K}$

$$|x_k(x_0, \mathbf{u})| \leq \beta(|x_0|, k) + \gamma_u(\|\mathbf{u}\|_{[0, k-1]}) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (2.6)$$

Definición 10. *Estabilidad práctica entrada-a-estado regional en \mathcal{X} (Regional Input-to-State practical Stability in \mathcal{X}).* Dado un conjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ que incluye al origen en su interior, el sistema (2.1) es ISpS en \mathcal{X} con respecto a \mathbf{w} en \mathcal{X} si \mathcal{X} es un conjunto robusto invariante para el sistema (2.1), y existen funciones $\beta(\cdot, \cdot)$, $\gamma_1(\cdot)$ y una constante $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que:

$$|x_k(x_0, \mathbf{w}, \mathbf{u})| \leq \beta(|x_0|, k) + \gamma_1(\|\mathbf{w}\|_{[0, k-1]}) + c \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (2.7)$$

para alguna ley de control admisible $u_k = K(x_k)$, $\forall x_0 \in \mathcal{X}$, $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}$ [42].

Observación 1. La constante c implica que aún para el caso en que el sistema no se encuentre afectado por perturbaciones, el sistema (2.1) no convergerá al origen, sino hacia un conjunto compacto en las cercanías (del origen).

Definición 11. *Estabilidad incremental entrada-estado-salida (incremental Input-Output-to-State Stability (i-IOSS)).* El sistema (2.2) es i-IOSS si existen funciones $\beta \in \mathcal{KL}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}$ tal que para cualquier par de condiciones iniciales $x_0^{(1)}$ y $x_0^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_x}$, y cualesquiera dos secuencias de perturbaciones admisibles $\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}$ la siguiente desigualdad se verifica para todo $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$|x_k^{(1)}(x_0^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)}) - x_k^{(2)}(x_0^{(2)}, \mathbf{w}^{(2)})| \leq \max \left\{ \beta(|x_0^{(1)} - x_0^{(2)}|, k), \gamma_1(\|\mathbf{w}^{(1)} - \mathbf{w}^{(2)}\|), \gamma_2(\|\mathbf{h}(\mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}^{(2)})\|) \right\}. \quad (2.8)$$

Observación 2. i-IOSS es una noción de detectabilidad para sistemas no lineales [43].

Definición 12. *Estabilidad robusta asintótica (Robust Asymptotic Stability (RAS)).* Supongamos el sistema (2.2) con perturbaciones admisibles \mathbf{w} y \mathbf{v} , y una estimación $\bar{x}_0 \in \mathcal{X}$ de la condición inicial $x_0 \in \mathcal{X}$. Un estimador para el sistema (2.2) es RAS si existen funciones $\Phi \in \mathcal{KL}$, $\pi_w, \pi_v \in \mathcal{K}$ tal que para todo $x_0, \bar{x}_0 \in \mathcal{X}$, se verifica la siguiente desigualdad $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$|x_k(x_0, \mathbf{w}) - \hat{x}_k(\bar{x}_0, \hat{\mathbf{w}})| \leq \Phi(|x_0 - \bar{x}_0|, k) + \pi_w(\|\mathbf{w}\|_{[0, k-1]}) + \pi_v(\|\mathbf{v}\|_{[0, k-1]}). \quad (2.9)$$

Definición 13. *Punto fijo.* Un punto fijo de la función continua $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ es un punto $x \in \mathcal{X}$ para el cual $F(x) = x$.

Definición 14. *Punto fijo de la iteración dual.* Se define como punto fijo $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{\Psi_E}$ del problema de optimización Ψ_E cuando el costo $\Psi_E(\mathbf{e})$ no puede ser mejorado luego de resolver

Ψ_M . De manera análoga, se definirá el punto fijo $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{\Psi_M}$ del problema de optimización Ψ_M si el costo $\Psi_M(\mathbf{m})$ no puede ser mejorado luego de actualizar la trayectoria de estados resolviendo Ψ_E .

Desigualdad de Gronwall

A menudo, es necesario acotar una función cuando no se conoce explícitamente su solución. La desigualdad de Gronwall es una herramienta que puede ser utilizada para este fin. La misma, relaciona tres secuencias no negativas, y_i , f_i y g_i , con $i \in \mathbb{Z}_{[0,l]}$, y establece que si las secuencias satisfacen la relación

$$y_l \leq f_l + \sum_{i=0}^{l-1} g_i y_i, \quad (2.10)$$

entonces también satisfacen la siguiente desigualdad

$$y_l \leq f_l + \sum_{i=0}^{l-1} f_i g_i \prod_{j=i+1}^{l-1} (1 + g_j) \quad i, j, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (2.11)$$

La demostración de esta desigualdad puede encontrarse en [44] y [45].

Lema de comparación

Una herramienta alternativa a la desigualdad de Gronwall, es el lema de comparación [46]. El mismo puede ser aplicado cuando la derivada de una función escalar $v(t) \in C^1$ satisface la siguiente desigualdad

$$\dot{v}(t) \leq f(t, v(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}_{[t_0, T]}, t_0 < T. \quad (2.12)$$

El lema permite comparar la solución de la desigualdad diferencial $\dot{v}(t) \leq f(t, v(t))$ con la solución de la ecuación diferencial $\dot{u}(t) = f(t, u)$ y cuyo enunciado es el siguiente.

Consideremos la ecuación diferencial escalar

$$\dot{u}(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0 \quad (2.13)$$

donde $f(t, u(t))$ es una función continua en t y localmente Lipschitz en $u(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}_{[t_0, T]}$ y $u(t) \in \mathbb{R}$. Sea $v(t)$ una función continua cuya derivada satisface la siguiente desigualdad

$$\dot{v}(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) \leq u_0 \quad (2.14)$$

con $v(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R}_{[t_0, T]}$. Entonces, $v(t) \leq u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_{[t_0, T]}$. Una demostración puede ser encontrada en [46], así como también una extensión para el caso en que $v(t) \notin C^1$.

Relaciones entre funciones \mathcal{H} , \mathcal{H}_∞ y \mathcal{HL}

Las siguientes desigualdades se verifican para toda función $\alpha(\cdot) \in \mathcal{H}$, $\gamma(\cdot) \in \mathcal{H}_\infty$, $\beta(\cdot, \cdot) \in \mathcal{HL}$ y $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, con $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, para algún $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\alpha\left(\sum_{i=0}^N a_i\right) \leq \sum_{i=0}^N \alpha(Na_i), \quad (2.15)$$

$$\gamma\left(\sum_{i=0}^N a_i\right) \leq \sum_{i=0}^N \gamma(Na_i), \quad (2.16)$$

$$\beta\left(\sum_{i=0}^N a_i, k\right) \leq \sum_{i=0}^N \beta(Na_i, k). \quad (2.17)$$

Una demostración puede ser encontrada en [29].

3 Estimación de estados con horizonte móvil

La estimación de estados juega un rol fundamental en muchas áreas de los sistemas dinámicos tales como control, monitoreo de sistemas, sistemas tolerantes a fallas y optimización, entre otros, ya que mediciones de la salida afectadas por ruido suele ser la única información disponible del sistema. Varios métodos de estimación han sido desarrollados para tales situaciones ([47], [48]). Sin embargo, éstas técnicas han sido desarrolladas suponiendo que se conoce el comportamiento estadístico del ruido, se tiene un modelo preciso del sistema, y no hay restricciones sobre los estados y/o entradas. Empero en la práctica, estas suposiciones son difíciles de cumplir. Esto ha requerido que la comunidad científica centre sus esfuerzos en el desarrollo de algoritmos que no necesiten estrictamente que estas suposiciones se verifiquen ([49], [50], [51]). Inspirado en las técnicas de control de horizonte móvil, la comunidad científica comienza a volcarse hacia el desarrollo de técnicas de estimación de horizonte móvil. Uno de los trabajos pioneros en el área es [25] (ver también [26], [27], [28]). Una de las facetas más interesantes de las técnicas de estimación de horizonte móvil es la posibilidad de realizar la estimación con una cantidad limitada de información, en lugar de utilizar toda la información disponible, y la otra, es la capacidad de incorporar las restricciones de estados y/o entradas a la formulación del problema. En los últimos años se han formalizado y probado varias propiedades para varias formulaciones de MHE, y, al mismo tiempo, se han desarrollado nuevos métodos computacionales que permiten su implementación en tiempo real. En particular, lo que resulta de interés es poder establecer estabilidad robusta y convergencia del error de estimación. En los últimos años, varios resultados han sido obtenidos, comenzando con suposiciones poco realistas, como observabilidad y ausencia de ruidos y perturbaciones, y posteriormente, han sido reemplazadas por detectabilidad y presencia de perturbaciones acotadas.

Para el caso de sistemas no lineales observables, en [28] se establece estabilidad asintótica del error de estimación para funciones de costo cuadráticas, donde el error de estimación tiende a cero (ver [29], [52]) para el caso de perturbaciones convergentes. En [32] y [53] se propone un esquema de estimación para sistemas observables sujetos a perturbaciones aditivas y acotadas, cuya función objetivo minimiza el error cuadrático de los residuos de estimación, garantizando una cota máxima para el error de estimación. Finalmente, para el caso más desafiante que trata con sistemas no lineales detectables sujetos a perturbaciones acotadas, [30] y [31] han probado estabilidad robusta asintótica global (RGAS) y convergencia del error de estimación. En estos últimos dos trabajos, se ha utilizado la misma modificación de la función de costo, que consiste en la inclusión de un término adicional. Este término adicional representa el máximo de los costos de etapa (costos dentro de la ventana de estimación), y su inclusión, implica la inclusión de una restricción no lineal a

la formulación del problema. En [30] se prueba *RGAS* para el *FIE*. Sin embargo, la prueba de convergencia al estado real para el caso de perturbaciones convergentes continúa siendo un problema abierto. En [31] se prueba *RGAS* para el caso de *MHE* y convergencia al estado real para el caso de perturbaciones convergentes.

En esta sección, se presentaran los resultados mas relevantes en cuanto a estabilidad y convergencia del algoritmo de estimación propuesto. El aporte mas significativo de esta sección comprende la extensión de los resultados presentados en [6] a sistemas no lineales detectables sujetos a perturbaciones acotadas. Para probar la estabilidad robusta de *MHE*, es crucial hacer una elección apropiada del costo de arribo en la función de costo. En el esquema de estimación propuesto, las suposiciones relacionadas al costo de arribo pueden verificarse fuera de línea, y diseñarse acorde a los requerimientos del problema.

3.1. Estimación robusta

3.1.1. Esquema de estimación propuesto

Consideremos el sistema (2.2), el objetivo del problema de estimación es encontrar un estimado $\hat{x}_{k|k}$ del estado x_k en cada instante de tiempo k minimizando un índice de desempeño. El problema a resolver es el siguiente

$$\begin{aligned} \min_{\hat{x}_{k-N|k}, \hat{w}} \Psi_E &:= \Gamma_{k-N_e}(\chi) + \sum_{j=k-N_e}^k \ell_e(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \chi = \hat{x}_{k-N_e|k} - \bar{x}_{k-N_e}, \\ \hat{x}_{j+1|k} = f(\hat{x}_{j|k}) + \hat{w}_{j|k}, \\ y_j = h(\hat{x}_{j|k}) + \hat{v}_{j|k}, \\ \hat{x}_{j|k} \in \mathcal{X}, \hat{w}_{j|k} \in \mathcal{W}, \hat{v}_{j|k} \in \mathcal{V}, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde $\hat{x}_{j|k}$ es el estado a tiempo j estimado en el tiempo k , $\hat{w}_{j|k}$ y $\hat{v}_{j|k}$ son las estimaciones de los ruidos de proceso y residuos de estimación, respectivamente, penalizados por la función $\ell_e(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k})$. La condición inicial x_0 es desconocida, pero disponemos de una estimación \bar{x}_0 cuyo error está acotado

$$\bar{x}_0 \in \mathcal{X}_0 := \{\bar{x}_0 : |x_0 - \bar{x}_0| \leq e_{\text{máx}}\}, \quad \mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{X}. \quad (3.2)$$

El término $\Gamma_{k-N_e}(\chi)$ representa el costo de arribo, y penaliza $\chi = \hat{x}_{k-N_e|k} - \bar{x}_{k-N_e}$. La variable \bar{x}_{k-N_e} es la mejor información disponible al comienzo de la ventana de estimación. La adecuada elección de $\ell_e(\cdot, \cdot)$ y $\Gamma_{k-N_e}(\cdot)$ permiten garantizar la estabilidad robusta del estimador [31]. En trabajos previos se ha demostrado estabilidad robusta mediante una modificación en la función de costo a partir de agregar un término de máximo sobre la ventana de estimación, [30], [31]. La estrategia utilizada en esta tesis consiste en la adecuada elección de los costos de etapa y de un algoritmo de adaptación que genera una

penalización del costo de arribo variante en el tiempo con la forma

$$\Gamma_{k-N_e}(\chi) = \chi^T P_{k-N_e}^{-1} \chi, \quad (3.3)$$

en donde $P_{k-N_e}^{-1}$ y \bar{x}_{k-N_e} son parámetros los cuales se actualizan en cada instante de tiempo.

Existen varias formas de actualizar \bar{x}_{k-N_e} , la utilizada en la presente tesis consiste en $\bar{x}_{k-N_e} = \hat{x}_{k-N_e|k-1}$, evitando de esta manera el fenómeno de ciclado (*cycling*) [5]. El mecanismo de actualización de la matriz P_{k-N_e} ha sido presentado en [6] y está dado por

$$\begin{aligned} \epsilon_{k-N_e} &= y_{k-N_e} - \hat{y}_{k-N_e|k}, \\ N_k &= \left[1 + \hat{x}_{k-N_e|k-1}^T P_{k-N_e-1} \hat{x}_{k-N_e|k-1} \right] \frac{\sigma}{|\epsilon_{k-N_e}|_2^2}, \\ \alpha_k &= \left| 1 - \frac{1}{N_k} \right|, \\ W_k &= \left[I - \frac{P_{k-N_e-1} \hat{x}_{k-N_e|k-1} \hat{x}_{k-N_e|k-1}^T}{1 + \hat{x}_{k-N_e|k-1}^T P_{k-N_e-1} \hat{x}_{k-N_e|k-1}} \right] P_{k-N_e-1}, \\ P_{k-N_e} &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha_k} W_k & \text{if } \frac{1}{\alpha_k} \text{Tr}(W_k) \leq c, \\ W_k & \text{otherwise,} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $\sigma, c, \in \mathbb{R}_{>0}$ son parámetros de sintonía del algoritmo, $P_0 = \lambda I_{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $c > \lambda$ y $\sigma \gg \sigma_w$, en donde σ_w representa la varianza del ruido de proceso.

Observación 3. Cuando la estimación \bar{x}_{k-N_e} logra aproximar de manera precisa la información fuera de la ventana de estimación, la matriz del costo de arribo penalizará fuertemente la desviación $|\hat{x}_{k-N_e|k} - \bar{x}_{k-N_e}|$. En cambio, si la estimación no es buena, la matriz $P_{k-N_e}^{-1}$ no penalizará fuertemente la diferencia $|\hat{x}_{k-N_e|k} - \bar{x}_{k-N_e}|$, permitiendo que $\hat{x}_{k-N_e|k}$ pueda ajustarse sin incurrir en un gran costo para la función objetivo.

3.1.2. Relación entre MHE, FIE y el costo de arribo

El problema de estimación (3.1) puede reescribirse en función de la condición inicial $\hat{x}_{0|k}$ y todas las mediciones disponibles de la salida del sistema

$$\begin{aligned} \min_{\hat{x}_{0|k}, \hat{w}} \Psi_E &:= \sum_{j=k-N_e}^k \ell_e(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) + \sum_{j=1}^{k-N_e-1} \tau^{k-j} \ell(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) + \tau^k \Gamma_0(\chi) \\ \text{s.t.} &\begin{cases} \chi = \hat{x}_{0|k} - \bar{x}_0, \\ \hat{x}_{j+1|k} = f(\hat{x}_{j|k}) + \hat{w}_{j|k}, \\ y_j = h(\hat{x}_{j|k}) + \hat{v}_{j|k}, \\ \hat{x}_{j|k} \in \mathcal{X}, \hat{w}_{j|k} \in \mathcal{W}, \hat{v}_{j|k} \in \mathcal{V}, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

con $\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Si bien esta formulación del problema (3.1) carece de interés práctico, permite explicitar los efectos de la información pasada en la estimación actual $\hat{x}_{k|k}$, y pone en evidencia una ponderación exponencial de los datos pasados que pierden influencia cuando $\tau \in [0, 1)$.

3.1.3. Análisis de estabilidad

Para garantizar la estabilidad del algoritmo propuesto, es necesario vincular los diferentes elementos de la formulación (3.1) con las propiedades del sistema (2.2). Estas relaciones son enunciadas a continuación.

Suposición 3.1.1. *El costo de arribo $\Gamma_{k-N_e}(\chi)$ es una función continua con cota inferior $\underline{\gamma}_p(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ y superior $\bar{\gamma}_p(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ tal que*

$$\underline{\gamma}_p(|\chi|) \leq \Gamma_{k-N_e}(\chi) \leq \bar{\gamma}_p(|\chi|), \quad (3.6)$$

donde las funciones $\underline{\gamma}_p(\cdot)$ y $\bar{\gamma}_p(\cdot)$ satisfacen la siguiente relación:

$$\underline{\gamma}_p(|\chi|) \geq \underline{c}_p |\chi|^a, \quad \bar{\gamma}_p(|\chi|) \leq \bar{c}_p |\chi|^a, \quad (3.7)$$

para algunas constantes $\underline{c}_p, \bar{c}_p \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \underline{c}_p \leq \bar{c}_p$, y $a \in \mathbb{R}_{\geq 2}$. Cuando el costo de arribo se actualiza mediante (3.4), (3.6) adopta la siguiente estructura

$$\lambda_{\min}(P_{k-N_e}^{-1}) |\chi|^2 \leq \Gamma_{k-N_e}(\chi) \leq |P_{k-N_e}^{-1}| |\chi|^2. \quad (3.8)$$

Suposición 3.1.2. *Existen funciones $\underline{\gamma}_w(\cdot)$, $\underline{\gamma}_v(\cdot)$, $\bar{\gamma}_w(\cdot)$ y $\bar{\gamma}_v(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ que acotan el costo de etapa $\ell_e(\cdot, \cdot)$ de la siguiente manera*

$$\underline{\gamma}_w(|w|) + \underline{\gamma}_v(|v|) \leq \ell_e(w, v) \leq \bar{\gamma}_w(|w|) + \bar{\gamma}_v(|v|) \quad (3.9)$$

Suposición 3.1.3. *Supondremos que el sistema (2.2) es i-IOSS donde las funciones $\gamma_1(\cdot)$ y $\gamma_2(\cdot)$ de (2.8) en la definición 11 satisfacen la siguiente relación con las funciones $\underline{\gamma}_w(\cdot)$ y $\underline{\gamma}_v(\cdot)$ que acotan el costo de etapa $\ell_e(\cdot, \cdot)$ de (3.1)*

$$\gamma_1\left(3\underline{\gamma}_w^{-1}(|w|)\right) \leq c_1 |w|^{\alpha_1}, \quad \gamma_2\left(3\underline{\gamma}_v^{-1}(|v|)\right) \leq c_2 |v|^{\alpha_2} \quad (3.10)$$

para algunos $c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Suposición 3.1.4. *La función $\beta(\cdot, \cdot)$ en (2.8) de la definición 11 es de tipo \mathcal{KL} y posee la siguiente estructura*

$$\beta(r, s) \leq c_\beta r^p s^{-q} \quad (3.11)$$

para algunos $c_\beta, p, q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ con $q \geq p$.

Los resultados mas relevantes de esta sección, que constituyen uno de los aportes de esta tesis, son enunciados en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1. *Supongamos un sistema i-IOSS (2.2) con secuencias de ruido de proceso $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ y ruido de medición $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. La condición inicial es desconocida, pero se dispone de una estimación inicial $\bar{x}_0 \in \mathcal{X}$. Considerando que en la matriz del costo de arribo del problema (3.1) se actualiza usando el algoritmo adaptativo (3.4), y las suposiciones 3.1.1 a 3.1.4 se verifican, entonces, el estimador MHE (3.1) es RAS.*

La demostración del teorema 3.1.1 se hace por construcción, y todos sus detalles técnicos pueden encontrarse en el apéndice A. Los resultados mas significativos se presentan a continuación.

El costo óptimo al resolver el problema (3.1) está dado por

$$\Psi_E^* = \Gamma_{k-N_e}(\chi^*) + \sum_{j=k-N_e}^k \ell(\hat{w}_{j|k}^*, \hat{v}_{j|k}^*). \quad (3.12)$$

Considerando que x_{k-N_e} , w_j y v_j son soluciones admisibles de (3.12), por optimalidad de las soluciones se tiene la siguiente desigualdad

$$\Psi_E^* \leq \Gamma_{k-N_e}(\chi) + \sum_{j=k-N_e}^k \ell(w_j, v_j) \quad (3.13)$$

con $\chi = x_{k-N_e} - \bar{x}_{k-N_e}$. Esta relación permite introducir los valores reales de x_{k-N_e} y de las secuencias de perturbaciones $\mathbf{w}_{[k-N_e, k-1]}$ y $\mathbf{v}_{[k-N_e, k]}$. Aplicando las relaciones dadas por (3.1.1) y (3.1.2), el costo óptimo tendrá cotas inferior y superior de la siguiente manera

$$\underline{\gamma}_p(|\chi^*|) + N_e \left(\underline{\gamma}_w(|\hat{w}_{j|k}^*|) + \underline{\gamma}_v(|\hat{v}_{j|k}^*|) \right) \leq \Psi_E^* \leq \bar{\gamma}_p(|\chi|) + N_e (\bar{\gamma}_w(\|\mathbf{w}_j\|) + \bar{\gamma}_v(\|\mathbf{v}_j\|)). \quad (3.14)$$

Despejando $|\chi^*|$, $|\hat{w}_{j|k}^*|$ y $|\hat{v}_{j|k}^*|$, de esta última expresión, podremos obtener cotas para las variables estimadas en función de los ruidos de proceso y medición reales que actúan sobre el sistema y del error en la condición inicial. En lo siguiente, omitiremos el superíndice * en las variables de optimización. Como las funciones $\underline{\gamma}_p(|\cdot|)$, $\underline{\gamma}_w(|\cdot|)$ y $\underline{\gamma}_v(|\cdot|)$ son de tipo \mathcal{H}_∞ , sus inversas son funciones de tipo \mathcal{H}_∞ también.

$$\begin{aligned} |\hat{x}_{k-N_e|k} - \bar{x}_{k-N_e}| &\leq \underline{\gamma}_p^{-1}(3 \bar{\gamma}_p(|x_{k-N_e} - \bar{x}_{k-N_e}|)) + \\ &\quad \underline{\gamma}_p^{-1}(3N_e \bar{\gamma}_w(\|\mathbf{w}\|)) + \underline{\gamma}_p^{-1}(3N_e \bar{\gamma}_v(\|\mathbf{v}\|)), \\ &\leq \frac{3^{\frac{1}{a}}}{\lambda_{\min}(P_{k-N_e}^{-1})} \left(|P_{k-N_e}^{-1}|^{\frac{1}{a}} |x_{k-N_e} - \bar{x}_{k-N_e}| + \right. \\ &\quad \left. N_e^{\frac{1}{a}} \bar{\gamma}_w^{\frac{1}{a}}(\|\mathbf{w}\|) + N_e^{\frac{1}{a}} \bar{\gamma}_v^{\frac{1}{a}}(\|\mathbf{v}\|) \right), \quad (3.15) \\ |\hat{w}_{j|k}| &\leq \underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{3}{N_e} \bar{\gamma}_p(|x_{k-N_e} - \bar{x}_{k-N_e}|) \right) + \underline{\gamma}_w^{-1}(3 \bar{\gamma}_w(\|\mathbf{w}\|)) + \\ &\quad \underline{\gamma}_w^{-1}(3 \bar{\gamma}_v(\|\mathbf{v}\|)), \\ |\hat{v}_{j|k}| &\leq \underline{\gamma}_v^{-1} \left(\frac{3}{N_e} \bar{\gamma}_p(|x_{k-N_e} - \bar{x}_{k-N_e}|) \right) + \underline{\gamma}_v^{-1}(3 \bar{\gamma}_w(\|\mathbf{w}\|)) + \\ &\quad \underline{\gamma}_v^{-1}(3 \bar{\gamma}_v(\|\mathbf{v}\|)). \end{aligned}$$

En las ecuaciones anteriores se ha utilizado la desigualdad (2.16). Esta desigualdad facilita el trabajo algebraico de la demostración, sin embargo, la cota para el error de estimación será menos ajustada. Teniendo en cuenta que las trayectorias reales de estados, ruido

de proceso y medición son admisibles para el sistema (2.2), al igual que las trayectorias estimadas, se puede aplicar la propiedad (2.8), que se verifica ya que el sistema (2.2) es *i-IOSS* por suposición. Haciendo $k = N_e$, utilizando las siguientes secuencias $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}$, $\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{w}$, $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}$, $\mathbf{x}^{(2)} = \hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{w}^{(2)} = \hat{\mathbf{w}}$ y $\mathbf{v}^{(2)} = \hat{\mathbf{v}}$ en (2.8) junto con las cotas obtenidas en (3.15) y la desigualdad (3.8) para $\underline{\gamma}_p(\cdot)$ y $\bar{\gamma}_p(\cdot)$ del costo de arriba, el error de estimación puede expresarse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq & \frac{|x_{k-N_e} - \bar{x}_{k-N_e}|^\zeta}{N_e^\eta} \left(\left(\frac{|P_{k-N_e}^{-1}|}{\lambda_{\min}(P_{k-N_e}^{-1})} \right)^\rho (c_\beta 18^p + \right. \\
& c_1 3^{\alpha_1} \lambda_{\min}^{\alpha_1}(P_{k-N_e}^{-1}) + c_2 3^{\alpha_2} \lambda_{\min}^{\alpha_1}(P_{k-N_e}^{-1})) + c_\beta 2^p) + \\
& \left(\frac{c_\beta 18^p \bar{\gamma}_w^{\frac{p}{q}}(\|\mathbf{w}\|)}{\lambda_{\min}(P_{k-N_e}^{-1})} + \gamma_1 \left(3 \left(\|\mathbf{w}\| + \underline{\gamma}_w^{-1}(3\bar{\gamma}_w(\|\mathbf{w}\|)) \right) \right) \right) + \\
& c_2 3^{\alpha_2} \bar{\gamma}_w^{\alpha_2}(\|\mathbf{w}\|) + \left(\frac{c_\beta 18^p \bar{\gamma}_v^{\frac{p}{q}}(\|\mathbf{v}\|)}{\lambda_{\min}(P_{k-N_e}^{-1})} + \right. \\
& \left. \gamma_2 \left(3 \left(\|\mathbf{v}\| + \underline{\gamma}_v^{-1}(3\bar{\gamma}_v(\|\mathbf{v}\|)) \right) \right) \right) + c_1 3^{\alpha_1} \bar{\gamma}_v^{\alpha_1}(\|\mathbf{v}\|) \Big). \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Fijando los valores de $|P_{k-N_e}^{-1}|$ y $\lambda_{\min}(P_{k-N_e}^{-1})$ de manera de maximizar el lado de derecho de (3.16) para evitar una subestimación del error de estimación, el primer término de (3.16) sólo dependerá de $|x_{k-N_e} - \bar{x}_{k-N_e}|$ para un N_e dado, ya que las cantidades restantes son constantes. El primer término de (3.16) posee la misma estructura que (3.11), de manera que puede ser escrito de forma más compacta definiendo las siguientes cantidades

$$\begin{aligned}
\bar{c}_\beta &:= \left(\frac{|P_{k-N_e}^{-1}|}{\lambda_{\min}(P_{k-N_e}^{-1})} \right)^\rho (c_\beta 18^p + \lambda_{\min}^{\alpha_1}(P_{k-N_e}^{-1}) (c_1 3^{\alpha_1} + c_2 3^{\alpha_2})) + c_\beta 2^p \\
r &:= |x_{k-N_e} - \bar{x}_{k-N_e}|, \\
p &= \zeta, \\
s &= N_e, \\
q &= \eta.
\end{aligned}$$

Una vez fijado el valor de $\lambda_{\min}(P_{k-N_e}^{-1})$, el segundo término de (3.16) depende sólo de $\|\mathbf{w}\|$ y el tercer término depende sólo de $\|\mathbf{v}\|$. Por lo tanto, la ecuación (3.16) puede ser escrita de manera mas compacta como

$$|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq \bar{\beta}(|x_{k-N_e} - \bar{x}_{k-N_e}|, N_e) + \phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|). \tag{3.17}$$

donde las funciones $\bar{\beta}(\cdot, \cdot)$, $\phi_w(\cdot)$ y $\phi_v(\cdot)$ están dadas por las siguientes expresiones

$$\bar{\beta}(|x_{k-N_e} - \bar{x}_{k-N_e}|, N_e) := \frac{|x_{k-N_e} - \bar{x}_{k-N_e}|^\zeta}{N_e^\eta} \bar{c}_\beta, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \phi_w(\|\mathbf{w}\|) &:= \frac{c_\beta 18^p}{\lambda_{\min}(P_{k-N_e}^{-1})} \bar{\gamma}_w^{\frac{p}{a}}(\|\mathbf{w}\|) + c_2 3^{\alpha_2} \bar{\gamma}_w^{\alpha_2}(\|\mathbf{w}\|) + \\ &\quad \gamma_1(6\|\mathbf{w}\|) + \gamma_1 \left(6\bar{\gamma}_w^{-1}(3\bar{\gamma}_w(\|\mathbf{w}\|)) \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \phi_v(\|\mathbf{v}\|) &:= \frac{c_\beta 18^p}{\lambda_{\min}(P_{k-N_e}^{-1})} \bar{\gamma}_v^{\frac{p}{a}}(\|\mathbf{v}\|) + c_1 3^{\alpha_1} \bar{\gamma}_v^{\alpha_1}(\|\mathbf{v}\|) + \\ &\quad \gamma_2(6\|\mathbf{v}\|) + \gamma_2 \left(6\bar{\gamma}_v^{-1}(3\bar{\gamma}_v(\|\mathbf{v}\|)) \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Si el horizonte de estimación N_e se elige de forma que

$$N_e \geq \mathbb{N}_e := \left(\delta^\zeta e_{\max}^{\zeta-1} \bar{c}_\beta \right)^{\frac{1}{\eta}}, \quad (3.21)$$

donde $\delta > 1$ es un parámetro de diseño y e_{\max} es la cota superior del error en la condición inicial, se verifica que

$$\bar{\beta}(|x_{k-N_e} - \bar{x}_{k-N_e}|, N_e) \leq \frac{1}{\delta} \left(\frac{\mathbb{N}_e}{N_e} \right)^\eta |x_{k-N_e} - \bar{x}_{k-N_e}| \leq |x_{k-N_e} - \bar{x}_{k-N_e}|. \quad (3.22)$$

Al seleccionar $N_e \geq \mathbb{N}_e$, la función $\bar{\beta}(\cdot, \cdot)$ tendrá un comportamiento decreciente y atenuará el efecto del error en la condición inicial de la ventana. Recordando que hasta aquí hemos supuesto $k = N_e$, por lo tanto $|x_{k-N_e} - \bar{x}_{k-N_e}| = |x_0 - \bar{x}_0|$ decrecerá por un factor $\delta \left(\frac{\mathbb{N}_e}{N_e} \right)^\eta > 1$ cada N_e muestras. Los mismos resultados pueden ser obtenidos para $k \in \mathbb{Z}_{[0, N_e-1]}$. Considerando un horizonte de estimación $N_e = \mathbb{N}_e$, si el error de estimación satisface $|x_k - \hat{x}_k| \leq 2(1 + \mu)(\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|))$, para algún $\mu \geq 0$, proyectando el error de estimación N_e muestras hacia adelante, se tiene que

$$\begin{aligned} |x_{k+N_e} - \hat{x}_{k+N_e}| &\leq \bar{\beta}(|x_k - \hat{x}_k|, N_e) + \phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|), \\ &\leq \frac{|x_k - \hat{x}_k|}{\delta} + \phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|), \\ &\leq \frac{2(1 + \mu)(\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|))}{\delta} + \phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|), \\ &\leq (2 + \mu)(\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|)), \\ &\leq 2(1 + \mu)(\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|)), \end{aligned} \quad (3.23)$$

para algún $\delta \geq 2$, de manera que si el error de estimación no crecerá por encima de $2(1 + \mu)(\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|))$. En cambios si $|x_k - \hat{x}_k| > 2(1 + \mu)(\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|))$,

proyectando nuevamente el error N_e muestras hacia adelante con $\delta \geq 2$

$$\begin{aligned}
|x_{k+N_e} - \hat{x}_{k+N_e}| &\leq \bar{\beta}(|x_k - \hat{x}_k|, N_e) + \phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|), \\
&\leq \frac{|x_k - \hat{x}_k|}{2} + \frac{|x_k - \hat{x}_k|}{2(1+\mu)}, \\
&\leq |x_k - \hat{x}_k| \left(\frac{2+\mu}{2(1+\mu)} \right), \\
&\leq |x_k - \hat{x}_k| \theta,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

con $\theta := \frac{2+\mu}{2(1+\mu)} < 1$, el error de estimación será contractivo, decreciendo en un factor θ cada N_e muestras.

Para $k > N_e$, es conveniente definir $i := \lfloor \frac{k}{N_e} \rfloor$, $j := k \bmod N_e$, de manera que $k = iN_e + j$. El error de estimación para $k > N_e$ puede expresarse como

$$|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq \max \{ \theta^i |x_j - \hat{x}_{j|k}|, 2(1+\mu)(\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|)) \}, \tag{3.25}$$

como $|x_j - \hat{x}_{j|k}|$ está acotado por (3.17), ya que $j \in \mathbb{Z}_{[0, N_e-1]}$, el error de estimación puede escribirse como

$$\begin{aligned}
|x_k - \hat{x}_{k|k}| &\leq \max \{ \theta^i (\bar{\beta}(|x_0 - \bar{x}_0|, j) + \phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|)), \\
&\quad 2(1+\mu)(\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|)) \}, \\
&\leq \theta^i \bar{\beta}(|x_0 - \bar{x}_0|, j) + 2(1+\mu)\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + 2(1+\mu)\phi_v(\|\mathbf{v}\|),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

definiendo las siguientes funciones

$$\Phi(|x_0 - \bar{x}_0|, k) := \theta^i \bar{\beta}(|x_0 - \bar{x}_0|, j), \tag{3.27}$$

$$\pi_w(\|\mathbf{w}\|) := 2(1+\mu)\phi_w(\|\mathbf{w}\|), \tag{3.28}$$

$$\pi_v(\|\mathbf{v}\|) := 2(1+\mu)\phi_v(\|\mathbf{v}\|), \tag{3.29}$$

y teniendo en cuenta que la función $\Phi(|x_0 - \bar{x}_0|, k)$ puede no ser estrictamente decreciente en su segundo argumento, si ese fuere el caso, se define la función $\bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k) \in \mathcal{X}\mathcal{L}$, tal que $\bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k) \geq \Phi(|x_0 - \bar{x}_0|, k)$. El error de estimación puede ser escrito finalmente para todo $k \geq 0$ como

$$|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq \bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k) + \pi_w(\|\mathbf{w}\|) + \pi_v(\|\mathbf{v}\|). \tag{3.30}$$

Como el lado derecho de (3.30) posee la misma estructura que (2.9) de la definición 12, el estimador de horizonte móvil (3.1) cuyo costo de arribo se adapta según (3.4) es *RAS*.

3.1.4. Ejemplo

A continuación se evaluarán los desempeños del algoritmo propuesto (*ADAP*) y los publicados recientemente en la literatura de estimación con horizonte móvil: *FIEMAX*, [30] y *MAX*, [31].

El sistema simulado representa una reacción irreversible de la forma $2A \rightarrow B$. Este sistema es utilizado frecuentemente en la literatura de horizonte móvil [30], [31] y [36]. El sistema de tiempo continuo es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2kx_1^2(t) + w(t) \\ kx_1^2(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t) + v(t) \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde k es una constante asociada a la velocidad de la reacción. Normalmente, $k = 0.16$. El sistema (3.31) es *i-IOSS*, y una demostración es reportada en [54], la cual consiste en acotar los estados del sistema mediante el lema de comparación 2.1. Una vez demostrado que el sistema es *i-IOSS*, la suposición 3.1.3 se verifica automáticamente [55].

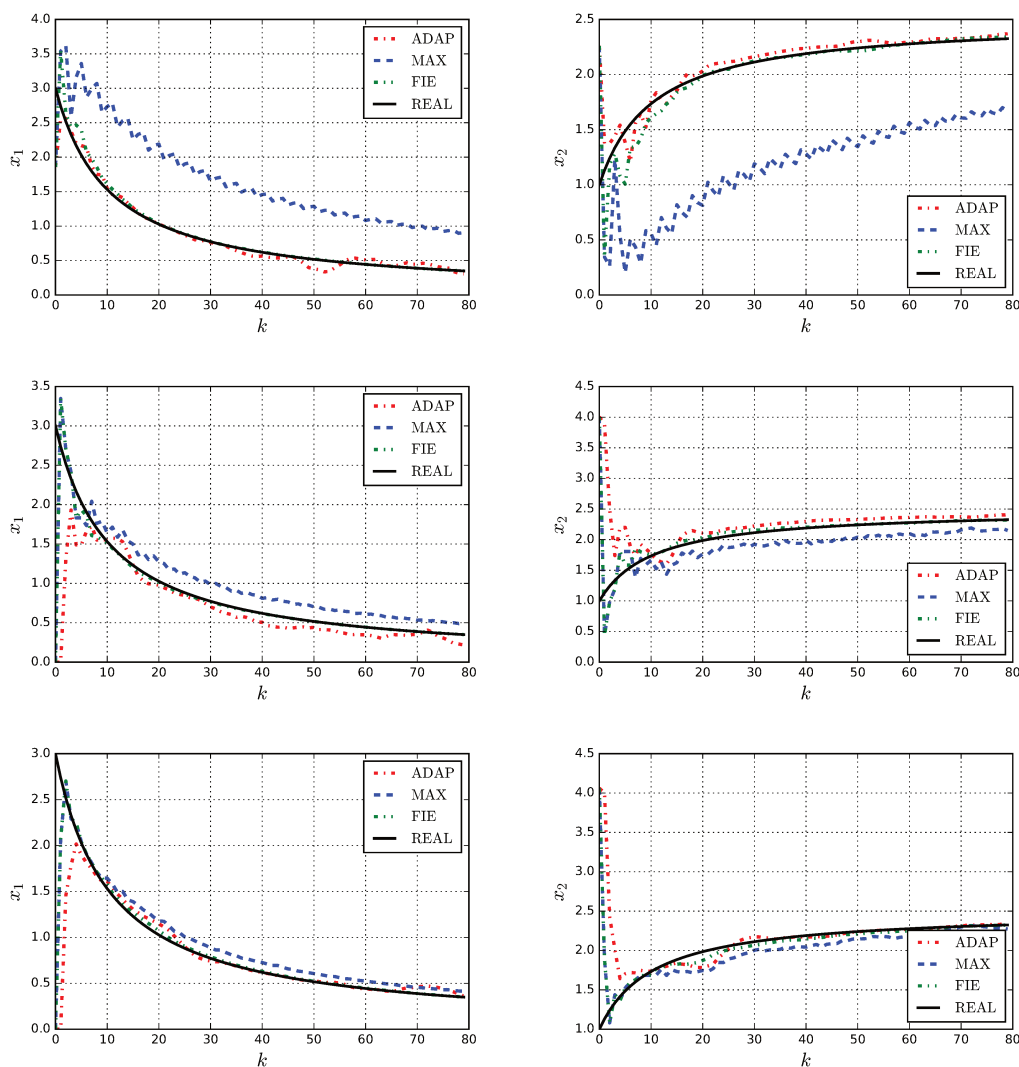


Figura 3.1: Comparación entre los diferentes algoritmos de estimación de horizonte móvil ADAP (trazo rojo), MAX (trazo azul), FIEMAX (trazo verde) y el estado real del sistema (trazo negro solido) para diferentes longitudes del horizonte de estimación ($N = 2, 5$ y 10).

La Figura 3.1 muestra los resultados de simulación con $x_0 = [3, 1]^T$ y $\bar{x}_0 = [0.1, 4.5]^T$ para diferentes longitudes del horizonte de estimación N_e . Los algoritmos *MAX* y *FIEMAX* utilizan las funciones de penalización del costo de etapa y costo de arribo publicadas en [30] y [31] ($\delta = 0$, $\delta_1 = 1/t$ y $\delta_2 = 1$).

El algoritmo propuesto (*ADAP*) presenta un desempeño similar al *FIEMAX* aún para un horizonte $N_e = 2$, mientras que el desempeño del *MAX* es menor para el mismo horizonte. Al aumentar la longitud a $N_e = 5$, el desempeño del *MAX* mejora y se acerca al del *ADAP*, pero recién para $N_e = 10$, ambos desempeños son comparables.

Las principales diferencias entre los algoritmos *ADAP* y *MAX* son

- Actualización del costo de arribo.
- Inclusión del término *max* al costo de etapa.

La matriz del costo de arribo en *ADAP* se adapta en función del error al comienzo de la ventana (3.4), y permite realizar ajustes sobre $\hat{x}_{k-N_e|k}$ sin incurrir en un gran costo, mientras en *MAX* la matriz del costo de arribo se adapta mediante mecanismos clásicos como el filtrado de Kalman. Otra diferencia importante es la actualización de \bar{x}_{k-N_e} . Mientras que el algoritmo *ADAP* utiliza $\bar{x}_{k-N_e} = \hat{x}_{k-N_e|k-1}$, el algoritmo *MAX* actualiza como $\bar{x}_{k-N_e} = \hat{x}_{k-N_e|k-N_e}$. Esta última actualización genera el efecto de *ciclado*, analizado en [5], correspondiente a las oscilaciones del *MAX* (trazo azul). Por otro lado, la incorporación del término *max* en el costo de etapa, no mejora de manera sustancial el error de estimación, y parece ser incorporado sólo como un artificio útil para el análisis de estabilidad del algoritmo. Al mismo tiempo, la incorporación de este término extra al costo de etapa implica la incorporación de restricciones no lineales a la formulación del problema.

En la figura 3.2 se puede observar la evolución de la traza de la matriz del costo de arribo utilizado por el algoritmo *ADAP* en dos condiciones diferentes

- Ruido de medición con varianza constante.
- Ruido de medición con varianza variante en el tiempo.

Para el caso en que la varianza del ruido no varía, la traza de la matriz del costo de arribo evoluciona de manera constante. Sin embargo, cuando el ruido presenta propiedades variantes en el tiempo, el costo de arribo evoluciona de manera adaptativa, y su funcionamiento puede interpretarse de la siguiente manera. Al ingresar a la ventana de estimación la primer medición de la salida del sistema afectada por ruido con varianza diferente, la matriz del costo de arribo penaliza más fuertemente el desvío de $\hat{x}_{k-N_e|k}$ respecto de \bar{x}_{k-N_e} , ya que la medición tomada en tiempo k , no tiene influencia sobre el estado pasado del sistema. Considerando esto, el costo de arribo aumenta la confianza en la estimación \bar{x}_{k-N_e} mediante un aumento de la traza de $P_{k-N_e}^{-1}$. De esta manera, la trayectoria estimada del sistema $\mathbf{x}_{[k-N_e, k]}$ comenzará nuevamente en las cercanías de \bar{x}_{k-N_e} .

Finalmente, la Tabla 3.1 muestra el error cuadrático medio calculado sobre 300 simulaciones para diferentes longitudes del horizonte de estimación. El desempeño del algoritmo

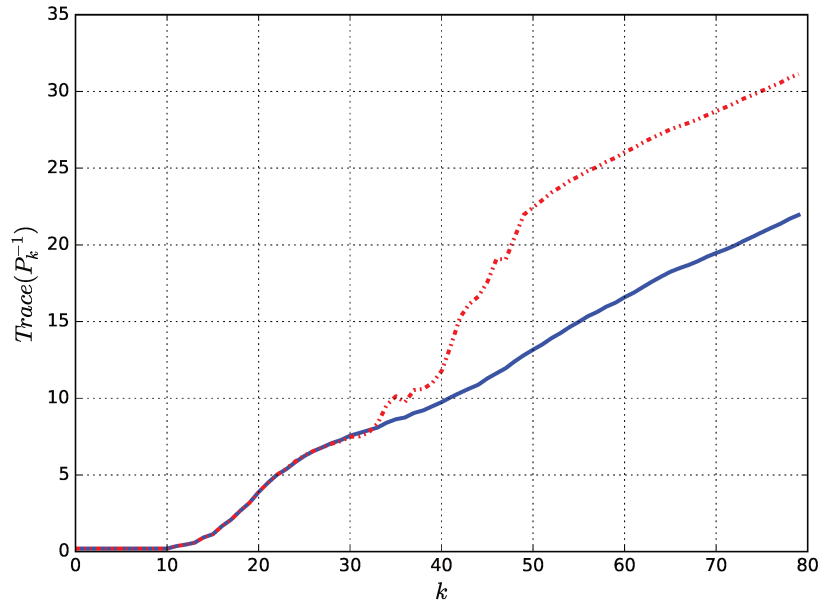


Figura 3.2: Comparación de la evolución de $\text{tr}(P_{k-N}^{-1})$ usada por el estimador ADAP para ruido de medición variante en el tiempo (rojo) y constante (azul).

ADAP es mejor que el del *MAX*, publicado recientemente. Conforme se incrementa la longitud del horizonte de estimación, el desempeño se acerca a los valores del *FIEMAX*.

Tabla 3.1: Error cuadrático medio promediado sobre 300 simulaciones y para diferentes horizontes.

| | N=2 | | N=5 | | N=10 | | FIEMAX |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | ADAP | MAX | ADAP | MAX | ADAP | MAX | |
| x_0 | 0.18808 | 0.58652 | 0.03367 | 0.04615 | 0.00171 | 0.00772 | 0.00024 |
| x_1 | 0.23037 | 0.66768 | 0.04074 | 0.05077 | 0.00285 | 0.00951 | 0.00120 |

3.2. Estimación adaptativa politópica

En la sección anterior se presentó un esquema de estimación robusto que utiliza un modelo del sistema y un algoritmo adaptativo para actualizar el costo de arribo de forma de garantizar la estabilidad robusta aún con ruidos cuyas propiedades varían en el tiempo. Sin embargo, esta formulación supone que se conoce el modelo del sistema. En la presente sección se abordará el problema de estimación desde un enfoque en el cual supone que sólo se conoce de manera parcial el modelo del sistema. Esta incertidumbre es modelada como una perturbación aditiva, desconocida pero acotada.

El desempeño en la operación de un sistema está directamente relacionado con el conocimiento que tengamos de su modelo, estados, parámetros y perturbaciones. Muchas de las variables más relevantes de un sistema son, a menudo, no medibles o resulta muy costoso hacerlo en tiempo real. Un enfoque efectivo consiste en emplear técnicas de estimación para obtener la información requerida a partir de las mediciones disponibles y un modelo del sistema. Estimación lineal y no lineal son un campo activo de investigación desde hace varias décadas [56]. Los métodos de estimación lineales utilizan una representación más sencilla del sistema y su desempeño es aceptable siempre y cuando el punto de operación del sistema no se aleje de las condiciones de estado estacionario. Sin embargo, cuando las dinámicas no lineales se vuelven dominantes, el desempeño de los estimadores lineales se deteriora y se requieren de técnicas de estimación más avanzadas.

Numerosos estudios en la literatura han abordado el problema de estimación en sistemas no lineales. Estos métodos pueden ser categorizados en [56]

- 1 Métodos basados en linealización [57];
- 2 Métodos basados en aproximación [58];
- 3 Métodos recursivos bayesianos [59];
- 4 Métodos basados en momentos [60];
- 5 Métodos de filtrado no lineal de alto orden [61].

Además de estos métodos, existen otros enfoques que aproximan la dinámica no lineal del sistema con un modelo lineal de parámetros variantes (*LPV*) [62, 63].

Los sistemas *LPV* son sistemas afines y/o lineales cuyas matrices son variantes en el tiempo y pueden abarcar grandes zonas de operación [64]. Las matrices varían en función de las *variables de programación (scheduling variables)*, las cuales deben capturar las no linealidades del sistema para una correcta aproximación [65]. Cuando el rango de las *variables de programación* es conocido, el modelo *LPV* puede ser reformulado como una combinación convexa de modelos afines y/o lineales invariantes en el tiempo (*LTI*) [66]. La técnica más común para obtener un sistema *LPV* es el enfoque politópico, en donde la aproximación del sistema depende de un vector de parámetros variantes en el tiempo.

La contribución principal de esta sección es el diseño y análisis de un estimador robusto para sistemas no lineales sujeto a perturbaciones acotadas combinando modelos *LPV* y

estimación dual utilizando técnicas de horizonte móvil. El algoritmo propuesto estima para cada instante de tiempo dentro de la ventana de temporal, el modelo afín que mejor aproxima al sistema no lineal y los estados del sistema mediante un enfoque de estimación dual. El modelo es aproximado mediante una combinación convexa de modelos *LTI* afines, los cuales cubren completamente la zona de operación del sistema no lineal.

3.2.1. Esquema de estimación propuesto

A continuación, consideraremos el sistema de tiempo discreto (2.1), dado por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + w_k + d_k & \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ y_k &= h(x_k) + v_k, \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde $d_k \in \mathcal{D}$ representa la incertidumbre que actúa como una perturbación aditiva. El conjunto \mathcal{D} se supone convexo, compacto y contiene el elemento nulo en su interior. Las funciones $f(\cdot)$ y $h(\cdot)$ tienen las mismas propiedades que en (2.2). El sistema (3.32) exhibe de manera explícita la acción de ruidos de proceso y perturbaciones debido a la incertidumbre sobre el modelo. Sin embargo carece de sentido la incorporación de variables adicionales de la misma naturaleza a la formulación. Por lo tanto, el sistema (3.32) será reescrito como

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) + s_k & \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ y_k &= h(x_k) + v_k, \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde $s_k \in \mathcal{S}$ embebe los efectos de los ruidos de proceso w_k e incertidumbre de modelado d_k , y el conjunto $\mathcal{S} := \mathcal{W} \oplus \mathcal{D}$ se define como la suma de Minkowski entre los conjuntos \mathcal{W} y \mathcal{D} .

Los modelos afines deben cubrir todo el espacio de operación del sistema (3.33) de manera tal que la linealización del sistema (3.33) en el punto de operación pueda ser aproximada mediante una combinación convexa de los modelos *LTI*. La estructura de los modelos afines es [65]

$$\begin{aligned} g_{f_i} &= A_i \hat{x}_k + B_i u_k + \hat{s}_k + a_i & i \in \mathbb{Z}_{[1, N_m]}, \\ g_{h_i} &= C_i \hat{x}_k + c_i + \hat{v}_k, \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde N_m es la cantidad de modelos. Las matrices A_i , B_i , a_i , C_i , y c_i pueden obtenerse de diversas maneras (ver [65]). En cada instante de tiempo, se debe encontrar una secuencia de vectores de mezcla $\alpha_{[k-N_e, k]}$, donde $\alpha_{j|k} = [\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(N_m)}]$, $j \in \mathbb{Z}_{[k-N_e, k]}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, tal que

$$\begin{aligned} f(x_j, u_j) + s_j &\approx \sum_{i=1}^{N_m} g_{f_i} \alpha_{j|k}^{(i)}, \\ h(x_j) + v_j &\approx \sum_{i=1}^{N_m} g_{h_i} \alpha_{j|k}^{(i)} \end{aligned} \quad (3.35)$$

de manera que las diferencias $|f(x_j, u_j) + s_j - \sum_{i=1}^{N_m} g_{f_i} \alpha_{j|k}^{(i)}|$ y $|h(x_j) + v_j - \sum_{i=1}^{N_m} g_{h_i} \alpha_{j|k}^{(i)}|$ sean

mínimas. Sin embargo, como $f(\cdot, \cdot)$ y $h(\cdot)$ no se conocen perfectamente, estas cantidades no pueden ser medidas directamente.

Aproximando el sistema (3.33) mediante (3.35), el problema de optimización a resolver es el siguiente

$$\begin{aligned} \min_{\hat{x}_{k-N_e|k}, \hat{s}, \hat{\alpha}_k} \Psi_{EM} &:= \Gamma_{k-N_e}(\chi) + \sum_{j=k-N_e}^k \ell_{em}(\hat{s}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) + \Lambda_{k-N_e}(\Theta) \\ \text{s.t.} &\left\{ \begin{array}{l} \chi = \hat{x}_{k-N_e|k} - \bar{x}_{k-N_e}, \\ \Theta = \hat{\alpha}_{k-N_e|k} - \bar{\alpha}_{k-N_e}, \\ \hat{x}_{j+1|k} = \sum_{i=1}^{N_m} \hat{\alpha}_{j|k}^{(i)} (A_i \hat{x}_{j|k} + B_i u_j + a_i) + \hat{s}_{j|k} \\ y_j = \sum_{i=1}^{N_m} \hat{\alpha}_{j|k}^{(i)} (C_i \hat{x}_{j|k} + c_i) + \hat{v}_{j|k}, \\ \sum_{i=1}^{N_m} \hat{\alpha}_{j|k}^{(i)} = 1, \\ \hat{\alpha}_{j|k}^{(i)} \geq 0, \\ \hat{x}_{j|k} \in \mathcal{X}, \hat{s}_{j|k} \in \mathcal{S}, \hat{v}_{j|k} \in \mathcal{V}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde $\Lambda_{k-N_e}(\Theta)$ representa el costo de arribo del problema de estimación del modelo. Las restricciones $\sum_{i=1}^{N_m} \hat{\alpha}_{j|k}^{(i)} = 1$ y $\hat{\alpha}_{j|k}^{(i)} \geq 0$ garantizan la convexidad de la combinación de los modelos.

La formulación (3.36) estima de manera simultánea los estados del sistema y la combinación de modelos (3.34) óptima que aproxima a (3.33). Sin embargo, esta formulación tiene restricciones no convexas debido al producto de las variables de optimización. Para evitar resolver este tipo de problema, la formulación (3.36) será expresada como un problema de estimación dual. En esta nueva formulación, los estados y el modelo del sistema se estiman de manera secuencial en cada instante de tiempo.

3.2.2. Esquema de estimación dual

Para mitigar el problema de no convexidad del problema (3.36) se propone un esquema de estimación dual, en el cual los estados y el modelo del sistema se estiman de manera secuencial resolviendo dos problemas con restricciones convexas. Los problemas a resolver en cada instante de tiempo son los siguientes problemas:

Un problema que estima los estados $\hat{x}_{j|k}$, dada la mejor aproximación afín del sistema (3.33) (\bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{a} y \bar{c})

$$\begin{aligned} \min_{\hat{x}_{k-N_e|k}, \hat{w}} \Psi_E &:= \Gamma_{k-N_e}(\chi) + \sum_{j=k-N_e}^k \ell_e(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) \\ \text{s.t.} &\left\{ \begin{array}{l} \chi = \hat{x}_{k-N_e|k} - \bar{x}_{k-N_e}, \\ \hat{x}_{j+1|k} = \bar{A} \hat{x}_{j|k} + \bar{B} u_j + \bar{a} + \hat{w}_{j|k}, \\ y_j = \bar{C} \hat{x}_{j|k} + \bar{c} + \hat{v}_{j|k}, \\ \hat{x}_{j|k} \in \mathcal{X}, \hat{w}_{j|k} \in \mathcal{S}, \hat{v}_{j|k} \in \mathcal{V}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Un problema que estima el modelo afín que aproxima al sistema (3.33), dada la trayectoria

de estados $\hat{x}_{j|k}$ estimada en el paso anterior

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\alpha}, \hat{d}, \hat{r}} \Psi_M &:= \Lambda_{k-N_e}(\Theta) + \sum_{j=k-N_e}^k \ell_m(\hat{d}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}, \hat{r}_{j|k}) \\ \text{s.t.} \quad &\left\{ \begin{array}{l} \Theta = \hat{\alpha}_{k-N_e|k} - \bar{\alpha}_{k-N_e}, \\ \hat{\alpha}_{j+1|k} = \hat{\alpha}_{j|k} + \hat{r}_{j|k}, \\ x_{j+1|k} = \sum_{i=1}^{N_m} \alpha_{j|k}^{(i)} (A_i \bar{x}_{j|k} + B_i u_j + a_i) + \hat{d}_{j|k}, \\ y_j = \sum_{i=1}^{N_m} \alpha_{j|k}^{(i)} (C_i \bar{x}_{j|k} + c_i) + \hat{v}_{j|k}, \\ \sum_{i=1}^{N_m} \alpha_{j|k}^{(i)} = 1, \\ \alpha_{j|k}^{(i)} \geq 0, \\ \hat{d}_{j|k} \in \mathcal{S}, \hat{r} \in \mathcal{R}, \hat{v}_{j|k} \in \mathcal{V}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.38)$$

La variable $\hat{r}_{j|k}$ penaliza las variaciones en los coeficientes de mezcla $\hat{\alpha}_{j|k}$ evitando cambios bruscos en el modelo estimado dentro de la ventana de estimación. Los problemas (3.37) y (3.38) son resueltos de manera secuencial dentro del intervalo de muestreo hasta alcanzar alguna condición de finalización.

3.2.3. Excitación persistente

Debido a que el esquema de estimación reconstruye tanto los estados del sistema como los parámetros del mismo, es necesario excitar la planta con una señal suficientemente rica, desde un punto de vista espectral, para obtener una estimación confiable de los parámetros. Tales señales, deben cumplir la condición de excitación persistente. Dada la secuencia $\mathbf{u}_{[k-n+1, k]} := [u_{k-n+1}, u_{k-n}, \dots, u_{k-1}, u_k]$ $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\mathbf{u}_{[k-n+1, k]}$ es una señal de excitación persistente de orden n si [67], [68], [69]

$$\lim_{k_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{k_1} \sum_{k=1}^{k_1} \mathbf{u}_{[k-n+1, k]} \mathbf{u}_{[k-n+1, k]}^T > 0. \quad (3.39)$$

Una señal de tiempo discreto cuyo espectro es diferente de cero sobre todo el intervalo $0 \leq f \leq \frac{f_s}{2}$, donde f representa la frecuencia y f_s la frecuencia de muestreo, es una señal de excitación persistente que incluye todos los ordenes. Una señal con tales características es el ruido blanco gaussiano, cuya densidad espectral es constante en el intervalo $0 \leq f \leq \frac{f_s}{2}$. En la práctica, suele utilizarse para la identificación de parámetros una secuencia binaria pseudo aleatoria (*PRBS*), cuyas características son similares a la del ruido blanco. La principal ventaja es que su magnitud es constante, lo que permite una definición precisa del rango sobre el cual funcionarán los actuadores. Las condiciones necesarias para la convergencia paramétrica han sido enunciadas en [69], y se resumen a continuación

- El algoritmo de estimación debe ser capaz de garantizar que $\lim_{k \rightarrow \infty} y - \hat{y} = 0$, donde y y \hat{y} representan la salida medida y la salida estimada, respectivamente, en ausencia de perturbaciones.

- El orden n_s del sistema es conocido.
- La señal de entrada u_k es una señal de excitación persistente de orden $n \geq n_s$.

Una demostración de la necesidad de estas condiciones puede encontrarse en [69].

3.2.4. Análisis de estabilidad de la estimación dual

En primer lugar se analizará cómo la resolución secuencial e iterativa de los problemas (3.37) y (3.38) mitiga la incertidumbre del modelo y cómo establecer una condición de para de la iteración. Luego, siguiendo una metodología similar a la utilizada en la demostración del Teorema 3.1.1, se demostrará que bajo ciertas condiciones el estimador dual propuesto posee estabilidad robusta práctica.

Resolver los problemas (3.37) y (3.38) de forma iterativa tiene sentido si las soluciones óptimas obtenidas en la iteración n son mejores que las obtenidas en la anterior. Primero es necesario determinar si las soluciones de dos iteraciones sucesivas son diferentes para luego cuantificar esta diferencia, lo que permitirá establecer un criterio de finalización.

Antes de presentar los resultados más importantes de esta sección, se enunciarán las suposiciones necesarias sobre los elementos de la formulación (3.38), análogas a las especificadas para (3.37). Además, las relaciones dadas en 3.1.1 y 3.1.2 siguen siendo válidas para la formulación (3.37).

Suposición 3.2.1. *El costo de arribo $\Lambda_{k-N_e}(\Theta)$ es una función continua con cotas inferior y superior $\underline{\gamma}_\Lambda(\cdot), \bar{\gamma}_\Lambda(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$, respectivamente, tal que*

$$\underline{\gamma}_\Lambda(|\Theta|) \leq \Lambda_{k-N_e}(\Theta) \leq \bar{\gamma}_\Lambda(|\Theta|), \quad (3.40)$$

donde las funciones $\underline{\gamma}_\Lambda(\cdot)$ y $\bar{\gamma}_\Lambda(\cdot)$ satisfacen la siguiente relación:

$$\underline{\gamma}_\Lambda(|\Theta|) \geq \underline{c}_\Lambda |\Theta|^a, \quad \bar{\gamma}_\Lambda(|\Theta|) \leq \bar{c}_\Lambda |\Theta|^a, \quad (3.41)$$

para algunas constantes $\underline{c}_\Lambda, \bar{c}_\Lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \underline{c}_\Lambda \leq \bar{c}_\Lambda$, y $a \in \mathbb{R}_{\geq 2}$. Cuando el costo de arribo se actualiza mediante (3.4), (3.41) adopta la siguiente estructura

$$\lambda_{\min}(\mathbb{P}_{k-N_e}^{-1}) |\Theta|^2 \leq \Lambda_{k-N_e}(\Theta) \leq \|\mathbb{P}_{k-N_e}^{-1}\| |\Theta|^2. \quad (3.42)$$

donde $\mathbb{P}_{k-N_e}^{-1}$ es la matriz del costo de arribo de (3.38).

Suposición 3.2.2. *Existen funciones $\underline{\gamma}_d(\cdot), \underline{\gamma}_v(\cdot), \underline{\gamma}_r(\cdot), \bar{\gamma}_d(\cdot), \bar{\gamma}_v(\cdot), \bar{\gamma}_r(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ que acotan el costo de etapa $\ell_m(\cdot, \cdot, \cdot)$ de (3.38) de la siguiente manera*

$$\underline{\gamma}_d(|d|) + \underline{\gamma}_v(|v|) + \underline{\gamma}_r(|r|) \leq \ell_m(d, v, r) \leq \bar{\gamma}_d(|d|) + \bar{\gamma}_v(|v|) + \bar{\gamma}_r(|r|) \quad (3.43)$$

Teorema 3.2.1. *Considerando que las suposiciones 3.1.1, 3.1.2, 3.2.1 y 3.2.2 se satisfacen, $\forall e \neq \mathbf{e}$ y $\forall m \neq \mathbf{m}$, $e \in \mathbb{R}^{\Psi_E}$, $m \in \mathbb{R}^{\Psi_M}$, se verifica la siguiente desigualdad*

$$\Psi_E(\mathbf{e}) \leq \Psi_E(e), \quad (3.44)$$

$$\Psi_M(\mathbf{m}) \leq \Psi_M(m), \quad (3.45)$$

con $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{\Psi_E}$ y $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{\Psi_M}$ puntos fijos (en el sentido de la iteración dual, ver definición 14 de la sección 2.1) para los problemas (3.37) y (3.38).

Una demostración rigurosa del teorema 3.2.1 puede ser encontrada en [70]. En el contexto de la estimación dual, el teorema 3.2.1 implica que, dada una secuencia de mediciones $\mathbf{y}_{[k-N_e, k]}$, la resolución secuencial e iterativa de los problemas (3.37) y (3.38) generará una secuencia de costos decrecientes como resultado del ajuste de la trayectoria de estados y del modelo. Debido a las suposiciones 3.1.1, 3.1.2, 3.2.1 y 3.2.2, las secuencias de costos tienen un mínimo finito y positivo. La estimación dual se lleva a cabo resolviendo primeramente Ψ_E con el modelo disponible. Luego se resuelve Ψ_M manteniendo constante la trayectoria de estados obtenida mediante la resolución de Ψ_E . En la primer iteración se obtendrán las soluciones óptimas e_0 y m_0 . En la próxima, uno de los siguientes escenarios es posible

- 1 $\Psi_E(e_1) = \Psi_E(e_0)$, por lo tanto $e_1 = e_0 = \mathbf{e}$ y $m_0 = \mathbf{m}$, ya que resolver Ψ_M nuevamente luego de haber obtenido $e_1 = e_0$ generará las estimaciones $m_1 = m_0$.
- 2 $\Psi_E(e_1) < \Psi_E(e_0)$. La nueva solución e_1 implica un reajuste en la trayectoria de estados. Con esta nueva trayectoria, se resuelve Ψ_M , generando las estimaciones m_1 , y por lo tanto, un reajuste en el modelo del sistema.

La estimación dual se ejecuta hasta alcanzar alguna condición de finalización, por ejemplo: $|e_i - e_{i-1}| \leq e_{stop}$.

Una vez que se ha demostrado que la secuencia de costos generada en la estimación dual, es decreciente, queda por analizar la estabilidad robusta del algoritmo propuesto. Para ello, resulta conveniente cuantificar la relación de mejora del costo en la iteración l -ésima respecto de la iteración inicial. A tal efecto, se define la siguiente secuencia

$$g(k, i) := \frac{\Psi_E^{(i)}}{\Psi_E^{(0)}}, \quad g(k, 0) = 1. \quad (3.46)$$

$\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \in \mathbb{Z}_{[0, l]}$. De esta manera, se podrá expresar el error de estimación en función de los elementos de la primer iteración, sin perder las mejoras obtenidas en la trayectoria de estados y el modelo estimado.

3.2.5. Estabilidad robusta

En la sección anterior se demostró que la secuencia de costos generada por el algoritmo de estimación dual es decreciente. En la presente sección se demostrará que el algoritmo de

estimación propuesto posee estabilidad robusta práctica regional respecto de las perturbaciones aditivas y acotadas, y estabilidad robusta asintótica para el caso de perturbaciones convergentes. La demostración de estabilidad robusta se hace para el algoritmo de estimación (3.37), donde en lugar de $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ se reemplaza $\mathbf{w} \in \mathcal{S}$, con $\mathcal{S} := \mathcal{W} \oplus \mathcal{D}$. La perturbación s_k en (3.36) embebe los efectos de los ruidos de proceso w_k y la incertidumbre sobre el modelo d_k . Esto se ve reflejado en los problemas (3.37) y (3.38) al considerar $\hat{w}_{j|k} \in \mathcal{S}$ y $\hat{d}_{j|k} \in \mathcal{S}$. La ampliación del conjunto de perturbaciones se manifestará mediante un horizonte de estimación mas largo, necesario para garantizar estabilidad robusta. A diferencia del algoritmo (3.1), para el cual se ha demostrado estabilidad robusta asintótica, para la formulación (3.37) sólo se puede demostrar estabilidad robusta asintótica para el caso en que la señal de entrada cumpla con la condición de ser una señal de excitación persistente de orden suficiente para el sistema. Esto implica que si la señal de entrada no cumple esta condición, aún para el caso de perturbaciones de proceso y ruidos de medición convergentes, el error de estimación no convergerá al origen. En este caso, se dice que el esquema de estimación dual posee estabilidad robusta práctica regional.

Las propiedades mas relevantes en cuanto a estabilidad y robustez del algoritmo propuesto son enunciadas en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.2. *Consideremos el sistema i -IOSS (2.1) con secuencias de perturbaciones $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$ y se aplica al mismo una señal de entrada $u_k \in \mathcal{U}$ de excitación persistente de orden suficiente $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Los costos de arribo de los problemas (3.37) y (3.38) son actualizados según (3.4) y las suposiciones 3.1.1-3.1.4, 3.2.1 y 3.2.2 se verifican. Las condiciones iniciales x_0 y α_0 se desconocen, pero se disponen de estimaciones iniciales $\bar{x}_0 \in \mathcal{X}$ y $\bar{\alpha}_0$, respectivamente. Entonces, el estimador dual dado por (3.37) y (3.38) posee estabilidad robusta asintótica.*

La demostración del teorema 3.2.2 se hace por construcción, utilizando la misma metodología que la empleada para demostrar el teorema 3.1.1, y todos los detalles pueden ser encontrados en el apéndice B. La incertidumbre sobre el modelo del sistema se manifestará mediante la inclusión de un término adicional en la cota del error de estimación, cuya expresión es la siguiente

$$|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq \bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k) + \bar{\Phi}_w(\|\mathbf{w}\|) + \bar{\Phi}_v(\|\mathbf{v}\|) + \bar{\Phi}_\alpha(l, \mathbb{N}_{\min}) \quad (3.47)$$

con

$$\mathbb{N}_{\min} \geq \left(2(1 + \epsilon)(k_1 + k_2 g(k, l)^\eta) e_{\max}^{\zeta-1} \right)^{1/\eta}. \quad (3.48)$$

Las funciones y constantes utilizadas en las ecuaciones (3.47) y (3.48) están dadas por

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k) &:= |x_0 - \bar{x}_0|^p \theta^k (k_1 + k_2 g(k, l)), \\ \bar{\Phi}_w(\|\mathbf{w}\|) &:= 2(1 + \mu) \gamma_1 (6\|\mathbf{w}\|) + g(k, l)^\eta \left(\frac{c_\beta 10^p 5^q}{c_p^{p/a}} \bar{\gamma}_w(\|\mathbf{w}\|)^q + \right. \\ &\quad \left. (c_1 5^{b_1} + c_2 5^{b_2}) \bar{\gamma}_w(\|\mathbf{w}\|)^{b_1} \right), \\ \bar{\Phi}_v(\|\mathbf{v}\|) &:= 2(1 + \mu) \gamma_2 (6\|\mathbf{v}\|) + g(k, l)^\eta \left(\frac{c_\beta 10^p 5^q}{c_p^{p/a}} \bar{\gamma}_v(\|\mathbf{v}\|)^q + \right. \\ &\quad \left. (c_1 5^{b_1} + c_2 5^{b_2}) \bar{\gamma}_v(\|\mathbf{v}\|)^{b_1} \right), \\ \bar{\Phi}_\alpha(l, \mathbb{N}_{\min}) &:= 2(1 + \mu) K g(k, l) \left(\bar{\gamma}_\alpha(\sqrt{2})^\zeta + \frac{c_\lambda^\zeta 2^{\zeta/2}}{\mathbb{N}_{\min}^\eta} \right),\end{aligned}$$

donde las constantes están dadas por

$$k_1 = c_\beta 2^p \tag{3.49}$$

$$k_2 = 5^{p+q} \left(\frac{\bar{c}_p}{c_p} \right)^q c_\beta 2^p + c_1 5^{b_1} \bar{c}_p^{b_1} + c_2 5^{b_2} \bar{c}_p^{b_2}, \tag{3.50}$$

$$K = \frac{c_\beta 10^p 5^q}{c_p^{p/a}} + c_1 5^{b_1} + c_2 5^{b_2}, \tag{3.51}$$

Como k_1 y k_2 son constantes positivas, $g(k, l) \leq 1$, el error inicial en la estimación $|x_0 - \bar{x}_0|$ se supone acotado y $\theta < 1$, de manera que $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k = 0$ implica que $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k) = 0$, mitigando el efecto del error en la condición inicial del sistema. Asimismo, la función $\bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k)$ es estrictamente decreciente, por lo tanto $\bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k) \in \mathcal{KL}$. Por otro lado, la función $\bar{\Phi}_w(\|\mathbf{w}\|)$ depende de la amplitud máxima del ruido de proceso que afecta al sistema y de la función $g(k, l)$. Como las perturbaciones se suponen acotadas, y $g(k, l) \leq 1$, la función $\bar{\Phi}_w(\|\mathbf{w}\|)$ es positiva y finita. Mas aún, $\bar{\Phi}_w(\|\mathbf{w}\|)$ es creciente con $\|\mathbf{w}\|$ y $\bar{\Phi}_w(\|\mathbf{w}\|) = 0$ si $\|\mathbf{w}\| = 0$. Como la función $\bar{\gamma}_w(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$, $\bar{\Phi}_w(\|\mathbf{w}\|) \in \mathcal{K}_\infty$. Sin embargo, como las perturbaciones se suponen acotadas, la función $\bar{\Phi}_w(\|\mathbf{w}\|)$ está acotada. El mismo análisis es válido para la función $\bar{\Phi}_v(\|\mathbf{v}\|)$, con ruido de medición v_k acotado. Finalmente, la función $\bar{\Phi}_\alpha(l, \mathbb{N}_{\min})$ depende de la función $g(k, l)$ y de la longitud del horizonte de estimación \mathbb{N}_{\min} . Esta función manifiesta el incremento en el error de estimación cuando el modelo utilizado no describe exactamente el sistema. Cuando el error de modelado es convergente, la cota del error de estimación (3.47) se reduce a (3.17), y el error de estimación será convergente si los ruidos de proceso y medición lo son. Sin embargo, cuando el sistema no es excitado con una señal de excitación persistente adecuada, impidiendo una correcta estimación de sus parámetros, el error de estimación no será convergente, aún si los ruidos de proceso y medición lo son.

De esta manera queda demostrada la estabilidad robusta para el estimador dual dado por las formulaciones (3.37) y (3.38), con cota para el error de estimación dada por (3.47), donde aparece de manera explícita cómo la estimación dual mitiga los efectos de la incertidumbre sobre el sistema mediante la incorporación de $g(k, l)$. Para un horizonte de

estimación cuya longitud es $N \geq N_{\min}$, los efectos de la incertidumbre sobre la condición inicial del sistema van perdiendo relevancia conforme transcurre el tiempo. Mas aún, si el sistema es excitado adecuadamente, el error sobre el modelo puede ser mitigado, y el estimador dual poseerá estabilidad robusta asintótica.

Observación 4. *Para el caso de perturbaciones convergentes, los términos $\bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k)$, $\bar{\Phi}_w(\|\mathbf{w}\|)$ y $\bar{\Phi}_v(\|\mathbf{v}\|)$ convergen a cero cuando $k \rightarrow \infty$. Sin embargo, $\bar{\Phi}_\alpha(l, N_{\min})$ sólo convergerá a cero si el estimador dual dado por (3.37) y (3.38) es capaz de reconstruir los parámetros del sistema exactamente. Para ello, es necesario que el sistema sea alimentado con una señal de entrada que cumpla con las condiciones de excitación persistente (3.39). De esta manera, $\lim_{k \rightarrow \infty} g(k, l) = 0$, logrando que $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\Phi}_\alpha(l, N_{\min}) = 0$. En este caso, el esquema de estimación poseerá estabilidad robusta asintótica, de lo contrario, si $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\Phi}_\alpha(l, N_{\min}) \neq 0$, el estimador poseerá estabilidad robusta práctica regional (ver definición (10)). Es decir, los estados estimados no convergerán a los reales aún para el caso de ruidos de proceso y medición convergentes.*

3.2.6. Ejemplos

Sistema no lineal

Como ejemplo consideremos nuevamente el sistema (3.31) donde además se considera ruido de proceso actuando sobre $\dot{x}_2(t)$ y una acción de control actuando sobre $\dot{x}_1(t)$ para garantizar una adecuada excitación del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2kx_1^2(t) + w_1(t) + u(t) \\ kx_1^2(t) + w_2(t) \end{bmatrix} \\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t) + v(t) \end{aligned} \quad (3.52)$$

La zona de operación del sistema está restringida a $0 \leq x_1(t) \leq 5$ y $0 \leq x_2(t) \leq 3$. Para la simulación, los modelos afines se generan mediante la linealización y discretización de (3.52) utilizando un retenedor de orden cero. Escogiendo los puntos de linealización $x_{lin_1} = [1.9185, 0]^T$ y $x_{lin_2} = [0.2378, 0]^T$ se obtienen los siguientes modelos afines

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.8845 & 0 \\ 0.0578 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.0941 \\ 0.0029 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad a_1 = \begin{bmatrix} 0.1118 \\ -0.0554 \end{bmatrix}, \quad c_1 = 0,$$

y

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.9849 & 0 \\ 0.0076 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.0992 \\ 0.0004 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0.0018 \\ -0.0009 \end{bmatrix}, \quad c_2 = 0,$$

Los costos de arribo y de etapa del problema (3.37) se diseñan con los siguientes valores

$$\Gamma_0(\chi) = \chi^T \begin{bmatrix} 10^{-4} & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{bmatrix} \chi,$$

Luego de finalizar el proceso de iteración, la matriz del costo de arribo es actualizada mediante (3.4). El costo de etapa se diseña con la siguiente estructura

$$\ell_e(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) = \hat{w}_{j|k}^T \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \hat{w}_{j|k} + \hat{v}_{j|k}^T 0.015 \hat{v}_{j|k}.$$

Los costos de arribo y de etapa del problema (3.38) se escogen como

$$\Lambda_0(\Theta) = \Theta^T \begin{bmatrix} 10^{-4} & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{bmatrix} \Theta,$$

y

$$\ell_m(\hat{d}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}, \hat{r}_{j|k}) = \hat{d}_{j|k}^T \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \hat{d}_{j|k} + \hat{r}_{j|k}^T \begin{bmatrix} 10^{-4} & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{bmatrix} \hat{r}_{j|k} + \hat{v}_{j|k}^T 100 \hat{v}_{j|k}.$$

La matriz del costo de arribo es actualizada también mediante (3.4). Los ruidos de proceso y medición tienen varianzas $S_w = 0.001^2$ y $S_v = 0.01^2$, respectivamente, ambos con distribución normal. En cada instante de muestreo se aplica al sistema una señal binaria pseudoaleatoria u_k con amplitud ± 0.35 . La señal u_k se supone conocida. En la simulación se evalúan las implementaciones de (3.36) y (3.37)-(3.38). Los costos de arribo y etapa de (3.36) se configuran de la misma manera que (3.37) y (3.38).

La figura 3.3 muestra la evolución de los estados real del sistema y las estimaciones realizadas por las formulaciones (3.36) y (3.37)-(3.38) con dos modelos fijos. El horizonte de estimación N_e posee tan sólo tres muestras. Los pesos asignados a cada modelo en cada instante de tiempo por el estimador dual pueden observarse en la figura 3.4. Al comienzo de la simulación, el estimador utiliza el modelo obtenido mediante la linealización en el punto x_{lin_1} . Luego, cuando $t \approx 2.4[Seg.]$, se comienza a utilizar exclusivamente el segundo modelo. Este comportamiento es razonable, ya que las matrices obtenidas mediante la linealización dependen solamente de $x_1(t)$, entonces la zona de operación de cada modelo puede ser definida en función de $x_1(t)$.

La figura 3.5 muestra la evolución del costo de estimación de las formulaciones (3.37)-

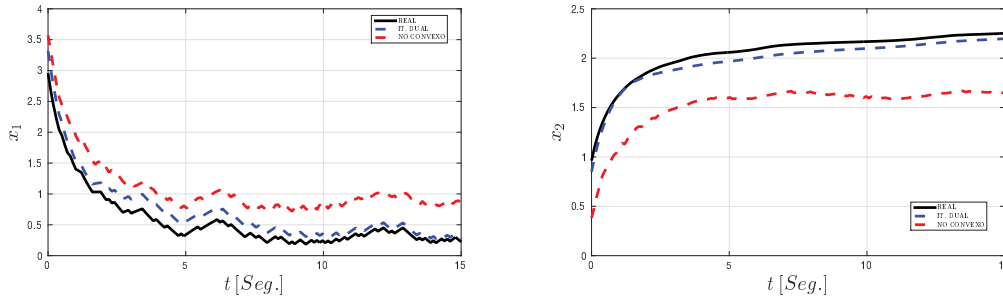


Figura 3.3: Comparación entre los diferentes algoritmos de estimación de horizonte móvil. IT. DUAL (azul), NO CONVEXO (rojo) y estado real (negro) con dos modelos fijos y $N_e = 3$.

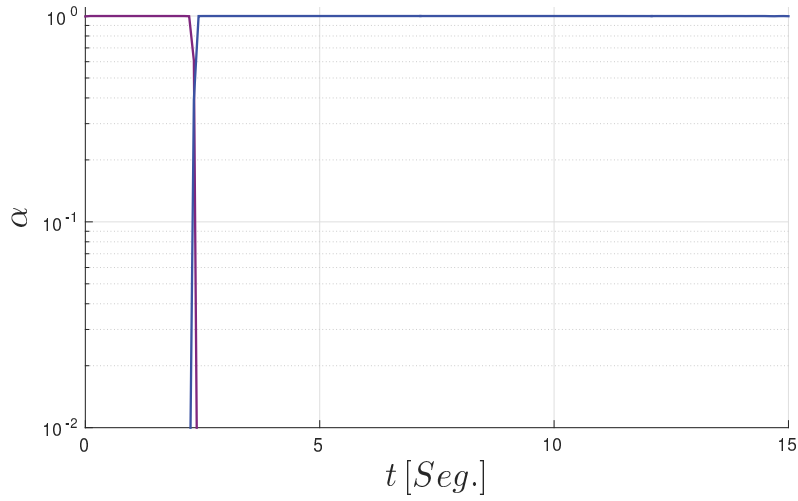


Figura 3.4: Coeficientes de mezcla de los modelos.

(3.38) en función del tiempo y del número de iteraciones implementadas en cada instante de muestreo. El proceso de iteración se detiene cuando la distancia entre dos soluciones sucesivas de (3.37) es menor a 10^{-5} . Puede observarse que la mayor parte del tiempo, bastan solo dos iteraciones para alcanzar esta condición.

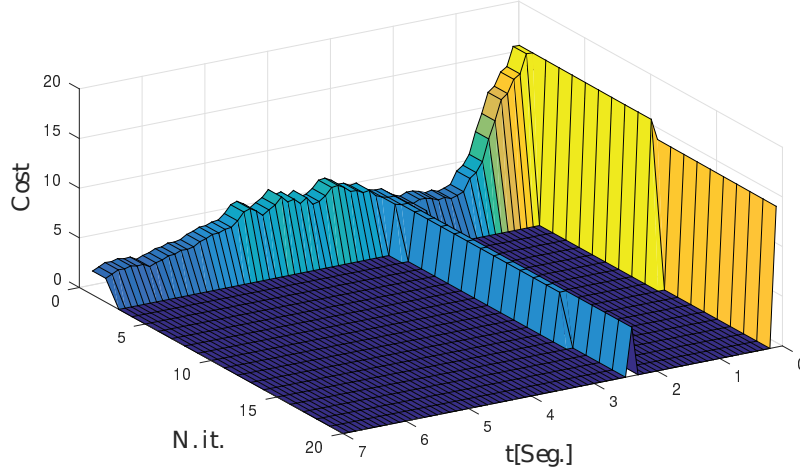


Figura 3.5: Evolución del costo en función del tiempo y del número de iteraciones.

Finalmente, la figura 3.6 compara los tiempos de ejecución de las implementaciones de (3.36) y (3.37)-(3.38). Como puede observarse, la resolución del problema (3.36) con espacio de solución no convexo requiere menor tiempo de cómputo para las mismas configuraciones del optimizador. Sin embargo, el error de estimación es mucho mayor.

El experimento se realiza nuevamente, pero ahora se incrementa la cantidad de modelos a diez. Los puntos de linealización son $x_{lin_1} = [3.9655, 0]^T$, $x_{lin_2} = [3.54, 0]^T$, $x_{lin_3} = [2.7364, 0]^T$, $x_{lin_4} = [1.9185, 0]^T$, $x_{lin_5} = [1.0174, 0]^T$, $x_{lin_6} = [0.6080, 0]^T$, $x_{lin_7} = [0.4579, 0]^T$, $x_{lin_8} = [0.3511, 0]^T$, $x_{lin_9} = [0.2378, 0]^T$, $x_{lin_{10}} = [0.0508, 0]^T$. El

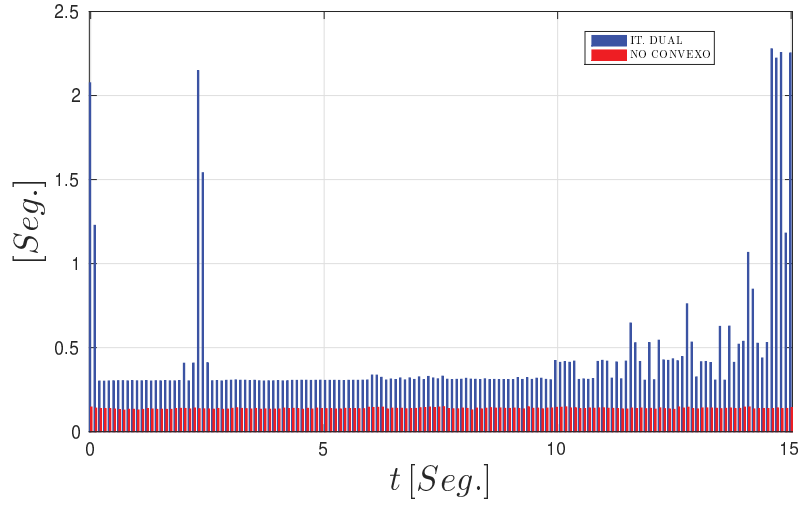


Figura 3.6: Tiempos de ejecución de los algoritmos. IT. DUAL (azul), NOCONVEXO (roja).

horizonte de estimación se mantiene en $N = 3$, al igual que las configuraciones de los costos de arriba y etapa.

La figura 3.7 muestra la evolución de los estados reales y los estimados. Puede observarse que el desempeño del estimador dual dado por (3.37)-(3.38) es superior al del estimador (3.36). Mas aún, el error de estimación decrece al aumentar la cantidad de modelos fijos. La figura 3.8 muestra los pesos de cada modelo en función del tiempo. Puede observarse que la estimación de estados se lleva a cabo utilizando casi exclusivamente un sólo modelo, y la transición entre uno y otro es brusca. Esto comportamiento se debe a que la variación de modelos está débilmente penalizada.

La figura 3.9 muestra la evolución del costo del estimador dual para el caso de diez modelos. Puede observarse en este caso que alcanzar la condición de finalización requiere cuatro iteraciones, aproximadamente, en comparación de las dos requeridas cuando se utilizaron dos modelos.

La figura 3.10 muestra el tiempo de cómputo requeridos por los algoritmos imple-

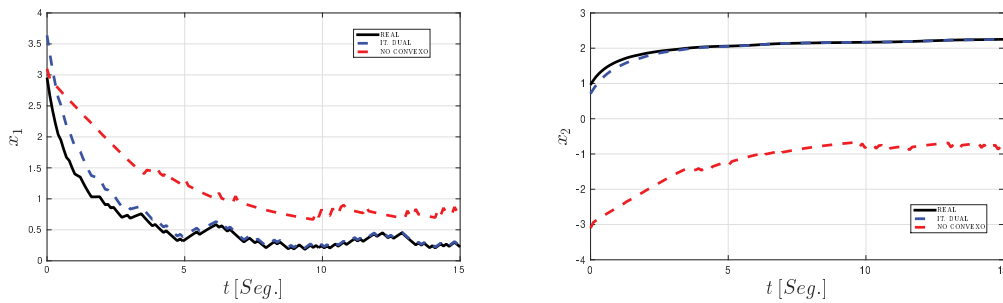


Figura 3.7: Comparación entre los diferentes algoritmos de estimación de horizonte móvil. IT. DUAL (azul), NOCONVEXO (rojo) y estado real (negro) con diez modelos fijos y $N_e = 3$.

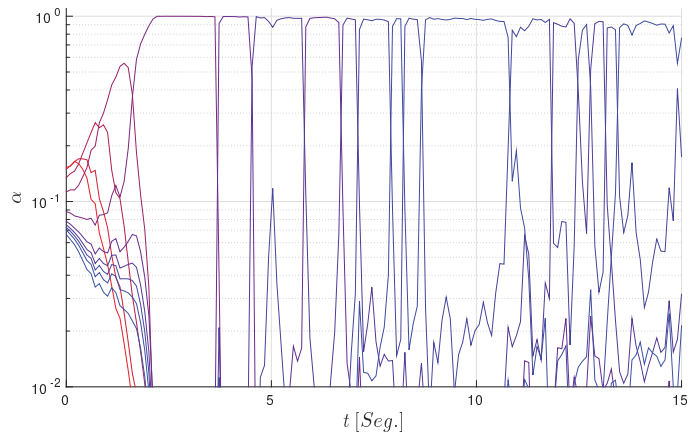


Figura 3.8: Coeficientes de mezcla de los modelos en escala logaritmica.

mentados. Nuevamente, el estimador dual requiere mayor tiempo de cálculo, y el tiempo promedio al utilizar diez modelos es mayor que al utilizar sólo dos. Sin embargo, el error de estimación es en este caso muy cercano a cero para $t > 5[Seg.]$.

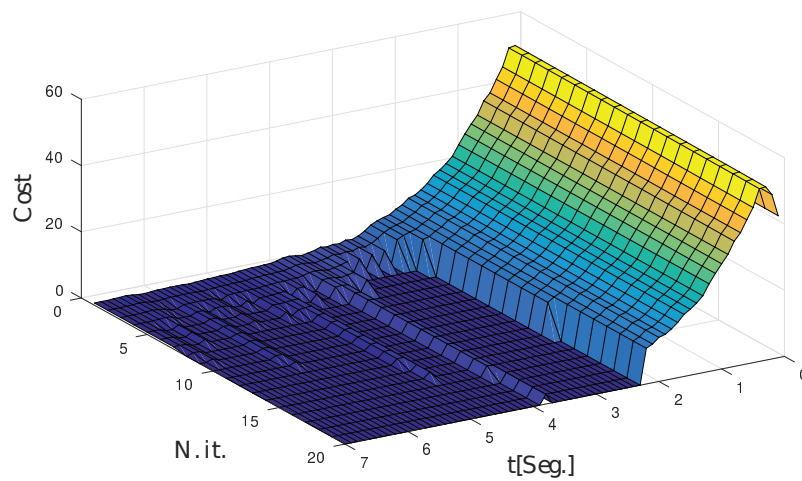


Figura 3.9: Evolución del costo en función del tiempo y del número de iteraciones con diez modelos.

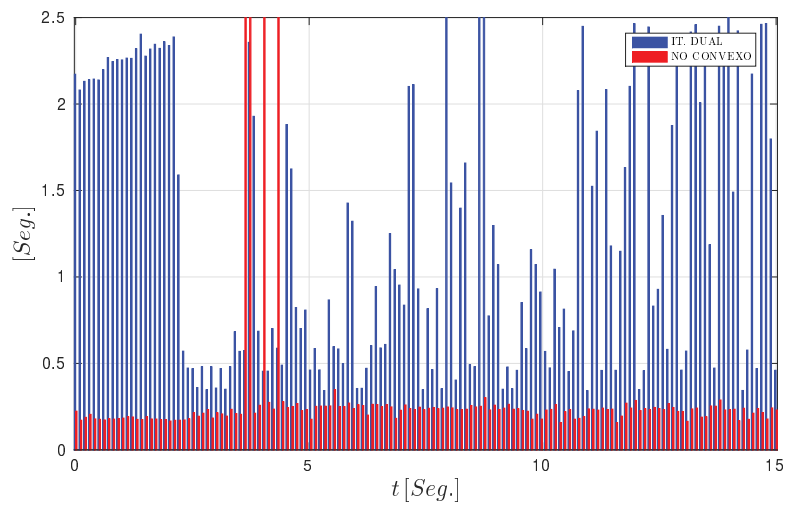


Figura 3.10: Tiempos de ejecución de los algoritmos. IT. DUAL (barra azul), NO-CONVEXO (barra roja) con diez modelos.

4 Estimación y control simultáneos

Esta sección completa a las anteriores incorporando el controlador a la formulación del problema de estimación. El resultado es un esquema de estimación y control simultáneos, capaz de operar en condiciones donde el principio de separación no es aplicable.

Una de las técnicas de control mas populares tanto en la academia como la industria es el control predictivo (*MPC*) debido a la capacidad de incorporar de manera explicita restricciones de entrada y/o estados [3], [52], [71], [72]. Garantías de estabilidad han sido establecidas a lo largo del tiempo desde los comienzos de *MPC* [52], [73], [74]. Un repaso de los avances mas recientes pueden ser encontrados en [72]. *MPC* resuelve el problema de control óptimo en cada instante de muestreo, tomando como condición inicial el estado actual del sistema. Al resolver el problema de optimización se obtiene una secuencia de acciones de control futuras a aplicar al sistema. Sólo la primer acción de control es aplicada. En el próximo instante de muestreo, se actualiza la condición inicial, y el problema de optimización se resuelve nuevamente, introduciendo de esta manera una realimentación al controlador. *MPC* mantiene constante la carga computacional resolviendo el problema de optimización en un ventana de tiempo de longitud finita y fija. El comportamiento del sistema mas allá de la ventana de predicción es resumido en un término que se conoce como *costo terminal*.

MPC suele formularse suponiendo que la condición inicial del estado puede ser medida. Sin embargo, en muchos casos de aplicación, la única información disponible son mediciones ruidosas de la salida del sistema, por lo que se hace necesario la utilización de un algoritmo de estimación de estados [75]. De todos los métodos de estimación disponibles, *MHE* resulta ser el mas atractivo para utilizar junto con *MPC* ya que sus formulaciones son semejantes. Ambos resuelven un problema de optimización en linea con una cantidad finita y fija de información. Al resolver el problema de *MHE* se dispondrá de una trayectoria de estados compatible con la secuencia de mediciones del sistema.

Si bien ambas técnicas poseen una formulación similar, *MHE* es una técnica mas reciente en comparación con *MPC*. Los primeros avances en *MHE* se dan cuando en *MPC* ya existen resultados relevantes. Los trabajos de [27] y [28] proveen una descripción general sobre *MHE* para sistemas lineales y no lineales. Trabajos mas recientes en *MHE* logran establecer estabilidad robusta para sistemas no lineales y convergencia de las estimaciones para el caso de perturbaciones convergentes [6], [32], [76], [77], [78]. En los últimos años se han obtenido muchos resultados interesantes para diferentes formulaciones de *MHE*, en donde las primeras han partido de suposiciones un tanto idealistas como la observabilidad del sistema, ausencia de ruido, perturbaciones, e incertidumbre, hasta situaciones mas realistas donde se supone que el sistema es detectable y actúan sobre el mismo perturbaciones acotadas [31], [55], [79], [80].

Cuando las perturbaciones, restricciones e incertidumbre presentes en el sistema pue-

den ser ignorados, estimación y control pueden calcularse de manera independiente [9], [10], [81], [82]. Sin embargo, estas condiciones difícilmente se dan en la práctica. Ruidos de proceso y medición suelen estar presentes, así como también incertidumbre sobre el modelo el sistema y restricciones sobre los estados y/o acciones de control. En este contexto, es necesario un enfoque que incluya esta información en el diseño del controlador.

MPC con realimentación de estados en una técnica en la que se han logrado avances teóricos de importancia con aplicaciones prácticas, capaz de considerar en su formulación la incertidumbre de modelado, perturbaciones y ruidos [83], [84], [85], entre otros. Sin embargo, estos trabajos no consideran robustez frente a errores en la condición inicial, es decir, errores de estimación. Son incluso una cantidad menor los trabajos que adoptan un enfoque de realimentación de la salida. Un resumen de *MPC* para sistemas no lineales con realimentación de la salida puede encontrarse en [86] y en las citas mencionadas en este trabajo. Muchos de esos enfoques diseñan por separado el estimador del controlador, utilizando diferentes algoritmos de estimación [56], [87], [88], [89], [90]. Resultados sobre *MPC* robusto con realimentación de la salida para sistemas lineales de tiempo discreto sujetos a restricciones y perturbaciones acotadas y ruido de medición pueden encontrarse en [33], [35], [91], [92]. Estos enfoques primero resuelven el problema de estimación, probando la convergencia de la trayectoria estimada hacia un conjunto compacto, y luego, teniendo en cuenta la incertidumbre de la estimación se resuelve el problema de *MPC*.

El enfoque de resolver simultáneamente los problemas de *MHE-MPC* fue introducido primero por [38] y luego desarrollado en [39], [40], [41]. En [38] se propone un controlador con realimentación de la salida que combina la estimación de estados con el controlador en un único problema de optimización de tipo *min-max*, que, suponiendo observabilidad y controlabilidad [39], garantizan que la trayectoria de estados permanezca acotada. Finalmente, en [40], los autores establecen las condiciones bajo las cuales se puede garantizar una cota superior para el error de desvío en el problema de seguimiento de trayectorias. También introducen un algoritmo de optimización que puede ser utilizado para resolver de manera eficiente el problema de optimización *min-max*. El criterio utilizado en estos trabajos implica la minimización de la función objetivo dentro de ventanas de longitud finita hacia atrás y adelante respecto de las acciones de control y la maximización respecto de las variables desconocidas del sistema para garantizar robustez para el peor caso posible.

En esta sección se presenta un esquema de *MHE-MPC* simultáneos para sistemas no lineales sujetos a perturbaciones acotadas. El problema de optimización minimiza la función objetivo respecto de las condiciones iniciales, ruidos de proceso y medición dentro de la ventana de estimación, mientras que dentro de la ventana de control se minimiza respecto de las acciones de control y estados, y se maximiza respecto de los ruidos de proceso para garantizar robustez frente al peor caso, ya que se supone que la única información disponible del ruido es que está acotado. Las principales contribuciones en esta sección son la formulación de la función objetivo del controlador, que, para maximizar los ruidos de proceso dentro de la ventana de control, se introduce el costo de etapa correspondiente con signo negativo, en lugar de emplear una estrategia *min-max*. Esto, junto con la restricción

de positividad de la función objetivo, embebe la noción de controlabilidad respecto de las perturbaciones y puede ser utilizado como indicador sobre la máxima perturbación a la que puede hacer frente el controlador sin perder controlabilidad, lo que resulta de interés durante la etapa de diseño del mismo. La segunda contribución es que no se hace ninguna suposición sobre el costo terminal, como es habitual en *MPC*, sino que de manera análoga al análisis realizado para el estimador de la sección (3), el análisis de estabilidad del controlador es llevado a cabo mediante un análisis en función de la longitud del horizonte. Finalmente, se analizan las condiciones bajo las cuales el algoritmo de estimación y control simultáneo posee factibilidad, en función de la longitud de los horizontes y el error de estimación.

4.1. Estimación y control simultáneos

En lo siguiente, se considerará el sistema dado por (2.1), el cual incorpora la acción de control. El objetivo del problema de *MHE-MPC* simultáneo consiste en reconstruir la trayectoria de estados del sistema y calcular las acciones de control futuras para llevar el sistema a la región de operación deseada, aún bajo la acción de las peores perturbaciones que pueden actuar sobre el mismo. Esta formulación resulta en un problema de optimización de horizonte infinito

$$\begin{aligned} \min_{\hat{x}_{0|k}, \hat{w}, \hat{u}} \Psi_{EC} &:= \sum_{j=0}^{j=k-1} \ell_e(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) + \sum_{j=k}^{\infty} (\ell_c(\hat{x}_{j|k}, \hat{u}_{j|k}) - \ell_{w_c}(\hat{w}_{j|k})) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \hat{x}_{j+1|k} = f(\hat{x}_{j|k}, \hat{u}_{j|k}) + \hat{w}_{j|k}, \\ y_j = h(\hat{x}_{j|k}) + \hat{v}_{j|k}, \\ \hat{x}_{j|k} \in \mathcal{X}, \hat{u}_{j|k} \in \mathcal{U}, \hat{w}_{j|k} \in \mathcal{W}, \hat{v}_{j|k} \in \mathcal{V}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Las funciones $\ell_e : \mathbb{R}^{n_w} \times \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}$, $\ell_c : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\ell_{w_c} : \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}$ representan los costos de etapas correspondientes al estimador y al controlador. El signo negativo de $\ell_{w_c}(\cdot)$ maximiza el efecto de los ruidos de proceso dentro de la ventana de control, forzando las acciones de control a una condición de peor caso de perturbaciones. La formulación del problema (4.1) carece de interés práctico por que no se puede resolver, pero posee importancia teórica ya que garantiza la existencia de una cota superior para la función de costo $\Psi_{EC} \leq \delta$, para algún $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ de modo que

$$\sum_{j=0}^{j=k-1} \ell_e(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) + \sum_{j=k}^{\infty} \ell_c(\hat{x}_{j|k}, \hat{u}_{j|k}) \leq \delta + \sum_{j=k}^{\infty} \ell_{w_c}(\hat{w}_{j|k}). \quad (4.2)$$

El problema (4.1) puede reescribirse con ventanas de estimación y control de longitudes finitas de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
& \min_{\substack{\hat{x}_{k-N_e|k}, \hat{w}_{[k-N_e-1, k+N_c-1]} \\ \hat{u}_{[k, k+N_c-1]}}} \Psi_{EC} := \Gamma_{k-N_e}(\chi) + \sum_{j=k-N_e-1}^k \ell_e(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) + \\
& \quad \sum_{j=k}^{k+N_c-1} (\ell_c(\hat{x}_{j|k}, \hat{u}_{j|k}) - \ell_{w_c}(\hat{w}_{j|k})) + \Upsilon_{k+N_c}(\Xi) \\
& \text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} \chi = \hat{x}_{k-N_e|k} - \bar{x}_{k-N_e}, \\ \Xi = \hat{x}_{k+N_c|k}, \\ \hat{x}_{j+1|k} = f(\hat{x}_{j|k}, \hat{u}_{j|k}) + \hat{w}_{j|k}, \\ y_j = h(\hat{x}_{j|k}) + \hat{v}_{j|k}, \\ \hat{x}_{j|k} \in \mathcal{X}, \Xi \in \mathcal{X}_f, \hat{u}_{j|k} \in \mathcal{U}, \hat{w}_{j|k} \in \mathcal{W}, \hat{v}_{j|k} \in \mathcal{V}. \end{array} \right. \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Las sumas infinitas en (4.1) se han reemplazado por ventanas de estimación y control con longitudes finitas N_e y N_c , respectivamente. La información anterior a la ventana de estimación es resumida en el *costo de arribo* $\Gamma_{k-N_e}(\chi)$, mientras que el comportamiento del sistema mas allá de la ventana de control es resumido en el *costo terminal* $\Upsilon_{k+N_c}(\Xi)$.

4.2. Relación con *MHE* y *MPC*

El criterio Ψ_{EC} puede ser reescrito como una combinación explícita de Ψ_E y Ψ_C , donde Ψ_E representa el problema de estimación analizado en la sección 3 y Ψ_C el problema de *MPC*

$$\Psi_{EC} := \theta \Psi_E + (1 - \theta) \Psi_C, \quad (4.4)$$

con $\theta \in [0, 1]$ y Ψ_E y Ψ_C dados por

$$\Psi_E := \Gamma_{k-N_e}(\chi) + \sum_{j=k-N_e}^k \ell_e(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}), \quad (4.5)$$

$$\Psi_C := \sum_{j=k}^{k+N_c-1} (\ell_c(\hat{x}_{j|k}, \hat{u}_{j|k}) - \ell_{w_c}(\hat{w}_{j|k})) + \Upsilon_{k+N_c}(\Xi). \quad (4.6)$$

La ecuación (4.4) corresponde a una formulación multiobjetivo ponderada de (4.3), donde θ determina la importancia relativa entre Ψ_E y Ψ_C . Cuando $\theta = 0$, $\Psi_{EC} = \Psi_C$ y el problema (4.3) se convierte en un problema de *MPC* con costo terminal [93], suponiendo que x_k es medible o es provisto por un estimador. Por otro lado, cuando $\theta = 1$, $\Psi_{EC} = \Psi_E$, y el problema (4.3) se convierte en un problema de *MHE*, [30], [31], [78], [79], donde la acción de control u_k es calculada por un controlador. En estos casos, el problema de optimización (4.3) tiene un sólo objetivo, y es necesario que se verifique el principio de separación, ya que el estimador y el controlador son diseñados de manera independiente.

Cuando $0 < \theta < 1$, Ψ_E y Ψ_C tienen influencia simultáneamente en Ψ_{EC} , y el problema

de optimización (4.3) se transforma en un problema multiobjetivo. El peso de Ψ_E y Ψ_C queda definido mediante θ , modificando el énfasis en los problemas de estimación y control. Para el caso en que $\theta = 0.5$, Ψ_E y Ψ_C poseen la misma influencia sobre la solución del problema (4.3), convirtiéndose en el problema propuesto por [40].

Definición 15. *La solución $z^o \in \mathcal{Z}$ de un problema de optimización multiobjetivo es un óptimo de Pareto si y sólo si no existe otra solución $z \in \mathcal{Z}$ tal que $\Psi(z) \leq \Psi(z^o)$ y $\Psi^i(z) < \Psi^i(z^o)$ para al menos una de las funciones [94].*

De acuerdo con este concepto, el problema (4.3) busca una solución en la que tanto Ψ_E y Ψ_C no puedan ser mejoradas sin deteriorar la otra.

Observación 5. *Todos los puntos óptimos de Pareto caen en la frontera del espacio admisible. A menudo, los algoritmos proporcionan soluciones que pueden no ser óptimos de Pareto, pero si óptimos según otro criterio, por lo que adquieren importancia en aplicaciones prácticas.*

Cualquier solución óptima del problema (4.3) con $0 < \theta < 1$ es Pareto óptima [94], por lo tanto existe una relación de compromiso entre Ψ_E y Ψ_C . Para los casos en que $\theta = 0$ o $\theta = 1$, las soluciones del problema (4.3) son óptimas según el objetivo seleccionado (Ψ_E o Ψ_C , respectivamente). En estos casos, las soluciones obtenidas no son Pareto óptimas y, por lo tanto, el desempeño global del sistema puede verse deteriorado en comparación con las soluciones multiobjetivo del problema.

4.3. Estabilidad robusta

En esta sección se analizarán las propiedades mas relevantes del esquema de *MHE-MPC* simultáneo. La factibilidad del problema de estimación y control simultáneo será analizada en función de las longitudes de los horizontes de estimación y control y del error de estimación. El análisis de estabilidad del estimador se lleva a cabo de manera similar al realizado en la sección 3, mientras que la estabilidad robusta del controlador es analizada en función de la longitud del horizonte de control, prescindiendo de la suposición habitual en *MPC* que vincula el costo terminal con una función de Lyapunov. Cuando el problema de *MHE-MPC* simultáneo es factible, la longitud de los horizontes de Ψ_E y Ψ_C determinan la estabilidad de Ψ_{EC} .

4.3.1. Ventana de estimación

El problema de estimación y control simultáneo utiliza las mediciones de la salida del sistema para estimar el estado actual $\hat{x}_{k|k}$, que es el vínculo y punto en común a los problemas de estimación y control, y a partir del cual el controlador calculará las acciones de control para llevar el sistema a la zona de operación deseada. Resultados previos sobre *MPC* robusto sujeto a perturbaciones acotadas, resuelven en primer lugar, el problema de

estimación, probando convergencia de las estimaciones a un conjunto compacto. Luego, teniendo en cuenta el error de estimación, se resuelve el problema de *MPC* [33], [91]. La idea clave en los trabajos citados es considerar el error de estimación como una incertidumbre adicional, desconocida y acotada para poder garantizar la estabilidad del sistema resultante a lazo cerrado. Esta idea es equivalente a suponer que el conjunto *robusto estimable* \mathcal{E} está contenido en el conjunto *robusto controlable* en i pasos $\mathcal{R}_i(\Omega, \mathbb{T})$, donde \mathcal{E} y $\mathcal{R}_i(\Omega, \mathbb{T})$ están definidos por

$$\begin{aligned} \mathcal{E} := & \{x_k : |x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq \bar{\beta}(|x_0 - \bar{x}_0|, k) + \phi_w(\|\mathbf{w}\|_{[0, k-1]}) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|_{[0, k-1]}) , \\ & \forall \hat{x}_{k|k} \in \mathcal{X}, \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\mathcal{R}_i(\Omega, \mathbb{T}) := \{x_0 \in \mathcal{X} \mid \exists u_j \in \mathcal{U} : \{x_j \in \Omega, x_i \in \mathbb{T}\}, \forall w_j, j \in \mathbb{Z}_{[0, i-1]}\} \quad (4.8)$$

Observación 6. *El conjunto robusto controlable en i pasos $\mathcal{R}_i(\Omega, \mathbb{T})$ es el conjunto de estados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ para el cual existe una ley de control admisible tal que algún conjunto terminal arbitrario $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^n$ es alcanzado en i pasos, mientras la evolución de los estados permanece dentro del conjunto Ω durante los primeros $i - 1$ pasos, para toda secuencia admisible de perturbaciones [95].*

Observación 7. *El conjunto robusto estimable \mathcal{E} es el conjunto de todos los estados x_k , centrados en $\hat{x}_{k|k}$, tal que la distancia entre $\hat{x}_{k|k}$ y cualquier estado x_k es igual o menor al error de estimación cometido en tiempo k , donde el error de estimación está dado por (3.17). Asimismo, el conjunto \mathcal{E} es contractivo debido al primer término en (4.7), y la velocidad de contracción es proporcional a la longitud de la ventana de estimación N_e .*

Corolario 4.3.1. *El problema de estimación y control simultáneo será factible si $\mathcal{E} \subseteq \Omega$, $\mathcal{X}_f \in \mathbb{T}$ e $i = N_c$. En este caso definiremos el conjunto robusto controlable como $\mathcal{R}_{N_c}(\mathcal{E}, \mathcal{X}_f)$.*

Suposición 4.3.1. *En lo siguiente supondremos que $\mathcal{R}_i(\Omega, \mathbb{T}) = \mathcal{R}_{N_c}(\mathcal{E}, \mathcal{X}_f)$, garantizando la factibilidad del problema de MHE-MPC simultáneos.*

El concepto central es que todo vector que pertenezca al conjunto \mathcal{E} pueda ser llevado en N_c pasos al conjunto \mathcal{X}_f del problema de control con restricciones terminales. Si $\mathcal{E} \not\subseteq \Omega$, un aumento en la longitud del horizonte de estimación N_e reducirá el volumen del conjunto \mathcal{E} , mientras que un aumento en la longitud del horizonte de control N_c aumentará el volumen del conjunto Ω .

4.3.2. Ventana de control

A partir de una estimación $\hat{x}_{k|k}$, el problema de *MPC* calcula las acciones de control para llevar el sistema a la zona de operación deseada, suponiendo que actúan las perturbaciones más perniciosas sobre el sistema. Siguiendo la metodología utilizada en [96], donde el análisis de estabilidad se realiza en función del horizonte de control N_c , relajando el requerimiento de que el costo terminal sea una función de Lyapunov para el controlador,

aquí extenderemos esas nociones para el caso en que las perturbaciones de proceso son consideradas dentro de la ventana de control. De esta manera se puede establecer una longitud mínima para el horizonte de control que garantice estabilidad y al mismo tiempo, se pueden evitar horizontes excesivamente largos y prevenir un aumento en la carga computacional requerida por el algoritmo. En lo siguiente, utilizaremos la notación Ψ_{EC,k,N_c} para diferenciar el problema Ψ_{EC} en diferentes instantes de tiempo y con diferentes longitudes de horizontes.

Relajar la suposición de que el costo terminal del problema de MPC sea una función de Lyapunov, es análogo a suponer lo siguiente

Suposición 4.3.2. *Existe una constante $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que el costo terminal y el costo de etapa satisfacen la siguiente relación*

$$\Upsilon_{k+N_c}(f(x, u) + w) + \ell(x, u) \leq \Upsilon_{k+N_c}(x)(1 + \delta) + \ell_w(w). \quad (4.9)$$

De manera similar a las cotas establecidas para $\ell_e(\cdot, \cdot)$ se asignarán cotas al costo de etapa del controlador.

Suposición 4.3.3. *El costo de etapa $\ell_c(x, u)$ está acotado por debajo por una función $\sigma(x) \in \mathcal{K}_\infty$, tal que $\sigma(x) \leq \ell_c(x, u)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\forall u \in \mathcal{U}$.*

Observación 8. *Escogiendo $\Upsilon_{k+N_c}(x) = \ell_c(x, 0)$, $\sigma(x) = \Upsilon_{k+N_c}(x)$ y $\ell_{c_w}(w) = 0$, la suposición 4.3.3 se verifica fácilmente. Suponiendo un horizonte de control $N_c = 1$, para alguna acción de control $u \in \mathcal{U}$ admisible tal que $\sigma(x) + \Upsilon_{k+1}(f(x, u) + w) = \sigma(x) + \sigma(f(x, u) + w) = \Psi_{C,k,1} \leq L_1\sigma(x) = (1 + (L_1 - 1))\sigma(x)$. Por lo tanto, $\delta = L_1 - 1$ verifica la suposición 4.3.2 para algún $x \in \mathcal{X}$ dado.*

Suposición 4.3.4. *Existe una secuencia creciente $\mathbf{L} := [L_0, L_1, \dots]$, $L_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq L_i \leq L$, $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $L \in \mathbb{R}$, de modo tal que el costo de control $\Psi_{C,k,B}$ puede ser acotado de la siguiente manera*

$$\Psi_{C,k,B} \leq L_B \sigma(\hat{x}_{k|k}), \quad (4.10)$$

La suposición 4.3.4 implica que el costo de control Ψ_C puede ser acotado por la función $\sigma(\cdot)$ de la suposición 4.3.3, escalado por una constante L_B . La clave del análisis de estabilidad para el controlador está en encontrar el valor de L_B para el cual, dada la función $\sigma(\cdot)$ y para todo $\hat{x}_{k|k} \in \mathcal{X}$, la suposición 4.3.4 se verifica.

Con la finalidad de establecer una relación entre la longitud del horizonte de control y la estabilidad de Ψ_C , comparemos el costo Ψ_{EC} en dos instantes de tiempo consecutivos k y $k + 1$. Teniendo en cuenta la solución óptima obtenida a tiempo k , las secuencias $\hat{\mathbf{x}}_{[k-N_e+1, k+N_c+1]} = [\hat{x}_{k-N_e+1|k}, \dots, f(\hat{x}_{k+N_c}, u_{k+N_c})]$, $\hat{\mathbf{u}}_{[k+1, k+N_c]} = [\hat{u}_{k+1|k}, \dots, \hat{u}_{k+N_c-1|k}, 0]$, $\hat{\mathbf{w}}_{[k-N_e, k+N_c]} = [\hat{w}_{k-N_e|k}, \dots, \hat{w}_{k+N_c-1}, 0]$ serán una solución

admisibile para el problema a tiempo $k + 1$

$$\begin{aligned}
\Psi_{EC,k+1,B} - \Psi_{EC,k,B} = & \Gamma_{k-N_e+1} (\hat{x}_{k-N_e+1|k+1} - \bar{x}_{k-N_e+1}) + \\
& \sum_{j=k-N_e+1}^{j=k} \ell_e (\hat{w}_{j|k+1}, \hat{v}_{j|k+1}) + \\
& \sum_{j=k+1}^{k+B+1} (\ell_c (\hat{x}_{j|k+1}, \hat{u}_{j|k+1}) - \ell_{w_c} (\hat{w}_{j|k+1})) + \\
& \Upsilon_{k+B+1} (\hat{x}_{k+B+1|k+1}) - \Gamma_{k-N_e} (\chi) - \\
& \sum_{j=k-N_e}^{j=k-1} \ell_e (\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) - \sum_{j=k}^{k+B} (\ell_c (\hat{x}_{j|k}, \hat{u}_{j|k}) - \\
& \ell_{w_c} (\hat{w}_{j|k})) - \Upsilon_{k+B} (\Xi)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Utilizando la desigualdad (4.9) de la suposición 4.3.2, la ecuación (4.11) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
\Psi_{EC,k+1,B} - \Psi_{EC,k,B} \leq & -\ell_c (\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) \left(1 - \delta \left(\frac{\Upsilon_{k+B} (\Xi)}{\ell_c (\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{\delta} \frac{\ell_{w_c} (\hat{w}_{k|k})}{\ell_c (\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})} \right) \right) + \pi_E (\hat{w}, \hat{v}), \\
\leq & -\ell_c (\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) (1 - \delta\omega) + \pi_E (\hat{w}, \hat{v}),
\end{aligned} \tag{4.12}$$

donde $\pi_E (\hat{w}, \hat{v})$ y ω están dados por

$$\begin{aligned}
\pi_E (\hat{w}, \hat{v}) := & \ell_e (\hat{w}_{k+1|k}, \hat{v}_{k+1|k}) - \Gamma_{k-N_e} (\chi) - \ell_e (\hat{w}_{k-N_e|k}, \hat{v}_{k-N_e|k}), \\
\leq & \ell_e (\hat{w}_{k+1|k}, \hat{v}_{k+1|k}), \\
\leq & \bar{\gamma}_w (|\hat{w}_{k+1|k}|) + \bar{\gamma}_v (|\hat{v}_{k+1|k}|), \\
\leq & \bar{\gamma}_w (\|\hat{\mathbf{w}}\|) + \bar{\gamma}_v (\|\hat{\mathbf{v}}\|), \\
\omega := & \frac{\Upsilon_{k+B} (\Xi)}{\ell_c (\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})} + \frac{1}{\delta} \frac{\ell_{w_c} (\hat{w}_{k|k})}{\ell_c (\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

La desigualdad (4.12) impone dos condiciones para la estabilidad del algoritmo de estimación y control simultáneo. La primera está relacionada con el primer término en el lado derecho de (4.12). Si se cumple que

$$0 \leq \delta\omega < 1, \tag{4.14}$$

entonces el primer término será negativo, lo cual es una condición necesaria para garantizar la estabilidad. La segunda condición requiere además que el lado derecho de (4.12) sea negativo para valores *grandes* de $\hat{x}_{k|k}$. Esto impone una condición de diseño sobre el sistema, requiriendo que el actuador pueda aplicar acciones de control *suficientemente grandes* para mitigar el efecto de perturbaciones *grandes*. Es decir, el actuador debe ser dimensionado en función de la amplitud de las perturbaciones sobre el sistema y del error de estimación, que actúa como una perturbación no medible.

Suposición 4.3.5. *Supondremos que el sistema puede ser diseñado de modo tal que la siguiente relación siempre se verifique*

$$\Delta_c^w := \frac{\ell_{w_c}(\|\hat{\mathbf{w}}\|)}{\ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})} < 1, \quad (4.15)$$

para toda $\ell_{w_c}(\cdot)$, $\ell_c(\cdot)$ y $\ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) \neq 0$.

Introduciendo Δ_c^w en la desigualdad (4.14), esta puede ser reescrita como

$$\delta \left(\frac{\Upsilon_{k+B}(\Xi)}{\ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})} + \frac{\Delta_c^w}{\delta} \right) < 1, \quad (4.16)$$

De manera que, para un δ dado, la siguiente relación debe satisfacerse

$$\frac{\Upsilon_{k+B}(\Xi)}{\ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})} < \frac{1 - \Delta_c^w}{\delta}, \quad (4.17)$$

Con el objeto de analizar bajo que condiciones y circunstancias se verifica la relación (4.17), definamos las siguientes cantidades

$$\begin{aligned} a_i &:= \frac{\ell_c(\hat{x}_{k+i|k}, \hat{u}_{k+i|k})}{\ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})}, & a_0 &= 1, & a_B &= \frac{\Upsilon_{k+B}(\Xi)}{\ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})}, \\ b_i &:= \frac{\ell_{w_c}(\hat{w}_{k+i|k})}{\delta \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})}, & b_B &= 0, \\ c_i &:= a_i - \delta b_i. \end{aligned} \quad (4.18)$$

El costo de control $\Psi_{C,k,B}$ puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Psi_{C,k,B} &= \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) \sum_{j=0}^B c_j, \\ \Psi_{C,k,B} &= \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) \sum_{j=0}^{i-1} c_j + \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) \sum_{j=i}^B c_j, \\ \Psi_{C,k,B} - \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) \sum_{j=0}^{i-1} c_j &= \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) \sum_{j=i}^B c_j, \\ \Psi_{C,k,B} - \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) \sum_{j=0}^{i-1} c_j &= \Psi_{C,k,B-i} \end{aligned}$$

con $\Psi_{C,k,B-i} := \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) \sum_{j=i}^B c_j$. Teniendo en cuenta que $a_i \geq c_i \forall i \in \mathbb{Z}_{[0,B]}$, y aplicando las desigualdades dadas por las suposiciones 4.3.4 y 4.3.3, la función de costo

$\Psi_{C,k,B-i}$ puede ser acotada por

$$\begin{aligned}
\Psi_{C,k,B-i} &= \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) \sum_{j=i}^B c_j, \\
&\leq \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) \sum_{j=i}^B a_j, \\
\ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) \sum_{j=i}^B a_j &\leq L_{B-i} \sigma(\hat{x}_{k+i|k}) \\
&\leq L_{B-i} \ell_c(\hat{x}_{k+i|k}, \hat{u}_{k+i|k}) \\
\sum_{j=i}^B a_j &\leq L_{B-i} a_i,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en [96], el término a_B tiene la siguiente cota superior

$$a_B \leq \prod_{i=1}^B \frac{L_i - 1}{L_{i-1}} \leq (L - 1) \left(\frac{L - 1}{L} \right)^{B-1},$$

Una demostración puede ser encontrada en [96]. Recordemos además que $a_B = \frac{\Upsilon_{k+B}(\Xi)}{\ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})}$, por lo tanto $\frac{\Upsilon_{k+B}(\Xi)}{\ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})} \leq (L - 1) \left(\frac{L-1}{L} \right)^{B-1}$. Escogiendo el valor del horizonte de control de la siguiente manera

$$N_c \geq B := \left\lceil 1 + \frac{\ln \left(\frac{\delta(L-1)}{1-\Delta_c^w} \right)}{\ln \left(\frac{L}{L-1} \right)} \right\rceil \tag{4.20}$$

garantizará que $a_B < \frac{1-\Delta_c^w}{\delta}$, verificando la desigualdad (4.14). Puede observarse el efecto que tienen sobre la longitud del horizonte el factor de relajación δ del costo terminal y la relación entre las amplitudes de las perturbaciones del proceso y la acción de control Δ_c^w . Este resultado puede resumirse en el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1. *Consideremos el sistema i -IOSS dado por (2.1). Considerando que las suposiciones 4.3.1-4.3.5 se verifican, si el horizonte de control N_c se escoge según (4.20), entonces, para todo $\hat{x} \in \mathcal{X}$ existe un control admisible $\hat{u} \in \mathcal{U}$ tal que*

$$\Psi_{C,k+1,N_c} - \Psi_{C,k,N_c} \leq -\ell_c(\hat{x}, \hat{u})(1 - \delta\omega) + \pi_E(\hat{w}, \hat{v}), \tag{4.21}$$

con $0 < \delta\omega < 1$.

Para demostrar este teorema, analicemos la expresión (4.20) considerando que la lon-

gitud del horizonte de control es $N_c = B$

$$\begin{aligned}
N_c &= \left\lceil 1 + \frac{\ln \left(\frac{\delta(L-1)}{1-\Delta_c^w} \right)}{\ln \left(\frac{L}{L-1} \right)} \right\rceil, \\
N_c &\geq 1 + \frac{\ln \left(\frac{\delta(L-1)}{1-\Delta_c^w} \right)}{\ln \left(\frac{L}{L-1} \right)}, \\
(N_c - 1) \ln \left(\frac{L}{L-1} \right) &\geq \ln \left(\frac{\delta(L-1)}{1-\Delta_c^w} \right), \\
0 &\geq \ln \left(\frac{\delta(L-1)}{1-\Delta_c^w} \right) - (N_c - 1) \ln \left(\frac{L}{L-1} \right), \\
1 &\geq \frac{\delta(L-1)}{1-\Delta_c^w} \left(\frac{L-1}{L} \right)^{N_c-1}, \\
\frac{1-\Delta_c^w}{\delta} &\geq (L-1) \left(\frac{L-1}{L} \right)^{N_c-1},
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$(L-1) \left(\frac{L-1}{L} \right)^{N_c-1} \geq a_{N_c} \quad (4.22)$$

Las desigualdades (4.17) y (4.17) se verifican, garantizando que $0 < \delta\omega < 1$.

Observación 9. *La verificación de la desigualdad (4.14) está supeditada a la selección de un horizonte de control que verifique la desigualdad (4.20). Para calcular el valor de la longitud de horizonte requerido, es necesario computar los valores de Δ_c^w y L . El valor de Δ_c^w puede ser calculado en función de la amplitud del ruido de proceso, acción de control y funciones de costo de etapa seleccionadas, para un δ dado. El valor de L puede calcularse mediante el método recursivo dado en [97]. Sin embargo, un valor aproximado puede ser obtenido mediante simulación para una función $\sigma(x)$ dada que verifique la suposición 4.3.3.*

4.3.3. Cálculo de la longitud del horizonte de control

Para el cálculo de la longitud del horizonte de control que garantiza estabilidad, es necesario calcular el valor de L que satisface la suposición 4.3.4. Este valor puede ser aproximado utilizando (4.19). Teniendo en cuenta que $\sum_{i=0}^B a_i \leq L_B a_0$, y, por definición $a_0 = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^B a_i &\leq L_B, \\
\frac{\sum_{i=0}^{B-1} \ell_c(\hat{x}_{k+i|k}, \hat{u}_{k+i|k}) + \Upsilon_{k+B}(\Xi)}{\ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})} &\leq L_B,
\end{aligned} \quad (4.23)$$

El numerador de (4.23) representa el costo nominal del problema de control, mientras que $\ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})$ corresponde al primer término del costo de etapa. El valor de $\hat{x}_{k|k}$ debe seleccionarse para maximizar el numerador de (4.23), de modo que el horizonte de control calculado garantice estabilidad para cualquier condición inicial $x_0 \in \mathcal{X}$. En este sentido, resulta conveniente fijar $\hat{u}_{k|k} = 0$. Por lo tanto, el denominador de (4.23) será $\ell_c(\hat{x}_{k|k}, 0)$, con $\hat{x}_{k|k}$ la condición inicial que maximiza la función de costo del problema nominal de control. La secuencia \mathbf{L} se obtiene mediante (4.23) para $B \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Para cada valor B y δ dado, se obtiene un valor de L_B . Con estos valores se debe calcular $\delta(L_B - 1) \left(\frac{L_B - 1}{L_B}\right)^{B-1}$. Si $\delta(L_B - 1) \left(\frac{L_B - 1}{L_B}\right)^{B-1} \leq \frac{1 - \Delta_c^w}{\delta}$, entonces $N_c = B$. De lo contrario, se aumenta el valor de B en 1 y se repite el proceso.

Si bien en la desigualdad (4.23) interviene el costo nominal del problema de control, los efectos de las perturbaciones se encuentran embebidos en la constante Δ_c^w . Cuanto más próximo a la unidad se encuentre este valor, mayor deberá ser la longitud necesaria del horizonte para mantener la estabilidad. Similarmente, cuanto mayor sea la constante δ que relaja el requerimiento de que el costo terminal del problema de control sea una función de Lyapunov, mayor será la longitud requerida sobre el horizonte de control que asegure estabilidad.

Si el valor de L_B se calcula mediante el método numérico dado en [97], el valor de N_c puede ser calculado directamente con (4.20).

Observación 10. *Un horizonte de control con una longitud mayor o igual a la obtenida mediante (4.20) o mediante la aproximación dada anteriormente, logrará que la desigualdad (4.14) se verifique, garantizando la estabilidad del controlador del algoritmo MHE-MPC simultáneo.*

4.3.4. Ejemplos

Sistema no lineal - 1

En esta sección se evaluará el desempeño del algoritmo de estimación y control simultáneo propuesto mediante simulaciones. Consideremos el sistema no lineal de tiempo discreto utilizado en [28] dado por

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.99x_{1,k} + 0.2x_{2,k} + u_{1,k} + w_{1,k} \\ -0.1x_{1,k} + \frac{0.5x_{2,k}}{1+(x_{2,k})^2} + u_{2,k} + w_{2,k} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$y_k = x_{1,k} - 3x_{2,k} + v_k. \quad (4.25)$$

La matriz del costo de arribo y los costos de etapa de los problemas de *MHE* y *MHE-MPC* se inicializan de la siguiente manera para ambos algoritmos

$$P_0 = \begin{bmatrix} 10^4 & 0 \\ 0 & 10^4 \end{bmatrix},$$

$$\ell_e(w, v) = w^T w + 5 v^2,$$

mientras que los costos de etapa del *MPC* y del controlador del *MHE-MPC* se escogen con la siguiente estructura

$$\ell_c(x, u) = x^T \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} x + u^T \begin{bmatrix} 10^{-2} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix} u,$$

$$\ell_w(w) = w^T w,$$

El costo terminal se configura con los mismos pesos que el costo de etapa

$$\Upsilon_{k+N_c}(\Xi) = \Xi^T \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \Xi,$$

Las acciones de control se restringen a $|u_1| \leq 0.25$, $|u_2| \leq 0.25$, $|\Delta u_1| \leq 0.1$, $|\Delta u_2| \leq 0.1$. Las restricciones de los estados son $|x_1| \leq 20$ y $|x_2| \leq 20$, y la condición inicial del sistema es $x_0 = [5.5, -0.8]^T$, mientras que $\bar{x}_0 = [5.96, -0.49]^T$. El horizonte de control se calcula mediante la aproximación dada por (4.23), con $\delta = 1$ y $\Delta_c^w = 0.6$, lo que arroja los siguientes valores para diferentes restricciones en los controles

Tabla 4.1: Horizontes de control para restricciones $|u_1| \leq 0.25$, $|u_2| \leq 0.25$.

| B | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| L | 1.8387 | 2.4514 | 2.8160 | 3.0479 | 3.0194 | 3.0298 | 3.0161 | 2.9890 | 3.1150 | 2.9603 |
| $\delta\omega$ | 0.8387 | 0.8593 | 0.7553 | 0.6212 | 0.4040 | 0.2740 | 0.1798 | 0.1149 | 0.0955 | 0.0480 |

Como $\frac{1-\Delta_c^w}{\delta} = 0.4$, con $N_c \geq B = 6$ la desigualdad (4.14) se verifica (ver Tabla 4.1). Si los controles se restringen a $|u_1| \leq 0.15$ y $|u_2| \leq 0.15$, el horizonte debe incrementarse a $N_c = 7$ (ver Tabla 4.2). Si bien la aproximación (4.23) sugiere la utilización de un horizonte de control $N_c = 6$, ambos algoritmos logran controlar el sistema con horizontes mas cortos. Esto se debe a que la aproximación (4.23) es conservadora y el sistema (4.24) es estable.

Tabla 4.2: Horizontes de control para restricciones $|u_1| \leq 0.15$, $|u_2| \leq 0.15$.

| B | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| L | 1.8370 | 2.5472 | 3.0169 | 3.3137 | 3.4747 | 3.5388 | 3.5807 | 3.5836 | 3.6781 | 3.5239 |
| $\delta\omega$ | 0.8370 | 0.9398 | 0.9014 | 0.7876 | 0.6367 | 0.4825 | 0.3617 | 0.2616 | 0.2116 | 0.1252 |

La figura 4.1 muestra el desempeño de los algoritmos *MHE* y *MPC* independientes y *MHE-MPC* simultáneos para el problema de control con $x_{ref} = [-0.5, 0.5]^T$ y horizontes de estimación y control $N_e = 10$ y $N_c = 6$, respectivamente. Los ruidos de proceso y medición poseen distribución normal con varianzas iguales a $S_w = 0.015^2$ y $S_v = 0.025^2$, respectivamente. Las figuras superiores muestran la evolución de los estados x_1 y x_2 . El comportamiento del sistema con los dos algoritmos es similar, no presenta diferencias significativas en el comportamiento dinámico de los estados y las señales de control. La única diferencia significativa se presenta en el tiempo de computo de los esquemas de

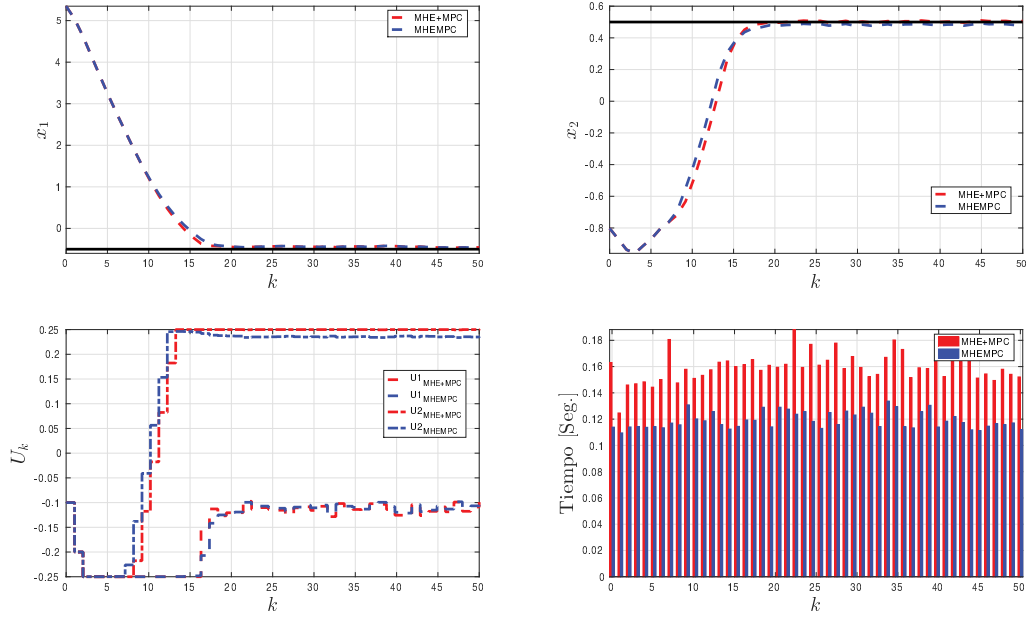


Figura 4.1: Evolución de los estados x_1 y x_2 , acciones de control u_1 y u_2 , y tiempo de computo para $MHE+MPC$ (rojo) y $MHE-MPC$ simultáneo (azul).

control. El $MHE-MPC$ simultáneo es un 25 % más rápido que $MHE-MPC$ independientes.

En este ejemplo, las funciones objetivo correspondientes al estimador y al controlador en la formulación simultánea han sido ponderadas de igual manera con $\theta = 0.5$ en (4.4). Los horizontes utilizados tanto para el estimador como para el controlador son mas cortos que los sugeridos por las ecuaciones (3.21) y (4.20). Estos valores son conservadores y sirven como una primer aproximación en la determinación de las longitudes de los horizontes.

Sistema no lineal - 2

Como segundo ejemplo, consideraremos el reactor de tiempo continuo (CSTR) utilizado en [1]. El sistema describe una reacción irreversible $A \rightarrow B$ de fluidos en estado líquido y la temperatura del reactor es controlada mediante un refrigerante externo. Las ecuaciones que describen el sistema son las siguientes

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} F_0 \left(\frac{c_0 - x_1(t)}{\pi r^2 x_3(t)} \right) - k_0 x_1(t) e^{\frac{-E}{R x_2(t)}} + w_1(t) \\ F_0 \left(\frac{T_0 - x_2(t)}{\pi r^2 x_3(t)} \right) - \frac{\Delta H}{\rho C_p} k_0 x_1(t) e^{\frac{-E}{R x_2(t)}} + \frac{2U}{r \rho C_p} (u_1(t) - x_2(t)) + w_2(t) \\ \frac{F F_0 - u_2(t)}{\pi r^2} + w_3(t) \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) + v_1(t) \\ x_2(t) + v_2(t) \\ x_3(t) + v_3(t) \end{bmatrix}$$

Las salidas del sistema son muestreadas con un período $T_s = 0.05[Seg.]$. El modelo del sistema se implementa en los algoritmos mediante *Multiple shooting* y es integrado numé-

Tabla 4.3: Valores numéricos de los parámetros del CSTR.

| Parámetro | Valor nominal | Unidad |
|------------|----------------------|------------------|
| F_0 | 0.1 | $[m^3/min]$ |
| T_0 | 350 | $[K]$ |
| c_0 | 1 | $[kmol/m^3]$ |
| r | 0.219 | $[m]$ |
| k_0 | 7.2×10^{10} | $[min^{-1}]$ |
| E/R | 8750 | $[K]$ |
| U | 54.94 | $[KJ/min m^2 K]$ |
| ρ | 1000 | $[Kg/m^3]$ |
| C_p | 0.239 | $[KJ/Kg K]$ |
| ΔH | -5×10^4 | $[Kg/mol]$ |

ricamente mediante el método de Runge-Kutta con 4 pasos (*RK4*). Los controles y los estados están sujetos a las siguientes restricciones

$$\begin{aligned}
 285 &\leq u_1 \leq 315, \\
 0.085 &\leq u_2 \leq 0.115, \\
 -3 &\leq \Delta u_1 \leq 3, \\
 -0.03 &\leq \Delta u_2 \leq 0.03, \\
 0 &\leq x_1(t) \leq 1, \\
 200 &\leq x_2(t) \leq 500, \\
 0 &\leq x_3(t) \leq 0.115,
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

El costo de etapa para el *MHE* y *MHE-MPC* simultáneo son los siguientes

$$\ell_e(w, v) = w^t \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} w + v^t \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} v, \tag{4.28}$$

La matriz del costo de arriba para ambos algoritmos se inicializa con los siguientes valores

$$P_0 = \begin{bmatrix} 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 10^6 \end{bmatrix}, \tag{4.29}$$

Los costos de etapa del *MPC* y *MHE-MPC* simultáneos se configuran como

$$\begin{aligned}
 \ell_c(x, u) = & (x - x_{sp})^T \begin{bmatrix} 0.6488 & 0 & 0 \\ 0 & 4.748 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 20.5132 \end{bmatrix} (x - x_{sp}) + \\
 & (u - u_{sp})^T \begin{bmatrix} 2.222 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} (u - u_{sp})
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

donde x_{sp} y u_{sp} representan los valores de estado estacionario de los estados y los controles, respectivamente. El costo terminal del *MHE-MPC* simultáneo adopta la misma configuración que el costo de etapa

$$\Upsilon_{k+N_c}(\Xi) = (\Xi - x_{sp})^T \begin{bmatrix} 0.6488 & 0 & 0 \\ 0 & 4.748 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 20.5132 \end{bmatrix} (\Xi - x_{sp}), \quad (4.31)$$

mientras que el costo terminal del *MPC* es diez veces mayor que el costo de etapa

$$\Upsilon_{k+N_c}(\Xi) = (\Xi - x_{sp})^T \begin{bmatrix} 6.488 & 0 & 0 \\ 0 & 4.748 & 0 \\ 0 & 0 & 205.132 \end{bmatrix} (\Xi - x_{sp}), \quad (4.32)$$

El ruido de proceso posee distribución uniforme en el rango $[-0.0001, 0.0001]$ para los estados $x_1(t)$ y $x_3(t)$ y en el rango $[-0.001, 0.001]$ para el estado $x_2(t)$. El ruido de medición posee distribución normal con varianzas $S_{v_1} = 0.001^2$, $S_{v_2} = 0.1^2$ y $S_{v_3} = 0.001^2$. Los horizontes de estimación y control se escogen como $N_e = 15$ y $N_c = 15$ para ambos algoritmos.

La figura 4.2 muestra la evolución de los estados del sistema, los controles calculados por ambos algoritmos y el tiempo de cómputo requerido por cada uno en cada instante de muestreo. El desempeño de ambos algoritmos es similar, sólo pueden observarse diferencias en las acciones de control calculadas por el *MHE-MPC* independientes. Mientras u_1 es similar en ambos algoritmos, la u_2 calculada por el *MHE-MPC* independiente muestra una mayor variabilidad que el calculado por el *MHE-MPC* simultáneo. Sin embargo, la trayectoria de los estados de ambos sistemas no muestran diferencias significativas. Los tiempos de cálculos de ambos algoritmos son similares, sin apreciables diferencias entre ellas.

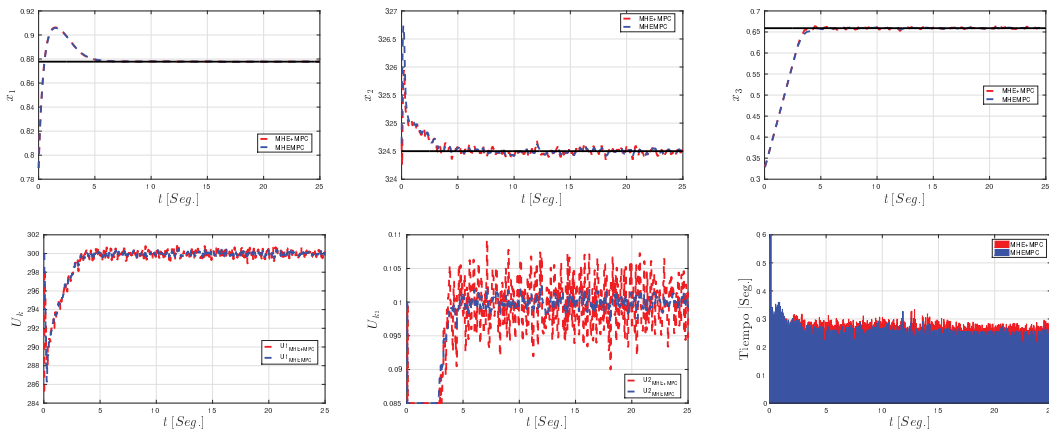


Figura 4.2: Evolución de los estados x_1 , x_2 y x_3 , acciones de control u_1 y u_2 , y tiempo de computo para *MHE+MPC* (rojo) y *MHE-MPC* simultáneo (azul) con horizontes $N_e = 15$ y $N_c = 15$.

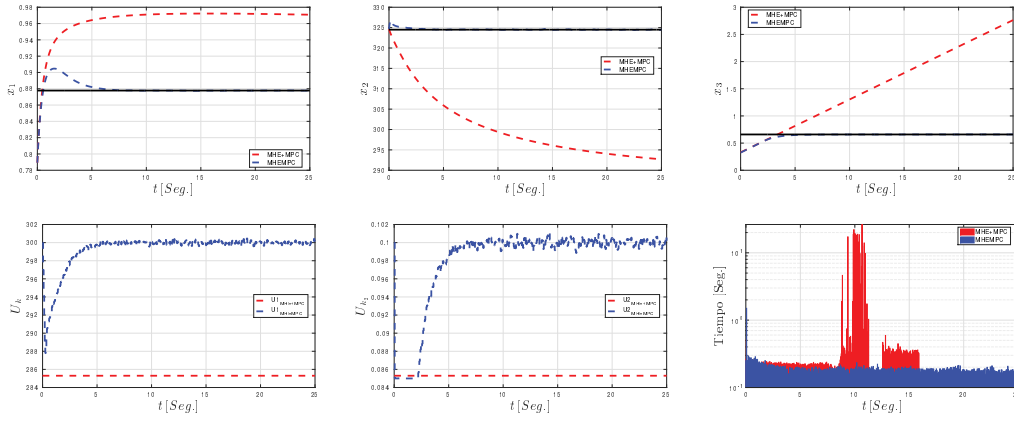


Figura 4.3: Evolución de los estados x_1 , x_2 y x_3 , acciones de control u_1 y u_2 , y tiempo de computo para $MHE+MPC$ (rojo) y $MHE-MPC$ simultáneo (azul) con horizontes $N_e = 15$ y $N_c = 5$.

Manteniendo la configuración de los costos de etapa, arribo, terminal y ruidos, se repite el experimento con un horizonte de control $N_c = 5$, mientras el horizonte de estimación se mantiene en su valor inicial $N_e = 15$.

Al reducir la longitud del horizonte de control el algoritmo $MHE+MPC$ falla en controlar el sistema, llevando los estados lejos de la referencia deseada (Figura 4.3). Las acciones de control calculadas por el MPC independiente se mantienen constantes con una amplitud apenas por encima del límite inferior de las restricciones, y el sistema evoluciona acorde a los controles implementados. Incluso las estimaciones de los estados se ven fuertemente deterioradas para $t > 7$ [Seg.], como puede observarse en la figura 4.4, en donde en trazo negro continuo se representan los estados reales del sistema, y en trazo rojo discontinuo las estimaciones realizadas por el MHE independiente. Si bien el desempeño del MHE independiente es pobre, las restricciones impuestas sobre las estimaciones nunca son violadas.

La reducción del horizonte de control no afecta el desempeño del algoritmo $MHE-MPC$ simultáneo. El algoritmo simultáneo es capaz de controlar el sistema, llevando los estados a la referencia deseada (Figura 4.3). El tiempo de computo del algoritmo simultáneo se mantiene constante a lo largo de la simulación, mientras que el $MHE+MPC$ independiente muestra un pico alrededor de los 10 [Seg.], que es cuando el MHE independiente diverge y $x_1 = 0$. A partir de este instante de tiempo, los estados restantes, x_2 y x_3 , comienzan a divergir de los estados reales.

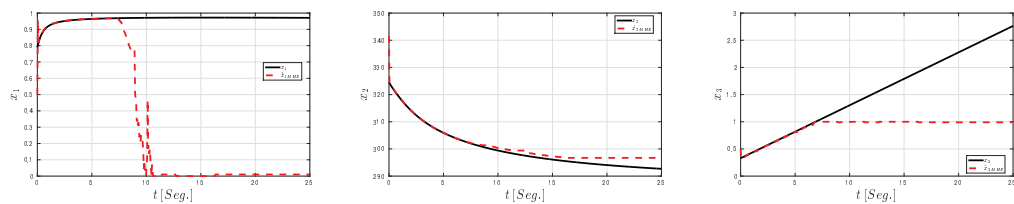


Figura 4.4: Estados reales x_k (negro) y estimados por el MHE independiente (rojo).

Sistema no lineal - 3

Como tercer ejemplo, consideremos el problema de regulación del oscilador de Van der Pol, cuya dinámica está dada por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} (1 - (x_2(t))^2)x_1(t) - x_2(t) + u(t) + w_1(t) \\ x_1(t) + w_2(t) \end{bmatrix}, \\ y(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) + v_1(t) \\ x_2(t) + v_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

El período de muestreo es $T_s = 0.1 [Seg.]$, el sistema es discretizado mediante el método de *multiple shooting* e integrado numéricamente utilizando el método de Runge-Kutta con 4 pasos. Los costos de etapa y arribo de los estimadores para ambos algoritmos se configuran de la siguiente manera

$$\ell_e(w, v) = w^T \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} w + v^T v, \quad P_0 = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 \\ 0 & 10^3 \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

mientras que los costos del controlador se configuran como siguen

$$\ell_c(x, u) = x^T \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} x + 10^{-2} \times u^2, \quad \ell_w(w) = w^T w, \quad (4.35)$$

Los estados y controles están sujetos a las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} -5 &\leq x_1(t) \leq 5, \\ -5 &\leq x_2(t) \leq 5, \\ -0.75 &\leq u_1 \leq 1, \\ -0.3 &\leq \Delta u \leq 0.3, \end{aligned} \quad (4.36)$$

Las longitudes de los horizontes de estimación y control son $N_e = 10$ y $N_c = 25$, respectivamente. Los ruidos de proceso tienen distribución uniforme en el rango $[0, 0.005]$ y los ruidos de medición poseen distribución normal con varianzas $S_{v_1} = 0.0025^2$ y $S_{v_2} = 0.0025^2$.

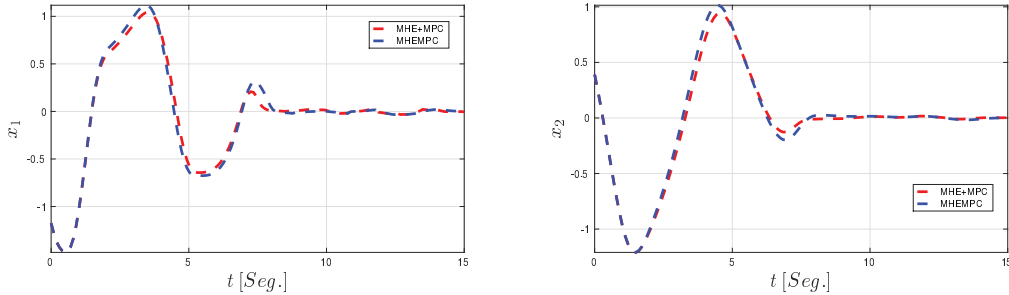


Figura 4.5: Evolución de los estados x_1 y x_2 para el problema de regulación para *MHE+MPC* (rojo) y *MHE-MPC* simultáneo (azul) con horizontes $N_e = 10$ y $N_c = 25$.

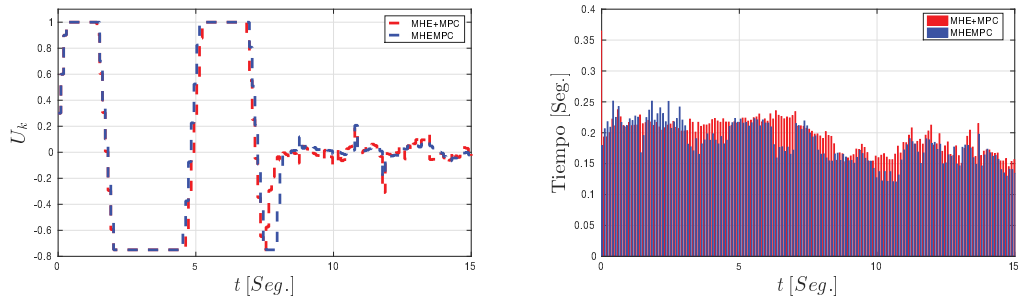


Figura 4.6: Evolución de las acciones de control u_k y tiempos de cómputo utilizados para el problema de regulación por $MHE+MPC$ (rojo) y $MHE-MPC$ simultáneo (azul) con horizontes $N_e = 10$ y $N_c = 25$.

La figura 4.5 muestra la evolución de los estados para el problema de regulación del oscilador de Van Der Pol. El desempeño de ambos algoritmos ($MHE+MPC$ y $MHE-MPC$ simultáneo) es similar, ambos logran regular los estados del oscilador y muestran respuestas similares.

La figura 4.6 ilustra las acciones de control implementadas por ambos algoritmos y el tiempo de cómputo requerido por cada uno. Esta figura muestra que las acciones de control calculadas por ambos algoritmos son similares, con pequeñas diferencias alrededor de $t = 7.5$ [Seg.]. Similar comportamiento se puede ver en los tiempos utilizados para calcular las acciones de control. En general, el $MHE-MPC$ simultáneo ha sido más rápido que el $MHE+MPC$.

Repetimos las simulaciones reduciendo el horizonte de estimación a $N_e = 5$. Las figuras 4.7 y 4.8 muestran la evolución de los estados y las acciones de control junto con el tiempo de cómputo requerido por ambos enfoques, respectivamente. La figura 4.7 muestra la evolución de los estados. En ella puede apreciarse que el desempeño de ambos algoritmos ($MHE+MPC$ y $MHE-MPC$ simultáneo) comienza a diferenciarse. Aunque ambos logran regular los estados del oscilador, comienzan a aparecer diferencias en el desempeño: el algoritmo con estimación y control independientes ($MHE+MPC$) muestra respuestas con oscilaciones de mayor amplitud que $MHE-MPC$ simultáneo. Esto lleva a

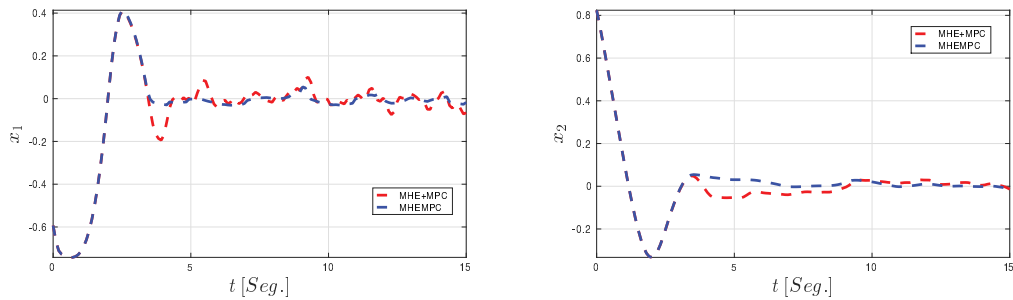


Figura 4.7: Evolución de los estados x_1 y x_2 para el problema de regulación para $MHE+MPC$ (rojo) y $MHE-MPC$ simultáneo (azul) con horizontes $N_e = 5$ y $N_c = 25$.

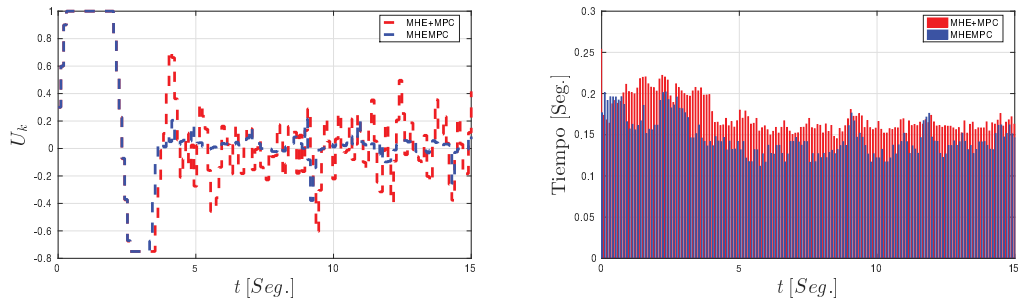


Figura 4.8: Evolución de las acciones de control u_k y tiempos de cómputo utilizados para el problema de regulación por $MHE+MPC$ (rojo) y $MHE-MPC$ simultáneo (azul) con horizontes $N_e = 5$ y $N_c = 25$.

que el $MHE+MPC$ tenga un tiempo de establecimiento mayor que el $MHE-MPC$. Es importante observar que el comportamiento de ambos sistemas es idéntico hasta $t = 3$ [Seg.], cuando el comportamiento de los sistema se diferencia: en un caso se establece alrededor de $x_1 = 0$ ($MHE-MPC$), mientras $MHE+MPC$ continua oscilando.

La figura 4.8 muestra las acciones de control implementadas por ambos algoritmos y el tiempo de cómputo requerido por cada uno. La diferencia entre las acciones calculadas por ambos algoritmos son idénticas hasta hasta $t = 3$ [Seg.]. A partir de este instante de tiempo el $MHE+MPC$ genera acciones de control con una mayor variabilidad mientras el el $MHE-MPC$ simultáneo se estabiliza.

Finalmente realizamos simulaciones utilizando un horizonte de estimación $N_e = 2$. Los resultados obtenidos son los mostrados en las figuras 4.9 y 4.10. La figura 4.9 muestra la evolución de los estados. En ella puede apreciarse que el desempeño de ambos algoritmos es diferente. Mientras el algoritmo $MHE-MPC$ logra regular los estados del sistema, llevándolos a cero, $MHE-MPC$ solo logra estabilizarlo acotando la amplitud de las oscilaciones de los estados. Es importante observar que el comportamiento de ambos sistemas es diferente desde el principio de la simulación.

La figura 4.10 muestra las acciones de control implementadas por ambos algoritmos y el tiempo de cómputo requerido por cada uno. Las acciones calculadas por ambos algoritmos

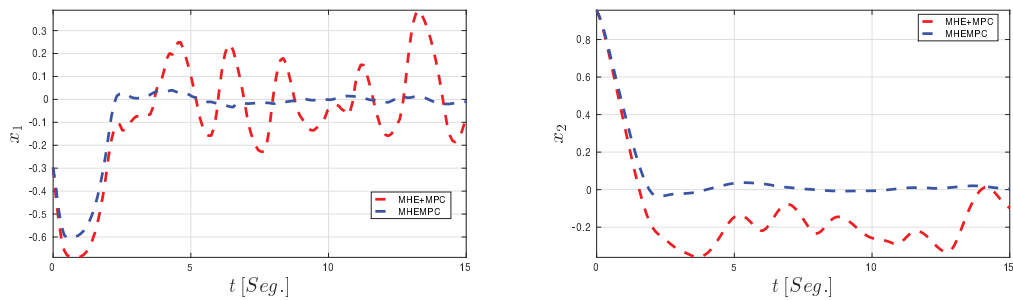


Figura 4.9: Evolución de los estados x_1 y x_2 para el problema de regulación para $MHE+MPC$ (rojo) y $MHE-MPC$ simultáneo (azul) con horizontes $N_e = 2$ y $N_c = 25$.

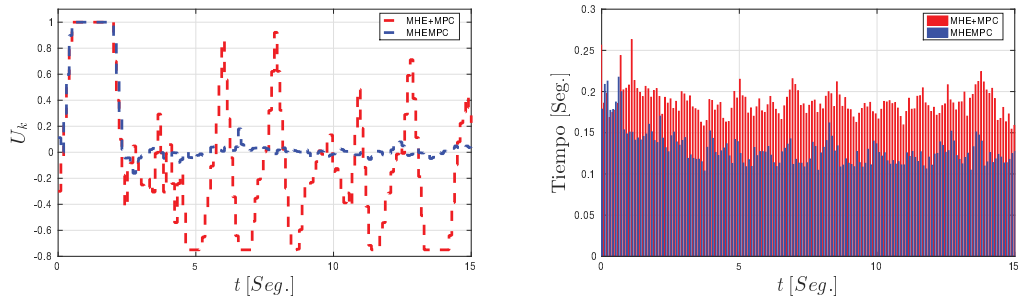


Figura 4.10: Evolución de las acciones de control u_k y tiempos de computo utilizados para el problema de regulación por $MHE+MPC$ (rojo) y $MHE-MPC$ simultáneo (azul) con horizontes $N_e = 2$ y $N_c = 25$.

son diferentes, aunque ambas alcanzan las restricción en el mismo periodo de tiempo. Las acciones de control de $MHE+MPC$ son más agresivas y presentan una mayor variabilidad mientras el el $MHE-MPC$ simultáneo se estabiliza rápidamente. El tiempo de computo del $MHE+MPC$ es un 20% superior al de $MHE-MPC$ simultáneo.

A partir de las simulaciones podemos ver que el desempeño en regulación se ve deteriorado conforme el horizonte de estimación N_e se reduce. Sin embargo, el algoritmo de estimación y control simultáneo $MHE-MPC$ logra regular el sistema aún con un horizonte tan corto como $N_e = 2$, mientras que el algoritmo que implementa $MHE+MPC$ independientes solo logra estabilizar las trayectorias de los estados.

5 Aplicaciones

En esta sección se evaluarán los algoritmos desarrollados en las secciones anteriores mediante su aplicación a un problema de navegación autónoma. Los vehículos autónomos (VA) llevan a cabo un conjunto de tareas predefinidas sin necesidad de intervención humana. Para ello, es necesario medir las variables del entorno para conocer su posición y velocidad. Del mismo modo, deben ser capaces de detectar obstáculos presentes en su proximidad para poder alcanzar la posición deseada siguiendo una trayectoria planeada. La ejecución de estas tareas implica la adquisición y procesamiento de una amplia variedad de datos provenientes de diferentes sensores (acelerómetros, giróscopos, magnetómetros, sistemas de posicionamiento global (GPS) y cámaras ópticas), así como también la resolución de problemas de optimización acoplados en diferentes escalas temporales. En este contexto, estas actividades pueden ser organizadas en tres tareas interrelacionadas.

- **Planeo de trayectoria.** Esta tarea se encarga de encontrar una trayectoria factible a través del entorno para alcanzar el siguiente *punto de referencia* $\check{r}p_k \in \check{\mathcal{R}}\mathcal{P}$, donde $\check{\mathcal{R}}\mathcal{P}$ es el conjunto de restricciones. El planeador de trayectorias emplea toda la información disponible del entorno referida a los obstáculos, límites, regiones prohibidas, entre otros, (representados como un conjunto de restricciones en las velocidades y posiciones, llamadas restricciones de entorno $c_k^E(x_k) \in \mathcal{C}^E \subseteq \mathbb{R}^{n_x+n_u}$, donde \mathcal{C}^E es el conjunto de restricciones de entorno) para definir la región donde el VA tiene permitido navegar. Esta tarea se vale además de la posición actual \hat{y}_k y estados \hat{x}_k estimados para calcular una trayectoria factible x_k^{SP} definiendo el comportamiento futuro del VA dentro de una ventana temporal.
- **Navegación.** Es la tarea que se encarga de estimar la posición y_k y estados x_k del VA utilizando la información disponible de los sensores (aceleraciones, velocidades de rotación, posiciones absoluta y relativa, entre otras) en el VA, incorporando las restricciones propias de los sensores $c_k^S(x_k) \in \mathcal{C}^S \subseteq \mathbb{R}^{n_y}$, donde \mathcal{C}^S es el conjunto de restricciones de los sensores, y los residuos de estimación \hat{v}_k .
- **Guiado.** Esta tarea controla el VA, llevándolo desde su estado estimado actual \hat{x}_k al estado final deseado, a través de la trayectoria calculada x_k^{SP} , teniendo en cuenta las perturbaciones y restricciones sobre el vehículo $c_k^{\text{UV}}(x_k, u_k) \in \mathcal{C}^{\text{UV}} \subseteq \mathbb{R}^{n_x+n_u}$, donde \mathcal{C}^{UV} es el conjunto de restricciones del vehículo.

La tarea de *Guiado* es la encargada de controlar la posición, actitud y velocidad del vehículo a lo largo de la trayectoria planeada. Para lograr esto, es necesario utilizar un algoritmo de control apropiado para cada actuador del VA. Diversas técnicas de control pueden utilizarse, desde las clásicas hasta las más recientes y modernas. El controlador Proporcional-Integral-Derivativo (*PID*) es la técnica de control más popular utilizada para el control de VA, debido a su simplicidad y facilidad para ajustar sus parámetros. Basado

en el esquema clásico de control mediante *PID*, en [98] han diseñado un regulador para la posición y orientación de un cuádruple rotor de seis grados de libertad (*GDL*). Los parámetros del controlador *PID* se obtienen primero mediante simulación y luego mediante experimentos en un entorno libre de obstáculos y vientos de baja velocidad. [99] presenta una arquitectura de control para *VA* denominada *Intelligent Pioneer*. El modelo utilizado es de dos *GDL* donde se utiliza con controlador *PID* adaptativo para lograr mayor flexibilidad. Los parámetros del controlador pueden ser seleccionados en línea para obtener un mejor desempeño que en comparación con el controlador *PID* convencional. Sin embargo, al utilizar el controlador *PID* se utiliza un modelo matemático del *VA* con dinámicas desacopladas. Esto puede conducir a resultados inesperados cuando actúan sobre el *VA* perturbaciones, existen restricciones e incertidumbre sobre el modelo del sistema. Otra técnica que ha sido ampliamente utilizada para el control de *VA* es el regulador lineal cuadrático (*LQR*). En [100] se utiliza un controlador *LQR* para controlar simultáneamente un cuadricóptero equipado con un manipulador robótico de dos *GDL*. Mediante el agregado de un integrador al controlador *LQR*, los autores logran un mejor desempeño en el seguimiento de trayectoria removiendo los errores de estados estacionario. Otra técnica utilizada es *MPC*, que a diferencia del controlador *LQR*, permite incorporar restricciones a la formulación del problema de optimización. Esto posibilita incorporar las restricciones físicas y dinámicas del vehículo así como también diferentes tipos de obstáculos mediante la inclusión de las restricciones apropiadas a la formulación. Recientemente, algoritmos inteligentes, incluyendo redes neuronales y algoritmos genéticos ([101], [102], [103]) han sido utilizados para resolver problemas de guiado. Sin embargo, este tipo de algoritmos implican un alto costo computacional, lo que limita su utilización en sistemas con dinámicas rápidas.

La tarea de navegación resuelve el problema de estimación de la posición, velocidad y orientación del vehículo utilizando diferentes fuentes de información. Tradicionalmente, el Filtro de Kalman extendido *EKF* [104], [105], [106], [107], [108] y el filtro de partículas *PF* [109], [110] son utilizados para resolver el problema de navegación. En [111] llevan a cabo la estimación de la posición, velocidad y actitud, utilizando mediciones provenientes de acelerómetros, giróscopos, magnetómetros y GPS. Si bien el filtro de Kalman es ampliamente utilizado, su formulación no permite incorporar de manera explícita restricciones. Sin embargo, se han implementado diversas modificaciones que permiten incorporarlas [112], [113], [114], [115], [116], [117]. No obstante, estas modificaciones carecen de respaldo teórico y su exitosa implementación no está garantizada. Por otro lado, *MHE* resuelve un problema de optimización en cada instante de tiempo, permitiendo incorporar restricciones a la formulación del problema de estimación. En [118] se propone la utilización de *MHE* en tiempo real para estimar la orientación y los parámetros de calibración de los sensores. Primero, se estima la actitud utilizando un magnetómetro y giróscopo. Luego, se estiman los parámetros de calibración del giróscopo y magnetómetro. Como la incorporación de restricciones resulta natural en la formulación del problema de *MHE*, pueden incorporarse las limitaciones físicas del sistema y de los sensores para mejorar del desempeño [36].

La tarea de planeamiento se encarga de buscar un camino admisible entre la ubicación actual y la deseada teniendo en cuenta la geometría del vehículo, las del entorno, las restricciones cinemáticas y otros factores que puedan afectar al camino factible [119], [120]. Diferentes metodologías son utilizadas para encontrar una trayectoria admisible [121]. En [122] se propone utilizar una técnica que combina *splines* con *MPC*. Este enfoque permite alcanzar buen desempeño en sistemas con múltiples vehículos. En [123] se propone un algoritmo que aplica un método probabilístico para evadir obstáculos, y al mismo tiempo realiza una búsqueda heurística para el planeamiento de la trayectoria. Si bien existen varios métodos que permiten encontrar una trayectoria posible para el VA, muchos de ellos no consideran la dinámica del mismo. Sólo los algoritmos basados en modelos matemáticos permiten incorporar de manera sencilla las restricciones dinámicas del vehículo y del entorno en el proceso de planeamiento [119]. En [124] se introduce un algoritmo de generación de trayectorias capaz de calcular el recorrido de vuelo para cuadricópteros. Los autores consideran en la formulación las dinámicas del vehículo al momento de calcular la trayectoria. Sin embargo, la técnica propuesta solo es aplicable a cuadricópteros y la factibilidad no está garantizada cuando existen perturbaciones. En [125] se presentan tres algoritmos convencionales de generación de trayectorias para vehículos terrestres sujetos a restricciones. Para satisfacer las restricciones, los autores proponen prolongar la distancia entre las posiciones inicial y final hasta conseguir una solución admisible. Este proceso puede ser tedioso y no es posible aplicarlo a las dinámicas del entorno. Además, el método es aplicable solo a vehículos terrestres con un conjunto reducido de restricciones.

El principal inconveniente de los enfoques explorados, es la necesidad de verificar el principio de separación. Asimismo, el análisis global del sistema completo se dificulta ante la falta de herramientas analíticas aplicable a diferentes técnicas de manera simultánea. Esta es la razón principal por la que se propone un marco unificado basado en técnicas de horizonte móvil para el diseño de las tres tareas mencionadas. Las principales ventajas de utilizar la estructura propuesta son

- Factibilidad y optimalidad para la trayectoria calculada.
- Estados y parámetros estimados satisfacen las restricciones físicas.
- La posición de los actuadores y velocidad de los motores son calculadas de manera óptima satisfaciendo las restricciones.
- Los tres módulos se formulan en el espacio de estados lo que resulta de utilidad al trabajar con sistemas de múltiples entradas y salidas (*MIMO*).

5.1. Problema de guiado

Como se ha mencionado, basado en las estimaciones $\hat{x}_{k|k}$ realizadas por la tarea de navegación, la tarea de guiado controlará la posición, actitud y velocidad del vehículo para conducirlo a través de la trayectoria $x_{k+j|k}^{\text{sp}}$ con $j \in \mathbb{Z}_{[0, N_c]}$, la cual es calculada por la

tarea de planeamiento de trayectorias. Para lograr esto, se implementa dentro de esta tarea un *MPC* que calcule la posición y velocidad que deben adoptar los actuadores y motores, respectivamente, para que el *VA* siga la trayectoria deseada. Para resolver el problema de guiado, se resuelve el problema (4.6) utilizando la siguiente función objetivo

$$\Psi_C = \sum_{j=0}^{N_g-1} \ell_c(\hat{x}_{k+j|k} - x_{k+j|k}^{\text{SP}}, \hat{u}_{k+j|k}) + \Upsilon_{k+N_g}(\Xi_g), \quad (5.1)$$

donde N_g es el horizonte de predicción de guiado, $\ell_c(\cdot, \cdot)$ es el costo de etapa y $\Upsilon_{k+N_g}(\cdot)$ representa el costo terminal, con $\Xi_g = \hat{x}_{k+N_g} - x_{k+N_g}^{\text{SP}}$. Los costos de etapa y terminal son diseñados con la siguiente estructura

$$\ell_c(\hat{x}_{k+j|k} - x_{k+j|k}^{\text{SP}}, \hat{u}_{k+j|k}) = |\hat{x}_{k+j|k} - x_{k+j|k}^{\text{SP}}|_Q^2 + |\Delta u_{k+j|k}|_R^2 \quad (5.2)$$

y

$$\Upsilon_{k+N_g}(\Xi) = |\hat{x}_{k+N_g|k} - x_{k+N_g|k}^{\text{SP}}|_P^2, \quad (5.3)$$

donde Q , R y P son matrices definidas positivas. $|\cdot|_\alpha^2$ representa una norma ponderada, $\Delta u_{k+j|k} = \hat{u}_{k+j|k} - \hat{u}_{k+j-1|k}$ y $x_{k+j|k}^{\text{SP}}$ es la trayectoria deseada la cual es calculada por la tarea de planeamiento de trayectorias.

5.2. Problema de navegación

La tarea de navegación utiliza la información proveniente de diferentes sensores para estimar la posición, velocidad y actitud del vehículo. Esta tarea se resuelve mediante *MHE* incorporando todas las restricciones presentes en la formulación del problema de optimización. Durante el diseño de esta tarea, se propone la resolución del problema (4.5) con la siguiente función de costo.

$$\begin{aligned} \Psi_E = & P_0(1 - |\hat{q}_b^n(k - N_e)|_2^2) + |\hat{x}_{k-N_e|k} - \bar{x}_{k-N_e|k}|_{P_1}^2 + \\ & |\hat{z}_{k-N_e|k} - \bar{z}_{k-N_e|k}|_{P_2}^2 + \sum_{j=k-N_e}^k \ell_e(\hat{w}_j|k, \hat{v}_j|k) \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde N_e es el horizonte de navegación, $\bar{x}_{k-N_e|k}$ y $\bar{z}_{k-N_e|k}$ son la mejor estimación disponible de la condición inicial y estados algebraicos, respectivamente, P_0 es una constante positiva que penaliza la desviación de la norma del cuaternión \hat{q}_b^n respecto de la unidad, y P_1 y P_2 son matrices de peso simétricas semi definidas positivas.

Se designan $x(t)$ y $z(t)$ como los vector de estados y estados algebraicos en tiempo continuo, respectivamente, los cuales se define de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x(t) &= [p^n(t), v^n(t), q_b^n(t), \alpha(t), \beta(t)]^T, \\ z(t) &= [\omega^b(t), a^n(t)]^T, \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde $p^n(t) \in \mathbb{R}^3$ es la posición en el marco de referencia *Este-Norte-Arriba* (referido como ENU y designado por el superíndice n), $v^n(t) \in \mathbb{R}^3$ es la velocidad lineal en coordenadas ENU, el cuaternión $q_b^n(t) \in \mathbb{R}^4$ determina la orientación del cuerpo rígido en coordenadas ENU y $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ y $\beta(t) \in \mathbb{R}^3$ son los sesgos del giróscopo y acelerómetro, respectivamente. $\omega^b(t) \in \mathbb{R}^3$ y $a^n(t) \in \mathbb{R}^3$ son los vectores de velocidad angular y aceleración lineal en el marco de referencia del cuerpo (referido como cuerpo por el superíndice b) en coordenadas ENU, respectivamente. El vector de mediciones $y(t)$ se define como

$$y(t) = [\omega_m^b(t), a_m^b(t), m_m^b(t), p_m^e(t), v_m^e(t)]^T \quad (5.6)$$

donde el subíndice m indica que se trata de una medición, el superíndice e refiere al marco de referencia *ECEF* (por sus siglas en ingles, *Earth-Centered Earth-Fixed*), $\omega_m^b(t) \in \mathbb{R}^3$ y $a_m^b(t) \in \mathbb{R}^3$ son los vectores de velocidad angular y aceleración lineal medidos en las coordenadas del cuerpo, respectivamente, $m_m^b(t) \in \mathbb{R}^3$ es la magnitud del campo magnético terrestre medido en el marco del cuerpo dadas las coordenadas (latitud y longitud) actuales, $p_m^e(t) \in \mathbb{R}^3$ y $v_m^e(t) \in \mathbb{R}^3$ son los vectores de posición y velocidad lineal medidos en el marco *ECEF*, respectivamente.

Utilizando las ecuaciones que describen la dinámica de un cuerpo rígido (para una descripción detallada ver [126], [127]), el modelo matemático utilizado en la tarea de navegación en el marco de coordenadas *ECEF* puede ser escrito como sigue

$$\dot{x}(t) = \bar{f}(x(t), z(t), w(t)) = \begin{bmatrix} v^e(t) \\ -2S(\omega_{ie}^e(t))v^e(t) + a^e(t) + g^e(p^e(t)) \\ \frac{1}{2}q_b^e(t) \cdot \tilde{\omega}_{ib}^b(t) - \frac{1}{2}\tilde{\omega}_{ie}^e(t) \cdot q_b^e(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Sin embargo, las ecuaciones anteriores modelan la posición, velocidad y orientación de un vehículo en el marco de referencia *ECEF*, y como las distancias que recorrerá el vehículo son cortas, es mas conveniente utilizar el marco de referencia *ENU* y trabajar con un marco de referencia local. Para realizar un cambio de base o coordenadas, en este caso, pasar de coordenadas en *ECEF* a *ENU*, se puede utilizar la inversa de la matriz de rotación de *ENU* a *ECEF* [128]. Finalmente, las ecuaciones de medición con ruido de medición son las siguientes

$$v(t) = [v_\omega(t), v_a(t), v_m(t), v_p(t), v_v(t)]^T, \quad (5.8)$$

con $v_{(\cdot)}(t) \in \mathbb{R}^3$, dadas por

$$y(t) = \bar{h}(x(t), v(t)) = \begin{bmatrix} \omega^b(t) + \alpha(t) + v_\omega(t) \\ R(q_b^e)^T a^e(t) + \beta(t) + v_a(t) \\ R(q_b^e)^T m^e(t) + v_m(t) \\ p^e(t) + v_p(t) \\ v^e(t) + v_v(t) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

donde $m^e(t)$ es el vector que contiene los valores de la magnitud del campo magnético terrestre dadas las coordenadas del vehículo $\omega^b(t)$ y $a^e(t)$ son el vector de velocidad angular y aceleración lineal del cuerpo en el marco de referencia *ECEF*, respectivamente. La matriz $R(q_b^e(t))$ es la matriz de rotación asociada con el vector de rotación. Como puede observarse, el modelo 5.7 y la ecuación de medición 5.9 están expresadas en tiempo continuo. Para utilizarlas en los problemas (4.5) y (4.6) deben ser discretizadas.

5.3. Planeamiento de trayectorias

El objetivo de la tarea de planeamiento de trayectorias es encontrar un camino factible $x_{k+j|k}^{\text{SP}}$ entre la posición actual y la deseada $\check{w}_{k+j|k}$, teniendo en cuenta toda la información disponible del entorno, la geometría del vehículo, sus restricciones cinemáticas y cualquier otro factor que pueda afectar la factibilidad del camino. Esta tarea se implementa mediante un algoritmo de planeamiento de trayectorias basado en un *MPC* el cual utiliza un modelo de partícula virtual del vehículo para el calculo de las trayectorias. Para mayores detalles acerca del algoritmo, el lector puede consultar [129].

Para el diseño de la tarea de planeamiento de trayectorias, se propone resolver (4.6) con la siguiente función de costo

$$\Psi_C = \sum_{j=0}^{N_p-1} \ell_c(x_{k+j|k} - \check{w}_{k+j|k}, u_{k+j|k} + \Upsilon_{k+N_p}(\Xi_p)), \quad (5.10)$$

donde N_p es el horizonte de planeamiento de la trayectoria, y $\Xi_p = x_{k+N_p|k} - \check{w}_{k+N_p|k}$. En este caso, los costos de etapa (*stage-cost*) y el costo terminal se escogen como

$$\ell_j(x_{k+j|k}, u_{k+j|k}, \check{w}_{k+j|k}) = |x_{k+j|k} - \check{w}_{k+j|k}|_{\check{Q}}^2 + |\Delta u_{k+j|k}|_{\check{R}}^2 \quad (5.11)$$

y

$$\ell_{N_p}(x_{k+N_p|k}, \check{w}_{k+N_p|k}) = |x_{k+N_p|k} - \check{w}_{k+N_p|k}|_{\check{P}}^2, \quad (5.12)$$

donde \check{Q} , \check{R} y \check{P} son matrices definidas positivas.

Para modelar el movimiento del *VA*, se utilizará un modelo de partícula (*PV*), siendo $\check{x}(t)$ el vector de estados, y $\check{u}(t)$ el vector de acciones de control a aplicar sobre el mismo

$$\check{x}(t) = [\check{x}(t), \check{y}(t), \check{v}(t)]^T \quad \text{y} \quad \check{u}(t) = [\check{\psi}(t), \check{\mathcal{T}}(t)]^T \quad (5.13)$$

donde $\check{x}(t)$ y $\check{y}(t)$ expresan las coordenadas *x-y* del *PV* y $\check{v}(t)$ el el módulo del vector de velocidad, $\check{\psi}(t)$ y $\check{\mathcal{T}}(t)$ denotan el ángulo de rotación y fuerza de empuje del *PV*, respectivamente. El modelo matemático que describe el movimiento del *PV* puede ser

reescrito como

$$\dot{\check{x}}(t) = \check{f}(\check{x}(t), \check{u}(t)) = \begin{bmatrix} \check{v}(t) \cos \check{\psi}(t) \\ \check{v}(t) \sin \check{\psi}(t) \\ -\tau \check{v}(t) + \kappa \mathcal{T}(t) \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

donde τ es una constante que determina la tasa de cambio en la velocidad del modelo del vehículo y κ es una constante proporcional a la fuerza de empuje \mathcal{T} .

5.4. Ejemplo

En esta sección se presenta la utilización del esquema propuesto para estimar los estados desconocidos del sistema, calcular una trayectoria admisible y las acciones de control necesarias para que el VA¹ recorra esta trayectoria utilizando el simulador Gazebo², CasADi [130], MPCTools [131] y Ipopt [132].

Se define $\tilde{x}(t)$ como el vector de estados y $\tilde{u}(t)$ como el vector de acciones de control

$$\tilde{x}(t) = [\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{\psi}(t)]^T \quad \text{y} \quad \tilde{u}(t) = [\tilde{v}(t), \tilde{\omega}(t)]^T, \quad (5.15)$$

donde $\tilde{x}(t)$ y $\tilde{y}(t)$ representan la posición x - y del VA, $\tilde{\psi}(t)$ representa su ángulo de rotación, $\tilde{v}(t)$ y $\tilde{\omega}(t)$ representan las velocidades lineal y angular del VA, respectivamente. El modelo matemático del VA es el siguiente

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = \begin{bmatrix} \tilde{v}(t) \cos \tilde{\psi}(t) \\ \tilde{v}(t) \sin \tilde{\psi}(t) \\ \tilde{\omega}(t) \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Este modelo es conocido como *modelo de accionamiento diferencial*. Es un modelo sencillo pero es el mejor disponible.

La tarea de guiado se configura de la siguiente manera. Se supone que las condiciones iniciales del modelo (5.16) son $\tilde{x}_0 = [0, 0, 0]^T$ y $\tilde{u}_0 = [0, 0]^T$. El modelo es discretizado utilizando *collocation* con un periodo $T_s = 0.1$ [Seg.] y el horizonte de guiado se escoge como $N_g = 10$. Las matrices de peso definidas en (5.2) y (5.3) se elijen como:

$$R = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{bmatrix}.$$

Las restricciones del modelo se configuran de acuerdo con las prestaciones y capacidades del vehículo en particular, en este caso un Jackal UGV³: $0 \leq \tilde{v}(t) \leq 2$ (m/s), $-2 \leq \tilde{\omega}(t) \leq 2$ (rad/s), $-0.3 \leq \Delta \tilde{v}(t) \leq 0.3$ (m/s), $-15 \leq \Delta \tilde{\omega}(t) \leq 15$ (deg/s). Los vectores $\tilde{\psi}(t)$, $\tilde{x}(t)$ y

¹<https://www.clearpathrobotics.com/jackal-small-unmanned-ground-vehicle/>

²<http://gazebosim.org/>

³<https://www.clearpathrobotics.com/jackal-small-unmanned-ground-vehicle/>

$\tilde{y}(t)$ permanecen sin restricciones.

Para la tarea de planeamiento de trayectorias, se supone la utilización del modelo de partículas 5.7 con las siguientes condiciones iniciales $\check{x}_0 = [0, 0, 0]^T$ y $\check{y}_0 = [0, 0]^T$. Este modelo también es discretizado utilizando *collocation* con $T_s = 0.1[Seg.]$. El horizonte de planeamiento es $N_p = 10$. Las matrices de peso definidas en 5.11 y 5.12 se elijen como

$$\check{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \check{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, \check{P} = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 \\ 0 & 500 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \end{bmatrix}.$$

Las restricciones del modelo de partícula son las siguientes: $0 \leq \mathcal{T}(t) \leq 2(N)$, $-5 \leq \Delta\check{\psi}(t) \leq 5$ (deg/s), $-0.5 \leq \Delta\mathcal{T}(t) \leq 0.5(N)$ y $0 \leq \check{v}(t) \leq 2$ (m/s). Los vectores $\check{\psi}(t)$, $\check{x}(t)$ y $\check{y}(t)$ permanecen sin restricciones. Como no es de vital importancia que el vehículo alcance exactamente el *punto de referencia*, sino que es suficiente con que pase bastante *cerca*, se define un área con centro en el *punto de referencia* tal que si el VA pasa por esta zona, se considera que ha alcanzado el objetivo. Para todos los *puntos de referencia*, se define una circunferencia con radio $r = 0.1[m]$. Además, al calcular la trayectoria, se supone la existencia de dos obstáculos circulares de radio $r_{o1} = r_{o2} = 0.5$ (m) y centro $c_{o1} = [0, 5]^T$ (m) y $c_{o2} = [5, 0]^T$ (m).

Finalmente, para la tarea de navegación se supone que no hay ruido de proceso. También se supone que el VA dispone de dos sensores: i) IMU, y ii) GNSS. Los datos de los sensores están afectados por ruido con distribución normal. En esta tarea, se utiliza el modelo 5.7 en coordenadas *ENU* y las condiciones iniciales son $\bar{x}_{k-N_e} = [0, 0, 0.0635, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ y $\bar{z}_{-N_e} = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$. El modelo es discretizado con un periodo $T_s = 0.1$ s y el horizonte de estimación es $N_e = 6$. Los pesos definidos en 5.4 se elijen como

$$\begin{aligned} Q_w &= \text{diag}([10^{-1}, 10^{-1}, 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]), \\ R_v &= \text{diag}([1, 1, 1, 1, 1, 1, 10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3}]), \\ P_0 &= 0.1, \\ P_1 &= \text{diag}([10^{-1}, 10^{-1}, 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3}, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0]), \\ P_2 &= \text{diag}([1, 1, 1, 1, 1, 1]) \end{aligned}$$

donde $\text{diag}([\cdot, \cdot, \dots, \cdot])$ representa la matriz diagonal. Los resultados obtenidos pueden observarse en las figuras 5.1-5.4. En la Figura 5.1, se muestran tres diferentes trayectorias: i) la trayectoria deseada (línea-cuadrado verde) la cual es calculada por la tarea de planeamiento, ii) la posición estimada del vehículo (línea-circunferencia azul) que es calculada por la tarea de navegación y controlada por la tarea de guiado para que el VA recorra la trayectoria deseada, y iii) la trayectoria real recorrida (línea-diamante roja), la cual es dada por el simulador Gazebo.

En la Figura 5.2 se pueden observar las acciones de control aplicadas al VA. La velocidad lineal del VA es limitada a 2 (m/s) acorde a las restricciones definidas en la tarea

de planeamiento de trayectorias. En la Figura 5.3 se grafican los errores de guiado, donde x^{sp} y y^{sp} son las coordenadas $x - y$ deseadas que definen la trayectoria y ψ^{sp} es el ángulo de rotación deseado.

Finalmente, en la Figura 5.4 se representan los errores de estimación, donde x^{t} , y^{t} representan las coordenadas $x - y$ verdadera y ψ^{t} el verdadero ángulo de rotación, los cuales son obtenidos del simulador. Puede observarse que la tarea de navegación es llevada a cabo con éxito ya que los errores de estimación en la posición $x - y$ y el ángulo de rotación son pequeños (aproximadamente ± 0.3 [m] y ± 15 [°] respectivamente).

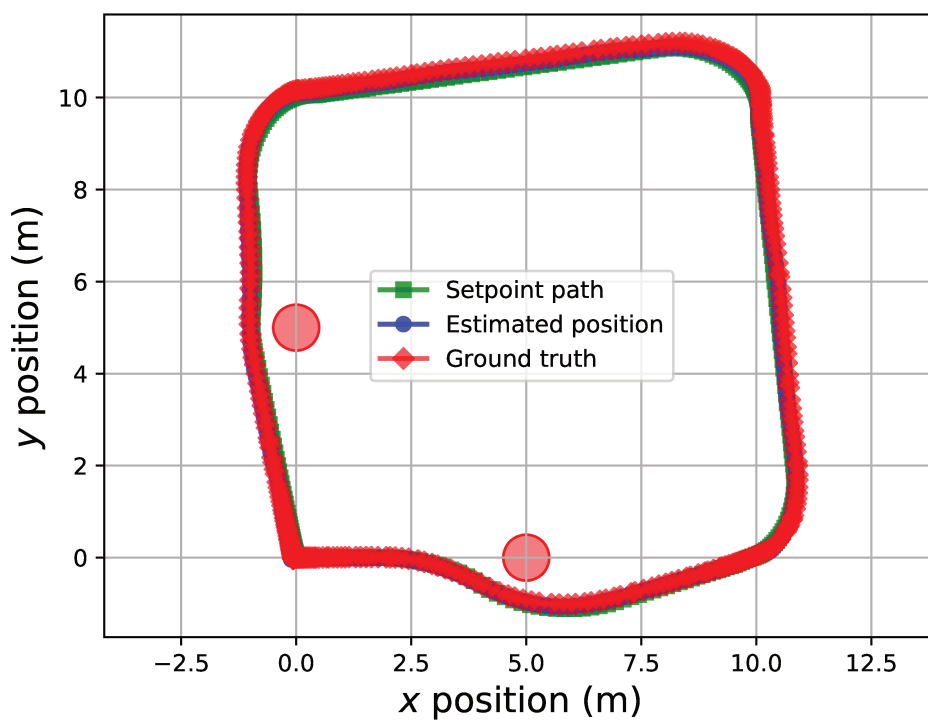


Figura 5.1: Trayectorias calculada, verdadera y estimada

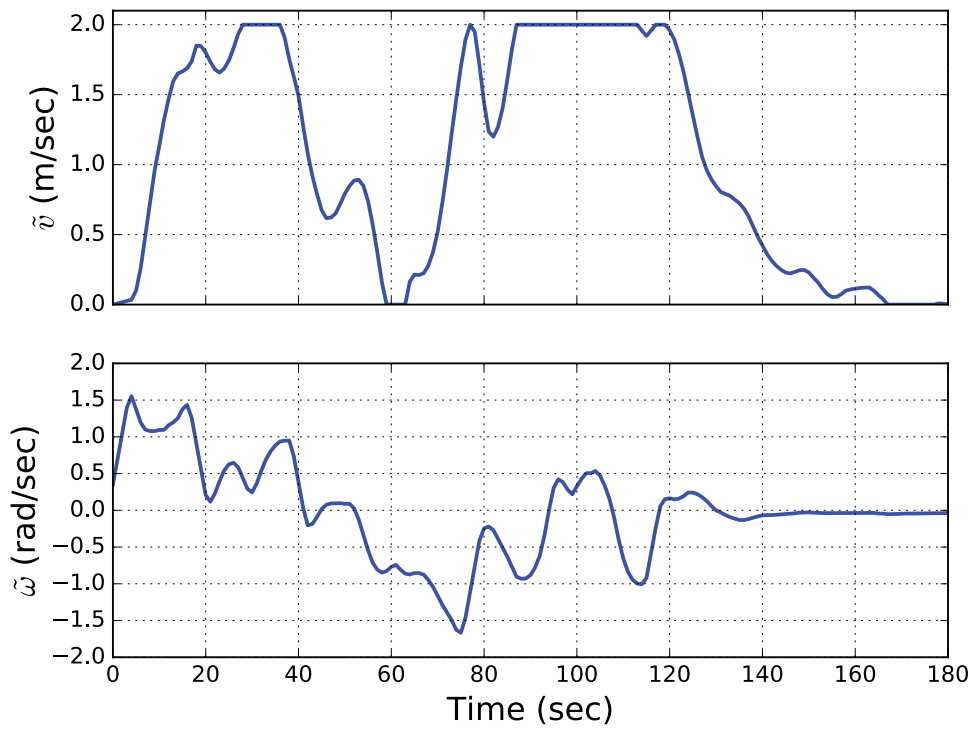


Figura 5.2: Acciones de control

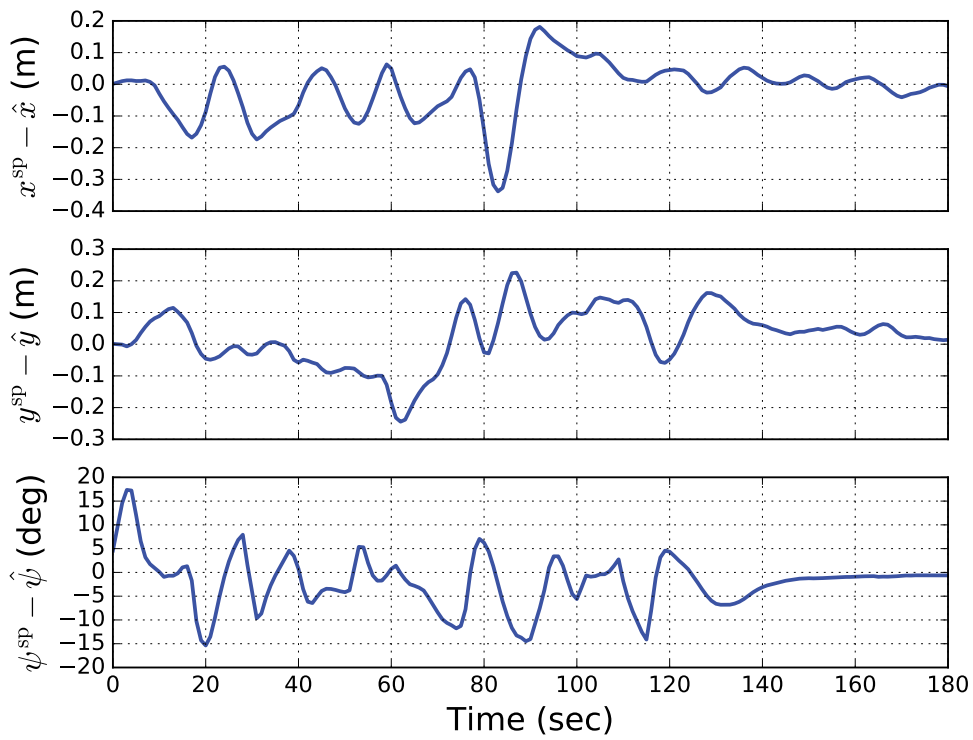


Figura 5.3: Errores de guiado

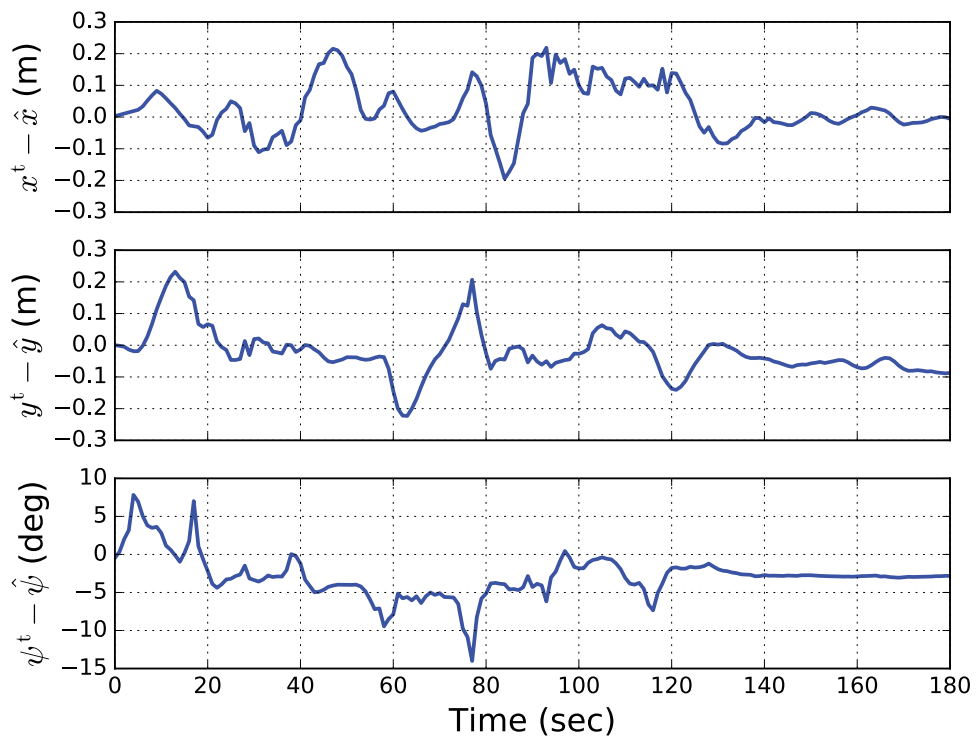


Figura 5.4: Errores de estimación

6 Conclusiones y Trabajos Futuros

6.1. Conclusiones

En esta tesis se ha abordado el problema de estimación y control simultáneos de sistemas no lineales sujetos a perturbaciones acotadas e incertidumbre. Este enfoque, al resolver los problemas de estimación y control como uno solo, es independiente de las condiciones bajo las cuales es aplicable el principio de separación, evitando así perder la optimalidad de las soluciones de estimación y control.

En una primera instancia, se ha abordado el problema de estimación en sistemas no lineales sujetos a perturbaciones acotas. El algoritmo desarrollado incorpora un mecanismo de adaptación del costo de arriba que depende del error de estimación. Se ha evaluado el desempeño del algoritmo propuesto y comparado con los disponibles del estado del arte. Las simulaciones han demostrado que el algoritmo propuesto presenta mejor desempeño, aun en condiciones adversas como presencia de perturbaciones con estadística variante en el tiempo. Además, el costo computacional del algoritmo desarrollado es menor en comparación con otros algoritmos de horizonte móvil del estado del arte, que incorporan en su función objetivo un término extra asociado al máximo costo de etapa, lo que implica agregar una restricción no lineal a la formulación del problema.

En segunda instancia, se aborda el problema de estimación en condiciones mas realistas, las cuales implican un conocimiento parcial del modelo del sistema. Para mitigar este problema, se supone conocida la región de operación, y el sistema es aproximado mediante una combinación convexa de modelos afines y fijos. Se ha propuesto un esquema de estimación dual el cual estima de manera secuencial los estados del sistema con el modelo disponible, y luego, manteniendo constante la trayectoria de estados, se estiman los parámetros del sistema como una combinación convexa de los modelos fijos. La estimación simultánea de los estados y parámetros implica la formulación de un problema de optimización con restricciones no convexas. Al formular el problema a partir de un esquema de estimación dual, se conserva la convexidad del espacio solución y se garantiza un decrecimiento en los costos generados en la iteración.

En tercer lugar, se completa el estimador incorporando un controlador para resolver los problemas de estimación y control de manera simultánea. El controlador utilizado es un *MPC* por lo que la formulación conjunta del estimador *MHE* con *MPC* resulta natural. Se ha diseñado una función multi-objetivo en la cual intervienen términos del estimador y términos correspondientes al controlador. Mediante un parámetro convexo se puede sintonizar la función multi-objetivo para poner mayor énfasis al estimador o al controlador. Este enfoque permite acentuar alguno de los objetivos cuando se conocen las condiciones del entorno. Cuando no se dispone de información previa, se ponderan de igual manera todos los objetivos. Los casos de simulación presentados muestran la efectividad

de este enfoque, el cual además no requiere validar el principio de separación.

6.2. Artículos

Como resultado de los trabajos de investigación realizados en el marco de la presente tesis, se han escrito los siguientes artículos:

Revistas:

1. Nestor N. Deniz, Marina H. Murillo, Guido M. Sanchez, Leonardo L. Giovanini. - "Robust stability of moving horizon estimation for nonlinear systems with bounded disturbances using adaptive arrival cost", IET Control Theory and Applications (aceptado para publicación).
2. Nestor N. Deniz, Marina H. Murillo, Guido M. Sanchez, Leonardo L. Giovanini. "Multiple model approach for robust state estimation in presence of model uncertainty and bounded disturbances", Automatica (en revisión).
3. Nestor N. Deniz, Guido M. Sanchez, Marina H. Murillo, Leonardo L. Giovanini. "Simultaneous state estimation and control for nonlinear systems subject to bounded disturbances", Automatica (en revisión).

Congresos:

1. Marina H. Murillo, Guido M. Sanchez, Nestor N. Deniz, Lucas M. Genzelis, Leonardo L. Giovanini. "Towards autonomy in unmanned vehicles using receding horizon strategies", XXIV Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, 2019.
2. Guido M. Sanchez, Marina H. Murillo, Lucas M. Genzelis, Nestor N. Deniz, Leonardo L. Giovanini. "MPC for nonlinear systems: a comparative review of discretization methods", RPIC 2017.
3. Guido M. Sanchez, Marina H. Murillo, Lucas M. Genzelis, Nestor N. Deniz, Leonardo L. Giovanini. "Moving Horizon Estimation for GNSS-IMU sensor fusion", JAR 2017.
4. Lucas M. Genzelis, Guido M. Sanchez, Nestor N. Deniz, Marina H. Murillo, Leonardo L. Giovanini. "Modelado Dinámico y Control de un Tractor Articulado con Implemento", JAR 2017.
5. Lucas M. Genzelis, Guido M. Sanchez, Nestor N. Deniz, Marina H. Murillo, Leonardo L. Giovanini. "Modeling and Control of an Agricultural Articulated Vehicle Carrying an Implement", RPIC 2017.

6.3. Trabajos futuros

Los objetivos futuros de corto y mediano plazo consisten en aplicar los algoritmos desarrollados en dos áreas de gran interés:

-
- Estimación y control de un vehículo autónomo terrestre en terrenos arbitrarios.
 - Estimación y control de páncreas artificiales.

La navegación autónoma es una área de creciente interés en los últimos años, en parte debido a la disponibilidad de vehículos terrestres y aéreos a bajo precio en el mercado. La navegación autónoma de vehículos terrestres o aéreos tiene un sinnúmero de aplicaciones en muchas y diferentes áreas. Disponer de algoritmos que mejoren el desempeño del vehículo y su autonomía es de crucial interés en robótica. Gracias a los últimos avances y desarrollo de algoritmos numéricos, *MHE/MPC* son técnicas que pueden ser fácilmente implementadas en computadoras de bajo costo y al mismo tiempo mantener constante la carga computacional, esencial para el cálculo en tiempo real.

Como parte de los trabajos futuros propuestos, se aplicarán los algoritmos desarrollados al control de páncreas artificiales. Para ello, se ha solicitado el acceso a los modelos matemáticos del páncreas, aprobados por la FDA (Food and Drug Administration from United States of America), así como también a las bases de datos disponibles.

Se espera que la aplicación de los algoritmos desarrollados en esta tesis generen resultados de interés y aplicaciones novedosas que den solución a problemas actuales de interés y al mismo tiempo que permitan la publicación de nuevos artículos científicos.

Anexos

Referido a los artículos incluidos en los Anexos A, B, C, D, E y F.

- Nestor N. Deniz, Marina H. Murillo, Guido M. Sanchez, Lucas M. Genzelis, Leonardo L. Giovanini. "Robust stability of moving horizon estimation for nonlinear systems with bounded disturbances using adaptive arrival cost", IET Control Theory and Applications (en revisión).
- Nestor N. Deniz, Marina H. Murillo, Guido M. Sanchez, Lucas M. Genzelis, Leonardo L. Giovanini. "Multiple model approach for robust state estimation in presence of model uncertainty and bounded disturbances", Automatica (en revisión).
- Nestor N. Deniz, Guido M. Sanchez, Marina H. Murillo, Lucas M. Genzelis, Leonardo L. Giovanini. "Simultaneous state estimation and control for nonlinear systems subject to bounded disturbances", Automatica (en revisión).
- Marina H. Murillo, Guido M. Sanchez, Nestor N. Deniz, Lucas M. Genzelis, Leonardo L. Giovanini. "A Receding Horizon Framework for Autonomy in Unmanned Vehicles", Optimal Control Applications and Methods (en revisión).
- Guido M. Sanchez, Marina H. Murillo, Lucas M. Genzelis, Nestor N. Deniz, Leonardo L. Giovanini. "MPC for nonlinear systems: a comparative review of discretization methods", RPIC 2017.
- Guido M. Sanchez, Marina H. Murillo, Lucas M. Genzelis, Nestor N. Deniz, Leonardo L. Giovanini. "Moving Horizon Estimation for GNSS-IMU sensor fusion", JAR 2017.

el tesista declara haber contribuido principalmente en el diseño, implementación y evaluación de los algoritmos descritos y los experimentos realizados para obtener los resultados que allí se presentan. Estas tareas fueron realizadas bajo la guía y supervisión del director Dr. L. L. Giovanini. En cuanto a la escritura de los artículos, el tesista ha sido el autor principal, guiado por los comentarios, sugerencias y revisiones del director, y otros coautores que en cada artículo se indican. Los abajo firmantes avalan esta declaración.

Dr. L. L. Giovanini

Director

Anexo A

Robust stability of moving horizon estimation for nonlinear systems with bounded disturbances using adaptive arrival cost

Robust stability of moving horizon estimation for nonlinear systems with bounded disturbances using adaptive arrival cost

Nestor N. Deniz^a, Guido Sanchez^a, Marina H. Murillo^a,
Leonardo L. Giovanini^a

^a*Instituto de Investigacion en Senales, Sistemas e Inteligencia Computacional,
sinc(i), UNL, CONICET, Ciudad Universitaria UNL, 4to piso FICH, (S3000)
Santa Fe, Argentina*

Abstract

In this paper, the robust stability and convergence to the true state of moving horizon estimator based on an adaptive arrival cost are established for nonlinear detectable systems. Robust global asymptotic stability is shown for the case of non-vanishing bounded disturbances whereas the convergence to the true state is proved for the case of vanishing disturbances. Several simulations were made in order to show the estimator behaviour under different operational conditions and to compare it with the state of the art estimation methods.

1 Introduction

State estimation plays a fundamental role in feedback control, system monitoring and system optimization because noisy measurements is the only information available from the system. Several methods have been developed for accomplishing such task (see [1], [2], among others). All these methods have been developed upon the assumption on the knowledge of noises and model of the system, as well as, the absence of constraints.

In practice, these assumptions are not easily satisfied and research efforts were focused on approaches that do not rely on such requirements (see [3], [4], [5], among others). For example, an H_∞ filter is designed minimizing the H_∞

Email addresses: ndeniz@sinc.unl.edu.ar (Nestor N. Deniz),
ggsanchez@sinc.unl.edu.ar (Guido Sanchez), mmurillo@sinc.unl.edu.ar
(Marina H. Murillo), lgiovanini@sinc.unl.edu.ar (Leonardo L. Giovanini).

norm of the mapping between disturbances and estimation error. In [3], [6] and [7] an approach that solves a least-square estimation problem is introduced. Both methods are based on the adequate selection of the uncertainty model instead of relying on statistical assumptions on noises. In these approaches, uncertainty models are formulated based on the available information of the system. In the same way, robust estimation algorithms based on a min-max robust filtering, set-valued estimation and guaranteed cost paradigm, have attracted the attention of the research community (see [4], [8]).

Building on the success on moving horizon control, moving horizon estimation (MHE) has attracted attention of researchers since the pioneering work of [9] (see also [10], [11] and [12]). The interest in such estimation methods stems from the possibility of dealing with limited amount of data, instead of using all the information available from the beginning, and the ability to incorporate constraints. In recent years, both theoretical properties of various MHE schemes as well as efficient computational methods for real-time implementation have been studied (see [13], [14], [15], [16], [17], [18]). In particular, it is of interest to establish robust stability and estimate convergence properties. In recent years several results have been obtained for different algorithms, advancing from idealistic assumptions (observability and no disturbances) to realistic situations (detectability and bounded disturbances).

For nonlinear observable systems, [12] established the asymptotic stability of the estimation error for the standard cost function. Furthermore, if the disturbances are asymptotically vanishing the estimation error is robust asymptotically stable and it asymptotically converges to zero ([19]-[20]). [14] and [21] proposed an estimation scheme, based on least-square cost function of the estimation residuals, that guaranteed the boundedness of estimation error for observable systems subject to bounded additive disturbances. Finally, for the general case of nonlinear detectable systems subject to bounded disturbances, [22] and [23] showed the robust global asymptotic stability (RGAS) and convergence of estimation error in case of bounded or vanishing disturbances, respectively. In these works, the least-square objective function was modified by adding a max-term. [22] established RGAS for the full information estimator while [23] established RGAS and convergence for the moving horizon estimator. Furthermore, for a particular choice of the weights of the objective function, [23] established these results for the least-squares type objective function.

This paper introduces the RGAS and convergence analysis for the moving horizon estimator based on adaptive arrival cost proposed in [18] in the practical case of nonlinear detectable systems subject to bounded disturbances. To establish robust stability properties for MHE it is crucial that the prior weighting in the cost function is chosen properly. In various schemes the necessary assumptions in the prior weighting are difficult to verify ([12], [19]),

while in others can be verified a priori [23]. In the MHE scheme analysed in this work, the assumption on the prior weighting can be verified a priori by design. Furthermore, the disturbances gains become uniform (i.e., they are valid independent of N), allowing to extend the stability analysis to full information estimators with least-square type cost functions.

The rest of the paper is organized as follows: Section 2 introduces the notation, definitions and properties that will be used through the paper. Section 3 presents the main result and shows its connections with previous stability analysis. Section 4 discusses simple examples, previously used in the literature, with the purpose of illustrating the concepts and also in order to show the difference with others MHE algorithms. Finally, Section 5 presents conclusions.

2 Preliminaries and setup

2.1 Notation

Let $\mathbb{Z}_{[a,b]}$ denotes the set of integers in the interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, and $\mathbb{Z}_{\geq a}$ denotes the set of integers greater or equal to a . Boldface symbols denote sequences of finite or infinite length, i.e., $\mathbf{w} := \{w_{k_1}, \dots, w_{k_2}\}$ for some $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $k_1 < k_2$, respectively. We denote $x_{j|k}$ as the finite sequence \mathbf{x} given at time $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $j \in [k_1, k_2]$. By $|x|$ we denote the Euclidean norm of a vector $x \in \mathbb{R}^n$. Let $\|\mathbf{x}\| := \sup_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} |x_k|$ denote the supreme norm of the sequence \mathbf{x} and $\|\mathbf{x}\|_{[a,b]} := \sup_{k \in \mathbb{Z}_{[a,b]}} |x_k|$. A function $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ is of class \mathcal{K} if γ is continuous, strictly increasing and $\gamma(0) = 0$. If γ is also unbounded, it is of class \mathcal{K}_∞ . A function $\zeta : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ is of class \mathcal{L} if $\zeta(k)$ is non increasing and $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta(k) = 0$. A function $\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ is of class \mathcal{KL} if $\beta(\cdot, k)$ is of class \mathcal{K} for each fixed $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, and $\beta(r, \cdot)$ of class \mathcal{L} for each fixed $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

The following inequalities hold for all $\beta \in \mathcal{KL}$, $\gamma \in \mathcal{K}$ and $a_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ with $j \in \mathbb{Z}_{[1,n]}$

$$\begin{aligned} \gamma(a_1 + a_2 + \dots + a_n) &\leq \gamma(na_1) + \dots + \gamma(na_n), \\ \beta(a_1 + a_2 + \dots + a_n, k) &\leq \beta(na_1, k) + \dots + \beta(na_n, k). \end{aligned} \quad (1)$$

The preceding inequalities hold since $\max\{a_j\}$ is included in the sequence $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ and \mathcal{K} functions are non-negative strictly increasing functions.

Bounded sequences: A sequence \mathbf{w} is bounded if $\|\mathbf{w}\|$ is finite. The set of bounded sequences \mathbf{w} is denoted as $\mathcal{W}(w_{\max}) := \{\mathbf{w} : \|\mathbf{w}\| \leq w_{\max}\}$ for some

$w_{\max} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Convergent sequences: A bounded infinite sequence \mathbf{w} is convergent if $|w_k| \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$. Let denote the set of convergent sequences \mathcal{C} :

$$\mathcal{C}_w := \{\mathbf{w} \in \mathcal{W}(w_{\max}) \mid \mathbf{w} \text{ is convergent}\}$$

Analogously, \mathcal{C}_v is defined for the sequence \mathbf{v} .

2.2 Problem statement

Let us consider the state estimation problem for nonlinear discrete time systems of the form

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, w_k), & x_0 &= \mathbf{x}_0 \\ y_k &= h(x_k) + v_k, \end{aligned} \quad (2)$$

where $x_k \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $w_k \in \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^p$, $y_k \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^m$, $v_k \in \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ are the state, process noise, measurement and estimation residuals vectors, respectively. The process disturbance w_k and estimation residuals v_k are unknown but assumed to be bounded, i.e., $\mathbf{w} \in \mathcal{W}(w_{\max})$ and $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(v_{\max})$ for some $w_{\max}, v_{\max} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. \mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{W} and \mathcal{V} are compact and convex sets with the null vector $\mathbf{0}$ belongs to them. In the following we assume that $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ is continuous, locally Lipschitz on x_k and $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ is continuous. The solution to the system (2) at time k is denoted by $x(k; \mathbf{x}_0, \mathbf{w})$, with initial condition \mathbf{x}_0 and process disturbance sequence \mathbf{w} . Furthermore, the initial condition \mathbf{x}_0 is unknown, but a prior knowledge \bar{x}_0 is assumed to be available and its error is assumed to be bounded, i.e., $\bar{x}_0 \in \mathcal{X}_0 := \{\bar{x}_0 : |\mathbf{x}_0 - \bar{x}_0| \leq e_{\max}\}$, $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{X}$.

The solution of the estimation problem aims to find at time k an estimate $\hat{x}_{k|k}$ of the current state x_k minimizing a performance metric using by the MHE. At each sampling time k , given the previous N measurements $\mathbf{y} := \{y_{k-N}, \dots, y_{k-1}\}$, the following optimization problem is solved

$$\begin{aligned} \min_{\hat{x}_{k-N|k}, \hat{\mathbf{w}}_{j|k}} \quad & \Psi := \Gamma_{k-N|k}(\hat{x}_{k-N|k}) + \sum_{j=k-N}^{k-1} \ell(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \hat{x}_{j+1|k} = f(\hat{x}_{j|k}, \hat{w}_{j|k}), & j \in \mathbb{Z}_{[k-N, k-1]} \\ y_j = h(\hat{x}_{j|k}) + \hat{v}_{j|k}, \\ \hat{x}_{j|k} \in \mathcal{X}, \hat{w}_{j|k} \in \mathcal{W}, \hat{v}_{j|k} \in \mathcal{V}, \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

where $\hat{x}_{k-j|k}$ is the optimal estimated and $\hat{w}_{j|k}$ is the optimal process noise estimate at sample $k-j$ $j = 0, 1, \dots, N$ based on measurements y_{k-j} available at time k . The process noise $\hat{\mathbf{w}}_{j|k} := \{\hat{w}_{k-N|k}, \dots, \hat{w}_{k-1|k}\}$ and $\hat{x}_{k-N|k}$ are

the optimization variables. The stage cost $\ell(w_{j|k}, v_{j|k})$ penalizes the estimated process noise sequence $\hat{\mathbf{w}}_{j|k}$ and the estimation residuals $\hat{\mathbf{v}}_{j|k} = \mathbf{y}_j - h(\hat{\mathbf{x}}_{j|k})$, while $\Gamma_{k-N}(\hat{\mathbf{x}}_{k-N|k})$ penalizes the prior estimated $\hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}$. The adequate choice of $\ell(\cdot)$ and $\Gamma_{k-N}(\cdot)$, and their parameters, allows to ensure the robust stability of the estimator [23]. While the estimation window is not full, $k \leq N$, problem (3) can be reformulated and solved as a full information problem

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}, \hat{\mathbf{w}}} \Psi &:= \Gamma_{0|k}(\hat{\mathbf{x}}_{0|k}) + \sum_{j=0}^{k-1} \ell(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{j+1|k} = f(\hat{\mathbf{x}}_{j|k}, \hat{w}_{j|k}), & j \in \mathbb{Z}_{[0, k-1]} \\ \mathbf{y}_j = h(\hat{\mathbf{x}}_{j|k}) + \hat{v}_{j|k}, \\ \hat{\mathbf{x}}_{j|k} \in \mathcal{X}, \hat{w}_{j|k} \in \mathcal{W}, \hat{v}_{j|k} \in \mathcal{V}, \end{cases} \end{aligned}$$

as k increases this problem becomes (3) for all $k \geq N$.

In previous works, the robust stability of MHE has been achieved by modifying the standard least-square cost function through the inclusion of a *max*-term ([22]; [23]) or by a suitable choice of the cost's function parameters ([23]). Another mechanism to solve this problem is combining a suitable choice of the stage cost $\ell(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k})$ with a time-varying prior weight of the form

$$\Gamma_{k-N|k}(\hat{\mathbf{x}}_{k-N|k}) = \|\hat{\mathbf{x}}_{k-N|k} - \bar{\mathbf{x}}_{k-N}\|_{P_{k-N|k}^{-1}}, \quad (4)$$

whose parameters $(P_{k-N|k}^{-1}, \bar{\mathbf{x}}_{k-N})$ are recursively updated using the information available at time k ([18], 2017). The prior weighting is defined in this way to avoid the introduction of artificial cycling in the estimation process (see [19]). In this approach, the prior weight matrix $P_{k-N|k}$ is given by

$$\begin{aligned} \epsilon_{k-N} &= \mathbf{y}_{k-N} - \hat{\mathbf{y}}_{k-N|k}, \\ N_k &= \left[1 + \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k-1}^T P_{k-N-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k-1} \right] \frac{\sigma}{|\epsilon_{k-N}|_2^2} \\ \alpha_k &= 1 - \frac{1}{N_k}, \\ W_k &= \left[I - \frac{P_{k-N-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k-1}^T}{1 + \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k-1}^T P_{k-N-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-N|k-1}} \right] P_{k-N-1}, \\ P_{k-N} &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha_k} W_k & \text{if } \frac{1}{\alpha_k} \text{Tr}(W_k) \leq c, \\ W_k & \text{otherwise,} \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

where $\sigma, \sigma_w, c, \lambda \in R_{>0}$, $c > \lambda$, $P_0 = \lambda I_{n \times n}$ and $\sigma \gg \sigma_w$, where σ_w denotes the process noise variance. The prior knowledge of the window $\bar{\mathbf{x}}_{k-N}$ is updated

using a smoothed estimate ([24])

$$\bar{x}_{k-N} = \hat{x}_{k-N|k-1}. \quad (6)$$

The optimization problem (3) can be reformulated in terms of the initial condition \hat{x}_0 and the estimated process noises and the residuals along the entire trajectory as follows

$$\begin{aligned} \min_{\hat{x}_{0|k}, \hat{\mathbf{w}}} \Psi &:= \sum_{j=k-N}^{k-1} \ell(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) + \\ &\sum_{j=1}^{k-N-1} \alpha_k^{k-N-j} \ell(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) + \alpha_k^{k-N} \Gamma_{0|k}(\hat{x}_{0|k}) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \hat{x}_{j+1|k} = f(\hat{x}_{j|k}, \hat{w}_{j|k}), \quad j \in \mathbb{Z}_{[0, k-1]}, \alpha \in (0, 1] \\ y_j = h(\hat{x}_{j|k}) + \hat{v}_{j|k}, \\ \hat{x}_{j|k} \in \mathcal{X}, \quad \hat{w}_{j|k} \in \mathcal{W}, \quad \hat{v}_{j|k} \in \mathcal{V}, \end{cases} \end{aligned}$$

This formulation of problem (3) allows to explicitly see the effect of past data on the current state estimate $\hat{x}_{k|k}$. In this formulation it is easy to see the exponential averaging of these data. Allowing α change in time, the past data has different affects on the current estimates depending on $\hat{x}_{k|k}$.

Before proceeding to the development of the main results, we state the main properties and assumptions about the prior weighting Γ_{k-N} .

The updating mechanism (5) is a time-varying filter whose inputs are $\hat{x}_{k-N|k-1} \hat{x}_{k-N|k-1}^T$ and the initial condition P_0 . It generates recursively a real-time estimation of $P_{k-N|k}$ by updating $P_{k-N-1|k-1}$ with an exponential time-averaging of $\hat{x}_{k-N|k-1} \hat{x}_{k-N|k-1}^T$. The updating mechanism (5) only use data and it does not rely on a model of the system. The sequence $P_{k|k}$ $k \geq 0$ is positive definite, it is decreasing in norm and it is bounded. The proof of these properties follows similar steps as in [18].

Assumption 1 *The prior weighting Γ_{k-N} is a continuous function $\Gamma_{k-N} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lower bounded by $\underline{\gamma}_p \in \mathcal{K}_\infty$ and upper bounded by $\bar{\gamma}_p \in \mathcal{K}_\infty$ such that:*

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_p(|\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}|) &\leq \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}) \\ \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}) &\leq \bar{\gamma}_p(|\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}|) \end{aligned} \quad (7)$$

for all $\hat{x} \in \mathcal{X}$ and

$$\underline{\gamma}_p(r) \geq \underline{c}_p r^a, \quad \bar{\gamma}_p(r) \leq \bar{c}_p r^a. \quad (8)$$

where $0 \leq \underline{c}_p \leq \bar{c}_p$ and $a \in \mathbb{R}_{\geq 1}$.

Given prior weighting updating scheme (5) inequality (7) satisfies [18]

$$|P_0^{-1}|r^a \leq \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}) \leq |P_\infty^{-1}|r^a. \quad (9)$$

Definition 1 *The system (2) is incrementally input/output-to-state stable if there exist functions $\beta \in \mathcal{KL}$ and $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}$ such that for every two initial states $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$, and any two disturbances sequences $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ the following holds for all $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:*

$$\begin{aligned} |x(k, z_1, \mathbf{w}_1) - x(k, z_2, \mathbf{w}_2)| &\leq \max\{\beta(|z_1 - z_2|, k), \gamma_1(\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|), \\ &\quad \gamma_2(\|\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_2)\|)\} \\ &\leq \beta(|z_1 - z_2|, k) + \gamma_1(\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|) + \\ &\quad \gamma_2(\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|) \end{aligned} \quad (10)$$

This definition combines the concepts of output-to-state-stability (OSS) and input-to-state-stability (ISS). As stated in [25], the notion of IOSS represents a natural combination of the ideas of *strong* observability and ISS, and it was called *detectability* in [26] and *strong unboundedness observability* in [27]. In addition, the existence of an observer for the system (2), which is *incrementally input-output-to-state stable* (*i*-IOSS) instead of IOSS (see Remark 24 in [25]), is assumed. Note that $\|\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_2)\| = \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|$, since $y_k = h(x_k) + v_k$. These assumptions will help us to bound the functions involved in the definition of *i*-IOSS and to relate them with the terms of the MHE cost function (stage cost and prior weight).

In the following sections the updating mechanism (5) and the assumption of *i*-IOSS [28] will be used to prove robust stability of the proposed MHE in the presence of bounded disturbances and convergence to the true state in the case of convergent disturbances. Some assumptions about functions related to system (2) and Definition 1 will be helpful in the sequel.

Assumption 2 *The function $\beta(r, s) \in \mathcal{KL}$ and satisfies the following inequality*

$$\beta(r, s) \leq c_\beta r^p s^{-q} \quad (11)$$

for some $c_\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ and $q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ and $q \geq p$.

Assumption 3 *The stage cost $\ell(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function bounded by $\underline{\gamma}_w, \underline{\gamma}_v, \bar{\gamma}_w, \bar{\gamma}_v \in \mathcal{K}_\infty$ such that the following inequalities are satisfied $\forall w \in \mathcal{W}$ and $v \in \mathcal{V}$*

$$\underline{\gamma}_w(w) + \underline{\gamma}_v(v) \leq \ell(w, v) \leq \bar{\gamma}_w(w) + \bar{\gamma}_v(v). \quad (12)$$

Functions γ_1 and γ_2 from Definition 1 are related with the bounds of stage

cost $\bar{\gamma}_w, \underline{\gamma}_w, \bar{\gamma}_v$ and $\underline{\gamma}_v$ through the following inequalities

$$\gamma_1 \left(3\underline{\gamma}_w^{-1}(r) \right) \leq c_1 r^{\alpha_1}, \quad \gamma_2 \left(3\underline{\gamma}_v^{-1}(r) \right) \leq c_2 r^{\alpha_2} \quad (13)$$

for $c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$. Inequalities (11) to (13) were used in previous works ([22]; [23]).

In this work, we claim that the proposed estimator holds the property of being robust global asymptotic stable, which is defined as follows.

Definition 2 Consider the system described (2) subject to disturbances $\mathbf{w} \in \mathcal{W}(w_{\max})$ and $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(v_{\max})$ for $w_{\max} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $v_{\max} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ with prior estimate $\bar{x}_0 \in \mathcal{X}(e_{\max})$ for $e_{\max} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. The moving horizon state estimator given by equation (3) with adaptive prior weight is robustly globally asymptotically stable (RGAS) if there exists functions $\Phi \in \mathcal{KL}$ and $\pi_w, \pi_v \in \mathcal{K}$ such that for all $x_0 \in \mathcal{X}$, all $\bar{x}_0 \in \mathcal{X}_0$, the following is satisfied for all $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$|x_k - \hat{x}_k| \leq \Phi(|x_0 - \bar{x}_0|, k) + \pi_w \left(\|\mathbf{w}\|_{[0, k-1]} \right) + \pi_v \left(\|\mathbf{v}\|_{[0, k-1]} \right). \quad (14)$$

We want to show that if system (2) is i-IOSS, then Assumptions 1, 2 and 3 are fulfilled and the proposed MHE estimator with adaptive arrival cost weight matrix is RGAS. Furthermore, if the process disturbance and measurement noise sequences are convergent (i.e., $\mathbf{w} \in \mathcal{C}_w, \mathbf{v} \in \mathcal{C}_v$), then $\hat{x}_{k|k} \rightarrow x_k$ as $k \rightarrow \infty$.

3 Robust stability of moving horizon estimation under bounded disturbances

We are ready to derive the main result: RGAS of the proposed moving horizon estimator with a large enough estimation horizon \mathcal{N} for nonlinear detectable systems under bounded disturbances. Furthermore, a \mathcal{KL} function exist such that (14) is valid with this Φ, π_w and π_v for all estimation horizon $N \geq \mathcal{N}$.

Theorem 1 Consider an i-IOSS system (2) with disturbances $\mathbf{w} \in \mathcal{W}(w_{\max})$, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(v_{\max})$. Assume that the arrival cost weight matrix of the MHE problem Γ_{k-N} is updated using the adaptive algorithm (5). Moreover, Assumptions 1, 2 and 3 are fulfilled and initial condition x_0 is unknown, but a prior estimate $\bar{x}_0 \in \mathcal{X}_0$ is available. Then, the MHE estimator (3) is RGAS.

Proof. The optimal cost of problem (3) is given by

$$\begin{aligned}\Psi_N^* &= \Psi \left(\hat{x}_{k-N|k}^*, \hat{\mathbf{w}}^*[k-N, k-1] \right) \\ &= \Gamma_{k-N} \left(\hat{x}_{k-N|k}^* \right) + \sum_{j=k-N}^{k-1} \ell \left(\hat{w}_{j|k}^*, \hat{v}_{j|k}^* \right),\end{aligned}$$

which is bounded (Assumptions 1 and 3) $\forall |\hat{w}_{j|k}|$ and $\forall |\hat{v}_{j|k}|$ for all $j \in \mathbb{Z}_{[k-N, k-1]}$ by

$$\begin{aligned}\Psi_N^* &\leq \bar{\gamma}_p \left(|\hat{x}_{k-N|k}^* - \bar{x}_{k-N}| \right) + N\bar{\gamma}_w \left(|\hat{w}_{j|k}^*| \right) + N\bar{\gamma}_v \left(|\hat{v}_{j|k}^*| \right), \\ \Psi_N^* &\geq \underline{\gamma}_p \left(|\hat{x}_{k-N|k}^* - \bar{x}_{k-N}| \right) + N\underline{\gamma}_w \left(|\hat{w}_{j|k}^*| \right) + N\underline{\gamma}_v \left(|\hat{v}_{j|k}^*| \right).\end{aligned}$$

Due optimality, the following inequalities hold $\forall k \in [k-N, k-1]$

$$\begin{aligned}\Psi \left(\hat{x}_{k-N|k}^*, \hat{\mathbf{w}}^* \right) &\leq \Psi \left(x_{k-N}, \mathbf{w} \right), \\ &\leq \bar{\gamma}_p \left(|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}| \right) + \\ &\quad N\bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\| \right) + N\bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\| \right),\end{aligned}\tag{15}$$

then, taking into account the lower and upper bounds we have

$$\begin{aligned}|\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}| &\leq \underline{\gamma}_p^{-1} \left(\bar{\gamma}_p \left(|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}| \right) + \right. \\ &\quad \left. N\bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\| \right) + N\bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\| \right) \right).\end{aligned}$$

By mean of Assumptions 1 and 3 the last inequality can be written as follows

$$\begin{aligned}|\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}| &\leq \underline{\gamma}_p^{-1} \left(3\bar{\gamma}_p \left(|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}| \right) + \right. \\ &\quad \left. \underline{\gamma}_p^{-1} \left(3N\bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\| \right) + \underline{\gamma}_p^{-1} \left(3N\bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\| \right) \right) \right), \\ &\leq \frac{3^{\frac{1}{a}}}{|P_0^{-1}|} \left(|P_\infty^{-1}|^{\frac{1}{a}} |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}| + \right. \\ &\quad \left. N^{\frac{1}{a}} \bar{\gamma}_w^{\frac{1}{a}} \left(\|\mathbf{w}\| \right) + N^{\frac{1}{a}} \bar{\gamma}_v^{\frac{1}{a}} \left(\|\mathbf{v}\| \right) \right).\end{aligned}$$

Analogously, bounds for $|\hat{v}_{j|k}|$ and $|\hat{w}_{j|k}|$ can be found

$$\begin{aligned}|\hat{w}_{j|k}| &\leq \underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{3}{N} \bar{\gamma}_p \left(|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}| \right) + \right. \\ &\quad \left. \underline{\gamma}_w^{-1} \left(3\bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\| \right) + \underline{\gamma}_w^{-1} \left(3\bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\| \right) \right) \right), \\ |\hat{v}_{j|k}| &\leq \underline{\gamma}_v^{-1} \left(\frac{3}{N} \bar{\gamma}_p \left(|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}| \right) + \right. \\ &\quad \left. \underline{\gamma}_v^{-1} \left(3\bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\| \right) + \underline{\gamma}_v^{-1} \left(3\bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\| \right) \right) \right).\end{aligned}\tag{16}$$

Next, let us consider some sample $k \in \mathbb{Z}_{\geq N}$. Assuming that system (2) is i-IOSS with $z_1 = x_{k-N}$, $z_2 = \hat{x}_{k-N|k}$, $w_1 = \{w_j\}$, $w_2 = \{\hat{w}_{j|k}\}$, $v_1 = \{v_j\}$ and

$v_2 = \{\hat{v}_{j|k}\}$ for all $j \in \mathbb{Z}_{[k-N, k-1]}$. Since $x(k) = x(N, z_1, \mathbf{w}_1)$, $\hat{x}(k) = \hat{x}_{k|k} = x(N, z_2, \mathbf{w}_2)$ we obtain

$$\begin{aligned} |x_k - \hat{x}_{k|k}| &\leq \beta \left(|x_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}|, N \right) + \gamma_1 \left(\|\mathbf{w}_j - \hat{\mathbf{w}}_{j|k}\| \right) \\ &\quad + \gamma_2 \left(\|\mathbf{v}_j - \hat{\mathbf{v}}_{j|k}\| \right). \end{aligned} \quad (17)$$

In order to get a finite upper bound for the estimation error, the three terms in the right hand side of equation (17) must be upper bounded. The first term can be written

$$\begin{aligned} \beta \left(|x_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}|, N \right) &\leq \beta \left(2 |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|, N \right) + \\ &\quad \beta \left(2 |\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}|, N \right) \\ &\leq \beta \left(2 |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|, N \right) + \\ &\beta \left(\frac{2 \cdot 3^{\frac{1}{a}} |P_\infty^{-1}|^{\frac{1}{a}}}{|P_0^{-1}|} |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}| + \frac{2 \cdot 3^{\frac{1}{a}} N^{\frac{1}{a}}}{|P_0^{-1}|} \bar{\gamma}_w^{\frac{1}{a}} (\|\mathbf{w}\|) + \right. \\ &\quad \left. \frac{2 \cdot 3^{\frac{1}{a}} N^{\frac{1}{a}}}{|P_0^{-1}|} \bar{\gamma}_v^{\frac{1}{a}} (\|\mathbf{v}\|), N \right) \\ &\leq \beta \left(2 |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|, N \right) + \\ &\quad \beta \left(\frac{6 \cdot 3^{\frac{1}{a}} |P_\infty^{-1}|^{\frac{1}{a}}}{|P_0^{-1}|} |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|, N \right) + \\ &\beta \left(\frac{6 \cdot 3^{\frac{1}{a}} N^{\frac{1}{a}}}{|P_0^{-1}|} \bar{\gamma}_w^{\frac{1}{a}} (\|\mathbf{w}\|), N \right) + \beta \left(\frac{6 \cdot 3^{\frac{1}{a}} N^{\frac{1}{a}}}{|P_0^{-1}|} \bar{\gamma}_v^{\frac{1}{a}} (\|\mathbf{v}\|), N \right). \end{aligned}$$

Using Assumptions 1 and 2, function $\beta(\cdot)$ is bounded by

$$\begin{aligned} \beta \left(|x_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}|, N \right) &\leq \frac{c_\beta \cdot 2^p}{N^q} |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^p + \\ &\quad \frac{c_\beta \cdot 6^p \cdot 3^{\frac{p}{a}} |P_\infty^{-1}|^{\frac{p}{a}}}{|P_0^{-1}|^p N^q} |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^p + \\ &\quad \frac{c_\beta \cdot 6^p \cdot 3^{\frac{p}{a}} N^{\frac{p}{a}}}{|P_0^{-1}|} \bar{\gamma}_w^{\frac{p}{a}} (\|\mathbf{w}\|) + \frac{c_\beta \cdot 6^p \cdot 3^{\frac{p}{a}} N^{\frac{p}{a}}}{|P_0^{-1}|} \bar{\gamma}_v^{\frac{p}{a}} (\|\mathbf{v}\|) \\ &\leq \frac{c_\beta \cdot 2^p}{N^q} |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^p + \\ &\quad \left(\frac{|P_\infty^{-1}|}{|P_0^{-1}|} \right)^p \frac{c_\beta \cdot 6^p \cdot 3^{\frac{p}{a}}}{N^q} |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^p + \\ &\quad \frac{c_\beta \cdot 6^p \cdot 3^{\frac{p}{a}} N^{\frac{p}{a}-q}}{|P_0^{-1}|} \bar{\gamma}_w^{\frac{p}{a}} (\|\mathbf{w}\|) + \frac{c_\beta \cdot 6^p \cdot 3^{\frac{p}{a}} N^{\frac{p}{a}-q}}{|P_0^{-1}|} \bar{\gamma}_v^{\frac{p}{a}} (\|\mathbf{v}\|). \end{aligned}$$

Taking in account that P_k^{-1} is a symmetric positive definite matrix for all $k \in \mathbb{Z}_{[0, \infty)}$, then $|P_k^{-1}| \leq \lambda_{\max}(P_k^{-1})$, where $\lambda_{\max}(P_k^{-1})$ denotes the maxi-

mal eigenvalue of matrix P_k^{-1} . Denoting $\lambda_{\min}(P_k^{-1})$ as the minimal eigenvalue of matrix P_k^{-1} and taking in account that $|P_k^{-1}| \leq |P_{k+1}^{-1}|$, the maximum conditioning number of matrix P_k^{-1} can be defined as $\mathbb{C}_{P^{-1}} := \lambda_{\max}(P_{\infty}^{-1}) / \lambda_{\min}(P_0^{-1})$, then $\beta(|x_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}|, N)$ can be bounded by

$$\beta(|x_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}|, N) \leq \frac{c_{\beta} 18^p}{|P_0^{-1}|} \left(\bar{\gamma}_w^{\frac{p}{a}}(\|\mathbf{w}\|) + \bar{\gamma}_v^{\frac{p}{a}}(\|\mathbf{v}\|) \right) + \frac{c_{\beta}}{N^q} (2^p + \mathbb{C}_{P^{-1}}^p 18^p) |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^p. \quad (18)$$

The first term in the right side of this equation is bounded due the assumption that $|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}| \in \mathcal{X}_0(e_{\max})$, while the second term are finite constants. To extend the validness of (18) to the full estimation horizon, an extension of the function β at the beginning of the estimation, $N = 0$, is required.

The second term in the right hand side of equation (17), can be bounded by the following inequality $\forall j \in \mathbb{Z}_{[k-N, k-1]}$

$$\begin{aligned} \gamma_1(\|\mathbf{w}_j - \hat{\mathbf{w}}_{j|k}\|) &\leq \gamma_1(\|\mathbf{w}\| + \|\hat{\mathbf{w}}_{j|k}\|) \\ &\leq \gamma_1\left(\|\mathbf{w}\| + \underline{\gamma}_w^{-1}\left(\frac{3}{N}\bar{\gamma}_p(|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|)\right)\right) + \\ &\quad \underline{\gamma}_w^{-1}(3\bar{\gamma}_w(\|\mathbf{w}\|)) + \underline{\gamma}_w^{-1}(3\bar{\gamma}_v(\|\mathbf{v}\|)). \end{aligned}$$

Recalling Assumption 3, the reader can verify the following inequality

$$\begin{aligned} \gamma_1(\|\mathbf{w}_j - \hat{\mathbf{w}}_{j|k}\|) &\leq \frac{c_1 3^{\alpha_1} |P_{\infty}^{-1}|^{\alpha_1}}{N^{\alpha_1}} |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^{a\alpha_1} + \\ &\quad c_1 3^{\alpha_1} \bar{\gamma}_v^{\alpha_1}(\|\mathbf{v}\|) + \gamma_1\left(3\left(\|\mathbf{w}\| + \underline{\gamma}_w^{-1}(3\bar{\gamma}_w(\|\mathbf{w}\|))\right)\right). \end{aligned} \quad (19)$$

In an equivalent manner, a bound for the third term in the right hand side of equation (17) can be found

$$\begin{aligned} \gamma_2(\|\mathbf{v}_j - \hat{\mathbf{v}}_{j|k}\|) &\leq \frac{c_2 3^{\alpha_2} |P_{\infty}^{-1}|^{\alpha_2}}{N^{\alpha_2}} |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^{a\alpha_2} + \\ &\quad c_2 3^{\alpha_2} \bar{\gamma}_w^{\alpha_2}(\|\mathbf{w}\|) + \gamma_2\left(3\left(\|\mathbf{v}\| + \underline{\gamma}_v^{-1}(3\bar{\gamma}_v(\|\mathbf{v}\|))\right)\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Once an upper bound for the three terms of equation (17) were found, defining $\zeta := \max\{p, a\alpha_1, a\alpha_2\}$, $\eta := \min\{q, \alpha_1, \alpha_2\}$ and $\rho := \max\{p, \alpha_1, \alpha_2\}$, equation

(17) can be rewritten as follows

$$\begin{aligned}
|x_k - \hat{x}_{k|k}| &\leq \frac{|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^\zeta}{N^\eta} (\mathbb{C}_{P^{-1}}^\rho (c_\beta 18^p + \\
&c_1 3^{\alpha_1} \lambda_{\min}^{\alpha_1}(P_0^{-1}) + c_2 3^{\alpha_2} \lambda_{\min}^{\alpha_1}(P_0^{-1})) + c_\beta 2^p) + \\
&\left(\frac{c_\beta 18^p \bar{\gamma}_w^{\frac{p}{a}}(\|\mathbf{w}\|)}{|P_0^{-1}|} + \gamma_1 \left(3 \left(\|\mathbf{w}\| + \underline{\gamma}_w^{-1} (3\bar{\gamma}_w(\|\mathbf{w}\|)) \right) \right) + \right. \\
&c_2 3^{\alpha_2} \bar{\gamma}_w^{\alpha_2}(\|\mathbf{w}\|) + \left. \left(\frac{c_\beta 18^p \bar{\gamma}_v^{\frac{p}{a}}(\|\mathbf{v}\|)}{|P_0^{-1}|} + \right. \right. \\
&\left. \left. \gamma_2 \left(3 \left(\|\mathbf{v}\| + \underline{\gamma}_v^{-1} (3\bar{\gamma}_v(\|\mathbf{v}\|)) \right) \right) + c_1 3^{\alpha_1} \bar{\gamma}_v^{\alpha_1}(\|\mathbf{v}\|) \right). \tag{21}
\end{aligned}$$

Defining the functions $\bar{\beta}(r, s)$, $\phi_w(r)$ and $\phi_v(r)$ for all $r \geq 0$ and $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ as follows

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}(r, s) &:= \frac{r^\zeta}{s^\eta} (\mathbb{C}_{P^{-1}}^\rho (c_\beta 18^p + \\
&\lambda_{\min}^{\alpha_1}(P_0^{-1}) (c_1 3^{\alpha_1} + c_2 3^{\alpha_2})) + c_\beta 2^p), \tag{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_w(r) &:= \frac{c_\beta 18^p \bar{\gamma}_w^{\frac{p}{a}}(\|\mathbf{r}\|)}{|P_0^{-1}|} + \gamma_1 \left(3 \left(\|\mathbf{r}\| + \underline{\gamma}_w^{-1} (3\bar{\gamma}_w(\|\mathbf{r}\|)) \right) \right) + \\
&c_2 3^{\alpha_2} \bar{\gamma}_w^{\alpha_2}(\|\mathbf{r}\|), \tag{23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_v(r) &:= \frac{c_\beta 18^p \bar{\gamma}_v^{\frac{p}{a}}(\|\mathbf{r}\|)}{|P_0^{-1}|} + \gamma_2 \left(3 \left(\|\mathbf{r}\| + \underline{\gamma}_v^{-1} (3\bar{\gamma}_v(\|\mathbf{r}\|)) \right) \right) + \\
&c_1 3^{\alpha_1} \bar{\gamma}_v^{\alpha_1}(\|\mathbf{r}\|). \tag{24}
\end{aligned}$$

equation (21) can be written $\forall k \in \mathbb{Z}_{[1, N-1]}$ as follows

$$|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq \bar{\beta}(|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|, N) + \phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|). \tag{25}$$

To guarantee the validity of previous results on the entire time horizon we must extend the definition of $\beta(r, s)$ to $s = 0$. Because of $\bar{\beta}(r, s) \in \mathcal{KL}$, $\bar{\beta}(r, 0) \in \mathcal{KL}$ and $\bar{\beta}(r, 0) \geq \bar{\beta}(r, k)$ for $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, it is sufficient to define $\bar{\beta}(r, 0) \geq k_\beta \bar{\beta}(r, 1)$ for some $k_\beta \in \mathbb{R}_{>1}$ to extend the definition of $\bar{\beta}(r, s)$ for all $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. We would like to determinate the decreasing rate for the function $\bar{\beta}(r, s)$ \mathcal{N} samplings time in the future. In order to do that, let define the constants

$$\mu \in \mathbb{R}_{>0}, \delta > \frac{2 + \mu}{1 + \mu}$$

and

$$r_{\max} := \max\left\{\frac{1}{\delta} \left(\bar{\beta}(e_{\max}, 0) + \phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|) \right), \right. \\ \left. \delta(1 + \mu) (\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|)) \right\}$$

The minimum horizon length required to accomplish a decreasing rate δ will be given by

$$\mathcal{N} \geq \left(\delta^\zeta r_{\max}^{\zeta-1} \mathbf{C}_{P-1}^\rho \left(c_\beta 18^p + \lambda_{\min}^{\alpha_1} (P_0^{-1}) (c_1 \mathfrak{Z}^{\alpha_1} + c_2 \mathfrak{Z}^{\alpha_2}) + c_\beta 2^p \right) \right)^{\frac{1}{\eta}} \quad (26)$$

Adopting an estimator with a window length greater or equal to \mathcal{N} such that

$$\bar{\beta}(\delta r, N) \leq \left(\frac{\mathcal{N}}{N} \right)^\eta r, \quad (27)$$

the effects of the initial conditions will vanish with a decreasing rate δ . As $k \rightarrow \infty$, the estimation will entry to the bounded set $\mathcal{X}(w, v) \in \mathcal{X}$ defined by the noises of the system

$$\mathcal{X}(w, v) := \left\{ |x_{k+j} - \hat{x}_{k+j|k+j}| \leq \delta(1 + \mu) (\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|)) \right\}. \quad (28)$$

This set define the minimum size region of error space \mathcal{X} that the error can achieve by removing the effect of errors in initial conditions (e_{max}). Equation (27) establish a trade off between speed of convergence and window length, which is related with the size of $\mathcal{X}(w, v)$.

For any MHE with adaptive arrival cost and window length $N \geq \mathcal{N}$ two situations can be considered

- The estimator removed the effects of x_0 on $\hat{x}_{k+j|k+j}$ such that $x_{k+j} - \hat{x}_{k+j|k+j} \in \mathcal{X}(w, v)$, and
- The estimator has not removed the effects of x_0 on $\hat{x}_{k+j|k+j}$ such that $x_{k+j} - \hat{x}_{k+j|k+j} \notin \mathcal{X}(w, v)$,

Assuming the first situation and recalling equations (25) and (27), the follow-

ing inequalities hold

$$\begin{aligned}
|x_{k+N} - \hat{x}_{k+N|k+N}| &\leq \bar{\beta}(|x_k - \bar{x}_k|, k) + \phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \\
&\quad \phi_v(\|\mathbf{v}\|), \\
&\leq \frac{|x_k - \bar{x}_k|}{\delta} \left(\frac{\mathcal{N}}{N}\right)^\eta + \phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \\
&\quad \phi_v(\|\mathbf{v}\|), \\
&\leq (2 + \mu)(\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|)), \\
&\leq \delta(1 + \mu)(\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|)).
\end{aligned} \tag{29}$$

This equation implies the fact that the estimation error $x_{k+j} - \hat{x}_{k+j|k+j} \in \mathcal{X}(w, v) \quad \forall j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

In the other case, when the estimation error is outside of $\mathcal{X}(w, v)$, equations (25) and (27) are recalled again and the following inequalities hold

$$\begin{aligned}
|x_{k+N} - \hat{x}_{k+N|k+N}| &\leq \frac{|x_k - \bar{x}_k|}{\delta} \left(\frac{\mathcal{N}}{N}\right)^\eta + \phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \\
&\quad \phi_v(\|\mathbf{v}\|), \\
&\leq \frac{|x_k - \bar{x}_k|}{\delta} \left(\frac{\mathcal{N}}{N}\right)^\eta + \frac{|x_k - \bar{x}_k|}{\delta(1 + \mu)} \left(\frac{\mathcal{N}}{N}\right)^\eta, \\
&\leq |x_k - \bar{x}_k| \left(\frac{\mathcal{N}}{N}\right)^\eta \left(\frac{2 + \mu}{\delta(1 + \mu)}\right).
\end{aligned} \tag{30}$$

Since $\delta > \frac{2+\mu}{1+\mu}$, then $\forall N \geq \mathcal{N}$ we have

$$\theta := \left(\frac{\mathcal{N}}{N}\right)^\eta \left(\frac{2 + \mu}{\delta(1 + \mu)}\right) < 1. \tag{31}$$

Equations (30) and (31) reveal a contractive behaviour of the estimation error with θ as contraction factor. For some finite time k^* the estimation error will decrease until $x_{k^*+j} - \hat{x}_{k^*+j|k^*+j} \in \mathcal{X}(w, v)$.

In an equivalent formulation, equations (29) and (30) put in evidence the existence of a positive invariant set and a Lyapunov like function for the proposed estimator. From equation (30), one can see that for the case that the estimation error belong to the set $\mathcal{X}(w, v)^C \cap \mathcal{X}$, the estimation error decreases in a factor of θ every \mathcal{N} sampling time. Taking in account the general case in which $|x_k - \hat{x}_{k|k}| \in \mathcal{X}$ for $k \in \mathbb{Z}_{\geq \mathcal{N}}$, following the same procedure as in [23], we could define $i := \lfloor \frac{k}{N} \rfloor$ (where $\lfloor \cdot \rfloor$ denotes the floor function) and $j := k \bmod N$, therefore $k = iN + j$. Combining equations (29) and (30) and

the fact that $|x_j - \hat{x}_j| \leq \delta r_{\max}$ for $j \in \mathbb{Z}_{[0, N-1]}$ one can obtain

$$\begin{aligned}
|x_k - \hat{x}_{k|k}| &\leq \max\{|x_j - \bar{x}_j|\theta^i, \delta(1+\mu)(\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|))\}, \\
&\leq \max\{\theta^i(\bar{\beta}(|x_0 - \bar{x}_0|, j) + \phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|)), \delta(1+\mu)(\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|))\}, \\
&\leq \theta^i \bar{\beta}(|x_0 - \bar{x}_0|, j) + \delta(1+\mu)(\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|)), \\
&\leq \bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k) + \delta(1+\mu)(\phi_w(\|\mathbf{w}\|) + \phi_v(\|\mathbf{v}\|)).
\end{aligned} \tag{32}$$

where

$$\bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k) := \theta^i \bar{\beta}(|x_0 - \bar{x}_0|, j) \quad j \in [0, N-1].$$

Since $\bar{\beta}(r, s) \in \mathcal{KL}$, function $\bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k)$ could increase in the steps $\mathbb{Z}_{[iN-1, iN]}$ for $i \geq 1$ (recall definition in Equation (22)). Therefore, define $\bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k)$ which is an upper bound for $\bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k)$. Taking in account that noises at time $\geq k$ do not affect the estimation at time k , equation (32) can be rewritten as

$$|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq \bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k) + \delta(1+\mu)(\phi_w(\|\mathbf{w}\|)_{[0, k-1]} + \phi_v(\|\mathbf{v}\|)_{[0, k-1]}). \tag{33}$$

This equation is just equation (14) with

$$\bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k) = \bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k), \tag{34}$$

$$\pi_w(\|\mathbf{w}\|_{[0, k-1]}) = \delta(1+\mu)\phi_w(\|\mathbf{w}\|_{[0, k-1]}), \tag{35}$$

$$\pi_v(\|\mathbf{v}\|_{[0, k-1]}) = \delta(1+\mu)\phi_v(\|\mathbf{v}\|_{[0, k-1]}), \tag{36}$$

therefore the estimator proposed in equations (3) is RGAS.

Finally, in order to prove that the estimation error $|x_k - \hat{x}_{k|k}| \rightarrow 0$ when $|w_k| \in \mathcal{C}_w, |v_k| \in \mathcal{C}_v$, we must note that equation (25) holds for $\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k-1]}$ instead of $\|\mathbf{w}\|$ and $\|\mathbf{v}\|_{[k-N, k-1]}$ instead $\|\mathbf{v}\|$ (it can be done omitting last step in equation (15)). From a qualitative point of view, taking in account that function $\bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k) \in \mathcal{KL}$ and sequences \mathbf{w} and \mathbf{v} are convergent, the right hand side of equation (33) tends to zero as $k \rightarrow \infty$. \square

The proof of Theorem 1 is constructive and provides an estimate of the estimation horizon N required to guarantee RGAS of the MHE proposed in this work. The estimates \mathcal{N} and functions $\bar{\Phi}, \pi_w$ and π_v can be quite conservative, since their derivation involved conservative estimates of noises, errors, stage costs and arrival cost.

Note that the minimum horizon necessary to guarantee RGAS \mathcal{N} depends on r_{max} , which depends on the class of disturbances considered (upper bounds of noises and error), the initial value of the prior weighting matrix P_0 and the bounds of the stage cost. The minimum horizon length is independent of $\|\mathbf{w}\|$, $\|\mathbf{v}\|$, and the same \mathcal{N} ensures RGAS for all bounded disturbances and bounded prior error, like the result obtained by [23]). This implies that we can prove the RGAS property for full information estimator with least-square objective function.

Remark 1 *Functions ϕ_w and ϕ_v in equations (23) and (24), and hence π_w and π_v in equations (35) and (36), do not depend on the estimation horizon N which means that the moving horizon estimator with adaptive arrival cost is RGAS with uniform gains given by (23) and (24).*

4 Examples

The following examples will be used to illustrate the results presented in the previous sections and compare the performance of the estimators. The examples considered in this work are taken from [23] for a direct comparison of the results.

4.1 Example 1

The first example considers the system

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0.8x_0(t) + 0.2x_1(t) + 0.5w(t) \\ -0.3x_0(t) + 0.5 \cos(x_1(t)) \end{bmatrix} \\ y(t) &= x_1(t) + v(t) \end{aligned} \tag{37}$$

The stage cost is chosen as $\ell(w, v) = 10w^2 + 10v^2$ and the horizon length is $N = 10$. The prior weighting is chosen as $\Gamma(\chi) = 0.1(\chi - \hat{x}(t|t))^T(\chi - \hat{x}(t|t))$ for the MAX estimator ([23]) and $\Gamma_t(\chi) = (\chi - \hat{x}(t|t))^T \Pi_k^{-1}(\chi - \hat{x}(t|t))$ for the ADAP estimator (our method), where $\Pi_0 = 10I_2$ and Π_k is obtained using equations (5) with $\sigma = 0.2$ and $c = 1e6$. The MAX estimator uses $\delta = 1$, $\delta_1 = \kappa^N$ with $\kappa = 0.89^2$ and $\delta_2 = 1/N$ (see equation (3) of [23]). The full information estimator (FIE MAX, see [22]) is configured with the same parameter used by [23], maintaining the stage cost and prior weighting Γ_0 , and $\delta = 1$, $\delta_1 = \kappa^t$ and $\delta_2 = 1/t$.

Table 1 shows the mean square estimation error of each estimator averaged over 300 trials. It can be seen that the proposed estimator average mean

Table 1
 Example 1 averaged MSE over 300 trials.

| | FIE MAX | ADAP | MAX | EKF |
|-------|---------|---------|---------|---------|
| x_0 | 0.02040 | 0.02176 | 0.02206 | 0.02296 |
| x_1 | 0.00135 | 0.00151 | 0.00156 | 0.00154 |

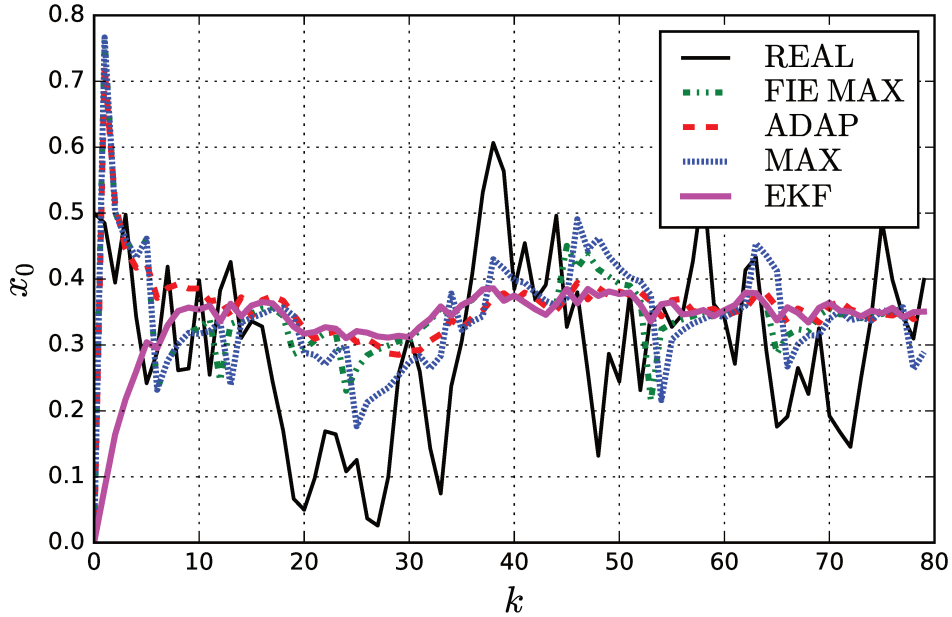


Fig. 1. Comparison between ADAP (red dash dotted), MAX (blue dashed), FIEMAX (green dotted), EKF (magenta) estimators, and real system state (black solid).

square estimation error is smaller than MAX ones and closer to FIE MAX. The main performance difference between ADAP and FIEMAX estimators is the inclusion of the *max* term in the last one, which allows to follow the sudden changes (see Figures 1 and 2).

Figures 1 and 2 shows simulation results with initial condition $x_0 = [0.5, 0]^T$ and prior estimate $\bar{x}_0 = [0, 0]^T$. The process and measurement disturbances w and v are sampled from an uniform distribution over the intervals $[-0.3, 0.3]$ and $[-0.2, 0.2]$, respectively. This figure shows that the estimators that use the *max* term are able of following the sudden changes, however in the remaining of the signal the MAX estimator is moving away of the FIEMAX while ADAP remains closer.

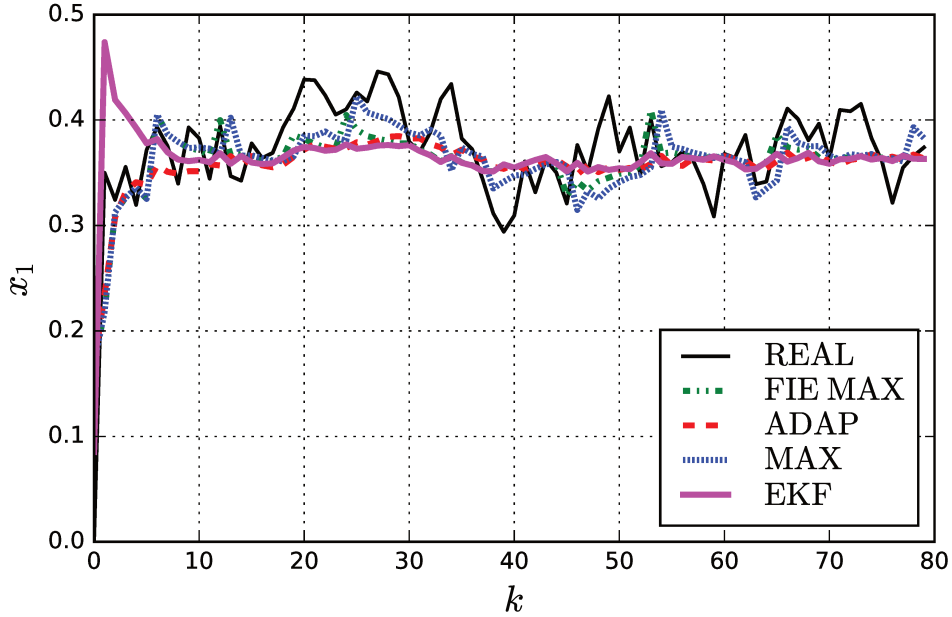


Fig. 2. Comparison between ADAP (red dash dotted), MAX (blue dashed), FIEMAX (green dotted), EKF (magenta) estimators, and real system state (black solid).

4.1.1 MHE in the presence of variable measurement noise

Now the MHE estimator is evaluated in the presence of time-varying measurement noise. The variance of the measurement noise is changed from 0.2 to 1.0 between times 20 and 40, then it returns to 0.2.

Table 2

Example 1 aver. MSE over 300 trials with variable measurement noise.

| | ADAP | MAX | FIE MAX |
|-------|---------|---------|---------|
| x_0 | 0.02068 | 0.03067 | 0.00761 |
| x_1 | 0.00290 | 0.00335 | 0.00068 |

Table 2 shows the average mean square error in the presence of variable measurement noise. In this case we can see that the behaviour of the proposed estimator is marginally affected by the variations of the measurement, while the mean square error of x_0 of other estimators increase significantly. These behaviours are due to the adaptation capabilities of the prior weighting updating mechanism, which is able of tracking the changes of noises, in the case of ADAP estimator, and the effect of the *max* term in MAX and FIEMAX estimators.

Figure 3 shows the evolution of the trace of P_{k-N}^{-1} used in the prior weight of ADAP estimator in both examples. It can be seen that the trace of both

matrices grow in similar way, however when the measurement noise changes its variance from 0.2 to 1.0 the trace of P_{k-N}^{-1} increases its value (from 12.5 to 22.5) and them both traces have the same behaviour.

4.2 Example 2

As a second example, we consider a second order gas-phase irreversible reaction of the form $2A \rightarrow B$. This example has been considered in the context of moving horizon estimation in [29], [22] and [23]. Assuming an isothermal reaction and that the ideal gas law holds, the system dynamics

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -2kx_0^2 \\ kx_0^2 \end{bmatrix} \\ h(x) &= x_0 + x_1 \end{aligned} \quad (38)$$

where $x = [x_0, x_1]$, x_0 is the partial pressure of the reactant A , x_1 is the partial pressure of the product B , and $k = 0.16$ is the reaction rate constant. The measured output of the system is the total pressure. The system is affected with additive process and measurement noise w and v drawn

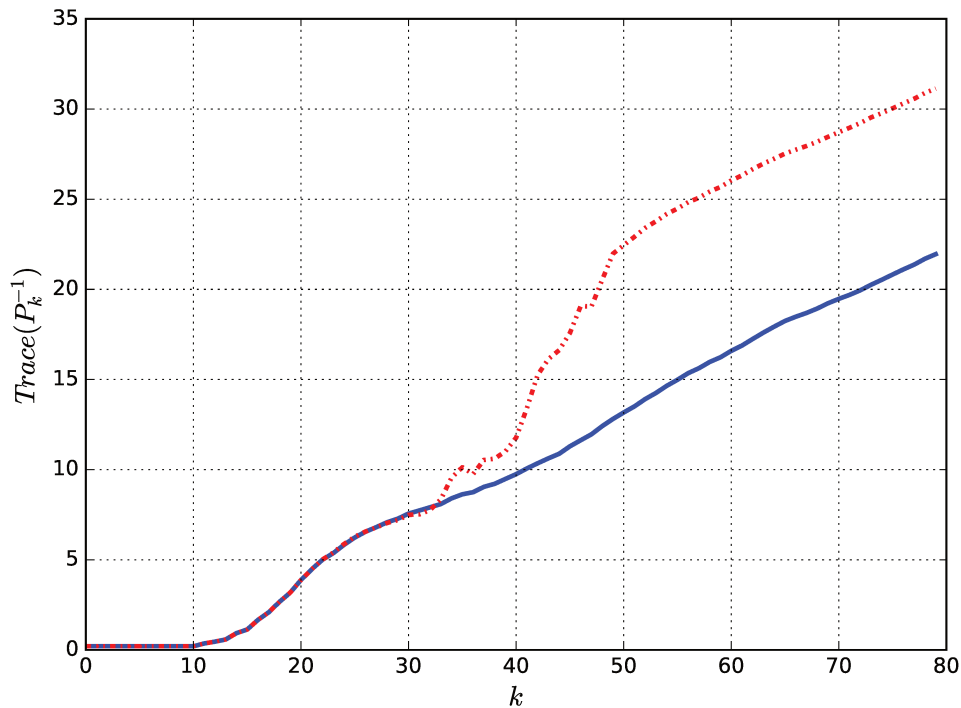


Fig. 3. Comparison of the evolution of $trace(P_{k-N}^{-1})$ used by ADAP estimator for time-varying (red dash dotted) and constant (blue dashed) measurement noise parameters.

from normal distributions with zero mean and covariance $Q_w = 0.001^2 I_2$ and $R_v = 0.1^2$, respectively. The stage cost and prior weighting are chosen as $\ell(w, v) = w^T Q_w^{-1} w + R_v^{-1} v^2$ and $\Gamma_t(\chi) = (\chi - \hat{x}(t|t))^T \Pi_k^{-1} (\chi - \hat{x}(t|t))$ with $\Pi_0 = (1/36)I_2$, where Π_k is determined by an extended Kalman filtering recursion in the case of the MAX estimator and the adaptive method in the case of the ADAP estimator with $\sigma = 0.1$ and $c = 1e6$. For the MAX estimator we use $\delta_1 = 1/N$, $\delta_2 = 1$ and $\delta = 0$. In the case of the ADAP estimator, the stage cost weight matrices are chosen as $Q_w = 0.001I_2$ and $R_v = 0.1$. We use a multiple shooting strategy with a sampling time of $\Delta = 0.1$ and we add the restrictions $x_0 \geq 0$ and $x_1 \geq 0$.

Table 3

Example 2 averaged MSE over 300 trials and different horizon size.

| | N=2 | | N=5 | | N=10 | | FIE |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | ADAP | MAX | ADAP | MAX | ADAP | MAX | |
| x_0 | 0.18808 | 0.58652 | 0.03367 | 0.04615 | 0.00171 | 0.00772 | 0.00024 |
| x_1 | 0.23037 | 0.66768 | 0.04074 | 0.05077 | 0.00285 | 0.00951 | 0.00120 |

Table 3 shows the values of the mean squared error computed from the time 10 (in order to neglect the initial transient error) up to the simulation end time and averaged over 300 trials for horizon sizes of $N = 5$ and $N = 10$.

Figures 4 and ?? show simulation results with $x_0 = [3, 1]^T$ and $\bar{x}_0 = [0.1, 4.5]^T$ and horizons of sizes $N = 2, 5$ and 10 , along with results for a full information estimator using the same parameters: the same stage cost $\ell(\cdot)$, prior weighting Γ_0 , $\delta = 0$, $\delta_1 = 1/t$ and $\delta_2 = 1$. These figures show that the behaviour of ADAP estimator hardly change with horizon length (only the startup behaviours show differences) and no offset in the estimates, while the behaviour of the MAX estimator changes significantly. In addition to the cycling effect caused by the use of the filtered estimate to update \bar{x}_{k-N} [24], the MAX estimator also exhibits offset in the estimate that depends on the estimation horizon length.

5 Conclusions

In this paper we established robust global asymptotic stability for moving horizon estimator with a least-square type cost function for nonlinear detectable (i-IOSS) systems in presence of bounded disturbances. It was also shown that the estimation error converges to zero in case that disturbances converge to zero. This was done for an estimator which uses a least-square type cost function whose arrival cost is updated using adaptive estimation methods. An advantage of this updating mechanism is that the required conditions on prior weighting are such that it can be chosen off-line. Furthermore, it introduces a

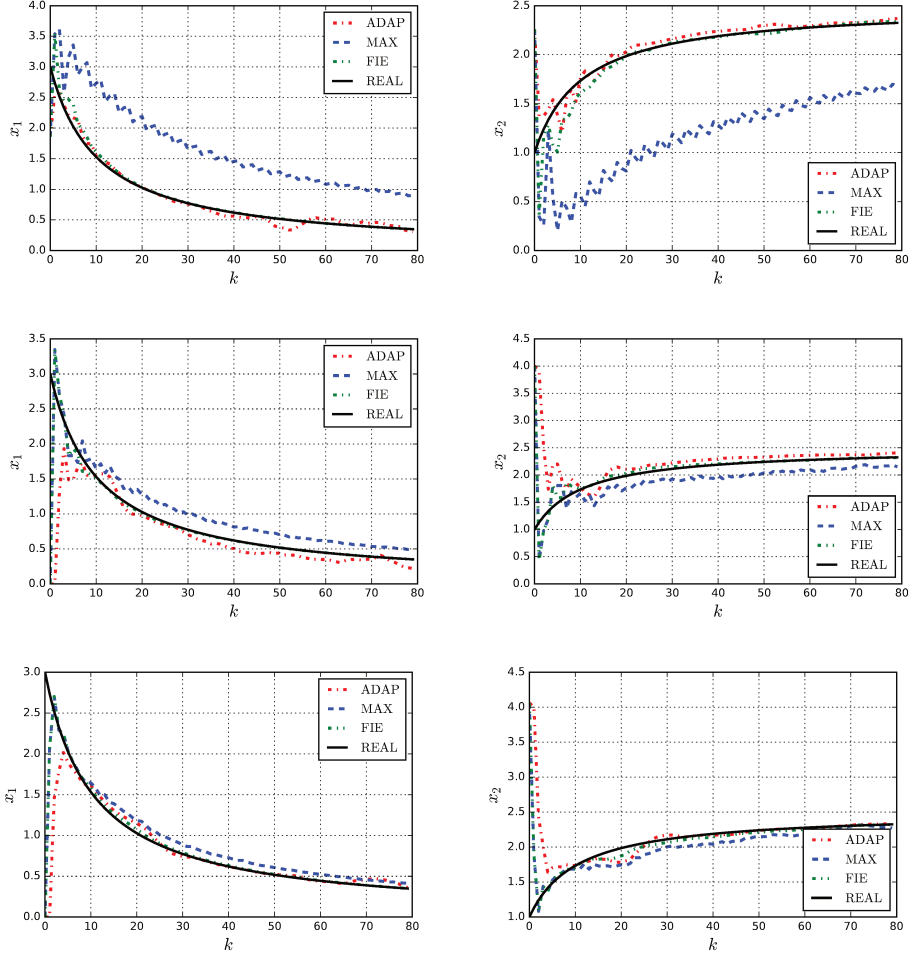


Fig. 4. Comparison between ADAP (red dash dotted), MAX (blue dashed), FIEMAX (green dotted) estimators and real system state (black solid) for different horizon length ($N = 2, 5$ and 10).

feedback mechanism between the arrival cost weight and the estimation errors that automatically controls the amount of information used to compute it, which allows to shorten the estimation horizon.

The standard least-square type cost function is typically used in practical applications and RGAS has been proved in [23]. However, for this formulation, the disturbances gains depend on the estimation horizon. Hence, this result does not allow to establish robust global asymptotic stability for a full information estimator. We showed that changing the updating mechanism of arrival cost weight the disturbances gains becomes uniform, allowing to extend the stability analysis to full information estimators with least-square type cost functions.

Acknowledgment

The authors wish to thank the Consejo Nacional de Investigaciones Cientificas y Tecnicas (CONICET) from Argentina, for their support.

References

- [1] Andrew H Jazwinski. *Stochastic processes and filtering theory*. Courier Corporation, 2007.
- [2] John L Crassidis and John L Junkins. *Optimal estimation of dynamic systems*. Chapman and Hall/CRC, 2004.
- [3] Huaizhong Li and Minyue Fu. A linear matrix inequality approach to robust h/sub/spl infin//filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(9):2338–2350, 1997.
- [4] Ali H Sayed. A framework for state-space estimation with uncertain models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(7):998–1013, 2001.
- [5] Franco Blanchini and Stefano Miani. Set-theoretic methods in control systems & control: Foundations & applications. *Birkhäuser. Boston, MA*, 2008.
- [6] Laurent El Ghaoui and Hervé Lebret. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *SIAM Journal on matrix analysis and applications*, 18(4):1035–1064, 1997.
- [7] K Hu and J Yuan. Improved robust h inf. filtering for uncertain discrete-time switched systems. *IET Control Theory & Applications*, 3(3):315–324, 2009.
- [8] Xing Zhu, Yeng Chai Soh, and Lihua Xie. Design and analysis of discrete-time robust kalman filters. *Automatica*, 38(6):1069–1077, 2002.
- [9] A Jazwinski. Limited memory optimal filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13(5):558–563, 1968.
- [10] Fred C Schweppe. *Uncertain dynamic systems*. Prentice Hall, 1973.
- [11] Christopher V Rao, James B Rawlings, and Jay H Lee. Constrained linear state estimationa moving horizon approach. *Automatica*, 37(10):1619–1628, 2001.
- [12] Christopher V Rao, James B Rawlings, and David Q Mayne. Constrained state estimation for nonlinear discrete-time systems: Stability and moving horizon approximations. *IEEE transactions on automatic control*, 48(2):246–258, 2003.
- [13] Angelo Alessandri, Marco Baglietto, and Giorgio Battistelli. Robust receding-horizon state estimation for uncertain discrete-time linear systems. *Systems & Control Letters*, 54(7):627–643, 2005.
- [14] Angelo Alessandri, Marco Baglietto, and Giorgio Battistelli. Moving-horizon state estimation for nonlinear discrete-time systems: New stability results and approximation schemes. *Automatica*, 44(7):1753–1765, 2008.
- [15] Angelo Alessandri, Marco Baglietto, and Giorgio Battistelli. Min-max moving-horizon estimation for uncertain discrete-time linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 50(3):1439–1465, 2012.
- [16] J Garcia-Tirado, H Botero, and F Angulo. A new approach to state estimation for uncertain linear systems in a moving horizon estimation setting. *International Journal of Automation and Computing*, 13(6):653–

-
- 664, 2016.
- [17] Hossein Sartipizadeh and Tyrone L Vincent. Computationally tractable robust moving horizon estimation using an approximate convex hull. In *Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on*, pages 3757–3762. IEEE, 2016.
 - [18] G Sánchez, M Murillo, and L Giovanini. Adaptive arrival cost update for improving moving horizon estimation performance. *ISA transactions*, 68:54–62, 2017.
 - [19] James B Rawlings and David Q Mayne. *Model predictive control: Theory and design*. 2009.
 - [20] James B Rawlings and Luo Ji. Optimization-based state estimation: Current status and some new results. *Journal of Process Control*, 22(8):1439–1444, 2012.
 - [21] Angelo Alessandri, Marco Baglietto, Giorgio Battistelli, and Victor Zavala. Advances in moving horizon estimation for nonlinear systems. In *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, pages 5681–5688. IEEE, 2010.
 - [22] Luo Ji, James B Rawlings, Wuhua Hu, Andrew Wynn, and Moritz Diehl. Robust stability of moving horizon estimation under bounded disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(11):3509–3514, 2016.
 - [23] Matthias A Müller. Nonlinear moving horizon estimation in the presence of bounded disturbances. *Automatica*, 79:306–314, 2017.
 - [24] Peter Klaus Findeisen. *Moving horizon state estimation of discrete time systems*. PhD thesis, University of Wisconsin–Madison, 1997.
 - [25] Eduardo D Sontag and Yuan Wang. Output-to-state stability and detectability of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 29(5):279–290, 1997.
 - [26] Eduardo D Sontag. Some connections between stabilization and factorization. In *Decision and Control, 1989., Proceedings of the 28th IEEE Conference on*, pages 990–995. IEEE, 1989.
 - [27] Z-P Jiang, Andrew R Teel, and Laurent Praly. Small-gain theorem for iss systems and applications. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 7(2):95–120, 1994.
 - [28] Eduardo D Sontag. Input to state stability: Basic concepts and results. In *Nonlinear and optimal control theory*, pages 163–220. Springer, 2008.
 - [29] Eric L Haseltine and James B Rawlings. Critical evaluation of extended kalman filtering and moving-horizon estimation. *Industrial & engineering chemistry research*, 44(8):2451–2460, 2005.

Anexo B

Multiple model approach for
robust state estimation in
presence of model uncertainty and
bounded disturbances

Adaptive polytopic estimation for nonlinear systems under bounded disturbances using moving horizon

Nestor Deniz^a, Marina Murillo^a, Guido Sanchez^a,
Leonardo Giovanini^a

^a*Instituto de Investigacion en Senales, Sistemas e Inteligencia Computacional, sinc(i), UNL, CONICET, Ciudad Universitaria UNL, 4to piso FICH, (S3000) Santa Fe, Argentina*

Abstract

This paper introduces an adaptive polytopic estimator design for nonlinear systems under bounded disturbances combining moving horizon and dual estimation techniques. It extends the moving horizon estimation results for *LTI* systems to polytopic *LPV* systems. The design and necessary conditions to guarantee the robust stability and convergence to the true state and parameters for the case of bounded disturbances and convergence to the true system and state are given for the vanishing disturbances.

Key words: Adaptive polytopic observer, Moving horizon estimation, quasi-LPV systems, Nonlinear systems.

1 Introduction

Accurate information of states, parameters and disturbances is essential for effective real-time operation of any system. Many of its relevant variables are often not measurable or too expensive to measure on line. A cost effective approach is to employ estimation techniques to obtain the required information from measurements of other variables and a mathematical model of the system. Linear and nonlinear estimation have been an active researcher field

Email addresses: ndeniz@sinc.unl.edu.ar (Nestor Deniz),
mmurillo@sinc.unl.edu.ar (Marina Murillo), ggsanchez@sinc.unl.edu.ar
(Guido Sanchez), lgiovanini@sinc.unl.edu.ar (Leonardo Giovanini).

during the past several decades (Patwardhan et al. 2012). Linear estimation methods use a simpler representation of the system and can provide acceptable performance only around an operating point and the steady state operational conditions. However, as nonlinearities in the system dynamics become dominant, the performance of linear approaches deteriorates and the estimation algorithms will not necessarily converge to an accurate solutions. Although optimal state estimation solutions for linear systems exists, nonlinear estimation algorithms suffer from generating near-optimal solutions. Consequently, research of nonlinear estimation and filtering problems remains a challenging research area.

Countless studies have been conducted in the literature to address and analyse nonlinear estimation problems. These methods can be broadly categorized into (Patwardhan et al. 2012): i) linearization methods (Kushner 1977); ii) approximation methods (Beneš 1981); iii) Bayesian recursive methods (Doucet et al. 2001); iv) moment methods (Crisan et al. 1998); and v) higher dimensional nonlinear filter methods (Arasaratnam & Haykin 2009). However, there exist some approaches that approximate the nonlinear behaviour of systems with a linear parameter-varying (LPV) models (Shamma & Athans 1991, Shamma & Cloutier 1993).

LPV systems are linear systems with matrices depending on time-varying parameters that can evolve over wide operating ranges (Apkarian et al. 1995). These parameters, called *scheduling variables*, depend on exogenous signals that can be measured. When the bounds of these signals are known, the LPV model can be reformulated into a convex linear combination of linear time-invariant (Leith & Leithead 2000). If the scheduling variables are functions of endogenous signals such as states, inputs or outputs of the system instead of exogenous signals, *LPV* system describes a large class of nonlinear systems (Tóth et al. 2011). The most common technique to obtain an LPV system is the polytopic approach, where the system depends affinely on a time-varying parameter vector that evolves within a polytopic set. In practical situations they could be inaccessible by the fact that scheduling variables are functions of the system states (Theilliol & Aberkane 2011).

In the polytopic LPV observer design, trust full knowledge of the scheduling variables is of paramount importance, because this information is needed to design the observer. Many researchers have proposed solutions to this problem in the polytopic framework. LPV observers with unmeasured scheduling parameters can be designed using proportional observer (Ichalal et al. 2016), proportional-integral observer (Aouaouda et al. 2013), generalized dynamic observer (Gao et al. 2016, Osorio-Gordillo et al. 2016) and adaptive observer (Bezzaoucha et al. 2013, 2018) framework, respectively.

The main contribution of this paper is the design and analysis of a robust

estimator for nonlinear systems under bounded disturbances combining quasi-*LPV* models and dual estimation using a receding horizon framework. The proposed algorithm simultaneously estimates the mixing parameters and the states using a dual estimation approach within a multiple iteration scheme that improve the performance of the estimation at each sample. The conditions to guarantee the robust stability and a convergence to the true system and states for the case of vanishing disturbances are derived. To achieve these results is crucial that the prior weighting in the cost function and the length of the estimation horizon are properly chosen. The assumption on the prior weighting can be verified a priori design. The paper is organized as follows: Section 2 introduces the notation, definitions and properties that will be used through the paper. Section 3 presents the main results and shows its connections with previous results. The stability and convergence to the true state in the dual iteration is discussed in the initial part of section. Then, the robust regional stability and convergence to the true state and parameters of the estimator are analysed. In section 4 two simple examples are discussed to illustrate the concepts and to show the difference with the estate of the art. Finally, Section 5 presents conclusions.

2 Preliminaries and setup

2.1 Notation

Let $\mathbb{Z}_{[a,b]}$ denotes the set of integers in the interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, and $\mathbb{Z}_{\geq a}$ denotes the set of integers greater or equal to a . Boldface symbols denote sequences of finite or infinite length, i.e., $\mathbf{w} := \{w_{k_1}, \dots, w_{k_2}\}$ for some $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $k_1 < k_2$, respectively. We denote $x_{j|k}$ as the element of the sequence \mathbf{x} given at time $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $j \in [k_1, k_2]$. By $|x|$ we denote the Euclidean norm of a vector $x \in \mathbb{R}^n$. Let $\|\mathbf{x}\| := \sup_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} |x_k|$ denote the supreme norm of the sequence \mathbf{x} and $\|\mathbf{x}\|_{[a,b]} := \sup_{k \in \mathbb{Z}_{[a,b]}} |x_k|$. A function $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ is of class \mathcal{K} if γ is continuous, strictly increasing and $\gamma(0) = 0$. If γ is also unbounded, it is of class \mathcal{K}_∞ . A function $\zeta : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ is of class \mathcal{L} if $\zeta(k)$ is non increasing and $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta(k) = 0$. A function $\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ is of class \mathcal{KL} if $\beta(\cdot, k)$ is of class \mathcal{K} for each fixed $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, and $\beta(r, \cdot)$ of class \mathcal{L} for each fixed $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

The following inequalities hold for all $\beta \in \mathcal{KL}$, $\gamma \in \mathcal{K}$ and $a_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ with $j \in \mathbb{Z}_{[1,n]}$

$$\gamma\left(\sum_{j=1}^n a_i\right) \leq \sum_{j=1}^n \gamma(n a_i), \quad \beta\left(\sum_{j=1}^n a_i, k\right) \leq \sum_{j=1}^n \beta(n a_i, k). \quad (1)$$

The preceding inequalities hold since $\max\{a_j\}$ is included in the sequence $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ and \mathcal{K} functions are non-negative strictly increasing functions.

Bounded sequences: A sequence \mathbf{w} is bounded if $\|\mathbf{w}\|$ is finite. The set of bounded sequences \mathbf{w} is denoted as $\mathcal{W}(w_{\max}) := \{\mathbf{w} : \mathbf{w} \leq w_{\max}\}$ for some $w_{\max} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Convergent sequences: A bounded infinite sequence \mathbf{w} is convergent if $|w_k| \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$. Let us denote the set of convergent sequences

$$\mathcal{C}_w := \{\mathbf{w} \in \mathcal{W}(w_{\max}) \mid \mathbf{w} \text{ is convergent}\}.$$

Analogously, the sequence \mathbf{v} and \mathcal{C}_v can be defined in similar way.

2.2 Problem statement

Let us consider a nonlinear discrete-time system with the following behaviour

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, w_k, \mathbf{d}) & x_0 &= \mathbf{x}_0, \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ y_k &= h(x_k) + v_k \end{aligned} \quad (2)$$

where $x_k \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ is the system state, $w_k \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{n_w}$ is the additive process disturbance, $y_k \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{n_y}$ is the system measurements and $v_k \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n_v}$ is the measurement noise. The sets $\mathcal{X}, \mathcal{W}, \mathcal{Y}$ and \mathcal{V} are known compact and convex with the null vector $\mathbf{0}$ in their interior. In the following we assume that $f : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ is at least C^1 and locally Lipschitz on x_k and $h : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ is continuous. Finally, the solution of system (2) at time k is denoted by $x(k, x_0, \mathbf{w}, \mathbf{d})$, with initial condition \mathbf{x}_0 and disturbance sequence \mathbf{w} . Furthermore, the initial conditions x_0 and α_0 are unknown, but priors knowledge \bar{x}_0 and $\bar{\alpha}_0$ are assumed to be available and their errors are assumed to be bounded, i.e., $\bar{x}_0 \in \mathcal{X}_0 := \{\bar{x}_0 : |x_0 - \bar{x}_0| \leq e_{x_{\max}}\}$ such that $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{X}$ and $\bar{\alpha}_0 \in \mathcal{A}_0 := \{\bar{\alpha}_0 : |\alpha_0 - \bar{\alpha}_0| \leq e_{\alpha_{\max}}\}$ such that $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, respectively.

The solution of the estimation problem aims to find at time k an estimate $\hat{x}_{k|k}$ of the current state x_k using a moving horizon estimator (*MHE*). At each sampling time k the only information available are the previous N measurements $\mathbf{y} := \{y_{k-N}, \dots, y_k\}$ and a matrix $G(x_k, w_k) \in \Omega(\mathcal{A})$, where \mathcal{A} denotes a polytopic set of matrices such that

$$A_k = \sum_{i=1}^q \alpha_{i,k} A_i, \quad \sum_{i=1}^q \alpha_{i,k} C_i \quad (3)$$

with \mathcal{A} the unit simplex

$$\mathcal{A} := \left\{ \sum_{i=1}^q \alpha_{i,k} = 1, \alpha_{i,k} \geq 0 \right\} \quad (4)$$

Then, any property ensured for the uncertain *LPV* model

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \sum_{i=1}^q \alpha_{i,k} A_i x_k + w_k + d_k, \\ y_k &= \sum_{i=1}^q \alpha_{i,k} C_i x_k + v_k, \end{aligned} \quad (5)$$

holds true also for the nonlinear system (2) (Angelis 2003). Therefore, in this work we propose a moving horizon estimation algorithm to simultaneously estimate the state of the system $\hat{x}_{k|k}$ and the mixing parameter of the *LPV* model $\hat{\alpha}_{k|k}$. The optimization problem to be solved at each sampling time is the following

$$\begin{aligned} \min_{\hat{x}_{k-N|k}, \hat{w}, \hat{d}, \hat{\alpha}_k, \hat{w}_\alpha} \quad & \Psi_{x,\alpha} := \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}) + \sum_{j=k-N}^k \ell(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}, \hat{w}_{\alpha_{j|k}}, \hat{d}_{j|k}) \\ & + \Lambda_k(\hat{\alpha}_{k-N|k}) \\ \text{s.t.} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \hat{\alpha}_{j+1|k} = \hat{\alpha}_{j|k} + \hat{w}_{\alpha_{j|k}} \quad j \in \mathbb{Z}_{[k-N, k-1]}, \\ \hat{x}_{j+1|k} = \sum_{i=1}^q \hat{\alpha}_{i,k|k} A_i \hat{x}_{j|k} + \hat{w}_{j|k} + \hat{d}_{j|k}, \\ y_j = \sum_{i=1}^q \hat{\alpha}_{i,k|k} C_i \hat{x}_{j|k} + \hat{v}_{j|k} \quad j \in \mathbb{Z}_{[k-N, k]}, \\ \sum_{i=1}^q \hat{\alpha}_{i,k|k} = 1, \\ \hat{\alpha}_{i,k|k} \geq 0 \quad i \in \mathbb{Z}_{[1, q]}, \\ \hat{x}_{j|k} \in \mathcal{X}, \hat{w}_{j|k} \in \mathcal{W}, \hat{w}_\alpha \in \mathcal{W}_\alpha, \hat{v}_{j|k} \in \mathcal{V}, \hat{d}_{j|k} \in \mathcal{D}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (6)$$

where $\hat{x}_{j|k}$ is the optimal estimated, $\hat{w}_{j|k}$ is the optimal process noise estimate and $\hat{\alpha}_{j|k}$ is the optimal mixing parameter and $\hat{w}_{\alpha_{j|k}}$ the noise associated to it at sample $k-j$ $j = 0, 1, \dots, N$ based on measurements y_{k-j} available at time k . The process noise $\hat{w} := \{\hat{w}_{k-N-1|k}, \dots, \hat{w}_{k-1|k}\}$, the mixing parameters $\alpha := [\alpha_{1,k|k}, \dots, \alpha_{q,k|k}]^T$, $\hat{w}_\alpha := \{\hat{w}_{\alpha_{1,k|k}}, \dots, \hat{w}_{\alpha_{q,k|k}}\}$ and $\hat{x}_{k-N|k}$ are the optimization variables. The stage cost $\ell(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}, \hat{w}_{\alpha_{j|k}}, \hat{d}_{j|k})$ penalizes the estimated process noise sequence $\hat{w}_{j|k}$ and the estimation residuals $\hat{v}_{j|k} = y_j - h(\hat{x}_{j|k})$, while $\Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k})$ and $\Lambda(\hat{\alpha}_{k-N|k})$ are the prior weights that penalizes the prior estimates $\hat{x}_{k-N|k}$ and $\hat{\alpha}_{k-N|k}$.

The robust stability of estimator (6) can be achieved by combining a suitable

choice of the stage cost $\ell(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}, \hat{d}_{j|k})$ and the time-varying prior weights

$$\begin{aligned}\Gamma_{k-N|k}(\hat{x}_{k-N|k}) &= |\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}|_{P_{x,k-N|k}^{-1}}, \\ \Lambda_{k-N|k}(\hat{w}_{\alpha,k-N|k}) &= |\hat{\alpha}_{k-N|k} - \bar{\alpha}_{k-N}|_{P_{\alpha,k-N|k}^{-1}},\end{aligned}\tag{7}$$

whose parameters $(P_{x,k-N|k}^{-1}, \bar{x}_{k-N}, P_{\alpha,k-N|k}^{-1}, \bar{\alpha}_{k-N})$ are recursively updated using the information available at time k . In this approach, the prior weight matrix $P_{*,k-N|k}$ are given by (Sánchez et al. 2017)

$$\begin{aligned}\epsilon_{k-N} &= y_{k-N} - \hat{y}_{k-N|k}, \\ N_{*,k} &= \left[1 + \hat{*}_{k-N|k-1}^T P_{*,k-N-1} \hat{*}_{*,k-N|k-1}\right] \frac{\sigma}{|\epsilon_{k-N}|_2^2}, \\ \theta_{*,k} &= 1 - \frac{1}{N_{*,k}}, \\ W_{*,k} &= \left[I - \frac{P_{*,k-N-1} \hat{*}_{k-N|k-1} \hat{*}_{k-N|k-1}^T}{1 + \hat{*}_{k-N|k-1}^T P_{*,k-N-1} \hat{*}_{k-N|k-1}} \right] P_{*,k-N-1}, \\ P_{*,k-N} &= \begin{cases} \frac{1}{\theta_{*,k}} W_{*,k} & \text{if } \frac{1}{\theta_{*,k}} \text{Tr}(W_{*,k}) \leq c, \\ W_{*,k} & \text{otherwise,} \end{cases}\end{aligned}\tag{8}$$

where $* := [x, \alpha]$, $\sigma, \sigma_w, c, \lambda \in R_{>0}$, $c > \lambda$, $P_0 = \lambda I_{n \times n}$ and $\sigma \gg \sigma_w$, where σ_w denotes the process noise variance. The prior knowledges of the window \bar{x}_{k-N} and $\bar{\alpha}_{k-N}$ are updated using a smoothed estimate

$$\begin{aligned}\bar{x}_{k-N} &= \hat{x}_{k-N|k-1}, \\ \bar{\alpha}_{k-N} &= \hat{\alpha}_{k-N|k-1}.\end{aligned}\tag{9}$$

2.3 Dual estimation formulation

The joint estimator simultaneously estimates states and mixing parameters. For systems with many parameters, augmenting the state vector can cause a significant increase to the state dimension. This may be problematic as the dimension of the state vector grows, the errors accumulate and the convexity of the optimization problem is lost. To overcome this problem, a dual estimation setup is introduced: the estimation problem (6) solves separately the state estimation problem (assuming that mixing parameters α remains constant) and the model identification problem (assuming that estimated states \hat{x}_k remains

constant) at each sampling time. The problems to be solved iteratively are

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{x}_{k-N|k}, \hat{w}_x} \Psi_x := \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}) + \sum_{j=k-N}^k \ell(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \hat{x}_{k-N|k} = \bar{x}_{k-N} + \hat{w}_{k-N|k} \\ \hat{x}_{j+1|k} = \sum_{i=1}^q \alpha_{i,k} A_i \hat{x}_{j|k} + \hat{w}_{xj|k} & j \in \mathbb{Z}_{[k-N, k-1]}, \\ y_j = \sum_{i=1}^q \alpha_{i,k} C_i \hat{x}_{j|k} + \hat{v}_{j|k} & j \in \mathbb{Z}_{[k-N, k]}, \\ \hat{x}_{j|k} \in \mathcal{X}, \hat{w}_{j|k} \in \mathcal{W}, \hat{v}_{j|k} \in \mathcal{V}. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

where the decision variables are $\hat{x}_{k-N|k}$ and $\hat{w}_{k-j|k}$ $j := 1, 2, \dots, N$ and

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha, \hat{w}_\alpha} \Psi_\alpha := \Lambda_{k-N}(\hat{\alpha}_{k-N|k}) + \sum_{j=k-N}^k \ell(\hat{d}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}, \hat{w}_{\alpha j|k}) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \alpha_{k-N|k} = \bar{\alpha}_{k-N} + \hat{w}_{\alpha_{k-N|k}} \\ \alpha_{j+1|k} = \alpha_{j|k} + \hat{w}_{\alpha j|k} & j \in \mathbb{Z}_{[k-N, k-1]} \\ x_{j+1|k} = \sum_{i=1}^q \alpha_{i,j|k} A^i x_{j|k} + \hat{d}_{j|k}, \\ y_j = \sum_{i=1}^q \alpha_{i,j|k} C^i x_{j|k} + \hat{v}_{j|k} & j \in \mathbb{Z}_{[k-N, k]}, \\ \sum_{i=1}^q \alpha_{i,j|k} = 1 \\ \alpha_{i,j|k} \geq 0 & j \in \mathbb{Z}_{[1, q]} \\ \hat{d}_{j|k} \in \mathcal{D}, \hat{w}_\alpha \in \mathcal{W}_\alpha, \hat{v}_{j|k} \in \mathcal{V}. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

where the decision variables are $\hat{w}_{\alpha, k-j|k}$ $j := 0, 1, \dots, N$ and $\hat{\alpha}_{k-N|k}$. Problems (10) and (11) are solved iteratively several times for the same sampling-time. The main novelty of the proposed algorithm is that an improvement in the state estimation and model identification can be guaranteed for a certain number of iterations when some assumptions are fulfilled. Moreover, the number of iterations can be computed offline.

The sequence $P_{k|k}$ $k \geq 0$ is positive definite, it is decreasing in norm and it is bounded. The proof of these properties follows similar steps as in Sánchez et al. (2017).

Assumption 1 *The prior weighting $\Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k})$ is a continuous function $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lower bounded by $\underline{\gamma}_p(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ and upper bounded by $\bar{\gamma}_p(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ such that*

$$\underline{\gamma}_p(|\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}|) \leq \Gamma_{k-N}(|\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}|) \leq \bar{\gamma}_p(|\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}|) \quad (12)$$

for all $\hat{x} \in \mathcal{X}$ and

$$\underline{\gamma}_p(r) \geq \underline{c}_p r^a, \quad \bar{\gamma}_p(r) \leq \bar{c}_p r^a \quad (13)$$

where $0 \leq \underline{c}_p \leq \bar{c}_p$ and $a \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Moreover, if the arrival cost is updated using equation (8), the bounds $\underline{\gamma}_p$ and $\bar{\gamma}_p$ are bounded by

$$\underline{\gamma}_p(r) \geq |P_0^{-1}| r^a, \quad \bar{\gamma}_p(r) \leq |P_\infty^{-1}| r^a \quad (14)$$

Definition 1 The system (2) is incrementally input/output-to-state stable if there exist some functions $\beta \in \mathcal{KL}$ and $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}$ such that for every two initial states $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$, and any two disturbances sequences $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ the following holds for all $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$\begin{aligned} |x(k, z_1, \mathbf{w}_1) - x(k, z_2, \mathbf{w}_2)| &\leq \max \left\{ \beta(|z_1 - z_2|, k), \gamma_1(\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_{[0, k-1]}) \right. \\ &\quad \left. \gamma_2(\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{[0, k-1]}) \right\} \\ &\leq \beta(|z_1 - z_2|, k) + \gamma_1(\|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|_{[0, k-1]}) + \\ &\quad \gamma_2(\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{[0, k-1]}) \end{aligned} \quad (15)$$

for all k (Sontag & Wang 1997).

Assumption 2 The function $\beta(r, s) \in \mathcal{KL}$ and satisfies the following inequality:

$$\beta(r, s) \leq c_\beta r^p s^{-q} \quad (16)$$

for some $c_\beta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $p \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ and $q \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ and $q \geq p$.

Assumption 3 The stage cost $\ell(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function bounded by $\underline{\gamma}_w, \underline{\gamma}_v, \bar{\gamma}_w, \bar{\gamma}_v \in \mathcal{K}_\infty$ such that the following inequalities are satisfied $\forall w \in \mathcal{W}$ and $v \in \mathcal{V}$

$$\underline{\gamma}_w(\hat{w}) + \underline{\gamma}_v(\hat{v}) \leq \ell(\hat{w}, \hat{v}) \leq \bar{\gamma}_w(\hat{w}) + \bar{\gamma}_v(\hat{v}) \quad (17)$$

Functions γ_1 and γ_2 from Definition 1 are related with the bounds of stage cost $\bar{\gamma}_w, \underline{\gamma}_w, \bar{\gamma}_v$ and $\underline{\gamma}_v$ through the following inequalities

$$\gamma_1(6\underline{\gamma}_w^{-1}(r)) \leq c_1 r^{b_1}, \quad \gamma_2(6\underline{\gamma}_v^{-1}(r)) \leq c_2 r^{b_2} \quad (18)$$

for $c_1, c_2, b_1, b_2 > 0$.

Assumption 4 The prior weighting $\Lambda_{k-N}(\hat{\alpha}_{k-N|k})$ is a continuous function $\mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ lower bounded by $\underline{\gamma}_\Lambda(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ and upper bounded by $\bar{\gamma}_\Lambda(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ such that

$$\underline{\gamma}_\Lambda(|\hat{\alpha}_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|) \leq \Lambda_{k-N}(|\hat{\alpha}_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|) \leq \bar{\gamma}_\Lambda(|\hat{\alpha}_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|) \quad (19)$$

where

$$\begin{aligned}\underline{\gamma}_\Lambda (|\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|) &\geq \underline{c}_\Lambda |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|^a \\ \bar{\gamma}_\Lambda (|\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|) &\leq \bar{c}_\Lambda |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|^a\end{aligned}\tag{20}$$

for some $\underline{c}_\Lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\bar{c}_\Lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $a \in \mathbb{R}_{> 0}$, $\bar{c}_\Lambda > \underline{c}_\Lambda$.

In this work, we claim that the proposed estimator holds the property of being robust asymptotic stable, which is defined as follows.

Definition 2 Consider the system described by Equation (11) subject to disturbances $\mathbf{w} \in \mathcal{W} (w_{\max})$ and $\mathbf{v} \in \mathcal{V} (v_{\max})$ for $w_{\max} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $v_{\max} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ with prior estimate $\bar{x}_0 \in \mathcal{X} (e_{\max})$ for $e_{\max} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. The moving horizon state estimator given by Equation (11) is robustly asymptotically stable (RAS) if there exists functions $\Phi \in \mathcal{KL}$ and $\pi_w, \pi_v \in \mathcal{K}$ such that for all $x_0 \in \mathcal{X}$, all $\bar{x}_0 \in \mathcal{X}_0 (e_{\max})$, the following is satisfied for all $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$|x_k - \hat{x}_k| \leq \Phi (|x_0 - \bar{x}_0|, k) + \pi_w (\|\mathbf{w}\|_{[0, k-1]}) + \pi_v (\|\mathbf{v}\|_{[0, k-1]})\tag{21}$$

We want to show that if system (10) is i-IOSS and Assumptions (1), (2) and (3) are fulfilled, then the proposed estimator with adaptive arrival cost is RGAS. Furthermore, if the process disturbance and measurement noise sequences are convergent (i.e., $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}$), the estimation converges to the true state.

3 Theoretical properties

Now we are ready to derive the main results: *i*) the stability of the iterated dual estimation and *ii*) the robust asymptotic stability (RAS) of the proposed estimator with an estimation horizon \mathcal{N} for nonlinear detectable systems under bounded disturbances.

3.1 Stability of the dual estimation iterations

As stated formerly, problems (10)–(11) are solved sequentially within a dual estimation iteration for each sampling time. In the following, we will state the conditions required to achieve effectively a decreasing behaviour of the costs inside the dual estimation iteration. We have now all the necessary ingredients to enunciate the first theorem,

Theorem 1 The sequences of costs $\{\Psi_x^1, \Psi_x^2, \dots, \Psi_x^l\}$ and $\{\Psi_\alpha^1, \Psi_\alpha^2, \dots, \Psi_\alpha^l\}$ generated by the dual estimation iteration are decreasing if the number of it-

erations l satisfies

$$l \geq \log_2 \left(\frac{\epsilon \Psi_x^1 - \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^l)}{\Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^m)} + 1 \right) + 1, \quad (22)$$

where $\epsilon \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ and

$$\Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^m) := \min_{i \in \mathbb{Z}_{[1,l]}} \left\{ \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^i) \right\}.$$

Proof. Let us consider the sequence of costs $\Psi_x^i(\cdot)$ and $\Psi_\alpha^i(\cdot) \forall i \in \mathbb{Z}_{>1}$ generated in the i -th iteration of the optimization problems (10) and (11). Due to the optimality of the solutions the following inequalities are satisfied

$$\begin{aligned} \Psi_x^1(\cdot) &\geq \Psi_x^2(\cdot) \geq \dots \geq \Psi_x^l(\cdot), \\ \Psi_\alpha^1(\cdot) &\geq \Psi_\alpha^2(\cdot) \geq \dots \geq \Psi_\alpha^l(\cdot). \end{aligned} \quad (23)$$

Since any iteration takes into account both $\Psi_x^i(\cdot)$ and $\Psi_\alpha^i(\cdot)$, and due to the sequences are non increasing, we only need to prove the decreasing behaviour of only one of these sequences, let's say $\Psi_x^i(\cdot)$.

Defining the normalized cost

$$g(k, i) := \frac{\Psi_x^i(\cdot)}{\Psi_x^1(\cdot)} \quad \forall k, i \geq 1, \quad (24)$$

the necessary and sufficient conditions to guarantee its decrement along the dual iteration can be obtained using the Gronwall inequality (see Ames & Pachpatte (1997), Holte (2009)). It states that given any three non-negative sequences y_n, f_n and g_n that satisfy

$$y_n \leq f_n + \sum_{k=0}^n g_k y_k \quad \forall n > 0, \quad (25)$$

they also verify

$$y_n \leq f_n + \sum_{k=0}^{n-1} f_k g_k \prod_{j=k+1}^{n-1} (1 + g_j) \quad \forall n > 0. \quad (26)$$

Taking the sequences of costs $y_i = \Psi_x^i(\cdot)$, of arrival-costs $f_i = \Gamma_{k-N}(\cdot)$ and the normalized costs $g_i = g(k, i)$ for $n = l$, which verify (25), Gronwall inequality (26) can be written as follows

$$\Psi_x^l \leq \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^l) + \sum_{i=1}^{l-1} \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^i) g(k, i) \prod_{j=i+1}^{l-1} (1 + g(k, j)). \quad (27)$$

Dividing by Ψ_x^1 we obtain

$$g(k, l) \leq \frac{\Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^l) + \sum_{i=1}^{l-1} \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^i) g(k, i) \prod_{j=i+1}^{l-1} (1 + g(k, j))}{\Psi_x^1} = \epsilon,$$

which leads to

$$\sum_{i=1}^{l-1} \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^i) g(k, i) \prod_{j=i+1}^{l-1} (1 + g(k, j)) = \epsilon \Psi_x^1 - \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^l). \quad (28)$$

Defining

$$\Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^m) := \min_{i \in \mathbb{Z}_{[1, l]}} \left\{ \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^i) \right\}$$

and recalling that $g(k, i)$ is a non-increasing sequence, $g(k, l) \leq g(k, i) \forall i \geq l$, equation (28) can be rewritten as follows

$$\Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^m) g(k, l) \sum_{i=1}^{l-1} \prod_{j=i+1}^{l-1} (1 + g(k, l)) < \epsilon \Psi_x^1 - \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^l). \quad (29)$$

Since

$$\sum_{i=1}^{l-1} \prod_{j=i+1}^{l-1} (1 + g(k, l)) = \sum_{i=0}^{l-2} (1 + g(k, l))^i = \frac{(1 + g(k, l))^{l-1} - 1}{g(k, l)}, \quad (30)$$

inequality (29) can be rewritten as follows

$$\Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^m) g(k, l) \left(\frac{(1 + g(k, l))^{l-1} - 1}{g(k, l)} \right) \stackrel{(30)}{<} \epsilon \Psi_x^1 - \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^l) \quad (31)$$

and finally $g(k, l)$ is bounded by

$$g(k, l) < \left(\frac{\epsilon \Psi_x^1 - \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^l)}{\Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^m)} + 1 \right)^{\frac{1}{l-1}} - 1 < 1. \quad (32)$$

Selecting a l large enough, we can guarantee the decrement of sequence $g(k, i)$ and cost function Ψ_x^i within the dual estimation iteration. Solving for inequality (32), an upper bound for the number of iterations is given by

$$l \geq \left\lceil \log_2 \left(\frac{\epsilon \Psi_x^1 - \Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^l)}{\Gamma_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}^m)} + 1 \right) \right\rceil + 1. \quad (33)$$

A conservative estimate of l can be computed taking into account the worst case scenario

$$l \geq \lceil \log_2 (\mathcal{E} N (\bar{\gamma}_w (\|\mathbf{w}\|) + \bar{\gamma}_v (\|\mathbf{v}\|)) + 1) \rceil + 1, \quad (34)$$

where $\mathcal{E} := \epsilon / \Gamma_{k-N} \left(\hat{x}_{k-N|k}^m \right)$.

Inequalities (33) and (34) allow to compute the required value of l to guarantee the costs decreasing within the dual estimation iteration. \square

Remark 1 *Note that for the noiseless case, only one iteration is needed after the transient due to the uncertainty in the initial condition has vanished.*

3.2 Robust stability

In the previous subsection it was shown that the sequence of cost decreases within the dual estimation iteration. At each sampling time, the model used by the estimator is replaced with the newly available until satisfied the stopping criteria. In the following paragraphs we will prove robust stability for the estimator under bounded disturbances and model uncertainty assuming that the system is i -IOSS. Moreover, if the length N of the horizon of the estimator is larger than a certain value \mathcal{N} that can be computed offline, the number of iterations l is chosen according to equations (33) and (34), the effects of uncertainty in the initial condition vanish, as well as the disturbances due to model uncertainty. Besides, in the absence of process and measurement noises, states and model converges to the true ones.

Theorem 2 *Consider an i -IOSS system (2) with disturbances $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ (w_{\max}), $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ (v_{\max}). Assume that the arrival cost weight matrix of the MHE problem Γ_{k-N} is updated using the adaptive algorithm (8). Moreover, Assumptions 1, 2 and 3 are fulfilled and initial condition x_0 and α_0 are unknown, but prior estimates $\bar{x}_0 \in \mathcal{X}_0$ and $\bar{\alpha}_0 \in \mathcal{A}_0$ are available. Then, the MHE estimator resulting from problems (10)–(11) is RAS.*

Proof. In order to proof stability for the estimator, we start comparing the costs of the first iteration and the resulting estimated state $\hat{x}_{k-N|k}$ for sampling time k

$$\begin{aligned} \Psi \left(\hat{x}_{k-N|k}, \hat{\alpha}, \left\{ \hat{\mathbf{w}}_{j|k} \right\}, \left\{ \hat{\mathbf{d}}_{j|k} \right\} \right) &= g(k, l) \Psi^1 \left(\hat{x}_{k-N|k}^1, \hat{\alpha}^1, \left\{ \hat{\mathbf{w}}_{j|k}^1 \right\}, \left\{ \hat{\mathbf{d}}_{j|k}^1 \right\} \right) \\ &\leq g(k, l) \Psi \left(x_{k-N}, \alpha, \left\{ \mathbf{w} \right\}, \left\{ \mathbf{0} \right\} \right) \end{aligned}$$

Note that if $\hat{\alpha} = \alpha$, the estimated model match with the system, therefore there is no model uncertainty, i.e. $\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{0}\}$. Replacing the sequence of estimated process noises $\{\hat{\mathbf{w}}\}$ by the true sequence $\{\mathbf{w}\}$, the only feasible solution is the true sequence of states $\{\mathbf{x}\}$, and due optimality the inequality is verified. By

mean of Assumptions 1 - 4, the cost $\Psi(\cdot)$ is bounded by

$$\begin{aligned}
& \underline{\gamma}_p \left(|\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}| \right) + \underline{\gamma}_\Lambda \left(|\hat{\alpha}_{k-N|k} - \bar{\alpha}_{k-N}| \right) + N\underline{\gamma}_w \left(|\hat{w}_{j|k}| \right) + \\
& \quad \underline{\gamma}_\alpha \left(|\hat{w}_{\alpha,j|k}| \right) + N\underline{\gamma}_v \left(|\hat{v}_{j|k}| \right) + N\underline{\gamma}_d \left(|\hat{d}_{j|k}| \right) \leq \\
& \left(\bar{\gamma}_p \left(|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}| \right) + \bar{\gamma}_\Lambda \left(|\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}| \right) + N\bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\|_{[k-N,k]} \right) + \right. \\
& \quad \left. N\bar{\gamma}_\alpha \left(\|\mathbf{w}_\alpha\|_{[k-N,k]} \right) + N\bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\|_{[k-N,k]} \right) \right) g(k, l) \leq \\
& \bar{c}_p |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^a g(k, l) + \bar{c}_\Lambda |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}| g(k, l) + N \left(\bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\| \right) + \right. \\
& \quad \left. \bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\| \right) + \bar{\gamma}_\alpha \left(\|\mathbf{w}_\alpha\| \right) \right) g(k, l).
\end{aligned} \tag{35}$$

Solving for $|\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}|$ and using relations (1), we can write

$$\begin{aligned}
|\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}| & \leq \underline{\gamma}_p^{-1} \left(\bar{c}_p |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^a g(k, l) \right) + \\
& \underline{\gamma}_p^{-1} \left(5\bar{c}_\Lambda |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}| g(k, l) \right) + \\
& \underline{\gamma}_p^{-1} \left(5N\bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\|_{[k-N,k]} \right) g(k, l) \right) + \\
& \underline{\gamma}_p^{-1} \left(5N\bar{\gamma}_\alpha \left(\|\mathbf{w}_\alpha\|_{[k-N,k]} \right) g(k, l) \right) + \\
& \underline{\gamma}_p^{-1} \left(5N\bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\|_{[k-N,k]} \right) g(k, l) \right).
\end{aligned} \tag{36}$$

Using again Assumptions 1 - 4, one can write

$$\begin{aligned}
|\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}| & \leq \left(\frac{5\bar{c}_p |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^a g(k, l)}{\underline{c}_p} \right)^{1/a} + \\
& \left(\frac{5\bar{c}_\Lambda |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|^a g(k, l)}{\underline{c}_p} \right)^{1/a} + \\
& \left(\frac{5N\bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\|_{[k-N,k]} \right) g(k, l)}{\underline{c}_p} \right)^{1/a} + \\
& \left(\frac{5N\bar{\gamma}_\alpha \left(\|\mathbf{w}_\alpha\|_{[k-N,k]} \right) g(k, l)}{\underline{c}_p} \right)^{1/a} + \\
& \left(\frac{5N\bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\|_{[k-N,k]} \right) g(k, l)}{\underline{c}_p} \right)^{1/a}
\end{aligned} \tag{37}$$

From now on, we will drop the superindex l . Using Definition 1, the estimation error at time k , given the error at initial conditions ($k = 0$), is bounded by

$$|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq \beta \left(|x_0 - \hat{x}_{0|k}|, k \right) + \gamma_1 \left(\|\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}\|_{[0,k-1]} \right) + \gamma_2 \left(\|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\|_{[0,k-1]} \right),$$

and, assuming that $k = N$, we have

$$|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq \beta \left(|x_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}|, N \right) + \gamma_1 \left(\|\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}\|_{[k-N, k-1]} \right) + \gamma_2 \left(\|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\|_{[k-N, k-1]} \right). \quad (38)$$

To found a bound for the estimation error we need to bounds for the terms of the right hand of (38). Let us start with the first term using inequalities (1) such that the effect of estimation error at the beginning of the estimation window is bounded by

$$\begin{aligned} \beta \left(|x_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}|, N \right) &= \beta \left(|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N} + \bar{x}_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}|, N \right) \\ &\leq \beta \left(|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}| + |\bar{x}_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}|, N \right) \\ &\leq \beta \left(|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}| + |\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}|, N \right) \\ &\leq \beta \left(2|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|, N \right) + \beta \left(2|\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N}|, N \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Now, the first term of (39) can be rewritten using Assumption 2, and the second term with the use of (37)

$$\begin{aligned} \beta \left(|x_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}|, N \right) &\leq \frac{c_\beta 2^p |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^p}{N^q} + \\ &\beta \left(\frac{2 \ 5^{1/a} \bar{c}_p^{1/a} |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}| g(k, l)^{1/a}}{\underline{c}_p^{1/a}} + \right. \\ &\frac{2 \ 5^{1/a} \bar{c}_\Lambda^{1/a} |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}| g(k, l)^{1/a}}{\underline{c}_p^{1/a}} + \\ &\frac{2 \ 5^{1/a} N^{1/a} \bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k-1]} \right)^{1/a} g(k, l)^{1/a}}{\underline{c}_p^{1/a}} + \\ &\frac{2 \ 5^{1/a} N^{1/a} \bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\|_{[k-N, k-1]} \right)^{1/a} g(k, l)^{1/a}}{\underline{c}_p^{1/a}} + \\ &\left. \frac{2 \ 5^{1/a} N^{1/a} \bar{\gamma}_\alpha \left(\|\mathbf{w}_\alpha\|_{[k-N, k-1]} \right)^{1/a} g(k, l)^{1/a}}{\underline{c}_p^{1/a}}, N \right) \end{aligned} \quad (40)$$

Using inequalities (1)

$$\begin{aligned}
\beta \left(|x_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}|, N \right) &\leq \frac{c_\beta 2^p |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^p}{N^q} + \\
&\beta \left(\frac{10 \cdot 5^{1/a} \bar{c}_p^{1/a} |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}| g(k, l)^{1/a}}{\underline{c}_p^{1/a}}, N \right) + \\
&\beta \left(\frac{10 \cdot 5^{1/a} \bar{c}_\Lambda^{1/a} |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}| g(k, l)^{1/a}}{\underline{c}_p^{1/a}}, N \right) + \\
&\beta \left(\frac{10 \cdot 5^{1/a} N^{1/a} \bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k-1]} \right)^{1/a} g(k, l)^{1/a}}{\underline{c}_p^{1/a}}, N \right) + \\
&\beta \left(\frac{10 \cdot 5^{1/a} N^{1/a} \bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\|_{[k-N, k-1]} \right)^{1/a} g(k, l)^{1/a}}{\underline{c}_p^{1/a}}, N \right) + \\
&\beta \left(\frac{10 \cdot 5^{1/a} N^{1/a} \bar{\gamma}_\alpha \left(\|\mathbf{w}_\alpha\|_{[k-N, k-1]} \right)^{1/a} g(k, l)^{1/a}}{\underline{c}_p^{1/a}}, N \right) +
\end{aligned} \tag{41}$$

Now, by mean of Assumption 2

$$\begin{aligned}
\beta \left(|x_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}|, N \right) &\leq \frac{c_\beta 2^p |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^p}{N^q} + \\
&\frac{c_\beta 10^p 5^{p/a} \bar{c}_p^{p/a} |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^p g(k, l)^{p/a}}{N^q \underline{c}_p^{p/a}} + \\
&\frac{c_\beta 10^p 5^{p/a} \bar{c}_\Lambda^{p/a} |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|^p g(k, l)^{p/a}}{N^q \underline{c}_p^{p/a}} + \\
&\frac{c_\beta 10^p 5^{p/a} N^{1/a} \bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k-1]} \right)^{1/a} g(k, l)^{1/a}}{N^q \underline{c}_p^{p/a}} + \\
&\frac{c_\beta 10^p 5^{p/a} N^{p/a} \bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\|_{[k-N, k-1]} \right)^{p/a} g(k, l)^{p/a}}{N^q \underline{c}_p^{p/a}} + \\
&\frac{c_\beta 10^p 5^{p/a} N^{p/a} \bar{\gamma}_\alpha \left(\|\mathbf{w}_\alpha\|_{[k-N, k-1]} \right)^{p/a} g(k, l)^{p/a}}{N^q \underline{c}_p^{p/a}}
\end{aligned} \tag{42}$$

Rearranging terms

$$\begin{aligned}
\beta \left(|x_{k-N} - \hat{x}_{k-N|k}|, N \right) &\leq \frac{|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^p}{N^q} \left(c_\beta 2^p + \frac{c_\beta 10^p 5^{p/a} \bar{c}_p^{p/a} g(k, l)^{p/a}}{\underline{c}_p^{p/a}} \right) + \\
&\frac{c_\beta 10^p 5^{p/a} \bar{c}_\Lambda^{p/a} |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|^p g(k, l)^{p/a}}{N^q \underline{c}_p^{p/a}} + \\
&\frac{c_\beta 10^p 5^{p/a} N^{1/a} \bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k-1]} \right)^{1/a} g(k, l)^{1/a}}{N^q \underline{c}_p^{p/a}} + \\
&\frac{c_\beta 10^p 5^{p/a} N^{p/a} \bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\|_{[k-N, k-1]} \right)^{p/a} g(k, l)^{p/a}}{N^q \underline{c}_p^{p/a}} + \\
&\frac{c_\beta 10^p 5^{p/a} N^{p/a} \bar{\gamma}_\alpha \left(\|\mathbf{w}_\alpha\|_{[k-N, k-1]} \right)^{p/a} g(k, l)^{p/a}}{N^q \underline{c}_p^{p/a}}
\end{aligned} \tag{43}$$

Once we have found an upper bound for the first term of (38), we will follow a similar procedure to find a bound for the second and third terms. Using (35) for the l -th iteration, we can write

$$\begin{aligned}
|\hat{w}_{j|k}| &\stackrel{(35)(1)}{\leq} \underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{5\bar{c}_p |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^a g(k, l)}{N} \right) + \underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{5\bar{c}_\Lambda |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|^a g(k, l)}{N} \right) + \\
&\underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{5g(k, l) \bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k]} \right)}{N} \right) + \underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{5g(k, l) \bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\|_{[k-N, k]} \right)}{N} \right) + \\
&\underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{5g(k, l) \bar{\gamma}_\alpha \left(\|\mathbf{w}_\alpha\|_{[k-N, k]} \right)}{N} \right)
\end{aligned} \tag{44}$$

Introducing this bound in the second term of Equation (38):

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \left(\|\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}\|_{[k-N, k]} \right) &\leq \gamma_1 \left(\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k]} + \|\hat{\mathbf{w}}\|_{[k-N, k]} \right) \\
&\leq \gamma_1 \left(\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k]} + \underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{5\bar{c}_p |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^a g(k, l)}{N} \right) \right) + \\
&\underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{5\bar{c}_\Lambda |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|^a g(k, l)}{N} \right) + \\
&\underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{5g(k, l) \bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k]} \right)}{N} \right) + \\
&\underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{5g(k, l) \bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\|_{[k-N, k]} \right)}{N} \right) + \\
&\underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{5g(k, l) \bar{\gamma}_\alpha \left(\|\mathbf{w}_\alpha\|_{[k-N, k]} \right)}{N} \right)
\end{aligned} \tag{45}$$

Recalling Inequalities (1) we obtain the bound

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \left(\|\mathbf{w}_j - \hat{\mathbf{w}}_{j|k}\|_{[k-N,k]} \right) &\leq \gamma_1 \left(6\|\mathbf{w}\|_{[k-N,k]} \right) + \gamma_1 \left(6\underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{5\bar{c}_p |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^a g(k,l)}{N} \right) \right) + \\
&\quad \gamma_1 \left(6\underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{5\bar{c}_\Lambda |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|^a g(k,l)}{N} \right) \right) + \\
&\quad \gamma_1 \left(6\underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{5g(k,l)\bar{\gamma}_w (\|\mathbf{w}\|_{[k-N,k]})}{N} \right) \right) + \\
&\quad \gamma_1 \left(6\underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{5g(k,l)\bar{\gamma}_v (\|\mathbf{v}\|_{[k-N,k]})}{N} \right) \right) + \\
&\quad \gamma_1 \left(6\underline{\gamma}_w^{-1} \left(\frac{5g(k,l)\bar{\gamma}_\alpha (\|\mathbf{w}_\alpha\|_{[k-N,k]})}{N} \right) \right).
\end{aligned} \tag{46}$$

With the use of Assumption 3, the bound can be finally written as

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \left(\|\mathbf{w}_j - \hat{\mathbf{w}}_{j|k}\|_{[k-N,k]} \right) &\leq \gamma_1 \left(6\|\mathbf{w}\|_{[k-N,k]} \right) + \frac{c_1 5^{b_1} \bar{c}_p^{b_1} |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^{ab_1} g(k,l)^{b_1}}{N^{b_1}} + \\
&\quad \frac{c_1 5^{b_1} \bar{c}_\Lambda^{b_1} |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|^{ab_1} g(k,l)^{b_1}}{N^{b_1}} + \\
&\quad c_1 5^{b_1} g(k,l)^{b_1} \bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\|_{[k-N,k]} \right)^{b_1} + \\
&\quad c_1 5^{b_1} g(k,l)^{b_1} \bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\|_{[k-N,k]} \right)^{b_1} + \\
&\quad c_1 5^{b_1} g(k,l)^{b_1} \bar{\gamma}_\alpha \left(\|\mathbf{w}_\alpha\|_{[k-N,k]} \right)^{b_1}
\end{aligned} \tag{47}$$

With a similar procedure, a bound for the third term of inequality (38) is found

$$\begin{aligned}
\gamma_2 \left(\|\mathbf{v}_j - \hat{\mathbf{v}}_{j|k}\|_{[k-N,k]} \right) &\leq \gamma_2 \left(6\|\mathbf{v}\|_{[k-N,k]} \right) + \frac{c_2 5^{b_2} \bar{c}_p^{b_2} |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^{ab_2} g(k,l)^{b_2}}{N^{b_2}} + \\
&\quad \frac{c_2 5^{b_2} \bar{c}_\Lambda^{b_2} |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|^{ab_2} g(k,l)^{b_2}}{N^{b_2}} + \\
&\quad c_2 5^{b_2} g(k,l)^{b_2} \bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\|_{[k-N,k]} \right)^{b_2} + \\
&\quad c_2 5^{b_2} g(k,l)^{b_2} \bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\|_{[k-N,k]} \right)^{b_2} + \\
&\quad c_2 5^{b_2} g(k,l)^{b_2} \bar{\gamma}_\alpha \left(\|\mathbf{w}_\alpha\|_{[k-N,k]} \right)^{b_2}
\end{aligned} \tag{48}$$

The estimation error given in Equation (49) can be bounded as

$$\begin{aligned}
|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq & \frac{|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^p}{N^q} \left(c_\beta 2^p + \frac{c_\beta 10^p 5^{p/a} \bar{c}_p^{p/a} g(k, l)^{p/a}}{\underline{c}_p^{p/a}} \right) + \\
& \frac{c_\beta 10^p 5^{p/a} \bar{c}_\Lambda^{p/a} |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|^p g(k, l)^{p/a}}{N^q \underline{c}_p^{p/a}} + \\
& \frac{c_\beta 10^p 5^{p/a} N^{1/a} \bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k-1]} \right)^{1/a} g(k, l)^{1/a}}{N^q \underline{c}_p^{p/a}} + \\
& \frac{c_\beta 10^p 5^{p/a} N^{p/a} \bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\|_{[k-N, k-1]} \right)^{p/a} g(k, l)^{p/a}}{N^q \underline{c}_p^{p/a}} + \\
& \frac{c_\beta 10^p 5^{p/a} N^{p/a} \bar{\gamma}_\alpha \left(\|\mathbf{w}_\alpha\|_{[k-N, k-1]} \right)^{p/a} g(k, l)^{p/a}}{N^q \underline{c}_p^{p/a}} + \\
& \gamma_1 \left(6 \|\mathbf{w}\|_{[k-N, k]} \right) + \frac{c_1 5^{b_1} \bar{c}_p^{b_1} |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^{ab_1} g(k, l)^{b_1}}{N^{b_1}} + \\
& \frac{c_1 5^{b_1} \bar{c}_\Lambda^{b_1} |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|^{ab_1} g(k, l)^{b_1}}{N^{b_1}} + \\
& c_1 5^{b_1} g(k, l)^{b_1} \bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k]} \right)^{b_1} + \\
& c_1 5^{b_1} g(k, l)^{b_1} \bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\|_{[k-N, k]} \right)^{b_1} + \\
& c_1 5^{b_1} g(k, l)^{b_1} \bar{\gamma}_\alpha \left(\|\mathbf{w}_\alpha\|_{[k-N, k]} \right)^{b_1} + \\
& \gamma_2 \left(6 \|\mathbf{v}\|_{[k-N, k]} \right) + \frac{c_2 5^{b_2} \bar{c}_p^{b_2} |x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^{ab_2} g(k, l)^{b_2}}{N^{b_2}} + \\
& \frac{c_2 5^{b_2} \bar{c}_\Lambda^{b_2} |\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|^{ab_2} g(k, l)^{b_2}}{N^{b_2}} + \\
& c_2 5^{b_2} g(k, l)^{b_2} \bar{\gamma}_w \left(\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k]} \right)^{b_2} + \\
& c_2 5^{b_2} g(k, l)^{b_2} \bar{\gamma}_v \left(\|\mathbf{v}\|_{[k-N, k]} \right)^{b_2} + \\
& c_2 5^{b_2} g(k, l)^{b_2} \bar{\gamma}_\alpha \left(\|\mathbf{w}_\alpha\|_{[k-N, k]} \right)^{b_2}
\end{aligned} \tag{49}$$

Since the vector α (and its estimated $\hat{\alpha}$) satisfies $\sum_{i=1}^q \alpha_i = 1$ and $\alpha_i \geq 0$, the maximal value of $|\alpha - \hat{\alpha}|$ is upper bounded by $\sqrt{2}$, i.e., $\max\{|\alpha - \hat{\alpha}|\} = \max\{|\mathbf{w}_\alpha|\} \leq \sqrt{2}$. Defining the constants as follows

$$q \geq p/a, \quad \zeta := \max\{p, a b_1, a b_2\} \quad \eta := \min\{q, b_1, b_2\},$$

inequality (49) can be rewritten as follows

$$\begin{aligned}
|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq & \frac{|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^\zeta}{N^\eta} \left(\left(1 + \frac{5^{p+q} \bar{c}_p^q g(k, l)^q}{\underline{c}_p^{p/a}} \right) c_\beta 2^p + c_1 5^{b_1} \bar{c}_1^{b_1} g(k, l)^{b_1} + \right. \\
& c_2 5^{b_2} \bar{c}_p^{b_2} g(k, l)^{b_2} \left. + \frac{|\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}|^\zeta}{N^\eta} \left(\frac{c_\beta 10^p 5^q \bar{c}_\Lambda^q g(k, l)^q}{\bar{c}_p^{p/a}} + \right. \right. \\
& c_1 5^{b_1} \bar{\gamma}_\alpha (\sqrt{2})^{b_1} + c_2 5^{b_2} \bar{\gamma}_\alpha (\sqrt{2})^{b_2} \left. + g(k, l)^\eta \left(\frac{c_\beta 10^p 5^q \bar{\gamma}_\alpha (\sqrt{2})^q}{\bar{c}_p^{p/a}} + \right. \right. \\
& c_1 5^{b_1} \bar{\gamma}_\alpha (\sqrt{2})^{b_1} + c_2 5^{b_2} \bar{\gamma}_\alpha (\sqrt{2})^{b_2} \left. + \frac{c_\beta 10^p 5^q g(k, l)^q \bar{\gamma}_w (\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k]})^q}{\bar{c}_p^{p/a}} + \right. \\
& \gamma_1 (6 \|\mathbf{w}\|_{[k-N, k]}) + c_1 5^{b_1} g(k, l)^{b_1} \bar{\gamma}_w (\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k]})^{b_1} + \\
& c_2 5^{b_2} g(k, l)^{b_2} \bar{\gamma}_w (\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k]})^{b_2} + \frac{c_\beta 10^p 5^q g(k, l)^q \bar{\gamma}_v (\|\mathbf{v}\|_{[k-N, k]})^q}{\bar{c}_p^{p/a}} + \\
& \gamma_2 (6 \|\mathbf{v}\|_{[k-N, k]}) + c_1 5^{b_1} g(k, l)^{b_1} \bar{\gamma}_v (\|\mathbf{v}\|_{[k-N, k]})^{b_1} + \\
& \left. c_2 5^{b_2} g(k, l)^{b_2} \bar{\gamma}_v (\|\mathbf{v}\|_{[k-N, k]})^{b_2} \right). \tag{50}
\end{aligned}$$

Noting again that $|\alpha_{k-N} - \bar{\alpha}_{k-N}| \leq \sqrt{2}$ and defining the functions and constants as follows

$$k_1 := c_\beta 2^p \tag{51}$$

$$k_2 := \left(5^{p+q} \left(\frac{\bar{c}_p}{\underline{c}_p} \right)^q c_\beta 2^p + c_1 5^{b_1} \bar{c}_p^{b_1} + c_2 5^{b_2} \bar{c}_p^{b_2} \right), \tag{52}$$

$$K := \frac{c_\beta 10^p 5^q}{\bar{c}_p^{p/a}} + c_1 5^{b_1} + c_2 5^{b_2} \tag{53}$$

$$\psi_{w1} := \gamma_1 (6 \|\mathbf{w}\|_{[k-N, k]}), \tag{54}$$

$$\psi_{w2} := \frac{c_\beta 10^p 5^q \bar{\gamma}_w (\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k]})^q}{\bar{c}_p^{p/a}} + (c_1 5^{b_1} + c_2 5^{b_2}) \bar{\gamma}_w (\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k]})^{b_1} \tag{55}$$

$$\psi_{v1} := \gamma_2 (6 \|\mathbf{v}\|_{[k-N, k]}), \tag{56}$$

$$\psi_{v2} := \frac{c_\beta 10^p 5^q \bar{\gamma}_v (\|\mathbf{v}\|_{[k-N, k]})^q}{\bar{c}_p^{p/a}} + (c_1 5^{b_1} + c_2 5^{b_2}) \bar{\gamma}_v (\|\mathbf{v}\|_{[k-N, k]})^{b_1} \tag{57}$$

$$\tag{58}$$

the bound of the estimation error can be rewritten as follows

$$\begin{aligned}
|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq & \frac{|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|^\zeta}{N^\eta} (k_1 + g(k, l)^\eta k_2) + \psi_{w1} + g(k, l) \psi_{w2} + \\
& \psi_{v1} + g(k, l) \psi_{v2} + g(k, l) \left(\bar{\gamma}_\alpha (\sqrt{2})^\zeta + \frac{\bar{c}_\Lambda 2^{\zeta/2}}{N^\eta} \right) K \tag{59}
\end{aligned}$$

Defining others constants and functions

$$\bar{k}_\beta(l) := k_1 + g(k, l) k_2 \quad (60)$$

$$\Phi_w(w, l) := \psi_{w1} + g(k, l)^\eta \psi_{w2} \quad (61)$$

$$\Phi_v(v, l) := \psi_{v1} + g(k, l)^\eta \psi_{v2} \quad (62)$$

$$\Phi_\alpha(l, N) := g(k, l) \left(\bar{\gamma}_\alpha (\sqrt{2})^\zeta + \frac{\bar{c}_\Lambda^\zeta 2^{\zeta/2}}{N^\eta} \right) K \quad (63)$$

$$\bar{\beta}(r, s) := \frac{\bar{k}_\beta r^p}{s^q} \quad (64)$$

with $p = \zeta$, $q = \eta$, $\bar{\beta}(r, s) \in \mathcal{KL}$, one can write the estimation error as follows

$$|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq \bar{\beta}(|x_{k-N} - \bar{x}_{k-N}|, N) + \Phi_w(\|\mathbf{w}\|_{[k-N, k]}, l) + \Phi_v(\|\mathbf{v}\|_{[k-N, k]}, l) + \Phi_\alpha(l, N) \quad (65)$$

The reader can verify that the same result is obtained for $k \in \mathbb{Z}_{[1, N-1]}$. To guarantee the validity of previous results to the entire time horizon the definition of $\beta(r, s)$ must be extended to $s = 0$. Because of $\bar{\beta}(r, s) \in \mathcal{KL}$, $\bar{\beta}(r, 0) \in \mathcal{KL}$ and $\bar{\beta}(r, 0) \geq \bar{\beta}(r, k)$, $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, it is sufficient to define $\bar{\beta}(r, 0) := k_\beta \bar{\beta}(r, 1)$ for some $k_\beta \in \mathbb{R}_{>1}$ to extend the definition of these function for all $k \in \mathbb{Z}_{[0, N]}$.

Let us select some $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ and

$$r_{\max} := \left\{ \bar{\beta}(e_{\max}, 0) + \Phi_w(w_{\max}, 1) + \Phi_v(v_{\max}, 1) + \Phi_\alpha(1, \mathcal{N}), \right. \\ \left. (1 + \epsilon) (\Phi_w(w_{\max}, 1) + \Phi_v(v_{\max}, 1) + \Phi_\alpha(1, \mathcal{N})) \right\}$$

Let us define \mathcal{N} as

$$\left(\frac{2(1 + \epsilon)(k_1 + k_2 g(k, l)^\eta) e_{\max}^\zeta}{r_{\max}} \right)^{1/\eta} \leq \mathcal{N} \quad (66)$$

Remark 2 Note that due to the model uncertainty, the horizon must be enlarged.

Adopting an estimator with a window length greater or equal to \mathcal{N} , one will have

$$\bar{\beta}(r, N) \leq \frac{r}{2}, \quad (67)$$

the effects of the initial conditions will vanish. As $k \rightarrow \infty$, the estimation error will entry to the bounded set $\mathcal{X}(w, v) \subset \mathcal{X}$ defined by the noises of the system and the uncertainty

$$\mathcal{X}(w, v, l) := \{|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq (1 + \epsilon) (\Phi_w(\|\mathbf{w}\|, 1) + \Phi_v(\|\mathbf{v}\|, 1) + \Phi_\alpha(1, \mathcal{N}))\}. \quad (68)$$

This set define the minimum size region of error space \mathcal{X} that the error can achieve by removing the effect of errors in initial conditions (e_{max}). Equation (67) establish a trade off between speed of convergence and window length, which is related with the size of \mathcal{X} (w, v, l).

For any MHE with adaptive arrival cost and window length $N \geq \mathcal{N}$ two situations can be considered

- The estimator has removed the effects of x_0 on $\hat{x}_{k|k}$ such that $|x_k - \hat{x}_{k|k}| \in \mathcal{X}(w, v, l)$, and
- The estimator has not removed the effects of x_0 on $\hat{x}_{k|k}$ such that $|x_k - \hat{x}_{k|k}| \notin \mathcal{X}(w, v, l)$,

Let us assume that the estimation error is

$$|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq 2(1 + \epsilon)(\Phi_w(w_{\max}, 1) + \Phi_v(v_{\max}, 1) + \Phi_\alpha(1, \mathcal{N})),$$

the estimation error will be given by

$$\begin{aligned} |x_{k+N} - \hat{x}_{k+N|k+N}| &\leq \bar{\beta}(|x_k - \hat{x}_{k|k+N}|, \mathcal{N}) + \Phi_w(w_{\max}, 1) + \\ &\quad \Phi_v(v_{\max}, 1) + \Phi_\alpha(1, \mathcal{N}), \\ &\leq \frac{|x_k - \hat{x}_{k|k}|}{2(1 + \epsilon)} + \Phi_w(w_{\max}, 1) + \Phi_v(v_{\max}, 1) + \Phi_\alpha(1, \mathcal{N}) \\ &\leq 2(\Phi_w(w_{\max}, 1) + \Phi_v(v_{\max}, 1) + \Phi_\alpha(1, \mathcal{N})) \\ &\leq 2(1 + \epsilon)(\Phi_w(w_{\max}, 1) + \Phi_v(v_{\max}, 1) + \Phi_\alpha(1, \mathcal{N})) \end{aligned} \tag{69}$$

Therefore, when

$$|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq 2(1 + \epsilon)(\Phi_w(w_{\max}, 1) + \Phi_v(v_{\max}, 1) + \bar{K}(1)),$$

the error will no become larger. Assuming now

$$r_{\max} \geq |x_k - \hat{x}_{k|k}| > 2(1 + \epsilon)(\Phi_w(w_{\max}) + \Phi_v(v_{\max}) + \Phi_\alpha(1, \mathcal{N}))$$

the estimation error is given by

$$\begin{aligned} |x_{k+N} - \hat{x}_{k+N|k+N}| &\leq \bar{\beta}(|x_k - \hat{x}_{k|k+N}|, \mathcal{N}) + \Phi_w(w_{\max}, 1) + \\ &\quad \Phi_v(v_{\max}, 1) + \Phi_\alpha(1, \mathcal{N}) \\ &\leq \frac{|x_k - \hat{x}_{k|k+N}|}{2(1 + \epsilon)} + \Phi_w(w_{\max}, 1) + \Phi_v(v_{\max}, 1) + \Phi_\alpha(1, \mathcal{N}) \\ &\leq \frac{|x_k - \hat{x}_{k|k+N}|}{2(1 + \epsilon)} + \frac{|x_k - \hat{x}_{k|k+N}|}{2(1 + \epsilon)} \\ &\leq |x_k - \hat{x}_{k|k+N}| \left(\frac{1}{1 + \epsilon} \right) \end{aligned}$$

with $\xi := \left(\frac{1}{1 + \epsilon} \right) < 1$, since $\epsilon > 0$

In the latter case, the estimator error behaves contractively. By mean of some definitions, i.e., $i := \lfloor \frac{k}{\mathcal{N}} \rfloor$, $j := t \bmod \mathcal{N}$, time k can be expressed as $k = i\mathcal{N} + j$. For $N \geq \mathcal{N}$, the \mathcal{KL} functions $\bar{\beta}(r, s)$ is decreasing every \mathcal{N} samples. Writing the estimation error with this notation for time k

$$\begin{aligned} |x_k - \hat{x}_{k|k}| &\leq \max \left\{ \xi^i |x_j - \hat{x}_{j|k}|, 2(1 + \epsilon) (\Phi_w(w_{\max}, 1) + \Phi_v(v_{\max}, 1) + \Phi_\alpha(1, \mathcal{N})) \right\} \\ &\leq \bar{\beta}(|x_0 - \bar{x}_0|, j) \xi^i + 2(1 + \mu) (\Phi_w(w_{\max}, 1) + \Phi_v(v_{\max}, 1) + \Phi_\alpha(1, \mathcal{N})) \end{aligned} \quad (70)$$

Defining

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|) &:= \xi^i \bar{\beta}(|x_0 - \bar{x}_0|, j), \\ \bar{\Phi}_w(w_{\max}) &:= 2(1 + \mu) \Phi_w(w_{\max}, 1), \\ \bar{\Phi}_v(v_{\max}) &:= 2(1 + \mu) \Phi_v(v_{\max}, 1), \\ \bar{\Phi}_\alpha(l_{\min}, \mathcal{N}) &:= 2(1 + \mu) \Phi_\alpha(1, \mathcal{N}). \end{aligned} \quad (71)$$

Finally we can write

$$|x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq \bar{\Phi}(|x_0 - \bar{x}_0|, k) + \bar{\Phi}_w(w_{\max}) + \bar{\Phi}_v(v_{\max}) + \bar{\Phi}_\alpha(l_{\min}, \mathcal{N}) \quad (72)$$

Taking w_{\max} from $\|\mathbf{w}\|_{[0,k]}$ instead $\|\mathbf{w}\|_{[k-N,k]}$ and v_{\max} from $\|\mathbf{v}\|_{[0,k]}$ instead $\|\mathbf{v}\|_{[k-N,k]}$, and noting that Equation (65) still being valid, the robust regional practical stability is proved.

On the other hand, the convergence of the estimator to the true state in the case of decaying disturbances can be established. Assuming $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 0$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0$, given Equation (65), one can choose some $k \geq K_1$ for which $\max\{w_{\max}, v_{\max}\} \leq \min\left\{\Phi_w^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right), \Phi_v^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right\}$. At the same time, one can choose some large enough value of l such that $\bar{\Phi}_\alpha(l, \mathcal{N}) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Note that according to Equation (32), the value of l will be getting smaller as $\|\mathbf{w}\| \rightarrow 0$ and $\|\mathbf{v}\| \rightarrow 0$. Recalling that $\bar{\Phi}(\cdot) \in \mathcal{KL}$, there will exist some $k \geq K_2$ such that $\bar{\Phi}(|x_{k-K_2} - \bar{x}_{k-K_2}|, k) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Under these conditions, there exists some time $k \geq \max\{K_1, K_2\} + \mathcal{N}$ such that

$$\begin{aligned} |x_k - \hat{x}_{k|k}| &\leq \bar{\Phi}(|x_{k-\mathcal{N}} - \bar{x}_{k-\mathcal{N}}|, k) + \bar{\Phi}_w(w_{\max}) + \bar{\Phi}_v(v_{\max}) + \bar{\Phi}_\alpha(l, \mathcal{N}) \\ |x_k - \hat{x}_{k|k}| &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ |x_k - \hat{x}_{k|k}| &\leq \varepsilon \end{aligned} \quad (73)$$

Since one can choose any value of ε , $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - \hat{x}_{k|k}| = 0$ can be guaranteed when $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 0$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0$ as claimed.

□

Remark 3 *As expected, the model uncertainty deteriorates state estimation.*

However, for a large enough value of l , this effect can be mitigated. Moreover, when $\lim_{l \rightarrow \infty} \Phi_\alpha(l, \mathcal{N}) = 0$

4 Simulation and results

The following examples will be used to illustrate the results presented in the previous sections and to evaluate and compare the performance of the proposed estimator with others from the state of the art. The process disturbance is white Gaussian noise acting as an additive exogenous input to the system.

4.1 Unknown linear system

Let us consider the linear system

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_p x_k + w_k \\ y_k &= C_p x_k + v_k \end{aligned}$$

whose matrices are unknown and they have the following structure

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix}, C_p = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \quad (74)$$

The system is affected with additive process and measurement noise w and v drawn from normal distributions with zero mean and covariance $Q_w = S_w^2 I_2$ and $R_v = S_v^2$, respectively. The polytope is defined using three *LTI* models

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0.72 \\ 1 & 0.28 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.59 \\ 1 & 1.57 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -0.35 \\ 1 & 1.26 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} -1.46 & -1.29 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} -4.84 & -2.90 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} -0.09 & -0.03 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (75)$$

such that the system belongs to it. The matrices of the system (A_S, C_S) and its model (A_M, C_M) were generated as a convex combination of the polytope with mixing parameters α_S ($\alpha_{S,1} = 0.22, \alpha_{S,2} = 0.76, \alpha_{S,3} = 0.02$) and α_M ($\alpha_{M,1} = 0.41, \alpha_{M,2} = 0.22, \alpha_{M,3} = 0.37$), respectively.

The stage cost of the receding horizon estimators is chosen as $\ell(w, v) = w^T Q^{-1} w + v^T R^{-1} v$ with $R^{-1} = 5$ and $Q^{-1} = \text{diag}(0.1, 0.1)$. The proposed moving horizon estimator (*MHE_A*) the prior weighting matrix is given by $\Gamma_{k-N}(\chi) = (\chi - \hat{x}(0|k))^T P_{k|k}^{-1} (\chi - \hat{x}(0|k))$, where $P_0^{-1} = 0.1 \mathbf{I}_2$ and $P_{k|k}$ is updated using equations (8) and (9) with $\sigma = 1e^{-4}$ and $c = 5$. The robust

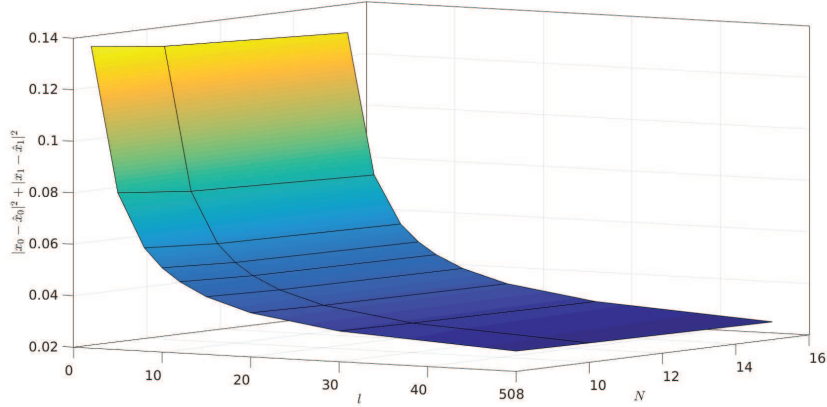


Fig. 1. Estimation error for different values of l and N .

moving horizon estimator (MHE_R) implements the algorithm proposed by Müller (2017) with the nominal model (A_M, C_M) , the prior weight given by $\Gamma(\chi) = L(\chi - \hat{x}(0|k))^T(\chi - \hat{x}(0|k))$ and parameters $\delta = 1$, $\delta_1 = \kappa^N$ ($\kappa = 0.89$) and $\delta_2 = 1/N$ (see equation (3) of Müller (2017)). The full information (FIE , see Ji et al. (2016)) is configured with the true model and the same parameters used by the MHE_R with $\delta = 1$, $\delta_1 = \kappa^k$ and $\delta_2 = 1/k$ with the system matrices (A_S, C_S) . The robust Kalman filter (KF_R) was designed following the design procedure proposed by Zhu et al. (2002) using the nominal model (A_M, C_M) and computing the bounds from the models of the polytope. The Kalman filter (KF) was designed using the matrices of the system (A_S, C_S) .

Table 1

Averaged MSE for $S_w = 0.1, S_v = 0.05, N = 8$.

| | KF_R | KF | FIE | MHE_R | MHE_A |
|-------|---------|----------|--------|---------|---------|
| x_0 | 0.78467 | 0.030851 | 0.0054 | 0.2662 | 0.0212 |
| x_1 | 1.9946 | 0.069122 | 0.0039 | 0.4675 | 0.0389 |

Table 1 shows the mean square estimation error (MSE) of each estimator averaged over 100 trials for $S_w = 0.1, S_v = 0.05$ and $N = 8$ for all receding horizon estimators (FIE, MHE_R and MHE_A). It can be seen that the proposed estimator average mean square estimation error is smaller than the Kalman filters (KF and KF_R) and MHE_R . Only the FIE provides better performance than the proposed algorithm. The performance difference between the estimators that employ the nominal model (KF_R and MHE_R) is due to the adaptation capabilities of MHE_A that allows to reduce the uncertainty of the estimator model. The main performance difference between MHE_A and FIE estimators is due to the model employed by estimator and the amount of information employed to estimate $\hat{x}_{k|k}$. While the FIE estimator use of the exact model and all the system output available until k , the MHE_A identifies the model in the initial samples and only use the last N system outputs.

Figure 1 shows the behaviour of the estimation error as a function of l and N . This figure shows that the main factor in the reduction of the estimation error is the number of iterations l used to update the estimates. It can be also seen that there a significant improvement in the initial iterations ($l < 10$), then after iterations there is no significant improvement in the estimation error. It is worth nothing that the error is decreasing with the iterations as it was shown in Section 4.

Figure 2 shows the time evolution of the estimated vector of mixing parameters $\hat{\alpha}$ for different values of process noise variance. The true values are representing as continuous line. When S_w is smaller than the value of states ($S_w \leq 0.5$), the mixing parameters $\hat{\alpha}$ converge quickly to the true value or remain closer to it.

4.2 Example 2: Nonlinear time-varying system

As a second example, we consider a second order time-varying nonlinear system whose dynamic is given by behavior

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_2(k) \\ p_1(k)x_1(k) + \sin(p_2 x_2(k)) \end{bmatrix} + w_k \quad (76)$$

$$y_k = Cx_k + v_k$$

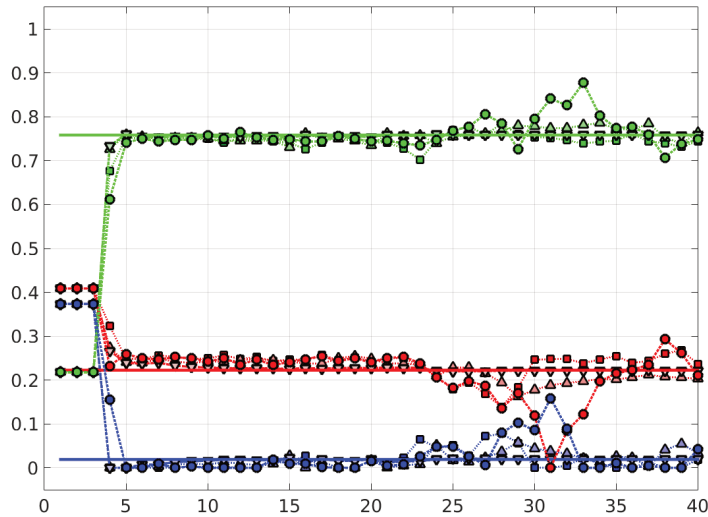


Fig. 2. Estimated mixing parameters $\hat{\alpha}$ for $N = 8$, $l =$, and noises variance ($\nabla S_w = 0.0$, $\square S_w = 0.1$, $\triangle S_w = 0.5$ and $\circ S_w = 1.0$)

with the parameters $p_1(k)$ and $p_2(k)$ given by

$$\begin{aligned} p_1(k+1) &= 0.01 p_1(k) \sin\left(\frac{5\pi k}{N}\right) & \forall k \in \mathbb{Z}_{[1, 3N/4]}, \\ p_1(k+1) &= p_1(k) & \forall k \in \mathbb{Z}_{>3N/4}, \\ p_2 &= 0.05 \end{aligned} \quad (77)$$

The polytope was designed to guarantee that the nonlinear system always remains inside it. The polytope is defined using three *LTI* models

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1.30 \\ 1 & -1.52 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2.44 \\ 1 & 0.66 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1.31 \\ 1 & 2.81 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

The stage cost for all receding horizon estimators is chosen as $\ell(w, v) = w^T Q^{-1} w + v^T R^{-1} v$ with $R^{-1} = 5e^2$ and $Q^{-1} = \text{diag}(1e^3, 5e^3)$. The proposed moving horizon estimator (MHE_A) the prior weighting matrix is given by $\Gamma_{k-N}(\chi) = (\chi - \hat{x}(0|k))^T P_{k|k}^{-1} (\chi - \hat{x}(0|k))$, where $P_0^{-1} = 0.1 \mathbf{I}_2$ and $P_{k|k}$ is updated using equations (8) and (9) with $\sigma = 1$ and $c = 1$. The robust moving horizon estimator (MHE_R) implements the algorithm proposed by Müller (2017) with the nominal model, the prior weight given by $\Gamma(\chi) = L(\chi - \hat{x}(0|k))^T (\chi - \hat{x}(0|k))$ and parameters $\delta = 1$, $\delta_1 = \kappa^N$ ($\kappa = 0.89$) and $\delta_2 = 1/N$ (see equation (3) of Müller (2017)). The full information (*FIE*, see Ji et al. (2016)) is configured with the linearized model updated at each sampling time and the same parameters used by the MHE_{ROB} with $\delta = 1$, $\delta_1 = \kappa^k$ and $\delta_2 = 1/k$. The robust Kalman filter was designed following the design procedure proposed by Zhu et al. (2002) using the nominal model and computing the bounds from the models of the polytope. The guess for the initial condition is $\bar{x}_0 = [0, 0]^T$, whereas $x_0 = [0.5, 0.3]^T$.

Table 2

Averaged MSE for $S_w = 0.1$, $S_v = 0.05$ and $N = 8$.

| | EKF_R | FIE | MHE_R | MHE_A |
|-------|---------|---------|---------|----------|
| x_0 | 0.40879 | 0.32324 | 0.31541 | 0.018498 |
| x_1 | 0.4297 | 0.30082 | 1.0106 | 0.064984 |

Table 2 shows the mean square estimation error (*MSE*) of each estimator averaged over 100 trials for $S_w = 0.1$, $S_v = 0.05$ and $N = 8$ for all receding horizon estimators (*FIE*, MHE_R and MHE_A). It can be seen that the average mean square estimation error of MHE_A is smaller than the other estimators (EKF_R , MHE_R and *FIE*). The performance difference between the estimators that employ the nominal model (EKF_R and MHE_R) is mainly due to the adaptation capabilities of MHE_A . The main performance difference between MHE_A and *FIE* estimators is due to the *FIE* attempts to reconstruct the state trajectory of a nonlinear time-varying system with a *LTI* system.

Figure 3 shows the behaviour of the estimation error as a function of l and N . This figure shows that the main factor in the reduction of the estimation error is the number of iterations l used to update the estimates. It can be also seen that there a significant improvement in the initial iterations ($l < 15$), then after iterations there is no significant improvement in the estimation error. It can also see how the estimation error increases for higher values of N . This behavior is due to the estimator use only one model along the entire estimation horizon, whereas the nonlinear system is changing its parameters every sample. The *EKF* aim to improve the estimation error in comparison with the *MHE_A*. This improvement is due to the *EKF* update the model at every sampling time with the true model. Besides, the *MHE_A* use the same model along the entire horizon estimation to estimate the optimal state trajectory of the nonlinear system.

Figure 4 shows the time evolution of the estimated parameters \hat{p}_1 and \hat{p}_2 for

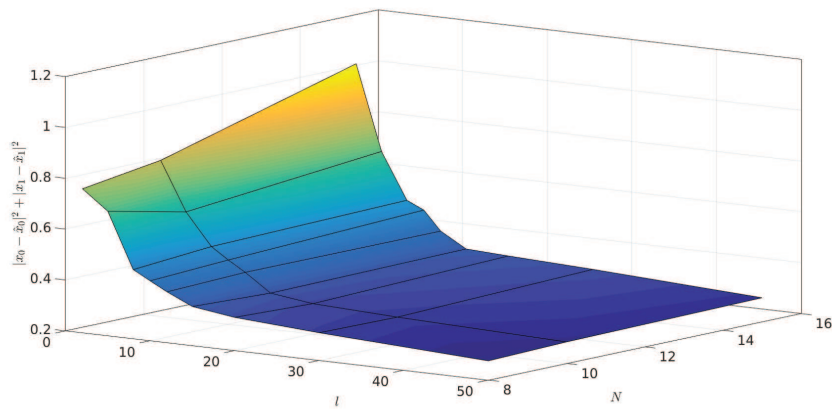


Fig. 3. Performance of the proposed algorithm for different values of l and N .

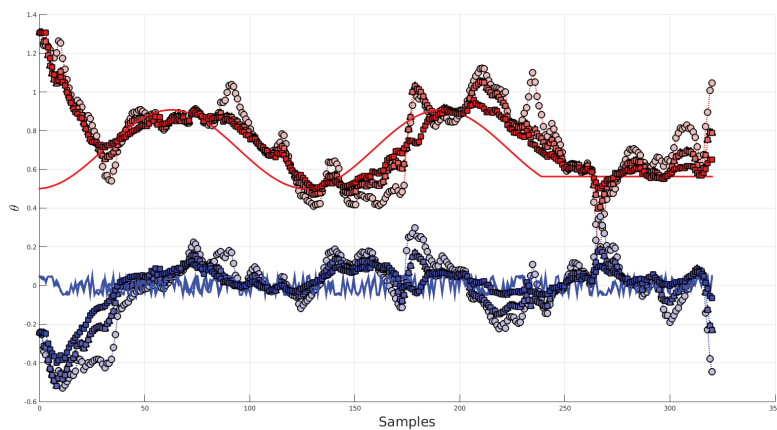


Fig. 4. Estimation of the parameters of the nonlinear time-varying system ($N = 8$, and noises $\square=0.1$, $\triangle=0.25$ and $\circ=0.5$).

different values of process noise variance. The true values are representing as continuous line. When S_w is smaller than the value of states ($S_w \leq 0.25$), the parameters \hat{p} converge quickly to the true value or remain closer to it. However,

5 Conclusions

In this paper we introduce an adaptive polytopic observer for nonlinear systems under bounded disturbances based on moving horizon estimator and dual estimation techniques and proved their stability properties. In a first stage we proved the stability of the dual estimation iteration. Then, in a second stage we established robust asymptotic stability for the adaptive moving horizon estimator. It was also shown that the estimation error converges to zero in case that disturbances converge to zero.

An advantage of this updating mechanism is that the required conditions on prior weighting are such that it can be chosen off-line. Furthermore, it introduces a feedback mechanism between the arrival cost weight and the estimation errors that automatically controls the amount of information used to compute it, which allows to shorten the estimation horizon.

Acknowledgements

The authors wish to thank the Consejo Nacional de Investigaciones Cientificas y Tecnicas (CONICET) from Argentina, for their support.

References

- Ames, W. F. & Pachpatte, B. (1997), *Inequalities for differential and integral equations*, Vol. 197, Elsevier.
- Angelis, G. Z. (2003), ‘System analysis, modelling and control with polytopic linear models.’
- Aouaouda, S., Chadli, M., Cocquempot, V. & Tarek Khadir, M. (2013), ‘Multi-objective h-/ h fault detection observer design for takagi–sugeno fuzzy systems with unmeasurable premise variables: descriptor approach’, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **27**(12), 1031–1047.
- Apkarian, P., Gahinet, P. & Becker, G. (1995), ‘Self-scheduled h control of linear parameter-varying systems: a design example’, *Automatica* **31**(9), 1251–1261.
- Arasaratnam, I. & Haykin, S. (2009), ‘Cubature kalman filters’, *IEEE Transactions on automatic control* **54**(6), 1254–1269.
- Beneš, V. (1981), ‘Exact finite-dimensional filters for certain diffusions with nonlinear drift’, *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes* **5**(1-2), 65–92.
- Bezzaoucha, S., Marx, B., Maquin, D. & Ragot, J. (2013), ‘Nonlinear joint state and parameter estimation: Application to a wastewater treatment plant’, *Control Engineering Practice* **21**(10), 1377–1385.
- Bezzaoucha, S., Voos, H. & Darouach, M. (2018), ‘A new polytopic approach for the unknown input functional observer design’, *International Journal of Control* **91**(3), 658–677.
- Crisan, D., Gaines, J. & Lyons, T. (1998), ‘Convergence of a branching particle method to the solution of the zakai equation’, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **58**(5), 1568–1590.
- Doucet, A., De Freitas, N. & Gordon, N. (2001), An introduction to sequential monte carlo methods, in ‘Sequential Monte Carlo methods in practice’, Springer, pp. 3–14.
- Gao, N., Darouach, M., Voos, H. & Alma, M. (2016), ‘New unified h dynamic observer design for linear systems with unknown inputs’, *Automatica* **65**, 43–52.
- Holte, J. M. (2009), Discrete gronwall lemma and applications, in ‘MAA-NCS meeting at the University of North Dakota’, Vol. 24, pp. 1–7.
- Ichalal, D., Mammar, S. & Ragot, J. (2016), ‘Auxiliary dynamics for observer design of nonlinear ts systems with unmeasurable premise variables’, *IFAC-PapersOnLine* **49**(5), 1–6.
- Ji, L., Rawlings, J. B., Hu, W., Wynn, A. & Diehl, M. (2016), ‘Robust stability of moving horizon estimation under bounded disturbances’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **61**(11), 3509–3514.
- Kushner, H. J. (1977), *Probability methods for approximations in stochastic control and for elliptic equations*, Vol. 129, Academic Press.
- Leith, D. J. & Leithead, W. E. (2000), ‘Survey of gain-scheduling analysis and design’, *International journal of control* **73**(11), 1001–1025.

-
- Müller, M. A. (2017), ‘Nonlinear moving horizon estimation in the presence of bounded disturbances’, *Automatica* **79**, 306–314.
- Osorio-Gordillo, G. L., Darouach, M., Astorga-Zaragoza, C. M. & Boutat-Baddas, L. (2016), ‘New dynamical observers design for linear descriptor systems’, *IET Control Theory & Applications* **10**(17), 2223–2232.
- Patwardhan, S. C., Narasimhan, S., Jagadeesan, P., Gopaluni, B. & Shah, S. L. (2012), ‘Nonlinear bayesian state estimation: A review of recent developments’, *Control Engineering Practice* **20**(10), 933–953.
- Sánchez, G., Murillo, M. & Giovanini, L. (2017), ‘Adaptive arrival cost update for improving moving horizon estimation performance’, *ISA transactions* **68**, 54–62.
- Shamma, J. S. & Athans, M. (1991), ‘Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants’, *Automatica* **27**(3), 559–564.
- Shamma, J. S. & Cloutier, J. R. (1993), ‘Gain-scheduled missile autopilot design using linear parameter varying transformations’, *Journal of guidance, Control, and dynamics* **16**(2), 256–263.
- Sontag, E. D. & Wang, Y. (1997), ‘Output-to-state stability and detectability of nonlinear systems’, *Systems & Control Letters* **29**(5), 279–290.
- Theilliol, D. & Aberkane, S. (2011), ‘Design of lpv observers with immeasurable gain scheduling variable under sensor faults’, *IFAC Proceedings Volumes* **44**(1), 7613–7618.
- Tóth, R., Abbas, H. S. & Werner, H. (2011), ‘On the state-space realization of lpv input-output models: Practical approaches’, *IEEE transactions on control systems technology* **20**(1), 139–153.
- Zhu, X., Soh, Y. C. & Xie, L. (2002), ‘Design and analysis of discrete-time robust kalman filters’, *Automatica* **38**(6), 1069–1077.

Anexo C

Simultaneous state estimation and
control for nonlinear systems
subject to bounded disturbances

Simultaneous state estimation and control for nonlinear systems subject to bounded disturbances [★]

Nestor N. Deniz ^a, Guido Sanchez ^a, Marina H. Murillo ^a,
Leonardo L. Giovanini ^a

^a*Instituto de Investigacion en Senales, Sistemas e Inteligencia Computacional, sinc(i), UNL, CONICET, Ciudad Universitaria UNL, 4to piso FICH, (S3000) Santa Fe, Argentina*

Abstract

In this work, we address the output–feedback problem for nonlinear systems under bounded disturbances using a moving horizon approach. The controller is posed as an optimization–based problem that simultaneously estimates the state trajectory and computes the future of control inputs. It minimizes a criterion that involves finite forward and backward horizon is minimized with respect to the unknown initial state, measurement noises and control input variables and it is maximized with respect to the unknown disturbances. Under appropriate assumptions that encodes stability and detectability, we show that the states of the closed–loop system remains bounded. Two simulation examples were included in order to show that the algorithm succeeds even in nonlinear problems

Key words: Moving horizon estimation, Model predictive control, Robust stability, Nonlinear systems.

1 Introduction

One of the most popular control technique in both academia and industry is model predictive control (*MPC*) due its ability to explicitly accommodate

[★] The material in this paper was not presented at any conference.

Email addresses: ndeniz@sinc.unl.edu.ar (Nestor N. Deniz),
gsanchez@sinc.unl.edu.ar (Guido Sanchez), mmurillo@sinc.unl.edu.ar
(Marina H. Murillo), lgiovanini@sinc.unl.edu.ar (Leonardo L. Giovanini).

hard state and input constraints (Bemporad & Morari 1999, Camacho & Alba 2004, Rawlings & Mayne 2009, Mayne 2014, among others). Thereon, much effort has been devoted to develop a stability theory for *MPC* (see i.e. Grüne & Pannek 2011, Rawlings & Mayne 2009, Mayne 2016). An overview of recent developments can be found in Mayne (2014). *MPC* involves the solution of an open-loop optimal control problem at each sampling time with the current state as initial condition. Each of these optimizations provides the sequences of future control actions and states. The first element of the control action sequence is applied to the system and, then the optimization problem is solved again at the next sampling time after updating the initial condition with the system state. *MPC* keeps constant the computational burden by optimizing the system behaviour within a finite length window. The system behaviour beyond the window is summarized in a term known as *cost-to-go*.

MPC is often formulated assuming that the system state can be measured. However, in many practical cases the only information available are noisy measurements of system output, so the use of independent algorithms for state estimation (including observers, filters and estimators) becomes necessary (see Rawlings & Bakshi 2006). Of all these methods, moving horizon estimation (*MHE*) is especially engaging for use with *MPC* because it can be formulated as a similar on-line optimization problem. Solving the *MHE* problem produces an estimated state that is compatible with a set of past measurements that recedes as current time advances (Schweppe 1973, Rao et al. 2001, 2003). This estimate is optimal in the sense that it maximizes a criterion that capture the likelihood of the measurements. Along the same time that relevant results on *MPC* were developed, research works on *MHE* begun. The works of Rao et al. (2001) and Rao et al. (2003) provide overviews of linear and nonlinear *MHE*. Recent results regarding *MHE* for nonlinear systems are given for robust stability and estimate convergence properties (Alessandri et al. 2005, 2008, 2012, Garcia-Tirado et al. 2016, Sánchez et al. 2017). In recent years several results have been obtained for different *MHE* formulations, advancing from idealistic assumptions, like observability and vanishing disturbances, to realistic situations like detectability and bounded disturbances (see Ji et al. 2015, Müller 2017, Deniz et al. 2019, Allan & Rawlings 2019).

When disturbances, model uncertainty and system constraints can be neglected, state and control sequences can be independently computed (see Duncan & Varaiya 1971, Bensoussan 2004, Åström 2012, Georgiou & Lindquist 2013). However, in practical applications, these conditions are very difficult to fulfil, i.e., process disturbances and measurement noise are usually present, as well as model uncertainty. In this context, it becomes necessary approaches that includes these information into the controller design.

State-feedback *MPC* is a mature field with results that considers model uncertainty, input disturbances, and noises (Magni et al. 2003, Bemporad et al.

2003, Raimondo et al. 2009, among others). However, these works did not consider robustness with respect to errors in state estimation. Fewer results are available for output-feedback MPC. An overview of nonlinear output-feedback MPC is given by Findeisen et al. (2003) and the references therein. Many of these approaches involve designing separate estimator and controller, using different estimation algorithm (Roset et al. 2006, Magni et al. 2009, Patwardhan et al. 2012, Zhang & Liu 2013, Ellis et al. 2017). Results on robust output-feedback MPC for constrained, linear, discrete-time systems with bounded disturbances and measurement noise can be found in Mayne et al. (2006, 2009) and Voelker et al. (2010, 2013). These approaches first solve the estimation problem and show convergence of the estimated state to a bounded set, and then take the uncertainty of the estimation into account when solving the *MPC* problem.

The approach of solving simultaneously *MHE/MPC* was originally introduced by Copp & Hespanha (2014) and later developed in several papers (Copp & Hespanha 2016*a,b*, 2017). In the first paper, Copp & Hespanha (2014) proposed an output feedback controller that combines state estimation and control into a single *min – max* optimization problem that, under observability and controllability assumptions (Copp & Hespanha 2016*a*), guarantees the boundedness of state and tracking errors. Finally, in the last work reported by Copp & Hespanha (2017), the authors established the conditions for guaranteeing the boundedness of error for trajectory tracking problems. They also introduced a primal–dual interior point method that can be used to efficiently solve the *min – max* optimization problem. The criterion used in these works involves finite forward and backward horizons that is minimized with respect to feedback control policies and maximized with respect to the unknown parameters in order to guaranty robustness in the worst-case scenario.

In the present work, we introduce an output–feedback controller for nonlinear systems subject to bounded disturbances using simultaneous *MHE/MPC* approach. The resulting optimization problem minimizes a criterion that involves finite forward and backward horizons with respect the unknown initial state, measurement noise and control input variables while it is maximized with respect the unknown disturbance variables. We show that the proposed controller results in closed–loop trajectories along which the state remains bounded. These results rely on three assumptions: The first assumption requires that the optimization criterion to include an adaptive arrival cost (Sánchez et al. 2017). This assumption allows to ensure the boundedness of the state estimate and to obtain a bound for the estimation error set if the parameters of the estimation problem are properly chosen (Deniz et al. 2019). The second assumption requires that the optimization criterion to include a terminal cost that is a control *ISS*–Lyapunov function with respect to the disturbance input. This type of assumption common in classical state–feedback robust *MPC*. The third assumption requires that the backward (estimation)

and forward (control) horizons are sufficiently large so that enough information is obtained in order to find state estimates and control inputs compatible with dynamics, noises and constraints. This assumption is satisfied if the system is detectable, stabilizable and the parameters in the cost function (weights and horizons) are chosen appropriately.

The rest of the paper is organized as follows: Section 2 introduces the notation, definitions and properties that will be used through the paper. In Section 3 we formulate the estimation and control problem, and in Section 4 we analyze its closed-loop stability. Finally, we use this method to simulate a nonlinear example in Section 5 and discuss conclusions and future work in Section 6.

2 Preliminaries and setup

2.1 Notation

Let $\mathbb{Z}_{[a,b]}$ denotes the set of integers in the interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, and $\mathbb{Z}_{\geq a}$ denotes the set of integers greater or equal to a . Boldface symbols denote sequences of finite or infinite length, i.e., $\mathbf{w} := \{w_{k_1}, \dots, w_{k_2}\}$ for some $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $k_1 < k_2$, respectively. We denote $x_{j|k}$ the element of the finite sequence \mathbf{x} given at time $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and $j \in [k_1, k_2]$. By $|x|$ we denote the Euclidean norm of a vector $x \in \mathbb{R}^n$. Let $\|\mathbf{x}\| := \sup_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} |x_k|$ denote the supreme norm of the sequence \mathbf{x} and $\|\mathbf{x}\|_{[a,b]} := \sup_{k \in \mathbb{Z}_{[a,b]}} |x_k|$. A function $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ is of class \mathcal{K} if γ is continuous, strictly increasing and $\gamma(0) = 0$. If γ is also unbounded, it is of class \mathcal{K}_{∞} . A function $\zeta : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ is of class \mathcal{L} if $\zeta(k)$ is non increasing and $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta(k) = 0$. A function $\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ is of class \mathcal{KL} if $\beta(\cdot, k)$ is of class \mathcal{K} for each fixed $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, and $\beta(r, \cdot)$ of class \mathcal{L} for each fixed $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Let us consider two sets A and B , the Minkowski addition is defined as $A \oplus B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. On the other hand, the Minkowski difference¹ is defined as $A \ominus B := \{d \mid d + B \in A\}$.

2.2 Problem statement

Consider a system described by a discrete-time nonlinear system

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k, w_k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ y_k &= h(x_k) + v_k, \end{aligned} \tag{1}$$

¹ Also known as the Pontryagin difference.

in which $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ is the system state, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ is the system's input, $w \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^{n_w}$ is the unmeasured process disturbance. The output of the system is $y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{n_y}$ and $v \in \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n_v}$ is the measurement noise. The estimation and control problem attempts to find simultaneously the optimal past state trajectory which minimizes the process and measurements noises as well as to minimize the effects of uncertainties in the initial condition and computes the optimal sequence of control inputs that steer the actual state to the desired region. This results in an infinite-horizon optimization problem

$$\begin{aligned} \min_{\substack{\hat{x}_{0|k}, \hat{w}_{j|k} \\ u_{j|k}}} \Psi_k^\infty &:= \sum_{j=0}^{j=k-1} \ell_e(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) + \sum_{j=k}^{\infty} \left(\ell_c(\hat{x}_{j|k}, \hat{u}_{j|k}) - \ell_{w_c}(\hat{w}_{j|k}) \right) \\ \text{s.t.} &\begin{cases} \hat{x}_{j+1|k} = f(\hat{x}_{j|k}, \hat{u}_{j|k}, \hat{w}_{j|k}), & j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ y_j = h(\hat{x}_{j|k}) + \hat{v}_{j|k}, & j \in \mathbb{Z}_{[0, k-1]} \\ \hat{x}_{j|k} \in \mathcal{X}, \hat{u}_{j|k} \in \mathcal{U}, \hat{w}_{j|k} \in \mathcal{W}, \hat{v}_{j|k} \in \mathcal{V}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

The functions $\ell_e(\cdot, \cdot)$, $\ell_c(\cdot, \cdot)$ and $\ell_{w_c}(\cdot)$ are all assumed to take non-negative values. One can view ℓ_e and ℓ_{w_c} as measures of likelihood of the specific values of $\hat{w}_{j|k}$ and $\hat{v}_{j|k}$. Then the negative sign in front of ℓ_{w_c} penalizes the maximizer for using large values of $\hat{w}_{j|k}$ $j \geq k$. Problem (2) is valuable from a theoretical point of view since it guarantees the boundedness of cost function $\Psi_k^\infty \leq \gamma$ $\gamma > 0, \forall k \geq 0$ and therefore

$$\sum_{j=0}^{j=k-1} \ell_e(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) + \sum_{j=k}^{\infty} \ell_c(\hat{x}_{j|k}, \hat{u}_{j|k}) \leq \gamma + \sum_{j=k}^{\infty} \ell_{w_c}(\hat{w}_{j|k}). \quad (3)$$

If functions ℓ_e, ℓ_c and ℓ_{w_c} are defined using a norm- ℓ_p , problem (2) would guarantee that the state x_k and u_k are ℓ_p , provided that noises w_k and v_k are also ℓ_p . This would mean that the closed-loop system has a finite ℓ_p -induced gain.

The infinite-horizon problem (2) is intractable in practical situations, therefore, it is reformulated into a receding finite-horizon problem

$$\begin{aligned} \min_{\substack{\hat{x}_{k-N_e|k}, \hat{w}_k \\ u_k}} \Psi_k^{N_e+N_c} &:= \Gamma_E(\hat{x}_{k-N_e|k}) + \sum_{j=k-N_e-1}^{j=k-1} \ell_e(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) + \\ &\quad \sum_{j=k}^{k+N_c-1} \left(\ell_c(\hat{x}_{j|k}, \hat{u}_{j|k}) - \ell_{w_c}(\hat{w}_{j|k}) \right) + \Gamma_C(\hat{x}_{k+N_c|k}) \\ \text{s.t.} &\begin{cases} \hat{x}_{k-N_e|k} = \bar{x}_{k-N_e} + \hat{w}_{k-N_e-1|k} \\ \hat{x}_{j+1|k} = f(\hat{x}_{j|k}, \hat{u}_{j|k}, \hat{w}_{j|k}), & j \in \mathbb{Z}_{[k-N_e, k+N_c-1]} \\ y_j = h(\hat{x}_{j|k}) + \hat{v}_{j|k}, & j \in \mathbb{Z}_{[k-N_e, k-1]} \\ \hat{x}_{j|k} \in \mathcal{X}, \hat{u}_{j|k} \in \mathcal{U}, \hat{w}_{j|k} \in \mathcal{W}, \hat{v}_{j|k} \in \mathcal{V}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

For computation tractability, the infinite summations of Ψ_k^∞ have been replaced by backward and forward windows of finite length, corresponding to the estimation Ψ_k^E and control Ψ_k^C part of criterion Ψ_k^N respectively. Ψ_k^E includes N_e terms $\ell_e(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k})$ backward in time from sample k and the extra term $\Gamma_E(\hat{x}_{k-N_e|k})$, known as *arrival-cost*, that summarizes information beyond the estimation window by penalizing the uncertainty in the initial state $\hat{x}_{k-N_e|k}$. On the other hand, Ψ_k^C includes N_c terms $\ell_c(\hat{x}_{j|k}, \hat{u}_{j|k}) - \ell_{w_c}(\hat{w}_{j|k})$ forward in time from sample k and the extra term $\Gamma_C(\hat{x}_{k+N_c|k})$, known as *cost-to-go*, that summarizes the information beyond the control window by penalizing the error of the final state $\hat{x}_{k+N_c|k}$.

The objective of problem (4) is to compute the initial state $\hat{x}_{k-N_e|k}$ and disturbance $\hat{w}_{j|k}$ $j \leq k$ that provides an estimate $\hat{x}_{k|k}$ that allows to compute the control inputs $u_{j|k}$ $j \geq k$ that drive the system states to the desired region. Therefore, there is no point in penalizing the control cost ℓ_c along the estimation window Ψ_k^E . The variables $\hat{v}_{j|k}$ are not independent optimization variables as they are uniquely determined by the remaining optimization variables and the output equation

$$\hat{v}_{j|k} := y_j - h(\hat{x}_{j|k}) \quad \forall j \in [k - N_e, k - N_e + 1, \dots, k].$$

It is usually included into the optimization problem into Ψ_k^N as a measure of the quality of the estimates $\hat{x}_{j|k}$. Since there is no measurement of future system output, $v_{j|k}$ will not be considered along the control window Ψ_k^C . However, the disturbance $w_{j|k}$ needs to be considered along both windows Ψ_k^E and Ψ_k^C because they affect all the state starting from $j = k - N_e + 1$.

Remark 1 *The sequence of process disturbances $\hat{w}_{j|k}$ is minimized when it is part of the estimator, $-N_e \leq j < 0$, and it is maximized when the sequence is part of the controller, $0 \leq j \leq N_c$.*

2.3 Relationship with MPC and MHE

The criterion Ψ_k^N can be rewritten as follows

$$\Psi_k^N := \theta \Psi_k^E + (1 - \theta) \Psi_k^C \quad \theta \in [0, 1], \quad (5)$$

with Ψ_k^E and Ψ_k^C are given by

$$\begin{aligned} \Psi_k^E &:= \Gamma_E(\hat{x}_{k-N_e|k}) + \sum_{j=k-N_e-1}^{j=k-1} \ell_e(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}), \\ \Psi_k^C &:= \Gamma_C(\hat{x}_{k+N_c|k}) + \sum_{j=k}^{k+N_c-1} \left(\ell_c(\hat{x}_{j|k}, \hat{u}_{j|k}) - \ell_{w_c}(\hat{w}_{j|k}) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Ψ_k^E corresponds to the criterion implemented by *MHE* estimator while Ψ_k^C corresponds to the criterion implemented by a *min-max MPC* controller.

Equation (5) corresponds to a weighted sum multi-objective formulation of criterion (4), where θ controls the relative importance of Ψ_k^E within Ψ_k^N . When $\theta = 0$, $\Psi_k^N := \Psi_k^C$ and problem (4) becomes a *robust model predictive control* problem with terminal cost considered by Chen & Allgöwer (1998), given that x_k is measurable or it is provided by an estimator. On the other case, when $\theta = 1$, $\Psi_k^N := \Psi_k^E$ and problem (4) becomes a *moving horizon estimation* problem considered by Ji et al. (2016), Garcia-Tirado et al. (2016), Müller (2017), Deniz et al. (2019), given that the control input $u_{j|k}$ is computed by a controller. In these cases, the optimization problem (4) has only one objective and the separation principle needs to be applied since the estimator and controller are implemented independently.

When $\theta > 0$, Ψ_k^E and Ψ_k^C are simultaneously considered by Ψ_k^N and the optimization problem (4) becomes multi-objective. The importance of Ψ_k^E , and therefore the one of Ψ_k^C , is defined by θ emphasizing or deemphasizing the influence of estimation problem on the solution. In the case of $\theta = 0.5$, Ψ_k^E and Ψ_k^C have similar influence on the solution of (4) and it becomes the problem proposed by Copp & Hespanha (2017).

Definition 1 *A point $z^o \in \mathcal{Z}$, is Pareto optimal iff there does not exist another point $z \in \mathcal{Z}$ such that $\Psi(z) \leq \Psi(z^o)$ and $\Psi^i(z) < \Psi^i(z^o)$ for at least one function (Miettinen 2012).*

According to this concept, problem (4) looks for solutions that neither Ψ_k^E nor Ψ_k^C can be improved without deteriorate of at least one of them. Any optimal solution of problem (4) with $\theta > 0$ is Pareto optimal (Miettinen 2012), therefore it has an optimal trade-off between Ψ_k^E and Ψ_k^C . On the other cases, $\theta = 0$ or $\theta = 1$ the solutions of problem (4) are optimal in the sense of the selected objective (Ψ_k^C or Ψ_k^E , respectively). In these cases, the solutions obtained are not Pareto optimal and, therefore the overall system performance can be poorer than the one provided by solutions of multi-objective problem.

3 Robust stability of simultaneous state estimation and control under bounded disturbances

In this section, we introduce the results regarding feasibility and robust stability of the proposed algorithm. The properties of the estimator and controller parts are analyzed. Besides, feasibility conditions for the existence of a solution to (4), the minimum horizon lengths required to achieve the desired estimation and control performances, are analyzed.

3.1 Backward window

The simultaneous state estimation and control problem rely on a backward window of fixed length N_e to compute the optimal state estimate $\hat{x}_{k|k}$ that will be used by the controller in order to compute the optimal control inputs. The controller takes the estimate $\hat{x}_{k|k}$ as initial condition, which does not necessarily is equal to x_k . Previous results on robust output-feedback MPC with bounded disturbances firstly solve the estimation problem and show the convergence of estimated states to a bounded set, then take the uncertainty of estimation into account when solving the MPC problem (Mayne et al. 2006, 2009). The key idea in these works is to consider the estimation error as an additional, unknown but bounded uncertainty that must be accounted for guaranteeing stability and feasibility of the resulting closed-loop system. This idea is equivalent to assume that the estimation bounded set ($\mathcal{X}_{N_e}^E$) must be included within the robust controllable set ($\mathcal{X}_{N_e}^C$) for all time. The estimation set $\mathcal{X}_{N_e}^E$ is given by

$$\mathcal{X}_{N_e}^E := \left\{ x_k : |x_k - \hat{x}_{k|k}| \leq \varepsilon_e, \forall \hat{x}_{k|k} \right\}, \quad (7)$$

where the error bound ε_e

$$\begin{aligned} \varepsilon_e \leq & \frac{|x_{k-N_e} - \bar{x}_{k-N_e}|^\zeta}{N_e^\eta} \left(\mathbb{C}_{P^{-1}}^\rho \left(c_\beta 18^p + c_1 3^{\alpha_1} \lambda_{\min}^{\alpha_1}(P_0^{-1}) + \right. \right. \\ & \left. \left. c_2 3^{\alpha_2} \lambda_{\min}^{\alpha_1}(P_0^{-1}) \right) + c_\beta 2^p \right) + \\ & \left(\frac{c_\beta 18^p \bar{\gamma}_w^{\frac{p}{a}}(\|\mathbf{w}\|)}{|P_0^{-1}|} + \gamma_1 \left(3 \left(\|\mathbf{w}\| + \underline{\gamma}_w^{-1} (3\bar{\gamma}_w(\|\mathbf{w}\|)) \right) \right) \right) + \\ & c_2 3^{\alpha_2} \bar{\gamma}_w^{\alpha_2}(\|\mathbf{w}\|) + \left(\frac{c_\beta 18^p \bar{\gamma}_v^{\frac{p}{a}}(\|\mathbf{v}\|)}{|P_0^{-1}|} + \right. \\ & \left. \gamma_2 \left(3 \left(\|\mathbf{v}\| + \underline{\gamma}_v^{-1} (3\bar{\gamma}_v(\|\mathbf{v}\|)) \right) \right) + c_1 3^{\alpha_1} \bar{\gamma}_v^{\alpha_1}(\|\mathbf{v}\|) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

whit the matrix P_k^{-1} related to the *arrival-cost* $\Gamma(\hat{x}_{k-N_e|k})$

$$|P_0^{-1}| |\hat{x}_{k-N_e|k} - \bar{x}_{k-N_e}|^a \leq \Gamma_E(\hat{x}_{k-N_e|k}) \leq |P_\infty^{-1}| |\hat{x}_{k-N_e|k} - \bar{x}_{k-N_e}|^a, \quad (9)$$

and $\mathbb{C}_{P^{-1}} := \frac{\lambda_{\max}(P^{-1})}{\lambda_{\min}(P^{-1})}$, with $\lambda_{\min}(P^{-1})$ and $\lambda_{\max}(P^{-1})$ the minimum and maximal eigenvalues of matrix P_k^{-1} for $k \in \mathbb{Z}_{[0, \infty)}$, respectively. The constants $\zeta, \rho, \eta, p, \alpha_1, \alpha_2, a, c_\beta$ and the functions $\bar{\gamma}_w, \gamma_1, \gamma_2$ and $\bar{\gamma}_v$ are chosen properly to satisfy certain assumptions and inequalities. Moreover, if the length of the backwards horizon is chosen as

$$\mathcal{N} \geq \left(\delta^\zeta r_{\max}^{\zeta-1} \mathbb{C}_{P^{-1}}^\rho \left(c_\beta 18^p + \lambda_{\min}^{\alpha_1}(P_0^{-1}) (c_1 3^{\alpha_1} + c_2 3^{\alpha_2}) + c_\beta 2^p \right) \right)^{\frac{1}{\eta}} \quad (10)$$

the bound ε_e behaves contractively due to the effects of initial conditions vanishes. For a detailed explanation, the reader can visit Sánchez et al. (2017), Müller (2017) and Deniz et al. (2019).

From the controller point of view, let us define the robust controllable set in one step via the two-steps recursion (see Kerrigan & Maciejowski (2000) and the references therein) as:

$$\begin{aligned} X_k^* &= \{x \mid \forall w \in \mathcal{W} : x + w \in X_k\} \\ X_{k-1} &= \{x \mid \exists u : (x, u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}, f(x, u) \in X_k^*\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Note that computing (11) recursively, one can calculate the robust controllable set in N_c steps, i.e., $\mathcal{X}_{N_c}^C$.

Assumption 1 *In order to guaranty the feasibility of the simultaneous state estimation and control algorithm, we assume that $\mathcal{X}_{N_e}^E \subseteq \mathcal{X}_{N_c}^C \quad \forall k \geq 0$.*

This assumption guarantees the feasibility of the optimization problem (4) and its fulfillment depends on the parameters of Ψ^C and Ψ^E (see i.e. Kerrigan & Maciejowski 2000, Müller 2017, Deniz et al. 2019, among others), therefore it can be verified a priori by design. The key idea is that every vector belonging to $\mathcal{X}_{N_e}^E$ can be steered in N_c steps to the set X_f of the final constraints control problem. Note that if $\mathcal{X}_{N_e}^E \not\subseteq \mathcal{X}_{N_c}^C$, one can try to enlarge either N_e or N_c . When N_e is enlarged, the volume of the set \mathcal{E}_e is reduced due to the fastest vanishing behaviour of the error due to uncertainties in the initial condition. On the other hand, when N_c is enlarged, the volume of $\mathcal{X}_{N_c}^C$ can be increased. However, it will depend on the dynamic of the system and the constraints.

3.2 Forward window

The forward window corresponds to the model predictive control problem, which from an estimate $\hat{x}_{k|k}$ computes the future optimal control inputs. The length of the control window is selected to guarantee the stability of the system. A common approach is to select a *large enough* window length. However, in order to keep computational burden low, we are interested in computing the minimum horizon length which guarantees stability. The work of Tuna et al. (2006) goes a step forward in this direction and develops a procedure which allows computing the required value of N_c for the nominal case. Here we extend some of these ideas for the case where process disturbances are acting as unmeasurable inputs of bounded amplitude on the system. Before computing the minimum forward window length that guarantees stability for the system, let us state the following assumptions

Assumption 2 *There exist a constant $\gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ such that the terminal cost and the stage cost satisfy the following relation:*

$$\Gamma_C(f(x, u, w)) + \ell(x, u) \leq \Gamma_C(x)(1 + \gamma) + \ell_w(w). \quad (12)$$

Remark 2 *A similar assumption was already used in Tuna et al. (2006), where the constant γ is introduced in order to relax ($\gamma > 0$) the requirement on the function $\Gamma_C(\cdot)$ to be a control Lyapunov function for the nominal case. Here we extend it to the more general case where noise and disturbances are affecting the system.*

Assumption 3 *The stage cost $\ell_c(x, u)$ is lower bounded by a function $\sigma(x) \in \mathcal{K}_\infty$, such that $\sigma(x) \leq \ell_c(x, u) - \ell_{w_c}(w)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, $\forall u \in \mathcal{U}$ and $\forall w \in \mathcal{W}$. Moreover, there exists functions $\underline{\gamma}_x(x)$, $\underline{\gamma}_u(u)$, $\bar{\gamma}_x(x)$ and $\bar{\gamma}_u(u) \in \mathcal{K}_\infty$ such that $\underline{\gamma}_x(x) + \underline{\gamma}_u(u) \leq \ell_c(x, u) \leq \bar{\gamma}_x(x) + \bar{\gamma}_u(u)$, and $\underline{\gamma}_w(w)$, $\bar{\gamma}_w(w) \in \mathcal{K}_\infty$ such that $\underline{\gamma}_w(w) \leq \ell_w(w) \leq \bar{\gamma}_w(w)$.*

Assumption 4 *The cost to go $\Gamma_C(x)$ is lower and upper bounded: $\alpha_\Gamma(x) \leq \Gamma_C(x) \leq \beta_\Gamma(x)$, with $\alpha_\Gamma(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$, $\beta_\Gamma(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$.*

Assumption 5 *There exists a sequence $\{L_i\}$ $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, such that $L_i \in \mathbb{R}$ and $1 \leq L_i \leq L$, $L_0 = 1$ with $L \in \mathbb{R}$ that verifies*

$$\Psi_k^C(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}, \hat{w}_{k|k}, i) \leq L_i \sigma(\hat{x}_{k|k}),$$

With all the elements stated former, we claim that under the fulfilment of Assumptions 1 and 2, the cost function Ψ_k^N of the optimization problem (4) is a regional ISS-Lyapunov function for the closed loop system (1).

Proof. Let us assume that Assumptions 1 and 2 are fulfilled. Recalling Bellman's principle of optimality (Bellman & Kalaba 1965), Ψ_k^N and Ψ_{k+1}^N are compared using the same sequences of states, control actions and disturbances, since the optimal sequences at time k are feasible at time $k + 1$

$$\begin{aligned} \Psi_{k+1}^N - \Psi_k^N &= \Gamma_E(\hat{x}_{k-N_e+1|k+1}) + \sum_{j=k-N_e+1}^{j=k} \ell_e(\hat{w}_{j|k+1}, \hat{v}_{j|k+1}) + \\ &\quad \sum_{j=k+1}^{k+N_c+1} (\ell_c(\hat{x}_{j|k+1}, \hat{u}_{j|k+1}) - \ell_{w_c}(\hat{w}_{j|k+1})) + \\ &\quad \Gamma_C(\hat{x}_{k+N_c+1|k+1}) - \Gamma_E(\hat{x}_{k-N_e|k}) - \\ &\quad \sum_{j=k-1}^{j=k-1} \ell_e(\hat{w}_{j|k}, \hat{v}_{j|k}) - \sum_{j=k}^{k+N_c} (\ell_c(\hat{x}_{j|k}, \hat{u}_{j|k}) - \\ &\quad \ell_{w_c}(\hat{w}_{j|k})) - \Gamma_C(\hat{x}_{k+N_c|k}) \end{aligned} \quad (13)$$

Using Inequality (12) from Assumption 2, Equation (13) can be rewritten as

follows

$$\Psi_{k+1}^N - \Psi_k^N \leq -\ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) + \pi_E(\hat{w}, \hat{v}) + \ell_{w_c}(\hat{w}_{k|k}) + \Gamma_C(\hat{x}_{k+N_c|k})\gamma, \quad (14)$$

or

$$\Psi_{k+1}^N - \Psi_k^N \leq -\ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) \left(1 - \gamma \left(\frac{\Gamma_C(\hat{x}_{k+N_c|k})}{\ell(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})} + \frac{1}{\gamma} \frac{\ell_{w_c}(\hat{w}_{k|k})}{\ell(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})} \right) \right) + \pi_E(\hat{w}, \hat{v}), \quad (15)$$

where $\pi_E(\hat{w}, \hat{v})$ is given by

$$\pi_E(\hat{w}, \hat{v}) := \Gamma_E(\hat{x}_{k-N_e+1|k}) - \Gamma_E(\hat{x}_{k+N_e|k}) + \ell_e(\hat{w}_{k|k}, \hat{v}_{k|k}) - \ell_e(\hat{w}_{k-N_e|k}, \hat{v}_{k-N_e|k}). \quad (16)$$

Note that when $\gamma = 0$, the function $\Gamma_C(\cdot)$ become a ISS-Lyapunov function in the sense defined in Sontag & Wang (1997) (see also Sontag (2008)) \square .

From the first term in the right hand side of (15), one can see that if

$$\gamma \left(\frac{\Gamma_C(\hat{x}_{k+N_c|k})}{\ell(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})} + \frac{1}{\gamma} \frac{\ell_{w_c}(\hat{w}_{k|k})}{\ell(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})} \right) < 1, \quad (17)$$

then, there exists a invariant space which its volume depends on both estimation and control terms and parameters, and the objective function is effectively a regional ISS-Lyapunov function. Assuming that the left hand side of (17) belong to the interval $[0, 1)$, then, the first term of the right hand side of (15) will be always negative. When this term become dominating, the sequence of cost will present a contractive behaviour until it reaches the value of $\pi_E(\hat{w}, \hat{v})$.

We are concerned with analysing inequality (17) as a function of N_c . If such relation exists, we would like to compute the minimum value of N_c that satisfies Inequality (17). As the term $\pi_E(w, v)$ in Inequality (15) regard with the estimation error, it does not affect Inequality (17). Before to continue, let us define a_i, b_i and $c_i \quad \forall j \in \mathbb{Z}_{[0, N_c]}$ as follows

$$\begin{aligned} a_i &:= \frac{\ell_c(\hat{x}_{k+i|k}, \hat{u}_{k+i|k})}{\ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})}, & a_0 &= 1, & a_{N_c} &= \frac{\Gamma_C(\hat{x}_{k+N_c|k})}{\ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})}, \\ b_i &:= \frac{\ell_{w_c}(\hat{w}_{k+i|k})}{\gamma \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})}, & b_{N_c} &= 0, \\ c_i &:= a_i - \gamma b_i. \end{aligned} \quad (18)$$

Then, the control cost at time k with a horizon length equal to N_c , i.e., $\Psi_k^C(\hat{x}, \hat{u}, \hat{w}, N_c)$ can be written as follows

$$\Psi_k^C(\hat{x}, \hat{u}, \hat{w}, N_c) = \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) \sum_{j=0}^{N_c} c_j \quad (19)$$

Note that

$$\begin{aligned} \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) \sum_{j=i}^{N_c} c_j &= \Psi_k^C(\hat{x}, \hat{u}, \hat{w}, N_c) - \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) \sum_{j=0}^{i-1} c_j, \\ &=: \Psi_k^C(\hat{x}_{k+i|k}, \hat{u}_{k+i|k}, \hat{w}_{k+i|k}, N_c - i). \end{aligned} \quad (20)$$

By mean of Assumption 3 and 5, the cost function $\Psi_k^C(\hat{x}, \hat{u}, \hat{w}, N_c - i)$ is bounded by

$$\begin{aligned} \Psi_k^C(\hat{x}_{k+i|k}, \hat{u}_{k+i|k}, \hat{w}_{k+i|k}, N_c - i) &\leq L_{N_c-i} \sigma(\hat{x}_{k+i|k}) \\ &\leq L_{N_c-i} \left(\ell_c(\hat{x}_{k+i|k}, \hat{u}_{k+i|k}) - \ell_w(\hat{w}_{k+i|k}) \right) \\ &\leq L_{N_c-i} \left(\ell_c(\hat{x}_{k+i|k}, \hat{u}_{k+i|k}) + \frac{1}{\gamma} \ell_w(\hat{w}_{k+i|k}) \right), \\ &\leq L_{N_c-i} \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k}) (a_i + b_i) \\ &\sum_{j=i}^{N_c} c_j \leq L_{N_c-i} (a_i + b_i) \end{aligned} \quad (21)$$

Where the third Inequality in (21) holds since $\frac{1}{\gamma} \ell_w(\hat{w}_{k+N_c-i|k}) > -\ell_w(\hat{w}_{k+N_c-i|k})$ and the last follows from (20). Defining \bar{d}_j as follows

$$\bar{d}_j := a_j + \max\{b_j\} = a_j + \frac{\max\{\ell_w(\hat{w}_{[k|k, k+N_c|k]})\}}{\gamma \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})} = a_j + \frac{\ell_w(\|\hat{\mathbf{w}}\|_{[k|k, k+N_c|k]})}{\gamma \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})}, \quad (22)$$

therefore, $a_j + b_j \leq \bar{d}_j$. Replacing $a_i + b_i$ with \bar{d}_i in Inequality (21)

$$\sum_{j=i}^{N_c} c_j \leq \sum_{j=i}^{N_c} \bar{d}_j = (N_c - i + 1) \frac{\ell_w(\|\hat{\mathbf{w}}\|_{[k|k, k+N_c|k]})}{\gamma \ell_c(\hat{x}_{k|k}, \hat{u}_{k|k})} + \sum_{j=i}^{N_c} a_j \leq L_{N_c-i} \bar{d}_i, \quad (23)$$

or

$$\sum_{j=i}^{N_c} \bar{d}_j \leq L_{N_c-i} \bar{d}_i, \quad (24)$$

with a suitable value of L_{N_c-i} . We assume a function $\Omega(L_i, i)$ such that $\bar{d}_{N_c} \leq \Omega(L_{N_c}, N_c)$. Moreover, assuming the existence of such function and given the sequence L_i , we are interested in the values of $i \geq N_c$ such that $\gamma \Omega(L_{N_c}, N_c) \leq 1$, since it will guarantee that Inequality (17) holds due to the fact that $\gamma \bar{d}_{N_c}$

is greater than the value of the left hand side of Inequality (17). Defining $\Omega(L_i, i)$ with the same behaviour as in Tuna et al. (2006), i.e.,

$$\Omega(L_i, N_c) := \bar{d}_0 \prod_{i=1}^{N_c} \frac{L_i - 1}{L_{i-1}}. \quad (25)$$

and taking $N_c = 1$ with $i = 0$, Inequality (24) is reduced to $\bar{d}_0 + \bar{d}_1 \leq L_1 \bar{d}_0$, i.e., $\bar{d}_1 \leq \bar{d}_0 (L_1 - 1)$, and Equation (25) holds. For values of $N_c > 1$, Equation (25) is verified too, a proof of this property can be found in Tuna et al. (2006). Then, \bar{d}_{N_c} is upper bounded by

$$\bar{d}_{N_c} \leq \bar{d}_0 \prod_{i=1}^{N_c} \frac{L_i - 1}{L_{i-1}} \leq \bar{d}_0 \prod_{i=1}^{N_c} \frac{L - 1}{L} \leq \bar{d}_0 (L - 1) \left(\frac{L - 1}{L} \right)^{N_c - 1}, \quad (26)$$

where the last inequality holds since the sequence $(L_i - 1)/L_i$ is strictly increasing.

We have now all the necessary elements to state the following Theorem.

Theorem 1 *Suppose Assumptions 2-5 hold, then, choosing the control horizon length N_c as follows*

$$N_c \geq \lceil 1 + L \ln(\gamma \bar{d}_0 (L - 1)) \rceil \quad (27)$$

the value function of the controller in (15) is a regional ISS-Lyapunov function such that

$$\Gamma_C(f(x, u, w)) - \Gamma_C(x, u) \leq -\ell_c(x, u) (1 - \gamma \Omega(L, N_c)) + \ell_{w_c}(w), \quad (28)$$

Proof. Defining the control horizon N_c^* as follows

$$N_c^* := \lceil 1 + L \ln(\gamma \bar{d}_0 (L - 1)) \rceil, \quad (29)$$

then, from the definition (29)

$$\begin{aligned} N_c^* &\geq 1 + L \ln(\gamma \bar{d}_0 (L - 1)) \\ (N_c^* - 1) \ln(1 + (L - 1)^{-1}) &> \ln(\gamma \bar{d}_0 (L - 1)) \\ 0 &> \ln(\gamma \bar{d}_0 (L - 1)) + (N_c^* - 1) \ln\left(\frac{L-1}{L}\right) \end{aligned} \quad (30)$$

where the second Inequality in (30) holds since

$$\frac{1}{L} < \ln(1 + (L - 1)^{-1}), \quad (31)$$

Taking anti-log function on both side of last inequality of (30)

$$\gamma \bar{d}_0 (L-1) \left(\frac{L-1}{L} \right)^{N_c^*-1} < 1 \quad (32)$$

or

$$\gamma \Omega(L, N_c) < \gamma \bar{d}_0 (L-1) \left(\frac{L-1}{L} \right)^{N_c^*-1} < 1. \quad (33)$$

Hence, from Inequality (32) it follows that $0 < 1 - \gamma \Omega(L, N_c)$, and $\gamma \Omega(L, N_c) < 1$. Therefore, $\Omega(L, N_c) \in (0, 1)$ and equation (28) is a regional ISS-Lyapunov function for the controller $\forall N_c \geq N_c^*$. \square

3.2.1 Computing the value of L

In order to compute the value of L , essential to calculate the length of the horizon from Equation (29), let us note that

$$\begin{aligned} \Psi_k^C(\hat{x}, \hat{u}, \hat{w}, N_c + 1) &= \sum_{j=k}^{k+N_c} \left\{ \ell_c(\hat{x}_{j|k}, \hat{u}_{j|k}) - \ell_{w_c}(\hat{w}_{j|k}) \right\} + \Gamma_C(\hat{x}_{k+N_c+1|k}), \\ &\stackrel{(12)}{\leq} \Psi_k^C((\hat{x}, \hat{u}, \hat{w}), N_c) + \gamma \Gamma_C(\hat{x}_{k+N_c|k}), \end{aligned}$$

when $\gamma \rightarrow 0$ (see (Magni et al. 2006)), $\Psi_k^{N_c}(\hat{x}, \hat{u}, \hat{w}, N_c + 1) \leq \Psi_k^{N_c}(\hat{x}, \hat{u}, \hat{w}, N_c)$. Moreover

$$\Psi_k^C(\hat{x}, \hat{u}, \hat{w}, N_c + 1) \leq \Psi_k^C(\hat{x}, \hat{u}, \hat{w}, N_c) \leq \dots \leq \Psi_k^C(\hat{x}, \hat{u}, \hat{w}, 1)$$

since $\Psi_k^C(\hat{x}, \hat{u}, \hat{w}, 1) = \Gamma_C(x) \leq \beta_\Gamma(x)$ from Assumption 4.

Recalling that $\sigma(x) \leq \Psi_k^C(x, u, w, N_c) \leq L\sigma(x)$, one can approximate L as the quotient between the upper and lower bound functions as follows

$$L \geq \left\lceil \frac{\beta_\Gamma(x)}{\sigma(x)} \right\rceil, \quad (34)$$

or by mean of Assumption 3

$$L \geq \left\lceil \frac{\beta_\Gamma(x)}{\underline{\gamma}_x(x) + \underline{\gamma}_u(u) - \underline{\gamma}_w(w)} \right\rceil. \quad (35)$$

4 Examples

In this section, we demonstrate how the proposed framework improve the overall performance of a nonlinear system via simulations. The nonlinear model

was originally used by Rao et al. (2003), whose dynamic behavior is given by

$$\begin{aligned}x_{k+1}^{(1)} &= 0.99x_k^{(1)} + 0.2x_k^{(2)} + u_k \\x_{k+1}^{(2)} &= -0.1x_k^{(1)} + \frac{0.5x_k^{(2)}}{1 + (x_k^{(2)})^2} + w_k \\y_k &= x_k^{(1)} - 3x_k^{(2)} + v_k.\end{aligned}$$

The control inputs u_k is constrained to the set $|u_k| \leq 0.25 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ and the additive process and measurement noises w and v are drawn from normal distributions with zero mean and covariances $S_w^2 = 1$ and $S_v^2 = 0.5$, respectively.

For the simultaneous *MHE* and *MPC* algorithm (*MHE/MPC*) (4) the estimation $\ell_e(\cdot, \cdot)$, control $\ell_c(\cdot, \cdot)$ and disturbance $\ell_{w_c}(\cdot)$ stage costs are chosen as follows

$$\begin{aligned}\ell_e(\hat{w}, \hat{v}) &= w_{j|k}^T Q_w w_{j|k} + R_v v_{j|k}^2 \quad j \in [k - N_e, k - 1], \\ \ell_c(\hat{x}, \hat{u}) &= x_{j|k}^T Q_x x_{j|k} + R_u u_{j|k}^2 \quad j \in [k, k + N_c], \\ \ell_{w_c}(\hat{w}) &= w_{j|k}^T Q_{w_c} w_{j|k},\end{aligned}\tag{36}$$

with $Q_w = 50I_2$, $R_v = 50$, $Q_x = 50I_2$, $R_u = 1$ and $Q_{w_c} = (1/N_c)I_2$, respectively. The arrival-cost $\Gamma_E(\hat{x}_{k-N_e|k})$ is computed using the adaptive algorithm proposed by Sánchez et al. (2017) with $\sigma = 0.1$ and $c = 1e6$. The cost-to-go $\Gamma_C(\hat{x}_{k-N_c|k})$ is chosen as $\Gamma_C(\hat{x}_{k-N_c|k}) = \hat{x}_{k-N_c|k}^T P_c \hat{x}_{k-N_c|k}$ with $P_c = 100I_2$. The remaining parameters of the cost function Ψ_k^N are chosen as $N_e = 5$ and $N_c = 5$. The independent *MHE* and *MPC* algorithms (*MHE+MPC*) use the same parameters than the simultaneous algorithm. The parameters were chosen in this way in order to evaluate the effect of simultaneously solve, or not, the estimation and control problems. For both simulations we use a multiple shooting strategy with sampling time of $\Delta = 1$ and we add the restriction $|\hat{x}_{k-N_c|k}| \leq \delta$, where δ is equal to the double of the sum of process and measurement noises bounds.

Figure 1 shows the time evolution of the system states x_k controlled by the simultaneous and independent *MHE/MPC* algorithms. Both states of the system controlled by the simultaneous algorithm (blue triangles) converge to zero and then regulate the effect of process disturbance. On the other hand, $x_k^{(2)}$ of the system controlled by the independent *MHE* and *MPC* algorithms (red circles) converges to zero and then regulate the effect of process disturbance. The other state $x_k^{(1)}$ slowly drifts away until the system lost controllability due to the saturation of the manipulated variable u_k (see Figure 2). These phenomenon is due to problems in the estimator, who only aims to minimize its cost function Ψ_k^E without regarding the effects on the control problem. This approach leads to the saturation of the control input and the lose of system controllability.

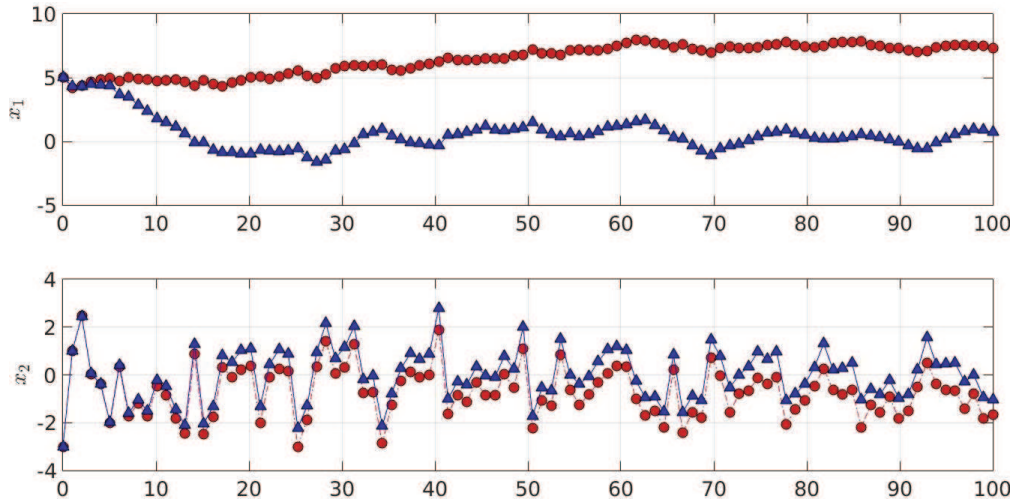


Fig. 1. Comparison of system state x_k between simultaneous (blue triangles) and separate (red circles) *MHE-MPC* algorithms.

Figure 2 shows the time evolution of the manipulated variable u_k for both systems: the simultaneous and independent *MHE/MPC* algorithm. The inputs computed by the independent *MHE/MPC* algorithms hit the input constraint almost permanently throughout the simulation, forcing the loss of system controllability. On the other hand, the inputs computed by the simultaneous *MHE/MPC* algorithm hit the input constraint only several times throughout the simulation.

Figure 3 shows the time evolution of the optimization costs Ψ_k^N computed by the simultaneous and independent *MHE/MPC* algorithms. The optimization costs of the simultaneous algorithm Ψ_k^N show a decreasing behaviour through the samples with occasional jumps throughout the simulation introduced by

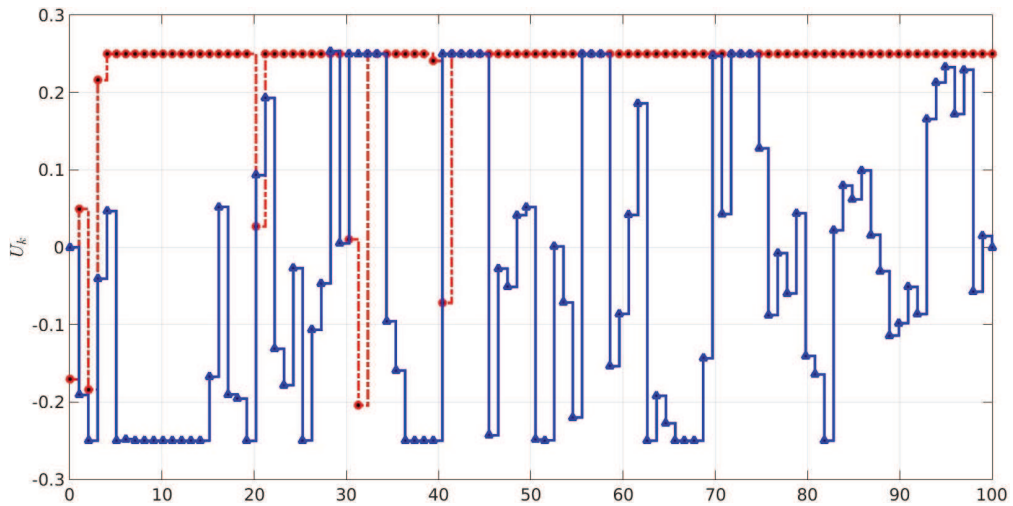


Fig. 2. Comparison of control inputs u_k between simultaneous (blue triangles) and separate (red circles) *MHE-MPC* algorithms.

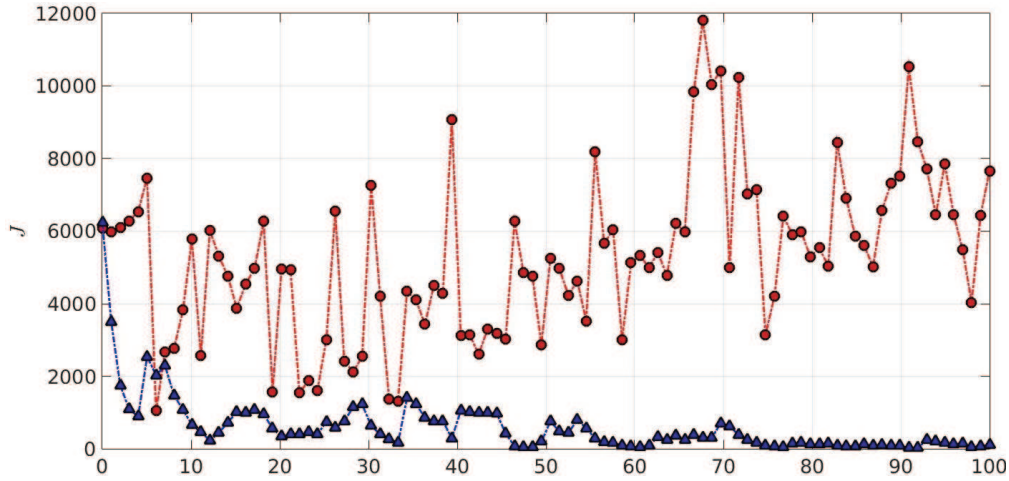


Fig. 3. Comparison of optimization costs between simultaneous Ψ_k^N (blue triangles) and the sum of separate (red circles) *MHE-MPC* $\Psi_k^E + \Psi_k^C$ algorithms.

large values of the process noise w_k . On the other hand, the sum optimization costs $\Psi_k^E + \Psi_k^C$ of the independent algorithms show a continuous drift in its mean value with superimpose jumps introduced by the process noise

5 Conclusions

In this work, we address the challenge to solve simultaneously the problem of estimation and control for nonlinear systems subject to bounded disturbances. We have investigated the necessary conditions to guaranty the feasibility of the problem. Moreover, the minimum horizon length required for the estimator in order to neglect the effects of uncertainty in the initial conditions is given. The effects of the length of the control horizon are analyzed as well, and an expression for the minimum length of the control horizon required to guaranty stability is given.

Acknowledgements

The authors wish to thank the Consejo Nacional de Investigaciones Cientificas y Tecnicas (CONICET) from Argentina, for their support.

References

- Alessandri, A., Baglietto, M. & Battistelli, G. (2005), ‘Robust receding-horizon state estimation for uncertain discrete-time linear systems’, *Systems & Control Letters* **54**(7), 627–643.
- Alessandri, A., Baglietto, M. & Battistelli, G. (2008), ‘Moving-horizon state estimation for nonlinear discrete-time systems: New stability results and approximation schemes’, *Automatica* **44**(7), 1753–1765.
- Alessandri, A., Baglietto, M. & Battistelli, G. (2012), ‘Min-max moving-horizon estimation for uncertain discrete-time linear systems’, *SIAM Journal on Control and Optimization* **50**(3), 1439–1465.
- Allan, D. A. & Rawlings, J. B. (2019), A lyapunov-like function for full information estimation, in ‘2019 American Control Conference (ACC)’, IEEE, pp. 4497–4502.
- Åström, K. J. (2012), *Introduction to stochastic control theory*, Courier Corporation.
- Bellman, R. & Kalaba, R. E. (1965), *Dynamic programming and modern control theory*, Vol. 81, Citeseer.
- Bemporad, A., Borrelli, F. & Morari, M. (2003), ‘Min-max control of constrained uncertain discrete-time linear systems’, *IEEE Transactions on automatic control* **48**(9), 1600–1606.
- Bemporad, A. & Morari, M. (1999), Robust model predictive control: A survey, in ‘Robustness in identification and control’, Springer, pp. 207–226.
- Bensoussan, A. (2004), *Stochastic control of partially observable systems*, Cambridge University Press.
- Camacho, E. & Alba, B. (2004), ‘Model predictive control’.
- Chen, H. & Allgöwer, F. (1998), ‘A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability’, *Automatica* **34**(10), 1205–1217.
- Copp, D. A. & Hespanha, J. P. (2014), Nonlinear output-feedback model predictive control with moving horizon estimation, in ‘53rd IEEE conference on decision and control’, IEEE, pp. 3511–3517.
- Copp, D. A. & Hespanha, J. P. (2016a), Conditions for saddle-point equilibria in output-feedback mpc with mhe, in ‘2016 American Control Conference (ACC)’, IEEE, pp. 13–19.
- Copp, D. A. & Hespanha, J. P. (2017), ‘Simultaneous nonlinear model predictive control and state estimation’, *Automatica* **77**, 143–154.
- Copp, D. & Hespanha, J. (2016b), Addressing adaptation and learning in the context of model predictive control with moving-horizon estimation, in ‘Control of Complex Systems’, Elsevier, pp. 187–209.
- Deniz, N. N., Murillo, M. H., Sanchez, G., Genzelis, L. M. & Giovanini, L. (2019), ‘Robust stability of moving horizon estimation for nonlinear systems with bounded disturbances using adaptive arrival cost’, *arXiv preprint arXiv:1906.01060*.
- Duncan, T. & Varaiya, P. (1971), ‘On the solutions of a stochastic control

-
- system', *SIAM Journal on Control* **9**(3), 354–371.
- Ellis, M., Liu, J. & Christofides, P. D. (2017), State estimation and empc, in 'Economic Model Predictive Control', Springer, pp. 135–170.
- Findeisen, R., Imsland, L., Allgöwer, F. & Foss, B. A. (2003), 'State and output feedback nonlinear model predictive control: An overview', *European journal of control* **9**(2-3), 190–206.
- Garcia-Tirado, J., Botero, H. & Angulo, F. (2016), 'A new approach to state estimation for uncertain linear systems in a moving horizon estimation setting', *International Journal of Automation and Computing* **13**(6), 653–664.
- Georgiou, T. T. & Lindquist, A. (2013), 'The separation principle in stochastic control, redux', *IEEE Transactions on Automatic Control* **58**(10), 2481–2494.
- Grüne, L. & Pannek, J. (2011), 'Nonlinear model predictive control. communications and control engineering', *Springer. doi* **10**, 978–0.
- Ji, L., Rawlings, J. B., Hu, W., Wynn, A. & Diehl, M. (2015), 'Robust stability of moving horizon estimation under bounded disturbances', *IEEE Transactions on Automatic Control* **61**(11), 3509–3514.
- Ji, L., Rawlings, J. B., Hu, W., Wynn, A. & Diehl, M. (2016), 'Robust stability of moving horizon estimation under bounded disturbances', *IEEE Transactions on Automatic Control* **61**(11), 3509–3514.
- Kerrigan, E. C. & Maciejowski, J. M. (2000), Invariant sets for constrained nonlinear discrete-time systems with application to feasibility in model predictive control, in 'Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 00CH37187)', Vol. 5, IEEE, pp. 4951–4956.
- Magni, L., De Nicolao, G., Scattolini, R. & Allgöwer, F. (2003), 'Robust model predictive control for nonlinear discrete-time systems', *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal* **13**(3-4), 229–246.
- Magni, L., Raimondo, D. M. & Allgöwer, F. (2009), 'Nonlinear model predictive control', *Lecture Notes in Control and Information Sciences* (384).
- Magni, L., Raimondo, D. M. & Scattolini, R. (2006), 'Regional input-to-state stability for nonlinear model predictive control', *IEEE Transactions on automatic control* **51**(9), 1548–1553.
- Mayne, D. (2016), 'Robust and stochastic model predictive control: Are we going in the right direction?', *Annual Reviews in Control* **41**, 184–192.
- Mayne, D. Q. (2014), 'Model predictive control: Recent developments and future promise', *Automatica* **50**(12), 2967–2986.
- Mayne, D. Q., Raković, S., Findeisen, R. & Allgöwer, F. (2006), 'Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems', *Automatica* **42**(7), 1217–1222.
- Mayne, D. Q., Raković, S., Findeisen, R. & Allgöwer, F. (2009), 'Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems: Time varying case', *Automatica* **45**(9), 2082–2087.
- Miettinen, K. (2012), *Nonlinear multiobjective optimization*, Vol. 12, Springer Science & Business Media.

-
- Müller, M. A. (2017), ‘Nonlinear moving horizon estimation in the presence of bounded disturbances’, *Automatica* **79**, 306–314.
- Patwardhan, S. C., Narasimhan, S., Jagadeesan, P., Gopaluni, B. & Shah, S. L. (2012), ‘Nonlinear bayesian state estimation: A review of recent developments’, *Control Engineering Practice* **20**(10), 933–953.
- Raimondo, D. M., Limon, D., Lazar, M., Magni, L. & ndez Camacho, E. F. (2009), ‘Min-max model predictive control of nonlinear systems: A unifying overview on stability’, *European Journal of Control* **15**(1), 5–21.
- Rao, C. V., Rawlings, J. B. & Lee, J. H. (2001), ‘Constrained linear state estimationona moving horizon approach’, *Automatica* **37**(10), 1619–1628.
- Rao, C. V., Rawlings, J. B. & Mayne, D. Q. (2003), ‘Constrained state estimation for nonlinear discrete-time systems: Stability and moving horizon approximations’, *IEEE transactions on automatic control* **48**(2), 246–258.
- Rawlings, J. B. & Bakshi, B. R. (2006), ‘Particle filtering and moving horizon estimation’, *Computers & chemical engineering* **30**(10-12), 1529–1541.
- Rawlings, J. B. & Mayne, D. Q. (2009), *Model predictive control: Theory and design*, Nob Hill Pub. Madison, Wisconsin.
- Roset, B., Lazar, M., Nijmeijer, H. & Heemels, W. (2006), Stabilizing output feedback nonlinear model predictive control: An extended observer approach, in ‘17th Symposium on Mathematical Theory for Networks and Systems. Kyoto, Japan’, Citeseer.
- Sánchez, G., Murillo, M. & Giovanini, L. (2017), ‘Adaptive arrival cost update for improving moving horizon estimation performance’, *ISA transactions* **68**, 54–62.
- Schweppe, F. C. (1973), *Uncertain dynamic systems*, Prentice Hall.
- Sontag, E. D. (2008), Input to state stability: Basic concepts and results, in ‘Nonlinear and optimal control theory’, Springer, pp. 163–220.
- Sontag, E. D. & Wang, Y. (1997), ‘Output-to-state stability and detectability of nonlinear systems’, *Systems & Control Letters* **29**(5), 279–290.
- Tuna, S. E., Messina, M. J. & Teel, A. R. (2006), Shorter horizons for model predictive control, in ‘2006 American Control Conference’, IEEE, pp. 6–pp.
- Voelker, A., Kouramas, K. & Pistikopoulos, E. N. (2010), ‘Unconstrained moving horizon estimation and simultaneous model predictive control by multi-parametric programming’.
- Voelker, A., Kouramas, K. & Pistikopoulos, E. N. (2013), ‘Moving horizon estimation: Error dynamics and bounding error sets for robust control’, *Automatica* **49**(4), 943–948.
- Zhang, J. & Liu, J. (2013), ‘Lyapunov-based mpc with robust moving horizon estimation and its triggered implementation’, *AIChE Journal* **59**(11), 4273–4286.

Anexo D

Towards autonomy in unmanned vehicles using receding horizon strategies

Towards autonomy in unmanned vehicles using receding horizon strategies

Marina H. Murillo^a, Guido Sanchez^a, Nestor N. Deniz^a,
Lucas Genzelis^a, Leonardo L. Giovanini^a

^a*Instituto de Investigacion en Senales, Sistemas e Inteligencia Computacional,
sinc(i), UNL, CONICET, Ciudad Universitaria UNL, 4to piso FICH, (S3000)
Santa Fe, Argentina*

Model predictive control, Moving horizon estimation, Receding
horizon techniques, Unmanned vehicle.

Abstract

In this article we propose to use receding horizon strategies, like model predictive control (MPC) and moving horizon estimation (MHE), to design guidance, navigation and path-planning tasks, which play an essential role in autonomy of unmanned vehicles. As we propose to design these tasks using MPC and MHE, the physical and dynamical constraints can be included at the design stage, thus leading to optimal and feasible results. In order to evaluate the performance of the proposed framework, we have used Gazebo simulator in order to drive a Jackal unmanned ground vehicle (UGV) along a desired path computed by the path-planning module. The results we have obtained are successful as the estimation and guidance errors are small and the Jackal UGV is able to follow the desired path satisfactorily and it is also capable to avoid the obstacles which are in its way.

1 INTRODUCTION

Autonomous unmanned vehicles (UVs) are capable to perform a set of predefined tasks without human interaction. In order to do this, these vehicles

Email addresses: mmurillo@sinc.unl.edu.ar (Marina H. Murillo),
gsanchez@sinc.unl.edu.ar (Guido Sanchez), ndeniz@sinc.unl.edu.ar (Nestor
N. Deniz), lgenzelis@sinc.unl.edu.ar (Lucas Genzelis),
lgiovanini@sinc.unl.edu.ar (Leonardo L. Giovanini).

should be able of sensing their environment to measure their positions, velocities and detect if there are obstacles in their proximity so as to navigate through the environment and achieve the targeted positions to perform the tasks. The execution of these tasks involves the acquisition and processing of a wide variety of sensors, as well as the solution of coupled optimization problems at different time scales. In this context, these activities can be organized in three interrelated tasks (See Fig. 1): i) **Guidance**, ii) **Navigation**, and iii) **Path-planning**.

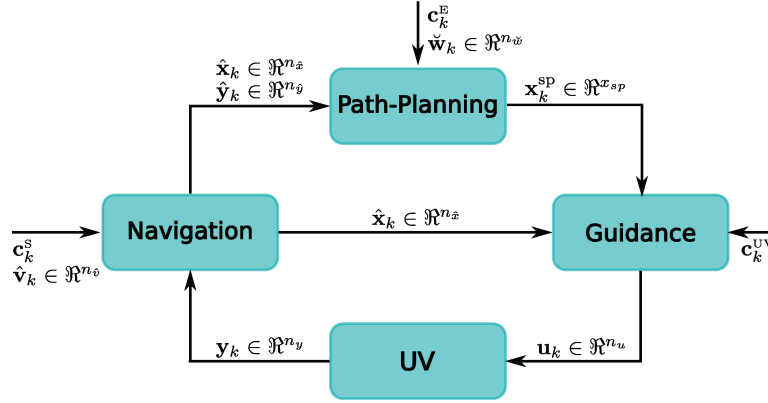


Fig. 1. Tasks interaction scheme

The guidance task refers to the control of the position, attitude and velocity of a vehicle along a pre-defined path. To do this, a suitable control algorithm should be used in order to compute which actuators' deflections and/or motors' speeds the vehicle should have so as to accomplish a certain mission. A wide range of control techniques have been tested, ranging from classical to modern ones. Proportional-integral-derivative (PID) control is indeed the most popular control technique used to control UVs. This is mainly due to its simplicity and because its parameters are easy to adjust. Several works dealing with PID control of UV have been found in the specialized literature (Zhao et al. 2012). However, when using a PID controller a decoupled version of the mathematical model of the UV is used. This may lead to unexpected results in the presence of disturbances and even limit its performance due to unmodelled dynamics. Another technique that has been successfully applied to control UVs is the linear quadratic regulator (LQR) control algorithm (Khamseh & Janabi-Sharifi 2017). Within optimal control techniques model predictive control (MPC) can be found. Unlike LQR, the MPC algorithm allows to include constraints in the optimization problem. This is very useful as physical and dynamical characteristics of the vehicle and different types of obstacles can be taken into account just by the inclusion of proper constraints in the minimization stage (Hang et al. 2017).

The navigation task aims to solve the problem of determining the position, velocity and orientation of a vehicle in space using different sources of in-

formation (inertial measurement units, GPS, among others). Traditionally, the Extended Kalman Filter (EKF) (Roumeliotis & Bekey 1999), Unscented Kalman Filter (UKF) (Rhudy et al. 2013) or the Particle Filter (PF) (Cheng & Crassidis 2004) are used to solve the navigation problem. Recently, the use of non-linear observers such as MHE have been proposed as an alternative to the different types of Kalman filters and statistical methods (Grip et al. 2012, Vandersteen et al. 2013). Both EKF and MHE are based on the solution of a least-squares problem. While EKF uses recursive updates to obtain the estimates and the error covariance matrix, MHE uses a finite horizon window and solve a constrained optimization problem to find the estimates. In this way, the physical limits of the system states and parameters can be modeled through the optimization problem's constraints. The omission of this information can degrade the estimation algorithm performance (Haseltine & Rawlings 2005).

The path-planning task deals with searching a feasible path between the present location and the desired target while taking into consideration the geometry of the vehicle and its surroundings, its kinematic constraints and other factors that may affect the feasible path. Different methodologies are used to find feasible paths (LaValle 2006, Saska et al. 2015, Xue et al. 2014), however, most of them do not consider the dynamics of the UV that should follow the path. In their review article, Yang et al. (2016) have surveyed different path-planning algorithms. The authors discuss the fundamentals of the most successful robot 3D path-planning algorithms that have been developed in recent years. They mainly analyze algorithms that can be implemented in aerial robots, ground robots and underwater robots. They classify the different algorithms into five categories: i) sampling based algorithms, ii) node based algorithms, iii) mathematical model based algorithms (which include optimal control and receding horizon strategies), iv) bioinspired algorithms, and v) multifusion based algorithms. From these, only mathematical model based algorithms are able to incorporate in a simple way both the environment (kinematic constraints) and the vehicle dynamics in the path-planning process.

As it can be seen, there are a wide range of techniques that can be used to implement the guidance, navigation and path-planning tasks. In this article we propose to use a unified framework based on receding horizon techniques to design the three aforementioned tasks. To design the path-planning and guidance modules we propose the use of the MPC algorithm (Murillo et al. 2016), and to solve the navigation task we propose the use of the MHE algorithm (Sánchez, Murillo & Giovanini 2017). In this way, physical and dynamical constraints can be considered in the path-planning, guidance and estimation stages. The advantages of using the proposed framework are: i) the obtained path is guaranteed to be optimal and feasible, ii) the estimates of states and parameters of the system are improved as they are guaranteed to satisfy phys-

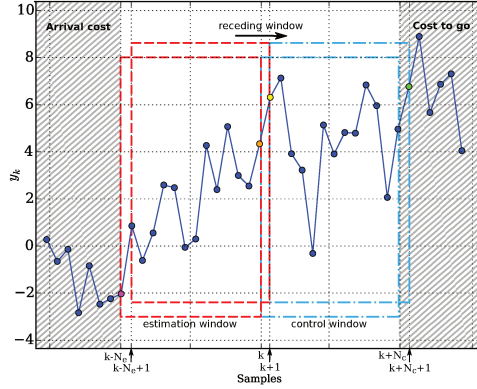


Fig. 2. Scheme of the receding horizon principle

ical limits, iii) the position of actuators and motors' speeds are computed in an optimal fashion satisfying their physical limits, and iv) the three modules are in state-space form which is very useful when working with multiple-input multiple-output (MIMO) systems.

This article is organized as follows. In Section 2 we provide a general overview of receding horizon techniques. In Section 3 the guidance problem is formulated. In Section 4 the way in which we estimate states and parameters is presented. The path-planning problem is described in Section 5. Simulation results are presented in Section 6. Finally, conclusions are stated in Section 7.

2 Receding horizon principle

The main objective of receding horizon techniques is to solve an explicit inverse problem that allows the incorporation, at the design stage, of different types of constraints to obtain the best feasible solution. For both control and estimation, the inverse problem to solve is the minimization of a cost function that quantifies the performance of the system (for control case) and how well we estimate unknown states and parameters (for estimation case). This constrained minimization process is done over a fixed-time horizon window of a certain length. This is shown in Fig. 2 for time k , being the cyan dashed-dot line the control window of length N_e and the red dashed line the estimation window of length N_e . The arrival cost provides a mean to incorporate information from previous measurements to the current estimates and the cost to go includes the missing information due to the use of a finite horizon approach. At the next sampling instant $k + 1$, new information is included and old one is discarded by shifting both windows one step in time and the constrained minimization process is restarted at the next sampling instant. This is also shown in Fig. 2 for time $k + 1$.

When we refer to a control receding strategy we think in model predictive

control. For control case, we generally solve at each sampling instant, a constrained minimization problem of the form

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{U}_{k|k}} \mathcal{J}_{\text{MPC}} \\ \text{st. } & \begin{cases} \mathbf{x}_{k+i+1|k} = f(\mathbf{x}_{k+i|k}, \mathbf{u}_{k+i|k}), \\ \mathbf{x}_{k|k} = \mathbf{x}(k), \\ \mathbf{u}_{k+i|k} \in \mathcal{U}, \quad \mathbf{x}_{k+i|k} \in \mathcal{X}, \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

where \mathcal{J}_{MPC} denotes the cost function to be minimized, $i \in [0, 1, \dots, N_c - 1]$, $\mathbf{x}_{k+i|k} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ is the state vector, $\mathbf{u}_{k+i|k} \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n_u}$ is the control input vector, \mathcal{X} and \mathcal{U} are the state and input constraint sets, respectively, $\mathbf{U}_{k|k} = [\mathbf{u}_{k|k}, \dots, \mathbf{u}_{k+N_c-1|k}]^T$ is the control input sequence and $f(\cdot)$ is a continuous and differentiable vector function that describes the dynamics of the system. The solution of Eq. (1) is an optimal control input sequence (denoted here with an asterisk) $\mathbf{U}_{k|k}^* = [\mathbf{u}_{k|k}^*, \dots, \mathbf{u}_{k+N_c-1|k}^*]^T$, but only the first control input of this sequence is applied to the system, i.e. $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{k|k}^*$. Then, the horizon is shifted forward to the next sampling instant ($k \leftarrow k + 1$) in a receding horizon fashion, discarding old information but including the new one, thus compensating for unmeasured disturbances and/or unmodelled dynamics. As the reader can see, the cost function \mathcal{J}_{MPC} in Eq. (1) plays a key role in obtaining the optimal control sequence and it should be carefully designed in order to fulfill the goals of the system. The different cost functions used to design the guidance and path-planning tasks will be properly defined in Section 3 and 5, respectively.

To perform states and/or parameters estimation in a receding horizon fashion we use moving horizon estimation. In this case, we also solve a constrained minimization problem at each sampling instant but the solution obtained is different from the previous one as it includes estimates of states, parameters and noises. The MHE problem has the following form

$$\begin{aligned} & \min_{\hat{\mathbf{x}}_{k-N_e|k}, \hat{\mathbf{W}}_{k|k}} \mathcal{J}_{\text{MHE}} \\ \text{s.t. } & \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k+i+1|k} = \bar{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k+i|k}, \hat{\mathbf{z}}_{k+i|k}, \hat{\mathbf{w}}_{k+i|k}), \\ \hat{\mathbf{y}}_{k+i|k} = \bar{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k+i|k}, \hat{\mathbf{v}}_{k+i|k}), \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+i|k} \in \bar{\mathcal{X}}, \quad \hat{\mathbf{z}}_{k+i|k} \in \bar{\mathcal{Z}}, \\ \hat{\mathbf{w}}_{k+i|k} \in \bar{\mathcal{W}}, \quad \hat{\mathbf{v}}_{k+i|k} \in \bar{\mathcal{V}}, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

where \mathcal{J}_{MHE} denotes the cost function to be minimized, the hat ($\hat{\cdot}$) denotes *estimated* value, $i \in [-N_e, \dots, -1]$, $\hat{\mathbf{x}}_{k+i|k} \in \bar{\mathcal{X}} \subseteq \mathbb{R}^{n_{\hat{x}}}$, $\hat{\mathbf{z}}_{k+i|k} \in \bar{\mathcal{Z}} \subseteq \mathbb{R}^{n_{\hat{z}}}$ stand

for the estimated state and algebraic state vectors, respectively, $\hat{\mathbf{w}}_{k+i|k} \in \bar{\mathcal{W}} \subseteq \mathfrak{R}^{n_{\hat{w}}}$ and $\hat{\mathbf{v}}_{k+i|k} \in \bar{\mathcal{V}} \subseteq \mathfrak{R}^{n_{\hat{v}}}$ are the estimated process and measurement noises vectors, respectively, $\hat{\mathbf{y}}_{k+i|k} \in \bar{\mathcal{Y}} \subseteq \mathfrak{R}^{n_{\hat{y}}}$ is the measurement vector, \bar{f} and \bar{h} are differentiable vector functions that define the system dynamics and the measurement equation, respectively, $\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Z}}, \bar{\mathcal{W}}, \bar{\mathcal{V}}$ and $\bar{\mathcal{Y}}$ are the state, algebraic state, process noise, measurement noise and measurement vector constraints sets, respectively. The solution of problem of Eq. (2) are the optimal sequences $\hat{\mathbf{X}}_{k|k}^* = [\hat{\mathbf{x}}_{k-N_e+1|k}^*, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^*]^T$ and $\hat{\mathbf{W}}_{k|k}^* = [\hat{\mathbf{w}}_{k-N_e|k}^*, \dots, \hat{\mathbf{w}}_{k|k}^*]^T$, from where we extract the current estimates, i.e. $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}^*$ and $\hat{\mathbf{w}}_k = \hat{\mathbf{w}}_{k|k}^*$. Then, the estimation window is shifted forward to the next sampling instant ($k \leftarrow k+1$) in order to drop the oldest measurement and to include the current one, and the minimization process is restarted. In this case, the cost function \mathcal{J}_{MHE} also plays a key role in the behaviour of the MHE algorithm, and it should be carefully chosen in order to obtain the best estimates as possible. The cost function used in the navigation task will be properly described in Section 4.

3 The guidance problem

To design the guidance task, we propose to solve Eq. (1) using the following cost function:

$$\mathcal{J}_g = \sum_{j=0}^{N_g-1} \left(\|\mathbf{x}_{k+j|k} - \mathbf{x}_{k+j|k}^{\text{sp}}\|_{\mathbf{Q}}^2 + \|\Delta \mathbf{u}_{k+j|k}\|_{\mathbf{R}}^2 \right) + \|\mathbf{x}_{k+N_g|k} - \mathbf{x}_{k+N_g|k}^{\text{sp}}\|_{\mathbf{P}}^2, \quad (3)$$

where N_g is the guidance prediction horizon, \mathbf{Q} , \mathbf{R} and \mathbf{P} are positive definite matrices. $\|(\cdot)\|_{\alpha}^2$ stands for the *alpha*-weighted 2-norm, $\Delta \mathbf{u}_{k+j|k} = \mathbf{u}_{k+j|k} - \mathbf{u}_{k+j-1|k}$ and $\mathbf{x}_{k+j|k}^{\text{sp}}$ is the desired path which is computed by the path-planning task.

To test the guidance task, we propose to use a Jackal¹ unmanned ground vehicle (UGV), which is a small, fast, entry-level field robotics research platform. We need to emphasize that we do not know the exact mathematical model of the Jackal UGV, however, we do know that it is a complex model simulated by Gazebo simulator². We propose to model Jackal UGV with the mathematical model of a differential drive UGV. This last model is very simple, but for us is the best model at hand and, as it will be shown in the simulation example, it will allow us to control accurately the Jackal UGV along the pre-defined path. The mathematical model of the differential drive UGV can be written

¹ <https://clearpathrobotics.com/jackal-small-unmanned-ground-vehicle/>

² <http://gazebo.org/>

as follows:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t)) = \begin{bmatrix} \tilde{v}(t) \cos \tilde{\psi}(t) \\ \tilde{v}(t) \sin \tilde{\psi}(t) \\ \tilde{\omega}(t) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

where $\tilde{\mathbf{x}}(t) = [\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{\psi}(t)]^T$ and $\tilde{\mathbf{u}}(t) = [\tilde{v}(t), \tilde{\omega}(t)]^T$ are the UGV state and control input vectors, respectively, $\tilde{x}(t)$ and $\tilde{y}(t)$ denote the UGV xy -position, $\tilde{\psi}(t)$ denotes its yaw angle, $\tilde{v}(t)$ and $\tilde{\omega}(t)$ stands for the UGV linear and angular velocities, respectively. As it can be seen, Eq. (4) is expressed in its continuous-time form, but in order to be used in Eq. (1) it should be in its discrete-time form. We have solved this issue using a discretization method called *collocation* since it provides great accuracy at a relatively low computational cost (Sánchez, Murillo, Genzelis, Deniz & Giovanini 2017).

4 The navigation problem

In order to design the navigation task, we propose to solve Eq. (2) with the following cost function

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n = & P_0(1 - \|\hat{q}_b^n(k - N_e)\|_2^2) + \|\hat{\mathbf{x}}_{k-N_e|k} - \bar{\mathbf{x}}_{k-N_e|k}\|_{\mathbf{P}_1}^2 + \\ & \|\hat{\mathbf{z}}_{k-N_e|k} - \bar{\mathbf{z}}_{k-N_e|k}\|_{\mathbf{P}_2}^2 + \sum_{j=-N_e}^0 \left(\|\hat{\mathbf{w}}_{k+j|k}\|_{\mathbf{Q}_w}^2 + \|\hat{\mathbf{v}}_{k+j|k}\|_{\mathbf{R}_v}^2 \right) \end{aligned} \quad (5)$$

where N_e is navigation prediction horizon, \mathbf{Q}_w and \mathbf{R}_v are symmetric positive definite matrices that penalize the estimated noise vectors $\hat{\mathbf{w}}_{k+j|k}$ and $\hat{\mathbf{v}}_{k+j|k}$, respectively, $\bar{\mathbf{x}}_{k-N_e|k}$ and $\bar{\mathbf{z}}_{k-N_e|k}$ are the current knowledge of the initial states and algebraic states estimates, respectively, P_0 is a positive constant which penalizes the deviations of the quaternion \hat{q}_b^n which must have unit norm, and \mathbf{P}_1 and \mathbf{P}_2 are symmetric positive semi-definite weighting matrices.

Using the equations that describe the rigid body dynamics (for a detailed description, see Polóni et al. (2015)), the mathematical model used in the navigation task can be written in Earth-Centered Earth-Fixed (ECEF) coordinates as follows:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{z}(t), \mathbf{w}(t)) = \begin{bmatrix} v^e(t) \\ -2S(\omega_{ie}^e(t))v^e(t) + a^e(t) + g^e(p^e(t)) \\ \frac{1}{2}q_b^e(t) \cdot \tilde{\omega}_{ib}^b(t) - \frac{1}{2}\tilde{\omega}_{ie}^e(t) \cdot q_b^e(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

where $\mathbf{x}(t) = [p^n(t), v^n(t), q_b^n(t), \alpha(t), \beta(t)]^T$ and $\mathbf{z}(t) = [\omega^b(t), a^n(t)]^T$ are the state vector and the algebraic state vector, respectively, $p^n(t) \in \mathfrak{R}^3$ is the position, $v^n(t) \in \mathfrak{R}^3$ is the linear velocity, the quaternion $q_b^n(t) \in \mathfrak{R}^4$ determines the orientation of the rigid body and $\alpha(t) \in \mathfrak{R}^3$ and $\beta(t) \in \mathfrak{R}^3$ are the gyroscope and accelerometer bias, respectively. $\omega^b(t) \in \mathfrak{R}^3$ and $a^n(t) \in \mathfrak{R}^3$ are the angular velocity and linear acceleration vectors. The superscript n , b and e denote the East-North-Up (ENU) reference frame, the body reference frame and the ECEF reference frame, respectively.

The measurement equations with measurement noise $\mathbf{v}(t) = [v_\omega(t), v_a(t), v_m(t), v_p(t), v_v(t)]^T$, with $v_{(\cdot)}(t) \in \mathfrak{R}^3$, are given by:

$$\mathbf{y}(t) = \bar{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) = \begin{bmatrix} \omega^b(t) + \alpha(t) + v_\omega(t) \\ \mathbf{R}(q_b^e)^T a^e(t) + \beta(t) + v_a(t) \\ \mathbf{R}(q_b^e)^T m^e(t) + v_m(t) \\ p^e(t) + v_p(t) \\ v^e(t) + v_v(t) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

where $m^e(t)$ contains the values of the magnitude of the terrestrial magnetic field given our current latitude and longitude³, $\omega^b(t)$ and $a^e(t)$ are the angular velocity and linear acceleration vectors, respectively. The matrix $\mathbf{R}(q_b^e(t))$ is the rotation matrix associated with the current orientation quaternion. As before, Eqs. (6) and (7) are discretized using *collocation* method.

5 The path-planning problem

In order to design the path-planning task, we propose to solve Eq. (1) with the following cost function:

$$\mathcal{J}_p = \sum_{j=0}^{N_p-1} \left(\|\mathbf{x}_{k+j|k} - \check{\mathbf{w}}_{k+j|k}\|_{\check{\mathbf{Q}}}^2 + \|\Delta \mathbf{u}_{k+j|k}\|_{\check{\mathbf{R}}}^2 \right) + \|\mathbf{x}_{k+N_p|k} - \check{\mathbf{w}}_{k+N_p|k}\|_{\check{\mathbf{P}}}^2, \quad (8)$$

where N_p is the path-planning horizon length, $\check{\mathbf{w}}_{k+j|k}$ defines each consecutive target waypoint, $\check{\mathbf{Q}}$, $\check{\mathbf{R}}$ and $\check{\mathbf{P}}$ are positive definite matrices.

In this article we propose to use an MPC based path-planning algorithm which uses a virtual particle vehicle (PV) model to compute the paths (Murillo et al.

³ This data is tabulated and can be obtained from <https://www.ngdc.noaa.gov/geomag-web>

(2018)). The mathematical model that describes the movement of the PV can be written as follows:

$$\dot{\check{\mathbf{x}}}(t) = \check{f}(\check{\mathbf{x}}(t), \check{\mathbf{u}}(t)) = \begin{bmatrix} \check{v}(t) \cos \check{\psi}(t) \\ \check{v}(t) \sin \check{\psi}(t) \\ -\tau \check{v}(t) + \kappa \mathcal{T}(t) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

where $\check{\mathbf{x}}(t) = [\check{x}(t), \check{y}(t), \check{v}(t)]^T$ and $\check{\mathbf{u}}(t) = [\check{\psi}(t), \mathcal{T}(t)]^T$ are the PV state and control input vectors, respectively, $\check{x}(t)$ and $\check{y}(t)$ denote the PV xy -position of the PV and $\check{v}(t)$ is the modulus of the PV velocity vector, $\check{\psi}(t)$ and $\mathcal{T}(t)$ denote the yaw angle and the thrust force of the PV, respectively, τ is a damping constant that determines the rate of change of the PV velocity and κ is a constant proportional to the thrust force \mathcal{T} . Equation (9) is also discretized using collocation method.

6 Simulation Example

In this section we present the usage of the proposed framework in order to estimate unknown states, compute a feasible path and follow this path with a Jackal UGV using Gazebo simulator, CasADi (Andersson et al. 2019), MPC-Tools (Risbeck & Rawlings 2016) and Ipopt (Wächter & Biegler 2006).

For the guidance task we assume that the initial conditions of model defined in Eq. (4) are $\check{\mathbf{x}}_0 = [0, 0, 0]^T$ and $\check{\mathbf{u}}_0 = [0, 0]^T$. This model is discretized using collocation method with a sampling rate $T_s = 0.1$ s and the guidance horizon is set to $N_g = 10$. The weight matrices are chosen as: $\mathbf{R} = \text{diag}([20, 20])$, $\mathbf{Q} = \text{diag}([300, 300, 150])$ and $\mathbf{P} = \text{diag}([500, 500, 400])$. The constraints are configured according to the capabilities of the Jackal UGV: $0 \leq \tilde{v}(t) \leq 1.9$ (m/s), $-2 \leq \tilde{\omega}(t) \leq 2$ (rad/s), $-0.3 \leq \Delta \tilde{v}(t) \leq 0.3$ (m/s), $-30 \leq \Delta \tilde{\omega}(t) \leq 30$ (deg/s). $\check{\psi}(t)$, $\check{x}(t)$ and $\check{y}(t)$ are unconstrained.

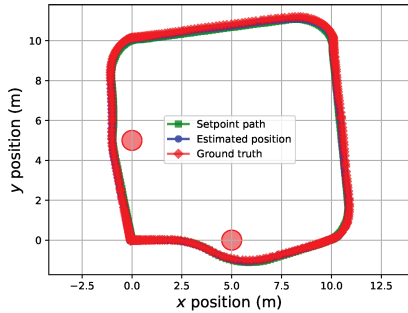
For the path-planning task we assume that the PV model initial conditions are $\check{\mathbf{x}}_0 = [0, 0, 0]^T$ and $\check{\mathbf{u}}_0 = [0, 0]^T$. This model is also discretized using collocation method with a sampling rate $T_s = 0.1$ s. The path-planning horizon is set to $N_p = 15$. The weight matrices are chosen as $\mathbf{R} = \text{diag}([0.01, 0.01])$, $\mathbf{Q} = \text{diag}([100, 100, 100])$ and $\mathbf{P} = \text{diag}([500, 500, 500])$. The PV constraints are configured as follows: $0 \leq \mathcal{T}(t) \leq 5$ (N), $-30 \leq \Delta \check{\psi}(t) \leq 30$ (deg/s), $-0.5 \leq \Delta \mathcal{T}(t) \leq 0.5$ (N) and $0 \leq \check{v}(t) \leq 1.9$ (m/s). $\check{\psi}(t)$, $\check{x}(t)$ and $\check{y}(t)$ are unconstrained. Both constants of the PV model are set as $\tau = 2$ (1/s) and $\kappa = 2$ (1/kg). When computing the path we assume that there are two circular obstacles of radii $r_{o_1} = r_{o_2} = 0.5$ (m) and centres $\mathbf{c}_{o_1} = [5, 0]^T$ (m) and $\mathbf{c}_{o_2} = [0, 5]^T$ (m). The Jackal UGV should achieve the following consecutive

waypoints: $\check{\mathbf{w}}_1 = [10, 0, 0.2]^T$, $\check{\mathbf{w}}_2 = [0, 10, 0.2]^T$, $\check{\mathbf{w}}_3 = [10, 10, 0.2]^T$ and $\check{\mathbf{w}}_4 = [0, 0, 0]^T$.

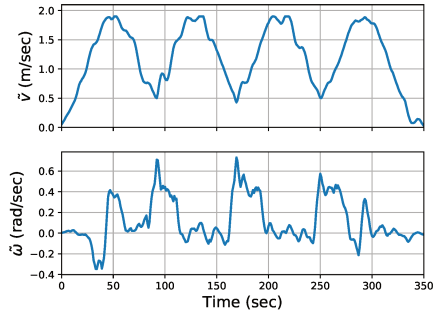
For the navigation task we assume that there is no process noise ($\hat{\mathbf{w}}_{k+j|k} = 0$). The Jackal UGV simulated by Gazebo has two sensors: i) IMU, and ii) GNSS. The data given by these sensors is corrupted by Gaussian noise and it is fused in order to estimate the Jackal's xy -position and its yaw angle. Here we use model of Eq. (6) in ENU coordinates with initial conditions $\bar{\mathbf{x}}_{-N_e} = [0, 0, 0.0635, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ and $\bar{\mathbf{z}}_{-N_e} = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$. This model is also discretized using collocation method with a sampling rate $T_s = 0.1$ s and the estimation horizon is set to $N_e = 6$. The weights defined in Eq. (5) are chosen as $\mathbf{Q}_w = \text{diag}([10^{-1}, 10^{-1}, 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3}, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1])$, $\mathbf{R}_v = \text{diag}([1, 1, 1, 1, 1, 1, 10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3}])$, $P_0 = 0.1$, $\mathbf{P}_1 = \text{diag}([10^{-1}, 10^{-1}, 10^{-1}, 10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3}, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0])$ and $\mathbf{P}_2 = \text{diag}([1, 1, 1, 1, 1, 1])$.

The results obtained can be seen in Figures 3a- 3d. In Fig. 3a, three different paths are shown: i) the setpoint path (squared-green line) which is computed by the path-planning task, ii) the estimated Jackal xy -position (rounded-blue line) which is computed by the navigation task and controlled by the guidance task in order to follow the setpoint path, and iii) the ground truth (diamond-red line) which is given by Gazebo. From this figure it can be seen that the interrelated work of the three tasks (path-planning, navigation and guidance) is done in such a satisfactory way that it allows to move the Jackal UGV along the desired path with minor errors, considering that sensors are corrupted by Gaussian noise. In Fig. 3b the Jackal UGV control inputs are shown. Both control inputs are feasible and, as it can be seen from this figure, the linear velocity of the vehicle is limited up to 1.9 (m/s) which matches both constraints defined in the path-planning and guidance tasks. In Fig. 3c the guidance errors are shown, where x^{sp} and y^{sp} are the desired xy -coordinates that define the desired path and ψ^{sp} is the desired yaw angle. Note that we do not only define the Jackal UGV xy -coordinates but also we impose the orientation it should have along the desired path. \hat{x} , \hat{y} and $\hat{\psi}$ are the components of the estimated Jackal state vector. As it can be seen from this figure (top and middle), the guidance errors in xy -position are small. However, the guidance error in the yaw angle seems to be a bit bigger than the errors in the position. This is mainly due to the fact that the yaw angle is a control input for the PV model in Eq. (9) and consequently no dynamics is considered. This problem can be solved by adding this angle as a state variable and defining a first order dynamics for it, as we did with the velocity of the PV. Figure 3d depicts the estimation errors, where x^t , y^t and ψ^t denote the truth xy -component and the truth yaw angle, respectively, which can be obtained from Gazebo simulator in order to check if our estimations are close to this truth values. It can be seen that the navigation task is successfully employed as the errors we have made in the estimation of xy -position (between ± 0.15 (m)) and the yaw angle

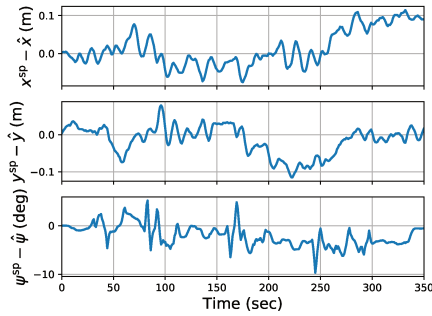
(between ± 5 (deg)) of the Jackal UGV are small.



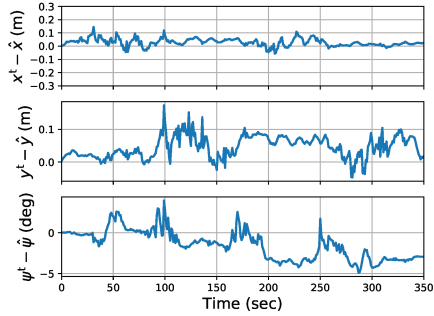
(a) Computed path, ground truth, estimated position



(b) Control Inputs



(c) Guidance Errors



(d) Estimation Errors

7 Conclusions

In this article, we have presented a unified receding horizon framework that can be used for the guidance and navigation of any UV along any feasible path. This framework can be split into three interrelated tasks, all of them designed using a receding horizon principle, which allows us to include physical dynamics and constraints at the design stage. We have used MPC technique for guidance and path-planning tasks and MHE for the navigation task. To evaluate the performance of the proposed framework, we have used Gazebo simulator in order to drive a Jackal UGV model along the path computed by the path-planning task.

Acknowledgments

The authors wish to thank the *Universidad Nacional de Litoral* (with CAI+D 500 201501 00050 LI and CAI+D 504 201501 00098 LI), the *Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica* (with PICT 2016-0651 and PICT 2017-0543) and the *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas* (CONICET) from Argentina, for their support.

References

- Andersson, J. A., Gillis, J., Horn, G., Rawlings, J. B. & Diehl, M. (2019), ‘Casadi: a software framework for nonlinear optimization and optimal control’, *Mathematical Programming Computation* **11**(1), 1–36.
- Cheng, Y. & Crassidis, J. (2004), Particle Filtering for Sequential Spacecraft Attitude Estimation, in ‘AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit’, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, Virginia.
URL: <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2004-5337>
- Grip, H. F., Fossero, T. I., Johansen, T. A. & Saberi, A. (2012), A nonlinear observer for integration of gnss and imu measurements with gyro bias estimation, in ‘American Control Conference (ACC), 2012’, IEEE, pp. 4607–4612.
- Hang, P., Luo, F., Fang, S. & Chen, X. (2017), Path tracking control of a four-wheel-independent-steering electric vehicle based on model predictive control, in ‘Control Conference (CCC), 2017 36th Chinese’, IEEE, pp. 9360–9366.
- Haseltine, E. L. & Rawlings, J. B. (2005), ‘Critical evaluation of extended kalman filtering and moving-horizon estimation’, *Industrial & engineering chemistry research* **44**(8), 2451–2460.
- Khamseh, H. B. & Janabi-Sharifi, F. (2017), ‘Ukf-based lqr control of a manipulating unmanned aerial vehicle’, *Unmanned Systems* **5**(03), 131–139.
- LaValle, S. M. (2006), *Planning algorithms*, Cambridge university press.
- Murillo, M., Sánchez, G., Genzelis, L. & Giovanini, L. (2018), ‘A real-time path-planning algorithm based on receding horizon techniques’, *Journal of Intelligent & Robotic Systems* **91**(3-4), 445–457.
- Murillo, M., Sánchez, G. & Giovanini, L. (2016), ‘Iterated non-linear model predictive control based on tubes and contractive constraints’, *ISA Transactions* **62**, 120 – 128.
- Polóni, T., Rohal-Ilkiv, B. & Arne Johansen, T. (2015), ‘Moving Horizon Estimation for Integrated Navigation Filtering’, *IFAC-PapersOnLine* **48**(23), 519–526.
URL: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2405896315026154>
- Rhudy, M., Gu, Y., Gross, J., Gururajan, S. & Napolitano, M. R. (2013), ‘Sensitivity Analysis of Extended and Unscented Kalman Filters for Attitude Estimation’, *Journal of Aerospace Information Systems* **10**(3), 131–143.
URL: <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.54899>
- Risbeck, M. & Rawlings, J. (2016), ‘Mpc tools: Nonlinear model predictive control tools for casadi’.
- Roumeliotis, S. & Bekey, G. (1999), 3-D Localization for a Mars Rover Prototype, in ‘Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space, Proceedings of the Fifth International Symposium, ISAIRAS ’99’, pp. 441–448.
URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1999ESASP.440..441R>
- Sánchez, G., Murillo, M., Genzelis, L., Deniz, N. & Giovanini, L. (2017), Mpc

-
- for nonlinear systems: A comparative review of discretization methods, *in* ‘Information Processing and Control (RPIC), 2017 XVII Workshop on’, IEEE, pp. 1–6.
- Sánchez, G., Murillo, M. & Giovanini, L. (2017), ‘Adaptive arrival cost update for improving moving horizon estimation performance’, *ISA transactions* **68**, 54–62.
- Saska, M., Spurný, V. & Vonásek, V. (2015), ‘Predictive control and stabilization of nonholonomic formations with integrated spline-path planning’, *Robotics and Autonomous Systems* .
- Vandersteen, J., Diehl, M., Aerts, C. & Swevers, J. (2013), ‘Spacecraft Attitude Estimation and Sensor Calibration Using Moving Horizon Estimation’, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **36**(3), 734–742.
URL: <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.58805>
- Wächter, A. & Biegler, L. T. (2006), ‘On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming’, *Mathematical programming* **106**(1), 25–57.
- Xue, Q., Cheng, P. & Cheng, N. (2014), Offline path planning and online replanning of uavs in complex terrain, *in* ‘Proceedings of 2014 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference’, pp. 2287–2292.
- Yang, L., Qi, J., Song, D., Xiao, J., Han, J. & Xia, Y. (2016), ‘Survey of robot 3d path planning algorithms’, *Journal of Control Science and Engineering* **2016**.
- Zhao, P., Chen, J., Song, Y., Tao, X., Xu, T. & Mei, T. (2012), ‘Design of a control system for an autonomous vehicle based on adaptive-pid’, *International Journal of Advanced Robotic Systems* **9**(2), 44.

Anexo E

MPC for nonlinear systems: a comparative review of discretization methods

MPC for nonlinear systems: a comparative review of discretization methods

Guido Sanchez^a, Marina Murillo^a, Nestor Deniz^a,
Lucas Genzelis^a, Leonardo L. Giovanini^a

^a*Instituto de Investigacion en Senales, Sistemas e Inteligencia Computacional, sinc(i), UNL, CONICET, Ciudad Universitaria UNL, 4to piso FICH, (S3000) Santa Fe, Argentina*

Abstract

This work provides a comparative review of three different numerical methods generally used to discretize continuous-time non-linear equations appearing in model predictive control problems: direct multiple shooting, direct collocation and successive linearizations. An overview of the characteristics of each method is given and the performance of each method is evaluated through the simulation of two test cases.

Key words: Discretization methods, Model predictive control, Real-time optimization, Nonlinear systems.

1 Introduction

In this work we review some of the most popular methods used to discretize non-linear continuous-time equations that describe the system dynamics in model predictive control (MPC) algorithms.

MPC is a control technique that uses models of the plant in order to predict the future behaviour of the system over a prediction horizon. Usually, these models are expressed mathematically as ordinary differential equations (ODE). As MPC is, in general, a discrete-time control technique, these ODEs

Email addresses: gsanchez@sinc.unl.edu.ar (Guido Sanchez),
mmurillo@sinc.unl.edu.ar (Marina Murillo), ndeniz@sinc.unl.edu.ar (Nestor Deniz),
lgenzelis@sinc.unl.edu.ar (Lucas Genzelis),
lgiovanini@sinc.unl.edu.ar (Leonardo L. Giovanini).

need to be transformed into discrete-time difference equations using a proper discretization method.

The work by Rao Rao (2009) describes the most important methods that have been developed over the years for solving general optimal control problems, in particular, the two broad classes of indirect and direct methods are discussed. Diehl et al. Diehl et al. (2006) review numerical approaches to solve non-linear optimal control problems, and discuss three direct optimal control approaches in detail: (i) single shooting, (ii) collocation, and (iii) multiple shooting. Probably, the most commonly used method to discretize continuous-time non-linear equations is the direct single-shooting method due to its simplicity and because it works well for simple problems. In this method the controls are discretized and then a numerical routine is used to sequentially obtain the states as an initial value problem for the complete horizon. Single shooting is very simple; however, when the systems are highly non-linear or unstable it is known to cause problems Kirches (2011).

In order to improve direct single shooting, multiple shooting adds more degrees of freedom and partitions the time interval into additional grid points, leading to the generation of many initial value problems, which improves the convergence and prevents the growth of the error introduced by poor initial data Bock & Plitt (1984), Morrison et al. (1962).

Another method that works well is direct collocation, which add a series of *collocation points* and approximates the model equations using a polynomial basis. The method ensures that the model equation is satisfied on this intermediate points Ahlberg & Ito (1975), Topputo & Zhang (2014). The addition of these variables adds even more degrees of freedom than multiple shooting, but we are rewarded with less nonlinearity.

An alternative discretization method is successive linearization, which was presented by the authors in Murillo et al. (2015, 2016). With this discretization method the continuous-time system equation can be transformed into a set of discretized linear time-varying (LTV) equations.

In this work we mainly revisit the last three methods: i) direct multiple shooting, ii) direct collocation, and iii) successive linearization. This work is organized as follows: in Section 2 the problem formulation is presented. In Section 3 an overview of the three methods is given. In order to compare the discretization methods, two test simulation examples are given in Section 4. Finally, in Section 5 the conclusion of this work is stated.

2 Problem formulation

In the following we consider continuous-time dynamical systems described by the following equation

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (1)$$

where $x(t) \in \mathfrak{R}^{n_x}$ is the differential state and $u(t) \in \mathfrak{R}^{n_u}$ is the control. Function f is assumed to be twice differentiable and maps into \mathfrak{R}^{n_x} . Given the dynamical system from Eq. (1), the MPC problem is defined as follows: determine the state $x_k \in \mathfrak{R}^{n_x}$ and the control $u_k \in \mathfrak{R}^{n_u}$ that solves the following optimization problem

$$\begin{aligned} \min_{(x,u)} \quad & \sum_{k=i}^{i+N-1} \ell_k(x_k, u_k) + \ell_N(x_{k+N}) \\ \text{s.t.} \quad & x_i - \bar{x}_i = 0, \\ & x_{k+1} - f_k(x_k, u_k) = 0, \\ & h_k(x_k, u_k) \leq 0, \\ & \forall k \in [i, \dots, i + N - 1], \end{aligned} \quad (2)$$

where N is the control horizon, ℓ_k is the stage cost and ℓ_N is the terminal cost (a popular choice is the use of quadratic costs Maciejowski (2002)). The parameter \bar{x}_i is the fixed initial value, the function f_k is the discrete version of Eq. (1), and the function h_k is the set of state and control constraints. In order to solve Problem (2) we need to find a method to discretize Eq. (1), thus allowing to solve a non-linear program (NLP) on the free variables (x, u) .

3 Discretization methods overview

In this work we solve the MPC problem using numerical optimization methods, therefore the continuous-time dynamical system equations need to be discretized. During the analysis of the different methods, we will assume a piecewise constant control discretization

$$u(t) = u_k, \text{ for } t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = i, \dots, i + N - 1, \quad (3)$$

so we can focus on how the state trajectory discretization is handled.

3.1 Multiple shooting

The direct multiple shooting method is due to Bock and Plitt Bock & Plitt (1984) and proceeds as follows: first, the controls are discretized in a piecewise manner on a coarse grid as specified in Eq. (3). Then, each state x_k is used inside the grid given by the discrete-time control horizon as a *shooting node* to solve the ordinary differential equation (ODE) given by Eq. (1) on each interval $[t_k, t_{k+1}]$, starting with the initial state \bar{x}_i . From the numerical solution of these initial value problems, we obtain the state trajectory

$$x_{k+1} = \Phi_k(x_k, u_k), \quad (4)$$

where Φ_k is a suitable integrator. Typically, Φ_k is a Runge Kutta 4 (RK4) approximation which is employed to solve each of the interval's ODE, where the user picks a step size $h > 0$ –usually equal to the sampling time– and then:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, u_k), \\ k_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}k_1, u_k\right), \\ k_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}k_2, u_k\right), \\ k_4 &= f(x_k + hk_3, u_k), \\ x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned} \quad (5)$$

The RK4 method is reasonably simple and robust and is a good general candidate for numerical solution of differential equations.

3.2 Direct Collocation

While multiple shooting only includes the state at the beginning of each control interval as a degree of freedom in the NLP (in addition to the discretized control and the parameters), in direct collocation the state at a set of *collocation points* (in addition to the beginning of the interval) are variables in the NLP. An example of these time points are the Legendre points of order $d = 3$:

$$\tau = [0, 0.112702, 0.500000, 0.887298]. \quad (6)$$

Keeping the same control discretization scheme, the complete list of time points inside the control horizon N , with $h_k := t_{k+1} - t_k$, is:

$$\begin{aligned} t_{k,j} &:= t_k + h_k\tau_j, \\ k &= i, \dots, i + N - 1, \\ j &= 0, \dots, d, \end{aligned} \quad (7)$$

as well as the final time $t_{N,0}$. Also let $x_{k,j}$ denote the states at these time points. On each control interval, we shall define a Lagrangian polynomial basis:

$$L_j(\tau) = \prod_{r=0, r \neq j}^d \frac{\tau - \tau_r}{\tau_j - \tau_r}. \quad (8)$$

Since the Lagrangian basis satisfies:

$$L_j(\tau_r) = \begin{cases} 1, & \text{if } j = r \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (9)$$

we can approximate the state trajectory approximation as a linear combination of these basis functions:

$$\tilde{x}_k(t) = \sum_{r=0}^d L_r \left(\frac{t - t_k}{h_k} \right) x_{k,r}. \quad (10)$$

In particular, we get approximations of the time derivative of the state at each collocation point (not including τ_0):

$$\tilde{\dot{x}}_k(t_{k,j}) = \frac{1}{h_k} \sum_{r=0}^d \dot{L}_r(\tau_j) x_{k,r} := \frac{1}{h_k} \sum_{r=0}^d C_{r,j} x_{k,r} \quad (11)$$

as well as an approximation of the state at the end of the control interval:

$$\tilde{x}_{k+1,0} = \sum_{r=0}^d L_r(1) x_{k,r} := \sum_{r=0}^d D_r x_{k,r}. \quad (12)$$

Plugging the approximation of the state derivative given by Eq. (11) into the ODE gives us a set of collocation equations that needs to be satisfied for every state at every collocation point:

$$\begin{aligned} h_k f(t_{k,j}, x_{k,j}, u_k) - \sum_{r=0}^d C_{r,j} x_{k,r} &= 0, \\ k &= i, \dots, i + N - 1, \\ j &= 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (13)$$

Then, the approximation of the end state given by Eq. (12) gives us a set of continuity equations that must be satisfied for every control interval:

$$\begin{aligned} x_{k+1,0} - \sum_{r=0}^d D_r x_{k,r} &= 0, \\ k &= i, \dots, i + N - 1. \end{aligned} \quad (14)$$

The set of Eq. (13) and (14) take the place of the integrator call that was made in direct multiple shooting. In direct collocation, simulation and optimization proceed simultaneously. The advantages of collocation methods are (i) a very sparse NLP is obtained (ii) we can use knowledge of the state trajectory in the initialization (iii) it shows fast local convergence (iv) it can treat unstable systems well, and (v) it can easily cope with state and terminal constraints. Its major disadvantage is that adaptive discretization error control needs regridding and thus changes the NLP dimensions Diehl et al. (2009).

3.3 Successive linearization

The method of successive linearizations is based on the work of Murillo et al. Murillo et al. (2015, 2016). The main idea is that the dynamic behavior of the non-linear system of Eq. (1) can be approximated as a linear time-varying (LTV) model

$$x_{k+1|k} = \hat{A}_{k|k}x_{k|k} + \hat{B}_{u_{k|k}}u_{k|k}, \quad (15)$$

where the matrices $\hat{A}_{k|k}$ and $\hat{B}_{u_{k|k}}$ are discretized versions of the Jacobian matrices $A_{k|k}$ and $B_{u_{k|k}}$ of the continuous time non-linear system given by Eq. (1), and they are defined as follows

$$\begin{aligned} A_{k|k} &= \left. \frac{\partial f(x_k, u_k, d_k)}{\partial x_k} \right|_{(*)}, \\ B_{u_{k|k}} &= \left. \frac{\partial f(x_k, u_k, d_k)}{\partial u(k)} \right|_{(*)}, \end{aligned} \quad (16)$$

where (*) stands for the reference trajectory given to the states and controls. The matrices obtained from Eq. (16), must then be discretized using a proper method DeCarlo (1989). As a result, the optimization Problem (2) can be rewritten as follows:

$$\begin{aligned} \min_{(x,u)} \quad & \sum_{k=i}^{i+N-1} \ell_k(x_k, u_k) + \ell_N(x_{k+N}) \\ \text{s.t.} \quad & x_i - \bar{x}_i = 0, \\ & x_{k+1|k} = \hat{A}_{k|k}x_{k|k} + \hat{B}_{u_{k|k}}u_{k|k}, \\ & h_k(x_k, u_k) \leq 0, \\ & \forall k \in [i, \dots, i + N - 1], \end{aligned} \quad (17)$$

and thus can be solved using quadratic program (QP) solvers instead of NLP solvers, given that the set of constraints h_k are linear.

4 Examples

In the following examples we will minimize a quadratic cost, so the terms ℓ_k and ℓ_N will be defined as

$$\begin{aligned}\ell_k &= (x_k - x_k^s)^T Q (x_k - x_k^s) + (u_k - u_k^s)^T R (u_k - u_k^s) \\ \ell_N &= x_{k+N}^T Q_N x_{k+N}\end{aligned}\tag{18}$$

where the matrices $Q \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, $R \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_u}$ and $Q_N \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ are symmetric definite positive and x_k^s and u_k^s are the desired state and control setpoints.

4.1 First example: Van der Pol oscillator

First, we will be driving a Van der Pol oscillator to the origin. The system equation is given by

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (1 - x_2^2)x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_1,\end{aligned}\tag{19}$$

the initial condition is $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ and the control input is subject to the following constraints

$$-0.75 \leq u \leq 1.\tag{20}$$

The chosen sampling time is $T_s = 0.25$ seconds, the horizon length is $N = 10$, and the weight matrices are $Q = Q_N = \text{diag}([1.0, 1.0, 1.0])$ and $R = 1$. The state trajectory obtained by each of the methods presented earlier can be seen in Figures 1 and 2, where the similarities between them can be observed.

The obtained control input (shown in Figure 3) is almost equal for multiple shooting and collocation, whereas the control input obtained by the successive linearization method presents some differences, mainly at the first iterations.

Finally, Figure 4 shows the execution time required to obtain the MPC solution at each discretization step. It can be seen that the successive linearization method is faster than its counterparts. This is mainly because we used a QP solver and because we chose to use a receding horizon technique for the LTV model, updating only the last parameters of the corresponding LTV system and shifting the others. The mean time required to obtain a solution was 0.00205 seconds for multiple shooting, 0.00290 seconds for direct collocation and 0.00195 seconds for the successive linearizations method.

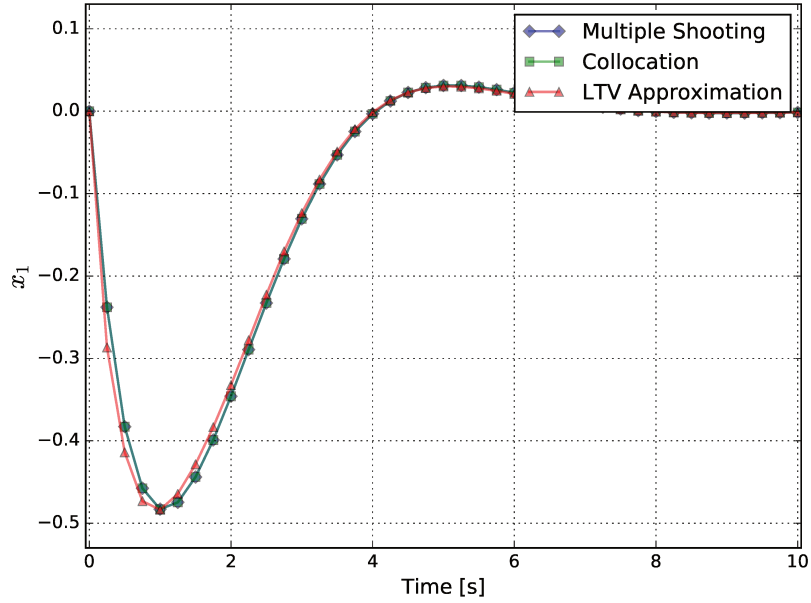


Fig. 1. State trajectory x_1 for the Van der Pol oscillator.

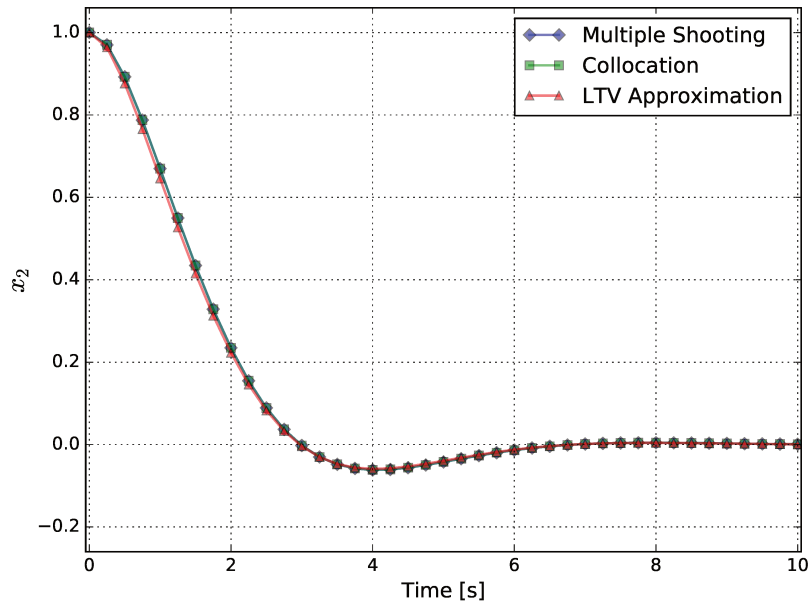


Fig. 2. State trajectory x_2 for the Van der Pol oscillator.

4.2 Second example: Continuous stirred-tank reactor

In the second example, we will consider a continuous stirred-tank reactor (CSTR) taken from the work of Rawlings and Mayne Rawlings & Mayne (2009). Here, an irreversible, first-order reaction, $A \rightarrow B$, occurs in the liquid phase, and the reactor temperature is regulated with external cooling. The

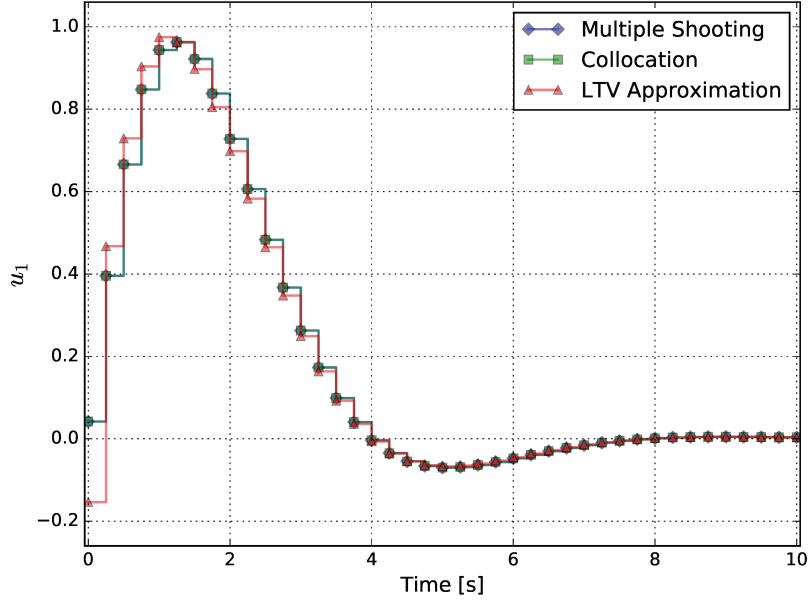


Fig. 3. Control trajectory u_1 for the Van der Pol oscillator.

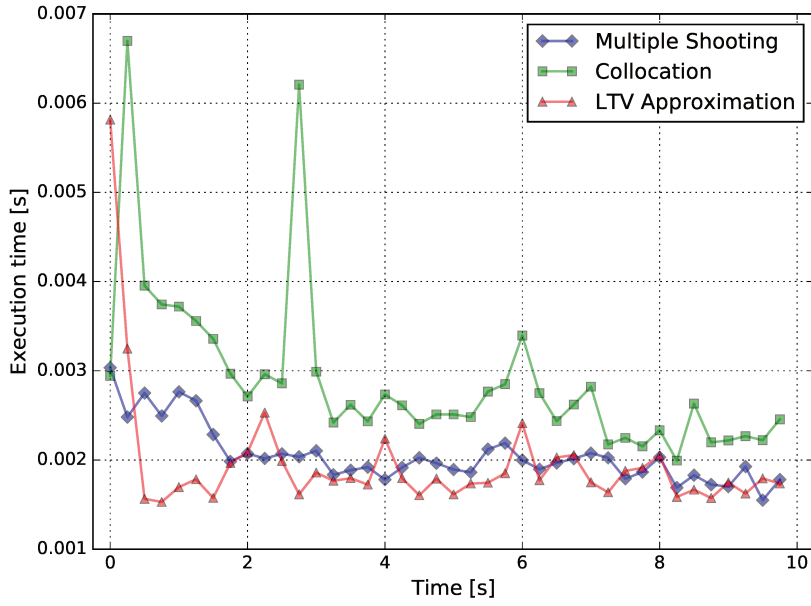


Fig. 4. Execution time of each of the methods for the Van der Pol oscillator.

CSTR equation is given by

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= F_0 \frac{c_0 - x_1}{\pi r^2 x_3} - k_0 x_1 \exp\left(-\frac{E}{R x_2}\right), \\
 \dot{x}_2 &= F_0 \frac{T_0 - x_2}{\pi r^2 x_3} - \frac{\Delta H}{\rho C_p} k_0 x_1 \exp\left(-\frac{E}{R x_2}\right) \\
 &\quad + 2 \frac{U}{r \rho C_p} (u_1 - x_2), \\
 \dot{x}_3 &= \frac{F_0 - u_2}{\pi r^2},
 \end{aligned} \tag{21}$$

| Parameter | Nominal value | Units |
|------------|----------------------|---------------------------|
| F_0 | 0.1 | m ³ /min |
| T_0 | 350 | K |
| c_0 | 1 | kmol/m ³ |
| r | 0.219 | m |
| k_0 | 7.2×10^{10} | min ⁻¹ |
| E/R | 8750 | K |
| U | 54.94 | kJ/(min m ² K) |
| ρ | 1000 | kg/m ³ |
| C_p | 0.239 | kJ/(kg K) |
| ΔH | -5×10^4 | kJ/kmol |

Table 1

Parameters of the CSTR

where x_1 is the molar concentration of A , x_2 is the reaction temperature in (K) and x_3 is the level of the tank in meters, and the controls are u_1 and u_2 , the outlet flow rate in (L/min) and coolant liquid temperature, respectively. The rest of the CSTR parameters can be seen in Table 1. In this example, we will start from the initial condition $x_1 = 0.04389$, $x_2 = 243.3730$, $x_3 = 0.3295$ and we wish to drive the system to the setpoint $x_1^s = 0.8778$, $x_2^s = 324.5$, $x_3^s = 0.659$. The control input is subject to the following constraints

$$\begin{aligned}
285 &\leq u_1 \leq 315, \\
0.085 &\leq u_2 \leq 0.115, \\
-3 &\leq \Delta u_1 \leq 3, \\
-0.03 &\leq \Delta u_2 \leq 0.03,
\end{aligned} \tag{22}$$

and the control setpoint is expected to be $u_1^s = 300$ and $u_2^s = 0.1$. The chosen sampling time is $T_s = 15$ minutes, the horizon length is $N = 15$, and the weight matrices are $Q = \text{diag}([6.488\,69 \times 10^{-1}, 4.748\,40 \times 10^{-6}, 1.15132])$, $R = \text{diag}([2.222\,22 \times 10^{-5}, 200])$ and $Q_N = 10Q$. The state trajectory obtained by each of the methods is shown in Figures 5, 6 and 7, where it can be seen again the similarities between each of the reviewed methods. The obtained control inputs (shown in Figures 8 and 9) are almost equal for multiple shooting and collocation, whereas –once again– the obtained control inputs of the successive linearization method present some differences, mostly noticeable at the first iterations of u_1 .

Finally, Figure 10 shows the execution time required to obtain the MPC solution at each discretization step. It can be seen that in this case, the collocation

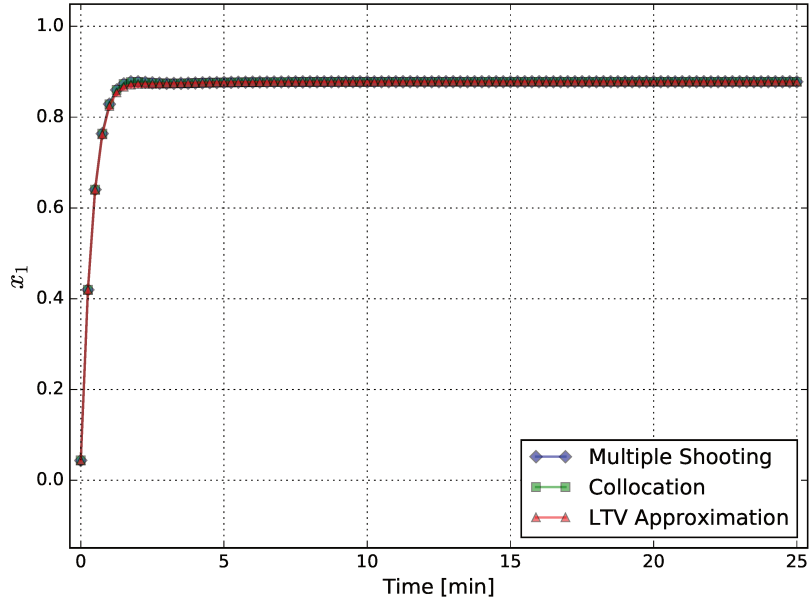


Fig. 5. State trajectory x_1 for the CSTR.

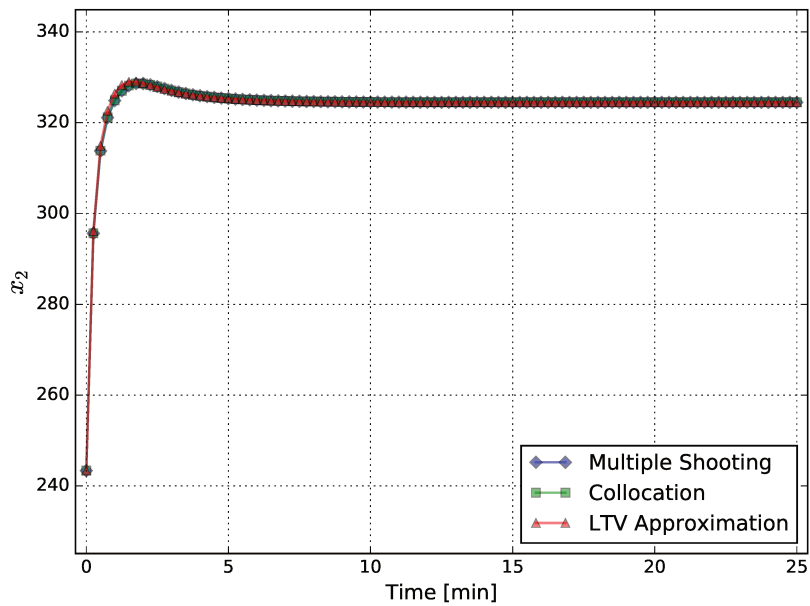


Fig. 6. State trajectory x_2 for the CSTR.

method is faster than its counterparts. This is mainly because the sparser NLP structure obtained by the use of collocation is better suited for the NLP solver that CasADi Andersson (2013) uses (IPOPT) and because, due to the non linearities of this system, we had to obtain a full linearization over the complete control horizon at each time step for the the LTV model of the successive linearization method. The mean time was 0.01517 seconds for multiple shooting, 0.01236 seconds for direct collocation and 0.01896 seconds for the successive

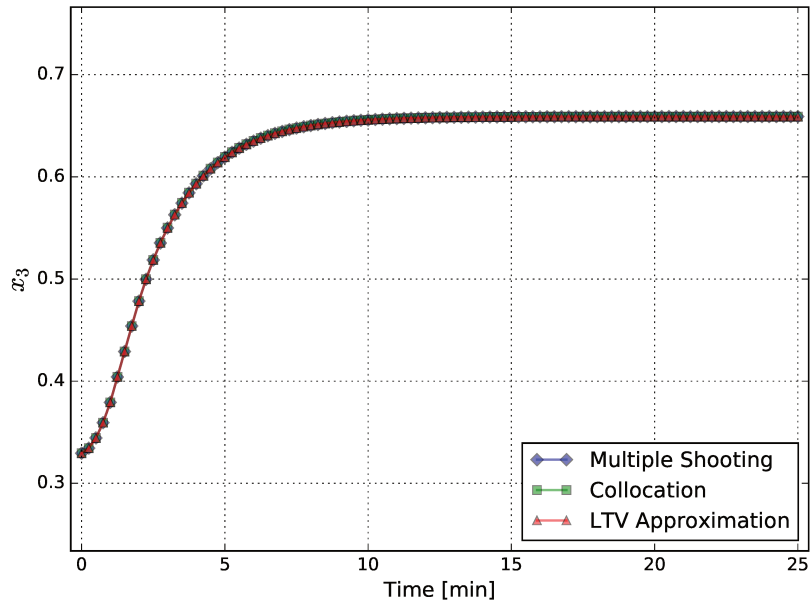


Fig. 7. State trajectory x_3 for the CSTR.

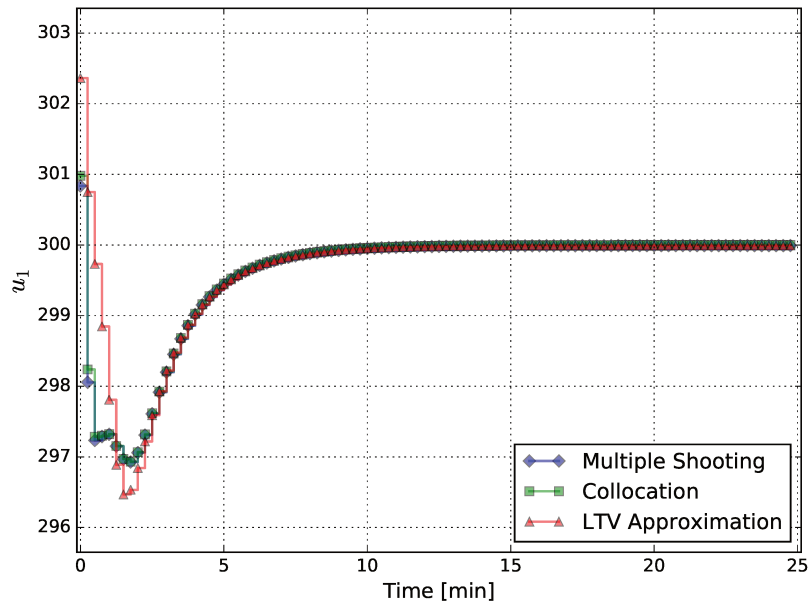


Fig. 8. Control trajectory u_1 for the CSTR.

linearizations method.

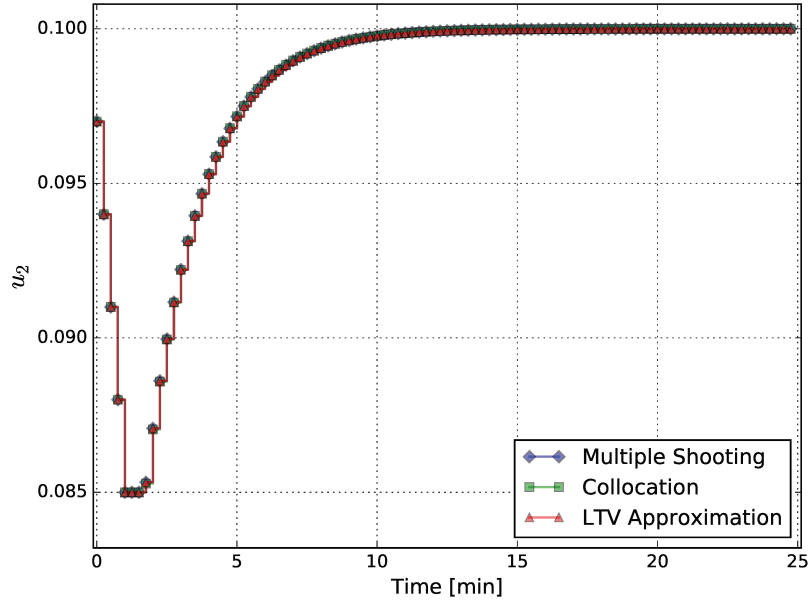


Fig. 9. Control trajectory u_2 for the CSTR.

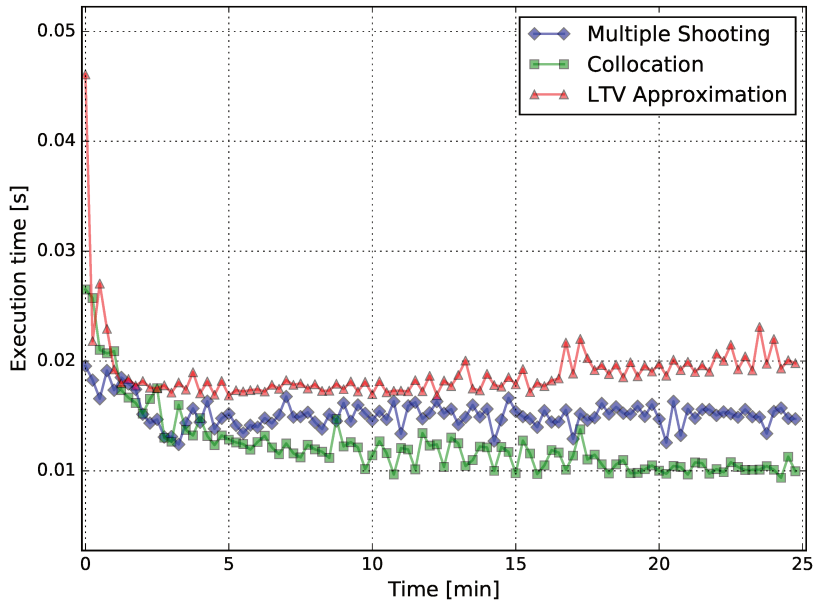


Fig. 10. Execution time of each of the methods for the CSTR.

5 Conclusion

This work shows that current state of the art NLP solvers can nowadays cope with real-time requirements, at least in small to medium scale non-linear systems. The successive linearization method performs as well and as fast as their counterparts and allows us to use analytical tools in order to analyze the stability, robustness and convergence of the controller. Besides, the possibility

of using QP solvers guarantees that solution of the MPC control problem is obtained in each iteration.

Each of the examples was programmed in Python and was not optimized in any way. Since CasADi has C++ interfaces, we think that there is room for improvement. The source code for the examples is available at https://github.com/gmsanchez/mpc_comparison_rpic2017.

Acknowledgment

The authors wish to thank the *Universidad Nacional de Litoral* (with CAID 501201101 00529 LI) and the *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas* (CONICET) from Argentina, for their support. A proper recognition should also be made to the teams that created CasADi and MPCTools Risbeck & Rawlings (2015) and released them as open source software.

References

- Ahlberg, J. & Ito, T. (1975), ‘A collocation method for two-point boundary value problems’, *Mathematics of Computation* **29**(131), 761–776.
- Andersson, J. (2013), A General-Purpose Software Framework for Dynamic Optimization, PhD thesis, Arenberg Doctoral School, KU Leuven, Department of Electrical Engineering (ESAT/SCD) and Optimization in Engineering Center, Kasteelpark Arenberg 10, 3001-Heverlee, Belgium.
- Bock, H. & Plitt, K.-J. (1984), A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal control problems, Proceedings of the IFAC World Congress.
- DeCarlo, R. (1989), *Linear systems: A state variable approach with numerical implementation*, Prentice-Hall, Inc.
- Diehl, M., Bock, H., Diedam, H. & Wieber, P.-B. (2006), Fast direct multiple shooting algorithms for optimal robot control, in ‘Fast motions in biomechanics and robotics’, Springer, pp. 65–93.
- Diehl, M., Ferreau, H. & Haverbeke, N. (2009), Efficient numerical methods for nonlinear MPC and moving horizon estimation, in L. Magni, D. M. Raimondo & F. Allgöwer, eds, ‘Nonlinear Model Predictive Control: Towards New Challenging Applications’, Vol. 384, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, chapter Efficient, pp. 391–417.
- Kirches, C. (2011), *Fast numerical methods for mixed-integer nonlinear model-predictive control*, Springer.
- Maciejowski, J. (2002), *Predictive control: with constraints*, Pearson education.
- Morrison, D., Riley, J. & Zancanaro, J. (1962), ‘Multiple shooting method for two-point boundary value problems’, *Communications of the ACM* **5**(12), 613–614.
- Murillo, M., Limache, A., Rojas Fredini, P. & Giovanini, L. (2015), ‘Generalized nonlinear optimal predictive control using iterative state-space trajectories: Applications to autonomous flight of uavs’, *International Journal of Control, Automation and Systems* **13**(2), 361–370.
- Murillo, M., Sánchez, G. & Giovanini, L. (2016), ‘Iterated non-linear model predictive control based on tubes and contractive constraints’, *ISA Transactions* **62**, 120 – 128. SI: Control of Renewable Energy Systems.
- Rao, A. (2009), ‘A survey of numerical methods for optimal control’, *Advances in the Astronautical Sciences* **135**(1), 497–528.
- Rawlings, J. & Mayne, D. (2009), *Model predictive control: Theory and Design*, Nob Hill Publishing, LLC.
- Risbeck, M. & Rawlings, J. (2015), ‘Mpc tools: Nonlinear model predictive control tools for casadi (python interface)’, <https://bitbucket.org/rawlings-group/mpc-tools-casadi>.
- Topputo, F. & Zhang, C. (2014), Survey of direct transcription for low-thrust space trajectory optimization with applications, in ‘Abstract and Applied Analysis’, Vol. 2014, Hindawi Publishing Corporation.

Anexo F

Moving Horizon Estimation for GNSS-IMU sensor fusion

Moving Horizon Estimation for GNSS-IMU sensor fusion

Guido Sanchez^a, Marina Murillo^a, Lucas Genzelis^a,
Nestor Deniz^a, Leonardo L. Giovanini^a

^a*Instituto de Investigacion en Senales, Sistemas e Inteligencia Computacional,
sinc(i), UNL, CONICET, Ciudad Universitaria UNL, 4to piso FICH, (S3000)
Santa Fe, Argentina*

Abstract

The aim of this work is to develop a Global Navigation Satellite System (GNSS) and Inertial Measurement Unit (IMU) sensor fusion system. To achieve this objective, we introduce a Moving Horizon Estimation (MHE) algorithm to estimate the position, velocity orientation and also the accelerometer and gyroscope bias of a simulated unmanned ground vehicle. The obtained results are compared with the true values of the system and with an Extended Kalman filter (EKF). The use of CasADi and Ipopt provide efficient numerical solvers that can obtain fast solutions. The quality of MHE estimated values enable us to consider MHE as a viable replacement for the popular Kalman Filter, even on real time systems.

Key words: State Estimation, Sensor Fusion, Moving Horizon Estimation, GNSS, IMU

1 Introduction

Navigation aims to solve the problem of determining the position, velocity and orientation of an object in space using different sources of information. If we want to control efficiently an unmanned vehicle, its position, velocity and orientation should be known as accurately as possible. The integration of Global Navigation Satellite Systems (GNSS) and Inertial Measurement Units

Email addresses: gsanchez@sinc.unl.edu.ar (Guido Sanchez),
mmurillo@sinc.unl.edu.ar (Marina Murillo), lgenzelis@sinc.unl.edu.ar
(Lucas Genzelis), ndeniz@sinc.unl.edu.ar (Nestor Deniz),
lgiovanini@sinc.unl.edu.ar (Leonardo L. Giovanini).

(IMU) is the state of the art among navigation systems [1, 2]. It involves non-linear measurement equations combined with rotation matrices, expressed through Euler angles or quaternions, along with the cinematic models for the rigid body's translation and rotation in space. Traditionally, the Extended Kalman Filter (EKF) [3–5], Unscented Kalman Filter (UKF) [6, 7] or the Particle Filter (PF) [8, 9] are used to solve the navigation problem.

Recently, the use of non-linear observers have been proposed as an alternative to the different types of Kalman filters and statistical methods. However, there is still little literature on the subject. Grip et al. [10] present an observer for estimating position, velocity, attitude, and gyro bias, by using inertial measurements of accelerations and angular velocities, magnetometer measurements, and satellite-based measurements of position and (optionally) velocity. Vandersteen et al. [2] use a Moving Horizon Estimation (MHE) algorithm in real-time to estimate the orientation and the sensor calibration parameters applied to two space mission scenarios. In the first scenario, the attitude is estimated from three-axis magnetometer and gyroscope measurements. In the second scenario, a star tracker is used to jointly estimate the attitude and gyroscope calibration parameters. In order to solve this constrained optimization problem in real time, an efficient numerical solution method based on the iterative Gauss-Newton scheme has been implemented and specific measures are taken to speed up the calculations by exploiting the sparsity and band structure of matrices to be inverted. In Poloni et al. [1] a nonlinear numerical observer for accurate position, velocity and attitude estimation including the accelerometer bias and gyro bias estimation is presented. A Moving Horizon Observer (MHO) processes the accelerometer, gyroscope and magnetometer measurements from the IMU and the position and velocity measurements from the GNSS. The MHO is tested off-line in the numerical experiment involving the experimental flight data from a light fixed-wing aircraft.

Both EKF and MHE are based on the solution of a least-squares problem. While EKF use recursive updates to obtain the estimates and the error covariance matrix, MHE use a finite horizon window and solve a constrained optimization problem to find the estimates. In this way, the physical limits of the system states and parameters can be modeled through the optimization problem's constraints. The omission of this information can degrade the estimation algorithm performance [11]. Unfortunately, the Kalman based filters do not explicitly incorporate restrictions in the estimates (states and/or parameters) and, because of this, several ad-hoc methods have been developed [12–17]. These methods lead to sub-optimal solutions at best and can obtain non-realistic solutions under certain conditions, specially when the statistics of the unknown variables are chosen poorly. On the other hand, MHE solves an optimization problem to find the system estimates on each sample step, providing a theoretical framework for theoretic frame for constrained state and parameter estimation.

In this work it will be assumed that the reader is familiar with some of the many coordinate frames used for navigation. If needed, the work of Bekir [18] provides an excellent introduction to these topics. In particular, these coordinate frames will be used:

- (1) Body reference frame, referred as Body and by the superindex b .
- (2) Earth-Centered Earth-Fixed, referred as ECEF and by the superindex e .
- (3) East-North-Up, referred as ENU and by the superindex n .

This work is organized as follows: in Section 2 the problem formulation is presented. Section 3 describes the aspects of the Moving Horizon Estimation algorithm and the Extended Kalman Filter implementation. In order to compare the proposed method, a test simulation example is given in Section 4. Finally, in Section 5 conclusions of this work are stated.

2 Problem formulation

The system equations (for a detailed description, see Poloni et al. [1] and Bekir [18]) that describe the rigid body dynamics in ECEF coordinates are given by:

$$\dot{p}^e = v^e \tag{1}$$

$$\dot{v}^e = -2S(\omega_{ie}^e)v^e + a^e + g^e(p^e) \tag{2}$$

$$\dot{q}_b^e = \frac{1}{2}q_b^e \cdot \tilde{\omega}_{ib}^b - \frac{1}{2}\tilde{\omega}_{ie}^e \cdot q_b^e \tag{3}$$

$$\dot{\alpha} = 0 \tag{4}$$

$$\dot{\beta} = 0 \tag{5}$$

where p^e is the position in ECEF coordinates, v^e is the linear velocity in ECEF coordinates, a^e is the linear acceleration in ECEF coordinates and g^e is the gravity vector in ECEF coordinates. The gravity vector is a function of the position and is modeled using the J_2 gravity model [19]. The known Earth's angular velocity around the ECEF z-axis is represented by vector ω_{ie}^e and $\tilde{\omega}_{ib}^b = [0 \ \omega^b]^T$ is the quaternion representation of the angular velocities in body frame. The quaternion q_b^e determines the orientation of the rigid body in space and α and β are the gyroscope and accelerometer bias, respectively.

The measurement equations with measurement noise v are given by:

$$\omega_m^b = \omega^b + \alpha + v_\omega \quad (6)$$

$$a_m^b = R(q_b^e)^T a^e + \beta + v_a \quad (7)$$

$$m_m^b = R(q_b^e)^T m^e + v_m \quad (8)$$

$$p_m^e = p^e + v_p \quad (9)$$

$$v_m^e = v^e + v_v \quad (10)$$

where m^e is a known vector that contains the values of the magnitude of the terrestrial magnetic field given our current latitude and longitude¹, ω^b and a^e are the angular velocity and linear acceleration vectors in body and ECEF coordinates, respectively. The matrix $R(q_b^e)$ is the rotation matrix associated with the current orientation quaternion.

In order to use GNSS data with Eqs. (1)-(5), we need to convert it to ECEF coordinates. This can be done using the following equations:

$$\begin{aligned} x^e &= (N_e + h) \cos \phi \cos \lambda \\ y^e &= (N_e + h) \cos \phi \sin \lambda \\ z^e &= (b^2 N_e / a^2 + h) \sin \phi \end{aligned} \quad (11)$$

where

$$N_e = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}}$$

is the Earth's east-west radius of curvature, ϕ is the latitude in radians, λ is the longitude in radians, h is the altitude in meters, $a = 6378137$ m and $b = 6356752.3142$ m are the major and minor axes of the Earth reference ellipsoid, respectively.

The set of Eqs. (1)-(5) model the position, velocity and orientation of a vehicle in ECEF coordinates. However, if we wish to travel short distances it is convenient to use ENU coordinates and work in a local reference frame. The steps to convert from ECEF to ENU are the following:

- (1) Determine the latitude, longitude and altitude of the initial reference position (ϕ_0, λ_0, h_0) and calculate its ECEF coordinates using equation (11) to obtain vector $p_0^e = [x_0^e, y_0^e, z_0^e]^T$. This position will be the origin of the ENU coordinate system.
- (2) Transform the incoming GNSS measurements to ECEF coordinates using equation (11) to obtain p^e and compute the relative displacements in ENU coordinates using the following:

$$p^n = R_n^e(\phi_0, \lambda_0)^T (p^e - p_0^e) \quad (12)$$

¹ This data is tabulated and can be obtained from <https://www.ngdc.noaa.gov/geomag-web>

where $R_n^e(\phi_0, \lambda_0)$ is the ENU to ECEF rotation matrix and depends on the initial latitude and longitude (ϕ_0, λ_0) .

The ENU to ECEF rotation matrix is given by two rotations [20]:

- (1) A clockwise rotation over east-axis by an angle $90 - \phi$ to align the up-axis with the z -axis. That is $R_1(-(\pi/2 - \phi))$.
- (2) A clockwise rotation over the z -axis by an angle $90 + \lambda$ to align the east-axis with the x -axis. That is $R_3(-(\phi/2 + \lambda))$.

Where rotation matrices are defined as follows:

$$R_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$R_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$R_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

in matrix form, we obtain

$$\begin{bmatrix} x^e \\ y^e \\ z^e \end{bmatrix} = R_3(-(\phi/2 + \lambda)) R_1(-(\pi/2 - \phi)) \begin{bmatrix} x^n \\ y^n \\ z^n \end{bmatrix} \quad (16)$$

where we assume that the x -axis points to the East when using ENU coordinates. Taking into account the properties of rotation matrices, the ECEF to ENU transformation is obtained through the transpose of the matrix given by the previous equation. In this way, equation (16) gives a formula to convert coordinates from ENU to ECEF and from ECEF to ENU.

By using ENU, we establish a local coordinate system relative to the reference position p_b^e . We must replace our orientation quaternion from q_b^e to q_b^n . Besides, we must be very careful and know exactly in which frame of reference each of the parameters, constants and sensor measurements are given in order to apply the corresponding rotations to them.

3 Implementation details

3.1 MHE implementation

The MHE implementation follows the algorithm presented in the work of Rao et al. [21, 22]. In our case, the vector of differential and algebraic states are defined as

$$x = [p^n \ v^n \ q_b^n \ \alpha \ \beta]^T \quad (17)$$

$$z = [\omega^b \ a^n]^T \quad (18)$$

and the measurement vector is defined as

$$y = [\omega_m^b \ a_m^b \ m_m^b \ p_m^e \ v_m^e]^T \quad (19)$$

The cost function Ψ that will be minimized with respect to $\hat{x}_{k-N|k}$, $\hat{z}_{k-N|k}$ and \hat{w}_k is defined as

$$\begin{aligned} \Psi_k^N = & \|1 - \|\hat{q}_b^n(k-N)\|_2\|_{P_0}^2 + \|\hat{x}_{k-N|k} - \bar{x}_{k-N|k}\|_{P_1}^2 + \\ & \|\hat{z}_{k-N|k} - \bar{z}_{k-N|k}\|_{P_2}^2 + \sum_{j=k-N}^k \|\hat{w}_{j|k}\|_Q^2 + \|\hat{v}_{j|k}\|_R^2 \end{aligned} \quad (20)$$

Given that the quaternion \hat{q}_b^n must have unit norm, the constraint $\|\hat{q}_b^n\|_2^2 = 1$ could be included. However, to avoid the computational cost of this restriction, the first term of Ψ , which penalizes its violation at $k-N$, and the following set of constraints

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \leq \hat{q}_b^n \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

are added to the problem.

The horizon length N and the values of the weights P_0 , P_1 , P_2 , Q and R were chosen by a trial and error procedure as $N = 5$, $P_0 = 0.1$, $P_1 = I$, $P_2 = I$, $Q = 0.001 I$ and $R = \text{diag}([10, 10, 10, 10, 10, 10, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1])$. The resulting MHE constrained non-linear optimization problem is solved with CasADi [23] and Ipopt [24].

3.2 EKF implementation

The implementation of the Extended Kalman Filter follows the standard procedure; however, there are a couple of subtleties. Firstly, gyroscope and accelerometer readings are treated as control inputs instead of as measurements. To that end, ω^b and a^n , which were previously regarded as algebraic states, are expressed as functions of the inputs ω_m^b and a_m^b and subsequently eliminated from the problem formulation. The differential states remain the same as in the MHE formulation, while the measurement vector is comprised of the remaining data readings, namely,

$$y = [m_m^b \ p_m^e \ v_m^e]^T. \quad (22)$$

And secondly, the quaternion \hat{q}_b^n must be renormalized at each time step, given that there is no way to take this constraint into account in the EKF, as was done in the MHE implementation.

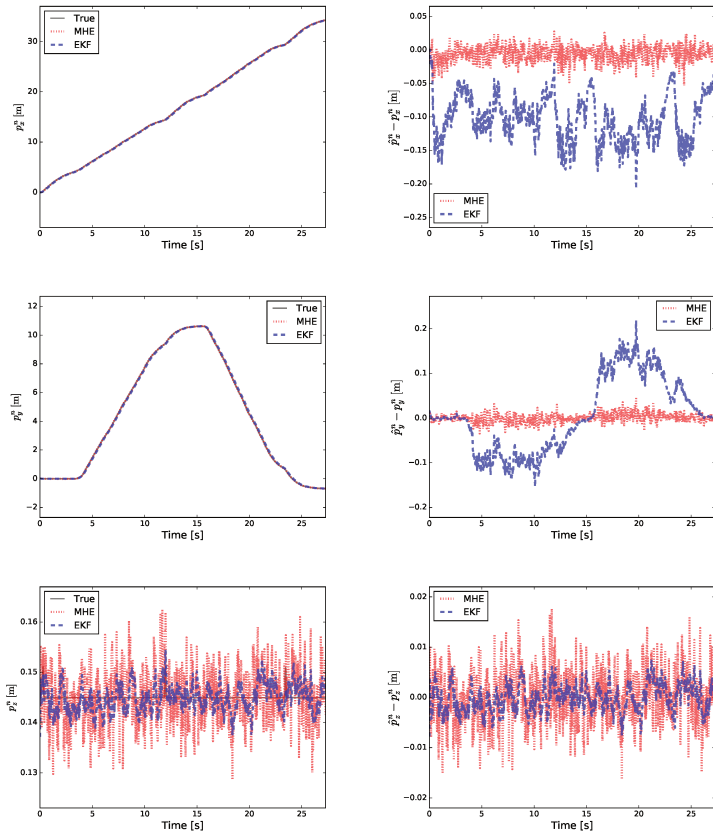
The covariance matrices Q and R of the EKF are chosen as the inverse of the weighting matrices employed in the MHE formulation, given that a smaller covariance in the former must correspond to a bigger weight, i.e., “trust”, in the latter. Therefore, the covariance matrices are defined as $Q = 1000 I$ and $R = \text{diag}([0.2, 0.2, 0.2, 1, 1, 1, 1, 1, 1])$.

4 Example

In the following example, we will perform a manoeuvre using Gazebo and ROS to run a simulation of the Husky² unmanned ground vehicle moving to the following set of *waypoints*: $w_1 = [5; 0; 0]^T$, $w_2 = [15; 10; 0]^T$, $w_3 = [20; 10; 0]^T$, $w_4 = [30; 0; 0]^T$ and $w_5 = [35; 0; 0]^T$. As stated before, the vehicle is equipped with GNSS and IMU sensors, which will be used to estimate the position and orientation in ENU coordinates using MHE and EKF. Both of these estimated values will be compared to the true values.

Figures 1a, 1c and 1e show the true position p^n and its estimates \hat{p}^n in ENU coordinates. It can be seen that both the MHE and EKF provide good estimates. Figures 1a and 1c show that both estimators are able to follow the changes on the x and y axis. Since the vehicle is moving on flat terrain, the z coordinate is only affected by noise (see Fig. 1e). Figures 1b, 1d and 1f show the difference $\hat{p}^n - p^n$. It can be seen that MHE error is slightly smaller on the x and y axis, while EKF filters slightly better the noise on the z axis.

² <https://www.clearpathrobotics.com/husky-unmanned-ground-vehicle-robot/>

(e) p_z^n (f) $\hat{p}_z^n - p_z^n$ Fig. 1. Estimation of the position p^n in ENU coordinates.

The orientation quaternion q^n and its estimates \hat{q}^n are shown in Figures 2 and 3, where it can be seen a similar behaviour than the one obtained from the position. MHE performs a better estimation of the states that change through time $-q_0^n$ and q_3^n , as it can be seen in Figures 2a, 2b, 3c and 3d, while EKF is able to do a slightly better job at filtering the noise on q_1^n and q_2^n , as it can be seen in Figures 2c, 2d, 3a and 3b.

The results obtained by MHE can be attributed to the fact that: *i*) MHE uses more measurements to obtain the current estimate; *ii*) MHE does not assume Gaussian distribution for the process and measurement noises within the estimation horizon, such as the EKF.

Finally, Table 1 shows the mean and the standard deviation of the squared error between the real state and the estimated state over 50 realizations of the same experiment. It can be seen that in average, the position estimates show a smaller mean squared error with EKF, while the velocity estimates show a smaller error with MHE. Finally, the orientation quaternion shows the same behaviour as commented earlier, where MHE performs a better estimation of the states that change through time $-q_0^n$ and q_3^n , while EKF does a better

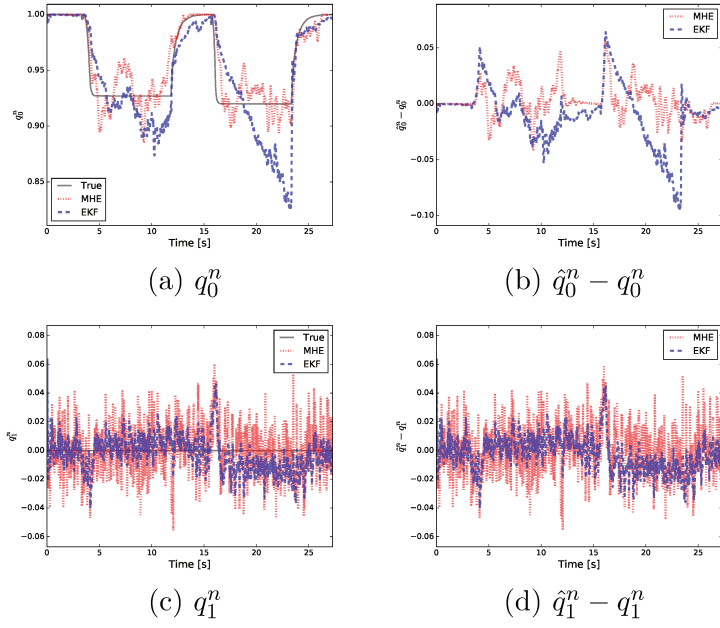


Fig. 2. Estimation of the orientation quaternion q^n in ENU coordinates.

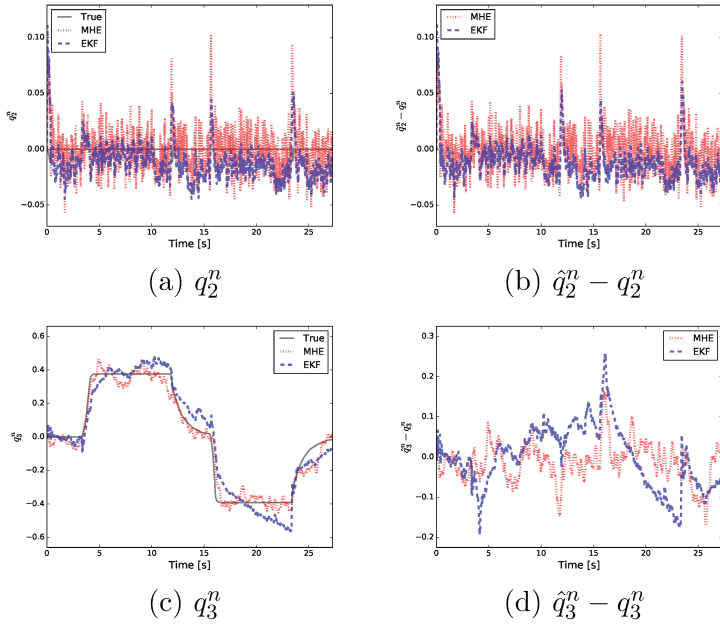


Fig. 3. Estimation of the orientation quaternion q^n in ENU coordinates.

job at filtering the noise on q_1^n and q_2^n . The average execution time for each sample was 5.293 milliseconds for each MHE iteration and 0.211 milliseconds for each EKF iteration on an Intel i5 desktop computer.

| | Mean ($\times 10e-3$) | | Std. Dev. ($\times 10e-3$) | |
|-------------|-------------------------|---------|------------------------------|---------|
| | MHE | EKF | MHE | EKF |
| p_x [m] | 0.30643 | 0.28912 | 0.36298 | 0.33779 |
| p_y [m] | 0.18676 | 0.17014 | 0.22421 | 0.20285 |
| p_z [m] | 0.02815 | 0.00870 | 0.03828 | 0.01201 |
| v_x [m/s] | 0.93519 | 1.70043 | 1.28402 | 2.32408 |
| v_y [m/s] | 0.92798 | 1.67139 | 1.26584 | 2.26883 |
| v_z [m/s] | 1.09800 | 2.12559 | 1.50401 | 2.90566 |
| q_0 | 0.19255 | 1.08827 | 0.28763 | 1.17203 |
| q_1 | 0.22829 | 0.06821 | 0.31084 | 0.09292 |
| q_2 | 0.22064 | 0.07187 | 0.30205 | 0.09909 |
| q_3 | 1.73780 | 5.35359 | 2.38613 | 5.35354 |

Table 1
Mean and standard deviation of the squared error.

5 Conclusion

In this work we employed MHE to estimate the position, velocity and orientation of an unmanned ground vehicle by fusing data from GNSS and IMU sensors. These estimates are compared with the classic benchmark algorithm, the EKF and the true values. MHE is able to perform as good as EKF, even at a fast rate, which indicates that it can easily be used for real time estimation. Since MHE solves a non linear optimization problem on each iteration, the addition of constraints and bounds such as the ones described by Eq. (21), is straight forward.

Since the solution of the navigation problem requires a very specific set of knowledge and the use of different coordinate systems often leads to confusion, we also showed all the necessary steps to perform position, velocity and orientation estimation either in ECEF or ENU coordinates. One of the issues that remains open is how to tune both MHE and EKF weight matrices in order to provide better results.

If we want to run these algorithms with real sensors, special care must be taken in order to account for different sampling rates, especially when typical GNSS receivers sampling rate is around 1 Hz to 10 Hz and commercial IMUs sampling rate is around 500 Hz.

Acknowledgment

The authors wish to thank the *Universidad Nacional de Litoral* (with CAI+D Jóven 500 201501 00050 LI and CAI+D 504 201501 00098 LI), the *Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica* (with PICT 2016-0651) and the *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas* (CONICET) from Argentina, for their support.

We also would like to thank the groups behind the development of CasADi, Ipopt and the HSL solvers [25].

References

- [1] T. Polóni, B. Rohal-Ilkiv, and T. Johansen, “Moving Horizon Estimation for Integrated Navigation Filtering,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 23, pp. 519–526, 2015. [Online]. Available: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2405896315026154>
- [2] J. Vandersteen, M. Diehl, C. Aerts, and J. Swevers, “Spacecraft Attitude Estimation and Sensor Calibration Using Moving Horizon Estimation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 36, no. 3, pp. 734–742, may 2013. [Online]. Available: <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.58805>
- [3] E. Lefferts, F. Markley, and M. Shuster, “Kalman filtering for spacecraft attitude estimation,” pp. 417–429, 1982. [Online]. Available: <http://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/3.56190>
- [4] F. Markley and J. Sedlak, “Kalman Filter for Spinning Spacecraft Attitude Estimation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 31, no. 6, pp. 1750–1760, nov 2008. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.2514/1.35221>
- [5] S. Roumeliotis and G. Bekey, “3-D Localization for a Mars Rover Prototype,” in *Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space, Proceedings of the Fifth International Symposium, ISAIRAS '99*, 1999, pp. 441–448. [Online]. Available: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1999ESASP.440..441R>
- [6] J. Crassidis and F. Markley, “Unscented Filtering for Spacecraft Attitude Estimation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 26, no. 4, pp. 536–542, jul 2003. [Online]. Available: <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/2.5102>
- [7] M. Rhudy, Y. Gu, J. Gross, S. Gururajan, and M. R. Napolitano, “Sensitivity Analysis of Extended and Unscented Kalman Filters for Attitude Estimation,” *Journal of Aerospace Information Systems*, vol. 10, no. 3, pp. 131–143, mar 2013. [Online]. Available: <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.54899>
- [8] A. Carmi and Y. Oshman, “Adaptive Particle Filtering for Spacecraft Attitude Estimation from Vector Observations,” *Journal of Guidance, Control,*

and Dynamics, vol. 32, no. 1, pp. 232–241, jan 2009. [Online]. Available: <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.35878>

- [9] Y. Cheng and J. Crassidis, “Particle Filtering for Sequential Spacecraft Attitude Estimation,” in *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, aug 2004. [Online]. Available: <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2004-5337>
- [10] H. F. Grip, T. I. Fossoero, T. A. Johansen, and A. Saberi, “A nonlinear observer for integration of gnss and imu measurements with gyro bias estimation,” in *American Control Conference (ACC), 2012*. IEEE, 2012, pp. 4607–4612.
- [11] E. Haseltine and J. Rawlings, “Critical evaluation of extended kalman filtering and moving-horizon estimation,” *Industrial & engineering chemistry research*, vol. 44, no. 8, pp. 2451–2460, 2005.
- [12] D. Simon, “Kalman filtering with state constraints: a survey of linear and nonlinear algorithms,” *Control Theory & Applications, IET*, vol. 4, no. 8, pp. 1303–1318, 2010.
- [13] D. Simon and T. Chia, “Kalman filtering with state equality constraints,” *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 38, no. 1, pp. 128–136, 2002.
- [14] D. Hall and S. McMullen, *Mathematical techniques in multisensor data fusion*. Artech House, 2004.
- [15] B. Teixeira, J. Chandrasekar, H. Palanhandalam-Madapusi, L. Tôrres, L. Aguirre, and D. Bernstein, “Gain-constrained kalman filtering for linear and nonlinear systems,” *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 56, no. 9, pp. 4113–4123, 2008.
- [16] D. Simon and D. Simon, “Constrained kalman filtering via density function truncation for turbofan engine health estimation,” *International Journal of Systems Science*, vol. 41, no. 2, pp. 159–171, 2010.
- [17] S. Ko and R. Bitmead, “State estimation for linear systems with state equality constraints,” *Automatica*, vol. 43, no. 8, pp. 1363–1368, 2007.
- [18] E. Bekir, *Introduction to modern navigation systems*. World Scientific, 2007.
- [19] D. Hsu, “Comparison of four gravity models,” in *Proceedings of Position, Location and Navigation Symposium - PLANS '96*. IEEE, 1996, pp. 631–635. [Online]. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=509138>
- [20] J. Z. J. Sanz-Subirana and M. Hernández-Pajares, “Transformations between ECEF and ENU coordinates,” http://www.navipedia.net/index.php/Transformations_between_ECEF_and_ENU_coordinates, 2011, [Online; accessed 30-07-2017].

-
- [21] C. V. Rao, J. B. Rawlings, and J. H. Lee, “Constrained linear state estimation—a moving horizon approach,” *Automatica*, vol. 37, no. 10, pp. 1619–1628, oct 2001. [Online]. Available: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0005109801001157>
- [22] C. V. Rao, J. B. Rawlings, and D. Q. Mayne, “Constrained state estimation for nonlinear discrete-time systems: Stability and moving horizon approximations,” *IEEE transactions on automatic control*, vol. 48, no. 2, pp. 246–258, 2003.
- [23] J. Andersson, “A General-Purpose Software Framework for Dynamic Optimization,” PhD thesis, Arenberg Doctoral School, KU Leuven, Department of Electrical Engineering (ESAT/SCD) and Optimization in Engineering Center, Kasteelpark Arenberg 10, 3001-Heverlee, Belgium, October 2013.
- [24] A. Wächter and L. T. Biegler, “On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming,” *Mathematical programming*, vol. 106, no. 1, pp. 25–57, 2006.
- [25] The HSL Mathematical Software Library, “HSL. A collection of Fortran codes for large scale scientific computation,” <http://www.hsl.rl.ac.uk>, 2016, [Online; accessed 30-07-2017].

Bibliografía

- [1] James Blake Rawlings, David Q Mayne, and Moritz Diehl. *Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design*. Nob Hill Publishing, 2017.
- [2] Wook Hyun Kwon and Soo Hee Han. *Receding horizon control: model predictive control for state models*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [3] EF—Bordons Camacho and Bordons Alba. Model predictive control, 2004.
- [4] Jan Marian Maciejowski. *Predictive control: with constraints*. Pearson education, 2002.
- [5] Peter Klaus Findeisen. *Moving horizon state estimation of discrete time systems*. PhD thesis, University of Wisconsin–Madison, 1997.
- [6] G Sánchez, M Murillo, and L Giovanini. Adaptive arrival cost update for improving moving horizon estimation performance. *ISA transactions*, 68:54–62, 2017.
- [7] Sanjoy K Mitter. Filtering and stochastic control: A historical perspective. *IEEE Control Systems Magazine*, 16(3):67–76, 1996.
- [8] Huibert Kwakernaak and Raphael Sivan. *Linear optimal control systems*, volume 1. Wiley-interscience New York, 1972.
- [9] Karl J Åström. *Introduction to stochastic control theory*. Courier Corporation, 2012.
- [10] Tryphon T Georgiou and Anders Lindquist. The separation principle in stochastic control, redux. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(10):2481–2494, 2013.
- [11] Anders Lindquist. On feedback control of linear stochastic systems. *SIAM Journal on Control*, 11(2):323–343, 1973.
- [12] Karl Johan Åström. Theory and applications of adaptive control—a survey. *Automatica*, 19(5):471–486, 1983.
- [13] P-O Gutman and Michael Cwikel. Admissible sets and feedback control for discrete-time linear dynamical systems with bounded controls and states. *IEEE transactions on Automatic Control*, 31(4):373–376, 1986.
- [14] Franco Blanchini. Nonquadratic lyapunov functions for robust control. *Automatica*, 31(3):451–461, 1995.

-
- [15] Antonio Loria, Thor I Fossen, and Elena Panteley. A separation principle for dynamic positioning of ships: Theoretical and experimental results. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(2):332–343, 2000.
- [16] Ahmad N Atassi and Hassan K Khalil. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems. In *1997 European Control Conference (ECC)*, pages 3829–3834. IEEE, 1997.
- [17] Amel Benabdallah. A separation principle for the stabilization of a class of time delay nonlinear systems. *Kybernetika*, 51(1):99–111, 2015.
- [18] Ashutosh A Patwardhan, James B Rawlings, and Thomas F Edgar. Nonlinear model predictive control. *Chemical Engineering Communications*, 87(1):123–141, 1990.
- [19] Manfred Morari and Jay H Lee. Model predictive control: past, present and future. *Computers & Chemical Engineering*, 23(4-5):667–682, 1999.
- [20] David Q Mayne, James B Rawlings, Christopher V Rao, and Pierre OM Scaert. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6):789–814, 2000.
- [21] Frank Allgöwer and Alex Zheng. *Nonlinear model predictive control*, volume 26. Birkhäuser, 2012.
- [22] Eduardo Camponogara, Dong Jia, Bruce H Krogh, and Sarosh Talukdar. Distributed model predictive control. *IEEE Control Systems*, 22(1):44–52, 2002.
- [23] Mark L Darby and Michael Nikolaou. Mpc: Current practice and challenges. *Control Engineering Practice*, 20(4):328–342, 2012.
- [24] Stefano Di Cairano. An industry perspective on mpc in large volumes applications: Potential benefits and open challenges. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(17):52–59, 2012.
- [25] A Jazwinski. Limited memory optimal filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13(5):558–563, 1968.
- [26] Fred C Schweppe. *Uncertain dynamic systems*. Prentice Hall, 1973.
- [27] Christopher V Rao, James B Rawlings, and Jay H Lee. Constrained linear state estimation—a moving horizon approach. *Automatica*, 37(10):1619–1628, 2001.
- [28] Christopher V Rao, James B Rawlings, and David Q Mayne. Constrained state estimation for nonlinear discrete-time systems: Stability and moving horizon approximations. *IEEE transactions on automatic control*, 48(2):246–258, 2003.
- [29] James B Rawlings and Luo Ji. Optimization-based state estimation: Current status and some new results. *Journal of Process Control*, 22(8):1439–1444, 2012.

-
- [30] Luo Ji, James B Rawlings, Wuhua Hu, Andrew Wynn, and Moritz Diehl. Robust stability of moving horizon estimation under bounded disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(11):3509–3514, 2016.
- [31] Matthias A Müller. Nonlinear moving horizon estimation in the presence of bounded disturbances. *Automatica*, 79:306–314, 2017.
- [32] Angelo Alessandri, Marco Baglietto, and Giorgio Battistelli. Moving-horizon state estimation for nonlinear discrete-time systems: New stability results and approximation schemes. *Automatica*, 44(7):1753–1765, 2008.
- [33] David Q Mayne, SV Raković, Rolf Findeisen, and Frank Allgöwer. Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems. *Automatica*, 42(7):1217–1222, 2006.
- [34] D Sui, L Feng, and M Hovd. Robust output feedback model predictive control for linear systems via moving horizon estimation. In *2008 American Control Conference*, pages 453–458. IEEE, 2008.
- [35] Anna Voelker, Konstantinos Kouramas, and Efstratios N Pistikopoulos. Unconstrained moving horizon estimation and simultaneous model predictive control by multi-parametric programming. 2010.
- [36] Eric L Haseltine and James B Rawlings. Critical evaluation of extended kalman filtering and moving-horizon estimation. *Industrial & engineering chemistry research*, 44(8):2451–2460, 2005.
- [37] Anna Voelker, Konstantinos Kouramas, and Efstratios N Pistikopoulos. Simultaneous design of explicit/multi-parametric constrained moving horizon estimation and robust model predictive control. *Computers & Chemical Engineering*, 54:24–33, 2013.
- [38] David A Copp and Joao P Hespanha. Nonlinear output-feedback model predictive control with moving horizon estimation. In *53rd IEEE conference on decision and control*, pages 3511–3517. IEEE, 2014.
- [39] David A Copp and Joao P Hespanha. Conditions for saddle-point equilibria in output-feedback mpc with mhe. In *2016 American Control Conference (ACC)*, pages 13–19. IEEE, 2016.
- [40] David A Copp and Joao P Hespanha. Simultaneous nonlinear model predictive control and state estimation. *Automatica*, 77:143–154, 2017.
- [41] DA Copp and JP Hespanha. Addressing adaptation and learning in the context of model predictive control with moving-horizon estimation. In *Control of Complex Systems*, pages 187–209. Elsevier, 2016.

-
- [42] D Limon, T Alamo, DM Raimondo, D Muñoz De La Peña, JM Bravo, A Ferramosca, and EF Camacho. Input-to-state stability: a unifying framework for robust model predictive control. In *Nonlinear model predictive control*, pages 1–26. Springer, 2009.
- [43] Eduardo D Sontag and Yuan Wang. Output-to-state stability and detectability of nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 29(5):279–290, 1997.
- [44] Baburao G Pachpatte. *Inequalities for differential and integral equations*. Elsevier, 1997.
- [45] John M Holte. Discrete gronwall lemma and applications. In *MAA-NCS meeting at the University of North Dakota*, volume 24, pages 1–7, 2009.
- [46] Hassan K Khalil and Jessy W Grizzle. *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [47] Andrew H Jazwinski. *Stochastic processes and filtering theory*. Courier Corporation, 2007.
- [48] John L Crassidis and John L Junkins. *Optimal estimation of dynamic systems*. Chapman and Hall/CRC, 2004.
- [49] Huaizhong Li and Minyue Fu. A linear matrix inequality approach to robust h/sub/spl infin//filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(9):2338–2350, 1997.
- [50] Ali H Sayed. A framework for state-space estimation with uncertain models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(7):998–1013, 2001.
- [51] Franco Blanchini and Stefano Miani. Set-theoretic methods in control. systems & control: Foundations & applications. *Birkhäuser. Boston, MA*, 2008.
- [52] James Blake Rawlings and David Q Mayne. *Model predictive control: Theory and design*. Nob Hill Pub. Madison, Wisconsin, 2009.
- [53] Angelo Alessandri, Marco Baglietto, Giorgio Battistelli, and Victor Zavala. Advances in moving horizon estimation for nonlinear systems. In *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, pages 5681–5688. IEEE, 2010.
- [54] Wuhua Hu. Robust stability of optimization-based state estimation. *arXiv preprint arXiv:1702.01903*, 2017.
- [55] Luo Ji, James B Rawlings, Wuhua Hu, Andrew Wynn, and Moritz Diehl. Robust stability of moving horizon estimation under bounded disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(11):3509–3514, 2015.
- [56] Sachin C Patwardhan, Shankar Narasimhan, Prakash Jagadeesan, Bhushan Gopaluni, and Sirish L Shah. Nonlinear bayesian state estimation: A review of recent developments. *Control Engineering Practice*, 20(10):933–953, 2012.

-
- [57] Harold Joseph Kushner. *Probability methods for approximations in stochastic control and for elliptic equations*, volume 129. Academic Press, 1977.
- [58] VE Beneš. Exact finite-dimensional filters for certain diffusions with nonlinear drift. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 5(1-2):65–92, 1981.
- [59] Arnaud Doucet, Nando De Freitas, and Neil Gordon. An introduction to sequential monte carlo methods. In *Sequential Monte Carlo methods in practice*, pages 3–14. Springer, 2001.
- [60] Dan Crisan, Jessica Gaines, and Terry Lyons. Convergence of a branching particle method to the solution of the zakai equation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 58(5):1568–1590, 1998.
- [61] Ienkaran Arasaratnam and Simon Haykin. Cubature kalman filters. *IEEE Transactions on automatic control*, 54(6):1254–1269, 2009.
- [62] Jeff S Shamma and Michael Athans. Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants. *Automatica*, 27(3):559–564, 1991.
- [63] Jeff S Shamma and James R Cloutier. Gain-scheduled missile autopilot design using linear parameter varying transformations. *Journal of guidance, Control, and dynamics*, 16(2):256–263, 1993.
- [64] Pierre Apkarian, Pascal Gahinet, and Greg Becker. Self-scheduled h control of linear parameter-varying systems: a design example. *Automatica*, 31(9):1251–1261, 1995.
- [65] Georgo Z Angelis. System analysis, modelling and control with polytopic linear models. 2003.
- [66] Douglas J Leith and William E Leithead. Survey of gain-scheduling analysis and design. *International journal of control*, 73(11):1001–1025, 2000.
- [67] Graham C Goodwin. K. s. sin. *Adaptive Filtering Prediction and Control*, pages 649–654, 1984.
- [68] Karl J Astrom and B Wittenmark. *Adaptive control systems*. Addison-Wesley, 1995.
- [69] Ioan Doré Landau, Rogelio Lozano, Mohammed M’Saad, and Alireza Karimi. *Adaptive control*, volume 51. Springer London, 1998.
- [70] Ivar Ekeland. Nonconvex minimization problems. *Bulletin of the American mathematical Society*, 1(3):443–474, 1979.
- [71] Alberto Bemporad and Manfred Morari. Robust model predictive control: A survey. In *Robustness in identification and control*, pages 207–226. Springer, 1999.

-
- [72] David Q Mayne. Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*, 50(12):2967–2986, 2014.
- [73] Lars Grüne and Jürgen Pannek. Nonlinear model predictive control. communications and control engineering. *Springer*. doi, 10:978–0, 2011.
- [74] David Mayne. Robust and stochastic model predictive control: Are we going in the right direction? *Annual Reviews in Control*, 41:184–192, 2016.
- [75] James B Rawlings and Bhavik R Bakshi. Particle filtering and moving horizon estimation. *Computers & chemical engineering*, 30(10-12):1529–1541, 2006.
- [76] Angelo Alessandri, Marco Baglietto, and Giorgio Battistelli. Robust receding-horizon state estimation for uncertain discrete-time linear systems. *Systems & Control Letters*, 54(7):627–643, 2005.
- [77] Angelo Alessandri, Marco Baglietto, and Giorgio Battistelli. Min-max moving-horizon estimation for uncertain discrete-time linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 50(3):1439–1465, 2012.
- [78] J Garcia-Tirado, H Botero, and F Angulo. A new approach to state estimation for uncertain linear systems in a moving horizon estimation setting. *International Journal of Automation and Computing*, 13(6):653–664, 2016.
- [79] Nestor N Deniz, Marina H Murillo, Guido Sanchez, Lucas M Genzelis, and Leonardo Giovanini. Robust stability of moving horizon estimation for nonlinear systems with bounded disturbances using adaptive arrival cost. *arXiv preprint arXiv:1906.01060*, 2019.
- [80] Douglas A Allan and James B Rawlings. A lyapunov-like function for full information estimation. In *2019 American Control Conference (ACC)*, pages 4497–4502. IEEE, 2019.
- [81] Tyrone Duncan and Pravin Varaiya. On the solutions of a stochastic control system. *SIAM Journal on Control*, 9(3):354–371, 1971.
- [82] Alain Bensoussan. *Stochastic control of partially observable systems*. Cambridge University Press, 2004.
- [83] L Magni, G De Nicolao, Riccardo Scattolini, and F Allgöwer. Robust model predictive control for nonlinear discrete-time systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, 13(3-4):229–246, 2003.
- [84] Alberto Bemporad, Francesco Borrelli, and Manfred Morari. Min-max control of constrained uncertain discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 48(9):1600–1606, 2003.

-
- [85] Davide Martino Raimondo, Daniel Limon, Mircea Lazar, Lalo Magni, and Eduardo Fernández Camacho. Min-max model predictive control of nonlinear systems: A unifying overview on stability. *European Journal of Control*, 15(1):5–21, 2009.
- [86] Rolf Findeisen, Lars Imsland, Frank Allgower, and Bjarne A Foss. State and output feedback nonlinear model predictive control: An overview. *European journal of control*, 9(2-3):190–206, 2003.
- [87] BJP Roset, M Lazar, H Nijmeijer, and WPMH Heemels. Stabilizing output feedback nonlinear model predictive control: An extended observer approach. In *17th Symposium on Mathematical Theory for Networks and Systems. Kyoto, Japan*. Citeseer, 2006.
- [88] Lalo Magni, Davide Martino Raimondo, and Frank Allgöwer. Nonlinear model predictive control. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, (384), 2009.
- [89] Jing Zhang and Jinfeng Liu. Lyapunov-based mpc with robust moving horizon estimation and its triggered implementation. *AIChE Journal*, 59(11):4273–4286, 2013.
- [90] Matthew Ellis, Jinfeng Liu, and Panagiotis D Christofides. State estimation and empc. In *Economic Model Predictive Control*, pages 135–170. Springer, 2017.
- [91] David Q Mayne, SV Raković, Rolf Findeisen, and Frank Allgöwer. Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems: Time varying case. *Automatica*, 45(9):2082–2087, 2009.
- [92] Anna Voelker, Konstantinos Kouramas, and Efstratios N Pistikopoulos. Moving horizon estimation: Error dynamics and bounding error sets for robust control. *Automatica*, 49(4):943–948, 2013.
- [93] Hong Chen and Frank Allgöwer. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability. *Automatica*, 34(10):1205–1217, 1998.
- [94] Kaisa Miettinen. *Nonlinear multiobjective optimization*, volume 12. Springer Science & Business Media, 2012.
- [95] Eric Colin Kerrigan. *Robust constraint satisfaction: Invariant sets and predictive control*. PhD thesis, University of Cambridge, 2001.
- [96] S Emre Tuna, Michael J Messina, and Andrew R Teel. Shorter horizons for model predictive control. In *2006 American Control Conference*, pages 6–pp. IEEE, 2006.
- [97] S Emre Tuna and Andrew R Teel. Generalized dilations and numerically solving discrete-time homogeneous optimization problems. In *2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)(IEEE Cat. No. 04CH37601)*, volume 5, pages 5403–5408. IEEE, 2004.

-
- [98] Jun Li and Yuntang Li. Dynamic analysis and pid control for a quadrotor. In *Mechatronics and Automation (ICMA), 2011 International Conference on*, pages 573–578. IEEE, 2011.
- [99] Pan Zhao, Jiajia Chen, Yan Song, Xiang Tao, Tiejuan Xu, and Tao Mei. Design of a control system for an autonomous vehicle based on adaptive-pid. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 9(2):44, 2012.
- [100] Hossein Bonyan Khamseh and Farrokh Janabi-Sharifi. Ukf-based lqr control of a manipulating unmanned aerial vehicle. *Unmanned Systems*, 5(03):131–139, 2017.
- [101] Babak Salamat and Andrea M Tonello. Altitude and attitude tracking of a quadrotor helicopter uav using a novel evolutionary feedback controller. In *Smart Systems and Technologies (SST), 2017 International Conference on*, pages 327–331. IEEE, 2017.
- [102] Yan-Cheng Liu, Si-Yuan Liu, and Ning Wang. Fully-tuned fuzzy neural network based robust adaptive tracking control of unmanned underwater vehicle with thruster dynamics. *Neurocomputing*, 196:1–13, 2016.
- [103] Adrian Carrio, Carlos Sampedro, Alejandro Rodriguez-Ramos, and Pascual Campoy. A review of deep learning methods and applications for unmanned aerial vehicles. *Journal of Sensors*, 2017, 2017.
- [104] Ej Lefferts, Fl Markley, and Md Shuster. Kalman filtering for spacecraft attitude estimation, 1982.
- [105] F Markley and Joseph Sedlak. Kalman Filter for Spinning Spacecraft Attitude Estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 31(6):1750–1760, nov 2008.
- [106] Stergios Roumeliotis and George Bekey. 3-D Localization for a Mars Rover Prototype. In *Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space, Proceedings of the Fifth International Symposium, ISAIRAS '99*, pages 441–448, 1999.
- [107] John Crassidis and F. Markley. Unscented Filtering for Spacecraft Attitude Estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 26(4):536–542, jul 2003.
- [108] Matthew Rhudy, Yu Gu, Jason Gross, Srikanth Gururajan, and Marcello R. Napolitano. Sensitivity Analysis of Extended and Unscented Kalman Filters for Attitude Estimation. *Journal of Aerospace Information Systems*, 10(3):131–143, mar 2013.
- [109] Avishy Carmi and Yaakov Oshman. Adaptive Particle Filtering for Spacecraft Attitude Estimation from Vector Observations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 32(1):232–241, jan 2009.
- [110] Yang Cheng and John Crassidis. Particle Filtering for Sequential Spacecraft Attitude Estimation. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Reston, Virginia, aug 2004. American Institute of Aeronautics and Astronautics.

-
- [111] Håvard Fjær Grip, Thor I Fossero, Tor A Johansen, and Ali Saberi. A nonlinear observer for integration of gnss and imu measurements with gyro bias estimation. In *American Control Conference (ACC), 2012*, pages 4607–4612. IEEE, 2012.
- [112] Dan Simon and Tien Li Chia. Kalman filtering with state equality constraints. *IEEE transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 38(1):128–136, 2002.
- [113] Dan Simon and Donald L Simon. Constrained kalman filtering via density function truncation for turbofan engine health estimation. *International Journal of Systems Science*, 41(2):159–171, 2010.
- [114] David Lee Hall and Sonya AH McMullen. *Mathematical techniques in multisensor data fusion*. Artech House, 2004.
- [115] Bruno Otávio Soares Teixeira, Jaganath Chandrasekar, Harish J Palanhandalam-Madapusi, Leonardo Antônio Borges Tôres, Luis Antonio Aguirre, and Dennis S Bernstein. Gain-constrained kalman filtering for linear and nonlinear systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(9):4113–4123, 2008.
- [116] Dan Simon. Kalman filtering with state constraints: a survey of linear and nonlinear algorithms. *Control Theory & Applications, IET*, 4(8):1303–1318, 2010.
- [117] Sangho Ko and Robert R Bitmead. State estimation for linear systems with state equality constraints. *Automatica*, 43(8):1363–1368, 2007.
- [118] Jeroen Vandersteen, Moritz Diehl, Conny Aerts, and Jan Swevers. Spacecraft Attitude Estimation and Sensor Calibration Using Moving Horizon Estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 36(3):734–742, may 2013.
- [119] Liang Yang, Juntong Qi, Dalei Song, Jizhong Xiao, Jianda Han, and Yong Xia. Survey of robot 3d path planning algorithms. *Journal of Control Science and Engineering*, 2016, 2016.
- [120] Dyke Weatherington and U Deputy. Unmanned aircraft systems roadmap, 2005–2030. *UAV Planning Task Force, OUSD (AT&L)*, 2005.
- [121] Steven M LaValle. *Planning algorithms*. Cambridge university press, 2006.
- [122] Martin Saska, Vojtěch Spurný, and Vojtěch Vonásek. Predictive control and stabilization of nonholonomic formations with integrated spline-path planning. *Robotics and Autonomous Systems*, 2015.
- [123] Qian Xue, Peng Cheng, and Nong Cheng. Offline path planning and online replanning of uavs in complex terrain. In *Proceedings of 2014 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference*, pages 2287–2292, 2014.
- [124] Markus Hehn and Raffaello D’Andrea. Real-time trajectory generation for quadcopters. *IEEE Transactions on Robotics*, 31(4):877–892, 2015.

-
- [125] Vu Trieu Minh and John Pumwa. Feasible path planning for autonomous vehicles. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 2014.
- [126] Tomáš Polóni, Boris Rohal-Ilkiv, and Tor Arne Johansen. Moving Horizon Estimation for Integrated Navigation Filtering. *IFAC-PapersOnLine*, 48(23):519–526, 2015.
- [127] Esmat Bekir. *Introduction to modern navigation systems*. World Scientific, 2007.
- [128] J Sanz Subirana, JM Juan Zornoza, and M Hernández-Pajares. Transformations between ecef and enu coordinates. URL: http://www.navipedia.net/index.php/Transformations_between_ECEF_and_ENU_coordinates (visited on February 15, 2016). *Technical University of Catalonia, Spain*, 2011.
- [129] M. Murillo, G Sánchez, L Genzelis, and L Giovanini. A real-time path-planning algorithm based on receding horizon techniques. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2017. In press.
- [130] Joel A E Andersson, Joris Gillis, Greg Horn, James B Rawlings, and Moritz Diehl. CasADi – A software framework for nonlinear optimization and optimal control. *Mathematical Programming Computation*, In Press, 2018.
- [131] MJ Risbeck and JB Rawlings. Mpctools: Nonlinear model predictive control tools for casadi, 2016.
- [132] Andreas Wächter and Lorenz T Biegler. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical programming*, 106(1):25–57, 2006.

Doctorado en Ingeniería
mención inteligencia computacional, señales y sistemas

Título de la obra:

**Estimación y control simultáneos
de sistemas no lineales sujetos
a perturbaciones acotadas utilizando
métodos de horizonte móvil**

Autor: Nestor Nahuel Deniz

Lugar: Santa Fe, Argentina

Palabras Claves:

Métodos de horizonte móvil,
Sistemas no lineales,
Control predictivo,
Estimación de horizonte móvil.