# UN CRITERIO DE ACOTACIÓN PARA CONMUTADORES DE OPERADORES FRACCIONARIOS EN ESPACIOS DE OSCILACIÓN MEDIA ACOTADA GENERALES

**Vignatti, María Sol**

*Facultad de Ingeniería Química – UNL*

Directora: Toschi, Marisa

Codirector: Ramseyer, Mauricio

Área: Ciencias Exactas

Palabras claves: Conmutadores, Espacios de oscilación media acotada, Integrales fraccionarias.

## INTRODUCCIÓN

Una de las herramientas claves en el estudio de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales elípticas es el estudio del control en norma de los conmutadores de integrales singulares $T_b$, donde $b$ es una función medible llamada símbolo. En esa dirección, recientemente en (Ferreyra, E., Flores, G., Ramseyer, M. y Viviani, B., 2020) se encontraron condiciones necesarias y suficientes para el símbolo $b$ que garantizan dicha acotación en espacios de oscilación $BMO_\omega$, los cuales generalizan, dependiendo la elección de $\omega$, a varios espacios de funciones ya conocidos. Nuestro trabajo estudia estos resultados para el caso de operadores $T_\alpha$ de tipo fraccionario, obteniendo una condición necesaria y suficiente para la acotación de sus conmutadores $T_{\alpha,b}$.

## OBJETIVOS

- Estudiar el espacio de funciones $BMO_\omega$, para diferentes funciones $\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Título del proyecto: ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE CONMUTADORES DE INTEGRALES SINGULARES SOBRE CIERTOS ESPACIOS DE OSCILACIÓN MEDIA ACOTADA.
Mestría en Matemática (FIQ-UNL)
Directora: Toschi, Marisa
Codirector: Ramseyer, Mauricio

- Entender la técnica usada en (Ferreyra, E., Flores, G., Ramseyer, M. y Viviani, B., 2020) para el caso de operadores singulares $T$ y sus conmutadores.
- Bajo ciertas hipótesis sobre $\omega$, encontrar condiciones necesarias y suficientes que involucran al operador $T_\alpha$ y a la función $b$ para la acotación del conmutador $T_{\alpha,b}$ entre diferentes espacios de oscilación media acotada generales.

## METODOLOGÍA

En primer lugar, definimos los espacios involucrados en el trabajo, los cuales fueron vistos en (Ferreyra,E., Flores, G., Ramseyer, M. y Viviani, B., 2020). Para ello consideramos $\omega : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una función medible tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todo $0 < r < s < \infty$, existe una constante positiva $C$ que satisface

$$(i)\ \omega(x,r) \le C\ \omega(x,s), \tag{1}$$

$$(ii)\ \omega(x,2r) \le C\ \omega(x,r), \tag{2}$$

$$(iii)\ \omega(x,r) \le C\ \omega(y,r), \text{ siempre que } |x-y| < r. \tag{3}$$

Decimos que una función $f$ localmente integrable pertenece al espacio $BMO_\omega$ si existe una constante positiva $C$ tal que

$$\frac{1}{\omega(x,r)|B|} \int_B |f(y) - f_B|\, dy \le C\,, \tag{4}$$

para toda bola $B = B(x,r)$, donde $f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(y)dy$ y definimos la seminorma de $f \in BMO_\omega$ denotada por $\|f\|_{BMO_\omega}$, como el ínfimo de tales constantes $C$. Si $\omega \equiv 1$ entonces el espacio coincide con el espacio usual $BMO$.

Definimos el operador Integral singular con núcleo asociado $K$ como

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x-y|>\epsilon} K(x-y) f(y) dy\,, \tag{5}$$

para cada $f$ tal que el límite exista.

Consideramos el conmutador $T_b$ para una función localmente integrable $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ formalmente definido por

$$T_b f(x) = b(x)Tf(x) - T(bf)(x). \quad (6)$$

Una vez entendidas las definiciones del espacio de funciones y el operador se escribieron con detalle las condiciones que garantizan la acotación en adecuados espacios $BMO_\omega$. Todos estos resultados se encuentran en (Ferreyra,E. Flores, G., Ramseyer, M. y Viviani, B., 2020).

Para analizar el caso fraccionario y las diferencias con el caso singular, definimos el operador fraccionario $T_\alpha$ para $0 < \alpha < n$ como en (Harboure, E., Segovia, C. y Torrea, J., 1997), esto es

$(a)$ $T_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 < p < q < \infty$ con $1/q = 1/p - \alpha/n$.

$(b)$ Para toda función $f$ acotada y con soporte compacto

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy\,, \quad (7)$$

para $x \notin sop\, f$ y el núcleo K una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \{(x,x)\}$.

$(c)$ Existe una constante positiva $C$ tal que

$$|K(x,y) - K(x,z)| \leq C \frac{|y-z|}{|x-z|^{n+1-\alpha}}, \quad (8)$$

siempre que $|x-z| \geq 2|y-z|$.

Todo el análisis de los temas presentados fue realizado a través del estudio de bibliografía propuesta por los directores, complementando con búsquedas que surgieron a partir de ésta, lo cual fue compartido y discutido en reuniones periódicas con los mismos.

## CONCLUSIONES

Al estudiar el espacio de funciones $BMO_\omega$ para diferentes funciones $\omega$ se comprobó que se recuperan los distintos espacios conocidos en la bibliografía. Por ejemplo, si $\omega(x,t) = \left(\int_{B(x,t)} v(y)\, dy\right) \varphi(t)/t^n$, donde $v$ es un peso en la clase de Muckenhoupt $A_1$ y $\varphi$ una función no negativa y no decreciente, el espacio $BMO_\omega \equiv BMO_\varphi(v)$ introducido en (Harboure, E., Salinas, O. y Viviani, B., 2007) y en particular para $\varphi \equiv 1$ en (Muckenhoupt, B. y Wheeden, R., 1975/76).

El resultado principal respecto al conmutador de un operador fraccionario se sitúa en el contexto de una función símbolo $b \in BMO$ y una función $\omega$ que satisface para algún

Encuentro de JÓVENES INVESTIGADORES

$S \in (1, \infty)$ una condición llamada $D_S$, la cual dice que existe una constante positiva $C$ tal que

$$\sum_i \omega(x_i, r_i)^s \, r_i{}^n \leq C \, \omega(x, r)^s r^n \, , \tag{9}$$

para toda bola $B = B(x, r)$ y cualquier familia $\{B_i\}_i = \{B(x_i, r_i)\}_i$ de sub-bolas de $B$ disjuntas dos a dos. Además, para la función $\omega_\alpha(x, t) = t^\alpha \omega(x, t)$ existe una constante positiva $C$ tal que

$$\int_r^\infty \frac{\omega_\alpha(x, s)}{s^2} \, ds \leq C \frac{\omega_\alpha(x, r)}{r} \, , \tag{10}$$

para todo $r > 0$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$ (en este caso decimos que $\omega_\alpha \in W_\infty$ ). Con todo esto, una condición necesaria y suficiente para que el conmutador del operador fraccionario $T_{\propto, b}$ esté acotado de $BMO_\omega(\mathbb{R}^n)$ en $BMO_{\omega_\alpha}(\mathbb{R}^n)$ es que la función $b$ y el operador $T_\alpha$ verifiquen la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{\omega_\alpha(x_0, r)|B|} \int_B \left| (b(x) - b_B) T_\alpha \big( f \chi_{(2B)^c} \big)(x_0) - f_{2B} (T_\alpha b(x) - (T_\alpha b)_B) \right| dx \\ \leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_{BMO_\omega} \, , \tag{11}$$

para toda bola $B = B(x_0 \, , r)$.

Para el caso $f \in BMO_\omega^P(\mathbb{R}^n) = BMO_\omega(\mathbb{R}^n) \cap L^P(\mathbb{R}^n)$, si se satisface (11) considerando la norma de $f$ en dicho espacio, el resultado se cumple para la acotación del conmutador $T_{\propto, b}$ de $BMO_\omega^P(\mathbb{R}^n)$ en $BMO_{\omega_\alpha}^P(\mathbb{R}^n)$.

## BIBLIOGRAFÍA BÁSICA


**Ferreyra, E., Flores, G., Ramseyer, M. y Viviani, B.**, 2020. Endpoint estimates of commutators of singular integrals vs. conditions on the symbol, J. Fourier Anal. Appl.12, no. 26.

**Harboure, E., Salinas, O. y Viviani, B.,** 2007. A Look at BMO(ω) through measures Carleson, J. Fourier Analysis and Appl., 13 (3), 267-284.

**Harboure, E., Segovia, C. y Torrea, J. ,** 1997. Boundedness of commutators of fractional and singular integrals for the extreme values of p, Illinois. Journal of Mathematics 41, no. 4, 676 – 700.

**Muckenhoupt, B. y Wheeden, R.L,** 1975/76. Weighted bounded mean oscilation and the Hilbet transform. Studia Math., 54, 221-237.