UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas

Facultad de Humanidades y Ciencias

Tesis para la obtención del grado académico de Doctora en Educación en Ciencias Experimentales.

“Diseño e implementación de tareas contextualizadas mediadas por TIC para la enseñanza de conceptos básicos de Matemática, en las carreras de Licenciatura en Saneamiento Ambiental y Licenciatura en Higiene y Seguridad en el trabajo”

Tesista: Magíster Ingeniera Liliana Ester Contini

Directora: Dra. Ana Patricia Fabro

Co-Directora: Dra. Tania Rocha Gusmão

Lugar de realización: Departamento de Matemática – Escuela Superior de Sanidad - Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas – Universidad Nacional del Litoral

Año 2022

Agradecimientos

A Iara, mi hija, que siempre me alentó a seguir y a Julio, mi esposo, por su apoyo y comprensión en los momentos oscuros.

A mis padres, que si bien, ya no están para acompañarme en la última etapa de este desafío, me inculcaron la necesidad de superarme y siempre finalizar los proyectos iniciados.

A las profesoras Ana y Tania por haberme acompañado y orientado para la realización de esta tarea.

A mis compañeros de trabajo y amigos que me apoyaron en los momentos de flaqueza.

A la Escuela Superior de Sanidad y a la Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas de la Universidad Nacional del Litoral, que me permitieron realizar en sus instalaciones este trabajo de investigación.

Finalmente, quiero dejar un especial agradecimiento para los estudiantes que participaron voluntariamente de las experiencias de aula realizadas, sin su colaboración este trabajo no habría sido posible.

Producciones científicas (publicaciones y presentaciones en congresos) y formación de recursos humanos, que surgieron de este trabajo de tesis

Trabajos publicados:

Contini, L. E., Gusmão, T. C. (noviembre de 2014). Influencia del diseño de tareas en el aprendizaje de conceptos básicos de Matemática en carreras no matemáticas. En E-Book del 3º Seminario Binacional Argentina – Brasil: Resignificación de la enseñanza de la ciencia y formación de Profesores: el desafío binacional Argentina – Brasil. Santa Fe, Argentina. ISBN 978-987-692-044-5. 1ª ed.

Contini, L. E., Ortigoza, L. (2014). Enseñanza de Ciencias: Misión de Estudio Brasil – Argentina. Integración y Conocimiento" del Núcleo de Estudios e Investigaciones en Educación Superior del MERCOSUR, 2: 227- 232. (ISSN: 2347-0658), Recuperado de: http://revistas.unc.edu.ar/index.php/integracionyconocimiento/article/view/9384/10133.

Contini, L. E.; Avila, O. B.; Vaira, S. M. (2014). Enseñanza de Matemática en el contexto de las Ciencias. Su influencia en la permanencia de los estudiantes en la Universidad. En Memorias del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Año 2014, 1: 10. (ISBN: 978-84-7666-210-6). Metas: Recuperado de: http://www.oei.es/congreso2014/memoriactei/1172.pdf 16/1/2015

Contini, L., Fabro, P., Gusmão, T. (2017). Resultados de una encuesta a docentes sobre contenidos de Matemática Básica necesario para sus clases. *Anais do Colóquios do Museu Pedagógico,* 12(1): 1377 – 1382. Recuperado de http://anais.uesb.br/index.php/cmp/article/viewFile/6981/6783.

Contini, L. E., Cottet, J. (mayo de 2018). Tareas extra aula y TIC. Experiencia de enseñanza de Matemática en carreras universitarias. En Bouciguez, M. B. (compiladora). Libro de actas VI Jornadas Nacionales y II Latinoamericanas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas. 1ª ed.- Tandil, Argentina. ISBN 978-950-658-471-9. (Exposición oral y publicación en libro de actas).

Contini, L., Cottet, J. (Julio de 2018). Tareas y TIC en la clase de Matemática en la Universidad. En A. E. Ortolani y H. S. Odetti (editores), II Workshop de Investigación en Didáctica de las Ciencias Naturales y Experimentales 1: 115 - 120, Santa Fe, Argentina. ISBN 978-987-692-179-4. Recuperado de https://www.fbcb.unl.edu.ar/vinculacion/wp-content/uploads/sites/10/2019/03/libro-WIDIC-II-version-final.pdf. (Exposición oral y publicación en libro de actas).

Contini, L.E., Fabro, A. P., Gusmão, T. C. (octubre de 2019). Diseño de Tareas contextualizadas mediadas por TIC para la enseñanza de Matemática en carreras universitarias. *Anais do Colóquios do Museu Pedagógico,* 13(1): 1007 – 1012. Recuperado de http://anais.uesb.br/index.php/cmp/article/viewFile/8739/8397. (Exposición oral y publicación en anales del congreso).

Contini, L., Fabro, A., Gusmão, T. C. (noviembre de 2019). La Matemática en el contexto de las Ciencias Experimentales. Séptima Jornada de presentación de resultados de investigaciones educativas - FBCB - UNL, Santa Fe, Argentina (Exposición oral).

Contini, L., Fabro, A., Gusmao, T. (2020). Tareas mediadas por TIC en la enseñanza de la Matemática en carreras universitarias de perfil profesional. *Braz. J. Develop., Curitiba*, 6 (7): Quir: 10.34117/bjdv6n7-103, p. 43585 – 43600.

Contini, L.E., Fabro, A. P., Gusmão, T. C. (noviembre de 2020). La Matemática más allá del aula: Diseño de Tareas Contextualizadas Mediadas por TIC. En Pesa, M. A., Aparicio, G. I. (Compiladores), Libro de actas VII Jornadas Nacionales y III Latinoamericanas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas. 1ª ed.- Tucumán, Argentina. ISBN 978-987-4998-65-1. (Exposición oral y publicación en libro de actas).

Contini, L.E., Fabro, A. P., Gusmão, T. C. (octubre de 2022). Tareas en la enseñanza de Matemática. Análisis de una experiencia en la Universidad. VIII Jornadas Nacionales y IV Latinoamericanas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas. San Nicolás, Argentina. ISBN 978-950-42-0227-1. (Exposición oral y publicado en libro de actas).

Formación de pasantes y becarios:

Armando, Mauricio. Formación extracurricular en docencia. Alumno avanzado de la carrera LHyST colaborador en la tarea "Cálculo de una carga de fuego". Período 2017 - 2019. Director: Contini, Liliana

Segovia, Marcos. Alumno avanzado de la LHyST. Becario de tutoría de Ingreso y permanencia en la universidad. Período 2016- 2017. Director: Contini, Liliana

González, María Josefina. Alumna avanzada de la LSA. Becario de tutoría de Ingreso y Permanencia en la Uiversidad. Período 2018- 2019. Director: Contini, Liliana

Storti, Dante. Alumno avanzado de la LHyST. Becario de tutoría de Ingreso y permanencia en la Universidad. Período 2018- 2019. Director: Contini, Liliana

González, Milagros. Alumna Avanzada de LHyST. Becaria de Tutoría de Ingreso y Permanencia en la Universidad. Período 2020. Director: Contini, Liliana

Aniballi, Agostina. Alumna Avanzada de LHyST. Becaria de Tutoría de Ingreso y Permanencia en la Universidad. Período 2021. Co-Director: Contini, Liliana

Tabla de contenido

Resumen de abreviaturas.

B: Bioquímica.

C: Coloquio

ESS: Escuela Superior de Sanidad.

EV: Entorno virtual

FBCB: Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas.

LAS: Licenciatura en Administración de la Salud.

LB: Licenciatura en Biotecnología.

LHyST: Licenciatura en Higiene y Seguridad en el Trabajo.

LN: Licenciatura en Nutrición.

LSA: Licenciatura en Saneamiento Ambiental.

LTO: Licenciatura en Terapia Ocupacional.

MI: Matemática I.

MII: Matemática II.

REA: Recursos Educativos Abiertos.

T: Teoría

THyST; Tecnicatura en Higiene y Seguridad en el Trabajo.

TP: Trabajo Práctico

TSA: Tecnicatura Universitaria en Salud Ambiental.

UNL: Universidad Nacional del Litoral.

Índice de Cuadros

Índice de figuras

Resumen

En este trabajo de tesis se presentan los resultados obtenidos de una investigación realizada en las asignaturas Matemática I y Matemática II de las Carreras de Licenciatura en Saneamiento Ambiental y Licenciatura en Higiene y Seguridad en el Trabajo que se dictan en la Escuela Superior de Sanidad – Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas de la Universidad Nacional del Litoral, en los años 2017 y 2019, para la que se diseñaron e implementaron secuencias de tareas contextualizadas mediadas por TIC para su enseñanza.

Se trabajó mediante una metodología que combina el enfoque cualitativo y el cuantitativo en lo que se refiere al análisis de la situación en la que se realizó esta investigación y en la valoración del impacto de la implementación de una propuesta pedagógica. La parte experimental se implementó en dos años no consecutivos, en el lapso entre una experiencia áulica y otra, a partir del análisis de lo realizado y de cambios a nivel institucional, se rediseñó la propuesta llevada adelante en 2017 y la modificada se llevó a cabo en 2019, lo que permitó enmarcar la metodología de trabajo en la investigación acción.

La contribución al aprendizaje de los estudiantes de la implementación de las tareas se valoró utilizando dos indicadores: el desempeño académico y las percepciones de los mismos al finalizar el cursado. Es posible concluir que el efecto de las dos experiencias áulicas realizadas fue positivo: los estudiantes que participaron en forma completa de la propuesta alcanzaron en un alto porcentaje la regularidad y/o la promoción directa de las asignaturas; y, la mayoría de los estudiantes que respondieron las encuestas, consideraron que la incorporación de tareas extra aula durante el dictado de las asignaturas MI y MII les resultó útil, propició en ellos la necesidad de llevar al día las materias y les organizó el estudio de las mismas. Además, los estudiantes manifiestan que el desafío de resolver problemas y ejercicios integradores les permitió mejorar sus aprendizajes como también generó en ellos un mayor nivel de compromiso con el cursado de las asignaturas.

Se puede decir que las tareas propuestas constituyeron elementos esenciales para la enseñanza de Matemática y para la creación de oportunidades de aprendizaje, generaron un puente entre el trabajo en el aula y lo que pueden realizar fuera de ella, promoviendo el logro de aprendizajes significativos.

Summary

In this thesis, we present the results obtained from an investigation conducted in the courses Mathematics I and Mathematics II of the Licenciatura en Saneamiento Ambiental y Licenciatura en Higiene y Seguridad en el Trabajo, which are taught in Escuela Superior de Sanidad – Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina in the years 2017 and 2019. Sequences of context-based tasks mediated by ICT were designed and implemented for teaching purposes.

The methodology employed combined a qualitative and quantitative approach in the analysis of the situation in which this research was conducted and in the assessment of the impact of implementing a pedagogical proposal. The experimental phase was carried out in two non-consecutive years, bridging the gap between one classroom experience and another. Based on the analysis of the outcomes and institutional changes, the proposal implemented in 2017 was redesigned, and the modified version was carried out in 2019. This allowed framing the working methodology within action research.

The contribution to student learning resulting from task implementation was assessed using two indicators: academic performance and students perceptions at the end of the course. It can be concluded that the effect of the two classroom experiences was positive. Students who fully participated in the proposal achieved a high percentage of regularity and/or direct promotion in the subjects. The majority of students who responded to the surveys considered the incorporation of extra-class tasks during the teaching of MI and MII subjects useful. It prompted them to keep up with the subjects and organized their study. Additionally, students express that the challenge of solving problems and integrative exercises allowed them to improve their learning and fostered a higher level of commitment to the subjects.

-It can be said that the proposed tasks constituted essential elements for the teaching of mathematics and the creation of learning opportunities. They built a bridge between classroom work and what students can do outside of it, promoting the achievement of meaningful learning.

Breve descripción del trabajo realizado

Este trabajo de tesis se realizó en el marco de la carrera de Doctorado en Educación en Ciencias Experimentales de la Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas (FBCB) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL). La investigación tuvo lugar durante los años 2016, 2017, 2018 y 2019 en el ámbito del Departamento de Matemática de la Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas, en las Cátedras de Matemática I y Matemática II de las carreras de Licenciatura en Saneamiento Ambiental y de Licenciatura en Higiene y Seguridad en el Trabajo, de la Escuela Superior de Sanidad, que depende de la FBCB.

Se estableció como objetivo general diseñar tareas contextualizadas mediadas por TIC y analizar su contribución a la enseñanza de matemática básica universitaria de las carreras de Licenciatura en Saneamiento Ambiental y de Licenciatura en Higiene y Seguridad en el Trabajo.

Se trabajó mediante una metodología cuali – cuantitativa en lo que se refiere al análisis de la situación en la que se realizó esta investigación y en la valoración del impacto de la implementación de una propuesta pedagógica. Como ésta se implementó en dos años no consecutivos, en el lapso entre una experiencia áulica y otra (a partir del análisis de lo realizado) se rediseñó la propuesta, lo que permitió encuadrar la metodología de trabajo en el marco de la investigación-acción.

El trabajo presentado se estructura en un total de siete capítulos, referencias bibliográficas y anexos.

A continuación, se expone una breve descripción de cada capítulo.

Capítulo Nº 1: Introducción

En este primer capítulo se presentan preocupaciones e interrogantes en torno a la enseñanza y el aprendizaje de Matemática en carreras de perfil profesional, en las cuales esta disciplina provee a los estudiantes de conceptos teóricos y prácticos necesarios para la comprensión de otras asignaturas de cursado tanto simultáneo como posterior.

Capítulo Nº 2: Situación problemática que da origen a la investigación y objetivos

Se expone el problema que da origen a la investigación y los objetivos de la misma.

Capítulo Nº 3: Marco teórico

Se discurre en torno a diferentes formas de enseñar Matemática y se analiza cómo el diseño de tareas mediadas por TIC puede contribuir a lograr un aprendizaje significativo de esta disciplina.

Se realiza una revisión acerca de las posturas que adoptan referentes matemáticos acerca de lo que significa el diseño de tareas, los tipos de tareas y las diferentes formas de implementación.

Capítulo Nº 4: Metodología de la investigación

Se describe la metodología de la investigación, los sujetos y las características de la población a analizar. Se presentan las etapas de la investigación, las estrategias de trabajo y de recolección de los datos. Se describe posteriormente la propuesta de diseño e implementación de tareas mediadas por TIC llevadas al aula mediante una experiencia realizada en tres etapas:

En la primera etapa se diseñaron ad hoc una serie de tareas sobre temas que fueron seleccionados por su dificultad para la enseñanza y para los aprendizajes teniendo en cuenta las opiniones recabadas por medio de encuestas a docentes de otras asignaturas que requieren de contenidos de matemática para la enseñanza de sus disciplinas; y de las dificultades que presentan los estudiantes que ya han rendido dichas asignaturas (a partir de la revisión de los exámenes finales).

En la segunda etapa, se rediseñaron algunas de las tareas implementadas en la primera fase, atendiendo a lo observado en la experiencia previa y adecuándolas, también, a cambios en el orden de los temas y a los nuevos requerimientos institucionales de los programas de las asignaturas.

En la tercera etapa, se describe la implementación de la experiencia áulica que se realizó en tres años: en 2017 se implementó por primera vez la propuesta didáctica, en 2018 se realizó el análisis de los resultados de lo llevado a cabo en el año anterior y se propusieron adecuaciones y cambios que condujo al rediseño de la propuesta implementada en 2017. En 2019 se realizó una nueva experiencia áulica. Toda la implementación de las actividades se realizó con el apoyo de las TIC, ya sea mediante el aula virtual en formato Moodle, por medio de telefonía celular, correo electrónico, como también utilizando diferentes softwares matemáticos.

Capítulo Nº 5: Análisis y discusión de resultados

En este apartado se realiza el proceso de análisis de los datos, su discusión y contraste con los aportes de investigaciones nacionales e internacionales recientes en torno a las problemáticas analizadas.

Capítulo Nº 6: Conclusiones

Se presentan las conclusiones referidas a cada uno de los objetivos planteados. Se incluyen limitaciones, perspectivas y nuevas líneas de trabajo.

Capítulo Nº 7: Acciones concretas llevadas a cabo a partir de los resultados de la investigación

Se hace mención a acciones concretas que se han implementado y se continúan aplicando a partir de los resultados preliminares y finales que se fueron obteniendo a lo largo de la investigación.

Referencias Bibliográficas

Se presenta la literatura científica citada por orden alfabético de autores y siguiendo el estilo de las normas APA 2018.

Anexos

Este apartado está conformado por 9 Anexos en los que se adjunta información complementaria y ampliatoria en torno a cada instrumento implementado como también se presentan los enunciados y resoluciones esperadas de las tareas diseñadas.

Capítulo 1: Introducción

En la Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas (FBCB) de la Universidad Nacional del Litoral(UNL), con sede en Santa Fe, Argentina, se dictan, como carreras de grado de cursado presencial, las carreras de Bioquímica (B), Licenciatura en Biotecnología (LB) y Licenciatura en Nutrición (LN). En tanto que en la Escuela Superior de Sanidad "Doctor Ramón Carrillo" (ESS) de la misma universidad y en idéntica sede, se brindan las carreras presenciales de grado de Licenciatura en Saneamiento Ambiental (LSA), Licenciatura en Administración de la Salud (LAS), Licenciatura en Higiene y Seguridad en el Trabajo (LHyST), Licenciatura en Terapia Ocupacional (LTO), Tecnicatura en Salud Ambiental (TSA) y Tecnicatura en Higiene y Seguridad en el trabajo (THyST). Con excepción de la LTO, en todas las demás carreras, se encuentra como asignatura obligatoria Matemática, y en todas las carreras Estadística. La asignatura Matemática se encuentra ubicada en los primeros y segundos años de los diseños curriculares de las mencionadas carreras. La LTO presenta la asignatura Estadística en cuarto año del plan de estudios vigente.

Como docente del Departamento de Matemática de la FBCB y de la ESS participo en el dictado de la disciplina Matemática en casi todas las carreras mencionadas. Al momento de la realización de esta tesis estoy a cargo de Matemática I (MI) y Matemática II (MII) de LSA, LHySA, TSA, y THyST de la ESS, de la asignatura Estadística de todas las carreras de la FBCB (LN, B y LB) y participo en el dictado de Matemática General (MG) de LN, e integro el equipo de docentes del Departamento de Matemática que tiene a cargo el dictado de cursos obligatorios de Estadística en varias carreras de posgrado de la FBCB-UNL.

Desde hace más de treinta años es inquietud del equipo de trabajo del Departamento de Matemática, y mío en particular, realizar el análisis de nuestras prácticas docentes en pro de la mejora de la enseñanza y de los aprendizajes de Matemática.

Esta inquietud puede verse reflejada en los diferentes proyectos de investigación relativos a este tema que se ejecutaron y continúan ejecutándose en el seno del Departamento de Matemática de la FBCB, en los que participo como integrante y/o colaboradora.

Como mencioné, las asignaturas relativas a la disciplina Matemática se encuentran en los primeros años de las diferentes carreras, por esta razón, enseñar Matemática cuando los estudiantes aún no han cursado asignaturas relacionadas con los diferentes ejercicios profesionales, limita las posibilidades de desarrollar ejemplos propios de cada carrera que muestren la importancia y la presencia de la Matemática en esas disciplinas, para que sean motivadores para su estudio.

Además de ello, a los inconvenientes propios de la enseñanza de la Matemática se le adiciona el hecho de que a los estudiantes les resulta árida, aburrida, no le ven utilidad (Socarras, 2008, Camarena Gallardo, 2009), tampoco alcanzan a percibir que, si bien es una ciencia en sí misma, está presente en otras ramas del saber, así como también en la vida cotidiana (Escorza Subero, 2005; Rodríguez, 2011; Tarzia, 2015).

Enseñar Matemática en carreras universitarias con perfil profesional es una tarea compleja, porque los estudiantes ingresan a estas carreras con la expectativa de cursar materias afines al perfil profesional que eligieron y generalmente manifiestan poco interés en aprender Matemática (Socarras, 2008).

Lo descripto explica las razones que me motivaron a desarrollar este trabajo de tesis, para investigar de qué manera mejorar mis prácticas docentes, cómo tratar de lograr que los estudiantes aprendan esta disciplina disfrutando de esta actividad y, además, poder mostrarles que no sólo es una disciplina en sí misma, sino que está presente en las diferentes ramas del saber científico y también en la vida cotidiana.

Capítulo 2: Planteo del problema y objetivos

Planteo del problema

La Matemática, si bien es una ciencia antigua que tuvo su origen en diferentes culturas con la finalidad de resolver problemas cotidianos del hombre, en la actualidad su enseñanza en cualquier nivel educativo, es considerada una tarea difícil; además es percibida por los estudiantes, como una asignatura dura, rigurosa y formal, generándose así un rechazo hacia su estudio (Farías y Pérez, 2010).

Enseñar Matemática en cualquier nivel educativo es una tarea compleja (Campagno, 2008). Esta complejidad se produce, entre otras razones, porque exige la cooperación de los alumnos y supone complicadas relaciones emocionales entre docentes y estudiantes. El fin de la enseñanza es que los alumnos aprendan, pero por muy bien que un profesor enseñe, no es posible garantizar, a ciencia cierta, que su esfuerzo se verá compensado con el aprendizaje del alumno (Moreno Olivos, 2009).

Es rol del docente buscar formas de mantener al estudiante motivado, interesado en la clase y en los contenidos a desarrollar, mantener su atención y mostrarle la importancia que tiene la Matemática no solo en la vida diaria, sino como base de casi todos los desarrollos tecnológicos actuales (Escorza Zubero, 2005; Rodríguez, 2011; Tarzia, 2015). Para ello, el profesor puede apoyarse en diferentes estrategias de enseñanza, en el trabajo activo y colaborativo, en comunidades de aprendizaje y en el uso de TIC (Farías y Pérez, 2010).

Encontramos Matemática en disciplinas tales como: Física, Química y Termodinámica. También está presente en Biología, Lengua, Medicina, Historia, Música, Psicología, por nombrar solo algunas disciplinas.

Asimismo, la Matemática tiene una enorme trascendencia, no solo en la vida diaria, sino que es la base de numerosos desarrollos tecnológicos actuales, como por ejemplo el diseño de las vacunas de base biotecnológica para la gripe requiere de cálculos matemáticos, también son necesarios simulaciones y modelos matemático-computacionales para conocer la estructura de inhibidores que bloquean las funciones de enzimas que se activan en procesos infecciosos bacterianos, entre otros (Escorza Zubero, 2005).

El reconocimiento de la importancia de la Matemática data de la antigüedad: Galileo Galilei (1564 – 1642) escribió en su libro Il Saggiatore (1631):

> "(…) "La Filosofía está escrita en este grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las que es imposible entender una palabra; sin ellos, es como girar vanamente en un oscuro laberinto" (…)". (Marquina, Riduara, Álvarez y Quintana, 1996, p.5).

Por otra parte, no se puede dejar de reconocer que

> "(…) "la Matemática tiene una imperiosa fuerza creativa interna que se manifiesta en el devenir histórico en un magnífico espectáculo de creación continuada y en un vasto despliegue intuitivo, que al ser proyectados en el aula podrían inducir un clima favorable a la investigación, estimulando de forma activa los valores científicos y propiciando en el estudiante el desarrollo de la creatividad por emulación, es decir, impulsar la intervención en el devenir de la ciencia, en un encomiable intento de alcanzar uno de los objetivos de la enseñanza de cualquier ciencia, a saber, enseñar, en alguna forma, a elaborar ciencia" (...)". (González Urbandeja 2007, p. 216)

Enseñar Matemática es ir más allá del simple cálculo, es poner en evidencia el diálogo permanente del pensamiento matemático con el desarrollo científico. Es promover el desarrollo de competencias que permitan concebir esta disciplina como una herramienta para entender e interpretar fenómenos, modelizar y resolver problemas. Contextualizar los contenidos a enseñar permite desarrollar en los estudiantes la capacidad de aplicar la matemática escolar a situaciones o contextos extra matemáticos proponiéndoles tareas que simulan situaciones del mundo real (Ramos y Font, 2006).

En el modelo de enseñanza contextualizada de la Matemática, se considera a la disciplina como una actividad humana, bajo la premisa de que "*saber matemática*" es "*hacer matemática*", lo que implica, entre otras cosas, la resolución de tareas relacionadas con problemas reales, para lograr un aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos.

Sobre el tema

> “(...) “son numerosas las investigaciones que muestran, con ejemplos concretos que hay una brecha entre la Matemática que se enseña y la Matemática que las personas necesitan en su vida cotidiana. La existencia de esta brecha es uno de los motivos que explican las actitudes negativas que muchas personas desarrollan hacia las Matemáticas” (…)”. (Ram*os* y Font, 2006, p.2)

Este sentimiento negativo podría generarse porque en la resolución de problemas de la vida real y la laboral, en general, las personas utilizan una matemática informal, propia, que es muy diferente a la aprendida en el ámbito educativo, poniéndose de manifiesto que los conocimientos se construyen usándolos en contextos reales, concretos y solo se pueden resolver si son considerados problemas a resolver. Antagónicamente, a la Matemática formal la dejan para resolver las tareas educativas. Esto último plantea el inconveniente de la capacidad de transferir el conocimiento matemático a otros contextos no matemáticos, es decir a otras disciplinas que requieren de la Matemática para su desarrollo, surgiendo la necesidad de incorporar tareas que impliquen la resolución de problemas contextualizados en la enseñanza formal de la Matemática (Ramos y Font, 2006).

Este enfoque de la enseñanza no solo facilita el aprendizaje, sino que permite a los alumnos descubrir su utilidad para resolver situaciones de otras áreas del conocimiento, como también para encontrar respuestas a situaciones de la vida diaria a partir de experiencias reales, dando a los estudiantes la oportunidad de reinventar los conceptos matemáticos, transformándose la enseñanza en un proceso de interacción permanente entre el docente y el alumno (Font, 2007).

Se hace preciso entonces, proponer estrategias didácticas con el fin de que los estudiantes logren aprender Matemática de manera contextualizada, para que sean capaces de transponer y aplicar los conocimientos adquiridos en clase a otras asignaturas y a otros contextos. Para tal fin, la presente investigación propone diseñar e implementar tareas contextualizadas mediadas por TIC, entendiendo como tal lo que Goñi Zabala (2009), Gusmão (2019) y otros autores citados en el Marco Teórico sostienen; es decir, una tarea es un conjunto amplio de propuestas a realizar por los estudiantes, que el profesor lleva al aula con el fin de lograr el aprendizaje significativo. Incluyen problemas, actividades, ejercicios, proyectos, juegos, experiencias, investigaciones, entre otros, que además de aportar a los aprendizajes de los estudiantes permitirían también construir un nexo comunicativo entre los docentes y los estudiantes,

Por lo señalado, este trabajo de tesis propone investigar la contribución del diseño e implementación de tareas contextualizadas mediadas por TIC a la enseñanza de conceptos básicos de Matemática, en las asignaturas MI y MII de las carreras de Licenciatura en Saneamiento Ambiental y Licenciatura en Higiene y Seguridad en el trabajo.

Objetivos

General

Diseñar e implementar tareas contextualizadas mediadas por TIC y analizar su contribución a la enseñanza de conceptos básicos de Matemática en las carreras mencionadas.

Específicos

-Identificar temas del currículo de matemática de primer año de las asignaturas MI y MII en los que los estudiantes tengan dificultades para su aprendizaje.

- Diseñar e implementar tareas contextualizadas mediadas por TIC sobre los temas identificados como problemáticos.

- Analizar la contribución de la implementación de tareas contextualizadas mediadas por TIC en la enseñanza de conceptos básicos de matemática.

Capítulo 3: Marco teórico

Introducción

Enseñar no consiste en la simple transmisión de información, sino que es un proceso más complejo en el que se intenta provocar el desarrollo personal de los estudiantes en un contexto intencional y organizado que tiene por finalidad dirigir el proceso de aprendizaje y conseguir que el alumno logre o alcance un aprendizaje significativo. María Cristina Davini (2008) menciona que:

> "(…) "la intencionalidad de la enseñanza no se restringe a lograr que otros aprendan. Más allá del resultado de aprendizaje en sí, quienes enseñan buscan transmitir un saber o una práctica considerada culturalmente válida, socialmente justa y éticamente valiosa. En otras palabras, enseñar es un acto de transmisión cultural con intenciones sociales y opciones de valor" (…)" (Davini, 2008, p. 17).

Desde el punto de vista de la didáctica, al enseñar, lo importante es proporcionar distintos planteamientos y prácticas pedagógicas diferenciadas que aporten variabilidad, complejidad y riqueza a las situaciones de aprendizaje.

Las prácticas de enseñanza son numerosas y variadas, y las teorías pedagógicas que las sustentan son diversas y han ido cambiando a lo largo del tiempo. En términos generales, existen dos grandes modelos acerca de la enseñanza: por un lado la enseñanza entendida como instrucción en la que el profesor es el transmisor de un conocimiento y los estudiantes son quienes aprenden e incorporan los procedimientos; y por otro lado la enseñanza entendida como guía, en la que el rol central lo tienen quienes aprenden y el profesor se constituye en un guía de los aprendizajes, un andamio para que los estudiantes adquieran los nuevos conocimientos mediante una secuencia progresiva de acciones (Davini, 2008).

Lo planteado en los párrafos precedentes para la enseñanza en general, es aplicable para la enseñanza de la Matemática en particular. A lo largo del tiempo y dentro de los diferentes avances de la Didáctica de la Matemática se fueron gestando distintos modelos, métodos o estrategias de enseñanza de la Matemática, influenciados cada uno de ellos por las diferentes corrientes pedagógicas. En cada uno de estos modelos de enseñanza el rol del docente, el del estudiante y el lugar que ocupan el saber o los contenidos son diferentes y varían fundamentalmente en cuál de ellos se pone el acento.

Modelos para la enseñanza de la Matemática

Los modelos de enseñanza de la Matemática se han inspirado durante mucho tiempo en ideas que provienen de la matemática formal y en métodos didácticos apoyados en la memoria y la algoritmia, en los que con frecuencia el estudiante se encuentra imposibilitado de percibir los vínculos que tienen los procedimientos con las aplicaciones más cercanas a su vida cotidiana, y se los priva entonces de experimentar sus propios aprendizajes en otros escenarios diferentes de los que le provee el salón de clase (Cantoral, 2001).

Para lograr una enseñanza significativa de Matemática, se hace necesario la creación de situaciones de aprendizaje que puedan llevar a los alumnos a desarrollar actividades ricas y productivas desde el punto de vista matemático, siendo éste uno de los problemas fundamentales a los que se enfrenta el profesor en su clase.

Siguiendo la propuesta de Ponte (2004), hay dos modelos principales para la enseñanza de la Matemática: la enseñanza directa (también llamada expositiva, magistral o simplemente tradicional) y la enseñanza activa o exploratoria.

En la enseñanza directa, el profesor asume un rol fundamental de transmisor de conocimientos. En esta postura, se asume que el alumno aprende oyendo al profesor y haciendo ejercicios, cuyo objetivo es adquirir, en forma práctica los conceptos y técnicas que anteriormente le brindó su profesor en forma teórica. Los alumnos deben prestar atención a lo que el profesor dice y eventualmente, responder a sus preguntas. Este conocimiento se encuentra sistematizado en el programa de la asignatura, en los libros y en otros materiales. El profesor trata de garantizar que el alumno aprenda este conocimiento y avala de qué forma lo adquirió.

En este tipo de enseñanza, la exposición de la materia asume un lugar de relevancia, razón por la cual es muchas veces definida como “enseñanza expositiva”. Esta puede impartirse tanto en clases magistrales en las cuales solo habla el profesor, o en contextos más informales en los que el profesor formula preguntas a sus alumnos, a los fines de crear un ambiente más participativo. Muchas veces la formulación de tales preguntas, no implica necesariamente que los alumnos tengan que hacer algún tipo de desarrollo particular, sino tan sólo responder en la dirección en la que el docente los está conduciendo. En este modelo de enseñanza, además de la exposición de los contenidos de la materia, surge también con gran relevancia la realización de ejercicios, a través de los cuales el profesor prevé que el alumno pueda aplicar los conocimientos presentados y formular y aclarar sus dudas. Muchas veces, la resolución de ejercicios gana incluso el lugar central, de modo que, para el alumno, aprender Matemática es sobre todo "saber cómo se hacen todos los tipos de ejercicios que pueden formularse en pruebas o exámenes".

El otro modelo de enseñanza, que está en contraposición con la enseñanza directa, es la "enseñanza activa o exploratoria". Su característica principal es que el profesor no intenta explicar todo, sino que promueve en los estudiantes el trabajo de descubrimiento y de construcción del conocimiento.

No es la propuesta de realización de una tarea particular más interesante o más completa lo que marca el modelo de enseñanza, sino el tipo de trabajo habitual en el aula. Por otra parte, en un proceso de enseñanza de tipo exploratorio, también puede haber momentos de exposición del profesor y de sistematización de los aprendizajes por él monitoreados.

Asimismo, la enseñanza exploratoria no significa que todo resulta de la exploración de los alumnos, sino que ésta es una forma de trabajo en el aula. Es decir, no es la realización ocasional de algún tipo de actividad lo que define el carácter general de la enseñanza, sino la tendencia general del trabajo desarrollado.

En la definición de su estrategia, el profesor decide, explícita o implícitamente, optar por un enfoque de origen esencialmente directo o exploratorio, o bien optar por una estrategia que combine en grados diversos, estas dos modalidades. Los elementos que constituyen los factores decisivos de dicha definición son:

- Cómo se introduce la información.
- La naturaleza de las tareas propuestas a los alumnos.
- La actividad resultante.

En la introducción de la información, se plantea la cuestión de si se realiza como una etapa previa al resto del trabajo o durante la realización de las tareas. Se plantea también la cuestión de si se la discute y sistematiza en profundidad y qué grado de participación tienen los alumnos. En realidad, una estrategia de enseñanza exploratoria, en la que se pretende evitar los efectos negativos de empezar por la introducción de información conducida por el profesor, se corre el riesgo de no llegar a evidenciar la información importante, dejando a los alumnos confundidos y sin una noción clara de lo que podrían haber aprendido.

Asimismo, los momentos de reflexión, discusión y análisis crítico posterior a la realización de una actividad práctica asumen un papel fundamental.

Cabe señalar que en la enseñanza directa surge en primer lugar la "teoría", la exposición de información, explicaciones o ejemplos proporcionados por el profesor. Solamente después hay lugar para la realización de ejercicios, o sea, para la "práctica".

En la enseñanza por exploración, la teoría y la práctica también están presentes, pero de otro modo. Se parte de actividades en que los alumnos son llamados a una fuerte implicación, para hacerse en un segundo momento una discusión, balance, clarificación con respecto a lo que se ha aprendido. De alguna forma, se trata del camino inverso, en que se empieza con fuerte énfasis en la actividad práctica que, a su vez, sirve de base para la elaboración y fundamentación teórica. De este modo, la estrategia de enseñanza exploratoria enfatiza las actividades de indagación, incluyendo, posiblemente, algunas investigaciones, proyectos, problemas y ejercicios.

Una estrategia de enseñanza directa dará énfasis a la introducción de "materia nueva" como primera etapa en el estudio de un nuevo tema, hecha sobre todo por el profesor o por éste en diálogo con los alumnos. Una estrategia de enseñanza exploratoria valorará más los momentos de reflexión y discusión con toda la clase, teniendo como base el trabajo práctico ya previamente desarrollado, como momentos por excelencia para la sistematización de conceptos, la formalización y el establecimiento de conexiones matemáticas (Ponte, 2005).

En la decisión acerca de optar por una estrategia de “enseñanza directa o de trasmisión de conocimientos” o bien una estrategia de “enseñanza exploratoria o de construcción de conocimientos”, se debe tener en cuenta el hecho de que los alumnos difieren en sus capacidades y conocimientos, y que la mayoría necesita de una permanente orientación para aprender, aunque también hay estudiantes que poseen altas capacidades y conocimientos, por lo que pueden aprender con poca o ninguna guía. También, en este debate, se debe tener en cuenta que el tipo de orientación que necesita el alumno depende de la naturaleza de lo que se pretende construir (Godino, Batanero, Cañadas y Contreras, 2015).

Por lo expuesto podría resultar beneficioso implementar estrategias de enseñanza mixtas, que articulen teorización, construcción e indagación para lograr una enseñanza matemática significativa. La optimización de la enseñanza para lograr un buen aprendizaje implica una combinación compleja entre el rol del profesor como facilitador y los roles de los estudiantes como constructores de conocimiento y participantes activos de los aprendizajes. Resumiendo lo expuesto: “el mejor o más efectivo método de enseñanza puede ser una mezcla de métodos, con una oportuna y ágil selección entre ellos” (Hiebert y Grouws, 2007, p. 374).

Una buena estrategia de enseñanza no solo debe fundamentarse en una combinación entre distintos modelos, sino en las herramientas concretas que el docente propone para que los estudiantes aprendan. Por lo tanto, uno de los principales problemas del profesor es encontrar una combinación de tareas adecuada para sus alumnos (Godino, Batanero, Cañadas y Contreras, 2016).

Además, al enseñar Matemática, el profesor debe analizar qué conocimientos pone en juego para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes. Un modelo que tiene en cuenta diferentes facetas o dimensiones implicadas en la enseñanza de contenidos específicos, así como los diversos niveles de conocimientos en cada una de esas facetas es el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2009), con categorías de análisis que se pueden utilizar como herramientas para identificar y clarificar los conocimientos requeridos para la enseñanza de la Matemática. Las nociones teóricas del EOS pueden considerarse como herramientas de análisis y reflexión sobre el proceso de enseñanza y además ser utilizadas por los docentes para indagar sobre su práctica ya que tiene sistemas de objetos y categorías de análisis que ayudan a comprender, de forma sistemática y con diferentes niveles de profundidad, aspectos implicados en la enseñanza de la Matemática (Figura 1).

Con las herramientas teóricas que brinda el EOS es posible analizar los procesos de enseñanza teniendo en cuenta las interrelaciones entre el contenido a enseñar, los estudiantes, el profesor, los medios tecnológicos y, además, considerar que dicho proceso se realiza en el seno de un contexto institucional y social que condiciona y hace posible la realización del proceso educativo.

En el análisis de los procesos intervinientes en la educación matemática se consideran las seis facetas:

- **Epistémica**: Conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).

- **Cognitiva**: Conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes.
- **Afectiva**: Estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada alumno en relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
- **Mediacional**: Recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
- **Interaccional**: Patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.
- **Ecológica**: Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico,..., que soporta y condiciona el proceso de estudio.

> "(…)" Se reconoce la complejidad de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, por las interacciones sistémicas entre las diferentes facetas y componentes. Dichas facetas se deben analizar según diversos niveles: las prácticas o acciones de los agentes implicados, las configuraciones de los objetos intervinientes, las normas que condicionan y soportan la realización de las prácticas y la valoración de la idoneidad o adecuación del proceso educativo en toda su globalidad "(…)". (Godino, 2011, p.5)

Figura 1: Facetas y niveles de conocimientos (Figura modificada de Godino, 2011, p.21).

Tipos de tareas para la enseñanza de Matemática

El diseño y análisis de tareas en Educación Matemática actualmente está recibiendo una atención especial a nivel internacional. Esto puede observarse en los diversos trabajos presentados en el 12th International Congress of Mathematical Education (ICME 12; Seul, Corea, 2012), en el VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VII CIBEM, Montevideo, Uruguay, 2013) y en el 22th Iternational Commissionon Mathematical Instruction (ICMI Study 22, Oxford, UK, 2013) si bien, como expresa Godino (2013),

> "(…) "el tema no se puede considerar como algo novedoso ya que el diseño y análisis de tareas viene siendo central en diversos enfoques teóricos como, por ejemplo, en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD, Brousseau, 1998), en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999), en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS, Godino, Batanero y Font, 2007), o en el marco de la "Educación Matemática Realista" (Van den Heuvel-Panhuizen y Wijers, 2005). El enfoque metodológico de la ingeniería didáctica (Artigue, 2011), basada en la TSD, y de manera más general las investigaciones basadas en el diseño (IBD, Kelly, Lesh y Baek, 2008), conceden un papel esencial a la selección y el análisis de las situaciones-problemas/tareas como punto de partida de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas. La metodología de aprendizaje basado en proyectos (Batanero y Díaz, 2004; 2011; MacGillivray y Pereira-Mendoza, 2011) constituye otra iniciativa en la misma dirección que el diseño y análisis de tareas, en este caso para la educación estadística" (…)*".* (p. 2)

La realización de tareas posibilita que los estudiantes logren aplicar los conocimientos matemáticos a otras disciplinas. Diseñar una tarea *"*no se trata simplemente de "presentar cosas que hay que hacer" sino de proponer actividades que sean cruciales para enmarcar la actividad matemática que se debe poner en juego" (Godino, 2013, pág. 2);

> "(…) "las tareas tienen que ser entendidas como "un conjunto de actividades pensadas y diseñadas cuyo objetivo es desarrollar y evaluar destrezas cognitivas y metacognitivas de los estudiantes, en relación a un determinado contenido matemático, por medio del aprendizaje

> significativo de conceptos y del desarrollo del aprendizaje científico" (…)" (Gusmão, 2009).

Gusmão, en 2019, amplía la definición de tareas a "un conjunto amplio de propuestas que engloban problemas, actividades, ejercicios, proyectos, juegos, experiencias, investigaciones, etc. que el profesor lleva al aula con el fin de lograr el aprendizaje significativo de sus alumnos". (Gusmão, 2019, p.1) Por otra parte, Goñi Zabala, 2009, p.127, señala que "la tarea es el elemento que permite construir el nexo comunicativo entre los docentes y los estudiantes, es decir que el binomio tarea + actividad es el elemento por medio del cual se puede realizar la inducción del conocimiento".

Estos autores entienden que los términos tarea y actividad, que en el ámbito educativo suelen utilizarse como sinónimos, no lo son, sino que la tarea es la propuesta de trabajo que le hace el docente al estudiante, en cambio la actividad, es lo que hace el estudiante para responder a lo que él entiende que se le pide que haga (Goñi Zabala, 2009; Gusmão, 2019).

Schultz (2009) considera que las tareas dirigen la atención de los estudiantes para desarrollar una idea matemática particular, también señala que es posible utilizar, para tal fin, una secuencia de tareas donde cada una de ellas incluya problemas y/o ejercicios.

En Margolinas (2013) se considera que el término tarea se utiliza para referirse a:

> "(...) "una amplia gama de 'cosas que hacer' que incluye ejercicios repetitivos, construcción de objetos, ejemplificación de definiciones, resolución de problemas de una o varias etapas, decidir entre dos posibilidades, o realización de un experimento o investigación. De hecho, una tarea es cualquier cosa que un profesor utiliza para demostrar matemáticas, para realizar una actividad interactiva con los estudiantes o para pedirles que hagan algo. La tarea también puede ser cualquier cosa que los estudiantes decidan hacer por sí mismos en una situación particular. Las tareas, por lo tanto, son las herramientas mediadoras para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y las cuestiones centrales son cómo las tareas se relacionan con el aprendizaje y cómo se utilizan pedagógicamente" (…)". (Margolinas, 2013, p. 9 -10).

El diseño de tareas es también una parte importante del trabajo de investigación en didáctica de la matemática. Puede abordarse desde fines distintos que van desde indagar algún aspecto particular acerca de la enseñanza y el aprendizaje matemático que responda a un interés particular del investigador hasta la puesta a punto de materiales para el aula. Entre ambos extremos hay una amplia gama de variantes, donde el diseño de materiales y la investigación se entrecruzan (García, 2019).

En palabras de Watson y Ohtami (2015):

> "(…) "La atención al diseño de tareas es importante desde varias perspectivas en la investigación y en la práctica de la educación matemática. Desde una perspectiva cognitiva, el detalle y el contenido de las tareas tienen un efecto significativo en el aprendizaje; desde una perspectiva cultural, las tareas dan forma a la experiencia de los alumnos con la materia y su comprensión de la naturaleza de la actividad matemática; desde una perspectiva práctica, las tareas son la base de la vida en el aula, las "cosas que hacer" (…)". (Watson y Ohtami, 2015, p. 3).

Si bien el diseño de tareas es importante en el proceso de aprendizaje, el solo hecho de proponerlas no lo genera, sino que direcciona la atención de los estudiantes en el desarrollo y adquisición de un concepto (Swan, 2008; Sullivan, Clarke y Clarke., 2009; Burkhardt y Swan, 2013; Godino, 2013).

Cuando se diseñan las tareas, también llamadas "oportunidades de aprendizaje", se pretende el logro de determinados aprendizajes. En esta investigación, una tarea se conceptualiza como "una propuesta para el alumno que implica una actividad de él en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como instrumento para el aprendizaje o bien de evaluación del aprendizaje" (Marín, 2005, p. 1).

El proceso de diseño, organización y análisis de las tareas, requiere que, previamente, se analicen aspectos de la planificación relacionados con la estructura conceptual del contenido, sus sistemas de representación y fenomenología; con los objetivos de enseñanza y competencias a desarrollar, los errores y dificultades asociados al contenido que pudieran surgir en el aprendizaje de los estudiantes. La potencialidad de esta estrategia de enseñanza depende del análisis sobre aspectos de la planificación que son inherentes a cada tema y contenido matemático (Mora Zuluaga y Ortiz Buitrago, 2015).

Esta estrategia de enseñanza por sí sola no resuelve problemas asociados al aprendizaje de contenidos matemáticos, sino que es necesario que se encuentre articulada dentro de una planificación que tome en cuenta la complejidad de la enseñanza y del aprendizaje de cada contenido matemático. Por otra parte, el diseño de tareas derivado de la reflexión sobre esa complejidad, le permite al docente desarrollar capacidades relacionadas con su conocimiento sobre la enseñanza de la matemática.

Diferentes autores proponen, al momento de diseñar tareas, considerar diferentes aspectos, algunos tienen en cuenta la forma en que los alumnos deberían adquirir sus conocimientos, para ello tendrían que, como sugiere Swan (2008):

> "(…) "identificar" el objeto dentro de su propio marco de conocimientos, "discriminar" similaridades o diferencias respecto de otros conocimientos ya adquiridos, "generalizar" identificando las propiedades del nuevo concepto en relación con otros y "sintetizar" unificando los principios o propiedades donde se enmarca" (…)". (Swan, 2008, p. 2)

Teniendo en cuenta esto, Swan 2008 (p. 2), Burkhardt y Swan, 2013 (p. 439 - 440) reconocen cinco tipos de tareas que promueven esta forma de adquisición de conocimientos, que son:

Cuadro 1

Cinco tipos de tareas que fomentan el desarrollo de conceptos matemáticos

Tipo de tarea	Descripción
Clasificación de objetos matemáticos	Los estudiantes desarrollan sus propias clasificaciones de los objetos matemáticos y/o las aplican a las desarrolladas por otros autores. Al hacer esta tarea aprenden a discriminar cuidadosamente y reconocer las propiedades de los objetos. También desarrollan lenguaje matemático y definiciones
Interpretación de múltiples representaciones	Los estudiantes trabajan en grupo interpretando por ejemplo imágenes, textos, figuras o expresiones simbólicas que les muestran diferentes representaciones de la misma idea matemática. Con esta tarea relacionan las diferentes formas de presentar un mismo objeto y

	desarrollan nuevas imágenes mentales para dichos conceptos.
Evaluación de afirmaciones matemáticas	Los estudiantes deciden cuando una afirmación es siempre, a veces o nunca verdadera. Con esta tarea se promueve el desarrollo de la argumentación y justificación, como también la capacidad de proponer ejemplos y/o contraejemplos para defender su razonamiento.
Creación de problemas	Los estudiantes crean problemas para que otros compañeros resuelvan. Cuando el que está resolviendo se "atasca", el creador del mismo asume el rol de maestro y ayuda a arribar a la solución. Con esta tarea mediante el hacer y deshacer se ejemplifica el proceso del quehacer matemático.
Análisis de razonamientos y soluciones	Los estudiantes comparan diferentes formas o métodos de resolver un problema, de organizar las soluciones, como también pueden diagnosticar las causas de errores en las soluciones. Con esta tarea comienzan a reconocer que hay diferentes caminos alternativos en la resolución de problemas y pueden empezar a desarrollar formas propias de razonar y resolver.

(Cuadro modificado de Five task 'types' that encourage concept development. Swan, 2009, p.2)

Otros autores, como Ponte (2005) señalan que al diseñar tareas hay que considerar, entre otras cosas, dos dimensiones fundamentales: el grado de desafío matemático o dificultad y el grado de estructura de la tarea.

El grado de desafío matemático se relaciona estrechamente con la percepción de la dificultad de un tema y se constituye en una dimensión muy utilizada para graduar las cuestiones que se proponen a los alumnos, tanto en el aula como en los momentos especiales de evaluación. Varía naturalmente entre dos extremos de desafío: "reducido" y "elevado". A esta clasificación Ramos Rodríguez *et al.* (2015), la denominan *nivel de demanda cognitiva* puesta en juego y distinguen así dos niveles: tareas de nivel cognitivo bajo (memorísticas, procedimientos sin conexión) y alto (procedimientos con conexión). En la Tabla 2 que se presenta a continuación, se realiza una descripción de cada nivel de demanda cognitiva según el tipo de actividad requerida en una tarea que es una síntesis del trabajo de Smith y Steim (1998).

Cuadro 2

Descripción de los niveles de demanda cognitiva en la realización de tareas

Nivel de demanda cognitiva	Tipo de actividad	Descripción
Baja	Memorización Procedimientos sin conexiones	Tareas en las que para su realización solo se requiere la memoria sin realizar procedimientos. Utilización de procedimientos algorítmicos que no demandan relaciones entre conceptos matemáticos
Alta	Procedimientos con conexiones	Involucran varios conceptos matemáticos, con múltiples representaciones. Su respuesta no se deduce explícitamente del planteo.

(Cuadro modificado de Ramos Rodríguez, Martínez, Ponte y Verdejo, 2015; p. 391-392).

A su vez, independientemente del nivel de demanda cognitiva, el grado de estructura es una dimensión que varía entre dos extremos: "**cerrada**" y "**abierta**".
Una tarea **cerrada** es aquella en la que claramente se observa cuál es la información dada y qué es lo que se pide que el alumno realice.

Una tarea **abierta** es la que tiene un grado de indeterminación amplio en lo que es dado, en lo que es pedido o en ambos.

Por otra parte, una tarea puede ser enunciada **explícita** o **implícitamente** luego del inicio de un trabajo o puede construirse, de manera implícita, a medida que dicho trabajo se va desarrollando.

Otras dos dimensiones que se deben considerar al diseñar una tarea son **"la duración"** y **"el contexto"**. La realización de una tarea matemática puede ser corta o larga. Las tareas de larga duración pueden ser más ricas, permitiendo aprendizajes profundos e interesantes, pero, tienen asociado un riesgo elevado de que los alumnos, debido precisamente a la duración, no las logren terminar, perdiendo el tiempo en cosas menos importantes, frustrándose y finalmente abandonándolas.

El contexto constituye otra dimensión importante a tener en cuenta. Los extremos de esta dimensión son las tareas encuadradas en un contexto de la realidad y las tareas formuladas en términos puramente matemáticos.

Las tareas en contexto real, se diseñan en el marco de lo que se denomina Educación Matemática Realista, corriente que desarrolló Hans Freudenthal (1905-1990) en Holanda. Según este autor los contextos y situaciones problemáticas son tomados de la realidad y son generadores de la actividad matematizadora de los alumnos; se utilizan modelos, esquemas, diagramas y símbolos como herramientas para representar y organizar estos contextos y situaciones; las actividades que se generen a partir de ellas se centran en las construcciones y producciones de los alumnos y el docente tiene el rol de guía; fomentan la interacción tanto grupal como de toda la clase y deben promover la interrelación e integración de los ejes curriculares de la Matemática (Zolkower, Bressan y Gallego, 2006).

La idea fundamental que sustenta el desarrollo de tareas en contextos reales es pensar la matemática como una actividad humana a la que todos puedan acceder y que una de las mejores maneras de aprenderla es haciéndola. Se trata de posibilitar el acceso a conocimientos, destrezas y disposiciones mediante tareas que generen en los estudiantes la necesidad de utilizar herramientas matemáticas para su organización y solución. Enseñar matemática utilizando tareas en un contexto real, supone que la matemática posee valor educativo en la medida en que permita comprender y participar de los modos en que esta disciplina organiza distintas esferas de nuestro entorno social y natural; propiciando una matemática para todos ya que para la mayoría de los estudiantes la matemática a utilizar será la que les ayude a resolver los problemas de la cotidianeidad (Bresan, Zolkower y Gallego, 2005).

Por otra parte, autores como Skovsmose (2000) distinguen un tercer contexto, de algún modo, intermedio, que llama "semi-realidad". Este contexto es extremadamente frecuente en los problemas y ejercicios de Matemática. Aunque aparentemente se traten situaciones reales puede ocurrir que para los alumnos no tengan significado alguno. Además de eso, la mayor parte de las propiedades reales de las situaciones no son tenidas en cuenta. La atención se centra sólo en la propiedad o las propiedades matemáticas que interesan a quien enunció el problema y es en ellas que se supone que se centran los alumnos. Por esta causa la tarea propuesta termina siendo para el alumno un contexto casi tan abstracto como el contexto de la matemática pura.

Además de considerar las dimensiones mencionadas, Ponte (2005) reconoce los siguientes tipos de tareas: Ejercicios, Problemas, Investigaciones, Juegos y Modelización.

Ejercicios

Los ejercicios tienen como objetivos que el alumno ponga en práctica los conocimientos adquiridos anteriormente. Según Steiman (2008, p. 80) los ejercicios representan:

> "(…) "La aplicación mecánica de rutinas de procedimientos que admiten una única forma de resolución, como en el caso de las fórmulas matemáticas, en las que no aparece un contexto real sobre el que se aplican. Un ejercicio no tiene continuidad más allá de sí: empieza y termina con la resolución del mismo y su planteo deriva de la necesidad de aplicar un procedimiento preestablecido" (…)".

Sirven, esencialmente a un propósito de consolidación de conocimientos. Para la mayoría de los alumnos, hacer ejercicios en serie no es una actividad interesante.

Reducir la enseñanza de la Matemática a la resolución de ejercicios presenta el grave riesgo de empobrecer los desafíos de la propuesta y desmotivar a los alumnos (Mora, 2003). Por este motivo es necesario considerar que más importante que proponer tareas que impliquen hacer muchos ejercicios, es proponer tareas en las cuales los ejercicios estén cuidadosamente elegidos, de manera tal que testeen la comprensión de conceptos fundamentales por parte de los alumnos.

Problemas

Los problemas son planteamientos de situaciones que poseen un nivel de complejidad que implica, para su resolución, la utilización de información que el estudiante ya posee de manera diferente, debe representar un reto que le provoque una demanda cognitiva elevada (Sepúlveda López, Medina López y Sepúlveda Jaúregui, 2009; Perez y Ramírez, 2011; Gamarra Astuhuaman y Pujay Cristóbal, 2021). Para Poyla (1975), el profesor debe proponer problemas a sus alumnos para que éstos puedan sentirse desafiados en sus capacidades matemáticas y así experimentar el gusto por el descubrimiento. Considera a esto, una condición fundamental para que los alumnos puedan percibir la verdadera naturaleza de la Matemática y desarrollar su gusto por esta disciplina.

Un problema presenta siempre un grado de dificultad apreciable. Por esta razón hay que ser muy cuidadosos en la elección de los problemas que se proponen pues, si es demasiado difícil, puede llevar al alumno a desistir rápidamente o, si el problema es demasiado fácil, no será realmente un problema y se reducirá a una simple ejercitación de un tema (Ponte, 2005, Calvo Ballesteros, 2008).

Investigaciones

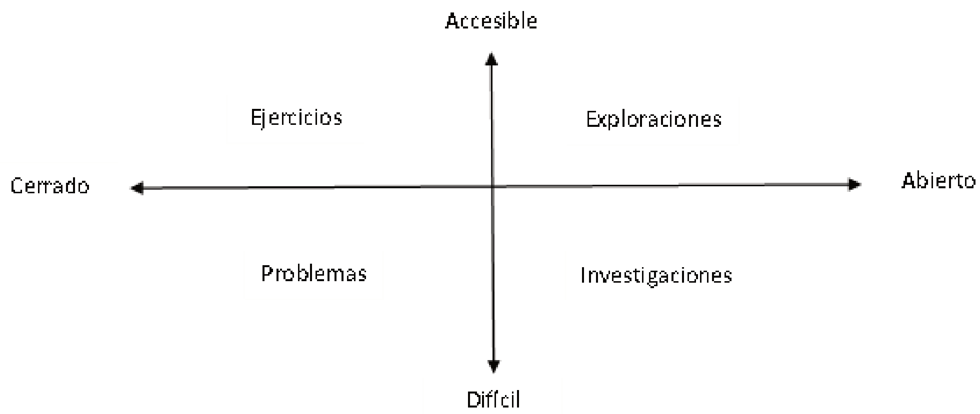
Las tareas de investigación son planteamientos de situaciones en los que los alumnos deben desarrollar estrategias y actividades de índole intelectual y experimental con el fin de incrementar sus conocimientos sobre un determinado tema.

La importancia de la realización de investigaciones, por parte de los alumnos es similar a la importancia de la realización de problemas, pero implican un desafío aún mayor: promover el desempeño independiente de los alumnos, porque requieren de su participación activa desde la primera fase del proceso, formulando las cuestiones a resolver. A su vez, se las puede clasificar según su demanda cognitiva en tareas de investigación propiamente dichas y en tareas de exploración. Ambas tareas son abiertas: las primeras tienen una demanda cognitiva equivalente a los problemas y las segundas, con un menor grado de dificultad, podrían equipararse a los ejercicios, además se diferencian en cuanto a la forma en las que el alumno las puede realizar; si éste puede desarrollarla sin planeamiento previo, se está en presencia de una tarea de exploración, en caso contrario se estaría en presencia de una tarea de investigación propiamente dicha.

Si bien una tarea de exploración es una tarea abierta con un grado de demanda cognitiva reducido, es importante mencionar que cuando una tarea es abierta es un desafío muy grande poder realizarlas.

En la Figura 2, se presentan los diferentes tipos de tareas según el grado de dificultad y grado de estructura, representando estas dos dimensiones en un sistema cartesiano. Se generan cuatro cuadrantes en los que se pueden representar gráficamente los tipos de tareas mencionados.

Figura 2: Tipos de tareas según nivel de dificultad y grado de apertura



(Figura modificada de Ponte, 2004; p.9)

Juegos

Una tarea igualmente importante y con larga tradición en la enseñanza de la matemática son los juegos. Un juego, de alguna forma, constituye un problema: las reglas están bien definidas y con un objetivo bien claro: “ganar el juego”. Conseguir una estrategia ganadora puede constituir un problema de difícil resolución, puede implicar también un importante trabajo de recogida y organización de datos y, por lo tanto, asumir una naturaleza exploratoria. Sea cual sea su naturaleza, un juego puede tener importantes potencialidades para el aprendizaje, especialmente si el profesor sabe valorar sus aspectos matemáticos (Edo y Deulofeu, 2006, Muñiz-Rodriguez, Alonso y Rodriguez-Muñiz, 2014, Aristizábal, Colorado y Gutiérrez, 2016). Por otra parte,

> “(…) “el juego potencializa la creatividad y de esta manera los estudiantes pueden aprender de forma significativa y su visión de alta complejidad sobre las matemáticas puede cambiar desde una mirada lúdica, sin dejar, por supuesto el rigor que exige el área” (…)”. (Peñaranda Ramírez, Prada Núñez y Gamboa Suárez, 2019, p.83)

Modelización

La modelización como estrategia de enseñanza en el diseño de tareas, moviliza y ayuda a poner en práctica procesos de reflexión sobre la complejidad de los conceptos matemáticos y su conexión con el contexto, es decir, el mundo real.

> "(…) "Un modelo matemático es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones, por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática. Este aspecto fundamental del concepto de modelo desde ya tiene significativas implicaciones didácticas. En primer lugar, esto implica que, cuando la Matemática es aplicada a una situación extra-matemática, algún tipo de modelo matemático está involucrado explícita o implícitamente en ella. Segundo, para que un alumno experimente con un modelo matemático y sea capaz de reflexionar sobre las relaciones existentes en él, es una precondición epistemológica que este alumno sea capaz de percibir la situación o fenómeno modelado y la Matemática en juego, como dos objetos separados, pero al mismo tiempo interrelacionados" (…)". (Blomhoj, 2004, p.21)

Bosch, García, Gascón y Ruiz Higueras (2006) mencionan que mediante la modelación es posible relacionar los contenidos matemáticos con ciertos aspectos de la vida real, desarrollando así la "competencia modeladora" en los estudiantes, siendo esta, además, una habilidad matemática básica de cualquier ciudadano. Se preguntan *¿cómo podrían los procesos de modelización mejorar la enseñanza de la matemática y la comprensión de los conceptos matemáticos?* la respuesta: buscando, por un lado, "buenos" sistemas que modelizar que se relacionen con "buenas" aplicaciones de la Matemática, y por el otro, gestionando estos "buenos" sistemas y aplicaciones en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Consideran que la noción de "modelización" se toma de la matemática pura y que puede resumirse en lo que ellos denominan el ciclo de modelización que se presenta a continuación, que es una síntesis del propuesto por Blom y Niss (1991).

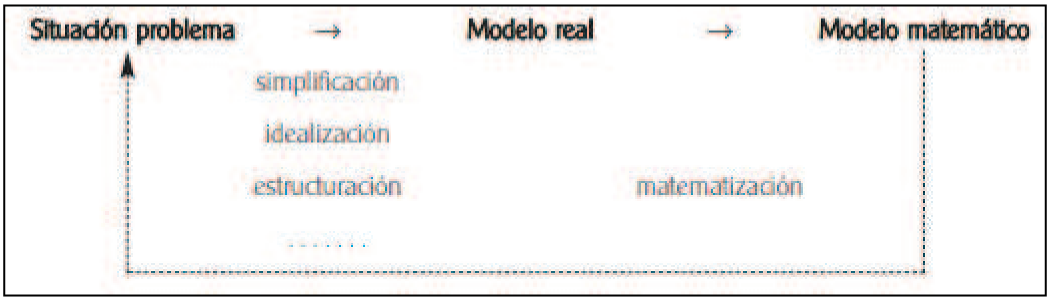


Figura 3: Ciclo de la modelación en Matemática (Figura modificada de Bosch, García, Gascón y Ruiz Higueras (2006), p.45)

Son muy diversas las formas en las que estas tareas pueden ser abordadas en el aula.

Vinçen Font (2007) menciona que:

> "(…) "Diversos autores coinciden en entender la modelización en términos de una terna: S, M, R, siendo S una situación problema real, M una colección de entidades matemáticas y R una relación mediante la cual objetos y relaciones de S se conectan con objetos y relaciones de M. Por otra parte, hay bastante acuerdo en que gran parte de la actividad matemática puede ser descripta como procesos de modelización. Este proceso seguiría las cinco fases siguientes: 1) Observación de la realidad. 2) Descripción simplificada de la realidad. 3) Construcción de un modelo. 4) Trabajo matemático con el modelo. 5) Interpretación de resultados en la realidad" (…)". (Font, 2007, p.25).

Por otra parte, estas tareas se caracterizan por ser un proceso continuo de resolución de problemas. Se trata de una poderosa herramienta que facilita la construcción del sentido de los conceptos matemáticos, con el fin de que los estudiantes aprendan a pensar y desarrollar conocimiento según la resolución de problemas encuadrados en contextos reales, ligados a la vida cotidiana y con más énfasis en los significados de los temas desarrollados que en las técnicas de resolución. Son, en general, de naturaleza problemática y desafiante, constituyendo problemas o investigaciones, según el grado de la estructura del respectivo enunciado. Conforme a su naturaleza, se trata, en la mayoría de los casos, de ejercicios o problemas de aplicación de conceptos e ideas matemáticas.

Se las podría considerar como una herramienta que permite la construcción de puentes entre fenómenos reales y el mundo conceptual. Por ejemplo, un fenómeno físico puede ser "modelado", es decir, descripto en términos de expresiones matemáticas y éstas pueden emplearse a su vez para explicar cuantitativa y cualitativamente los resultados observados, como también predecir comportamientos esperados del fenómeno en estudio. Es muy importante que los alumnos sepan que a través de estas tareas se obtiene un acercamiento objetivo a la realidad, pero que esto no deja de ser una representación de ésta, y por lo tanto, existe una diferencia entre los resultados predichos por el modelo y los obtenidos del fenómeno modelado, es decir, hay diferencias entre lo que se obtiene y la realidad (Villa-Ochoa, Bustamante y Berrio, 2010; Mendible, 2015).

Criterios de diseño de tareas para la enseñanza de la Matemática y de las Ciencias

Las tareas son un elemento fundamental en la caracterización de cualquier currículo, puesto que determinan en gran medida las oportunidades de aprendizaje ofrecidas a los alumnos. Una vez propuesta, una tarea puede originar actividades muy diversas, dependiendo de la capacidad y la actitud de los alumnos y del modo de actuación del profesor.

La forma de trabajar en el aula, el modo de negociar con los alumnos la resolución de las tareas, los papeles asumidos por el profesor y por los alumnos, todo ello ejerce una gran influencia en los aprendizajes que éstos obtendrán.

La selección de las tareas adecuadas es solo uno de los aspectos de la labor del profesor, pero es un aspecto fundamental dirigido a la creación de oportunidades efectivas de aprendizaje para los alumnos.

Formulando tareas adecuadas es que un profesor puede motivar la realización de diferentes actividades en los alumnos. No basta con seleccionar tareas, es necesario prestar atención a las diferentes modalidades de presentación de las mismas y en cómo se conduce su ejecución por parte del alumno.

En la práctica, algunos tipos de tareas como los ejercicios han tenido un papel privilegiado, de modo que el profesor a veces ni se da cuenta de que puede proponer otros tipos de tareas. Es recomendable que se diversifiquen, en la medida de lo posible, las tareas a proponer a los alumnos. Sin embargo, diversificar, en sí mismo, no constituye una orientación clara sobre las tareas que podrían seleccionarse. Por lo tanto, las cuestiones a resolver serían:

- ¿Cómo se gestiona la enseñanza de Matemática en el aula?
- ¿Cuál puede ser la combinación de tareas más adecuada para la enseñanza y los aprendizajes de Matemática?

La gestión tiene que ver con el modo en que el profesor interpreta y reconstruye el currículo, teniendo en cuenta las características de sus alumnos y sus condiciones de trabajo.

Se expresa en dos niveles principales: un nivel "macro", que tiene que ver con la planificación de la práctica y un nivel "micro", que corresponde a la realización de esa misma práctica en la clase.

Esta planificación del trabajo en el aula no puede reducirse solo a la selección de algunas tareas, exige que el docente a cargo pondere muchos factores que hacen que, en la clase, les dé mayor o menor énfasis a ciertos tipos de tareas, ciertas formas de trabajo y de materiales. Presupone la definición, explícita o implícitamente, de una estrategia de enseñanza en la cual sobresalen dos elementos: la actividad que va a realizar el profesor y la actividad del alumno, lo que se espera que él haga, y se establece un horizonte temporal, es decir, el tiempo en el cual se concreta la enseñanza.

Surge entonces la problemática de cómo gestionar la enseñanza en el aula. Esta etapa está vinculada estrechamente a dos puntos fundamentales: por un lado, la selección de las tareas y por el otro la decisión del profesor acerca del modo dominante en el que su estrategia de enseñanza conduce a la construcción del conocimiento.

Al establecer una estrategia adecuada, contemplando diversos tipos de tareas y los momentos propios para la exploración, la reflexión y la discusión, el profesor da un paso importante para crear oportunidades que favorezcan el aprendizaje de los alumnos. Desde allí, el profesor entra en una nueva fase: la de la realización y regulación del proceso de enseñanza para el logro de aprendizajes significativos. Una buena preparación no garantiza totalmente el éxito del trabajo. Son múltiples las situaciones que pueden llegar a ocurrir, que conduzcan a resultados poco satisfactorios, debido a factores tanto externos como internos del trabajo en el aula.

La gestión del trabajo en el aula es un proceso complejo de toma de decisiones, y que se enriquece en base a los resultados que el profesor va recogiendo a lo largo del trabajo con los alumnos. Después de tener elaborada una planificación, hay que concretarla, lo cual es una actividad ciertamente mucho más compleja. El modo de trabajo en el aula, la forma en que se negocia con los alumnos la resolución de las tareas, los papeles asumidos por el docente y los alumnos, la estrategia y los instrumentos de evaluación utilizados, todo esto tiene una gran influencia en el trabajo realizado y en los aprendizajes que puedan tener lugar.

Criterios de diseño de tareas contextualizadas de Matemática

Abordar la enseñanza de Matemática en carreras cuyo fin es formar profesionales en el campo de las ciencias como lo son las ambientales y las de higiene y seguridad en el trabajo, donde la Matemática no es una meta en sí misma, requiere que los docentes a cargo al momento de diseñar tareas reflexionen acerca de temas como:

- ¿Cómo preparo a los estudiantes desde la Matemática para las diferentes disciplinas de la carrera?,
- ¿De qué forma contribuyo a la formación integral del estudiante y a las competencias para la vida, competencias laborales y competencias profesionales?
- ¿En qué enfatizo?, ¿Qué tanto de práctica, algorítmica o qué tanto de matemática formal?,

Enseñar Matemática en el Contexto de las Ciencias requiere reflexionar acerca de la vinculación de la Matemática con las demás áreas del conocimiento, con las actividades profesionales, así como con las situaciones de la vida cotidiana. Se quiere una Matemática para la vida y una formación integral y humanística en el estudiante mediante la cual es posible construir conocimientos integrados, para lo cual es necesaria la interdisciplinariedad dentro del ambiente de aprendizaje (Camarena Gallardo, 2015).

El trabajo contextualizado e interdisciplinario es una estrategia de enseñanza que colabora en la estimulación de la curiosidad de los estudiantes, les permite analizar las innumerables alternativas que tienen para resolver, no solo problemas formales sino también cotidianos (de Melo Leal *et al.*, 2020).

El diseño de tareas contextualizadas se sustenta en la Teoría de Matemática en el Contexto de las Ciencias.

"(…) "Esta teoría se aboca a analizar una matemática para la vida y que sea de utilidad a la sociedad científica, técnica y civil. Además, trata de desarrollar una cultura matemática y un pensamiento matemático para contribuir a que el estudiante se desarrolle en la sociedad de forma razonada, crítica, analítica y científica. Mira al ambiente de aprendizaje como un sistema complejo de tipo social, cultural, económico, político y psicológico" (…)". (Camarena Gallardo, 2017, p2)

El trabajo interdisciplinario y el trabajo disciplinario en el ambiente de aprendizaje son las estrategias que guían la implementación en el aula de tareas de este tipo. En este marco, las estrategias de diseño por las que opta el profesor consisten en la utilización de situaciones contextualizadas (reales) para que los estudiantes las trabajen y, a partir de allí, realizar actividades para lograr la abstracción, que permitan identificar los conceptos matemáticos que están involucrados en la situación concreta planteada, usando tecnologías, cuando es posible, como mediadoras del aprendizaje.

Sintetizando, el diseño de las tareas bajo esta perspectiva posee dos ejes: por un lado, la contextualización, donde el trabajo es interdisciplinario y por el otro, la descontextualización, donde la labor es disciplinaria, solamente con Matemática, dándole la formalidad que la profesión del alumno requiera (Camarena Gallardo, 2017, Camarena Gallardo, 2021).

La realización de tareas de este tipo permite a los alumnos darse cuenta de que la Matemática es universal y que es aplicable a diversas situaciones. En la descontextualización los alumnos trabajan con el conocimiento abstracto, mientras que en la contextualización los estudiantes trabajan con los conceptos en concreto, porque están ubicados en una situación que les da sentido. Se espera, además, que los estudiantes desarrollen sus propias estrategias de aprendizaje que les permitan la realización de trabajos en equipo, con uso de tecnología y trabajos de investigación extra-clase.

Para el diseño de tareas contextualizadas, es necesario encontrar recursos que posibiliten acercar el conocimiento matemático formal a los problemas reales de los estudiantes. Las fuentes de contextualización que tienen el propósito de ofrecer a los estudiantes una formación integral a través de saberes interdisciplinarios podría ser:

a) Las demás ciencias que estudian los alumnos, al considerarlas se está promoviendo la vinculación entre disciplinas.
b) Las actividades profesionales y laborales futuras de los alumnos, considerarlas implica la articulación entre la Matemática y las necesidades de los distintos ámbitos sociales y laborales.
c) Las situaciones de la vida cotidiana, al considerar esta fuente se está relacionando la Matemática con el quehacer diario de todo individuo.

La elección y propuesta de situaciones contextualizadas tienen como objetivo que los estudiantes trabajen con una Matemática integrada a las demás asignaturas de las carreras y a las futuras profesiones, del interés de los alumnos, con sentido, de manera tal que vayan construyendo sus conocimientos matemáticos a través de una Matemática útil para la vida y no sólo como una herramienta académica.

Para el diseño de tareas, en general y para las basadas en situaciones contextualizadas en particular, es conveniente tener en cuenta dos aspectos fundamentales:

El primero, al proponer la tarea, se debería poder responder:

¿Qué se espera que los alumnos puedan hacer con la tarea?

Y el segundo, al momento de la resolución de la tarea, poder responder:

¿Qué deberían ser capaces de realizar los estudiantes en esta instancia?

En el primer caso (*¿Qué se espera que los alumnos puedan hacer con la tarea?)* en la etapa de propuesta y diseño de la tarea, algunos criterios a tener en cuenta son (Camarena Gallardo, 2021):

1. Que tengan vinculación con los conocimientos previos.

Es necesario tener en cuenta los conocimientos que los estudiantes ya poseen para que a través de las actividades a realizar en las tareas propuestas puedan establecer una relación coherente entre lo que ya saben/conocen y lo nuevo. Al no tener en cuenta esto, se generarían dificultades innecesarias y falta de confianza de los alumnos para afrontar el nuevo conocimiento.

El aprendizaje de cualquier contenido nuevo supone, atribuir sentido y construir los significados implicados en dicho contenido; para que esta construcción ocurra es necesario que el alumno sea capaz de relacionar la nueva información con los conocimientos, experiencias previas y familiares que posee en su estructura de conocimientos (Miras, 1999; Morales Urbina, 2009; Pérez Paz, 2019).

2. Que puedan transitar entre los diferentes registros de representación del concepto a ser construido.

El cambio de registros de representación de los objetos matemáticos se sustenta en la teoría de registros de representación semiótica propuestos por Duval (2004). En esta teoría se establece que es esencial para el desarrollo del pensamiento matemático el uso de diferentes sistemas de representación, dado que no es posible tener acceso a los objetos matemáticos sino a través de sus representaciones semióticas y a su vez cada representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que representa. Es indispensable, en la enseñanza de Matemática, no limitarse a trabajar con solo una forma de representación, sino que es necesario que en las actividades de enseñanza se incluyan tareas que permitan desarrollar la capacidad de traducir la información de un sistema de representación a otro (Duval, 2006; Duval, 2016, Castro Rodríguez, *et al.,* 2017).

3. Que consideren los distintos enfoques de los temas y conceptos matemáticos.

Si bien este punto está muy relacionado con el anterior, se espera que los estudiantes sean capaces de enfrentar la resolución de las diferentes tareas considerando y utilizando diferentes enfoques de los conceptos matemáticos, por ejemplo, en el caso de vectores, poder encarar la resolución de problemas tanto desde una óptica geométrica como algebraica o, como en el caso de derivada, que puedan interpretarla como un límite muy particular como una razón de cambio, como la pendiente de la recta tangente a la curva, entre otros, dependiendo del contexto en el que lo estén utilizando (Camarena Gallardo, 2021). O bien que puedan realizar un enfoque tanto gráfico como analítico, como es el caso de la resolución de problemas de trigonometría o en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, con dos o tres incógnitas, es posible visualizar las posibles situaciones permitiendo la interpretación a través de un enfoque geométrico de la existencia o no solución de los mismos.

4. Que permitan al estudiante superar obstáculos que posean, ya sean cognitivos, epistemológicos, curriculares o didácticos.

Los obstáculos son dificultades que impiden avanzar en la construcción del nuevo conocimiento. Los de tipo epistemológico son saltos conceptuales que los estudiantes deben superar para promover su conocimiento. Son parte del proceso de aprendizaje y no solo no se deben evitar, sino que se deben enfrentar porque desempeñan un rol muy importante en la adquisición del nuevo conocimiento. Los didácticos (que incluyen obstáculos metodológicos, curriculares o conceptuales) se manifiestan a través de los errores más frecuentes de los estudiantes, razón por la cual se deben y pueden evitar (Andrade Escobar, 2011).

5. Que se usen TIC como reforzadoras o mediadoras del aprendizaje.

Es muy importante que los estudiantes comprendan que la utilización de un un recurso tecnológico no le va a dar la solución de la tarea si previamente no hicieron el esfuerzo de tratar de entender de qué se trata la misma. Es de vital importancia que se den cuenta que la utilización de TIC es solo un complemento, que su utilidad radica en que les permite verificar los resultados obtenidos reforzar las conclusiones que ya habían obtenido analíticamente y, cuando sea necesario probar diferentes alternativas simulándolas. Resumiendo, que consideren que la tecnología se utiliza como un recurso con el fin de promover en ellos formas de construcción de conocimiento, y no como el objeto de enseñanza en sí y que su utilización surge de la realización de actividades matemáticas específicas (Sosa, Aparicio y Truyub, 2008).

En el segundo caso (*¿Qué deberían ser capaces de realizar los estudiantes en esta instancia?)* al momento de la resolución, se espera que los alumnos sean capaces de:

1. Entender qué se quiere que realicen a partir de la situación planteada.

2. Analizar la información disponible en el planteo de la situación y así poder identificar los datos disponibles, cuáles son las constantes y cuáles son las incógnitas o variables a trabajar.

3. Identificar y relacionar los conceptos y temas involucrados, tanto los propios de la Matemática como los que corresponden específicamente a la situación problema planteada.

4. Construir el modelo matemático asociado, resolverlo y dar la solución de matemática de la situación problema, con apoyo de las TIC para las representaciones gráficas o simulaciones posibles.

5. Interpretar la solución en términos del contexto de la situación que dio origen a la tarea. Es decir, que sean capaces de decidir si la solución encontrada matemáticamente tiene sentido en la situación problema contextualizada analizada.

Criterios de diseño de tareas contextualizadas mediadas por TIC

La inserción de las TIC en la enseñanza de Matemática va de la mano con cambios metodológicos que promuevan la participación activa de los estudiantes, para la promoción de sus capacidades, como apoyo a la reflexión y regulación sobre su propio proceso de trabajo y aprendizaje (Coll, Mauri y Onrubia, 2006, Campos Nava y Torres Rodríguez, 2018). Para que los beneficios de su introducción en la enseñanza sean óptimos es importante, entre muchas otras cosas, escoger el o los recursos que más se adapten a los objetivos a conseguir, es decir, la aplicación de las TIC requiere que se tenga un objetivo pedagógico y didáctico específico (García-González y Solano-Suarez, 2020). No se trata, por el hecho de incorporar tecnología en la enseñanza, de generar grandes cambios e innovaciones metodológicas, sino que

> "(…) "la innovación radica en las estrategias didácticas que se configuren y desarrollen con las TIC como herramientas de apoyo y mediadoras en el proceso. En otras palabras, la innovación dependerá del objetivo y/o al grado de usabilidad que se le brinde a las TIC con la finalidad de generar un aprendizaje más significativo al desarrollar las estrategias didácticas" (…)". (Cruz Alvarado y Sandí Delgado, 2016, p.5)

Incorporar la utilización de TIC al momento de diseñar tareas requiere tener en cuenta que el objetivo de esto es solo medio que tiene por finalidad tratar de conseguir que los alumnos aprendan los conceptos matemáticos de interés. Son material de apoyo didáctico y mediador de esos aprendizajes, que permite a los alumnos administrar sus tiempos cognitivos de acuerdo a sus necesidades individuales. Por lo mencionado, una decisión muy importante a tomar es la de elegir, entre la multitud de recursos disponibles, cuál o cuáles usar, en función de los requerimientos y de las necesidades concretas de enseñanza.

Está claro que la propuesta de utilización de TIC en una tarea no tiene por objetivo el aprendizaje de la herramienta en sí misma, sino que los estudiantes, con muy pocos comandos, instrucciones o actividades extra, deben poder utilizarlas para mejorar o reforzar el aprendizaje de los conceptos matemáticos que interesa que aprendan. Se debe tener una idea clara sobre el tipo de tareas se pueden desarrollar con el auxilio de estas tecnologías y del beneficio que puede aportar (Campos Nava y Torres Rodríguez, 2018).

Como mencionan Sosa, Aparicio y Tuyub (2008), la propuesta de incorporación de tecnología en la enseñanza de Matemática consiste en considerarla "como un recurso para promover formas de construcción de conocimiento, y no como el objeto de enseñanza en sí, fomentando interactuar con la computadora a partir de actividades matemáticas específicas" (p. 1038)

La incorporación de un software en la realización de tareas es muy importante, dado que, con su utilización, es posible promover y desarrollar en los alumnos habilidades y niveles de comprensión por medio de la visualización y exploración de objetos matemáticos. Entre la gran variedad de posibilidades que brinda el mercado respecto a software, el *GeoGebra* es uno que es posible utilizarlo con PC o con telefonía celular, no solo es de código abierto, sino que es posible utilizarlo en las actividades áulicas (Williner, Favieri y Scorzo, 2020). Si bien este software no tiene la exclusividad como programa para enseñanza de Matemática, es muy recomendable su utilización porque posee una gran variedad de opciones no solo para graficar, sino que también, permite implementar tareas de investigación y experimentación que, en la mayoría de los casos, no requieren demasiados conocimientos técnicos pues es suficiente que los estudiantes conozcan algunas herramientas básicas y comandos simples para realizarlas (Carrillo de Albornoz Torres, 2012).

Se espera que, el uso de un software, *GeoGebra* u otro, para resolver una tarea los estudiantes puedan articular los conceptos involucrados y que les permita observar y realizar las conexiones que existen entre los diferentes temas del currículum de Matemática involucrados. Por otra parte, al disponer de una herramienta que realiza los cálculos rutinarios o grafica rápidamente, permite enfocar su atención en los procesos claves del pensar matemático (Campos Nava y Torres Rodríguez, 2018).

Resumiendo, al momento de diseñar tareas para la enseñanza de Matemática mediadas por TIC, es importante tener en cuenta que la tecnología debe obrar como una herramienta que permita lograr el objetivo de enseñanza que se persigue con la tarea.

Capítulo 4: Metodología de la investigación

> *El propósito de un diseño de investigación consiste en encontrar dentro de una modalidad de investigación apropiada, las respuestas más válidas a las preguntas que se plantean.* (Fabro, 2017, p.3)

Fundamentos metodológicos

En la investigación educativa aparece una gran diversidad de aspectos a la hora de analizar, interpretar y fundamentar el objeto de estudio, por lo cual es conveniente desarrollar la tarea investigativa desde una perspectiva plurimetodológica, dado que cada modelo metodológico resulta incompleto e incapaz de resolver la complejidad de las situaciones estudiadas (Rodríguez Rodríguez, 2006, Pinto y Sanabria, 2010; Schusteet, Puente, Andrada y Maiza, 2013). Por lo señalado, es recomendable combinar los aportes y las herramientas de los diferentes métodos, independientemente del modelo epistemológico al cual pertenecen, tomando de cada uno de ellos los aspectos relevantes y planificar su aplicación, adaptándolos a cada contexto.

Asimismo, es preciso considerar que adoptar una postura combinada de investigación puede representar una dificultad a la hora de tomar decisiones, pero al mismo tiempo resulta valiosa, dado que abre al investigador a múltiples perspectivas de exploración, representa un camino hacia una comprensión más abierta y posibilita el reconocimiento de los aportes de cada método.

Por lo señalado la metodología elegida como soporte de la presente investigación, es del tipo cuali-cuantitativo.

"(…) "Para el investigador es importante reconocer que los métodos, tanto cualitativos como cuantitativos, pueden usarse conjuntamente con el argumento de que el uso combinado de técnicas de recolección y análisis de información diferentes aumenta su validez, concepto no exclusivo de la investigación tradicional, y contribuye además a la solución de problemas" (…)". (Cook y Reichardt, 1995, p. 31)

Los dos tipos de técnicas (cualitativas y cuantitativas) se necesitan mutuamente en la mayoría de las investigaciones, si bien cabe distinguir que las técnicas cualitativas sirven para responder un tipo de preguntas y las cuantitativas para otras. Autores como Cerda Gutiérrez (1993) proponen la superación de esta falsa dicotomía:

metodologías cuantitativas y cualitativas, a partir de principios como los de complementariedad, complejidad, consistencia y triangulación.

Con el enfoque cualitativo es posible obtener la interpretación y contextualización de los datos, con el cuantitativo, se trata de reconocer singularidades, regularidades y tendencias estadísticas con el fin de identificar características estructurales del objeto de estudio. En estos enfoques de investigación, aparentemente opuestos, debido a que cada uno tiene su propia fundamentación epistemológica, diseños metodológicos, técnicas e instrumentos acordes a los objetos y situaciones de estudio; con uno se mide y con el otro se comprende (Monje Álvarez, 2011, Niño Rojas, 2011), "sus fronteras no son fáciles de delimitar y en la práctica se complementan". (Niño Rojas, 2011, p. 29)

La recolección de información se puede realizar de diferentes maneras, en esta investigación se optó por listas de cotejo, encuestas - entrevistas semiestructuradas y observación participante.

Con las listas de cotejo posible identificar, de forma rápida y sistemática, la presencia o ausencia de diferentes aspectos que son de interés para el investigador. Tienen la ventaja de ser fáciles de utilizar, si bien su elaboración y diseño no es simple debido a que requiere la definición de las categorías que se quieren identificar en un tema particular que, una vez definidas, consisten en el listado de esas características donde se indica si están presentes o no (Ruay Garcés y Garcés, 2015; González Garibay y Sosa Ramírez, 2020).

Con las encuestas es posible recolectar datos en ausencia del investigador, en las que no se tiene control directo sobre lo que se investiga no pudiéndose alterar las respuestas, con ellas simplemente se recopilan datos, se analizan e informan (Monje Álvarez, 2011). Las entrevistas semiestructuradas, si bien se realizan sobre la base de un guion pre elaborado, son flexibles, permiten al entrevistador realizar modificaciones de las preguntas preestablecidas sin perder de vista los objetivos de la investigación (Monje Álvarez, 2011).

La observación participante “es el proceso que faculta a los investigadores a aprender acerca de las actividades de las personas en estudio en el escenario natural a través de la observación y participando en sus actividades” (Kawulich, 2005, p. 2).

Con esta metodología es posible "ver la manera como el estudiante asume su papel en la clase de matemática y observar qué tan involucrado está en su formación" (Jiménez Espinosa, Limas Berrío y Alarcón González, 2016, p. 141).

En esta investigación, para la recolección de datos en el trabajo de campo, se elaboraron y utilizaron varios instrumentos.

En la etapa inicial, donde se identificaron los temas problemáticos para su enseñanza y su aprendizaje, se hicieron dos encuestas semiestructuradas, una a docentes de otras cátedras de las diferentes carreras que se dictan en la FBCB-ESS y otra, a los docentes de Matemática y se utilizaron listas de cotejo en la revisión de exámenes.

En la etapa experimental se implementaron encuestas semiestructuradas a los alumnos con el fin de indagar acerca de la disponibilidad de recursos informáticos y accesibilidad a internet como también para recabar sus opiniones acerca de la implementación de tareas extra clase.

Como la experiencia se implementó en dos años no consecutivos, 2017 y 2019, en el año intermedio, se realizó la revisión de las actividades llevadas a cabo en 2017. Esta etapa del trabajo, se realizó el análisis, revisión y reestructuración de la propuesta implementada en 2017 para nuevamente llevarla adelante en 2019, posiciona a esta etapa de la investigación en el marco de la investigación – acción. Dado que este método se sustenta en la reflexión sobre la práctica educativa, incidiendo no solo en la calidad de los aprendizajes sino también sobre la enseñanza, haciendo que el docente se desempeñe simultáneamente como investigador e investigado, centrando la investigación sobre la práctica de forma reflexiva y sistemática. Puede decirse que es un enfoque en espiral (acción – observación – reflexión – planificación – acción que también podría considerarse experimental ya que con él se comprueba la validez de los cambios realizados en el aula (Latorre, 2005; Evans Risco, 2011).

Muestra

La muestra en estudio está compuesta por cuatro comisiones de estudiantes, un total de190 alumnos que cursaron las asignaturas MI y MII de las carreras de LSA y LHyST de la ESS-FBCB-UNL durante los años 2017 y 2019.

Etapas del diseño del trabajo de campo

Se propuso diseñar un conjunto de tareas contextualizadas mediadas por TIC en el ámbito de las asignaturas Matemática I y II, de las carreras de Licenciatura en Saneamiento Ambiental(LSA) y Licenciatura en Higiene y Seguridad en el Trabajo (LHyST), que se dictan en la ESS-FBCB (plan de estudios y contenidos de las asignaturas MI y MII en Anexo 1, pág. 176), en temas que se reconocen como problemáticos para su enseñanza y para su aprendizaje y estudiar los aportes de estas tareas a los aprendizajes de los estudiantes.

Este trabajo de investigación se realizó en diferentes etapas, cada una de ellas con su propia metodología, en función de los objetivos perseguidos.

Etapa 1: Identificación de temas/contenidos problemáticos

En esta primera etapa se diseñaron diversos instrumentos para la investigación, con el fin de identificar los contenidos que son problemáticos para la enseñanza y los aprendizajes de Matemática, en las mencionadas carreras.

- Lista de cotejo para la revisión de los exámenes finales de años anteriores a 2017, para identificar los temas de Matemática en los que los estudiantes presentaron las mayores dificultades, al momento de la evaluación. Para su construcción se siguieron los lineamientos propuestos por Ruay Garcés y Garcés (2015) y Coronado-Hijón (2015), el formato general adoptado se presenta en el Anexo 2 de página 184).
- Encuesta semiestructurada a docentes de otras asignaturas, de dictado simultáneo y posterior a las asignaturas M I y M II, para averiguar acerca de qué contenidos matemáticos necesitan para el desarrollo de sus materias, y en qué contenidos matemáticos los alumnos presentan mayores dificultades cuando tienen que aplicarlos en el contexto de esas disciplinas (adjuntada en Anexo 3 de página 185).
- Entrevista semiestructurada a docentes de los diferentes equipos de cátedra del Departamento de Matemática de la FBCB - ESS respecto a cuáles son los temas/contenidos de Matemática en los que recurrentemente se observan dificultades para su enseñanza y para su aprendizaje (adjuntada en Anexo 4 de página 186).

Etapa 2: Selección de temas y diseño de tareas

Finalizada la identificación de los temas/contenidos problemáticos, las actividades desarrolladas fueron:

- Selección de los contenidos identificados en la Etapa 1 como problemáticos que podían ser trabajados en las asignaturas MI y MII.
- Diseño de las tareas a implementar durante el dictado de las asignaturas MI y MII.

Para su elaboración se tuvo en cuenta la naturaleza propia del tema a abordar y los objetivos de la cátedra con respecto a ellos, es así que, en cada tarea, se propusieron diferentes tipos de problemas y ejercicios, todos tendientes a que los estudiantes, al realizarlas, recuperen conceptos, afiancen y/o desarrollen las habilidades implicadas en su resolución.

En el diseño, se consideraron tres criterios: a) aportes a la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos, b) posibilidad de contextualizar los contenidos matemáticos en aplicaciones de otras asignaturas o en el futuro desempeño profesional de los estudiantes y c) aportes e implementación de TIC.

Con respecto al criterio a), al diseñar las tareas se consideró "la riqueza matemática que podría vivenciar el estudiante al abordarlas" (Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez, (2017), p. 27). Esta "riqueza" hace referencia a la posibilidad de exploración de diferentes caminos de resolución y de la argumentación de la validez de los resultados obtenidos, induciéndolos a trabajar en forma activa, siendo artífices de sus decisiones (Barreiro et al., 2017). En la redacción de las consignas se prestó atención no solo al contenido matemático que se deseaba abordar, sino también a la factibilidad de ser realizadas, que los estudiantes posean los contenidos previos requeridos para la resolución y que luego de ser resueltas, los induzcan a reflexionar sobre su propio quehacer matemático en la obtención de los resultados.

Con respecto al criterio b), siempre que fue posible, se relacionaron las tareas con otras asignaturas o actividades de su futuro desempeño profesional. En algunas tareas se trabajó con contextaulización y en otras con descontextualización, tal como se expresó en el capítulo Marco Teórico: Por un lado se fomentó la contextualización, donde el trabajo es interdisciplinario y por el otro, la descontextualización, donde la labor es disciplinaria, solamente con Matemática, dándole la formalidad que la profesión del alumno requiera, en consonancia con los aportes de Camarena Gallardo, 2017 y Camarena Gallardo, 2021.

Con respecto al criterio c), aporte de las TIC, es necesario considerar que se tuvieron en cuenta de diferentes maneras, por un lado, la propuesta didáctica se ~~hizo~~ llevó a cabo a través del Entorno Virtual (EV), siendo la vía de comunicación de los estudiantes con los docentes, de ellos entre sí, y de los docentes con los docentes, el correo electrónico y la telefonía celular a través de grupos de *WhatsApp*, por ejemplo.

Por otro lado, en las tareas donde era posible, se incorporó el uso de *GeoGebra* y aplicaciones gratuitas de celular como herramientas de apoyo de manera tal que los estudiantes hagan un uso adecuado de la tecnología ya que el objetivo de su incorporación no era el uso de la herramienta sino el análisis del producto obtenido a partir de ella, logrando que el contenido matemático adquirido sea valioso. Un recaudo que se tuvo en cuenta en el diseño de las tareas es que el uso de la tecnología, específicamente el uso de un software como *Geogebra*, no induzca a los estudiantes a que den validez absoluta a lo que ven como resultados en sus pantallas sino que, a partir de éstos puedan cuestionar, decidir si son válidos y adecuados (Barreiro et al., 2017).

A modo de síntesis, con las tareas propuestas bajo los tres criterios mencionados, se trató de lograr que los estudiantes se motiven al trabajar con tareas mediadas por tecnologías (que usan permanentemente en su vida cotidiana, pero no siempre para las actividades de aprendizaje), que apliquen en la medida de lo posible los conocimientos matemáticos, a situaciones relacionadas con su perfil profesional y que a partir de ello logren aprendizajes significativos de la matemática, que como se expresó en el marco teórico, en ocasiones les resulta árida y aburrida. El hecho de que las tareas tenían que ser realizadas fuera del aula (todo ello mediado por tecnologías que permitían el contacto permanente docente-docente, docente-alumno y alumno-alumno) y luego discutidas y analizadas en forma presencial en el aula, buscó promover que los estudiantes sean partícipes de su propio aprendizaje, considerando que aquel que las lleve a cabo seriamente, a conciencia, tiene la posibilidad, no solo de identificar y profundizar sus conocimientos sobre los puntos importantes de los temas abordados, sino también tomar conciencia de sus debilidades, siendo, además, una guía para su estudio. Además, se buscó promover el concepto de que para aprender tienen que involucrarse, no ser meros espectadores, que de esa forma podrían conseguir mejores resultados que los que alcanzarían si solo asistían al aula de clase a escuchar al docente. Resumiendo, en el diseño de las tareas se propició el papel activo de los estudiantes para aprender y la toma de conciencia acerca de que estudiar requiere de esfuerzo y dedicación ya que sin este grado de involucramiento no iban a alcanzar la meta de lograr un aprendizaje significativo (Guzmán, Martínez Villegas y Verdejo Manzano, 2017).

En la revisión bibliográfica realizada, todas las propuestas de diseño de tareas están pensadas para un tema en particular de los diferentes contenidos a enseñar. No se encontraron trabajos donde se plantee la posibilidad de diseñar e implementar una secuencia de tareas que contemple, en forma completa, los contenidos de una asignatura. Barreiro et al., 2017 la definen como:

> "(…) "Una secuencia de tareas es un conjunto de tareas ordenadas y organizadas de forma tal que el orden de las tareas responda a objetivos del docente previamente planificados, y su complejidad está graduada de modo tal que, al transcurrir por ella, el estudiante pueda trabajar sobre ciertos conceptos, procedimientos y cuestiones que el docente se propuso con antelación" (…)" (p. 68)

No solo se trató de proponer tareas para el mejoramiento de la enseñanza y del aprendizaje de algunos temas, sino que el desafío de la propuesta radica en el diseño e implementación de una secuencia de tareas que complemente temas, identificados como conflictivos de los programas vigentes de las asignaturas MI y MII, respetando el cronograma propuesto y que puedan ser realizados durante el cursado de las asignaturas mencionadas en el contexto del cursado conjunto con otras asignaturas correspondientes al diseño curricular de las carreras.

- Diseño de la metodología de enseñanza con implementación de las tareas diseñadas.

En la planificación de las asignaturas MI y MII se introdujeron las tareas como parte del cursado. Todas las actividades propuestas se realizaron durante el dictado de las asignaturas, como tareas adicionales de realización extra-áulica, por esta razón, en su diseño colaboraron los docentes que compartían el dictado de las mismas con la autora de este trabajo de investigación y, tanto la cronología como los tiempos asignados a sus resoluciones se debieron adecuar a los correspondientes cronogramas de MI y MII y a las disponibilidades horarias de los alumnos participantes lo que implicó contemplar la simultaneidad de cursado con otras materias correspondientes al diseño curricular de sus carreras.

Etapa 3: Implementación de la propuesta de enseñanza

La implementación de la propuesta de enseñanza de la presente investigación se realizó en las instalaciones de la FBCB, en dos instancias temporales, una durante el año 2017 y la otra en el 2019, con todos los alumnos que se inscribieron y cursaron MI de las carreras de LSA y LHyST, en el primer cuatrimestre y con todos los alumnos que se inscribieron y cursaron MII, de las mismas carreras, en este último caso, correspondiente al segundo cuatrimestre. Ambas asignaturas pertenecen al primer año de las carreras mencionadas.

Se utilizó el año 2018 para el análisis y reelaboración de las actividades realizadas en el año 2017 y en la adecuación dado que hubo cambios y adecuaciones de los programas de las asignaturas involucradas, por lo que fue necesario considerar esta nueva situación institucional en las tareas rediseñadas.

La implementación de toda la propuesta se apoyó en la utilización del aula virtual de las asignaturas disponibles en el EV de la FBCB-UNL, correo electrónico, uso de Recursos Educativos Abiertos (REA) (Butcher, 2015), diferentes software y telefonía celular.

Las experiencias realizadas como trabajo de campo se implementaron en marco del Proyecto de Innovación Curricular (RCD 963/14, FBCB) llamado “Conectando Matemática” aprobado por RCD 1239/16 – FBCB, como también de los proyectos de investigación CAI+D UNL: “Deserción temprana y tardía en una cohorte de la Facultad de Bioquímica y Ciencias biológicas. Análisis cualitativo y Cuantitativo. Comparación con otras cohortes” (PI. 2011) y “Educación Matemática e interdisciplinariedad. Eje principal de trabajo: la modelización”. (PI: 50120150100053LI).

Año 2017

Al inicio del primer cuatrimestre se consultó a los estudiantes, presentes en la primera clase presencial, acerca de la disponibilidad y conocimiento de recursos informáticos y de la accesibilidad a Internet. El instrumento utilizado se presenta en el Anexo 6 de página 308.

Iniciadas las actividades, la dinámica de incorporación de las tareas, consistió en disponer los enunciados en el EV una vez que los temas se habían dado en las clases presenciales según el cronograma de la asignatura y, en un plazo no mayor a quince (15) días, los estudiantes debían resolverlas y entregarlas, en formato papel, un día de clase previamente establecido para su corrección por parte de los docentes.

Se solicitó a los estudiantes que entreguen en forma escrita las resoluciones porque, a través de su análisis, es posible identificar formas de pensar, argumentar y resolver. Esta solicitud se justifica en el hecho de que al escribir, el estudiante, con el fin de adecuar sus respuestas a las actividades solicitadas o para elaborar argumentaciones con sentido y coherencia o cuando debe traducir las resoluciones al lenguaje algebraico correcto o cualquier otra forma de representación, debe jerarquizar conceptos, clarificar y organizar ideas, haciendo que el proceso de escritura se convierta en una instancia importante en su aprendizaje de la Matemática (Rodríguez y Belladona, 2006; Jiménez Espinoza y Pineda Bobórquez, 2013).

El día pactado para la entrega de las resoluciones, se realizó un taller presencial, en un horario de clase habitual, durante el cual los estudiantes explicaron en el pizarrón las diversas formas de resolver las tareas solicitadas. Asimismo, se analizó si las diferentes maneras de resolverlas conducían a los mismos resultados y se identificaron y analizaron grupalmente (con orientación de los profesores) los errores encontrados, las dificultades que tuvieron para la comprensión de las consignas, la búsqueda de nueva información acerca del tema desarrollado, los conceptos matemáticos y la operatoria necesarios para la resolución y la interpretación de los resultados en el contexto, y cuando correspondía, de las aplicaciones planteadas, como también la utilización de software. En ambos cuatrimestres, durante el lapso que los estudiantes tenían desde la disposición de enunciados en el EV y en el momento de su entrega, los estudiantes realizaron consultas entre ellos, presenciales o por telefonía celular, como también consultaban al equipo docente, además de las formas mencionadas también utilizaron el correo electrónico disponible en el EV. Se realizó el registro de las dudas, dificultades y consultas frecuentes.

Al finalizar el segundo cuatrimestre, se consultó a los estudiantes presentes en la última clase, acerca de si les había sido útil o no la implementación de las tareas, mediante el cuestionario que se muestra en el Anexo 7 de página 310.

Año 2018

Se realizó el análisis de los resultados de la experiencia áulica realizada en 2017.

Se hicieron dos tipos de análisis de resultados, por un lado, se consideraron las observaciones y comentarios realizados por los estudiantes en el cuestionario tomado a final del segundo cuatrimestre de 2017, y por el otro, se realizó una valoración cuantitativa con el fin de medir el impacto de la metodología implementada. Para ello se compararon los resultados obtenidos en las evaluaciones parciales, en los temas sobre los que los estudiantes trabajaron en las tareas extra clase, que se detallan a continuación:

a) del año 2017, discriminando a los estudiantes de la cohorte en estudio de acuerdo a si habían entregado o no tareas resueltas,

b) condición alcanzada al finalizar el cursado por los estudiantes que habían entregado tareas, al finalizar el primero y segundo cuatrimestre, de la cohorte 2017 y la 2016. Para las comparaciones de las proporciones de alumnos regulares, libres y promocionados en cada grupo se utilizó la prueba χ^2, considerando una significancia de 0,05 (Elorza Pérez-Tejada, 2008; Walpole, Myers, Myers y Ye, 2012).

En el año 2018 ocurrieron cambios, se agregaron temas a los programas de las asignaturas, en particular en MII, debido a que la UNL implementó y puso en vigencia, para el año 2019, el Curso de acción para la Integración Curricular (CapIC) de Matemática, razón por la cual a nivel institucional se modificaron los programas de las asignaturas de Matemática de la mayoría de las carreras de la UNL con el fin de facilitar la movilidad de los estudiantes entre las diferentes carreras y facultades de la universidad lo que llevó a reorganizar las tareas formuladas e implementadas en 2017 y diseñar nuevas para los contenidos agregados.

Resumiendo, durante este año, teniendo en cuenta los resultados de la experiencia realizada en 2017, los cambios producidos en los contenidos de las asignaturas y las decisiones a nivel de cátedras de Matemática del Departamento de

Matemática respecto al orden en el que se iban a dar los temas de las asignaturas, se reorganizó y rediseño la propuesta implementada.

Además, se incorporaron dos tareas electrónicas en el formato cuestionarios Moodle previos a cada evaluación parcial de MI y MII y trabajando con los mismos contenidos. Con este módulo de la plataforma Moodle, es posible crear cuestionarios con diferentes tipos de preguntas adaptadas a los objetivos específicos de cada una de las etapas del proceso de enseñanza y aprendizaje. Además, los cuestionarios, al finalizar el tiempo destinado para su resolución, permiten a los alumnos acceder inmediatamente a las respuestas. Esta característica es una potente herramienta de control y diagnóstico del aprendizaje tanto para los alumnos como para los profesores debido a que, por un lado, los estudiantes pueden utilizar las respuestas para adaptar y controlar sus aprendizajes y por el otro, le sirve al profesor para adaptar su trabajo a las necesidades de los estudiantes (Blanco y Ginovart, 2012).

La restricción de tiempo en este tipo de tareas es muy importante porque, en alguna medida permitiría resolver lo que se observó en las evaluaciones parciales en las que los estudiantes tenían dificultades con la administración y organización del tiempo para la resolución de las mismas.

Año 2019

Durante este año se implementaron las tareas diseñadas en 2017, algunas de ellas rediseñadas y adecuadas a los nuevos requerimientos surgidos durante 2018, en el dictado de las asignaturas MI y MII de las carreras LSA y LHyST. La metodología adoptada fue la misma que utilizada durante 2017.

En esta edición de la experiencia, se solicitó a los estudiantes, con carácter optativo, al finalizar cada taller de resolución y análisis de las tareas, que brinden su parecer acerca de las tareas propuestas, expresando qué fue lo que más les costó, al tiempo que se les solicitó también que realicen sugerencias para mejorarlas.

Al finalizar el dictado de MI y MII se utilizó un cuestionario electrónico con el fin de recabar su opinión respecto a la implementación de las tareas en el cursado de la asignatura. (Anexo 8, página 311).

Para el análisis e interpretación de los resultados de la experiencia realizada durante este año, se tuvieron en cuenta: las respuestas de las tareas, las preguntas que en forma recurrente realizaron tanto de manera presencial como por vía electrónica, las observaciones del trabajo desarrollado durante los talleres de resolución presencial de las tareas (observación participante), las respuestas de los cuestionarios electrónicos formulados a los alumnos y las resoluciones de las evaluaciones parciales realizadas durante el dictado de las asignaturas.

En el análisis cuantitativo de la experiencia llevada a cabo en 2019 se compararon

a) los resultados obtenidos en las evaluaciones parciales por los estudiantes discriminados de acuerdo a si habían entregado o no tareas resueltas, en los temas sobre los que los estudiantes trabajaron en las tareas extra clase y

b) la condición alcanzada al finalizar el cursado en cada cuatrimestre por los estudiantes de la cohorte 2016 y los de la cohorte 2017 que habían entregado tareas.

Para las diferentes comparaciones, se emplearon tablas, gráficos y las pruebas estadísticas mencionadas anteriormente.

Capítulo 5: Análisis y Discusión de Resultados

Etapa 1: Resultados a partir de los instrumentos

Revisión de las resoluciones de examen (Instrumento 1 – Anexo 2, página 184)

Se revisaron y analizaron las resoluciones de exámenes parciales y finales de los años 2015 y 2016 correspondientes a todos los turnos regulares que figuran en el calendario académico de la facultad de las asignaturas MI y MII de las carreras de Licenciatura en Saneamiento Ambiental, Licenciatura en Higiene y Seguridad en el Trabajo, con la finalidad de identificar los temas del currículo en los que los estudiantes frecuentemente cometen errores.

Si bien no es objetivo de este trabajo de investigación el tema errores, forman parte de las producciones de la mayoría de los alumnos y, a través de su detección, y superación es posible proponer estrategias de enseñanza que permitan lograr su corrección y favorecer el correcto aprendizaje de los contenidos matemáticos (Abrates, Pochulu y Vargas, 2006).

De la revisión realizada, a continuación, se describen errores y dificultades observadas, agrupados por asignatura y por los grandes ítems de los programas vigentes, al momento de la realización de esta revisión.

Matemática 1

Trigonometría

Tienen dificultades en la interpretación de enunciados de problemas aplicados, fundamentalmente se observan errores al pasar del lenguaje coloquial en el que están escritos los problemas al lenguaje simbólico y al gráfico que es necesario para la resolución. Les resulta difícil identificar los teoremas necesarios a aplicar para la resolución de problemas.

Además, el tema ecuaciones trigonométricas es particularmente difícil para los estudiantes, porque, a las dificultades algebraicas que toda ecuación tiene se le agregan las propias del tema que son las razones trigonométricas, los ángulos, en sus diferentes formas de medirse (grados, radianes) y el hecho de que las soluciones dependen del intervalo en el cual se indica que varía el ángulo.

Las dificultades observadas en el análisis de las resoluciones de los exámenes de los estudiantes de MI coinciden en gran medida con las mencionadas por

Yoshiwara y Yoshiwara (2007), Gutiérrez y Fiallo (2009) y Şahin (2015). Estos autores manifiestan que la trigonometría es una parte de la Matemática en la que convergen el álgebra y la geometría. Se trata con objetos matemáticos que requieren trabajar simultáneamente con triángulos rectángulos, el círculo unitario y gráficas de funciones trigonométricas. Para la mayoría de los estudiantes, esto significa una cantidad excesiva de fórmulas y gráficas que, a menos que puedan establecer conexiones entre diferentes sistemas de representación se convierten en un obstáculo muy difícil de superar.

En el caso de las razones trigonométricas, señalan que existe una dicotomía en la enseñanza de la trigonometría dado que, por un lado, se realiza una aproximación con el triángulo rectángulo donde los ángulos se miden en grados y se definen relaciones y funciones trigonométricas como proporciones de los lados de un triángulo rectángulo. Por otro lado, al trabajar con el círculo trigonométrico, los ángulos se miden en radianes y las funciones trigonométricas se expresan en términos de coordenadas cartesianas de un círculo unitario ubicado en el origen, haciendo que muchos estudiantes tengan una comprensión incompleta o fragmentada de las tres maneras importantes de ver el seno y el coseno: como coordenadas de un punto sobre el círculo unidad, como longitudes horizontales y verticales, y como razones entre lados del triángulo de referencia.

> "(…) "El estudio de la trigonometría puede convertirse en un proceso memorístico y rutinario, sin ningún sentido ni utilidad para los estudiantes si no se les brindan las condiciones para que logren una comprensión profunda, dinámica y utilitaria de estos conceptos, sus propiedades y relaciones. Por esta razón, es importante para los estudiantes que el tema incluya no solo una serie de conceptos y fórmulas, sino también herramientas y estrategias útiles para explorar, relacionar, conjeturar y demostrar. "(…)" Los conceptos y propiedades trigonométricos se definen, se conectan, se representan y se demuestran de diversas formas, involucrando conocimientos numéricos, geométricos, métricos, algebraicos y analíticos, por lo que se necesita de un tratamiento didáctico que permita que los estudiantes vean las conexiones entre conceptos, procesos y relaciones mediante las diferentes formas de representación" (…)". (Gutiérrez y Fiallo, 2009, p. 148 - 150)

Matrices, sistemas de ecuaciones lineales y determinantes

En los temas matrices y determinantes, la dificultad que con mayor frecuencia se observó fue el no relacionar las propiedades de las matrices y los determinantes en los ejercicios. Manejan algoritmos y, cuando antes de la operatoria de resolución de ecuaciones matriciales es necesario utilizar propiedades, no les es posible seguir resolviendo, o si lo hacen, terminan teniendo errores de cálculo. Les resulta difícil relacionar los sistemas de ecuaciones lineales dados algebraicamente con su expresión matricial y a la inversa.

Otro error recurrente observado es la generalización de la clasificación como incompatible de los sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas cuando la matriz de coeficientes es singular. También, clasifican, a los sistemas de n ecuaciones lineales con m incógnitas, como compatibles indeterminados, sin considerar si el sistema dado es homogéneo o no.

En general, en las evaluaciones, se pide la resolución de sistemas de dos (2) ecuaciones lineales con dos (2) incógnitas y/o de tres (3) ecuaciones lineales con tres (3) incógnitas porque pueden representarse geométricamente. Los primeros pueden ser representados por rectas en el plano, y los segundos, por planos en el espacio. Para los estudiantes es particularmente difícil asociar la solución geométrica con la algebraica, es decir, en un sistema 2x2, las posibles soluciones geométricas que se pueden dar son que las dos rectas se corten en un punto, o que sean paralelas o que solo haya una recta porque una ecuación es un múltiplo de la otra. En el caso de los sistemas de 3x3, se complica, porque la visualización en 3D es más difícil.

También les resulta particularmente difícil plantear problemas que para su resolución requieren de un sistema de ecuaciones lineales. Se observaron dificultades al relacionar el lenguaje coloquial con el simbólico. Además, una vez resuelto el problema matemáticamente, interpretar el resultado en el contexto del problema, decidir si la solución hallada es la solución del problema planteado.

En la resolución de problemas, que conducen a sistemas de ecuaciones lineales, a las dificultades mencionadas se le suma un obstáculo adicional cuando en el enunciado aparecen cantidades en diferentes unidades de medición o expresadas en porcentajes. Los estudiantes rara vez se dan cuenta que deben unificar las unidades, para que el resultado tenga sentido como tampoco verifican los resultados obtenidos.

Numerosos autores mencionan en sus trabajos de investigación dificultades similares a las observadas debido a la complejidad que tiene este tema no solo en su enseñanza sino también en su aprendizaje.

Herrero (2004), hace una síntesis de los errores habituales que en el tema sistemas de ecuaciones lineales incurren habitualmente los estudiantes, entre los que se encuentran: 1) dificultades al usar operaciones aritméticas elementales en problemas verbales que involucran ecuaciones o sistemas de ecuaciones, aun cuando saben aplicar perfectamente los algoritmos de resolución, 2) resuelven un sistema de ecuaciones lineales y no verifican la solución, 3) no realizan en forma correcta el pasaje del registro verbal al algebraico de un problema que involucre un sistema de ecuaciones lineales, 4) en general no efectúan la representación y resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales.

Jean Luc Dorier (2002) expresa:

> "(…) "La enseñanza del álgebra lineal se reconoce universalmente como difícil. Los estudiantes suelen sentir que aterrizan en otro planeta, se sienten abrumados por la cantidad de nuevas definiciones y la falta de conexión con los conocimientos previos. Por otro lado, los docentes suelen sentirse frustrados y desarmados ante la incapacidad de sus alumnos para hacer frente a ideas que consideran tan sencillas "(…)" Una de las principales dificultades para aprender álgebra lineal tiene que ver con la variedad de lenguajes, registros semióticos de representación, puntos de vista y escenarios a través de los que se pueden representar los objetos del álgebra lineal. Los estudiantes tienen que distinguir estas diversas formas de representar objetos de álgebra lineal, pero también necesitan traducir de uno a otro tipo y, sin embargo, no confundir los objetos con sus diferentes representaciones" (…)". (Dorie, 2002, p. 876-7)

Según Chavaría Arroyo (2014) el álgebra a menudo crea conflictos en el aprendizaje de los estudiantes al tener que enfrentarse a un lenguaje nuevo, con reglas que tienden a confundir. Esta situación se agudiza en el tema de resolución de problemas ya que interviene un mayor análisis y no solo la repetición de un proceso mecánico. Para este autor la resolución de problemas es muy importante en carreras universitarias con perfil profesional pues permite a los estudiantes que los conocimientos adquiridos sean aplicados en otros ámbitos de aprendizaje acercando el álgebra al contexto en que ellos se desenvuelven y lo vean no como un tema aislado al final de la unidad. Considera además que los introduce en la modelación matemática, promoviendo la curiosidad e inventiva. Sin embargo, en la realidad del aula, la resolución de problemas algebraicos se convierte en la temática de álgebra que más se les dificulta a los educandos.

Vectores en el plano y en el espacio

Este tema merece atención especial porque los estudiantes lo van a utilizar en asignaturas como Física, que se cursa inmediatamente después de Matemática. En casi todos los temarios de examen hay un ejercicio de este tema. Se observa que los alumnos tienen grandes dificultades en la interpretación de los enunciados, fundamentalmente si en ellos tienen que relacionar las diferentes operaciones entre vectores con sus interpretaciones geométricas, como también relacionarlos con el tema Recta y Plano. A las dificultades propias del tema se le agregan los inconvenientes que tienen con trigonometría y las operaciones algebraicas.

En palabras de Torrobara, Trípoli, Devece y Aquilano (2019)

> "(…) "Uno de los problemas más notorios que se han encontrado es la dificultad que muestran los estudiantes en relación a operar con vectores (suma y resta, producto de un escalar por un vector, producto escalar y producto vectorial), como así también al hecho de escribir un vector en coordenadas polares (considerando su módulo y el ángulo que forma con la horizontal)" (…)". (p. 698)

Vectores, es parte del álgebra lineal, tiene las dificultades propias de ella y se agravan porque se utiliza un enfoque geométrico en su enseñanza, que requiere entre otras cosas visualizar el objeto, graficar, relacionarlo con el álgebra de matrices y con trigonometría.

Un error recurrente observado es la confusión entre el producto escalar o punto entre vectores con el producto vectorial o cruz y, con ello, el no reconocimiento de las condiciones de ortogonalidad y paralelismo que se asocian a estas operaciones. También se observan muchos errores en el tema proyecciones, descomposición de un vector en dos direcciones ortogonales entre sí.

Con respecto a Recta y Plano, se observa que saben cómo son las ecuaciones de cada uno de ellos, pero no reconocen la información contenida en ellas. En el caso de las rectas, el punto de paso y el vector dirección y en el caso del plano el vector normal. Confunden las ecuaciones del plano con la ecuación general de la recta en R^2.

Otro error se presenta cuando se solicita hallar la ecuación de una recta como resultado de la intersección de dos planos, o cuando se solicita determinar si tres planos tienen un punto en común. Este tipo de problemas requiere de la integración del tema sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas y poder establecer la relación que hay entre un sistema compatible indeterminado con dos planos que se intersecan en una recta o sistema incompatible y concluir que los planos son paralelos. En el caso de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, la relación que hay entre sistema compatible determinado, solución única y la conclusión de que los planos se intersecan en un punto.

Lo observado es coincidente con lo expresado por Dorier (2002), Chavaría Arroyo (2014) en cuanto a la complejidad del álgebra lineal por las múltiples representaciones que cada objeto tiene.

Cónicas

En las evaluaciones de este tema, habitualmente se solicita a los alumnos decidir si una ecuación incompleta de segundo grado representa una cónica, en caso afirmativo, indicar cuál es, graficar e indicar todos sus elementos. Otro tipo de ejercitación que se solicita es obtener la ecuación de una cónica (circunferencia, elipse, parábola o hipérbola) a partir de datos característicos de la misma o en relación a otra y su gráfica.

En la primera forma de ejercicio, los errores habituales son algebraicos en la obtención de la ecuación requerida. También cometen errores en la graficación, muchas veces lo que grafican no condice con la ecuación obtenida.

Con respecto al segundo tipo de enunciados, la dificultad principal es de lectura y de identificación de datos. También se producen errores algebraicos y de graficación.

Respecto a las dificultades y errores que tienen los estudiantes de la universidad con este tema, Cruz y Marino (1999) citado por Calderón Waldrón y Pañuela Mendes (2013) manifiestan que

> “(...) “para los alumnos que ingresan a la educación superior, se ha constatado que los conocimientos se limitan al aprendizaje de memoria de las ecuaciones

> que caracterizan a cada una de las cónicas, a la identificación de sus elementos y a su búsqueda algorítmica empleando fórmulas, sin demostrar haber interiorizado la relación existente entre los diferentes parámetros que intervienen en las ecuaciones de las cónicas y su representación gráfica ni el porqué de su definición como lugar geométrico" (…)". (p. 273)

A su vez, Calderón Waldron y Pañuela Mendez (2013) mencionan que de acuerdo a su experiencia docente la gran mayoría de los estudiantes que ingresan al primer semestre en la universidad no poseen los conocimientos ni reconocen las ecuaciones algebraicas de las secciones cónicas, si bien hay una minoría de estudiantes que posee habilidades algorítmicas para determinar las ecuaciones algebraicas de las mismas, pero no tienen claridad sobre el concepto de cada una de ellas como lugar geométrico.

Funciones

En todos los temarios de examen hay un ejercicio sobre este tema, es muy importante para el equipo docente la valoración de su aprendizaje debido a que es el nexo entre MI y MII. El tipo de actividad que, en general, se solicita es dada una función a través de su expresión algebraica se pide a los alumnos indicar dominio, conjunto imagen, intersecciones con los ejes cartesianos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, de positividad y negatividad, comportamiento de la función en $\pm\infty$ o en determinados puntos donde la función puede presentar algún tipo de singularidad o comportamiento especial, que finaliza con la solicitud del esbozo de la gráfica de la función, considerando todos los puntos anteriores.

Es importante aclarar que, en esta asignatura, MI, la propuesta de enseñanza del tema funciones, está dirigida a que los alumnos sean capaces de relacionar las diferentes formas de representar una función y que las puedan relacionar entre sí, es decir relacionar la "forma" de la gráfica de una función con su "fórmula" y que sean capaces de representarlas gráficamente sin necesidad de una tabla de valores. Esto implica que se espera que los estudiantes puedan identificar la función generadora y a partir de ella cuáles son las deformaciones que se producen a través de la suma o resta de una constante o del producto por una constante, entre otras operaciones.

Se observa que, en general, los alumnos no logran hacer las relaciones esperadas entre lo que respondieron en los diferentes incisos solicitados y la representación gráfica. Otro error frecuente en las gráficas, es la confusión entre la variable independiente y la dependiente, como también la no comprensión del concepto de unicidad de la imagen; para que lo graficado represente una función la "imagen de un valor de la variable independiente debe ser única". Esto último se observa con mayor frecuencia en los ejercicios que están asociados a las representaciones gráficas de funciones definidas por tramos, dado que grafican todas las funciones en todos los tramos.

Hallazgos similares fueron encontrados por López y Sosa, 2008, Diaz Lozano, Haye, Montenegro y Córdoba (2015), Alpízar Vargas, Fernández Álvarez, Morales Reyes y Quesada (2018) en sus trabajos expresan que los estudiantes no poseen habilidades para definir correctamente el concepto de función, interpretar adecuadamente el lenguaje matemático, diferenciar entre variable e incógnita, utilizar diferentes representaciones de funciones, en particular no consiguen establecer la relación que existe entre la representación algebraica y el esbozo de la gráfica como también analizar e interpretar el comportamiento de la gráfica de una función. Hinojosa Rivera, García Quiroga y Vázquez Cedeño (2004) consideran que una de las mayores dificultades que tiene este tema se debe a que "el concepto de función implica la necesidad de emplear distintas representaciones para que el estudiante pueda captar y dominar en toda su complejidad el concepto" (p. 28).

Coordenadas polares

En las evaluaciones analizadas, este tema presenta características particulares que están relacionadas al cambio de coordenadas. Habitualmente en Matemática se trabaja con coordenadas cartesianas, tal vez, por este motivo, este tema es particularmente complicado para los estudiantes. Los errores que se observan tienen que ver, fundamentalmente con: la expresión de los ángulos en radianes, la relación con trigonometría, con las funciones trigonométricas y la representación gráfica. Este tema se daba siguiendo los lineamientos propuestos por Lang (1990), que considera siempre positiva la distancia entre el punto en el plano y el origen de coordenadas lo que implica una restricción en los valores posibles de los ángulos. Otro error frecuente es que grafican haciendo tablas de valores, no llegando a comprender que debe haber continuidad en la curva a graficar. Sintetizando, las dificultades observadas se deben, fundamentalmente, a la no relación entre los diferentes conceptos necesarios para utilizar este nuevo sistema de representación, las coordenadas polares, dado que se ponen en evidencia las dificultades identificadas en funciones, las algebraicas y las de representación gráfica ya mencionadas.

No se encontraron trabajos que mencionen específicamente el tema de coordenadas polares, pero como se indicó, las dificultades observadas son las mismas que las encontradas en funciones a la que se le debe agregar el nuevo sistema de coordenadas que está relacionado con trigonometría.

Límite y continuidad

La enseñanza del concepto de límite es de mucha importancia y esta radica en que tiene múltiples utilidades ya que es tanto objeto de conocimiento como una herramienta para otros como continuidad y derivabilidad de funciones, por ejemplo, y en otras ciencias como Física, Química, Ingeniería, por mencionar algunas. Es importante aclarar que la enseñanza de este tema, en MI, no se realiza con la definición formal, sino que se lo plantea desde el análisis gráfico o numérico, donde de acuerdo al comportamiento de la función en los puntos indicados se llega al valor del mismo. Solo se realizan cálculos de límites que se pueden resolver algebraicamente o analizando, en forma numérica, qué ocurre con el valor que toma la función en las cercanías del punto analizado.

El tema límite no es fácil de enseñar ni de aprender, es muy abstracto, para los estudiantes es muy difícil entender de qué se trata este concepto (Vrancken, et al. 2006; Aquere, et al. 2009), qué significa la expresión cuando "x tiende a *a*" ($x \to a$), a qué valor tiende la función y si x tiende a infinito ($x \to \infty$) es aún más complejo. Sumado a esto, están las dificultades algebraicas, no reconocen los casos de factoreo que deben utilizar para eliminar las indeterminaciones o para poder hacer simplificaciones. Una de las mayores dificultades que posee "la enseñanza y el aprendizaje de este concepto se debe a su riqueza y complejidad tanto como al hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición matemática" (Vrancken, et al. 2006, p. 11).

Como el concepto de continuidad está asociado al cálculo de límites y evaluar la función en un punto, se observa que se arrastran los errores de ambas operaciones.

Matemática II

Derivada de funciones de una variable, derivación implícita y logarítmica

En este tema se observa que los estudiantes conocen, en general, las reglas de derivación, si bien, este conocimiento es algorítmico. Se advierte que cuando aprenden una regla, por ejemplo, la de "derivada de un cociente", la aplican a todas expresiones donde aparezca una expresión con un cociente, sin analizarla, porque muchas veces, no es necesaria esta regla, dado que, con una operación algebraica, la expresión que tienen que derivar se transforma en una potencia de exponente negativo o un producto, de derivación mucho más simple.

También se observa, lo que Salazar Solórzano y Víquez García (2019) tipifican como un error de "extrapolación procedimental" cuando tienen que derivar un cociente o producto de dos funciones lo hagan como el cociente o producto de las derivadas, respectivamente.

No reconocen cuando aplicar la regla de la cadena, y muchas veces, la utilizan inadecuadamente. En particular, se observa con mucha frecuencia que, cuando tienen que derivar en forma implícita, no aplican esta regla cuando la variable dependiente aparece en la expresión.

En el caso de derivación logarítmica, cometen errores en la aplicación del logaritmo y sus propiedades. Lo que estaría mostrando que subsisten las dificultades algebraicas observadas en las evaluaciones de MI.

Aplicaciones de la derivada al estudio de funciones, recta tangente, optimización, problemas de física

En general, en las evaluaciones, aparece al menos un problema aplicado del tipo: "hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto", "maximizar o minimizar un volumen o una superficie conociendo el área o el volumen según corresponda", "dada la expresión del desplazamiento de una partícula, hallar la velocidad y/o la aceleración en un punto", "encontrar el intervalo donde crece o decrece una población", entre otras aplicaciones.

En este tipo de consigna, la mayor dificultad observada es la de lectura e interpretación de enunciados. Díaz Ferrer, Cruz Ramírez, Velázquez Cardoza y Molina Sierra (2019) manifiestan respecto a esta dificultad "(…) "el desafío más grande suele ser convertir el problema dado en lenguaje natural, en un problema matemático de optimización, es decir, establecer la función que debe maximizarse o minimizarse" (…)". (p. 21)

Superado este obstáculo, se observan deficiencias en el establecimiento de la relación entre los conceptos de derivada que tienen que aplicar y el objeto del problema a resolver. Pareciera que tienen palabras o indicadores que les informan, por ejemplo, si el enunciado dice "dónde crece o decrece", eso está relacionado con hallar el intervalo donde la derivada toma valores positivos o negativos. O, si en el enunciado aparece "alcanza el valor máximo o el valor mínimo", reconocen que tienen que derivar e igualar a cero, olvidándose que podría ocurrir que esos valores se alcancen donde la derivada no está definida. Sánchez-Matorros, García y Llinares (2008) manifiestan respecto a esto:

> "(…) "algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen, con la aplicación correcta de las reglas de derivación; sin embargo, tienen dificultades cuando necesitan manejar el significado de la noción de derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente.
>
> El fondo de la cuestión radica en que dichos alumnos no han construido un significado adecuado del concepto de derivada" (…)". (p. 268 – 269)

Otros errores observados están asociados a las unidades de medición, no se dan cuenta que deben homogenizarlas, pues, por ejemplo, en un problema de aplicaciones físicas, la ley que rige el movimiento de una partícula puede estar dada en metros y el tiempo en segundos y se pide la velocidad de la misma al cabo de un lapso determinado medido en horas.

En los problemas de optimización se observan deficiencias en geometría elemental en lo que se refiere al conocimiento del cálculo de áreas y de volúmenes, que generalmente son necesarios para resolver este tipo de problemas, en los que se solicita, por ejemplo, maximizar un volumen conociendo el área. Baccelli, Anchorena, Moler y Aznar (2013), encontraron situaciones semejantes a las mencionadas, dicen:

> "(…) "resulta preocupante que, en primer año de las carreras de ingeniería, cuando se propone a los alumnos ciertos problemas que requieren realizar tareas de optimización, la mayoría de ellos fracase en su resolución". … "En el momento de las evaluaciones parciales, la mayoría de los estudiantes ni siquiera aborda

estos problemas. Mientras que los que intentan resolverlos, evidencian notorias dificultades en el análisis, en el planteo y en el desarrollo de los mismos" (…). (p. 100)

Resumiendo, en palabras de Artigue (1995), los errores y dificultades hallados respecto a estos temas se deben a que:

"(…) "si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas" (…)". (p. 97)

Límites indeterminados, regla de L'Hopital

Este tema es muy teórico, tiene todos los inconvenientes ya mencionados en MI relacionados con el cálculo de límites (Vrancken, et al. 2006). En general logran identificar las indeterminaciones del tipo 0/0 o ∞/∞ que son de aplicación directa de la regla, pero cuando son de otro tipo, tienen dificultades de tipo algebraicas, en cuanto a operatoria, casos de factoreo y aplicación de logaritmo, que tienen que aplicar para llevar la expresión a la forma 0/0 o ∞/∞, que les permite aplicar la regla.

Otro error observado, es la aplicación de la regla de L´Hopital en situaciones donde no se puede, pues no corroboran si la expresión conduce a una indeterminación en la que es aplicable la regla.

Los errores observados, también fueron vistos por Salazar Solórzano y Víquez García (2019). Ellos los clasifican según dos categorías, una de ellas como "Deficiencias en conocimientos y habilidades previas" cuando los errores cometidos se deben a derivar mal, simplificar y evaluar incorrectamente las expresiones algebraicas de los límites a calcular. La otra categoría la denominan "Rigidez de pensamiento o asociaciones incorrectas" cuando no aplican adecuadamente ao no justifican el procedimiento para llevar del tipo 1^{∞}, 0^{∞}, ∞^{0}, $\infty-\infty$ a las formas 0/0, o ∞/∞ donde es posible la aplicación de la regla de L´Hopital.

Antiderivada, integral indefinida y definida, técnicas de integración, aplicaciones al cálculo de áreas

En estos temas se observan distintos niveles de dificultades entre los que se encuentran: el manejo de la operatoria propia de las reglas de integración, uso de tablas, identificación de los métodos de integración a utilizar, sustitución y por partes, y la operatoria algebraica necesaria para abordar la resolución del ejercicio solicitada.

En cuanto a la aplicación al cálculo de áreas de la integral definida, tienen dificultades con la identificación y graficación de las regiones cuya área se quiere calcular, donde se manifiestan, nuevamente, las dificultades observadas en el tema funciones (López y Sosa, 2008, Diaz Lozano, Haye, Montenegro y Córdoba (2015), Alpízar Vargas, Fernández Álvarez, Morales Reyes y Quesada (2018)); errores en la operatoria algebraica, como mencionan Quiróz Lima, Vázquez Martínez, González González y Torres Mata (2022), a lo que se asocian los diferentes tipos de representación de un mismo objeto matemático.

Integrales dobles iteradas, cambio de coordenadas, aplicaciones

En este tema les resulta difícil identificar las regiones de integración. Tienen dificultades semejantes a las mencionadas en el cálculo de áreas con integrales simples, de graficación de los recintos de integración. En cuanto al cambio de coordenadas, solo se da coordenadas polares, aquí las dificultades están asociadas con trigonometría dado que convergen el álgebra y la geometría (Yoshiwara y Yoshiwara (2007), Gutiérrez y Fiallo (2009) y Şahin (2015)) a lo que se le agrega la dificultad de estar insertas en el cálculo integral.

Ecuaciones diferenciales

Sólo se dan ecuaciones diferenciales exactas, a variables separables, lineales de primer orden y homogéneas de segundo orden. Se observan dificultades en el reconocimiento del tipo de ecuación diferencial, de operatoria algebraica y si se plantean problemas aplicados de interpretación de enunciados y de resultados.

En la resolución de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden, calculan las raíces de la ecuación característica, y arman la solución general, pero, cuando se solicita la solución particular que cumple con condiciones iniciales dadas, no pueden obtener esa solución porque no utilizan adecuadamente la información dada y si lo hacen, cometen errores algebraicos que los lleva a obtener soluciones incorrectas.

Las dificultades y errores observados en las resoluciones de los exámenes con relación a este tema son mencionadas por Dillius (2009) en su tesis doctoral sobre Enseñanza y aprendizaje en Ecuaciones diferenciales. Este investigador realiza un extenso análisis sobre publicaciones de diferentes autores y encuentra que hay consenso respecto a que uno de los problemas con el aprendizaje que tienen los estudiantes de este tema se deben a la algebrización y falta de contextualización de enseñanza, cuando analiza las entrevistas que hizo a profesores de Cálculo de su universidad, dice:

> "(…) "En relación a las principales dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias, todos los profesores entrevistados fueron unánimes en decir que los alumnos no saben cálculo, derivadas e integrales, trigonometría, resolución de sistemas lineales (2x2), números complejos entre otros contenidos considerados básicos para las ecuaciones diferenciales. Además, los alumnos poseían problemas conceptuales, principalmente en lo que se refiere a la interpretación de la derivada, que es la base de las ecuaciones diferenciales. Los profesores señalaron que los alumnos cursaban varias asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral, pero no entendían lo que significaba una derivada (tasa de variación) y seguían presentando dificultades en la interpretación de gráficos" (…)" (p. 89)

Consulta a docentes de otras asignaturas, de dictado simultáneo y posterior a las asignaturas de Matemática, que necesitan de contenidos matemáticos para el desarrollo de sus materias instrumento 2 (Anexo 3, página 185)

Se realizó una encuesta a profesores de las diferentes carreras que se dictan en la FBCB - UNL con el fin de indagar si los estudiantes que han aprobado las asignaturas de Matemática en el primer año de sus carreras universitarias logran aplicar estos conocimientos en las asignaturas que le siguen.

En las carreras, en las que se dictan asignaturas del área Matemática, se dan temas de Álgebra Lineal básica, Geometría Analítica y Cálculo en al menos una variable llegando, en aquellas carreras donde se da solo en una variable, hasta el cálculo de áreas como aplicación de la integral definida y Estadística. Así como la carrera que no tiene Matemática en su currículo, la Licenciatura en Terapia Ocupacional, en la Licenciatura en Biotecnología se da una asignatura obligatoria con contenidos de Ecuaciones diferenciales aplicadas y métodos especiales de resolución de las mismas. Es de hacer notar, que la carrera de Licenciatura en Terapia Ocupacional, en el último año tiene Estadística como asignatura obligatoria.

Además, los alumnos para ingresar a las carreras mencionadas, excepto la Licenciatura en Terapia Ocupacional, deben cursar y aprobar el Curso de Articulación Disciplinar en Matemática (CADM) cuyos contenidos son: Conjuntos numéricos, operaciones y ecuaciones. Expresiones algebraicas y polinomios. Funciones (en particular de primer y segundo grado). Introducción a la trigonometría (triángulos rectángulos).

Según estos contenidos los alumnos ingresantes deberían poseer los conocimientos y habilidades mínimas necesarias para el cursado, por ejemplo, de Química General, Química Inorgánica y Química General e Inorgánica, que se dictan en paralelo con los cursos de Matemática en el primer año de sus careras.

Considerando lo expresado, se supone que los alumnos que acreditan las asignaturas de Matemática de sus respectivas carreras deberían poder aplicar los contenidos mencionados en el momento de cursar otras materias del plan de estudios que requieren de conceptos de matemática para su desarrollo.

Se entregó el formulario en forma impresa y también se lo envió por correo electrónico a docentes de primero a quinto año, que dan clases de teoría y/o práctica, de todas las carreras que se dictan en la FBCB-UNL que tienen al menos una asignatura de Matemática en su diseño curricular. Se obtuvo un total de 115 registros de docentes, que desarrollan sus actividades en 5 de las 7 carreras que se dictan. En las dos que no contestaron (Licenciatura en Administración de la Salud y Licenciatura en Terapia Ocupacional), solo Licenciatura en Administración de la Salud tiene Matemática en su currículo y ambas tienen Estadística. En el Gráfico 1 (Anexo 9, página 316) se muestra la distribución porcentual de los registros de respuestas de los docentes encuestados por año de las carreras a las que pertenecen las asignaturas que ellos dictan.

De todos los docentes encuestados solo cinco (5) dijeron no necesitar contenidos de Matemática para el dictado de sus asignaturas y fueron los que dictan:

Sociología – Sociología del trabajo, Servicios Sanitarios, Saneamiento y Medicina del Trabajo, Saneamiento del agua y Tratamiento de Efluentes. Este resultado estaría indicando que en el 95,6% de las asignaturas de cursado simultáneo o posterior a Matemática se necesitan de contenidos matemáticos para su desarrollo.

De los que respondieron que sí necesitan de contenidos de Matemática para desarrollar sus asignaturas, 8, de las 115 respuestas (6.9%) indicaron que no era un obstáculo o no contestaron. El detalle es el siguiente: 2, consideran que no es un obstáculo y 6 no contestaron. Las asignaturas que dictan los docentes que respondieron de esta forma son: Física I, Física II, Inmunología Básica, Protección contra incendios I y Gestión de residuos.

De lo expuesto, se observa que el 92.3% (102 de las 110 respuestas afirmativas respecto a que necesitan contenidos matemáticos para el desarrollo de las asignaturas) de los docentes consideran a esta situación un obstáculo.

En el caso de las asignaturas de primer año, se obtuvieron 43 respuestas, de las cuales 20 corresponden a las carreras LSA y LHyST de las asignaturas Química General, Química Inorgánica, Química Orgánica, Física General, Termodinámica y Dibujo y Topografía, coincidieron en que los temas en que más dificultades tienen los alumnos son:

1. “Resolución de ecuaciones: despejar incógnitas y pasaje de términos”;
2. “Operar con logaritmos y exponenciales, uso de calculadora”;
3. “Construir gráficas e interpretarlas (función lineal y cuadrática);
4. “Razones y proporciones: conversión de unidades, regla de tres simple”,
5. “Nociones de geometría: cálculo de áreas y volúmenes”.
6. “Nociones básicas de vectores: operaciones y proyecciones”.

Los temas 1 a 5 son contenidos del Curso de Articulación Disciplinar de Matemática (CADM). El 6, se da en algunas escuelas secundarias técnicas y es desarrollado en la primera Matemática de todas las carreras cuyos docentes respondieron el cuestionario. Por otra parte, los docentes que mencionaron este tema son de Física, que se dicta luego de que los alumnos al menos regularizaron la asignatura de Matemática en la que se da dicho tema.

En el caso de profesores de segundo año, se obtuvieron 22 respuestas de las cuales 9 corresponden a asignaturas de LSA y LHyST. Las asignaturas de las que se obtuvo respuesta fueron: Anatomía e Histología, Física I, Física II, Fisicoquímica, Fundamentos de Alimentación y Nutrición, Química Analítica, Química Biológica, Química Orgánica I, Química Orgánica II, Química Bioinorgánica, Ecología General y Microbiología I. Coincidieron en los temas 1 a 6 mencionados por los docentes de primer año y agregaron el tema:

7. “Cálculo: derivadas, integrales, análisis de funciones”.

8. “Tratamiento estadístico de datos”.

Este tema se da en Estadística, que en la mayoría de las carreras es una asignatura de segundo año segundo cuatrimestre, excepto para Licenciatura en Saneamiento Ambiental, Licenciatura y Tecnicatura en Higiene y Seguridad en el Trabajo, se da en tercer año primer cuatrimestre.

De tercer año, se obtuvieron 23 respuestas, de las cuales 7 corresponden a asignaturas de las carreras LSA y LHyST. Las asignaturas de las que se obtuvo respuesta fueron: Bromatología y Química de los Alimentos, Microbiología de los Alimentos, Microbiología General, Morfología Normal, Química Biológica, Química Sanitaria, Contaminación ambiental, Microbiología Sanitaria y ambiental, Protección contra incendios I, Gestión de residuos. Sociología/sociología del trabajo, Servicios Sanitarios. Los docentes Coincidieron en todos los temas mencionados.

De cuarto año, se obtuvieron 17 respuestas, de las cuales 7 corresponden a docentes que dictan clases en las carreras de LSA y LHyST. Las asignaturas que corresponden a este año son: Bromatología, Inmunología Básica, Operaciones y Procesos Biotecnológicos I y II, Toxicología General, Alimentaria y Laboral, Toxicología y Química Legal, Toxicología de los alimentos, Estática y Resistencia de materiales, Limnología, Contaminación y saneamiento del aire, Saneamiento del Agua. Manifestaron tener inconvenientes con los temas mencionados por los docentes de años anteriores 1, 2 y 3, 7 y 8. Aparecieron dos nuevos contenidos:

9. “Ecuaciones diferenciales” y

10. “Algebra lineal, vectores y tensores”.

Cabe aclarar que profesores de Inmunología Básica dijeron necesitar de contenidos de Matemática para sus clases, no lo consideran un obstáculo y no detallaron contenidos. Por otra parte, las asignaturas Procesos Biotecnológicos I y II solo se dan en Licenciatura en Biotecnología, y esta carrera tiene en su plan de estudios, como asignaturas obligatorias a Matemática General, Análisis Matemático, Métodos Matemáticos, Estadística y como optativas Complementos de Ecuaciones diferenciales y Complementos de Estadística. En esta carrera se dan todos los temas que se piden excepto tensores. El profesor de Saneamiento Ambiental, considera que solo necesita contenidos elementales de Matemática por lo tanto esto no es un obstáculo para el desarrollo de su materia.

De quinto año respondieron 9 encuestas, de las cuales solo una correspondió a las carreras LSA y LHyST. Las asignaturas fueron: Nutrición, Toxicología, Farmacología y Bioquímica Legal, Tratamiento de efluentes y Saneamiento y Medicina del trabajo. En este nivel, los docentes encuestados de las dos últimas asignaturas nombradas manifestaron no necesitar de herramientas de Matemática para el desarrollo de sus clases, los restantes coincidieron en los temas 1, 2, 3 y 8 ya mencionados por los docentes de los años anteriores.

En el Gráfico 2 (Anexo 9, página 316) se muestra la distribución porcentual de los diez grupos de contenidos de Matemática en los que los docentes encuestados, manifestaron tener dificultades en el desarrollo de sus clases.

El análisis de las encuestas muestra, según la opinión de la mayoría de los docentes de las asignaturas de cursado simultáneo y posterior a las de matemática de las diferentes carreras, que los alumnos, en general, no poseen el dominio de contenidos de Matemática básica que son necesarios para el desarrollo de sus clases, considerándolo un obstáculo cognitivo para el desarrollo de sus asignaturas. Este resultado estaría indicando que los estudiantes, si bien han aprobado las asignaturas de Matemática, no logran transponer los temas de matemática a las otras disciplinas (Contini, Fabro y Gusmao, 2017). Estas respuestas son un llamado de atención para los profesores de Matemática e implica que debería repensarse la enseñanza haciendo hincapié en la contextualización de los conceptos mediante la resolución de problemas aplicados y diseñando tareas que tiendan al logro de un aprendizaje significativo no solo con la mirada en la propia disciplina, sino mostrando la utilidad y aplicabilidad de los conceptos matemáticos en las otras áreas que tienen en sus carreras; buscando diferentes formas de mantener a los estudiantes motivados, interesados en la clase y en los contenidos matemáticos que desarrolla mostrándoles lo importante que es la Matemática y aplicando estrategias de enseñanza motivadoras basadas en el trabajo activo y colaborativo, en grupos de aprendizaje, en herramientas lúdicas, si es necesario o posible como también en el uso de TIC (Ávila y Contini, 2016, Vaira, Ávila, Contini y Taborda, 2014).

Esta propuesta, si bien pareciera ser la respuesta a lo observado por los docentes encuestados, tiene el inconveniente de que Matemática, en los diseños curriculares de todas las carreras, está ubicada al inicio, en el primer año. Esta ubicación de las asignaturas de Matemática supone que, en los diseños curriculares de las carreras, le da a esta una finalidad instrumental, es decir, como una herramienta para las disciplinas específicas. Esta situación, al momento de enseñar Matemática, plantea la necesidad de decidir qué y cómo enseñar, qué habilidades se espera que los alumnos adquieran, tratar de establecer un equilibrio entre los contenidos teóricos y las aplicaciones. Esto último muy limitado, por la ubicación de la asignatura en el diseño curricular de las carreras. Esta situación, en palabras de Font (2007) es:

> "(…) "¿Qué tipo de matemáticas se deben enseñar? No hay acuerdo sobre si hay que enseñar unas matemáticas formalistas o bien unas matemáticas realistas, tampoco lo hay sobre cuál es el papel de la resolución de problemas, ni sobre si hay que enseñar unas matemáticas acabadas o bien hay que enseñar a "hacer matemáticas", etc. Las diferencias de opinión también aparecen si la pregunta es ¿Por qué hay que enseñar matemáticas?" (…)" (p. 2)

Una respuesta a ¿por qué enseñar matemática en el inicio de las carreras? es lo que Castro de Bustamante (2007) dice:

> "(…) "La formación básica en Matemática brinda elementos importantes de la capacidad de argumentación racional, la abstracción reflexiva y el aumento de las habilidades necesarias para resolver problemas no sólo del ámbito escolar, sino de amplia aplicación y transferencia a otros campos del saber. Brinda un excelente puente entre el aprendizaje y el trabajo, la formación académica y la formación para la vida, es decir, favorece el desarrollo y la conformación de capacidades para la reflexión crítica tanto en el marco del conocimiento científico como en la cotidianidad de nuestras acciones" (…)". (p.520)

Además, otro análisis que surge de estos resultados conduce a preguntarnos ¿La opinión recabada de los docentes de las otras asignaturas estarían indicando la presencia de lo que Perkins (1997, pág. 35) denominó *Síndrome del conocimiento frágil*? Este autor, considera que este síndrome está dividido en cuatro partes:

- Conocimiento olvidado: buena parte de lo estudiado por los alumnos desaparece;

- Conocimiento inerte: a veces recuerdan, pero es inútil, permite a los estudiantes aprobar un examen, pero no lo aplican a otras situaciones;
- Conocimiento ingenuo: Los alumnos captan muy superficialmente la mayor parte de los conocimientos científicos y matemáticos fundamentales y
- Conocimiento ritual: tiene forma de rito, solo sirve para cumplir las tareas escolares.

Estas cuatro formas en que los alumnos adquieren sus conocimientos, se oponen a las metas de una buena educación, que son: retención, comprensión y uso activo del conocimiento adquirido. Más adelante menciona: "El conocimiento olvidado no se puede usar porque no se lo posee, el ingenuo y el ritual, aluden a una comprensión deficiente e inerte, si bien sirve para aprobar exámenes, jamás se aplica en la práctica". (Perkins, 1997, p. 35)

Desde la perspectiva de la enseñanza, la pregunta que un docente en general y en particular el docente de Matemática debe plantearse es ¿qué estrategia de enseñanza debe utilizar para mejorar la adquisición de conocimientos de sus alumnos?

Entrevistas realizadas a docentes del Departamento de Matemática de la FBCB - UNL (Instrumento 3, página 176)

El Departamento de Matemática nuclea asignaturas correspondientes a las áreas: Matemática, Estadística e Informática de todas las carreras que se dictan en la FBCB y la ESS. El plantel total está compuesto por veinte docentes con diferentes cargos (profesor titular, profesor asociado, profesor adjunto, Jefe de trabajos prácticos, Ayudante de cátedra) y actividades, de los cuales doce (12) participaban del dictado de alguna de las matemáticas al momento de realizar este relevamiento. Es importante mencionar que no hay cuatrimestre libre, y que los docentes que participan en el dictado de MI o MG en el primer cuatrimestre participan en el dictado de MII o Análisis Matemático, en el segundo, como asignaturas masivas del primer año de las diferentes carreras de la FBCB - ESS. Además, algunos de estos docentes, participan en el dictado de otras asignaturas obligatorias como Métodos Matemáticos aplicados a la Biología y la Química y Estadística como también de asignaturas optativas como Complementos de ecuaciones diferenciales y Complementos de Estadística.

Por otra parte, es importante observar que, si bien se elaboró un guion para realizar esta actividad (Anexo 3 – pág. 185), la recolección de la información se hizo por medio de charlas que en forma particular se realizaron con los docentes como también se tomaron notas en las reuniones de departamento sobre las dificultades observadas en la enseñanza de las diferentes asignaturas de Matemática.

Las opiniones, de los 12 docentes que daban alguna de las asignaturas de Matemática en el primer y segundo cuatrimestre de primer año, respecto a las dificultades que tienen al momento de dar sus clases, pueden agruparse en tres grandes ejes relativos a:

a) formación previa de los estudiantes en Matemática,

b) actitud frente a la Matemática y motivación para su estudio y

c) adaptación a la vida universitaria.

a) Formación previa en matemática

El grupo de docentes, de manera casi unánime, opinó que la formación en matemática con la que los estudiantes ingresan a la universidad no es suficiente para enfrentar, de forma adecuada, el cursado de Matemática en el primer cuatrimestre de sus carreras. Consideran que el requisito de aprobación del Curso de Articulación Disciplinar en Matemática (CADM), para poder cursar Matemática, no es suficiente como preparación previa al cursado. Estos comentarios son semejantes a los de autores como Zuazua y Rodriguez del Río (2002), Gómez Chacón (2009), Huidobro, Méndez y Serrano (2010), Ávila, Vaira y Contini (2014), Mota Villegas y Valles Pereira (2015) y Contini y Ávila (2015). Ellos mencionan que actualmente son cada vez más los educadores en matemática que observan y se preocupan por la brecha que existe entre los conocimientos matemáticos que poseen los estudiantes al ingresar a la universidad y los que realmente necesitan para enfrentarse a los contenidos del primer año universitario.

Son variadas las razones que sustentan la opinión de los docentes del Dpto. de Matemática, entre ellas, la más preocupante es la relativa a los contenidos que teóricamente deberían poseer los estudiantes para ingresar a la universidad, haciendo que en el CADM solo se repasen, por ejemplo, logaritmo y resolución de triángulos. Fundamentan esta opinión diciendo que los alumnos, manifiestan en sus clases, nunca haberlos visto en el nivel educativo anterior.

Además, hay temas que no han sido aprendidos adecuadamente, entre los que se encuentran: operatoria con números, notación exponencial, factorización de polinomios, uso de calculadora.

Mencionan, la falta de habilidades que tienen para poder pasar de un sistema de representación a otro, situación que se pone de manifiesto no solo cuando se solicita obtener la gráfica de una función, hacer un bosquejo de una situación problema que se les plantea, en la representación gráfica de vectores y en cónicas. Esto también se pone de manifiesto cuando las consignas están enunciadas en forma verbal, pues se observan grandes déficits de lectura comprensiva.

También mencionan que estudian los temas de manera aislada, que no son capaces de relacionar los contenidos dentro de una misma asignatura de matemática, con la matemática que le sigue y menos con otras asignaturas de la carrera.

Las dificultades observadas por los docentes de Matemática acuerdan con las indicadas por los docentes de las otras asignaturas. Lo preocupante es que perduran a pesar de cursar y aprobar materias de Matemática, coincidiendo esto con lo mencionado sobre la adquisición de conocimiento frágil (Perkins, 1997) y no lográndose un aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos.

b) Actitud frente a la Matemática y motivación para su estudio

Comentan que, en clase, los estudiantes, mencionan que no les gusta la asignatura y además cuestionan abiertamente *¿para qué tanta Matemática?*, *¿para qué les sirve a ellos?*

Por otra parte, cuando tratan de desarrollar en sus clases algunas aplicaciones con las cuales mostrar la importancia de la Matemática en sus carreras, tienen el inconveniente de que sus estudiantes no entienden de qué les están hablando. Esto, como ya se comentó anteriormente, muy posiblemente se debe a que las asignaturas de Matemática están al comienzo de las carreras y los alumnos aun no tienen la suficiente formación para entender sobre los temas aplicados como también la información necesaria como para darse cuenta de importancia de los “usos” sobre los que se le está hablando como tampoco la implicancia de la Matemática en ellas. (Arralde, Walz y Mamut de Bergesio, 2006)

Fueron recurrentes los comentarios

..."no estudian o no saben estudiar, no poseen hábitos de estudio, *dejan todo para lo último y se creen que en unos pocos días van a preparar todos los temas para las evaluaciones parciales y/o finales. No logran organizarse para preparar la materia*"...

..."*Probamos diferentes tipos de estrategias con el fin de lograr que sigan al día la materia, pero son solo unos pocos los que las aprovechan*".

"*Les damos muchísimas clases de consulta y ahí te das cuenta de que son pocos los que vienen con dudas, porque la mayoría asiste con idea de que son clases particulares o bien como oyentes, para ver si "pescan" algo de lo que preguntan sus otros compañeros*".

c) Adaptación a la vida universitaria

Los docentes opinan que este punto es importante al momento de enseñar porque los estudiantes, al poder adaptarse a la "modalidad y ritmo de la universidad" adquieren sentido de pertenencia, no solo en la institución, sino también en la carrera que están cursado. Esto les permite sentirse menos inseguros, con mayor estabilidad y así tener menos cosas extras en las que pensar y le pueden dedicar más tiempo al estudio de la materia. Fundamentalmente al estudio de Matemática, inserta en el primer año de las carreras, dado que, podría ser considerada un factor asociado con la deserción universitaria temprana, en cuanto las expectativas insatisfechas que se traducen en un estado de frustración o desmotivación (Walz, Contini, Bergesio y Colombini, 2009, Walz, Contini y Ávila, 2017).

Otro comentario interesante respecto a la contención de los alumnos ingresantes que ayuda en este aspecto fue que la propuesta de la UNL respecto a tener un programa de becarios de tutoría, ayuda mucho, justamente en la inserción a la vida universitaria, pues ellos acompañan a los estudiantes ingresantes y los contienen mucho con respecto a estos temas (Contini y Ávila, 2015).

Es importante mencionar que, durante el desarrollo de la experiencia de campo de esta investigación, se contaba con el apoyo de becarios de tutoría cuya participación ayudó en la comunicación entre estudiantes y docentes, fundamentalmente cuando estaban realizando las tareas extra áulicas, pues fueron una vía de comunicación muy eficiente para aclarar las dudas que se presentaban.

Etapa 2: Elección y Diseño de las tareas

Luego de analizar las evaluaciones y teniendo en cuenta los comentarios realizados por los docentes de otras asignaturas que utilizan Matemática en sus asignaturas, de considerar la experiencia de los docentes a cargo de las otras materias de Matemática del Departamento y la de los docentes a cargo del dictado de MI y MII, se identificaron y seleccionaron como ejes centrales para el diseño de las tareas:

En MI: Trigonometría, Matrices y determinantes, Vectores y Funciones de una variable real.

En MII: Límites, Cálculo y aplicaciones de la derivada, Cálculo y aplicaciones de Integrales en una variable.

Diseño de las tareas

Identificados los ejes temáticos de los programas vigentes se diseñaron inicialmente cuatro (4) tareas para cada asignatura, para implementar en el año 2017. A continuación, se presenta el listado y descripción de las mismas. En el Anexo 5 (páginas 187 a 307) se encuentran los enunciados y las resoluciones esperadas.

Matemática I

Para el diseño de las tareas se tuvieron en cuenta los criterios ya mencionados con anterioridad, es decir que aporten a la enseñanza y los aprendizajes de los estudiantes, que permitan trabajar con contextualización y descontextualización, según los objetivos de aprendizaje y la naturaleza del concepto matemático tratado, y que utilicen TIC como mediadora de los aprendizajes y como vínculo docente-alumno, alumno-alumnos; docentes-docentes.

Las tareas propuestas para que los estudiantes realicen fuera del aula y posteriormente analicen y discutan grupalmente en forma presencial, fueron:

Tarea 1: Trigonometría – Resolución de triángulos oblicuángulos

- A los fines de promover una enseñanza activa y favorecer logros de aprendizaje significativo se tuvo en cuenta lo siguiente:

Como se mencionó en la revisión de las evaluaciones, los estudiantes presentan varios problemas, principalmente por las diferentes formas de representar el mismo objeto matemático (Yoshiwara y Yoshiwara 2007; Gutierrez y Fiallo, 2009; Şahin, 2015) y por la falta de comprensión de las consignas. Con este diagnóstico de situación se propuso una tarea que enfrentara a los estudiantes a las dificultades mencionadas por medio de la resolución de problemas de triángulos oblicuángulos.

- A los fines de favorecer la contextualización de la enseñanza, se diseñó la tarea de la siguiente manera:

Se configuró en dos partes, una con ejercicios de resolución de triángulos oblicuángulos y la otra con problemas aplicados a situaciones que se les pueden presentar en la asignatura Dibujo y Topografía al momento de hacer un trabajo de planimetría.

La finalidad de la tarea fue que los estudiantes para la resolución de los ejercicios, a partir de datos de lados y/o ángulos, bosquejen la situación problema planteada e identifiquen qué teorema deberían aplicar (del seno y/o del coseno).

En el caso de los problemas aplicados, se les incorporó la dificultad adicional de leer e interpretar un enunciado, transcribir del lenguaje coloquial la información contenida en el enunciado a un bosquejo y a símbolos para poder resolverlos.

- A los fines de incorporar TIC como mediadoras de la enseñanza y los aprendizajes:

Para este fin se brindó como información adicional, enlaces a Recursos Educativos Abiertos (REA) relativos al tema para que, si tenían dudas sobre el mismo pudieran repasarlo o bien utilizar una “calculadora de triángulos oblicuángulos” disponible en línea. Esta aplicación, si bien resuelve la situación planteada, tiene el inconveniente de que hay que adecuar los datos al triángulo del algoritmo propio de cálculo implementado en ella. Se esperaba que los estudiantes la utilizaran para verificar sus resultados.

Tarea 2: Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

- A los fines de promover una enseñanza activa y favorecer logros de aprendizaje significativo se tuvo en cuenta lo siguiente:

Para ello se realizó una selección de ejercicios acerca de los temas matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales y las relaciones que hay entre ellos.

Los ejercicios propuestos son de muy poco cálculo, se solicita, por ejemplo, calcular el valor del determinante de una matriz y, si esta es la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo o no homogéneo, analizar qué ocurre con la solución.

La propuesta de esta tarea tiene su eje en que los estudiantes relacionen propiedades y teoremas, con la resolución de ejercicios, que se den cuenta que, con un buen manejo de estos conceptos teóricos, la mayoría de las veces no es necesario hacer cálculos. En casi todos los incisos se solicita que justifiquen los resultados que respaldan las respuestas, con el fin de analizar cómo piensan, razonan y argumentan.

- A los fines de favorecer la contextualización de la enseñanza, se diseñó la tarea de la siguiente manera:

El objetivo de la tarea fue que los estudiantes afiancen conceptos teóricos y de cálculo, razón por la cual la configuración de la tarea se realizó en el marco de la descontextualización, haciendo foco en la resolución de ejercicios que promuevan desempeños matemáticos de cálculo.

- A los fines de incorporar TIC como mediadoras de la enseñanza y los aprendizajes:

Como se mencionó, esta tarea se diseñó fundamentalmente con el fin de afianzar la comprensión de los temas involucrados. Para tal fin se propusieron tareas que permitan a los estudiantes realizar algunos cálculos con el *GeoGebra* o con una aplicación para celular como "*Matrix Operations*", por ejemplo, que resuelva operaciones con matrices y cálculo de determinantes, para el posterior análisis crítico de los procedimientos y resultados obtenidos.

Tarea 3: Vectores en R^3, recta y plano

- A los fines de promover una enseñanza activa y favorecer logros de aprendizaje significativo se tuvo en cuenta lo siguiente:

Esta tarea consistió en una selección de ejercicios de vectores en el espacio y su relación con las ecuaciones de la recta y el plano.

Con respecto a vectores, los ejercicios propuestos tratan sobre los diferentes productos entre ellos, paralelismo, ortogonalidad y proyecciones y se propone el manejo de los vectores en forma geométrica y algebraica. Recta y Plano están directamente relacionados con vectores y entre ellos.

En todos los problemas se promueve la interpretación geométrica de los objetos de estudio y a su vez las relaciones con los sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo, la intersección de dos planos da por resultado una recta y la relación que tiene este resultado con un sistema compatible indeterminado.

Se espera, con esta propuesta, que los estudiantes establezcan las relaciones entre lo geométrico y lo algebraico.

- A los fines de favorecer la contextualización de la enseñanza, se diseñó la tarea de la siguiente manera:

Si bien en el enunciado de la tarea no están explícitamente mencionadas las aplicaciones de este tema, la contextualización se consideró, no solo en su importancia en las aplicaciones posteriores sino también en la forma en la que se enunciaron las diferentes actividades y en el énfasis que en el diseño de la tarea se le otorgó a la relación entre lo algebraico y lo geométrico, dado que esta es la forma en la que son utilizados y tratados los vectores en Física y en Estática y Resistencia de Materiales, asignaturas de cursado posterior a MI.

- A los fines de incorporar TIC como mediadoras de la enseñanza y los aprendizajes:

En esta tarea se consideró el uso del *GeoGebra* para visualizar, por ejemplo, los planos, sus intersecciones y sus posiciones relativas. También se previó el uso de aplicaciones para celular para agilizar la operatoria en el cálculo de determinantes y en la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales.

Tarea 4: Funciones por parte o a trozos

- A los fines de promover una enseñanza activa y favorecer logros de aprendizaje significativo se tuvo en cuenta lo siguiente:

Las funciones en general y las definidas por partes o a trozos son temas en los que los estudiantes tienen muchas dificultades, especialmente en la identificación de los intervalos de cada "trozo" donde se define la función.

Por esta razón, se les propuso hacer dos ejercicios, uno, donde tenían que evaluar una función definida por tramos en diferentes puntos de su dominio y evaluar la continuidad en algunos puntos. Si bien este ejercicio es muy "estructurado" tiene por objetivo identificar si los estudiantes comprenden lo solicitado, interpretan la expresión de la función, identifican en qué intervalo se encuentra el valor de la variable independiente y así dar el valor de la función de acuerdo al tramo que corresponde, en particular cuando se pide evaluar la función en los puntos extremos de los tramos, ver si identifican si el intervalo es cerrado o abierto y si es posible evaluar la función en los mismos. Con la simple evaluación de la función en diversos puntos, discernir si es continua o no en ellos y, si hay presencia de asíntotas.

En el otro se les da la expresión de la función y se les solicita que grafiquen e indiquen dominio, imagen, intersecciones con los ejes, intervalos de positividad y negatividad, crecimiento e identifiquen puntos donde deben investigar la continuidad y verificarla. Se esperaba que identificaran los tipos de funciones de cada tramo, que recuperaran lo dado en clase respecto a la “forma” de la gráfica de la función correspondiente y que tomaran, en forma aproximada el intervalo correspondiente al tramo que estaban analizando, sin hacer tabla de valores, solo calcular el valor en los extremos del tramo para hacer un gráfico en escala.

- A los fines de favorecer la contextualización de la enseñanza, se diseñó la tarea de la siguiente manera:

Debido a la naturaleza compleja de los conceptos matemáticos trabajados para ser abordada con estudiantes de primer año de las mencionadas carreras, la tarea se diseñó considerando el contexto propio de MI y en la necesidad de que los estudiantes posean un sólido conocimiento del tema para poder abordar adecuadamente MII.

- A los fines de incorporar TIC como mediadoras de la enseñanza y los aprendizajes:

Para ello se les propuso a los estudiantes, que para facilitar la construcción de gráficos usen el *GeoGebra* y se les brindó cómo escribir la sentencia en el software para hacer gráficas de funciones de este tipo. El problema que plantea el uso del software, es que tienen que tener muy claro qué función corresponde a cada tramo y cómo son, en el sentido de si son intervalos abiertos o cerrados o semi-abiertos. El poder utilizar adecuadamente el soporte tecnológico sugerido o cualquier otro tipo de aplicación requiere tener muy claras las cuestiones mencionadas.

Resumiendo, con esta propuesta se espera que los estudiantes relacionen la expresión algebraica de las funciones con sus gráficas y, a partir de la visualización, sean capaces de responder las consignas, sabiendo desde el inicio las dificultades que tiene este tema en coincidencia con los mencionado por Hinojosa Rivera, García Quiroga y Vázquez Cedeño (2004), López y Sosa (2008), Diaz Lozano, Haye, Montenegro y Córdoba (2015) y Alpízar Vargas, Fernández Álvarez, Morales Reyes y Quesada (2018).

Matemática II:

Tarea 1: Trabajo con límites y repaso de funciones definidas por partes

- A los fines de promover una enseñanza activa y favorecer logros de aprendizaje significativo se tuvo en cuenta lo siguiente:

Esta tarea se propuso con el fin de que los estudiantes recuperen los conceptos de límite, funciones y continuidad trabajados en MI que son el sostén de los temas que se dan en MII.

Tiene 3 ítems, el primero, es una selección de ejercicios de cálculo de límites con diferentes niveles de dificultad relacionadas con la identificación de indeterminaciones que para poder resolverlas deben utilizar diferentes estrategias algebraicas. Justamente, en la utilización del álgebra es dónde los estudiantes tienen las mayores dificultades y cometen muchos errores.

El segundo, es el análisis de una función definida por tramos, donde se les solicita analizar dominio, imagen, intervalos de positividad, negatividad, crecimiento y decrecimiento, continuidad, si tiene asíntotas, y finalmente graficar.

El tercero consiste en ejercicios donde tienen que aplicar propiedades de los límites. Se les solicita, además, identificar y enunciar la propiedad utilizada.

- A los fines de favorecer la contextualización de la enseñanza, se diseñó la tarea de la siguiente manera:

Como esta tarea tiene por finalidad repasar los contenidos del último tema de MI, que son necesarios para el desarrollo de MII, se la configuró en el marco de la descontextualización, en consonancia con los aportes de Camarena Gallardo, 2017 y Camarena Gallardo, 2021.

- A los fines de incorporar TIC como mediadoras de la enseñanza y los aprendizajes:

Con el fin de corroborar los resultados se propuso a los estudiantes la utilización del *GeoGebra*, orientándolos para el trabajo con el sitio web donde está la sintaxis que es necesario utilizar para resolver límites y obtener la gráfica de una función definida por tramos. Todo ello debía ser realizado por los estudiantes fuera del aula y analizado y discutido críticamente en forma posterior en el aula.

Tarea 2: Derivada: aplicaciones biológicas y físicas

- A los fines de promover una enseñanza activa y favorecer logros de aprendizaje significativo se tuvo en cuenta lo siguiente:

En esta tarea se proponen tres ejercicios, los dos primeros son problemas de aplicación, uno al crecimiento de bacterias y el otro relativo a física, ambos son modificaciones de problemas que se encuentran en el libro Cálculo: Conceptos y Contextos de J. Stewart 3ra edición, que se utiliza como bibliografía básica para el dictado de la asignatura.

El tercero consta de dos ítems, uno que tiene por objetivo obtener una derivada que requiere la utilización de la regla de la cadena, que a los estudiantes les cuesta mucho aplicar, y el otro, es un problema de aplicación geométrica de la derivada que consiste en obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, con la dificultad de que la función está dada en forma implícita.

- A los fines de favorecer la contextualización de la enseñanza, se diseñó la tarea de la siguiente manera:

Con los problemas propuestos se buscó que los estudiantes relacionen los conceptos de Matemática con los de otras asignaturas, en particular con Biología General (de cursado simultáneo), Microbiología y Física como también con situaciones reales. Además, que visualicen cómo, a través del planteo de este tipo de situaciones, se modela matemáticamente el comportamiento del problema en análisis, que planteen y comparen diferentes formas de resolverlo, que organicen y analicen las soluciones, como también que puedan plantearse las posibles causas de error en las soluciones halladas. También, al elegir los problemas, se pensó que los estudiantes se darían cuenta que al modelar se realiza una idealización de la realidad pudiendo la solución hallada no responder al problema en análisis (Bresan, Zolkower y Gallego, 2005, Swan, 2009).

El primer problema es una aplicación biológica, se analiza el crecimiento de bacterias en diferentes situaciones de alimentos y espacio para crecer, luego se utiliza una función exponencial para modelar el crecimiento de las bacterias. En este caso el modelo utiliza una función continua y en la naturaleza, el número de bacterias es un recuento. En el segundo problema, se da la ley del movimiento de una partícula en función del tiempo y se analiza el significado de la derivada primera, velocidad y la derivada segunda, aceleración, en diferentes tiempos.

- A los fines de incorporar TIC como mediadoras de la enseñanza y los aprendizajes:

Los problemas propuestos debían trabajarse con aportes del entorno virtual y con la consulta permanente a los profesores mediante *WhatsApp* y correo electrónico.

Tarea 3: Aplicaciones de la derivada: extremos – optimización

- A los fines de promover una enseñanza activa y favorecer logros de aprendizaje significativo se tuvo en cuenta lo siguiente:

En esta tarea se propusieron dos problemas de optimización que son adaptaciones de problemas del libro Aplicaciones de la derivada (2004), elaborado por los profesores Ana Colo Herrera y Héctor Patritti, docentes de la Facultad de Ingeniería, Montevideo, Uruguay.

Como se mencionó en el análisis de las evaluaciones previas, en la resolución de problemas de optimización los alumnos tienen muchas dificultades, no solo les es difícil comprender los enunciados, sino que, una vez que los comprenden, en general no pueden resolverlos debido a que no logran relacionar los contenidos de Matemática con lo que el problema solicita, como tampoco identifican (una vez obtenida la función a maximizar o minimizar) qué tienen que hacer posteriormente para resolver el problema.

Del análisis de las evaluaciones de cohortes previas, en general, ante un problema de este tipo, conocen el procedimiento, es decir, saben que deben calcular una derivada de una función, igualarla a cero y buscar sus puntos críticos, pero en general, no analizan las condiciones del problema en las que ese valor hallado sea un extremo.

En los problemas de la tarea se solicita maximizar situaciones en las que no es necesario utilizar geometría, al diseñarla, se buscó que analicen, en el primer problema, el número de unidades que se deben transportar para minimizar costos, y se proponen valores. En el segundo problema, se solicita determinar cuántos árboles hay que plantar para lograr que se alcance una producción máxima. En este caso, la solución conduce a una expresión cuadrática, cuyo máximo es un valor que no es posible en el contexto del problema, por lo tanto, se buscó que los estudiantes discutieran acerca de esta situación y seleccionaran la respuesta adecuada para la situación analizada.

Con la resolución de problemas de optimización se estimula el desarrollo del pensamiento matemático al tener que examinar diferentes caminos para obtener una solución de una situación particulares, se induce a hacer representaciones gráficas, a abstraer, a formalizar, a conjeturar y demostrar y a pensar en la existencia de soluciones y si es posible plantearse generalizaciones y para motivar el estudio de teorías matemáticas que resuelven los problemas planteados o los que puedan derivarse a partir de ellos (Malaspina, 2009).

- A los fines de favorecer la contextualización de la enseñanza, se diseñó la tarea de la siguiente manera:

En esta tarea la contextualización tiene un rol fundamental, dado que consta de dos problemas aplicados, uno con el fin de minimizar costos de transporte y el otro con el objetivo de maximizar la producción de frutos de una huerta.

Se buscó mostrar a los estudiantes, a través de las aplicaciones, la importancia del tema, dado que la optimización es una actividad frecuente en la vida cotidiana y en la práctica de sus futuras profesiones.

- A los fines de incorporar TIC como mediadoras de la enseñanza y los aprendizajes:

Los problemas propuestos no solo debían trabajarse con aportes del entorno virtual y con la consulta permanente a los profesores mediante *WhatsApp* y correo electrónico, sino que se buscó para su resolución que los estudiantes utilicen softwares o aplicaciones de celular para graficar y verificar resultados obtenidos.

Tarea 4: Integrales – cálculo de áreas, aplicaciones físicas

- A los fines de promover una enseñanza activa y favorecer logros de aprendizaje significativo se tuvo en cuenta lo siguiente:

Se solicita a los estudiantes que hagan cuatro actividades, la primera es un ejercicio de cálculo de integrales usando las técnicas de integración dadas en clase y en el último inciso, tienen que calcular una integral definida donde en el integrando hay un valor absoluto.

La actividad 2, es un ejercicio simple de cálculo de un área encerrada entre curvas mediante integrales de funciones de una variable, mediante la cual se busca que grafiquen para identificar la región de integración y de esa forma identificar sus extremos.

- A los fines de favorecer la contextualización de la enseñanza, se diseñó la tarea de la siguiente manera:

Las actividades 3 y 4, son problemas de aplicaciones físicas, donde en uno se da la velocidad de una partícula y se solicita hallar el desplazamiento al cabo de un tiempo determinado y el otro, se da la aceleración y se pide hallar la velocidad.

Los problemas de las actividades 3 y 4 son adaptaciones de los propuestos en el libro que se utiliza para las clases: Cálculo, conceptos y contextos (Stewart, 2006), y tienen por objetivo que los estudiantes reconozcan que con integración también se pueden resolver problemas de física, como ya se había visto con el tema derivada.

Un punto importante de estas aplicaciones físicas es que necesitan reconocer en los datos condiciones iniciales que les permitan evaluar la constante de integración y que las unidades deben ser acordes al objetivo del problema.

- A los fines de incorporar TIC como mediadoras de la enseñanza y los aprendizajes:

Se buscó para la resolución de las actividades planteadas que los estudiantes utilicen softwares o aplicaciones de celular para graficar. En el último apartado del ejercicio 1, mediante la visualización de la gráfica de la función los estudiantes podrían deducir que tenían que hacerla por tramos, debido a que el integrando cambia de signo en el intervalo de integración. De igual forma se busca que utilizando el *GeoGebra*, pudieran resolver el ejercicio 2, de cálculo de áreas entre curvas, e incluso, pudieran comprobar el valor del área hallada.

Etapa 3: Implementación de la propuesta de enseñanza

Experiencia año 2017

Primer cuatrimestre: Matemática I

En el cronograma de la asignatura, que se entrega a los estudiantes el primer día de clase, se incorporó la secuencia de tareas. En él es posible observar que las tareas se propusieron como cierre de los temas que se identificaron como conflictivos en lo que respecta a su enseñanza y a su aprendizaje.

En ese año, la asignatura MI, se dictó de forma tradicional, con división de clases, por un lado, las de Teoría (T) y Coloquio (C), donde se incorporaban los temas nuevos y se realizaba resolución de problemas aplicados y por el otro, las clases de Trabajos Prácticos (TP), donde se realizaban ejercicios y problemas correspondientes a los temas dados en la clase de T y de C. La clase de T estuvo a cargo de la Dra. Gisela Mazzieri, la de C, a cargo de la autora de esta investigación y la de TP a cargo del Lic. Javier Cottet. Es importante destacar que en el dictado de todas las clases se utilizó, cuando era posible, el uso de diferentes TIC (*GeoGebra* para PC o para celular), aplicaciones para celular gratuitas para la solución de sistemas de ecuaciones y álgebra de matrices, graficadores, entre otros) y, se instó a los estudiantes que las utilicen. Por plan de estudios, MI es una asignatura de 120 horas, y tiene 8 horas semanales de cursado presencial, 4 de Teoría y Coloquio y 4 de Trabajos Prácticos, a las que se le suman, 2 o más horas semanales de clases de consulta.

Análisis de las respuestas del cuestionario tomado a los alumnos de Matemática I al inicio del cursado (Anexo 6 – pág. 285)

La propuesta se basa en la utilización del entorno virtual y en el uso de TIC. Por estos motivos, el primer día de clase de MI, en el aula, se consultó a todos los alumnos presentes acerca de estos temas mediante una encuesta que se elaboró para tal fin, ver instrumento en Anexo 6.

Ese día asistió a clase un total de 60 alumnos, de los cuales, 57 cursaban por primera vez la asignatura, es decir, eran alumnos ingresantes universitarios.

Según lo relevado el 70% utilizaba los recursos tecnológicos para ocio, el 80% para estudio, con fines comunicacionales el 76,7% y laboralmente es del 1,7%.

También se obtuvo información acerca de la disponibilidad de estos de estos recursos en su lugar de origen y en su lugar de residencia durante el cursado (Tabla 1, Anexo 9 - pág. 317).

En ambos casos, lugar donde vive con su familia (origen) y de residencia durante el cursado, tenían buena disponibilidad de recursos tecnológicos y accesos a internet (conectividad), 93 % y 95% respectivamente.

El 84% poseía Android lo que permitió que descargaran de la playstore, en forma gratuita, el *GeoGebra* y otras aplicaciones matemáticas.

Se los consultó respecto a si utilizaban algún software para PC y en caso afirmativo, cuál era. La mayoría, el 83% (50 alumnos) no utilizaba al inicio del cursado de la asignatura software matemático. El 8% (5 alumnos) mencionó que había utilizado el *GeoGebra*, un 10% (6 alumnos) mencionó otros como *Alphamath*, *Graphmatica*, *Derive*, *Máxima*, *Metric* y *Wolfranalpha*. Hubo 3 alumnos que mencionaron utilizar más de un software (Gráfico 3, Anexo 9 – pág. 217).

Se les consultó si utilizaban algún software para celular, y cuál. El 93% (56 alumnos) respondió que no utilizaban ningún tipo de software, el 3,5% (2 alumnos) que sí (Graphmatica y Photomash) y el resto no respondió.

Resumiendo, la gran mayoría de los estudiantes poseía acceso a los recursos informáticos, por diversos medios, pero manifestaron poca utilización de los mismos con fines educativos. Estos resultados indicaron que era necesario prever, en el seno de las tareas, el dar lineamientos acerca de cómo utilizar algunos recursos tecnológicos con el fin de poder resolverlas (Contini y Cottet, 2018).

Como se mencionó en Metodología, los enunciados se dispusieron en el aula virtual de la asignatura luego de haber desarrollado en las clases de teoría-Coloquio y práctica de cada tema. Aproximadamente quince días después, en el día previsto para la entrega de resoluciones, se realizó en horario de clase, en modalidad taller, la resolución de las actividades propuestas y en ella los estudiantes expusieron sus resoluciones, dudas y se analizaron errores.

La resolución y entrega de las tareas fue de carácter optativo. El beneficio, por decirlo de algún modo, que obtenía el alumno que asumía el compromiso de la realización de las tareas extra áulicas, consistió en una nota de concepto que mejoraba la calificación alcanzada en las evaluaciones parciales previstas por el régimen de enseñanza de la institución.

Resultados obtenidos con la Tarea 1

A esta tarea la resolvieron y entregaron 44 estudiantes de los 79 inicialmente inscriptos en la asignatura.

Durante el lapso de resolución extra clase y en la clase-taller de resolución de la tarea, se observó que las dudas principales se referían a la comprensión de las consignas, aunque la mayoría habían resuelto correctamente los ejercicios y problemas planteados.

Se evidenció, en el taller, que habían trabajado en grupos y estos, a su vez, habían trabajado colaborativamente, porque las resoluciones eran muy similares. Sobre todo, se notó esta situación en el problema 3, cuyo enunciado se transcribe a continuación, porque se podía resolver de varias formas y la mayoría lo hizo igual y además fue el ítem de la tarea sobre el que más consultaron.

Sean A y B dos puntos inaccesibles, pero visibles ambos desde otros puntos accesibles C y D, separados entre sí 73.2m. Si los ángulos AĈD= 80º, BĈD= 43º, BDC= 32º y ADC= 23º, determiná la distancia entre A y B.

Este problema, para su resolución, requiere la realización de un esquema con los datos (cambio de la información a registro gráfico), la identificación en él de los valores angulares y de longitud de los lados conocidos y de la/s incógnita/s. A partir de esto, tomar la decisión de qué cálculos realizar para poder determinar la distancia entre los puntos solicitada, y es justamente en este paso, en el que se pueden tomar diferentes opciones de resolución. En el taller de resolución de la tarea se observó que la mayoría de los estudiantes eligió el mismo camino para resolverlo.

Otro punto importante de mencionar, que se puso de manifiesto en el taller de resolución de la tarea, es que hubo alumnos que se limitaron a cumplir con el requerimiento de entrega no habiendo intentado realizar por ellos mismos la actividad.

Al revisar, en las evaluaciones parciales, los resultados alcanzados por estos estudiantes en el problema de resolución de triángulos oblicuángulos, se observó que se presentaron a rendir 53 de los 79 inscriptos y de ellos, 44 habían entregado la tarea resuelta.

Con el fin de valorar el efecto de haber realizado la tarea, se analizaron las respuestas de las consignas del primer examen parcial de la asignatura y se decidió categorizarlas de la siguiente manera:

- **No responde**: en esta categoría se incluyeron las consignas dejadas en blanco, sin ningún tipo de propuesta de resolución.
- **Incorrecto**: en esta categoría se incluyeron los ejercicios mal planteados o mal resueltos.
- **Parcialmente correcto**: en esta categoría se engloban los que resuelven en forma parcial la consigna, dejando incompleta la resolución o tiene errores de operatoria.
- **Correcto**: en esta categoría se incluyeron las respuestas donde el estudiante alcanzó el total del puntaje otorgado al ejercicio.

En el temario del primer parcial de MI, el tema trigonometría constaba de dos incisos, por un lado, la resolución de una ecuación trigonométrica, y por el otro un problema aplicado con resolución de triángulos oblicuángulos, este último, es el tema trabajado en las tareas extra áulicas.

En el Tabla 2 y Gráfico 4, (Anexo 9, pág. 217-8) se presenta el resumen de los resultados alcanzados en la resolución del problema de trigonometría identificando los alumnos que se presentaron a rendir la evaluación según si habían entregado la tarea (44) o no (9). Es de destacar que el 61,4% (27) de los estudiantes que resolvieron y entregaron la tarea resolvió correctamente este ejercicio en el parcial y que el 13,6% (6) lo hizo en forma incorrecta o no respondió. No se encontró asociación estadísticamente significativa entre el haber realizado las tareas y el tipo de resolución del ejercicio en el parcial (prueba exacta de Fisher, $p=0,2738$).

Resultados obtenidos con la Tarea 2

Al analizar las resoluciones de las tareas y durante la clase taller, se vio que no tenían dificultades en realizar cálculos, pero si las tenían cuando había que justificar un resultado o dar el por qué una consigna era verdadera o falsa. Esto último, las dificultades en la argumentación, es uno de los motivos por los cuales se solicitó que los estudiantes entreguen en formato papel las resoluciones de las tareas. Este tipo de actividad sería lo que Swan (2008) y Burkhardt y Swan (2013) denominan “actividad de evaluación de afirmaciones matemáticas” que a su vez son de elevada demanda cognitiva según Smith y Steim (1998) y Ramos Rodríguez *et al.* (2015) dado que requieren de los estudiantes la realización de conexiones de varios conceptos matemáticos.

Se observó que son capaces de resolver todo tipo de ejercicios que impliquen el uso de algoritmos u operaciones repetitivas, pero fallaban cuando tenían que relacionar los conceptos teóricos con la práctica.

A esta tarea la resolvieron y entregaron 42 estudiantes de los 53 que hicieron el parcial 1, donde se evaluaron los temas trabajados en la misma.

A los efectos de este análisis se clasificaron los ejercicios tomados en cuatro ítems que involucran los temas: Sistemas de ecuaciones lineales, operatoria por un lado y conceptos teóricos por otro. Operaciones con matrices y, el último, operatoria con determinantes, fundamentalmente uso de propiedades.

En la Tabla3 y Gráfico 5 (Anexo 9 – pág. 318-9) se presenta el conteo de las resoluciones de los ejercicios de operatoria con sistemas de ecuaciones lineales del

Parcial 1 agrupados según si resolvieron y entregaron o no la tarea 2. El porcentaje de estudiantes que respondió correctamente la evaluación y que resolvió la tarea fue mayor, que el porcentaje de estudiantes que respondió correctamente el ítem del parcial y no resolvió la tarea, 76,2% y 54,5% respectivamente, los porcentajes se invierten entre los que lo resolvieron en forma parcialmente correcta. No hubo alumnos que no respondieran el ítem en ninguno de los grupos. Si bien, se observa diferencia en los porcentajes, esta no alcanza para que se detecte asociación estadísticamente significativa entre el tipo de resolución del ejercicio en el parcial y el haber entregado la tarea (prueba Fisher exacta, p = 0,248).

El ítem del parcial, correspondiente a sistemas de ecuaciones lineales consistía en relacionar, en función del tipo de solución de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo, lo que ocurre con el sistema de ecuaciones homogéneo asociado. Es un tema que es de difícil comprensión en general para todos los estudiantes, y el haber realizado o no tareas no influyó significativamente (Prueba exacta de Fisher, p=0,915), dado que porcentajes para cada categoría de resolución son muy similares en los dos grupos de alumnos (Tabla 4 y Gráfico 6, Anexo 9 pág. 319-20).

El 95,4% (38) de los estudiantes que entregó la tarea resolvió en forma correcta o parcialmente correcta el ejercicio del Parcial 1 de operaciones con matrices frente al 63,7% (7) de los estudiantes que no hicieron la tarea. Por otra parte, el porcentaje de resoluciones incorrectas o no responde en este último grupo es mayor frente al primero, 36,3% frente a 9,6%. Se encontró que hay asociación estadísticamente significativa entre haber realizado la tarea y el tipo de resolución del ejercicio en el parcial (prueba exacta de Fisher, p=0.063). Podría inferirse que la realización de la tarea tuvo un impacto positivo en el rendimiento de los alumnos en este tema (Tabla 5 y Gráfica 7, Anexo 9 – pág. 320-21).

El ítem de la evaluación Parcial clasificado como “operatoria y propiedades de determinantes”, requiere, para su resolución, que los estudiantes relacionen las operaciones posibles de realizar con determinantes con las propiedades de los mismos. Es un tema en el que la mayoría de los alumnos tiene dificultades para su comprensión, es abstracto y, en general, a pesar de que ellos mencionan que lo estudian, no logran entenderlo. El elevado porcentaje de respuestas incorrectas o no responde en los dos grupos, 38,1% de los que resolvieron la Tarea 2 y 48,4% de los que no lo hicieron, está mostrando lo mencionado (Tabla 6 y Gráfico 8, Anexo 9 – pág. 321-2).

Resultados obtenidos con la Tarea 3: Vectores en R^3. Recta y Plano

Los contenidos relacionados a la Tarea 3 se evaluaron en el segundo parcial de la asignatura. Se presentaron a ese examen 48 alumnos de los cuales 34 habían resuelto y entregado la tarea correspondiente.

Los estudiantes que realizaron esta tarea tuvieron muchas dificultades de comprensión de las consignas dado que no están planteadas explícitamente las actividades a realizar. Por ejemplo, el tema proyecciones de un vector sobre otro en cualquier dirección, fue la actividad que más consultaron y posiblemente, a pesar de haberla resuelto, no la comprendieron, pues su rendimiento en la evaluación parcial, en el ejercicio relativo a este tema particular no fue bueno, el 44,1% de los alumnos que entregaron la tarea, optaron por no responderla (Tabla 7 y Gráfico 9, Anexo 9 – pág. 322-3).

El tema Vectores, requiere de los alumnos un nivel de abstracción elevado y la necesidad de relacionarlo con trigonometría y matrices. Tanto en el período de elaboración extra-clase, como en la clase – taller de resolución, se pusieron de manifiesto las dificultades que tenían para abordarlo. Principalmente entender de qué se trata la descomposición de un vector como suma de dos vectores ortogonales y no darse cuenta que ya hacían algo similar al escribir un vector como suma de componentes paralelas a los ejes coordenados.

Otra dificultad de comprensión que se observó fue con el producto punto y el vectorial entre vectores, relativo a la información que puede extraerse de diferentes situaciones como la ortogonalidad y el paralelismo y la relación que esto tiene con el ángulo que los vectores forman entre ellos como también la posibilidad de determinar si son coplanares o no.

Se puso de manifiesto el hecho de que los alumnos no relacionan los diferentes temas, esto se observó principalmente en la actividad correspondiente a recta y plano, donde, por ejemplo, la ecuación de una recta se obtiene como la intersección de dos planos hallando la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas compatible indeterminado y que, al escribir las infinitas soluciones, es posible ordenar la expresión de manera tal de identificar el punto de paso y el vector dirección de la recta. Algo similar ocurrió en la actividad donde se pidió determinar si tres planos tenían o no un punto en común.

En el ejercicio donde se pidió expresar en forma polar un vector, se visibilizó el hecho de que los estudiantes tienen dificultades con trigonometría, si bien el 32,4% de los estudiantes que hicieron la Tarea 3 lo resolvieron correctamente, el 35,3% de estos no lo respondieron y el 8,8% lo hizo en forma incorrecta (Tabla 8, Gráfico 10, Anexo 9 – pág. 323-4).

En el parcial, se solicitó determinar si dos vectores eran o no coplanares, el 61,8% de los estudiantes que entregaron la Tarea 3 lo resolvió correctamente frente al 14,3% de los que no, situación que se invierte en la resolución parcialmente correcta, donde los porcentajes fueron 26,5 y 57,1 respectivamente (Tabla 9, Gráfico 11, Anexo 9 – pág. 324-5).

En general, el hecho de haber resuelto la Tarea 3, podría decirse que influyó de manera positiva, si bien no se encontró asociación estadísticamente significativa (prueba exacta de Fisher, $p > 0,125$) entre el tipo de resolución de los ejercicios de la evaluación parcial tomados y el haber realizado o no la tarea, dado que los porcentajes de resolución incorrecta fueron menores.

Resultados obtenidos con la Tarea 4: Trabajo con funciones a trozos o por partes

La Tarea 4 fue resuelta y entregada por 27 de los 48 alumnos que se presentaron a rendir el segundo examen parcial de la asignatura. De estos 48, hubo 29 que optaron por hacer la evaluación de promoción, de los cuales 21 habían resuelto y entregado la tarea.

El descenso en la participación de la actividad extra clase se debió a que esta tarea se solicitó al final del cuatrimestre, donde los estudiantes tienen que responder a muchas exigencias de todas las asignaturas que cursan en simultáneo. Si bien lo solicitado era simplemente plasmar lo desarrollado en clase y la propuesta de realizar la tarea consiste en un refuerzo para el estudio y comprensión de los temas dados, muchos adujeron en la clase taller de resolución que no habían logrado administrar su tiempo para hacerla.

En el examen parcial, los contenidos trabajados en la Tarea 4 se evaluaron en dos ejercicios, en uno se solicitaba el análisis de una función racional y en el otro, el estudio de la continuidad de una función definida por tramos, a este último solo lo hacían los estudiantes que optaban por alcanzar la promoción directa de la asignatura.

Del análisis de las respuestas dadas en la evaluación se desprende que el haber realizado la Tarea 4 no influenció en la resolución del ítem correspondiente al análisis de una función racional. Fue mayor el porcentaje de resoluciones correctas o parcialmente correctas en el grupo de estudiantes que no hicieron la tarea que en los que sí la hicieron, 89,5% y 77,8% respectivamente (Tabla 10, Gráfico 12, Anexo 9 – pág. 325-6). La dificultad que se observó en ambos grupos fue la manipulación algebraica de la expresión racional que no les permitió identificar la presencia de un valor de abscisa que anulaba el denominador, lo que implica una restricción para definir el dominio de la función y que, además, en ese punto la función tiene una asíntota vertical. Se observaron errores similares a los encontrados en la revisión de los temarios de examen analizados en este trabajo, lo que estaría reforzando lo acertado de haber elegido esta temática.

Cabe aclarar, que hubo varios estudiantes que, antes de presentarse a rendir el examen parcial y que habían cumplido con la entrega de la tarea, avisaron que habían decidido, unos abandonar la carrera y otros, estudiar para el examen parcial de otra asignatura, y que se presentaban a este examen con el fin de alcanzar la regularidad.

El ejercicio de analizar la continuidad o no de una función definida por tramos, solo lo hacían los que estaban en condiciones de optar por la promoción. Si bien el 80,9% de los estudiantes que hicieron y entregaron la Tarea 4, lo resolvieron en forma correcta o parcialmente correcta en la evaluación, este porcentaje no resultó estadísticamente diferente del 78% (Tabla 11, Gráfico 13, Anexo 9 – pág. 326-7) correspondiente a esta categoría para los alumnos que hicieron la tarea (Prueba de Fisher, p= 0,4109).

Como mencionan Vracken et al. (2006), el concepto de continuidad es de difícil comprensión para los estudiantes y, en virtud de los resultados obtenidos en el análisis de las resoluciones, podría decirse que el haberlo trabajado en la Tarea 4 no fue suficiente para una adquisición significativa de este concepto.

También se vio falta de comprensión de la consigna, se pedía justificar las respuestas, que en la práctica áulica significa mostrar analíticamente el porqué de la respuesta, muchos lo hicieron solo a través de un gráfico. Si bien se hace mucho hincapié en clase sobre la visualización e interpretación de gráficos, por la importancia que esto tiene en carreras de este tipo (Bowen y Roth, 1998; Garza Kanagusico, Zaldívar Rojas y Rodríguez García, 2019), en la consigna estaba explícitamente solicitado justificar. De esta situación es posible inferir que los estudiantes, si bien pueden, mediante la observación de una gráfica, identificar localmente los puntos donde la función deja de ser continua, no consiguen escribirlo en forma analítica, es decir, les resulta mucho más complejo pasar de la gráfica de una función a la expresión algebraica de dicha función, que pasar de la ecuación a la gráfica (Duval, 2006; Garza Kanagusico et al. 2020).

Análisis global del impacto de la propuesta de Tareas extra clase en el primer cuatrimestre de 2017

De la lista oficial extraída del SIU Guaraní, hubo un total de 79 inscriptos a MI, de los cuales, 25 no hay registros de que hayan realizado tareas o evaluaciones, si bien hubo 6 alumnos de estos que al menos asistieron a la primer clase y completaron el relevamiento de recursos informáticos realizado.

De los 54 alumnos restantes, se tiene registrada actividad, todos hicieron el primer parcial y finalmente 48 hicieron el segundo.

Un total de 41 estudiantes alcanzaron la regularidad de la asignatura, de los cuales 23 participaron en forma completa de la propuesta de tareas extra clase, es decir resolvieron y entregaron las 4 tareas, de los 18 restantes solo hubo un alumno que no hizo ninguna y regularizó, los restantes de este grupo resolvieron y entregaron al menos una tarea y todos regularizaron.

De los 23 que hicieron las 4 tareas, un alumno decidió quedar libre y así poder recursar la materia el año siguiente. De los 22 restantes todos alcanzaron la regularidad y de estos, el 50% (11) promocionó en forma directa la asignatura.

De los 27 que no participaron en forma completa de la propuesta, 9 (33,3%) quedaron libres o abandonaron, el resto regularizó, de los cuales 6 (33,3%) promocionaron en forma directa la asignatura.

Resumiendo, de los 54 alumnos que registraron alguna actividad de evaluación, 4 no entregaron tareas, 27 entregaron al menos 1, y 23 entregaron las 4.

Se analizó si la condición final alcanzada en la asignatura está asociada estadísticamente con haber realizado tareas entre los tres grupos identificados y se encontró que esta es altamente significativa (prueba exacta de Fisher, p=0,0064). A su vez, dado el desbalanceo producido por el grupo que no hizo tarea alguna y el resto, se lo eliminó del análisis y se volvió a hacer la prueba estadística, el resultado de este último análisis volvió a dar que la asociación entre la condición final alcanzada en la asignatura y el haber participado en forma completa o no de la propuesta de tareas extra clase es estadísticamente significativa (prueba exacta de Fisher, p=0,0192). Lo que permitiría concluir que el haber participado en forma completa de la propuesta de tareas extra-clase tuvo un efecto positivo mayor que el haber participado parcialmente o no haber participado (Gráfico 14, Anexo 9 – pág. 327).

Segundo cuatrimestre 2017: Matemática II

Al igual que en el primer cuatrimestre, en MII en el cronograma de la asignatura, que se entrega a los estudiantes el primer día de clase, se incorporó la secuencia de tareas, que se presenta en el Anexo 5, cuya realización era de carácter optativo, es decir, la resolvían y entregaban aquellos alumnos que deseaban hacerlo.

En ese año, el dictado de MII se realizó de forma similar al de MI, es decir con división de clases, por un lado, las de T y C, donde se incorporaban los temas nuevos y se realizaba resolución de problemas aplicados y por el otro, las clases de TP, donde se realizaban ejercicios y problemas correspondientes a los temas dados en la clase de T y C. La diferencia que hubo respecto al cuatrimestre anterior es que no participó en esta instancia la Dra. Gisela Mazzieri, el resto del equipo se mantuvo.

Por plan de estudios, MII es una asignatura de 120 horas, con 8 horas semanales de cursado presencial, 4 de T y C y 4 de TP, a las que se le suman, 2 o más horas semanales de clases de consulta que, si bien se propone un horario, su realización depende de la demanda de los alumnos. Además, para cursar MII se requiere tener al menos regularizada la asignatura correlativa inmediata anterior que es MI.

A MII se inscribió un total de 47 alumnos para cursar de los cuales 41 habían cursado MI en el cuatrimestre anterior y los restantes provenían de otros años.

Resultados obtenidos con la Tarea 1

A esta tarea la resolvieron y entregaron 30 estudiantes de los 47 inscriptos en la asignatura. Como ya se mencionó, consistió en un repaso de los temas funciones y límites dados en MI. Durante el lapso de resolución extra clase y en clase-taller se observó que la mayor dificultad que presentaban los alumnos estaba en la operatoria algebraica necesaria para el cálculo de límites propuestos y en la función definida por tramos.

Los ejercicios de cálculo de límites que se eligieron consisten en una serie de ejercicios que tienen un orden de dificultad algebraica creciente en los que debían resolver indeterminaciones del tipo 0/0 o ∞/∞ con herramientas algebraicas, fundamentalmente factorización, factor común y división de polinomios. También tuvieron problemas para poder dar una respuesta cuando, les quedaba una expresión fraccionaria y el numerador tiende a un valor numérico específico y el denominador tiende a cero o a infinito.

Muchos estudiantes no pudieron resolver el ejercicio b) de la tarea: $\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$, donde algunas de las soluciones erróneas obtenidas fueron:

$\lim_{x \to -2^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}\sqrt{x}} = \frac{1}{0\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ o esta otra,

$\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x-2}} = \lim_{x \to 2^+} \frac{2{,}00001}{0{,}00001} = 2|$

Otro ejercicio en el que tuvieron problema para resolver fue el d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x^4-2}}{2x^2-x-2}$. En este, los comentarios fueron: *"no lo hice porque no sabía cómo resolverlo"* en realidad, la mayoría no pudo operar con la raíz del numerador.

El otro ejercicio con límites requería que los estudiantes aplicaran propiedades para resolverlos. Hubo acuerdo entre los estudiantes respecto a que, la mayoría mencionó *"tendría que estudiar propiedades de límites porque para el ejercicio 3 tuve que buscar el libro de Matemática I"*.

Lo más notorio respecto a este tema fue que ningún alumno se planteó que el problema que tuvieron en la resolución de los ejercicios de límite fue, fundamentalmente, no poder operar algebraicamente. Reconocían que había una indeterminación, pero no sabían cómo operar para eliminarla, ni siquiera analizando lo que ocurre con el resultado habiendo dado valores numéricos en las cercanías del punto a donde tiende el límite.

En el ejercicio de la función definida por tramos, los errores cometidos fueron parecidos a los que ya habían cometido en la Tarea 4 de MI, donde se les solicitó algo similar. Muchos no pudieron estudiar la continuidad de la función en los puntos solicitados como tampoco analizar la presencia de asíntotas.

Respecto a estos temas los comentarios realizados por los alumnos fueron: "*Me faltó un poco de práctica, más que nada en el tema funciones y continuidad, pero esto me sirvió para sacarme las dudas", "debo prestar más atención en funciones, las condiciones, los intervalos"*.

En general, los comentarios de los alumnos fueron buenos respecto al haberles propuesto una tarea de repaso. La opinión de la mayoría de los que participaron de la actividad se puede resumir en el comentario de una estudiante: *"Pude realizar los ejercicios recurriendo al libro de Matemática I ya que había cosas que no recordaba. Pero a gran escala pude resolverlo sola. Me ayudó corregirlo en clase para satisfacer algunas dudas".*

Además, ningún alumno le prestó atención a la sugerencia de utilizar software para verificar los resultados de los límites y hacer la gráfica de la función, si bien en el enunciado de la tarea se les había proporcionado la dirección electrónica del sitio donde encontrarían cómo hacerlo. En la clase-taller de resolución se les mostró cómo, usando *GeoGebra*, hubiesen podido resolver algunas cuestiones, principalmente en el análisis de la continuidad de la función y en la presencia de asíntotas.

Resultados obtenidos con la Tarea 2

Esta tarea fue resuelta y entregada por 28 de los 47 estudiantes inscriptos en la asignatura y fueron 37 los que hicieron la primera evaluación parcial en el que se tomó un problema de aplicación física, similar al solicitado en la tarea.

En general, en la clase-taller de resolución de la Tarea 2, lo que manifestaron los estudiantes fue que les costó entender los enunciados de los problemas, especialmente el de crecimiento de las bacterias porque los primeros incisos no tenían números, sino que tenían que conjeturar respecto a qué pasaba si los nutrientes y el espacio para desarrollarse se modificaban. Otra cosa que les costó fue interpretar las unidades y darse cuenta de que a pesar de que la función, a tiempo infinito tiende asintóticamente a cero, es decir, nunca toma ese valor, como la función representa un conteo, cuando muere la última ya no quedan bacterias que contar, es decir, el número de bacterias se hace cero, pero la función que modela su crecimiento no.

En el problema de aplicación física, les costó el tema de las unidades y en particular la interpretación del cambio de signo de la velocidad en diferentes tiempos.

Donde manifestaron tener dificultades e incluso cuando se analizaron las soluciones en la clase-taller fue en el ejercicio de la derivada aplicando regla de la cadena. En el problema de obtener la ecuación de la recta tangente a la curva dada en forma implícita, identificaron la curva era una circunferencia, entonces había dos rectas tangentes con igual pendiente, aunque en el enunciado se solicitaba solo una de las dos posibilidades.

Al analizar las resoluciones del ejercicio de aplicación física que se tomó en la primera evaluación parcial de MII, se observó que el 60 % de los estudiantes que habían entregado la Tarea 2, lo resolvieron correctamente, si bien hubo un 8% que no lo hizo o bien lo respondieron en forma incorrecta (Tabla 12, Gráfico 15, Anexo 9 – pág. 328).

Resultados obtenidos con la Tarea 3

Esta tarea fue resuelta por 25 estudiantes. En la clase taller de resolución se observó que la mayoría no había podido plantearla y que habían consultado con el profesor de TP para que les explicara de qué se trataban los problemas. Una vez que comprendieron los enunciados, pudieron relacionar la obtención de los valores máximos y mínimos solicitados. En el primer problema se dieron cuenta que el primer valor dado no era el que minimizaba teóricamente el costo, pero que las condiciones de operación eran las que condicionaban su respuesta, y que, con el segundo valor, si lograban minimizar el costo de transporte.

En el segundo problema, llegaron al valor que maximizaba la producción, pero no se dieron cuenta que no era un valor posible en el contexto de la situación problema, porque lo que contaban era número de árboles y el máximo se lograba en un valor con decimales. En clase se discutió acerca de que ese máximo se lograba con dos valores debido a la simetría de la función con la que modelaban la producción.

En la evaluación parcial, se tomó un problema en el que tenían que maximizar la superficie de una parcela de terreno con una determinada longitud de cerco y se les dio un esquema de cómo se lo quería cercar. La mayor dificultad que se observó fue que no tenían clara la diferencia entre perímetro y área y cómo relacionarlos con los datos del problema. Esta falta de conocimiento geométrico también fue mencionada por profesores de otras asignaturas cuando se les consultó qué contenidos de Matemática necesitaban para sus clases. Sorteados estos inconvenientes, al analizar las resoluciones de la evaluación parcial, se observó que de los 38 estudiantes que se presentaron, hubo 12, que representa casi el 32% de los evaluados, que no lo resolvieron.

A pesar de lo mencionado, 72,0% de los estudiantes que hicieron y entregaron la Tarea 3 lograron resolver el problema de forma correcta o parcialmente correcta frente a un 53,9% de los que no entregaron tarea (Tabla 13, Gráfico 16, Anexo 9 – pág. 329-9).

Resultados obtenidos con la Tarea 4

Esta tarea fue resuelta y entregada por 19 estudiantes. En la clase de resolución se observó que ninguno había intentado utilizar el *GeoGebra* para resolverla.

Al inciso d) del ejercicio 1 la mayoría lo había resuelto en forma incorrecta, debido a la presencia del valor absoluto en el integrando. No relacionaron lo visto en MI, donde se estudió cómo afecta el valor absoluto a las funciones y cómo es su gráfica. Por esta razón no habían podido identificar el punto, dentro del intervalo de integración, en el que la función cambia de signo en el que debían dividir el intervalo de integración por la no existencia de derivada en el mismo. Si hubiesen graficado habrían podido visualizar la situación e identificar el punto rápidamente.

En la clase – taller se les mostró cómo, al utilizar el software, simplemente con ver la gráfica, habrían podido resolver el ejercicio a través de la visualización del punto singular y, además, si hubiesen indagado algunos comandos, disponibles en internet o consultando al respecto con los docentes, también habrían podido obtener el valor de la integral definida. Es comprensible que los estudiantes se hayan abocado solo a tratar de resolver a mano el ejercicio y cumplir con la entrega de la tarea resuelta porque, esta actividad se pidió casi al final del cuatrimestre donde la demanda de tiempo de todas las asignaturas que están cursando simultáneamente con MII es elevada.

En el cálculo del área encerrada entre curvas cometieron errores en la gráfica y en la obtención de los puntos de intersección de las curvas. En la puesta en común de la resolución de este ejercicio los estudiantes reconocieron que no habían relacionado lo visto de funciones en MI y que tuvieron dificultades algebraicas para hallar los puntos de intersección de las curvas, nuevamente, si hubiesen utilizado el software como complemento en el análisis de la consigna, habrían podido identificarlos y así plantear correctamente el cálculo solicitado.

Pudieron resolver el ejercicio 3, en el que se daba la velocidad y debían obtener la posición y la distancia recorrida al cabo de un tiempo determinado, pero muchos no pudieron resolver el ejercicio 4, donde, dada la expresión de la aceleración tenían que encontrar la velocidad. En este caso, luego de integrar y obtener la función velocidad general, debían evaluar la constante de integración pues se daba una condición inicial que lo permitía y así obtener la velocidad al cabo de un tiempo especificado para las condiciones particulares del problema en análisis. En ambos problemas tuvieron dificultades con las unidades correspondientes.

A la evaluación parcial 2 se presentaron 29 alumnos, 18 de los cuales habían resuelto y entregado la Tarea 4. En ella, se tomaron dos ejercicios de integrales de funciones de una variable. En uno se solicitaba el cálculo de tres integrales, y otro fue el cálculo de un área encerrada entre curvas. En este parcial no se tomaron ejercicios de aplicación física.

Todos los estudiantes que se presentaron resolvieron en forma correcta o parcialmente correcta el ejercicio de cálculo de integrales (Tabla 14, Gráfico 17, Anexo 9 – pág. 329-30). El porcentaje de alumnos que resolvió y entregó la Tarea 4 es superior (27,8%) al de los que no la entregaron (9.1%), si bien esta diferencia no alcanzó para ser estadísticamente significativa (p = 0,3623). Es importante mencionar que lo que se evaluó con estos ejercicios fueron las formas de calcular integrales, donde los errores observados fueron de operatoria algebraica y de inadecuada utilización de reglas de integración en ambos grupos.

En cuanto al problema del cálculo de área encerrada por dos curvas, en el grupo de estudiantes que resolvieron y entregaron la tarea, hubo dos de los 18 que lo hicieron en forma incorrecta. Al analizar las resoluciones, se observó que no identificaron correctamente la región de integración, si bien el porcentaje de los que llegaron al resultado correcto en este grupo es superior (72,2%) que en el que no hizo la tarea (63,6%), (Tabla 15 y Gráfico 18, Anexo 9 – pág. 330-1) esta diferencia no fue estadísticamente significativa (prueba exacta de Fisher, p=0,4608).

En esta instancia del cursado, estaban en condiciones de rendir para la promoción directa de la asignatura un total de 17 estudiantes, que eran los que habían alcanzado una nota superior a 60 puntos sobre 100 en la evaluación parcial 1. De estos, 11 habían resuelto y entregado la Tarea 4 y 9 de esos 11 (81.8%) lograron promocionar, los dos restantes regularizaron. De los 6 que rindieron para promoción y no habían entregado la Tarea, 4 (66.7%) la alcanzaron y los dos restantes lograron regularizar la asignatura.

En esta instancia de evaluación caben varias reflexiones que hacen a las características del cursado de esta asignatura y que tal vez la cuantificación de alumnos regulares, promocionados y libres no alcanza para valorar el impacto de la propuesta de resolución de tareas extra clase. Los resultados alcanzados por los estudiantes que no participaron de la propuesta entregando tareas resueltas, asistieron a las clases-taller de resolución de las tareas, si bien ellos no las resolvieron por sí solos como los que sí la entregaron, participaron del análisis de resoluciones y dificultades, de la aclaración de las dudas y errores frecuentemente cometidos por quienes optaron por resolverla, resultando esto beneficioso para ellos al momento de la evaluación parcial. Por otra parte, la promoción de la asignatura es optativa, hubo alumnos que decidieron no promocionar MII y hacer el parcial de regularidad porque optaron por estudiar otras asignaturas de cursado simultáneo, como también hubo un alumno que entregó todas las tareas y que decidió no presentarse a rendir las evaluaciones quedando libre en la asignatura. A estas consideraciones es necesario tenerlas en cuenta al analizar el rendimiento en el parcial 2 de MII.

Análisis global del impacto de la propuesta de Tareas extra clase en segundo cuatrimestre de 2017

De la lista oficial extraída del SIU Guaraní, hubo un total de 48 estudiantes inscriptos a MII, de 4 no se tiene registro de que hayan realizado actividad alguna, de los 44 restantes, 13 resolvieron y entregaron las cuatro tareas, 10 no participaron de la propuesta y los restantes 25 participaron con la resolución de al menos una de las cuatro tareas.

El 80% de los estudiantes que no participó de la propuesta abandonó o quedó libre, este porcentaje de redujo a la mitad, en los estudiantes que entregaron al menos una tarea y solo 1 (8%) de los 13 que resolvieron y entregaron todas las tareas quedó en esta situación. Cabe aclarar que este último alumno avisó al equipo de cátedra que había decidido abandonar el cursado (Tabla 16 y Gráfico 19, Anexo 9, pág. 331-2).

El 54% (7) de los que hicieron todas las tareas alcanzó la promoción directa de la asignatura y el 40% (10) de los que hicieron al menos una tarea también lo logró. Se encontró que hay asociación altamente significativa (prueba exacta de Fisher, p=0,00576), lo que permitiría inferir que el impacto de la realización de tareas extra áulicas influye positivamente en el rendimiento académico de los estudiantes participantes.

Análisis de las respuestas del cuestionario tomado a los alumnos de Matemática II al finalizar el cursado (Anexo 6)

El último día de clase se solicitó a los alumnos presentes (12) que respondieran, en forma anónima respecto si las actividades para desarrollar fuera de clases le habían resultado útiles; si le había generado algún tipo de conflicto el requerimiento de trabajo fuera del aula; si habían accedido a los sitios web sugeridos en las tareas, si habían utilizado software para resolverlas, cuales, con qué medios y desde dónde habían accedido.

Solo un alumno respondió que la propuesta no le había sido útil si bien accedió a los REA sugeridos en las tareas con celular e incorporó el uso de *GeoGebra* para estudiar.

Al resto de los estudiantes (11 de los 12) les resultó útil la propuesta, si bien 8 dijeron que les había generado algún tipo de conflicto. Ante esta respuesta, se indagó, en forma personal respecto a qué clase de conflicto y los consultados mencionaron que si bien las actividades propuestas les permitieron mejorar lo que habían entendido de los temas que estaban estudiando, el desafío de resolver ejercicios “bien” y entregarlos había requerido de ellos tiempo en el medio del cursado de un cuatrimestre con una carga horaria elevada.

La mayoría utilizó celular (8), PC (8) y 5 de estos, ambos, para acceder a los REA y *GeoGebra*, que lo habían hecho desde el aula cuando estaban en clase o sus casas cuando estaban estudiando.

Análisis del impacto de la propuesta de tareas. Comparación de rendimiento académico Cohorte 2016 (sin tareas) y Cohorte 2017 (con tareas)

Para hacer esta comparación se utilizaron los datos del SIU Guaraní, donde se realizó el conteo de alumnos que regularizaron, promocionaron, abandonaron o quedaron libres en las asignaturas MI y MII, en los años 2016 y 2017, en las dos asignaturas motivo de esta investigación sobre los estudiantes en los cuales, si bien aparecen inscriptos en el sistema, se registró alguna actividad académica.

Se presenta a continuación el resumen de los datos obtenidos, para la cohorte 2016, de todos los estudiantes y para la 2017, según su participaron en la propuesta pedagógica, distinguiendo entre los que participaron en forma completa, resolviendo y entregando todas las tareas, y los que lo hicieron en forma parcial habiendo resuelto y entregado al menos una.

Matemática I

De los 66 estudiantes de la cohorte 2016, el 15% alcanzó la promoción directa de la asignatura y el 67% quedó libre o abandonó el cursado, en cambio, en el año 2017, de los 23 alumnos que se decidieron participar en forma completa de propuesta, resolver y entregar las 4 tareas, el 48% promocionó y solo 1 abandonó o quedó libre. Con respecto a los 27 estudiantes que en 2017 participaron en forma parcial de la propuesta, si bien el porcentaje de promocionados es mayor con respecto a 2016, 33%, es elevado el porcentaje de alumnos que abandonó o quedó libre en la asignatura (Tabla 17 y Gráfico 20, Anexo 9 – pág. 332-3).

Se realizó una prueba de asociación estadística el realizar tareas o no y la condición alcanzada al final del cursado de MI y se encontró que esta asociación es estadísticamente significativa (prueba exacta de Fisher, $p < 0,001$), lo que estaría indicando que la realización de tareas extra clase impacta positivamente en el rendimiento de los estudiantes, aumentando significativamente el porcentaje de promocionados y disminuyendo el de alumnos que abandonan el cursado o quedan libres.

Matemática II

En el segundo cuatrimestre de 2016, se inscribieron y realizaron alguna actividad académica 44 alumnos. En 2017 este número fue de 48, de los cuales 38 participaron total o parcialmente de la propuesta didáctica (Tabla 18 y Gráfico 21, Anexo 9 – pág. 333-4). Con el fin de valorar su efecto en el análisis no se consideran los estudiantes que en 2017 no resolvieron tareas.

El 40% de los que participaron parcialmente de la propuesta, abandonó o quedó libre y el mismo porcentaje regularizó. El 38% de los que hicieron todas las tareas regularizó y solo el 8% abandonó y quedó libre. En el grupo de estudiantes que cursó, de manera tradicional en 2016, el 39% quedó libre o abandonó y el 45% regularizó. El haber participado total o parcialmente de la propuesta prácticamente no produjo diferencias en cuanto al porcentaje de regulares, pero sí influyó en el porcentaje de promocionados.

Si se compara el no haber realizado tareas con participar de la propuesta didáctica en forma completa es notoria la diferencia, ya que en 2016 alcanzó la promoción el 16% de los estudiantes y en 2017 el 54%. También es muy importante la disminución, en este grupo, de los alumnos que quedan libres o abandonan. Se encontró que hay asociación estadística significativa entre el grupo que participó con al menos una tarea y el que no tuvo estas actividades en el cursado y el rendimiento académico, medido en porcentaje de regulares, libres o abandonó y promocionó (prueba exacta de Fisher, p= 0,06063), lo que estaría indicando que la propuesta didáctica influenció positivamente, al menos en cuanto a los porcentajes de promocionados.

Resumiendo, se puede decir que el impacto de la realización de tareas extra clase es positivo, mejora el rendimiento de los estudiantes siendo su efecto mayor en MI que en MII. Esto último puede deberse a que MI es una asignatura de primer año, primer cuatrimestre de las carreras y los alumnos son ingresantes a la universidad. El tener que realizar actividades que tienen el requerimiento de ser presentadas y el hecho de tener que cumplir con ello, los estaría ordenando en el estudio de la asignatura como también el desafío de resolver problemas y ejercicios integradores les estaría permitiendo lograr un mejor aprendizaje. En MII, los estudiantes, luego de la experiencia de haber cursado un cuatrimestre, conocen el funcionamiento y el ritmo de las actividades académicas, aunque el tener que resolver y entregar tareas hace que se ordenen en el estudio y tengan un mayor nivel de compromiso con el cursado de la asignatura, lo que impacta positivamente en su rendimiento académico, en cuanto a lograr la regularidad o la promoción directa de la materia.

Actividades realizadas en el año 2018

Durante este año se realizó el análisis de los resultados obtenidos en la experiencia realizada en 2017. A la luz de los buenos resultados obtenidos se decidió reeditar la experiencia realizada en 2019 con las adecuaciones requeridas a la nueva realidad. En la UNL, se concretó el CAPIC de Matemática, razón por la cual, hubo cambios en los contenidos de las asignaturas para que se adecuaran a un sistema de equivalencias totales entre las diferentes carreras. En este contexto hubo que agregar contenidos en MII.

Todas las actividades extra clase fueron de participación voluntaria, y se mantuvo la propuesta realizada en 2017, la participación en las actividades extras a las obligatorias sumaba nota de concepto para la valoración final de cada estudiante en cuanto a la condición a alcanzar durante el cursado.

En Matemática I, los cambios que se propusieron fueron:

- Teniendo en cuenta las observaciones realizadas en entrevistas no formales con estudiantes de esa cohorte, acerca de la utilidad en sus carreras del tema Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones, se decidió agregar, como Tarea 1, una aplicación de sus carreras en la que se realiza el cálculo de una “carga de fuego”. Es importante aclarar que, si bien el tema elegido es específico de los estudiantes de LHyST, los que estudian LSA tienen en su diseño de carrera una asignatura, Seguridad contra Incendios, en la que deben realizar este tipo de cálculo.
- Por una decisión del Dpto. de Matemática, en las carreras que tienen asignaturas con contenidos similares, se cambió el orden en el que se daban los temas, resultando de esto que la Tarea 1 sobre trigonometría, iba a ser en 2019, la Tarea 3. En esta, se agregó, a los problemas de triángulos oblicuángulos, ejercicios sobre identidades y ecuaciones trigonométricas.
- En la tarea correspondiente a Vectores en R^2 y R^3, recta y plano, se incorporaron ejercicios donde se solicita justificar si algunas afirmaciones relacionadas con propiedades y operaciones vectoriales son verdaderas o falsas.

- No realizar la tarea 4: funciones definidas por tramos, debido a que la carga de actividades extra-clase iba a ser excesiva.
- Implementar una encuesta a través de un formulario de Google, con el fin de recabar la opinión de los alumnos al finalizar el cursado.

Finalmente, la propuesta de tareas para MI que se puso en práctica en 2019 fue la que se detalla a continuación; los enunciados y resoluciones se presentan en el Anexo 5 (páginas 238 a 307).

Tarea 1: Aplicación de Matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes al cálculo de una carga de fuego.

- A los fines de promover una enseñanza activa y favorecer logros de aprendizaje significativo se tuvo en cuenta lo siguiente:

Esta tarea consta de tres partes, en la primera, se explica brevemente en qué consiste el cálculo solicitado, se brindan las definiciones técnicas requeridas y se los vincula con páginas web para que amplíen la información, si fuera necesario.

En la segunda parte se presenta el enunciado de la tarea, con toda la información técnica necesaria para realizar el cálculo. Asimismo, se guía a los estudiantes por medio de preguntas acerca de cómo aplicar el tema matrices y sistemas de ecuaciones en la resolución. Además, como no hay una manera única de resolver la situación planteada, se les van haciendo preguntas y sugiriendo alternativas acerca de las diferentes formas con las que podrían abordar la resolución de la tarea.

En la tercera y última parte se plantea un nuevo cálculo a modo de desafío. Aquí solo se dan los datos del uso del edificio que se quiere proteger, su superficie y los materiales almacenados y los hipervínculos a páginas web donde van a encontrar toda la información necesaria para resolver la tarea. Esta parte podría decirse que es una tarea de tipo investigación

La tarea se diseñó de manera tal que los estudiantes, al momento de resolverla tengan una guía, haciéndoles sugerencias acerca de cómo organizar la información y las posibles operaciones con matrices que podían realizar. Se esperaba que los estudiantes relacionaran los temas de Matemática involucrados con los cálculos solicitados e intentaran proponer alternativas diferentes a las sugeridas.

Inicialmente todos los sectores del depósito de aceite tenían la misma superficie, pero posteriormente se les planteó qué ocurriría si los sectores tenían diferentes dimensiones. Se esperaba que pudieran plantear un sistema de ecuaciones lineales con las relaciones de las superficies de los locales que se indicaban.

En la parte final de la tarea se les solicitó, tal como ocurre en el ejercicio de la profesión, un problema donde los datos fueron las superficies, los tipos y cantidades de materiales combustibles almacenados. Se esperaba que los estudiantes fueran capaces de utilizar el cálculo dado a modo de ejemplo y que utilizaran los hipervínculos de la introducción de la tarea para buscar los datos necesarios para resolver el cálculo solicitado (Contini, Fabro, Gusmão, 2020).

Esta tarea es, en términos de Rodríguez, et al. (2015) de alta demanda cognitiva, pues los estudiantes para resolverla deben realizar procedimientos con conexiones que involucran conceptos matemáticos, con múltiples representaciones y su respuesta no se deduce explícitamente del planteo. Además, se puede enmarcar, al menos la segunda parte, como define Ponte (2005) como una tarea de investigación y de resolución de problemas, pues para dar respuesta a lo solicitado, los estudiantes deben conseguir la información de las densidades y poderes caloríficos de los materiales y tomar decisiones respecto a cuáles utilizar y en qué unidades deben trabajar.

- A los fines de favorecer la contextualización de la enseñanza, se diseñó la tarea de la siguiente manera:

Esta tarea no solo se refiere a un tema de las asignaturas donde se desarrolla el tema protección contra incendios, sino que, posiblemente, sea una actividad profesional frecuente, en especial de los estudiantes de la LHyST. Se la propuso a los estudiantes con el fin de que puedan relacionar los temas del álgebra lineal que a ellos les resulta tan árida con temas específicos de sus carreras.

- A los fines de incorporar TIC como mediadoras de la enseñanza y los aprendizajes:

Con esta tarea se buscó que los estudiantes busquen y utilicen páginas web con información relacionada con sus carreras, en la búsqueda de los datos necesarios para resolverla. En la primera parte de la tarea, se dispusieron hipervínculos a páginas web específicas, donde pueden encontrar información que amplíe las definiciones dadas y en la segunda parte, deben ellos encontrar la información necesaria para su resolución.

Tarea 2: Matrices, determinantes y sistema de ecuaciones, la misma de 2017.

Tarea 3: Trigonometría.

- A los fines de promover una enseñanza activa y favorecer logros de aprendizaje significativo se tuvo en cuenta lo siguiente:

A la secuencia de ejercicios y problemas de la experiencia realizada en 2017 se le agregaron ejercicios sobre identidades y ecuaciones trigonométricas. Esta decisión surgió a partir del análisis de los resultados que si bien, los alumnos que habían resuelto y entregado tareas tuvieron mejor desempeño que los que no, los resultados en las evaluaciones parciales sobre este tema no fueron buenos. Se conjugan dificultades algebraicas con las propias del tema, uno de los principales obstáculos a vencer, en las ecuaciones trigonométricas, es la identificación de las soluciones de acuerdo al intervalo donde está definida la expresión. Otro tema en el que tienen mucha dificultad los estudiantes es el poder discernir entre el resultado angular que obtienen en la calculadora y el que realmente corresponde a la ecuación que están tratando de resolver.

Con respecto a los criterios, favorecer la contextualización de la enseñanza y el de incorporar TIC como mediadoras de la enseñanza y los aprendizajes, en la elaboración de esta actividad se tuvieron en cuenta los mismos criterios que los mismos que los considerados en el diseño de la Tarea 1, propuesta en el año 2017.

Tarea 4: Vectores en R^2 y R^3, recta y plano.

- A los fines de promover una enseñanza activa y favorecer logros de aprendizaje significativo se tuvo en cuenta lo siguiente:

Se incorporaron ejercicios de justificar por qué una afirmación es verdadera o falsa porque se observó que los estudiantes no tenían claros los fundamentos teóricos relacionados con la identificación de las propiedades del producto escalar o punto entre vectores y producto cruz o vectorial, además de la necesidad de que los estudiantes aprendan a fundamentar sus respuestas.

En particular, que sepan, en el caso del producto escalar, que da por resultado un número, cuyo valor da información acerca de si los vectores intervinientes son ortogonales, o forman entre sí un ángulo menor o mayor a $\pi/2$. En el caso del producto cruz, que el resultado es un vector ortogonal a cada uno de los vectores, y la relación que tiene este vector con la condición de paralelismo o la interpretación geométrica de la magnitud del vector resultado.

Con respecto a favorecer la contextualización de la enseñanza y el de incorporar TIC como mediadoras de la enseñanza y los aprendizajes, en el diseño de esta tarea se consideraron los mismos criterios que los mencionados en la Tarea 3, propuesta en el año 2017.

En Matemática II:

Se reestructuraron todas las tareas propuestas en 2017. Como se mencionó, debido al CAPIC UNL de Matemática, hubo cambios en los contenidos de la asignatura, por esta razón, se reacomodaron los temas de las tareas de 2017 en tres y se agregó una tarea 4 con los nuevos contenidos. La nueva secuencia quedó como se muestra a continuación y los enunciados y resoluciones se encuentran desarrollados en el Anexo 5.

Tarea 1: Repaso de Matemática I:

- A los fines de promover una enseñanza activa y favorecer logros de aprendizaje significativo se tuvo en cuenta lo siguiente:

A la secuencia de ejercicios de cálculo de límites y de análisis de una función definida por tramos, solicitada en 2017, se le agregó un problema de aplicación física, extraído de Cálculo de -una variable. Conceptos y contextos, 4ta edición (Stewart, 2010), relacionado con la teoría de la relatividad y el comportamiento de la masa de una partícula cuando la velocidad de la misma se acerca a la velocidad de la luz. Se le dieron enlaces para que, pudieran leer del tema en caso de querer ampliar conocimientos o para entender mejor de qué se trataba el problema.

- A los fines de favorecer la contextualización de la enseñanza, se diseñó la tarea de la siguiente manera:

Con la incorporación del problema de aplicación se buscó que los estudiantes relacionen el cálculo de límites con temas que se desarrollan en la asignatura Física y que un buen manejo de los conceptos matemáticos involucrados en su cálculo les permite obtener rápidamente soluciones concretas.

- A los fines de incorporar TIC como mediadoras de la enseñanza y los aprendizajes:

En esta tarea se propuso la búsqueda de más información, en los enlaces a páginas web propuestos, sobre el tema de física involucrados. Además, se pretendió que utilizando el *GeoGebra* o cualquier otro software que permita graficar, visualizar el problema para diferentes valores de la velocidad de la luz, a qué tiende la función del argumento del límite planteado.

Tarea 2: Aplicaciones de la derivada.

- A los fines de promover una enseñanza activa y favorecer logros de aprendizaje significativo se tuvo en cuenta lo siguiente;

Se unificaron las Tarea 2 y 3 de la experiencia de 2017, quedando un total de 5 problemas: los tres primeros relativos a la interpretación de la derivada como razón de cambio aplicado a: crecimiento de bacterias, desplazamiento de una partícula y a la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto, con el agregado de que estaba dada en forma implícita. Los últimos dos, son los problemas de optimización que tenía la tarea 3 de 2017.

Con respecto a los criterios, favorecer la contextualización de la enseñanza y el de incorporar TIC como mediadoras de la enseñanza y los aprendizajes, se consideraron los mismos que los mencionados en el diseño de la Tarea 1, propuesta en el año 2017

Tarea 3: Integrales de funciones de una variable.

Es igual la tarea 4 de la experiencia del año 2017.

Tarea 4: Integrales dobles, coordenadas rectangulares y polares, ecuaciones diferenciales.

- A los fines de promover una enseñanza activa y favorecer logros de aprendizaje significativo se tuvo en cuenta lo siguiente

En esta tarea se propusieron 3 ejercicios de integrales dobles, en los que se solicitó, en todos los casos, que identifiquen la región de integración porque, a pesar de estar terminando de cursar MII, los estudiantes tienen problemas con las diferentes formas de representación y la visualización.

En el ejercicio 1) se relaciona el cálculo de áreas de la región encerrada por la gráfica de dos curvas. Tiene como objetivo que los estudiantes se den cuenta que este cálculo lo pueden hacer tanto con una integral doble o con una integral simple dado que con ambas metodologías obtienen el mismo resultado.

En el ejercicio 2) se solicita que se cambie el orden de integración, tema en el que los estudiantes tienen muchas dificultades, y que reflexionen si deberían obtener el mismo resultado al realizar los cálculos.

En el ejercicio 3) se propone el cálculo de integrales en coordenadas polares y que se identifique y grafique la región de integración, con la intención de que los estudiantes se den cuenta de por qué se propone la solución del ejercicio en este tipo de coordenadas.

Si bien, las actividades propuestas se podrían clasificar como ejercicios, no con la idea de que estos sirven para adquirir, a través de la práctica repetitiva algún concepto (Ponte, 2005; Sepúlveda 2008), sino que están planteados de manera tal que para resolverlos los estudiantes deben relacionar los temas integrales en una variable con integrales en dos variables, como también con representaciones gráficas, además de la necesidad de realizar procedimientos algebraicos con el fin de operar con mayor simpleza con las expresiones que le quedan, por lo tanto tienen una alta demanda cognitiva (Rodríguez, et al., 2015).

La última actividad de esta tarea consiste en un problema de aplicación de una ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden para la determinación de la edad de un fósil. Este tipo de problema es un problema de aplicación clásico que, con variantes se encuentra en, por ejemplo, Stewart (2010). En la tarea se presenta en qué consiste la técnica y se pide calcular la edad de un hueso fosilizado. El método de resolución de la ecuación diferencial es muy sencillo y para la obtención del valor solicitado deben aplicar, finalmente logaritmo. Se esperaba con este problema motivar a los estudiantes en el tema, además de reforzar los aprendizajes.

- A los fines de favorecer la contextualización de la enseñanza, se diseñó la tarea de la siguiente manera:

La utilización de integrales dobles para el cálculo de áreas, por ejemplo, es una metodología utilizada en asignaturas como Resistencia de Materiales, por ejemplo, donde, muchas veces se las utiliza cuando deben calcular áreas de secciones transversales de estructuras de formas no tabuladas para obtener momentos de inercia o módulos resistentes para su dimensionamiento.

Con la incorporación de un problema aplicado de ecuaciones diferenciales se buscó que los estudiantes perciban la utilidad de este tema y se trató de minimizar las falencias observadas por Dillius (2009): la algebrización y falta de contextualización de enseñanza de este tema.

- A los fines de incorporar TIC como mediadoras de la enseñanza y los aprendizajes:

Se buscó para la resolución de las actividades planteadas que los estudiantes utilicen softwares o aplicaciones de celular fundamentalmente para graficar las regiones de integración, como también que al utilizar el *GeoGebra*, pudieran resolver los ejercicios de cálculo de áreas entre curvas y comprueben el valor del área hallada con el que les da el software.

Además de las cuatro tareas extra clase mencionadas, en esta experiencia, se implementaron dos tareas interactivas a través del aula virtual, plataforma Moodle, de tipo cuestionario con autocorrección, previas a cada evaluación parcial y con los mismos temas que se iban a tomar en dichas evaluaciones, tanto en MI como en MII.

Experiencia año 2019

Primer cuatrimestre: Matemática I

Como se mencionó al explicar la experiencia de 2017, la asignatura MI, según plan de estudios tiene una carga de 120 horas, y se dan 8 horas semanales presenciales. Ese año el equipo docente estuvo formado por la autora de esta investigación como responsable de la asignatura y por el Lic. Javier Cottet. Como equipo docente se decidió dar clases sin la división tradicional de conceptos teóricos por un lado y resolución de ejercicios y problemas por el otro, sino que todas las clases se dieron en forma de coloquio teórico-prácticos

Al primer día de clase de MI asistieron 52 estudiantes, como la propuesta didáctica se apoya en el uso de TIC se realizó el relevamiento de la posibilidad de acceso a internet y con qué medio a todos los presentes de ese día y el 100% respondió que tenía acceso y que lo hacían por medio de PC o con telefonía celular.

Resultados obtenidos con la Tarea 1

El análisis de esta tarea, que tiene características particulares, no solo fue la primera que se solicitó, sino que es una aplicación de los temas de Matemática a un cálculo que van a desarrollar en asignaturas del ciclo profesional de la carrera y que requiere, para ser entendida que los estudiantes se involucren en el tema.

Durante el lapso de resolución, desde el momento en que se dispuso el enunciado hasta la clase taller, realizaron numerosas consultas, tanto de manera presencial como por vía electrónica, la pregunta más frecuente que hicieron los estudiantes fue *¿qué tenemos que hacer?* de lo que se puede inferir que no leyeron en forma detallada o no interpretaron las consignas. Otra situación que llamó la atención es que al activar los enlaces a las páginas web donde está la información técnica, manifestaron tener dificultades para encontrar los datos porque, según las palabras de los estudiantes, *"¡tienen mucho texto!"*, esta situación refuerza la opinión acerca de los problemas que tienen los alumnos ingresantes para la comprensión de textos.

Otra consulta que hicieron reiteradamente fue si era necesario probar todas las alternativas de resolución o si alcanzaba con resolver la tarea con la propuesta que estaba escrita. Esto estaría indicando que los estudiantes no tenían tiempo suficiente para hacer esto o bien no les interesaba o no habían estudiado el tema como para darse cuenta de la equivalencia de las diferentes operaciones entre matrices que los conducían a obtener los mismos resultados.

Otra situación que se dio en las consultas presenciales fue que algunos estudiantes esperaban que en esos encuentros les resolviéramos la tarea, otros asistían para ver qué preguntaban sus compañeros que estaban tratando de cumplir con la actividad y luego ellos hacer su tarea.

Durante este período se observó que los estudiantes no tuvieron dificultades con la utilización de las TIC dado que pudieron ingresar al entorno virtual, para trabajar en el mismo para la búsqueda de datos, al tiempo que lograron una comunicación fluida docente-alumno y alumno-alumno mediante correo electrónico y mensajería instantánea (*WhatsApp*). Por otra parte, como docente a cargo formaba parte de los grupos de *WhatsApp*, por tal motivo, pude observar cómo los estudiantes que estudiaban y resolvían la tarea compartían, mediante fotografías, sus resoluciones, al resto de los compañeros, siendo este punto un obstáculo para el aprendizaje genuino de los estudiantes.

Durante el desarrollo del taller, fue posible observar que un gran porcentaje de los estudiantes se había limitado a seguir las consignas propuestas que los llevaban a una solución rápida de la tarea sin realizar las relaciones entre los diferentes conceptos y opciones de resolución que se esperaba. Esto último se corroboró también luego de la corrección de los escritos.

La mayoría de los estudiantes tuvo dificultades de comprensión del enunciado de la tarea lo que implicó no poder plantear el sistema de ecuaciones. Esto se observó en las reiteradas consultas que hicieron acerca de este punto y durante el taller manifestaron que una vez que pudieron plantear las ecuaciones que relacionaban las superficies de los sectores tenían que realizar los mismos cálculos que en el caso anterior con todos los sectores con igual superficie.

También mostraron falta de tiempo de estudio y dedicación, a pesar de que manifestaron que la propuesta estaba buena y que al final era fácil. Otros, durante el taller expresaron que creyeron que podían hacerla en poco tiempo y que, cuando se habían puesto realmente a hacerla, se dieron cuenta que necesitaban más tiempo, fundamentalmente de estudio/repaso de los temas dados en clase. Esto último es comprensible, porque se trata de alumnos ingresantes a la universidad que aún no se han adaptado a las exigencias y al ritmo del cursado.

Entregaron la tarea resuelta 38 estudiantes, al analizar las respuestas se encontró que más del 50% de los estudiantes no respondió todas las preguntas que se presentan a lo largo de la tarea. Estas tienen que ver con los conceptos teóricos del tema. Otra de las dificultades observadas fue que muchos no pudieron interpretar los resultados de la tarea propuesta en el contexto del problema. Además, no pudieron encontrar la información requerida para hacer los cálculos a lo que se le adicionó el problema de conversión de las unidades de medida en que se encontraba publicada la información.

Al momento de realizar el taller de puesta a punto de las resoluciones, se les solicitó a los estudiantes que den su opinión acerca de la tarea solicitada y en torno a qué había sido lo que les había costado más al momento de realizarla. El 79% de los estudiantes respondió a esta consigna, en general, mencionaron que les había parecido buena la propuesta, que si leían atentamente el material era fácil de resolver y que lo que más les había costado era lo de las unidades de la situación problema abierta planteada. A continuación, se transcriben algunas de las respuestas.

...Lo que más me costó fue la comprensión de las actividades para luego llevarlas a cabo, me faltó tener más conocimientos sobre la teoría. Me costó el último ejercicio al momento de conseguir las densidades y poderes caloríficos. Me pareció muy completo, unificando varios temas dados...

...Me resultó difícil darme cuenta de lo que tenía que hacer (comprender la consigna), pero lo terminé entendiendo…

...Plantear el problema fue lo difícil, me falta teoría. Con respecto a la tarea me parece que está buena, ya que te da un ejemplo al principio, tenés que ir completando. Luego te da un ejercicio parecido, pero debés plantearlo vos...

...El trabajo me sirvió para repasar todo lo dado en clases sobre matrices y seguir practicando para el parcial. También me va a ayudar para hacer trabajos en los cursos superiores...

Resumiendo, la propuesta generó interés en los estudiantes, podría decirse que les gustó realizar una tarea relacionada con una asignatura de la carrera, no tuvieron inconvenientes con el uso de las TIC, aunque con respecto a los aprendizajes de los conceptos matemáticos, se observaron numerosas dificultades y en algunos casos problemas más complejos como por ejemplo inconvenientes para la comprensión de las consignas (Contini, Fabro, Gusmão, 2020).

Resultados obtenidos con la Tarea 2

Esta tarea fue resuelta y entregada por 38 estudiantes. Como se mencionó en el diseño de la propuesta de trabajo para este año, es igual a la implementada en el año 2017. Se observaron las mismas dificultades que en ese año, los estudiantes no tuvieron problemas con la resolución de ejercicios que implican el uso de algoritmos, pero sí cuando tenían que justificar el por qué algunos resultados para los cuales era necesario recurrir a la teoría.

Se les solicitó, al igual que en la Tarea 1, que indicaran qué había sido lo que más les había costado para realizar esta actividad y, de los que respondieron a esta consigna, la mayoría adujo que no habían podido resolver los ejercicios o que les había costado mucho porque les faltaba teoría.

De los 38 estudiantes que resolvieron y entregaron resuelta esta tarea, 34 se presentaron a rendir la primera evaluación parcial de MI. En esta, se solicitaron dos ejercicios que involucran los contenidos trabajados en la Tarea; uno de ellos relacionado con operaciones matriciales y sistemas de ecuaciones lineales, en el otro se solicitaba calcular valores de determinantes indicando la propiedad utilizada para ello.

Al analizar las resoluciones del ejercicio de matrices, se observó que no hubo respuestas incorrectas o no respondidas. Todos los estudiantes que no resolvieron o entregaron la tarea (5) respondieron a este ejercicio en forma parcialmente correcta y, de los que sí hicieron la tarea, el 29,4% lo resolvieron correctamente (Tabla 19, Anexo 9 – pág. 334).

El otro ejercicio, requiere para su resolución, saber las propiedades de los determinantes. El número de alumnos que no lo resolvió, en ambos grupos es elevado 16 de los 34 que hicieron la Tarea 2 y 3 de los 5 que no, si bien, es de resaltar que casi el 50% de los estudiantes que resolvieron y entregaron la tarea lo resolvieron en forma correcta (10) o parcialmente correcta (5), pudiendo inferirse que el hecho de haberla resuelto tuvo, en este ejercicio un impacto positivo (Tabla 20, Anexo 9 – pág. 334). Aquí se pone en evidencia lo que muchos estudiantes mencionaron en la clase-taller de resolución respecto a la falta de estudio o comprensión de la teoría asociada a este tema.

Resultados obtenidos con la Tarea 3

Como se mencionó, una parte de la Tarea 3: Trigonometría de este año corresponde a lo que fue la Tarea 1 en 2017 a la que se le incorporaron ejercicios sobre ecuaciones e identidades trigonométricas debido a los resultados observados en las evaluaciones de ese año en cuanto a estos últimos temas.

A esta tarea la resolvieron y entregaron 27 alumnos de los 39 que hicieron la primera evaluación parcial en donde hubo ejercicios y problemas de trigonometría.

Durante el período de resolución de esta Tarea, fueron numerosas las consultas respecto a los enunciados de los problemas, especialmente el tercero, donde debían a partir del enunciado elaborar un croquis de la situación. Se observó que no les era posible realizarlo, no sabían cómo. Esta dificultad está asociada al cambio de registro del mismo objeto, poder pasar del enunciado del problema en forma coloquial al gráfico y al simbólico, con el fin de utilizar recursos algebraicos y aplicar los teoremas correspondientes para resolver el problema requiere de una gran comprensión del tema. En palabras de Duval (2016), p 89.

> "(…) "La comprensión matemática comienza cuando comienza la coordinación de registros. El reconocimiento de los mismos objetos matemáticos a través de representaciones provenientes de dos registros diferentes no es una operación local u ocasional, sino el resultado de una coordinación global de registro. Los procesos de pensamiento matemático dependen de una sinergia cognitiva de registros de representación. La coordinación de registros de representación semiótica proporciona algo así como una extensión de la capacidad mental" (…)".

En la clase taller de resolución, fue notorio, que muchos de los estudiantes que habían cumplido con la entrega no habían resuelto por sí mismos la tarea, por el tipo de preguntas que hicieron durante la clase.

Un elevado número de estudiantes reconoció que a medida que iban resolviendo los diferentes ítems los iban compartiendo en el grupo de *WhatsApp*, situación que llevó a que los que recibían las resoluciones y aun no se habían puesto a resolver la tarea, se limitaran a copiarlas sin razonarlas. Esto se puso en evidencia, no solo en la clase taller y al analizar las producciones escritas de los estudiantes sino también en la evaluación parcial, donde hubo un elevado número de ejercicios incorrectos o no respondidos.

Del análisis de las respuestas dadas en la evaluación Parcial I, surge que el haber resuelto y entregado la tarea no tuvo impacto en la resolución del ejercicio de identidades trigonométricas. Se observó que los estudiantes que resolvieron en forma incorrecta este ejercicio (5 de 27 que entregaron la tarea y 3 de 12 que no lo hicieron), el error que con mayor frecuencia cometieron fue plantear inadecuadamente la igualdad necesaria para resolverla y que habiendo realizado esto, tampoco pudieron operar algebraicamente con las expresiones que surgieron a partir de las sustituciones realizadas (Tabla 21 y Gráfico 22, Anexo 9 – pág. 335). El elevado porcentaje de resoluciones incorrectas y no respondidas, corrobora lo observado en la clase taller acerca de que muchos de los estudiantes que entregaron la tarea resuelta se habían limitado a copiar las soluciones de los compañeros que sí las habían hecho. Esto último sería un indicador de que los estudiantes no entendieron completamente el propósito de la propuesta de tareas extra clase y se preocuparon más por cumplir un requisito, la entrega, que tomar conciencia acerca de los temas de la asignatura en los que tienen dificultades o no comprenden y que deben reforzar y estudiar más.

Con respecto a la ecuación trigonométrica, se encontró que ningún alumno de los que no entregaron la tarea la resolvieron correctamente. El 40,7% de respuestas correctas corresponde a los estudiantes que sí entregaron la tarea. Solo el 7.4% de los alumnos de este segundo grupo resolvió incorrectamente este ejercicio frente al 25% de los que no. Esto indicaría que haber realizado la tarea tuvo un efecto positivo en este caso (Tabla 22 y Gráfico 23, Anexo 9 – pág. 335-6).

Al comparar los resultados obtenidos en las resoluciones de este tipo de ejercicios en el primer parcial de MI de esta cohorte, 2019, para la que la tarea de trigonometría incluyó ejercicios de ecuaciones trigonométricas con respecto a la 2017, donde la tarea no los incluyó, se observó que, ningún alumno en 2017 respondió correctamente este tipo de ejercicio frente al 40,7% de respuestas correctas de la Cohorte 2019 (Gráfico 24, Anexo 9 – pág. 336). Otra diferencia a remarcar es que en 2017 el 50% de los estudiantes optó por no resolver la ecuación, mientras que en 2019 solo el 18,5% no la resolvió. Si bien, el porcentaje de incorrectos en ambos grupos es importante, en 2019 fue menor. Estos resultados indican, que el impacto de la resolución en la tarea de ecuaciones trigonométricas es positivo. Se analizó si el resultado de resolución está relacionado al hecho de que la tarea incluya o no ejercicios de este tipo y se encontró que hay asociación altamente significativa ($p<0,0001$).

Respecto al problema de triángulos oblicuángulos, los porcentajes de resolución correcta y parcialmente correcta en el grupo de alumnos que entregaron tareas es mayor que en el grupo de los que no lo hicieron (29,6% y 25,0% respectivamente) y, que esto se invierte respecto a las resoluciones incorrectas (37,0% y 33,3%). El 50% de los estudiantes que no entregaron tareas no resolvió el problema (Tabla 23 y Gráfico 25, Anexo 9 – pág. 337), si bien no hay evidencias de que asociación estadísticamente significativa entre el tipo de resolución lograda en el problema y el haber o no resuelto y entregado tareas ($p=0.9255$).

Resultados obtenidos con la Tarea 4

Esta tarea fue resuelta y entregada por 17 estudiantes y se repitió la misma tarea que se dio en 2017.

En esta oportunidad, los temas trabajados se evaluaron en dos partes, vectores en R^2, en la evaluación parcial 1 y vectores en R^3, recta y plano en la evaluación parcial 2 de MI.

Durante el período de resolución extra clase de la tarea, las consultas para su resolución fueron numerosas y recurrentes respecto al tema proyecciones como también en los ejercicios de recta y plano, pues están planteados de manera tal que los estudiantes, para resolverlos, tienen que relacionar los contenidos de sistemas de ecuaciones con las expresiones algebraicas correspondientes a las ecuaciones de la recta y del plano, e interpretar en el contexto geométrico y el algebraico que significan los resultados obtenidos. Para la recta, geométricamente, tenían que pensar que se genera como la intersección de dos planos, y algebraicamente, tenían que asociar el hallar la ecuación como la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales en tres variables compatible indeterminado.

Si bien hicieron muchas las consultas sobre estos temas, en la clase taller de resolución se observó que el tema les costaba mucho, que no habían logrado comprenderlo en forma integral dado que muchos estudiantes, completaron la resolución de la tarea en la clase y luego la entregaron. Nuevamente se observaron dificultades en la comprensión de los diferentes registros semióticos de un mismo objeto matemático (Duval, 2016).

Durante el desarrollo del taller se les solicitó a los presentes que escribieran en la hoja que iban a entregar qué les había costado entender y que dieran su opinión sobre la tarea. No muchos lo hicieron, a continuación, se transcriben algunos:

… "En el ejercicio 3b) como no tenía dos vectores no podía hacer el producto cruz para saber si eran ortogonales, entonces planteé la simétrica con datos de ambas rectas, los puntos de L y los vectores de r, de ahí multipliqué x e y y me dieron los valores ortogonales y lo mismo con y y z. Porque no hice el inciso a).

Me costó mucho hacer la tarea porque había conceptos que nos los sé aplicar, sé la teoría pero no pude relacionar, al ejercicio 2 no lo había entendido y en el 3 no había identificado el vector de L"…

… "Al ejercicio 3 no lo hice porque me costó darme cuenta cómo hallar la ecuación de la recta L de dos formas diferentes"...

… "¡El vector unitario me da la dirección!"…

… "Si dice descomponer un vector en dos direcciones ortogonales tengo que pensar en proyección"…

… "Profe, los últimos dos ejercicios (3 y 4) fueron los que más me ha costado pensarlos y resolverlos. No supe cómo pensarlos junto a las herramientas dadas en clase. Con respecto al resto del TP, me costó, pero logré entender y recordar conceptos vistos en clase, y no me fue tan dificultoso. Si bien tuve errores, puede reconocerlos a la perfección"…

En la evaluación parcial 1, se tomó un ejercicio de vectores en R^2 cuyos incisos referían a los temas ortogonalidad, ángulo entre vectores, vector unitario y proyecciones. Del análisis de las respuestas es posible inferir que el impacto de la Tarea 4 en los estudiantes fue positivo en cuanto a que el porcentaje de resoluciones incorrectas o no resueltas fue menor en los estudiantes que la entregaron (11,8% y 22,7% respectivamente), como también en la totalmente correctas (11,8% y 13,6%). Si fue mayor el porcentaje de resoluciones parcialmente correctas, (58,8% y 40,9%) (Tabla 24 y Gráfico 26, Anexo 9 – pág. 337-8). No se encontró asociación estadísticamente significativa entre el haber resuelto y entregado la tarea 4 y el tipo de resolución realizada en la evaluación (p=0.7512)

Como se mencionó, vectores en R^3, recta y plano se evaluaron en el segundo parcial de MI, a esta instancia de examen se presentaron 31 estudiantes, de los cuales 18 habían resuelto y entregado la tarea.

El haber realizado la Tarea 4 tuvo un efecto positivo al momento de realizar el ejercicio de vectores en R^3 en la evaluación parcial 2, pues el 83,4% de los estudiantes que la hicieron resolvieron este ejercicio de forma correcta o parcialmente correcta, frente a un 46,2 % de los que no la hicieron. Se observó también que los porcentajes se invierten en cuanto a resolución incorrecta o no resuelto, porque el 46,2% de los que no hicieron la tarea resolvieron en forma incorrecta el problema frente al 5,6% de los que sí hicieron tareas y en el caso de "no respondieron" los porcentajes son 7,7% y 11,1% respectivamente (Tabla 25 y Gráfico 27, Anexo 9 – pág. 338-9). Se investigó si había asociación entre el realizar la tarea y la forma de resolver el ejercicio en la evaluación y se encontró que es estadísticamente significativa (p=0,0292), lo que estaría corroborando que haber resuelto y entregado la tarea influye, en este caso positivamente, en la resolución de este ejercicio.

Al analizar los resultados de la evaluación respecto al tema recta en R^3 y plano, se puso en evidencia todo lo observado en la clase taller de resolución pues, si bien, los porcentajes de resolución correcta y parcialmente correcta, en el grupo que hizo la Tarea 4 son mayores (55,6% versus 15,4%) y a la vez son menores los porcentajes de resolución incorrecta o no resueltos (44,4 respecto a 84,6%), estos últimos son elevados en los dos grupos (Tabla 26 y Gráfico 28, Anexo 9, pág. 339-40). Estas diferencias observadas no alcanzaron para ser estadísticamente significativa entre ellos (p=0,0992), concluyendo que para este tipo de ejercicio el impacto de la tarea no es tan efectivo con en el ejercicio anterior.

Análisis global del impacto de la propuesta de Tareas extra clase en primer cuatrimestre de 2019

De la lista oficial extraída del SIU Guaraní, hubo un total de 49 inscriptos a MI, de 5 no se tuvo evidencia de que hayan realizado tareas o evaluaciones. De los 44 alumnos restantes, se tiene registrada actividad, 39 hicieron el primer parcial y finalmente 31 hicieron el segundo.

De los 44 estudiantes que sí realizaron alguna actividad, 17 alcanzaron la regularidad de la asignatura, 6 promocionaron y 21 quedaron libres o abandonaron el cursado. Un total de 10 estudiantes participaron en forma completa de la propuesta y de ellos, 5 promocionaron, 4 regularizaron y 1 quedó libre. De los 30 que resolvieron y entregaron al menos una tarea, 17 abandonaron o quedaron libres, uno promocionó y el resto regularizó. Los estudiantes que no participaron fueron 4 y solo uno de ellos alcanzó la regularidad de MI y el resto quedó libre o abandonó (Gráfico 29, Anexo 9 – pág. 340).

Análisis de las respuestas del cuestionario tomado a los alumnos de Matemática I al finalizar el cursado

Al finalizar el cursado de la asignatura, se envió a los estudiantes vía mail un cuestionario tipo formulario de Google en el que se les solicitaba su opinión respecto al cursado y la propuesta de tareas extra clase, lo respondieron 23 alumnos 12 de LSA y el resto de LHyST, el 69% de sexo femenino. La transcripción de las respuestas se encuentra en el Anexo 9 (pág. 344), cuya interpretación se resume a continuación.

A 3 de los 23 alumnos que respondieron la encuesta no le resultaron útiles las tareas extra clase, porque no los beneficiaba en forma directa en las notas de la asignatura, o porque les resultaban confusas.

Cuando se consultó el motivo por el cual no entregaron todas las tareas, 5 alumnos respondieron, en general las causas fueron por falta de tiempo, porque no llevaban la materia al día o por cuestiones laborales

De los 20 estudiantes que respondieron que sí les habían sido útiles las tareas, 18 comentaron el motivo. Hay consenso en esas respuestas ya que la mayoría coincidió en el hecho de que los ayudaba a llevar al día la asignatura y a reforzar los temas en los que tenían dudas.

Se les solicitó que hicieran sugerencias con el fin de mejorar la propuesta de trabajo, 9 de los 23 que respondieron la encuesta, en general los comentarios fueron buenos y relativos a dar más tiempo a las clases de resolución y mencionaron que se podría aprovechar más la propuesta si todos los alumnos estudiaran.

Haciendo una síntesis de los comentarios de los estudiantes, en general, la experiencia fue positiva para ellos. Hay dos comentarios interesantes, la del alumno, que menciona “reunirse con Jose” para aclarar dudas e interpretar consignas y luego poder plantearlas en la clase taller de resolución. Este comentario es importante por varios motivos, la compañera que mencionan era una becaria de tutoría, del programa de la UNL de Apoyo y Permanencia de alumnos ingresantes, que, entre sus actividades estaba el acompañamiento disciplinar en la asignatura y el hecho de que una vez que tenían claras las dudas, podían compartirlas en clase y así poner en común sus resultados, dificultades y dudas.

El otro comentario a tener en cuenta es el del estudiante que solicita más tareas tipo cuestionarios con autocorrección a través del aula virtual. En virtud del comentario del alumno, podría decirse que la propuesta fue acertada.

Segundo cuatrimestre de 2019: Matemática II

En el segundo cuatrimestre de 2019, por sistema SIU Guaraní, estaban autorizados a cursar 30 alumnos y desde la cátedra se permitió el cursado condicional de 2 estudiantes, lo que hizo que el total de inscriptos fuera de 32. Hubo 3 alumnos que se inscribieron y no hicieron actividad alguna.

El equipo docente a cargo de la asignatura fue el mismo que en el primer cuatrimestre y se propusieron 4 tareas extra clase, con entrega en formato papel y taller de resolución y puesta a punto de resultados presenciales, dos cuestionarios electrónicos, a tiempo real, con preguntas aleatoriamente extraídas de un banco de preguntas con respuestas al finalizar el mismo, previos a cada una de las dos evaluaciones parciales de la asignatura.

Resultados obtenidos con la Tarea 1

Esta tarea fue resuelta y entregada por 24 estudiantes, consistió en un repaso de los temas de MI límites y funciones definidas por tramos. Constó de 4 ejercicios, 3 de ellos fueron los mismos que se solicitaron en 2017 y se agregó un problema.

Se observaron, en general, dificultades similares a las de 2017 a las que se agregó el problema. La mayoría de los estudiantes que entregó la tarea lo hizo sin resolverlo, los comentarios acerca de esta situación fueron: *"no lo hice porque no entendí lo que me pedía"* o *"no entiendo, necesito que me lo explique en clase"*, ni siquiera intentaron plantear el límite matemáticamente y tratar de resolverlo y ver qué daba.

Se observaron dificultades con la representación gráfica de la función y muy pocos intentaron utilizar el *GeoGebra* como apoyo y así, a partir de él responder las consignas.

Resultados obtenidos con la Tarea 2

La Tarea 2 fue resuelta y entregada por 21 estudiantes de los 32 que estaban cursando MII, y todos se presentaron a rendir la primera evaluación parcial.

En la clase de resolución de la Tarea, los comentarios de los alumnos presentes se relacionaban con la interpretación de los problemas, poder establecer las conexiones entre los conceptos de Matemática y los de las otras disciplinas sobre los cuales se basaban los enunciados. En esta clase de resolución fueron muy activos los estudiantes, les habían gustado los problemas, si bien muchos habían tenido dificultades de comprensión de enunciados.

Fue muy interesante observar sus expresiones, cuando, una vez superada la instancia del planteo y obtención de los datos necesarios para resolverlos, pasar al análisis de las ecuaciones y expresiones de las funciones que se obtenían, cómo, desde la Matemática se obtenían resultados generales y amplios que luego, al contextualizarlos al problema analizado había restricciones en las soluciones, por ejemplo, en el problema de crecimiento de bacterias, la función exponencial con exponente negativo, tiene por asíntota horizontal la recta y=0, esto implica que la función nunca va a valer cero, pero se estaban modelando bacterias, bastaba con que muera la última bacteria que quedaba viva para que la población desaparezca. Otra cosa que les llamó la atención fue que se usara una función continua para modelar el comportamiento de las bacterias y el número de estas en la población no son continuas, sino que resultan de un conteo.

A continuación, se transcriben algunos comentarios que los estudiantes escribieron en sus resoluciones al solicitarles que dieran su opinión acerca de la tarea y cuáles habían sido sus dificultades al momento de resolverla:

"A la hora de resolver este problema (ejercicio 1)*, lo que más me costó fue relacionar la Matemática con la Biología. Es decir, llevarlo a un "hecho cotidiano" y no basándome solo en Matemática tan estrictamente. Me faltó interpretar en otro sentido el enunciado".*

"*El ejercicio 2, no me generó ningún tipo de dudas, ya que supe comprenderlo porque vi algo de Física en la escuela".*

"El problema 3, me costó derivar la cónica, pero luego que lo pude hacer, no me fue difícil encontrar la solución".

"La mayor dificultad que tuve fue el aplicar Matemática a una situación!"

"Me costó plantear los problemas porque no leía bien!"

"Me gustaron las actividades, aunque me costó mucho entender los problemas. Me sirvió para saber qué cosas tengo que repasar"

El comentario que se transcribe a continuación resume la opinión general de los estudiantes respecto a esta tarea:

"El TP me pareció bueno, se puede observar cómo se aplica la Matemática a ejemplos prácticos, incluso de la vida cotidiana, personalmente me sirve mucho relacionar todo con ejemplos y me ayuda a entender más algunas cosas razonándolas".

Previo a la evaluación parcial, se dispuso en el aula virtual una tarea de tipo cuestionario con tiempo limitado para su resolución y al finalizar, se visibilizaban las respuestas de los ejercicios. Se implementó esta nueva actividad, como se mencionó, con el fin de que los estudiantes, frente a una actividad con tiempo limitado, se organicen para poder responder todas las consignas en una evaluación. De esta actividad participaron 23 de los 32 alumnos habilitados para cursar.

Como medida del efecto de haber realizado la tarea se analizaron las resoluciones de los ejercicios trabajados que evaluaron en el parcial. En esta instancia se presentaron a rendir 28 estudiantes, de los cuales 21 habían hecho la T2.

El 90.5% de los estudiantes que entregaron la Tarea 2 resolvieron en forma correcta o parcialmente correcta el problema de hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en un punto frente al 71,4% de los que no hicieron la tarea (Tabla 27 y Gráfico 30, Anexo 9 – pág. 341). Solo un estudiante de los 21 que hicieron la tarea lo resolvió en forma incorrecta. Si bien son numéricamente diferentes estos porcentajes, no se encontró asociación estadísticamente significativa entre el haber realizado o no la tarea y el tipo de resolución del problema en el parcial ($p = 0,1325$).

Los estudiantes que resolvieron el problema en forma parcialmente correcta lograron plantearlo bien, pero cometieron errores al aplicar las reglas de derivación y/o algebraicos al despejar la derivada y/o de cálculo al evaluar la derivada en el punto.

Otro ejercicio que se evaluó en el examen parcial fue uno de aplicación de la derivada al movimiento de una partícula. Puede afirmarse que el haber realizado la tarea tuvo un impacto positivo en los estudiantes al momento de enfrentar la resolución de un ejercicio de características similares en el parcial, si bien, los estudiantes que no la entregaron también tuvieron un buen rendimiento. Es conveniente aclarar que el taller de resolución y puesta a punto de las resoluciones de las tareas se realizó en horarios de clase y todos los estudiantes que cursaban la asignatura participaban; es decir, que si bien no pasaron el proceso de elaboración individual en la resolución estuvieron en la etapa de análisis de la solución y las diferentes alternativas que se podían realizar para resolver la situación problema planteada. En este caso, el 66,7% de los estudiantes que resolvieron la tarea 2 resolvió en forma correcta el problema en la evaluación parcial frente al 14,3% de los que la hicieron. Ningún alumno que hizo la tarea resolvió el problema en forma incorrecta o no lo respondió (Tabla 28 y Gráfico 31, Anexo 9, pág. 342).

Con respecto al problema de optimización, uno de los inconvenientes más grandes observados fue la falta de conocimientos de geometría elemental que tienen los estudiantes, pues en estos problemas, en general se solicita maximizar una superficie o un volumen dadas determinadas restricciones. Esta situación fue mencionada por los docentes de las asignaturas posteriores a Matemática en la encuesta realizada al hacer el diagnóstico de situación antes de llevar adelante la propuesta de una secuencia de tareas en MI y MII.

En el análisis de las resoluciones se hace visible esta situación, pues los mayores errores cometidos fueron en este punto, y lograron resoluciones correctas o parcialmente correctas aquellos estudiantes que plantearon correctamente el problema geométrico. En la tarea, los problemas de optimización propuestos no eran geométricos, tal vez, sería conveniente que se realice una modificación agregando problemas de este tipo. El 52,4% de los estudiantes que hicieron la tarea resolvieron correctamente el problema y el 19,0% en forma parcialmente correcta (Tabla 29 y Gráfico 32, Anexo 9 – pág. 342-3).

Resultados obtenidos con la Tarea 3

Los ejercicios y problemas de esta tarea fueron los mismos que se solicitaron en la experiencia realizada en 2017. En esta oportunidad, 2019, la resolvieron 26 estudiantes de los 32 que iniciaron el cursado de MII. Los temas trabajados se evaluaron en el segundo examen parcial de la asignatura, al que se presentaron a rendir 24 y todos habían entregado la tarea.

En la clase de resolución y entrega de la Tarea 3, se observó que la mayoría tuvo inconvenientes para reconocer el método de integración a aplicar, utilizar método de sustitución o por partes o utilizar las tablas. La mayoría resolvió mal el ejercicio en el cual la función del integrando estaba con valor absoluto. Si bien era una expresión muy fácil de integrar, la dificultad radicaba en que debían, en el intervalo de integración identificar los puntos donde la función no tiene derivada e integrar por partes. Aquí se puso en evidencia que los estudiantes no utilizaron el *GeoGebra* para graficarla. Esto último también se observó en el ejercicio de cálculo del área entre dos curvas, la mayor dificultad observada estuvo en la identificación del área a calcular y en la determinación de los extremos de integración que, en este cálculo requería hallar los puntos de intersección de las gráficas de las funciones. Si hubiesen utilizado el software para graficar, muy probablemente no habrían tenido esta dificultad.

En esta tarea se propusieron dos ejercicios de aplicación física, donde se requiere integrar para resolverlo. El inconveniente más grande que manifestaron los estudiantes fue, la comprensión del enunciado y además, en este caso es necesario unificar las unidades de medición de tiempo y desplazamiento para calcular las constantes de integración y su interpretación en el contexto del problema.

Se solicitó explícitamente a los estudiantes, como un punto de la tarea, que dijeran cuáles habían sido las dificultades que tuvieron al momento de resolver los ejercicios y problemas.

No todos los estudiantes respondieron a esta consigna, de los que sí lo hicieron, algunas de sus *respuestas fueron:*

"No pude plantear los problemas",

"No lograba relacionar los temas de matemática con los problemas",

"No logré identificar los métodos de integración que necesitaba para resolver las integrales y luego tuve dificultades con las operaciones"

"Me costó mucho el 1-d, por el valor absoluto, y el 3, porque mezclé la distancia y el desplazamiento, porque me falta practicar más de todos los temas"

"Me costó un poco, pero porque no vengo practicando mucho, tuve dificultad al resolver la integral del 1-d y en comprender los problemas, por ejemplo, en el 3, me cuesta la relación entre desplazamiento y distancia".

En los comentarios de algunos estudiantes se menciona "no estoy practicando mucho" o "me falta más práctica", estos son totalmente entendibles pues MII se cursa simultáneamente con otras asignaturas que tienen alta demanda de cursado presencial y de trabajos de campo, el tiempo requerido para cualquier actividad extra clase es una de las variables que influye en el grado de participación de esta propuesta.

Como se mencionó, los 24 estudiantes que se presentaron a rendir el segundo parcial, habían resuelto la Tarea 3. En este examen se tomaron dos ejercicios de integrales de una variable.

En el ejercicio correspondiente al cálculo de un área, el 91,6% (22) lo resolvió en forma correcta (7) o parcialmente correcta (15) y 2 estudiantes lo hicieron de forma incorrecta. Los errores observados en las resoluciones del parcial fueron los que se mencionaron en la clase taller: problemas de graficación e identificación de la región de integración, obtención de los extremos de integración por problemas con el álgebra necesaria para hallarlos.

Al ejercicio de cálculo de integrales indefinidas o definidas, hubo un 37.5% de los estudiantes que lo resolvió de forma incorrecta (8) o no lo hizo (1). Al analizar estas evaluaciones, se observó que tuvieron dificultades algebraicas y con la identificación de los métodos de integración.

Resultados obtenidos con la Tarea 4

En la Tarea 4 participaron de la resolución y entrega 20 estudiantes de los 32 que inicialmente comenzaron a cursar la asignatura.

En la clase taller de puesta a punto de las resoluciones se observó que tuvieron muchas dificultades en general en todos los ejercicios solicitados.

En el primer ejercicio, la mayor dificultad estuvo en la identificación de la región cuya área se pedía calcular y la determinación de los puntos de intersección de las gráficas de las funciones dadas.

En el ejercicio 2, donde se plantea una integral doble en la que se solicita el cambio en el orden de integración, nuevamente apareció el problema de la identificación, a partir de los extremos de integración de la región sobre la que se estaba trabajando. Una vez superado este obstáculo la dificultad estuvo en el planteo de los nuevos extremos de integración al cambiar la variable dependiente para invertir el orden de integración.

Al ejercicio 3, muy pocos estudiantes lo habían podido plantear e intentar resolver, en el inciso a) no pudieron identificar la región de integración dada en coordenadas polares y en el inciso b) no pudieron pasar de coordenadas rectangulares a polares.

El ejercicio 4, que es el problema de aplicación de una ecuación diferencial, si bien se les dio la expresión, la mayoría no pudo interpretar el enunciado ni extraer de él los datos necesarios para realizar los cálculos.

Algunos estudiantes, escribieron en las hojas de sus tareas su opinión respecto a la tarea propuesta, a continuación, se transcriben algunas de las opiniones manifestadas:

"Me faltó el de coordenadas polares porque me cuesta entender el planteo, decidí no ponerlo dado que no lo sé hacer. Capaz lo que más me cuesta es pasar de ejercicios que están dando indicaciones desde un texto. Me parece que hacer ejercicios más de fórmulas es más fácil, pero creo que es por un problema de comprensión traído de la secundaria".

"Me costó interpretar el problema y el tema de coordenadas polares".

"Me costó la tarea en general. Me resultaron difíciles los ejercicios 3 y 4".

"Me cuesta identificar qué poner en los extremos de integración. Me cuesta pasar de coordenadas cartesianas a polares, es decir, el pasaje en sí no pero sí la determinación de los ángulos y los radios que van en los extremos de integración".

"Lo que más me costó fue interpretar el gráfico para sacar el área, el problema de ecuaciones diferenciales y el ejercicio 3b)".

"Dificultades: poder visualizar la región con los extremos de integración y poder cambiarlos a polares. Interpretación de los datos para resolver el problema".

"La tarea en general me costó, me resultaron difíciles los ejercicios 3 y 4. Los pude resolver en la clase con ayuda".

"El ejercicio que me costó mucho fue el 3 porque siempre me costó mucho entender coordenadas polares y por ese motivo fue lo que más hizo practicarlo muchas veces y gracias a la consulta lo pude resolver".

En la evaluación parcial, al ejercicio correspondiente a integrales dobles en coordenadas rectangulares, lo hicieron los 24 estudiantes que se presentaron a rendir, porque era un requerimiento para obtener la regularidad. En cambio, al ejercicio de integrales en coordenadas polares, lo resolvieron solo 16 estudiantes dado que era requisito de promoción.

Los 20 estudiantes que resolvieron y entregaron la tarea 4 se presentaron a rendir el parcial y los resultados obtenidos en el ejercicio de integrales dobles en coordenadas rectangulares. El 35% de los estudiantes que entregaron la tarea pudo resolver el ejercicio en forma correcta, mientras que ninguno de los que no la entregaron lo hizo (Tabla 30, Anexo 9 – pág. 343).

Al analizar las respuestas del ejercicio correspondiente al cálculo de una integral utilizando coordenadas polares, se corroboran las observaciones realizadas durante la clase taller de puesta a punto de las resoluciones de la Tarea 4 respecto a este tema. De los 16 estudiantes que estaban en condiciones de obtener la promoción directa de la asignatura y se presentaron al parcial 15 habían hecho la tarea y 1 no (Tabla 31, Anexo 9 – pág. 343). Solo 5 estudiantes lo resolvieron en forma parcialmente correcta o correcta y 10 optaron por no resolverlo. El único estudiante que no hizo la Tarea 4 y podía promocionar, resolvió este ejercicio de manera incorrecta.

Análisis global del impacto de la propuesta de Tareas extra clase en el segundo cuatrimestre de 2019

De la lista oficial obtenida del SIU Guaraní hubo 30 estudiantes en condiciones de cursar la asignatura y desde la cátedra se permitió el cursado condicional a 2, lo que hizo un total de 32 estudiantes hubo 3 inscriptos de los que no se registró actividad académica alguno, por lo que finalmente fueron 29 los que participaron del cursado de MII en este segundo cuatrimestre.

Participaron de la propuesta completa, 4 tareas entregadas en formato papel y 2 electrónicas un total de 18 estudiantes, de los cuales 12 alcanzaron la promoción de la asignatura.

Hubo 10 alumnos que hicieron al menos una de las actividades propuestas, de ellos 7 quedaron regulares y solo 3 quedaron libres. Hubo un solo alumno que solo se presentó a rendir el primer parcial y luego abandonó el cursado.

Es de destacar que el 63,2% de los 19 estudiantes que participaron de todas las tareas alcanzó la promoción directa de la asignatura y el resto regularizó, es decir ninguno de estos quedó libre o abandonó. De los 9 estudiantes que hicieron al menos una tarea, el 77,8% regularizó y el resto quedó libre o abandonó. Los 4 estudiantes que no hicieron tareas, todos abandonaron o quedaron libres (Gráfico 33, Anexo 9 – pág. 344).

Análisis de las respuestas del cuestionario tomado a los alumnos de Matemática II al finalizar el cursado

Al finalizar el cursado de la asignatura, se envió a los estudiantes vía mail un cuestionario tipo formulario de Google en el que se les solicitaba su opinión respecto al cursado y la propuesta de tareas extra clase. Lo respondieron 18 estudiantes con edades entre 18 y 25 años, 7 de LSA y el resto de LHYST. El 100% de los que respondieron indicaron que eran ingresantes de 2019 y era la primera vez que cursaban MII.

El 72% (13) participó de la propuesta completa, entregó resueltas las 4 tareas y realizó las 2 electrónicas. De los que contestaron que no hicieron todas las actividades, solo dos estudiantes respondieron el motivo, uno mencionó que “no pude asistir a la entrega” y el otro “una me costó y no la pude entregar”.

Al consultar si las tareas les habían sido de utilidad, solo un alumno de los 18 que respondieron la encuesta-7 dijo no, y el motivo por el cual no le fueron útiles, respondió: *“porque no las entendía en su mayoría”*. Este alumno participó en solo dos de las 6 actividades propuestas. Su respuesta está indicando que no se interesó en el cursado de la asignatura, pues desde el primer día de clase hubo diferentes canales de comunicación en los cuales podría haber consultado lo que no entendía a los docentes y a sus compañeros, como tampoco manifiesta el haber asistido a las clases-taller de resolución de las tareas.

Al preguntar el motivo por el cual ellos consideraban que la propuesta didáctica les había sido útil respondieron, la mayoría de los que respondieron coincidieron en que les ayudaba a ordenarse en el estudio y así llegar bien a las evaluaciones parciales. También manifestaron que las tareas les permitieron entender dónde se aplica la Matemática y obraron como una toma de conciencia acerca de la autovaloración de sus conocimientos de los diferentes temas abordados.

Se los consultó acerca de la utilización de las TIC, la consulta se dividió en tres ítems: Internet, EV y celular. El 88.9% de los estudiantes mencionó utilizar recursos de internet, 9 mencionaron videos de YouTube, 6 graficadores y calculadoras en línea. Un solo alumno no indicó qué utilizó.

Mensajería instantánea (*WhatsApp*) con los docentes lo utilizaron 7 de los 18 que respondieron y al consultar acerca del beneficio obtenido mencionaron que el mayor beneficio era la respuesta inmediata y no tener que esperar los días de consulta.

Al EV lo utilizaron 13 de los 18 estudiantes que respondieron la encuesta y al consultarlos acerca de los beneficios de su utilización mencionaron que en él encontraban en forma ordenada la información y el material necesario para estudiar y seguir la materia y

Por último, se les hizo la pregunta ¿Qué sugerencias propondrías para mejorar las tareas para realizar en el hogar que propone la Cátedra?, no todos respondieron las respuestas de los que sí lo hicieron solicitaron más ejemplos resueltos, más cuestionarios, que las tareas tengan notas. También mencionaron que la propuesta de tareas les gustaba y les resultaba muy útil.

En líneas generales, los estudiantes consideraron que la propuesta era buena para ellos, los ayudaba a llevar al día la materia y mejorar sus aprendizajes. Por otra parte, si bien utilizaron diferentes TIC, no lo hicieron de la forma esperada por los docentes en relación a que, si hubiesen utilizado con mayor intensidad el *GeoGebra*, mediante la visualización de las gráficas de las funciones, por ejemplo, les habría sido mucho más fácil resolver algunas actividades.

Capítulo 6: Conclusiones

En este trabajo de tesis se planteó como objetivo general el diseño e implementación de tareas mediadas por TIC, como también el análisis de su contribución a la enseñanza de Matemática en las carreras de LSA y LHyST.

Con el fin de alcanzar este objetivo general, se plantearon tres metas particulares que fueron llevadas a cabo durante tres etapas de la investigación.

En la primera etapa se hizo un diagnóstico de situación para el que se llevaron a cabo las siguientes actividades:

- Consulta mediante un instrumento ad hoc de participación voluntaria a profesores de asignaturas de dictado simultáneo y posterior a Matemática de las carreras que se dictan en la ESS-FBCB-UNL, si en el dictado de sus asignaturas necesitaban de contenidos de Matemática. Si su respuesta era afirmativa, se les pidió que digan qué temas eran los que necesitaban.

- Consulta, mediante una entrevista semiestructurada, a docentes de los diferentes equipos de cátedra del Departamento de Matemática de la ESS-FBCB-UNL respecto a cuáles eran los temas/contenidos de Matemática en los que recurrentemente se observaban dificultades para su enseñanza y para su aprendizaje.

- Revisión de los exámenes finales y parciales de años anteriores a 2017 mediante listas de cotejo.

Del análisis de las respuestas de los docentes de asignaturas no matemáticas de cursado simultáneo y posterior a MI y MII, que participaron voluntariamente de la consulta, surgió que la mayoría de ellos considera que los alumnos, en general, no poseen el dominio de contenidos de Matemática básica que son necesarios para el desarrollo de sus clases, considerando esta situación un obstáculo cognitivo para el desarrollo de sus asignaturas. Los temas que con mayor frecuencia mencionaron fueron: Resolución de ecuaciones: despejar incógnitas y pasaje de términos, Operaciones con logaritmos y exponenciales y uso de calculadora, Construcción e interpretación de gráficas, en general y en particular de funciones lineales y cuadráticas y conversión de unidades. Es importante señalar que todos los contenidos mencionados son dados en la escuela media y se retoman en el CADM, cuya aprobación es requisito para el cursado de MI. De esto es posible inferir que, el aprobar asignaturas de Matemática (CADM y las del plan las carreras), no es garantía de que el alumno logre un aprendizaje significativo que le permita transponer los temas de matemática a las otras disciplinas.

Del análisis de las opiniones de los docentes del Departamento Matemática, surgió que, al momento de enseñar, las dificultades a sortear se pueden clasificar en tres grandes rubros: la formación previa en Matemática, la actitud y la motivación para su estudio y, por último, la adaptación a la vida universitaria.

Respecto a la formación previa de los estudiantes, opinan que una gran parte de ellos ingresan a la universidad sin los suficientes conocimientos para enfrentar el cursado de Matemática en el primer cuatrimestre de sus carreras y que el requisito de aprobación del CADM, para poder cursar, no alcanza como preparación previa para el mismo. En relación al segundo, la actitud hacia la Matemática y la motivación para su estudio, opinan que los estudiantes tienen una actitud negativa, lo que hace que no se sientan motivados para su estudio y por ende su rendimiento en la asignatura no es bueno. Con respecto al tercero, adaptación a la vida universitaria, consideran que este punto es muy importante a tener en cuenta dado que se está trabajando con alumnos ingresantes, razón por la cual, la adecuación al ritmo y requerimientos de autogestión que tiene el ser alumno universitario es un cambio muy grande, pasan de un sistema totalmente estructurado y organizado a tener que ser ellos los que organizan el ritmo de las diferentes actividades y el cumplimiento de las exigencias del cursado. Este proceso de adaptación suele ser muy difícil para algunos a tal punto que es reconocido como una causa de abandono, resultado encontrado en investigaciones previas de la autora (Walz, Contini, Bergesio y Colombini, 2009, Contini y Ávila, 2015, Walz, Contini y Ávila, 2017) y sostenido por otros autores como (Álvarez Pérez, Cabrera Pérez, González Afonso y Bethencourt Benítez, 2006, Yengle Ruiz, 2009).

De la tercera actividad de esta etapa de la investigación, revisión de temarios de exámenes parciales y finales anteriores al año 2017, se pudo observar que los estudiantes tienen dos tipos de dificultades. Una referida a los conocimientos previos de matemática elemental requeridos para el cursado de las asignaturas y la otra, con algunos temas específicos de MI y MII. Por ejemplo, en el cálculo de derivadas, los estudiantes son capaces de identificar y aplicar correctamente las reglas de derivación, pero cometen errores al manipular algebraicamente las expresiones obtenidas. Una situación similar se observa también en el cálculo de integrales, donde para poder realizarlo tienen que sacar factor común o aplicar la propiedad distributiva en un cociente o, algo más simple, utilizar propiedades de la potencia, parar lograr que la expresión que queda en el integrando tenga la forma adecuada para poder utilizar una regla de integración o la tabla. También se observó este tipo de situación, en el tema optimización, en particular cuando lo que se pide maximizar o minimizar requiere de la geometría elemental, del cálculo de áreas o volúmenes. La dificultad en este caso es tan grande, que, en muchos casos, imposibilita a los estudiantes poder plantear el problema por no poseer los conocimientos mínimos necesarios de geometría.

Es importante mencionar que las falencias observadas en la formación previa hacen que los alumnos cometan errores en la resolución de ejercicios y problemas referidos a temas de MI y MII. Como ya se mencionó, en general los errores que aparecen frecuentemente son debidos a utilización inadecuada de operaciones algebraicas, a la incorrecta lectura e interpretación de enunciados y en la realización de inadecuadas representaciones gráficas y simbólicas de los diferentes objetos matemáticos involucrados en los ejercicios y problemas a resolver.

Con respecto a los contenidos específicos de MI y MII, de este análisis se agruparon los errores observados en grandes ejes temáticos de los programas de las asignaturas en estudio. En MI: Trigonometría, Álgebra lineal, Vectores y Funciones. En MII: Límite, Aplicaciones de la derivada, Cálculo y aplicaciones de las integrales. Es importante mencionar, en la elección y posterior diseño de tareas se tuvieron en cuenta, además de lo observado en el análisis de errores de los temarios de exámenes finales y parciales y de las opiniones de los docentes de otras cátedras y del Departamento Matemática, la experiencia de quienes tienen a su cargo la enseñanza de estas asignaturas.

La Etapa 2, consistió en el diseño propiamente dicho de las tareas y de la propuesta didáctica a implementar en el cursado de MI y MII en el año 2017.

Tanto para el diseño de las tareas como de la propuesta de implementación se contemplaron diversos aspectos particulares de las asignaturas con las que se trabajó como son el tipo de carrera, la posición de las asignaturas en el diseño de las mismas, la carga de trabajo y/o estudio extra que requería a los estudiantes para cumplir con las resoluciones dado que están cursando simultáneamente varias materias además de Matemática. Otro punto muy importante que se consideró fue que la implementación de la secuencia de tareas debía estar inserta en el contexto del cronograma de las asignaturas.

De los criterios que se tuvieron en cuenta en el diseño de las tareas, el que resultó más complicado de implementar fue el de la propuesta aplicaciones contextualizadas debido a la ubicación de las asignaturas MI y MII en el primer año de las carreras, haciendo que pudieran abordarse contenidos relativos a Geometría elemental, a Física, de Biología y Protección contra incendios, si bien, en el desarrollo de los talleres de resolución de tareas, se hizo referencia a las posibilidades de aplicación de los diferentes temas desarrollados en asignaturas como resistencia de materiales, cálculo de estructuras, movimientos de suelo, por mencionar algunas, logrando.

Resumiendo, no solo se trató de proponer tareas que propendan al mejoramiento de la enseñanza y del aprendizaje de algunos temas identificados como conflictivos, sino que el desafío fue el diseño e implementación de una secuencia de tareas contextualizadas (y descontextualizadas) mediadas por TIC que puedan ser realizadas durante el cursado de MI y MII en el contexto del cursado conjunto con otras asignaturas de las carreras. Además, se trató de lograr que el alumno, al realizarlas, sea partícipe de su propio aprendizaje, permitiéndole, no solo de identificar y profundizar sus conocimientos sobre los puntos importantes de los temas abordados, sino también tomar conciencia de sus debilidades, siendo también una guía para su estudio. Por otra parte, se intentó, que se dieran cuenta que para aprender deben involucrarse en el estudio y que de esa forma podrían conseguir mejores resultados que los que alcanzarían si solo asistían al aula de clase a escuchar al docente.

Algo muy importante de mencionar es que, en la revisión bibliográfica realizada, todas las propuestas de diseño de tareas fueron realizadas para temas específicos de Matemática y para nivel primario y secundario. No se encontraron antecedentes, en la respecto a lo que se propuso en este trabajo de tesis que fue el diseño e implementación de una secuencia de tareas que contempló los contenidos de dos asignaturas correlativas y a nivel universitario.

La Etapa 3, se realizó con el fin de analizar la contribución de la implementación de las tareas en la enseñanza y en el aprendizaje tuvo a su vez tres instancias, la primera, en 2017, se llevó al aula la propuesta diseñada en la etapa anterior. En el año siguiente, 2018, durante el análisis de los resultados obtenidos hicieron adaptaciones de la propuesta en función de los mismos y de modificaciones internas en la FBCB-

ESS con respecto al orden de los temas y externas debidas a cambios en los programas de las asignaturas de Matemática de todas las carreras de la UNL. Es así que el rediseño de la propuesta inicial se implementó en 2019 y se realizó el posterior análisis de su impacto.

La contribución de la propuesta se valoró mediante los criterios ya mencionados, es decir que aporten a la enseñanza y los aprendizajes de los estudiantes, que permitan trabajar con contextualización y descontextualización, según los objetivos de aprendizaje y la naturaleza del concepto matemático tratado, y que utilicen TIC como mediadora de los aprendizajes y como vínculo docente-alumno, alumno-alumnos; docentes-docentes.

En relación con la promoción de una enseñanza activa y el logro de aprendizajes significativos

En líneas generales se puede concluir que el efecto de las dos experiencias áulicas fue positivo. Se observó que los estudiantes que participaron en forma completa de la propuesta, alcanzaron en un alto porcentaje la regularidad y/o la promoción directa de las asignaturas.

Además, mayoría de los estudiantes que respondieron las encuestas, expresaron que la incorporación de tareas extra aula durante el dictado de las asignaturas MI y MII les resultó útil. Manifestaron que la propuesta propició en ellos la necesidad de llevar al día las asignaturas y les organizó el estudio de las mismas. El tener que realizar actividades que debían ser presentadas y el hecho de cumplir con ello, los ordenó en el estudio de las materias como también el desafío de resolver problemas y ejercicios integradores les permitió mejorar sus aprendizajes como también propició en ellos un mayor nivel de práctica activa, autonomía y compromiso con el cursado de las asignaturas.

- En relación con la contextualización de la enseñanza

En algunas tareas se trabajó con contextualización y en otras con descontextualización. Por un lado, se fomentó la contextualización, donde a través de diferentes aplicaciones se mostró que el trabajo es interdisciplinario y por el otro, en la descontextualización, se enfatizó la labor disciplinaria, solamente de Matemática, dándole la formalidad que la profesión del alumno requiera, en consonancia con los aportes de Camarena Gallardo, 2017 y Camarena Gallardo, 2021. Esta forma de trabajo en la resolución de las tareas contribuyó, no solo en mejorar la actitud de los estudiantes hacia la Matemática, sino que les permitió percibir su utilidad y la transversalidad de ella para sus carreras y para la vida diaria.

- En relación con el aporte de las tecnologías

Se puede considerar que los estudiantes hicieron un uso adecuado de las diferentes formas de comunicación como correo electrónico, *WhatsApp*, Aula Virtual en las diferentes etapas de realización de las tareas. El uso de software matemático no fue masivo y no se obtuvo la respuesta esperada, si bien en todas las clases se insistió en su uso y se trató de incorporarlo como una herramienta más de enseñanza. Algunos estudiantes alcanzaron el objetivo ya que, al utilizarlo, lograron la visualización de las gráficas de funciones, la identificación de puntos singulares, la presencia de asíntotas, pudieron obtener rápidamente regiones de integración y con ello determinar eficazmente los extremos de integración, rapidez en la realización de cálculos laboriosos, etc. Lo que los llevó a poder dedicar tiempo al análisis de los resultados. Hubo numerosos casos en que esto no fue así y supusieron que como se les permitía utilizarlo, el software le iba a resolver todas las cuestiones y no alcanzaron el aprendizaje significativo de los temas en estudio.

~~S~~e puede decir que las tareas propuestas constituyeron elementos esenciales para la enseñanza de Matemática y para la creación de oportunidades de aprendizaje. En su diseño, la combinación de diferentes tipos de actividades contextualizadas y descontextualizadas mediadas por TIC, generaron un puente entre el trabajo en el aula y lo que pueden realizar fuera de ella, lo cual promovió aprendizajes significativos en los estudiantes.

Capítulo 7: Acciones concretas llevadas a cabo a partir de los resultados de la investigación

En el marco de la metodología de investigación-acción, a medida que se iban obteniendo resultados favorables en relación con la propuesta de enseñanza implementada, se incorporaban las tareas a la práctica áulica concreta de las distintas cohortes de estudiantes.

La incorporación de las tareas de resolución extra clase en el cursado de las asignaturas MI y MII, permitió a los estudiantes, según sus opiniones, el reconocimiento de los temas en los que les faltaba estudio, identificar situaciones que no habían logrado comprender y en cierta forma, dado que la propuesta requería entrega de tareas resueltas, hizo que fuera mayor el compromiso con el cursado de las asignaturas. Ante este panorama, se decidió que la propuesta de tareas perdurara y se siguieran implementando en el cursado de MI y MII.

La última experiencia realizada finalizó en diciembre de 2019, el año siguiente, 2020, como es conocido mundialmente, fue un año con muchísimas dificultades en todos los aspectos de la vida de los seres humanos y en particular lo fue para la educación debido la pandemia de Covid 19.

A continuación, se detallan las diferentes acciones que se realizaron en virtud de los resultados obtenidos en las experiencias áulicas que son motivo de esta investigación.

Año 2020

En nuestra facultad, las clases del primer cuatrimestre de 2020 se iniciaron tardíamente, en forma virtual, donde tanto estudiantes como docentes, debimos adaptarnos a la nueva modalidad de cursado. En este contexto, la propuesta de tareas realizada en el primer cuatrimestre de 2019 se mantuvo, en cuanto a número de actividades y temas.

La implementación se realizó de la siguiente forma: se dispusieron, los enunciados en el aula virtual, a la semana, se realizó una clase en la que se atendieron consultas sobre las consignas de la tarea propuesta y de explicación de las resoluciones en las que los estudiantes tenían mayor cantidad de dudas y posterior a eso, en el aula virtual, se dispuso un cuestionario donde, para responder, deberían haber resuelto la tarea previamente. Se propuso esta actividad como apoyo adicional para el estudio de las asignaturas, siendo libre el número de veces que los estudiantes podían realizarlo. Además, como complemento de los cuestionarios, se dispusieron en el EV las resoluciones de todas las tareas.

La participación, inicialmente fue muy buena, pero, al igual que en el cursado, se produjo un gran desgranamiento, medido por la poca participación en las tareas extra clase propuestas.

Por resolución de las autoridades de la Unidad Académica, al finalizar el cursado, en esta modalidad de excepción por la pandemia, no se tuvo la opción de promoción directa de la asignatura, la UNL, no había dispuesto aún, el protocolo de evaluación de las asignaturas en forma virtual. Por esta razón, los estudiantes acreditaron la regularidad del cursado mediante la aprobación, con un mínimo de resolución correcta de 40 puntos sobre 100, de dos cuestionarios electrónicos a través de la plataforma Moodle o sus respectivos recuperatorios.

En el segundo cuatrimestre, la UNL, permitió la implementación de exámenes virtuales, respetando un protocolo redactado para tal fin, por lo que, en nuestra unidad académica, fue posible, durante el cursado, realizar evaluaciones que permitieran a los estudiantes alcanzar la promoción directa de la asignatura. Es así, que se llevó adelante, en modalidad virtual, un cronograma de actividades similar al implementado en 2019 de cursado presencial, en cuanto al régimen de cursado, y la realización de tareas extra clase.

La propuesta de tareas extra áulicas se realizó de manera similar a lo implementado en el primer cuatrimestre de este año y se realizaron las tareas propuestas en el segundo cuatrimestre de 2019.

Año 2021

En este año, continuó con el cursado virtual, en las mismas condiciones del segundo cuatrimestre de 2020, es decir, los estudiantes podían alcanzar la promoción directa de la asignatura durante el cursado o rendir exámenes finales virtuales a fin de aprobar las asignaturas.

Se implementó la propuesta de tareas extra clase, en ambos cuatrimestres, de la misma forma que en 2020 en cuanto a la disposición de enunciados en el EV y la clase de explicación y aclaración de dudas de las consignas, pero, en esta oportunidad, los estudiantes debían resolver las tareas en papel y, en un plazo preestablecido, debían subir al EV una fotografía de las mismas. Se utilizó el recurso "tarea" de la plataforma Moodle, donde se encuentran las aulas virtuales de MI y MII. Es importante aclarar, que la participación en propuesta de tareas extra clase y la entrega de las resoluciones era un requisito para adquirir la regularidad. Esta modalidad de trabajo en la entrega de tareas resueltas tenía, además de incentivar a los estudiantes en la "escritura de las resoluciones", que se ejerciten en la metodología de las evaluaciones parciales de promoción y de los exámenes finales, pues el protocolo que se siguió para las mismas, en una de sus etapas, usando la opción de preguntas de ensayo, tenían que resolver las consignas en papel y adjuntar las respuestas como una foto en el espacio del EV destinado para tal fin.

Año 2022

Este año se regresó a la modalidad de enseñanza presencial, si bien, luego de la experiencia adquirida en los dos años de pandemia y de enseñanza virtual, en el dictado de MI y MII, se combinaron, actividades presenciales con actividades virtuales.

La propuesta de resolución y entrega de tareas extra clase como requisito de regularidad implementado en 2021, se mantuvo. También, se implementaron cuestionarios electrónicos asincrónicos para alcanzar la regularidad. Solo los estudiantes que resuelven y entregan todas las tareas y aprueban los cuestionarios electrónicos, pueden acceder a las evaluaciones parciales de promoción.

Durante el cursado del primer cuatrimestre, se observó que los alumnos que estaban cursando MI, tenían muchas dificultades en la comprensión de los enunciados, no podían entender las consignas. Es así que la estrategia de trabajo se adaptó a este nuevo tipo de alumnos "post pandemia" que teníamos: ingresantes universitarios que habían cursado los dos últimos años de su escuela media en forma virtual.

Hubo que agregar una clase de lectura e interpretación de consignas y de resolución de parte de las actividades solicitadas en las tareas, previa a la entrega de las mismas, lo que hizo, que la propuesta completa de cuatro tareas no se pueda implementar por cuestiones tiempo. Solo se pudieron incorporar en el cronograma de cursado las Tareas: 1 parte 2 (Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones), la 2 (Trigonometría) y la 3 (Vectores, recta y plano). Las dos primeras con entrega escrita de las resoluciones y la tercera, como se mencionó, por razones de tiempo, no fue posible tener las resoluciones escritas de los estudiantes. Lo que se hizo fue disponer los ejercicios resueltos de esta última tarea en el EV.

Si bien no era un requisito la resolución de todas las actividades propuestas en los enunciados de las tareas muy pocos estudiantes entregaron las resoluciones completas, la mayoría se limitó a cumplir con el requisito de la entrega y solo resolvieron los ejercicios y problemas que se habían explicado en la clase.

Es de mencionar, que la mayoría de los estudiantes que entregó las resoluciones completas de las dos actividades extra clase, finalizó el cursado con la promoción de la asignatura o regularizándola. Esto último estaría corroborando lo ya mencionado respecto al impacto positivo de la propuesta en cuanto a su efecto en el rendimiento académico de los estudiantes.

En el segundo cuatrimestre de 2022, al momento de la escritura de este informe, se está dictando MII. La propuesta de resolución y entrega de las cinco tareas diseñadas en 2019 figura en el cronograma de la asignatura. La entrega de las mismas resueltas, se requieren para la regularidad de la asignatura.

La mayoría de los estudiantes que están cursando esta asignatura son los alumnos regulares que cursaron en el primer cuatrimestre MI, es así que ya conocen la metodología. Es de observar que se mantienen las dificultades de lectura y comprensión de enunciados. Una de las consignas es que indiquen las dificultades que tienen al tratar de resolver la tarea, y la mayoría de los alumnos que responden este inciso, mencionan que solo pudieron resolver los ejercicios y problemas solicitados luego de la clase de lectura e interpretación.

Referencias bibliográficas

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo. Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Villa María.

Alpízar Vargas, M., Fernández Álvarez, H., Morales Reyes, J., Quesada, S. (2018). Dificultades y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje de la función lineal. Revista de Investigación y Divulgación en Matemática Educativa (RIDEME): 9 (Mayo 2018):6 - 19.

Álvarez Pérez, P., Cabrera Pérez, L., González Afonso, M., Bethencourt Benítez, J. (2006). Causas del abandono y prolongación de los estudios universitarios. *Paradigma*, 27(1), 349 - 363.

Andrade Escobar, C. (2011). Obstáculos didácticos en el aprendizaje de la Matemática y la formación docente. En Leston, P (Ed.) *Acta Latinoamericana de Educación Matemática (ALME 24)*, (pp. 999-1007). México DF, México: Colegio Mexicano de Educación Matemática.

Aquere, S., Engler, A., Vranken, S., Müller, D., Hecklein, M., Gregorini, M.I., Henzen, N. Una propuesta didáctica para la enseñanza de límite. *Premisa*, 40: 14 - 24.

Arralde, Z., Walz, M. F., & Mamut de Bergesio, N. (2006). Actitud Frente a la Matemática de Alumnos Ingresantes a la Licenciatura en Nutrición. *Aula Universitaria*, 1(8), 65-74. https://doi.org/10.14409/au.v1i8.1029.

Aristizábal, J. H., Colorado, H., Gutierrez, H. (2016). El juego como una estrategia didáctica para desarrollar el pensamiento numérico en las cuatro operaciones básicas. Sophia [en linea], 12(1): 117-125. Recuperado de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=413744648009

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ávila, O. B., Vaira, S.M., Contini. L. E. (2014)._Deserción universitaria: resultados y acciones concretas en Matemática. En A.M. Lopérgolo, M.S. Yanitelli y M. Scancich (compiladores), *Memorias de las Cuartas Jornadas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico Tecnológicas (IPECyT 2014)*, Jornadas llevadas a cabo en Rosario, Argentina.

Ávila, O., Contni, L. (2016). Efecto de acciones de retención de alumnos en carreras de la Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas-UNL. Período 2006-2015. En G. Friedrich, M. García Zatti, M.M. Marinsalta (compiladores), *V Jornadas Nacionales y I Latinoamericanas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas: IPECYT 2016.* -1ª ed., Bahía Blanca, Argentina.

Baccelli, S.G., Anchorena, S., Moler, E. G., Aznar, M. A. (2013). Análisis exploratorio de las dificultades de alumnado de Ingeniería en la resolución de problemas de optimización. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 84: 99 – 113.

Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M., Rodríguez, M. (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática.* Buenos Aires. Argentina. Ediciones UNGS, 2da Ed.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling: a theory for practice. In B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lester, A. Wallby, K. Wallby (Eds.), *International Perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-159). National Center for Mathematics Education. Traducción autorizada por Mina, M. (2008). *Revista de Educación Matemática*, 23(2): 20-35.

Bosch, M., García, F. J., Gacón, J. y Ruiz Higueras, L. (2006). La modelación matemática y el problema de la articulación matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación matemática*, 15(2): 37 - 74.

Bowen, G. M.; Roth, W-M. (1998). Lecturing Graphing: What Features Of Lectures Contribute To Student? *Research in Science Education,* 28(1), 77-90. DOI: 10.1007/BF02461643

Bressan, A., Zolkower, B. y Gallego, M. F. (2005). Los principios de la educación Matemática Realista. En Sadosky, P., Aliaga, H y Bressan, A. (Ed.) *Reflexiones teóricas para la educación Matemática* (pp. 69 - 98). Buenos Aires, Argentina.

Burkhardt, H., Swan, H. (2013). Task design for systemic improvement: principles and frameworks. En C. Margolinas (Ed.). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*. (pp. 433 – 441). Oxford, UK. Department of Education, University of Oxford. Recuperado de http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/83/74/88/PDF/ICMI_STudy_22_proceedings_2013-FINAL_V2.pdf

Butcher, N. (2015). *Guía Básica de Recursos Educativos Abiertos (REA)*. UNESCO. Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/images/0023/002329/232986s.pdf.

Calderón Waldron, W., Pañuela Mendez, S. (2013). Propuesta metodológica para la enseñanza de las secciones cónicas. *Revista Científica.* Edición Especial, octubre de 2013, 272 - 280.

Calvo Ballesteros, M. M. 2008. Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Educación, 32* (1): 123 - 138. doi: 10.15517/REVEDU.V32I1.527.

Camarena Gallardo, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación Educativa*, *9* (46): 15-25.

Camarena Gallardo, P. (2015). Teoría de las ciencias en contexto y su relación con las competencias. *Ingenium*, 16 (31), https://doi.org/10.21500/01247492.1370 p108-127.

Camarena Gallardo, P. (2017). Didáctica de la matemática en contexto Didactics of mathematics in context. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 19(2). doi: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2 p1-26

Camarena Gallardo, P. (2021). *Teoría de la Matemática en el contexto de las Ciencias.* Recuperado de https://edunse.unse.edu.ar/libros/digitales/Teor%C3%ADa%20de%20la%20matematica%20en%20el%20contexto%20de%20las%20ciencias%20-%20Patricia%20Camarena%20Gallardo.pdf

Cam*pag*no, L. (2008). La enseñanza en la universidad Aportes de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC). *Colección de Cuadernillos de actualización para pensar la Enseñanza Universitaria. 3*(3), 10-14.

Campos Nava, M., Torres Rodríguez, A. (2018). Diseño de Tareas de Aprendizaje Matemático con *GeoGebra*: Mecanismos Articulados. *Boletín Científico Pädi*, 10(1), 80–84. https://doi.org/10.29057/icbi.v5i10

Cantoral, Ricardo (2001). Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior. *Sinéctica, Revista Electrónica de Educación*, *19*: 3 - 27. Recuperado de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=998/99817935002.

Carrillo de Albornoz Torres, A. (2012). El dinamismo de *GeoGebra*. *UNION: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 29:* 9 - 22. Recuperado de https://uruguayeduca.anep.edu.uy/sites/default/files/2017-05/El%20dinamismo%20de%20GeoGebra.pdf

Castro de Bustamante, Jeannett. (2007). La investigación en educación matemática: una hipótesis de trabajo. *Educere*, *11*(38), 519-531. Recuperado de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-49102007000300019&lng=es&tlng=es

Castro Rodriguez, M.G., González Tejada, M.D., Flores García, S., Ramírez Sandoval, O., Cruz Quiñonez, M.D., Fuentes Morales, M.C. (2017). Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. Parte I. *Entre ciencias,* 5(13): 1 - 12. doi: 10.21933/J.EDSC.2017.13.218.

Cerda Gutiérrez, H. (1993). *Los elementos de la investigación. Como reconocerlos, diseñarlos y construirlos.* Santa Fe de Bogotá, Colombia: Editorial El Buho Ltda.

Chavaria Arroyo G. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Uniciencia*, 28 (2): 15 - 44.

Coll, C., Mauri, T. y Onubia, J. (2006). Análisis y resolución de casos-problema mediante el aprendizaje colaborativo. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento, RUSC, 3* (2): 29- 41. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/28127297_Analisis_y_resolucion_de_casos-problema_mediante_el_aprendizaje_colaborativo

Colo Herrera, A., Patritti, H, (2004). *Aplicaciones de la derivada*. Facultad de Ingeniería de Uruguay. Montevideo, Uruguay. Libro electrónico. Recuperado de https://fdocuments.ec/document/libro-de-aplicaciones-de-derivadas.html, última consulta 18/5/2022.

Contini, L., Ávila, O. (2015). Deserción temprana. El caso de carreras universitarias no matemáticas de la FBCB, Argentina. Período 2006 – 2014. *Anais do Colóquios do Museu Pedagógico,* 11(1): 4247 – 4257. Recuperado de http: //anais.uesb.br/index.php/cmp/article/viewFile/5231/501:6

Contini, L., Fabro, P., Gusmão, T. (2017). Resultados de una encuesta a docentes sobre contenidos de Matemática Básica necesario para sus clases. *Anais do Colóquios do Museu Pedagógico,* 12(1): 1377 – 1382. Recuperado de http://anais.uesb.br/index.php/cmp/article/viewFile/6981/6783.

Contini, L., Cottet, J. (2018). Tarea extra-aula y TIC. Experiencia de enseñanza de Matemática en carreras universitarias. En M.B. Bouciguez (compiladora), *VI Jornadas Nacionales y II Latinoamericanas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas: libro de actas*; 1ª ed.- Tandil, Argentina.

Contini, L., Cottet, J. (2018). Tareas y TIC en la clase de Matemática en la Universidad. En A. E. Ortolani y H. S. Odetti (editores), *II Workshop de Investigación en Didáctica de las Ciencias Naturales y Experimentales*, Workshop llevado a cabo en Santa Fe, Argentina.

Contini, L., Fabro, A., Gusmao, T. (2020). Carreras mediadas por TIC en la enseñanza de la Matemática en carreras universitarias de perfil profesional. *Braz. J. Develop., Curitiba*, 6 (7): 43585 – 43600, doi: 10.34117/bjdv6n7-103, p..

Contini, L., Fabro, A., Gusmão, T. (2020). La Matemática más allá del aula. Diseño de tareas contextualizadas mediadas por TIC. En Marta A, Pesa, Gabriela I. Aparicio (compiladoras), *VII Jornadas Nacionales y III Latinoamericanas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas: Libro de actas.* Jornadas realizas en Tucumán, Argentina.

Coronado-Hijón, A. (2015). Construcción de una lista de cotejo (checklist) de dificultades de aprendizaje del cálculo aritmético. *Revista Española de Pedagogía,* 260 (enero-abril 2015): 91 – 104. Recuperado de https://revistadepedagogia.org/wp-content/uploads/2015/01/construccion-de-una-lista-de-cotejo.pdf

Cruz Alvarado, M. A. y Sandí Delgado J. C. (2016). Propuesta Metodológica de enseñanza y aprendizaje para innovar la Educación Superior. *InterSedes: Revista de las Sedes Regionales*, XVII (36), 2 – 3. Recuperado de: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=66648525006.

Davini, M.C. (2008). *Métodos de enseñanza: didáctica general para maestros y profesores*. Sanlillana. Buenos Aires, Argentina.

de Melo Leal, G.; Alves Da Silva, J., Lima Damacena, D. (2020). As tics no ensino de quimica e suas contribuições na visão dos alunos. *Braz. J. Develop., Curitiba*, 6(1): doi:10.34117/bjdv6n1-265, p. 3733 - 3741.

Díaz Ferrer, Y., Cruz Ramírez, M., Velázquez Cardoza, Y., Molina Sierra, S. (2019). Estrategias didácticas para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos de las derivadas de funciones reales de una variable real y aplicaciones. *Épsilon*, 103: 7 – 23.

Díaz Lozano, M., Haye, E., Montenegro, F., Córdoba, L. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 41 (Marzo 2015): 20 - 38.

Dorier, J. L. (2002). Teching Linear Algebra at the University. En ICM2002 Procedeengs Vol III 1-3. Ponencia presentada en el International Comgress of Mathematicians, Beijin, China.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de las representaciones. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9 (1) : 143 - 168.

Duval, R. (2016). *Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas.* En Duval, Raymond; Sáenz-Ludlow, Adalira (Eds.), Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas. Énfasis. (pp. 61-94). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Dullius, M. M. (2009). *Enseñanza y aprendizaje en Ecuaciones Diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico.* (Tesis Doctoral). Universidad de Burgos. Programa Internacional de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias. España.

Edo, M., Deulofeu, J. (2006). Investigación sobre juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos. *Enseñanza de las ciencias*, 24(2): 257–268.

Elorza Pérez-Tejada, H. (2008). *Estadística para las Ciencias Sociales, del Comportamiento y de la Salud.* D.F., México: Cengage Learning.

Escorza Subero, F J. (2005). Matemáticas, sociedad y desarrollo humano. 3er seminario "Didáctica de las Ciencias". Instituto Superior Fundación Suzuki. Setiembre 2005. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2057964.pdf

Evans Risco, E. (2011). *Orientaciones metodológicas para la investigación acción.* Lima, Perú: Lima JW Impresiones.

Fabro, A. P. (2017). Los recursos tecnológicos virtuales como favorecedores de la enseñanza y los aprendizajes de ciencias morfológicas. *Uni/pluriversidad*, 17(2), 81-87.

Farías, D., Pérez, J. (2010). Motivación en la enseñanza de las matemáticas y la administración. *Formación Universitaria, 3*(6), 33-40. doi:10.4067/S0718-50062010000600005

Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*. *10*(2), 427–42. Recuperado de http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=631

Font, V. (2007). Epistemología y Didáctica de las Matemáticas. En F. Ugarte (ed.) *Reportes de investigación*. n. 21, serie C, II Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas. Lima, Perú: PUCP (pp. 1-48). (Conferencia Inaugural).

Gamarra Astuhuaman, G., Pujay Cristóbal, O. E. (2021). Resolución de problemas, habilidades y rendimiento académico en la enseñanza de la matemática. *Revista Educación*, 45(1): 170 - 182. doi: 10.15517/revedu.v45i1.41237

García, F. J. (2019). Introducción a 'Diseño de tareas en educación matemática: Una diversidad de marcos teóricos'. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 1 – 4. doi: 10.35763/ aiem.v0i15.264.

García-González, L. A. y Solano-Suarez, Ar. (2020). Enseñanza de la Matemática mediada por la tecnología. *EduSol,* 20 (70), 84 - 99. Recuperado de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1729-80912020000100084&lng=es&tlng=es.

Garza Kanagusico, A.B., Zaldívar Rojas, J.D. y Rodríguez García, C. E. (2019). Análisis de la práctica de graficación en estudiantes de ingeniería en un contexto de laboratorio de física. Uniciencia, 34 (2): 95-113, doi: 10.15359/ru.34-2.6

Garza Kanagusico, A.B.; Zaldívar Rojas, J.D.; Rodríguez García, C. E. (2020). Interpretación y construcción de gráficas cartesianas por estudiantes de Ingeniería en un contexto de laboratorio. En Pérez-Vera, Iván Esteban; García, Daysi (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ginovart, M., Blanco, M. (2012). Los cuestionarios del entorno Moodle: su contribución a la evaluación virtual formativa de los alumnos de matemáticas de primer año de las titulaciones de Ingeniería. *RUSC. Revista Universidades y Sociedad del Conocimiento*, 9 (1),166 -183.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127 - 135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de Matemáticas. Unión: revista iberoamericana de educación matemática, ISSN 1815-0640, Nº. 20: 13-31. Recuperado el 10 de diciembre de 2018, de https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf .

Godino, J. D. 2011. Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME), Recife (Brasil). Recuperado de: https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013. Recuperado de http://www.jvdiesproyco.es/documentos/ACTAS/1%20Ponencia%201.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2015). Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En, G. D'Amore y M. I. Fandiño Pinilla (Comp.), *Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica*. Universidad de la Sabana, Bogotá, Colombia.

Godino, J.D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2016). Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics and experimental sciences. *Acta Scientiae, Edição Especial ,18* (4), 29 – 47.

Gómez-Chacón, Inés Ma. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación matemática*, *21*(3), 05-32. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000300002&lng=es&tlng=es.

González Urbaneja, P (2007). La Historia de la Matemática en Ciencia en Acción. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*,10 (1), 215 – 220. Recuperado de https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=617

González Garibay, V., Sosa Ramírez, K. P. (2020). Lista de Cotejo. En M. Sánchez Mendiola y A. Martínez González (Ed.), *EVALUACIÓN del y para EL APRENDIZAJE: instrumentos y estrategias,* (pp 89 - 107). Ciudad de México, México: UNAM.

Goñi Zabala, J.M.*7 ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática.* Barcelona, España. Graó. 2009.

Guberman, R., Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teacher's views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16 (1), 33 – 56

Gusmão, T.C.R.S. (2009). Sequências didáticas para o aumento da cognição e metacognição matemática de estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental. *Projeto de Pesquisa*. UESB.

Gusmão, T.C.R.S. (2019). Do desenho à gestão de tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. *Anais do XVIII Encontro Baiano de Educação Matemática*. Ihéus, Bahia. Brasil. Recuperado de https://casilhero.com.br/ebem/mini/uploads/periodico/files/2019/PA2.pdf

Gutiérrez, A.; Fiallo, J. (2009): Enseñanza de la trigonometría con ayuda de SGD, en Recio, T. (ed.), *Geometría dinámica* (pp. 147-171). Madrid: Anaya.

Guzmán, J. C.; Martínez Villegas, M. F.; Verdejo Manzano, M. E. (2017). Una experiencia innovadora para enseñar contenidos psicológicos. *Sinéctica*, *49*: 1-17. Recuperado de https://www.redalyc.org/journal/998/99854580011/html/#B28.

Herrero, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 7(1): 49 - 78.

Hidalgo Alonso, S, Maroto Sáez, A; Palacios Picos, A. ¿Por qué se rechazan las Matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las *Matemáticas. Revista de Educación*, *334* (2004): 75-95.

Hiebert, J. S., & Grouws, D. A. *(*2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. En J. F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and* Learning (pp. 371-404). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Hinojosa, M., García-Quiroga, L., Vázquez, R. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. Ingenierías, VII (24): 27 - 34.

Huidobro Rojo, J., Mendez García, A., Serrano Ortega, M. L. (2010). Del Bachillerato a la Universidad: las Matemáticas en las carreras de ciencias y tecnología. *Aula Abierta*, 38 (1): 71-80.

Jiménez Espinoza, A. y Pineda Bobórquez, L. M. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y Ciencia, 16*: 101 - 116. doi: 10.19053/01207105.3243

Jiménez Espinosa, A., Limas Berrío, L. y Alarcón González, J. (2016). Prácticas pedagógicas matemáticas de profesores de una institución educativa de enseñanza básica y media. *Praxis & Saber*, *7*(13), 127 - 152. https://doi.org/10.19053/22160159.4169

Kawulich, B. (2005). La observación participante como método de recolección de datos. *Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research, 6*(2). doi:http://dx.doi.org/10.17169/fqs-6.2.466

Lang, S. (1990). *Cálculo.* Wilmington, Delaware, E.U.A.: Addison –Wesley Iberoamericana, S. A.

Latorre, A. (2005). *La investigación-acción. Conocer y cambiar la práctica educativa.* Barcelona, España: Graó.

López Cahun, J; Sosa Moguel, L. (2008). *Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato.* En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21: 308 - 318. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Malaspina, U. (2009*). Problemas de optimización en la educación básica: reflexiones y propuestas*. En Gaita, Cecilia (Ed.), IV Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas (pp. 45-59). Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Margolinas, C. (editor). Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22. *ICMI Study 22*, Jul 2014, Oxford, United Kingdom. 2013, 978-2-7466-6554-5. ⟨hal-00834054v3⟩

Marín, A. (2005). Tareas para el aprendizaje de las matemáticas: Organización y secuenciación. Trabajo presentado en el Seminario Análisis Didáctico en

Educación Matemática, Universidad de Málaga, España. Tareas para el aprendizaje de las matemáticas: Organización y secuenciación. Antonio Marín del Mora. Recuperado de https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Marin2005Tareas.pdf

Marquina J E; Ridaura R; Alvarez JL; Quintana M. 1996. Il Saggiatore un libro poco recordado. *Ciencias*, 41: 4 – 8. Recuperado de http://www.revistas.unam.mx/index.php/cns/article/view/11484/10809

Medina Mariño, A. C. y Rojas Morales, C. E. (2015). *Obstáculos cognitivos en el aprendizaje de la Matemática: el caso del concepto de límite*. En Flores, R. (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 28: 330 - 336. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Mendible, A. (2015). *La modelación matemática: una visión interesada de la realidad.* En Ortiz, J.; Iglesias, M. (Eds.), Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación (pp. 14-28). Maracay, Venezuela: Universidad de Carabobo.

Miras, M. (1999). Un punto de partida para el aprendizaje de nuevos contenidos: Los conocimientos previos. En Coll, C., Martin, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I (Ed.) *El constructivismo en el aula* (pp. 47 - 64). Barcelona, España: Editorial Graó.

Monje Álvarez, C. A. (2011). *Metodología de la investigación cualitativa y cuantitativa. Guía didáctica*. Neiva, Colombia. Universidad Surcolombiana.

Mora, C. D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Pedagogía*, *24*(70), 181-272. Recuperado de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922003000200002&lng=es&tlng=es.

Morales Urbina, E. (2009). Los conocimientos previos y su importancia para la comprensión del lenguaje matemático en la educación superior. *Universidad, Ciencia y Tecnología*, 13(52), 211-222. Recuperado de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-48212009000300004&lng=es&tlng=es.

Mora Zuluaga, A.; Ortíz Buitrago, J. (2015). Capacidades didácticas en el diseño de tareas con modelación matemática en la formación inicial de profesores. *Perspectiva Educacional, Formación de Profesores, 54*(1), 110-130.

Moreno Olivos, T. (2009). La enseñanza universitaria: una tarea compleja*. Revista de la Educación Superior XXXVIII* (3), N. 151, 115-38.

Mota Villegas, D. J., Valles Pereira, R. E. (2015). Papel de los conocimientos previos de en el aprendizaje de la matemática universitaria. *Acta Scientiarum,* 37 (1): 85 - 90. doi: 10.4025/actascieduc.v37i1.21040.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P. y Rodríguez-Muñiz, L. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. *Revista Iberoamericana de Educación Matemátic,* 39: 19 - 33.

Niño Rojas, V. M. (2011). *Metodología de la investigación*. Bogotá, Colombia: Ediciones de la U.

Peñaranda Ramírez, A. M., Prada Núñez, R. y Gamboa Suárez, A. A. (2019). Juego y enseñanza de las Matemáticas: Reflexiones teóricas para el trabajo de aula. *Revista Perspectivas*, 4(2), 80–84. https://doi.org/10.22463/25909215.2459

Pérez, Y, Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación*, 35(73): 169-194. Recuperado de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1010-29142011000200009&lng=es&tlng=es.

Perez Paz, A. (2019). Conocimientos previos e intervención educativa. *Acta educativa,* 2(1): 1-30. Recuperado de https://revista.universidadabierta.edu.mx/docs/Conocimientos%20previos%20e%20intervenci%C3%B3n%20docente.pdf

Perkins, D. (2001). *La escuela inteligente. Del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente*. Barcelona, España: Editorial Gedisa S.A.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos, & J. P. Ponte (Eds.), La actividad matemática en el aula (pp. 25-34). Barcelona: Graó.

Ponte, J. P. 2005. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desemvolvimiento curricular (p. 11-34). Lisboa: APM.

Poyla, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. (15[ta] reimpresión). México DF, México: Editorial Trillas.

Quesada Fernández, C. y Padilla Mora, E. (2019). *Límites de funciones en una variable y principales dificultades conceptuales de estudiantes en formación inicial.* En Yuri Morales-Lópezy Ángel Ruíz (ed) Educación Matemática en las Américas 2019. Comunicación presentada en XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Medellín, Colombia.

Quirós Lima, C., Vázquez Martínez, C., González González, F., Torres Mata, J. (2022). Estudio socioeducativo de los principales errores que realizan los alumnos en el tema de la integral definida como factor que impide la competencia requerida. RIDE, 12(25): 1 – 24: DOI: 10.23913/ride.v13i25.1347, P. 1 – 24.

Ramos, A. y Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insesgnamenato e nell'apprendimento della matematica. *Una prospettiva ontosemiotica. La Matematica e la sua didattica. 20*(4). 535-56. (traducción en lengua castellana). Recuperado de http://www.pagvf.esy.es/index_archivos/FontRamos.pdf

Ramos-Rodríguez, E., Martínez, P., Ponte, J. y Verdejo, A M. (2015). Desarrollo Profesional del Docente de Matemáticas a través de sus Tareas para el Aula propuestas en un Curso de Formación.*Bolema: Boletim de Educação Matemática*,*29*(51), 389-402. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a20 Electronic Document

Rodríguez, M. (2011). La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas. 77*, 35 – 49. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Articulos_01.pdf

Rodríguez, M. (2017*). Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática* / Mabel Rodríguez; coordinación general de Mabel Rodríguez. - 2a ed. - Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento, 2017 (autores Patricia Barreiro, Paula Leonian, Tamara Marino, Marcel D. Pochulu y Mabel A. Rodríguez)

Rodríguez Rodríguez, Rafael (2006). Investigación curricular: conceptos, alcances y proyecciones en instituciones de educación superior. *Hallazgos*, 6: 63-82. Reciérado de https://www.redalyc.org/articulo?id=4138/413835165005

Rodriguez, S y Belladona, S. (2006). *La lecto-escritura en Matemática*. En Ascheri, M. E. y Pizarro, R. A, (Compiladores y editores). I Reunión Pampeana de Educación Matemática: Memorias. Llevado a cabo en el I REPEM, Santa Rosa de la Pampa, Argentina.

Ruay Garcés, R.y Garcés J.L.(2015). *Diseño y construcción de instrumentos de evaluación de aprendizajes y competencias*. Colombia: Redipe.

Şahin Z. (2015). Cognitive analysis of students' learning of trigonometry in dynamic geometry environment a teaching experiment. (Tesis doctoral). School of Natural and Applied Sciences of middle east technical university, Ankara, Turkey.

Salazar Solórzano, L; Víquez García, L. (2019). Errores recurrentes en exámenes de cálculo diferencial. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32 (2): 563 – 571.

Sánchez-Matorros, G., García, M., Llinares, S., (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2): 267 – 296.

Schultz, K. T. (2009). Cognitive demand and technology use in high school Matematics teachers' selection and implementation of tasks. A Dissertation Submitted to the Graduate Faculty of The University of Georgia in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy. Athens, Georgia.

Schuster, A., Puente, M., Andrada, O, Maiza, M. (2013). La Metodología Cualitativa, Herramienta para Investigar los Fenómenos que Ocurren en el Aula. La Investigación Educativa. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología*, 4(2): 109 - 113. Recuperado de http://www.exactas.unca.edu.ar/riecyt/VOL%204%20NUM%202/TEXTO%207.pdf

Sepúlveda López, A, Medina García, C, Sepúlveda Jáuregui, D. I. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación matemática*, *21*(2), 79-115. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000200004&lng=es&tlng=es.

Smith, M y Stein, M. (1998). REFLECTIONS on Practice: Selecting and Creating mathematical Tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(5), 344-350. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/41180423.

Socarras, J. M. R. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. Revista iberoamericana de educación, 47(3), 1. Recuperado de https://rieoei.org/historico/deloslectores/2359Socarras-Maq.pdf

Sosa, L., Aparicio, E., Tuyub, J. (2008). *Diseño de actividades de matemáticas con el uso de tecnología.* En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1036-1045). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Steiman, J. (2008). *Más didáctica (en la educación superior).* Buenos Aires, Argentina: Miño y Dávila SRL Editores.

Stewart, J. (2006). *Cálculo: Conceptos y Contextos*. 3ra edición. Cengage Learning Latin America,

Stewart, J. (2010). Cálculo de una variable. Conceptos y contextos. 4ta edición. Cengage Learning. Australia.

Sullivan, P., Carke, D., Clarke, B. (2009). Converting Mathematics Tasks to Learning Opportunities: An Important Aspect of Knowledge for Mathematics Teaching. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(1), 85-105.

Swan, M. (2008) the design of multiple representation tasks to foster conceptual development. Recuperado de http://tsg.icme11.org/document/get/289

Tarzia, D. "Esta disciplina se aplica en todas las ciencias". En Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Comunicación, Divulgación Científica. 24/4/2015. Recuperado de http://www.conicet.gov.ar/esta-disciplina-se-aplica-entodas- las-ciencias/ Último acceso: 1 de abril de 2019.

Torroba, P.,Trípoli, M. M., Devece, E., Aquilano, L. (2019). Implementación de una propuesta sobre vectores, para articular Matemática y Física, con uso de TIC y actividad experimental. *Revista de Enseñanza de la Física, 31* (No. Extra), 697–705.

Vaira, S.; Avila, O; Contini, L. y Taborda, L. Enseñanza de la Matemática. desgranamiento y Acciones desde la Reflexión. Actas de II Jornadas de Investigación en Educación Matemática y V Jornadas de Educación Matemática. 26 y 27 de Julio de 2014. FHuC – UNL, Santa Fe, Argentina. Recuperado de http://www.fhuc.unl.edu.ar/materiales_congresos/CD_matematica%202014/pdf/Eje%205_EM% 20carreras%20no%20mat/ponencia%2040_Vaira_contini%20y%20otros.pdf

Vazquez, J. (2002). Matemáticas, Ciencia y Tecnología: una relación profunda y duradera. *Encuentros Multidisciplinares. 2002, 4*(11): 23 – 38. Recuperado de http://www.encuentros-multidisciplinares.org/Revistan%BA11/Juan%20Luis%20V%E1zquez.pdf(ultimo acceso 24/8/2018).

Villa-Ochoa, J., Bustamante, C. y Berrio, M. (2010). *Sentido de realidad en la modelación matemática*. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23: 1087 - 1096. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. doi: 10.13140/RG.2.1.2312.7769

Vrancken, S.; Gregorini, M.; Engler, A.; Müller, D. (2006). *Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite.* Premisa, 29: 9 - 19.

Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L. y Ye, K. (2012). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias.* Pearson Educación. México.

Walz, M. F., Contini, L., Bergesio, A., y Colombini, M. (2009). *Factores académicos en la deserción universitaria de una carrera que tiene a la matemática en su currículo*. En III Congreso Internacional de Educación: Construcciones y perspectivas. Miradas desde y hacia América Latina: Libro de Actas, Santa Fe, Argentina.

Walz, M.F, Contini, L. E., Avila, O. A. (2017). *Deserción universitaria ¿qué responsabilidad tiene la matemática en carreras orientadas a la salud?* En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (editor), VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática: Libro de actas, Madrid, España. (ISBN 978-84-945722-3-4)

Watson, A., Othami, M. Editors. (2015). *Task design in mathematics education an ICMI study 22.* Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/ 10.1007/978-3-319-09629-2.

Williner, B., Favieri, A., y Scorzo, R. (2020). Clasificación de tareas con software. Propuesta usando la aplicación *GeoGebra* para dispositivos móviles en carreras de ingeniería. *UNIÓN – Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16 (59), 293-309. Recuperado de* https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/144

Yengle Ruiz, C. (2009). Adaptación a la vida universitaria de estudiantes que desertaron asociada a la relación con compañeros de estudio. *UCV- Scientia,* 1 (1): 40 – 50.

Yoshiwara, K., Yoshiwara B. (2007). A Fresh Look at Teaching *Trigonometry*. En 33rd AMATYC Conferencia en el Annual Conference Minneapolis, Minnesota, USA.

Zaslavsky, O. (2009). Attention to similarities and differences: a fundamental principle for task design and implementation in mathematics education. Recuperado de http://tsg.icme11.org/document/get/290

Zolkower, B., Bressan, A. y Gallego, F. (2006). La corriente realista de didáctica de la matemática. Yupana, 3: 11 - 33. doi: /10.14409/yu.v1i3

Zuazua, E., Rodríguez del Río, R. (2002). Enseñar y aprender matemáticas. *Revista de Educación del MEC*, 329: 239-256. Recuperado de https://eprints.ucm.es/id/eprint/9538/1/enseniaryaprender.pdf

Anexos

Anexo 1: Planes de estudio de las carreras investigadas

Plan de estudio de la carrera de Licenciatura en Saneamiento Ambiental

Primer año

- Matemática I
- Química General
- Biología General
- Introducción al Saneamiento Ambiental y Salud Ocupacional
- Química Inorgánica
- Dibujo y Topografía
- Ecología General
- Matemática II

Segundo año

- Introducción a las Ciencias del Ambiente
- Estadística
- Química Orgánica
- Física
- Físico-Química
- Química Bio Orgánica
- Química Analítica
- Legislación Laboral y Ambiental-
- Educación Ambiental y Antropología Cultural

Tercer año

- Contaminación Ambiental
- Microbiología Sanitaria y Ambiental
- Control de Plagas y Vectores
- Informática
- Servicios Sanitarios
- Teledetección y SIG
- Higiene y Seguridad Alimentaria

•Gestión de Residuos

•Epidemiología y Salud Ambiental

•Higiene, Seguridad y Saneamiento Edilicio

Cuarto año

•Limnología

•Contaminación y Saneamiento del Suelo

•Toxicología General, Alimentaria y Laboral

Metodología de la Investigación

•Contaminación y Saneamiento del Agua

•Contaminación y Saneamiento del Aire

Quinto año

•Ecología de la Restauración

•Química Ambiental

•Biotecnología Ambiental

•Gestión Ambiental

•Tesina

•Ecotoxicología

Correlatividades

Asignatura	Debe tener aprobado	
	Para cursar	Para rendir
Matemática I	Curso de Articulación disciplinar en Matemática	Curso de Articulación disciplinar en Matemática
Matemática II	Matemática I	Matemática I

Condiciones especiales:

Si no tiene aprobada Matemática I y regularizada Matemática II el alumno no puede cursar: Estadística (segundo año primer cuatrimestre).

Si no tiene regularizada Matemática II, el alumno no puede cursar: Física, Físico-Química e Informática.

Si no tiene aprobada Matemática II, el alumno no puede cursar: Legislación Laboral y Ambiental, Educación Ambiental y Antropología Cultural.

Plan de estudios de la carrera Licenciatura en Higiene y Seguridad en el Trabajo

Primer Ciclo

- Matemática I y II
- Química General
- Biología General
- Dibujo y Topografía
- Química Inorgánica
- Introducción a las Ciencias del Ambiente
- Optativas I y II
- Entomología Sanitaria
- Física I y II
- Química Orgánica
- Microbiología
- Estadística
- Epidemiología
- Saneamiento I
- Saneamiento II
- Saneamiento III
- Saneamiento IV
- Saneamiento V
- Saneamiento VI
- Higiene y Seguridad en el Trabajo
- Educación para la Salud
- Taller Sanitario
- Administración de Salud

SEGUNDO CICLO

- Psicología
- Higiene y Seguridad en el Trabajo I
- Higiene y Seguridad en el Trabajo II
- Protección contra Incendio I
- Protección contra Incendio II
- Sociología

•Inglés I y II

•Metodología de la Investigación

•Estática y Resistencia de Materiales

•Protección y Seguridad Radiológica

•Legislación Sanitaria Ambiental

•Investigación Pericial

•Saneamiento y Medicina del Trabajo

•Tesina

Correlatividades

Asignatura	Debe tener aprobado	
	Para cursar	Para rendir
Matemática I	Curso de Articulación disciplinar en Matemática	Curso de Articulación disciplinar en Matemática
Matemática II	Matemática I	Matemática I

Condiciones especiales

Si no tiene aprobada Matemática I y regularizada Matemática II el alumno no puede cursar: Estadística y Física (segundo año primer cuatrimestre)

Si no tiene aprobada Matemática II, el alumno no puede cursar: Física II.

Los contenidos de las asignaturas Matemática I y Matemática II, son comunes a ambas carreras y se detallan a continuación.

Contenidos de Matemática I

Tema 1: Trigonometría

Razones trigonométricas. Relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo, de ángulos complementarios, suplementarios, opuestos que difieren en π, en $\pi/2$. Razones trigonométricas de ángulos especiales. Resolución de problemas que involucren triángulos rectángulos y oblicuángulos.

Tema 2: Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Eliminación de Gauss-Jordan. Eliminación gaussiana. Sistemas homogéneos de ecuaciones. Aplicaciones.

Tema 3: Vectores y Matrices

Vectores de n componentes. Operaciones con vectores. Matrices. Operaciones con matrices. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales. Inversa de una matriz cuadrada. Transpuesta de una matriz. Aplicaciones.

Tema 4: Determinantes

Definiciones. Propiedades de los determinantes. Relación entre el determinante de una matriz y su inversa. Regla de Cramer.

Tema 5: Vectores en el plano y en el espacio

Vectores en el plano. Producto escalar y proyecciones. Vectores en el espacio. Producto vectorial de dos vectores. Producto mixto. Rectas y planos en el espacio. Aplicaciones.

Tema 6: Elementos de Geometría analítica

Secciones cónicas: circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. Sus ecuaciones y elementos. Curvas planas y ecuaciones paramétricas. Coordenadas polares y gráficas en coordenadas polares.

Tema 7: Funciones

Concepto de función. Funciones polinómicas. Casos especiales: la función de primer y segundo grado. Función de proporcionalidad inversa. Funciones circulares. Función exponencial. Composición de funciones. Función inversa. Función logarítmica. Funciones valor absoluto: parte entera y definida por partes. Operaciones aritméticas con funciones conocidas. La curva logística. Efectos de constantes reales en las funciones trigonométricas.

Tema 8: Límites y continuidad

Introducción a los límites. Límite en un punto. Técnicas para calcular límites. Límites laterales. Continuidad en un punto y en un intervalo. Propiedades. Límites al infinito. Asíntota horizontal. Propiedades.

Contenidos de Matemática II

Tema 1: Derivada y estudio de funciones.

Pendiente de la recta tangente. Pendiente de una curva. Concepto de derivada. Función derivada. Reglas de derivación. Regla de la cadena. Problemas de razones relacionadas. Teoremas de las funciones derivables. Extremos relativos y absolutos. Funciones crecientes y decrecientes. Concavidad. Puntos de inflexión. Problemas de optimización. Trazados de curvas. Regla de L'Hopital. Fórmula de Taylor. Aproximación de funciones. Aplicaciones.

Tema 2: Integrales.

Primitiva de una función. La integral indefinida. Propiedades de la integral indefinida. Propiedades de la integral indefinida. Técnicas de integración. Área. La integral de Riemann. Propiedades. Teoremas fundamentales del Cálculo Integral. Aplicaciones de la integral definida.

Tema 3: Campos escalares

Funciones de varias variables reales, dominio y conjunto imagen. Superficie en el espacio. Gráficos y curvas de nivel. Derivadas parciales. Diferenciabilidad y gradiente. Plano tangente. Derivada direccional. Dirección de máxima variación. Problemas de aplicación.

Tema 4: Integrales múltiples.

Definición. Integrales dobles. Propiedades. Cálculo de integrales dobles sobre rectángulos, Integrales iteradas. Integrales dobles sobre regiones más generales, cambio a coordenadas polares. Aplicaciones de las integrales múltiples.

Tema 5: Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden.

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: lineales, exactas, variables separables. Aplicaciones.

Tema 6: Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Lineales de segundo orden.

Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes homogéneas y no homogéneas: métodos de resolución. Aplicaciones.

Anexo 2: Lista de cotejo para la revisión de los exámenes anteriores al año 2017

Tema evaluado:

Aspectos considerados	Si	No	Observaciones
1) Interpretación: - Identifica los datos - Realiza el planteo de la situación - Utiliza diferentes formas de representación de la consigna (gráfica, algebraica, textual, numérica, simbólica). - Comprende qué es lo solicitado			
2) Resolución: **-** Realiza procedimientos algebraicos (factorización, ecuaciones, ...) - Utiliza diferentes alternativas de resolución - Realiza cálculos numéricos (uso de calculadora, operaciones, ...) - Llega a un resultado matemático			
3) Generales: - Relaciona el resultado hallado con lo solicitado considerando los aspectos teóricos involucrados (relación teoría-práctica) - Solo posee habilidades algorítmicas y no se da cuenta de que ha cometido un error de cálculo que lo llevan a una solución incorrecta o absurda. - Analiza la unicidad o no de la respuesta. - Escribe la solución. - Interpreta la solución hallada en el contexto de la situación plateada.			

Anexo 3: Encuesta a docentes de la ESS-FBCB

FACULTAD DE BIOQUIMICA Y CIENCIAS BIOLOGICAS - UNL

Programa: Doctorado en Educación en Ciencias Experimentales.

Tema de tesis: Influencia del diseño de tareas en el aprendizaje de conceptos básicos de Matemática en carreras no matemáticas.
Objetivo: Analizar el impacto del diseño de tareas en el aprendizaje o asimilación de conceptos de matemática en los alumnos.

Alumna: Liliana Ester Contini
Orientadora: Dra. Tânia C. R. S. Gusmão.

Este cuestionario forma parte de las actividades de la investigación mencionada y tiene por finalidad de indagar si en la asignatura que Ud. dicta, necesita conocimientos del área Matemática. Si es así, determinar si los conocimientos de Matemática de los alumnos son suficientes para la comprensión y desarrollo de los contenidos propios de su asignatura.

Carrera:

Asignatura:

Año y cuatrimestre en el que se encuentra la asignatura en el plan de la carrera:

Docente de: **Teoría – Coloquio – Trabajos Prácticos** (tachar lo que no corresponda).

1) ¿Necesitan los alumnos del dominio de contenidos matemáticos para el desarrollo de sus clases? (tachar lo que no corresponda) **SI** **NO**
2) Si su respuesta es afirmativa, ¿considera Ud. que el no dominio de dichos contenidos por parte de los alumnos es un obstáculo para la comprensión y desarrollo de los contenidos propios de su materia? (tachar lo que no corresponda) **SI** **NO**
3) Si su respuesta es afirmativa, ¿podría, por favor, detallar cuáles son esos contenidos, ordenándolos de mayor a menor en cuanto al grado de obstaculización para su asignatura?

Muchas gracias por su colaboración!

Anexo 4: Guion de entrevista a docentes del Departamento de Matemática de la ESS-FBCB

a) Si es docente de alguna de las matemáticas que se dictan:

¿Qué temas de la asignatura en la que participas consideras que tiene dificultades para enseñarla?

¿Tenés idea del origen de las dificultades?

¿Cuáles son las dificultades que observas?

¿Observas que ocurre lo mismo en todas las carreras?

b) Si es docente de las otras áreas (Estadística o Informática)

¿La asignatura en la que das clases necesita de conceptos de matemática para su dictado? ¿Qué temas?, ¿es el no manejo de estos conceptos de matemática un obstáculo para el desarrollo de tu materia?

Las dificultades que observas, ¿son las mismas en los alumnos de todas las carreras?

Anexo 5: Enunciados y resoluciones de las tareas – año 2017 y 2019

Año 2017 - Primer cuatrimestre - Matemática I

Enunciados

Tarea N°1 para realizar fuera del aula: Trigonometría

Hola, te proponemos realizar algunas tareas para reforzar lo desarrollado en clase.

Objetivo: afianzar los conocimientos adquiridos en el aula respecto de la **resolución de triángulos oblicuángulos**.

Vamos a utilizar la ayuda de algunas páginas web en las que se pueden hacer actividades on line.

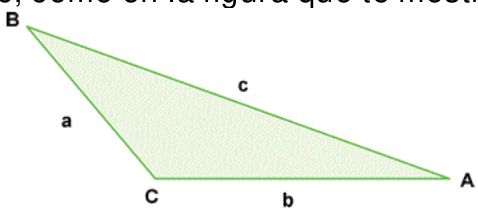
Además del material desarrollado en el apunte de la cátedra, con el fin de repasar algunos tópicos del tema Trigonometría que dimos en clase, podés visitar las siguientes páginas:

1. http://www.vadenumeros.es/cuarto/razones-trigonometricas.htm
2. http://www.vadenumeros.es/cuarto/relacion-razones-de-angulos.htm
3. http://www.vadenumeros.es/primero/formulas-trigonometricas.htm
4. http://www.vadenumeros.es/cuarto/triangulos-rectangulos.htm
5. http://www.vadenumeros.es/primero/trigonometria-resolver-triangulos.htm
6. http://www.vadenumeros.es/actividades/resolucion-de-triangulos.htm?a=25&A=60&B=70&Resolver1=Resolver

En ellas vas a encontrar desarrollados todos los temas dados y la que tiene el número 6) es una calculadora de triángulos.

Antes de comenzar a resolver un ejercicio, en primer lugar, tenés que leer con mucho cuidado el enunciado, confeccionar una figura donde pongas toda la información que está en él, darle nombres a los ángulos y a los lados del triángulo.

Por ejemplo, podes nombrar los vértices con las letras A, B o C y los lados opuestos a ellos con a, b y c, como en la figura que te mostramos a continuación:



Una vez que hiciste la figura, le pusiste en ella toda la información que encontraste en el enunciado, recién podés empezar a resolver un problema, que, en el contexto de esta tarea, significa, encontrar el valor de las amplitudes de los tres ángulos y las longitudes de los tres lados.

Te proponemos que resuelvas los siguientes ejercicios y problemas:

1) En los ítems a), b) y c) te damos los datos de lados y/o ángulos de triángulos. En cada uno de ellos hacé una gráfica ubicando los datos y hallá los ángulos y/o lados que faltan según el caso. Además, identificá y enunciá los teoremas que se usaron en el planteo de la resolución.

a) a = 1792m, b=4231m, c= 3184m.
b) a= 12m, b= 8m, A=150º
c) a= 72m, b= 57m, BĈA=75º

2) En un terreno ubicamos 2 puntos: A y B, al segundo de ellos no podemos llegar. Tomamos entonces un tercer punto C que dista de A 42.8m. Desde A y C se dirigen visuales al punto B que forma con el segmento AC ángulos: BÂC=54° y BĈA = 64º. Hallá la distancia entre A y B.

3) Sean A y B dos puntos inaccesibles, pero visibles ambos desde otros puntos accesibles C y D, separados entre sí 73.2m. Si los ángulos AĈD= 80º, BĈD= 43º, BDC= 32º y ADC= 23º, determiná la distancia entre A y B.

Una vez que los termines, nos los entregas para que los corrijamos y junto con tus compañeros analicemos los resultados encontrados. Recordá mencionar en todos los casos los teoremas que aplicaste en cada uno de los ejercicios propuestos.

Tarea N°2 para realizar fuera del aula: Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones

Hola, te proponemos realizar una tarea para reforzar lo desarrollado en clase.

El **objetivo** que nos planteamos al diseñar esta tarea es afianzar los conocimientos adquiridos en el aula respecto a las **operaciones con matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes**.

Ejercicio 1

a) Calcular el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

b) Clasificar, sin resolver, el sistema $Ax=b$.

Ejercicio 2

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=2$ y $A=\begin{pmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ 2a+b & 2d+e & 2g+h \end{pmatrix}$

a) Indicar si A es invertible.

b) ¿Cuántas soluciones admite el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Calcular $\det(A^2)+\det(6A^{-1})$.

Ejercicio 3

¿Para qué valores de x la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ no admite inversa?

Ejercicio 4

Para una cierta matriz A, se sabe que det A) = -1 y que det(2A) =-16. ¿Cuál es el orden de la matriz?

Ejercicio 5

Sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ y B la matriz que resulta de realizar en A las siguientes transformaciones: primero se multiplica A por sí misma, después se cambian de lugar la segunda fila y la tercera y finalmente, se multiplican todos los elementos de la segunda columna por -2. Calcular el determinante de la matriz B.

Ejercicio 6

Dada la Matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, hallar dos matrices X e Y que verifiquen $\begin{cases} X+Y^{-1}=M \\ X-Y^{-1}=M^T \end{cases}$

Ejercicio 7

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) El producto de matrices invertibles es invertible.

b) Sea M una matriz simétrica. Entonces el orden de M es par.

c) Sea N una matriz antisimétrica. Entonces det(N)=0.

d) Sea A una matriz de orden 3 tal que det(A)=-1. Entonces det(2A) = -2.

e) Si el sistema $Ax = 0$ es compatible indeterminado, entonces el sistema $Ax = b$ también lo es para cualquier vector b (de las dimensiones apropiadas).

f) Sea A una matriz que verifica A = A^2. Entonces det(A) = 0 o det(A) = 1.

g) Sea A una matriz simétrica de orden 3 que verifica $A^{-1}=A^t$. Entonces el sistema homogéneo $(A^{-1}+A^T)x=0$ Compatible Determinado.

Tarea N°3 para realizar fuera del aula: Vectores en R^3, recta y plano

Hola, seguimos proponiéndote tareas para realizar fuera del aula en temas que, sabemos, suelen tener dificultades. En esta oportunidad la tarea consiste en resolver algunos ejercicios sobre vectores en R^3, recta y plano.

Objetivo: afianzar los conocimientos adquiridos en el aula respecto a **vectores, plano y rectas en R^3**.

1. a) Hallar un vector de magnitud 3 que sea paralelo al vector $\vec{u} = \langle 2, 1, -1\rangle$.

   b) Hallar un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ (dado en a) y a $\vec{v} = \langle 1, 1, 0\rangle$

   c) Hallar dos vectores $\overrightarrow{w_1}$ y $\overrightarrow{w_2}$ que verifiquen las siguientes condiciones (simultáneamente):
   $\overrightarrow{w_1}$ es paralelo a $\vec{u}$.
   $\overrightarrow{w_2}$ es ortogonal a $\vec{u}$.
   $\vec{v} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$.

2. a) Determinar si los planos $\begin{cases} \pi_1: \quad x + y + 4z = 3 \\ \pi_2: \ 3x - 3y + 2z = 0 \\ \pi_3: -x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$ se intersecan en un punto.

   b) Si su respuesta es afirmativa, encuentre dicho punto.

3. Demostrar que para todo par de vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \Re^2$ (o $\Re^3$) se cumple que $|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$. Ejemplificar.

4. Sea φ el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Sabiendo que $\varphi > \pi/2$, indicar por qué las siguientes afirmaciones son falsas:
   a) $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$;
   b) El vector $\overrightarrow{proy_{\vec{v}} u}$ y el vector $\vec{v}$ forman un ángulo de 0 rad.

5. Dadas las rectas l: $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ y $r: x - 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$

   a) Determinar de dos formas diferentes la dirección de la recta l
   b) Determinar si las rectas l y r son ortogonales.

Tarea Nº4 para realizar fuera del aula: Trabajo con funciones por partes o a trozos

Ejercicio 1:

Dada la función $h(x) = \begin{cases} x-1 & si \;\; x \le 0 \\ \ln(x) & si \;\; 0 < x \le 1 \\ 3^{x-1} & si \;\; x > 1 \end{cases}$ completar o tachar lo que no corresponda:

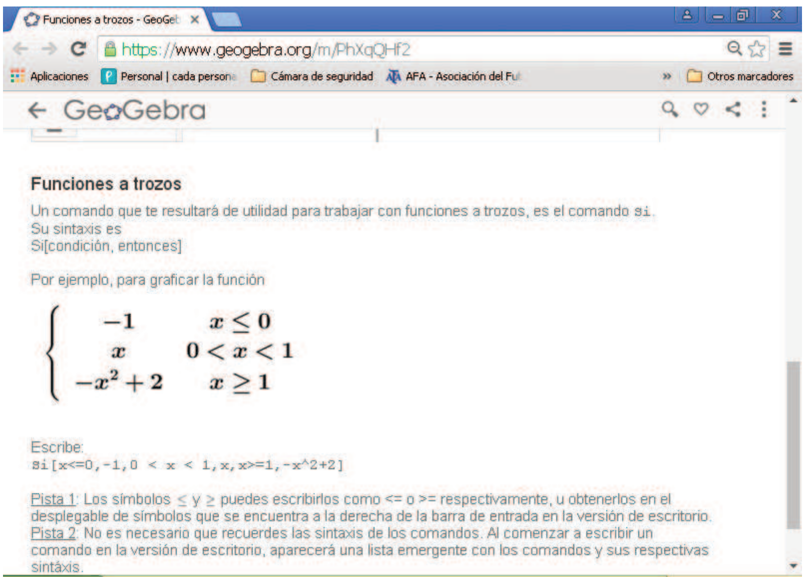
a. $h(-1)$ =_ _ _
b. $h(0)$ =_ _ _
c. $h(1)$ =_ _ _
d. $h(2)$ =_ _ _
e. Tiene asíntota vertical en x =_ _ _
f. En $x = 0$ la función **es**/**no es** continua porque _
g. En $x = 1$ la función **es**/**no es** continua porque _

Ejercicio 2:

a. Graficar las funciones que se indican a continuación.
b. Dar su dominio e imagen.
c. Intersecciones con los ejes, intervalos de positividad y negatividad.
d. intervalos de crecimiento y decrecimiento.
e. Concavidad.
f. Analizar si las funciones son continuas en su dominio.

i) $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \\ 2^x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ ii) $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ \dfrac{9}{x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

¿Se puede utilizar el *GeoGebra* para graficar funciones por partes?
Sí, aquí te compartimos un tutorial para que lo puedas hacer.

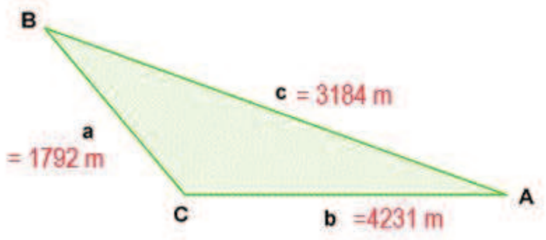


Resoluciones

Tarea N°1 para realizar fuera del aula

1) En los ítems a), b) y c) te damos los datos de lados y/o ángulos de triángulos. En cada uno de ellos hacé una gráfica ubicando los datos y hallá los ángulos y/o lados que faltan según el caso. Además, identificá y enunciá los teoremas que se usaron en el planteo de la resolución.

a) a = 1792m, b=4231m, c= 3184m.
Para empezar a resolver este problema, en primer lugar, hagamos un croquis con los datos.
Datos:



Incógnitas: amplitud de los tres ángulos interiores del triángulo: $\hat{A}, \hat{B}\ y\ \hat{C}$.

Resolución: Con los datos que tenemos, para calcular la amplitud de los tres ángulos podemos aplicar tres veces el teorema del coseno.

Cálculo de la amplitud del ángulo $\hat{C}$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(\hat{C})$$

Despejamos y finalmente nos queda $\hat{C} = arc\ cos\left(\frac{c^2-a^2-b^2}{-2.a.b}\right)$

Reemplazando por los datos $\hat{C} = arc\ cos\left(\frac{(3184)^2-(1792)^2-(4231)^2}{-2.1792.4231}\right) \cong 43°\ 38'\ 8{,}25''$

Procedemos de manera similar para calcular las amplitudes de los otros dos ángulos

$$\hat{A} = arc\ cos\left(\frac{(1792)^2-(3184)^2-(4231)^2}{-2.3184.4231}\right) \cong 22°\ 51'\ 13{,}65''$$

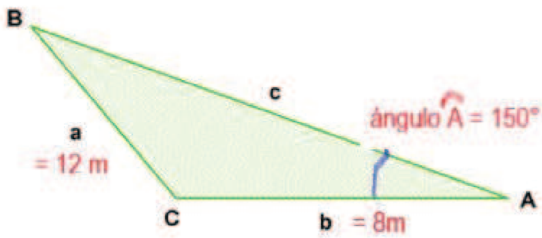
$$\hat{C} = arc\ cos\left(\frac{(4231)^2-(1792)^2-(3184)^2}{-2.1792.3184}\right) \cong 113°\ 30'\ 38{,}10''$$

Verificación: La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, en este caso hacemos:

$$43°\ 38'\ 8{,}25'' + 22°\ 51'\ 13{,}65'' + 113°\ 30'\ 38{,}10'' = 180°\ 0'0''$$

b) a= 12m, b= 8m, A=150º

Datos:



Incógnitas: longitud del lado **c** y amplitud de los ángulos $\hat{B}\ y\ \hat{C}$
Resolución: Con los datos que tenemos para hallar la amplitud del ángulo $\hat{B}$ podemos aplicar el teorema del seno: $\frac{sen\ (\hat{B})}{b} = \frac{sen\ (\hat{A})}{a} = \frac{sen\ (\hat{C})}{c}$
De esta expresión, si elegimos, $\frac{sen\ (\hat{B})}{b} = \frac{sen\ (\hat{A})}{a}$, podemos calcular la amplitud del ángulo $\hat{B}$. Despejando nos queda: $\hat{B} = arc\ sen\left(\frac{b}{a} sen\ (\hat{A})\right) = sen\ (150°)\frac{8}{12} \cong 19°\ 28'\ 16{,}39''$
La amplitud del ángulo $\hat{C}$ la podemos calcular haciendo $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) =$ $10°\ 31'\ 43{,}61''$.
Para calcular la longitud del lado c, aplicamos nuevamente el teorema del seno, utilizando:
$\frac{sen\ (\hat{A})}{a} = \frac{sen\ (\hat{C})}{c}$ y de esta expresión despejamos **c.**

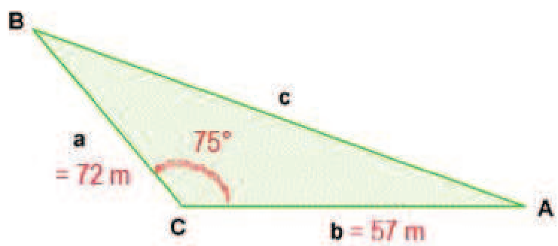
$$c = a\ \frac{sen\ (\hat{C})}{sen\ (\hat{A})} \cong 4{,}39\ m$$

También podemos hallar c, aplicando el teorema del coseno.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(\hat{C})} = \sqrt{(12)^2 + 8^2 - 2.12.8.\cos(10°31',61'')}$$

$$c\ \approx 4{,}39\ m$$

c) a= 72m, b= 57m, BĈA=75º
Datos:



Incógnitas: Longitud del lado **c**, amplitud de los ángulos $\widehat{CAB}$ y $\widehat{CBA}$.
Resolución: Para calcular el lado **c**, usamos el teorema del coseno que, aplicado a este problema nos queda:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(\widehat{BCA})$$

$$c = \sqrt{(72)^2 + (57)^2 - 2.72\ .57.\cos(75°)} \approx 79{,}43\ m$$

Una vez que calculamos la longitud del lado **c**, podes calcular, la amplitud de los ángulos $\widehat{CAB}$ y $\widehat{CBA}$ aplicando el teorema del seno: $\frac{sen\ (\widehat{CAB})}{a} = \frac{sen(\widehat{ABC})}{b} = \frac{sen(\widehat{BCA})}{c}$

Para calcular la amplitud del ángulo $\widehat{CAB}$, elegimos el primer y tercer término de la igualdad del teorema del seno $\frac{sen\,(\widehat{CAB})}{a} = \frac{sen(\widehat{BCA})}{c}$ operando algebraicamente llegamos a

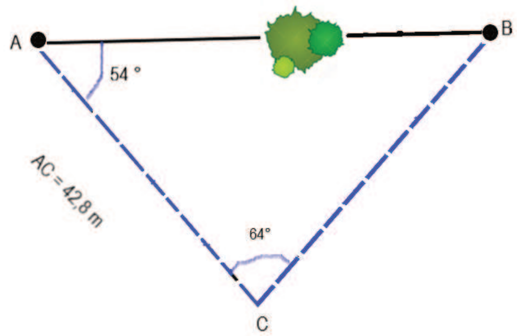
$$\widehat{CAB} = arc\ sen\left(\frac{a}{c}sen\left(\widehat{BCA}\right)\right) = arc\ sen\left(\frac{72}{79{,}43}sen(75°)\right) \approx 61°\ 7'0{,}91''$$

El otro ángulo, podemos calcularlo de dos formas:
Usando el teorema del seno, ahora elegís de la igualdad el segundo y el tercer término $\frac{sen(\widehat{ABC})}{b} = \frac{sen(\widehat{BCA})}{c}$ y luego operando algebraicamente obtenemos la amplitud del ángulo
$\widehat{ABC} = arc\ sen\left(\frac{b}{c}\ sen\ (\widehat{BCA})\right) \approx arc\ sen\ \left(\frac{57}{79{,}43}sen(75°)\right) \approx\ 43°\ 52'59{,}09''$
La otra forma de hallar la amplitud del tercer ángulo interior del triángulo es aplicando que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

$$\widehat{ABC} = 180° - \left(\widehat{BCA} + \widehat{CAB}\right) = 180° - (75° +\ 61°\ 7'0{,}91'') = 43°\ 52'59{,}09''$$

2) En un terreno ubicamos 2 puntos: A y B, al segundo de ellos no podemos llegar. Tomamos entonces un tercer punto C que dista de A 42.8m. Desde A y C se dirigen visuales al punto B que forma con el segmento AC ángulos: BÂC=54° y BĈA = 64º. Hallá la distancia entre A y B.

Datos



Incógnita: distancia ente los puntos A y B
Resolución: Con los datos que tenemos podemos calcular la amplitud del ángulo $\hat{B}$:

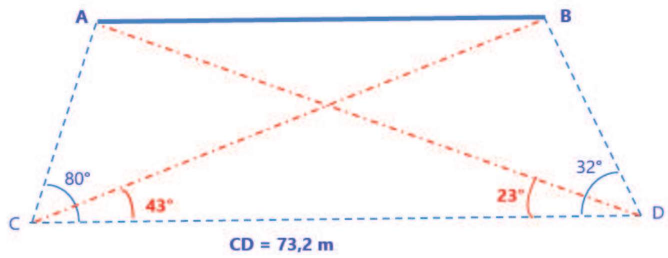
$$\hat{B} = 180° - \left(\hat{A} + \hat{C}\right) = 180° - (54° + 64°) = 62°$$

Habiendo obtenido el valor de amplitud de $\hat{B}$, podemos aplicar el teorema del seno para calcular la distancia entre los puntos A y B, $\frac{\overline{AB}}{sen(\hat{C})} = \frac{\overline{AC}}{sen\ (\hat{B})}$, despejando y reemplazando por los valores numéricos disponibles tenemos

$$\overline{AB} = \overline{AC}\frac{sen(\hat{C})}{sen\ (\hat{B})} = 42{,}8\frac{sen(64°)}{sen\ (62°)} \approx 43{,}57\ m$$

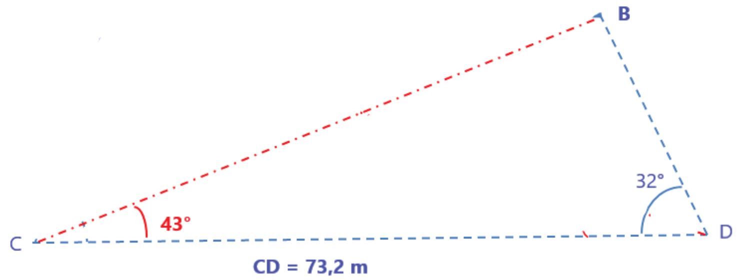
3) Sean A y B dos puntos inaccesibles, pero visibles ambos desde otros puntos accesibles C y D, separados entre sí 73.2m. Si los ángulos AĈD= 80º, BĈD= 43º, BDC= 32º y ADC= 23º, determiná la distancia entre A y B.

Datos:



Incógnita: Distancia entre los puntos A y B.

Resolución: Este problema puede resolverse de diversas formas, a continuación, te proponemos una.
Vamos a dividir, en función de los datos la figura en tres triángulos:
Triángulo 1



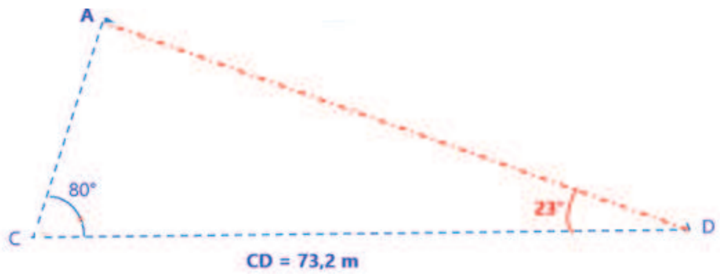
En este triángulo vamos a calcular la longitud del lado $\overline{CB}$, para ello tenemos que calcular la amplitud del ángulo $\hat{B}$.
Con los datos disponibles $\hat{B} = 180° - (43° + 32°) = 105°$
La longitud del lado $\overline{CB}$ se calcula aplicando el teorema del seno

$$\frac{\overline{CB}}{sen(42°)} = \frac{73{,}2}{sen(105°)}$$

Operando algebraicamente obtenemos

$$\overline{CB} = 73{,}2\frac{sen(42°)}{sen\ (105°)} \approx 40{,}16\ m$$

Triángulo 2



En este triángulo vamos a calcular la longitud del lado $\overline{AC}$, para ello debemos calcular la amplitud del ángulo $\hat{A}$.

$$\hat{A} = 180° - (80° + 23°) = 77°$$

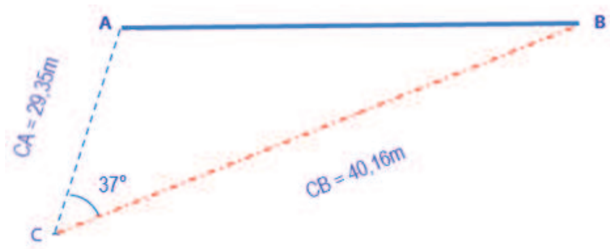
La longitud del lado $\overline{CA}$ se calcula aplicando el teorema del seno

$$\frac{\overline{CA}}{sen(23°)} = \frac{73{,}2}{sen(77°)}$$

Operando algebraicamente obtenemos

$$\overline{CB} = 73{,}2\frac{sen(23°)}{sen\ (77°)} \approx 29{,}35\ m$$

Triángulo 3



La distancia entre los puntos A y B se pude calcular en este triángulo aplicando el teorema del coseno

$$\overline{AB}^2 = \overline{CA}^2 + \ \overline{CB}^2 - 2.\overline{CA}.\overline{CB}.\cos(\hat{C})$$

Reemplazando por los datos y operando obtenemos la distancia entre A y B que es el objetivo de este problema

$$\overline{AB} = \sqrt{(29{,}35)^2 + \ (40{,}16)^2 - 2.29{,}35\ .40{,}16.\cos(37°)} \approx 24{,}32m.$$

Tarea N°2 para realizar fuera del aula

Ejercicio 1

a) Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 10 \end{pmatrix}$

Se puede calcular de dos formas, por propiedades, la fila 3 es el resultado de sumar a la fila 1 la fila 2 multiplicada por 2, como el determinante tiene una fila que es combinación lineal de otras dos, su valor es cero.
Otra forma es aplicar la regla de Sarrus, dado que se pide calcular el determinante de una matriz de 3x3. También se puede calcular utilizando la definición o bien con una aplicación gratuita para celular como es *"Matriz Operations"*.

b) Clasificar, sin resolver, el sistema $A.x = b$

Como la matriz de coeficientes del sistema tiene determinante igual a cero, no posee inversa. Recordemos que la condición para la existencia de la matriz inversa, es que su determinante sea diferente de cero.
Esto implica que el sistema de ecuaciones lineales dado no tiene solución única.
La consigna nos pide que lo clasifiquemos, para ello necesitamos saber las características del término independiente y esto no está dado, razón por la cual para clasificarlo debemos contemplar las dos situaciones posibles, que $b = \vec{0}$ (vector nulo) o bien que $b \neq \vec{0}$.

Si $b = \vec{0}$, el sistema de ecuaciones lineales es homogéneo y, cuando la matriz de coeficientes del sistema no es invertible, este sistema tiene infinitas soluciones, por lo que se lo clasifica como *Compatible o consistente indeterminado*.

Si $b \neq \vec{0}$, el sistema de ecuaciones lineales es NO homogéneo, y cuando la matriz de coeficientes del sistema no es invertible, este sistema podría tener infinitas soluciones, por lo que se lo clasificaría como *Compatible o consistente indeterminado*, o bien no tener solución, razón por la cual se lo clasificaría en *Incompatible o Inconsistente.* Resumiendo, cuando la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo no tiene inversa, su determinante es cero, no podemos clasificarlo sin resolverlo, solo podemos afirmar que no es *Compatible o Consistente determinado*, es decir, no tiene solución única.

Ejercicio 2

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$ y que $A = \begin{pmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ 2a+b & 2d+e & 2g+h \end{pmatrix}$

a) Indicar si la matriz A es invertible.

Para saber si la matriz A es invertible calculemos el valor de su determinante

$$\det(A) = \begin{vmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ 2a+b & 2d+e & 2g+h \end{vmatrix}$$

Si analizamos la expresión vemos que la tercera fila tiene sumada la segunda fila. Recordemos la propiedad de los determinantes: "si a una fila (o columna) le sumamos otra fila (o columna) multiplicada por un número, el determinante no cambia" y esto nos permite hacer:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ 2a+b & 2d+e & 2g+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ 2a & 2d & 2g \end{vmatrix}$$

Observemos que ahora, la fila 3 quedó multiplicada por dos, recordemos la propiedad: "al multiplicar un determinante por un número, implica multiplicar una fila (o columna) por ese número". En este caso queda

$$\det(A) = \begin{vmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ 2a & 2d & 2g \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ a & d & g \end{vmatrix}$$

Si recordamos la propiedad "si en un determinante se intercambian dos líneas de lugar entre sí, el determinante queda multiplicado por -1. En este caso, intercambiemos la fila 1 con la fila 3.

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ a & d & g \end{vmatrix} = 2\,(-1)\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

Si recordamos la propiedad: "el determinante de una matriz es igual al de su matriz transpuesta" y lo aplicamos al cálculo que estamos haciendo, nos queda:

$$\det(A) = 2\,(-1)\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2\,.\,2 = -4$$

Luego de todo lo realizado, podemos concluir que: "como $\det(A) = 4$, número diferente de cero, la matriz A es invertible.

b) ¿Cuántas soluciones admite el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Como la matriz de coeficientes de este sistema de ecuaciones lineales no homogéneo es la matriz del inciso a), acabamos de mostrar que es invertible (no singular), por lo tanto, el sistema es compatible determinado. Esto quiere decir que tiene solución única.

Ejercicio 3

¿Para qué valores de x la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$?

Para que la matriz dada no admita inversa, su determinante debe valer cero. Calculemos el determinante desarrollándolo por los elementos de la tercera columna, que tiene dos ceros.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = x(-2+3) = x$$

Si el determinante es cero, la única posibilidad es que $x = 0$.

Ejercicio 4
Para una cierta matriz A, se sabe que $\det(A) = -1$ y que $\det(2A) = -16$. ¿Cuál es el orden de la matriz?

Para resolver este problema, tenemos que utilizar la propiedad: $\det(k.A) = k^n.\det(A)$ con k una constante numérica y n, el orden de la matriz. Entonces,

$$-16 = \det(2A) = 2^n \det(A) = 2^n(-1)$$

$-16 = 2^n(-1)$ de donde obtenemos que $n = 4$

La respuesta a la consigna es: "el orden de la matriz es 4".

Ejercicio 5
Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ y B la matriz que resulta de realizar en A las siguientes transformaciones: primero se multiplica A por sí misma, después se cambian de lugar la segunda y la tercera fila y finalmente, se multiplican todos los elementos de la segunda columna por -2. Calcular el determinante de B.

Calculemos $\det(A) = 8$

Primero hacemos $A.A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 34 & 49 \\ 40 & 31 & 44 \\ 134 & 120 & 169 \end{pmatrix}$

Luego intercambiamos de lugar la segunda y la tercera fila $\begin{pmatrix} 54 & 34 & 49 \\ 134 & 120 & 169 \\ 40 & 31 & 44 \end{pmatrix}$

Multiplicamos por -2 la segunda columna, $\begin{pmatrix} 54 & -68 & 49 \\ 134 & -240 & 169 \\ 40 & -62 & 44 \end{pmatrix}$

Finalmente $B = \begin{pmatrix} 54 & -68 & 49 \\ 134 & -240 & 169 \\ 40 & -62 & 44 \end{pmatrix}$, si calculamos $\det(B) = 128$

Si ahora calculamos el determinante usando las propiedades, nos da

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 54 & -68 & 49 \\ 134 & -240 & 169 \\ 40 & -62 & 44 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 54 & 34 & 49 \\ 134 & 120 & 169 \\ 40 & 31 & 44 \end{vmatrix} = -2\,.(-1) \begin{vmatrix} 54 & 34 & 49 \\ 40 & 31 & 44 \\ 134 & 120 & 169 \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = -2\,.(-1)\left(\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 10 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 10 \end{vmatrix} \right) = 2.(\det(A))^2 = 2\,.8^2 = 128$$

Ejercicio 6
Dada la Matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, hallar dos matrices X e Y que verifiquen $\begin{cases} X + Y^{-1} = M \\ X - Y^{-1} = M^T \end{cases}$

Es un sistema de ecuaciones matricial, donde las incógnitas son las matrices X e Y, ambas de 2x2.

Si sumamos las dos ecuaciones nos queda: $2X = M + M^T$, de donde podemos obtener X

$$X = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Si restamos las dos ecuaciones del sistema, podemos obtener Y^{-1}

$$Y^{-1} = \frac{1}{2}(M - M^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = (Y^{-1})$$

Ejercicio 7

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar cada caso.

a) El producto de matrices invertibles es invertible.

Verdadero:

Si A y B son matrices invertibles el producto se calcula así $(\mathrm{A.B})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}.\mathrm{A}^{-1}$.

b) Sea M una matriz simétrica. Entonces el orden de M es par.

Falso:

sea $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, una matriz de 3x3.

Calculemos $C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, vemos que $C^T = C$ lo que nos indica que C es una matriz simétrica y su orden es impar.

c) Sea A una matriz de orden 3 tal que $\mathbf{det(A) = -1}$. Entonces $\mathbf{det(2A) = -2}$.

Falso:

Calculemos $\det(2\mathrm{A}) = 2^3 \det(A) = 8.(-1) = -8$.

d) Si el sistema $\boldsymbol{A.x = 0}$ es compatible indeterminado, entonces el sistema $\boldsymbol{A.x = b}$ también lo es para cualquier vector b (de las dimensiones apropiadas).

Falso:

Si el sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado a un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo sea compatible indeterminado (infinitas soluciones), no nos permite predecir que este último también va a ser compatible indeterminado, debido a que, si la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones no homogéneo es singular, este puede ser compatible indeterminado o incompatible. En esta situación, lo único que podemos afirmar es que no es compatible determinado.

e) Sea A una matriz simétrica de orden 3 que verifica $\boldsymbol{A^{-1} = A^T}$. Entonces el sistema homogéneo $\boldsymbol{(A^{-1} + A^T).x = 0}$ es Compatible Determinado.

Verdadero:

Tenemos que probar que la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales homogéneo dado tiene determinante diferente de cero, para ello usamos la información que $A^{-1} = A^T$.

En primer lugar existe A^{-1}, por lo tanto existe una matriz A cuya inversa nos dieron que es no singular, $\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$, de donde surge que $\det(A^{-1}) \neq 0$.

En el sistema de ecuaciones homogéneo, usemos que $A^{-1} = A^T$ para calcular el $\det(A^{-1} + A^T) = \det(A^{-1} + A^{-1}) = \det(2A^{-1}) = 2^3.\det(A^{-1}) \neq 0$
En el sistema de ecuaciones lineales homogéneo dado, $(A^{-1} + A^T).x = 0$, la matriz de coeficientes es no singular, entonces, es compatible determinado.

Tarea N°3 para realizar fuera del aula

1. a) Hallar un vector de magnitud 3 que sea paralelo al vector $\vec{u} = \langle 2, 1, -1\rangle$.
En primer lugar debemos obtener el vector unitario de $\vec{u}$. Para ello, calculamos su magnitud $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$, luego hacer $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\langle 2,1,-1\rangle$.
Una vez obtenido el vector unitario en la dirección de u, lo multiplicamos por 3. El vector obtenido es $\langle \frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{-3}{\sqrt{6}}\rangle$.

b) Hallar un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ (dado en a) y a $\vec{v} = \langle 1, 1, 0\rangle$
En primer lugar buscamos un vector ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, esto lo logramos calculando el vector producto vectorial.

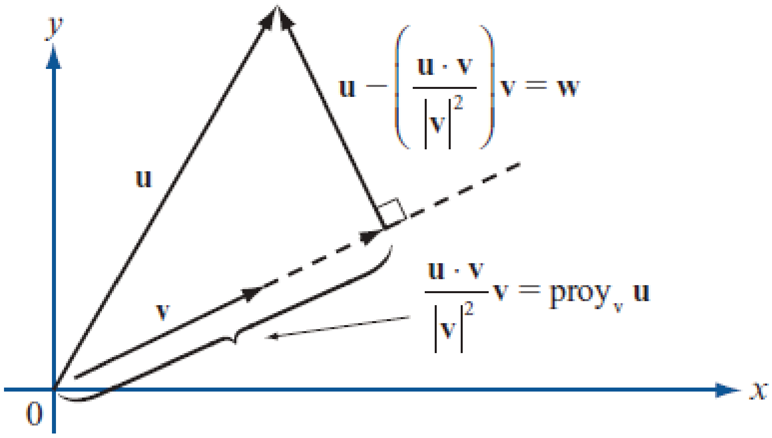
$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \langle 1, -1, 1\rangle$$

Luego calculamos el vector unitario del vector hallado $\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle$, que es el vector pedido.

c) Hallar dos vectores $\overrightarrow{w_1}$ y $\overrightarrow{w_2}$ que verifiquen las siguientes condiciones (simultáneamente):

- **$\overrightarrow{w_1}$ es paralelo a $\vec{u}$.**
- **$\overrightarrow{w_2}$ es ortogonal a $\vec{u}$.**
- **$\vec{v} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$.**

Si recordamos el tema proyecciones, cada vez que proyectamos un vector sobre otro, se generan dos vectores, uno paralelo al vector sobre el que proyectamos y otro ortogonal a ese. Como vemos en la figura



En este caso lo que se está solicitando es la descomposición del vector $\vec{v}$ en dos direcciones ortogonales, uno paralelo al vector $\vec{u}$, que se va a llamar $\overrightarrow{w_1}$ y otro ortogonal al vector $\vec{u}$, que llamaremos $\overrightarrow{w_2}$.

$\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{proy_u^{\vec{v}}} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} = \frac{3}{\sqrt{6}}\langle 2, 1, -1\rangle$, paralelo a $\vec{u}$.

$\overrightarrow{w_2} = \vec{v} - \overrightarrow{proy_u^{\vec{v}}} = \langle 1, 1, 0\rangle - \frac{3}{\sqrt{6}}\langle 2, 1, -1\rangle$.

2. a) Determinar si los planos $\begin{cases} \pi_1: \quad x + y + 4z = 3 \\ \pi_2: \; 3x - 3y + 2z = 0 \\ \pi_3: \; -x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$ **se intersecan en un punto.**

Si los tres planos se intersecan en un punto, el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas generado por sus ecuaciones debería ser compatible determinado. Si recordamos que cuando un sistema es compatible determinado, la matriz de coeficientes del sistema es invertible y por ende tiene determinante no nulo, rápidamente podemos determinar si el sistema tiene o no solución única.
Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$$

Como vemos, el determinante de la matriz de coeficientes del sistema es diferente de cero, la matriz es invertible, por lo tanto, hay solución única.

b) Si su respuesta es afirmativa, encuentre dicho punto.

Para hallar este punto, hay que resolver el sistema de ecuaciones. Se puede hacer utilizando Gauss o calculando la inversa y resolviendo la ecuación matricial o utilizando algún programa o aplicación gratuita para celular.
Si hacemos esto, el punto intersección de los tres planos es P = (-17/12; -7/12; 5/4).

3. Demostrar que para todo par de vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \Re^2$ (o $\Re^3$) se cumple que $|\vec{u}.\vec{v}| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$. Ejemplificar.

Sea θ el ángulo que forman los vectores, aplicando la definición de producto punto o producto escalar tenemos.
$|\vec{u}.\vec{v}| = \big||\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\theta)\big| \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$.
La condición de menor o igual ocurre porque $|\cos(\theta)| \leq 1$
Por ejemplo, $\vec{u} = (-1, 1)$ y $\vec{v} = (3, 0)$, forman entre sí un ángulo $\theta = 135°$.

$$|\vec{u}.\vec{v}| = \big||\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\theta)\big| = \sqrt{2}.3.|\cos(135°)| = 3$$

$$|\vec{u}|.|\vec{v}| = \sqrt{2}.3 \approx 4{,}24$$

4. Sea φ el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Sabiendo que φ > π/2, indicar por qué las siguientes afirmaciones son falsas:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$
Es falso porque si recordamos que el producto punto o escalar entre dos vectores se puede calcular como el producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman los vectores, como el ángulo φ es mayor que π/2, su coseno es negativo, entonces el producto escalar debería dar un número negativo.

b) El vector $\overrightarrow{proy_{\vec{v}}u}$ y el vector $\vec{v}$ forman un ángulo de 0 rad.
Es falso porque si el ángulo entre los vectores es mayor a π/2 rad, el producto escalar entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un número negativo, al hacer el cálculo del vector proyección este tiene dirección opuesta a $\vec{v}$, por lo tanto el ángulo que forman el vector $\overrightarrow{proy_{\vec{v}}u}$ y el vector $\vec{v}$ es π.

5. Dadas las rectas l: $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ y $r: x - 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$

a) Determinar de dos formas diferentes la dirección de la recta l
Podemos hallar la dirección de la recta l de dos formas,
i) resolviendo el sistema de ecuaciones y la otra vectorialmente, observando que las ecuaciones que nos dieron son las ecuaciones de dos planos, y
ii) utilizando los vectores ortogonales de los mismos, porque la recta está contenida en ellos, y su vector dirección es ortogonal a ambos vectores normales a los planos.

Opción *i*) Para resolver el sistema, utilizamos Gauss, armamos la matriz ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & |0 \\ 1 & -1 & 1 & |2 \end{pmatrix}$$

queremos hacer cero el elemento 2,1, para ello restamos a la fila 2 la fila 1 y nos queda

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & |0 \\ 0 & 2 & 0 & |2 \end{pmatrix}$$

como vemos nos quedó un sistema compatible indeterminado, vamos a tener que agregar una ecuación para armar la solución, el sistema ahora nos queda

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 0x + 2y + 0z = 2 \quad \text{con } \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

De aquí, nos queda la solución x= 3 - λ; y = 1; z = λ.
Si escribimos la solución de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda \\ 1+0\lambda \\ 0+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\lambda$$

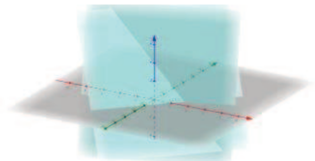
lo que obtenemos es la ecuación de la recta en forma vectorial paramétrica, donde obtenemos el vector dirección que es $\langle$-1, 0, 1$\rangle$.

a) La otra forma es identificando en cada ecuación del plano dada los vectores normales a cada uno de ellos: $\overrightarrow{n_1} = (1, -3, 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, -1, 1)$.
Ahora hacemos el producto cruz entre ellos:

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 0, 2) = 2(-1, 1, 1)$$

Si observamos el vector obtenido por el producto cruz, nos dio el vector del inciso anterior multiplicado por dos, es decir un vector paralelo.
Como lo que buscamos es la dirección de la recta determinada por dos planos, no es importante qué vector hallemos, sino que hayamos obtenidos dos vectores paralelos, como lo que obtuvimos en este caso.

Si usamos el *GeoGebra* vamos a poder visualizar la recta generada por la intersección de los planos.



En la figura, la recta que estamos analizando es la línea que se genera por la intersección de los dos planos pintados de celeste y el plano de color gris es el plano coordenado xy.

b) Determinar si las rectas l y r son ortogonales.

Para determinar esto debemos recuperar de las rectas *l* y *r* sus vectores dirección y hacer el producto escalar entre ellos. Si da cero, entonces las rectas son ortogonales.
Vector dirección de la recta *l*: $\overrightarrow{u_l} = (-1, 1, 1)$
Vector dirección de la recta r: $\overrightarrow{u_r} = (1, 2, 3)$
El producto escalar o producto punto entre ellos es $\overrightarrow{u_r} . \overrightarrow{u_r} = -1 .1 + 1.2 + 1. 3 = 2 \neq 0$
Concluimos que las rectas no son ortogonales.

Tarea Nº 4 para realizar fuera del aula: Trabajo con funciones por partes o a trozos

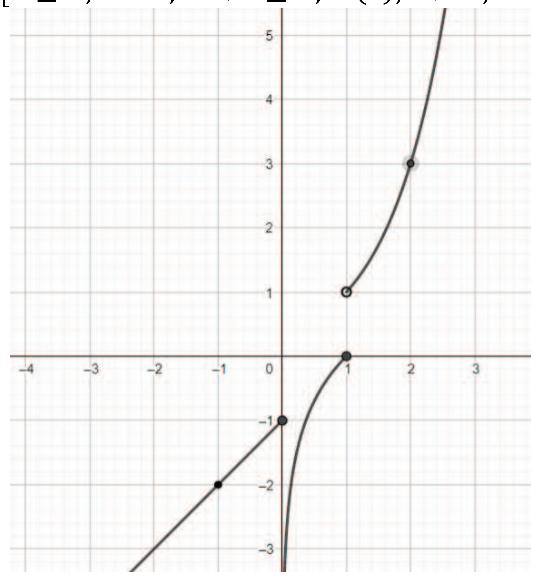
Ejercicio 1:

Dada la función $h(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x \leq 0 \\ \ln(x) & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 3^{x-1} & si \quad x > 1 \end{cases}$ completar o tachar lo que no corresponda:

Para una mejor visualización de la función hagamos la gráfica con la ayuda del *GeoGebra*.

El comando que vamos a utilizar es:

$$\mathrm{Si}[\mathrm{x} \leq 0, \mathrm{x}-1, 0 < \mathrm{x} \leq 1, \ln(\mathrm{x}), \mathrm{x} > 1, 3^{\mathrm{x}-1}]$$



h. $h(-1)$ = **(-1-1) = -2**
i. $h(0)$ = **(0-1) = -1**
j. $h(1)$ = **ln(1) = 0**
k. $h(2)$ = **3^{2-1} = 3**
l. Tiene asíntota vertical en *x* = **0**
m. En *x* = 0 la función **~~es~~/no es** continua porque **no se verifica la definición de función continua en el punto: $\boldsymbol{h(x=0) \neq \lim_{x\to 0} h(x)}$**

$\mathrm{h}(\mathrm{x}=0) = -1$

$\lim_{x\to 0^-} h(x) = -1$ y $\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$, al tener límites laterales diferentes la función no tiene límite en x= 0.

n. En *x* = 1 la función **~~es~~/no es** continua porque **no se verifica la definición de función continua en el punto: $\boldsymbol{h(x=1) \neq \lim_{x\to 1} h(x)}$**

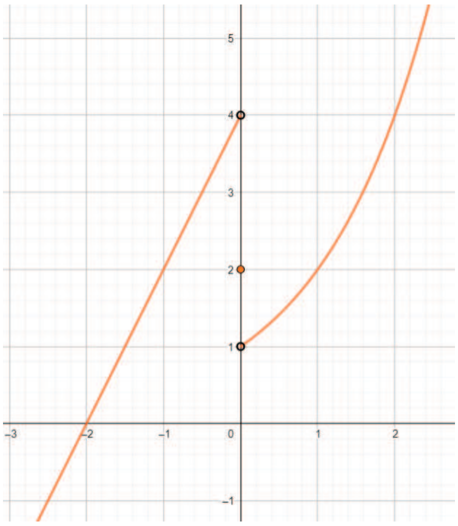
$\mathrm{h}(\mathrm{x}=1) = 0$

$\lim_{x\to 1^-} h(x) = -0$ y $\lim_{x\to 1^+} h(x) = 1$, al tener límites laterales diferentes la función no tiene límite en x= 0.

Ejercicio 2:

i) $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & si \quad x < 0 \\ 2 & si \quad x = 0 \\ 2^x & si \; x > 0 \end{cases}$

g. Gráfica.



h. Dar su dominio e imagen.
Dominio: $\Re$
Imagen: $\Re$

i. Intersecciones con los ejes, intervalos de positividad y negatividad.
Intersección con el eje x: $f(x) = 0 \rightarrow 2x + 4 = 0 \ \rightarrow x = -2$. El punto es (-2, 0).
Intersección con el eje y: $f(x = 0) = 2$. El punto es (0, 2).
La función toma valores negativos en el intervalo $x < -2$.
La función toma valores positivos en el intervalo $x > -2$

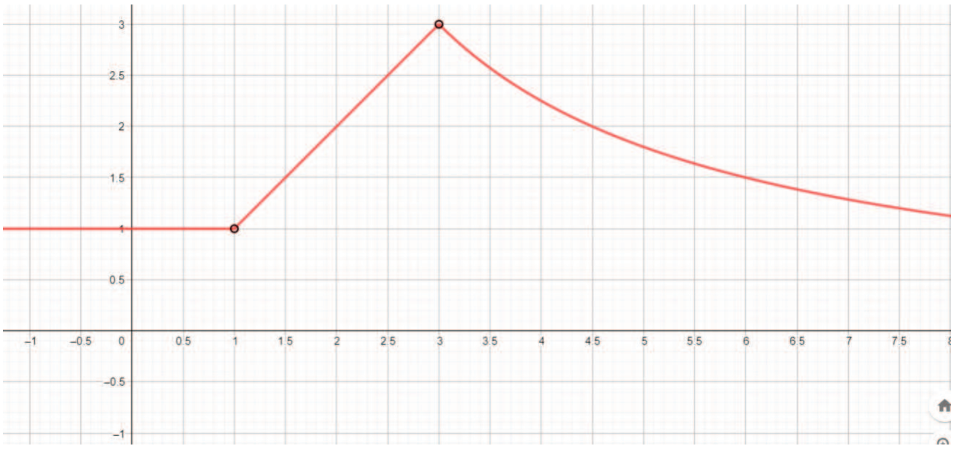
j. intervalos de crecimiento y decrecimiento.
Intervalo de crecimiento: $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$
Intervalo de decrecimiento: no tiene

k. Concavidad.
Es cóncava hacia arriba en el intervalo $(0, \infty)$

l. Analizar si las funciones son continuas en su dominio.
La función es discontinua en $x = 0$

ii) $g(x) = \begin{cases} 1 \ \ si \ x < 1 \\ x \ si \ 1 < x < 3 \\ \frac{9}{x} \ si \ x>3 \end{cases}$

m. Gráfica.



n. Dar su dominio e imagen.
   Dominio: $\{x/x \in \Re,\ x \neq 1\ \wedge x\ \neq 3\}$
   Imagen: $\{y/y\ \in \Re,\ 1\ \leq y < 3\}$
o. Intersecciones con los ejes, intervalos de positividad y negatividad.
   Intersección con el eje x, no tiene
   Intersección con el eje y: $g(x = 0) = 1$. El punto es (0, 1).
   La función no toma valores negativos.
   La función toma valores positivos en todo su dominio.
p. intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   Intervalo de crecimiento: $(1, 3)$
   Intervalo de decrecimiento: $(3, \infty)$
   Concavidad.
   Es cóncava hacia arriba en el intervalo $(3, \infty)$
q. Analizar si las funciones son continuas en su dominio.
   La función es continua en todo su dominio.

Año 2017- Segundo Cuatrimestre - Matemática II

Enunciados

Tarea Nº 1 para realizar fuera del aula: Trabajo con límites

Hola, empezamos el cursado de Matemática II y, como hicimos en Matemática I, te vamos a ir proponiendo a lo largo del cursado, tareas para que las realices fuera del horario de cursado. Éstas tienen el fin de reforzar lo trabajado en clase para tratar de ayudarte a mejorar la adquisición de conocimientos que deberías poseer al momento de acreditar la materia.

En esta tarea te proponemos repasar los dos últimos temas que viste en Matemática I. Si los haces a conciencia y con responsabilidad, te van a ayudar a comprender mejor los temas de Matemática II pues son la base de los mismos. Los temas que te estamos proponiendo repasar son límite y continuidad de funciones.

Tal como venimos trabajando en las tareas a realizar fuera del aula que hicimos en Matemática I, te sugerimos que uses diferentes herramientas que están disponibles en internet o como en este caso, el uso de un software gratuito, el *GeoGebra*, con el que no sólo vas a poder trabajar con una computadora personal, sino que hay desarrolladas aplicaciones para el teléfono celular.

Ejercicio 1
Resolver los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x^4 - 2x}{x^4 - x^5 - 2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3x^4 - 2}}{2x^2 - x - 2}$

Ejercicio 2

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & si \cdot -\infty \leq x < 4 \\ -3x + 5 & si \cdot 4 \leq x < 6 \\ \dfrac{1}{x-6} & si \cdot x > 6 \end{cases}$

Analizar su dominio e imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento. Encuentre las intersecciones con los ejes. Dar los Intervalos positividad y negatividad. Estudiar su continuidad. ¿Tiene asíntotas? Graficar.

Podes encontrar cómo utilizar el *GeoGebra* para graficar funciones por partes en: https://www.geogebra.org/m/PhXqQHf2

Ejercicio 3

Sabiendo que $\underset{x\to 2}{lím}\ f(x) = 3$ y que $\underset{x\to 2}{lím}\ g(x) = 2$ resolver enunciando las propiedades utilizadas:

i) $\underset{x\to 2}{lím}\left(f(x) + g(x)\right)$

ii) $\underset{x\to 2}{lím}\left(f(x).g(x)\right)$

iii) $\underset{x\to 2^+}{lím}\left[f(x) + \ln(g(x) - 2)\right]$

iv) $\underset{x\to 2}{lím}\ 2^{f(x)}$

Podes encontrar cómo utilizar el *GeoGebra* para comprobar los límites antes resueltos haciendo clic en el link de abajo: https://wiki.geogebra.org/es/Comando_L%C3%ADmite#

Observación: si no accedes a la página haciendo clic en el hipervínculo, copia y pega el mismo en el navegador.

Tarea Nº2 para realizar fuera del aula: Trabajo con derivadas

En esta tarea te proponemos repasar aplicaciones de las derivadas. Si los haces a conciencia y con responsabilidad, te van a ayudar a comprender mejor los temas de Matemática II.

Tal como venimos trabajando en las tareas a realizar fuera del aula que hicimos en Matemática I, te sugerimos que uses diferentes herramientas que están disponibles en internet o que uses el software gratuito *GeoGebra* con el que no sólo vas a poder trabajar con una computadora personal, sino que hay desarrolladas aplicaciones para el teléfono celular.

Ejercicio 1

La cantidad de bacterias después de t horas en un experimento controlado de laboratorio es $n = f(t)$.

a) ¿Cuál es el significado de $f'(5)$? ¿Cuáles son sus unidades?

b) Supón que existe una cantidad **ilimitada** de espacio y de nutrientes para las bacterias ¿Cuál es mayor $f'(5)$ o $f'(10)$? ¿La limitación de nutrientes influiría en su conclusión? Explique.

c) Supón que ahora cambiaron las condiciones de cultivo de las bacterias, consideramos este nuevo inicio t=0, ahora se sabe que la función que modela el desarrollo de las bacterias es $n = f(t) = 1000e^{-t}$, ¿cuál es el número inicial de bacterias?, halle $f'(5)$ y $f'(10)$ ¿Le parece a usted de que ahora puede haber limitación en la cantidad de nutrientes? ¿Por qué? ¿Llegará a su fin esta población (es posible que n llegue a valer 0)? Grafique.

Ejercicio 2

Una partícula se mueve según la ley $s(t) = t^2 - 6t - 2$ donde *s* esta medida en metros y *t* en segundos.

a) Evalúa $s'(2)$ y $s'(4)$ ¿Qué interpreta en cada tiempo? ¿Se mueven en el mismo sentido?

b) Halla $s''(t)$ ¿Qué representa esta función? ¿Qué se puede concluir de la misma?

Ejercicio 3

a) Deriva: $f(x) = \text{sen}(xe^{2x+1})$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Grafica.

Tarea Nª 3 para realizar fuera del aula: Aplicaciones de la derivada, extremos y optimización

En esta tarea te proponemos seguir repasando aplicaciones de las derivadas. Si los haces a conciencia y con responsabilidad, te va a ayudar a comprender mejor los temas de Matemática II.

Recordá que tenés que traerla resuelta a la clase de coloquio, en ella, vamos a realizar la autocorrección.

Ejercicio 1

Un empresario ha calculado que el costo total de repartir x unidades del producto que fabrica es **$C(x)=2x+217800/x$**

a) Si la unidad de reparto puede transportar como máximo 300 unidades de producto, hallar el número de unidades que hará mínimo el costo del pedido.

b) ¿Qué ocurriría si la unidad pudiera transportar hasta 400 unidades de producto?

Ejercicio 2

Una huerta tiene actualmente 25 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. Calcular:

a) La producción actual de la huerta.

b) La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan x árboles más.

c) La producción a la que ascendería el total de la huerta si se plantan x árboles más.

d) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para qué la producción sea máxima?

Tarea Nº 4 para realizar fuera del aula: Trabajo con integrales

En esta tarea te proponemos seguir repasando integrales y algunas de sus aplicaciones. Si los haces a conciencia y con responsabilidad, te va a ayudar a comprender mejor los temas de Matemática II.

Recordá que tenés que traerla resuelta a la clase de coloquio, en ella, vamos a realizar la autocorrección.

Ejercicio 1:

Resuelve las siguientes integrales

a) $\int \frac{-xdx}{\sqrt{5x^2+1}}$

b) $\int xsen(x)dx$

c) $\int_1^3 \frac{x\sqrt{x}-3x}{x}dx$

d) $\int_{-1}^{2} |x^2-1|dx$

Ejercicio 2:

Grafica y halla el área encerradas por las curvas $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$ y x=2.

Ejercicio 3:

Si $v(t) = t^3 - t$ indica la velocidad en la que se mueve el objeto expresada en metros sobre segundos. ¿Cuánto se desplazó luego de 3 segundos? ¿Qué distancia recorrió?

Ejercicio 4:

La aceleración de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado está dada por $a(t) = (2t-3)^{-3}$ en metros por segundo por segundo. Si la velocidad en t = 0 es 4 metros por segundo, encuentre la velocidad 2 segundos más tarde.

Resoluciones

Tarea N° 1 para realizar fuera del aula: Trabajo con límites

Ejercicio 1

Resolver los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$

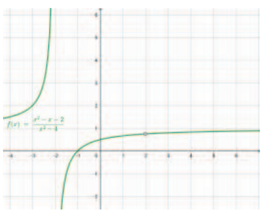
El primer paso a realizar antes de pensar de qué forma vamos a resolver este ejercicio es evaluar el numerado y el denominador en x=2, que es justamente el valor al que tiende x.
Reemplazando a x por 2 nos queda:
Numerador: $2^2 - 2 - 2 = 4 - 4 = 0$
Denominador: $2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$
Estamos en presencia del cálculo de un límite cuando la variable tiende a un valor determinado y hay una indeterminación del tipo 0/0.
Para resolverlo factorizaramos el numerador y el denominador, ver si se puede eliminar la indeterminación mediante simplificación. Operando algebraicamente, vemos que son ceros del numerador x=2 y x=-1 (aplicando resolvente). En el caso del denominador, es el caso de factoreo "diferencia de cuadrados", son raíces x=2 y x=-2, entonces

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+1)}{(x+2)}$$

En este momento, volvemos a evaluar en x=2 al numerador y al denominador.
Numerador: 2+1=3
Denominador: 2+2=4
Hemos eliminado la indeterminación, entonces, el cálculo del límite, se reduce a el valor numérico de la expresión en x =2.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+1)}{(x+2)} = \frac{3}{4}$$

Para verificar podemos utilizar el *GeoGebra*, tanto para calcular el límite como para graficar la función racional que aparece en el cálculo.
El comando que utilizamos para realizar este cálculo es: Límite((x^2-x-2)/(x^2-4),2) y el resultado es 0,75.
Si graficamos



Vemos en la gráfica de la función que la función presenta una asíntota vertical en x=-2 pero en x=2, no hay un trazo continuo, hay que tener cuidado con esto, pues ambos valores de x no pertenecen al dominio de la f, la singularidad en x=-2 es de tipo insalvable, pero en x=2 es de tipo removible, pues la función tiene límite en el punto y vale 0,75.
Si hacemos en *GeoGebra* f(2), el resultado que da es “indefinido”.

b) $\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$

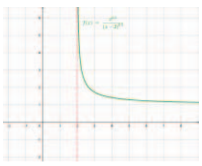
Al observar la expresión del límite, aparece una expresión simbólica diferente a la que teníamos en el ejercicio anterior $x \to 2^+$, ¿qué significa?, ¿por qué se pide un límite lateral por derecha?
Si observamos la expresión del numerador, para que se pueda calcular la raíz cuadrada, el radicando debe ser mayor o igual que 0, pero el dominio de la función es los reales mayores que 2, pues esta en el denominador y no se puede anular.
Si evaluamos numerador y denominador en x=2, tenemos:

Numerador: $\sqrt{2}$

Denominador: $\sqrt{2-2} = \sqrt{0} = 0$

Vemos que al armar el cociente, la indeterminación del tipo Número/0 no se puede salvar, razón por la cual investigamos el comportamiento de la función en las cercanías de 2 mediante, la gráfica o mediante una tabla, tomando valores de x cada vez más cercano a 2

x	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$
2,1	4,472
2,01	14,142
2,001	44,721
2,0001	141,421



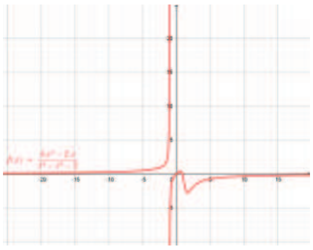
Con ambos análisis, observamos que el cociente tiende a infinito, razón por la cual, el resultado solicitado es: $\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} = \infty$

Si utilizas el *GeoGebra*, el comando es: LímiteDerecha(x^0.5 / (x - 2)^0.5, 2), el resultado es ∞.

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^4-2x}{x^4-x^5-2}$

En este apartado, hay que analizar dos límites, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x}{x^4-x^5-2}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4-2x}{x^4-x^5-2}$.

En este caso, la forma más práctica de ver lo que ocurre en el +∞ y en el -∞ es graficando la función, pero, de la simple observación de la expresión vemos que el grado algebraico del numerador es cuatro y el grado algebraico del denominador es 5, como son polinomios, sabemos que para valores grandes de x, va más rápido a infinito el polinomio de mayor grado, en este caso, el denominador, por lo tanto podemos considerar que "el denominador domina al numerador", por lo tanto el cociente, tanto en +∞ como en -∞, tiende a cero. Lo que resta analizar es el signo, es decir si se acerca al valor cero por los valores positivos (por arriba del eje x) o por los valores negativos (por debajo del eje x), por eso con una gráfica, podemos inspeccionar esto rápidamente.



Vemos, que cuando $x\to+\infty$, la gráfica se acerca al valor 0 por debajo del eje x, es decir tiende a 0^- y que cuando $x\to-\infty$, la gráfica se acerca al valor 0 por arriba del eje x, es decir tiende a 0^+

Además, podemos recuperar de esto, lo que vimos acerca de asíntotas horizontales. Vemos que la recta y=0 es asíntota horizontal de la función tanto en +∞como en -∞.

Hagamos ahora el cálculo de los límites pedidos, la estrategia algebraica que usamos en clase es sacar factor común en el numerador y en el denominador la potencia de x más alta, en este caso, en el numerador sacamos x^4 y en el denominador x^5 y operamos algebraicamente.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x}{x^4-x^5-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4(3-\frac{2}{x^3})}{x^5(\frac{1}{x}-1-\frac{2}{x^5})}$$

Simplificando las x y pasando al límite, vemos que $2/x^3\to0$, $1/x\to0$ y que $2/x^5\to0$ cuando $x\to\infty$ si volvemos a los cálculos, nos queda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x}{x^4-x^5-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x(-1)}=0^-$$

La expresión 0^- significa que tiende a 0 por valores menores que cero, porque la x del denominador es positiva

Si lo analizamos en el $-\infty$, nos queda:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-2x}{x^4-x^5-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4(3-\frac{2}{x^3})}{x^5(\frac{1}{x}-1-\frac{2}{x^5})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-x}=0^+$$

La expresión 0^+ significa que tiende a 0 por valores mayores que cero, porque la x del denominador es negativa.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^4-2}}{2x^2-x-2}$

Para comenzar a resolver este límite, analizamos qué ocurre con numerador y denominador cuando $x\to\infty$. Como ambos son polinomios, ambos tienen a infinito, así que estamos en presencia de una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Lo otro que tenemos que analizar es ¿Quién va más rápido a infinito de los dos?, si observamos la expresión del cociente, en el numerador está x^4, pero con una raíz cuadrada, así que el grado del numerador en realidad es 2, y el grado algebraico del denominador es 2 también.

En clase analizamos que cuando teníamos un "cociente de infinitos de igual grado", el resultado del cociente era un número que coincidía con el cociente de los coeficientes numéricos de los términos de x de mayor grado, en este caso el resultado debería ser $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Y otra cosa interesante de recordar, es que cuando planteamos un límite en el infinito de una función, y este da un número, la recta $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ es asíntota horizontal de la función racional analizada cuando $x\to\infty$.

Si operamos algebraicamente para la resolución de este límite, la estrategia es sacar factor común en el numerador y en el denominador la mayor potencia de x en cada caso, que es x^2.

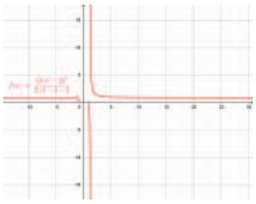
Operando algebraicamente tenemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^4-2}}{2x^2-x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4(3-\frac{2}{x^4})}}{x^2(2-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4}\sqrt{(3-\frac{2}{x^4})}}{x^2(2-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}$$

Simplificando las x y considerando que $2/x^2\to0$, $1/x\to0$ y que $2/x^4\to0$ cuando $x\to\infty$, nos queda:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^4-2}}{2x^2-x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si hacemos la gráfica, vemos:



¡Qué gráfica tan interesante!
Viéndola surge esta pregunta, *¿qué ocurre con el dominio de la función, porque hay valores de x que no tienen imagen?* queda para que lo pienses. Te damos una ayuda, *¿es posible calcular, en los números reales, raíces cuadradas de números negativos?*

Ejercicio 2

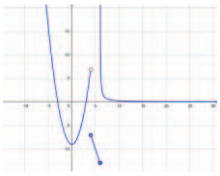
Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & si -\infty \leq x < 4 \\ -3x + 5 & si\ 4 \leq x \leq 6 \\ \frac{1}{x-6} & si\ x > 6 \end{cases}$

Analizar su dominio e imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento.
Encontrar las intersecciones con los ejes.
Dar los Intervalos positividad y negatividad.
Estudiar su continuidad. ¿Tiene asíntotas? Graficar.

Tal como te lo indicamos, vamos a usar el *GeoGebra* para hacer el gráfico y vamos a obtener de él toda la información solicitada.
Antes de ir al software, lo primero que analizamos es los valores de x para los cuales están definidos los tramos.
Desde -∞ hasta 4, sin incluirlo, tenemos que graficar $x^2 - 9$
Desde 4 hasta 6, incluidos los extremos, tenemos que graficar $-3x + 5$
Desde 6 (sin incluirlo) hasta ∞, tenemos que graficar $\frac{1}{x-6}$
Vemos, por lo expresado más arriba, que no hay "huecos" para los valores de x, esto nos permite decir que el **dominio** de la función ***f*** son ***todos los números reales***.
Par identificar el conjunto imagen, es más fácil si tenemos la gráfica.
El comando que usamos en el software para obtener la gráfica de la función es

f(x) = Si(x < 4, x² - 9, 4 ≤ x ≤ 6, -3x + 5, x > 6, 1 / (x - 6))

Obtenemos:



El conjunto imagen son los valores de y, vemos que van desde
$f(x = 6) = -3 * 6 + 5 = -15$, incluido este valor a +∞, lo podemos escribir
el **conjunto imagen** está formado por todos los números reales *y* tales que *y* ≥ -15 o
-15 ≤ *y* ≤+∞ 0, o bien [-15, ∞).
Intervalos de crecimiento, si recordamos la definición si x aumenta, y aumenta, esto lo vemos en el intervalo para x (0, 4).
Intervalos de decrecimiento, (si x aumenta, y disminuye), lo vemos en valores de x de los intervalos (-∞, 0), (4 , 6), (6, +∞)
Intervalos de positividad (grafica por encima del eje x) y **negatividad** (gráfica por debajo del eje x).
Positiva en los intervalos de x (-∞, -3), (3, 4) y (6, +∞)
Negativa en los intervalos de x (-3, 3) y (4, 6).
Continuidad: en este caso, los puntos en donde tenemos que analizar la continuidad son los puntos del dominio de *f* donde se producen los cambios de los tramos de la función.
En particular, hay que estudiar la continuidad en x = 4 y en x = 6.
Debemos recordar la definición de función continua en un punto y entender qué debemos verificar para saber si la función es continua o no en ese punto.
Recordemos, f(x) es continua en $x=x_0$ si se cumple que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Analicemos qué ocurre en x = 4.
El valor de *f* en x = 4, $f(x = 4) = -3 * 4 + 5 = -7$
Para calcular el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ tenemos que recordar que si existe el límite de una función en un punto este valor es independiente de cómo nos acerquemos al punto, por esta razón vamos a calcular los límites laterales es decir, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y estos deben ser iguales.

$$\lim_{x \to 4^+} (-3x + 5) = -7$$

$$\lim_{x \to 4^-} (x^2 - 9) = 7$$

Como los límites laterales son distintos, la función en x = 4 no tiene límite.

No se cumple la definición, porque si bien f(x=4)=-7, la función en x=4 no tiene límite. Vemos en la gráfica que hay una discontinuidad de salto finito.

El otro punto a analizar es x=6
El valor de f en x = 6, es $f(x = 6) = -3 * 6 + 5 = -12$

$$\lim_{x\to 6^-}(-3x+5) = -12$$

$$\lim_{x\to 6^+}\left(\frac{1}{x-6}\right) = \infty$$

La función en x = 6 es discontinua, pero en este caso, en x=6, como el límite por derecha da infinito, presenta una asíntota vertical, justamente la recta vertical x=6.
Si queremos analizar si la función tiene asíntotas horizontales, hay que calcular:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

Con estos resultados concluimos que la *f* presenta una asíntota horizontal para x→+∞, que es la recta y=0, cosa que observamos en la gráfica.

Ejercicio 3

Sabiendo que $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ y que $\lim_{x\to 2} g(x) = 2$ resolver enunciando las propiedades utilizadas:

i) $\lim_{x\to 2}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{x\to 2}\left(f(x)\right) + \lim_{x\to 2}\left(g(x)\right) = 3+2 = 5$

ii) $\lim_{x\to 2}\left(f(x).g(x)\right) = \lim_{x\to 2}\left(f(x)\right)\lim_{x\to 2}\left(g(x)\right) = 3 * 2 = 6$

iii) $\lim_{x\to 2^+}\left[f(x)+\ln(g(x)-2)\right] = \lim_{x\to 2^+}\left[f(x)\right] + \lim_{x\to 2^+}\left[\ln(g(x)-2)\right] =$

$$= \lim_{x\to 2^+}\left[f(x)\right] + \ln\left[\lim_{x\to 2^+}\left[(g(x)-2)\right]\right] = \lim_{x\to 2^+}\left[f(x)\right] + \ln\left[\lim_{x\to 2^+} g(x) - \lim_{x\to 2^+} 2\right]$$

$$= 3 - \ln(2-2) = 3 - \ln(0) = -\infty$$

iv) $\lim_{x\to 2} 2^{f(x)} = 2^{\lim_{x\to 2}(f(x))} = 2^3 = 8$

Tarea N° 2 para realizar fuera del aula: Trabajo con derivadas

Ejercicio 1

La cantidad de bacterias después de t horas en un experimento controlado de laboratorio es $n = f(t)$.

a) ¿Cuál es el significado de $f'(5)$? ¿Cuáles son sus unidades?

Significado de $f'(5)$: valor de la derivada de la *f* en t= 5.
En términos del problema sería la variación instantánea del número de bacterias a las 5 horas de iniciado el experimento. La unidad es número de bacterias por hora.

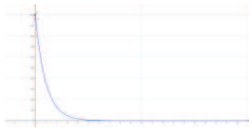
b) Supón que existe una cantidad **ilimitada** de espacio y de nutrientes para las bacterias ¿Cuál es mayor $f'(5)$ o $f'(10)$? ¿La limitación de nutrientes influiría en su conclusión? Explique.

Caso a) Suponemos que se parte de un número inicial de bacterias y que ellas tienen la posibilidad de reproducirse libremente sin ningún tipo de restricciones de nutrientes ni espacio, esto implica que a medida que transcurre el tiempo hay más bacterias. En estas condiciones es probable que f'(10) sea mayor que f'(5).

Caso b) Suponemos que se cultivan bacterias en un lugar donde, a partir de un determinado momento se acaban el espacio y los nutrientes, y esto ocurre antes de las 10 horas de iniciado el experimento, el número de bacterias comenzaría a disminuir a partir de ese momento y es probable $f'(5) > 0$, es decir el número de bacterias aumente con el tiempo, y cuando se acaben los nutrientes y el espacio, las bacterias comiencen a morir, por lo tanto a medida que transcurra el tiempo habría menos bacterias, por lo tanto $f'(10) < 0$, la población decrecería.

c) Supón que ahora cambiaron las condiciones de cultivo de las bacterias, consideramos este nuevo inicio t=0, ahora se sabe que la función que modela el desarrollo de las bacterias es $n = f(t) = 1000e^{-t}$, ¿cuál es el número inicial de bacterias?, halle $f'(5)$ y $f'(10)$ ¿Le parece a usted de que ahora puede haber limitación en la cantidad de nutrientes? ¿Por qué? ¿Llegará a su fin esta población (es posible que n llegue a valer 0)? Grafique.

El número inicial de bacterias es n(t=0) = 1000.
$f'(t) = -1000\ e^{-t}$
$f'(5) = -1000\ e^{-5} \approx -6{,}74$ (bacterias /hora)
$f'(10) = -1000\ e^{-10} \approx -0{,}045$ (bacterias /hora)
Si analizamos en el largo plazo, es decir $\lim_{t\to\infty} 1000\ e^{-t} = 0$ la función tiene, a tiempo infinito, una asíntota horizontal, matemáticamente nunca toma el valor 0.
Analicemos la situación en el contexto del problema:
Estamos utilizando una función continua para modelar el número de bacterias, un número entero, así que los números que obtuvimos de los límites deberían ser enteros.
El número de bacterias llega a cero, cuando se muere la última.
¿A qué tiempo ocurre esto? deberíamos resolver la ecuación: $1 = 1000\ e^{-t}$, despejamos t y nos da que luego de las 6.91 horas ya no hay más bacterias. Así que f'(10) no tiene sentido en este problema.
Si graficamos n obtenemos:

d) 

Ejercicio 2

Una partícula se mueve según la ley $s(t)=t^2-6t-2$ donde *s* esta medida en metros y *t* en segundos.

c) Evalúa $s'(2)$ y $s'(4)$ ¿Qué interpreta en cada tiempo? ¿Se mueven en el mismo sentido?

Se tiene como dato la ley del movimiento de la partícula. La derivada da la velocidad de la partícula en el tiempo. s'(1) y s'(4) son las velocidades instantáneas de la partícula al tiempo 1 y al tiempo 4 segundos respectivamente.

Recordar que primero hay que hallar la función derivada y luego evaluarla en cada tiempo.

s'(t)= 0,5 * 2t - 3

s'(1)= 0,5* 2*(1 seg) - 3 = -2 [m/seg]

s'(4)= 0,5* 2 * (4 seg) - 3 = 1 [m/seg]

Al tener signos contrarios van en dirección opuesta, en el primer caso, a 1 segundo de iniciado el movimiento, en dirección contraria a la que se propuso como positiva en el problema, y en el segundo caso, a los 4 segundos, a favor del sentido del movimiento.

d) Halla $s''(t)$ ¿Qué representa esta función? ¿Qué se puede concluir de la misma?

s''(t) en este problema representa la aceleración de la partícula.

s''(t) = 0,5 * 2 = 1[m/seg^2], la aceleración es constante.

La función representa una recta horizontal, independientemente del tiempo la aceleración no cambia.

Es un movimiento uniformemente acelerado, la partícula comienza el movimiento hacia la izquierda, agota su velocidad (se detiene) y luego se mueve hacia la derecha.

Ejercicio 3

c) Deriva: $f(x) = \text{sen}(x.e^{(2x+1)})$

Para obtener la derivada solicitada tenemos que aplicar la regla de la cadena

$$f'(x) = \cos(x.e^{(2x+1)})(e^{(2x+1)} + 2xe^{(2x+1)})$$

d) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ en el punto $(\sqrt{2},\sqrt{2})$. Grafica.

Estamos buscando la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una curva dada en forma implícita. Recordar la interpretación geométrica de la derivada en un punto que es la pendiente de la recta tangente en ese punto.

La otra cosa a recordar es que el punto de tangencia pertenece a la recta y a la gráfica de la curva.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto (x_0, y_0) es:

$$y - y_0 = y'_{x_0}(x - x_0)$$

En este problema: $x_0 = \sqrt{2}$, $y_0 = \sqrt{2}$, (tenemos que reemplazar en la ecuación y ver si verifica!!).

Nos falta la derivada.

Aplicando la técnica de derivación implícita: $2x + 2\,y.y' = 0$,

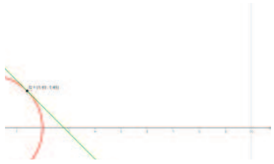
Despejando obtenemos $y' = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$

Calculamos $y'_{x_0} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$

Reemplazando todo en la ecuación de la recta

$$y - \sqrt{2} = -1(x - \sqrt{2})$$

Gráficamente



Tarea N° 3 para realizar fuera del aula: Aplicaciones de la derivada, extremos y optimización

Ejercicio 1

Un empresario ha calculado que el costo total de repartir x unidades del producto que fabrica es **C(x)=2x+217800/x**

a) Si la unidad de reparto puede transportar como máximo 300 unidades de producto, hallar el número de unidades que hará mínimo el costo del pedido.

Analicemos el problema, x: representa el número de artículos a transportar, el camión como máximo puede cargar 300 artículos, así que $1 \leq x \leq 300$, es decir la función costo, está definida en un intervalo cerrado. En dicho intervalo la función C es continua. Entonces, sabemos que alcanza, en ese intervalo su máximo y su mínimo absoluto.

Debemos encontrar el punto crítico, observar si pertenece al intervalo donde está definida la función y luego evaluar la función en los extremos y en el punto crítico.

Derivemos C y luego igualemos a cero la derivada.

$$C(x) = 2x + \frac{217800}{x}$$

$$C'(x) = 2 - \frac{217800}{x^2}$$

$0 = 2 - \frac{217800}{x^2}$ despejamos x y obtenemos x=330.

El punto crítico cae fuera del intervalo donde la función costo está definida, razón por la cual, debemos evaluar el costo en los extremos del intervalo:

C(x=1)= \$ 217802

C(x=300) = \$602.42 → El costo mínimo se produce cuando llena el camión al máximo

b) ¿Qué ocurriría si la unidad pudiera transportar hasta 400 unidades de producto? (Sugerencia: graficar la función "costo" y analizar gráficamente los resultados obtenidos en a) y b)).

Si el camión tiene como capacidad máxima 400 artículos, cambió el intervalo de donde la función está definida, ahora es $1 \leq x \leq 400$, el punto crítico es interior al mismo, debemos evaluar la función en los extremos y en el punto crítico para buscar el número de artículos que hace mínimo el costo.

C(x=1)= \$ 217802

C(x=330) = \$ 662 → El costo mínimo se produce cuando llena el camión con 330 artículos

C(x=400) = \$801,36

Ejercicio 2

Una huerta tiene actualmente 25 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que, por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. Calcular:

a) La producción actual de la huerta.

Producción = número de árboles * número de frutos por árbol= 25 * 600 = 15000 frutos.

b) La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan x árboles más.

Si se plantan x árboles más, la producción de cada árbol será: $600 - 15x$.

c) La producción a la que ascendería el total de la huerta si se plantan x árboles más.

$P(x) = (25 + x).(600 - 15x) = -15\ x^2 + 225x + 1500$

d) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para qué la producción sea máxima?

$P'(x) = -\ 30x + 225 = 0$ despejando $x = 7{,}5$

$P''\ (x) = -30 < 0$

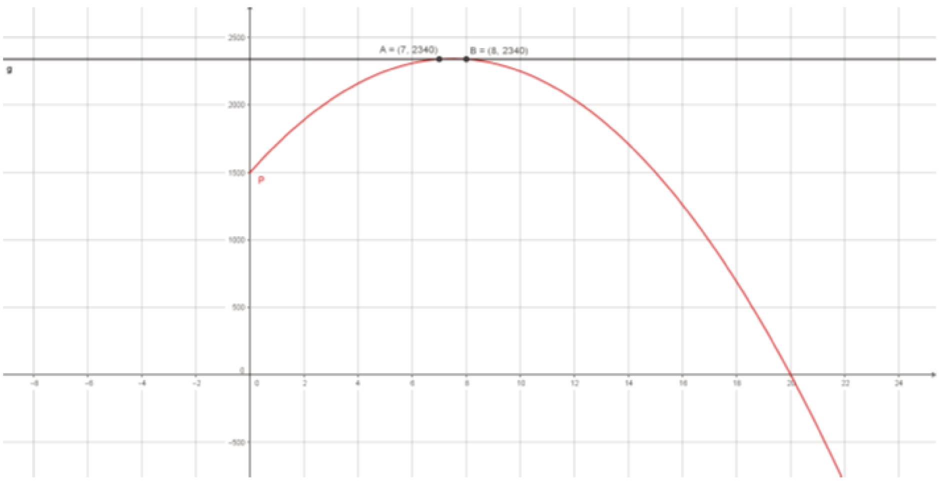
Como la cantidad de árboles no puede ser con decimales debo decidir si tomar x= 7 ó x=8

c) La producción a la que ascendería el total de la huerta si se plantan x árboles más.

$P(7)= 2340 = P(8)$

d) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para qué la producción sea máxima?

La producción será máxima si la huerta tiene 25 + 7 = 32 ó 25 + **8** = 33 árboles.



Tarea N° 4 para realizar fuera del aula: Trabajo con Integrales

1) Resolvé las siguientes integrales. En cada caso identifica el método de integración que tenés que usar para resolverlas como también las propiedades de las integrales que necesitas utilizar.

e) $\int \frac{-xdx}{\sqrt{5x^2+1}}$
esta integral se resuelve por el método de sustitución, haciendo:
$u = 5x^2 + 1, \quad du = 10\ x\ dx \quad \rightarrow \frac{1}{10}du = x\ dx$
Sustituyendo en la integral, nos queda: $-\int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2+1}} = -\frac{1}{10}\int \frac{du}{u^{1/2}} = -\frac{1}{10}\frac{u^{1/2}}{1/2} + c = -\frac{\sqrt{5x^2+1}}{5} + c$

f) $\int x\ sen(x)dx$
Esta integral se puede resolver por el método de integración por partes o por tabla de integrales.
Recordemos el método: $\int u.dv = u.v - \int v.du$
En este caso, hagamos
$u = x; \quad du = dx; \quad dv = sen(x); \quad v = \int dv = \int sen(x)dx = -\cos(x)$
Entonces: $\int x\ sen(x)dx = x.(-\cos(x)) - \int(-\cos(x))dx = \boldsymbol{sen(x) - x.\cos(x) + c}$
Si usamos la tabla, la integral buscada es:

$$\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$$

Cambiando u por x, nos queda: $\int x\ sen(x)dx = \boldsymbol{sen(x) - x.\cos(x) + c}$.

También podemos resolver esta integral utilizando Geogebra, en la barra de comando introducimos
Integral[x*sin(x), x]
y el resultado que arroja es **g(x)=-x cos (x)+sin(x)**.

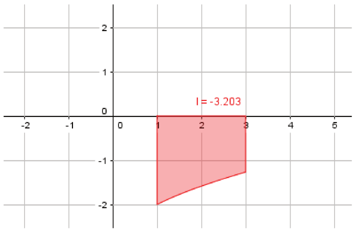
Cuidado, estamos utilizando la calculadora gráfica del software, aclara que el resultado es para una constante c=0.

g) $\int_1^3 \frac{x.\sqrt{x}-3x}{x}dx$
Para resolver esta integral definida, primero debemos operar algebraicamente para obtener una función que podamos integrar. Y como es una integral definida, el resultado es un número.

$$\int_1^3 \left(\frac{x.x^{\frac{1}{2}}}{x} - \frac{3x}{x}\right)dx = \int_1^3 (x^{\frac{1}{2}} - 3)dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}dx - \int_1^3 -3\,dx = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3x\right)\Bigg|_1^3$$
$$\approx -3{,}203$$

Si utilizamos Geogebra,. introducimos
Integral[x^(1/2)-3, 1,3]

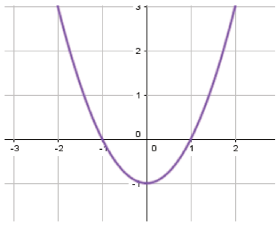
y el resultado es -3,203 y además hace la gráfica, mostrando que en el intervalo de integración, la función está toda debajo del eje x, razón por la cual el resultado es un número negativo.



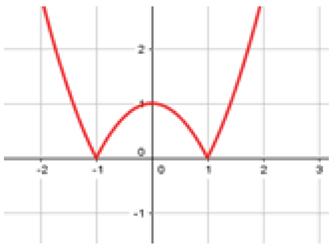
h) $\int_{-1}^{2}|x^2-1|dx$

Lo primero que debemos hacer para resolver esta integral es expresar la función
$f(x)=|x^2-1|$
teniendo en cuenta la definición de valor absoluto.

Si recordamos de matemática I, la gráfica de la función $y = x^2-1$ es una parábola que abre hacia arriba desplazada una unidad hacia abajo. Con raíces en x=-1 y x=1.



la función del integrando es el valor absoluto de esta función, es decir $f(x) = |x^2 -1|$ cuya gráfica es:



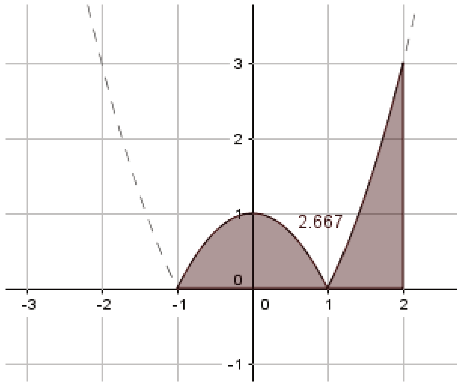
En el intervalo de integración, [-1, 2], la función $|x^2-1|$ cambia, porque en [-1, 1] la función a integrar es $-(x^2-1)$ y en el intervalo (1, 2] la función es x^2-1.

El cálculo de la integral es: $\int_{-1}^{2}|x^2-1|dx=\int_{-1}^{1}-(x^2-1)dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)dx\approx 2{,}667$

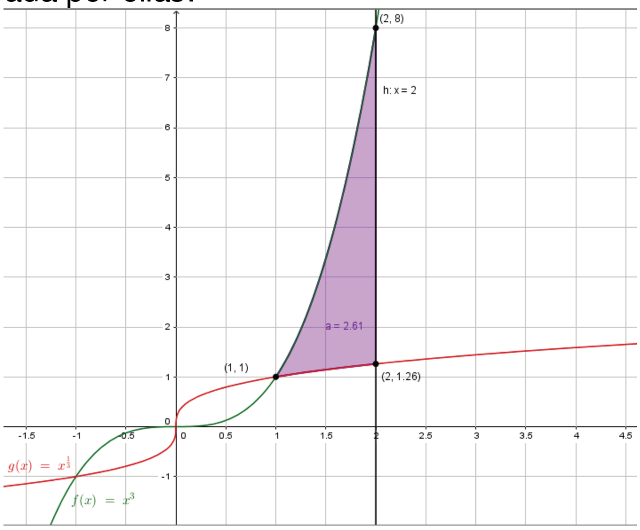
Si utilizamos *Geogebra* para verificar este resultado escribimos

Integral[abs(x^2-1), -1, 2]

y da por resultado 2,667 y el gráfico asociado es:



2) Grafica, en un mismo sistema de ejes, $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$ y x = 2.
¿Todas las expresiones son funciones? Justifica tu respuesta.
¿Encierran las tres curvas graficadas un área?, si es así, identifícala y calcula el área encerrada por ellas.



No, x=2 es una recta vertical, para un único valor de abscisas hay infinitos valores imagen.

Las tres curvas graficadas definen una sola región que es la sombreada en color lila de la gráfica, y su área se calcula haciendo

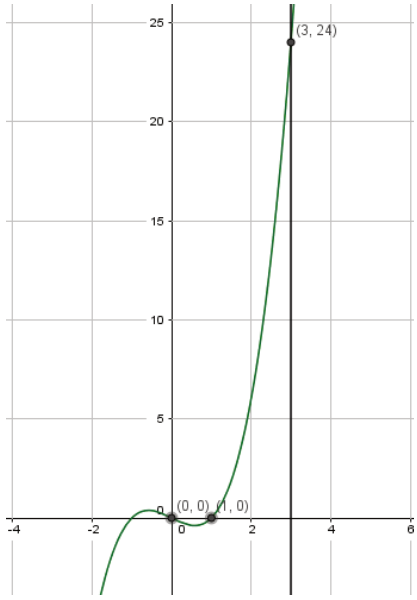
$\int_1^2 \left(x^3 - \sqrt[3]{x}\right) dx = \left. \frac{x^4}{4} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right|_1^2 \approx 2{,}61$ unidades de área.

Si utilizamos *GeoGebra* el comando es:

IntegralEntre[x³, x^(1 / 3), 1, 2]

y el resultado es a=2,61

3) **Si $v(t) = t^3 - t$ indica la velocidad en la que se mueve el objeto expresada en metros sobre segundos. ¿Cuánto se desplazó en el intervalo [0, 3]? ¿Qué distancia recorrió?**



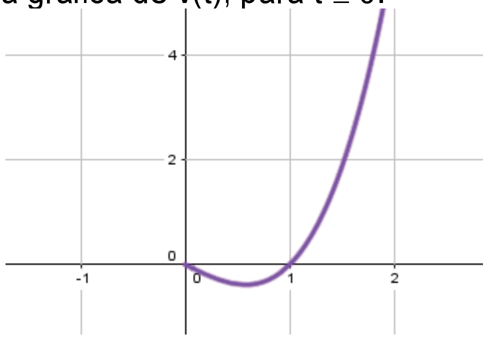
Gráfica de V(t). Observar que en el intervalo (0, 1) la velocidad toma valores negativos

Dada la velocidad, si la integramos obtenemos el desplazamiento del objeto en movimiento.

$$S = \int_0^3 (t^3 - t)dt = (\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2})\Big|_0^3 = \frac{81}{4} - \frac{9}{2} \approx 15{,}75\ m$$

Podés verificar este resultado utilizando el Geogebra, el comando es:
Integral[(x^3-x), 0, 3]

Para calcular la distancia recorrida por la partícula en el intervalo [0, 3], es necesario recordar que lo que se está modelando el desplazamiento de un objeto que se mueve en línea recta y que se han establecido puntos de referencia para este modelo.
Si la velocidad es positiva, significa que la partícula se mueve hacia la derecha del punto inicial y si la velocidad tiene signo negativo, significa que la partícula se mueve hacia la "izquierda". Entonces, si ir a la derecha implica "alejarse", ir hacia la izquierda implica "acercarse" al punto de partida.
Para contemplar estos cambios en el sentido del movimiento, la función que modela velocidad debe tener siempre el mismo signo, razón por la cual, para calcular la distancia total recorrida en el intervalo de tiempo indicado, se calcula la integral definida del valor absoluto de la velocidad en el mismo.
Veamos nuevamente la gráfica de v(t), para $t \geq 0$.



La velocidad toma valores negativos en el intervalo (0,1) y para t >1 es positiva. Para poder calcular la integral del valor absoluto de la velocidad, debemos tener en cuenta este cambio de signo y hacer el siguiente cálculo:

$$S = \int_0^3 |(t^3 - t)|dt = \left|\int_0^1 (t^3 - t)dt\right| + \int_1^3 (t^3 - t)dt \approx 16{,}25\, m$$

Podés verificar este resultado con el Geogebra, el comando a utilizar es **Integral[abs(x^3-x), 0, 3]**
y el resultado es 16,25, el mismo que obtuvimos con el cálculo que hicimos.

4) La aceleración de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado está dada por $a(t) = (2t-3)^{-3}$ en metros por segundo al cuadrado. Si la velocidad en t = 0 es 4 metros por segundo, encontrá la velocidad 1 segundo más tarde.

El dato en este problema es la aceleración, si la integramos respecto de t, obtenemos la velocidad.

$$v(t) = \int a(t)dt = \int (2t-3)^{-3}dt = \frac{1}{2}\frac{(2t-3)^{-2}}{-2} + c$$

Para evaluar la constante de integración, utilizamos la información dada en el enunciado: "la velocidad en t=0 es 4 m/s". Reemplazamos esta información en la expresión de $v(t)$ hallada.

$$v(t) = -\frac{(2t-3)^{-2}}{4} + c$$

$v(t=0) = -\frac{(2.0-3)^{-2}}{4} + c = 4$, en esta expresión la única incógnita es **c**, despejando nos queda: $c = \frac{145}{36}[\frac{m}{seg}]$

Finalmente, la expresión de la velocidad para este objeto es: $\boldsymbol{v(t)} = -\frac{(\boldsymbol{2t-3})^{-2}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{145}}{\boldsymbol{36}}$

La velocidad 1 segundo más tarde se calcula evaluando ***v*** en *t* = 1

$$v(t =) = -\frac{(2-3)^{-2}}{4} + \frac{145}{36} = \frac{34}{9}\left[\frac{m}{seg}\right] \approx 3{,}78\left[\frac{m}{seg}\right]$$

Año 2019 - Primer cuatrimestre - Matemática I

Enunciados

Tarea N°1 para realizar fuera del aula: Cálculo de una carga de fuego

Hola, te proponemos realizar una tarea para reforzar lo desarrollado en clase.

Los **objetivos** que nos plantamos al diseñar esta tarea son: afianzar los conocimientos adquiridos en el aula respecto a las operaciones con matrices y reconocer su utilidad resolviendo un problema aplicado a un tema de la carrera.

Además, vamos a utilizar la ayuda de algunas páginas web en las que vas a tener que buscar información y datos.

La tarea que te proponemos realizar una tarea con matrices aplicado al cálculo de una carga de fuego, tema que vas a ver cuando curses la asignatura Protección contra incendios I.

Como es una temática muy específica de una materia que vas a cursar en 4° año, es necesario que incorpores y comprendas algo del lenguaje técnico que se emplea en ella, para lo cual, te propongo recorrer los vínculos enlazados a los términos que corresponden al lenguaje técnico y así, mejorar tu comprensión.

Recordá que tenés que traer resueltas actividades planteadas en la clase del jueves25/4. En esta clase vamos a realizar la autocorrección y análisis de los diferentes planteos realizados en su resolución.

¿COMENZAMOS?

Para diseñar o verificar la protección contra incendios de un determinado local, hay que calcular la carga de fuego del mismo. Para ello es necesario identificar los diferentes tipos de materiales combustibles que hay en él y la cantidad.
Diferentes materiales producen diferentes clases de fuego que a su vez, tienen diferente poder calorífico y diferente resistencia al fuego .

La propia definición de carga de fuego nos orienta sobre cómo se calcula: ***"...es el peso en madera por unidad de superficie (Kg/m^2) capaz de desarrollar una cantidad de calor equivalente a la de los materiales contenidos en el sector de incendio...".***

Es decir, sabemos que los materiales que se queman en un incendio liberan calor, pues bien, sean cuales fueran esos materiales consideraremos que ese calor viene de un incendio en el que se quema exclusivamente madera en cantidad equivalente (Esto significa que, que esa cantidad de madera sea capaz de emitir igual cantidad de calor).
Como patrón de referencia consideraremos madera con poder calorífico de 18,41 MJ/kg o lo que es lo mismo 4.400 Kcal/Kg

Por ejemplo: supongamos que tenemos un material combustible "Y" que al quemarse libera unas 13.200 Kcal/kg, a eso se lo llama Poder Calorífico, es decir que cada kilogramo que se quema libera una cantidad de calor de 13.200 Kcal y nos formulamos la siguiente pregunta:

¿Qué cantidad de madera al quemarse liberará la misma cantidad de calor que ese kilo de material combustible?, hagamos la cuenta

4.400 Kcal .... 1 Kg de madera
13.200 Kcal .... $\frac{1\,\boldsymbol{kg\ de\ madera} * 13.200\,\boldsymbol{Kcal/kg}}{4.400\,\boldsymbol{Kcal/kg}} = 3\,\boldsymbol{kg\ de\ madera}$

La "carga equivalente en madera" de ese kilo de combustible "Y" es 3 Kg de madera.

Eso no es aún la carga de fuego [Q_f], para serlo tiene que ser referida a la superficie del sector dónde se encuentre esa carga, es decir debemos dividirla por la superficie del sector de incendio considerado.

$$Q_f = \frac{\boldsymbol{Peso\ de\ madera\ equivalente}}{\boldsymbol{Superficie\ del\ sector\ de\ incendio}}$$

Para resolver los problemas del cálculo de carga de fuego que se presentan en nuestra profesión necesitamos conocer los valores de poderes caloríficos de los diferentes materiales

PLANTEEMOS UN PROBLEMA:

Una edificación ubicada en la ciudad de Santa Fe se dispone como depósito de materiales para la venta comercial mayorista y gastronómica de aceite de oliva (comestible), fraccionada en bidones de 10, 20, y 25 litros. El mismo cuenta con una superficie total de 360 m^2, divididos en tres sectores de superficie equivalentes.
Los materiales acumulados son: CARTÓN para las cajas, BIDONES DE PLÁSTICO que contienen el aceite, y el ACEITE DE OLIVA.
Para poder comenzar a calcular la "carga de fuego", en primer lugar, tenemos que determinar la cantidad de los elementos mencionados, que nos da:

Material	Sector		
	1	2	3
Cartón (kg)	2000	1500	1800
Bidones de plástico (unidad)	160 de 10 L	120 de 20 L	140 de 25 L
Aceite de oliva (L)	1600	2400	3500

DATOS A TENER EN CUENTA:

- ✓ Debemos tener todas las cantidades de los materiales expresados en las unidades de medida adecuadas para poder hacer los cálculos.
- ✓ La densidad del Aceite en Condiciones Normales de Presión y Temperatura (CNPT) es de 0.916 Kg/L.
- ✓ Peso por unidad de bidón es de 600 g el de 10 L, 1100 g el de 20 L, y 1350 g el de 25 L.

Por otro lado, cada uno de estos elementos presenta un poder calorífico propio (disponible en sitio web), que para este caso, se corresponden con los siguientes:

- ✓ ACEITE DE OLIVA: 10 Kcal
- ✓ PLÁSTICO (PVC): 5 Kcal
- ✓ CARTÓN: 4 Kcal

¿Cómo podemos usar las matrices para calcular el peso de los bidones de cada tipo?, te proponemos esta opción:

$$\begin{pmatrix} 0{,}60 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}10 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}35 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 160 \\ 120 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} --- \\ --- \\ --- \end{pmatrix}$$

¿En qué unidad están los números de la diagonal principal de la matriz?

¿Por qué tuvimos que cambiar las unidades?

¿Cómo se interpretan los elementos del vector resultado?

Para el aceite podés que pensar de manera similar, pero ahora con las densidades.

$$\begin{pmatrix} -- & -- & -- \\ -- & -- & -- \\ -- & -- & -- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -- \\ -- \\ -- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} --- \\ --- \\ --- \end{pmatrix}$$

Una vez obtenidos los pesos de plástico y de aceite por sector, todos estos datos hay que armar una matriz que contenga los pesos de cada material por sector.

Para ello ¡es necesario ordenar correctamente los datos! ¡Todos deben estar expresados en las mismas unidades!

Para lo cual, en lo primero que debemos pensar, es en agrupar todos los datos de forma ordenada (como los elementos que componen una matriz). Así, considerando que en todos los sectores de incendio vamos a encontrar ACEITE, PLÁSTICO Y CARTÓN; podremos considerar que existen tres sectores y ordenarlos como los vectores fila de nuestra matriz de 3x3.

Sectores Materiales	Aceite	Plástico	Cartón
Sector 1	…….	…….	…….
Sector 2	……	……	……
Sector 3	……	……	……

Por otra parte, los poderes caloríficos de cada uno de los elementos, correctamente ordenados pueden conformar una matriz de 3x1 (o vector).

Poderes Caloríficos	Kcal/kg
Aceite	…….

Plástico	……
Cartón	……

Al realizar la multiplicación lograremos obtener como resultado una nueva matriz, que nos de los poderes caloríficos de los tres sectores de incendio.

¿Cómo tenemos que multiplicar para que el resultado nos dé un vector de 3x1?

¿Cómo se interpretan los elementos del vector resultados? ¿En qué unidad están?

Cuando multiplicamos el "peso" de un material dado por su correspondiente poder calorífico, determinamos el "calor" que cada elemento puede desarrollar al entrar en combustión (comúnmente lo llamamos fuego), cuya unidad estará dada para este caso en calorías o kilocalorías ($1*10^3$calorías); demás está decir que existen otras unidades que expresan calor.

Una vez determinado el calor que pueden generar los materiales contenidos dentro de un sector de incendio, continuamos dividiendo por el poder calorífico estándar de la madera 4.4 (Kcal) / Kg de madera.
De esta forma obtendremos los Kilogramos de madera equivalentes a los materiales combustibles acopiados dentro del sector. No obstante, queda un último paso, que es determinar los Kg de madera por m^2.

Todo lo planteado en el párrafo anterior lo podemos hacer con matrices,

¿Qué operaciones con matrices tenemos que emplear para obtener la carga de fuego en cada sector?

El resultado que estamos queriendo obtener es un vector, en el que cada componente sea la carga de fuego en cada sector.

Ayuda:
-Como todos los sectores de incendio tienen la misma superficie, podríamos hacer:

$$\frac{1}{4{,}4\,\boldsymbol{Kcal}/\boldsymbol{kg} * 120\boldsymbol{m}^2}\begin{pmatrix} --- \\ --- \\ --- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} --- \\ --- \\ --- \end{pmatrix}$$

-También podríamos hacer: $\frac{1}{4{,}4\,\boldsymbol{Kcal}/\boldsymbol{kg}}\begin{pmatrix} 120\boldsymbol{m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 120\boldsymbol{m}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 120\boldsymbol{m}^2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} --- \\ --- \\ --- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} --- \\ --- \\ --- \end{pmatrix}$

Comprobá que con ambas propuestas llegas al mismo resultado.
Describí las operaciones matriciales que usamos en cada caso.

Si ahora te decimos que los sectores de incendio no son todos iguales, sino que, el Sector 1 tiene una superficie el doble del Sector 2 y la superficie del Sector 3 es la mitad de la del Sector 1.

¿Cuál es la superficie de cada Sector de incendios?
¿Cuál de las dos opciones propuestas con matrices contempla esta situación?
Calcula la carga de fuego de cada Sector en este caso.

¿Cómo harías para calcular la carga de fuego total, sin contemplar los sectores de incendio usando matrices a partir del cálculo que hicimos?
(Sugerencia, hacé el producto escalar entre un vector fila de unos y el vector columna de cargas de fuego por sector que obtuviste. Analizá el resultado.)

<u>Te proponemos resolver un problema de similares características, investigando los datos necesarios:</u>

Ahora tenemos que calcular la carga de fuego en un taller mecánico, donde se realizan tareas de mantenimiento integral del automotor, cuya superficie es de 220 m² dividida en dos sectores: el depósito y la zona de trabajo, el primero tiene una superficie que es la mitad de la del segundo.

Los elementos combustibles que se relevaron son:

Depósito:
✓ 2000 L de aceite mineral nuevo, para reposición;
✓ 1350 Kg. de neumáticos nuevos para venta y cambio;

Zona de trabajo:
✓ 1500 L de aceite mineral, residuo de los recambios efectuados a motores;
✓ 500 Kg de neumáticos usados.

Tarea N° 2 para realizar fuera del aula: Matrices, determinantes y sistema de ecuaciones

Hola, te proponemos realizar una tarea para reforzar lo desarrollado en clase.

El **objetivo** que nos planteamos al diseñar esta tarea es afianzar los conocimientos adquiridos en el aula respecto a las operaciones con matrices, sistemas de ecuaciones y determinantes.
Recordá que tenés que traer resueltas actividades planteadas en la clase de coloquio del jueves. En esta clase vamos a realizar la autocorrección y análisis de los diferentes planteos realizados en su resolución.

Ejercicio 1

c) Calcular el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

d) Clasificar, sin resolver, el sistema $Ax=b$.

Ejercicio 2

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=2$ y $A=\begin{pmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ 2a+b & 2d+e & 2g+h \end{pmatrix}$

d) Indicar si A es invertible.

e) ¿Cuántas soluciones admite el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

f) Calcular $\det(A^2)+\det(6A^{-1})$.

Ejercicio 3

¿Para qué valores de x la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ no admite inversa?

Ejercicio 4

Para una cierta matriz A, se sabe que det A) = -1 y que det(2A) =-16. ¿Cuál es el orden de la matriz?

Ejercicio 5

Sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ y B la matriz que resulta de realizar en A las siguientes transformaciones: primero se multiplica A por sí misma, después se cambian de lugar la segunda fila y la tercera y finalmente, se multiplican todos los elementos de la segunda columna por -2. Calcular el determinante de la matriz B.

Ejercicio 6

Dada la Matriz $M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, hallar dos matrices X e Y que verifiquen $\begin{cases} X+Y^{-1}=M \\ X-Y^{-1}=M^{T}\end{cases}$

Ejercicio 7

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar cada caso.

a) El producto de matrices invertibles es invertible.

b) Sea M una matriz simétrica. Entonces el orden de M es par.

c) Sea A una matriz de orden 3 tal que det(A)=-1. Entonces det(2A)=-2.

d) Si el sistema $Ax=0$ es compatible indeterminado, entonces el sistema $Ax=b$ también lo es para cualquier vector b (de las dimensiones apropiadas).

e) Sea A una matriz simétrica de orden 3 que verifica $A^{-1}=A^{t}$. Entonces el sistema homogéneo $(A^{-1}+A^{T})x=0$ Compatible Determinado.

Tarea N°3 para realizar fuera del aula: Trigonometría

Objetivos: afianzar los conocimientos adquiridos en el aula respecto de la resolución de triángulos oblicuángulos; la comprobación de identidades trigonométricas y la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Hola, te proponemos realizar algunas tareas para reforzar lo desarrollado en clase.

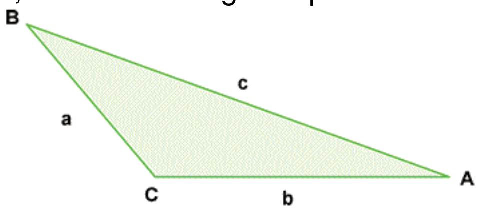
Vamos a utilizar la ayuda de algunas páginas web en las que se pueden hacer actividades en línea.

Además del material desarrollado en el apunte de la cátedra, con el fin de repasar algunos tópicos del tema Trigonometría que dimos en clase, podés visitar las siguientes páginas:

1. http://www.vadenumeros.es/cuarto/razones-trigonometricas.htm
2. http://www.vadenumeros.es/actividades/resolucion-de-triangulos.htm?a=25&A=60&B=70&Resolver1=Resolver

Antes de comenzar a resolver un ejercicio, en primer lugar, tenés que leer con mucho cuidado el enunciado, confeccionar una figura donde pongas toda la información que está en él, darle nombres a los ángulos y a los lados del triángulo.

Por ejemplo, podes nombrar los vértices con las letras A, B o C y los lados opuestos a ellos con a, b y c, como en la figura que te mostramos a continuación:



Una vez que hiciste la figura, le pusiste en ella toda la información que encontraste en el enunciado, recién podés empezar a resolver un problema, que en el contexto de esta tarea, significa, encontrar el valor de las amplitudes de los tres ángulos y las longitudes de los tres lados.

Te proponemos que resuelvas los siguientes ejercicios y problemas:

1) En los ítems a), b) y c) te damos los datos de lados y/o ángulos de triángulos. En cada uno de ellos hacé una gráfica ubicando los datos y hallá los ángulos y/o lados que faltan según el caso. Además, identificá y enunciá los teoremas que se usaron en el planteo de la resolución.

a) a = 1792m, b=4231m, c= 3184m.
b) a= 12m, b= 8m, A=150º

c) a= 72m, b= 57m, $B\hat{C}A=75^{\circ}$

2) En un terreno ubicamos 2 puntos: A y B, al segundo de ellos no podemos llegar. Tomamos entonces un tercer punto C que dista de A 42.8m. Desde A y C se dirigen visuales al punto B que forma con el segmento AC ángulos: $B\hat{A}C=54°$ y $B\hat{C}A = 64º$. Hallá la distancia entre A y B.

3) Sean A y B dos puntos inaccesibles, pero visibles ambos desde otros puntos accesibles C y D, separados entre sí 73.2m. Si los ángulos $A\hat{C}D= 80º$, $B\hat{C}D= 43º$, BDC= 32º y ADC= 23º, determiná la distancia entre A y B.

4) Comprobar las identidades que se dan a continuación.

Te recordamos que comprobar una identidad consiste en, dada una ecuación, transformar el primer miembro de ella en el segundo o viceversa, según lo que resulte más sencillo. En algunas ocasiones, también puede resultar conveniente manipular ambos miembros de la ecuación, hasta llegar a una identidad (igualdad)

a) $\dfrac{senx + \cos x}{senx} = 1 + cotgx$

b) $\dfrac{senx}{\cos ecx} + \dfrac{\cos x}{\sec x} = 1$

c) $\dfrac{\sec x}{tgx + \cot gx} = senx$

5) Resolver las ecuaciones trigonométricas, $x \in [0; 2\pi)$.

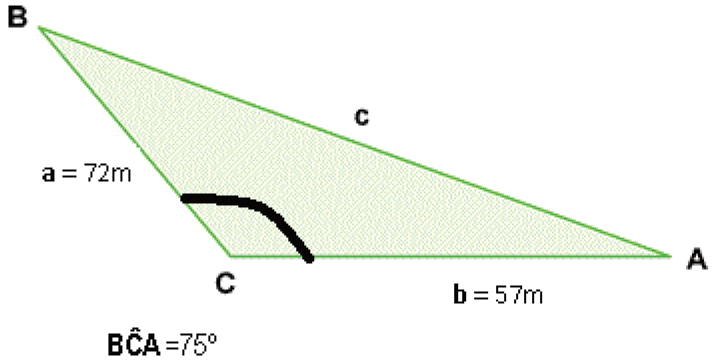
a) cos2x + 5cosx + 3 = 2

b) senx – 2 cos2x = -1/2

c) -3senx + $\cos^2$x = 3.

Te mostramos, a continuación, cómo proceder para resolver el ejercicio 1-c) a= 72m, b= 57m, $B\hat{C}A=75º$.

1) Vemos que los datos que nos dan son la longitud del lado a=72m, la del lado b=57m y la amplitud del ángulo $B\hat{C}A=75º$, medida en grados sexagesimales.
2) Armamos una gráfica con la información dada:



3) ¿qué nos falta conocer para completar el triángulo? El lado **c**, el ángulo **CÂB** y $A\hat{B}C$.

Para calcular el lado c, usamos el teorema del coseno que, aplicado a este problema nos queda:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos B\hat{C}A$

$c^2 = 72^2 + 57^2 - 2.72.57.\cos 75 = 6308,613278$

$c = \sqrt{c^2} = \sqrt{6308,613278} = 79,42677935$

Una vez que calculaste la longitud del lado c, podes calcular, la amplitud de los ángulos **CÂB** y **ABC** usando el teorema del seno: $\frac{sen\,C\hat{A}B}{a} = \frac{sen\,A\hat{B}C}{b} = \frac{sen\,B\hat{C}A}{c}$

Para calcular la amplitud del ángulo **CÂB**, elegís el primer y tercer término de la igualdad del teorema del seno $\frac{sen\,C\hat{A}B}{a} = \frac{sen\,B\hat{C}A}{c}$ operando algebraicamente llegás a

$C\hat{A}B = arc\,sen(\frac{a.sen\,B\hat{C}A}{c})$

$C\hat{A}B = arc\,sen(\frac{72.sen75}{79,42677935}) = arc\,sen(0,8756071952) = 61,11691863$ que pasado a grados minutos y segundos da: 61°7'0,91''.

El otro ángulo, podés calcularlo de dos formas:

- Usando el teorema del seno, ahora elegís de la igualdad el segundo y el tercer término $\frac{sen\,A\hat{B}C}{b} = \frac{sen\,B\hat{C}A}{c}$ que operando algebraicamente obtenés

  $A\hat{B}C = arc\,sen(\frac{b.sen\,B\hat{C}A}{c})$

$C\hat{A}B = arc\,sen(\frac{57.sen75}{79,42677935}) = arc\,sen(0,6931890296) = 43,88308137$ que pasado a grados minutos y segundos da: 43°52'59,09''.

- Recordando que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. La operación que tenés que hacer es:
  ABC =180° - (**BĈA** + **CÂB**) = 180° - (75° + 61°7'0,91'') = 43°52'59,09''.

Una vez que los termines, nos los entregas para que los corrijamos y junto con tus compañeros analicemos los resultados encontrados.

Recordá mencionar en todos los casos los teoremas que aplicaste en cada uno de los ejercicios propuestos.

Tarea N°4 para realizar fuera del aula: Vectores, recta y plano

Hola, seguimos proponiéndoles tareas para realizar fuera del aula de temas que, sabemos, suelen tener dificultades para Uds. En esta oportunidad la tarea consiste en resolver algunos ejercicios sobre vectores en R^3, recta y plano. En esta clase vamos a realizar la autocorrección y análisis de los diferentes planteos realizados en su resolución.

Objetivo: afianzar los conocimientos adquiridos en el aula respecto a vectores, plano y rectas en R^3.

1. a) Hallar un vector de magnitud 3 que sea paralelo al vector $\vec{u} = \langle 2, 1, -1 \rangle$.

   b) Hallar un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ (dado en a) y a $\vec{v} = \langle 1, 1, 0 \rangle$

   c) Hallar dos vectores $\overrightarrow{w_1}$ y $\overrightarrow{w_2}$ que verifiquen las siguientes condiciones (simultáneamente):
   $\overrightarrow{w_1}$ es paralelo a $\vec{u}$.
   $\overrightarrow{w_2}$ es ortogonal a $\vec{u}$.
   $\vec{v} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$.
   (Sugerencia: Recordar la descomposición de un vector en dos direcciones ortogonales cualesquiera).

2. Indicar por qué las siguientes afirmaciones son falsas:
   i) Sea φ el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Sabiendo que $\varphi > \pi/2$,
   a) $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$;
   b) El vector $\overrightarrow{proy_{\vec{v}} u}$ y el vector $\vec{v}$ forman un ángulo de 0 rad.

   ii) Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores de $\Re^3$ cualesquiera
   a) - 4 $\vec{u}$ es un vector en la misma dirección que $\vec{u}$ de magnitud 4.
   b) $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w} = k$ siendo k un número real.
   c) $\vec{u} \times \vec{u} = |\vec{u}|^2$
   d) $(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w} = 0$ indica que $\vec{w}$ es ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

3. Dadas las rectas l: $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ y $r: x - 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$
   a) Determinar de dos formas diferentes la dirección de la recta l
   b) Determinar si las rectas l y r son ortogonales.

4. a) Determinar si los planos $\begin{cases} \pi_1: \quad x + y + 4z = 3 \\ \pi_2: \ 3x - 3y + 2z = 0 \\ \pi_3: - x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$ se intersecan en un punto.

   b) Si su respuesta es afirmativa, encuentre dicho punto.

Resoluciones

Tarea N°1 para realizar fuera del aula: Cálculo de una carga de fuego

Hola, te proponemos realizar una tarea para reforzar lo desarrollado en clase.

Los **objetivos** que nos plantamos al diseñar esta tarea son: afianzar los conocimientos adquiridos en el aula respecto a las operaciones con matrices y reconocer su utilidad resolviendo un problema aplicado a un tema de la carrera.

Además, vamos a utilizar la ayuda de algunas páginas web en las que vas a tener que buscar información y datos.

La tarea que te proponemos realizar una tarea con matrices aplicado al cálculo de una carga de fuego, tema que vas a ver cuando curses la asignatura Protección contra incendios I.

Como es una temática muy específica de una materia que vas a cursar en 4° año, es necesario que incorpores y comprendas algo del lenguaje técnico que se emplea en ella, para lo cual, te propongo recorrer los vínculos enlazados a los términos que corresponden al lenguaje técnico y así, mejorar tu comprensión.

Recordá que tenés que traer resueltas actividades planteadas en la clase del jueves25/4. En esta clase vamos a realizar la autocorrección y análisis de los diferentes planteos realizados en su resolución.

¿COMENZAMOS?

Para diseñar o verificar la protección contra incendios de un determinado local, hay que calcular la carga de fuego del mismo. Para ello es necesario identificar los diferentes tipos de materiales combustibles que hay en él y la cantidad.
Diferentes materiales producen diferentes clases de fuego que a su vez, tienen diferente poder calorífico y diferente resistencia al fuego .

La propia definición de carga de fuego nos orienta sobre cómo se calcula: ***"...es el peso en madera por unidad de superficie (Kg/m²) capaz de desarrollar una cantidad de calor equivalente a la de los materiales contenidos en el sector de incendio...".***

Es decir, sabemos que los materiales que se queman en un incendio liberan calor, pues bien, sean cuales fueran esos materiales consideraremos que ese calor viene de un incendio en el que se quema exclusivamente madera en cantidad equivalente (Esto significa que, que esa cantidad de madera sea capaz de emitir igual cantidad de calor).
Como patrón de referencia consideraremos madera con poder calorífico de 18,41 MJ/kg o lo que es lo mismo 4.400 Kcal/Kg

Por ejemplo: supongamos que tenemos un material combustible "Y" que al quemarse libera unas 13.200 Kcal/kg, a eso se lo llama Poder Calorífico, es decir que cada kilogramo que se quema libera una cantidad de calor de 13.200 Kcal y nos formulamos la siguiente pregunta:

¿Qué cantidad de madera al quemarse liberará la misma cantidad de calor que ese kilo de material combustible?, hagamos la cuenta

4.400 Kcal .... 1 Kg de madera

13.200 Kcal .... $\frac{1 \mathbf{kg\,de\,madera} * 13.200 \mathbf{Kcal/kg}}{4.400 \mathbf{Kcal/kg}} = 3 \mathbf{kg\,de\,madera}$

La "carga equivalente en madera" de ese kilo de combustible "Y" es 3 Kg de madera.

Eso no es aún la carga de fuego [Q_f], para serlo tiene que ser referida a la superficie del sector dónde se encuentre esa carga, es decir debemos dividirla por la superficie del sector de incendio considerado.

$$\boldsymbol{Q_f} = \frac{\mathbf{Peso\,de\,madera\,equivalente}}{\mathbf{Superficie\,del\,sector\,de\,incendio}}$$

Para resolver los problemas del cálculo de carga de fuego que se presentan en nuestra profesión necesitamos conocer los valores de poderes caloríficos de los diferentes materiales

PLANTIEMOS UN PROBLEMA:

Una edificación ubicada en la ciudad de Santa Fe se dispone como depósito de materiales para la venta comercial mayorista y gastronómica de aceite de oliva (comestible), fraccionada en bidones de 10, 20, y 25 litros. El mismo cuenta con una superficie total de 360 m^2, divididos en tres sectores de superficie equivalentes.
Los materiales acumulados son: CARTÓN para las cajas, BIDONES DE PLÁSTICO que contienen el aceite, y el ACEITE DE OLIVA.
Para poder comenzar a calcular la "carga de fuego", en primer lugar tenemos que determinar la cantidad de los elementos mencionados, que nos da:

Material	Sector		
	1	2	3
Cartón (kg)	2000	1500	1800
Bidones de plástico (unidad)	160 de 10 L	120 de 20 L	140 de 25 L
Aceite de oliva (L)	1600	2400	3500

DATOS A TENER EN CUENTA:

- ✓ Debemos tener todas las cantidades de los materiales expresados en las unidades de medida adecuadas para poder hacer los cálculos.
- ✓ La densidad del Aceite en Condiciones Normales de Presión y Temperatura (CNPT) es de 0.916 Kg/L.
- ✓ Peso por unidad de bidón es de 600 g el de 10 L, 1100 g el de 20 L, y 1350 g el de 25 L.

Por otro lado, cada uno de estos elementos presenta un poder calorífico propio (disponible en sitio web), que para este caso, se corresponden con los siguientes:

- ✓ ACEITE DE OLIVA: 10 Mcal/kg
- ✓ PLÁSTICO (PVC): 5 Mcal/kg
- ✓ CARTÓN: 4 Mcal/kg

¿Cómo podemos usar las matrices para calcular el peso de los bidones de cada tipo?, te proponemos esta opción:

$$\begin{pmatrix} 0{,}60 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}10 & 0 \\ 0 & 0 & 1.35 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 160 \\ 120 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 \\ 132 \\ 189 \end{pmatrix}$$

¿En qué unidad están los números de la diagonal principal de la matriz?
En kg

¿Por qué tuvimos que cambiar las unidades?
Porque las unidades deben ser homogéneas para tener resultados válidos y en este tipo de cálculos los pesos se deben trabajar en kg.

¿Cómo se interpretan los elementos del vector resultado?
Hay 96 kg de bidones de plástico en el sector 1, 132 kg en el sector 2 y 189 kg en sector 3.

Para el aceite podés que pensar de manera similar, pero ahora con las densidades.

$$\begin{pmatrix} 1600 & 0 & 0 \\ 0 & 2400 & 0 \\ 0 & 0 & 3500 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}916 \\ 0{,}916 \\ 0{,}916 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1465{,}6 \\ 2198{,}4 \\ 3206{,}0 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenidos los pesos de plástico y de aceite por sector, todos estos datos hay que armar una matriz que contenga los pesos de cada material por sector.

Para ello ¡es necesario ordenar correctamente los datos! ¡Todos deben estar expresados en las mismas unidades!

Para lo cual, en lo primero que debemos pensar, es en agrupar todos los datos de forma ordenada (como los elementos que componen una matriz). Así, considerando que en todos los sectores de incendio vamos a encontrar ACEITE, PLÁSTICO Y CARTÓN; podremos considerar que existen tres sectores y ordenarlos como los vectores fila de nuestra matriz de 3x3.

Sectores Materiales	Aceite	Plástico	Cartón
Sector 1	1465,6	96	2000
Sector 2	2198,4	132	1500
Sector 3	3206,0	189	1800

Por otra parte, los poderes caloríficos de cada uno de los elementos, correctamente ordenados pueden conformar una matriz de 3x1 (o vector).

Poderes Caloríficos	Mcal/kg
Aceite	10
Plástico	5
Cartón	4

Al realizar la multiplicación lograremos obtener como resultado una nueva matriz, que nos de los poderes caloríficos de los tres sectores de incendio.

¿Cómo tenemos que multiplicar para que el resultado nos dé un vector de 3x1?

$$\begin{pmatrix} 1465{,}5 & 96 & 2000 \\ 2198{,}4 & 132 & 1500 \\ 3206{,}0 & 189 & 1800 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23135 \\ 28664 \\ 40205 \end{pmatrix}$$

¿Cómo se interpretan los elementos del vector resultados? ¿En qué unidad están?
Cada elemento del vector resultados del producto se interpreta como la cantidad total de calor que se desarrollaría si se quema el material dentro de cada sector de incendios.
La unidad de cada uno de ellos es Mcal.

Cuando multiplicamos el "peso" de un material dado por su correspondiente poder calorífico, determinamos el "calor" que cada elemento puede desarrollar al entrar en combustión (comúnmente lo llamamos fuego), cuya unidad estará dada para este caso en calorías o kilocalorías o megacaloría (10^3 calorías = 10^6 calorías respectivamente); demás está decir que existen otras unidades que expresan calor.

Una vez determinado el calor que pueden generar los materiales contenidos dentro de un sector de incendio, continuamos dividiendo por el poder calorífico estándar de la madera 4.4 (Mcal) / Kg de madera.
De esta forma obtendremos los Kilogramos de madera equivalentes a los materiales combustibles acopiados dentro del sector. No obstante, queda un último paso, que es determinar los Kg de madera por m^2.

Todo lo planteado en el párrafo anterior lo podemos hacer con matrices,

¿Qué operaciones con matrices tenemos que emplear para obtener la carga de fuego en cada sector?
Multiplicación de un número por un vector, el número es $\frac{1}{4400\frac{Kcal}{kg} * 120m^2}$ que al multiplicar por la cantidad de calor desarrollada en cada sector de incendios, que está en Kcal, el resultado final nos da en kg/m^2, la carga de fuego en peso de madera equivalente.
El resultado que estamos queriendo obtener es un vector, en el que cada componente sea la carga de fuego en cada sector.

Ayuda:
-Como todos los sectores de incendio tienen la misma superficie, podríamos hacer:

$$\frac{1}{4400\,\frac{Kcal}{kg}\,120m^2}\begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

-También podríamos hacer:

$$\frac{1}{4400\,\frac{Kcal}{kg}}\begin{pmatrix} 120m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 120m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 120m^2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

Comprobá que con ambas propuestas llegas al mismo resultado.

$$\frac{1}{4{,}400\,\frac{Mcal}{kg}\,120m^2}\begin{pmatrix} 23135 \\ 28664 \\ 40205 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43{,}82 \\ 54{,}29 \\ 76{,}15 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4{,}400\,\frac{Mcal}{kg}}\begin{pmatrix} 120m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 120m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 120m^2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 23135 \\ 28664 \\ 40205 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43{,}82 \\ 54{,}29 \\ 76{,}15 \end{pmatrix}$$

Describí las operaciones matriciales que usamos en cada caso.
En la primera opción, se utilizó el producto de un número por una matriz (vector)
En el segundo caso, se utilizó el producto de un número, por una matriz diagonal por un vector.
Con ambas propuestas se obtienen los mismos resultados.

Si ahora te decimos que los sectores de incendio no son todos iguales, sino que, el Sector 1 tiene una superficie el doble del Sector 2 y la superficie del Sector 3 es la mitad de la del Sector 1.

¿Cuál es la superficie de cada Sector de incendios?
Superficie de Sector 1 = 2 superficie de Sector 2 ($S_1=2S_2$)
Superficie de Sector 3 = ½ superficie de sector 1 ($S_3= ½ S_1$)
Superficie de Sector 1+Superficie de Sector 2+Superficie de Sector 3 = Superficie total ($S_1+S_2+S_3= 360\ m^2$)
Lo que escribimos coloquialmente lo traducimos a un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} S_1 + S_2 + S_3 = 360 \\ S_1 = 2S_2 \\ S_3 = \frac{1}{2}S_1 \end{cases} \rightarrow \text{ en forma matricial nos queda } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, por el método que quiera o bien usando una aplicación obtenemos la solución

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 90 \\ 90 \end{pmatrix}$$

¿Cuál de las dos opciones propuestas con matrices contempla esta situación?
La segunda, porque permite tener sectores de incendio con superficies diferentes

Calcula la carga de fuego de cada Sector en este caso.

$$\frac{1}{4{,}400\,\frac{Mcal}{kg}}\begin{pmatrix}180m^2 & 0 & 0\\ 0 & 90m^2 & 0\\ 0 & 0 & 90m^2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}23135\\ 28664\\ 40205\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29{,}2\\ 72{,}4\\ 101{,}5\end{pmatrix}$$

¿Cómo harías para calcular la carga de fuego total, sin contemplar los sectores de incendio usando matrices a partir del cálculo que hicimos?

(Sugerencia, hacé el producto escalar entre un vector fila de unos y el vector columna de cargas de fuego por sector que obtuviste. Analizá el resultado.)

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}29{,}2\\ 72{,}4\\ 101{,}5\end{pmatrix}=203{,}1kg/m^2$$

Para esta última configuración de los sectores de incendios la carga de fuego total es de 203,1 Kg/m^2

<u>Te proponemos resolver un problema de similares características, investigando los datos necesarios:</u>

Ahora tenemos que calcular la carga de fuego en un taller mecánico, donde se realizan tareas de mantenimiento integral del automotor, cuya superficie es de 220 m^2 dividida en dos sectores: el depósito y la zona de trabajo, el primero tiene una superficie que es la mitad de la del segundo.

Los elementos combustibles que se relevaron son:

Depósito:
- ✓ 2000 L de aceite mineral nuevo, para reposición;
- ✓ 1350 Kg. de neumáticos nuevos para venta y cambio;

Zona de trabajo (Taller):
- ✓ 1500 L de aceite mineral, residuo de los recambios efectuados a motores;
- ✓ 500 Kg de neumáticos usados.

Respuesta:
Ordenemos la información dada en el enunciada, busquemos la que nos falta.

1) Superficie de los sectores del taller

Superficie total del taller: 220 m2.
Superficie Depósito = ½ Superficie del Taller (SD = ½ ST)

Esto nos lleva a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:
$\begin{cases}SD+ST=220\\ SD-\frac{1}{2}ST=0\end{cases}$, expresado en forma matricial queda $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}SD\\ ST\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}220\\ 0\end{pmatrix}$

Al resolverlo, obtenemos que la Superficie del Depósito es de 73,3 m^2 y la del Taller es de 146,7 m^2.

2) Relevamiento de materiales acopiados
   Para simplificar los cálculos vamos a unificar los materiales por tipo, aunque sean nuevos o usados.

Sector	Materiales	
	Aceite mineral (L)	Neumáticos(kg)
Depósito	2000	1350
Taller	1500	500

3) Datos faltantes
   Importante, los datos faltantes los buscamos en internet o en libros de Protección contra Incendios. Hay una variedad de valores. Los que vamos a utilizar para calcular son un promedio de los valores que encontramos.

Aceite mineral nuevo:

Densidad: 0,910 [kg/L]
Poder calorífico: 10031 [Kcal/kg]

Neumáticos:

Poder calorífico: 8500 [Kcal/kg]

4) Cálculos:
   a) Peso de aceite almacenado:

$$\begin{pmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 1500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}910 \\ 0{,}910 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1820 \\ 1365 \end{pmatrix}$$

   b) Poder calorífico de materiales almacenados por sector:

$$\begin{pmatrix} 1820 & 1350 \\ 1365 & 500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10031 \\ 8500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29731420 \\ 17942315 \end{pmatrix}$$

   c) Carga de fuego por sector:

$$\frac{1}{4400} \begin{pmatrix} 73{,}3 & 0 \\ 0 & 164{,}6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 29731420 \\ 17942315 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92{,}19 \\ 24{,}77 \end{pmatrix}$$

   En el sector de Depósito la carga de fuego es 92,19 kg/m^2
   En el sector de Taller la carga de fuego es de 24,77 kg/m^2

   d) La carga de fuego total, como suma de la que hay en todos los sectores es:

Tarea 2:
Ejercicio 1

c) Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 10 \end{pmatrix}$

Se puede calcular de dos formas, por propiedades, la fila 3 es el resultado de sumar a la fila 1 la fila 2 multiplicada por 2, como el determinante tiene una fila que es combinación lineal de otras dos, su valor es cero.
Otra forma es aplicar la regla de Sarrus, dado que se pide calcular el determinante de una matriz de 3x3. También se puede calcular utilizando la definición o bien con una aplicación gratuita para celular como es *"Matriz Operations"*.

d) Clasificar, sin resolver, el sistema $A.x = b$

Como la matriz de coeficientes del sistema tiene determinante igual a cero, no posee inversa. Recordemos que la condición para la existencia de la matriz inversa, es que su determinante sea diferente de cero.
Esto implica que el sistema de ecuaciones lineales dado no tiene solución única.
La consigna nos pide que lo clasifiquemos, para ello necesitamos saber las características del término independiente y esto no está dado, razón por la cual para clasificarlo debemos contemplar las dos situaciones posibles, que $b = \vec{0}$ (vector nulo) o bien que $b \neq \vec{0}$.

Si $b = \vec{0}$, el sistema de ecuaciones lineales es homogéneo y, cuando la matriz de coeficientes del sistema no es invertible, este sistema tiene infinitas soluciones, por lo que se lo clasifica como *Compatible o consistente indeterminado*.

Si $b \neq \vec{0}$, el sistema de ecuaciones lineales es NO homogéneo, y cuando la matriz de coeficientes del sistema no es invertible, este sistema podría tener infinitas soluciones, por lo que se lo clasificaría como *Compatible o consistente indeterminado*, o bien no tener solución, razón por la cual se lo clasificaría en *Incompatible o Inconsistente.* Resumiendo, cuando la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo no tiene inversa, su determinante es cero, no podemos clasificarlo sin resolverlo, solo podemos afirmar que no es *Compatible o Consistente determinado*, es decir, no tiene solución única.

Ejercicio 2

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$ y que $A = \begin{pmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ 2a+b & 2d+e & 2g+h \end{pmatrix}$

c) Indicar si la matriz A es invertible.

Para saber si la matriz A es invertible calculemos el valor de su determinante

$$\det(A) = \begin{vmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ 2a+b & 2d+e & 2g+h \end{vmatrix}$$

Si analizamos la expresión vemos que la tercera fila tiene sumada la segunda fila. Recordemos la propiedad de los determinantes: "si a una fila (o columna) le sumamos otra fila (o columna) multiplicada por un número, el determinante no cambia" y esto nos permite hacer:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ 2a+b & 2d+e & 2g+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ 2a & 2d & 2g \end{vmatrix}$$

Observemos que ahora, la fila 3 quedó multiplicada por dos, recordemos la propiedad: "al multiplicar un determinante por un número, implica multiplicar una fila (o columna) por ese número". En este caso queda

$$\det(A) = \begin{vmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ 2a & 2d & 2g \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ a & d & g \end{vmatrix}$$

Si recordamos la propiedad "si en un determinante se intercambian dos líneas de lugar entre sí, el determinante queda multiplicado por -1. En este caso, intercambiemos la fila 1 con la fila 3.

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} c & f & i \\ b & e & h \\ a & d & g \end{vmatrix} = 2\,(-1)\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

Si recordamos la propiedad: "el determinante de una matriz es igual al de su matriz transpuesta" y lo aplicamos al cálculo que estamos haciendo, nos queda:

$$\det(A) = 2\,(-1)\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2\,.\,2 = -4$$

Luego de todo lo realizado, podemos concluir que: "como $\det(A) = 4$, número diferente de cero, la matriz A es invertible.

d) ¿Cuántas soluciones admite el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Como la matriz de coeficientes de este sistema de ecuaciones lineales no homogéneo es la matriz del inciso a), acabamos de mostrar que es invertible (no singular), por lo tanto, el sistema es compatible determinado. Esto quiere decir que tiene solución única.

Ejercicio 3

¿Para qué valores de x la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$?

Para que la matriz dada no admita inversa, su determinante debe valer cero. Calculemos el determinante desarrollándolo por los elementos de la tercera columna, que tiene dos ceros.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = x(-2+3) = x$$

Si el determinante es cero, la única posibilidad es que $x = 0$.

Ejercicio 4

Para una cierta matriz A, se sabe que $\det(A) = -1$ y que $\det(2A) = -16$. ¿Cuál es el orden de la matriz?

Para resolver este problema, tenemos que utilizar la propiedad: $\det(k.A) = k^n.\det(A)$ con k una constante numérica y n, el orden de la matriz. Entonces,

$$-16 = \det(2A) = 2^n \det(A) = 2^n(-1)$$

$-16 = 2^n(-1)$ de donde obtenemos que $n = 4$

La respuesta a la consigna es: "el orden de la matriz es **4**".

Ejercicio 5

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ y B la matriz que resulta de realizar en A las siguientes transformaciones: primero se multiplica A por sí misma, después se cambian de lugar la segunda y la tercera fila y finalmente, se multiplican todos los elementos de la segunda columna por -2. Calcular el determinante de B.

Calculemos $\det(A) = 8$

Primero hacemos $A.A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 34 & 49 \\ 40 & 31 & 44 \\ 134 & 120 & 169 \end{pmatrix}$

Luego intercambiamos de lugar la segunda y la tercera fila $\begin{pmatrix} 54 & 34 & 49 \\ 134 & 120 & 169 \\ 40 & 31 & 44 \end{pmatrix}$

Multiplicamos por -2 la segunda columna, $\begin{pmatrix} 54 & -68 & 49 \\ 134 & -240 & 169 \\ 40 & -62 & 44 \end{pmatrix}$

Finalmente $B = \begin{pmatrix} 54 & -68 & 49 \\ 134 & -240 & 169 \\ 40 & -62 & 44 \end{pmatrix}$, si calculamos $\det(B) = 128$

Si ahora calculamos el determinante usando las propiedades, nos da

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 54 & -68 & 49 \\ 134 & -240 & 169 \\ 40 & -62 & 44 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 54 & 34 & 49 \\ 134 & 120 & 169 \\ 40 & 31 & 44 \end{vmatrix} = -2\,.(-1) \begin{vmatrix} 54 & 34 & 49 \\ 40 & 31 & 44 \\ 134 & 120 & 169 \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = -2\,.(-1)\left(\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 10 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 12 & 7 & 10 \end{vmatrix}\right) = 2.(\det(A))^2 = 2\,.8^2 = 128$$

Ejercicio 6

Dada la Matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, hallar dos matrices X e Y que verifiquen $\begin{cases} X + Y^{-1} = M \\ X - Y^{-1} = M^T \end{cases}$

Es un sistema de ecuaciones matricial, donde las incógnitas son las matrices X e Y, ambas de 2x2.

Si sumamos las dos ecuaciones nos queda: $2X = M + M^T$, de donde podemos obtener X

$$X = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Si restamos las dos ecuaciones del sistema, podemos obtener Y^{-1}

$$Y^{-1} = \frac{1}{2}(M - M^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = (Y^{-1})$$

Ejercicio 7

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar cada caso.

f) **El producto de matrices invertibles es invertible.**

Verdadero:

Si A y B son matrices invertibles el producto se calcula así $(\mathrm{A.B})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}.\mathrm{A}^{-1}$.

g) **Sea M una matriz simétrica. Entonces el orden de M es par.**

Falso:

sea $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, una matriz de 3x3.

Calculemos $C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, vemos que $C^T = C$ lo que nos indica que C es una matriz simétrica y su orden es impar.

h) **Sea A una matriz de orden 3 tal que $\det(\mathrm{A}) = -1$. Entonces $\det(2\mathrm{A}) = -2$.**

Falso:

Calculemos $\det(2\mathrm{A}) = 2^3 \det(A) = 8.(-1) = -8.$

i) **Si el sistema $A.x = 0$ es compatible indeterminado, entonces el sistema $A.x = b$ también lo es para cualquier vector b (de las dimensiones apropiadas).**

Falso:

Si el sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado a un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo sea compatible indeterminado (infinitas soluciones), no nos permite predecir que este último también va a ser compatible indeterminado, debido a que, si la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones no homogéneo es singular, este puede ser compatible indeterminado o incompatible. En esta situación, lo único que podemos afirmar es que no es compatible determinado.

j) **Sea A una matriz simétrica de orden 3 que verifica $A^{-1} = A^T$. Entonces el sistema homogéneo $(A^{-1} + A^T).x = 0$ es Compatible Determinado.**

Verdadero:

Tenemos que probar que la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales homogéneo dado tiene determinante diferente de cero, para ello usamos la información que $A^{-1} = A^T$.

En primer lugar existe A^{-1}, por lo tanto existe una matriz A cuya inversa nos dieron que es no singular, $\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$, de donde surge que $\det(A^{-1}) \neq 0$.

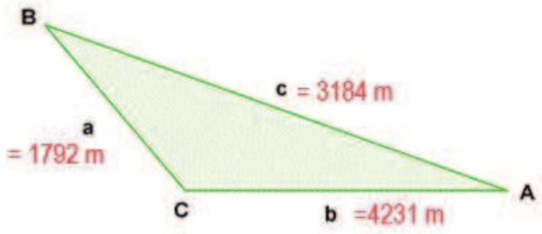
En el sistema de ecuaciones homogéneo, usemos que $A^{-1} = A^T$ para calcular el $\det(A^{-1} + A^T) = \det(A^{-1} + A^{-1}) = \det(2A^{-1}) = 2^3.\det(A^{-1}) \neq 0$

En el sistema de ecuaciones lineales homogéneo dado, $(A^{-1} + A^T).x = 0$, la matriz de coeficientes es no singular, entonces, es compatible determinado.

Tarea 3:

1) En los ítems a), b) y c) te damos los datos de lados y/o ángulos de triángulos. En cada uno de ellos hacé una gráfica ubicando los datos y hallá los ángulos y/o lados que faltan según el caso. Además, identificá y enunciá los teoremas que se usaron en el planteo de la resolución.

a) a = 1792m, b=4231m, c= 3184m.
Para empezar a resolver este problema, en primer lugar, hagamos un croquis con los datos.
Datos:



Incógnitas: amplitud de los tres ángulos interiores del triángulo: $\hat{A}, \hat{B}\ y\ \hat{C}$.

Resolución: Con los datos que tenemos, para calcular la amplitud de los tres ángulos podemos aplicar tres veces el teorema del coseno.

Cálculo de la amplitud del ángulo $\hat{C}$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(\hat{C})$$

Despejamos y finalmente nos queda $\hat{C} = arc\ cos\left(\frac{c^2-a^2-b^2}{-2.a.b}\right)$

Reemplazando por los datos $\hat{C} = arc\ cos\left(\frac{(3184)^2-(1792)^2-(4231)^2}{-2.1792.4231}\right) \cong 43°\ 38'\ 8{,}25''$

Procedemos de manera similar para calcular las amplitudes de los otros dos ángulos

$$\hat{A} = arc\ cos\left(\frac{(1792)^2-(3184)^2-(4231)^2}{-2.\,3184.\,4231}\right) \cong 22°\ 51'\ 13{,}65''$$

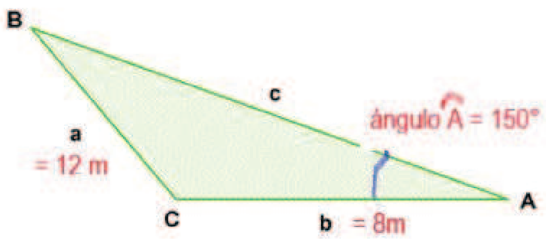
$$\hat{C} = arc\ cos\left(\frac{(4231)^2-(1792)^2-(3184)^2}{-2.\,1792.\,3184}\right) \cong 113°\ 30'\ 38{,}10''$$

Verificación: La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, en este caso hacemos:

$$43°\ 38'\ 8{,}25'' + 22°\ 51'\ 13{,}65'' + 113°\ 30'\ 38{,}10'' = 180°\ 0'0''$$

b) a= 12m, b= 8m, A=150º

Datos:



Incógnitas: longitud del lado **c** y amplitud de los ángulos $\hat{B}\ y\ \hat{C}$
Resolución: Con los datos que tenemos para hallar la amplitud del ángulo $\hat{B}$ podemos aplicar el teorema del seno: $\frac{sen\ (\hat{B})}{b} = \frac{sen\ (\hat{A})}{a} = \frac{sen\ (\hat{C})}{c}$

De esta expresión, si elegimos, $\frac{sen\ (\hat{B})}{b} = \frac{sen\ (\hat{A})}{a}$, podemos calcular la amplitud del ángulo $\hat{B}$. Despejando nos queda: $\hat{B} = arc\ sen\left(\frac{b}{a} sen\ (\hat{A})\right) = sen\ (150°)\frac{8}{12} \cong 19°\ 28'\ 16{,}39''$

La amplitud del ángulo $\hat{C}$ la podemos calcular haciendo $\hat{C} = 180° - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) =$ $10°\ 31'\ 43{,}61''$.

Para calcular la longitud del lado c, aplicamos nuevamente el teorema del seno, utilizando:

$\frac{sen\ (\hat{A})}{a} = \frac{sen\ (\hat{C})}{c}$ y de esta expresión despejamos **c.**

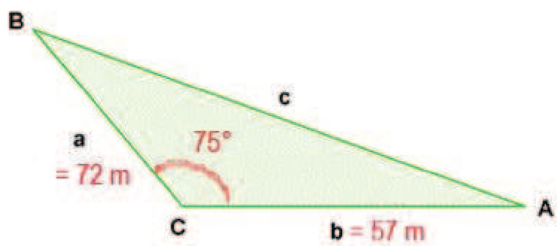
$$c = a\ \frac{sen\ (\hat{C})}{sen\ (\hat{A})} \cong 4{,}39\ m$$

También podemos hallar c, aplicando el teorema del coseno.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(\hat{C})} = \sqrt{(12)^2 + 8^2 - 2.12.8.\cos(10°31',61'')}$$

$$c\ \approx 4{,}39\ m$$

c) a= 72m, b= 57m, BĈA=75º
Datos:



Incógnitas: Longitud del lado **c**, amplitud de los ángulos $\widehat{CAB}$ y $\widehat{CBA}$.
Resolución: Para calcular el lado **c**, usamos el teorema del coseno que, aplicado a este problema nos queda:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(\widehat{BCA})$$

$$c = \sqrt{(72)^2 + (57)^2 - 2.72\ .57.\cos(75°)} \approx 79{,}43\ m$$

Una vez que calculamos la longitud del lado **c**, podes calcular, la amplitud de los ángulos $\widehat{CAB}$ y $\widehat{CBA}$ aplicando el teorema del seno: $\frac{sen\ (\widehat{CAB})}{a} = \frac{sen(\widehat{ABC})}{b} = \frac{sen(\widehat{BCA})}{c}$

Para calcular la amplitud del ángulo $\widehat{CAB}$, elegimos el primer y tercer término de la igualdad del teorema del seno $\frac{sen\,(\widehat{CAB})}{a} = \frac{sen(\widehat{BCA})}{c}$ operando algebraicamente llegamos a

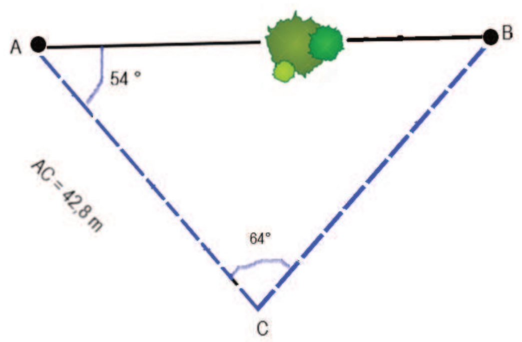
$$\widehat{CAB} = arc\ sen\left(\frac{a}{c} sen\big(\widehat{BCA}\big)\right) = arc\ sen\left(\frac{72}{79{,}43} sen(75°)\right) \approx 61°\ 7'0{,}91''$$

El otro ángulo, podemos calcularlo de dos formas:
Usando el teorema del seno, ahora elegís de la igualdad el segundo y el tercer término $\frac{sen(\widehat{ABC})}{b} = \frac{sen(\widehat{BCA})}{c}$ y luego operando algebraicamente obtenemos la amplitud del ángulo $\widehat{ABC} = arc\ sen\left(\frac{b}{c}\ sen\ (\widehat{BCA})\right) \approx arc\ sen\ \left(\frac{57}{79{,}43} sen(75°)\right) \approx\ 43°\ 52'59{,}09''$
La otra forma de hallar la amplitud del tercer ángulo interior del triángulo es aplicando que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

$$\widehat{ABC} = 180° - \big(\widehat{BCA} + \widehat{CAB}\big) = 180° - (75° +\ 61°\ 7'0{,}91'') = 43°\ 52'59{,}09''$$

2) En un terreno ubicamos 2 puntos: A y B, al segundo de ellos no podemos llegar. Tomamos entonces un tercer punto C que dista de A 42.8m. Desde A y C se dirigen visuales al punto B que forma con el segmento AC ángulos: BÂC=54° y BĈA = 64º. Hallá la distancia entre A y B.

Datos



Incógnita: distancia ente los puntos A y B
Resolución: Con los datos que tenemos podemos calcular la amplitud del ángulo $\hat{B}$:

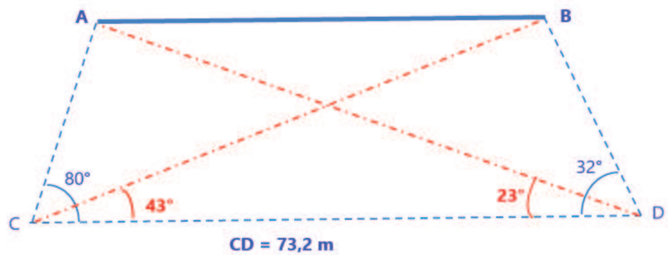
$$\hat{B} = 180° - \big(\hat{A} + \hat{C}\big) = 180° - (54° + 64°) = 62°$$

Habiendo obtenido el valor de amplitud de $\hat{B}$, podemos aplicar el teorema del seno para calcular la distancia entre los puntos A y B, $\frac{\overline{AB}}{sen(\hat{C})} = \frac{\overline{AC}}{sen\ (\hat{B})}$, despejando y reemplazando por los valores numéricos disponibles tenemos

$$\overline{AB} = \overline{AC}\frac{sen(\hat{C})}{sen\ (\hat{B})} = 42{,}8\frac{sen(64°)}{sen\ (62°)} \approx 43{,}57\ m$$

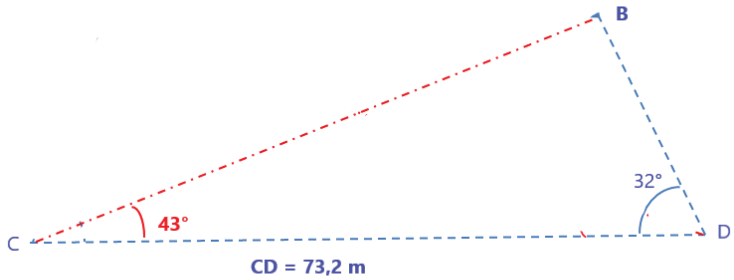
3) Sean A y B dos puntos inaccesibles, pero visibles ambos desde otros puntos accesibles C y D, separados entre sí 73.2m. Si los ángulos AĈD= 80º, BĈD= 43º, BDC= 32º y ADC= 23º, determiná la distancia entre A y B.

Datos:



Incógnita: Distancia entre los puntos A y B.

Resolución: Este problema puede resolverse de diversas formas, a continuación, te proponemos una.
Vamos a dividir, en función de los datos la figura en tres triángulos:
Triángulo 1



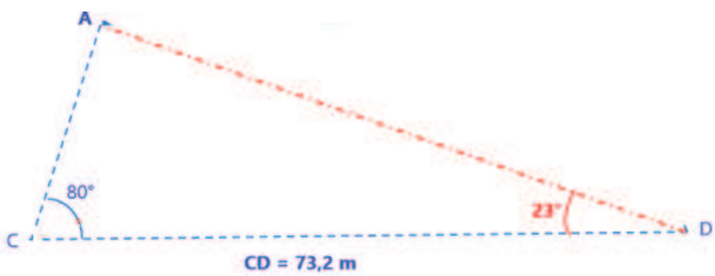
En este triángulo vamos a calcular la longitud del lado $\overline{CB}$, para ello tenemos que calcular la amplitud del ángulo $\hat{B}$.
Con los datos disponibles $\hat{B} = 180° - (43° + 32°) = 105°$
La longitud del lado $\overline{CB}$ se calcula aplicando el teorema del seno

$$\frac{\overline{CB}}{sen(42°)} = \frac{73,2}{sen(105°)}$$

Operando algebraicamente obtenemos

$$\overline{CB} = 73,2\frac{sen(42°)}{sen\ (105°)} \approx 40,16\ m$$

Triángulo 2



En este triángulo vamos a calcular la longitud del lado $\overline{AC}$, para ello debemos calcular la amplitud del ángulo $\hat{A}$.

$$\hat{A} = 180° - (80° + 23°) = 77°$$

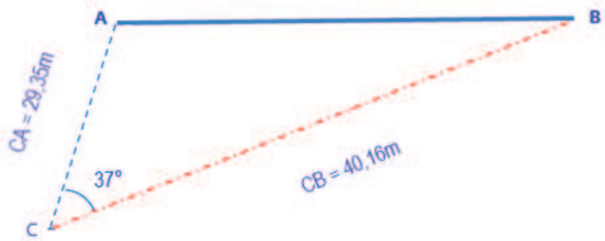
La longitud del lado $\overline{CA}$ se calcula aplicando el teorema del seno

$$\frac{\overline{CA}}{sen(23°)} = \frac{73,2}{sen(77°)}$$

Operando algebraicamente obtenemos

$$\overline{CB} = 73{,}2\frac{sen(23°)}{sen\ (77°)} \approx 29{,}35\ m$$

Triángulo 3



La distancia entre los puntos A y B se pude calcular en este triángulo aplicando el teorema del coseno

$$\overline{AB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 - 2.\overline{CA}.\overline{CB}.\cos(\hat{C})$$

Reemplazando por los datos y operando obtenemos la distancia entre A y B que es el objetivo de este problema

$$\overline{AB} = \sqrt{(29{,}35)^2 + (40{,}16)^2 - 2.29{,}35\ .40{,}16.\cos(37°)} \approx 24{,}32m.$$

4) Comprobar las identidades que se dan a continuación.

a) $\frac{sen(x)+\cos(x)}{sen(x)} = 1 + cotg(x)$

Tomemos el miembro de la izquierda de la igualdad, distribuyamos el seno, simplifiquemos y recordemos que $\text{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)}$

$$\frac{sen(x) + \cos(x)}{sen(x)} = \frac{sen(x)}{sen(x)} + \frac{\cos(x)}{sen(x)} = 1 + cotg(x)$$

b) $\frac{sen(x)}{cosec(x)} + \frac{\cos(x)}{\sec(x)} = 1$

Recordemos que $cosec(x) = \frac{1}{sen(x)}$ y que $sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$. Introduzcamos esto en la identidad y luego operemos algebraicamente

$$\frac{sen(x)}{cosec(x)} + \frac{\cos(x)}{\sec(x)} = \frac{sen(x)}{\frac{1}{sen(x)}} + \frac{\cos(x)}{\frac{1}{\cos(x)}} = sen^2(x) + cos^2(x) = 1$$

c) $\frac{sec(x)}{tg(x)+cotg(x)} = sen(x)$

Tomemos el término de la izquierda, recordemos que $sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$, $tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$ y que $\text{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)}$. Introduzcamos estas expresiones en él y operemos algebraicamente.

$$\frac{sec(x)}{tg(x) + cotg(x)} = \frac{\frac{1}{\cos(x)}}{\frac{sen(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{sen(x)}} = \frac{\frac{1}{\cos(x)}}{\frac{sen^2(x)+cos^2(x)}{\cos(x).sen(x)}} = \frac{\frac{1}{\cos(x)}}{\frac{1}{\cos(x).sen(x)}} = \frac{\cos(x).sen(x)}{\cos(x)} = sen(x)$$

5) Resolver las ecuaciones trigonométricas, x∈ [0; 2π).

Al resolver una ecuación trigonométrica es muy importante identificar el intervalo al que pertenece la variable. En este caso, el intervalo es el [0, 2π). Esto es muy importante porque nos indica cuál es el conjunto solución.

a) $\cos(2x) + 5\cos(x) + 3 = 2$

En la tabla, vemos que

$$\cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$$

reemplazamos esto en la ecuación, nos queda

$$cos^2(x) - sen^2(x) + 5\cos(x) + 1 = 0$$

Nos quedó una expresión que tiene senos y cosenos, nos conviene escribir, en este caso, todo en función de cosenos, para ello usamos

$$cos^2(x) + sen^2(x) = 1 \rightarrow \cos(2x) = sen^2(x) = 1 - \cos(2x) = cos^2(x)$$

$$cos^2(x) - (1 - cos^2(x)) + 5\cos(x) + 1 = 0$$

Operando algebraicamente

$$2cos^2(x) + 5\cos(x) = 0$$

$$cos(x)(2\cos(x) + 5) = 0$$

El producto es cero si

$\cos(x) = 0 \rightarrow x = \arccos(0)$, entonces $x = \frac{\pi}{2}$ o

a) $\operatorname{sen}(x) - 2\cos(2x) = -1/2$

En la ecuación tenemos senos y cosenos, es importante que la ecuación quede expresada solo en senos o solo en cosenos.

Primero resolvemos el tema de unificar el ángulo, para ello de tabla usamos:

$$\cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$$

Lo reemplazamos en la ecuación y nos queda

$$sen(x) - 2\left(cos^2(x) - sen^2(x)\right) = -1/2$$

Ahora, llevamos todo, en este caso, a senos mediante $cos^2(x) = 1 - sen^2(x)$

$$sen(x) - 2\left(1 - sen^2(x)) - sen^2(x)\right) = -1/2$$

$$sen(x) - 2 + 4sen^2(x) = -1/2$$

$$4sen^2(x) + sen(x) - \frac{3}{2} = 0$$

Nos quedó una ecuación cuadrática en seno, hagamos el siguiente cambio de variable: $u = sen(x)$ y sustituyamos esta última expresión en la ecuación

$$4u^2 + u - \frac{3}{2} = 0$$

Que sabemos resolverla pues es una ecuación lineal de segundo grado en la variable u. Aplicamos la resolvente y nos queda:

$$u = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.4.(-\frac{3}{2})}}{2.4} = \frac{-1}{8} \pm \frac{5}{8}$$

De donde las soluciones son $u = -\frac{3}{4}$ o $u = \frac{1}{2}$, ambas son raíces posibles porque son números que están en el intervalo [-1, 1] debido a que $u = sen(x)$.

Ahora tenemos que investigar los valores de x que satisfacen la ecuación original, sin olvidarnos que $x \in [0, 2\pi)$.

$$sen(x) = -\frac{3}{4} \rightarrow x = arcsen\left(-\frac{3}{4}\right) \rightarrow x \approx 1{,}73\pi\ rad \text{ ó } x \approx 1{,}27\pi\ rad$$
$$sen(x) = \frac{1}{2} \rightarrow x = arcsen\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow x \approx 0{,}17\pi\ rad \text{ ó } x \approx 0{,}83\pi\ rad$$
La ecuación tiene cuatro soluciones.

b) $-3\mathrm{sen}(\mathrm{x}) + \cos^2(\mathrm{x}) = 3$
Nuevamente, llevamos toda la ecuación en función del seno

$$-3\mathrm{sen}(\mathrm{x}) + (1 - \mathrm{sen}^2(\mathrm{x})) = 3$$

$$-3\mathrm{sen}(\mathrm{x}) - \mathrm{sen}^2(\mathrm{x}) - 2 = 0$$

Nos quedó una ecuación cuadrática en seno, usamos la misma estrategia que en el ejercicio anterior haciendo $u = sen(x)$, operando algebraicamente nos queda una ecuación lineal de segundo grado en u, podemos resolverla.

$$u^2 + 3u + 2 = 0$$

$$u = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4.1.2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

De donde las soluciones son $u = -2$ o $u = -1$ solo un de las raíces es solución, porque, como sabemos $u = sen(x)$ y los valores posibles u deben estar contenidos en el intervalo [-1, 1].
Entonces, si $u = -1 = sen(x) \rightarrow x = arcsen(-1) \rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$.

La solución de la ecuación dada, en el intervalo [0, 2π) es $x = \frac{3\pi}{2}$.

Tarea 4

1. a) Hallar un vector de magnitud 3 que sea paralelo al vector $\vec{u} = \langle 2, 1, -1\rangle$.

En primer lugar debemos obtener el vector unitario de $\vec{u}$. Para ello, calculamos su magnitud $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$, luego hacer $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\langle 2,1,-1\rangle$.
Una vez obtenido el vector unitario en la dirección de u, lo multiplicamos por 3. El vector obtenido es $\langle \frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, \frac{-3}{\sqrt{6}}\rangle$.

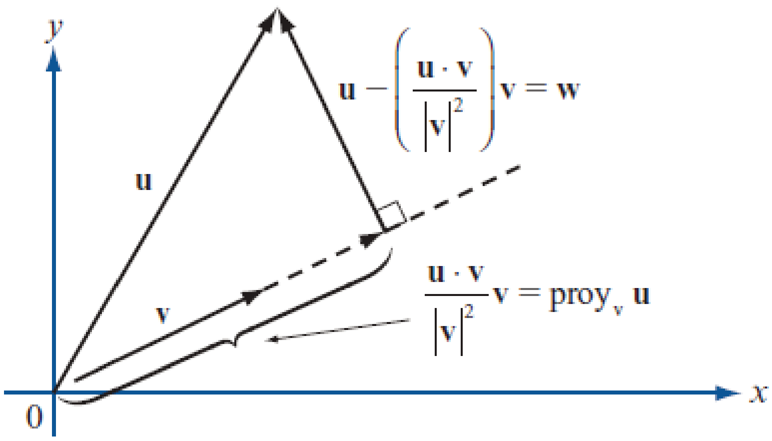
b) Hallar un vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ (dado en a) y a $\vec{v} = \langle 1, 1, 0\rangle$
En primer lugar buscamos un vector ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, esto lo logramos calculando el vector producto vectorial.

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \langle 1, -1, 1\rangle$$

Luego calculamos el vector unitario del vector hallado $\frac{\vec{w}}{|\vec{w}\,|} = \langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle$, que es el vector pedido.

c) Hallar dos vectores $\overrightarrow{w_1}$ y $\overrightarrow{w_2}$ que verifiquen las siguientes condiciones (simultáneamente):
$\overrightarrow{w_1}$ es paralelo a $\vec{u}$.
$\overrightarrow{w_2}$ es ortogonal a $\vec{u}$.
$\vec{v} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$.
(Sugerencia: Recordar la descomposición de un vector en dos direcciones ortogonales cualesquiera).

Si recordamos el tema proyecciones, cada vez que proyectamos un vector sobre otro, se generan dos vectores, uno paralelo al vector sobre el que proyectamos y otro ortogonal a ese. Como vemos en la figura



En este caso lo que se está solicitando es la descomposición del vector $\vec{v}$ en dos direcciones ortogonales, uno paralelo al vector $\vec{u}$, que se va a llamar $\overrightarrow{w_1}$ y otro ortogonal al vector $\vec{u}$, que llamaremos $\overrightarrow{w_2}$.

$\overrightarrow{w_1} = \overline{proy_u^{\vec{v}}} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|^2}\vec{u} = \frac{3}{\sqrt{6}}\langle 2, 1, -1\rangle$, paralelo a $\vec{u}$.

$\overrightarrow{w_2} = \vec{v} - \overrightarrow{proy_u^v} = \langle 1, 1, 0\rangle - \frac{3}{\sqrt{6}}\langle 2, 1, -1\rangle$.

2. Indicar por qué las siguientes afirmaciones son falsas:

i) Sea φ el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Sabiendo que φ > π/2,

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$;

Es falso porque si recordamos que el producto escalar se puede calcular como el producto de los módulos por el coseno del ángulo entre los vectores, como el ángulo φ es mayor que π/2, su coseno es negativo, entonces el producto debería dar negativo.

b) El vector $\overrightarrow{proy_{\vec{v}}\vec{u}}$ y el vector $\vec{v}$ forman un ángulo de 0 rad.

Es falso porque el ángulo entre los vectores es mayor a π/2, y esto hace que el producto escalar sea negativo, lo que al hacer el cálculo de la proyección este tiene dirección opuesta a $\vec{v}$, por lo tanto el ángulo que forman es π.

ii) Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores de $\Re^3$ cualesquiera

e) - 4 $\vec{u}$ es un vector en la misma dirección que $\vec{u}$ de magnitud 4.

Al multiplicar un vector por un número obtenemos otro vector paralelo al dado, si el número es positivo en la misma dirección y si el número es negativo en la dirección opuesta.
En este caso, se está multiplicando por -4, (número negativo), así que obtenemos un vector en dirección opuesta.
Respecto a su magnitud, el vector resultado no tiene magnitud 4, sino que tiene 4 veces la magnitud de $\vec{u}$.

f) $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w} = k$ siendo k un número real.

$(\vec{u} \times \vec{v})$ da por resultado un vector, si a este lo multiplicamos vectorialmente con w, el resultado final es un vector no un número.

g) $\vec{u} \times \vec{u} = |\vec{u}|^2$

Se puede responder de más de una forma el hecho de que la expresión es falsa.

- Podemos hacer el producto cruz, que da: $\vec{u} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \langle\, 0, 0, 0\rangle$. Donde concluimos que el producto cruz entre vectores es un vector y no un escalar, en este caso particular es el vector nulo.

- O bien podemos usar el producto escalar, que en este caso sería: $\vec{u}\,.\,\vec{u} = |\vec{u}|^2$. Con esta opción concluimos que la proposición es falsa porque para que el resultado sea el dado debería multiplicarse el vector $\vec{u}$ escalarmente por sí mismo.

h) $(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w} = 0$ indica que $\vec{w}$ es ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

Es falso porque el producto mixto o triple producto escalar igual a cero es condición de coplanaridad, es decir, que los tres vectores están en el mismo plano.

3. Dadas las rectas l: $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$ y r: $x - 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$

b) Determinar de dos formas diferentes la dirección de la recta l

Podemos hallar la dirección de la recta l de dos formas,
i) resolviendo el sistema de ecuaciones y la otra vectorialmente, observando que las ecuaciones que nos dieron son las ecuaciones de dos planos, y
ii) utilizando los vectores ortogonales de los mismos, porque la recta está contenida en ellos, y su vector dirección es ortogonal a ambos vectores normales a los planos.

Opción *i*) Para resolver el sistema, utilizamos Gauss, armamos la matriz ampliada del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & |0 \\ 1 & -1 & 1 & |2 \end{pmatrix}$$

queremos hacer cero el elemento 2,1, para ello restamos a la fila 2 la fila 1 y nos queda

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & |0 \\ 0 & 2 & 0 & |2 \end{pmatrix}$$

como vemos nos quedó un sistema compatible indeterminado, vamos a tener que agregar una ecuación para armar la solución, el sistema ahora nos queda

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 0x + 2y + 0z = 2 \quad \text{con } \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

De aquí, nos queda la solución x= 3 - λ; y = 1; z = λ.
Si escribimos la solución de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda \\ 1+0\lambda \\ 0+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\lambda$$

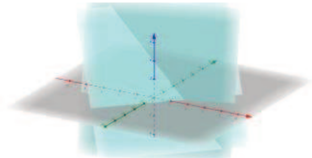
lo que obtenemos es la ecuación de la recta en forma vectorial paramétrica, donde obtenemos el vector dirección que es $\langle -1, 0, 1 \rangle$.

Opción ii) Identificando en cada ecuación del plano dada los vectores normales a cada uno de ellos: $\overrightarrow{n_1} = (1, -3, 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, -1, 1)$.
Ahora hacemos el producto cruz entre ellos:

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 0, 2) = 2(-1, 1, 1)$$

Si observamos el vector obtenido por el producto cruz, nos dio el vector del inciso anterior multiplicado por dos, es decir un vector paralelo.
Como lo que buscamos es la dirección de la recta determinada por dos planos, no es importante qué vector hallemos, sino que hayamos obtenidos dos vectores paralelos, como lo que obtuvimos en este caso.

Si usamos el *GeoGebra* o no vamos a poder visualizar la recta generada por la intersección de los planos.



En la figura, la recta que estamos analizando es la línea que se genera por la intersección de los dos planos pintados de celeste y el plano de color gris es el plano coordenado xy.

b) Determinar si las rectas l y r son ortogonales.

Para determinar esto debemos recuperar de las rectas *l* y *r* sus vectores dirección y hacer el producto escalar entre ellos. Si da cero, entonces las rectas son ortogonales.
Vector dirección de la recta *l*: $\overrightarrow{u_l} = (-1, 1, 1)$
Vector dirección de la recta r: $\overrightarrow{u_r} = (1, 2, 3)$
El producto escalar o producto punto entre ellos es $\overrightarrow{u_r} . \overrightarrow{u_r} = -1 .1 + 1.2 + 1. 3 = 2 \neq 0$
Concluimos que las rectas no son ortogonales.

4. a) Determinar si los planos $\begin{cases} \pi_1: \quad x + y + 4z = 3 \\ \pi_2: \; 3x - 3y + 2z = 0 \\ \pi_3: - x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$ se intersecan en un punto.

Si los tres planos se intersecan en un punto, el sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas generado por sus ecuaciones debería ser compatible determinado. Si recordamos que cuando un sistema es compatible determinado, la matriz de coeficientes del sistema es invertible y por ende tiene determinante no nulo, rápidamente podemos determinar si el sistema tiene o no solución única.
Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$$

Como vemos, el determinante de la matriz de coeficientes del sistema es diferente de cero, la matriz es invertible, por lo tanto, hay solución única.

b) Si su respuesta es afirmativa, encuentre dicho punto.

Para hallar este punto, hay que resolver el sistema de ecuaciones. Se puede hacer utilizando Gauss o calculando la inversa y resolviendo la ecuación matricial o utilizando algún programa o aplicación gratuita para celular.
Si hacemos esto, el punto intersección de los tres planos es P = (-17/12; -7/12; 5/4).

Año 2019 - Segundo Cuatrimestre - Matemática II

Enunciados

Tarea Nº 1 para realizar fuera del aula: Trabajo con límites

Hola, empezamos el cursado de Matemática II y, como hicimos en Matemática I, te vamos a ir proponiendo a lo largo del cursado, tareas para que las realices fuera del horario de cursado. Éstas tienen el fin de reforzar lo trabajado en clase para tratar de ayudarte a mejorar la adquisición de conocimientos que deberías poseer al momento de acreditar la materia.

En esta tarea te proponemos repasar los dos últimos temas que viste en Matemática I. Si los haces a conciencia y con responsabilidad, te van a ayudar a comprender mejor los temas de Matemática II pues son la base de los mismos. Los temas que te estamos proponiendo repasar son límite y continuidad de funciones.

Tal como venimos trabajando en las tareas a realizar fuera del aula que hicimos en Matemática I, te sugerimos que uses diferentes herramientas que están disponibles en internet o como en este caso, el uso de un software gratuito, el *GeoGebra*, con el que no sólo vas a poder trabajar con una computadora personal, sino que hay desarrolladas aplicaciones para el teléfono celular.

Ejercicio 1

Resolver los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3x^4 - 2x}{x^4 - x^5 - 2}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x^4 - 2}}{2x^2 - x - 2}$

Ejercicio 2

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & si\ -\infty \le x < 4 \\ -3x + 5 & si\ 4 \le x \le 6 \\ \frac{1}{x-6} & si\quad x > 6 \end{cases}$

Analizar su dominio e imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento. Encuentre las intersecciones con los ejes. Dar los Intervalos de positividad y negatividad. Estudiar su continuidad. ¿Tiene asíntotas? Graficar.

Podes encontrar cómo utilizar el *GeoGebra* para comprobar graficar funciones por partes haciendo clic en este enlace

Ejercicio 3

Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$ y que $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=2$ resolver enunciando las propiedades utilizadas:

i) $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+g(x)\right)$

ii) $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x).g(x)\right)$

iii) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left[f(x)+\ln(g(x)-2)\right]$

iv) $\lim\limits_{x\to 2} 2^{f(x)}$

Podes encontrar cómo utilizar el *GeoGebra* para comprobar los límites antes resueltos haciendo clic en este enlace

Observación: si no accedes a la página haciendo clic en el hipervínculo, copia y pega el mismo en el navegador.

Ejercicio 4

En la teoría de relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es: $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

donde $\boldsymbol{m_0}$ es la masa de la partícula en reposo y $\boldsymbol{c}$ es la velocidad de la luz.
¿Qué ocurre cuando $v\to c^-$?

(Observación: Este tema lo vas a ver en Física, pero si te interesa, podés encontrar más información haciendo clic aquí)

Tarea Nº 2 para realizar fuera del aula: Derivada - aplicaciones

En esta tarea te proponemos repasar aplicaciones de las derivadas. Si los haces a conciencia y con responsabilidad, te van a ayudar a comprender mejor los temas de Matemática II.

Tal como venimos trabajando en las tareas a realizar fuera del aula que hicimos en Matemática I, te sugerimos que uses diferentes herramientas que están disponibles en internet o con un software como el *GeoGebra* con el que no sólo vas a poder trabajar con una computadora personal, sino que hay desarrolladas aplicaciones para el teléfono celular.

Ejercicio 1
La cantidad de bacterias después de t horas en un experimento controlado de laboratorio es $n = f(t)$.

e) ¿Cuál es el significado de $f'(5)$? ¿Cuáles son sus unidades?
f) Suponer que existe una cantidad ilimitada de espacio y de nutrientes para las bacterias ¿Cuál es mayor $f'(5)$ o $f'(10)$? ¿La limitación de nutrientes influiría en su conclusión? Explicar.
g) Suponer que ahora cambiaron las condiciones de cultivo de las bacterias, consideremos este nuevo inicio t=0, ahora se sabe que la función que modela el desarrollo de las bacterias es $n = f(t) = 1000e^{-t}$, ¿cuál es el número inicial de bacterias?, hallar $f'(5)$ y $f'(10)$ ¿Te parece que ahora puede haber limitación en la cantidad de nutrientes? ¿Por qué? ¿Llegará a su fin esta población (es posible que n llegue a valer 0)? Graficar.

Ejercicio 2
Una partícula se mueve según la ley $s(t) = t^2 - 6t - 2$ donde *s* esta medida en metros y *t* en segundos.

e) Evaluar $s'(2)$ y $s'(4)$ ¿Cómo se interpreta el valor hallado en cada tiempo? ¿Se mueven en el mismo sentido?
f) Hallar $s''(t)$ ¿Qué representa esta función? ¿Qué se puede concluir de la misma?

Ejercicio 3
Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Graficar.

Ejercicio 4
Un empresario ha calculado que el costo total de repartir x unidades del producto que fabrica es C(x)=2x+217800/x

a) Si la unidad de reparto puede transportar como máximo 300 unidades de producto, hallar el número de unidades que hará mínimo el costo del pedido y el valor del dicho costo.

b) ¿Qué ocurriría si la unidad pudiera transportar hasta 400 unidades de producto?

(Sugerencia: graficar la función “costo” y analizar gráficamente los resultados obtenidos en a) y b)).

Ejercicio 5

Una huerta tiene actualmente 25 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. Calcular:

a) La producción actual de la huerta.

b) La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan x árboles más.

c) La producción a la que ascendería el total de la huerta si se plantan x árboles más.

d) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para qué la producción sea máxima?

(Sugerencia: graficar la función “producción” y analizar gráficamente los resultados obtenidos en a) y b)).

Tarea Nº 3 para realizar fuera del aula: Trabajo con integrales.

En esta tarea te proponemos seguir repasando integrales y algunas de sus aplicaciones. Si los haces a conciencia y con responsabilidad, te va a ayudar a comprender mejor los temas de Matemática II.
Recordá que tenés que traerla resuelta a la clase de coloquio del jueves 31/10, en ella, vamos a realizar la corrección y análisis de las resoluciones de las diferentes actividades propuestas.

5) Resolvé las siguientes integrales. En cada caso identifica el método de integración que tenés que usar para resolverlas como también las propiedades de las integrales que necesitas utilizar.

a) $\int \frac{-xdx}{\sqrt{5x^2+1}}$

b) $\int xsen(x)dx$

c) $\int_1^3 \frac{x\sqrt{x}-3x}{x}dx$

d) $\int_{-1}^{2} |x^2-1|dx$

6) Grafica, en un mismo sistema de ejes, $y=x^3$, $y=\sqrt[3]{x}$ y x = 2.
¿Todas las expresiones son funciones? Justifica tu respuesta.
¿Encierran las tres curvas graficadas un área?, si es así, identifícala y calcula el área encerrada por ellas.

7) Si $v(t)=t^3-t$ indica la velocidad en la que se mueve el objeto expresada en metros sobre segundos. ¿Cuánto se desplazó luego de 3 segundos? ¿Qué distancia recorrió?

8) La aceleración de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado está dada por $a(t)=(2t-3)^{-3}$ en metros por segundo al cuadrado. Si la velocidad en t = 0 es 4 metros por segundo, encontrá la velocidad **1** segundo más tarde.

9) Al resolver las actividades propuestas, ¿Te costó resolverlas? Si es así, ¿Podés decirnos cuáles fueron, en tu opinión, las dificultades que tuviste?

Sugerencia:
Podés verificar los resultados utilizando el *GeoGebra*, graficando las funciones y resolviendo las integrales.
Una página web donde vas a encontrar información sobre cómo resolver integrales es https://www.geogebra.org/m/fTkpUM4E

También podés probar estos comandos para realizar estos cálculos son:

Integral(<Función>)
Integral(<Función>, <Variable>)
Integral(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)
Integral(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Evaluar o no (true/false)>)
IntegralEntre(<Función>, <Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)
IntegralEntre(<Función>, <Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>, <Evaluar (true/false)>)

¡Cuidado!, estos comandos puede que no funcionen en la aplicación para celular.

Tarea Nº 4 para realizar fuera del aula

Integrales dobles, coordenadas rectangulares y polares, ecuaciones diferenciales

Esta tarea tiene como propósito reforzar tus conocimientos sobre integrales dobles, el uso de coordenadas rectangulares y polares para su resolución, la relación que hay entre ambos tipos de coordenadas y cuando es más conveniente utilizar una u otra. Además, hay un problema de aplicación de ecuaciones diferenciales.
Cuando hagas los ejercicios propuestos en la tarea, identificá y escribí (en cada uno de ellos) los temas de teoría necesitaste para su resolución. También, es muy importante, que indiques cuál o cuáles fueron las dificultades que tuviste al realizar las actividades.
Recordá que tenés que traerla resuelta a la clase de coloquio del jueves, en ella, vamos a realizar la corrección y análisis de las resoluciones de las diferentes actividades propuestas.

1) a) Grafica la región R limitada por la parábola, $y = 4x - x^2$, el eje x y la recta $y = -3x + 6$.

b) ¿Si hallás el área de la región R utilizando integrales dobles o una integral simple obtendrías el mismo valor?

c) Justificá la respuesta que hayas dado en el inciso anterior haciendo los dos cálculos.

2) a) Dibujá la región R cuya área viene dada por la integral iterada:

$$A = \int_0^2 \int_0^x dy\,dx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dy\,dx$$

b) Si cambiás el orden de integración, ¿obtendrías el mismo resultado?

c) Justificá la respuesta del ítem anterior resolviendo la integral con el orden de integración cambiado.

3) Calculá las integrales en coordenadas polares, identificá y graficá la región de integración en cada una de ellas:

a) $\int_0^{\pi/2}\int_2^3 \sqrt{9-r^2}\, r\, dr\, d\theta$

b) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} x\, y\, dy\, dx$

4) **Método del Carbono 14**

La atmósfera terrestre es constantemente bombardeada por rayos cósmicos, los cuales producen neutrones libres que se combinan con el nitrógeno de la atmósfera para producir el isótopo C-14 a (carbono 14 o bien radiocarbono). Este C-14 se combina con el bióxido de carbono presente en la atmósfera, el cual es absorbido por las plantas y estas a su vez son alimento para los animales. Así es como se incorpora el radiocarbono a los tejidos de los seres vivos.

El cociente entre la cantidad de C-14 y la cantidad de carbono ordinario presentes en la atmósfera es constante y, en consecuencia, la proporción de isótopo presente en todos los organismos vivos es la misma que en la atmósfera terrestre. Cuando un organismo muere, la velocidad de incorporación de radiocarbono a él se hace nula y entonces comienza el proceso de desintegración radiactiva del C-14, que se encontraba presente en el momento de su muerte. Así, comparando la proporción de C-14 que hay en un fósil con la proporción encontrada en la atmósfera es posible obtener una estimación razonable de su edad.

Problema:

Se sabe que la tasa de desintegración del C-14 es proporcional a la cantidad presente en un instante dado y que la vida media del C-14 es de 5568 años.

Utilizando toda la información dada, determiná la antigüedad de un hueso que al momento de ser encontrado contenía 1/8 de la cantidad original de C-14 de un hueso actual.

***Ayuda**: Si y(t) es la cantidad de C-14 presente en el hueso en el instante t, la ecuación diferencial que modela: “la tasa de desintegración del C-14 es proporcional a la cantidad presente en un instante dado” es* $\frac{dy}{dt} = k\, y(t)$.

Resoluciones

Tarea 1

Ejercicio 1

Resolver los siguientes límites

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$

El primer paso a realizar antes de pensar de qué forma vamos a resolver este ejercicio es evaluar el numerado y el denominador en x=2, que es justamente el valor al que tiende x.

Reemplazando a x por 2 nos queda:

Numerador: $2^2 - 2 - 2 = 4 - 4 = 0$

Denominador: $2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

Estamos en presencia del cálculo de un límite cuando la variable tiende a un valor determinado y hay una indeterminación del tipo 0/0.

Para resolverlo factorizaramos el numerador y el denominador, ver si se puede eliminar la indeterminación mediante simplificación. Operando algebraicamente, vemos que son ceros del numerador x=2 y x=-1 (aplicando resolvente). En el caso del denominador, es el caso de factoreo "diferencia de cuadrados", son raíces x=2 y x=-2, entonces

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+1)}{(x+2)}$$

En este momento, volvemos a evaluar en x=2 al numerador y al denominador.

Numerador: 2+1=3

Denominador: 2+2=4

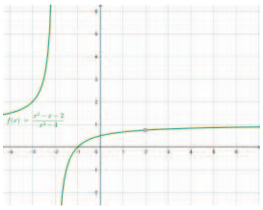
Hemos eliminado la indeterminación, entonces, el cálculo del límite, se reduce a el valor numérico de la expresión en x =2.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+1)}{(x+2)} = \frac{3}{4}$$

Para verificar podemos utilizar el *GeoGebra*, tanto para calcular el límite como para graficar la función racional que aparece en el cálculo.

El comando que utilizamos para realizar este cálculo es: Límite((x^2-x-2)/(x^2-4),2) y el resultado es 0,75.

Si graficamos



Vemos en la gráfica de la función que la función presenta una asíntota vertical en x=-2 pero en x=2, no hay un trazo continuo, hay que tener cuidado con esto, pues ambos valores de x no pertenecen al dominio de la f, la singularidad en x=-2 es de tipo insalvable, pero en x=2 es de tipo removible, pues la función tiene límite en el punto y vale 0,75.
Si hacemos en *GeoGebra* f(2), el resultado que da es “indefinido”.

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$

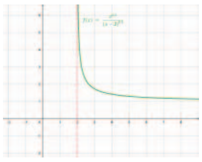
Al observar la expresión del límite, aparece una expresión simbólica diferente a la que teníamos en el ejercicio anterior $x \to 2^+$, ¿qué significa?, ¿por qué se pide un límite lateral por derecha?
Si observamos la expresión del numerador, para que se pueda calcular la raíz cuadrada, el radicando debe ser mayor o igual que 0, pero el dominio de la función es los reales mayores que 2, pues esta en el denominador y no se puede anular.
Si evaluamos numerador y denominador en x=2, tenemos:

Numerador: $\sqrt{2}$

Denominador: $\sqrt{2-2} = \sqrt{0} = 0$

Vemos que al armar el cociente, la indeterminación del tipo Número/0 no se puede salvar, razón por la cual investigamos el comportamiento de la función en las cercanías de 2 mediante, la gráfica o mediante una tabla, tomando valores de x cada vez más cercano a 2

x	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$
2,1	4,472
2,01	14,142
2,001	44,721
2,0001	141,421



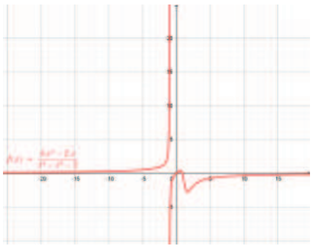
Con ambos análisis, observamos que el cociente tiende a infinito, razón por la cual, el resultado solicitado es: $\lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} = \infty$

Si utilizas el *GeoGebra*, el comando es: LímiteDerecha(x^0.5 / (x - 2)^0.5, 2), el resultado es ∞.

c) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^4 - 2x}{x^4 - x^5 - 2}$

En este apartado, hay que analizar dos límites, $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 - 2x}{x^4 - x^5 - 2}$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^4 - 2x}{x^4 - x^5 - 2}$.

En este caso, la forma más práctica de ver lo que ocurre en el $+\infty$ y en el $-\infty$ es graficando la función, pero, de la simple observación de la expresión vemos que el grado algebraico del numerador es cuatro y el grado algebraico del denominador es 5, como son polinomios, sabemos que para valores grandes de x, va más rápido a infinito el polinomio de mayor grado, en este caso, el denominador, por lo tanto podemos considerar que “el denominador domina al numerador”, por lo tanto el cociente, tanto en $+\infty$ como en $-\infty$, tiende a cero. Lo que resta analizar es el signo, es decir si se acerca al valor cero por los valores positivos (por arriba del eje x) o por los valores negativos (por debajo del eje x), por eso con una gráfica, podemos inspeccionar esto rápidamente.



Vemos, que cuando x→+∞, la gráfica se acerca al valor 0 por debajo del eje x, es decir tiende a 0^- y que cuando x→-∞, la gráfica se acerca al valor 0 por arriba del eje x, es decir tiende a 0^+

Además, podemos recuperar de esto, lo que vimos acerca de asíntotas horizontales. Vemos que la recta y=0 es asíntota horizontal de la función tanto en +∞como en -∞.

Hagamos ahora el cálculo de los límites pedidos, la estrategia algebraica que usamos en clase es sacar factor común en el numerador y en el denominador la potencia de x más alta, en este caso, en el numerador sacamos x^4 y en el denominador x^5 y operamos algebraicamente.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x}{x^4-x^5-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4(3-\frac{2}{x^3})}{x^5(\frac{1}{x}-1-\frac{2}{x^5})}$$

Simplificando las x y pasando al límite, vemos que $2/x^3\to 0$, $1/x\to 0$ y que $2/x^5\to 0$ cuando x→∞ si volvemos a los cálculos, nos queda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x}{x^4-x^5-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x(-1)}=0^-$$

La expresión 0^- significa que tiende a 0 por valores menores que cero, porque la x del denominador es positiva

Si lo analizamos en el -∞, nos queda:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^4-2x}{x^4-x^5-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4(3-\frac{2}{x^3})}{x^5(\frac{1}{x}-1-\frac{2}{x^5})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-x}=0^+$$

La expresión 0^+ significa que tiende a 0 por valores mayores que cero, porque la x del denominador es negativa.

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^4-2}}{2x^2-x-2}$

Para comenzar a resolver este límite, analizamos qué ocurre con numerador y denominador cuando $x \to \infty$. Como ambos son polinomios, ambos tienen a infinito, así que estamos en presencia de una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Lo otro que tenemos que analizar es ¿Quién va más rápido a infinito de los dos?, si observamos la expresión del cociente, en el numerador está x^4, pero con una raíz cuadrada, así que el grado del numerador en realidad es 2, y el grado algebraico del denominador es 2 también.

En clase analizamos que cuando teníamos un “cociente de infinitos de igual grado”, el resultado del cociente era un número que coincidía con el cociente de los coeficientes numéricos de los términos de x de mayor grado, en este caso el resultado debería ser $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Y otra cosa interesante de recordar, es que cuando planteamos un límite en el infinito de una función, y este da un número, la recta $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ es asíntota horizontal de la función racional analizada cuando $x \to \infty$.

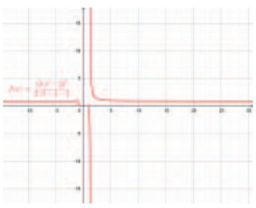
Si operamos algebraicamente para la resolución de este límite, la estrategia es sacar factor común en el numerador y en el denominador la mayor potencia de x en cada caso, que es x^2. Operando algebraicamente tenemos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x^4-2}}{2x^2-x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^4(3-\frac{2}{x^4})}}{x^2(2-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})} \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^4}\sqrt{(3-\frac{2}{x^4})}}{x^2(2-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}$$

Simplificando las x y considerando que $2/x^2 \to 0$, $1/x \to 0$ y que $2/x^4 \to 0$ cuando $x \to \infty$, nos queda:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x^4-2}}{2x^2-x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si hacemos la gráfica, vemos:



¡Qué gráfica tan interesante!

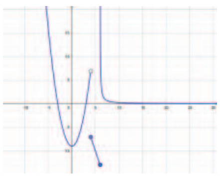
Viéndola surge esta pregunta, ¿qué ocurre con el dominio de la función, porque hay valores de x que no tienen imagen? queda para que lo pienses. Te damos una ayuda, ¿es posible calcular, en los números reales, raíces cuadradas de números negativos?

Ejercicio 2

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-9 & si -\infty \le x < 4 \\ -3x+5 & si\ 4 \le x \le 6 \\ \dfrac{1}{x-6} & si \quad x > 6 \end{cases}$

Analizar su dominio e imagen, intervalos de crecimiento y decrecimiento. Encuentre las intersecciones con los ejes. Dar los Intervalos positividad y negatividad. Estudiar su continuidad. ¿Tiene asíntotas? Graficar.

Tal como te lo indicamos, vamos a usar el *GeoGebra* para hacer el gráfico y vamos a obtener de él toda la información solicitada.
Antes de ir al software, lo primero que analizamos es los valores de x para los cuales están definidos los tramos.
Desde -∞ hasta 4, sin incluirlo, tenemos que graficar x^2-9
Desde 4 hasta 6, incluidos los extremos, tenemos que graficar -3x+5
Desde 6 (sin incluirlo) hasta ∞, tenemos que graficar 1/(x-6)
Vemos, por lo expresado más arriba, que no hay “huecos” para los valores de x, esto nos permite decir que el dominio de la función f son todos los números reales.
Par identificar el conjunto imagen, es más fácil si tenemos la gráfica.
El comando que usamos es **g(x) = Si(x < 4, x² - 9, 4 ≤ x ≤ 6, -3x + 5, x > 6, 1 / (x - 6))**
Obtenemos:



El conjunto imagen son los valores de y, vemos que van desde f(x=6) =-3*6+5= -15, incluido este valor a +∞, lo podemos escribir y ≥ -15 o -15 ≤ y ≤+∞ 0, [-15, ∞).
Intervalos de crecimiento, si recordamos la definición si x aumenta, y aumenta, esto lo vemos en el intervalo para x (0, 4).
Intervalos de decrecimiento, (si x aumenta, y disminuye), lo vemos en valores de x de los intervalos (-∞, 0), (4 , 6), (6, +∞)
Intervalos de positividad (grafica por encima del eje x) y negatividad (gráfica por debajo del eje x).
Positiva en los intervalos de x (-∞, -3), (3, 4) y (6, +∞)
Negativa en los intervalos de x (-3, 3) y (4, 6).

Continuidad: en este caso, los puntos a analizar la continuidad son los puntos donde se producen los cambios de los tramos de la función.
En particular, hay que estudiar la continuidad en x=4 y en x=6.
Debemos recordar la definición de función continua en un punto y entender qué debemos verificar para saber si la función es continua o no en ese punto.
Recordemos, f(x) es continua en $x=x_0$ si se cumple que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.u

Analicemos qué ocurre en x=4.
El valor de f en x=4, f(x=4) = -3*4+ 5 = -7
Para calcular el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ tenemos que recordar que si existe el límite de una función en un punto este valor es independiente de cómo nos acerquemos al punto, por esta razón vamos a calcular los límites laterales es decir, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ y estos deben ser iguales.

$\lim_{x \to 4^+} (-3x+5) = -7$

Como los límites laterales son distintos, la función en x=4 no tiene límite.

$\lim_{x \to 4^-} (x^2 - 9) = 7$

No se cumple la definición, porque si bien f(x=4)=-7, la función en x=4 no tiene límite. Vemos en la gráfica que hay una discontinuidad de salto.

El otro punto a analizar es x=6
El valor de f en x = 6, es f(x=6) = -3*6+5=-12

$\lim_{x \to 6^-} (-3x+5) = -12$

$\lim_{x \to 6^+} (\frac{1}{x-6}) = \infty$

La función en x=6 es discontinua, pero en este caso, en x=6, como el límite por derecha da infinito, presenta una asíntota vertical, justamente la recta vertical x=6.
Si queremos analizar si la función tiene asíntotas horizontales, hay que analizar

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Con estos resultados concluimos que la f presenta una asíntota horizontal para $x \to +\infty$, que es la recta y=0, cosa que observamos en la gráfica.

Ejercicio 3

Sabiendo que $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ y que $\lim_{x \to 2} g(x) = 2$ resolver enunciando las propiedades utilizadas:

i) $\lim_{x \to 2} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to 2} (f(x)) + \lim_{x \to 2} (g(x)) = 3 + 2 = 5$

ii) $\underset{x\to 2}{lím}\left(f(x).g(x)\right)=\underset{x\to 2}{lím}\left(f(x)\right)\underset{x\to 2}{lím}\left(g(x)\right)=3*2=6$

iii) $\underset{x\to 2^+}{lím}\left[f(x)+\ln(g(x)-2)\right]=\underset{x\to 2^+}{lím}\left[f(x)\right]+\underset{x\to 2^+}{lím}\left[\ln(g(x)-2)\right]=$

$$=\underset{x\to 2^+}{lím}\left[f(x)\right]+\ln\left[\underset{x\to 2^+}{lím}\left[(g(x)-2)\right]\right]=\underset{x\to 2^+}{lím}\left[f(x)\right]+\ln\left[\underset{x\to 2^+}{lím}\,g(x)-\underset{x\to 2^+}{lím}\,2\right]$$

$$=3-\ln(2-2)=3-\ln(0)=-\infty$$

iv) $\underset{x\to 2}{lím}\,2^{f(x)}=2^{\underset{x\to 2}{lim}(f(x))}=2^3=8$

Ejercicio 4

En la teoría de relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es: $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

donde ***m*0** es la masa de la partícula en reposo y ***c*** es la velocidad de la luz.
¿Qué ocurre cuando $v\to c^-$?

(Observación: Este tema lo vas a ver en Física, pero si te interesa, podés encontrar más información en: https://culturacientifica.com/2018/01/30/la-relatividad-la-masa/)

Lo que se está pidiendo analizar es qué pasa con la masa de una partícula cuando se desplaza a la velocidad de la luz, c=300.000 m/seg.
Si consultaste el link propuesto, ahí se comenta justamente lo que descubrió Einstein al postular la teoría de la relatividad, …"a medida que aumenta la velocidad de un objeto, la masa observada a partir de un marco de referencia estacionario también aumenta. Alcanzará una masa infinita (o indefinida) si alcanza la velocidad de la luz"…
Si resolvemos este problema desde matemática, lo que tenemos que plantear es el siguiente límite:

$$\lim_{v\to c}(m)=\lim_{v\to c}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)=\infty$$

Cuando v → c, el cociente del denominador tiende a valer 1 y el denominador tiende a valer cero, nos queda el cálculo de un límite de un cociente de una constante m0 dividida por una cantidad que tiende a cero, el resultado tiende a infinito, que es justamente el resultado al que llegó Einstein.

Tarea 2

Ejercicio 1

La cantidad de bacterias después de t horas en un experimento controlado de laboratorio es $n = f(t)$.

d) ¿Cuál es el significado de $f'(5)$? ¿Cuáles son sus unidades?

Significado de $f'(5)$: valor de la derivada de la *f* en t= 5.

En términos del problema sería la variación instantánea del número de bacterias a las 5 horas de iniciado el experimento. La unidad es número de bacterias por hora.

e) Suponer que existe una cantidad ilimitada de espacio y de nutrientes para las bacterias ¿Cuál es mayor $f'(5)$ o $f'(10)$? ¿La limitación de nutrientes influiría en su conclusión? Explicar.

Situación a) Suponemos que se parte de un número inicial de bacterias y que ellas tienen la posibilidad de reproducirse libremente sin ningún tipo de restricciones de nutrientes ni espacio, esto implica que a medida que transcurre el tiempo hay más bacterias. En estas condiciones es probable que f'(10) sea mayor que f'(5) porque hay cada vez más bacterias reproduciéndose.

Situación b) Suponemos que se cultivan bacterias en un lugar donde, a partir de un determinado momento se acaban el espacio y los nutrientes, y esto ocurre antes de las 10 horas de iniciado el experimento, el número de bacterias comenzaría a disminuir a partir de ese momento y es probable $f'(5) > 0$, es decir el número de bacterias aumente con el tiempo, y cuando se acaben los nutrientes y el espacio, las bacterias comiencen a morir, por lo tanto a medida que transcurra el tiempo habría menos bacterias, por lo tanto $f'(10) < 0$, la población decrecería.

f) Suponer que ahora cambiaron las condiciones de cultivo de las bacterias, consideremos este nuevo inicio t=0, ahora se sabe que la función que modela el desarrollo de las bacterias es $n = f(t) = 1000e^{-t}$, ¿cuál es el número inicial de bacterias?, hallar $f'(5)$ y $f'(10)$ ¿Te parece que ahora puede haber limitación en la cantidad de nutrientes? ¿Por qué? ¿Llegará a su fin esta población (es posible que n llegue a valer 0)? Graficar.

El número inicial de bacterias es n(t=0) = 1000.

$f'(t) = -1000\ e^{-t}$

$f'(5) = -1000\ e^{-5} \approx 6{,}74$ (bacterias /hora)

$f'(10) = -1000\ e^{-10} \approx 0{,}045$ (bacterias /hora)

Si analizamos en el largo plazo, es decir $\lim_{t\to\infty} 1000\ e^{-t} = 0$ la función tiene, a tiempo infinito, una asíntota horizontal, matemáticamente nunca toma el valor 0.

Analicemos la situación en el contexto del problema:

Estamos utilizando una función continua para modelar el número de bacterias, un número entero, así que los números que obtuvimos de los límites deberían ser enteros.

El número de bacterias llega a cero, cuando se muere la última.

¿A qué tiempo ocurre esto? deberíamos resolver la ecuación: $1 = 1000\ e^{-t}$, despejamos t y nos da que luego de las 6.91 horas ya no hay más bacterias. Así que f'(10) no tiene sentido en este problema.

Si graficamos n obtenemos:

Ejercicio 2

Una partícula se mueve según la ley s(t)=0,5 t^2 - 3t - 2 donde *s* esta medida en metros y *t* en segundos.

g) Evaluar s'(1) y s′(4) ¿Cómo se interpreta el valor hallado en cada tiempo? ¿Se mueven en el mismo sentido?

Se tiene como dato la ley del movimiento de la partícula. La derivada da la velocidad de la partícula en el tiempo. s'(2) y s'(4) son las velocidades instantáneas de la partícula al tiempo 1 y al tiempo 4 segundos respectivamente.

Recordar que primero hay que hallar la función derivada y luego evaluarla en cada tiempo.

s'(t)= 0,5 * 2t - 3

s'(2)= 0,5* 2*(1 seg) - 3 = -2 [m/seg]

s'(4)= 0,5* 2 * (4 seg) - 3 = 1 [m/seg]

Al tener signos contrarios van en dirección opuesta, en el primer caso, a 1 segundo de iniciado el movimiento, en dirección contraria a la que se propuso como positiva en el problema, y en el segundo caso, a los 4 segundos, a favor del sentido del movimiento.

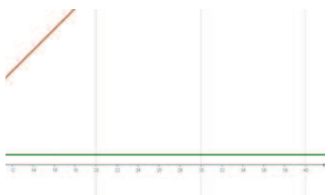
h) Hallar s″(t) ¿Qué representa esta función? ¿Qué se puede concluir de la misma?

s"(t) en este problema representa la aceleración de la partícula.

s"(t) = 0,5 * 2 = 1[m/seg^2], la aceleración es constante.

La función representa una recta horizontal, independientemente del tiempo la aceleración no cambia.

Es un movimiento uniformemente acelerado, la partícula comienza el movimiento hacia la izquierda, agota su velocidad (se detiene) y luego se mueve hacia la derecha.



Ejercicio 3

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $x^2+y^2=4$ **en el punto** $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ **. Graficar.**

Estamos buscando la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función dada en forma implícita.

Siempre que aparece recta tangente, debemos recordar la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto que es la pendiente de esa recta tangente. La otra cosa a recordar es que el punto de tangencia pertenece a la recta y a la gráfica de la función.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en el punto (x_0, y_0) es:

$$y-\ y_0=y'_{x_0}(x-x_0)$$

En este problema: $x_0=\sqrt{2}$, $y_0=\sqrt{2}$, (tenemos que reemplazar en la ecuación y ver si verifica!!).

Nos falta la derivada.

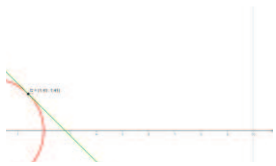
Aplicando la técnica de derivación implícita: $2x+2\,y.y'=0$, de donde $y'=\frac{-2x}{2y}=-\frac{x}{y}$

Calculamos $y'_{x_0}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1$

Reemplazando todo en la ecuación de la recta

$$y-\ \sqrt{2}=-1(x-\sqrt{2})$$

Gráficamente



Ejercicio 4

Un empresario ha calculado que el costo total de repartir x unidades del producto que fabrica es C(x)=2x+217800/x

a) Si la unidad de reparto puede transportar como máximo 300 unidades de producto, hallar el número de unidades que hará mínimo el costo del pedido y el valor del dicho costo.

Analicemos el problema, *x*: representa el número de artículos a transportar, el camión como máximo puede cargar 300 artículos, así que 1 ≤ *x* ≤ 300, es decir la función costo, está definida en un intervalo cerrado. En dicho intervalo la función C es continua. Entonces, sabemos que alcanza, en ese intervalo su máximo y su mínimo absoluto.

Debemos encontrar el punto crítico, observar si pertenece al intervalo donde está definida la función y luego evaluar la función en los extremos y en el punto crítico.

Derivemos C y luego igualemos a cero la derivada.

$$C(x) = 2x + \frac{217800}{x}$$

$$C'(x) = 2 - \frac{217800}{x^2}$$

$0 = 2 - \frac{217800}{x^2}$ despejamos x y obtenemos x=330.

El punto crítico cae fuera del intervalo donde la función costo está definida, razón por la cual, debemos evaluar el costo en los extremos del intervalo:

C(x=1)= $ 217802

C(x=300) = $602.42 → El costo mínimo se produce cuando llena el camión al máximo

b) ¿Qué ocurriría si la unidad pudiera transportar hasta 400 unidades de producto?

Si el camión tiene como capacidad máxima 400 artículos, cambió el intervalo de donde la función está definida, ahora es $1 \leq x \leq 400$, el punto crítico es interior al mismo, debemos evaluar la función en los extremos y en el punto crítico para buscar el número de artículos que hace mínimo el costo.

C(x=1)= $ 217802

C(x=330) = $ 662 → El costo mínimo se produce cuando llena el camión con 330 artículos

C(x=400) = $801,36

Ejercicio 5

Una huerta tiene actualmente 25 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. Calcular:

a) La producción actual de la huerta.

Producción = número de árboles * número de frutos por árbol= 25 * 600 = 15000 frutos.

b) La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan x árboles más.

Si se plantan x árboles más, la producción de cada árbol será: $600 - 15x$.

c) La producción a la que ascendería el total de la huerta si se plantan x árboles más.

$P(x) = (25 + x).(600 - 15x) = -15\ x^2 + 225x + 1500$

d) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para qué la producción sea máxima?

$P'(x) = -\ 30x + 225 = 0$ despejando $x = 7{,}5$

$P''\ (x) = -30 < 0$

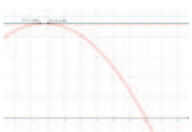
Como la cantidad de árboles no puede ser con decimales debo decidir si tomar x= 7 ó x=8

c) La producción a la que ascendería el total de la huerta si se plantan x árboles más.

P(7)= 2340 = P(8)

d) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para qué la producción sea máxima?

La producción será máxima si la huerta tiene 25 + 7 = 32 ó 25 + **8** = 33 árboles.



Tarea 3

Ejercicio 1

a) $\int \frac{-xdx}{\sqrt{5x^2+1}}$

esta integral se resuelve por el método de sustitución, haciendo:

$u = 5x^2 + 1, \quad du = 10\ x\ dx \quad \rightarrow \frac{1}{10}du = x\ dx$

Sustituyendo en la integral, nos queda:

$-\int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2+1}} = -\frac{1}{10}\int \frac{du}{u^{1/2}} = -\frac{1}{10}\frac{u^{1/2}}{1/2} + c = -\frac{\sqrt{5x^2+1}}{5} + c$

b) $\int x\ sen(x)dx$

Esta integral se puede resolver por el método de integración por partes o por tabla de integrales.

Recordemos el método: $\int u. dv = u. v - \int v. du$

En este caso, hagamos

$u = x; \quad du = dx; \quad dv = sen(x); \quad v = \int dv = \int sen(x)dx = -\cos(x)$

Entonces:

$\int x\ sen(x)dx = x.(-\cos(x)) - \int(-\cos(x))dx = \boldsymbol{sen(x) - x.\cos(x) + c}$

Si usamos la tabla, la integral buscada es:

$$\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$$

Cambiando u por x, nos queda: $\int x\ sen(x)dx = \boldsymbol{sen(x) - x.\cos(x) + c}$.

También podemos resolver esta integral utilizando *GeoGebra*, en la barra de comando introducimos

Integral[x*sin(x), x]

y el resultado que arroja es **g(x)=-x cos (x)+sin(x)**.

Cuidado, estamos utilizando la calculadora gráfica del software, aclara que el resultado es para una constante c=0.

c) $\int_1^3 \frac{x.\sqrt{x}-3x}{x}dx$

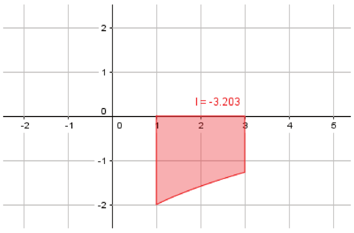
Para resolver esta integral definida, primero debemos operar algebraicamente para obtener una función que podamos integrar. Y como es una integral definida, el resultado es un número.

$$\int_1^3 \left(\frac{x.x^{\frac{1}{2}}}{x} - \frac{3x}{x}\right)dx = \int_1^3 (x^{\frac{1}{2}} - 3)dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}dx - \int_1^3 -3\ dx = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3x\right)\Bigg|_1^3$$
$$\approx -3{,}203$$

Si utilizamos *GeoGebra*, introducimos

Integral[x^(1/2)-3, 1,3]

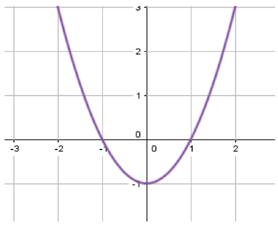
y el resultado es -3,203 y además hace la gráfica, mostrando que en el intervalo de integración, la función está toda debajo del eje x, razón por la cual el resultado es un número negativo.



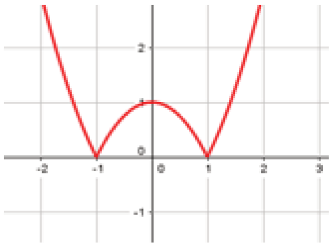
d) $\int_{-1}^{2} |x^2 - 1| dx$

Lo primero que debemos hacer para resolver esta integral es expresar la función $f(x) = |x^2 - 1|$
teniendo en cuenta la definición de valor absoluto.

Si recordamos de matemática I, la gráfica de la función $y = x^2 - 1$ es una parábola que abre hacia arriba desplazada una unidad hacia abajo. Con raíces en x=-1 y x=1.



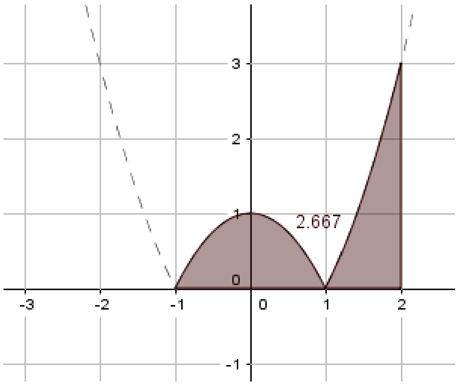
la función del integrando es el valor absoluto de esta función, es decir $f(x) = |x^2 - 1|$ cuya gráfica es:



En el intervalo de integración, [-1, 2], la función $|x^2 - 1|$ cambia, porque en [-1, 1] la función a integrar es $-(x^2 - 1)$ y en el intervalo (1, 2] la función es $x^2 - 1$.

El cálculo de la integral es: $\int_{-1}^{2} |x^2 - 1| dx = \int_{-1}^{1} -(x^2 - 1) dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 1) dx \approx 2{,}667$

Si utilizamos *GeoGebra* para verificar este resultado escribimos
Integral[abs(x^2-1), -1, 2]
y da por resultado 2,667 y el gráfico asociado es:

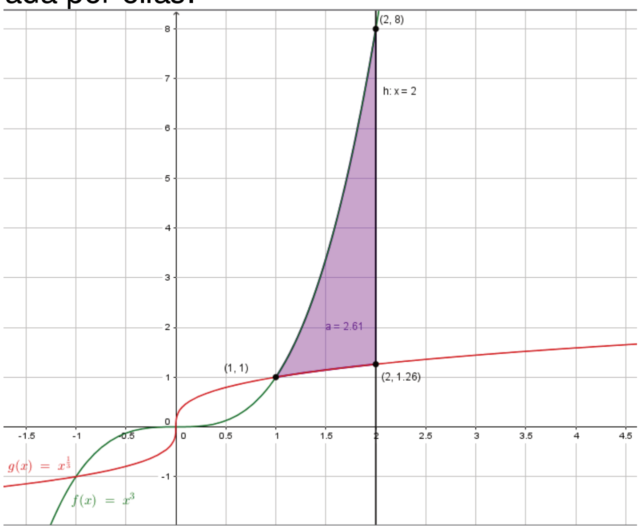


Ejercicio 2

Graficá, en un mismo sistema de ejes, $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$ y x = 2.

¿Todas las expresiones son funciones? Justifica tu respuesta.

¿Encierran las tres curvas graficadas un área?, si es así, identifícala y calcula el área encerrada por ellas.



No, x=2 es una recta vertical, para un único valor de abscisas hay infinitos valores imagen.

Las tres curvas graficadas definen una sola región que es la sombreada en color lila de la gráfica, y su área se calcula haciendo

$\int_1^2 \left(x^3 - \sqrt[3]{x}\right)dx = \frac{x^4}{4} - \left.\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right|_1^2 \approx 2{,}61$ unidades de área.

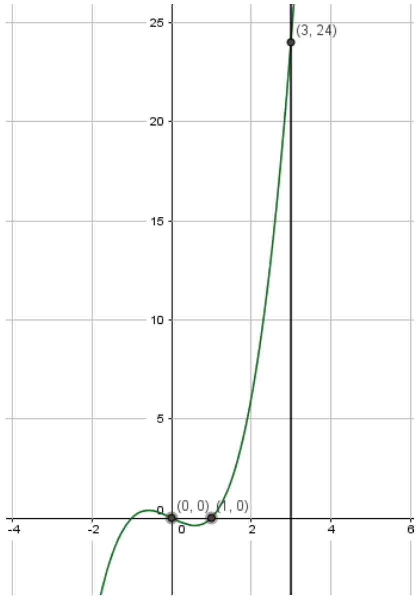
Si utilizamos *GeoGebra* el comando es:

IntegralEntre[x³, x^(1 / 3), 1, 2]

y el resul-tado es a=2,61

Ejercicio 3

Si $v(t) = t^3 - t$ indica la velocidad en la que se mueve el objeto expresada en metros sobre segundos. ¿Cuánto se desplazó en el intervalo [0, 3]? ¿Qué distancia recorrió?



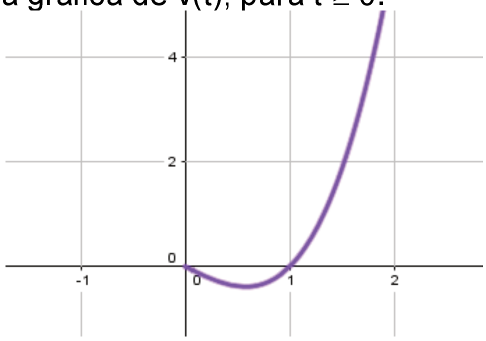
Gráfica de V(t). Observar que en el intervalo (0, 1) la velocidad toma valores negativos

Dada la velocidad, si la integramos obtenemos el desplazamiento del objeto en movimiento.

$$S = \int_0^3 (t^3 - t)dt = (\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2})\Big|_0^3 = \frac{81}{4} - \frac{9}{2} \approx 15{,}75\ m$$

Podés verificar este resultado utilizando el *GeoGebra*, el comando es:
Integral[(x^3-x), 0, 3]

Para calcular la distancia recorrida por la partícula en el intervalo [0, 3], es necesario recordar que lo que se está modelando el desplazamiento de un objeto que se mueve en línea recta y que se han establecido puntos de referencia para este modelo.
Si la velocidad es positiva, significa que la partícula se mueve hacia la derecha del punto inicial y si la velocidad tiene signo negativo, significa que la partícula se mueve hacia la "izquierda". Entonces, si ir a la derecha implica "alejarse", ir hacia la izquierda implica "acercarse" al punto de partida.
Para contemplar estos cambios en el sentido del movimiento, la función que modela velocidad debe tener siempre el mismo signo, razón por la cual, para calcular la distancia total recorrida en el intervalo de tiempo indicado, se calcula la integral definida del valor absoluto de la velocidad en el mismo.
Veamos nuevamente la gráfica de v(t), para t ≥ 0.



La velocidad toma valores negativos en el intervalo (0,1) y para t >1 es positiva. Para poder calcular la integral del valor absoluto de la velocidad, debemos tener en cuenta este cambio de signo y hacer el siguiente cálculo:

$$S = \int_0^3 |(t^3 - t)|dt = \left|\int_0^1 (t^3 - t)dt\right| + \int_1^3 (t^3 - t)dt \approx 16{,}25\, m$$

Podés verificar este resultado con el *GeoGebra*, el comando a utilizar es
Integral[abs(x^3-x), 0, 3]
y el resultado es 16,25, el mismo que obtuvimos con el cálculo que hicimos.

Ejercicio 4
La aceleración de un objeto que se mueve a lo largo de un eje coordenado está dada por $a(t) = (2t-3)^{-3}$ **en metros por segundo al cuadrado. Si la velocidad en t = 0 es 4 metros por segundo, encontrá la velocidad 1 segundo más tarde.**

El dato en este problema es la aceleración, si la integramos respecto de t, obtenemos la velocidad.

$$v(t) = \int a(t)dt = \int (2t-3)^{-3}dt = \frac{1}{2}\frac{(2t-3)^{-2}}{-2} + c$$

Para evaluar la constante de integración, utilizamos la información dada en el enunciado: "la velocidad en t=0 es 4 m/s". Reemplazamos esta información en la expresión de *v*(*t*) hallada.

$$v(t) = -\frac{(2t-3)^{-2}}{4} + c$$

$v(t=0) = -\frac{(2.0-3)^{-2}}{4} + c = 4,$ en esta expresión la única incógnita es **c**, despejando nos queda: $c = \frac{145}{36}[\frac{m}{seg}]$

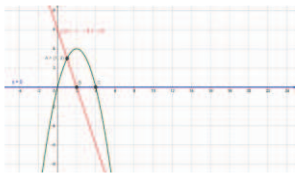
Finalmente, la expresión de la velocidad para este objeto es: $\boldsymbol{v(t)} = -\frac{\boldsymbol{(2t-3)^{-2}}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{145}}{\boldsymbol{36}}$

La velocidad 1 segundo más tarde se calcula evaluando ***v*** en *t* = 1

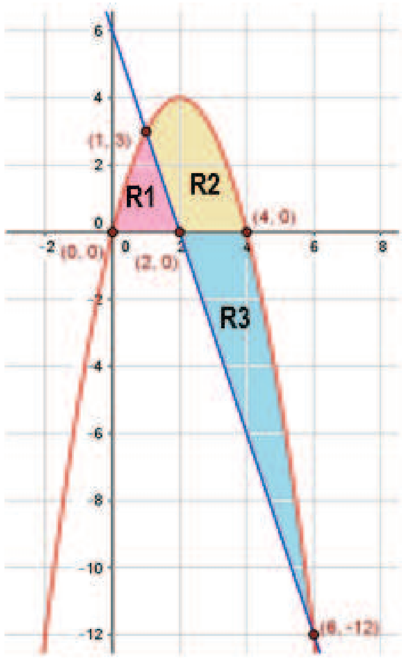
$$v(t=) = -\frac{(2-3)^{-2}}{4} + \frac{145}{36} = \frac{34}{9}\left[\frac{m}{seg}\right] \approx 3{,}78\left[\frac{m}{seg}\right]$$

Tarea Nº 4 para realizar fuera del aula: Integrales dobles, coordenadas rectangulares, coordenadas polares y ecuaciones diferenciales

1) a) Grafica la región R limitada por la parábola, $y = 4x - x^2$, el eje x y la recta $y = -3x + 6$.



Hay tres regiones limitadas por las gráficas de las funciones dadas, ellas son:



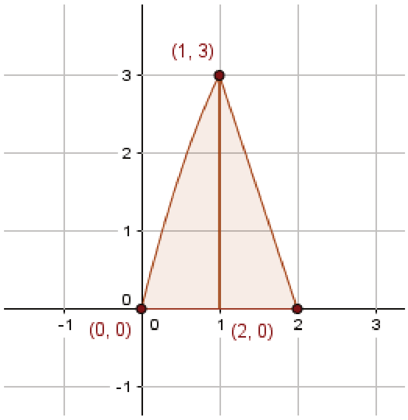
El enunciado no especifica cuál es la que interesa.

b) ¿Si hallás el área de la región R utilizando integrales dobles o una integral simple obtendrías el mismo valor?

Cualquiera sea la región elegida, la respuesta es Sí.

c) Justificá la respuesta que hayas dado en el inciso anterior haciendo los dos cálculos.

c-1) Cálculo del área de la región R1



Integral doble

$$A_{R1} = \int\int_{R1} dA = \int_0^1 \int_0^{4x-x^2} dydx + \int_1^2 \int_0^{-3x+6} dydx$$

$$A_{R1} = \int_0^1 (4x - x^2)dx + \int_1^2 (-3x + 6)dx$$

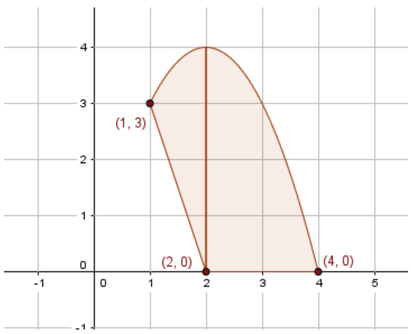
$$A_{R1} = (4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 + (-3\frac{x^2}{2} + 6x)\Big|_1^2 = \frac{5}{3} + \frac{3}{2} = \frac{19}{6} \approx 3{,}17\ UA$$

Integral simple

$$A_{R1} = \int_0^1 (4x - x^2 - 0)dx + \int_1^2 (-3x + 6 - 0)dx$$

$$A_{R1} = (4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 + (-3\frac{x^2}{2} + 6x)\Big|_1^2 = \frac{5}{3} + \frac{3}{2} = \frac{19}{6} \approx 3{,}17\ UA$$

c-2) Cálculo del área de la región R2



Integral doble:

$$A_{R2} = \int\int_{R2} dA = \int_1^2 \int_{-3x+6}^{4x-x^2} dydx + \int_2^4 \int_0^{4x-x^2} dydx$$

$$A_{R2} = \int_1^2 [(4x - x^2) - (-3x + 6)]dx + \int_2^4 (4x - x^2 - 0)dx$$

$$A_{R2} = \int_1^2 ((7x - x^2 - 6)dx + \int_2^4 (4x - x^2)dx$$

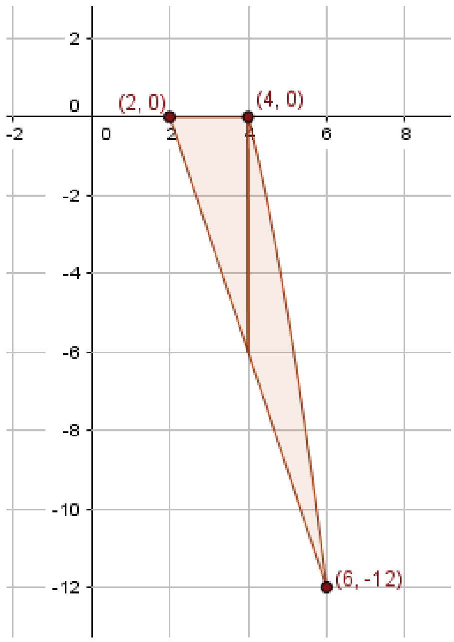
$$A_{R2} = (7\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x)\Big|_1^2 + (4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_2^4 \approx 2{,}17 + 5{,}33 \approx 7{,}50\ UA$$

Integral simple

$$A_{R2} = \int_1^2 [(4x - x^2) - (-3x + 6)]dx + \int_2^4 (4x - x^2 - 0)dx$$

$$A_{R2} = (7\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x)\Big|_1^2 + (4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_2^4 \approx 2{,}17 + 5{,}33 \approx 7{,}50\ UA$$

c-3) Cálculo del área de la región R3



Integral doble:

$$A_{R3} = \int\int_{R3} dyds = \int_2^4 \int_{-3x+6}^{0} dydx + \int_4^6 \int_{-3x+6}^{4x-x^2} dydx$$

$$A_{R3} = \int_2^4 [0 - (-3x + 6)]dx + \int_4^6 [4x - x^2 - (-3x + 6)]dx$$

$$A_{R3} = (3\frac{x^2}{2} - 6x)\Big|_2^4 + (7\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_4^6 \approx 6{,}00 + 7{,}33 \approx 13{,}33\ UA$$

Integral simple

$$A_{R3} = \int_2^4 [0 - (-3x + 6)]dx + \int_4^6 [4x - x^2 - (-3x + 6)]dx$$

$$A_{R3} = (3\frac{x^2}{2} - 6x)\Big|_2^4 + (7\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_4^6 \approx 6{,}00 + 7{,}33 \approx 13{,}33\ UA$$

2) a) Dibujá la región R cuya área viene dada por la integral iterada:

$A = \int_0^2 \int_0^x dydx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dydx$

Primera integral: *x* varía entre 0 y 2, *y* varía entre 0 y *x*

Segunda integral: x varía entre 2 y 4, y varía entre 0 y 4-x

Observación: en la gráfica están indicados los comandos en *GeoGebra* de cada tramo.

b) Si cambiás el orden de integración, ¿obtendrías el mismo resultado?

Si

c) Justificá la respuesta del ítem anterior resolviendo la integral con el orden de integración cambiado.

Cálculo de la integral dada

$$A = \int_0^2 \int_0^x dydx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dydx = \int_0^2 xdx + \int_2^4 (4 -)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + (4x - \frac{x^2}{2})\Big|_2^4 = 4$$

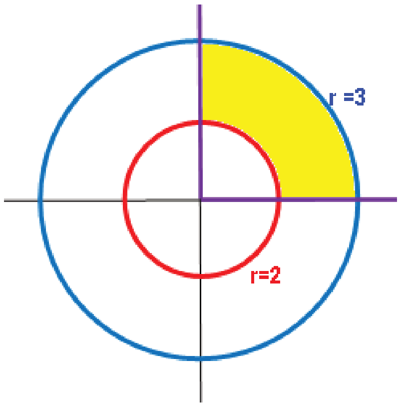
Cambiando el orden de integración

$$A = \int_0^2 \int_y^{4-y} dxdy = \int_0^2 (4 - 2y)dy = (4y - 2\frac{y^2}{2})\Big|_0^2 = 4$$

3) Calculá las integrales en coordenadas polares, identificá y graficá la región de integración en cada una de ellas:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^3 \sqrt{9 - r^2}\, r dr d\theta$

El ángulo θ varía entre 0 y $\pi/2$ (primer cuadrante) y r, varía entre 2 y 3. En coordenadas polares la expresión r= 2 y r=3 representa una circunferencia de radio 2 y de radio 3 respectivamente si unimos todos esto en un gráfico nos queda:



Calculemos la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^3 \sqrt{9-r^2}rdrd\theta$$

la integral respecto a r sale por sustitución, haciendo

$u=9-r^2 \to du=-2rdr \to r\,dr=-\frac{du}{2}$

$$\int \sqrt{9-r^2}rdr=\int \sqrt{u}\frac{du}{-2}=-3u^{\frac{3}{2}}+c=-3(9-r^2)^{\frac{3}{2}}+c$$

Reemplazando este resultado en la integral inicial nos queda

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^3 \sqrt{9-r^2}rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[-3(9-9)^{\frac{3}{2}}+3(9-4)^{\frac{3}{2}}]d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[3(5)^{\frac{3}{2}}]d\theta=3\sqrt{5^3}\frac{\pi}{2}$$

$$\approx 16{,}8\,\pi$$

b) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} x\,y\;dy\,dx$

Para pasar a coordenadas polares es conveniente conocer la región de integración. De la expresión de la integral vemos que x varía entre 0 y 2 y la y varía desde $y=0$ a $y=\sqrt{2x-x^2}$

Si operamos algebraicamente con la última ecuación tenemos:

$y^2=\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^2 \;\to\; y^2=2x-x^2 \;\to\; x^2-2x+y^2=0$ completamos cuadrados y llegamos a

$(x-1)^2+y^2=1$ que es la expresión canónica de una circunferencia con centro en (1, 0) y radio 1.

Si unimos todo y graficamos la región de integración es la mitad superior de la circunferencia, como se ve en la figura.

Pasemos todo a coordenadas polares

El ángulo θ varía entre 0 y $\pi/2$

El radio r varía entre 0 y $r\,sen\theta = \sqrt{2r\cos\theta - r^2\cos^2\theta}$ elevamos todo al cuadrado y nos queda

$r^2 sen^2\theta = 2r\cos\theta - r^2\cos^2\theta$ operando algebraicamente

$$r^2 sen^2\theta + r^2\cos^2\theta = 2r\cos\theta \;\rightarrow\; r^2(sen^2\theta + \cos^2\theta) = 2r\cos\theta \;\rightarrow\; r = 2\cos\theta$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} x\,y\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r\cos\theta\, r\,sen\theta\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^3\cos\theta\, sen\theta\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2\cos\theta} \cos\theta\; sen\theta\,d\theta \;=\; \int_0^{\pi/2} \frac{8}{3}\cos^3\theta\cos\theta\; sen\theta\; d\theta \;=\; \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\; sen\theta\; d\theta$$

Resolvamos la integral $\frac{8}{3}\int \cos^4\theta\; sen\theta\; d\theta$,

Sale por sustitución haciendo $\cos\theta = u \;\rightarrow\; -sen\theta\,d\theta = du \rightarrow\; sen\theta\,d\theta = -du$

$$\frac{8}{3}\int \cos^4\theta\; sen\theta\; d\theta = \frac{8}{3}\int u^4\;(-du) = -\frac{8}{3}\frac{u^5}{5} + c = -\frac{8\cos^5\theta}{15} + c$$

Reemplazando este resultado en la integral que estamos calculando tenemos

$$\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\; sen\theta\; d\theta \;=\; -\frac{8}{15}\cos^5\theta\Big|_0^{\pi/2} \;=\; -\frac{8}{15}[\cos^5(\pi/2) - \cos^5 0] = \frac{8}{15}$$

Finalmente

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} x\,y\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^3\cos\theta\; sen\theta\,dr\,d\theta = \frac{8}{15}$$

4) La ecuación diferencial que modela el decaimiento del C-14 en un hueso es $\frac{dy}{dt} = k\;y(t)$ si operamos algebraicamente, obtenemos la ecuación: $\frac{dy}{y} = k\;dt$ que es de variables separables, para resolverla, integramos $\int \frac{dy}{y} = \int k\;dt \;\rightarrow\; \ln|y| = kt + C_1 \;\rightarrow$ $y = e^{kt+C_1} = e^{kt}e^{C_1}$

En el cálculo del logaritmo, no nos preocupamos por el signo de y, porque es la cantidad de C-14 que queda en el instante t, es una magnitud positiva.

Si llamamos $C = e^{C_1}$ la solución general hallada queda: $y = C\ e^{kt}$

donde C es la cantidad inicial de C-14 presente en el hueso a tiempo 0 (cuando muere el animal).

La vida media, es el tiempo que tarda un material en desintegrar la mitad de la cantidad inicial, en el contexto de este problema, t= 5568 años y reemplazando esta información en la solución general hallada nos queda: $\frac{C}{2} = C\ e^{k\ 5568}$.

Operando algebraicamente $\frac{1}{2} = e^{k\ 5568}$, tomando logaritmo a ambos miembros y aplicando sus propiedades podemos despejar k, que en este problema se interpreta como la constante de desintegración que caracteriza al C-14.

$\ln(\frac{1}{2}) = \ln(e^{k\ 5568}) = 5568\ k \to k = \frac{\ln(0.5)}{5568} \approx -0{,}000124$

La solución general no queda ahora: $y = C\ e^{-0{,}000124t}$.

Si nos informan que la cantidad de C-14 que el hueso hallado tiene 1/8 de la cantidad inicial, reemplazamos esto en la solución general hallada y queda: $\frac{C}{8} = C\ e^{-0{,}000124t}$ $\to \frac{1}{8} = e^{-0{,}000124t}$, vemos que la única incógnita que hay es t, y es justamente el tiempo que estamos tratando de determinar, es decir la antigüedad del fósil

$$\ln\left(\frac{1}{8}\right) = \ln(e^{-0{,}000124\ t}) = -0{,}000124\ t\ \to t = \frac{\ln(\frac{1}{8})}{-0{,}000124} \approx 16770\ años.$$

Anexo 6: Cuestionario de disponibilidad de dispositivos informáticos de los alumnos (inicio primer cuatrimestre de 2017).

Hola, en las Cátedras de Matemática I y II estamos llevando adelante una experiencia didáctica con la que pretendemos mejorar la enseñanza de Matemática y por ende su aprendizaje. Tenemos previsto actividades que requieren el uso de dispositivos informáticos y conexión a internet entre otras.

Por este motivo te solicitamos que por favor colabores con nosotros y respondas el cuestionario que te presentamos a continuación:

D.N.I. Nº:_________________________________ ¿Cursas por primera vez Matemática I? SI □ No □

Localidad de Origen:_______________________________

Localidad de Residencia:_____________________________________

Sobre los siguientes aspectos informáticos **(Marcá lo que corresponda)**:

Posees	**Lugar de origen**		**Lugar de residencia**			**Lugar de origen**		**Lugar de residencia**	
PC de Escritorio:	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	Con acceso a internet:	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**
Notebook/Netbook:	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	Con acceso a internet:	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**
Tablet:	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	Con acceso a internet:	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**
Smartfone:	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	Con acceso a internet:	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**

Con respecto al Smartfone, señalá el sistema operativo		
Android	**SI**	**NO**

Windows pone	**SI**	**NO**
Otro (especificar):		

Con respecto al uso de los elementos informáticos, ¿ los usas con fines de		
Entretenimiento?	**SI**	**NO**
Estudio?	**SI**	**NO**
Comunicacional?	**SI**	**NO**
Otro, detallar		

¿Conoces programas específicos de Matemática? SI □ No □□

Si marcaste **SI**, indica cual o cuales conoces: _______________________

¿Conoces aplicaciones de Matemática para uso celular? SI □ No □

Si marcaste **SI**, indica cual o cuales conoces: ___________________

Anexo 7: Cuestionario de opinión a estudiantes de Matemática II – año 2017

Hola, durante el cursado de Matemática I y II, los docentes de la cátedra implementaron una metodología didáctica diferente a la que habitualmente emplean. Como vos cursaste ambas materias te pedimos que nos des tu opinión acerca de ella. Gracias

Edad: años. **DNI:** **Recursante:** Sí - No.

Marque rodeando lo que corresponda

1. Las actividades para desarrollar fuera de clases Le resultaron útiles.
   Sí. No.
2. Le generaron algún tipo de conflicto
   Sí. No.
3. Accedió a los links y sitios publicados en el entorno y sugeriros en las actividades
   Sí. No.
4. Hizo utilización de los recursos informativos provistos por la cátedra (Geogébra, vídeos de YouTube, etc.).
   Sí. No.
   En caso de haber respondido Sí:
   4.1 ¿Cuáles?

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

   4.2 ¿Con qué medios accedió?

   Tablet. PC.
   Celular. Otros (aclarar): ……………………………......................................
   4.3¿En dónde accedió a estos dispositivos?
   ……………………………………………………………………………………………

Anexo 8: Cuestionarios de opinión a estudiantes de Matemática I y II – año 2019.

Cuestionario para conocer las opiniones de los estudiantes que cursan Matemática I (año 2019)

Estimados alumnos: El motivo de este cuestionario es conocer sus opiniones acerca del cursado de Matemática I.

Por favor lean atentamente y respondan las consignas seriamente. Sus opiniones y observaciones son muy valiosas para nosotros porque nos permite ir mejorando nuestra propuesta didáctica para la enseñanza de la asignatura y colaborar en el mejoramiento de sus aprendizajes.

1. **Carrera que cursas**
   Licenciatura en Saneamiento Ambiental
   Licenciatura en Higiene y Seguridad en el Trabajo
   Tecnicatura en Higiene y Seguridad en el Trabajo
   Tecnicatura Universitaria en Salud Ambiental
   Otra
2. **Si respondiste OTRA en la pregunta número 1 por favor indica que carrera cursaste anteriormente**

   ……………………………………………………………………………………………
3. **Edad**
   17 años
   18 años
   19 años
   Mayor 19 años
4. **Sexo**
   Femenino
   Masculino
5. **Procedencia**
   Ciudad de Santa Fe
   Ciudad de Paraná
   Ciudad de Santo Tomé
   Ciudad de Esperanza
   Otra ciudad o localidad de la provincia de Santa Fe
   Otra ciudad o localidad de la provincia de Entre Ríos
   Otra ciudad o localidad de la provincia de Córdoba
   Otra ciudad o localidad de la provincia de Corrientes
   Otra
6. **Tipo de escuela secundaria de la que egresaste**
   Técnica de gestión pública
   Técnica de gestión privada
   Bachiller de gestión pública
   Bachiller de gestión privada
   Otra

7. **¿Es la primera carrera universitaria que estudias?**
   Si
   No
8. **Si contestaste NO en la pregunta 7 por favor señala qué otra carrera universitaria has estudiado**
   ……………………………………………………………………………………………
9. **¿Es la primera vez que cursas Matemática I?**
   Si
   No
10. **¿Posees computadora en tu residencia durante el el cursado de la asignatura Matemática I?**
   Si
   No
11. **¿Posees smartphone en tu residencia durante el cursado de la asignatura Matemática I?**
   Si
   No
12. **Durante el cursado de la asignatura se implementaron cuatro tareas para realizar fuera del aula ¿cuántas de esas tareas pudiste realizar?**
   4
   3
   2
   1
   Ninguna
13. **Si no pudiste realizar alguna de las tareas ¿puedes señalar cuáles fueron los motivos por los que no pudiste hacerlo?**
   ……………………………………………………………………………………………
14. **¿Para la resolución de las tareas fuera del aula utilizaste tu smartphone?**

Si
No

15. **¿Para la resolución de las tareas fuera del aula utilizaste tu computadora**

Si
No

16. **¿Para la resolución de las tareas fuera del aula utilizaste las computadoras de la biblioteca de la Facultad?**

Si
No

17. **Las tareas que realizaste fuera del aula ¿te resultaron útiles?**
   Si
   No
18. **Si respondiste SI en la pregunta 17 ¿puedes señalar por qué te resultaron útiles?**
   ……………………………………………………………………………………………
19. **Si respondiste NO en la pregunta 17 ¿puedes señalar por qué no te resultaron útiles?**
   ……………………………………………………………………………………………

20. **¿Utilizaste recursos de Internet para resolver o ampliar las tareas a realizar fuera del aula?**
    Si
    No
21. **Si respondiste SI en la pregunta 20 ¿puedes indicar qué recursos de Internet utilizaste?**

……………………………………………………………………………………………

22. **¿Utilizaste mensajería instantánea (*whatsApp*) para consultar a tus docentes sobre las tareas propuestas?**

Si
No

23. **Si respondiste SI en la pregunta 22 ¿puedes indicar qué beneficios te brindó la utilización de *whatsApp*?**

Si
No

24. **¿Utilizaste el entorno virtual para entregar las tareas propuestas?**

……………………………………………………………………………………………

25. **Si respondiste SI en la pregunta 24 ¿puedes indicar qué beneficios te brindó la utilización del entorno virtual?**

……………………………………………………………………………………………

26. **¿Qué sugerencias propondrías para mejorar las tareas para realizar en el hogar que propone la Cátedra?**

……………………………………………………………………………………………

Cuestionario para conocer las opiniones de los estudiantes que cursan Matemática II (año 2019)

Estimados alumnos: El motivo de este cuestionario es conocer sus opiniones acerca del cursado de Matemática II.

Por favor lean atentamente y respondan las consignas seriamente. Sus opiniones y observaciones son muy valiosas para nosotros porque nos permite ir mejorando nuestra propuesta didáctica para la enseñanza de la asignatura y colaborar en el mejoramiento de sus aprendizajes.

1. **Carrera que cursas**

   Licenciatura en Saneamiento Ambiental
   Licenciatura en Higiene y Seguridad en el Trabajo
   Otra
2. **Si respondiste OTRA en la pregunta número 1 por favor indica que carrera cursaste anteriormente**

   ………………………………………………………………………………………
3. **Edad**

   ………………………………………………………………………………………
4. **Sexo**

   Femenino
   Masculino
5. **¿Es la primera vez que cursas Matemática II?**

   Si
   No
6. **Si contestaste NO en el ítem anterior, ¿puedes indicarme por qué?**

   ………………………………………………………………………………………
7. **¿Posees computadora con acceso a Internet en tu residencia durante el cursado de la asignatura Matemática II??**

   Si
   No
8. **¿Posees smartphone con acceso a Internet en tu residencia durante el cursado de la asignatura Matemática II?**

   Si
   No
9. **Durante el cursado de la asignatura se implementaron cuatro tareas para realizar fuera del aula ¿cuántas de esas tareas pudiste realizar?**

   1
   2
   3
   4
   Ninguna
10. **Si no pudiste realizar alguna de las tareas ¿puedes señalar cuáles fueron los motivos por los que no pudiste hacerlo?**

    ………………………………………………………………………………………
11. **¿Para la resolución de las tareas fuera del aula utilizaste tu smartphone?**

    Si
    No
12. **¿Para la resolución de las tareas fuera del aula utilizaste tu computadora**

    Si

No

13. **¿Para la resolución de las tareas fuera del aula utilizaste las computadoras de la biblioteca de la Facultad?**
Si
No

14. **Las tareas que realizaste fuera del aula ¿te resultaron útiles?**
Si
No

15. **Si respondiste SI en la pregunta 17 ¿puedes señalar por qué te resultaron útiles?**
…………………………………………………………………………………………

16. **Si respondiste NO en la pregunta 17 ¿puedes señalar por qué no te resultaron útiles?**
………………………………………………………………………………………………

17. **¿Utilizaste recursos de Internet para resolver o ampliar las tareas a realizar fuera del aula?**
Si
No

18. **Si respondiste SI en la pregunta 17 ¿puedes indicar qué recursos de Internet utilizaste?**
…………………………………………………………………………………………………

19. **¿Utilizaste mensajería instantánea (*WhatsApp*) para consultar a tus docentes sobre las tareas propuestas?**
Si
No

20. **Si respondiste SI en la pregunta 19 ¿puedes indicar qué beneficios te brindó la utilización de *WhatsApp*?**
Si
No

21. **¿Utilizaste el entorno virtual para entregar las tareas propuestas?**
………………………………………………………………………………………………

22. **Si respondiste SI en la pregunta 21 ¿puedes indicar qué beneficios te brindó la utilización del entorno virtual?**
………………………………………………………………………………………………

23. **¿Qué sugerencias propondrías para mejorar las tareas para realizar en el hogar que propone la Cátedra?**
………………………………………………………………………………………………

Anexo 9: Tablas y gráficos de análisis y discusión de los resultados

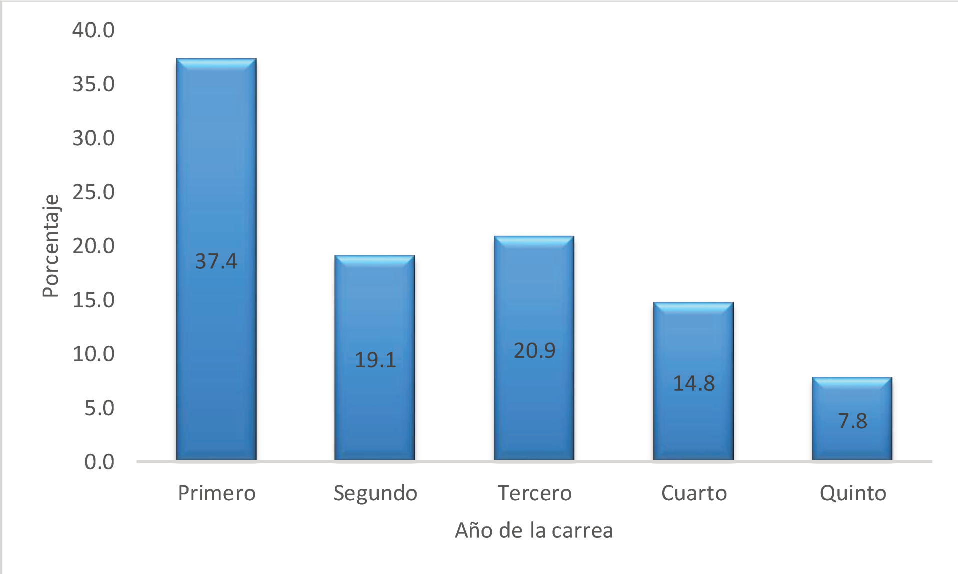


Gráfico 1: Distribución porcentual por año de carrera de las de las respuestas a la encuesta. (Número total de respuestas 115).

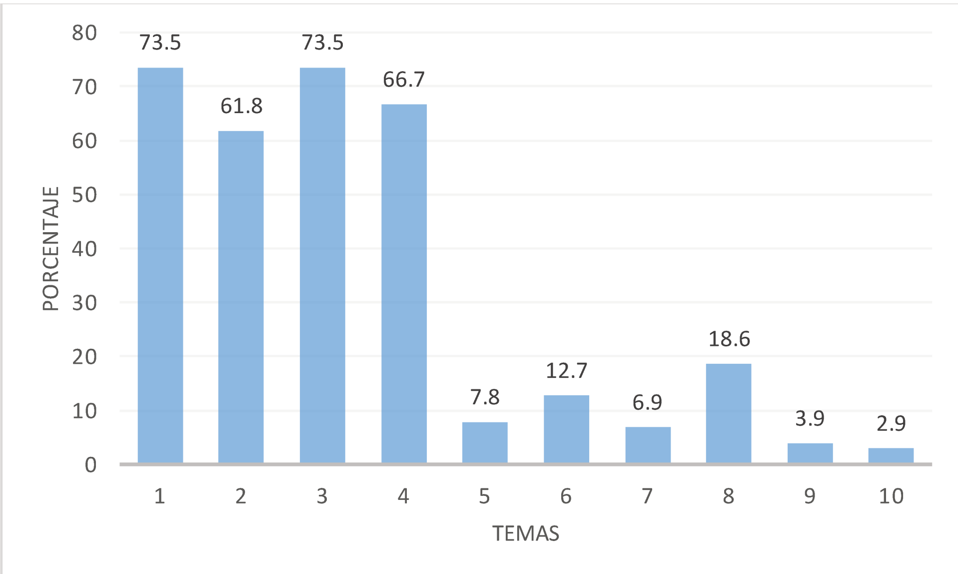


Gráfico 2: Distribución porcentual de los temas de Matemática que obstaculizan el dictado de otras asignaturas (n=102).

1. "Resolución de ecuaciones: despejar incógnitas y pasaje de términos"; 2. "Operar con logaritmos y exponenciales, uso de calculadora"; 3. "Construir gráficas e interpretarlas (función lineal y cuadrática); 4. "Razones y proporciones: conversión de unidades, regla de tres simple", 5. "Nociones de geometría: cálculo de áreas y volúmenes". 6. "Nociones básicas de vectores: operaciones y proyecciones". 7. "Cálculo: derivadas, integrales, análisis de funciones". 8. "Tratamiento estadístico de datos". 9. "Ecuaciones diferenciales" y 10. "Algebra lineal, vectores y tensores".

Tabla 1: Recursos tecnológicos en lugar de origen y en lugar de residencia durante el cursado que disponen los alumnos. Tamaño de muestra n=60.

Recurso tecnológico	**Número de alumnos en**	
	Lugar de origen	**Lugar de residencia**
PC	45	34
Netbook/Notebook	36	37
Tableta	16	15
Smartphone	52	53
Conectividad	56	57

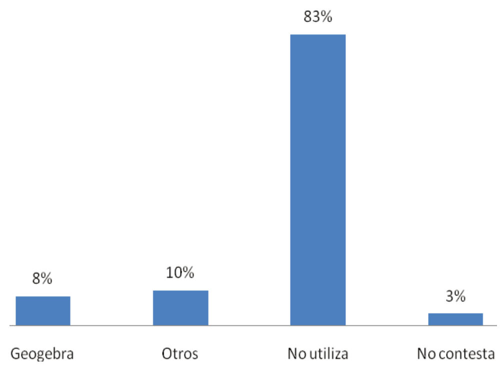


Gráfico 3: Software para PC matemático que utiliza (tamaño de muestra n=60)

Tabla 2: Número de alumnos que resolvieron el problema de triángulos oblicuángulos en el primer parcial de Matemática I – 2017 según resolvieron y entregaron la Tarea 1 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio del parcial				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	27	11	2	4	44
No	4	3	2	0	9

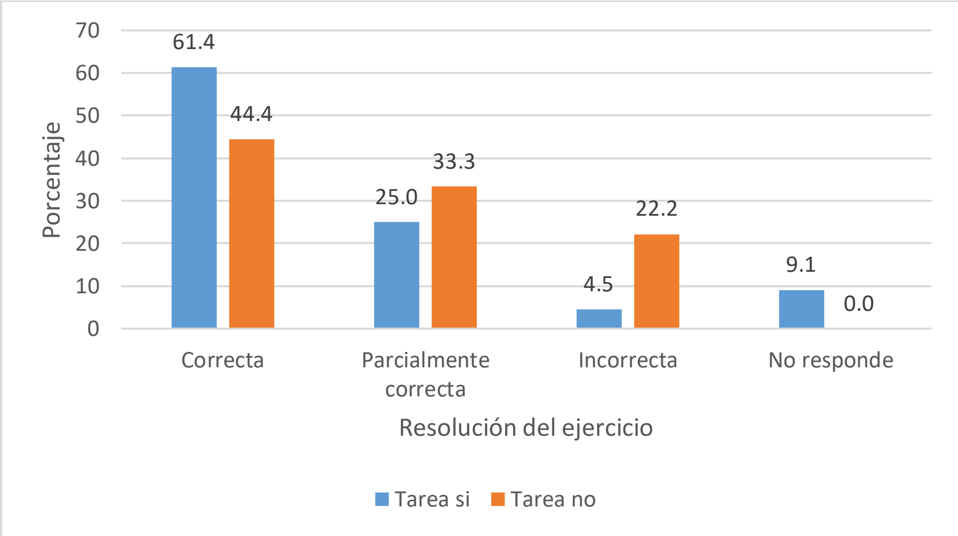


Gráfico 4: Porcentaje de alumnos que resolvieron el problema de triángulos oblicuángulos en el primer parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 1 (n=44) o no (n=9) y la forma de resolución.

Tabla 3: Número de alumnos que resolvieron ejercicios de operatoria con sistemas de ecuaciones lineales en el primer parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 o no y la forma de resolución

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio del parcial				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	32	8	2	0	42
No	6	4	1	0	11

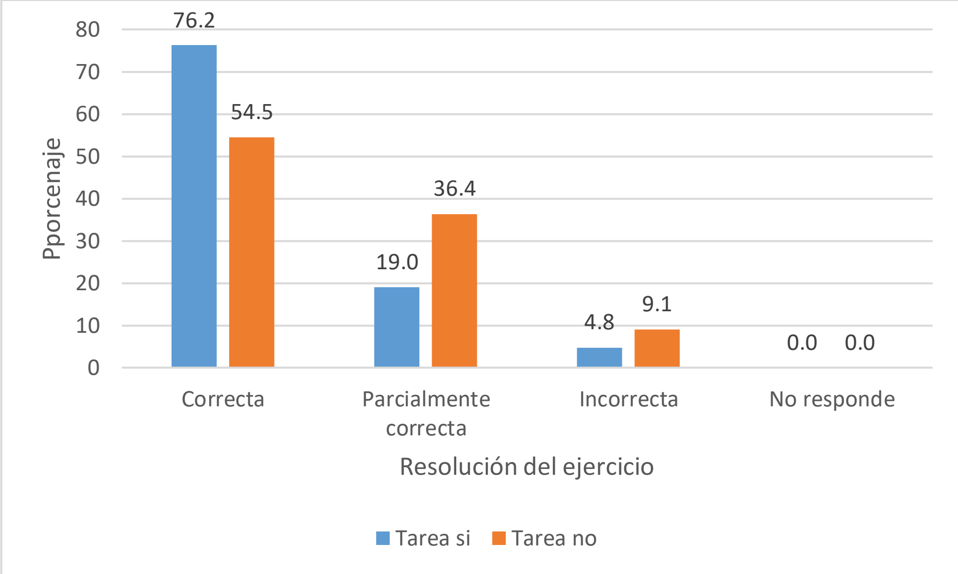


Gráfico 5: Porcentaje de alumnos que resolvieron ejercicios de operatoria con sistemas de ecuaciones lineales en el primer parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 (n=42) o no (n=11) y la forma de resolución.

Tabla 4: Número de alumnos que resolvieron ejercicios sobre conceptos teóricos relativos a sistemas de ecuaciones lineales en el primer parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Correcto	Parcialmente correcto	Incorrecto	No responde	Total
Si	16	18	5	3	42
No	4	4	2	1	11

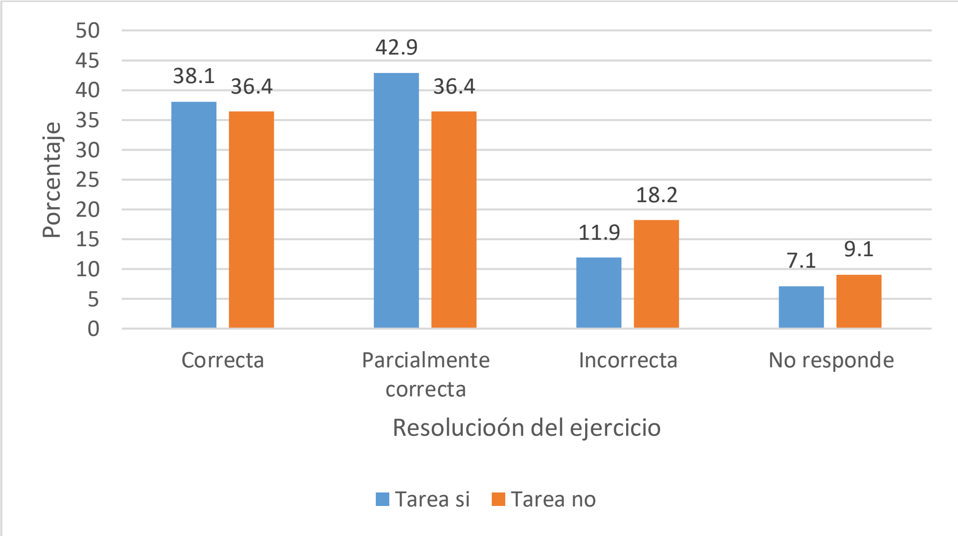


Gráfico 6: Porcentaje de alumnos que resolvieron ejercicios sobre conceptos teóricos relativos a sistemas de ecuaciones lineales en el primer parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 (n=42) o no (n=11).

Tabla 5: Número de alumnos que resolvieron ejercicios de operatoria con matrices en el primer parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	19	19	2	2	42
No	2	5	3	1	11

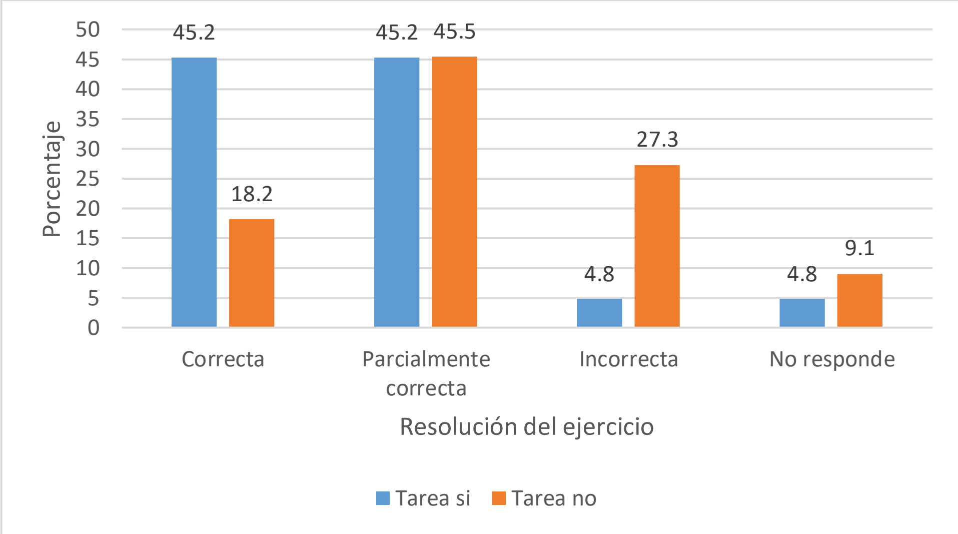


Gráfico 7: Porcentaje de alumnos que resolvieron ejercicios operatoria con matrices en el primer parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 (n=42) o no (n=11) y la forma de la resolución.

Tabla 6: Número de alumnos que resolvieron ejercicios de operatoria y propiedades de determinantes en el primer parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 o no y la forma de la resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	4	22	8	8	42
No	2	4	0	5	11

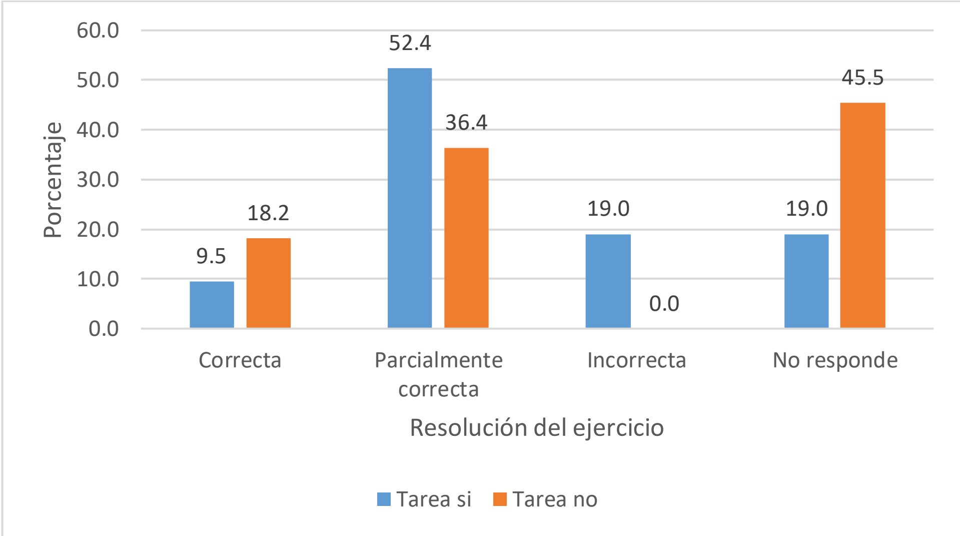


Gráfico 8: Porcentaje de alumnos que resolvieron ejercicios operatoria y propiedades de determinantes en el primer parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 (n=42) o no (n=11) y la forma de la resolución.

Tabla 7: Número de alumnos que resolvieron el ejercicio sobre el tema proyecciones de vectores en el segundo parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 3 o no y la forma de la resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	7	7	5	15	34
No	3	3	7	2	14

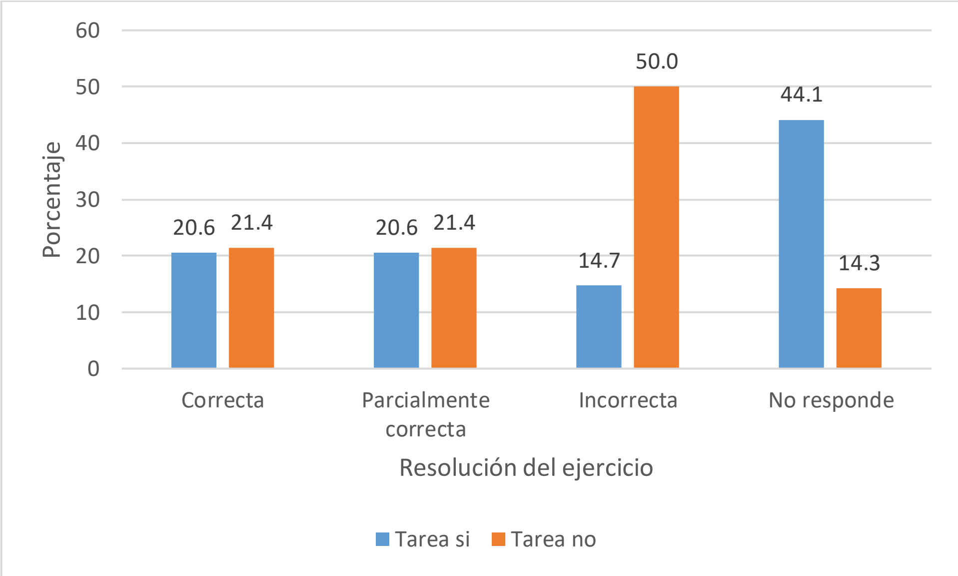


Gráfico 9: Porcentaje de alumnos que resolvieron el ejercicio sobre el tema proyecciones de vectores en el segundo parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 3 (n=38) o no (n=14) y la forma de la resolución.

Tabla 8: Número de alumnos que resolvieron el ejercicio de expresar en forma polar un vector en el segundo parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 3 o no y la forma de la resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	11	8	3	12	34
No	3	4	3	4	14

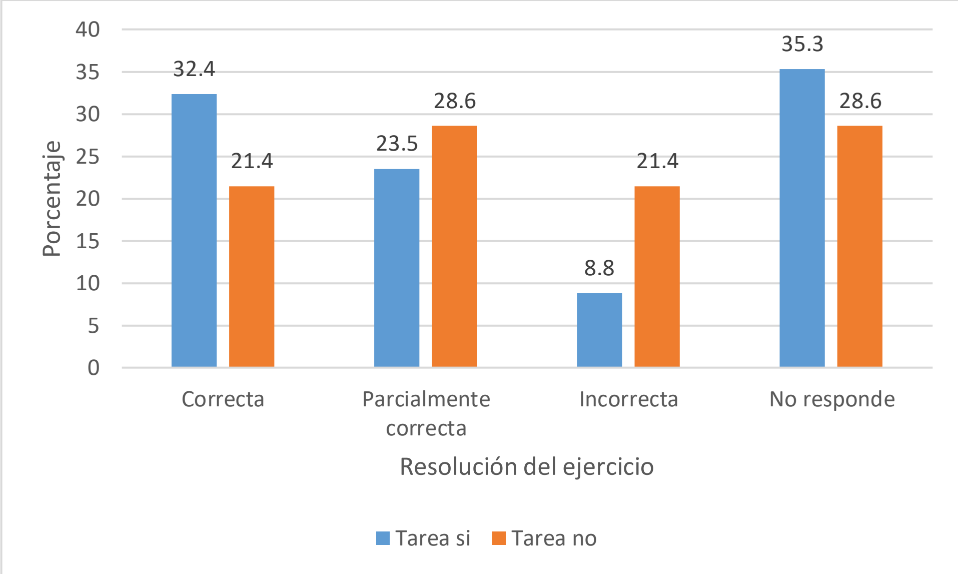


Gráfico 10: Porcentaje de alumnos que resolvieron el ejercicio de expresar en forma polar un vector en el segundo parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 3 (n=38) o no (n=14) y la forma de resolución.

Tabla 9: Número de alumnos que resolvieron el ejercicio determinar un vector coplanar a otros dos en el segundo parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 3 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	9	21	1	3	34
No	2	8	1	3	14

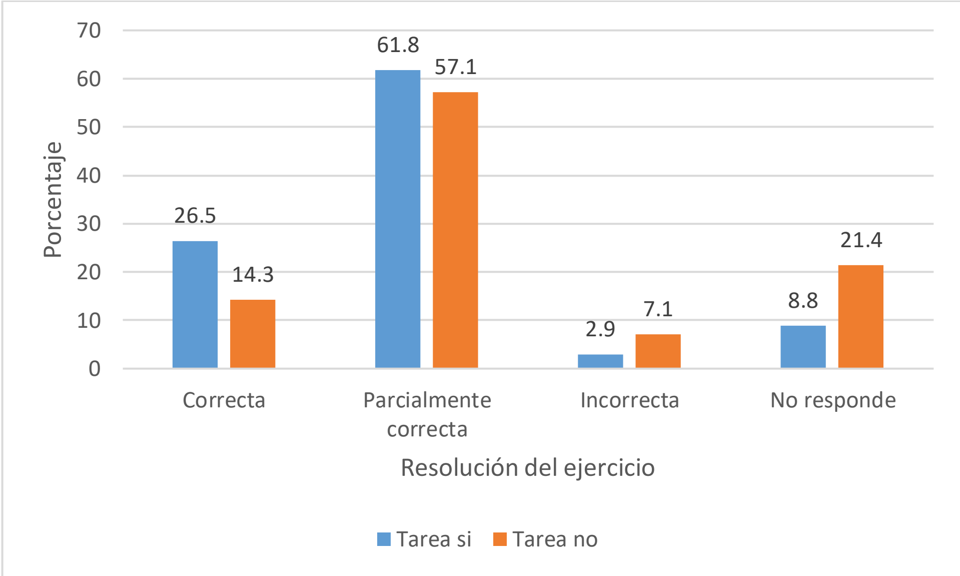


Gráfico 11: Porcentaje de alumnos que resolvieron el ejercicio determinar un vector coplanar a otros dos en el segundo parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 3 (n=38) o no (n=14) y la forma de resolución.

Tabla 10: Número de alumnos que resolvieron el ejercicio de analizar una función racional en el segundo parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 4 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	2	19	4	2	27
No	2	17	0	2	21

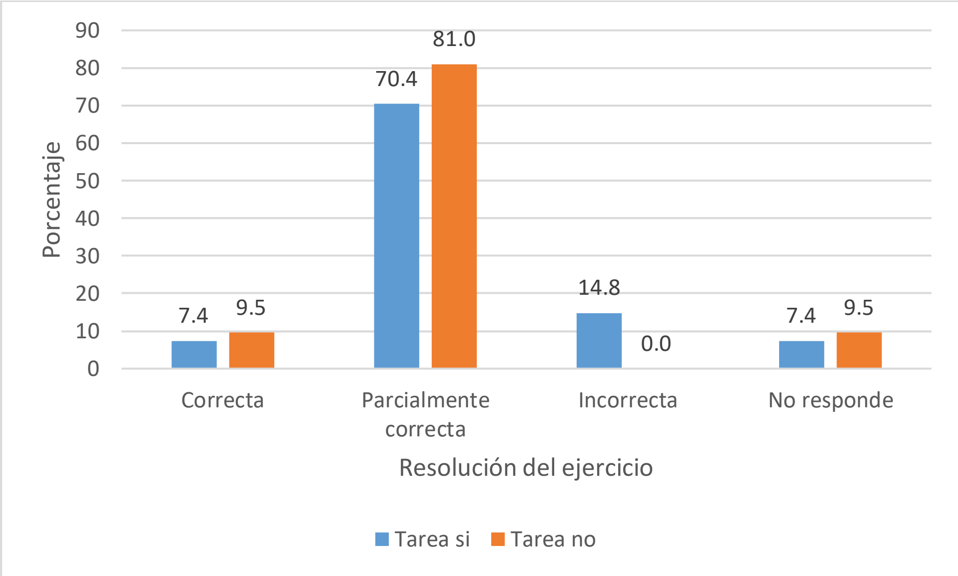


Gráfico 12: Porcentaje de alumnos que resolvieron el ejercicio de analizar una función racional en el segundo parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 4 (n=27) o no (n= 21) y la forma de resolución.

Tabla 11: Número de alumnos que optaron por alcanzar la promoción y resolvieron el ejercicio de analizar la continuidad de una función definida por tramos en el segundo parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 4 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	10	7	2	2	21
No	5	1	0	2	8

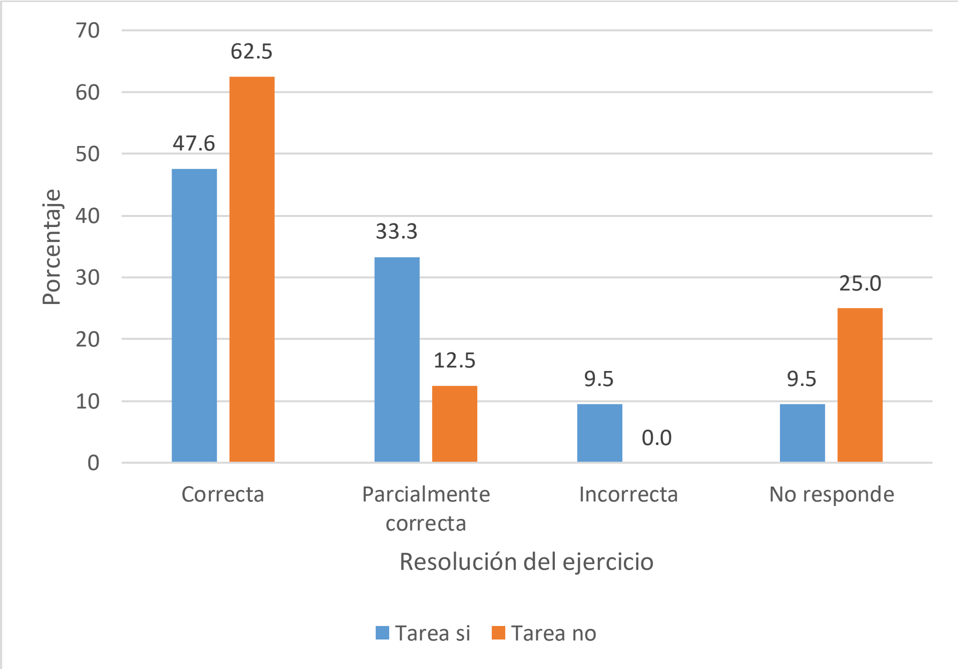


Gráfico 13: Porcentaje de alumnos que optaron por alcanzar la promoción y resolvieron el ejercicio de analizar la continuidad de una función definida por tramos en el segundo parcial de Matemática I – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 4 (n=21) o no (n= 8) y la forma de resolución.

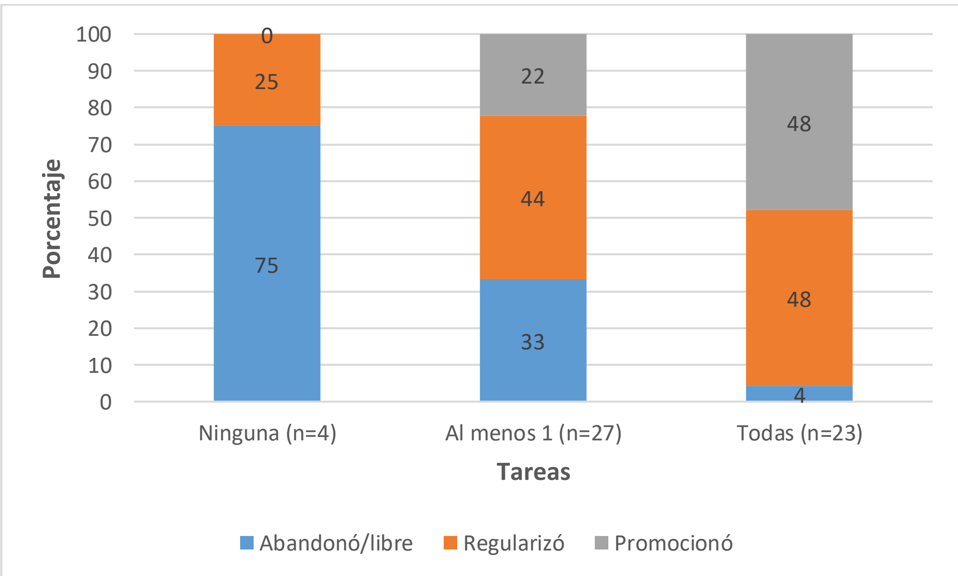


Gráfico 14: Condición final de los alumnos inscriptos en MI agrupados por condición final alcanzada en la asignatura según su participación en la propuesta de tareas.

Tabla 12: Número de alumnos que resolvieron el problema de aplicación física de la derivada en el primer parcial de Matemática II – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	15	8	1	1	25
No	5	5	2	1	13

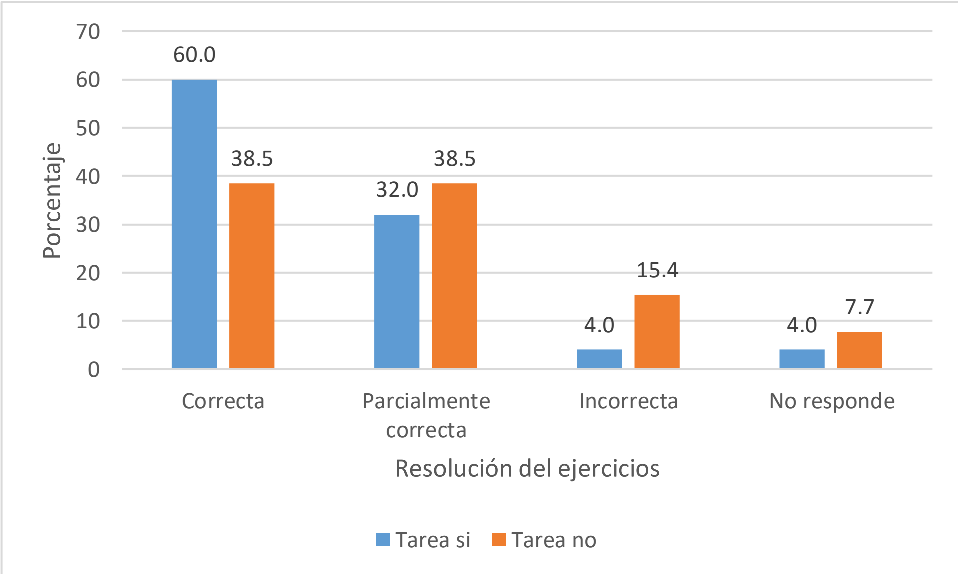


Gráfico 15: Porcentaje de alumnos que resolvieron el problema de aplicación física de la derivada en el primer parcial de Matemática II – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 (n=25) o no (n=13) y la forma de resolución.

Tabla 13: Número de alumnos que resolvieron el problema de optimización en el primer parcial de Matemática II – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	11	7	0	7	25
No	4	3	1	5	13

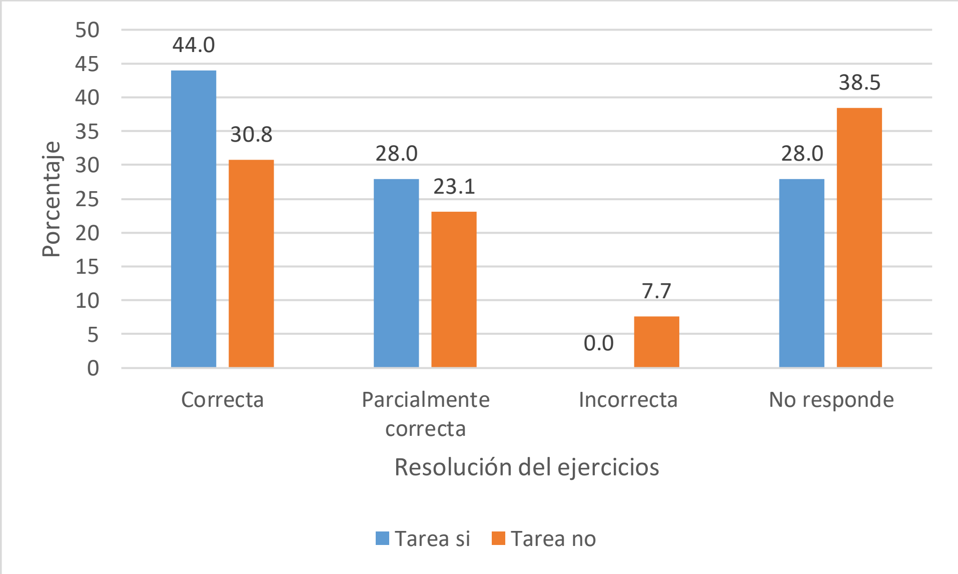


Gráfico 16: Porcentaje de alumnos que resolvieron el problema optimización en el primer parcial de Matemática II – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 (n=25) o no (n=13) y la forma de resolución.

Tabla 14: Número de alumnos que resolvieron el ejercicio de integrales en el segundo parcial de Matemática II – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	5	13	0	0	18
No	1	10	0	0	11

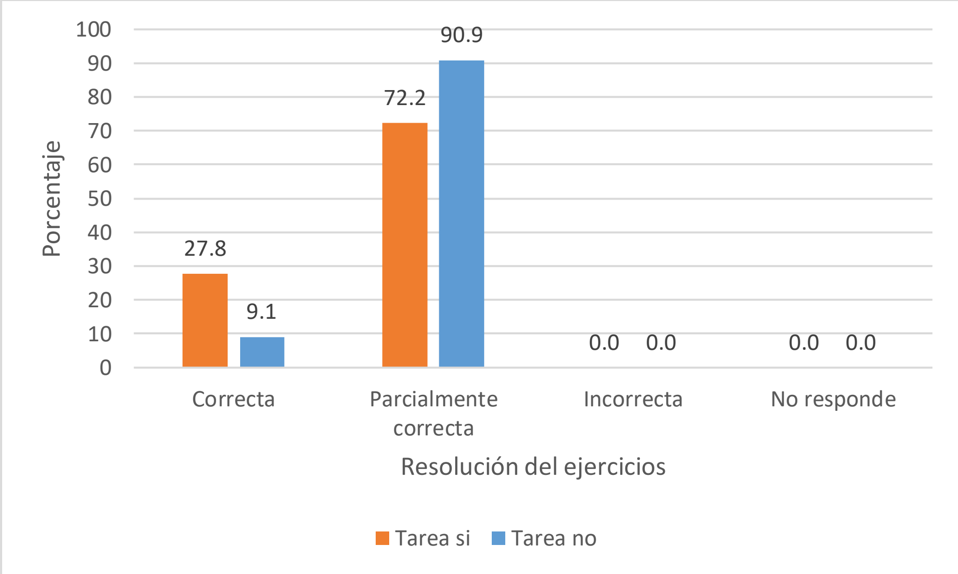


Gráfico 17: Porcentaje de alumnos que resolvieron el ejercicio de integrales en el segundo parcial de Matemática II – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 4 (n=18) o no (n=11) y la forma de resolución.

Tabla 15: Número de alumnos que resolvieron el ejercicio de cálculo de área segundo parcial de Matemática II – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	13	3	2	0	18
No	7	4	0	0	11

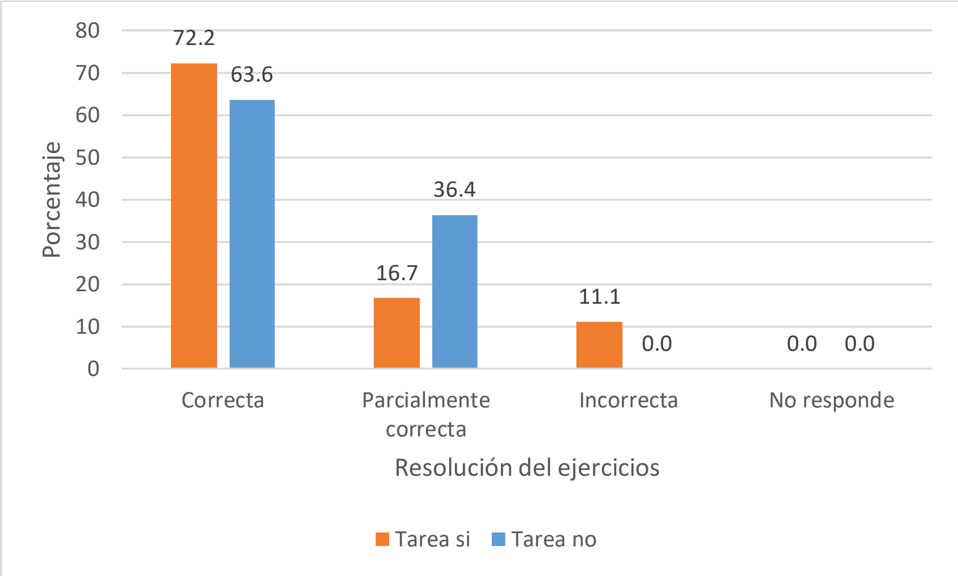


Gráfico 18: Porcentaje de alumnos que resolvieron el ejercicio de cálculo de área en el segundo parcial de Matemática II – 2017 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 4 (n=18) o no (n=11) y la forma de resolución.

Tabla 16: Resumen de condición alcanzada por los alumnos que se inscribieron en Matemática II – 2017 discriminados de acuerdo con la participación en la propuesta de tareas extra clase.

Condición alcanzada	Resolvió y entregó tareas			Total
	Ninguna	Al menos 1	Todas	
Promocionó	1	5	7	13
Regularizó	1	10	5	17
Abandonó/libre	8	10	1	19
Total	10	25	13	48

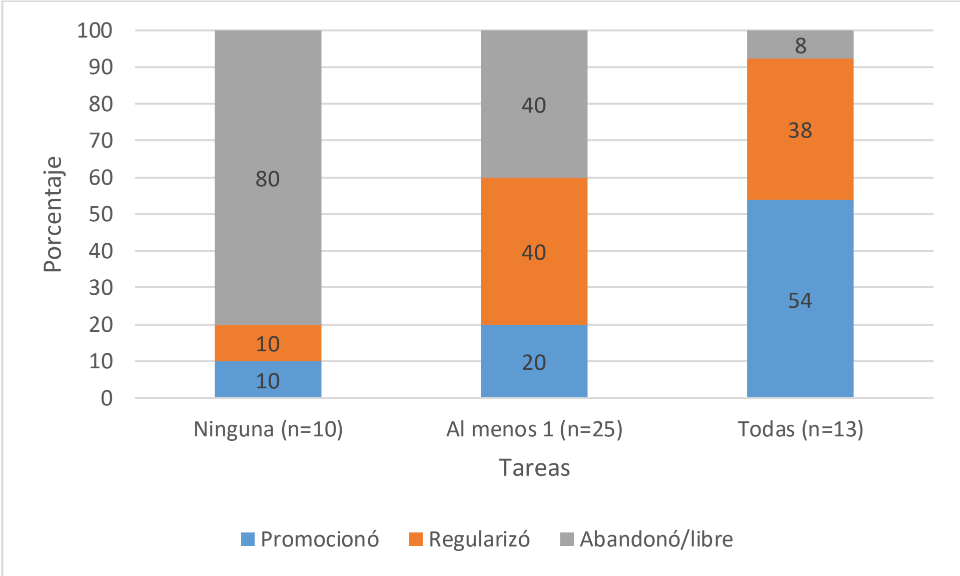


Gráfico 19: Condición final de los alumnos inscriptos en MII agrupados por condición final alcanzada en la asignatura según su participación en la propuesta de tareas.

Tabla 17: Condición final alcanzada por los alumnos en Matemática I. Comparación de cohortes 2016 y 2017.

Condición alcanzada	Cohorte		
	2016 (sin tareas)	2017 (al menos 1 tarea)	2017 (todas las tareas)
Abandonó/libre	44	12	1
Regularizó	12	6	11
Promocionó	10	9	11

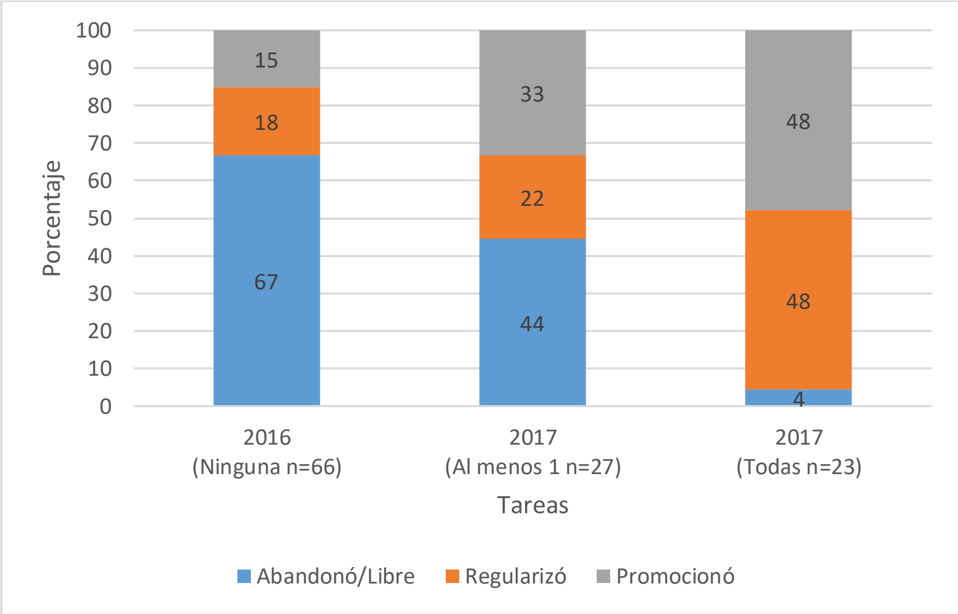


Gráfico 20: Distribución porcentual de condición alcanzada al finalizar el cursado de Matemática I, comparativa según su participación en la propuesta de tareas extra clase (año 2017) y sin tareas (año 2016).

Tabla 18: Condición final alcanzada por los alumnos en Matemática II. Comparación de cohortes 2016 y 2017.

Condición alcanzada	2016 (sin tareas)	2017 (al menos 1 tarea)	2017 (todas las tareas)
Abandonó/libre	17	10	1
Regularizó	20	10	5
Promocionó	7	5	7

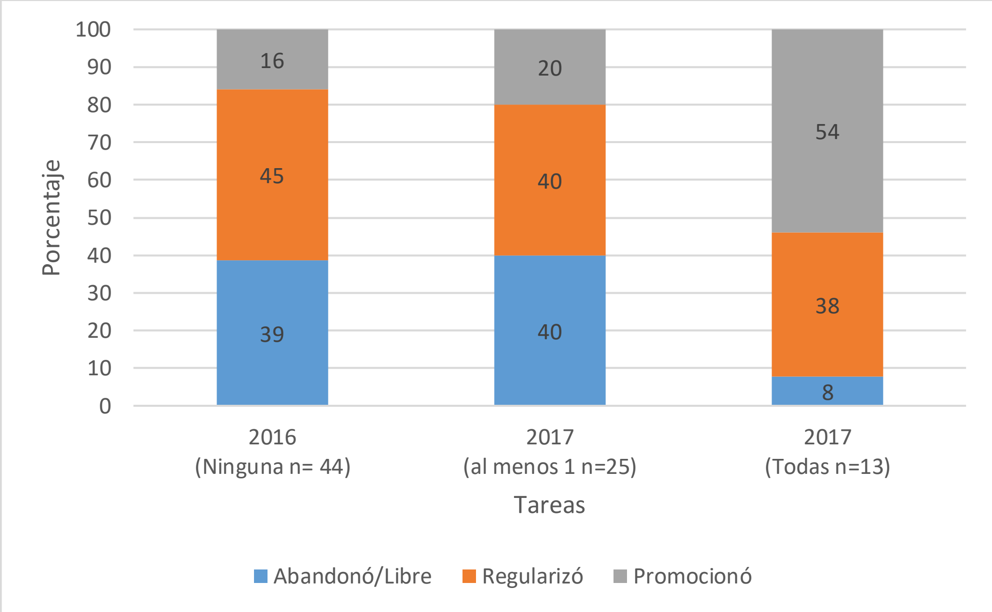


Gráfico 21: Distribución porcentual de condición alcanzada al finalizar el cursado de Matemática II, según su participación en la propuesta pedagógica.

Tabla 19: Número de alumnos que resolvieron el ejercicio de matrices en el primer parcial de Matemática I – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	10	24	0	0	34
No	0	5	0	0	5

Tabla 20: Número de alumnos que resolvieron el ejercicio de determinantes en el primer parcial de Matemática I – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	10	5	3	16	34
No	0	1	1	3	5

Tabla 21: Número de alumnos que resolvieron la identidad trigonométrica en el primer parcial de Matemática I – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 3 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	12	6	5	4	27
No	7	1	3	1	12

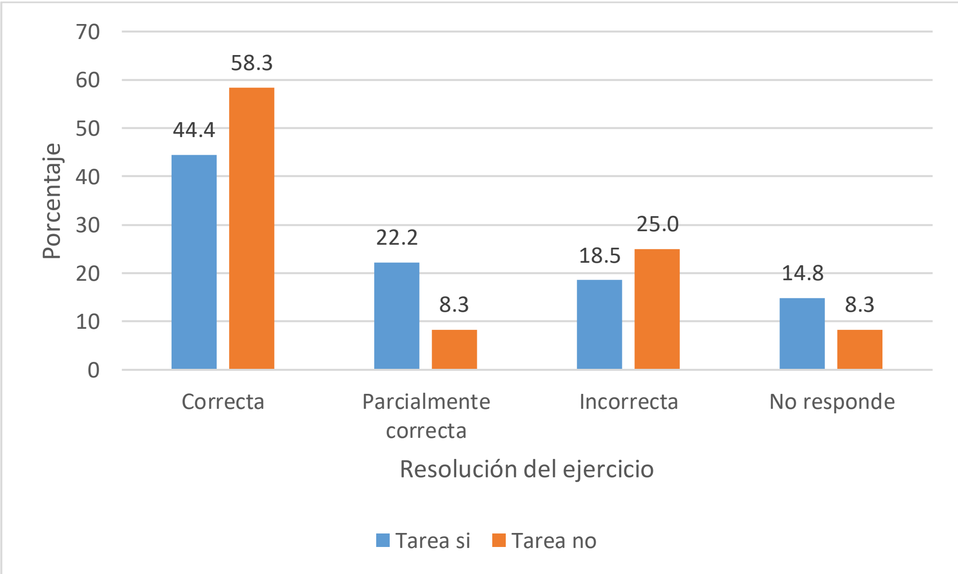


Gráfico 22: Porcentaje de alumnos que resolvieron la identidad trigonométrica en el primer parcial de Matemática I – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 3 (n=27) o no (n=12) y la forma de resolución.

Tabla 22: Número de alumnos que resolvieron la ecuación trigonométrica en el primer parcial de Matemática I – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 3 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	11	9	2	5	27
No	0	6	3	3	12

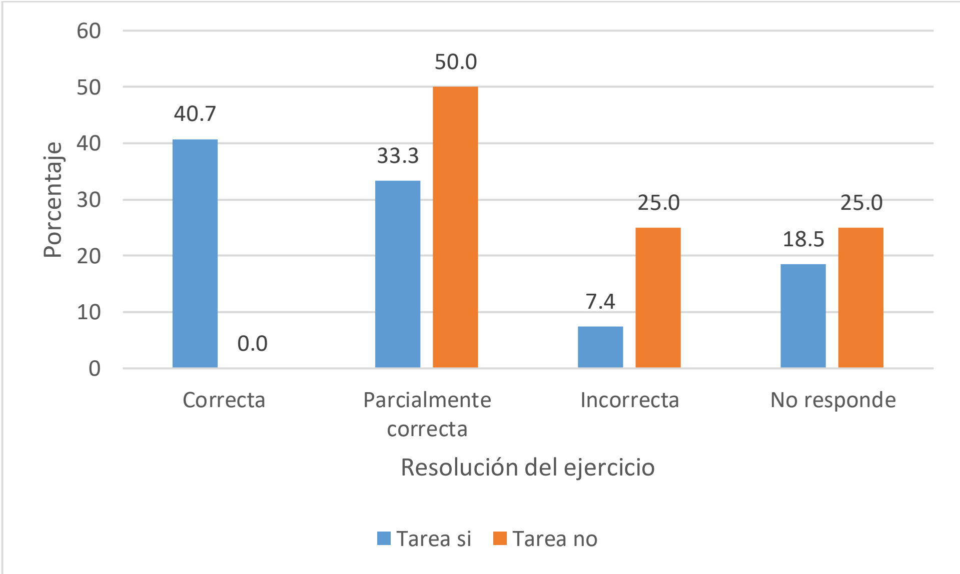


Gráfico 23: Porcentaje de alumnos que resolvieron la ecuación trigonométrica en el primer parcial de Matemática I – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 3 (n=27) o no (n=12) y la forma de resolución.

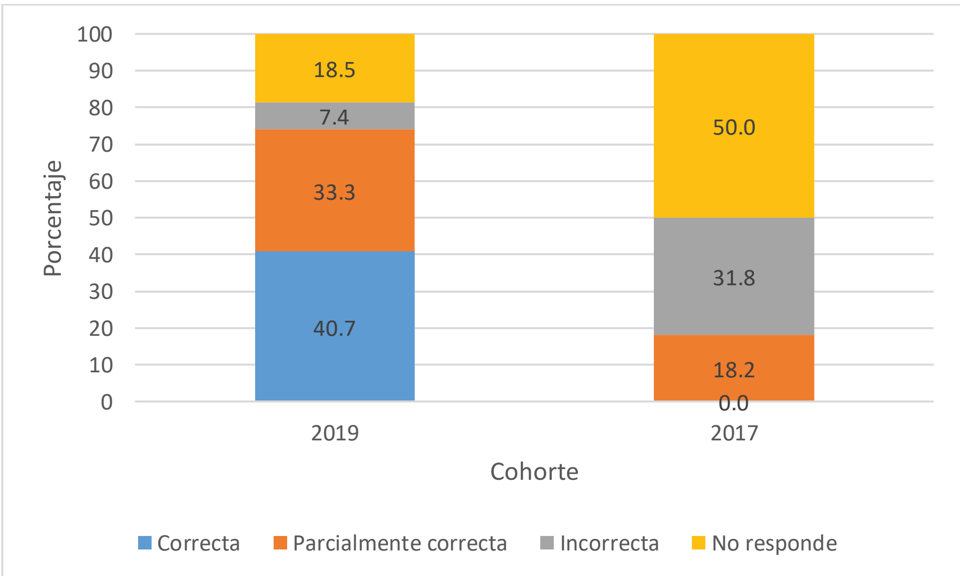


Gráfico 24: Comparación de las resoluciones de la ecuación trigonométrica en el primer parcial de MI de las cohortes 2017 (n=44) y 2019 (n=27).

Tabla 23: Número de alumnos que resolvieron el problema de triángulos oblicuángulos en el primer parcial de Matemática I – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 3 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	8	10	4	5	27
No	3	4	3	3	12

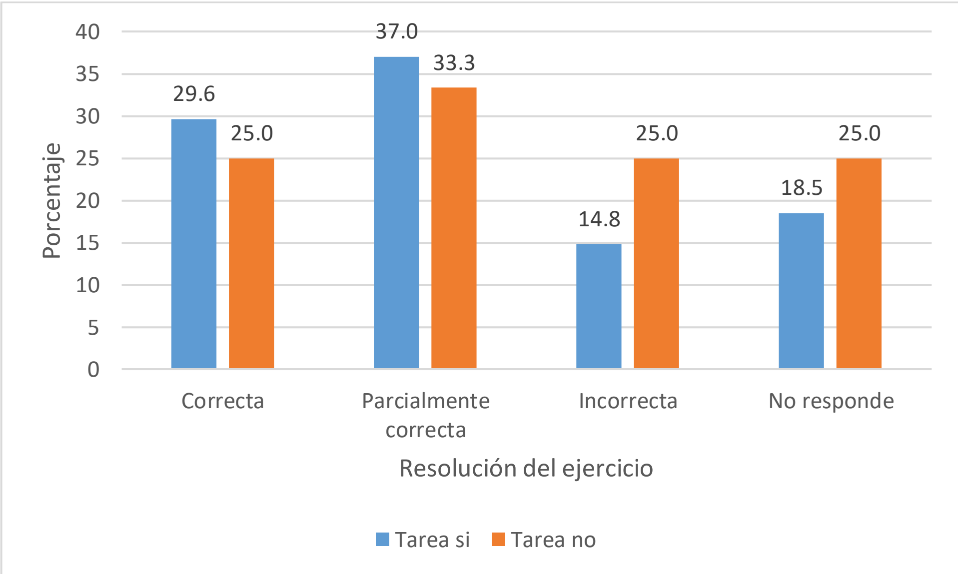


Gráfico 25: Porcentaje de alumnos que resolvieron el problema de triángulos oblicuángulos en el primer parcial de Matemática I – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 3 (n=27) o no (n=12) y la forma de resolución.

Tabla 24: Número de alumnos que resolvieron el de vectores en R^2 en el primer parcial de Matemática I – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 4 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	2	10	3	2	17
No	3	9	5	5	12

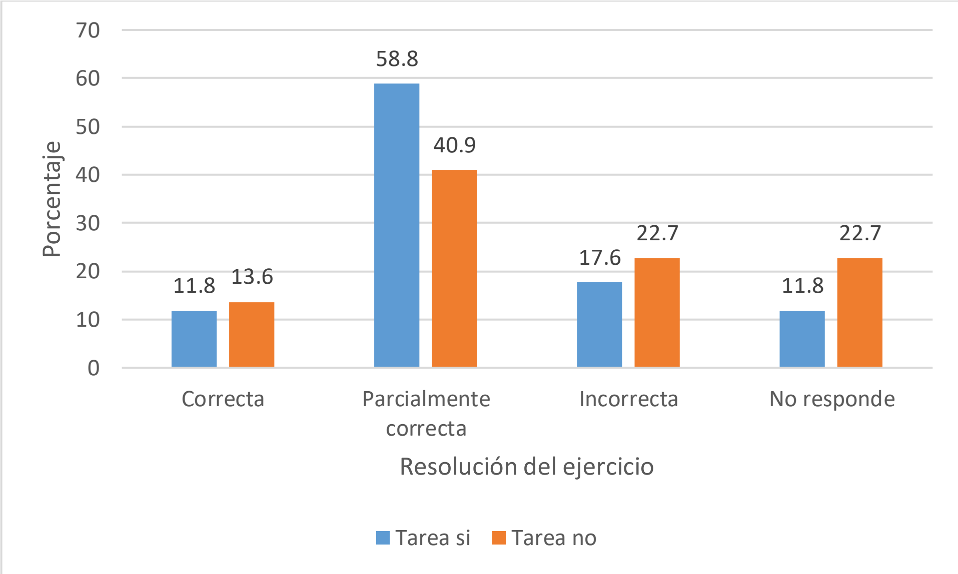


Gráfico 26: Porcentaje de alumnos que resolvieron el ejercicio de vectores en R^2 en el primer parcial de Matemática I – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 4 (n=17) o no (n=22) y la forma de resolución.

Tabla 25: Número de alumnos que resolvieron el de vectores en R^3 en el segundo parcial de Matemática I – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 4 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	1	14	1	2	18
No	0	6	6	1	13

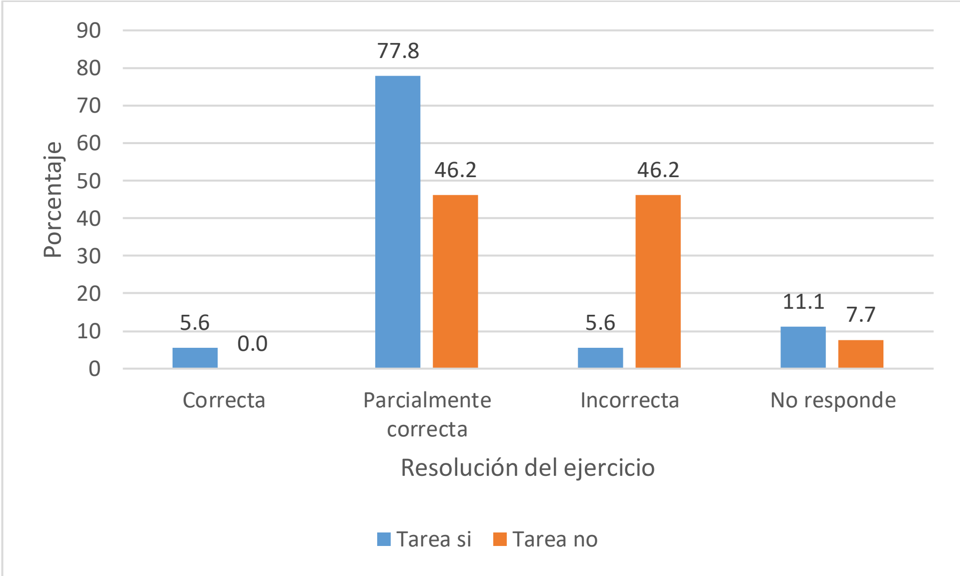


Gráfico 27: Porcentaje Porcentaje de alumnos que resolvieron el ejercicio de vectores en R^3 en el segundo parcial de Matemática I – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 4 (n=18) o no (n=13) y la forma de resolución.

Tabla 26: Número de alumnos que resolvieron el de recta en R^3 y plano en el segundo parcial de Matemática I – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 4 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	3	7	4	4	18
No	0	2	8	3	13

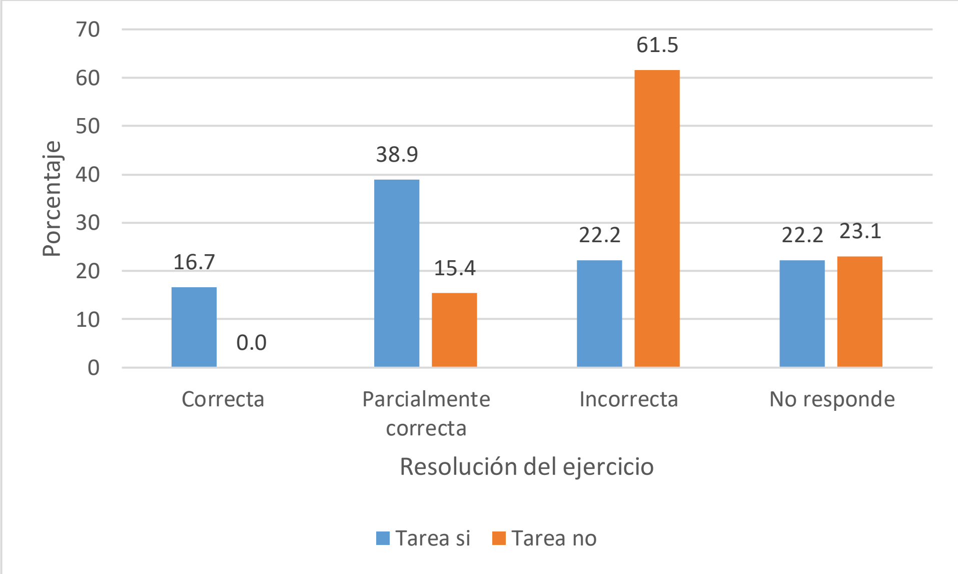


Gráfico 28: Porcentaje de alumnos que resolvieron el ejercicio de vectores en R^3 en el segundo parcial de Matemática I – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 4 (n=18) o no (n=13) y la forma de resolución.

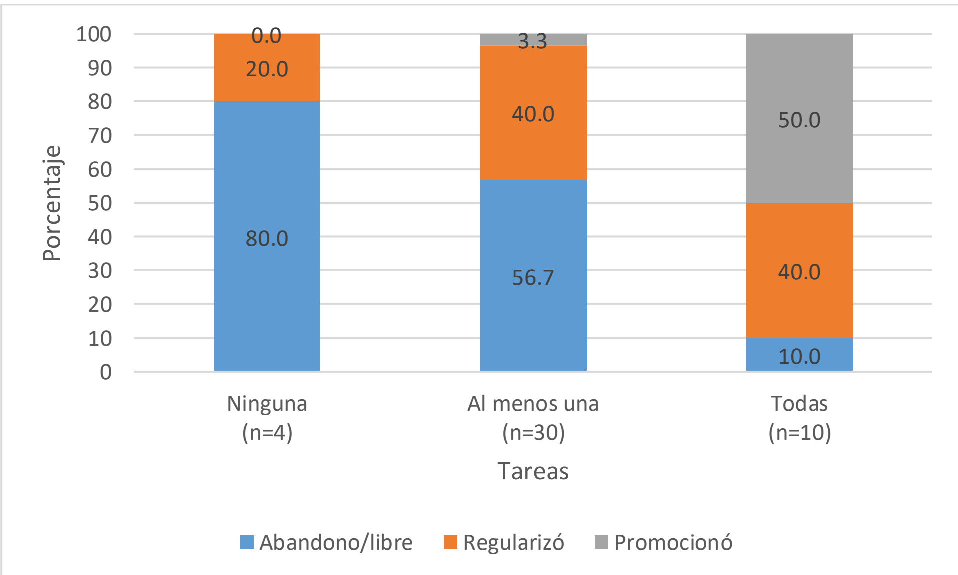


Gráfico 29: Condición final de los alumnos inscriptos en MI agrupados por condición final alcanzada en la asignatura según su participación en la propuesta de tareas.

Tabla 27: Número de alumnos que resolvieron el problema de hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una curva en un punto en el primer parcial de Matemática II – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	5	14	2	0	21
No	3	2	1	1	7

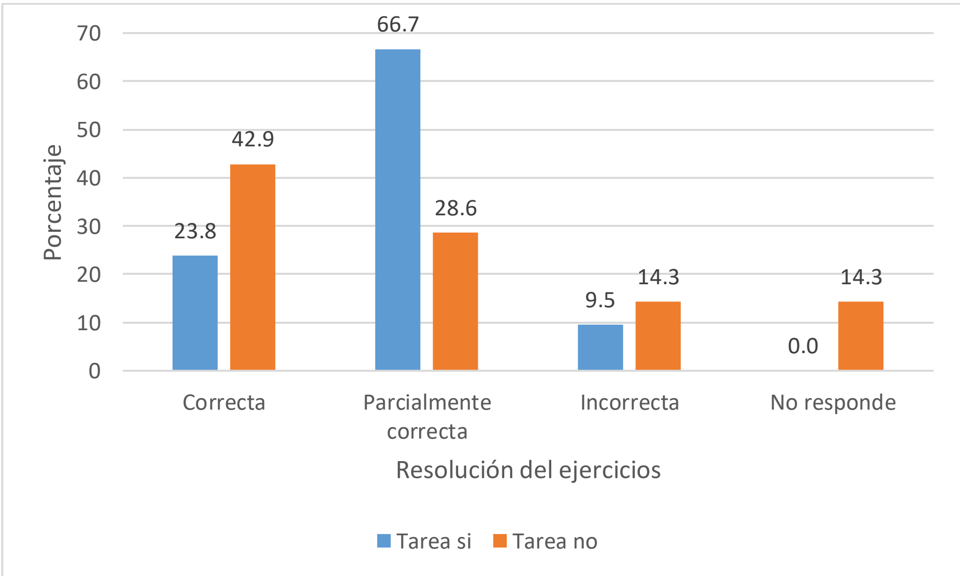


Gráfico 30: Porcentaje de alumnos que resolvieron el problema de hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una curva en un punto en el primer parcial de Matemática II – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 (n=21) o no (n=7) y la forma de resolución.

Tabla 28: Número de alumnos que resolvieron el problema de aplicación física en el primer parcial de Matemática II – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	14	7	0	0	21
No	1	5	1	0	7

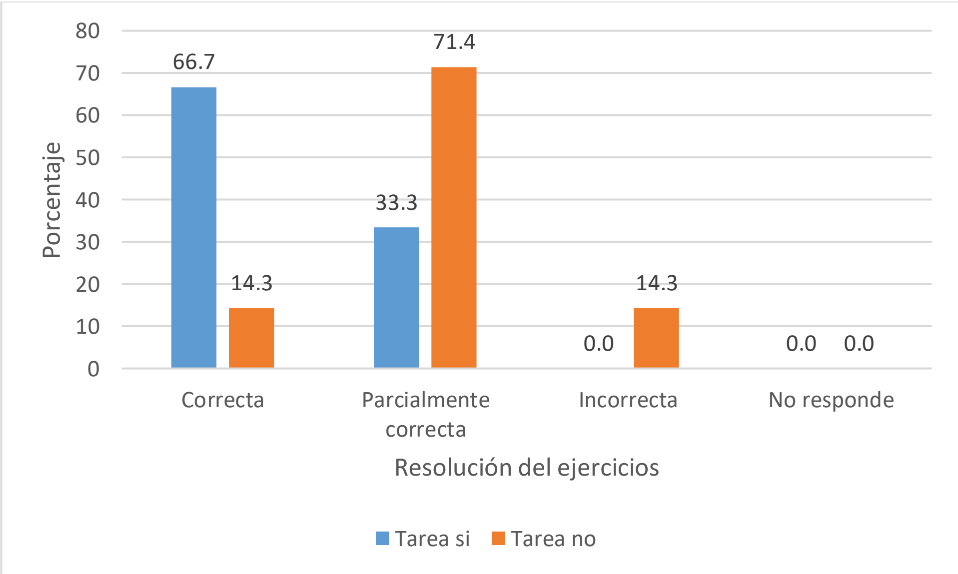


Gráfico 31: Porcentaje de alumnos que resolvieron el problema de aplicación física en el primer parcial de Matemática II – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 (n=21) o no (n=7) y la forma de resolución.

Tabla 29: Número de alumnos que resolvieron el problema de aplicación física en el primer parcial de Matemática II – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	11	4	3	3	21
No	3	3	1	0	7

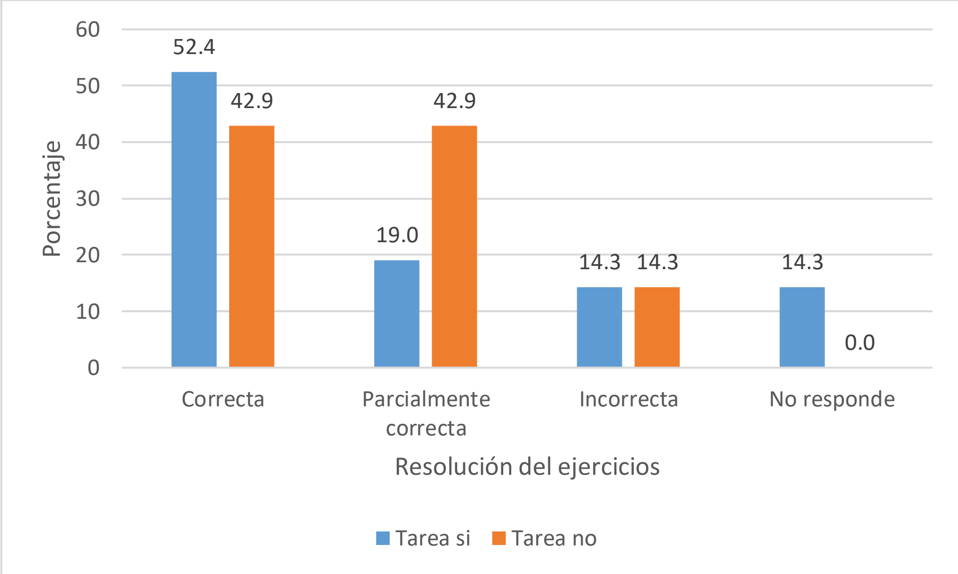


Gráfico 32: Porcentaje de alumnos que resolvieron el problema de optimización en el primer parcial de Matemática II – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 2 (n=21) o no (n=7) y la forma de resolución.

Tabla 30: Número de alumnos que resolvieron el ejercicio de cálculo de una integral doble en coordenadas rectangulares en el segundo parcial de Matemática II – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 4 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	7	12	1	0	20
No	0	3	1	0	4

Tabla 31: Número de alumnos que resolvieron el ejercicio de cálculo de una integral doble en coordenadas polares en el segundo parcial de Matemática II – 2019 agrupados según resolvieron y entregaron la Tarea 4 o no y la forma de resolución.

Resolvió y entregó tarea	Resolución del ejercicio				
	Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta	No responde	Total
Si	3	2	0	10	15
No	0	0	1	0	1

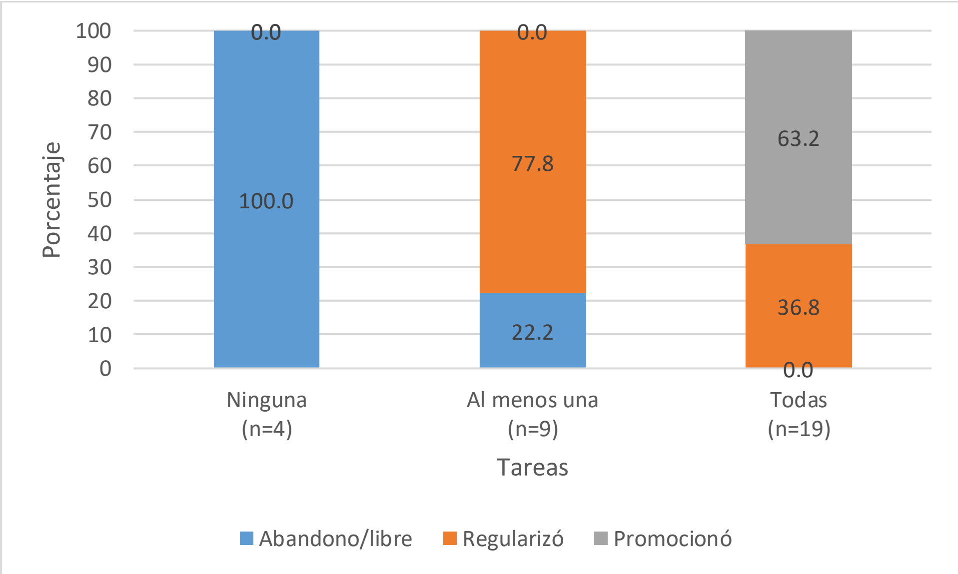


Gráfico 33: Condición final de los alumnos inscriptos en MI agrupados por condición final alcanzada en la asignatura según su participación en la propuesta de tareas.

Transcripción de las respuestas del formulario Google Matemática I – 2019

¿Te resultaron útiles las tareas? - NO

“no me resultaron útiles porque no se tienen en cuenta a la hora de promediar entonces a mí no me sirve hacerlos y que no lo tengan en cuenta”;

“Me resultaron confusas”;

“No podía entender las consignas”

¿Te resultaron útiles las tareas? - SI

“Porque me ayudaron a estudiar”

“Ayudaban a estudiar”

“Porque obligan a practicar los temas dados”

“Porque me ayudó a ver el nivel que tenía en ese tema y que me faltaba reforzar”

“Para práctica general de los temas”

“Era una forma de complementar lo aprendido en clase”

“Adquirir práctica”

"Ayudan a comprender algunos ejercicios que no entendía además que algunos fueron parecidos a los de los parciales"

"Te ayuda a ejercitarte para la prueba y darte cuenta que tema se te dificulta más"

"Me resultaron útiles porque me ayudó a poder resolver los ejercicios de otra manera, ya que en el primero tuvimos la posibilidad de hacerlo con nuestros compañeros y pudimos intercambiar resultados y otras formas de resolverlos"

"Me resultaron útiles para poder darle otro enfoque más dinámico a los ejercicios dados en las clases"

"Obligaban a que repase los contenidos dados en clase"

"Porque sirven como práctica"

"Porque sirven como práctica"

"Me sirvió como auto evaluación"

"Porque pude ver cuáles eran los temas que más me contaban o que no había terminado fe entender"

"para aplicar lo dado en clase"

"Eran de ayuda para ver que preparada para ese tema estabas"

¿Por qué no entregaste todas las tareas?

"los motivos son laborales, le doy prioridad a mi trabajo y otro motivo es que a veces son bastante complicados no son fáciles de comprender"

"Por falta de habito de estudio"

"Falta de tiempo"

"Falta de tiempo y por enfermedad"

"No realice las otras tareas porque desde que me atrasé con un tema me atrasé con los que seguían"

Sugerencias.

"Me resulta interesante la idea de poder hacer tareas a través del entorno porque al dar las respuestas al final de la tarea sirve como auto corrección".

"Creo q hay muy buena predisposición por parte de los profesores de la cátedra, en lo que fallan los alumnos es en la falta de estudio y motivación a la hora de estudiar. Las tareas realizadas fueron de gran ayuda para la mayoría quienes supieron aprovechar esa herramienta a la hora de estudiar".

“Acordar un horario en el que todos podamos cuando se tienen que hacer las tareas por entorno virtual”.

“En mi punto de vista, a mí me ayudó muchísimo el que nos reunamos con Jose y nos ayude a resolver los ejercicios e interpretar las consignas, sobre todo en las primeras instancias ya que a lo primero tenemos temor a la hora de preguntar delante de todos en la clase. En cambio, si nos juntamos y lo charlamos entre todos, me parece que es más fácil poder realizar las tareas”.

“Más tareas online en tiempo real seria de mucha ayuda”

“Me gustaron las tareas, pero las correcciones muchas veces eran muy rápidas y no llegaba a entender mis errores”.

“Material de apoyo para las tareas”.

“Que sean ejercicios parecidos a los que se evalúan en los parciales”.
“ninguna”.

Transcripción de opiniones de Matemática II

¿Las tareas, te resultaron útiles? - SI

“Porque te asimilan un poco lo que pueden llegar a ser los ejercicios de examen”

“Me ayudaron a prepararme para los parciales y entender cómo pensar los ejercicios”

“Me obligaban a ponerme a estudiar los temas dados en clase y ver qué temas tenía que repasar más”

“Me resultaron útiles porque era una preparación previa al examen parcial. Los ejercicios eran distintos a los de clases, donde la respuesta o la resolución no estaba tan explícita y eso nos ayudaba a también tener que ejercitar un poco más la mente y procesar de otra manera los contenidos.

“Me resultaron útiles porque me ayudaron a ver en qué temas me faltaba estudio”

“Porque me ayudaron a estudiar”

“Me resultaron útiles para comprender mejor los temas, aparte de que lo tomé como una auto evaluación para saber cómo estaba con los temas vistos “

“Aplicaban los contenidos y me servían para estudiar”

“Me hicieron llevara materia al día. Además, para saber qué tema me costaba”

“Porque me ayudaron a llegar bien a los parciales”

“Para practicar sobre todos los temas y llevar una guía de los temas importantes”

"Porque me sirvió como forma de estudio"

“Una muy buena forma de llevar al día los ejercicios dados en clases y entender para que nos sirven (sus aplicaciones)”

“Fueron ejercicios interesantes y de nivel para practica”

“Como práctica”

“Me ayudaron a entender los ejercicios y a estudiarlos”

WhatsApp

"Te sacaban la duda de todo lo que necesitabas"

"Uno de los beneficios fue recibir una respuesta inmediata y no tener que esperar hasta los días de consulta"

"Sacarme dudas que tenía"

"Era un medio de comunicación más rápido que el mail o el entorno virtual"

"Me ayudó a sacarme las dudas rápidamente"

"Acceso rápido a los profesores"

Uso del EV

"Me permitió seguir el cursado de matemática xq tenía toda la información y tareas ahí"

"Accedía rápido a el material que subían los profesores"

"Las tareas online"

"Poder tener acceso al material de estudio y a las tareas, resolver cuestionarios online"

"Me benefició al momento de prepararme para el parcial"

"Tenés todo el contenido ahí, y podes decargártelo de forma digital, además se pueden hacer consultas"

"Para comunicarme con la profesora y bajar los documentos que publicaban"

"Material de estudio y poder consultar las notas"

"Sirve mucho para estar comunicados con los docentes y para la descarga de archivos con ejercicios o teoría sobre los temas"

"Las tareas de múltiple opción vía entorno fueron de utilidad!!"

"Alcance desde mi casa a los ejercicios de tarea además de los resúmenes en pdf subidos por la profesora"

"No muchas, solo lo usaba para ver las tareas"

Sugerencias

"Pondría algunos ejemplos en el entorno para poder identificar el modo de resolverlas, pero en general es muy buena la implementación de tareas y cuestionarios"

"*Lo que propondría es que se tome un poco más de tiempo en explicar las resoluciones de las actividades, porque algunas no llegué a entender"*

"Entregas de tps con nota, que incentiven a los alumnos a resolver problemas de aplicación con respecto a la carrera que estén estudiando"

"Añadiría más cuestionarios online para repasar los diferentes temas"

"Ninguna, me parece muy bien como son propuestas las tareas"

"Me gustaron mucho los cuestionarios online porque te ponen en clima de examen, estaría bueno que se controlen mejor. Y, por otra parte, las demás tareas estaban buenas pero algunos enunciados no se comprendían bien"

"Más ejercicios"

"No se me ocurre una mejora, me sirvió mucho la manera en que nos dieron la materia los profes y ayudante"

"Si es posible que suban los pasos y resultados de las tareas, así uno puede corroborar en qué parte se equivocó"

"Creo que sería bueno desarrollarlas aún más, está muy buena la propuesta de los cuestionarios vía entorno virtual ya que son muy útiles a la hora de estudiar para los exámenes"