

***Las Funciones...
un obstáculo para nuestros alumnos^(*)***

Oviedo, Lina Mónica Ma.^(**)

Resumen

Este trabajo es un estudio comparativo y evaluativo que se enmarca en una investigación más amplia acerca de la enseñanza y aprendizaje de los sistemas dinámicos discretos entre dos grupos de alumnos pertenecientes a los niveles medio y universitario.

En el marco de dicha investigación y como primera etapa se realizó una evaluación diagnóstica sobre ciertos tópicos del tema función, ya que se consideró que dichas nociones eran necesarias para llevar a cabo el trabajo con los alumnos en el aula. Los resultados de dicha evaluación se presentan en este trabajo.

() Parte de este trabajo fue presentado en la Reunión de Educación Matemática UMA 2003.*

*(**) Docente del Departamento de Matemática de la Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas (UNL).*

Introducción

El presente artículo es un estudio particular dentro de los diseños estadísticos tradicionalmente conocidos en el área de educación matemática. El mismo analiza las dificultades que presentan dos grupos de alumnos pertenecientes a niveles distintos de la educación argentina, medio y universitario respectivamente, acerca del concepto de función.

Este informe se ubica dentro de una investigación acerca del aprendizaje de los sistemas dinámicos y las dificultades cognitivas que acarrearán con respecto a determinados conceptos, lo que constituye un trabajo de tesis de maestría.

El objetivo de dicha investigación es obtener información en forma cualitativa y cuantitativa de dos grupos de alumnos, pertenecientes a distintos niveles de la enseñanza, acerca de los conceptos que poseen sobre nociones relacionadas al tema función, con la finalidad de contribuir en el trabajo con los sistemas dinámicos discretos.

Descripción de la experiencia

Este trabajo consistió en la elaboración y posterior puesta en obra de una evaluación diagnóstica acerca del tema funciones ya que el conocimiento de los alumnos sobre este tema era muy importante para lo que se iba a desarrollar de allí en adelante.

En la misma se hizo hincapié en la representación gráfica de funciones, en la relación que existe entre la gráfica de una función y la ecuación algebraica que la representa, ambas son representaciones distintas de un mismo objeto matemático y el verdadero aprendizaje se logra cuando se puede interactuar con diferentes representaciones semióticas. Se trabajaron, además, los subconceptos del concepto de función: dominio y conjunto imagen. Los motivos por lo que se consideraron estos conceptos y estas representaciones (gráfica, escritura simbólica, lengua natural, etc.) fueron que los mismos eran necesarios para llevar a cabo el posterior desarrollo del tema iteración.

Marco teórico

Se trabajó dentro de la perspectiva teórica de las construcciones mentales que está basada en el concepto de abstracción reflexiva de Piaget. Los invariantes en la construcción del conocimiento matemático son: acciones, procesos, objetos y esquemas y los elementos escogidos, en este trabajo, tienen en cuenta la evolución adaptativa del conocimiento ante una situación.

Descripción de la muestra

Los alumnos que constituyeron ambos grupos fueron elegidos aleatoriamente. A los mismos se les informó acerca de las características del trabajo, se les explicó que el mismo consistía en la comprensión de nociones básicas del tema función y que para ello debían llevar a cabo una evaluación y estuvieron de acuerdo en colaborar. Se escogieron dos escenarios a fin de comparar y contrastar la información obtenida; ellos fueron: la Facultad y la Escuela Media.

El primer grupo, denominado grupo avanzado, estuvo constituido por 10 alumnos universitarios, de ambos sexos, de las carreras: ingenierías Química, Industrial y en Alimentos, y Licenciatura en Biotecnología, quienes ya habían aprobado los cursos de matemática de sus respectivos currícula. Los mismos accedieron a colaborar voluntariamente, dedicándole parte del escaso tiempo del que disponían ya que se encontraban cursando diversas materias de sus respectivas carreras. La edad promedio de este grupo era 20 años y se partió del supuesto de que poseían los conocimientos suficientes en álgebra y cálculo.

El segundo grupo, denominado grupo novato, estuvo constituido por 13 alumnos, de sexo femenino, que cursaban el último año de la enseñanza media en la terminalidad Perito Mercantil y que pertenecieron a la misma división durante los cinco años de estudios, es decir eran compañeras desde primer año. La edad promedio del mismo era 17 años y se partió del supuesto de que sus conocimientos matemáticos eran los adecuados para alumnos que se encontraban en ese nivel.

Objetivos de la evaluación diagnóstica

Los objetivos planteados en la evaluación fueron comprobar si el alumno era capaz de:

- *Reconocer funciones representadas en distintos registros.*
- *Clasificar algunas de las funciones representadas gráficamente en lineales o cuadráticas.*
- *Indicar el dominio y el conjunto imagen de determinadas funciones.*
- *Señalar en la gráfica los puntos de intersección de dos funciones.*
- *Calcular, analíticamente, los puntos de intersección de las gráficas de dos funciones.*
- *Encontrar, dado un determinado valor del dominio, el valor de la imagen.*
- *Encontrar, dado un cierto valor de la función, cuál o cuáles eran sus preimágenes.*
- *Pasar de una representación semiótica a otra sin dificultad.*

Descripción de la evaluación

En la siguiente tabla se presentan las características principales del cuestionario y el tipo de tarea solicitada.

Item	Cuestionario	Presentación	Tarea solicitada
1	Diagramas que representan funciones.	Diagrama de Venn	Identificar diagramas que representan funciones.
2-I	Gráficas de funciones.	Curvas en el plano	Identificar gráficas que representan funciones.
2-II	Clasificación de funciones.	Gráfica	Reconocer las funciones lineal y cuadrática.
3-a	Reconocimiento de funciones.	Gráfica y algebraica	Relacionar la gráfica con las ecuaciones correspondientes.
3-b	Subconceptos del concepto función: dominio e imagen.	Verbal	Identificar los conjuntos dominio e imagen.
3-c ₁	Determinación gráfica de la Intersección de curvas que representan funciones.	Gráfica	Señalar los puntos de intersección de las gráficas de funciones.
3-c ₂	Formulación verbal de intersección de funciones.	Verbal	Explicar qué significa que las gráficas de dos funciones se intersecten.
3-c ₃	Determinación analítica de la Intersección de curvas que representan funciones.	Algebraica	Operación con funciones para determinar punto de intersección.
3-d	Evaluación de funciones.	Algebraica	Dados determinados valores numéricos, calcular el valor de la función para los mismos.
3-e	Determinación preimagen de una función.	Algebraica	Dado el valor de la función, determinar los posibles valores de los puntos del dominio.

Dificultades

Los errores más comunes en el grupo novato fueron los siguientes:

- **Reconocer una función por su representación gráfica.**
- **Identificar gráficamente funciones lineales y cuadráticas.**
- **Determinar el dominio de una función.**
- **Determinar el conjunto imagen de una función.**
- **Determinar gráficamente los puntos de intersección de dos funciones.**

- Resolver un sistema de ecuaciones no lineales.
- Determinar, gráficamente, la preimagen de una función.

El grupo avanzado evidenció poseer un manejo deficiente de las “herramientas necesarias” para identificar cuándo una gráfica representaba a una función. En el resto de las actividades manifestó un dominio adecuado del tema.

Análisis estadístico de los resultados de la evaluación diagnóstica

Los datos de los tres tipos de evaluaciones fueron procesados con el software SPSS Statistical Program for Social Sciences V.10.0 for windows.

Justificación de las técnicas utilizadas

Todas las pruebas utilizadas en este trabajo son clásicas en el área educativa (Brousseau, 1993; Batanero, 2000, doc. 6)

Las técnicas estadísticas que usamos son pruebas de normalidad de Kolmogorov-Smirnov; de Levene de Homogeneidad de variancias; t para muestras independientes; no paramétrica de Mann Whitney para muestras no pareadas; c^2 (chi cuadrado) para proporciones de variables aleatorias binomiales.

Se observan en la Tabla 1 y Gráfico 1 que existen diferencias significativas en el número de respuestas correctas en todos los casos, con excepción de las preguntas: 1, 2.1, 3.a, 3.c₂.

No Significativas (N.S.)

Cabe un párrafo especial para la pregunta 2-1. Se evidenció dificultad para reconocer una función por su representación gráfica. Solamente una alumna, perteneciente al grupo novato, identificó correctamente cuáles eran funciones y cuáles no, pero sin justificar. El error más frecuente: identificar las gráficas de cónicas y $x = 2$ como gráficas de funciones.

Significativas

Cuatro de las preguntas tienen en el grupo novato un 0 absoluto versus un 100% en el grupo experto.

Precisamente estas 4 preguntas se referían a conceptos relativos al estudio de funciones que se debieron estudiar en cursos anteriores de la escuela media.

Ante el bajo porcentaje de respuestas correctas en el grupo avanzado de la pregunta 2-1 y los 0 ya mencionados en el otro grupo se realizó un análisis de cada una de estas preguntas, calificándolas, ver Tabla 2, en 4 grupos: No Contesta (NC), Incorrecta (I), Parcialmente Correcta (PC) y Correcta (C).

De esta manera puede visualizarse que, si bien en el grupo novato ninguno respondió correctamente la pregunta 2-II, 10 la respondieron parcialmente bien. La pregunta 3.b que se refiere al estudio de Dominio y Conjunto Imagen de una función, los 11 que intentaron realizarla lo hicieron en forma incorrecta y 2 no contestaron, evidenciando desconocimiento del tema. Hecho que se repite en la pregunta 3.c₃ en donde la totalidad de los participantes no respondieron. La pregunta 3-e, búsqueda de pre-imágenes, si bien 8 no la realizaron, 5 la contestaron parcialmente, dado que encontraron la pre-imagen de la función lineal no sabiendo hacer la referida a la función cuadrática.

En el grupo avanzado la pregunta 2-I, si bien tiene un 0 en la Tabla 1, dado que ninguno la respondió correctamente, 8 sobre 10 lo hicieron de forma parcialmente correcta. Esto daba indicios de diferencias de nivel en conocimientos acerca del tema de funciones en ambos grupos. En base a esto se les asignó el siguiente puntaje a las preguntas: NC:0; I:1; PC:2; C:3. A partir de esta asignación se comparó el puntaje promedio por preguntas de los dos grupos (Tabla 3).

Comparada la media de ambos grupos mediante test-t de student para muestras independientes, considerando varianzas distintas según el resultado de la prueba de Levene, se establece que existen diferencias altamente significativas en el comportamiento promedio de ambos grupos ($p = 0,006$), siendo mayor el rendimiento en el grupo experto lo que se evidencia en el Gráfico 1, en el que puede verse la mayor dispersión de los resultados con respecto a la media en el grupo novato y el no solapamiento de los intervalos, lo que evidencia diferencias importantes entre los grupos, hechos que concuerdan con el resultado del test-t.

Síntesis

Existían, en el grupo novato, dificultades en:

- 1. Identificar una función por su representación gráfica.*
- 2. Clasificar una función.*
- 3. Ver al Dominio y la Imagen como conjuntos, los confunden con puntos aislados, por ejemplo: en la función lineal la imagen de la abscisa al origen es la ordenada al origen. Algo similar ocurre para la función cuadrática.*
- 4. Determinar la imagen de la función cuadrática.*
- 5. Determinar la preimagen de la función cuadrática.*
- 6. Determinar analíticamente los puntos de intersección de dos funciones.*
- 7. Resolver sistemas de ecuaciones lineales y no lineales.*

Conclusión

Las dificultades detectadas en la evaluación diagnóstica revelaron que algunos alumnos no resolvían determinadas cuestiones por carecer de los conocimientos necesarios para llevarlas a buen término. No obstante lo cual se consideró, en general, que podían llevar a cabo la próxima actividad.

Resumen de los resultados

Tabla 1: Porcentaje de respuestas correctas

	Grupo Novato (n=13)	Grupo Experto (n=10)	P*
P1	10 (77%)	10 (100%)	NS
P2 - I	1 (8%)	0 (0%)	NS
P2 -II **	0	8 (80%)	0.0001
P3-a	13 (100%)	10 (100%)	NS
P3-b **	0	10 (100%)	0.00700
P3-c1 **	6 (46%)	10 (100%)	0.00700
P3 - c2	12 (92%)	10 (100%)	NS
P3 - c3 **	0	10 (100%)	0.000001
P3 - d **	5 (38%)	10 (100%)	0.00300
P3 - e **	0	10 (100%)	0.000001

*Nivel de significancia exacta de Fisher para la prueba de proporciones recomendada por Epi Info 2000 ya que hay celdas con frecuencias esperadas menores que 5.

** Diferencias estadísticas altamente significativas.

Gráfico 1: NS: No significativo al 5%.

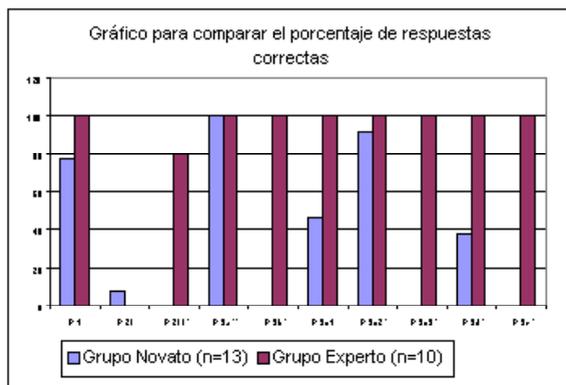


Tabla 2: Distribución de las respuestas en cada Grupo

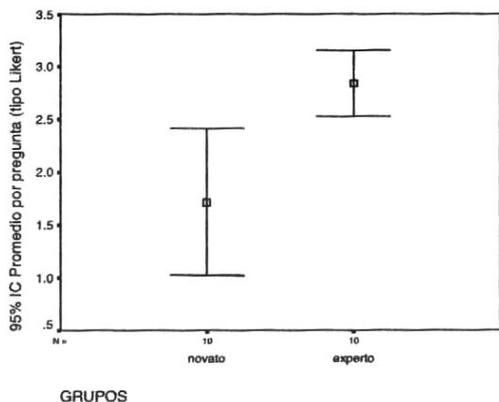
	Grupo Novato (n=13)				Grupo Avanzado (n=10)			
	NC (0)	Inc(1)	PC (2)	C (3)	NC (0)	Inc(1)	PC (2)	C (3)
P1	0	3	0	10	0	0	0	10
P2 - I (a)	3	0	9	1	2	0	8	0
P2 -II	0	3	10	0	0	0	2	8
P3-a	0	0	0	13	0	0	0	10
P3-b	2	11	0	0	0	0	0	10
P3-c1	0	4	3	6	0	0	0	10
P3 - c2	0	1	0	12	0	0	0	10
P3 – c3	13	0	0	0	0	0	0	10
P3 – d	5	0	3	5	0	0	0	10
P3 – e	8	0	5	0	0	0	0	10

Tabla 3: Puntaje promedio por pregunta, para buscar diferencias entre los grupos:

Evaluación diagnóstica

	Grupos	n: cantidad de preguntas	Media	Desviación estandar	Error estándar
Promedio	novato	10	1.7174	.9670	.3058
	experto	10	2.8400	.4402	.1392

Gráfico 2: Intervalos de confianza del rendimiento promedio para ambos grupos (nivel de confianza 95%).



Agradecimientos

A los Dres. Hugo Aimar y André Rouchier, a la MSc Elena F. De Carrera y a la Lic. Stella M. Vaira.

Bibliografía

- **Batanero, Carmen.** 2001. "Etapas principales en el proceso de investigación educativa." Documento n° 1 de trabajo para el curso de doctorado: Diseño de investigaciones educativas en Ciencias y Matemáticas. Universidad de Granada. España.
- **Bloch, Isabelle.** 2000. *L'enseignement de l'analyse á la charniere lycée/ université. Savoirs, connaissances et conditions relatives á la validation.* These de la Universite Bordeaux 1. France.
- **Bloch, Isabelle.** 1999. "L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu-connaissances et savoirs". Recherches en Didactique des Mathématiques. *La Pensée Sauvage.* Vol 19/2, pág. 135- 194.
- **Duval, Raymond.** 1998. "Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento". *Investigaciones en Matemática Educativa II.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- **Godino, J.D., Batanero, C.** 1998. *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Pasos hacia una teoría del significado y la comprensión en Didáctica de la matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España.
- **Hitt Espinoza, F.** 1996. "Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos". *Investigaciones en Matemática Educativa.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.