

Una aproximación a la noción de infinito a través de la curva de Von Koch

Oviedo, Lina Mónica * ** | Kanashiro, Ana María * |
Benzaquen, Mónica Patricia *** | Gorrochategui, Mónica ***

Resumen

El trabajo con el fractal “copo de nieve” (curva de Von Koch) posibilita un acercamiento a la noción de infinito. La construcción de dicha curva facilita una aproximación entre las estructuras analíticas y las estructuras gráficas. Las mismas, a través de procesos iterativos, repiten infinitamente pasos infinitos y permiten obtener una figura autosemejante.

La visualización de estos objetos permiten la comprensión de los procesos de cambio de acuerdo a la transformación de la misma figura como así también cuestionarse el porqué de dicho cambio y si el mismo es o no controlable.

Este trabajo presenta una experiencia realizada con cuatro grupos de alumnos provenientes de dos escuelas santafesinas y pertenecientes a noveno año de la Educación General Básica y a primer año de la Educación Polimodal. En el mismo se investiga la construcción de la noción de infinito mediante la elaboración del fractal “copo de nieve”. Se analizan los resultados.

Palabras clave: noción de infinito - curva de Van Koch

Instituciones: Facultad de Ingeniería Química, UNL (*); Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas (**); Escuela de Enseñanza Media Particular Incorporada N° 8106 “Don Bosco” (***)
Dirección electrónica: loviedo@fiqus.unl.edu.ar; akanashi@fiqus.unl.edu.ar

Introducción

La curva de Koch es un fractal que se genera considerando un segmento al que se le asigna longitud unidad y, siguiendo el presente algoritmo:

Nivel 0



Se divide un segmento unitario, en tres partes iguales y se construye un triángulo equilátero sobre el segmento central, suprimiéndose la base del mismo. Queda así formada una poligonal de 4 lados (Nivel 1).

Nivel 1

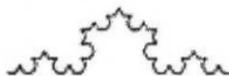


Nivel 2



Si se repite nuevamente el procedimiento sobre cada lado de la poligonal se genera una nueva poligonal de 16 lados (Nivel 2).

Nivel 3



En el Nivel 3 se obtiene una poligonal de 64 lados y en el Nivel 4, 256.

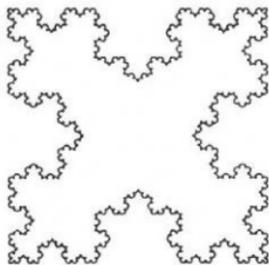
Nivel 4



En el Nivel n el número de lados de la poligonal será $4n$.

Para construir el fractal "copo de nieve" se comienza con un triángulo equilátero de longitud 1. Se aplica el algoritmo para construir la curva de Von Koch en cada uno de sus lados una y otra vez. La curva copo de nieve es la que resulta de repetir este procedimiento indefinidamente.

En la figura puede observarse la curva obtenida después de un número finito de iteraciones.



Objetivo de la investigación

Obtener información en forma cualitativa de dos grupos de alumnos, pertenecientes a distintos niveles de la enseñanza acerca del concepto que poseen sobre la noción de infinito.

Descripción de la Experiencia

Este trabajo consistió en la elaboración y posterior puesta en obra de una guía de autoaprendizaje acerca de la construcción de la curva copo de nieve (fractal de Von Koch).

En la misma se hizo hincapié en la construcción geométrica del fractal de Von Koch. Se trabajaron, además, las nociones de perímetro, área, límite finito e infinito.

Con todos los grupos se trató de buscar una expresión analítica para el cálculo del perímetro, analizar la evolución del mismo cuando n crece indefinidamente y ver qué ocurre con el área.

Marco Teórico

Se trabajó dentro de la perspectiva teórica de las construcciones mentales, basada en la teoría psicogénética de Jean Piaget (1896-1980). Esta teoría concibe el desarrollo evolutivo como un proceso de construcción de estructuras de pensamiento que van desde la lógica concreta a la lógica abstracta, determinando lo que J. Piaget identifica como los distintos estadios por lo que un sujeto atraviesa. Nuestros alumnos se encuentran en la etapa de las operaciones formales (desde los 14 -15 años), etapa que constituye el último peldaño en el desarrollo evolutivo. Esta etapa se caracteriza por el desarrollo de un pensamiento formal, tanto funcional como estructural, y consiste en trasponer lo concreto a un nuevo plano del pensamiento. De esta manera, son capaces de razonar con base en enunciados e hipótesis, no sólo con lo que tienen a su alcance,

sino también mediante la aplicación de la lógica de proposiciones. Este es el concepto de abstracción reflexiva en el cual se basa este trabajo.

J. Piaget es reconocido como el “padre del constructivismo” y como en este trabajo se han tenido en cuenta los siguientes parámetros: acciones, procesos, objetos y esquemas, y los elementos escogidos hacen a la construcción del conocimiento matemático, es válido recordar las ideas fundantes que caracterizan a este paradigma y que pueden resumirse del siguiente modo:

- El conocimiento está relacionado al proceso de adaptación, ya que a través del conocimiento de las cosas que nos rodean, vamos construyendo la noción del mundo y como adaptarnos a él.

- El sujeto nace con una serie de capacidades que al interactuar con la realidad le permiten desarrollar la inteligencia, incorporando esta realidad y acomodando o modificando los esquemas previos, ampliándolos o creando nuevos.

- El sujeto conoce la realidad a través de los mecanismos propios que él tiene.

- En el proceso de desarrollo del sujeto, éste construye representaciones internas de la realidad de manera de anticiparse o explicar lo que sucede. Por lo tanto, se considera que el conocimiento está situado en el interior del sujeto y que es producto de un proceso.

- El constructivismo consiste en un cambio de ideas previas por otras más formales o científicas, es una posición respecto a los mecanismos del conocimiento, basado en la interacción sujeto-objeto para construir saberes.

Descripción de la muestra

Se trabajó con cuatro grupos de alumnos, entre los años 2002 y 2004. A los mismos se les informó, previamente, acerca de las características del trabajo, se les explicó que debían construir una figura geométrica de determinadas características y contestar ciertas preguntas relacionadas a la construcción de la misma. En todos los casos estuvieron de acuerdo en colaborar y mostraron una excelente predisposición para hacerlo.

Los alumnos dispusieron de dos clases de 80 minutos cada una, excepto los alumnos del Grupo 2 que llevaron a cabo la actividad en una sola clase por razones organizativas.

Característica de los grupos:

Grupo 1: 33 alumnos, 15 varones y 18 mujeres correspondientes al noveno año de E.G.B. de la Escuela n° 442.

Grupo 2: 20 alumnos varones correspondientes al noveno año de E.G.B. de la Escuela n° 8106.

Grupo 3: 22 alumnos, 10 mujeres y 12 varones correspondiente al primer año Polimodal de Comunicación, Arte y Diseño de la Escuela n° 442.

Grupo 4: 27 alumnos, 8 varones y 19 mujeres correspondiente al primer año Polimodal de Ciencias Naturales de la Escuela n° 442.

Objetivos del trabajo

Los objetivos planteados en la hoja de actividades fueron comprobar si el alumno era capaz de:

1. Construir el fractal "copo de nieve" siguiendo un algoritmo determinado.
2. Analizar la variación del perímetro en cada etapa de la construcción.
3. Generar la sucesión de los perímetros.
4. Encontrar la fórmula de recurrencia para el perímetro.
5. Determinar el comportamiento para n grande, siendo n el número de etapa.
6. Analizar la variación del área.
7. Determinar la convergencia o no de las sucesiones

Descripción de la guía

En la siguiente tabla se presentan las características principales y el tipo de tarea solicitada en cada uno de los ítems.

Ítem	Tarea solicitada	Técnica empleada	Dispositivo	Gesto
a	Construir la curva "copo de nieve" hasta la etapa 3.	Geométrica	Hoja de papel cuadriculada.	Trazar segmentos iguales.
b	Determinar el n° de segmentos en cada etapa. Determinar la fórmula de recurrencia para la etapa n .	Geométrica. Numérica	Lápiz. Regla. Gráfica construida en el ítem a. Tabla de valores.	Contar segmentos en cada etapas y registrarlos en una tabla. Inferir el número de segmentos para las etapas posteriores.
c	Determinar la constante multiplicativa de una etapa a otra.	Numérica	Tabla de valores	Analizar los valores registrados en la tabla. Calcular la constante.
d	Analizar la variación de la figura cuando el proceso se repite indefinidamente.	Geométrica. Numérica.	Gráfica. Tabla de valores.	Analizar como evoluciona la sucesión generada en el ítem b y registrada en la tabla de valores.
e	Determinar el valor del perímetro hasta la quinta etapa y generalizar para la etapa n .	Geométrico Numérico	Gráfica. Tabla de valores.	Calcular el valor del perímetro. Registrar los valores obtenidos en una tabla.
f	Determinar la constante multiplicativa de una etapa otra.	Numérico	Tabla de valores	Analizar los valores registrados en la tabla. Calcular la constante.
g	Determinar a que valor tiende el perímetro del fractal copo de nieve.	Geométrico Numérico	Gráfica. Tabla de valores.	Determinar la tendencia del valor del perímetro cuando n aumentaindefinidamente.
h	Analizar, de manera intuitiva, qué ocurre con el área.	Geométrico	Gráfica	Determinar la tendencia del valor del área cuando n aumentaindefinidamente.

Análisis de las respuestas

I- Alumnos de EGB

- No tuvieron dificultades para construir la figura. El grupo 1 realizó la construcción de la misma hasta la etapa 3, en cambio el grupo 2 desarrolló sólo dos etapas, por falta de tiempo.
- Encontraron los términos de la sucesión generada por los números de segmentos en cada etapa.
- Encontraron el término general (enésimo) de dicha sucesión.
- Determinaron la constante multiplicativa para pasar de una etapa a otra en la determinación del número de segmentos.
- Generaron la sucesión de los valores de los perímetros hasta la etapa enésima. No pudieron encontrar la expresión general por sí solos y hubo que orientarlos.
- Hallaron, sin dificultad, la constante multiplicativa para el cálculo del perímetro de una etapa a la otra.
- Determinaron la tendencia del valor del perímetro cuando n aumenta indefinidamente.
- No pudieron determinar, en la gran mayoría de los casos, qué ocurre con el área.

Consideraciones generales acerca de las respuestas

Al ser interrogados sobre la tendencia del perímetro cuando n aumenta indefinidamente, la gran mayoría de los alumnos manifestó que el mismo crece y crece sin llegar a un valor determinado, en el grupo 1 algunos alumnos expresaron que el perímetro no tendrá fin y otros que tendía a infinito. Cuando se los interrogó acerca de lo que esto significaba, manifestaron que era algo "muy pero muy grande" o lo asociaron a algún fenómeno físico, por ejemplo: "el espacio es infinito".

Casi todos los alumnos de los dos grupos no pudieron explicar qué sucedía con el valor del área. Salvo dos o tres alumnos de ambos grupos, todos manifestaron que el valor del área era finito. En el trabajo con el grupo 1 se les propuso encerrar la figura generada en la iteración 3 dentro de un cuadrado y se les pidió que observaran y analizaran cómo evolucionaba la figura interior, se los interrogó si en algún momento la figura saldría fuera del cuadrado y ver si podían sacar conclusiones. La mayoría no lo pudo hacer.

II- Alumnos de Polimodal

- No tuvieron dificultades para construir la figura hasta la tercera etapa.
- Encontraron los términos de la sucesión generada por los números de segmentos en cada etapa.
 - Encontraron, sin dificultad, el término general (enésimo) de dicha sucesión.
 - Determinaron la constante multiplicativa para pasar de una etapa a otra, en la determinación del número de segmentos.
 - La mayoría de los alumnos de ambos grupos generó, sin dificultad, la sucesión de los valores de los perímetros hasta la etapa enésima. A algunos hubo que orientarlos para encontrar la fórmula de recurrencia.
 - Hallaron, sin dificultad, la constante multiplicativa para el cálculo del perímetro de una etapa a la otra.
 - Establecieron la tendencia del valor del perímetro cuando n aumenta indefinidamente.
 - Determinaron, con dificultades, qué ocurre con el área encerrada en la figura.
 - No pudieron generar los términos de la sucesión relacionada con el área.

Consideraciones generales acerca de las respuestas

En cuanto a la tendencia del perímetro, cuando n crece indefinidamente, manifestaron que el mismo tiende a infinito y al ser interrogados acerca de qué significa infinito, en la mayoría de los casos, lo asociaron a un fenómeno físico (infinito potencial). Algunos alumnos pudieron establecer que el área posee un valor límite finito.

Conclusiones

A partir de este trabajo se observa que, en los alumnos de EGB y Educación Polimodal, la noción de infinito no está delineada y existe una tendencia a relacionarla con fenómenos físicos (infinito potencial). En consecuencia existe dificultad en la concepción de dicha noción, lo que requiere un tratamiento especial. La noción de infinito, la idea de algo que crece o decrece sin límite (infinito actual) no es clara para los alumnos.

El trabajo con el fractal copo de nieve es un buen principio para trabajar la noción de infinito asociado con el infinito actual y no sólo con el potencial. La generación de la sucesión infinita asociada al perímetro de la figura aproxima a la noción de divergencia de la misma. Si los alumnos fueran capaces de generar la sucesión asociada al cálculo de las áreas, podrían comparar dos sucesiones

diferentes con tendencias distintas lo que les permitiría concluir que no son de la misma naturaleza.

Consideramos que con este trabajo hemos dado un paso importante para acercar a los alumnos a la siempre conflictiva noción de infinito. Reconocemos que mucho queda por hacer y en esa dirección estamos trabajando en estos momentos.