Cómo identificar los problemas que pueden resolverse mediante una integral definida

Hernández Camacho, Reinaldo
Universidad de Matanzas, "Camilo Cienfuegos", Cuba.

Resumen

Las definiciones existentes de las diferentes operaciones matemáticas, por lo general, tienen como principal objetivo, precisar cómo debe efectuarse el cálculo de cada una de dichas operaciones, pero no siempre esas definiciones resultan lo suficientemente adecuadas para identificar los problemas que requieren ser modelados mediante alguna de esas operaciones. No obstante, existe la posibilidad de dar otras definiciones de esas operaciones matemáticas que faciliten la aplicación de éstas en la resolución de problemas, donde lo que se precise sean las propiedades que debe tener un problema para que éste pueda ser modelado mediante una operación matemática específica.

En este trabajo se presenta una definición con esas características de la integral definida.

A partir de estas ideas se ha generado una metodología para que los estudiantes aprendan a identificar los problemas que pueden resolverse mediante integrales definidas (de forma similar se ha hacho, también, con la derivada de una función real en un punto). Esta metodología ha sido utilizada durante 12 años con estudiantes de la Universidad de Matanzas, obteniéndose muy buenos resultados.

Introducción

En ocasiones, cuando un investigador, de cualquier rama de la ciencia, presiente la posible necesidad de aplicar la integral definida para resolver un problema, totalmente nuevo para él, que se le ha presentado como consecuencia de su investigación, puede que le resulte difícil poder determinar con exactitud si realmente el problema puede resolverse o no mediante una integral definida.

Sucede, que la definición tradicional de integral definida, que tan apropiada resulta para desarrollar todo el contenido teórico y práctico necesario para el cálculo de esas integrales, no tiene las mismas bondades para facilitar la identificación de los problemas que pueden resolverse mediante esa operación, sobre todo si el problema es totalmente nuevo, y más aún, si el investigador no es un gran especialista en Matemática.

Una forma posible de disminuir esa dificultad, consiste en utilizar otra definición alternativa de la integral definida, que sea equivalente a la definición tradicional y que resulte más fácil de aplicar en la identificación de los problemas que pueden ser modelados mediante esta operación matemática.

Con esta idea no se pretende sustituir a la definición tradicional, sino complementarla con otra definición equivalente para ser utilizada solamente en la identificación de los problemas que pueden resolverse mediante una integral definida.

Esta concepción se apoya en el hecho de que un mismo concepto puede estar definido por diferentes conjuntos de propiedades. Los componentes que distinguen a un concepto son su contenido y su extensión. El contenido expresa las propiedades esenciales que tienen en común todos los elementos que pertenecen al concepto y la extensión es el conjunto de todos esos elementos. Dos conceptos son equivalentes si tienen la misma extensión, aunque el contenido puede variar de una definición a otra. En conclusión, los conjuntos de propiedades que se utilicen para definir un mismo concepto pueden ser diferentes en dos definiciones que se den de ese concepto, pero tienen que ser equivalentes, tienen que generar la misma extensión. Por otra parte, para cada operación matemática existe un conjunto de propiedades esenciales que tienen en común todos los problemas que pueden resolverse mediante esa operación. Ese conjunto de propiedades esenciales representan el contenido del concepto asociado a la operación, y el conjunto de todos esos problemas conforman la extensión del concepto.

Material y métodos

Con el objetivo de facilitar en los estudiantes la identificación de los problemas que pueden resolverse mediante una integral definida, se ha elaborado una definición alternativa de este importante concepto matemático. Esta nueva definición, en la que se precisa un conjunto de propiedades que caracterizan al concepto, ha sido empleada con los estudiantes de la Universidad de Matanzas durante 12 años con muy buenos resultados. Experimentos pedagógicos realizados han puesto de manifiesto que los estudiantes incrementan notablemente sus habilidades en la identificación de los problemas que pueden ser modelados mediante una integral definida, cuando aprenden a utilizar esta nueva definición.

Definición alternativa de la integral definida

(Para funciones seccionalmente continuas)

Sea F un conjunto de funciones reales definidas y seccionalmente continuas en todo punto de un intervalo [a,b].

La integral definida de una función $f \in F$ en el intervalo $[a,b]$, se denota $\int_a^b f(x)dx$ y se caracteriza por cumplir las siguientes propiedades:

a) Si f es constante e igual a C en un intervalo $[m,n] \subset [a,b]$, entonces $\int_m^n f(x)dx$ = C (n - m)

b) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [m,n] \subset [a,b]$ y $g \in F$, entonces $\int_m^n f(x)dx \leq \int_m^n g(x)dx$

c) Para toda partición $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots x_p\}$ de $[m,n] \subset [a,b]$ se cumple que:

$$\int_m^n f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{p-1}}^{x_p} f(x)dx$$

Observaciones

- Esta definición alternativa es más apropiada que la definición tradicional para reconocer cuándo puede aplicarse la integral definida en la solución de un problema, pero no lo es para el desarrollo de habilidades en el cálculo de integrales definidas.
- Es recomendable introducir esta definición cuando se vayan a resolver problemas aplicando la integral definida, después que los estudiantes hayan desarrollado habilidades en el cálculo de esta operación.
- La equivalencia entre la definición alternativa que se ha dado aquí y la definición tradicional de integral definida, está contenida en un teorema con su demostración que puede verse en la tesis de doctorado del autor de este trabajo.
- Esta definición permite conformar una caracterización general de todos los problemas que pueden resolverse mediante una integral definida.

Caracterización de los problemas que pueden resolverse mediante una integral definida

Sean: P un conjunto de problemas que pertenecen a un mismo tipo de problemas, S el conjunto de las soluciones de dichos problemas y F un conjunto de funciones reales definidas en puntos de un intervalo $[a,b]$, donde, para cada problema $p \in P$ su solución $s \in S$ está relacionada con una función $f \in F$.

Entonces, la solución s de un problema $p \in P$, que está relacionada con una función $f \in F$ en [a,b], es equivalente a $\int_a^b f(x)dx$ si se cumple que:

a) f está definida y es seccionalmente continua en todo punto del intervalo [*a*,*b*].

b) En ese tipo de problemas, si la función asociada fuera constante en [*a*,*b*]; es decir, si fuera una función g al que g(x)=c para todo $x \in [a,b]$, entonces la solución sería s=c(b-a).

c) La solución s de un problema de ese tipo, en un intervalo [*a*,*b*], no se altera si se realiza cualquier partición de [*a*,*b*] y se toma como solución la suma de las soluciones del problema en cada uno de los subintervalos en que se ha dividido [*a*,*b*].

d) En ese tipo de problemas, cuanto mayor sea la imagen de la función asociada, mayor será la solución s del problema.

Observaciones

• En este trabajo, la expresión *tipo de problemas*, se utiliza con el significado siguiente: Conjunto de problemas, cuyas soluciones están asociadas cada una de ellas a una función real en un intervalo [*a*,*b*], y todos los problemas tienen exactamente las mismas características, con la única excepción de la función asociada, que puede ser diferente de un problema a otro.

• Como ejemplos de tipos de problemas que pueden resolverse mediante integrales definidas están:

a) El área bajo una curva, donde la curva representa el gráfico de una función real continua f, en un intervalo [*a*,*b*], siendo $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [a,b]$.

b) El cálculo de la distancia recorrida por un móvil a partir de su velocidad con respecto al tiempo, estando esa velocidad definida, a su vez, por una función f continua en un intervalo [*a*,*b*].

En ambos casos la expresión de la función f puede variar, siempre que sea integrable.

A continuación se ejemplificará cómo puede utilizarse esta caracterización, en sentido muy general, para determinar si un problema puede resolverse o no mediante una integral definida.

Aplicación de la caracterización en la solución de problemas

Es recomendable que los ejemplos que serán presentados a continuación sean resueltos en elaboración conjunta con los estudiantes.

Analizar si los siguientes problemas pueden resolverse o no mediante la integral definida de la función f en el intervalo indicado.

Ejemplo 1

A partir de los 40 días de nacido y hasta cumplir un año, el aumento en libras por días de un cerdo es $f(x)=0,002x+0,4$, donde x indica la edad en días. ¿Cuántas libras aumenta el cerdo entre los 40 y los 100 días de nacido?

Análisis:

a) La función f está definida y es continua en todo punto del intervalo [40; 100].

b) Si la función asociada fuera constante (si fuera una constante C la cantidad de libras por días que aumenta el cerdo), la solución del problema (la cantidad de libras que aumenta el cerdo en el intervalo [40; 100]), podría obtenerse multiplicando esa constante C por la longitud del intervalo. Es decir, la solución sería: S=C (100-40).

c) Cuanto mayor sea la imagen de la función asociada (la cantidad de libras por días que aumenta el cerdo), mayor será la solución del problema (la cantidad de libras que aumenta entre los 40 y los 100 días de nacido).

d) Si se realiza cualquier partición del intervalo [40;100] y se calcula el aumento en libras del cerdo en cada uno de los subintervalos obtenidos mediante esa partición, la suma de los aumentos producidos en cada uno de los subinter-valos, será siempre igual al aumento total en el intervalo [40;100].

Por lo tanto, en este problema se cumplen todas las propiedades necesarias y suficientes para que su solución pueda obtenerse mediante una integral definida.

$$\therefore S = \int_{40}^{100} (0{,}002x + 0{,}4)dx = 32{,}4$$

El puerco aumenta 32,4 libras entre los 40 y los 100 días de nacido.

Ejemplo 2

Un hombre debe dar 10 viajes para recoger 10 sacos de malanga que se encuentran alineados a igual distancia en un surco. La función $f(x)=20x$ representa la cantidad de metros que debe recorrer el hombre para recoger el saco número x, donde x representa el número de orden del saco. ¿Cuántos metros en total debe recorrer el hombre para recoger los primeros 6 sacos?

Análisis:

a) La función f no es continua en el intervalo [0;6], porque está definida sólo para x=1, 2, ..., 6, y no está definida para los restantes puntos del intervalo [0;6].

Basta que se incumpla una de las propiedades para que la solución no pueda obtenerse mediante la integral definida de la función f en el intervalo dado. Por lo tanto, la solución de este problema no es equivalente a $\int_0^6 20x\,dx$.

No obstante, para las restantes propiedades se tiene lo siguiente:

b) Considerando, por ejemplo, el intervalo [2; 2], en donde la función f es constante e igual a 40. La solución del problema en este intervalo (la cantidad de metros que debe recorrer el hombre para recoger el saco número dos, que es el único que está en ese intervalo), es precisamente 40. Pero esa solución no puede obtenerse multiplicando la constante 40 por la longitud del intervalo, pues esa longitud es cero. No se cumple, entonces, esa propiedad.

c) Cuanto mayor sea la imagen de la función asociada mayor es la solución de este tipo de problema. Se cumple.

d) Si se realiza una partición del intervalo [0; 6] en los subintervalos [0;3] y [3;6], la suma de las soluciones en estos dos subintervalos no es igual a la solución en el intervalo [0;6] completo, pues en el primer caso se toma dos veces la solución en el punto x=3; es decir, los 60 metros que se deben recorrer para recoger el tercer saco.

En realidad, la solución de este problema es equivalente a $S = \sum_{x=1}^{6} 20x$

Ejemplo 3

La función f(x)=50x-x2 representa el total de arrobas de caña cortada que fue acumulando un machetero durante 8 horas, siendo x las horas que iban transcurriendo. ¿Cuántas arrobas de caña por horas estaba cortando el machetero al cumplirse las 7 horas de iniciarse la jornada?

Análisis:

a) La función f está definida y es continua en [0; 7].

b) Pero si f fuera constante (si fuera constante la cantidad de arrobas de caña cortada que se iban acumulando), la solución del problema (la cantidad de arrobas de caña que se iban cortando por horas) no se obtendría multiplicando esa constante por la longitud del intervalo.

Por lo tanto, la solución de este problema no se obtiene mediante el cálculo de la integral definida de la función f.

En realidad la solución es equivalente a f ' (6).

Ejemplo 4

Calcular el área de un rectángulo, que tiene como base al intervalo [2;8] del eje de las x; y cuya altura es el máximo de la función f definida por $f(x)=x^2$ en el propio intervalo [2;8].

Análisis:

a) La función f está definida y es continua en [2;8].

b) Si f fuera constante la solución podría obtenerse mediante el producto de esa constante por la longitud del intervalo.

c) Cuando mayor sea la imagen de la función asociada mayor es la solución del problema.

d) Pero si se realizan determinadas particiones del intervalo [2;8], por ejemplo, en [2;4] y [4;8], la suma de las soluciones en cada uno de esos dos subintervalos no es igual a la solución en el intervalo [2;8] completo.

$S[2;8] = f(8)(8-2) = 64(6) = 384u^2$, que es en realidad la solución del problema

Por otra parte:

$$\begin{aligned} S[2;4] + S[4;8] &= f(4)(4-2) + f(8)(8-4) \\ &= 16(2) + 64(4) \\ &= 32 + 256 = 288\,u^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de este problema no es equivalente a $\int_2^8 x^2dx$.

Bibliografía

Campistrous, L. Y Rizo, C. (1996): Aprende a resolver problemas matemáticos. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana.

Delgado, J. R. (1999): "La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración del conocimiento y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas", Tesis de doctorado, Ciudad de la Habana.

Hernández, R. (2000): "Propuesta didáctica para identificar y resolver los problemas que requieren del cálculo de una integral definida o de la derivada de una función real en un punto", Tesis de doctorado. Matanzas, Cuba.

Llivina, M. J. (1999): "Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos", Tesis de doctorado, La Habana.