Cómo identificar los problemas que pueden resolverse mediante la derivada de una función real en un punto

Hernández Camacho, Reinaldo*

Resumen

Cuando se imparte el Cálculo Diferencial, la mayoría de los profesores dedican gran parte de sus esfuerzos a que los estudiantes desarrollen habilidades en el cálculo de derivadas de funciones, que en ocasiones, tienen un elevado grado de dificultad. Sin embargo, no siempre se observa un interés similar en cuanto a lograr que los estudiantes aprendan a aplicar la derivada en la resolución de problemas.

Esto provoca que los estudiantes no sean capaces de reconocer problemas nuevos que se resuelven mediante el cálculo de una derivada, cuando estos se les presentan en la práctica.

En este trabajo se introduce una nueva forma de caracterizar a todos aquellos problemas que pueden resolverse mediante la derivada de una función real en un punto.

En experimentos pedagógicos que se han realizado durante doce años, con la enseñanza de esta caracterización a estudiantes universitarios, se han obtenido muy buenos resultados.

*Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos". Cuba.

Introducción

En el aprendizaje de una nueva operación matemática hay dos tipos de habilidades generales que los estudiantes deben desarrollar: habilidades relacionadas con el cálculo de la operación matemática y habilidades relacionadas con la aplicación de dicha operación en la resolución de problemas. Ambos tipos de habilidades están relacionadas pero tienen características diferentes. Por ejemplo, no es lo mismo desarrollar habilidades para efectuar la multiplicación de dos números reales o tener habilidades para calcular derivadas, que reconocer cuándo debe ser aplicada una de esas operaciones en la resolución de un problema.

Un aspecto de singular importancia en la resolución de problemas, es el nivel de comprensión que tenga la persona, del significado de los conceptos y operaciones matemáticas que sean necesarios aplicar en la modelación de un problema. El profesor D. Ausubel lo expresa acertadamente así: “La resolución de problemas, por una parte, y la formación y el empleo de conceptos, por otra parte, coinciden en muchos aspectos... Los conceptos adquiridos se emplean también en las variedades simples y más complejas de la resolución significativa de problemas, para descubrir nuevos conceptos.” (D. Ausubel, 1997, p.93).

Muchas veces los estudiantes aprenden a efectuar una operación matemática, pero no interpretan correctamente su significado. Un ejemplo de esto es el caso de la derivada. Los estudiantes aprenden aceptablemente a calcular derivadas; sin embargo, la interpretación de su significado, que tan importante resulta en la resolución de problemas, la mayoría de los estudiantes no logran adquirirla.

Material y métodos

En general, cada operación matemática lleva implícito un concepto matemático. Para comprender el significado de una operación es necesario interpretar el concepto que tiene asociado. Cuando el concepto es asimilado aumentan las posibilidades de aplicarlo en la modelación matemática de un problema.

Un concepto se caracteriza por dos aspectos esenciales: su contenido y su extensión. El contenido expresa las propiedades esenciales que tienen en común todos los objetos que forman parte del concepto y la extensión es el conjunto de todos esos objetos.

Para utilizar un concepto matemático en la modelación de un problema se necesita identificar en el problema el contenido del concepto, teniendo en cuenta las posibles limitantes de esa identificación. En un problema de la realidad objetiva, existen objetos reales que requieren ser identificados con objetos matemáticos, salvando las diferencias que hay entre ambos. Nunca un objeto del mundo real es exactamente igual a un objeto matemático.

La modelación matemática, la identificación de los objetos matemáticos con los objetos no matemáticos, a pesar de sus naturalezas diferentes, es el pilar fundamental en que se sustenta la utilidad de la matemática.

Para cada operación matemática existe un conjunto de situaciones (por lo general infinitas) que pueden ser identificadas con esa operación. Esas situaciones tienen un conjunto de propiedades esenciales comunes que son las que permiten esa identificación. Ese conjunto de propiedades esenciales constituyen el contenido del concepto asociado a la operación matemática, en tanto la extensión del concepto está compuesta por todas esas situaciones.

Una práctica común, cuando los estudiantes aprenden a derivar, es presentarles, como ejemplos de aplicación, un conjunto de problemas que se resuelven mediante derivadas, para que los estudiantes conozcan cómo resolver esos tipos específicos de problemas, sin que se destaquen las propiedades comunes existentes entre ellos.

Otro aspecto negativo es el hecho de que no se analizan contraejemplos; es decir, problemas que no puedan resolverse mediante derivadas, donde se justifique cuál es la causa por la cual no se puede aplicar esa operación, a pesar de que el problema tenga algún parecido con otros que sí pueden resolverse mediante derivadas.

Todo esto impide que los estudiantes puedan reconocer el contenido del concepto asociado a la derivada.

Definición alternativa de la derivada de una función real en un punto

(Después que ya sea conocida la definición tradicional de derivada.)

Sea F un conjunto de funciones reales definidas y continuas en todo punto de un intervalo $[a,b]$ y derivables en $]a,b[$. La derivada de una función f $\in$ F en un punto x $\in$ $]a,b[$, se deota $f'(x)$ y se caracteriza por cumplir las siguientes propiedades:

1. Si los incrementos de f(x) son directamente proporcionales a los incrementos de x, (Si f(x)=mx+n), en un intervalo $[c,d] \subset [a,b]$, $f'(x)$ es constante e igual a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$ = m, para todo x $\in$ $]c,d[$

2. $f'(x)$ no depende directamente de ningún intervalo $[c,d] \subset [a,b]$ que contenga al punto x, para una misma función.

3. Si $f(x_2)-f(x_1) \leq g(x_2)-g(x_1)$ para todo x_1, $x_2 \in\ ]c,d[\subset\ ]a,b[$ con $x_2 > x_1$, y g $\in$ F, entonces $f'(x) \leq g'(x)$ para todo x $\in$ $]c,d[$

Observaciones

• Esta definición alternativa es más apropiada que la definición tradicional para reconocer cuándo puede aplicarse la derivada en la solución de un problema, pero no lo es para el desarrollo de habilidades en el cálculo de derivadas.

• Es recomendable introducir esta definición cuando se vayan a resolver problemas aplicando la derivada de una función real en un punto, después que los estudiantes hayan desarrollado habilidades en el cálculo de esta operación.

• La equivalencia entre la definición alternativa que se ha dado aquí y la definición tradicional de derivada de una función real en un punto, está contenida en un teorema con su demostración que puede verse en la tesis de doctorado del autor de este trabajo.

Esta definición permite conformar una caracterización general de todos los problemas que pueden resolverse mediante la derivada de una función real en un punto.

Caracterización de los problemas que pueden resolverse mediante la derivada de una función real en un punto

Sean: P un conjunto de problemas que pertenecen a un mismo tipo de problemas, S el conjunto de las soluciones de dichos problemas y F un conjunto de funciones reales definidas en puntos de un intervalo [a,b], donde, para cada problema $p \in P$ su solución $s \in S$ está relacionada con una función $f \in F$.

Entonces, la solución s de un problema $p \in P$, relacionada con una función f en un punto $x \in \left]a,b\right[$ es $f'(x)$ si se cumple que:

.1) La función f está definida y es continua en todo punto de $\left[a,b\right]$ y es derivable en $\left]a,b\right[$.

2) La solución de un problema de ese tipo en un punto x no depende directamente de ningún intervalo $\left[c,d\right] \subset \left[a,b\right]$, para una misma función.

3) En ese tipo de problemas, cuando los incrementos de la imagen de la función son directamente proporcionales a los incrementos de x la solución es constante y se obtiene mediante el cociente del incremento de la imagen de la función entre el incremento de x.

4) En este tipo de problemas, cuanto mayor sean los incrementos de la imagen de la función, mayor será la solución del problema.

Observaciones

• En este trabajo, la expresión **tipo de problemas**, se utiliza con el significado siguiente: Conjunto de problemas, cuyas soluciones están asociadas cada una de ellas a una función real en un intervalo $\left[a,b\right]$, y todos los problemas tienen exactamente las mismas características, con la única excepción de la función asociada, que puede ser diferente de un problema a otro.

Veamos cómo puede utilizarse esta caracterización, para determinar si un problema puede resolverse o no mediante la derivada de una función real en un punto.

Ejemplos para resolver conjuntamente con los estudiantes

Analizar si los siguientes problemas pueden resolverse o no mediante la derivada de la función f en el punto correspondiente.

Ejemplo 1

El peso total en libras que fue alcanzado un cerdo en los primeros 100 días de nacido esta dado por la función $f(t) = 0{,}01\, t^2 + 0{,}5t + 2$, siendo t la cantidad de días de nacido, $0 \leq t \leq 100$. ¿Cuántas libras por día estaba aumentando el cerdo al cumplir los 50 días de nacido?

Análisis

a) La función f y su derivada están definidas y son continuas en [0,100] y]0,100[, respectivamente.

b) Si la función fuera lineal (si fuera $g(t)=mt + n$); es decir, si los incrementos de la imagen de la función (los incrementos del peso total que va alcanzando el cerdo) fueran directamente proporcionales a los incrementos de t (a los incrementos de los días de nacido), la solución del problema (la cantidad de libras por días que aumentaría el cerdo), sería constante y podría obtenerse dividiendo el incremento de g(t) (el incremento del peso total), entre el incremento de t (el incremento de los días de nacido), en cualquier intervalo de tiempo en que la función fuera lineal.

c) Cuanto mayor sea el incremento de la imagen de la función (el incremento del peso total del cerdo) en un intervalo de tiempo dado contenido en [0,100], mayor será la solución del problema (mayor será la cantidad de libras por días que aumenta el cerdo) en ese intervalo de tiempo.

d) La solución del problema en un punto $t_0 \in\ ]0,100[$ (la cantidad de libras por día que está aumentando el cerdo en un momento dado), no depende directamente de ningún intervalo $[c, d] \subset [0,100]$ que contenga al punto t_0.

Por lo tanto, en este problema se cumplen todas las propiedades necesarias y suficientes para que su solución pueda obtenerse mediante la derivada de una función real en un punto.

$$S = f'(50) = 1{,}5$$

El puerco está aumentando a razón de 1,5 libras por días al cumplir los 50 días de nacido.

Ejemplo 2

Cada vez que termina un mes un hombre recibe una cierta cantidad de dinero. Como consecuencia de esto, la cantidad de dinero recibido que va acumulando el hombre está dado por la función $f(t) = 300t + 5t^2$, siendo t el número de meses transcurridos hasta llegar a 7 meses. ¿Qué cantidad de dinero recibió el hombre el mes número 6?

Análisis

a) Esta función no es continua en el intervalo [0,7], porque está definida solamente para $t = 1, 2, \ldots, 7$. Por lo tanto, el problema no puede ser resuelto mediante la derivada de la función f en el punto 6.

La solución es $S = f(6) - f(5) = 305{,}5$

El hombre recibió 305,5 pesos el mes número 6.

Ejemplo 3

La cantidad total de quintales de papas recolectados que fue acumulando una brigada de trabajo durante 8 horas puede expresarse por $f(x) = 50x - 0{,}2x^2$, donde x representa la cantidad de horas laboradas, $0 \leq x \leq 8$. ¿Cuál fue el promedio de quintales por horas que recolectó la brigada durante las 8 horas?

Análisis

a) La función f y su derivada están definidas y son continuas en el intervalo [0,8], (para f' bastaba que lo fuera en]0,8[ ).

b) Si la función fuera lineal en [0,8], la solución podría obtenerse mediante la división del incremento de la imagen de la función entre el incremento de x.

c) Cuanto mayor sea el incremento de la imagen de la función mayor será la solución del problema.

d) Pero la solución de este problema no es independiente del intervalo que sea considerado. Por ejemplo, el promedio de quintales por horas en el intervalo [4,8] no es igual que en el intervalo [0,8].

Entonces el problema no puede resolverse mediante la derivada de la función f en el punto 8.

Su solución es: $S = \frac{f(8)}{8} = 48{,}4$

La brigada recogió como promedio 48,4 quintales de papas por horas.

Ejemplo 4

La cantidad de cordeles cuadrados de tierra por horas que fue sembrando de malanga una brigada, puede expresarse por la función $f(x) = 2 - 0.08x$, siendo x la cantidad de horas transcurridas, $0 \leq x \leq 8$. ¿Cuántos cordeles cuadrados de tierra sembró la brigada durante las 8 horas?

Análisis

a) La función f y su derivada están definidas y son continuas en [0; 8] y]0;8[respectivamente.

b) Pero en este tipo de problemas, cuando la función f es lineal (como lo es en este caso), la solución del problema (la cantidad total de cordeles sembrados), no puede obtenerse dividiendo el incremento de f (x) (el incremento de la cantidad de cordeles sembrados por horas) entre el incremento de la variable independiente (entre la cantidad de horas transcurridas).

c) No se cumple tampoco que cuanto mayor sea el incremento de f (x) mayor será la solución del problema.

Por ejemplo, si tenemos las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = 10$ en el intervalo [0;8], el incremento de f (x) en cualquier intervalo de longitud no nula $[c;d] \subset [0;8]$ es igual a $d - c > 0$. En cambio, el incremento de g (x) en el mismo intervalo es cero. Por tanto, el incremento de f (x) es mayor que el incremento de g (x). Sin embargo, la solución asociada con la función g es mayor que la solución asociada con la función f en un mismo intervalo $[c;d] \subset [0;8]$, porque cuando es g la función, la cantidad de cordeles sembrados por horas es 10, y cuando es f, esa cantidad está entre 0 y 8. Luego, en cualquier intervalo $[c;d] \subset [0;8]$ con $d > c$, será mayor la solución con la función g que con la función f.

d) Tampoco se cumple que la solución en un punto sea independiente de cualquier intervalo. Por el contrario, la cantidad total de cordeles sembrados depende directamente del intervalo que sea considerado.

Naturalmente, si se incumple al menos una de las propiedades, ya no es necesario continuar analizando las propiedades restantes. Aquí se continuó el análisis con el objetivo de ejemplificar el no cumplimiento de otras propiedades.

No es posible entonces, resolver el problema mediante la derivada de la función f en el punto 8.

La solución de este problema es $S = \int_0^8 (2 - 0{,}08x)dx = 13{,}44$

La brigada sembró 13,44 cordeles durante las 8 horas.

Bibliografía

Campistrous, L. Y Rizo, C.: “Aprende a resolver problemas matemáticos”. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1996.
Llivina, M.J.: “Una propuesta metodológica para contribuir al desarrollo de la capacidad para resolver problemas matemáticos”. Tesis de doctorado. La Habana. 1999.
Hernández, R.: “Propuesta didáctica para identificar y resolver los problemas que requieren del cálculo de una integral definida o de la derivada de una función real en un punto”. Tesis de doctorado. Matanzas. Cuba. 2000.
Hernández, R.: “Técnicas para la resolución de problemas”. Monografías/2007. CD-ROM. ISBN: 959- 16-0490-4. Cuba. 2007
Hernández, R.: “La Heurística en el razonamiento universal”. Revista Atenas. ISSN-1682-2749. Cuba. 2007
Hernández, R.: “Cómo identificar los problemas que pueden resolverse mediante una integral definida”. Revista Aula Universitaria N 9. Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe. Argentina. 2008.