

## Ejemplos de utilización de la enseñanza problémica en la matemática

**Hernández Camacho, Reinaldo; Reyna Hernández, Mayté**

### Resumen

La enseñanza problémica es considerada por muchos pedagogos como la forma de proceder más eficiente que puede adoptar el profesor durante el proceso de enseñanza-aprendizaje con sus estudiantes. En este trabajo, además de presentarse los conceptos básicos elementales relacionados con esta forma de enseñanza, se ha querido mostrar, también, dos ejemplos de utilización de la enseñanza problémica en la introducción de un nuevo contenido matemático. En particular, uno de los contenidos que se ha elegido corresponde a la Enseñanza de la Matemática en el nivel universitario, donde, hemos tenido la experiencia personal de aplicarlo con los estudiantes de la Universidad de Matanzas, Cuba.

**Palabras claves:** enseñanza problémica, problema, pregunta problémica, heurística.

### Summary

#### **Examples of use of the conceptualized in mathematics teaching**

The teaching problem is considered by many educators as the most efficient way of proceeding that can take the teacher during the teaching-learning process with their students. In this paper, in addition to presenting the basic concepts related to this form of teaching, we have tried to show, also, two examples of the use of teaching problem in the introduction of a new mathematical content. In particular, one of the contents you have chosen corresponds to the Teaching of Mathematics at the university level, where, we have had the personal experience of applying it with the students of the University of Matanzas, Cuba.

**Keywords:** teaching problemic, problem, asked problemic, heuristics.

Presentado: 10-4-13 | Aceptado: 1-11-13  
Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos". Facultad de Ingenierías.  
Departamento de Matemática -Ciudad de Matanzas-  
Carretera Varadero Km. 3 ½ -Matanzas- Cuba  
reinaldo.hernandez@umcc.cu; mayte.reyna@umcc.cu

## Introducción

El objetivo general de este trabajo es presentar la experiencia pedagógica adquirida durante los últimos 5 años en la Universidad de Matanzas, Cuba, donde se ha constatado que la enseñanza tradicional, donde el profesor es el expositor del contenido y el estudiante es un receptor pasivo, no es eficiente. Es necesario emplear métodos de enseñanza en los cuales el estudiante participe activamente en la construcción de su propio conocimiento, sólo así el aprendizaje podrá ser efectivo.

En este trabajo se presentan ejemplos de la utilización de la enseñanza problémica, donde el estudiante tiene esa posibilidad de participar en la elaboración del nuevo contenido.

## Desarrollo

Comenzaremos recordando algunos de los principales aspectos relacionados con la Enseñanza Problémica.

### Enseñanza Problémica

Consiste en la adquisición de conocimientos por parte de los estudiantes, mediante el proceso de solución de sistemas de problemas y ejercicios problémicos que le son presentados.

### Categorías de la enseñanza problémica

- La situación problémica.
- El problema docente.
- La tarea problémica.
- La pregunta problémica.

- La situación problémica.

Es la relación entre el sujeto y el objeto de conocimiento que surge a modo de contradicción cuando aquel no puede entender la esencia de los fenómenos estudiados porque carece de los elementos para el análisis y que sólo la actividad creadora puede resolver.

- El problema docente

Es la contradicción ya asimilada por el sujeto, donde se ha podido determinar qué es lo buscado, qué es lo conocido y las posibles condiciones para obtener la solución.

(El problema en la ciencia es el conocimiento de lo desconocido)

- El surgimiento del problema

Es la actividad intelectual que surge durante la situación problémica, que conduce al planteamiento del problema, que no es más que la determinación del elemento que provocó la dificultad.

El problema es, en su sentido más general, la pregunta que surge de la actividad del hombre.

- La tarea problémica

Es una actividad de búsqueda, a partir de la contradicción que surge en la situación problémica, que conduce a encontrar lo buscado.

Refleja la actividad de búsqueda del sujeto de aprendizaje con el objetivo de resolver el problema planteado.

- La pregunta problémica

Es un componente de la tarea que expresa, de forma concreta, la contradicción entre los conocimientos y los nuevos hechos. Su planteamiento correcto indica que la actividad del pensamiento ha determinado la tendencia fundamental del objeto, sus contradicciones. Se caracteriza por algo desconocido, que no se encuentra fácilmente sino mediante el establecimiento de determinados recursos lógicos que llevan al hallazgo de algo nuevo: lo buscado.

### **Secuencia lógica en la enseñanza problémica**

La secuencia lógica en la enseñanza problémica presupone: la creación de la situación problémica, la formulación del problema, la realización de tareas cognoscitivas, la asimilación de nuevos materiales por parte de los estudiantes.

### **Métodos problémicos**

Los principales métodos problémicos son:

- La exposición problémica.
- El método de búsqueda parcial.
- La conversación heurística.
- El método investigativo.

- Exposición problémica

No se comunican los conocimientos en forma acabada.

El profesor conduce la exposición demostrando la dinámica de la formación y desarrollo de los conceptos, esbozando problemas que él mismo resuelve, como si se reprodujera en menor escala la propia historia de la ciencia o la historia del surgimiento y desarrollo de una concepción en la ciencia.

- El método de búsqueda parcial

El profesor plantea un problema y con la participación de los estudiantes van obteniendo la solución por etapas.

Para ello debe descomponer el problema de cierta complejidad, en subproblemas más sencillos, las soluciones de los cuales constituirán pasos que posibilitarán la solución del problema principal.

- La conversación heurística.

El profesor plantea un problema y va formulando un conjunto de preguntas con una secuencia lógica, cuyas respuestas concatenadas por parte de los estudiantes, conducen a la solución del problema.

- Método investigativo

Los estudiantes resuelven, de manera independiente, o en pequeños grupos, problemas nuevos para ellos, aunque ya estos han sido resueltos por la ciencia.

Es propio de los trabajos de cursos y de diplomas.

### Un ejemplo de utilización de la conversación heurística

Una profesora de Matemática de enseñanza media, en clases anteriores, ha trabajado con sus alumnos los siguientes contenidos geométricos:

Perímetro del rectángulo y del cuadrado.

Longitud de la circunferencia.

Área del rectángulo, del cuadrado y del círculo.

Volumen del cubo y del ortoedro.

### Situación problémica

La profesora plantea a sus alumnos:

Una señora compró una lata y una caja de puré de tomate, tal como se muestra (la profesora presenta los objetos físicos), ambos por el mismo precio. ¿En cuál de los dos casos recibió mayor cantidad de puré? ¿Cuál de los dos recipientes requiere mayor cantidad de material para su construcción?

### Problema docente

Una actividad intelectual de búsqueda debe conducir a la formulación del siguiente problema:

¿Cuáles son las fórmulas para calcular el volumen y el área total de un cuerpo con esa forma?

### Motivación

Un cuerpo con la forma que tiene la lata de puré de tomate se denomina cilindro circular recto.

Hay muchas latas de conservas y muchos tipos de depósitos que tienen esta forma. Es, por lo tanto, sumamente importante saber calcular el volumen y el área de estos tipos de cuerpos. En la clase de hoy aprenderemos a realizar esos cálculos.

**Temática:** Cilindro circular recto, volumen, área lateral y área total.

**Objetivos:** Interpretar el concepto de cilindro circular recto y reconocer las fórmulas para calcular su volumen, su área lateral y su área total.

### Aseguramiento del nivel de partida

Es necesario recordar cuáles son las fórmulas para calcular:

La longitud de una circunferencia.

El área de un rectángulo.

El área de un círculo.

El volumen de un prisma.

### Orientación hacia el objetivo

Con el objetivo de ir obteniendo las fórmulas correspondientes para calcular el volumen y las áreas lateral y total de un cilindro circular recto, se irán estableciendo analogías

con otros cuerpos y figuras planas conocidas, que ayudarán en este propósito. Así se irán obteniendo cada una de las fórmulas necesarias para calcular estas magnitudes.

### Concepto de cilindro circular recto

Un cilindro circular recto es un cuerpo limitado por dos círculos congruentes (bases) y una superficie curva formada por segmentos perpendiculares a las circunferencias que limitan a las bases.

### Solución del problema mediante la conversación heurística

¿Cuál es la fórmula para calcular el volumen de un ortoedro? (R:  $V=A_B \cdot h$ )

¿Qué figura geométrica tiene la base del cilindro?

(R: Un círculo.)

¿Cómo se calcula el área de esa base? (R:  $A=\pi r^2$ )

¿Cómo será, entonces, la fórmula para calcular el volumen de un cilindro circular recto? (R:  $V=\pi r^2 h$ )

Si se cortara la superficie lateral de un cilindro circular recto paralelamente a su altura (perpendicular a las bases), y se extendiera esa superficie sobre un plano, ¿qué tipo de superficie se obtendría?

Se obtendría una superficie rectangular, con uno de los lados de igual longitud a la circunferencia de la base del cilindro y el otro lado de igual longitud a la altura del cilindro.

¿Cómo será entonces la fórmula para calcular el área lateral de un cilindro circular recto?

(R:  $A_L=2\pi rh$ )

¿Y cuál será entonces la fórmula para calcular el área total de un cilindro circular recto?

(R:  $A_t= 2\pi r^2+2\pi rh$ )

### Fijación

Se resolverá ahora el problema que se planteó al inicio de la clase.

Se medirán las aristas del ortoedro, y el radio y la altura del cilindro circular recto.

Se calcularán sus volúmenes y sus áreas totales, y se compararán.

En cada uno de los siguientes casos, los datos se refieren a un cilindro circular recto.

a) Datos:  $r = 3,4$  cm. y  $h = 7,8$  cm.

Hallar  $d$ ,  $A_B$ ,  $A_L$ ,  $A_T$  y  $V$

b) Datos:  $d = 4,8$  cm. y  $V = 100$  cm<sup>3</sup>

Hallar  $A_L$

### Observación

La fijación será necesario continuar desarrollándola en próximas clases, así como el control.

### Otro ejemplo de utilización de conversación heurística

A un profesor de Matemática de una Universidad le corresponde impartir el contenido concerniente a la determinación de la monotonía y los extremos locales de una función real de una variable real. Para ello plantea a los estudiantes la siguiente situación problemática:

En una época del año un campesino puede vender hasta 20 kg. de guayaba al día. Si vende hasta 10 kg., le pagan a un precio fijo de 0,5 dólares por kg., pero si vende más de 10 kg., por cada kg. que sobrepase los 10 le descuentan 2 centavos de dólares al precio de todos los kg. que venda ese día. ¿Cuántos kg. de guayaba debe vender al día el campesino para obtener el mayor ingreso?

### **Método de búsqueda parcial**

Una actividad de búsqueda de los estudiantes, con la colaboración del profesor, debe conducir a la formulación de los siguientes problemas parciales:

¿Cuál es la función que modela el ingreso en dólares por día del campesino, como consecuencia de la venta de la guayaba?

¿Cómo se puede determinar el punto en el cual esa función alcanza su mayor valor?

### **Motivación y orientación hacia el objetivo**

Una de las aplicaciones de mayor utilidad que tiene la derivada de una función es la determinación de los máximos y mínimos de esa función.

En cualquier rama de la ciencia y en cualquier momento de la vida cotidiana, puede resultar necesario determinar los extremos de una función.

En la clase de hoy comenzaremos el estudio de este interesante contenido, que desde el punto de vista histórico, fue una de las causas que contribuyó al surgimiento de la derivada.

¿Cómo vamos a proceder? Vamos a dedicarnos primero a determinar la función que modela el ingreso en dólares del campesino y después, estudiaremos cómo determinar el máximo y el mínimo de una función.

### **Aseguramiento del nivel de partida**

Las siguientes preguntas tienen como objetivo recordar algunos aspectos que necesitaremos aplicar en la clase de hoy.

¿Cuál es el significado geométrico de la derivada de una función en un punto?

La derivada de una función en un punto es equivalente a la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en el punto.

¿Cómo se puede saber, mirando el gráfico de una recta en un sistema de coordenadas rectangulares, si su pendiente es positiva o negativa?

Si la inclinación de la recta es ascendente de izquierda a derecha su pendiente es positiva. Si es descendente su pendiente es negativa.

## Desarrollo

Retomemos nuevamente nuestra problemática inicial.

-Evidentemente el campesino obtiene un mayor ingreso si vende 10 kg. de guayaba que si vende menos de 10.

-Designemos por  $x$  la cantidad de kg. por encima de 10 que vende el campesino.

1) ¿Cómo debe representarse la cantidad de kg. que vende el campesino?

$$C = x + 10, \quad 0 \leq x \leq 10$$

2) ¿Cómo se puede representar el precio de venta por kg.?

$$P = 0,5 - 0,02x$$

3) ¿Cuál es, entonces, la función que modela el ingreso en dólares del campesino?

$$I = (x + 10)(0,5 - 0,02x) = 0,5x - 0,02x^2 + 5 - 0,2x$$

$$I = -0,02x^2 + 0,3x + 5, \quad 0 \leq x \leq 10$$

Vamos a dedicarnos ahora a estudiar cómo se determina el máximo y el mínimo de una función.

Observemos la siguiente figura, en la cual se ha trazado el gráfico de una función  $f$  y algunas rectas tangentes a su gráfico.

¿En los puntos en los cuales la función  $f$  es creciente qué signo tiene la pendiente de la recta tangente a la curva? (R: Signo positivo.)

¿Qué signo tiene, entonces, la derivada de la función en los puntos donde la función es creciente? (R: Signo positivo.)

Entonces, podemos decir que si la función es derivable y la derivada es positiva, la función es creciente.

¿En los puntos en los cuales la función  $f$  es decreciente qué signo tiene la pendiente de la recta tangente a la curva? (R: Signo negativo.)

¿Qué signo tiene, entonces, la derivada de la función en los puntos donde la función es decreciente? (R: Signo negativo.)

Entonces podemos decir que si la función es derivable y la derivada es negativa, la función es decreciente.

Si la función es derivable, ¿cuál es el valor de la derivada de la función en los puntos de máximo y mínimo local? (R: Es cero.)

Al pasar de izquierda a derecha por un punto de máximo local, ¿cómo cambia el signo de la derivada de la función?

Cambia de positivo a negativo.

Al pasar de izquierda a derecha por un punto de mínimo local, ¿cómo cambia el signo de la derivada de la función?

Cambia de negativo a positivo.

## Resumen

Sea  $f$  una función derivable en todo su dominio.

- 1) Si  $f'(x) > 0$  en un intervalo, entonces  $f$  es creciente en ese intervalo.
- 2) Si  $f'(x) < 0$  en un intervalo, entonces  $f$  es decreciente en ese intervalo.
- 3) Si  $f'(x_0) = 0$  y  $f'(x)$  cambia el signo de  $+$  a  $-$  en  $x_0$ , entonces  $x_0$  es un punto de máximo local.
- 4) Si  $f'(x_0) = 0$  y  $f'(x)$  cambia el signo de  $-$  a  $+$  en  $x_0$ , entonces  $x_0$  es un punto de mínimo local.
- 5) Si  $f'(x_0) = 0$  y  $f'(x)$  no cambia el signo en  $x_0$ , entonces  $x_0$  no es un punto de extremo local.

## Observación

Las conclusiones de las propiedades 3 y 4 también se cumplen si  $f'(x_0)$  no existe, pero  $f(x)$  es continua en  $x_0$  y  $f'(x)$  cambia de signo al pasar por  $x_0$ .

## Solución final de la problemática inicial

La función que modela el ingreso en dólares del campesino es:

$$f(x) = -0,02x^2 + 0,3x + 5, \quad 0 \leq x \leq 10$$

Para determinar en qué valor de  $x$  esta función alcanza su valor máximo, ¿qué es lo primero que debemos hacer?

Determinar en qué puntos  $f'(x) = 0$

Determinémoslos:

$$f'(x) = -0,04x + 0,3 = 0 \Rightarrow x = \frac{0,3}{0,04} = \frac{30}{40} = 7,5$$

Analicemos si se produce cambio de signo en  $f'(x)$  al pasar por  $x = 7,5$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow -0,04x + 0,3 > 0 \Rightarrow -0,04x > -0,3 \Rightarrow x < \frac{-0,3}{-0,04} \Rightarrow x < 7,5$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow -0,04x + 0,3 < 0 \Rightarrow -0,04x < -0,3 \Rightarrow x > \frac{-0,3}{-0,04} \Rightarrow x > 7,5$$

Por lo tanto,  $f'(x)$  cambia el signo de  $+$  a  $-$  en  $x = 7,5$

Entonces,  $x = 7,5$  es un punto de máximo local de la función  $f$ .

## Respuesta a la problemática inicial

La cantidad de kg. de guayaba que debe vender el campesino para obtener el mayor ingreso es de  $(10+7,5)$  kg. = 17,5 kg.

### Conclusiones generales de la clase

Hacer un resumen de la clase, destacando los pasos que deben realizarse para determinar la monotonía y los extremos locales de una función real de una variable real.

Orientar el estudio individual.

El trabajo para la fijación se desarrollará en próximas clases.

### Conclusiones

Siempre que exista la posibilidad de aplicar la enseñanza problémica en la introducción de un nuevo contenido, en cualquier disciplina que se esté desarrollando, no debe perderse la oportunidad de utilizar este tipo de enseñanza. Con su empleo se garantiza que el estudiante participe activamente en la construcción de su propio conocimiento, lo cual resulta indispensable para que se produzca un aprendizaje significativo.

### Referencias bibliográficas

**Hernández, R. (2007).** "Propuesta didáctica para identificar cuándo la Integral Definida es aplicable para resolver un problema". Revista *INIE. Actualidades Investigativas en Educación*. Costa Rica.

**Hernández, R. (2008).** "Cómo identificar los problemas que pueden resolverse mediante una integral definida". Revista *Aula Universitaria* N 9. Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe. Argentina.

**Hernández, R. y Reyna, M. (2013).** "Problemas que se resuelven mediante Diferencias Finitas". CIUM 2013. Matanzas. Cuba.

**Polya, G. (1975).** "A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático". Editora Interciencia Ltda. Rio de Janeiro, Brasil.

**Polya, G. (1965).** "Cómo plantear y resolver problemas". Editorial Trillas. México.