

La influencia de la computadora en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Oviedo, Lina M.*; Moretto, Gloria E.**; Kanashiro, Ana M.*

Resumen

El presente trabajo es un informe de la experiencia llevada a cabo por las autoras en las Facultades de Ingeniería Química y de Bioquímica y Ciencias Biológicas de la Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias durante el primer y segundo cuatrimestre del año 1999.

El tiempo que se requiere para desarrollar las herramientas necesarias para encontrar las soluciones de una ecuación diferencial no posibilita el desarrollo de otras habilidades, como la formulación de modelos matemáticos de problemas o el análisis de las gráficas de las soluciones con miras a obtener datos a partir de ellas y estudiar o predecir comportamientos futuros.

El acceso a distintos y excelentes softwares que permiten abordar de manera diferente el estudio de las ecuaciones diferenciales, pone al docente frente al desafío de replantear la enseñanza de las mismas.

El objetivo de este trabajo es contar la experiencia realizada con un grupo de alumnos al estudiar la estabilidad de los Sistemas Dinámicos con el auxilio del utilitario PHASER.

La preocupación por encontrar estrategias que puedan mejorar la comprensión de los alumnos y favorecer procesos cognitivos en la comprensión de la ciencia en el área de la química se centró en los ejes que orientaron nuestro trabajo.

Introducción

Para llevar a cabo el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, se utilizan tres tipos de técnicas: numérica, gráfica y analítica. De las tres, la preferida por los docentes y la bibliografía es, en general, la analítica, con lo que las otras dos son dejadas de lado. El uso de nuevas tecnologías en el aula y el

*- Departamento de Matemática - Facultad de Ingeniería Química

** - Departamento de Matemática - Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas

Universidad Nacional del Litoral. - Santa Fe - República Argentina

E-mail: loviedo@fiqus.unl.edu.ar; gmoretto@fbc.unl.edu.ar; akanashi@fiqus.unl.edu.ar

acceso fácil a una PC han mostrado que la matemática puede estudiarse desde un punto de vista más amplio, generando un espacio para las representaciones numéricas y gráficas.

En el documento de 1998 **Sobre la Enseñanza y Aprendizaje de Matemáticas en el Nivel Universitario** el ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) manifiesta: *Mundialmente se está haciendo mayor uso de computadoras y calculadoras en la instrucción matemática. Hay muchos softwares y paquetes de enseñanza disponibles para un gran rango de tópicos curriculares. Esto, por supuesto, plantea la cuestión de qué es lo que estos softwares y paquetes ofrecen para la enseñanza y aprendizaje del tema, y qué problemas potenciales pueden generar para la comprensión y el razonamiento. Sería beneficioso juntar aquellos ejemplos donde el uso de tecnología informática y software resulta enriquecedor para la experiencia de los estudiantes y deviene en una mejor comprensión y aprendizaje.*

El análisis de este y otros documentos impulsó a las autoras a estudiar una manera diferente de trabajar el tema de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, destinado a los alumnos que cursan las carreras de Ingeniería Química y Licenciatura en Biotecnología en las Facultades de Ingeniería Química y de Bioquímica y Cs Biológicas respectivamente de la UNL.

El trabajo tuvo su origen en dos problemas diferentes:

1- Al abordar la enseñanza del tema Ecuaciones Diferenciales en la carrera de Ingeniería Química se detectaron dos dificultades estrechamente relacionadas: la extensión de los contenidos y el escaso tiempo disponible para desarrollarlos.

2- Al usar únicamente papel y lápiz en este tema, el trabajo no posibilita aprovechar la riqueza del estudio cualitativo y el poder de la visualización de los comportamientos de las soluciones.

La resolución analítica de las ecuaciones diferenciales implica seleccionar un método preestablecido para encontrar la solución y esto, en la mayoría de los casos, demanda excesivo trabajo algebraico que no permite realizar un análisis profundo sobre el comportamiento de esas soluciones.

Una disminución en el tiempo requerido en la manipulación manual de resolución provee una oportunidad para enfatizar más la comprensión conceptual como oposición de una mera habilidad manual. Los detalles de los procedimientos matemáticos y algoritmos son olvidados rápidamente a menos que se usen frecuentemente, pero los conceptos y las ideas subyacentes se transforman en parte del pensamiento individual y están siempre disponibles o al menos mucho menos olvidados que los detalles manipulativos (Boyce, 1994: pp. 365 y 366).

Esto no implica que las expresiones analíticas o las fórmulas no sean importantes. Cuando son provechosas y bastante simples para ser entendidas, pueden ser de primordial importancia. Son la base para una clase de exploración que Boyce llama *exploración simbólica* (1994: p. 364).

Diversos software, tales como el Mathematica y el Maple, están disponibles para trabajar el tema Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; su utilización permite reemplazar los rutinarios cálculos de resolución analítica de una ecuación diferencial con el uso de uno o dos comandos. De este modo, el tiempo y esfuerzo requeridos en esa actividad pueden destinarse, ahora, a otras tres actividades que son fundamentales en el estudio de las ecuaciones diferenciales:

- El análisis de las soluciones y las conclusiones extraídas a partir de sus gráficas.
- La realización de los modelos de problemas de la Física, la Biología y la Química.
- El estudio de los problemas no lineales, que si bien no siempre son fáciles de resolver, encuentran instrumentos válidos en las técnicas numéricas o gráficas para llevar a cabo una investigación sobre el comportamiento de la solución sin usar la expresión simbólica.

Por último, el trabajo en el aula con el utilitario PHASER permite estudiar sistemas de ecuaciones lineales y no lineales y problemas de estabilidad de manera distinta de como se había hecho en años anteriores. En esas oportunidades los alumnos debían realizar el análisis del **sistema** utilizando el lápiz y el papel, presentando problemas a la hora de pasar del análisis funcional al análisis de gráficas. Mostraban dificultades para dibujar, respondían de manera sucinta, evidenciaban dificultades al graficar el plano de las fases asociado, se notaba memorización de determinadas consignas pero no eran capaces de elaborar conclusiones a partir de las mismas.

Los fundamentos epistemológicos de esta propuesta se basan en considerar a la matemática como una disciplina dinámica que evoluciona acorde a los resultados de su desarrollo y aplicación, y en donde la modelización y resolución de problemas e interpretación de los resultados implican que los estudiantes participen activamente en el desarrollo de las ideas matemáticas, relacionando el aprendizaje con la práctica de desarrollar matemática. El rol del alumno en clase debería ser activo al discutir problemas, proponer ejemplos y contraejemplos, hacer conjeturas y, lo que es más importante, ser él el constructor de su conocimiento.

Metodología

En la modelización de un problema que implica el planteo y posterior resolución de una ecuación diferencial en donde el tiempo es la variable independiente, lo importante no es obtener la función solución en términos de funciones elementales o no, sino saber si la ecuación tiene solución y el comportamiento de la misma en todo tiempo.

Por otra parte, para que el aprendizaje resulte significativo debe estar presente una estructura cognitiva que le permita al que aprende apropiarse de una idea, concepto, saber. El docente debería desarrollar su labor de manera tal de permitirle al alumno la posibilidad de descubrir para lograr una comprensión relacionada, proponiendo, entre otras actividades, situaciones que se transformen en problemas por resolver.

Para lograr esto, el desarrollo de la experiencia puede enmarcarse en los siguientes momentos fundamentales:

- Presentación de situaciones problemáticas que involucran ecuaciones diferenciales, que el alumno puede modelar y resolver haciendo uso de los conocimientos que posee del cálculo.
- Desarrollo de los conceptos teóricos fundamentales y de los algoritmos de resolución.
- Aplicación de los mismos en la solución de problemas sencillos.
- Uso de los softwares adecuados para obtener las soluciones.
- Planteo de situaciones más complejas que resolverá, en general, a través de los medios informáticos.

El estudio de la estabilidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se planteó con el auxilio del software PHASER. Los interrogantes que se propusieron para la realización del mismo fueron los siguientes:

¿Qué tipo de resultados se puede esperar al hacer un estudio desde el punto de vista analítico funcional?

¿Cuáles son los resultados al plantear un análisis geométrico funcional?

¿Qué interpretación realizan de las gráficas del plano de fases?

¿Pueden identificar, a partir de las mismas, el sistema que les dio origen?

¿Están en condiciones de bosquejar una gráfica del plano de fase a partir de un sistema dado?

Y con estos interrogantes se formularon las siguientes hipótesis:

Los alumnos:

- identifican, observando la gráfica del plano de fase, qué tipo de raíces posee la ecuación característica asociada a un sistema dado.

- son capaces de relacionar la gráfica del plano de fase con el sistema asociado y viceversa.

- pueden asociar la evolución de cada una de las variables en el tiempo con la gráfica del plano de fase.

La práctica del tema **Sistemas lineales y no lineales** se realizó con el apoyo del PHASER. Al trabajar con el auxilio de este software, el análisis de los campos de fuerzas o de pendientes permite predecir la gráfica de la familia solución, la visualización del diagrama de fase; las gráficas de las funciones soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ aportan interesantes conclusiones que sin el auxilio de la computadora resultaría imposible percibir, ya que demandaría un trabajo muy minucioso a lo que los alumnos no están habituados y un tiempo del que no se dispone.

Un modelo de propuesta

Se presenta la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 0$ con las siguientes consignas:

Escriba el sistema correspondiente y:

- a- Prediga qué funciones están involucradas en la solución.
- b- Establezca los autovalores y autovectores.
- c- Clasifique el punto crítico.
- d- Analice el comportamiento de las soluciones linealmente independientes en función del tiempo.

Corrobore sus propuestas observando el plano de fase y los gráficos de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en función del tiempo.

El sistema resultante es: $\begin{pmatrix} -2 & 0,5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ de los resultados gráficos obtenidos

al introducir el sistema en el PHASER pueden establecer varias conclusiones:

- 1- Analizando el campo de direcciones (fig. 1) predecir qué funciones están involucradas en la solución, establecer la naturaleza de los autovalores y si el origen es fuente o sumidero.

- 2- Algunas de las hipótesis las podrá corroborar cuando realice el plano de las fases (fig. 2).

- 3- Analizar el comportamiento de x_1 y x_2 en función del tiempo (fig. 3 y 4).

Se plantea así una articulación entre las representaciones gráficas y el sistema de ecuaciones de primer orden, permitiendo el estudio de las mismas a través de su campo de direcciones y de la familia de curvas isoclinas. El trabajo conjunto con utilitarios como el Maple, que permiten encontrar la solución analítica, posibilitan una mayor comprensión y un mayor análisis de lo que significa encontrar la familia de soluciones de la ecuación diferencial.

Conclusiones

Figura 1.

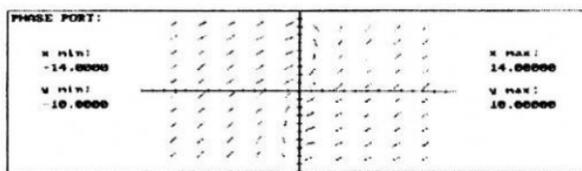


Figura 2.

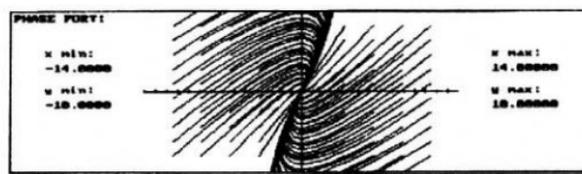
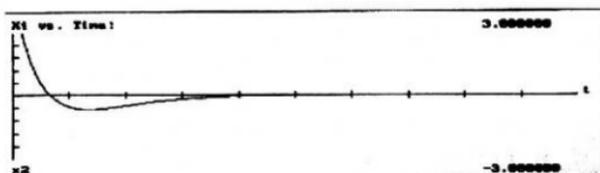


Figura 3.



Figura 4.



Los resultados obtenidos fueron excelentes ya que las hipótesis planteadas en su momento fueron corroboradas de una manera satisfactoria. Los alumnos no tuvieron inconvenientes para relacionar el diagrama de fase obtenido con el tipo de raíces del polinomio característico, ni para identificar el sistema de ecuaciones diferenciales con la gráfica a que dan origen.

Se puso en evidencia que el trabajar con un software adecuado potencia la comprensión del tema ya que permite la concreción de diversos conceptos matemáticos, y el uso de múltiples representaciones (simbólico, numérico y gráfico) de un mismo objeto matemático facilita, mediante la observación de sus diversos aspectos, la inducción de sus variadas propiedades.

La utilización de softwares simples se convierte en una herramienta que posibilita, por un lado, ahorrar tiempo al evitar los cálculos rutinarios lo que favorece que puedan dedicarse más al estudio de las soluciones y a elaborar conclusiones a partir de las mismas y, por otro, desarrollar la comprensión intuitiva a través de la experimentación. Es conveniente puntualizar que esto no se plantea como sustituto del estudio de los aspectos analíticos y deductivos que forman parte de cualquier estudio matemático en serio, sino que se constituye en un complemento de los mismos.

Por último, debemos mencionar que hemos notado inquietud por parte de los alumnos de continuar profundizando el tema. Algunos se nos acercan con el fin de consultarnos acerca de modelos que están realizando para otras asignaturas, evidenciando un marcado interés por esta temática.

Bibliografía

- Chevallard, Y. (1991): *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aique Grupo Editor. Buenos Aires.
- Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1997): *Estudiar matemática. El eslabón perdido entre enseñar y aprender*. ICE-HORSORI, Universitat de Barcelona, España.
- Godino, J. y Batanero, M. C. (1998): *Pasos hacia una teoría del significado y la comprensión en didáctica de las matemáticas. Teoría y métodos de investigación en Educación Matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.
- Blanchard, P.; Devaney, R. y Hall, G. (1999): *Ecuaciones diferenciales*. International Thomson Editores, México, p. 1.
- Puig, L. (1998): *Investigar y enseñar. Variaciones de la educación matemática: una empresa docente*. Universidad de los Andes, Colombia.
- Hitt Espinosa, F. (1996): *Investigaciones en matemática educativa*. Dpto. de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) (1998): *Sobre la enseñanza y aprendizaje de matemáticas en el nivel universitario*. Documento de Discusión. OMA.
- Boyce, W.: "New Directions in Elementary Differential Equations" en *The College Mathematics Journal*, Special Issue on Differential Equations, Vol 25, N° 5, noviembre de 1994, USA.
- Boyce, W. y Di Prima, R. (1997): *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. 3a. Edición, Limusa, México.
- Hüseyin, KoVak (1989): *Differential and difference equations Through Computer Experiments*. Second Editions, Springer Verlag, New York.