ciencias económicas 5.01 / páginas 95-99 / Divulgación

Abordaje analítico versus abordaje por medios tecnológicos

María Cecilia Municoy
Facultad de Ciencias Económicas - UNL
E-mail: cmunicoy@fce.unl.edu.ar

Palabras clave
• *ecuaciones diferenciales simultáneas*
• *soluciones complejas*
• *ecuación característica*
• *comprensión*
• *software*

Resumen

El presente artículo aborda la problemática de la conveniencia y/o ventajas que presenta el desarrollo analítico de un concepto matemático frente a la resolución por medios tecnológicos a través de un ejemplo concreto, como es el caso de la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales con solución en el campo complejo. Se focalizan las diferencias que presentan ambos abordajes.

Introducción

En la actualidad, donde se tiene fácil acceso a equipos que permiten el procesamiento de información e instantánea resolución simbólica de problemas; donde, además, se cuenta con una amplia disponibilidad de softwares específicos como MATHCAD, MATLAB, DERIVE, etc., es común preguntarse si es necesario desarrollar los métodos analíticos elementales para resolver ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales.

Desde el punto de vista académico se pueden enfatizar varias razones que justifican el tratamiento de dichos métodos analíticos. Podemos mencionar a la integración de contenidos específicos de la matemática. Por ejemplo, resolver un problema de ecuaciones diferenciales simultáneas, a menudo requiere de un considerable y necesario análisis preliminar. La comprensión de un proceso natural, por lo general se logra al combinar o partir de modelos más sencillos y más básicos. Todo software requiere una correcta carga de las variables que se analizarán o se van a resolver; este paso es imposible de sortear sin la comprensión previa del problema desde un razonamiento matemático.

Desde este punto de vista –y de acuerdo con la experiencia recogida en mis años de docencia– la práctica me ha permitido determinar claramente en que temas los alumnos presentan mayor dificultad para trabajar. ¿Cómo hacer entonces que los alumnos de la Licenciatura en Economía –cuya motivación principal no es el estudio de la matemática– sientan que el tratamiento de ciertos temas les ayudará a entender mejor la teoría, desarrollará su curiosidad, creará un desafío a su capacidad y dejará tendido un puente hacia las enormes posibilidades de aplicaciones futuras?

Una forma de invitar a razonar, estimular el pensamiento y lograr que los estudiantes no sientan rechazo por la matemática es presentar ciertos métodos de resolución de una manera más sencilla, sin perder por ello rigor en su tratamiento.

Ecuaciones diferenciales simultáneas con solución en el campo complejo

La idea se centra en utilizar los conocimientos previos que el alumno maneja ya con facilidad para aplicarlos en la búsqueda de soluciones complejas de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Primera cuestión importante para tener en cuenta al estudiar sistemas dinámicos es que una única ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots\ldots\ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad \textbf{(I)}$$

siempre puede reducirse a un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden. En efecto, introduciendo las variables $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ definidas por

$$x_1 = y,\ x_2 = y',\ x_3 = y'',\ \ldots\ldots,\ x_n = y^{(n-1)}$$

se concluye de inmediato que:

$$x'_1 = x_2,\ x'_2 = x_3,\ \ldots\ldots,\ x'_{n-1} = x_n \qquad \textbf{(II)}$$

y, por la ecuación **(I)**, es:

$$x'_n = f\left(t, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n\right) \qquad \textbf{(III)}$$

Las ecuaciones **(II)** y **(III)** son un caso especial del sistema más general:

$$x'_1 = f_1\left(t, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n\right)$$

$$x'_2 = f_2\left(t, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x'_n = f_n\left(t, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n\right)$$

que es un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden, tal como lo habíamos mencionado.

Por razones de conveniencia y claridad, en lo que sigue del desarrollo limitaré la discusión a sistemas de sólo dos ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes. Además, aunque puede parecer exagerado aplicar la notación matricial a un simple sistema de dos ecuaciones, la posibilidad de extender la misma al caso de n ecuaciones hace que valga la pena esta notación.

Cuando desarrollamos este tema, el alumno maneja ampliamente el análisis de una única ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes y término constante como:

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} y'(t) + a_n y = b \qquad \textbf{(IV)}$$

Esta ecuación puede expresarse como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden. Recordando una propiedad conocida ya por los estudiantes: "Si y_c es la función complementaria, es decir, la solución general (con constantes arbitrarias) de la ecuación homogénea de **(IV)**, y si y_p es la integral particular, es decir, cualquier solución particular (sin constantes arbitrarias) de la ecuación completa **(IV)**, entonces $y(t) = y_c + y_p$ es la solución general de la ecuación completa **(IV)**". Cada término de $y(t)$ tiene una interpretación económica significativa. El término y_p representa el nivel de equilibrio intertemporal de la variable relevante (y_p es constante con respecto al tiempo), mientras que y_c muestra, para cada momento de tiempo, la desviación del equilibrio de la trayectoria temporal y (t).

La propiedad citada es aplicable a los sistemas dinámicos y por lo tanto la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales siempre consistirá en un conjunto de integrales particulares (valores de equilibrio intertemporal de las distintas variables) y funciones complementarias (desviaciones respecto del equilibrio). Las funciones complementarias siempre se basarán en las ecuaciones homogéneas del sistema; y la estabilidad dinámica del sistema dependerá de los signos de las raíces características de las funciones complementarias.

La ecuación diferencial de segundo orden

$$y''(t) + a_1\, y'(t) + a_2\, y(t) = \mathrm{b} \qquad \textbf{(1)}$$

se puede escribir como un sistema de dos ecuaciones lineales de primer orden

$$\begin{cases} x'(t) + a_1 x(t) + a_2 y(t) = b \\ y'(t) - x(t) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

o también en notación matricial

$$Iu + Mv = d$$

donde las matrices son:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad u = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \; d = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es importante observar que la ecuación **(1)** y el sistema de ecuaciones equivalente **(2)**, deben tener ecuaciones características idénticas. Esto se puede verificar fácilmente pues la ecuación característica de **(1)** es:

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

la ecuación característica de **(2)** es:

$$|\, rI + M \,| = 0$$

que resolviendo el determinante

$$\begin{vmatrix} r + a_1 & a_2 \\ -1 & r \end{vmatrix} = 0$$

se obtiene la ecuación

$$r^2 + a_1 \mathrm{r} + a_2 = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Tal como se mencionó anteriormente las ecuaciones **(3)** y **(4)** son iguales. Esta información es muy útil llegado el momento de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales con soluciones complejas.

Supongamos entonces que el sistema dinámico **(2)** tiene soluciones complejas, lo cual significa que las raíces de la ecuación característica tienen la forma: $r_1 = h + vi$ y $r_2 = h - vi$.

Ahora bien, al igual que ocurre con las ecuaciones diferenciales de segundo orden, resultará útil transformar las soluciones del sistema $x(t)$ e $y(t)$ en formas equivalentes de funciones circulares para facilitar su interpretación.

Para ello, una vez halladas las raíces características, calculamos la solución general de la ecuación homogénea de **(1)** y obtenemos

$$y_c\,(t) = A_1 e^{\,(h+vi)\,\mathrm{t}} + A_2 e^{\,(h-vi)\,\mathrm{t}}$$

que se puede expresar

$$y_c\,(t) = e^{ht}\,(\,A_1 \cos vt + A_2 \operatorname{sen} vt\,)$$

Luego, sabiendo que la solución general buscada es $y(t) = y_c + y_p$, se obtiene

$$y(t) = e^{ht}\,(\,A_1 \cos vt + A_2 \operatorname{sen} vt\,) + y_p \qquad \textbf{(5)}$$

Conociendo $y(t)$ podemos utilizar el sistema de ecuaciones diferenciales para obtener la ecuación de $x(t)$ en términos de $y(t)$ e $y'(t)$.

En **(2)** es: $x(t) = y'(t)$, por lo tanto, derivando **(5)** se obtiene:

$$x(t) = he^{ht}(A_1 \cos vt + A_2 \operatorname{sen} vt) + e^{ht}(-vA_1 \operatorname{sen} vt + vA_2 \cos vt) + y'_p$$

y resolviendo es

$$x(t) = e^{ht}(A_3 \cos vt + A_4 \operatorname{sen} vt) + y'_p$$

De esta forma se pueden hallar las trayectorias temporales

$$x(t) = e^{ht}(A_3 \cos vt + A_4 \operatorname{sen} vt) + y'_p$$

$$y(t) = e^{ht}(A_1 \cos vt + A_2 \operatorname{sen} vt) + y_p$$

soluciones del sistema **(2)**.

Se hace notar que la resolución por el medio analítico permite la integración de conceptos previos matemáticos tales como: ecuaciones diferenciales lineales, ecuaciones diferenciales de orden superior, sistemas de ecuaciones diferenciales y sus correspondientes interpretaciones económicas.

En **(2)**, el sistema tiene dos ecuaciones diferenciales. Si el sistema tiene tres ecuaciones diferenciales, la ecuación característica tendrá grado tres. En general si el sistema tiene n ecuaciones diferenciales, la ecuación característica tendrá grado n. Teniendo en cuenta que resolver una ecuación característica de grado n no siempre es una tarea fácil y muchas veces, en el estudio que realizamos, no interesa la expresión analítica de las soluciones del sistema sino la convergencia o divergencia de las trayectorias temporales, es posible recurrir a un software apropiado en caso de sistemas con muchas ecuaciones diferenciales.

Considero poco atractivo para el lector desarrollar un ejercicio de ecuaciones diferenciales simultáneas cuya solución pueda hallarse, por ejemplo, con MATLAB pues sólo podría mostrar una serie de pasos ordenados que se deben seguir, con una sintaxis determinada, para obtener la solución buscada.

A diferencia de la resolución analítica, la resolución a través de un software implica la sistematización de la carga de datos para que la máquina procese la información y proporcione un resultado determinado.

Conclusión

Es claro que el alumno de la Licenciatura en Economía requiere herramientas matemáticas que le resulten útiles para el desarrollo de la formación profesional y su futura actividad, y es fundamental consolidar la base de conocimientos matemáticos que le otorguen un sólido razonamiento para la resolución de problemas inherentes a su actividad profesional.

Hemos visto como el trabajo analítico permite la integración de contenidos y su aplicación a la problemática a resolver mientras que la resolución de un determinado problema utilizando medios tecnológicos sólo requiere la metodología de carga ordenada de datos.

Desde esta óptica, en la cátedra de *Matemática para economistas* se prioriza dotar de una sólida formación básica para el desarrollo de la formación de sus alumnos, otorgándoles herramientas para trabajar en las materias específicas de la carrera.

Bibliografía

- Chiang A. (1999) *Métodos fundamentales de Economía Matemática*. Traduc. Muñoz Murgui F. y Sala Garrido R. 3ra edic., Chile, McGraw-Hill.
- Boyce W. y DiPrima R. (1998) *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* Traduc. Villagómez Velásquez H. 4ta. edic. México: Limusa.
- Nagle R. y otros (2005) *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* Traduc. Palmas Velazco, O., 4ta. edic., Pearson, México.
- Simmons G. (1999) *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas.* Traduc. Abellanas Rapun L. 2da. edic., McGraw-Hill, España
- Zill D. (1997) *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* 6ta. edic.: Thomson Editores, México.