ciencias económicas 5.02 / páginas 31-44 / Investigación

La construcción del sentido de conceptos matemáticos desde la modelación

Viviana Cámara
Prof. Adjunta de Matemática Básica, FCE, UNL
E-mail: vcamara@fce.unl.edu.ar

Susana Marcipar
Prof. Titular de Matemática Básica, Secretaria de Ciencia y Técnica FCE. UNL
E-mail: susmarci@fce.unl.edu.ar

Resumen

Este informe plantea como eje de discusión la necesidad de brindar oportunidades educativas que favorezcan el *desarrollo del sentido* de los conceptos matemáticos, entendido éste como la capacidad para captar la noción central de los contenidos a los que alude dicha disciplina.

Se utiliza conceptualmente a la modelación matemática como un subconcepto de la resolución de problemas y se la trata como herramienta didáctica y pedagógica válida para construir el sentido de conceptos matemáticos.

Se describe la planificación de las fases correspondientes al proceso de modelación aplicada al caso de la producción de carne aviar, más específicamente referido a la optimización del momento de faena de aves productoras de carne en establecimientos industriales argentinos. El problema que se formula se identifica con el modelo de crecimiento logístico formulado por Verhurst en 1837, que es esencialmente el modelo de Malthus modificado.

Poner el acento en la construcción del sentido de los conceptos matemáticos a través de la modelación, es asumir desde lo pedagógico una visión epistemológica de la matemática que la entiende como una ciencia en permanente construcción y que surge como un producto cultural y social.

Palabras clave
• *modelación*
• *sentido de conceptos matemáticos*

Abstract

This paper puts forward for discussion the need to offer educative opportunities that promote the *development of the sense* of mathematical concepts understood as the capacity to grasp the central notion of disciplinary contents.

Mathematical modelling is used as a problem solving sub-concept and it is utilised as a didactic and pedagogical tool that can aid in the construction of the sense of mathematical concepts.

We describe the planning of the phases corresponding to the modelling process applied to the production of poultry meat, more specifically, to the optimisation of poultry slaughter in Argentine industrial plants. The problem we pose relates to the model of logistic growth formulated by Verhurst (1837), which is essentially a modification of Malthus's model.

To focus on the construction of mathematical concepts through modelling implies adopting, from a pedagogical perspective, an epistemological stand that understands mathematics as a science under construction and as a cultural and social product.

Key words
• *modelling*
• *sense of mathematical concepts*

1. Algunos problemas de la actual educación matemática

En el imaginario social, la educación matemática queda caracterizada como una educación basada en la transmisión de información acerca de contenidos matemáticos, que se concentra más en el desarrollo de técnicas y algoritmos que en el significado de los conceptos. La construcción de dicho imaginario, es el resultado o impacto devenido por los modos de enseñanza, los modos de aprendizaje, las características de las evaluaciones y también por el escaso grado de apropiación del sentido y significado de los conceptos matemáticos recibidos a lo largo del proceso de formación matemática. En dicho enfoque tradicional de la educación matemática es posible señalar, entre otras, las siguientes problemáticas o deficiencias:

• Falta de vinculación entre conceptos matemáticos y el contexto socio-cultural.

• Débil participación de los alumnos en la construcción de razonamientos.

• Escasa innovación por parte de los docentes en cuanto a las estructuras de las clases de matemática, por ejemplo se presentan, con frecuencia, secuencias del estilo: **a)** presentación teórica de un tema **b)** presentación de ejemplos asociados al concepto previamente desarrollado y **c)** resolución de los denominados problemas de aplicación estereotipados.

• Ausencia de espacios que permitan reflexionar acerca de valores y criterios que subyacen en toda dinámica educativa y en particular en el aula de matemática.

La situación descripta nos lleva a considerar las últimas investigaciones basadas en el constructivismo y más precisamente las que sostienen a la enseñanza de la matemática como un proceso de construcción social y cultural (Schoenfeld, 1992;

Godino, 1996; Bishop, 1999). Dichas investigaciones marcan la necesidad de *desarrollar el sentido* de los conceptos matemáticos entendido éste como la capacidad para captar el "corazón" del contenido o captar la noción central del concepto.

También Sierpinska (1990) y Sadovsky (2005) sostienen que, en lo posible, la fuente de sentido debe provenir de los contextos extramatemáticos que son los que podrían permitirle al alumno comprender el porqué y el para qué de los conceptos. Entonces, si nuestra intención es superar en alguna medida las deficiencias señaladas debemos favorecer una educación matemática que permita propiciar un aprendizaje basado en los significados por sobre las técnicas –otorgando un sentido al conocimiento matemático– y que además destaque los usos de la matemática relacionados con el entorno porque, así es como ha incidido la matemática tanto en la vida diaria de las personas como en la solución de los problemas de la sociedad.

Por ello, resulta necesario el abordaje de la enseñanza de conceptos matemáticos desde su inserción con temas de la realidad ya que "la comprensión de un objeto matemático en sentido integral exige, que el sujeto identifique en el objeto un para qué, una intencionalidad" (Maier, 1992)[1].

2. Modelización matemática vs. modelación matemática

Un modelo matemático es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, un fenómeno en cuestión. Construir un modelo para una situación real significa expresar en lenguaje matemático sus diferentes rasgos y propiedades más importantes con el fin de anticipar, prever o simular soluciones a los problemas particulares que ella plantea.

La modelización matemática consiste en el proceso de transformar problemas de la realidad a un lenguaje matemático –modelos– y operar en dicho lenguaje de modo tal que los resultados obtenidos sean nuevamente traducidos a un lenguaje coloquial para interpretar las soluciones y analizar la validez del modelo construido.

De hecho, el profesional matemático realiza la construcción de modelos haciendo uso de su conocimiento disciplinar y relacionándose interdisciplinariamente con otros profesionales para analizar la validez del modelo.

Biembengut y Hein (2000) consideraron la esencia de los procesos de modelización matemática, los organizaron de modo tal que puedan ser utilizados en la educación matemática como herramienta didáctica y pedagógica, y denominaron a dicho método *modelación matemática*. De modo que, para dichos autores, en educación matemática los modelos son *herramientas o instrumentos* para enseñar conceptos matemáticos.

En el presente artículo, se utiliza a la modelación matemática como una herramienta didáctica y pedagógica que permite construir el sentido de conceptos matemáticos.

3. La modelación matemática como estrategia didáctica en la construcción del sentido de conceptos matemáticos

La modelación matemática –estrategia didáctica y pedagógica– asume a la actividad matemática como un proceso continuo de resolución de problemas encuadrados en contextos reales permitiendo, a su vez, la combinación de diferentes tareas, según las necesidades de aprendizaje de los estudiantes. Su principio fundamental consiste en que *los mo-*

(1) Citado por Godino, J. (1996), en "*Significado y comprensión de los objetos matemáticos*".

delos son tratados como instrumentos para enseñar conceptos matemáticos (Biembengutt & Hein, 2000). Cabe destacar que todo proceso de obtención de un modelo es un proceso de resolución de problema. Sin embargo, el recíproco no se verifica, ya que existen problemas en cuyos enunciados el modelo de comportamiento de las variables intervinientes está explícito y la resolución del problema consiste en el cálculo de algún parámetro, variable o constante desconocido, es decir estos problemas no consisten en la "obtención de un modelo" sino en la interpretación y explicación del modelo dado.(2)

Por ello, la modelación es un sub-concepto de la resolución de problemas, que presenta características y condiciones específicas.

La aplicación de esta metodología, se inicia a partir de una temática del entorno social y de ella se deberá delimitar un problema que sea factible de resolver mediante el lenguaje formal de la matemática, es decir, que sea *matematizable*.

Esta propuesta de trabajo propicia tanto la transferencia de conocimientos de un contexto a otro (contexto no matemático al matemático), como la conceptualización de contenidos disciplinares y el otorgamiento de sentido a éstos.

Enseñar y aprender a generar un modelo implica estar atento a una serie de condicionantes curriculares, pedagógicos y didácticos que permitan organizar el proceso educativo.

La aplicación de esta estrategia implica atender necesariamente, desde la perspectiva docente, las siguientes cuestiones:

a) Aspectos generales de la planificación: **i)** Nivel educativo al que está dirigida la propuesta educativa, **ii)** Contenidos disciplinares matemáticos que se deberán o se desean abordar, **iii)** Identificación de modelos matemáticos que permitan partir de datos empíricos y posibiliten la incorporación de los contenidos disciplinares en su construcción.

b) Aspectos estructurales de planificación para el desarrollo de las cuatro fases que integran la *modelación matemática*, a saber:

- **Fase 1: Sensibilización:** esta fase inicia la actividad matemática al proceder a la elección de una temática del entorno social de los alumnos, contenida en una disciplina no matemática recurriendo a la idea de que el conocimiento está en el contexto. Luego, se identifican las diferentes disciplinas con las que se puede abordar la temática o problemática, seleccionándose una de ellas.
- **Fase 2: Formulación del problema:** se formula una cuestión a resolver a partir del análisis realizado en la fase anterior es decir, se delimita un problema.
- **Fase 3: Aproximación:** es el momento en el cual se intenta traducir el comportamiento de las variables intervinientes con expresiones del lenguaje matemático. Se utilizan entonces aproximaciones lineales, cuadráticas, polinómicas y/o representaciones gráficas para tender a la expresión matemática que caracteriza la situación.
- **Fase 4: Meta-análisis:** Básicamente es la fase de validación o contrastación del modelo obtenido. Se analizan y examinan las ideas, proposiciones, supuestos y procedimientos que llevaron a la construcción del modelo hallado. Se construyen los argumentos para justificar la validez o no del modelo.

Es importante aclarar que la planificación de la modelación matemática, como estrategia pedagógica para la conformación de sentidos conceptuales, requiere de fases y no de etapas porque este último acarrea "...una metáfora mecánica que alude a estaciones en un cierto camino. Por el contrario, el término fase permite introducir una metáfora más rica y más próxima a la complejidad real de las relaciones que se dan entre los momentos del

(2) Piénsese en problemas tales como "la trayectoria de un proyectil", "el comportamiento del mercado en cuanto a equilibrio oferta-demanda, costos-ingreso, etc." cuya resolución no conlleva la obtención del modelo matemático puesto que el modelo es un dato explícito sino que se trata de problemas de aplicación.

proceso" (Samaja, J. 1995). Significa que cada fase es un momento del proceso y a su vez en cada una de ellas es posible incorporar otra fase de modo tal que, la identificación de las fases con 1, 2 ...4 sólo tiene carácter enunciativo pero no de ubicación temporal estricta.

4. Un caso de modelación matemática

En este apartado se describe la planificación de las fases de una modelación matemática aplicada al caso: *Producción de carne aviar, más específicamente optimización del momento de faena de aves productoras de carne en establecimientos industriales Argentinos*. El problema que se formula se identifica con el modelo de crecimiento logístico formulado por Verhurst en 1837, que es esencialmente el modelo de Malthus modificado.

Las condiciones y especificaciones técnicas para desarrollar el caso son las siguientes:

- El nivel educativo recomendado es el Ciclo inicial universitario.
- Los contenidos disciplinares abordados y los conceptos a los que se dirige la construcción de sentido son:

a) Relación funcional donde se trabaja el sentido de "existencia" y "unicidad" de una variable respecto a otra.

b) Función polinómica de grado uno, donde se construye el sentido de "pendiente" de una recta.

c) Funciones polinómicas de grado mayor a uno, donde se construye el sentido de la "variabilidad de la tasa media punto a punto" es decir, porqué aparece una curva no rectilínea.

d) Ecuación diferencial donde se pone énfasis en el sentido dinámico de la "relación existente entre una variable y la tasa de crecimiento relativo" de dicha variable.

e) Concavidad y convexidad de una curva para construir el sentido del Punto de inflexión como aquel en donde se produce "el quiebre en la rapidez del crecimiento o decrecimiento de una curva".

- Disponer de una sala con computadoras, máximo dos alumnos por máquina, conexión a Internet y algún software matemático (Derive, Mathematic, etc.)
- El tiempo estimado para el desarrollo completo del caso es de 30 hs. En ellas se incluyen tanto los encuentros presenciales como las actividades autónomas de los alumnos. Cabe destacarse que la distinción entre actividades presenciales y las propuestas como tarea y de resolución autónoma para los alumnos estará determinadas tanto por las características del grupo al que va dirigido y las condiciones para el aprendizaje como por la personalidad y experiencia del docente. Entendiendo que los alcances del presente trabajo impiden la presentación explícita de las funciones y tareas de los actores solo mostramos, en este artículo, descriptivamente el proceso de modelación.

En la fase de Sensibilización se aborda el fenómeno a modelar desde la perspectiva biológica y económica. Para ello, se indican páginas en Internet en las cuales se obtiene información sobre la producción de carne aviar. Se parte de datos empíricos referidos al peso semanal promedio de los pollos, que se muestran en la Tabla 1:

Tabla 1. Peso de los pollos, en g., según días de vida

Edad (días)	Peso (g)
0	42
7	167
14	428.5
21	819.5
28	1316
35	1881.5
42	2474
49	3150.5
56	3579
63	4038

Fuente: *Dirección de ganadería. MECON. Argentina.*
Gentileza: *Karina Lamelas*

El abordaje de la temática "producción de carne aviar" implica un análisis de diferentes fuentes de información con distintas perspectivas, según las disciplinas involucradas: economía, alimentación, salud, consumo, estadística, marketing, matemáticas, etc. De este análisis pueden surgir situaciones problemáticas orientadas a la exportación, la importación, la calidad de la carne aviar, consumo interno del país, determinación de costos, influencia de los precios de los productos alternativos, etc.

Según el debate y análisis que se realice se arriba a la formulación de diferentes interrogantes (fase 2: formulación del problema).

Para los fines del presente artículo se considera al siguiente:

¿Cuál es el momento óptimo, desde un punto de vista económico, para la faena de los pollos?

Una vez formulada la pregunta se comienza a desarrollar la tercera fase: aproximación, en la cual se identifican y se comienza a "recorrer" los contenidos disciplinares que se suponen pueden conducir a la solución del interrogante.

Así, de la Tabla 1, al analizar las características que presenta la relación de las variables: tiempo transcurrido y peso, es posible asociarlas al concepto de relación funcional interpretando las nociones de "existencia" y "unicidad" para cada fila de la tabla como una actividad tendiente a contextualizar la idea de función.

Una cuestión no menor es la de explicitar que si bien los datos de esta tabla nos brinda información resumida y promediada del peso de los pollos, es sabido que en cualquier instante de vida se tiene uno y sólo un valor para la variable peso.

Ahora bien, la respuesta que se busca es un valor del dominio de dicha relación funcional sin embargo, es importante en términos económicos conocer el peso promedio del pollo en el momento de ser faenado dado que mientras el pollo sigue vivo continúan aumentando los costos para su supervivencia, sin embargo, el crecimiento de la variable peso no acompaña dichos costos. Es decir, la relación costos beneficio deja de ser óptima.

Esta situación conduce a la necesidad de encontrar las coordenadas de un punto que pertenezca a la gráfica de la relación funcional planteada por la Tabla 1.

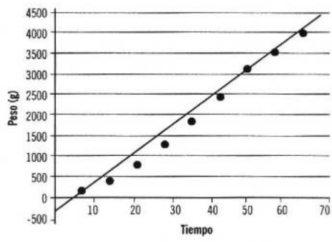
Entonces, la tarea que debemos enfrentar es la de encontrar la expresión matemática que mejor caracteriza al crecimiento de los pollos a lo largo de su vida pero conociendo sólo algunos valores, los dados en la Tabla 1.

En la búsqueda de expresiones matemáticas, modelos, que caractericen a la relación funcional que muestra la Tabla 1, puede plantearse la aplicación de las Funciones Polinómicas, y Funciones Trascendentes tal como se muestra en las siguientes aproximaciones:

4.1. Primera aproximación

Una aproximación modelizada de la Tabla 1, basada en la Función Polinómica de primer grado es: $p(t) = 71.0357\,t - 330.25$, cuya representación gráfica se muestra en el Gráfico 1.

Gráfico 1. Representación gráfica de la función $p(t) = 71.0357\,t - 330.25$



Se pueden obtener diferentes ecuaciones para la función de primer grado ya que al considerar distintos pares de puntos, en la Tabla 1, se obtienen diferentes valores de los parámetros: pendiente y ordenada al origen.

En la fase meta-análisis corresponde discutir la validez del modelo hallado, esto es constatar si la ecuación hallada, o las halladas, acompaña al comportamiento empírico del crecimiento de los pollos.

A tal efecto se propone realizar un razonamiento que partiendo del sentido de la pendiente de la recta se pueda verificar si dicho sentido se corresponde o no con el comportamiento de los datos de la Tabla 1.

Al pretender validar el modelo lineal obtenido respecto al comportamiento real del crecimiento de los pollos, resulta que el modelo lineal queda refutado. Sin embargo, la construcción y análisis de la gráfica, aún cuando los alumnos conozcan modelos lineales permiten afianzar el sentido de la variación uniforme en un contexto extramatemático. La refutación deriva de la observación de la Tabla 2, en la que se registran las variaciones semanales de la tasa media de crecimiento en gramos y su comparación con el sentido *constante que asigna la pendiente de la recta hallada*.

Es decir, para el modelo lineal hallado, la tasa media de crecimiento semanal es constante e igual a 71.0357 gramos y en la Tabla 2 observamos –en cada reglón– la variabilidad de dicha tasa según el tiempo de vida de los pollos.

Tabla 2. Tasa media de crecimiento semanal del peso según datos empíricos

Δt (dias)	Δp (g)	Δp/Δt (tasa media)
7 – 0 = 7	167-42 = 125	125/7 = 17.86
14 -7 = 7	428.5-167 = 261.5	261.5/7 = 37.36
21-14 = 7	819.5-428.5 = 391	391/7 = 55.86
28-21 = 7	1316 – 819.5 = 496.5	496.5/7 = 70.93
35-28 = 7	1881.5 – 1316 = 565.5	565.5/7 = 80.78
42-35 = 7	2474 – 1881.5 = 592. 5	592.5/7 = 84.64
49-42 = 7	3150.5 – 2474 = 676.5	676.5/7=96.64
56-49 = 7	3579 – 3150.5 = 428.5	428.5/7=61.21
63-56 = 7	4038 – 3579 = 459	459/7 = 65.57

La falta de validez del modelo lineal como representativo del crecimiento de los pollos, permite plantear la indagación sobre otras funciones como lo son las funciones polinómicas no lineales. Es decir, la falta de ajuste a través del modelo lineal para caracterizar el comportamiento de la evolución del peso constituye la falta de validez.

4.2. Segunda y Tercera aproximación

Las expresiones analíticas que se pueden obtener de la Tabla 1 para modelizar con funciones polinómicas de segundo grado y de cuarto grado[3] requieren de la aplicación de conceptos (c.1 y c.2) y el desarrollo de habilidades cognitivas (h.1 y h.2), a saber:

(3) Análogamente, se podrían utilizar los datos empíricos (Tabla 1) para obtener los polinomios de tercer, quinto, sexto y hasta noveno grado.

c.1) Ecuación general de un polinomio de grado n, $P(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0,\ a_n \neq 0$

c.2) Sistema de ecuaciones lineales para obtener los coeficientes de los polinomios aproximantes, es decir los a_i, $\forall$ i: 0,...,n.

h.1) Resolución de sistema de ecuaciones lineales, que incluye la transferencia de los conceptos de matrices, determinantes y métodos de resolución.

h.2) Interpretación de los resultados obtenidos al resolver el sistema de ecuaciones para construir el polinomio modelizante.

Así, los conceptos y las habilidades cognitivas se conjugan para obtener de la Tabla 1, un polinomio de segundo grado y un polinomio de cuarto grado.

Ellos son, respectivamente:

$p(t) = 0.777210t^2 + 27.5119\,t - 63.6666$, y

$P(t) = -0.00052\,t^4 + 0.03741\,t^3 + 0.29252\,t^2 + 21.0391\,t - 6.2$ donde $0 \leq t \leq 63$.

Los Gráficos 2 y 3 ilustran las representaciones gráficas de los polinomios

Gráfico 2. Representación gráfica del polinomio de segundo grado

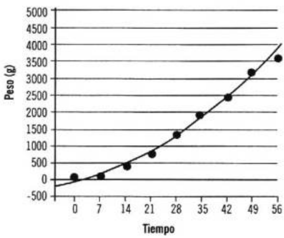
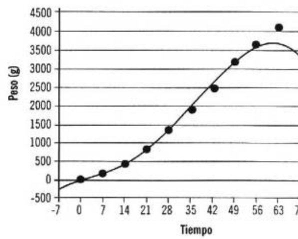


Gráfico 3. Representación gráfica del polinomio de cuarto grado



Obtenidas estas modelizaciones, cabe proceder a la fase meta-análisis en la que nos interrogamos acerca de la validez del modelo (o los modelos) en cuanto su fidelidad para caracterizar o representar el comportamiento real de crecimiento de los pollos.

En este sentido, los polinomios de segundo y cuarto grado quedan refutados mediante dos razonamientos diferentes. El primero de ellos está basado en el cálculo de los errores relativos de ambos polinomios con respecto a los datos experimentales. Dichos errores resultan muy significativos, aproximadamente, 30% para el polinomio de segundo grado y 13% para el polinomio de cuarto grado.

El otro razonamiento que permite refutar la validez de los modelos hallados está basado en el sentido común entendiendo que cualitativamente en todo ser vivo el peso tiende a estabilizarse. No se presenta el crecimiento sin límites. En estas gráficas se observa la falta de estabilización del crecimiento a partir de un cierto tiempo de vida. Es decir, las gráficas indican que sea cual fuera la edad del pollo, éste continúa creciendo (Gráfico 2) o su peso desciende a partir de los 56 días, aproximadamente (Gráfico 3).

4.3. Cuarta aproximación

De manera análoga a las anteriores, pueden refutarse los polinomios de cualquier grado como modelos representativos del comportamiento de crecimiento de los pollos. Es decir, las sucesivas fases de meta-análisis permiten asegurar que el modelo buscado no responde a las características de una función algebraica y por lo tanto, se hace necesario indagar con aproximaciones que incorporen a otros conceptos matemáticos.

Inclusive, las aproximaciones que se pueden obtener con las funciones exponenciales y las logarítmicas también resultan insatisfactorias como modelos que caractericen el comportamiento del peso de los pollos según el tiempo de vida. El modelo exponencial presenta una tasa de crecimiento tal que el porcentaje de la diferencia entre una observación a otra es constantemente creciente y por ello no presenta la estabilidad en el crecimiento del pollo en un determinado momento de su vida.

Consideremos entonces, que la función buscada debe contener esencialmente dos características, a saber: **a)** estabilidad a partir de un cierto punto; **b)** la tasa de crecimiento relativo del peso es variable en las diferentes etapas de vida del pollo.

Estas dos características son requeridas simultáneamente y pueden ser asociadas como resultado de la resolución de una ecuación diferencial, ya que las ecuaciones diferenciales son modelos matemáticos que expresan simultáneamente el comportamiento comparativo dinámico de varias variables en un determinado caso.

Por ello, para formular una ecuación diferencial que modele la situación se hace necesario la introducción de los conceptos de tasa de cambio, derivada y límite funcional. Cuestiones éstas que pueden ser abordadas analizando el ritmo de crecimiento del pollo diariamente (tasa de cambio) para luego conocer la rapidez con que aumenta el peso del pollo en cada instante de tiempo (derivada y límite).

Para obtener el modelo diferencial comenzaremos a trabajar sobre la tasa de crecimiento del peso. Ahora bien, cabe preguntarnos: a partir de los datos originales ¿de qué manera estimamos la tasa de crecimiento? Para ello aplicaremos el método de estimación bilateral desarrollado por Hughes-Hallet, Gleason, A. *et al* (2000), en el libro titulado *Cálculo* (pág. 609).

Así, en nuestro caso disponemos de datos discretos: el peso de los pollos semana a semana. Entonces habrá que estimar la tasa de crecimiento, utilizando $\Delta p/\Delta t$. Según Hughes-Hallet, hay distintas formas de realizar esta aproximación. Unas se llaman estimaciones unilaterales (derecha o izquierda) porque en ellas interviene la sustitución de los pesos "de un lado" de la semana pero no del otro.

Por ejemplo:

$$\text{a los 21 días} \approx \frac{\text{peso a los 28 días - peso a los 21 días}}{7}$$

(estimación unilateral derecha) o,

$$\text{a los 21 días} \approx \frac{\text{peso a los 21 días - peso a los 14 días}}{7}$$

(estimación unilateral izquierda)

En general, las dos son estimaciones igualmente buenas (o malas) de la tasa de crecimiento. Una aproximación más exacta se obtiene promediando las dos estimaciones unilaterales, generando una *estimación bilateral*.

Así la estimación bilateral a los 21 días se calcula como: $\frac{p(28) - p(14)}{14}$

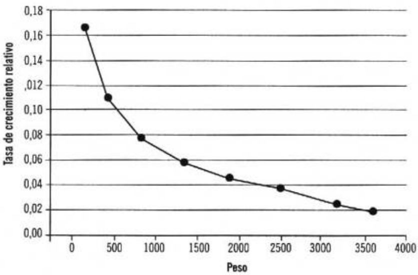
En la Tabla 3 visualizamos las estimaciones bilaterales. En la segunda columna la tasa de crecimiento y, en la tercera columna la tasa de crecimiento relativa.

Tabla 3. Estimación bilateral de la tasa de crecimiento y de la tasa de crecimiento relativa

Peso	dp/dt	(dp/dt)/p
42		
167	(428.5 - 42)/14 = 27,60714	0.16531
428.5	(819.5 – 167)/14 =46,60714	0.10877
819.5	(1316 – 428.5)/14 =63,39286	0.07735
1316	(1881.5 - 819.5)/14 = 75,85714	0.05764
1881.5	(2474 – 1316)/14 =82,71428	0.04396
2474	(3150.5 – 1881.5)/14 =90,64286	0.03664
3150.5	(3579 – 2474)/14 =78,92857	0.02505
3579	(4038 - 3150.5)/14 =63,39286	0.01771
4038		

Se observa que la tasa de crecimiento relativa del peso disminuye (no es constante) a medida que aumenta el peso de los pollos mientras transcurren las semanas de vida del pollo. Comportamiento que visualizamos en el Gráfico 4.

Gráfico 4. Tasa de crecimiento relativo del peso de los pollos en función del peso



Ahora bien, la tasa de crecimiento relativo se puede ajustar mediante una función lineal de p, de modo que podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\frac{\frac{dp}{dt}}{p} = k - a\,p$$

donde $k > 0$ y $a > 0$ son parámetros reales.

Para determinar los valores de los parámetros consideramos dos puntos (428.5, 0.10877) y (3579, 0.01771) obtenidos al calcular la tasa de crecimiento relativo en función del peso formando el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 0.10877 = k - a428.5 \\ 0.01771 = k - a3579 \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos:

$a = 2.89033 \cdot 10^{-5}$ y $k = 0.121155$

De modo que:

$k - a\,p \approx 0.121155 - 2.89033 * 10^{-5}\,p$

Entonces:

$$\frac{\frac{dp}{dt}}{p} = 0.121155 - 2.89033 * 10^{-5}\,p \qquad \text{o,}$$

$$\frac{dp}{dt} = (\,0.121155 - 2.89033 * 10^{-5}\,p\,)\,p$$

Tomado el límite para $dt \rightarrow 0$, resulta:

$$p' = (\,0.121155 - 2.89033 * 10^{-5}\,p\,)\,p$$

donde $p = f(t)$

Ecuación diferencial de primer orden no lineal, ecuación que expresa la rapidez de cambio de una función desconocida.

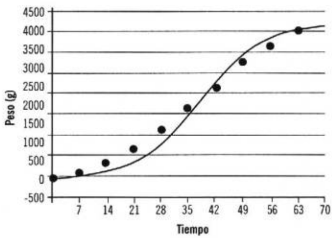
Resolver esta ecuación es "encontrar" una "familia de funciones", las cuales responden a esta tasa de crecimiento relativo y que se denomina solución general de la ecuación diferencial y dada una condición inicial se genera una solución particular de la ecuación diferencial.

Considerando la condición inicial, $p\,(0) = 42$, obtenemos la solución particular:

$$p = \frac{8480850000 \cdot \hat{e}^{\,0.121154 \cdot t}}{2023231 \cdot \hat{e}^{\,0.121154 \cdot t} + 199901769}$$

cuya representación gráfica se muestra en la Gráfico 5.

Gráfico 5. Representación gráfica de la solución particular de la ecuación diferencial



En una fase de meta-análisis, podemos otorgar validez al modelo logístico obtenido y entonces, podremos responder al interrogante original planteado al inicio ¿cuál es el momento óptimo, desde la perspectiva económica, para realizar la faena?

Esto significa que estamos buscando en qué semana o días es conveniente económicamente realizar la faena. Para ello, debemos identificar a qué edad el pollo comienza a estabilizar su crecimiento (el peso se incrementa más suavemente) pues, postergar su faena no acarreará más aumento de peso y sí de costos.

Para identificar dicho punto, es necesario comprender el sentido del concepto punto de inflexión ya que es el punto donde la curva cambia de tipo de concavidad. Esto puede no ser obvio para los alumnos, con lo cual el docente deberá interrogarse acerca de: ¿qué trabajo se podría hacer para que llegaran a entenderlo?, ¿qué saben los alumnos de estas cuestiones antes de abordar el problema?, ¿por qué desde el punto de vista de los alumnos el punto de inflexión corresponde al punto en el que comienza a estabilizarse el peso? En realidad el punto de inflexión marca que disminuye la velocidad de crecimiento, ¿cómo se analiza en el contexto del problema?

Entonces, la respuesta al problema exige el cálculo del punto de inflexión de esta función por lo que planteamos la ecuación, $p'' = 0$, siendo la solución $t = 37.9111$ que se interpreta en 38 días.

Además, para la solución hallada resulta:

$p(37.9111) = 2095.85$

que significa un peso aproximado de 2,1 kg.

Es decir, desde un punto de vista económico y bajo las restricciones que impone la Tabla 1, se puede aconsejar la faena a los 38 días en los que el peso estimado de los pollos es de 2 kilos con 100 gramos.

5. Reflexiones finales

Se ha planteado la necesidad de contar con una educación matemática que permita y favorezca la construcción del sentido de los conceptos a los que ella alude.

Cabe entonces, reflexionar en torno a dos cuestiones, a saber:

a) ¿Cuáles han sido los sentidos construidos a lo largo del presente artículo?

b) Más allá, de aquellos sentidos que se puedan rescatar del ejemplo propuesto y desarrollado ¿cuáles son los argumentos que tenemos para considerar a la modelación como una estrategia didáctica y pedagógica válida para propiciar la construcción del sentido de los conceptos matemáticos?

Respecto a la primera pregunta se hacen las siguientes consideraciones.

Todo el desarrollo del caso considerado, se inicia utilizado una tabla de dos entradas como único dato directo, y a partir de ella se ha elaborado un recorrido de conceptos matemáticos que permitió la obtención de datos indirectos y datos ocultos.

Así, de la Tabla 1, se obtiene la tasa media de crecimiento semanal calculando el cociente $\Delta p/\Delta t$, lo cual permite observar que dicha tasa es variable. Es decir, el aumento del peso de los pollos no es constante semana a semana. La variabilidad que presenta la tasa de crecimiento permitió abordar el estudio de funciones no lineales, como las polinómicas.

Asimismo, de los datos de la Tabla 1 e incorporando la estabilidad del peso como característica propia del crecimiento en todo ser vivo a partir de un momento dado, se obtiene la tasa de crecimiento relativo dando lugar al estudio de la ecuación diferencial.

Si bien, en esta exposición no ha quedado reflejado explícitamente el tratamiento de los conceptos de variable continua y discreta, el lector comprenderá que el sentido de los mismos puede ser inducido al considerar las características de las variables tiempo y peso –continuas en un dominio acotado– y la manera discreta con la que se la presenta en la Tabla 1.

Análogamente, se puede tratar la cuestión de sistemas de ecuaciones en las instancias donde aparecen restricciones –que se expresan en ecuaciones– y la necesidad de que se satisfagan simultáneamente –resolución de un sistema.

La elaboración de un modelo lineal a partir de datos empíricos, en contraposición a la idea clásica de presentar una fórmula para aplicarla a distintas situaciones, permite poner el eje en la variación uniforme, cuestión que aquí se abordó en la instancia de validación del modelo lineal.

La construcción de las fórmulas de los polinomios aproximantes de grado mayor a uno y su análisis cualitativo permite discriminar "qué es lo que caracteriza los procesos lineales y qué los diferencia de otros procesos" (Sadovsky, 2005).

Partir del análisis de variabilidad que presenta la tasa de crecimiento relativa otorga el sentido a la ecuación diferencial, más allá del método que se utiliza para encontrar los valores de los parámetros.

Además, se destaca la magnitud (en cantidad e importancia) de los conceptos matemáticos que pueden ser trabajados a partir del análisis de datos empíricos simples, tales como los ofrecidos por la Tabla 1.

Por lo tanto, la idea de facilitar la construcción de los sentidos de los conceptos expuestos explícitamente o implícitamente, queda delineada básicamente mediante la traducción del lenguaje formal al lenguaje coloquial y la interacción entre ambos.

El segundo interrogante sobre el que nos propusimos reflexionar, merece las siguientes consideraciones.

Por una parte, el caso presentado es ejemplificador de que la modelación es un sub-concepto de la resolución de problemas pues, sus diferentes fases garantizan la aplicación del sentido de los conceptos (encontrar una expresión con tales características y al definir esas características es donde se pone en juego el corazón del concepto). Mientras que no cualquier tipo de problema logra esto ya que, en general, para resolver un problema típico del aula de matemática sólo se requiere de la identificación del concepto matemático que permite resolverlo.

Por otra parte, el ejemplo desarrollado da cuenta de la diferencia entre modelación y modelización ya que se supone que un experto en construir modelos, no iniciaría su búsqueda con una función polinomial de primer grado pues el desarrollo conceptual matemático que tiene incorporado a su práctica le permite en una simple observación visual de la tabla 1, descartar cualquier función polinómica, más allá de conocer que en general las series de crecimiento se rigen por un modelo logístico.

Además, poner el acento en la construcción del sentido de los conceptos matemáticos a través de la modelación es asumir desde lo pedagógico, una visión epistemológica de la matemática que la entiende como una ciencia en construcción permanente y que surge como un producto cultural y social. (Schoenfeld, 1983; Arcavi & Schoenfeld, 1994; Bishop, 1999; Sadosky, 2005).

En cada fase de la *modelación* se construyen nuevos y diferentes vínculos entre los actores –alumnos y profesores– y entre ellos respecto a los saberes.

Así, la fase de sensibilización tiende a la identificación de conceptos matemáticos en temáticas del contexto sociocultural económico.

La delimitación de un problema permite establecer un diálogo en el que las respuestas que plantean unos, dan lugar a nuevos problemas que visualizan otros. En esta fase, la discusión que promueve el hecho de acotar, caracterizar y definir un problema pone de manifiesto las creencias, valores y visiones que sustentan los actores.

Recorrer diferentes aproximaciones para hallar las respuestas buscadas es reconocer y asumir una educación matemática descentrada de la idea "comunicar resultados" a la manera de discurso acabado. Plantear diferentes aproximaciones es educar con el mismo sentido de la vida, la que nos impone una permanente búsqueda de "buenos caminos" hasta encontrar el "mejor".

Enseñar y aprender a realizar meta-análisis, es enseñar y aprender un proceso de autocrítica, mediante el cual nos interrogamos sobre nuestro propio "hacer", sobre nuestra elección. En esta fase, desarrollamos nuestra capacidad para argumentar y contra argumentar, en definitiva es la fase en la que tenemos la oportunidad de reconocer la existencia de variadas racionalidades. Nos permite utilizar y mostrar diferentes estrategias, superando la unidireccionalidad en el razonamiento que normalmente ocurre en una educación matemática tradicional por ejemplo, en la validación de las funciones polinomiales de segundo y cuarto grado se siguieron dos razonamientos diferentes.

Todos lo anterior son nuestros argumentos para sostener que la *modelación* es una estrategia válida para desarrollar el sentido de los conceptos matemáticos. Es a través de ella, más que a través de cualquier problema, que podemos utilizar a la matemática como herramienta, racional y lógica, de análisis, identificación, delimitación y resolución de problemas del contexto socio-cultural y económico.

Asumir que la actual educación matemática en Argentina requiere prioritariamente, en todos los niveles educativos, poner como eje pedagógico la construcción del sentido de los conceptos matemáticos, es asumir un gran desafío para el profesor de matemática y es otorgar una renovada esperanza para nuestros estudiantes.

La *modelación* nos ofrece variadas oportunidades estratégicas para afrontar a la actividad en el aula de matemática con un renovado sentido de la matemática como disciplina.

Bibliografía

• Arcavi A., Schoenfeld, A. (1994): *Mathematics tutoring through a constructivist lens: the challenges of sense-making*. University of California-Berkeley, California, Estados Unidos & Weizmann Institut, Rehovot, Israel.

• Arnal, J., Del Rincón, D., Latorre, A. (1992): *Investigación educativa. Fundamentos y metodología*. Barcelona. Labor.

• Biembengut M.S., Hein, N. (2000): *Modelagem Matemática No Ensino*. Sao Paulo. Editora Contexto.

• Bishop, A.J. (1999): *Enculturación Matemática. La Educación Matemática desde una perspectiva cultural.* Barcelona. Paidós.

• Godino, J. (1996) *Significado y comprensión de los conceptos matemáticos*. En http://www.ugr.es/local/jgodino. Fecha de acceso: Octubre 2004.

• Hughes-Hallett D., Gleason A., et al (2000): *Cálculo*. Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V. México. 2da Edición. Consorcio con base en Harvard.

• Sadovsky, P. (2005): *Enseñar Matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos*. Libros del Zorzal. Bs. As.

• Samaja, J. (1995): *Epistemología y Metodología. Elementos para una teoría de la investigación científica*. Eudeba. Bs. As.

• Schoenfeld, A. (1983): *Beyond the purely cognitive: belief systems, social cognitions and metacognitions as driving force in intelectual performance"* Cognitive Science 7.

• Schoenfeld, A. (1992): *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*. Handbook for research on Mathematics teaching and learning. Editorial D. Grouws, Nueva York, Estados Unidos

• Sierpinska, A. (1990): *Some remarks on understanding in mathematics*, *For the Learning of Mathematics* 10.3, 24-36.

• Sol, M., Giménez, J. (2004): "Proyectos matemáticos realistas y resolución de problemas". En *La actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes*. Giménez J., Santos L., Da Ponte, J. [coords.] (2004). pp. 35-46.Barcelona. Edit. Graó. Biblioteca de Uno.

• Tishman,S. Perkins, D. Jay, E. (1994): *Un aula para pensar. Aprender y enseñar en una cultura de pensamiento*. Buenos Aires.Aique. 3era Edición.