Relevancia de la enseñanza de la Probabilidad

Héctor Agnelli
Profesor Facultad Ciencias Exactas,
Físico-Químicas y Naturales Universidad
Nacional de Río Cuarto
E-mail: hagnelli@exa.unrc.edu.ar

Resumen

La Probabilidad tiene ganado un lugar dentro de los programas de estudio de Matemática en la escuela y en los cursos iniciales de Estadística en las universidades pero por distintas razones su enseñanza queda diluida. En este trabajo se intenta contribuir a señalar la relevancia de su enseñanza mostrando la importancia que tiene en la vida cotidiana de las personas, por su importancia en el marco de la historia de las ideas científicas, por sus complejas relaciones entre intuiciones y teorías normativas y por su prolífica relación entre teorías y aplicaciones. Para la Probabilidad en el aula se propone trabajar con problemas que permitan promover la discusión de los elementos básicos de la naturaleza aleatoria del fenómeno a modelar, vincular la Probabilidad con otras ramas de la matemática y confrontar los resultados obtenidos con situaciones reales. Se discute y enfatiza la importancia que tienen las distintas interpretaciones de la Probabilidad tanto en la asignación de probabilidades como en el análisis de resultados.

Palabras clave
• *Probabilidad*
• *concepciones*
• *interpretaciones*
• *enseñanza*

Abstract

Probability has earned a place within the mathematics curricula in schools and in the initial courses of Statistics at universities but for various reasons their education is diluted. This paper seeks to contribute to pointing out the relevance of its teaching showing the importance in the daily lives of individuals, given their importance in the context of the history of scientific ideas for their complex relationships between intuitions and normative theories and for his prolific relationship between theories and applications. For the probability in the classroom is intended to work with problems that can promote the discussion of the basic elements of the random nature of the phenomenon to be modeled, the probability link with other branches of mathematics and compare the results with real situations. It discusses and emphasizes the importance of different interpretations of probability both in the allocation of probabilities as in the analysis of results.

Key words
• *probability*
• *concepts*
• *interpretation*
• *teaching*

1. Introducción

El estudio de la Probabilidad tiene reservado un lugar en los programas oficiales de enseñanza de Matemática en la escuela media. Por otra parte, también ocupa un lugar, en los programas de estudio de los cursos iniciales de Estadística en varias carreras universitarias. Pero más allá de lo normado oficialmente, la implementación efectiva de la enseñanza de la Probabilidad en la Escuela Media pareciera que es percibida por muchos docentes, quienes no han tenido formación específica en el tema, no como un componente básico e ineludible en la formación de sus alumnos sino como una imposición curricular adicional. Esta percepción hace que tanto la enseñanza de la Probabilidad y en consecuencia su propia formación disciplinar, queden relegadas por la importancia que se le asigna a otros temas dentro del programa. En tanto, en los cursos universitarios iniciales de Estadística, la enseñanza de la Probabilidad, acotada por el tiempo disponible, queda casi siempre reducida al aprendizaje de algunos aspectos operativos sin que se enfaticen aspectos conceptuales. Así, tanto en una como otra situación la enseñanza de la Probabilidad queda diluida. En este trabajo intentaremos contribuir a difundir la relevancia que tiene la enseñanza de la Probabilidad, como así también a señalar algunas de sus particularidades que le confieren matices distintivos y desafiantes dentro del campo de la matemática educativa.

2. Relevancia

Adoptando la sugerencia formulada por Holmes (1980) acerca de las razones por las que un tema debe ser incluido en el currículo de la educación obligatoria, intentaremos para el caso de la Probabilidad responder, de manera general, a las siguientes preguntas:

- ¿Es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos?
- ¿Es útil para la vida posterior, bien para el trabajo o para el tiempo libre?
- ¿Ayuda al desarrollo personal?
- ¿Ayuda a comprender otras materias de los planes de estudio?
- ¿Constituye una base para una especialización posterior en el mismo tema u otros relacionados?

2.1. Enfrentar las incertidumbres

El contexto dominante de nuestra vida cotidiana queda signado por la incertidumbre y en este contexto continuamente estamos tomando decisiones. De una manera bastante simplificada, podríamos decir que este proceso consiste en decidir acerca de la ocurrencia de un resultado, pero: **a)** por las condiciones previas a la toma de decisión hay más de un resultado posible; **b)** con la información que poseemos, el resultado concreto que ocurrirá es impredecible con certeza. Algunas situaciones imaginables de este tipo, es decir caracterizadas por la incertidumbre, las encontramos habitualmente en nuestra relación con la meteorología cuando se nos informa acerca del pronóstico del tiempo, en medicina cuando tenemos que decidir si someternos o no a un tratamiento complejo, en los aspectos financieros vinculados con la compraventa o seguridad de nuestros bienes, o en el plano político al interpretar información relativa a procesos electorales.

Disponer de herramientas conceptuales y operativas que permitan al individuo comprender y manejar la incertidumbre, para disminuir el riesgo de tomar decisiones equivocadas, es una necesidad que tendría que ser satisfecha por un programa educativo. Al respecto, en un documento elaborado para Unesco acerca de las líneas fundamentales para guiar la educación del futuro, Edgar Morín sostiene: "Se tendrían que enseñar principios de estrategia que permitan afrontar los riesgos, lo inesperado, lo incierto, y modificar su desarrollo en virtud de las informaciones adquiridas en el camino" (1999:3). En esta misma dirección, en Argentina en ocasión de ponerse a discusión el proyecto de una nueva Ley de Educación, el Ministerio de Educación de la Nación distribuyó un documento en el que señalaba

> "El consumo mediático en la sociedad y la participación de los medios en los procesos democráticos son cada vez más crecientes. Los ciudadanos suelen tomar decisiones fundamentales –en el ámbito privado y público– en base a la información que transmiten los medios de comunicación. Los sistemas educacionales deben asumir la obligación de promover una comprensión crítica en relación a los medios. La razones que avalan este desafío pasarán a ser, en un futuro próximo, cada vez más indispensables, debido al rápido desarrollo de la tecnología de la información y la comunicación, que hará aumentar considerablemente la gama de opciones a las que acceden los ciudadanos para informarse, recrearse y formar su propia opinión" (2006:3). Y como señalan Godino, Batanero y Cañizares, "nuestro sistema de educación tiende a dar a los niños la impresión de que para cada pregunta existe una sola respuesta sencilla y clara, que no existe nada intermedio entre lo verdadero y lo falso" (1987:12).

La enseñanza de la Probabilidad les brinda a los alumnos la posibilidad de manejar grados de incertidumbre.

2.2. La Probabilidad y otras disciplinas

Como bien ya lo señalaba Parzen refiriéndose a la enseñanza de la Probabilidad en los cursos iniciales universitarios:

> "Por una parte, la teoría de Probabilidad es un tema muy fascinante y de gran interés intrínseco, y debe comunicarse al estudiante la apreciación de este hecho. Sus conceptos poseen un significado propio e independiente de las aplicaciones específicas, y debido a este hecho proporcionan

analogías formales entre fenómenos reales que, aún cuando sean totalmente diferentes uno del otro, se pueden manejar de manera similar en ciertos aspectos teóricos. Así, por ejemplo, los factores que afectan la vida de una persona de cierta edad y los que afectan el tiempo de funcionamiento de una lámpara eléctrica son bien diferentes; sin embargo, puede usarse el mismo tipo de razonamiento matemático para describir ambos valores.

Por otra parte, un curso sobre teoría de probabilidades sirve como preparación para muchas disciplinas (tales como la estadística, física estadística, ingeniería industrial, ingeniería en comunicaciones, genética, psicología estadística, y la econometría) en las que se emplean ideas y técnicas probabilísticas. Por consiguiente, debería intentarse darle al estudiante en un curso básico técnicas para resolver problemas de Probabilidad sin necesidad de utilizar la magia intuitiva". (Parzen, 1960)

Estas afirmaciones a la vez que ponen de manifiesto el rol esencialmente multidisciplinario de la Probabilidad, también muestran que su enseñanza se debe hacer de manera tal que no quede restringida a sus aspectos matemáticos formales sino que debe ser acompañada de aplicaciones al mundo natural y social. A través de la enseñanza de la Probabilidad se pone al estudiante en contacto directo con el modelado matemático y en particular con el modelado aleatorio. Al respecto, Moore (1997) señala: "La mayoría de las áreas de la matemática que aplican modelos lo hacen para describir situaciones determinísticas. Es intelectualmente estimulante ver como la matemática puede describir el azar".

A manera de ejemplo, podemos citar la siguiente situación que marca el contraste entre la lógica deductiva propia de la matemática determinística y la inferencia estadística basada en el concepto de Probabilidad:

"Se tiene un lote 500 lámparas eléctricas, se extrae una muestra de tamaño 10 y al probarse cada una de las 10 lámparas se observan 9 falladas. ¿Qué se puede decir acerca de cuántas lámparas estarán falladas en el lote?".

Lógicamente, podemos decir (deducir) que hay por lo menos 9 y no más que 499 lámparas falladas en el lote. Intuitivamente, podemos decir (inferir) más. Si hallamos 9 en 10, se podría esperar encontrar muchas más lámparas falladas en el lote.

Sin embargo se "siente" que algunos de los valores entre 9 y 499 son mucho más verosímiles que otros. El razonamiento probabilístico trata de transformar estos sentimientos intuitivos en algo concreto. Los enunciados de la lógica son del tipo negro-blanco y sus proposiciones son falsas o verdaderas. Las inferencias estadísticas son grises y las proposiciones tienen adosadas probabilidades que recorren la gama de los grises de 0 á 1. De esta manera, una afirmación estadística es un enunciado probabilístico.

Como se desprende del ejemplo anterior, la Probabilidad es la herramienta matemática sobre la que se sustenta la inferencia estadística, pero su desarrollo no sólo esta motivado por este tipo de aplicaciones, más aún tiene un desarrollo propio como cualquier rama de la matemática, y no necesariamente motivado para dar respuesta a una aplicación. Sin embargo, es una de las ramas de la matemática que permite rápidamente percibir el vínculo entre teorías y aplicaciones. Si bien su construcción es axiomática, esta construcción teórica es usada como herramienta indispensable para el modelado tanto de fenómenos naturales como sociales cuando en estos esta presente la incertidumbre y así da respuesta a problemas del llamado modelado estocástico, basándose en la teoría de procesos estocásticos (sistemas que evolucionan en el tiempo o el espacio de acuerdo con ciertas leyes probabilísticas). La Probabilidad es una rama viva de la matemática y el avance en la construcción de su teoría amplía sus campos de interés y sus interconexiones con otras ramas de la matemática.

2.3. Emergencia de la Probabilidad

La noción de probabilidad, aunque alejada del cálculo, ya se registra en la Grecia Antigua ante la necesidad de marcar una diferencia entre conocimiento y opinión (Cabría, 1992). Buscando criterios para adoptar opiniones inciertas, surgió una escuela filosófica llamada “probabilista”, dirigida por Carneades, en el siglo II antes de Cristo. Hacking (1995) atribuye a la Probabilidad un carácter dual:

> “Por un lado es estadística y como tal le concierne a las leyes estocásticas de los procesos aleatorios y por otro epistemológica, dedicada a estimar grados de creencia en proposiciones carentes de trasfondo estadístico”.

Sin embargo pasó mucho tiempo hasta la aparición de la teoría de la Probabilidad. Como señalan Davies y Hersh (1986) es uno de los enigmas de la ciencia moderna y este desarrollo tardío de la matematización de la incertidumbre constituye un atractivo para los historiadores de las matemáticas y la ciencia. De manera convencional se considera que 1654 fue el año en que se lograron avances sustanciales en el pensamiento probabilístico a partir de la actividad desarrollada por Fermat, Pascal y Huygens. En el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas, realizado en París en 1900, David Hilbert planteó 23 problemas a los matemáticos de ese comienzo de siglo. Entre esos problemas, el sexto, solicitaba encontrar una base axiomática que permitiese deducir todas las teorías físicas y los fenómenos aleatorios o dependientes del azar. Kolmogorov en 1933 da respuesta a este problema, a partir de su formalización axiomática en el marco de la teoría de la medida y convierte a la Probabilidad en una rama *respetable* de la matemática. En la actualidad el crecimiento teórico de la Probabilidad sigue su marcha asociándose con otras ramas de las matemáticas para poder dar respuestas a los requerimientos de la Física moderna.

2.4. Pensamiento probabilístico y enseñanza

Es considerable el cuerpo de actividades, de investigación y desarrollo, que se ha utilizado para sostener la enseñanza de la Probabilidad como un elemento clave de la educación matemática y son aún numerosos los desafíos que se enfrentan para darle continuidad a estos esfuerzos. La investigación acerca del pensamiento probabilístico y de la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad ha sido abundante durante los últimos cincuenta años. La mayor parte de estas investigaciones estuvo dedicada a investigar la naturaleza de las intuiciones probabilísticas de las personas y la manera en que ellas se manifiestan a través de la naturaleza y el ambiente. Por otro lado, el estudio de la evolución histórica de las ideas probabilísticas contribuye a comprender los obstáculos cognitivos y conceptos previos erróneos que afectan al proceso de enseñanza aprendizaje del estudiante.

Las investigaciones en enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad se pueden clasificar según Jones y Thornton (2005) en tres períodos cronológicos que abarcan la última mitad del siglo XX: el Período Piagetano; el Período Post-Piagetano; y el Período Contemporáneo. Durante el período Piagetano en las décadas de los ’50 y los ‘60, Piaget e Inhelder investigaron el desarrollo cognitivo del pensamiento probabilístico en los niños. Aunque el interés en estas investigaciones no estaba centrado en la búsqueda de conocimientos que permitiesen abordar la enseñanza de la Probabilidad en la escuela, sí inspiraron más tarde muchas de las investigaciones en esa dirección. En las décadas de los ’70 y ’80, el período Post-Piagetano, continuaron los estudios realizados por psicólogos. Fischbein (1975) centró sus preocupaciones en la naturaleza de las concepciones e intuiciones probabilísticas. En sus estudios distinguió entre las intuiciones primarias y las intuiciones secundarias acerca de la Probabilidad. Las intuiciones primarias son aquellas que se forjan a partir de experiencias individuales sin necesidad de instrucción formal. Las intuiciones secundarias se adquieren luego de la etapa de instrucción y, si bien reestructuran las intuiciones primarias para casos específicos, éstas siguen formando parte de las creencias del individuo y pueden reaparecer en otros contextos. Tversky y Kahneman (1974) analizaron las estrategias y heurísticas que emplean las personas para emitir juicios probabilísticos. Estas heurísticas son estrategias de pensamiento que utilizan las personas para decidir en ambientes de incertidumbre y si bien en algunos casos se comportan como mecanismos útiles, en otros generan sesgos y concepciones erróneas.

Así, la llamada heurística de la representatividad consiste en estimar probabilidades basándose en el grado en el que el individuo cree que la muestra refleja la población muestreada. Si se tiene que decidir si al tirar 6 veces una moneda equilibrada es más probable que ocurra la sucesión de 6 caras (CCCCCC) o que ocurra la sucesión (XCCXCX), y en rigor las dos son igualmente probables, pero se suele decir que es más probable que ocurra esta última puesto que la primera no es representativa de la distribución de los eventos posibles. La sucesión que contiene caras y secas se argumenta que es más representativa porque se parece más a la distribución teórica que asigna probabilidad ½ a cada resultado individual. Esta heurística incluye también una concepción errónea de la ley de los grandes números llamada "ley de los pequeños números", que consiste en emitir juicios sin considerar la importancia del tamaño muestral.

Por otra parte, la heurística de la disponibilidad puede estar presente en una situación como la siguiente: ¿es más probable que existan más palabras que empiecen con "c" o palabras que tienen la "c" en segundo lugar? Se puede elegir la primera opción simplemente por recordar más palabras de este tipo. Es decir, la heurística de la disponibilidad privilegia una elección por sobre otras en función de la facilidad para recordar una información asociada a la opción elegida.

Konold (1995) se interesó por la manera en que los individuos interpretan las probabilidades, en esta dirección analizó un tipo de razonamiento al que llamó "el resultado aislado". Mediante este razonamiento las personas convierten las probabilidades de ocurrencia de un evento a decisiones del tipo ocurre-no ocurre. Así, valores de probabilidad por arriba de ½ se interpretan como ocurrencia y valores por debajo como no ocurrencia del evento. El valor de probabilidad ½ se interpreta como falta total de conocimiento acerca del resultado. De este modo, la persona interpreta a la Probabilidad como un número que indica el comportamiento del evento en una única repetición del fenómeno aleatorio y no como un número que refleja la distribución de los resultados en muchas repeticiones del mismo.

A partir de las investigaciones anteriores se puede sostener que los estudiantes llegan a un curso de Probabilidad con un cúmulo de ideas acerca de la misma que han incorporado a través de experiencias informales de su vida cotidiana (Garfield y Ahlgren, 1988). Pueden desarrollar su propia manera de razonar acerca de eventos cuya ocurrencia está caracterizada por la incertidumbre y en consecuencia este proceso previo dificulta la comprensión correcta de la Probabilidad formal. Konold (1995) también señala, que algunos estudiantes al incorporar los conocimientos recibidos en el aula pueden modificarlos de manera de hacerlos consistentes con sus creencias previas y de esta manera sus concepciones erróneas acerca de la Probabilidad permanecen inalteradas Estas concepciones equivocadas, a menos que se las trate específicamente, no desaparecen con un curso formal de probabilidades.

El Período Contemporáneo se caracteriza por las motivaciones encontradas a partir del fuerte impulso que toma la enseñanza de la Probabilidad al considerarla un tema constitutivo de los programas de estudio de matemática en distintas partes del mundo. Se pone más énfasis en los razonamientos o creencias con que los estudiantes llegan al aula (Watson, Collis, y Moritz, 1997), en la realización de experimentos de enseñanza (Batanero y Serrano, 1999; Jones, Langrall, Thornton y Mogill, 1999) y en investigaciones vinculadas con la incorporación de tecnología (Pratt, 2000).

3. La Probabilidad en el aula

Teniendo en cuenta lo expresado hasta aquí, la enseñanza de la Probabilidad enfrenta al docente con varios desafíos. Para la enseñanza de la Probabilidad es tan importante comprender los conceptos probabilísticos, como conocer y comprender las concepciones que tienen los alumnos acerca de la Probabilidad y aprovechar críticamente las investigaciones educativas que se han realizado relacionadas con su enseñanza. Por otra parte, a diferencia de otras ramas de las matemáticas en las que los resultados contraintuitivos o paradójicos recién se encuentran cuando se trabaja con un alto grado de abstracción, en Probabilidad estas situaciones aparecen ya en los cursos básicos (Batanero y Sanchez, 2005).

Como contrapartida, la resolución de problemas de probabilidades brinda la estimulante posibilidad de que el alumno comience a familiarizarse con la idea del modelado matemático de situaciones reales desde muy temprano.

3.1. Análisis de la situación aleatoria

Como ocurre ante cualquier situación problemática es necesario, para abordar su resolución, lograr la cabal comprensión del contexto en el que ésta se origina. Los problemas de Probabilidad que habitualmente aparecen en los libros de texto con enunciados tales como "Calcular la probabilidad de…" remiten automáticamente a que la cuestión a analizar es un fenómeno aleatorio, pues la Probabilidad "trata con fenómenos aleatorios" e inducen a buscar el resultado numérico de manera mecánica, sin detenerse en el análisis de la situación aleatoria que origina el problema. Las operaciones involucradas en un cálculo de Probabilidad son determinísticas, en el sentido de que la Probabilidad, por ser una función, produce un único resultado. Sin embargo esta manera de proceder, que al alumno le resulta cómoda por hábito, puede originar resultados incorrectos ya que, como consecuencia de no haber analizado el fenómeno aleatorio, construye erróneamente el espacio muestral.

Por lo tanto, es primordial efectuar el análisis de la situación aleatoria generadora del problema y la definición del mismo, para poder establecer el nexo adecuado entre modelo y realidad. La teoría de la Probabilidad no brinda las "recetas" para construir modelos. La validez del modelo construido estará dada por el grado en que los resultados que éste predice se ajusten a los resultados que el fenómeno real produce.

3.2. Confrontación con situaciones reales

Es importante trabajar con problemas cuyos resultados puedan ser confrontados con situaciones reales o eventualmente simuladas. Los métodos formales de resolución de problemas de Probabilidad dejan de lado las nociones intuitivas que el estudiante tiene acerca del problema, tanto en lo que se refiere a su planteamiento como al resultado esperado. Una vez obtenido el resultado analítico, éste puede resultar sorprendente al estudiante si el hallazgo realizado contraría su intuición. Un ejemplo de esta situación puede presentarse con la resolución del famoso problema de los cumpleaños:

> "¿Cuántas personas son necesarias para que sea mayor que ½ la probabilidad de que al menos dos personas de *n,* que se encuentran en una habitación, cumplan años el mismo día?"

Es posible que el alumno procediendo de acuerdo a su intuición pueda antes de calcular y formular formalmente el problema, dar un valor aproximado de la respuesta buscada.

En general, los resultados anticipados dados por los alumnos difieren fuertemente de los que luego se obtendrán con el cálculo formal. Así es conveniente seguir trabajando el problema desde distintos abordajes para reafirmar la convicción acerca del resultado hallado. Remover el pensamiento intuitivo ingenuo o al menos, estar precavido de que el mismo puede llevar a conjeturas incorrectas es un muy buen aprendizaje. El alumno enfrentado a una nueva situación problemática someterá su intuición a la validación mediante el empleo de procedimientos formales.

3.3. Integración con otras áreas de matemática

Es importante integrar la Probabilidad con otras áreas del programa de matemática. Entre las herramientas matemáticas más utilizadas en el abordaje de problemas probabilísticos encontramos la combinatoria y los conjuntos.

Respecto de la primera, Moore (1997) sostiene que "la combinatoria es un tema diferente y de mayor dificultad que la Probabilidad". Por lo que la enseñanza de la Probabilidad centrada en la resolución de problemas de naturaleza claramente combinatoria, no favorece la construcción del significado del objeto matemático "Probabilidad".

En cuanto a los conjuntos, es claro que la notación conjuntista permite describir tanto el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio como los eventos de interés. Este aporte no es sólo notacional ya que las operaciones entre conjuntos, aplicadas a la ocurrencia de eventos, permiten adoptar estrategias resolutivas que simplifican la primaria complejidad del problema enumerativo.

La Probabilidad también puede relacionarse con la geometría:

> "Supongamos que usted tiene un juego como el que muestra la figura. La aguja se impulsa y gira libremente alrededor del punto O hasta que se detiene. ¿Cuál es la probabilidad de que al detenerse lo haga dentro del área rayada?" (Figura 1).

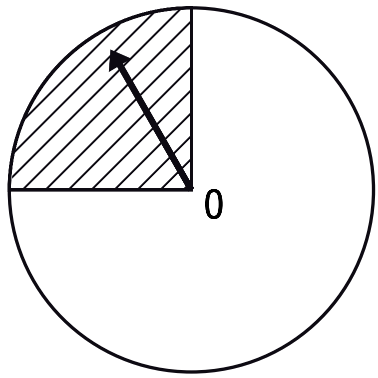

Figura 1.

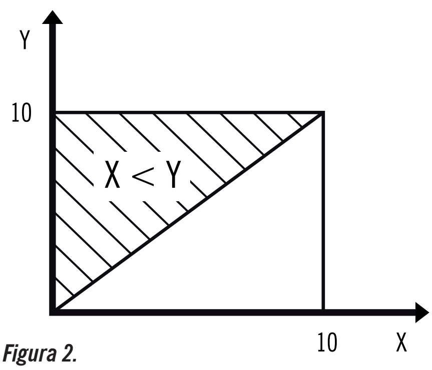

Figura 2.

Si bien la respuesta se puede dar teniendo en cuenta que el sector elegido es uno de los cuatro sectores posibles en los que puede detenerse la aguja, la situación planteada también es útil para mostrar que para el cálculo de algunas probabilidades se hace necesario establecer relaciones entre mediciones. La Probabilidad geométrica extiende la idea de que el cálculo de probabilidades está sólo asociado con la enumeración, ya que para calcular probabilidades geométricas hace falta medir. Se pueden formular problemas que expresen relaciones entre segmentos, áreas o volúmenes y también problemas para cuya resolución sea conveniente usar ejes coordenados:

> "Sean X e Y números seleccionados aleatoriamente entre 0 y 10 ¿Cuál es la probabilidad de que X <Y?" (Figura 2)

3.4. Interpretaciones de la Probabilidad

Cuando se resuelve un problema, la interpretación de los resultados es tan importante como la obtención de los mismos. Existen tres concepciones fundamentales de la Probabilidad: clásica, frecuencial y Bayesiana. Las diferencias esenciales entre ellas radican en la manera de asignar probabilidades y en la interpretación de los valores de Probabilidad obtenidos después de realizar cálculos. Es importante distinguir entre asignar y calcular probabilidades.

Para el cálculo de probabilidades se aplican las propiedades derivadas de la construcción axiomática de la Probabilidad, pero estos cálculos dependen de asignaciones iniciales de Probabilidad o de la adopción de ciertos modelos distribucionales, o de ambos. Así, por ejemplo, cuando una característica observable en una situación experimental se modela como una variable aleatoria que sigue una distribución binomial, la probabilidad de un evento se calcula usando la función de densidad correspondiente, pero el valor de la probabilidad del éxito *(p)* debe ser asignado inicialmente de alguna manera.

La interpretación clásica aparece en las situaciones en las que la evidencia está ausente o esta evidencia está presente de manera simétricamente balanceada y asigna la misma probabilidad a todos los resultados posibles. De esta forma, la probabilidad de un evento es el cociente entre el número de maneras en que puede ocurrir ese evento y el número de resultados posibles. La aplicación de esta interpretación queda reducida a espacios muestrales finitos y con resultados equiprobables. No siempre es adecuado trabajar con modelos equiprobables aún en situaciones simples. Consideremos el siguiente ejemplo tomado de Greer y Mukhopadhyay (2005): una persona se ha casado el año pasado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona haya nacido un sábado? ¿Cuál es la probabilidad de que la persona se haya casado un sábado?

En el primer caso, en el que se está modelando un fenómeno biológico, se puede considerar al menos de manera aproximada el modelo de equiprobabilidad. Pero en el segundo, en el que se está modelando un fenómeno social, el día de casamiento queda condicionado por pautas sociales y culturales y no parece adecuado el modelo de equiprobabilidad. Hace falta por lo tanto otra manera para asignar probabilidades.

La interpretación frecuencial o empírica asume que el experimento o fenómeno es repetido muchas veces bajo condiciones similares y la probabilidad de un evento es estimada por la frecuencia relativa de aparición del evento en el conjunto de resultados experimentales. Así expresada esta interpretación tiene cierta similitud con la interpretación clásica, ya que otorga igual peso a cada miembro de un conjunto de eventos y, simplemente, calcula la proporción de los favorables en el total de los resultados producidos. La diferencia esencial con la interpretación anterior es que justamente el enfoque frecuencial tiene en cuenta los resultados producidos por el experimento, mientras que el enfoque clásico tiene en cuenta los resultados posibles de un experimento. Es decir, la interpretación frecuencial es un concepto post-experimental y la interpretación clásica, es preexperimental. Y si bien esta interpretación extiende la interpretación clásica a situaciones en las que los resultados no son equiprobables, para poder aplicarla se debe asumir que la situación aleatoria se repite bajo condiciones similares; de esta manera, no se abarcan por esta interpretación los sucesos aleatorios de ocurrencia única en el tiempo.

La interpretación subjetiva considera a la probabilidad, como una medida numérica de la creencia que tiene una persona acerca de la ocurrencia de un evento. La persona asigna una probabilidad a un evento de manera que refleje su creencia acerca de la verdad o falsedad del mismo. Éste es el enfoque más general, ya que se aplica a eventos que pueden no ser equiprobables y a eventos que no pueden repetirse bajo las mismas condiciones. De este modo, la probabilidad está referida a la incertidumbre y no únicamente a la repetición de experimentos. Esta interpretación es personal en el sentido de que diferentes personas pueden tener diferentes opiniones y en consecuencia asignar al mismo evento diferentes probabilidades; de aquí el nombre de probabilidad subjetiva.

La incertidumbre significa, en muchas situaciones, conocimiento incompleto y no ausencia absoluta de conocimiento y por lo tanto la Probabilidad también depende de la información que posea la persona al momento de emitir su juicio; si dispone de nueva información, su asignación de probabilidad puede variar. A diferencia de la interpretación frecuentista que considera a la probabilidad como una característica que reside objetivamente en la naturaleza y no en el observador, para la interpretación subjetiva la probabilidad radica en la mente del observador. La formalización de la probabilidad como grado de creencia fue realizada por De Finetti. Para De Finetti (1972), cualquier incertidumbre debe ser expresada mediante una distribución de probabilidad y ésta es la característica esencial de la metodología estadística Bayesiana.

4. Conclusión

Por lo expuesto la enseñanza de la Probabilidad queda justificada por su relevancia en la vida cotidiana de las personas, por su importancia en el marco de la historia de las ideas científicas, por sus complejas relaciones entre intuiciones y teorías normativas y por su prolífica relación entre teorías y aplicaciones.

En general podemos decir entonces, que es recomendable para el tratamiento del tema en clase, trabajar con un conjunto de problemas prototípicos que permitan promover la discusión de los elementos básicos de la naturaleza aleatoria del fenómeno a modelar, la manera de construir el modelo, las herramientas a utilizar para hallar la solución, la interpretación que esta merece, y a la luz de los resultados obtenidos la confrontación del modelo con situaciones reales. Todas estas etapas pueden ser concebidas como componentes de un plan de trabajo similar al que se realiza cuando se lleva a cabo una tarea investigativa.

En los cursos introductorios de estadística de nivel universitario, el estudio mas detenido de las interpretaciones de la Probabilidad redundará en una mejor comprensión de la inferencia estadística. La inferencia se enseña en general sobre la base de la interpretación frecuencial por lo tanto es importante enfatizar esta interpretación de la Probabilidad, pero el reconocer y distinguir la interpretación Bayesiana contribuirá a superar las dificultades bastante conocidas vinculadas con la interpretación de los intervalos de confianza y tests de hipótesis. Los intervalos de confianza como los tests se construyen habitualmente bajo el paradigma frecuencial pero muchas veces se los interpreta, erróneamente, desde una perspectiva Bayesiana.

Bibliografía

- Batanero, C. y Sanchez, E. (2005): "What is the Nature of High School Student's Conceptions and Misconceptions about Probability?", en G. Jones (ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for teaching and Learning,* Springers.
- Batanero, C. y Serrano, L. (1999): The meaning of randomness for secondary students, *Journal for Research in Mathematics Education,* 27.
- Cabría, S. (1992): *Filosofía de la Probabilidad,* Tirant Lo Blanch, Valencia.
- Davies, P.J. y Hersh, R. (1986): *Descarte's dream: the world according to mathematics,* Harvester, Sussex, England.
- De Finetti, B. (1972): *Probability, Induction and Statistics,* Wiley, Chichester.
- Fischbein, E. (1975): *The intuitive sources of probabilistic thinking in children,* Kluwer, Dordrecht, Netherlands.
- Garfield, J. y Ahlgren, A. (1988): "Difficulties in Learning Basic Concepts of Probability and Statistics: Implications for Research", *Journal for Research in Mathematics Education,* 19.
- Greer, B. y Mukhopadhyay, S. (2005): "Teaching and Learning The Mathematization of Uncertainty: historical, cultural, Social and Political Contexts", en G. Jones (ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for teaching and Learning,* Springers.
- Godino, J.; Batanero, C. y Cañizares, M.J. (1987): *Azar y Probabilidad, España, Síntesis.*
- Hacking, I. (1995): *El Surgimiento de la Probabilidad,* Barcelona, Gedisa.
- Holmes, P. (1980): *Teaching Statistics 11-16,* Foulsham Educational, Sloug.
- Jones, G.A.; Langrall, C.W.; Thornton, C.A. y Mogill, A.T. (1999): "Student's probabilistics thinking in instruction", *Journal for Research in Mathematics Education,* 30.
- Jones, G.A. y Thornton, C.A. (2005): "An Overview of Research into the Teaching and Learnig of Probability", G. Jones (ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for teaching and Learning,* Springers.
- Konold, C. (1995): "Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics", *Journal of Statistics Education,* 3(1).
- Kahneman, D.; Tversky, A. y Slovic, P. (1982): "Judgement under uncertainty: Heuristics and biases", *Science,* 185.
- Morin, E. (1999): *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro,* Unesco.
- Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología. (2006). *Documento para el Debate.* Argentina. Recuperado de www.debate-educación.educ.ar
- Parzen, E. (1960): *Modern Probability Theory and Its Applications,* Wile, New York.
- Pratt, D. (2000): "Making sense of the total of two dice", *Journal for Research in Mathematics Education,* 31.
- Watson, J.M.; Collis, K.F. y Moritz, J.B. (1997): "The development of chance measurement", *Mathematics Education Research Journal,* 9.