

Orden generativo, fractales y música ¹

Gustavo Basso

La geometría fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Seguir leyendo es peligroso. Se arriesga a perder definitivamente la imagen inofensiva que tiene de nubes, bosques, galaxias, hojas, plumas, flores, rocas, montañas, tapices, y muchas otras cosas. Jamás volverá a recuperar las interpretaciones de todos estos objetos que hasta ahora le eran familiares. Michael Barnsley

Se habla de música fractal. Compositores, analistas y críticos emplean frases en las que aparecen conceptos tales como estructuras autosemejantes, dinámicas no lineales, atractores caóticos y dimensiones fractales, entre muchos otros, cuyo significado y aplicación distan de poseer la claridad necesaria como para explicar los procesos y las técnicas que se intentan justificar.

Se ha estudiado la naturaleza fractal de una antífona de Hildegard compuesta en el siglo XII; se le atribuyen características fractales al contrapunto barroco, en particular al de las últimas obras de Bach; las técnicas de la escuela de Viena y del serialismo subsiguiente son analizadas con herramientas inspiradas en la nueva geometría; y ciertas piezas de Ligeti o Xenakis parecen fundarse en la autosemejanza a distintos niveles formales. Quizá entre los primeros compositores que utilizaron intencionalmente patrones estructurales inspirados en la geometría fractal se encuentren Gérard Grisey y Tristan Murail, integrantes del grupo de *l'itinéraire*, quienes coincidieron en tiempo y lugar con el nacimiento y desarrollo de estas nuevas ideas. Más tarde, apareció una infinidad de autores, en particular músicos electroacústicos y populares, que desarrollaron los métodos, algoritmos y programas de computación que actualmente proliferan en numerosas páginas de Internet, como cualquiera puede comprobar.

¿Se justifica esta relación entre geometría fractal y música, tal como enuncian sus cultores?, ¿se asienta sobre bases sólidas, u opera simplemente por analogía?, ¿es sólo otro ejemplo más de la conocida definición del arte como metáfora epistemológica? Creemos que no existe una respuesta única. En cada caso la relación define sus términos de modo diferente y nuestra intención es

¹ Este artículo es una reelaboración, entre otros, de un trabajo presentado en la XV Conferencia Anual de la Asociación Argentina de Musicología en agosto de 2002.

la de ordenar el conjunto al distinguir entre los distintos usos del término fractal asociado a la música.

El presente trabajo sólo pretende ofrecer una breve introducción al tema. Si sirve para alcanzar al menos una parte del efecto prometido por Michael Barnsley –uno de los pioneros en el campo–, nos daremos por satisfechos. Pero, ¿qué son los fractales o, mejor aún, qué es la geometría fractal?

Fractales

La geometría fractal es, en primer término, un nuevo lenguaje. A diferencia de la geometría euclidiana clásica que define las líneas rectas, los cuadrados o las esferas con los que estamos familiarizados, sus elementos no derivan de la intuición directa. La geometría fractal se expresa por medio de algoritmos –a través de reglas e instrucciones de procedimiento– y requiere la ayuda de una computadora para convertirse en formas y estructuras acabadas. Estas formas están disponibles en número ilimitado aunque, una vez que se revela la lógica interna del nuevo lenguaje, la descripción de ciertas estructuras complejas –como un accidente topográfico o una nube– se vuelve muy precisa y simple, mucho más simple que en la geometría tradicional.

La importancia de este lenguaje reside precisamente en que muchas configuraciones naturales (por ejemplo, las nubes antes mencionadas, las montañas, las líneas costeras, los capilares sanguíneos, las crecidas de los ríos y muchas otras), que aparentan tener una complejidad extraordinaria, poseen en realidad una misma regularidad geométrica: la llamada invariancia bajo escala. Si analizamos estas estructuras a distintas escalas, se presentarán una y otra vez los mismos elementos básicos.

Quizá sea éste un buen momento para visitar un ejemplo clásico y apreciar en él varias de las características comunes a los objetos fractales.

Construyamos primero un triángulo equilátero de lado unitario:

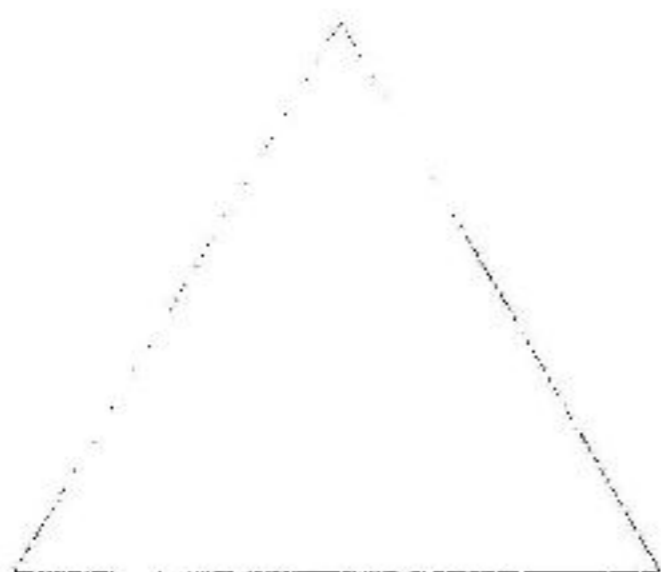


Figura 1: primera etapa (figura de partida) de la curva de Koch

- Apliquemos a este triángulo un conjunto sencillo de reglas de transformación:
- Dividir cada uno de sus lados en tres partes iguales.
 - En cada tercio medio construir un nuevo triángulo equilátero dirigido hacia fuera.
 - Borrar a continuación las partes comunes a los triángulos nuevos y viejos.
- Tenemos así la segunda y tercera etapas de nuestra construcción.
Repetiendo el procedimiento dos veces más se obtienen las etapas que siguen.

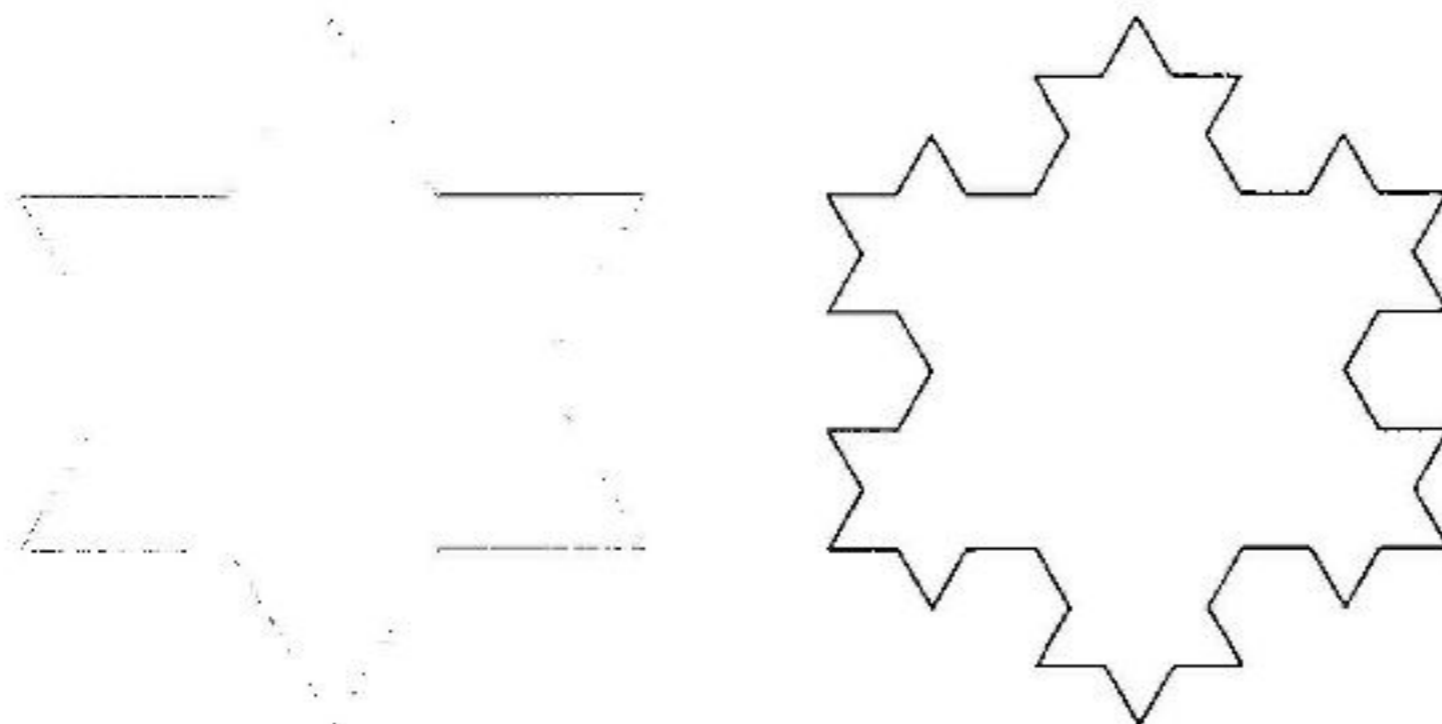


Figura 2: segunda y tercera etapas de la curva de Koch

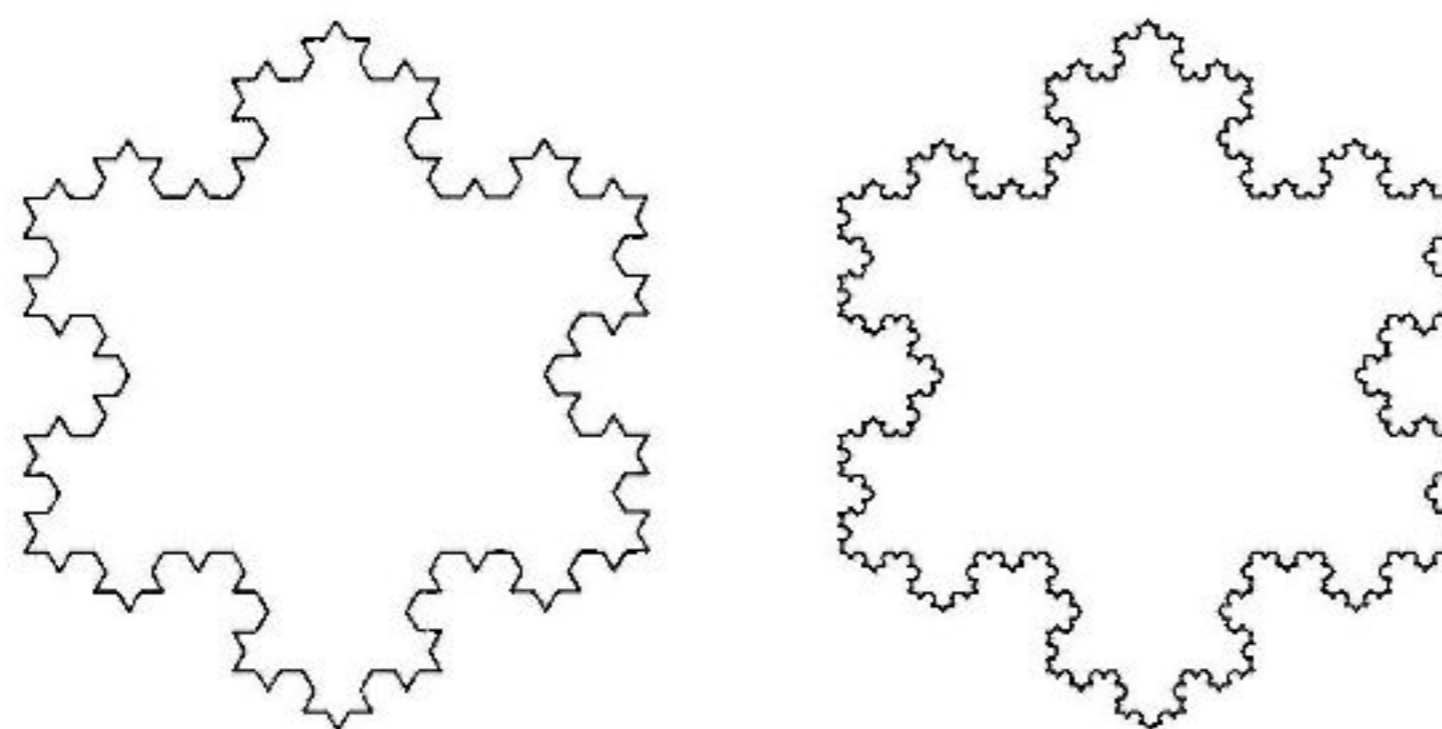


Figura 3: etapas 4 y 5 de la curva de Koch

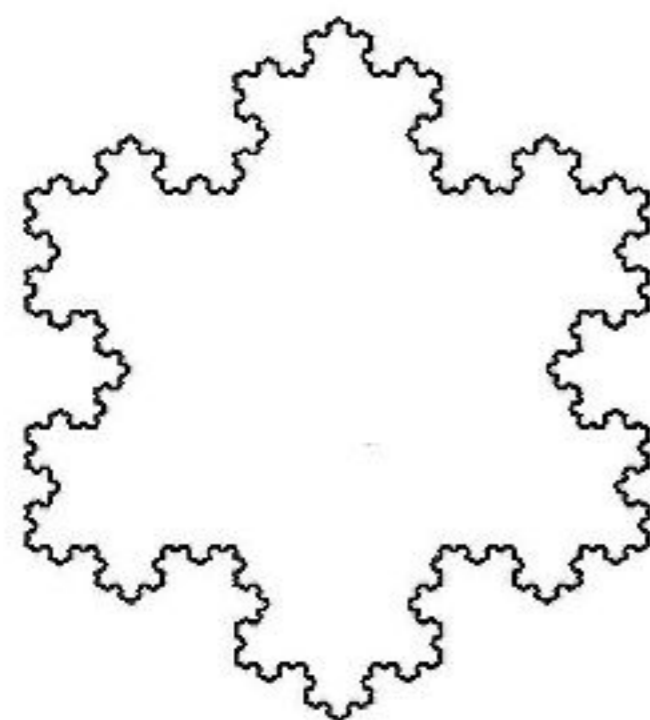


Figura 4: etapa 6 de la curva de Koch

La figura que surge lentamente se llama curva copo de nieve o curva de Koch y se llega a ella luego de aplicar las reglas de transformación un número infinito de veces. Fue creada en 1904 por el matemático sueco Helge von Koch y presenta un rasgo extraordinario: aunque encierra un área finita, la longitud del perímetro es infinita. Como en cada etapa de la construcción el perímetro aumenta en $4/3$, es evidente que luego de infinitas etapas su longitud deviene infinita. Estamos ante un hecho sorprendente: una curva de longitud infinita puede dibujarse en una pequeña hoja de papel –por ejemplo, en una estampilla–. La curva de Koch integra por derecho propio la “galería de monstruos matemáticos” aludidos por Henri Poincaré –entre otros– a comienzos del siglo XX.²

Pero no terminan aquí las rarezas de esta figura. Si observamos un detalle de su evolución (figura 5), veremos que hay partes que se repiten a menor

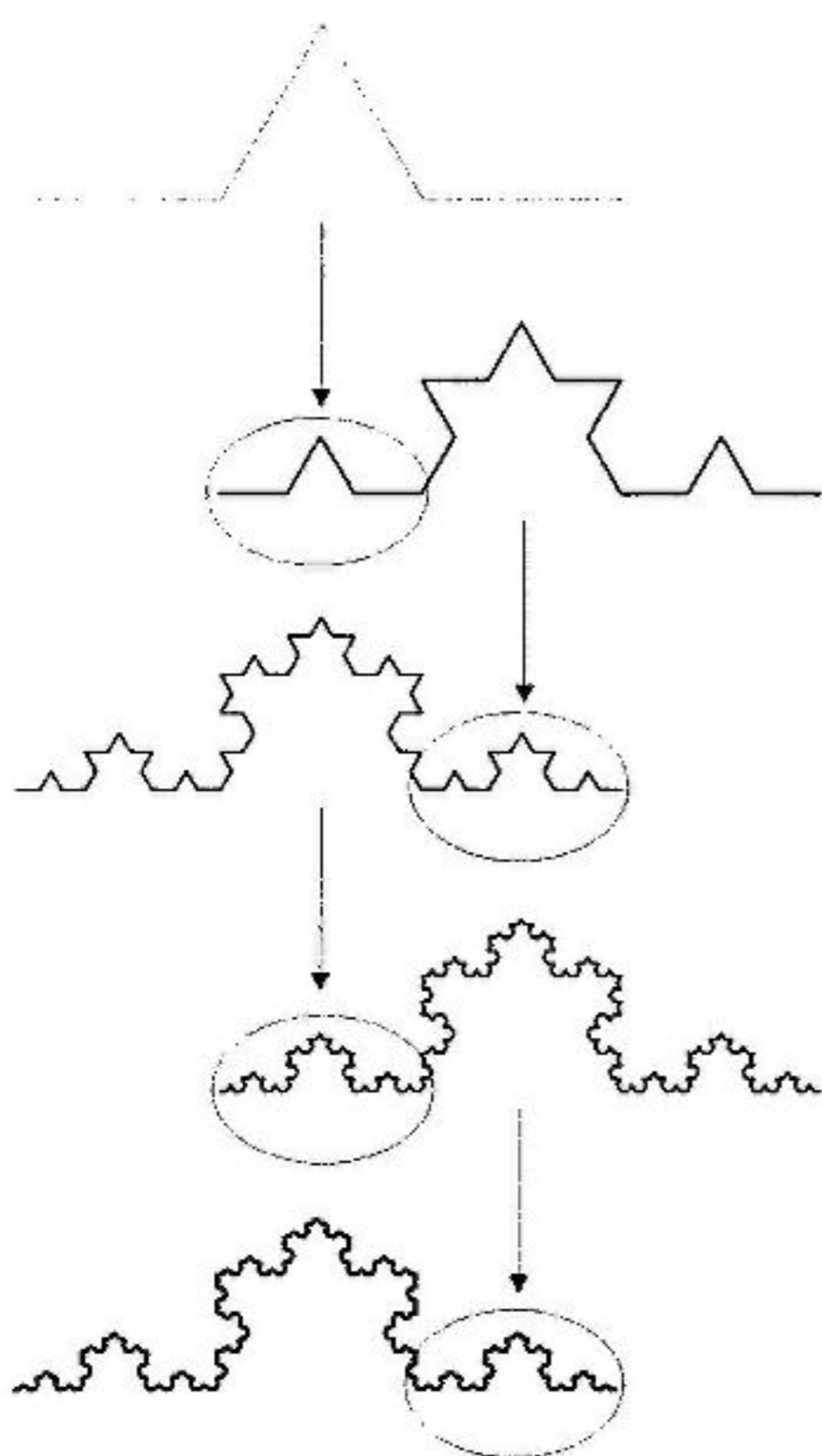


Figura 5: etapas 2 a 6 de la parte superior de la curva de Koch

² Para los matemáticos, este “monstruo” posee otras propiedades particulares. Por ejemplo, la curva es continua pero no posee derivada en ningún punto. Esta característica monstruosa le hizo decir a Charles Hermite que “abandonaba con espanto y horror esta lamentable plaga de funciones sin derivadas”. (Mandelbrot, 1997: 62)

escala: la figura es autosemejante. Sus características permanecen invariantes ante un cambio de tamaño y cada parte reproduce el todo. El matemático italiano Cesàro llegó a decir de ella en 1905: “Es esta similitud entre el todo y sus partes, incluso las infinitesimales, lo que nos lleva a considerar la curva de von Koch como una línea verdaderamente maravillosa entre las líneas. Si estuviera viva, no sería posible aniquilarla sin suprimirla de un golpe, pues renacería sin cesar de las profundidades de sus triángulos, como la vida en el universo”.³

En la curva de Koch la autosemejanza es perfecta. En otros casos sólo es aproximada y permanecen invariantes ciertas propiedades estadísticas.

¿Qué dimensión posee la curva límite? La respuesta a esta pregunta no es sencilla. Para objetos geométricos familiares la respuesta es clara: las líneas y las curvas suaves son unidimensionales, los planos y las superficies poco curvadas son bidimensionales, y los cuerpos sólidos son tridimensionales. Si uno se ve obligado a dar una definición sencilla, se podrá decir que dimensión es el mínimo número de coordenadas necesarias para describir todo punto de un objeto geométrico. Por ejemplo, una curva suave es unidimensional porque todo punto de ella está determinado por un número: la longitud del arco desde un punto de referencia fijo.

¿Cuál es entonces la dimensión de la curva de Koch? Al ser una curva, se diría que es unidimensional, pero el problema es que la longitud del arco entre dos puntos cualesquiera es infinita: ¡cada punto está infinitamente lejos de cualquier otro! Uno podría suponer que es, entonces, bidimensional. Pero no parece tener superficie; por lo tanto, su dimensión debería estar comprendida entre 1 y 2. Alrededor del año 1967 el matemático polaco-francés Benôit Mandelbrot concibió la idea de considerar también dimensiones fraccionarias y en 1975 creó el término *fractal*⁴ para designar los objetos que poseen dimensiones no enteras. La curva de Koch tiene una dimensión fractal de 1,2618.

Orden explícito y orden generativo

Los procesos involucrados en la generación de objetos fractales nos permiten redefinir el concepto de orden de una estructura. Estamos familiarizados con el orden estático –o explícito– propio de un proceso acabado. Cualquier objeto, paisaje u organismo natural se presenta, en este sentido, con un nivel de complejidad infinito. Sin embargo, ciertas estructuras muy complejas pueden sintetizarse a partir de un conjunto finito de reglas relativamente simples. En esta dirección los objetos fractales constituyen ejemplos consumados de

³ Citado en Mandelbrot, 1996, p. 33.

⁴ Deriva del latín *fractus*, que significa “interrumpido o irregular”.

orden generativo, en el que formas muy complejas se construyen mediante un proceso de generación a partir de reglas de transformación que se aplican una y otra vez. En cierto sentido, se puede decir que el orden de la estructura completa está implícito en dichas reglas. La gran ventaja de este proceso de codificación reside en su capacidad de síntesis, tal como hemos apreciado en el caso de la figura de Koch. David Bohm afirma que a partir del orden generativo se puede concebir una totalidad que emerge de ciertos principios básicos.⁵ Muchos procesos naturales parecen responder de manera similar. El crecimiento de un organismo derivado del código genético es uno de ellos: se han simulado los patrones de crecimiento de estructuras biológicas a partir de procedimientos de replicación generativa con resultados sorprendentes. En la figura 6 se puede apreciar un diseño fractal típico aplicado a la botánica.⁶

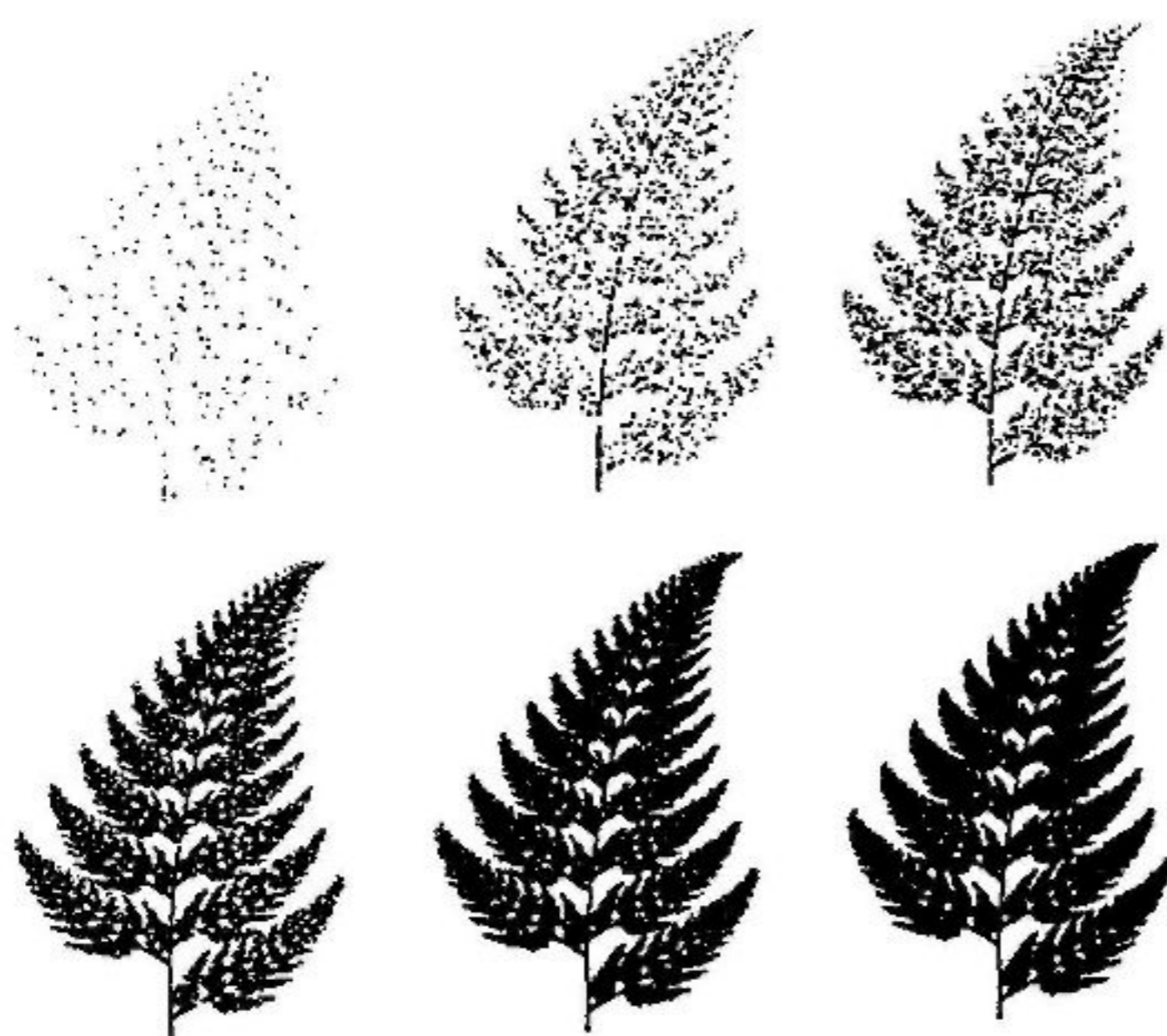


Figura 6: construcción de un helecho fractal

Creo que ahora podemos comprender por qué Mandelbrot afirma que la geometría fractal está mucho más cerca de las formas naturales que los círculos, triángulos y rectángulos de la geometría clásica.⁷

⁵ Bohm, David (1980).

⁶ La hoja completa, tan compleja como uno desee, se reduce a un axioma de partida (a) y las siguientes funciones recursivas: $a = f(+x)fb$, $b = f(-y)fa$, con $x = a$, $y = b$ y $f = 1,36$ (desarrollo de Adrián Mariano).

⁷ Mandelbrot, Benôit (1987).

Los procesos fractales también se usan para reducir el tamaño de archivos digitales de imágenes y sonido por su gran capacidad de síntesis. En 1987, el matemático inglés Michael F. Barnsley desarrolló la transformación fractal, capaz de detectar fractales en fotografías digitalizadas. Este algoritmo que se emplea para comprimir con gran eficacia los archivos utilizados en multimedia es de uso común en Internet.

No podemos abandonar el tema sin presentar al conjunto de Mandelbrot, icono de la geometría fractal y definido por algunos matemáticos –no sin exageración–, como “el objeto más complejo del universo”. (Figura 7) El objeto es de complejidad infinita –sucesivas ampliaciones nos muestran la aparición de copias a escala casi idénticas al conjunto completo (Figura 8)– y necesitaríamos, para describirlo “en acto” según el enfoque tradicional de orden explícito, una cantidad infinita de información.⁸

La eficacia de una estructura de orden implícito o generativo se manifiesta en toda su potencia: el conjunto de Mandelbrot nace de la aplicación iterada de una fórmula que ocupa apenas una línea.⁹

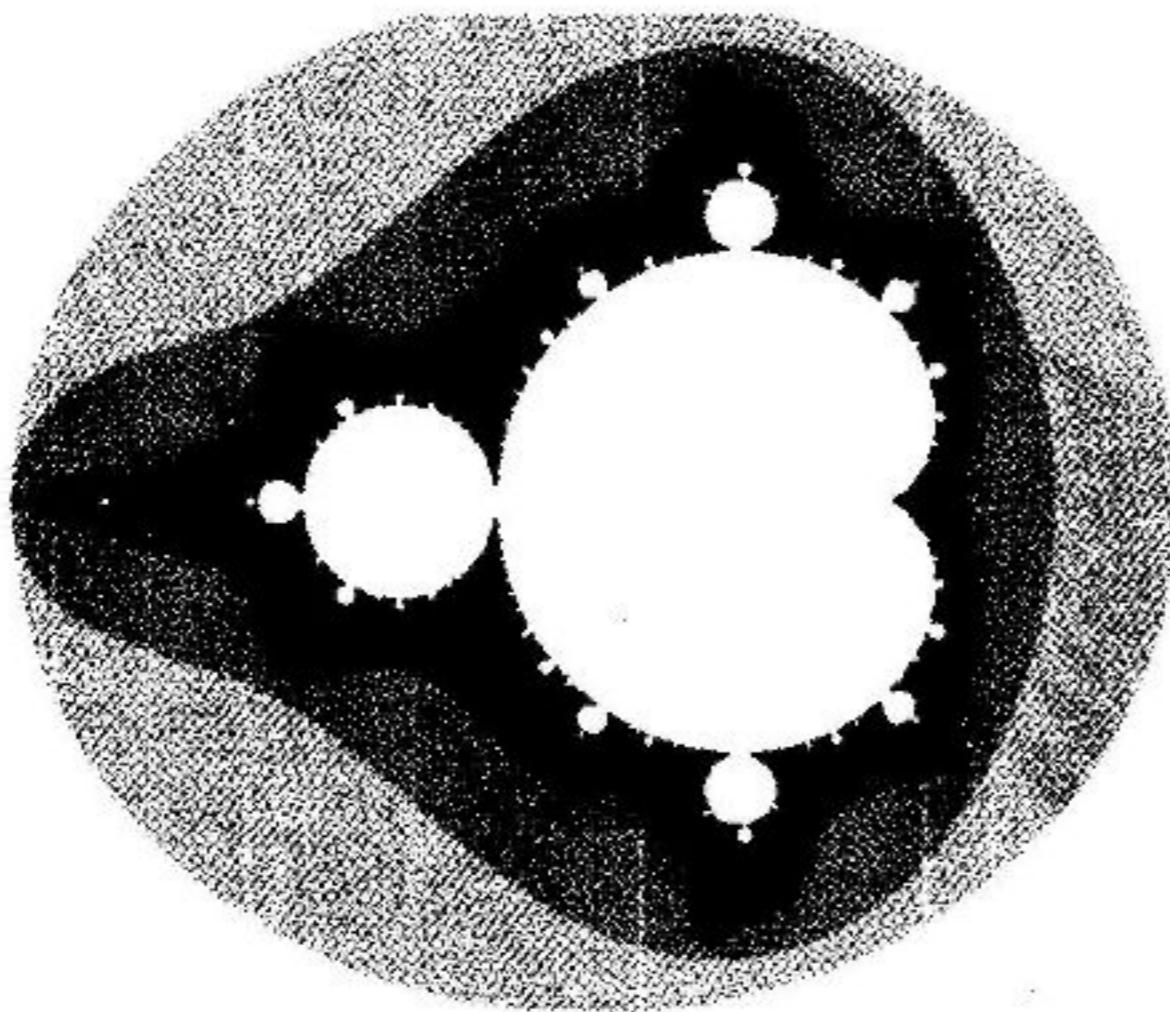


Figura 7: conjunto de Mandelbrot

⁸ Para hacernos una idea del asunto, pensemos que el conjunto de Mandelbrot posee más detalles que la totalidad de átomos del universo conocido multiplicados por la totalidad de átomos del universo conocido, multiplicados por ...

⁹ La fórmula clásica es $z(n+1) = z(n)^2 + C$, con $C = z(0)$, punto de partida en el plano complejo. Si la fórmula anterior genera un conjunto de Julia conexo, el punto C se pintará de negro. Si genera uno inconexo, C se pintará de blanco. El conjunto de Mandelbrot aparece como la frontera que separa los puntos negros de los blancos. Es, en cierto sentido, un catálogo completo de los conjuntos de Julia.

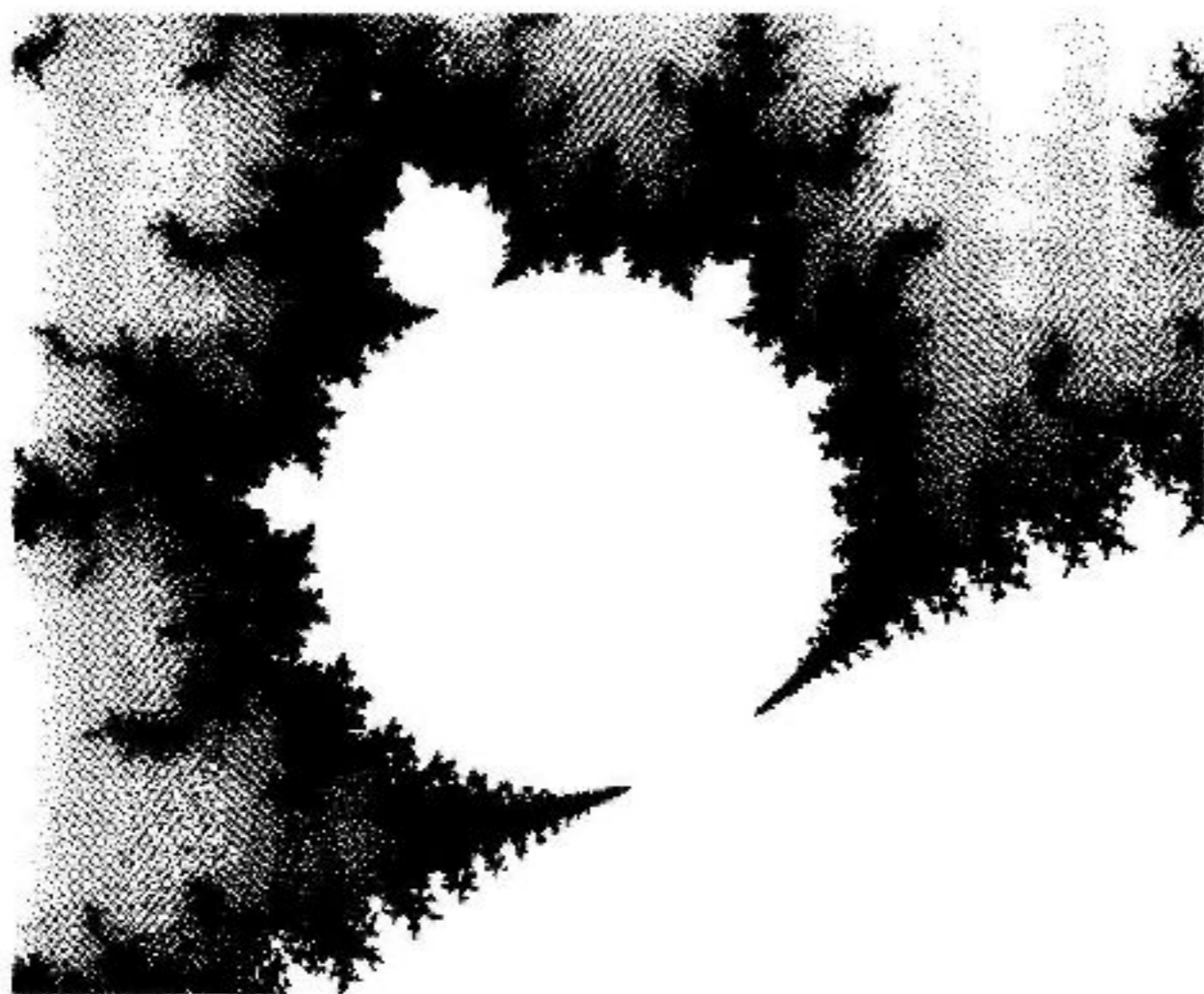


Figura 8: ampliación del bulbo del quinto período del conjunto de Mandelbrot

Ruido $1/f$

En 1978 Richard Voss y John Clarke, quienes habían estudiado con detalle la obra de Mandelbrot, publicaron un trabajo destinado a convertirse en vínculo entre la geometría fractal, la acústica y la música.¹⁰ Partiendo de la densidad espectral y de la autocorrelación de una onda acústica llegaron a la sorprendente conclusión de que las señales musicales poseen naturaleza fractal. Este trabajo generó una gran cantidad de estudios científicos, tecnológicos y musicales, la creación de algoritmos de composición por computadora y hasta la aparición de “música fractal”. En este último caso, quizá la complejidad de los conceptos matemáticos desarrollados por Voss y Clarke llevó a malinterpretar el alcance de los enunciados. Aunque los autores fueron muy precisos al especificar los límites de lo que llamaron “ruido $1/f$ ”, no es difícil encontrar textos en los que se extrapola esta idea a casi cualquier parámetro musical. A continuación intentaremos describir en qué sentido se puede manifestar que la música posee naturaleza fractal.

Para comenzar veamos el gráfico temporal y el espectro de potencia del ruido blanco, muy común en electroacústica. (Figura 9)

La característica principal del ruido blanco es que carece de memoria: la amplitud de la señal en cada instante es independiente de la de los instantes precedentes. Como todos saben, su densidad espectral es constante y, por lo tanto, independiente de la frecuencia. Este tipo de comportamiento es característico de las señales macroscópicas formadas por la superposición de un gran número de procesos microscópicos independientes entre sí. Es el tipo de ruido que aparece a la salida de un micrófono o que genera una consola de grabación de baja calidad.

¹⁰ Voss, Richard y Clarke, John (1978).

Obviamente cuando filtramos ruido blanco se obtiene un ruido “coloreado”. Es posible crear así otra señal muy común conocida como ruido $1/f^2$, también llamado ruido marrón o browniano, en el que la amplitud decrece 6 dB cada vez que la frecuencia se duplica.

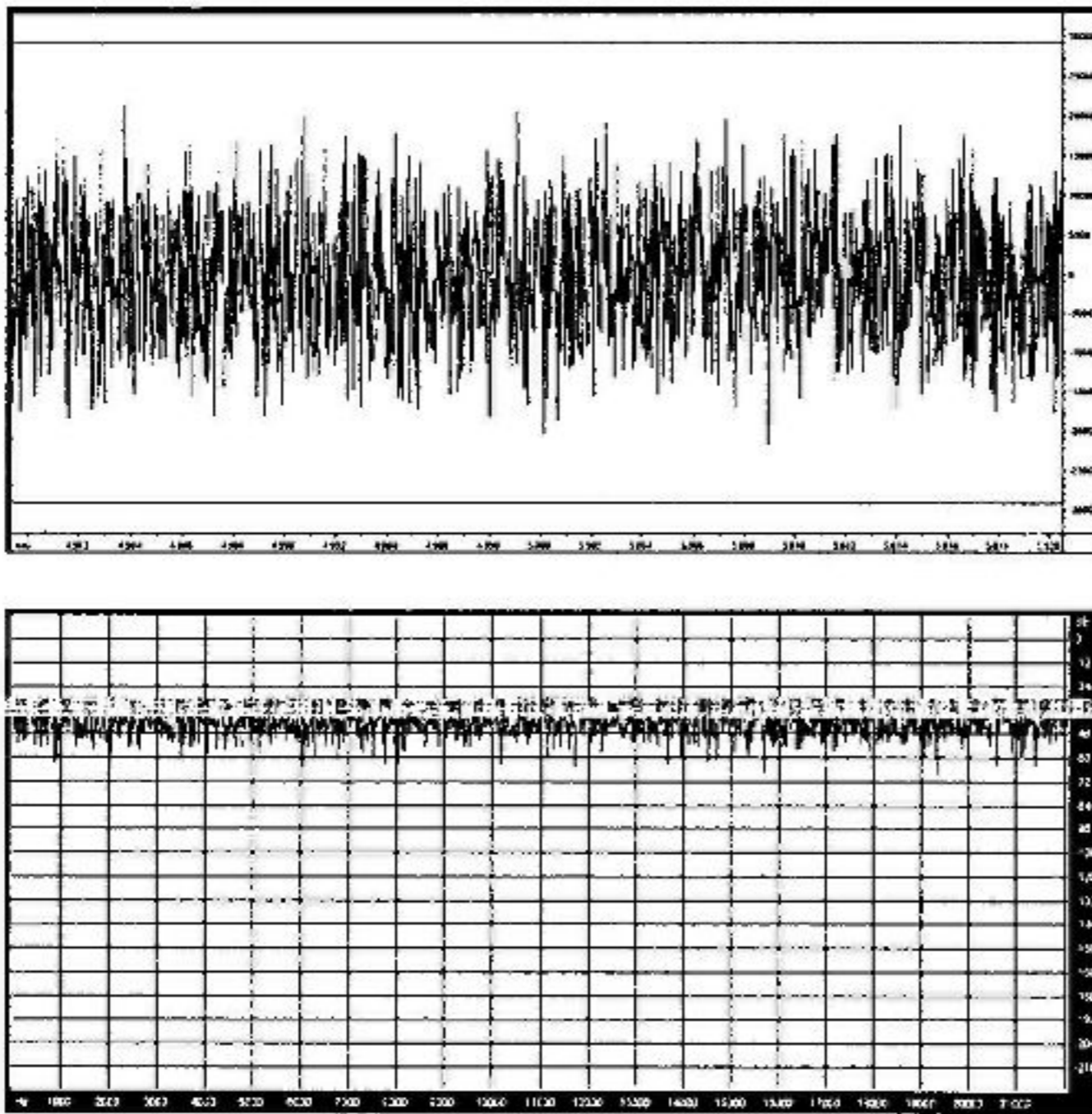


Figura 9: gráfico temporal y espectro de potencias de una señal de ruido blanco

70 | 71

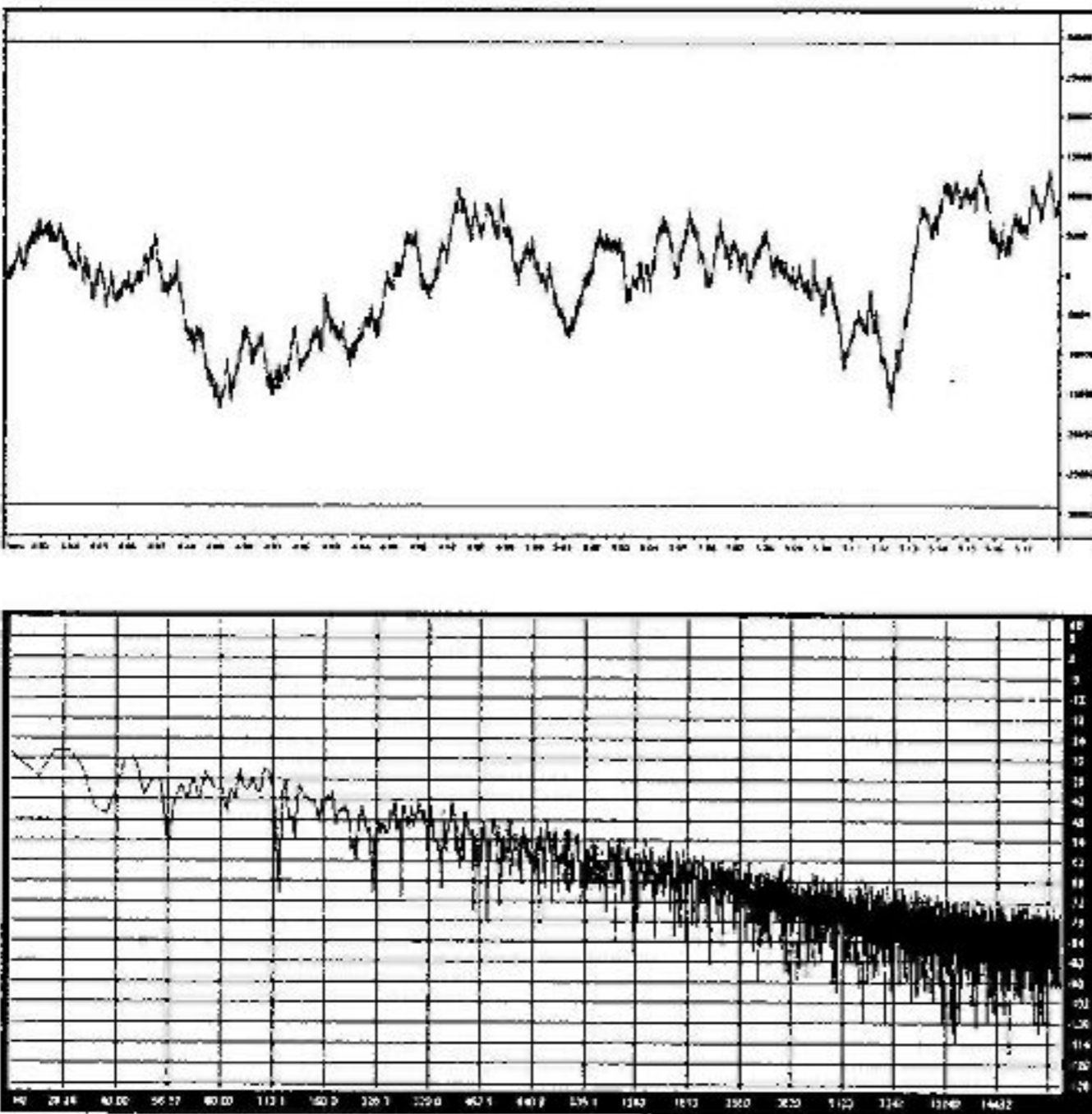


Figura 10: gráfico temporal y espectro de potencias de una señal de ruido $1/f^2$

En este caso cada instante “recuerda” con fuerza al instante previo –la señal está muy correlacionada en el tiempo.

A diferencia de los dos casos anteriores, una señal cuya amplitud va decreciendo a medida que aumenta la frecuencia a razón de 3 dB por octava se denomina ruido $1/f$ o ruido rosa y se puede apreciar en la figura 11.¹¹

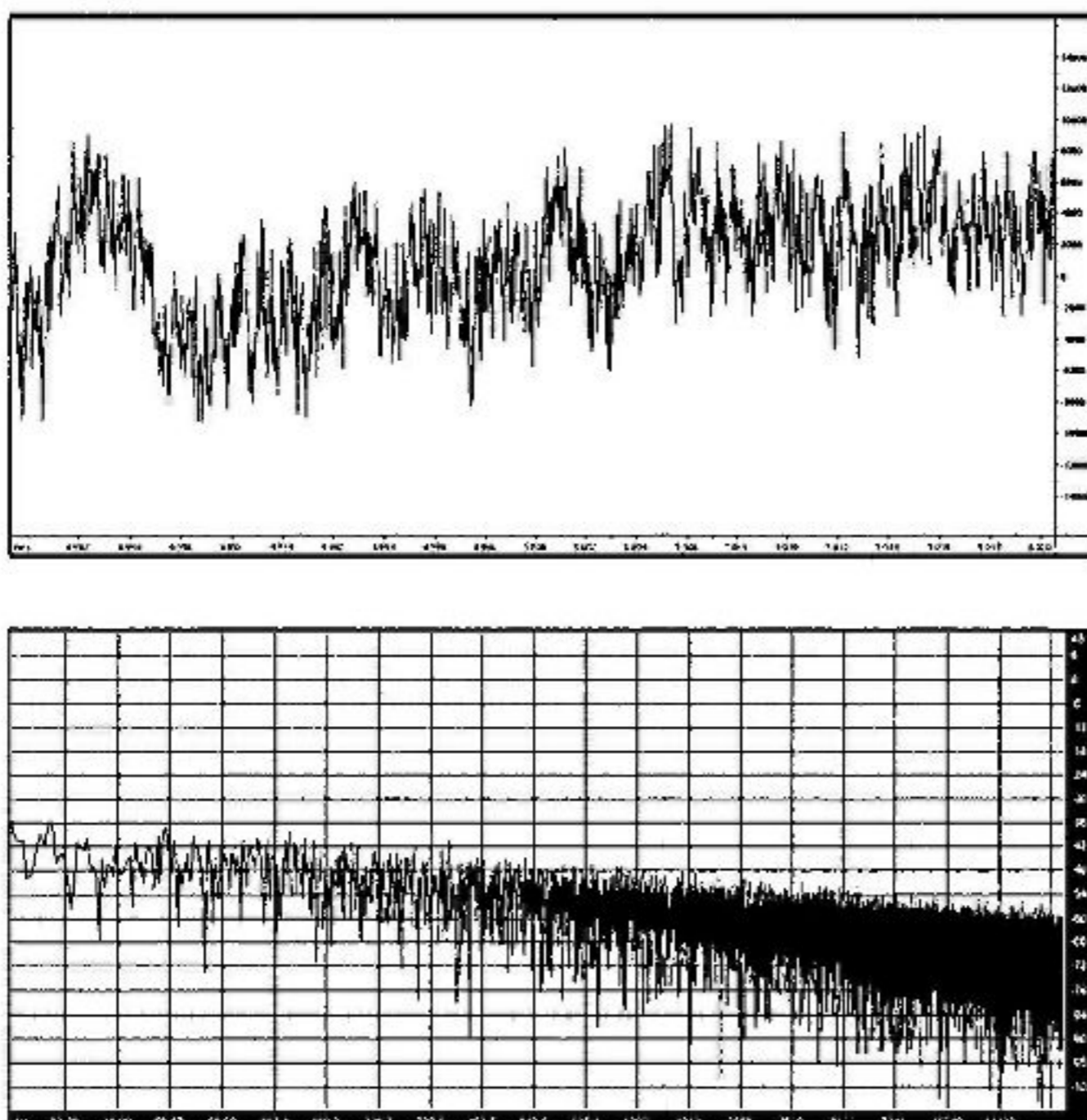


Figura 11: gráfico temporal y espectro de potencias de una señal de ruido $1/f$

Esta señal posee algunas características notables: su densidad de energía por octava es constante, está moderadamente correlacionada en el tiempo y presenta una estructura fractal –el aspecto general no cambia al cambiar de escala–. En cierto sentido, cada instante “recuerda” la totalidad de su pasado, y la relación entre el todo y las partes se rige por autosemejanza. Mandelbrot llamó “salvaje” al ruido $1/f$, pues parece estar cambiando de carácter sin cesar.¹² La consecuencia directa en el campo del audio es sorprendente: el ruido $1/f$ no puede eliminarse por filtrado.

Ahora bien, ¿corresponde un registro de música, al menos aproximadamente, a alguno de los casos anteriores? Veamos el espectro de potencias de un fragmento de *Così fan Tutte* de Mozart:

¹¹ Los tres casos se pueden resumir en una ecuación general de la forma $1/f^b$, en la que $b = 0$ para ruido blanco, $b = 2$ para ruido marrón y $b = 1$ para ruido rosa.

¹² Mandelbrot, Benoît (1996).

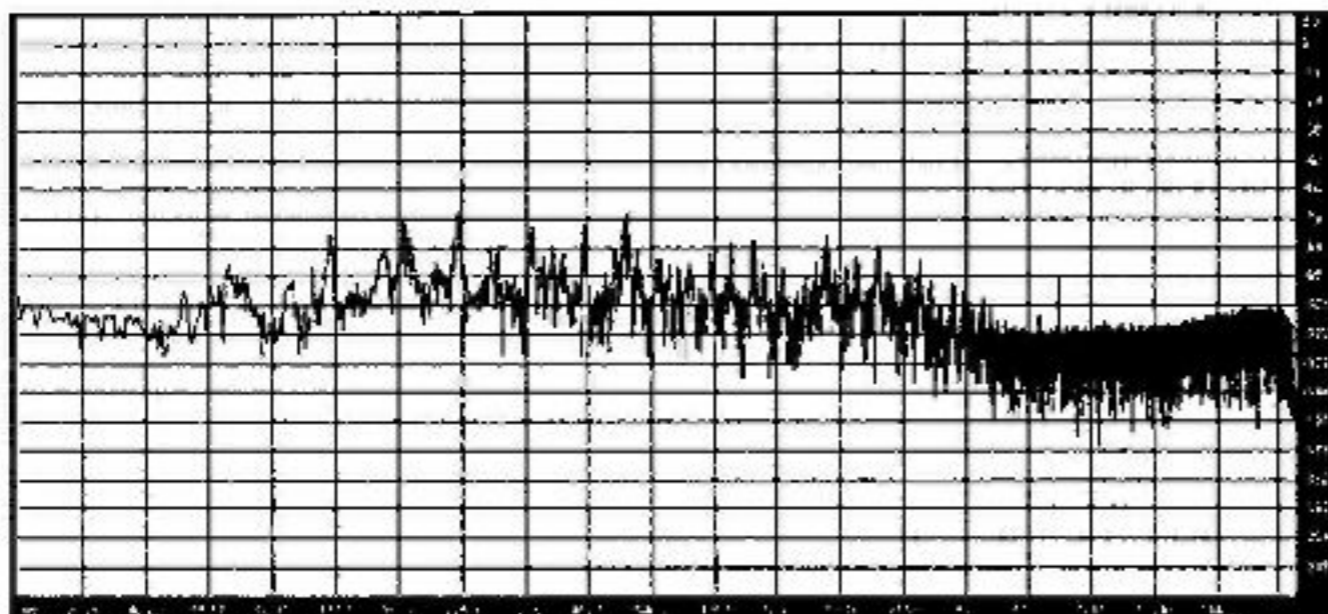


Figura 12: espectro de potencias de un fragmento de *Cosi fan Tutte* de Mozart

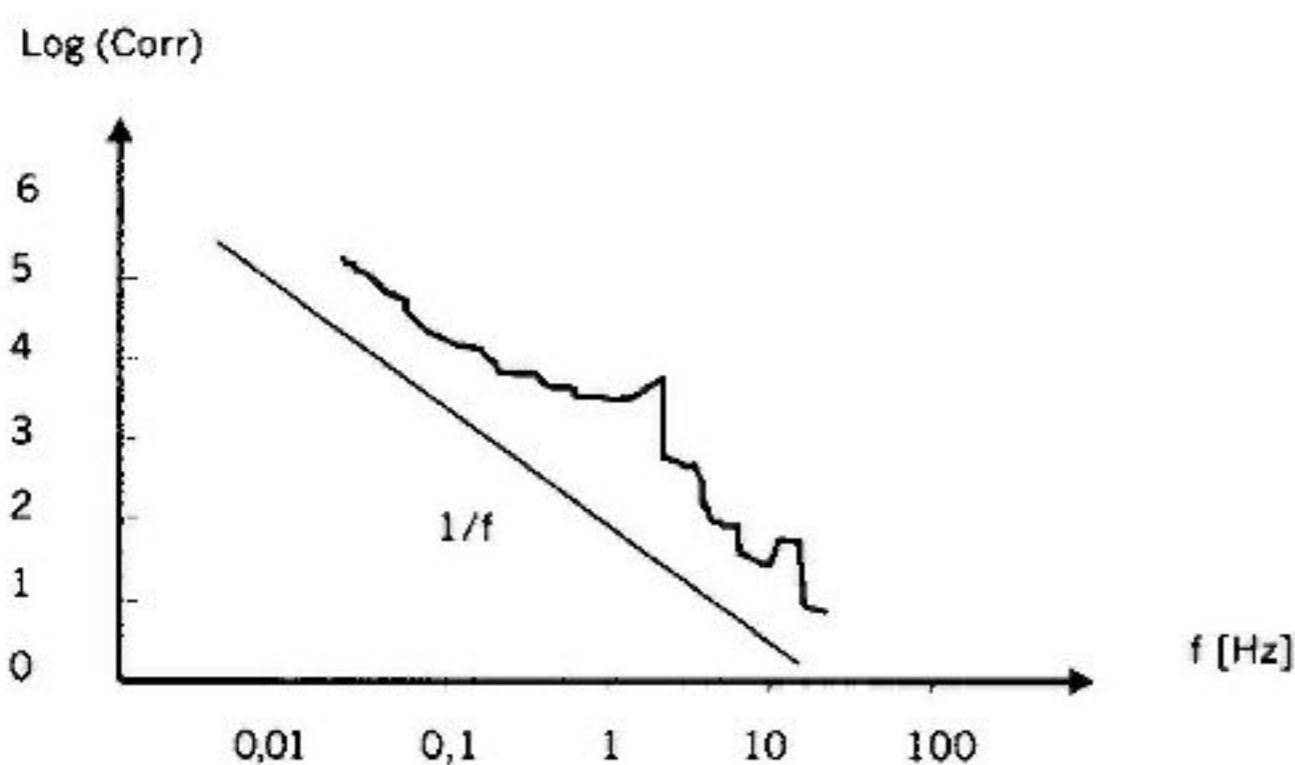


Figura 13: correlación espectral de un fragmento del primer Concierto de Branderburgo de Bach

72 | 73

La señal no parece relacionada con ninguno de los arquetipos examinados. Aquí emerge la confusión entre lo planteado originalmente por Voss y Clarke, y las interpretaciones corrientes. La música se comporta de acuerdo con el esquema del ruido $1/f$ únicamente por debajo de 10 Hz, frecuencia que corresponde a la estructura rítmica de la música cuando se la codifica como notas en un pentagrama. Por ejemplo, la correlación en el primer movimiento del primer Concierto de Branderburgo de Bach se puede ver en la Figura 13.

Solamente en este sentido se puede decir que la música presenta características fractales estrictas. La conclusión no debería sorprendernos, pues la autosemejanza estructural y la relación a diferentes escalas temporales son características reconocidas desde hace tiempo en, al menos, gran parte de la música occidental estructurada a partir de parámetros.¹³ Se han escrito numerosos programas de “composición fractal por computadora”, que producen secuencias más parecidas a la de ciertos estilos de música si se los compara con los algoritmos precedentes, en cierto modo más rústicos.¹⁴

¹³ Por ejemplo, la música concebida sobre la base de “notas”, como el contrapunto barroco.

¹⁴ Se puede mencionar entre ellos a los algoritmos estocásticos como el de Jones, a los que emplean Cadenas de Markov, al de Buxton, al de Rodet y Cointe, etcétera.

En la Figura 14 se aprecia la diferencia entre tres secuencias generadas por computadora en las que se codificaron las duraciones y alturas según patrones de ruido blanco, ruido $1/f^2$ y ruido $1/f$.

Queda a cargo del lector encontrar los estilos de música cuyos contornos melódicos se relacionen con cada una de las secuencias anteriores.



Figura 14: fragmentos melódicos que responden a variaciones tipo ruido blanco, marrón y rosa

¿Música fractal?

Aunque no presenten estructuras fractales estrictas, se han hallado procedimientos musicales que reproducen algunas de las características inherentes a la geometría fractal, en especial las propiedades de autosemejanza y de memoria de gran alcance. Un ejemplo de esta clase de procedimientos parece insinuarse en el gráfico realizado por Yannis Xenakis en 1989 para su obra *Voyage absolu des Unari vers Andromède*.¹⁵

En este caso la autosemejanza es visual, pero no se la puede oír debido a la discrepancia estructural entre el sonograma del gráfico y el percepto auditivo asociado al mismo.

El empleo intencional de procedimientos fractales quizá haya tenido lugar, por primera vez, en los trabajos de los compositores franceses que formaron el

¹⁵ Tomado del artículo de Corrado (1998).

Groupe de l'itineraire a mediados de la década de 1970.¹⁶ El momento y lugar no parecen casuales. La geometría fractal es consecuencia de desarrollos matemáticos franceses (Poincaré, Mandelbrot, ...) y había sido definida a fines de la década anterior. El mismo Grisey declara sobre la música espectral: “Llegada al mundo en el año 75, curiosamente en la misma época que la geometría fractal, propone una organización formal y un material sonoro directamente tomado de la física del sonido...”.¹⁷ En el mismo tenor Murail escribe: “... un espectro será utilizado tanto en la dimensión vertical como en la dimensión horizontal, quizá con un plus: la posibilidad de concebir situaciones intermedias, en el interior de una suerte de dimensión fractal en la que la percepción oscila entre diferentes análisis posibles...”.¹⁸ ¿En qué sentido son fractales estas obras? Oigamos nuevamente a Murail: “Una de las mayores ventajas de esta concepción es que una misma técnica se puede aplicar a diversas escalas en la construcción de una partitura: a la gran forma, a las secciones, a las figuraciones, a las diferentes dimensiones de los sonidos musicales, a los elementos retóricos (secuencias, densidades, registros, espesores, neumas, ...)”.¹⁹ Las reglas de recurrencia (los algoritmos en el caso estricto) se aplican a una figura acústica de partida (equivalente al triángulo de la primera etapa de la curva de Koch) que es, en muchas ocasiones, el sonograma de una señal acústica.

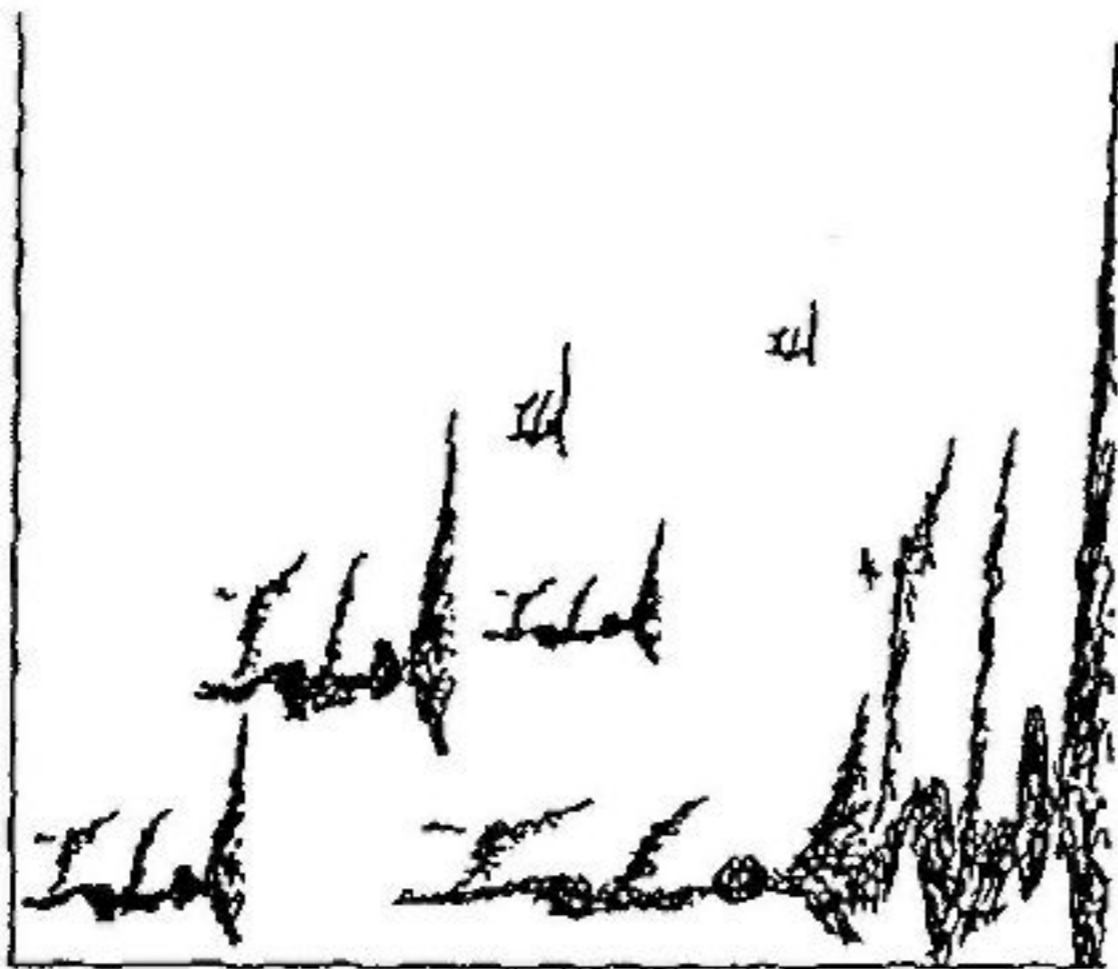


Figura 15: gráfico realizado por Xenakis en 1989

¹⁶ Formado en 1973 por Gérard Grisey, Tristan Murail, Michael Levinas y Roger Tessier.

¹⁷ En *Vouz avez dit spectral?* (1998), tomado de Baillet, Jérôme (2000). Traducción del autor.

¹⁸ Tristan Murail en el artículo “Questions de cible”, publicado en *Entretemps*, no. 8 (1989). Traducción del autor.

¹⁹ T. Murail: *op. cit.* Trad. del autor.

Un buen ejemplo de esta clase de procedimientos se puede ver en el comienzo de *Partiels*, obra compuesta por Grisey en 1975 para 16 o 18 instrumentos. En el comienzo el trombón y el contrabajo atacan un mi_2 *sffz* cuyos armónicos y evolución espectral –escala microfónica (figura 16)– sirven de modelo para la aparición secuenciada del violonchelo, la viola, el violín, el clarinete y la flauta (piccolo), que simulan el mismo espectro dilatado temporalmente –escala macrofónica.

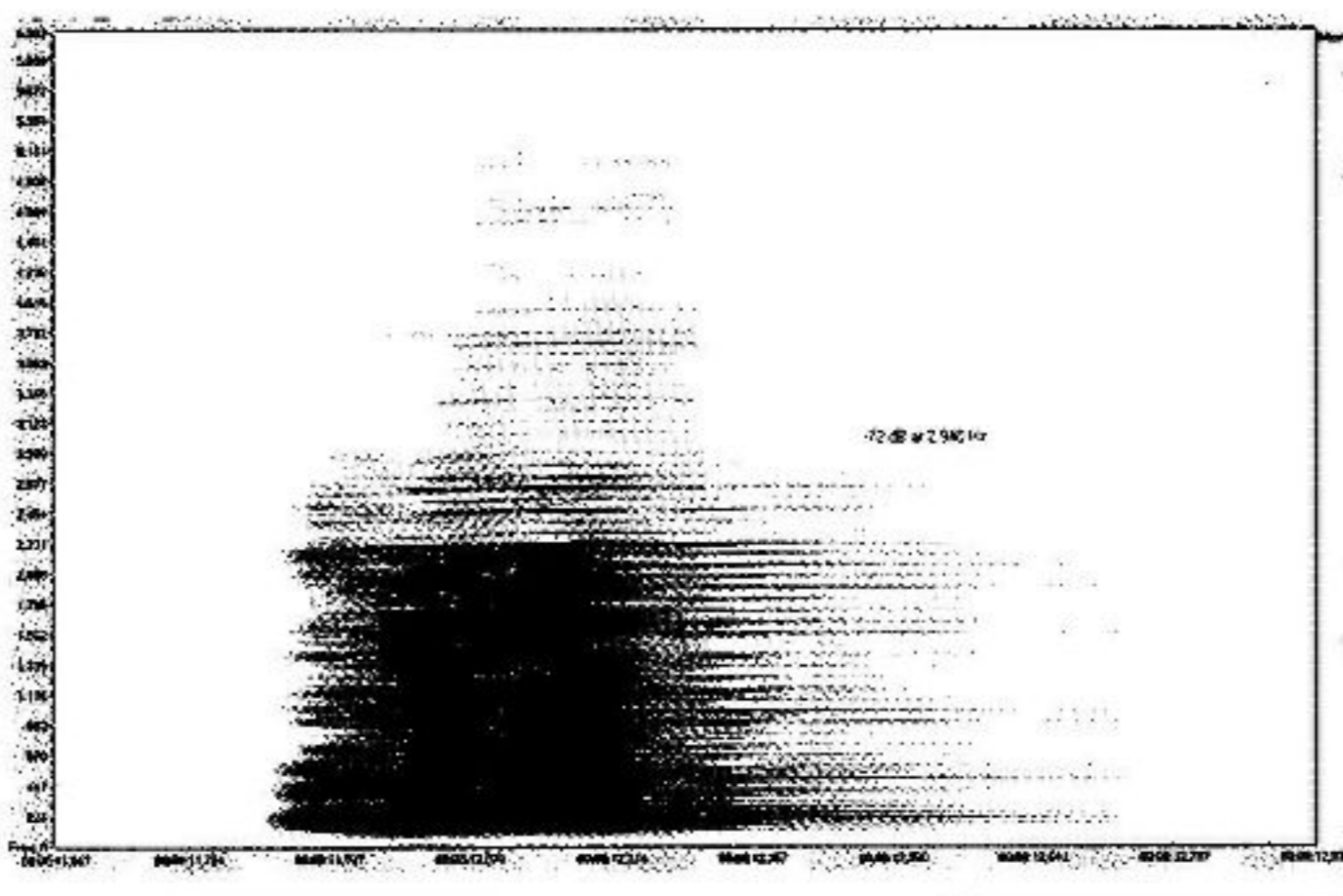


Figura 16:
sonograma de la primera
nota de *Partiels* de Grisey

Figura 17: partitura
del comienzo de *Partiels*

A partir de análisis acústicos la evolución estructural ocurrida en el sonido original, con una duración aproximada de 200 milisegundos, es ampliada a una duración de varios segundos y deviene audible. Grisey denominó síntesis instrumental a este procedimiento de simulación espectral, en el que el sonido es observado a través de una suerte de “microscopio acústico”. La ampliación fractal no es, sin embargo, autosemejante en sentido estricto, pues el simulacro de síntesis instrumental es más complejo todavía que su modelo. A diferencia de los ejemplos más simples, en los que se establece una analogía lineal entre el sonograma y la señal acústica, en éstos la autosemejanza puede oírse a causa del empleo de operaciones con frecuencias absolutas –no con relaciones de frecuencias– y de un cuidadoso estudio de las características de la percepción auditiva.

Estructuras físicas

Algunos de los problemas que padece gran cantidad de estructuras acústicas físicas –instrumentos musicales, salas para música o dispositivos electroacústicos– están generados en el enorme rango de frecuencias que percibe nuestro oído. El desafío de encontrar soluciones eficaces que funcionen de modo parejo a frecuencias graves, medias y agudas muy pocas veces alcanza el éxito. En la actualidad se están desarrollando distribuciones fractales que permiten, al reproducir el mismo comportamiento físico a diferentes escalas, curvas de respuesta plana para señales de banda ancha. Como ejemplo, en la figura 18 podemos ver el corte de un panel difusor que presenta autosemejanza fractal de segundo orden. Las irregularidades de gran escala dispersan la energía de baja frecuencia, mientras que las de pequeña escala lo hacen con la energía de alta frecuencia. La combinación de ambas permite triplicar el ancho de banda efectivo del panel.

76|77

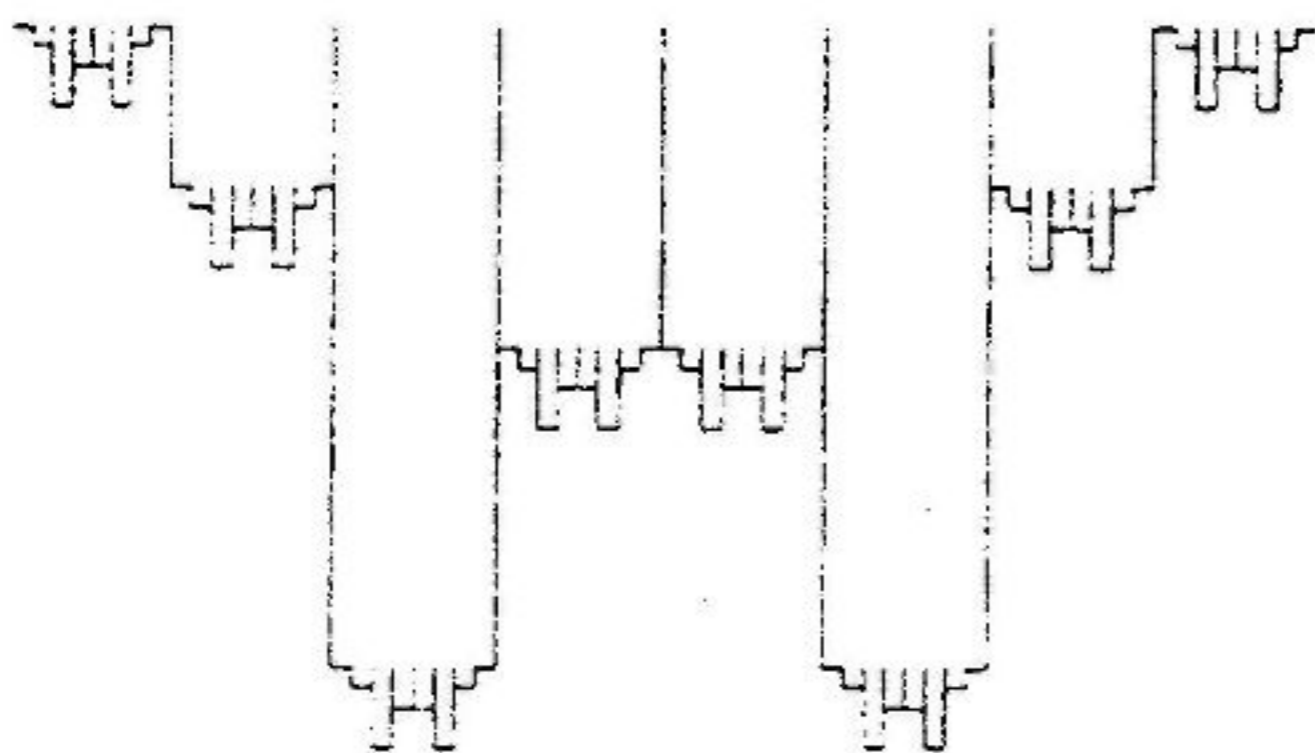


Figura 18: difusor fractal

Estructuras de esta clase se están instalando en estudios de grabación, salas multimedia y auditorios para corregir defectos refractarios a la tecnología acústica tradicional.²⁰

Retomemos la pregunta que hicimos al comienzo de este artículo: ¿Se justifica la relación planteada inicialmente entre geometría fractal y música, o nos encontramos en presencia de una mera analogía? Creemos que la música es estrictamente fractal sólo en los términos establecidos por Voss y Clarke, pero reconocemos también que las obras inspiradas en la nueva geometría plantean estructuras y procesos inéditos. El territorio que aún queda por explorar es mucho mayor al ya recorrido.

²⁰ En nuestro país se están construyendo al menos dos grandes auditorios para música no amplificada que emplean estructuras de este tipo.

- Baillet, Jérôme Gérard Grisey:
Fondements d'une écriture,
Paris, Editions L'harmattan, 2000.
- Basso, Gustavo:
"Fractales, ruido 1/f y música", en Actas del Encuentro Nacional de Investigación en Artes y Diseño, La Plata, 2001.
"Fractales y estructuras musicales autosemejantes", en Actas de XV Conferencia Anual de la Asociación Argentina de Musicología, Buenos Aires, 2002.
- Bohm, David:
Wholeness and the implicate order,
London, Routledge and Kegan, 1980
- Cogan, Robert: "Hildegard's fractal antiphon", *Sonus*, 1990, pp 1-19.
- Corrado, Omar:
"Saer y la música. Encuentro en la repetición", en Procedimientos analíticos en musicología. Actas de las IX Jornadas de Musicología y VIII Conferencia Anual de la AAM. Ruiz, E. Roig y A.Cragolini, eds., Buenos Aires, Instituto Nacional de Musicología, 1998.
- Devaney, Robert:
A first course in chaotical dynamical systems, New York, Addison-Wesley Pub., 1992.
- Entretemps, no. 8. Número especial dedicado a la música espectral, con artículos de G. Grisey, T. Murail, G. Lelong, J. Anderson, J. B. Barriere, C. Malherbe y P.N. Wilson, 1989.
- Gardner, Martín:
"White and brown music, fractal Curves and 1/F fluctuations", *Scientific American*, 238, no. 4, 1978, pp. 16-31.
- Gleick, James:
Chaos, making a new science,
New York, Viking, 1987.
- Ingolfsson, Atli:
"Analyse et texture chez Gérard Grisey", en *Analyse Musicale*, no. 38, pp. 67-74, 2001.
- Mandelbrot, Benoît:
Los objetos fractales,
Barcelona, Tusquets, 1987.
"Del azar benigno al azar salvaje" en *Investigación y Ciencia* 243, 1996, pp. 14-21.
La geometría fractal de la naturaleza, Barcelona, Tusquets, 1997.
- Sprott, Julien:
Strange Attractors, New York, M&T Books, 1993.
- Strogatz, Steven:
Nonlinear Dynamics and Chaos,
New York, Addison-Wesley Pub., 1994.
- Voss, Richard y Clarke, John:
"1/f noise in music: Music from 1/f noise," *Journal of the Acoustical Society of America*, 63 (1), 1978, pp. 258-263.