

Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la Universidad

Gladis Saucedo ⁽¹⁾



Palabras clave:

errores · álgebra · categorización · superación de errores

Resumen. El error es una posibilidad que está presente permanentemente en la construcción y consolidación del conocimiento, no sólo escolar, sino también científico.

Este trabajo es un reporte de la tesis “Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la universidad” que tiene por finalidad identificar, categorizar y analizar los errores algebraicos cometidos por alumnos ingresantes a la universidad (UNL). La reflexión sobre los obstáculos y dificultades que se presentan permitirá generar propuestas remediales.

Key words:

errors · algebra · categorization · overcoming of errors

Abstract. The error is a possibility that is present permanently in the construction and consolidation of knowledge, not only student knowledge but also of scientific knowledge.

This work is a report of the thesis “Categorization of algebraic errors in students who start university”. The purpose is to identify, categorize and analyze the algebraic errors committed by students who start university (UNL). The reflection about the obstacles and difficulties that appear allows us to generate remedial proposals.

(1) Docente Ordinaria de la cátedra Práctica Docente en Matemática, Facultad de Humanidades y Ciencias, UNL. E-mail: gsaucedo@eis.unl.edu.ar

Introducción.

“El problema del error en el aprendizaje es seguramente tan antiguo como la enseñanza misma. Sin embargo, nos encontramos continuamente con el error en la vida diaria, y el sentido común no deja de repetirnos que sólo dejan de equivocarse los que no hacen nada...” (Astolfi, 1999)

(2) Se enmarca dentro de la carrera de postgrado Maestría en Didácticas específicas con mención en Matemática que se dicta en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la UNL. La misma fue dirigida por las doctoras Bibiana Iaffei y Sara Scaglia.

El presente es un reporte de la tesis “Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la universidad”⁽²⁾.

El tratamiento del error es una cuestión de permanente interés en el marco del enfoque didáctico actual. El error no sólo es considerado como normal sino necesario para el aprendizaje, aunque muchas veces esto no se refleja en el aula.

Charnay (1994) afirma que las producciones de los alumnos nos informan sobre su “estado del saber. En particular, ciertas producciones erróneas (sobre todo si ellas persisten) no corresponden a una ausencia del saber, sino más bien a una manera de conocer”. De ahí que surge la necesidad de cuestionarnos ¿hasta qué punto somos conscientes del papel que juega el error en nuestras interacciones áulicas?, ¿analizamos los errores que cometen nuestros alumnos y las convenciones que utilizan en sus procedimientos?, ¿cómo procedemos para ayudar a aquellos que no comprenden los conceptos involucrados en una determinada actividad?

El enfoque de este estudio es exploratorio y sustentado en distintas fuentes, con la intención de mejorar los conocimientos existentes sobre el tema que nos ocupa y sin pretender generalizar los resultados a otras poblaciones escolares.

En la siguiente sección presentamos los objetivos e hipótesis de la investigación. Posteriormente describimos algunos antecedentes sobre el estudio de errores como así también los componentes del marco teórico. El artículo prosigue con la descripción de la metodología, las categorizaciones de errores realizadas y las conclusiones del trabajo.

Objetivos e hipótesis de la investigación.

Los propósitos del estudio son:

- Identificar los errores algebraicos cometidos por los alumnos en una evaluación de ingreso a la UNL.
- Categorizar los errores analizados.
- Analizar los errores cometidos por los alumnos inscriptos en carreras con una fuerte formación matemática y los cometidos por los inscriptos en carreras que poseen una sola Matemática.
- Reflexionar sobre los obstáculos y dificultades que se presentan en el aprendizaje del álgebra, y generar derivaciones.

Teniendo en cuenta los objetivos propuestos planteamos las siguientes hipótesis de trabajo:

- **H.1:** Existen dificultades comunes en la comprensión del álgebra en los alumnos, que se manifiestan cometiendo los mismos errores.
- **H.2:** Los alumnos inscriptos en carreras que poseen una fuerte formación matemática, por ejemplo las ingenierías, cometen menos errores algebraicos que aquellos que se inscriben para carreras que poseen una sola matemática.
- **H.3:** El conocimiento e identificación de los errores proporciona elementos para el desarrollo de propuestas áulicas.

Estas hipótesis expresan la globalidad del problema que se quiere estudiar, que tienen que ver no sólo con la identificación y clasificación de los errores de un grupo y del otro, sino también con el desarrollo de propuestas re-mediales.

La hipótesis 3 está íntimamente ligada al último objetivo y puede pensarse como una consecuencia del trabajo realizado, la explicitamos para que no se pierdan los beneficios del análisis y estudio de errores. Esta hipótesis no la consideramos en el presente trabajo por el recorte que hacemos del mismo. La retomaremos en la segunda parte de este artículo

Antecedentes y marco teórico.

Antecedentes del estudio de errores.

El grupo de álgebra del proyecto S.E.S.M. (*Strategies and Errors in Secondary*

Mathematics) (citado por Macnab y Cummine, 1992) de Inglaterra desarrolló entre 1980 y 1983 un interesante proyecto de investigación relacionado con los errores más comunes que cometen los estudiantes y explicaron sus razones. A pesar de la diferencia de edad (entre 13 y 16 años) y de haber asistido a diferentes cursos de álgebra, cometían similares errores en todos los niveles. Movshovitz-Hadar; Zaslavsky e Inbar (1987) trabajaron los errores de los estudiantes en un curso de Matemática Remedial Introductorio al Álgebra para analizar los tipos de errores que aparecen o son cometidos por los alumnos en álgebra y si el momento del día (mañana, tarde o noche) afecta la efectividad de los estudiantes.

Esteley y Villarreal (1996) realizaron una categorización de los errores cometidos por los alumnos de primer año de Ciencias Agropecuarias de la Universidad Nacional de Córdoba al resolver problemas o ejercicios sobre funciones, límite y continuidad. Una vez identificados los errores por ejercicio se los clasificó considerando distintas categorías.

En el marco de un proyecto de investigación diseñado para explorar la estrategia de instrumentación del uso del error, Borasi (1994) realizó un estudio de casos. Utilizó los errores como trampolín para la indagación en el contexto de la matemática escolar secundaria con el objetivo de capitalizar errores a través de planificaciones de actividades o haciendo uso improvisado de los mismos.

Fundamentos epistemológicos.

El error es una posibilidad que está presente permanentemente en la construcción y consolidación del conocimiento, no sólo escolar sino también del conocimiento científico; esto se ha visto a través de la historia ya que en muchos casos se han aceptado como válidos conceptos que luego se demostró que eran erróneos. Rico (1997b) considera que esta cuestión ha preocupado a importantes filósofos y epistemólogos que se han ocupado del tema, entre ellos, Popper (1979) que examina la cuestión ¿cuál es la fuente última del conocimiento? y a partir de allí deriva el papel que tienen los errores en la adquisición del conocimiento científico. Bachelard (1938) plantea la noción de obstáculo epistemológico para referirse a la aparición de errores en la construcción de nuestro conocimiento. Lakatos (1978), por su parte,

apuesta a un conocimiento falible, a demostraciones siempre mejorables, a una heurística falible, a la dialéctica de plantear conjeturas que aproximen una respuesta a un problema o cuestión, a la crítica de las conjeturas mediante contraejemplos.

Errores, dificultades y obstáculos.

Anne Ragot (citada por Chemello y Díaz, 1997) en un artículo sobre la enseñanza de la matemática para alumnos de 11 a 16 años analiza qué se entiende por error teniendo en cuenta distintos referentes teóricos: platonistas, logicistas, conductistas y constructivistas. En el presente trabajo nos situamos en esta última perspectiva, reconociendo que en muchas escuelas conviven también otros enfoques.

El término obstáculo fue tomado por Brousseau (1997) de Bachelard, y lo interpreta como un conocimiento que tiene su propio dominio de validez, pero fuera de dicho dominio es ineficaz y puede ser una fuente de errores y dificultades. Al respecto afirma: “el error y el fracaso no tienen el papel simplificado que a veces se les quiere asignar. El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus logros, pero que, ahora se revela como falso o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, sino que constituyen obstáculos” (Brousseau: p.84).

Davis (1986) también considera que los errores no son al azar, y afirma que es posible predecir algunos patrones comunes de errores que se presentan en forma similar en distintos individuos.

Para describir las dificultades consideramos los tres ámbitos del sistema didáctico (alumno, profesor y conocimiento, en un contexto determinado). Retomamos el análisis realizado por Macnab y Cummine (1992) para describir dificultades de los alumnos, del docente y dificultades con el conocimiento matemático escolar. Si bien el examen de estos autores es general, puede aplicarse a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en particular.

Distintos autores se han referido a las causas de errores, entre ellos Socas (1989) y Charnay (1994). En particular Socas propone diversos orígenes del error:

Errores que tienen su origen en un obstáculo, por ejemplo, para algunos alumnos que se inician en el estudio del álgebra la yuxtaposición de dos símbolos xy genera cierta dificultad porque en aritmética la yuxtaposición denota adición $23 = 20+3$ mientras que en álgebra xy significa multiplicación.

Errores que tienen su origen en una ausencia de sentido. Muchas de las dificultades del álgebra se deben a los problemas que quedan sin resolver en la aritmética, como por ejemplo no saber sumar fracciones, el uso del signo $-$, mal uso de las propiedades distributivas, de los recíprocos, errores de simplificación, etc. Se incluyen aquí también los errores debidos al uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos (por ejemplo, el mal uso de la propiedad distributiva) y los originados por las características propias del lenguaje algebraico, como el significado y la interpretación que se realiza de los símbolos. Un ejemplo de este último es el significado del signo $=$, que en aritmética es interpretado como unidireccional y en álgebra como bidireccional.

Otros errores tienen su origen en *actitudes afectivas y emocionales* como la representación que los alumnos tienen de la matemática y de ellos mismos como matemáticos, los problemas de orden psico-afectivos, el no uso del sentido común, la intolerancia hacia la lentitud en algunas aulas, etc.

En este trabajo se considera que las dificultades de los alumnos se relacionan generando en la práctica obstáculos que se manifiestan en forma de errores. Si bien hay una íntima relación entre dificultades, obstáculos y errores nosotros ponemos el acento en los errores.

Nos situamos (como se ha expresado anteriormente) en las teorías constructivistas del aprendizaje, que coinciden en afirmar que el conocimiento es construido, que existen estructuras cognitivas que se activan en el proceso de construcción y que están en continuo desarrollo, que el dinamismo del proceso del conocimiento no se reduce a los niveles de evolución psicogenética sino que también deben tenerse en cuenta otros aspectos no estructurales como las estrategias.

Desde esta perspectiva consideramos a los errores como una parte natural y normal del proceso de aprendizaje, que indican la presencia de un saber diferente y no ausencia de saber y que dependen no sólo del alumno sino que también intervienen otras variables tales como el profesor, el currículo,

el entorno social en el que se encuentra la escuela, el medio cultural y sus relaciones y las posibles interacciones entre estas variables. De ahí que los errores son el resultado de procesos muy complejos.

El lenguaje algebraico.

Uno de los problemas del álgebra escolar está ligado a las cuestiones del lenguaje. El alumno debe tener claras las semejanzas y diferencias entre el lenguaje ordinario y el lenguaje de la matemática, y en particular conocer las características del lenguaje algebraico. Los alumnos que estudian álgebra deben aprender a utilizar un sistema nuevo de notación para descubrir procedimientos y relaciones generales. Sin embargo vemos a lo largo de toda la enseñanza media que en general no disponen de un recurso algebraico como herramienta útil en la resolución de problemas, ya que son muchos los errores algebraicos que se cometen en sus prácticas escolares, principalmente en la resolución de ecuaciones. La presencia de estos errores es un problema complejo y delicado y todo aporte que se haga para analizar o mejorar esta cuestión debe ser de interés para la educación matemática.

Aspectos psicológicos.

Collis (1980, citado por Socas, 1989) tomando como referencia a la teoría de Piaget estudia varios caminos de interpretación de las letras en la aritmética generalizada, haciendo referencia a las variables e incógnitas. Kücherman (1981, citado por Enfedaque, 1990), se basó en las ideas de Collis para estudiar las diversas formas en que los estudiantes usan las letras. El nivel de comprensión del álgebra está relacionado con la evolución que se sigue en la utilización de las letras.

En este estudio Küchemann describe seis formas distintas de interpretación y uso de las letras: **(1)** letra evaluada, **(2)** letra no usada o ignorada, **(3)** letra como objeto, **(4)** letra como incógnita específica, **(5)** letra como número generalizado y **(6)** letra como variable.

Aspectos históricos.

El desarrollo del álgebra se realiza desde la aritmética, por una parte, al tratar de encontrar solución a los problemas mercantiles (las escuelas de ábacos) y por otra desde la geometría, resolviendo problemas algebraicos de forma geométrica. La comprensión por parte de los profesores de estos modos de trabajo representa una vía de acceso a niveles de mayor complejidad acerca de la naturaleza del álgebra. Además el docente puede sacar provecho de esta evolución histórica para enfocar el aspecto operativo del álgebra y potenciar metodologías (o planear un proyecto de enseñanza) que permitan a través de la resolución de problemas recuperar para el aula algunos aspectos históricos, como así también puede ser utilizada como una referencia para anticipar dificultades o errores posibles en el aprendizaje de los alumnos. No obstante, conviene elegir con cautela los ejemplos históricos para trabajar en el aula.

Metodología.

El trabajo realizado es una investigación de corte descriptivo, basada en distintas fuentes y dirigida a mejorar los conocimientos existentes sobre el tema en cuestión.

La población considerada en este estudio es un conjunto de 1317 estudiantes que rindieron la asignatura matemática para ingresar a distintas carreras que se dictan en las Facultades de la Universidad Nacional del Litoral.

Para la selección de las pruebas se realiza un muestreo probabilístico o al azar. Con el objeto de mejorar la representación de la misma, la población se divide en estratos teniendo en cuenta la calificación obtenida (aprobado ó no aprobado) y la carrera elegida (matemática básica a cursar: A o B). Cabe aclarar que los estudiantes que cursan matemática básica A, la tienen como única matemática en su carrera, por ejemplo el Profesorado de Biología, mientras que los que cursan matemática B tienen otras Matemáticas en su carrera, por ejemplo las Ingeniería. El reparto de la muestra en cada categoría lo realizamos al azar, proporcional al número de elementos de cada uno de ellos. En total trabajamos con una muestra de 132 estudiantes, repartidos así: Matemática A 37 y Matemática B 95.

En cuanto a los instrumentos destacamos que los temarios de las evaluaciones fueron confeccionados por los profesores coordinadores del curso común propedéutico. Se confeccionan 8 temas y se incluyen 5 ejercicios por tema. Hay ejercicios repetidos, algunos difieren en los números o letras y signos de las operaciones. Los menos ofrecen más diferencias, tal vez algunos incisos son más complicados que otros, pero en el recorte realizado para el estudio no se ha tenido en cuenta.

Luego de leer los temarios y resolverlos realizamos un *análisis previo*, pensando en los posibles procedimientos que podrían haber utilizado los alumnos para resolverlos, en los posibles errores y en los ejercicios con más dificultad para ellos.

Otro aspecto estudiado fue *la influencia de la confección del temario en la producción de errores*. Nos apoyamos en las investigaciones de Movshovitz-Hadar, Inbar y Zaslavsky (1987a) quienes estudian 4 factores de edición que pueden inducir a errores: *Impresión Descuidada*, *Diseño Pobre*, *Figura engañosa* y *Redacción Ambigua*. Si bien en las pruebas analizadas no podemos aplicar directamente ninguno de estos factores, el ejercicio 1 presenta una estructura que por su extensión y por las distintas consignas de los incisos pudo haber generado ciertas confusiones a los estudiantes.

Primera categorización de errores.

Teniendo en cuenta el muestreo probabilístico dentro de cada estrato, las respuestas de los estudiantes se dividen en tres categorías: *correctas*, *incorrectas*, *no resuelve*.

Se contabilizan 22 ítem por cada una de las 132 pruebas analizadas sumando 2904 ítem de los cuales 1128 (39%) corresponden a respuestas con errores (incorrectas). Estas respuestas incorrectas son clasificadas en dos grupos o categorías según la clase de error, tomando como modelo el trabajo de Pinchback (1991).

Las dos categorías consideradas son: 1º errores conceptuales y 2º errores de pre-requisito.

1º Error conceptual

“Los estudiantes intentan aplicar el procedimiento apropiado tal como es requerido por el concepto, pero produce errores al llevar a cabo los pasos necesarios” (p. 55).

Ejemplos: error al factorizar el polinomio; error al aplicar la propiedad distributiva de la potencia respecto a la suma; errores de conocimientos específicos, por ejemplo definición de potencia de exponente fraccionario; asociaciones incorrectas.

2º Error de pre-requisito

“Los estudiantes intentan resolver el problema pero producen el primer error en una deficiencia de un concepto previamente discutido” (p. 56)

Ejemplos: Al intentar resolver una ecuación comete error al no distribuir la potencia con respecto a la multiplicación. Plantea correctamente la ecuación, dada una situación problemática, pero se equivoca al despejar la incógnita. Por momentos resulta difícil realizar esta categorización, sobre todo para identificar si el error se produce o no en un concepto previamente estudiado. Tratemos de analizarlo:

Simplificar la siguiente expresión $\sqrt{x^2 + \frac{1}{9}x^2}$

El alumno resuelve: $\sqrt{x^2 + \frac{1}{9}x^2} = x + \frac{1}{3}x$

Si el tema que se evalúa es reducir la misma a su mínima expresión, este alumno sabe que tiene que reducir el grado del polinomio del radicando, pero al hacerlo aplica una propiedad no válida, ¿ha cometido un *error conceptual* o un *error de pre-requisito*?

El concepto de simplificar lo tiene, se equivoca en *cómo* lo hace, usa inadecuadamente una propiedad conocida. La mayoría de estos errores se cometen porque los alumnos aplican la linealidad como algo natural.

La linealidad implica una forma de trabajar con un objeto que puede descom-

ponerse tomando sus partes en forma independiente. Un operador es empleado linealmente cuando el resultado final se obtiene aplicando el operador a cada parte y luego se combinan los resultados parciales.

Los alumnos tienden a la linealidad porque parecería que sus experiencias anteriores están referidas casi siempre a la misma.

Otra justificación podría ser: el alumno trabaja la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma o resta; de la potenciación con respecto a la multiplicación y división, y luego puede creer que esto es válido siempre y generaliza la propiedad, aplicando la linealidad citada.

¿Entonces el error planteado a qué categoría pertenece?

Después del análisis hecho pareciera que corresponde a un error pre-requisito, al trabajo de las propiedades distributivas de las operaciones.

Sin embargo, se podría objetar esto y considerar ese error como conceptual porque, de acuerdo a lo definido, el estudiante no aplica el procedimiento apropiado para simplificar. Nosotros nos inclinamos por esta segunda posibilidad, y lo consideramos como un error conceptual.

Análisis de los resultados.

En los ejercicios 1 y 5 tanto para los aspirantes a una Matemática como a la otra, los errores de pre-requisito prevalecen sobre los conceptuales, notándose más la diferencia en el ejercicio 1. Una razón posible para que se dé este comportamiento puede ser que para resolverlos se necesitan conocer temas básicos, estudiados durante toda la escolaridad, como por ejemplo: manejo del cálculo numérico y propiedades de las operaciones.

En los ejercicios 2, 3 y 4 se observa que prevalecen los errores conceptuales, ya que en las consignas se involucran conceptos específicos como por ejemplo: aplicar el teorema del resto o la regla de Ruffini, obtener la ecuación de una recta y/o parábola.

Cuando formulamos la hipótesis 2 respecto de la posibilidad de menor incidencia de errores en alumnos inscriptos en carreras que poseen una fuerte formación matemática, como por ejemplo las ingenierías, lo hicimos pensando que íbamos a encontrar notables diferencias teniendo en cuenta que los estudiantes que terminan el ciclo medio eligen la carrera a seguir

tomando como una de las variables las asignaturas que tienen que rendir para el ingreso.

Sin embargo no hemos observado diferencias notables. Tanto los alumnos de una matemática como de la otra cometen los mismos errores, que son productos de su experiencia previa y que pueden tener distintos orígenes y/o causas que se entrelazan entre sí, y que a veces es imposible aislar.

Para realizar un avance más con respecto al análisis de errores realizamos una comparación entre las categorías trabajadas y las categorías propuestas por Radatz (1979). Se concluye, coincidiendo con este autor, que es difícil realizar una separación entre las posibles causas de un error porque existe una interacción próxima entre las causas, lo que ocasiona que un mismo error pueda aparecer en diferentes procesos de resolución de problemas. Como consecuencia de ello, es muy difícil realizar una clasificación definitiva y establecer una jerarquía entre las causas de errores.

Segunda categorización de errores.

Con el objeto de hacer un análisis más profundo y comparar el comportamiento de la muestra consideramos otra categorización de errores. Luego de haber analizado las pruebas y realizado una primera categorización, observamos que la clasificación empírica realizada por Movshovitz-Hadar; Inbar y Zaslavsky (1987b) se adaptaría mejor para categorizar los errores de las resoluciones de los estudiantes. Para realizarla tuvimos en cuenta la misma muestra de la clasificación anterior y examinamos nuevamente las pruebas seleccionadas. Tomamos algunas categorías de estos autores, reformulamos otras y se vio la necesidad de la creación de una nueva: *errores al operar algebraicamente*. En total se clasifican 1137 errores correspondientes a distintas categorías. Las categorías consideradas son las incluidas en el Cuadro 1.

Cuadro 1. Categorías utilizadas en la segunda categorización.

A. Datos mal utilizados: se incluyen aquí, los casos en que se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; se hace una lectura incorrecta del enunciado.

B. Interpretación incorrecta del lenguaje: se incluyen aquí los casos de errores debido a una traducción errónea de conceptos o símbolos matemáticos, dados en lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto (Designar un concepto por un símbolo que designa a otro concepto y operar con el mismo en su uso convencional). A veces se produce, también una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa. Desconexión entre lo analítico y gráfico.

C. Empleo incorrecto de propiedades y definiciones: aquí se consideran los errores que se cometen por deformación de un principio, regla o definición determinada: aplicar la propiedad distributiva a una operación o función no lineal; cita o escritura errónea de una definición, teorema o fórmula identificable.

D. Errores al operar algebraicamente: sumar, restar, multiplicar, etc. expresiones algebraicas y al transponer términos.

E. No verificación de resultados parciales o totales: se incluyen los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; si el alumno hubiese contrastado la solución con el enunciado tal vez el error habría podido evitarse.

F. Errores lógicos: en este grupo se incluyen los errores que se cometen por falacias de razonamiento. Justificaciones inadecuadas. Explicaciones ilógicas.

G. Errores técnicos: en esta categoría se consideran los errores de cálculo, errores al transcribir datos del temario.

Se presentan algunos ejemplos: primero se enuncia el problema, luego se presenta la respuesta del alumno y finalmente se hace un análisis del error.

• **Ejemplo 1:** Una escalera doble está hecha uniendo dos escaleras de 2.10 m de largo con una soga de 70 cm atada a dos escalones que se encuentran a $\frac{2}{3}$ de la parte superior y a $\frac{1}{3}$ de la parte inferior. Calcula la altura de la escalera. Realiza una figura de análisis vinculando datos e incógnitas.

• *Respuesta del alumno:*

$$\text{Sen } 20^\circ = \frac{\text{Cat opo}}{\text{Hip}} = \frac{x}{2,10\text{m}}$$

$$\text{Sen } 20^\circ = 0,3420201 = \frac{x}{2,10}$$

$$0,3420201 \cdot 2,10 = x$$

$$0,718242 = x$$

(3) Como los ejercicios han sido corregidos por un docente, las respuestas escaneadas pueden contener anotaciones de éste.

• *Análisis del error:* descuida dos datos dados para la solución, en este caso los 70 cm y la distancia a $\frac{2}{3}$ de la parte superior, y agrega una condición, los 20° , que no concuerda con la información dada. (**Categoría A**)⁽³⁾

• **Ejemplo 2:** Una recta tiene ecuación $2x + 3y + 1 = 0$. Indica su pendiente y ordenada al origen.

• *Respuesta del alumno:*

ordenada al origen $\rightarrow 1$

(2 3) (0 0)

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{3 - 0}{2 - 0} = 1,5$$

$m = 1,5 \quad \frac{3}{2}$

· *Análisis del error:* el estudiante interpreta la ecuación general de la recta como la explícita (**Categoría B**). Considera los coeficientes de las incógnitas como las coordenadas de un punto perteneciente a la recta (**Categoría C**), e incluye el origen de coordenadas, que no pertenece a la misma, como un punto de ella. Por lo tanto añade un dato que no está dado, (**Categoría A**). Luego aplica correctamente la fórmula para calcular la pendiente o sea opera con los símbolos (en este caso los puntos) convencionalmente.

· **Ejemplo 3:** Indica si el enunciado es V o F. Si es falso modifica el lado derecho para que sea verdadero (en las igualdades), o modifica la desigualdad.

$$c) (x+y)^{1/3} = x^{1/3} + y^{1/3}$$

· *Respuesta del alumno:*

$$c) F / (x+y)^{1/3} = x^{1/3} + 2xy + y^{1/3} \neq$$

· *Análisis del error:* el estudiante ha hecho una generalización del cuadrado de un binomio, en virtud de la similitud de esta forma con respecto a aquella para la que se definió. (**Categoría C**).

· **Ejemplo 4:** Realiza las operaciones indicadas: $x^2(x-1) - 2x(x-1) + (x-1)$

· *Respuesta del alumno:*

$$\begin{aligned}
 d) & x^2(x-1) - 2x(x-1) + (x-1) \\
 & \rightarrow (x^3 - 1x^2) - 2x^2 + 2x + x - 1 \\
 & \rightarrow (-1x) + x + x - 1 \\
 & \rightarrow -1x + 2x - 1 \\
 & \rightarrow x - 1
 \end{aligned}$$

Errores →

· *Análisis del error*: el alumno no sabe operar con polinomios, no se encuentra una justificación para lo realizado por el mismo; es posible que reste los exponentes correspondientes a términos de distinto grado. (**Categoría D**).

A esta altura nos preguntamos si la adjudicación de las categorías trabajadas es fiable. O sea hasta qué punto un investigador ajeno a la investigación puede arribar a resultados similares teniendo los mismos datos. Para responder a esta cuestión trabajamos una de las estrategias propuestas por McKnight y otros (2000) designada como 'múltiples investigadores'. Cuando se trabaja en forma individual se corre el riesgo de introducir tendencias personales. Para evitarlo, requerimos la colaboración de 8 expertos para indagar hasta qué punto docentes ajenos a este estudio pueden arribar a resultados similares a los nuestros, lo que nos permitirá analizar y rever nuestra clasificación. Les entregamos una guía de ejercicios que debían categorizar según los enunciados de las categorías dadas. Los resultados son expuestos en una tabla junto con los nuestros para hacer una comparación directa de los mismos. La mayoría de las categorizaciones realizadas por los colegas coinciden con las muestras. Para realizar el *análisis de los resultados* tabulamos los datos usando el software SPSS 7.5 teniendo en cuenta distintas variables:

- Las categorías consideradas por ejercicio, ejemplo 1A, 1B..., 3C, 3D...
- La resolución de los ejercicios: resuelve (1); incompleto (2); no resuelve (0).
- La Matemática a cursar: A (0); B (1).
- La nota obtenida: aprobado (1); no aprobado (0).

El objetivo de esta tabulación es extraer información respecto a la presencia o ausencia de diversos tipos de errores; la cantidad de veces que se presentó el error de tipo C, por ejemplo, en el ejercicio 4; la cantidad de errores que comete cada alumno en cada categoría y en total; la cantidad de errores que se cometen de una categoría determinada; entre otros.

Los resultados se organizan por categorías, y las conclusiones son incluidas en el punto siguiente.

Conclusiones.

Dada nuestra experiencia, la de colegas, y los resultados que se han obtenido en Matemática en los exámenes de ingreso de distintas Universidades del país, observamos las dificultades que presentan los alumnos a la hora de trabajar un determinado tema matemático, y particularmente algebraico. Este es uno de los motivos que nos impulsó a realizar este estudio, teniendo en cuenta que es tarea nuestra tratar que los alumnos superen los errores que cometen.

Se cumplieron los objetivos propuestos, al identificar y analizar los errores cometidos por los alumnos en las pruebas de ingreso. Con dichos errores propusimos dos categorizaciones y se obtuvieron conclusiones destacándose que:

- La diferencia de errores entre las distintas categorías era previsible, si se tiene en cuenta que la evaluación analizada no fue confeccionada con el propósito de aplicar las mismas.
- Trabajar con una evaluación que brinde la oportunidad de error en cada categoría podría ser un verdadero desafío, y de este modo el modelo de categorización propuesto podría contribuir a una asignación del nivel de dificultad de un ítem, por el número de errores por categoría que provoca.
- Una categorización definitiva y una jerarquía de los errores son difíciles de realizar ya que un mismo error aparece en diferentes desarrollos de resolución de problemas
- Entre los errores más frecuentes sobresalen:
 - *Empleo incorrecto de propiedades y definiciones algebraicas*, que desde la primera categorización lo podemos asociar a errores de tipo conceptual: los alumnos hacen un uso inapropiado de propiedades y definiciones cuando tratan de aplicar reglas conocidas a ciertos problemas. La mayoría de estos errores proceden de aplicar falsas generalizaciones y sobre todo por la falta de linealidad de algunas operaciones.
 - *Errores conceptuales* ya que resuelven incorrectamente algunos de los ítems propuestos utilizando procedimientos parcialmente correctos para otro concepto. Además este tipo de error prevalece en aquellos ítems donde se necesitan conceptos específicos para resolverlos, como por ejemplo aplicar un teorema u obtener la ecuación de una recta y/o parábola.
 - *Errores de pre-requisito* que se destacan en aquellos incisos donde para resolverlos se necesitan conocer temas básicos estudiados durante

toda la escolaridad, por ejemplo cálculo numérico y propiedades de las operaciones.

- *Falta de interpretación* en los ítems expresados con enunciados donde tienen que traducir datos al lenguaje simbólico. Observamos olvido u omisión de algún dato necesario para la resolución correcta, una lectura inadecuada de los enunciados o se asigna a una parte de la información un significado inconsistente.

- Tanto la confección como el diseño del examen deben ser planificados y analizados para evitar errores que pueden ser inducidos por el temario.
- Ambos modelos de clasificación realizados pueden ayudar a los docentes a:
 - Diagnosticar tendencias persistentes de los alumnos a producir cierto tipo de errores.
 - Prevenir ciertas dificultades y errores.
 - Planificar la enseñanza teniendo en cuenta los errores más destacados.
 - Elaborar un plan re-mediación para un determinado tipo de error.
 - Confeccionar un inventario clasificado de errores.
 - Preparar un listado de distractores para pruebas de opción múltiple

Entre las limitaciones detectadas de este estudio mencionamos las siguientes:

- No pudimos controlar ciertas variables como:
 - la confección de los temarios,
 - los objetivos de la evaluación,
 - el momento y el espacio físico donde se desarrollaron las evaluaciones.
- Un mismo error puede aparecer en diferentes procesos de resolución, lo que dificulta una clasificación definitiva y una jerarquía del mismo.
- Las categorizaciones realizadas son empíricas y por lo tanto debemos tener en cuenta las limitaciones del modelo; sin embargo se pueden fundamentar desde la práctica y ser de utilidad para docentes y autoridades interesados en el diagnóstico, tratamiento y superación de errores.

Como *cierre* queremos dejar planteadas algunas cuestiones, ya que el trabajo realizado puede abrir nuevas vías de investigación, estableciendo diversos problemas a indagar. Algunos aportes que nos ofrece este estudio y que se pueden abordar en futuros trabajos son:

- Análisis de los enunciados de problemas en términos de posibles inductores de errores
 - Análisis cualitativo de errores a partir de entrevistas
 - Aplicación y evaluación de las propuestas realizadas.
 - Estudio de la persistencia y superación de los errores en un trabajo de tipo longitudinal. Es decir hacer un seguimiento en el tiempo de una muestra de alumnos estableciendo por ejemplo tres etapas: último año del Polimodal; ingreso a la UNL; al cabo de dos años o tres años de esa fecha.
 - Repetición del estudio introduciendo otras categorizaciones de errores. En el presente se trabajó con dos categorizaciones, se podrían introducir otras que tal vez darían lugar a nuevas conclusiones.
 - Estudio comparativo de distintas muestras, por ejemplo de alumnos ingresantes a la UNL y a la UNER o de distintos años en una misma Universidad, o en la escuela Media. No sólo analizando pruebas sino realizando entrevistas y/o estudio de casos o rebatiendo la hipótesis 1.h
 - Teniendo en cuenta los errores aquí analizados se puede hacer un tratamiento curricular de los mismos, organizando, implementando y evaluando unidades didácticas que los contemplen.
 - Realización de estudios para constatar hipótesis alternativas que justifiquen el origen o causa de determinados errores algebraicos analizados en el presente trabajo.
 - Realización de estudios dedicados a la observación, análisis, interpretación y tratamiento de los errores algebraicos que cometen los alumnos que estudian Profesorado de Matemática, para tratar de poner de manifiesto las concepciones deficientes y los errores producidos con la finalidad de proponer esquemas de trabajo correctivos y lograr una concientización de la importancia del estudio de errores para la futura práctica profesional.
- Este trabajo continúa con una propuesta de superación de los errores que se puede consultar en la Biblioteca de la FHUC (UNL).

“El conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra; jamás es inmediato y pleno. Al volver sobre un pasado de errores se encuentra la verdad” (Bachelard, 1938).

Referencias bibliográficas.

Astolfi, J. (1999): *El "error", un medio para enseñar.* Díada, Sevilla.

Bachelard, G. (1938): *La formación del espíritu científico.* Siglo XXI, México.

Borasi, R. (1994): "Capitalizing on errors as 'Springboards for inquiry' a teaching experiment" en *Journal for Research in Mathematics Education*, 2 (25), pp. 166-208.

Brousseau, G. (1997): "Epistemological obstacles problems and didactical engineering" en Balachef, N., Cooper, M., Sutherland, R. y Warfield V. (Eds.) *Mathematics Education Library*, Kluwer Academic Publishers.

Charnay, R. (1990/91): "Del análisis de los errores en Matemática a los dispositivos de remediación: algunas pistas". Equipo de investigación en didáctica de las matemáticas INRP, *Grand N*, 48, pp. 37-64. Francia, Traducción Capdevielle, Varela, Willson para PTFD Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.

Charnay, R. (1994): "Aprender (por medio de) la resolución de problemas" en Parra, C. y Saiz, I. (comps.) *Didáctica de Matemática*, (pp. 51-63), Paidós, Buenos Aires.

Chemello, G. y Díaz, A. (1997): *Matemática. Metodología de la enseñanza.* Programa Prociencia, CONICET, Argentina.

Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (1997): *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Barcelona: ICE-HORSORI.

Davis, R. (1986): *Learning Mathematics. The cognitive science approach to mathematics Education* (second printing). New Jersey: Ablex Publishing Corporation.

Enfedaque, J. (1990): "De los números a las letras". *SUMA*, 5, pp. 23-31.

- Esteley, C. y Villarreal, M. (1996):** “Análisis y categorización de errores en Matemática”. *Revista de Educación Matemática*, 1 (11). Universidad Nacional de Córdoba.
- Filloy, E. y Sutherland, R. (1996):** “Designing curricula for teaching and learning algebra” en Bishop (Eds.) *International Handbook of mathematics educations*, (pp. 139-160), Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Ginsburg, H. (1977):** *Children’s Arithmetic. How they learn it and how you teach it*. Litton Educational Publishing inc, United States of America.
- Grupo Azarquiel (1993):** *Ideas y Actividades para enseñar Álgebra*. Síntesis, Madrid.
- Lakatos, I. (1978):** *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Alianza universidad, Madrid.
- Linchevsky & Herscovics (1996):** *Educational Studies in Mathematics*, 30, pp. 39-65.
- Mcknight, C.; Magid, A.; Murphy, T. y Mcknight, M. (2000):** *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician*. AMS, American Mathematical Society, United States of America.
- Macnab, D. y Cummine, J. (1992):** *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16. Un enfoque centrado en la dificultad*. Visor, Madrid.
- Movshovitz-Hadar, N.; Inbar, S. y Zaslavsky, O. (1987a):** “Sometimes students. Errors are our fault”, *Mathematics Teacher*, 80, pp. 191-194.
- Movshovitz-Hadar, N.; Inbar, S. y Zaslavsky, O. (1987b):** “An Empirical classification model for errors in Higher School Mathematics”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, pp. 3-14.
- Ortiz, M. (1997):** “El lenguaje algebraico en la escuela”. *UNO*, 14, pp. 47-60.
- Pinchback, C. (1991):** “Types of Errors Exhibited in a Remedial Mathematics Course”, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 13, pp. 53-62.
- Popper, K. (1979):** *El desarrollo del conocimiento científico*. Siglo XXI, México.
- Pozo, J. (1989):** *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Morata, Madrid.
- Radatz, H. (1979):** “Errors Analysis in the Mathematics Education” en *Journal for Research in Mathematics Education*, 6, pp. 163-172.
- Radatz, H. (1980):** “Student’s Errors in the Mathematics Learning Process: a Survey”. *For the Learning of Mathematics*, 1, pp. 16-20.
- Rico, L. (coord.) (1997a):** *La Educación Matemática en la Escuela Secundaria*. ICE/HORSORI, Barcelona.
- Rico, L. (1997b):** “Reivindicación del error en el aprendizaje de las Matemáticas”. *Épsilon*, 38, 185-198.
- Sfard, A. y Linchevski, L. (1994):** “The gains and the pitfalls of reification - The case of algebra”. *Educational studies in Mathematics*, 26, pp. 191-228.
- Sierra, M. (1997):** “Notas de historia de las matemáticas para el currículo de secundaria” en Rico, L. (coord.): *La Educación Matemática en la Escuela Secundaria*, ICE/HORSORI, Barcelona.
- Socas, M. y otros (1989):** *Iniciación al álgebra*. Síntesis, Madrid.
- Socas, M. (1997):** “Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria” en Rico, L. (coord.): *La Educación Matemática en la Escuela Secundaria*, ICE/HORSORI, Barcelona.