"Una mancha en el sol de Euclides": Hilbert y la teoría euclídea de las proporciones.

*Eduardo N. Giovannini**

Resumen:El artículo examina una de las contribuciones más importantes a los fundamentos de la geometría euclídea elemental lograda por David Hilbert en su obra *Fundamentos de la geometría* (1899), a saber: la reconstrucción de la teoría euclídea de las proporciones y de los triángulos semejantes. Se argumenta que dicha reconstrucción no sólo estuvo motivada por la identificación de Hilbert de suposiciones implícitas en la teoría de Euclides, sino que además estuvo esencialmente ligada a la preocupación por la 'pureza del método'. Más aún, se afirma que, en este caso específico, el requerimiento de Hilbert por la pureza del método posee un carácter general o fundacional, esto es, no se refiere a la demostración de un teorema en particular, sino más bien es planteado respecto de la construcción axiomática de la teoría misma.

Palabras clave: Hilbert, Euclides, proporciones, método axiomático, continuidad.

Abstract:The paper examines one the most important contributions to the foundations of elementary Euclidean geometry achieved by David Hilbert in his book *Foundations of Geometry* (1899), namely the reconstruction of the Euclidean theory of proportion and similar triangles. It is argued that this reconstruction was not only motived by Hilbert's identification of implicit assumptions in Euclid's theory, but also it was essentially linked to the concern for the 'purity of methods'. Moreover, it is claimed that in this specific case, Hilbert's requirement of the purity of method has a general or foundational dimension, that is, it is not established with regard to the proof of a particular theorem, but rather it is referred to the very axiomatic construction of the theory.

Keywords: Hilbert, Euclid, proportions, axiomatic method, continuity.

---

*Doctor en Filosofía por la Universidad de Buenos Aires. Actualmente se desempeña como becario posdoctoral del *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas* (CONICET) y como docente la *Universidad Nacional del Litoral*. Es autor del libro *David Hilbert y los fundamentos de la geometría* (CollegePublications, Londres, 2015) y de diversos artículos en revistas nacionales e internacionales sobre los orígenes de la axiomática moderna. Correo electrónico: engiovannini@conicet.gov.ar.

1. Introducción

En la conclusión de su célebre monografía *Fundamentos de la geometría* (1899), David Hilbert (1862–1943) realiza la siguiente observación en relación a las investigaciones axiomáticas allí desarrolladas:

> El presente trabajo es una investigación crítica de los principios de la geometría. En esta investigación nos guió el principio fundamental [*Grundsatz*], según el cual cada cuestión que se presentaba debía ser discutida de tal maneraque podíamos contestar al mismo tiempo si su solución era o no posible en una dirección prescriptaen función de ciertosmedios auxiliares limitados [*eingeschränkten Hilfsmitteln*](…) [Este] principio fundamental, según el cual los principios de la posibilidad de una demostración deben ser discutidosen general, está íntimamente relacionado con el requerimiento de la "pureza" de los métodos de prueba, que ha sido mencionado con insistencia por muchos matemáticos.[1]

Tal como lo advierte aquí Hilbert, la cuestión de la 'pureza de los métodos de prueba' desempeñó un papel trascendente –y sumamente fructífero– en sus investigaciones axiomáticas en el campo de la geometría. El requerimiento de la pureza fue, por ejemplo, una de las motivaciones centrales detrás de las investigaciones *metageométricas* en torno al teorema de Desargues, que ocupan por entero el capítulo V de *Fundamentos de la geometría*. Hilbert articula de la siguiente manera dicho requerimiento, al referirse precisamente al teorema de Desargues:[2]

---

[1] Hilbert, David, "Grundlagen der Geometrie", en: *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen*.Herausgegeben von dem Fest-Comitee, Leipzig, Teubner, 1ª edición, 1899 (en adelante, *Festschrift*), pp. 89-90. A menos que sea indicado explícitamente, en lo que sigue todas las traducciones son del autor.

[2] En su versión más habitual, el teorema de Desargues (en el plano) afirma lo siguiente: sean $\Delta\ ABC$ y $\Delta\ A'B'C'$ dos triángulos que se encuentran en un mismo

> Este teorema nos da ahora la oportunidad de discutir una cuestión importante. El contenido [*Inhalt*] del teorema de Desargues pertenece completamente a la geometría plana; sin embargo, para su demostración debemos utilizar el espacio.[3]Nos encontramos por tanto por primera vez en la posición de llevar a la práctica una crítica de los medios de una prueba [*die Hülfsmittel eines Beweises*]. En la matemática moderna tal crítica es realizada muy a menudo, donde el objetivo es preservar la pureza del método, i.e., *en la prueba de un teorema se deben utilizar, en la medida de lo posible, sólo aquellos medios que son sugeridos por el contenido del teorema*.[4]

La pregunta por la 'pureza' que se plantea aquí Hilbert consiste en determinar si es posible probar el teorema de Desargues, en donde sólo están involucrados conceptos geométricos *en elplano*, sin recurrir a ningún tipo de construcción o consideración *en el espacio*. Gracias a su nuevo método axiomático formal, Hilbert se encuentra por primera vez en la posición de ofrecer una respuesta rigurosa a este interrogante. En efecto, Hilbert pruebaque en la demostración de dicho teorema la apelación al espacio sólo puede ser evitada si se utilizan consideraciones métricas tales como los axiomas de congruencia. Sin embargo, si tales consideraciones métricas son consideradas como inadecuadas en virtud de que se trata de un teorema puro de incidencia, entonces no es posible lograr una 'demostración pura' del teorema de Desargues.[5]

---

plano; si las líneas *AA'*, *BB' y CC'* son concurrentes, los puntos de intersección de los lados correspondientes de los dos triángulos están alineados, y recíprocamente.

[3] La demostración usual del teorema de Desargues en el plano, utilizando construcciones en el espacio, puede consultarse en Efímov, Nikolai, *Geometría superior*, Moscú, Editorial Mir, 1984, pp. 213-215.

[4]Hilbert, David, *Elemente der Euklidischen Geometrie*, *(MS. Vorlesung, WS 1898/9).* Ausgearbeitet von Hans von Schaper. Niedersächsische Staats und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, *Cod. Ms. D. Hilbert* 552, 1898/1899 (en adelante EEG), p. 317. Publicado en Majer, Ulrich y Hallett, Michael (eds.), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891-1902*, Berlin, Springer, pp. 304-402. El énfasisesmío.

[5] Cf. *Festschrift*, teoremas 33 y 35.

En este contexto, por 'pureza' se alude entonces a una determinada relación de preferencia entre los recursos utilizados para probar un teorema o resolver un problema y los recursos que se utilizan o se necesitan para entender o comprender tal teorema o problema. Una demostración o una solución 'pura' es aquella en la que los medios o recursos empleados son *intrínsecos* o *inherentes* al teorema demostrado o al problema resuelto.[6]

El objetivo del presente trabajo es sostener que la preocupación por la 'pureza del método' ocupó un lugar central en las investigaciones geométricas de Hilbert *en un nivel más general*, a saber, no ya en la demostración de tal o cual teorema en particular, sino *en la construcción axiomática misma de la teoría en cuestión,* o sea, de la geometría euclídea elemental. Dicho con mejor precisión: en otro lugar he sostenido que una preocupación central que motivó las investigaciones axiomáticas de Hilbert fue el objetivo de proporcionar *una base independiente para la geometría*.[7] Este objetivo era equivalente a mostrar que para la construcción de una gran parte de la geometría euclídea elemental no es necesario recurrir a ningún tipo de consideración numérica, en particular, al tipo de consideraciones que son introducidas por medio de los principios de continuidad.Es claro así que este tipo de objetivos metodológicos y epistemológicos están íntimamente conectados con la cuestión de la pureza del método, si bien en un nivel más general o fundacional.

Luego, para defender mi tesis, intentaré mostrar cómo la preocupación de Hilbert por la pureza está íntimamente asociada a uno de sus

---

[6] Cf. Detlefsen, Michael y Arana, Andrew, "Purity of Methods", *Philosophers' Imprint*, 11, 2011, pp. 1-20. La cuestión de la pureza del método asociada a lasinvestigaciones de Hilbert sobre el teorema de Desargues ha sidoanalizada en Hallett, Michael, "Reflections on the Purity of Method in Hilbert's 'Grundlagen der Geometrie'", en: Mancosu, P. (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, New York, Oxford University Press, pp. 198-255, 2008; Arana, Andrew y Mancosu, Paolo, "On the Relationships between plane and solid Geometry", *The Review of Symbolic Logic*, 5, 2012, pp. 294-353.

[7] Cf. Giovannini, Eduardo, "Bridging the Gap between Synthetic and Analytic Geometry: Hilbert's Axiomatic approach", *Synthese*, 2015, Online First. DOI: 10.1007/s11229-015-0743-z.

principales aportes conceptuales a los fundamentos de la geometría euclídea, a saber, su reconstrucción de la teoría euclídea de las proporciones y de los triángulos semejantes.Estas teorías constituyen una de las partes centrales de la geometría euclídea elemental.

El artículo se organiza de la siguiente manera: en la sección 2 presentaré brevemente los conceptos centrales de la teoría de las proporciones desarrolladas por Euclides en el libro V de *Elementos*. Enseguida, en la sección 3, utilizaré una serie de notas manuscritas de clases para cursos sobre geometría, para mostrar cómo Hilbert fundó sus críticas y objeciones a aquella teoría en consideraciones ligadas a la pureza del método. En la sección 4 presentaré entonces, de un modo sucinto, las ideas centrales de la teoría de las proporciones y de los triángulos semejantes elaborada por Hilbert. Finalmente, concluiré con algunas reflexiones finales en torno a la importancia de la cuestión de la pureza del método en las investigaciones axiomáticas de Hilbert en el campo de la geometría.

2. La teoría de las proporciones enel libro V de *Elementos*

Es bien sabido que en los primeros cuatro libros de *Elementos* Euclides desarrolla una teoría geométrica pura *sin números*. No encontramos allí una noción de *longitud* de un segmento lineal, ni de*amplitud* de un ángulo, ni se asignan números a las figuras planas en el estudio de las áreas. En cambio, en estos primeros libros todas las figuras planas son estudiadas apelando a una noción no definida de *congruencia*, que intenta expresar que dos figuras (segmentos, ángulos, áreas) poseen el mismo "tamaño". La estrategia de Euclides consiste en probar la mayor cantidad posible de proposiciones por medio de los teoremas de congruencia. El libro I trata de las figuras rectilíneas congruentes, y culmina con el famoso teorema de Pitágoras. En el libro II se introduce una suerte de álgebra geométrica de segmentos y rectángulos, cuyas propiedades están también basadas en los teoremas de congruencia. Finalmente, en los libros III y IV se aplican los resultados obtenidos en los libros anteriores en el desarrollo de la teoría de los círculos y los polígonos regulares.

Ahora bien, esta estrategia enfrenta una dificultad notable cuando Euclides debe ocuparse de la teoría de los *triángulos semejantes*, esto es, triángulos en los que la longitud de los lados correspondientes no es la misma, pero existe una *razón común* entre dichos lados correspondientes. La teoría de la congruencia de triángulos puede ser utilizada inmediatamente para estudiar la semejanza de triángulos, en el caso de que las razones de los lados correspondientes sean números enteros –o incluso números racionales. Sin embargo, si las razones entre los lados correspondientes de los triángulos son números *irracionales* –i.e., si se trata de magnitudes *inconmensurables*– entonces resulta sumamente problemático expresar que la razón entre las longitudes de los lados correspondientes es la misma, si dichas longitudes no pueden ser expresadas por medio de números. Para superar esta dificultad Euclides interrumpe su exposición puramente geométrica de los libros I–IV y presenta en el libro V la célebre teoría de las proporciones, atribuida usualmente a Eudoxio de Cnidos.[8]

La teoría de las proporciones trata de *magnitudes en general* –i.e., segmentos lineales, áreas y volúmenes– y es válida tanto para magnitudes conmensurables como inconmensurables. Más precisamente, el núcleo de esta teoría se encuentra en las definiciones 3 a 5. La definición 3 afirma: "Una *razón* es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas".[9] Sin lugar a dudas, esta definición no contribuye mucho a esclarecer qué debe entenderse *geométricamente* por una razón entre dos magnitudes. Sin embargo, su utilidad reside en que Euclides aclara aquí que *sólo* puede existir una razón en el caso de que las dos magnitudes sean homogéneas o de la misma especie, es decir, dos segmentos lineales, dos áreas o dos volúmenes.

---

[8] Por lo general suele afirmarse que Proclo fue quien le atribuyó a Eudoxio la autoría de la teoría de las proporciones del libro V de *Elementos*; véase Heath, Thomas, *TheThirteenBooks of Euclid'sElements*. 3 Vols. New York, Dover Publications, 1956, 2ª edición. Sobre el origen de la teoría de las proporciones en la geometría griega, véase Knorr, Wilbur, *TheEvolution of theEuclideanElements*. Dordrecht, Reidel, 1975.

[9] Euclides, *Elementos*, V, def. 3 (en adelante *Elementos*). Trad. de María Luisa Puertas Castaños. Madrid, Gredos, 1994.

La definición 4 señala lo siguiente: "Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra".[10] Como veremos a continuación, esta definición cumple un papel fundamental en la teoría euclídea de las proporciones. En cierto sentido, puede decirse que completa la definición anterior. Por un lado, con esta definición Euclides excluye la posibilidad de que una razón sea entendida como una relación entre magnitudes finitas y magnitudes infinitamente pequeñas o infinitamente grandes. Por otro lado, lo que resultará central en lo que sigue, por medio de esta definición Euclides se asegura de que la teoría de las proporciones que va a desarrollar sea válida para magnitudes tanto conmensurables como *inconmensurables*. Como es bien sabido, esta definición equivale al conocido axioma de Arquímedes, que en su versión más usual reza como sigue: "Si a y b son dos segmentos lineales, entonces existe siempre un entero positivo n tal que $na>b$".[11]

Otrorasgo característico de la teoría de las proporciones de Euclides-Eudoxio es que allí no se define qué es *una razón* entre dos magnitudes generales, sino en cambio cuando dos razones son iguales entre sí, o cuando una es mayor o menor que la otra. En efecto, esta noción es formulada en la definición 5, considerada generalmente como la definición central libro V:

> Dícese que la razón de una primera magnitud a una segunda es igual a la de una tercera a una cuarta, cuando las primeras y las terceras igualmente multiplicadas o al mismo tiempo superan, o al mismo tiempo son iguales o al mismo tiempo son inferiores que las segundas y cuartas igualmente multiplicadas.

Es usual explicar el contenido de esta definición, utilizando una notación algebraica moderna, de la siguiente manera: dos magnitudes (segmentos lineales, áreas, volúmenes, etc.) tienen la misma razón respecto de otras dos (en símbolos $a : b = c : d$) si tomando m múltiplos (enteros positivos) de a y c y n múltiplos (enteros positivos) de b y d, se tiene que:

---

[10] *Elementos,* V, def. 4.
[11] Cfr. *Festschrift.*

$ma < nb$	implica que	$mc < nd$
$ma = nb$	implica que	$mc = nd$
$ma > nb$	implica que	$mc > nd.$

Euclides llama entonces *proporcionales* a las magnitudes que guardan una misma razón entre sí (definición 6). Ahora bien, en la definición 7 se establece además, utilizando nuevamente una notación algebraica moderna, que dados dos múltiplos m, n (enteros positivos) tal que $ma > nb$ pero $mc \leq nd$, entonces se sigue que $a : b > c : d$.[12]Sin embargo, esta definición plantea una dificultad. Si se quiere probar que para $a < b$ se cumple que $a : a > a : b$, entonces debemos encontrar dos m, n (enteros positivos) tales que $ma > na$ pero $ma \leq nb$. Si tomamos entonces a $m = n + 1$, se tiene que

$$(n + 1)\, a \leq nb$$

o bien que,

$$a \leq (b - a)\, n.$$

Pero ello implica que para las magnitudes a y $d = (b - a)$, debemos encontrar un n (entero positivo) tal que

$$nd \geq a.$$

---

[12]*Elementos,* V, def. 7: "Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta."

Luego, esta última desigualdad esprecisamente el axioma de Arquímedes, que como hemos visto aparece sugerido en la definición 4.

Sobre la base de este conjunto central de definiciones, Euclides desarrolla en el libro V la teoría general de las proporciones de un modo "abstracto". Este carácter abstracto reside en que la totalidad de las 23 proposiciones que componen dicho libro son demostradas a partir de las definiciones y las nociones comunes, pero sin recurrir en ningún momento al tipo de razonamiento geométrico basado en construcciones geométricas llevadas a cabo según las reglas estipuladas en los postulados. Por el contrario, si bien en dichas proposiciones Euclides identifica a las magnitudes con segmentos lineales, dicha identificación obedece más bien a una finalidad heurística o ilustrativa, pero de ningún modo ocupaun lugar relevante en las pruebas.

La transición a la geometría la lleva a cabo Euclides en el libro siguiente, cuando aplica la teoría general de las proporciones a la geometría plana, desarrollando en el libro VI la teoría de los triángulos semejantes. El resultado más importante de esta teoría, utilizado prácticamente en todas las demostraciones subsiguientes, es presentado en la proposición VI.2, a veces también referida como el teorema de Tales(Fig. 1):

> Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado restante del triángulo.

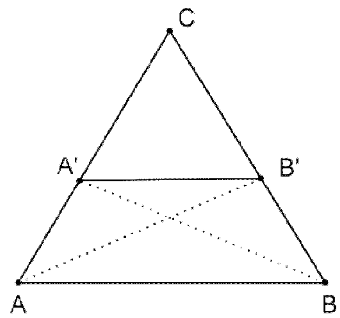

Fig. 1: *Elementos*, VI, prop. 2. Teorema de Tales.

En la prueba de esta proposición Euclides apela a la teoría del área –en particular a las proposiciones I.38 y I.39–, esbozada previamente en el libro I. Se trata de una de las demostraciones más ingeniosas de todos los *Elementos,* aunque esta apelación a la teoría del área hace que resulte problemática desde un punto de vista metodológico. La demostración de esta proposición concentra precisamente el centro de las críticas de Hilbert a la teoría euclídea de las proporciones y de los triángulos semejantes.

3. 'Una mancha en el sol de Euclides'

Hilbert sostiene en numerosos lugares que la teoría de las proporciones de Euclides-Eudoxio tiene como su teorema más fundamental a la proposición VI.2, conocido también como el teorema de Tales.Por ejemplo, en las notas de clase para el curso "Elemente der EuklidischenGeometrie", antecedente inmediato de la primera edición de *Fundamentos de la geometría*, la importancia de esta proposición es resaltada de la siguiente manera:

> En efecto, Euclides fundamenta la teoría de las proporciones en las dos proposiciones siguientes:

1. Si en un triángulo *ABC* se traza la línea paralela *A'B'* respecto de *AB*, entonces se tiene que *AC* : *BC* = *A´C: B´C*.
2. La inversa: si en un triángulo *AC* : *BC* = A´C: B´C, entonces se tiene que *AB* || *A´B´*.[13]

Ahora bien, a continuación realiza la siguiente observación respecto de la prueba de esta proposición en *Elementos*:

> En Euclides la demostración de esta proposición es completamente rigurosa, en el caso en el que tanto *AC* como *BC* se originan por medio de la sustracción reiterada de un único y mismo segmento lineal.Sin embargo, Euclides apela a relaciones generales de magnitudes, puesto que concibe la anterior proporción como una ecuación *numérica* y concluye que el teorema es válido para cualquier posición de *A* y *A´*. Contra esto se debe objetar: 1- Para poder interpretar una proporción entre *segmentos* siempre como una relación *numérica* se requiere de un nuevo axioma (que aquí designaremos V)[14]. 2- Incluso si este nuevo axioma ha sido introducido, se debe probar explícitamente que los nuevos números introducidos obedecen las mismas leyes de operaciones que la de aquellos ya conocidos.[15]

---

[13]*EEG*, p. 363. Observaciones similares se encuentran en:
Hilbert, David, *Prinzipien der Mathematik*; (*Vorlesungen, WS 1917/18*). Ausgearbeitet von P. Bernays. Georg–August–Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal, p. 89. Publicado en Ewald, William y Sieg, Wilfried(eds.), *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic, 1917-1933*, Berlin, Springer, pp. 59-214.
Hilbert, David, *Über das Unendliche*; (*Vorlesungen, WS 1924/25*). Ausgearbeitet von L. Nordheim. Georg–August–Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal, p. 692. Publicado en *Ídem,* pp. 668–756.
Hilbert, David, *Grundlagen der Geometrie; (MS. Vorlesung, SS 1927).* Ausgearbeitet von A. Schmidt. Georg-August-Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Lesesaal, p. 57.
[14] Hilbert se está refiriendo aquí al axioma de Arquímedes.
[15]*EEG, p. 363.*

Este interesante pasaje da lugar a una serie de comentarios. En primer lugar, resulta llamativo que Hilbert califique aquí a la demostración de Euclides como "completamente rigurosa", en el caso de que la línea paralela a la base del triángulo determine segmentos conmensurables. Como hemos dicho, esta prueba es una de las más ingeniosas, pero a la vez de las más controvertidas de todos los *Elementos*. En gran parte, estas dificultades están relacionadas con el hecho de que allí se hace un uso esencial de la teoría del área, que Euclides desarrolló de un modo insuficiente y rudimentario en los libros previos, en particular en el libro I. De este modo, en mi opinión, con esta observación Hilbert alude más bien al hecho de que, en el caso de que se trate de segmentos *conmensurables*, es posible demostrar correctamente dicha proposición utilizando los teoremas de congruencia para triángulos.

En segundo lugar, la afirmación de Hilbert según la cual Euclides interpreta la proporción anterior (i.e., A:B= A':B') como una relación *entre números* o *numérica* [*Zahlengleichung*] resulta sumamente discutible desde un punto de vista histórico, sin una debida aclaración.Como hemos señalado, es claro que el libro V de *Elementos* no posee el carácter puramente geométrico de los cuatro libros anteriores, en tanto que allí la teoría general de las proporciones es desarrollada de un modo 'abstracto', en el sentido de que no se ofrece una justificación *geométrica* para cada una de las proposiciones. Sin embargo, de este carácter abstracto no se sigue que en el libro V Euclides conciba la proporción entre magnitudes en general, ya sean conmensurables e inconmensurables, como una *relación numérica* o *entre números*. De hecho, en el libro VII Euclides desarrolla otra teoría de las proporciones aplicada exclusivamente a *números (enteros)*, en donde enuncia y vuelve a demostrar muchas de las proposiciones previamente demostradas en el libro V. Un ejemplo emblemático es la definición 20, cuyo contenido es prácticamente idéntico a la definición 5 del libro V: "Unos números son *proporcionales* cuando el primero es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto".

Existe una extensa discusión historiográfica respecto de por qué Euclides decidió presentar de forma independiente una teoría de las proporciones para números enteros, en lugar de aplicar directamente los resultados alcanzados previamente en la teoría de las proporciones del libro V también para el tratamiento de números.[16] Sin embargo, independientemente de esta cuestión historiográfica que excede los límites del presente artículo, creo que es posible contextualizar la observación de Hilbert, de modo que no resulte tan problemática a primera vista desde un punto de vista historiográfico. Esta explicación se vincula con la tercera observación.

El aspecto más substancial de la objeción de Hilbert se relaciona con la importancia fundamental que tiene el postulado o principio de Arquímedes para la teoría euclídea de las proporciones, y que Hilbert es quizás uno de los primeros en señalar de manera explícita. Esta importancia se aprecia, por ejemplo, en el hecho de que la definición misma de Euclides de la igualdad/desigualdad de razones requiere de la validez del axioma de Arquímedes para poder funcionar. Más precisamente, Hilbert señala que en el caso de que los dos lados del triángulo sean segmentos inconmensurables, la recta paralela a la base determinará *unívocamente* los puntos *A* y *A'sólo si el axioma de Arquímedes es presupuesto*. De esta manera, en un texto posterior, Hilbert concluye que un defecto crucial de la teoría desarrollada por Euclides consiste en no haber formulado este axioma de un modo explícito: "Existe un mancha en el sol de Euclides, puesto que él omitió la formulación de aquel axioma [i.e., el axioma de Arquímedes]".[17]

Independientemente de si Euclides incluye o no (una versión de) el axioma de Arquímedes entre sus definiciones, es claro que su teoría de las proporciones y de los triángulos semejantes se fundaba en aquella condición. Sin embargo, un objetivo central de las investigaciones axiomáticas de Hilbert consistía en estudiar cuidadosamente y determinar el papel que los principios de continuidad desempeñan en la estructura deductiva de la geometría euclídea elemental, para mostrar precisamente que tales principios no eran necesarios para la construcción de una parte muy importante de la teoría; en

[16] Acerca de esta controversia historiográfica, véase Corry, Leo, "La teoría de las proporciones de Eudoxio vista por Dedekind", *Mathesis*, 10, 1994 pp. 35-68; Grattan-Guinness, Ivor, "Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's*Elements*: HowDid He HandleThem?", *Historia Mathematica*, 23, 1996, pp. 355–375.
[17] Hilbert, David, *Über das Unendliche*, p. 693.

este respecto, la teoría euclídea resultaba claramente inapropiada para los objetivos de Hilbert.

Más aún, junto con esta estrategia general en la reconstrucción de la geometría euclídea, Hilbert hace además una referencia al *requerimiento o condición de pureza*, en relación a que resulta deseable que la teoría de las proporciones y triángulos semejantes sea construida con independencia de los principios de continuidad, en particular, del axioma de Arquímedes:

> Este teorema puede ser demostrado con la ayuda del segundo teorema de congruencia, en el caso particular donde se sabe que la longitud de los segmentos es conmensurable con una de las semirrectas.Sin embargo, en el caso general se requiere del empleo de [un axioma de] continuidad.*Desde el punto de vista de nuestro abordaje previo, el empleo de la continuidad aparece aquí como una inferencia [Schlussweise] completamente extraña,* y de hecho se presenta además como particularmente insatisfactoria, puesto que aquel teorema de las proporciones es utilizado, entre otras cosas, para probar algunos teoremas de incidencia, *cuyocontenido parece ser independiente de las leyes de continuidad*. De este modo, resultainmediata la pregunta respecto de si es posible prescindir de aquella condición de continuidad.[18]

Una crítica similar a la teoría euclídea de las proporciones, fundada en la cuestión de la 'pureza', es formulada por Hilbert en un curso posterior:

> Sin embargo, es evidente que este teorema [i.e., la proposición VI. 2] está demostrado solamente para el caso [de magnitudes]*conmensurables* ($\frac{a}{a'}$es racional). El caso inconmensurable puede ser demostrado con la ayuda de la continuidad. *Ahora bien, nuevamente el mencionado teorema es utilizado de un modo esencial en la demostración de importantes y puros teoremas de incidencia [reinen Schnittpunktsätze], que no tienen absolutamente ninguna relación con la continuidad*.[19]

Hilbert considera como 'impura' toda demostración del teorema de Tales –o el teorema fundamental de la proporcionalidad– en la que se apelen

---

[18] Hilbert, David, *Prinzipien der Mathematik*, p. 89. Elénfasis es mío.
[19] Hilbert, David, *Grundlagen der Geometrie*, p. 58. Elénfasis es mío.

a los axiomas de continuidad, o más específicamente, al axioma de Arquímedes. Este calificativo obedece, al menos, a dos razones. Por un lado, el teorema de la proporcionalidad está inmediatamente ligado a algunos teoremas de incidencia –por ejemplo, al teorema de Pascal, cuyo *contenido* Hilbert considera como completamente independiente de la noción de continuidad. En segundo lugar, en tanto que un objetivo explícito de la construcción axiomática de la geometría euclídea llevada a cabo por Hilbert es proporcionar una base independiente para esta teoría, en el sentido de evitar la introducción de consideraciones numéricas, la apelación a un principio de continuidad resulta sumamente inadecuada en la reconstrucción de la teoría de las proporciones y de los triángulos semejantes. En efecto, el aspecto crucial es que, al utilizar el axioma de Arquímedes en la reconstrucción de esta parte central de la teoría, se introduce irremediablemente una consideración numérica, en la medida de que,*i*) dicho axioma supone el concepto de número entero; *ii*) a partir de dicho axioma es posible asociar un número real a cada punto sobre la línea, tal como lo señala Hilbert en sus notas de clases.

De este modo, las críticas de Hilbert a la teoría euclídea de las proporciones se fundan en consideraciones metodológicas y epistemológicas ligadas a la cuestión de la pureza del método. Pero veamos ahora brevemente cómo reconstruye Hilbert dicha teoría de un modo ‘puramente geométrico’.

4. La teoría de las proporciones y de los triángulos semejantes de Hilbert

Hilbert elabora su teoría de las proporciones y de los triángulos semejantes en el capítulo III de *Fundamentos de la geometría*. Dicha reconstrucción de la teoría eudoxia de las proporciones su funda en un resultado previo alcanzado por Hilbert, a saber: el cálculo de segmentos lineales [*Streckenrechnung*]. Hilbert mostró cómo era posible definir las operaciones de suma y producto de segmentos lineales de un modo puramente geométrico y al mismo tiempo probó, recurriendo a dos teoremas clásicos de la geometría proyectiva –i.e., los teoremas de Desargues y Pascal[20]–, que estas operaciones satisfacían todas las *propiedades de un cuerpo ordenado*. La construcción puramente geométrica de un conjunto que satisface la estructura de un cuerpo ordenado le permitió así reconstruir la teoría de las proporciones y de los triángulos semejantes, de un modo puramente geométrico y *sin apelar a ningún postulado de continuidad*, en particular al axioma de Arquímedes.

El elemento clave para el caso que venimos analizando es la caracterización que hace Hilbert del producto de segmentos lineales.[21] Para ello Hilbert utiliza la siguiente construcción geométrica: sean *a* y *b* dos segmentos lineales. Elegimos un segmento cualquiera que permanecerá fijo –la unidad lineal– y lo designamos como 1. En uno de los lados de un triángulo rectángulo trazamos, desde el vértice 0, los segmentos 1 y *b*, mientras que en el otro lado trazamos el segmento *a*. Enseguida, unimos el punto final del segmento 1 y el punto final del segmento *a*, y desde el punto final de *b* trazamos la línea paralela a 1*a* (Fig. 2). Esta línea determina un segmento *c* en el otro lado del triángulo rectángulo, que identificamos con el producto del segmento *a* por el segmento *b*. La existencia del segmento *c* está garantizada por el axioma de las paralelas.

---

[20] Teorema de Pascal (versión afín): Sean dados dos conjuntos de puntos *A, B, C* y *A´, B´, C´* situados respectivamente sobre dos rectas que se intersecan, de tal manera que ninguno de ellos se encuentra en la intersección de estas líneas. Si *CB´* es paralelo a *BC´* y *CA´* es también paralelo a *AC´*, entonces *BA´* es paralelo a A*B´*. *Festschrift*, p. 28.

[21] Un análisis detallado del cálculo de segmentos de Hilbert puede encontrarse en Giovannini, Eduardo, *David Hilbert y los fundamentos de la geometría (1891-1905)*, Londres, College Publicaciones.

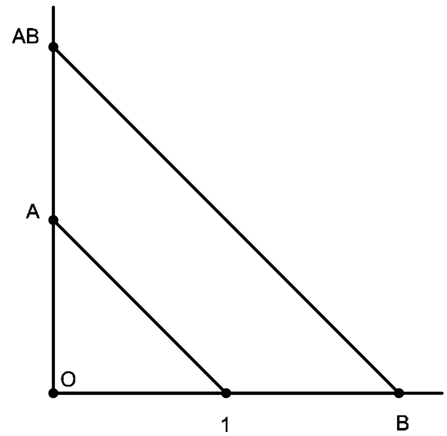

Fig. 2: Multiplicación de segmentos lineales

Como se puede notar a primera vista, ésta es la construcción geométrica estándar del cuarto proporcional contenida ya en *Elementos*, VI. 12, que Descartes utilizó por primera vez para definir el producto de dos segmentos lineales *como unsegmento lineal*.[22]Descartes y Hilbert interpretaron de un modo similar la definición de segmentos lineales por medio esta construcción geométrica, en el sentido que ambos afirmaron que esta definición no se refería a números sino a magnitudes geométricas; en otras palabras, ninguno de los dos identificó a los segmentos lineales con sus *longitudes expresadas numéricamente*. Sin embargo, existe una diferencia esencial entre las dos interpretaciones de esta operación aritmética con segmentos lineales, que resulta fundamental para nuestro caso. En Descartes, la definición era obtenida esencialmente a partir de la proposición VI.2 de *Elementos* acerca de la proporcionalidad de los triángulos semejantes; en consecuencia, Descartes no sólo asumió por completo la teoría de las

[22]Sobre la definición de Descartes del producto de segmentoslinealesvéaseMancosu, Paolo, *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*. New York, Oxford University Press, 1996

proporciones del libro V de *Elementos*, sino que también presupuso de un modo implícito la validez del axioma de Arquímedes. Por el contrario, el objetivo de Hilbert era mostrar que, partiendo de su definición de multiplicación de segmentos lineales, era posible obtener la noción de proporcionalidad y de triángulos semejantes, y evitar además la introducción de aquel axioma de continuidad.

Una vez que el producto de segmentos ha sido definido de este modo puramente geométrico, Hilbert prueba que satisface todas las propiedades identificadas con esta operación, es decir, las propiedades asociativa y conmutativa, la existencia de un elemento inverso del producto y la propiedad distributiva respecto de la suma. En particular, Hilbert muestra que el teorema de Pascal –demostrado por él previamente sin utilizar ningún axioma de continuidad– resulta esencial para garantizar la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Hilbert utiliza entonces su definición del producto de segmentos lineales, junto con sus propiedades, para reconstruir la teoría euclídea de las proporciones y de los triángulos semejantes. Una cuestión esencial es que en ningún momento se asume la validez del axioma de Arquímedes. Su caracterización de la proporcionalidad de segmentos lineales se basa en su definición del producto de segmentos lineales:

Definición 1: Si a, b, a', b' son cuatro segmentos cualesquiera, la proporción

$$a : b = a' : b'$$

no expresa sino la validez de la siguiente ecuación

$$ab' = a'b.$$[23]

[23]*Festschrift,* p. 55.

Con esta definición, Hilbert alcanza el objetivo de mostrar qué significa *geométricamente* que dos pares de segmentos son proporcionales, esto es, *la igualdad del producto de dos pares de segmentos lineales*. De este modo, su caracterización evita la intromisión subrepticia de consideraciones numéricas. Por otro lado, para definir la definición de semejanza de triángulos, Hilbert no apela a la proporcionalidad de los lados correspondientes, sino que utiliza la congruencia de los ángulos correspondientes:

Definición 2: Dos triángulos se denominan*semejantes* si sus ángulos correspondientes son congruentes.[24]

Hilbert demuestra entonces que si a, b, a', b' son los lados correspondientes de dos triángulos (semejantes), entonces la definición anterior de proporcionalidad es válida (Teorema 22). Su exposición concluye con la formulación del teorema fundamental de la proporcionalidad, en una versión adaptada a su propia teoría:

Teorema fundamental de la proporcionalidad: Si dos rectas paralelas determinan respectivamente, en los lados de un ángulo cualquiera, los segmentos$a$, b y a', b', entonces se verifica la proporción

$$a : b = a' : b'$$

Recíprocamente, si cuatro segmentos a, b,a', b'satisfacen esta proporción, y a, a'y b, b'son construidos de a pares en los lados de un ángulo

[24]*Festschrift,* p. 55.

cualquiera, entonces las líneas que unen a los puntos finales de*a* y *b*, y de *a´* y *b´*, son paralelas.[25]

En *Fundamentos de la geometría* Hilbert no ofrece una demostración de este teorema, aunque tal demostración puede ser obtenida fácilmente utilizando el teorema 22 previamente demostrado.[26]La definición de la proporcionalidad de segmentos lineales, junto con el teorema fundamental, son sin embargo suficientes para obtener íntegramente los resultados de la teoría euclídea de las proporciones y de los triángulos semejantes. Hilbert no lleva a cabo dicha tarea, sino que se conforma con caracterizar de un modo puramente geométrico, y sin apelar a ningún principio de continuidad, aquellos conceptos y teoremas fundamentales.[27]

5. Consideraciones finales

Sobre la base que aportan las notas de clases para cursos sobre geometría, hemos podido mostrar que las críticas de Hilbert a la teoría euclídea de las proporciones y de los triángulos semejantes estaban esencialmente vinculadas al requerimiento de la pureza del método. Este requerimiento consistía en que, en la demostración de un teorema, o en la solución de un problema, sólo deben utilizarse aquellos medios o recursos intrínsecos o sugeridos por el *contenido* del teorema o problema en cuestión. Para Hilbert, un defecto fundamental de la teoría de las proporciones de Euclides era que las definiciones de razón y proporción estaban basadas en

---

[25]*Festschrift,* pp. 56-57. En la última edición de *Fundamentos de la geometría,*este teorema aparece como el teorema 42. Cf. Hilbert, David, *Grundlagen der Geometrie. Mit Supplementen von Paul Bernays*. Editadopor Michael Toepell. Stuttgart/Leipzig, Teubner, 14ª edición.

[26] Esta demostración se encuentra, por ejemplo, en Hilbert, David, *Grundlagen der Geometrie*, pp. 57-59.

[27]Un análisis sistemático de estas contribuciones técnicas de Hilbert se encuentra en Hartshorne, Robin, *Geometry: Euclid and Beyond*. New York, Springer, 2000.

consideraciones o presupuestos numéricos, en la medida en que suponían de un modo esencial la validez de un principio de continuidad como el postulado de Arquímedes. Dicha teoría carecía por lo tanto de un *fundamento geométrico*, razón por la cual no respetaba el criterio fundamental de la pureza del método. La notable contribución de Hilbert consistió en construir la teoría de las proporciones y de los triángulos semejantes, parte central de la geometría euclídea elemental, sobre una nueva base puramente geométrica, i.e., el cálculo de segmentos lineales. Más aún, una característica fundamental del cálculo de segmentos era que su construcción no dependía en absoluto de la validez del axioma de Arquímedes, con lo cual el carácter 'puro' de dicho resultado estaba garantizado.

Finalmente, podemos concluir que, en el caso que hemos analizado de la teoría euclídea de las proporciones, el requerimiento de la pureza del método tenía para Hilbert *un carácter general o fundacional*. En este contexto, su objetivo explícito no consistíasólo en obtener una 'demostración pura' de un teorema particular de la teoría de las proporciones –por ejemplo, el teorema de Tales– sino que el requerimiento de *pureza*fue impuesto además sobre las definiciones mismas de las nociones de razón y proporción, y por lo tanto, sobreel núcleo o fundamento de la teoría.El análisis que hemos llevado a cabo de la teoría de las proporciones y de los triángulos semejantes de Hilbert nos ha permitido verque el requerimiento metodológico y epistemológico de la pureza del método constituyóun elemento fundamental en su construcción axiomática de la geometría euclídea elemental; más aún, este ejemplo ilustra elocuentemente cuán fructíferas y relevantes resultan las preguntas sobre la 'pureza del método' en el examen de los fundamentos de una teoría matemática.

Recibido: 9/2015; *aceptado*: 11/2015