



Estilo polimodal en Euclides: casos límite y casos estándar¹

Polymodal Style in Euclid: Borderline Cases and Standard Cases

José Seoane

Universidad de la República (UDELAR), Uruguay / Sistema Nacional de Investigaciones (SIN), Uruguay

seoanejose2010@gmail.com | <https://orcid.org/0000-0002-9571-3139>

Recibido 05/2024 – Aceptado 07/2024

Resumen: Euclides administra dos *modalidades* comunicativas en la exposición de sus demostraciones: una es *detallada, minuciosa*, la otra más *resumida o esbozada o sumaria*. Existen pues en los *Elementos* demostraciones que combinan (en su comunicación) ambas modalidades expresivas, y las hay que solo recurren a la primera, careciendo de pasajes que ejemplifiquen la segunda. En Seoane (2022) se identifican estos dos *estilos expresivos*, denominándosele al primero *polimodal* y al segundo *unimodal*. Por otra parte, algunos filósofos han resaltado el valor de distinguir entre *expresión* y *estructura* de una demostración. La *polimodalidad* apunta, ciertamente, al plano expresivo, pero posee calado estructural. Dado que existen formas diversas de emerger la polimodalidad en la demostración euclidiana, puede resultar de interés examinarlas atendiendo a la interacción entre ambos planos y su contexto.

Palabras claves: Euclides, Demostración geométrica, Estilos expresivos, Estructura de la demostración, Filosofía de la práctica matemática.

Abstract: Euclid administers two communicative modalities in the presentation of his proofs: one is detailed and meticulous, the other more summarized or outlined, abbreviated. There are proofs in the *Elements* that combine (in their communication) both expressive modalities, and there are those that only resort to the first, lacking passages that exemplify the second. These two expressive styles are identified in Seoane (2022); the first being called polymodal, and the second unimodal. On the other hand, some philosophers have highlighted the value of distinguishing between the expression and the structure of a proof. Polymodality certainly points to the expressive level, but it has structural significance. Given that there are different ways in which polymodality emerges in the Euclidean demonstrative practice, it may be of interest to examine them in terms of the interaction between both levels and their context.

Keywords: Euclid, Geometrical proof, Expressive styles, Structure of proofs, Philosophy of mathematical practice.

1.

Todo lector de los *Elementos* advierte que Euclides administra dos *modalidades* comunicativas en la exposición de sus demostraciones; tales modalidades pueden caracterizarse en forma sucinta: una es *detallada, minuciosa*, la otra más *resumida o esbozada o sumaria* (Seoane, 2022). La primera expone en forma pormenorizada la dimensión estructural o lógica correspondiente; la segunda, en cambio, resume la ilación

¹ Agradezco al arbitraje las observaciones ortográficas y las sugerencias conceptuales para trabajos futuros.



inferencial.² El nivel de detalle aludido en la primera opción no supone la instanciación de un formato expositivo ideal, especificado en forma explícita y previamente dado; simplemente surge de la descripción euclidiana ordinaria de la lógica (en sentido lato) de la demostración. El formato sumario o esbozado lo es entonces en relación con el formato minucioso, es decir: *relativa, no absolutamente*.³ En un sentido obvio, es ese formato comunicacional pormenorizado el *modo básico* de descripción estructural usado por el geómetra; solo derivativamente recurre a la descripción esbozada. Por otra parte, la ruptura del ritmo expositivo minucioso (cuando ocurre) suele ser perfectamente identificable, pues Euclides la consigna en forma literal. Así, por ejemplo, luego de expuesta en forma detallada la demostración de un componente de una conjunción, agrega que “de manera semejante” se puede demostrar el componente restante, indicando sumariamente de esta forma dicha trama estructural.

Existen pues en los *Elementos* demostraciones que combinan (en su comunicación) ambas modalidades expresivas (a saber: explícita y esbozada), y las hay que solo recurren a la primera, careciendo de pasajes que ejemplifiquen la segunda. En Seoane (2022) se identifican estos dos *estilos expresivos*, denominándosele al primero *polimodal* y al segundo *unimodal*. En síntesis: el estilo polimodal pone en obra (en el contexto de una única demostración) las dos modalidades comunicativas referidas, mientras el unimodal apela en exclusividad a la modalidad detallada.⁴

Ahora bien, como se recordó antes, algunos filósofos han resaltado el valor de distinguir entre *expresión* y *estructura* de una demostración. El fenómeno que hemos denominado arriba *polimodalidad* apunta, ciertamente, al plano expresivo, pero posee así mismo calado estructural. Podría decirse que permite apreciar interacciones informativas entre ambos planos. Dado que existen formas diversas (desde el punto de vista expresivo) de emerger la polimodalidad en la demostración euclidiana, puede resultar de interés examinarlas en esta clave interactiva, tomando así mismo en consideración seriamente el contexto comunicacional (esto es, emisor y receptor). Algunas ideas fueron adelantadas en Seoane (2022); este escrito pretende abordar ahora otros aspectos de aquella interacción contextualizada —concentrando la atención en la comunicación esbozada—. ⁵

El itinerario es el siguiente. El apartado 2 examina algunos ejemplos del estilo polimodal, distinguiendo entre casos *límite* y casos *estándar* (en atención a la forma singular de manifestarse tal fenómeno comunicativo). Los apartados 3 y 4 evalúan posibles motivaciones estructurales para la adopción de una u otra alternativa expresiva, examinando específicamente los pasajes esbozados (implícitos o explícitos); el apartado 5 ofrece una caracterización del contraste entre casos *límite* y *estándar*, que recoge la dimensión estructural, pero, a su vez, hace entrar en escena el contexto comunicacional —más específicamente: el interlocutor o destinatario del discurso deductivo—. El apartado 6 examina algunos rasgos salientes del estilo polimodal euclidiano.

2.

Las demostraciones de I.1 a I.5, por ejemplo, ilustran el estilo unimodal. El caso de I.6 puede resultar enigmático. Veámoslo.⁶

² Algunos autores han señalado la importancia de distinguir la demostración matemática (*qua* objeto abstracto) de su comunicación —más allá de diferencias terminológicas y matices conceptuales, pueden consultarse al respecto, por ejemplo, Weaver (1988:31), Chateaubriand (2005:284) y Giaquinto (2008:24)—. Denominaré *estructura* y *expresión* (de la demostración) respectivamente a los planos abstracto y comunicacional.

³ Por ello no debe confundirse este contraste con aquellos en que uno de los formatos se entiende como un estándar universal y ahistórico de rigor. A veces esa concepción absolutista se formula en estos términos (cursivas mías): “En consecuencia, un argumento *completamente riguroso* es aquel en el que todas las premisas, por obvias o ampliamente aceptadas que sean, se hacen explícitas, y en el que *todos los pasos inferenciales son lo más pequeños posibles*.” (Paseau, 2016:178).

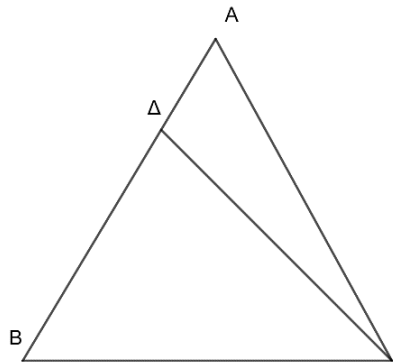
⁴ Este estilo ocurre en Euclides, pero es habitual en diversos contextos en que se comunican demostraciones, desde un salón de clase a una sala de conferencias, desde un intercambio informal entre colegas hasta el texto de un artículo de investigación.

⁵ Usaré libremente el trabajo previo aludido, mencionándolo exclusivamente en los casos que crea posee algún interés su consulta.

⁶ Seguiremos la traducción de los *Elementos* de Puertas Castaños y consultaremos así mismo la clásica edición de Heath.

Este es el enunciado: si dos ángulos de un triángulo son iguales entre sí, también los lados que subtienden a los ángulos iguales serán iguales entre sí.

El diagrama:



La demostración (cursivas mías):

Sea el triángulo $AB\Gamma$ que tiene el ángulo $AB\Gamma$ igual al ángulo $A\Gamma B$. Digo que también el lado AB es igual al lado $A\Gamma$. Pues si AB no es igual a $A\Gamma$, uno de ellos es mayor. *Sea* AB el (lado) mayor. Y del (lado) mayor AB quítese la (recta) ΔB igual al (lado) menor $A\Gamma$, y trácese $\Delta\Gamma$. Ahora bien, como ΔB es igual a $A\Gamma$ y $B\Gamma$ es común, también los dos lados ΔB , $B\Gamma$ son iguales a los dos lados $A\Gamma$, ΓB , respectivamente, y el ángulo $\Delta B\Gamma$ es igual al ángulo $A\Gamma B$ por tanto, la base $\Delta\Gamma$ es igual a la base AB , y el triángulo $\Delta B\Gamma$ será igual al triángulo $A\Gamma B$, el menor al mayor; lo cual es absurdo; entonces los lados AB y $A\Gamma$ no son desiguales; luego son iguales. Por consiguiente, si dos ángulos de un triángulo son iguales entre sí, también los lados que subtienden a los ángulos iguales serán iguales entre sí. Q. E. D.

¿El estilo aquí es unimodal? Sin embargo, se asume que AB es mayor que $A\Gamma$ y que tal opción no afecta la lógica de la prueba; esta operación se hace sin atisbo de justificación explícita y, en tal sentido, si nos apegamos a la literalidad de la comunicación, esta resultaría inacabada. ¿El estilo es polimodal entonces? Pero, ¿cuál es el tramo esbozado o esquemático? Quizá podría responderse: se encuentra *implícito*. Podría ser un tramo que aludiera (sumariamente) a la demostración que conduce, desde el supuesto que $A\Gamma$ es mayor que AB , al absurdo que el triángulo $\Delta\Gamma B$ es igual al triángulo $AB\Gamma$, “el menor al mayor”. Nótese que no sólo el texto se encontraría implícito, así mismo la figura correspondiente. En la demostración euclidiana, literalmente, no existe la menor referencia ni a la necesidad de adicionar tal texto, ni de reformar consistentemente el diagrama. Este fenómeno de discreción extrema no desdice la conciencia del geómetra que, desde el punto de vista lógico, la prueba ofrecida *no depende* de la elección de que AB sea mayor que $A\Gamma$ —única alternativa explícitamente contemplada—. La razón es clara: la otra alternativa es tratable de manera trivialmente semejante a la antes expuesta. No hay déficit lógico, la comunicación explícita da simplemente por sobrentendida esta “parte complementaria” de la expresión de la prueba.

Así puede entenderse la comunicación de la demostración, tal cual la leemos en Euclides como conformada por dos “momentos” (uno explícito, otro implícito); el primero minuciosamente expuesto, el segundo simplemente asumido. Podríamos considerar esta demostración como un *caso límite* de ilustración del estilo polimodal, pues al tramo explícito se le debe adicionar (por razones lógicas o estructurales) una suerte de referencia (aunque más no sea implícita y obvia) a una estrategia análoga (lógicamente) a la expuesta minuciosamente. Es decir: la comunicación de la demostración parecería ejercitar así (por decirlo de alguna forma) los dos modos característicos del estilo polimodal: el explícito y el sumario —aunque este último no se encuentra en el texto, pues se ha reducido, dicho metafóricamente, “al máximo”, y precisamente por ello podemos considerar este tipo o especie de polimodalidad como *límite*—.

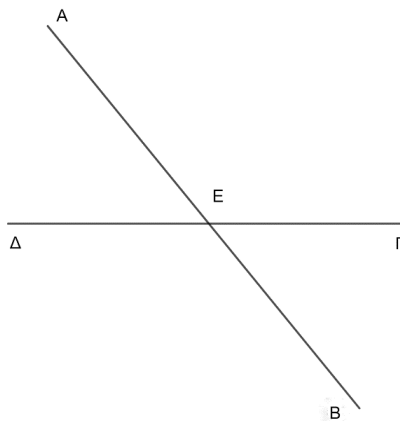
A favor de esta interpretación puede anotarse además que, a pesar de no existir una referencia en el texto a la prueba en cuestión, sí existe una “marca” sobre el estatus de la desigualdad escogida como premisa: resalté vía cursivas la expresión “Sea” en el texto euclidiano, que precede a la desigualdad, y que cumpliría tal función; esto es, al parecer el geómetra no asumiría sin más la verdad de tal desigualdad. Podríamos parafrasear tal

giro expresivo como equivalente a “tómese” o “asúmase” —algo por cierto bien diferente a la aseveración a secas—. En tal sentido quizá resultaría excesivo afirmar una ausencia absoluta de evidencia textual acerca del estatus de la aseveración crítica e , indirectamente, acerca del trecho estructural relevante.⁷

Por supuesto, en los casos paradigmáticos de ilustración del estilo polimodal, el texto hace explícitamente referencia (en forma sumaria o esbozada) al desarrollo demostrativo faltante, y es tal pasaje o tramo al que se puede denominar con propiedad “esbozado” o “sumario”, por contraposición a un tramo previo en el discurso deductivo que resulta minucioso o pormenorizado, al que se puede denominar “detallado”. Represento tales pasajes, por su orden de aparición en el discurso demostrativo, como “ B_1 ” y “ B_2 ” respectivamente, es decir: “ B_1 ” representa el tramo detallado y “ B_2 ” el tramo sumario. Veamos un ejemplo.

El enunciado de I.15: si dos rectas se cortan, hacen los ángulos del vértice iguales entre sí.

El diagrama:



La demostración:

Así pues, córtense las dos rectas AB , $\Gamma\Delta$ en el punto E . Digo que el ángulo AET es igual al (ángulo) ΔEB y el (ángulo) ΓEB al (ángulo) $AE\Delta$. B_1 Pues, dado que la recta AE ha sido levantada sobre la recta $\Gamma\Delta$ formando los ángulos ΓEA , $AE\Delta$, entonces los ángulos ΓEA , $AE\Delta$ son iguales a dos rectos [I, 13]. Dado que la recta AE ha sido levantada a su vez sobre la recta AB formando los ángulos $AE\Delta$, ΔEB , entonces los ángulos $AE\Delta$, ΔEB son iguales a dos rectos. Pero se ha demostrado que los (ángulos) ΓEA , $AE\Delta$ son iguales a dos rectos; luego los (ángulos) ΓEA , $AE\Delta$ son iguales a los (ángulos) $AE\Delta$, ΔEB [Post. 4 y N. C. 1]. Quítese de ambos $AE\Delta$; entonces, el (ángulo) restante ΓEA es igual al (ángulo) restante $BE\Delta$ [N. C. 3]; B_2 de manera semejante demostraríamos que también los (ángulos) ΓEB , ΔEA son iguales. Por consiguiente, si dos rectas se cortan, hacen los ángulos del vértice iguales entre sí. Q. E. D.

Este, claramente, *no* es un caso límite: ambos tramos son explícitos (los marco en la demostración de acuerdo con las notaciones introducidas arriba). Podríamos decir que aquí el rasgo expresivo polimodal es evidente: B_1/B_2 .⁸

Ciertamente en este caso la comunicación sumaria ofrecida por Euclides es apenas una sugerencia acerca del entramado inferencial en cuestión: demuestre la igualdad entre los ángulos ΓEB y ΔEA “de manera semejante” (a la demostración de la igualdad entre los ángulos ΓEA y $BE\Delta$). Pero esta modalidad comunicativa lacónica indica, por una parte, un tramo estructural lógicamente relevante, y, por otra, que este es fácilmente

⁷ Se podría tal vez insistir en que, no existiendo texto alguno que refiera a aquella demostración ausente, no puede presumirse sin más su formato expresivo, es decir: no puede asumirse que es de naturaleza esquemática. Pero debe concederse que resultaría más bien extravagante asumir que su formato es el pormenorizado. Por otra parte, y más contundente, la omisión expresiva no es problemática porque, siendo el pasaje estructural insoslayable, puede resolverse trivialmente a imagen y semejanza de la prueba explícitamente presentada. Estos rasgos funcionales justifican plenamente la inclusión de estas pruebas como casos (si bien *límite*) de polimodalidad.

⁸ Introduce la barra “/” a los efectos de recordar la articulación que nos ocupa entre ambos fragmentos, pues no se trata meramente de distinguirlos, sino de captar su interacción.

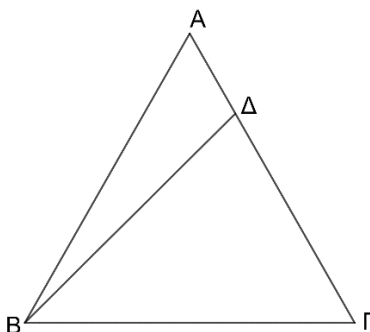
concebible (por parte de la audiencia, dadas sus capacidades) usando como *modelo* la estrategia deductiva descrita en el tramo pormenorizado. Me importa resaltar ahora que, a diferencia de I.6, la demostración exhibe un pasaje textual perfectamente identificable que permite catalogarla como ejemplo perspicuo del estilo polimodal.

Ahora bien, dado que hay una demanda *estructural* identificable en ambos casos, ¿por qué esta concita una respuesta *expresiva* diferenciada? ¿Por qué no recibe aquella demanda un tratamiento comunicativo uniforme? O, puesto aún en forma más directa, ¿por qué hay casos donde se omite *absolutamente* la referencia a la prueba estructuralmente requerida (casos *límite*), mientras que en otros casos tal omisión es *relativa* (casos *estándar*)? Debe advertirse que la interrogante no pretende dilucidar la cuestión histórica, sino identificar una racionalidad posible -eventualmente útil para las labores del historiador.

3.

Podría conjeturarse que la diferencia entre casos *límite* y casos *estándar* quizá residiera en una mayor *simplicidad* textual-gráfica de las primeras demostraciones respecto de las segundas —la doble dimensión lingüística/visual respeta la naturaleza heterogénea de la inferencia euclidiana—. Tal conjetura resulta a primera vista sensata. Cabe recordar que el recurso al estilo polimodal presupone (independientemente de la discusión de su *motivación*) un nivel de exigencia, por así decirlo, “simple” o “rutinario” de la prueba expresivamente omitida (a la luz de la prueba minuciosamente provista).⁹ Dicho de otra forma: tomada esta última como modelo, la elaboración de la primera es un ejercicio más bien sencillo. Luego, podría quizá pensarse que, en los casos *límite*, aquellos ejercicios resulten *aún* más simples u obvios. La omisión expresiva (propia de los casos *límite*) reflejaría así una diferencia (respecto de los casos *estándar*) en términos del *grado de dificultad* de la elaboración de la prueba omitida en relación con la prueba ofrecida en forma detallada. Veamos.

En I.6 el tramo inferencial no descrito (asumido implícitamente) consiste en la derivación del absurdo a partir de una asunción o supuesto: AG es mayor que AB . Si queremos describir esta deducción en, por así decirlo, “formato B_1 ” no alcanzaría con movilizar recursos lingüísticos, debiera también operarse sobre el diagrama. Pues tal prueba requeriría adicionar al diagrama original el segmento relevante. Es decir, algo así como¹⁰



El texto podría ser:

Sea AG el (lado) mayor. Y del (lado) mayor AG quítese la (recta) AD igual al (lado) menor AB , y trácese AB . Ahora bien, como AD es igual a AB y $BΓ$ es común, también los dos lados AD , $BΓ$ son iguales a los dos lados AB , $BΓ$, respectivamente, y el ángulo ADB es igual al ángulo AGB por tanto, la base AD es igual a la base AG , y el triángulo ADB será igual al triángulo AGB , el menor al mayor; lo cual es absurdo; entonces los lados AB y AG no son desiguales; luego son iguales.

En I.15 la compleción expresiva (en “formato B_1 ”) podría correr así:

Pues, dado que la recta EB ha sido levantada sobre la recta AG formando los ángulos $ΓEB$, BEA , entonces los ángulos $ΓEB$, BEA son iguales a dos rectos [I, 13]. Dado que la recta DE ha sido levantada a su vez sobre la recta AB formando los ángulos DEA , BEA , entonces los ángulos DEA , BEA son iguales a dos rectos. Pero se ha

⁹ La cuestión de la *motivación* (subyacente a la opción estilística polimodal) es el tema central de Seoane (2022); me referiré parcial y rápidamente a ella en este trabajo en el apartado 5.

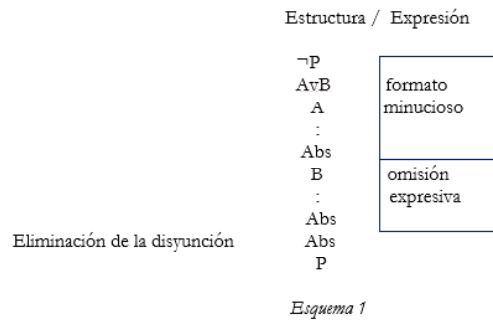
¹⁰ La opción por las letras procuró resaltar la semejanza entre prueba explícita y omitida; obviamente, si se construye un único diagrama, las designaciones de los puntos correspondientes mudarían (y, consecuentemente, el texto de la prueba correspondiente).

demostrado que los (ángulos) ΓEB , $BE\Delta$ son iguales a dos rectos; luego los (ángulos) ΓEB , $BE\Delta$ son iguales a los (ángulos) ΔEA , $BE\Delta$ [Post. 4 y N. C. 1]. Quítese de ambos $BE\Delta$; entonces, el (ángulo) restante ΓEB es igual al (ángulo) restante ΔEA [N. C. 3].

Una revisión rápida de ambas labores desafía la conjetura de la mayor simplicidad. Si nos concentramos en la parte textual, las reconstrucciones requeridas por I.6 y I.15 siguen, en forma más bien mimética, los pasajes minuciosos correspondientes. La extensión (es decir, el número de “pasos” especificados) no parece diferir en demasía. Si se atiende al plano diagramático, I.6 supone un esfuerzo de producción de un diagrama nuevo, mientras I.15 usa el mismo diagrama. En ese sentido, si debe anotarse alguna diferencia, parece resultar más exigente la labor correspondiente al tramo esbozado (implícito) en I.6 que la faena correspondiente al tramo esbozado (explícito) en I.15.

Adoptemos entonces un punto de vista diferente en la búsqueda de una explicación tentativa del contraste expresivo. Esto es, preguntémonos acerca de si hay entre las pruebas necesitadas de explicitación (en uno y otro caso) alguna diferencia relevante de tipo *procedimental* o *estratégico*. Dicho de otra forma: ¿qué rasgos procedimentales o estratégicos posee la ilación inferencial crítica que anima su omisión expresiva (absoluta o relativa)? Retornemos a I.6. Podría describirse su esquema estratégico general, usando terminología lógica contemporánea, como un caso de *eliminación de la disyunción*; la prueba explícita ofrece el modelo para hacer el trabajo para un disyunto, la prueba omitida debe hacer lo propio respecto del otro disyunto.

Sin atribuir estrictamente el uso de esta regla lógica a Euclides, en I.6 tendríamos esquemáticamente esta situación: la asunción de la negación de la proposición P implica una disyunción $A \vee B$. Se asume A y se deduce un absurdo. Luego queda demostrada la proposición P . La naturaleza polimodal radica en que se omite (expresivamente) la demostración del absurdo a partir de la suposición de B -tramo este “lógicamente” necesario.¹¹ En tal sentido una reconstrucción del tramo de la demostración que interesa ahora podría correr así (esquemáticamente)



El estilo polimodal, como regla general, omite la expresión detallada de un tramo estructural que se espera resulte perfectamente “representable” a partir del modelo ofrecido por la expresión minuciosa previa.¹² Esta omisión posee dos dimensiones: una estructural y una contextual. La estrategia deductiva del primero es aplicable al segundo tramo de la ilación inferencial. La facilidad o simplicidad aludida de tal aplicación del modelo es relativa a las capacidades atribuidas al destinatario pretendido de la prueba. El cumplimiento conjunto de estas dos condiciones hace al éxito del estilo polimodal. La descripción de un caso de polimodalidad entonces se ve enriquecida si distinguimos ambos aspectos: la caracterización de la estrategia exhibida en el formato minucioso, y la asunción de la relativamente fácil identificación y reutilización por parte del destinatario o receptor del discurso deductivo. Luego, en particular, cabe entender así al Esquema 1: definido en esencia, desde el punto de vista estructural, como se visualiza arriba, y comprendido por el emisor de la prueba como disponible por el receptor en base a sus capacidades, dada la modalidad expresiva adoptada.

¹¹ Se apuntó arriba el carácter absoluto de esta omisión, pero esto no equivale a la inexistencia de señales en la trama lingüística que, en cierta forma, adviertan sobre su carácter polimodal. Como se apuntó oportunamente, la aparición de “Sea”, aquí precediendo a la afirmación de que AB es mayor que AF , podría entenderse en esta clave. En cierto sentido, podría decirse que se marca así, directamente, la primera suposición de la eliminación e, indirectamente, la polimodalidad de la demostración.

¹² En general, en este trabajo he sacrificado la precisión en beneficio de la neutralidad respecto de una concepción específica del entramado estructural. Desde este punto de vista, “representable” me ha parecido una elección satisfactoria —la lectora, el lector desconfirme puede sustituir esta expresión por aquella que refleje mejor su propia comprensión de la ilación inferencial—.

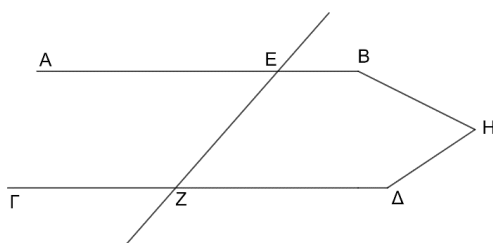
Una revisión de los libros I y III provee interesantes ejemplos; su estudio no permite extraer conclusiones definitivas, pero sí se espera que sean suficientes para elaborar hipótesis tentativas razonables. Son casos *límite* las demostraciones de las proposiciones I.6, I.26 (dos instancias), I.29, III.27: se marca la premisa en cuestión, y el texto permanece silente sobre la prueba correspondiente. Y se opera de acuerdo al Esquema 1. Son casos estándar las demostraciones de las proposiciones I.15, I.16, I.17, I.20, III.8 (dos instancias), III.10, III.14: luego del tramo detallado, se recurre a un tramo esbozado o sumario (de diferente extensión, según la complejidad de la demostración referida). Y no se implementa la estrategia retratada en el Esquema 1. Sin embargo...

4.

Examinemos la demostración de I.27.¹³

El enunciado: si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas entre sí.

El diagrama:



La demostración:

Así pues, al incidir sobre las dos rectas AB, $\Gamma\Delta$, haga la recta EZ los ángulos alternos AEZ, EZ Δ iguales entre sí. Digo que AB es paralela a $\Gamma\Delta$. Pues si no, prolongadas AB, $\Gamma\Delta$, se encontrarán o bien en el sentido de B, Δ , o bien en el sentido de A, Γ . Prolónguense y encuéntrense en el sentido de B, Δ en H. Entonces el ángulo externo AEZ del triángulo HEZ es igual al ángulo interno y opuesto EZH; lo cual es imposible [I, 16]; por tanto, AB, $\Gamma\Delta$ prolongadas no se encuentran en el sentido de B, Δ . De manera semejante demostraríamos que tampoco en el sentido de A, Γ pero las rectas que no se encuentran en ninguno de los dos sentidos son paralelas [Def. 23]; por tanto, AB es paralela a $\Gamma\Delta$. Por consiguiente, si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas. Q. E. D.

Es obvio que este es un caso estándar. La estrategia en obra, sin embargo, no difiere de aquella a la que se apela en I.6, en la interpretación antes propuesta: se trata de eliminar una disyunción, implicada por la hipótesis crítica asumida por la prueba por el absurdo. La diferencia con I.6 es que aquí, explícitamente, se señala la necesidad de la ilación estructural correspondiente y se explicita el papel modélico de la estrategia deductiva encarnada en el formato minucioso respecto de la correspondiente al formato sumario. Es decir, hay un texto que se inicia con “De manera semejante demostraríamos que ...” que lleva adelante esa labor. Brevemente: se trata de un caso *estándar* ... que instancia el Esquema 1. Luego, resulta que no alcanza con apelar a dicha estrategia deductiva para adoptar la opción expresiva *límite*.

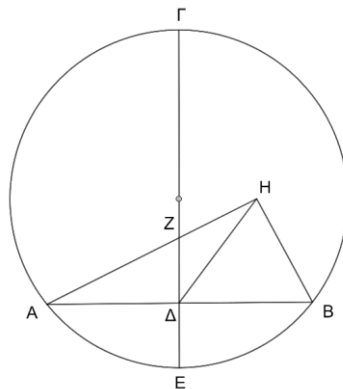
Aunque respalda la misma conclusión, la demostración siguiente (por su mayor complejidad estructural) ilustra otro aspecto digno de atención reflexiva. Se trata de la proposición III.1.¹⁴

¹³ Netz llama la atención sobre esta prueba y aquellas que poseen una estrategia argumental semejante (podría decirse: de naturaleza infinita), y las identifica en los *Elementos* (cf. Netz 1999, cap. 6). La razón de este filósofo para aislar tal conjunto de pruebas es diferente a las convicciones que guían la reflexión presente; la motivación aquí reside (como probablemente la lectora, el lector ya sospecha) en lo que enseñan sobre la interacción expresión/estructura en la demostración euclidiana.

¹⁴ Netz llama la atención sobre esta prueba y aquellas que poseen una estrategia argumental semejante (podría decirse: de naturaleza infinita), y las identifica en los *Elementos* (véase Netz 1999, cap. 6). La razón de este filósofo para aislar tal conjunto de pruebas es diferente a las convicciones que guían la reflexión presente; la motivación aquí reside (como probablemente la lectora, el lector ya sospecha) en lo que enseñan sobre la interacción expresión/estructura en la demostración euclidiana.

El enunciado: hallar el centro de un círculo dado.

El diagrama:



La demostración:

Sea el círculo dado $AB\Gamma$.

Hay que hallar el centro del círculo $AB\Gamma$.

Trácese en él al azar una recta AB , y divídase en dos por el punto Δ , y a partir de Δ trácese $\Delta\Gamma$ perpendicular a AB y prolongúese hasta E , y divídase en dos partes iguales ΓE en Z .

Digo que Z es el centro del [círculo] $AB\Gamma$.

Pues supongamos que no, entonces si es posible sea H (el centro), y trácese HA , $H\Delta$, HB . Ahora bien, como $A\Delta$ es igual a ΔB y ΔH es común, los dos (lados) $A\Delta$, ΔH son iguales respectivamente a los dos (lados) $H\Delta$ y ΔB , y la base HA es igual a la base HB , pues son radios; por tanto, el ángulo $A\Delta H$ es igual al ángulo $H\Delta B$ [I,8]; pero cuando una recta levantada sobre otra recta hace los dos ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos adyacentes es recto [I, Def. 10]; por tanto, el ángulo $H\Delta B$ es recto. Pero también es recto el ángulo $Z\Delta B$; por tanto, el ángulo $Z\Delta B$ es igual al ángulo $H\Delta B$, el mayor al menor; lo cual es imposible. Luego H no es el centro del círculo $AB\Gamma$. De la misma manera demostraríamos que ningún otro (lo es) excepto Z .

Por consiguiente, el punto Z es el centro del (círculo) $AB\Gamma$.

Es obvio que este es un caso *estándar* y, nuevamente, que instancia el Esquema 1. La diferencia con I.6 radica en la distinta complejidad de una y otra demostración. Dicho directamente: la estructura de esta última es infinita. Luego, aquella ilación estructural alberga infinitas instancias de pruebas que concluyen el absurdo, a partir de, respectivamente, asumir los infinitos disyuntos en cuestión como premisa. Sin dudas, al igual que la demostración de I.6, nos muestra que la estrategia eliminativa de la disyunción no asegura la opción expresiva *límite*. Pero, además, parece evidenciar elocuentemente las *dificultades* de proponer la comunicación de una demostración que se ajustara al patrón del caso *límite*. ¿Por qué? Porque resultaría abstrusa una prueba que dejara en silencio la iteración infinita de la estrategia argumental modélica, limitándose exclusivamente a comunicar la indicación del segmento estructural correspondiente vía el formato minucioso. Es decir, resulta imprescindible (desde el punto de vista comunicacional) la opción por el formato sumario (adicionado al formato minucioso). Luego, apelando a la estrategia del Esquema 1, no solo *no se escoge* (como en I.6) la opción expresiva *límite*, sino que *no parece posible elegir* (como en III.1) la opción expresiva *límite*. Expresado en términos positivos, en casos como este último, parece *necesaria* la opción *estándar*.

Las demostraciones de I.27 y de III.1 nos llevan a preguntarnos, dado el parentesco global estratégico que las aproxima, *qué* las distingue o diferencia de las pruebas de los casos *límite* referidos en la sección 2. Pues esa diferencia prometer ser la responsable de que unas y otras presenten formulaciones expresivas diversas, a saber: las primeras, *límite*, las segundas, *estándar*.

5.

Como se recuerda, las pruebas de los cinco ejemplos de casos *límite* referidos arriba instancian el Esquema 1; este dato no debe minimizarse: si puede apelarse al recurso expresivo polimodal, eso implica que tal estrategia deductiva forma parte del stock de recursos inferenciales en posesión del receptor pretendido. En otro

caso, la opción expresiva no se justifica. La condición estructural es relevante, pero, como se apuntó antes, no es suficiente: en el contexto polimodal, hay que entenderla en forma contextualizada.

Ahora bien, cuando revisamos las instancias del Esquema 1 en los casos *límite* recogidos nos encontramos con un rasgo interesante: en todas ellas la negación (de la hipótesis del absurdo) recae sobre igualdades. Concentrémonos ahora en la proposición que juega este papel en las pruebas de la sección anterior. ¿Qué tipo de proposición se niega I.27? No es una igualdad, es la articulada por una relación de paralelismo, a saber: no es cierto que AB sea *paralela* a $\Gamma\Delta$. ¿Qué tipo de proposición se niega en III.1? No es una igualdad, es la articulada por la relación “... es el centro del círculo ...”, a saber: no es cierto que Z es el centro del [círculo] AB Γ . La primera relación está caracterizada por la definición 23:

23. Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.

La segunda abrevia en las definiciones 15 y 16:

15. Un círculo es una figura plana comprendida por una línea [que se llama circunferencia] tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.

16. Y el punto se llama centro del círculo.

Estas relaciones son, en un sentido preciso, *geométricas*. Luego, las proposiciones que las afirman o niegan poseen, en el mismo sentido, *contenido geométrico*. La igualdad no es una relación geométrica (en este sentido). De allí su tratamiento en las Nociones Comunes. Álvarez lo expresa así con su habitual elocuencia (cursivas mías):

... se trata de enunciados que fijan las condiciones bajo las cuales se establece la relación entre [los que son] iguales (ἴσος). Euclides fija esta relación entre “entidades” o “cosas” a las que se refiere mediante un artículo indefinido ($\tau\acute{\omega}, \tau\acute{o}, \tau\acute{\alpha}$), *no se limita únicamente a objetos geométricos, líneas, ángulos o figuras que pueden ser iguales, y apunta con claridad a un ámbito más general que incluye a todos aquellos dominios de cosas entre las que resulta pertinente esta relación de igualdad, la relación de desigualdad (ser mayor o menor que) y, sobre todo, dominios de objetos o entidades para las que resultan pertinentes las operaciones de poner y quitar*. De ello se sigue que este lenguaje de objetos denotados por un artículo indefinido abarca un horizonte más amplio que aquel contemplado por los *postulados*, por lo que estas nociones comunes cumplen más bien un papel operativo que consiste en fijar la tarea que deben cumplir los postulados como enunciados constructivos (Álvarez, 2021:73).

Podríamos decir que tal relación es *general*, carece de contenido geométrico específico. Las proposiciones que afirman o niegan una relación general, podemos decir que no poseen contenido geométrico específico. Es decir: son *generales*. Luego, mi observación puede resumirse así: mientras en I.6 se parte de una proposición general, en I.27 y III.1 se parte de una proposición geométrica. Salvo mejor opinión, estas observaciones recogen un contraste claro entre, por una parte, I.6 (y todos los casos *límite* referidos arriba) y, por otra, I.27 y III.1.

Pero este apunte parece sugerir una primera conjetura, llamémosla así, de *aspiración descriptiva*: el indicador o la clave de la decisión expresiva (asumiendo la estrategia deductiva correspondiente en el contexto polimodal) se asocia a la *naturaleza* de la proposición crítica a tramitar. Si se trata de una proposición general la elección se inclina por la opción *límite*, si se trata de una proposición geométrica, la opción es la *estándar*. Gráficamente:

caso estándar		caso límite	
Estructura	Expresión	Estructura	Expresión
A_1	} formato minucioso	B_1	} formato minucioso
A_2		B_2	
:		:	
A_n		B_t	
A_{n+1}		B_{t+1}	
:	} formato sumario	:	} omisión expresiva
:		A_{t+1}	
A_{n+1+k}		A_{t+1+i}	

La diferencia expresiva parece entonces corresponder (como se adelantó) a la diferente naturaleza de la proposición crítica: A, es geométrica (por ejemplo: no es cierto que AB sea paralela a $\Gamma\Delta$), B, es general (por ejemplo: no es cierto que AB sea igual a $A\Gamma$). La ejemplificación responde a los casos *límite* y a su estrategia deductiva, a saber: el Esquema 1. Pero ya sabemos que el Esquema 1 no es la estrategia deductiva común a *todos* los casos *estándar*, pues así nos lo enseña una inspección superficial de la demostración de I.15. Además, la constatación del carácter uniforme de la proposición crítica se ha restringido hasta ahora a los casos *límite*. Luego, a los efectos de completar el test de la conjetura descriptiva, resulta necesario enfrentar ambas tareas respecto de los casos *estándar*. Es decir: hay que refinar la aproximación estructural estratégica a tales casos (agregando al Esquema 1 el complemento necesario) y hay que determinar si los ejemplos examinados se comportan acorde a nuestra conjetura en lo que respecta a la naturaleza de la proposición crítica, a saber: su carácter geométrico.

Empecemos por el plano estratégico. Cuando se trata de aquellos ejemplos que instancian al Esquema 1 (como III.1) el problema está resuelto. Pero, como se dijo, no todos los casos instancian el Esquema 1. Retornemos pues a la demostración I. 15. Como una primera aproximación, el esquema parecería orientarse a *la justificación de un componente conjuntivo* (ya directamente de la proposición conjuntiva a demostrar, ya de una, por así llamarlo, “conjunción” intermedia). Usando terminología lógica contemporánea, quizá podríamos representar dicha estrategia vía la *Introducción de la conjunción*. Es decir, hay que demostrar la proposición P que afirma $A \wedge B$. La ilación inferencial que prueba A se comunica en un formato expresivo detallado, y el texto sumario indica la demostración de B. Una reconstrucción del tramo de la demostración que ahora interesa podría correr así (esquemáticamente):

El Esquema 2 (dado el contexto polimodal) se asume fácilmente representable de acuerdo con las capacidades del receptor pretendido del discurso deductivo. Por supuesto, como se dijo, el *uso* de esta estrategia deductiva debe entenderse en un sentido amplio: ya contribuyendo a la conclusión final, ya una conclusión “intermedia”. En esta acepción hospitalaria, todos los ejemplos estándar discutidos implementan el Esquema 2 -salvo los casos que implementan el Esquema 1. Brevemente: todos los ejemplos estándar tratados implementan el Esquema 1 o el Esquema 2. De modo que se ha resuelto la primera tarea: identificar las estrategias deductivas en obra.

Es necesario averiguar ahora qué ocurre con la segunda cuestión: ¿es *geométrica* la proposición crítica de las diversas ejemplificaciones de la opción *estándar*? La respuesta es afirmativa. Pero su justificación requiere algún ajuste previo: debemos reformular la oposición general/geométrica, sin perder su núcleo fundamental. ¿Cómo? Ampliando la segunda categoría. Por supuesto, esta cubrirá casos donde, directamente, las relaciones involucradas sean geométricas -tales como las ejemplificadas antes. Pero el punto decisivo, desde un ángulo procedimental, es qué distancia, en la economía de la prueba, las proposiciones de un tipo de las del otro. Y la respuesta es que cuando las proposiciones críticas son generales (es decir: basadas en el protagonismo de relaciones generales), determinar el espacio lógico de las posibilidades que la demostración debe considerar se hace sin apelar a información geométrica. Simplificando: si digo que $A \times$ no es igual a $B \times$, no necesito ninguna información geométrica adicional para circunscribir las posibilidades de las que debe dar cuenta la demostración, a saber, las dos obvias, o bien $A \times$ es mayor que $B \times$ o bien es menor. En cambio, hay casos en que la determinación del espacio lógico relevante no puede prescindir de cierta información geométrica adicional. Este input puede adoptar diversas formas. Puede ser directamente a partir de las definiciones de los términos - como, por ejemplo, la negación de la relación de paralelismo entre AB y $\Gamma\Delta$. Pero puede también adquirir otros formatos. Tomemos, por ejemplo, la demostración de I.15. La proposición crítica es una conjunción: ΓEA es igual a $BE\Delta$ y ΓEB es igual a ΔEA . ¿Es esta conjunción una proposición geométrica? En el sentido en que aquí nos interesa, sí. ¿Por qué? Porque en el contexto de la prueba, el espacio lógico a atender no queda caracterizado por una proposición general. Como la lectora, el lector recuerda, lo que afirma el teorema es la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice. Pero, ¿cómo se determina qué ángulos deben probarse que son iguales? Esto es, el espacio lógico no queda definido por la información codificada en una proposición general. El punto crítico, según entiendo, es cómo se determina el espacio lógico. Si se hace basándose en la mera comprensión de una relación general o supone una apelación a información geométrica. Así entendida, la oposición general/geométrica, la respuesta en torno a la proposición crítica merece responderse en forma afirmativa. De este modo se habría resuelto la segunda tarea: confirmar la dependencia de la elección expresiva estándar de la naturaleza geométrica de la proposición crítica.

Ahora bien, estos esfuerzos, en el mejor de los casos, ofrecen una suerte de descripción general de *cuándo* emerge (en el discurso deductivo polimodal) una u otra opción expresiva: *estándar* o *límite*. Pero no proveen el

porqué de la elección comunicacional; no aporta una posible racionalidad subyacente a la preferencia por una u otra de las opciones disímiles.

Una segunda conjetura ahora, llamémosle así, de *aspiración explicativa general*. Antes un recordatorio: según mi punto de vista, la expresión se encuentra sometida (al menos) a tres fuentes de presión: la estructura de la demostración, el destinatario del discurso deductivo, los valores de la matemática, el matemático emisor. Se ha establecido una característica estructural (de la proposición crítica), pero ella, por sí misma, no parece *explicar* la predilección por una u otra opción expresiva. Dicho de otra forma, la diferencia estructural propuesta no nos ofrece, por sí sola, la *comprensión* (en el contexto polimodal) de la preferencia por una u otra alternativa expresiva (*estándar* o *límite*). Luego, asumido aquel contraste estructural (general versus geométrica), ¿qué explicaría la diferente “política” expresiva (*límite* vs *estándar*)?

La respuesta: las capacidades atribuidas al interlocutor. Esta es, por supuesto, una conjetura tentativa y altamente arriesgada; no se pretenden disimular tales rasgos. Quizá su principal valor sea estimular la reflexión sobre una cuestión relevante. He aquí la idea. En el caso de la proposición geométrica, la determinación del espacio lógico y, luego, la necesidad estructural de la descripción minuciosa omitida no necesariamente es obvia o, más dramáticamente, no cabría esperar fuese (de modo trivial) identificada por el interlocutor. La determinación del espacio lógico, cuando se trata de una proposición general, resultaría ocioso o superfluo, explicitarla (dadas las capacidades asumidas del interlocutor) y, consecuentemente, el silencio correspondiente al caso *límite* resultaría comunicacionalmente armónico con esa asunción. Nótese que no basta el rasgo estructural de la proposición crítica para dar cuenta del diverso comportamiento expresivo, es necesario nuevamente apelar a las capacidades de esta suerte de interlocutor pretendido.¹⁵ Además, corresponde resaltar la independencia de la estrategia deductiva instanciada en cada una de las modalidades -asumiendo, obviamente, que estas son apropiadas para la vigencia del estilo polimodal.

El lector podría observar acertadamente que la apelación al contexto, a las capacidades del interlocutor, no es novedosa: se encuentra en la base del éxito expresivo de la alternativa polimodal. Si las estrategias deductivas básicas no se consideraran disponibles y, en general, la estrategia o el procedimiento encarnado en el respectivo tramo minucioso no se entendiera como fácilmente representable o concebible por el receptor (en virtud de sus conocimientos y capacidades), la comunicación polimodal se desplomaría. No obstante, lo que pretendo resaltar es que este recurso brinda un servicio doble: la asunción de estas capacidades y conocimientos estructurales estratégicas explican la vigencia de la opción expresiva polimodal, la asunción de capacidades y conocimientos vinculados a la explotación de la información contenida en la proposición crítica en la identificación del espacio lógico explicaría la diferencia en la política expresiva del agente matemático a la hora de elegir la opción *límite* o la opción *estándar*.

6.

Las formas de referir a una prueba omitida son fácilmente identificables en Euclides. Además de los casos discutidos antes (que inician el texto esbozado con la expresión “de manera semejante” o “de la misma manera”) se encuentran también otras variantes. Así en la prueba de III.7 podemos leer (cursivas mías):

Por lo mismo, ΓZ es también mayor que ZH .

Más allá de tales modificaciones, el fenómeno obviamente es el mismo.¹⁶ Una nota que reviste cierto interés es que, entendido en los términos que aquí se propone, este rasgo expresivo de alusión sumaria o esquemática a un patrón inferencial ocurre siempre (hasta donde alcanza mi conocimiento) en el contexto de la demostración de *una* proposición. Es decir, aún cuando en una proposición previamente demostrada se ejecute un patrón inferencial notoriamente similar, no se lo refiere en forma esbozada vía los recursos expresivos comentados. La polimodalidad es siempre *local*, no articula demostraciones de proposiciones distintas. Por ejemplo, las demostraciones de III.5 y III.6 son salientemente análogas. Sin embargo, III.6 conserva un estricto estilo unimodal. Otro rasgo interesante de la polimodalidad (al menos en los casos estudiados) es que se trata de un fenómeno exclusivamente localizado en la *prueba* -no en la *construcción*- de una demostración

¹⁵ Diversos filósofos han enfatizado la importancia del destinatario del discurso deductivo. En particular, véase Lassalle Casanave (2008).

¹⁶ Merece anotarse que el interés filosófico de este fenómeno expresivo es sensible a las diversas formulaciones o recursos puestos en obra para aquella indicación sumaria de la ilación inferencial correspondiente, pero se ha propuesto desde el inicio localizar tal interés en la interacción de los planos expresivo y estructural en contextos específicos. Por ello no debiera sorprender la apelación al destinatario del discurso deductivo o a los valores del agente matemático emisor como componentes valiosos del enfoque defendido en estas páginas.

euclidiana (para expresarlo siguiendo la tradicional clasificación de Proclo).¹⁷ Luego, la naturaleza local de nuestro fenómeno podría decirse que ciñe su efecto articulador al interior de la *prueba* de una proposición.

Como ya se resaltó, el cambio de formato expresivo en el curso de una demostración polimodal supone una *variación* en términos de explicitud estructural. Es decir: en B_2 (a diferencia de en B_1) se *bosqueja* o se *resume* la descripción heterogénea del entramado lógico (en sentido lato). Dos aspectos merecen recordarse: la operación de resumen frecuentemente compromete ambos medios (texto, diagrama), y, aunque de naturaleza expresiva, importa estructuralmente.

Pero, además de aquella variación entre los dos formatos, podría decirse, definicional, hay otro cambio relevante: se produce una suerte de “salto” o “mudanza” de nivel discursivo. Sintéticamente: B_2 se ubica en un plano *meta* (respecto de B_1). Tal ruptura responde a un interés muy neto: llamar la atención sobre *patrones inferenciales generales*. Es decir, la combinación de ahorro expresivo y énfasis metacognitivo, al dirigir la atención de la audiencia a un patrón argumental perfectamente identificable y manipulable, estimula la comprensión de ese desarrollo como *instancia* de una estructura argumentativa singular, cuyo interés no se agota en el caso particular y, podría agregarse, en una aplicación o utilización particular. Como se ha dicho y es obvio, el objetivo explícito inmediato de tal recurso expresivo es inspirar o guiar la aplicación al caso análogo propuesto. Pero quizá, exista también un objetivo formativo mediato, vinculado a la identificación y apropiación intelectual de patrones inferenciales. Estos propósitos *pedagógicos* contribuyen a realzar la relevancia conceptual del estilo polimodal.

Diversos aspectos del estilo polimodal euclidiano han quedado relativamente bien establecidos en este trabajo. Pero es necesario reconocer sin ambages limitaciones importantes en las conjeturas (descriptiva y explicativa) destinadas a dar cuenta de la racionalidad subyacente a la elección entre las opciones expresivas al interior del estilo polimodal de Euclides. En especial, porque se ha examinado un número relativamente pequeño de ejemplos. No obstante, en mi modesta opinión, la idea principal resulta plausible. Las diferentes modalidades expresivas (*límite*, *estándar*) no se explican por *contrastos estructurales* entre las respectivas *pruebas* comunicadas en forma sumaria. La explicación en cuestión recae, en cambio, en las condiciones estructurales y las capacidades de la audiencia matemática para identificar la *necesidad de tales pruebas*.

Referencias bibliográficas

- Álvarez, C. (2021). Ensayos sobre Euclides. La geometría de la congruencia. Universidad Autónoma de México.
- Chateaubriand, O. (2005). Logical Forms, Part II – Logic, Language, and Knowledge. Centro de Lógica, Epistemología e História da Ciência.
- Euclid. (1956). The thirteen books of the Elements (Trans. & commentary T. L. Heath). Dover.
- Euclides. (1991). Elementos (Libros I–IV) (trad. M. L. Puertas Castaños; introd. L. Vega Reñón). Editorial Gredos.
- Giaquinto, M. (2008). Visualizing in mathematics. En P. Mancosu (Ed.), The philosophy of mathematical practice (pp. 22–42). Oxford University Press.
- Lassalle Casanave, A. (2008). Entre la retórica y la dialéctica. Manuscrito, 31(1), 11–18.
- Manders, K. (2008). The Euclidian diagram (1995). En P. Mancosu (Ed.), The philosophy of mathematical practice (pp. 80–133). Oxford University Press.
- Netz, R. (1999). The shaping of deduction in Greek mathematics. Cambridge University Press.
- Paseau, A. C. (2016). What's the point of complete rigour? Mind, 125(497), 105–140. <https://doi.org/10.1093/mind/fzv014>
- (Se completó el número de páginas estimado y se corrigió el DOI)
- Proclus. (1970). A commentary on the first book of Euclid's Elements (trad., introd. y notas de G. R. Morrow). Princeton University Press.
- Seoane, J. (2022). Estilo polimodal en la demostración euclidiana. Diánoia, 67(89), 39–65. <https://doi.org/10.22201/iifs.18704913e.2022.89.1903>

¹⁷ Por supuesto, es de orden referir al merecidamente célebre texto de Proclo (Proclus, 1970:77 y ss.).

Weaver, G. (1988). Reading proofs with understanding. *Theoria*, 54(1), 31–47.