Ana María Mántica, Marcela Götte
y María Susana Dal Maso
Facultad de Humanidades y Ciencias, UNL
amantica@fhuc.unl.edu.ar; mgotte@fhuc.unl.edu.ar; mdalmaso@fhuc.unl.edu.ar

Un camino para la comprensión del concepto de área

Resumen

En este artículo analizamos una secuencia didáctica para la enseñanza del concepto de área y la relación área-perímetro. Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación de la Universidad Nacional del Litoral. En primer lugar, a modo de marco teórico de referencia, presentamos los aportes sobre la adquisición de conceptos en matemática de Skemp, Fischbein, Laborde y Freudenthal. Continuamos con el diseño y análisis de una secuencia didáctica que consta de dos partes. En la primera trabajamos sobre el concepto de área en un séptimo año de EGB de una escuela de Santa Fe y en la segunda parte, con el mismo grupo de alumnos, en octavo año, abordamos la compleja relación área-perímetro. Para finalizar, transparentamos las fortalezas y debilidades que surgieron en los alumnos durante la implementación de esta secuencia.

Abstract

In this article we analyze a didactic sequence for the teaching of the concept of area and the relation area-perimeter. This work places in a project of investigation of the Universidad Nacional del Litoral. First, like theoretical frame of reference, we present the contributions on the acquisition of concepts in mathematics by Skemp, Fischbein, Laborde and Freudenthal. We continue with the design and analysis of a didactic sequence that consists of two parts. In the first one we are employed on the concept of area in the seventh year of EGB of a school from Santa Fe. In the second part we tackle the complex relation area-perimeter in the eighth year, with the same student's group.

To finish we show the fortresses and weaknesses that arose in the students during the implementation of this sequence.

Introducción

El concepto de área es mucho más complejo que el simple uso y aplicación de fórmulas. Se debe tender al "uso comprensivo" de las fórmulas, presentándolas como un camino más corto para lograr un resultado que podría obtenerse por medios más intuitivos o laboriosos.

Preocupados por la enseñanza de este concepto, realizamos un análisis de diversas pesquisas que tratan las dificultades que presentan los alumnos en su aprendizaje. Entre los trabajos consultados destacamos Chamorro (1995), Dickson (1991), del Olmo y otros (1993) y Douady - Perrín (1988). Luego de estas lecturas diseñamos una secuencia considerando la relación de independencia entre área y perímetro, basada en la presentada por Douady y Perrin. La secuencia se trabajó con alumnos de 8° año[1] de EGB de dos escuelas de la ciudad de Santa Fe y su implementación demandó dos jornadas de 80 minutos cada una[2]. En esa instancia nos propusimos observar si los alumnos logran diferenciar las nociones de área y longitud y si pueden reconocer la independencia de las variaciones del área y del perímetro de una figura dada. El análisis de lo realizado en esas jornadas nos llevó a formular la siguiente hipótesis: *se presenta en los alumnos una fractura entre lo que perciben visualmente y el concepto de área.*

Consideramos que esta fractura se debe a la doble naturaleza de las figuras geométricas, que poseen simultáneamente componentes figurales y conceptuales, lo que Fischbein (1993) denomina conceptos figurales. Laborde (1996), cuando hace referencia a las relaciones entre el dibujo y el objeto geométrico, también sostiene que "la percepción interviene en la construcción de una interpretación siempre y cuando el lector no tenga sólidos conocimientos teóricos geométricos que le permitan ir más allá de la primera lectura perceptiva" (Laborde 1996; 69).

Con el fin de estudiar la hipótesis mencionada decidimos entrevistar a cinco alumnos, de los cuales algunos manifestaban la confusión planteada y otros aparentemente interpretaron correctamente la situación. Del análisis de las entrevistas pudimos apreciar que en los alumnos predomina lo visual sobre lo conceptual; en general hacen una mirada no matemática sobre la figura y no analizan propiedades ni conceptos sino que se dejan llevar por "lo que ven". Es necesario que los alumnos aprendan a distinguir lo accidental de la representación, de lo que es fundamental para la idea o definición de área[3].

Además de las entrevistas analizamos cuadernos, carpetas y libros de texto correspondientes al 2° y 3° ciclo de EGB.

En las carpetas analizadas comprobamos que el tema de área comienza a trabajarse en 6° año de la EGB. En general, se parte directamente de la fórmula para calcular el área del rectángulo y luego en algunos casos se obtienen, a partir de ella, las de los restantes cuadriláteros, y en otros simplemente se escriben dichas fórmulas para luego realizar ejercicios de aplicación. Es decir que, en general, se tiende a una aritmetización de la medida pero no se efectúan actividades de manipulación de figuras o tareas de cubrimiento.

En los libros de texto examinados, que corresponden al 6° año y al tercer ciclo de EGB de distintas editoriales, pudimos apreciar que los conceptos de área y perímetro son abordados generalmente en 6° y 7° año. Pero el trabajo que se realiza con ellos tiene que ver más con aplicaciones de fórmulas que con los conceptos en sí, no presentándose actividades en las que se permita al alumno realizar mediciones concretas ni utilizar distintas unidades no convencionales para obtener el área de una figura. En la mayoría de los textos se presenta la fórmula que permite calcular el área de un rectángulo y, a partir de ella, sin definir previamente figuras equivalentes en área, se deducen las de los restantes cuadriláteros. Podemos destacar que un solo texto analizado, al obtener la fórmula que permite calcular el área del rectángulo, considera que la unidad elegida para medir su área no siempre entra en él un número exacto de veces. Incluye actividades con el propósito de relacionar las variaciones del área y del perímetro de una figura, planteando la comparación de figuras de igual área y de distinto perímetro. En general, no se pone de manifiesto la necesidad de una unidad de medida para comparar dos objetos no comparables por superposición y, en consecuencia no se trabaja en la selección de la figura más conveniente para ser utilizada como unidad para hallar el área de otra figura. Las figuras tridimensionales no se incluyen en las actividades de cálculo de área apareciendo recién en los libros de 7° año de EGB al tratar el concepto de volumen, dejándose así de lado que la noción de área puede desarrollarse a partir de la idea de cubrir objetos y no sólo planos.

Pudimos comprobar que, en general, las actividades sobre cálculo de áreas derivan en el manejo y aplicación de fórmulas y no apuntan a la comprensión del concepto ni a las relaciones que implican la medida de superficies. Esto nos llevó a rediseñar la secuencia comenzando con la construcción del concepto de área.

Aportes teóricos sobre la adquisición de conceptos en matemática

Los conceptos matemáticos se encuentran entre los más abstractos y requieren para su formación un cierto número de experiencias que tengan algo en común. Según Skemp (1980) los conceptos contributorios deben estar disponibles para cada nueva etapa de abstracción pues, si un nivel dado se comprende imperfectamente cualquier cosa derivada se encuentra en peligro. Plantea que un concepto es una forma de procesar datos que capacita al usuario para utilizar la experiencia pasada de manera provechosa al manejar la situación presente. En particular en geometría, los conceptos están conformados por dos tipos de símbolos, el visual y el verbal. Una de las desventajas del primero es que debe dibujarse para ser comunicado. Las dificultades que se les plantean a los estudiantes en la resolución de problemas, con los dibujos, se deben al doble papel que deben jugar éstos; por un lado el dibujo como ejemplo específico con sus valores de ángulos, longitudes... y sus propiedades y por otro, el dibujo como representante de una clase de objetos portador de las propiedades generales de la clase. Al decir un círculo, por ejemplo, no representa *un* círculo particular (de centro dado y radio que vemos) sino variables. Es decir, un diagrama no puede mostrar más que un objeto dado, pero deben ignorarse sus cualidades particulares y trabajar con las generales que simboliza.

Entre los que se ocupan de la formación de conceptos geométricos analizamos a Fischbein (1993) quien, como mencionáramos en la introducción, desarrolla la teoría de conceptos figurales. Si bien el concepto figural es una entidad única, permanece bajo la doble y muchas veces contradictoria influencia de los sistemas con que está relacionado (el conceptual y el figural). El sistema conceptual debería controlar los significados, las relaciones y las propiedades de la figura. Muchos errores en los razonamientos pueden tener su origen en la separación entre el aspecto conceptual y figural de los conceptos figurales. Las imágenes y los conceptos interactúan en la actividad cognitiva del sujeto cooperando en algunos casos o en conflicto en otras situaciones. Pero el desarrollo de conceptos figurales no es, generalmente, un proceso natural. Debería tenderse desde la propuesta de enseñanza a que los conceptos figurales se desarrollen naturalmente hacia su forma ideal. Una de las principales tareas de la Educación Matemática (en el dominio de la geometría) es crear secuencias didácticas que apunten a una cooperación estricta entre los dos aspectos, hasta la fusión en objetos unitarios.

Laborde (1996) considera que el dibujo puede ser considerado como un significante de un referente teórico. La figura geométrica consiste en el emparejamiento de un referente dado con todos sus dibujos; queda entonces definida como el conjunto de pares formados por dos elementos, siendo el primer elemento el referente y el segundo uno de los dibujos que lo representa (este segundo elemento se toma del universo de todos los dibujos posibles del referente). El término figura geométrica así entendido remite al establecimiento de una relación entre un objeto geométrico y sus posibles representantes. Visto así, las relaciones entre un dibujo y su referente construidas por un sujeto constituyen el significado, para este sujeto, de la figura geométrica asociada (este significado corresponde a lo que Fischbein llama conceptos figurales).

Si bien en la elaboración de esta propuesta se tuvieron en cuenta las investigaciones de autores mencionados en la introducción, consideramos también los aportes de Freudenthal (1983), quien plantea la gran profundidad y sofisticación del concepto de área.

Dentro de las aproximaciones que trata este autor para la formación del concepto de área consideramos las siguientes:

- *repartir equitativamente,* aquí incluye situaciones en las que dado un objeto hay que repartirlo, y los distintos modos de realizarlo. Se pueden aprovechar regularidades, realizar estimaciones superponiendo partes e ir equilibrándolas hasta conseguir que éstas queden iguales o medir la cantidad a repartir, dividiendo esta medida entre el número de partes que se desea y medir cada una de estas partes;
- *comparar y reproducir,* se consideran situaciones para las que hay que comparar dos superficies pero también aquellas en las que se debe realizar una reproducción de una superficie con una forma diferente. Esto puede realizarse por inclusión, si una superficie está contenida en la otra; por transformaciones de romper y rehacer, en las que se descompone una superficie en partes y se reorganizan obteniendo figuras de diferente forma pero de igual área; por medio de funciones, cuando las superficies se expresan con fórmulas o cuando a partir de la gráfica es posible obtener una de ellas realizando traslaciones, giros y simetrías hasta superponerlas y,
- *midiendo*: por exhausción con unidades; por acotación entre un nivel superior e inferior; por transformaciones de romper y rehacer, proceso por el que generalmente se deducen las fórmulas de las figuras geométricas o por medio de relaciones geométricas generales midiendo las dimensiones lineales y aplicando fórmulas para obtener la medida.

Descripción y análisis de la propuesta didáctica

Las tareas presentadas tienden a evitar lo que Chamorro denomina "metodología de la quietud", la cual "priva al alumno de una fuente inagotable de ocasiones para aprehender que proceden de la propia experiencia, cercena su intuición, y, lo que es más importante, retrasa, y a veces impide, la formación de conceptos, lo que obliga al escolar a recurrir a la memorización de reglas no comprendidas que sólo se aplican bien durante un corto espacio de tiempo" (Chamorro 1994; 42).

Para la implementación de la secuencia de aprendizaje, nuestra experiencia docente y las lecturas realizadas nos llevan a plantear los siguientes supuestos:

- un concepto se construye en función de conocimientos anteriores a partir de un conflicto generado;
- es necesario proponer experiencias que puedan provocar una ruptura entre las imágenes intuitivas y las propiedades de las que gozan las superficies;
- los alumnos deben realizar actividades en las

cuales la medida de la superficie requiera de la elección de una unidad de medida y su posterior reiteración, y

- es esencial para aprehender el concepto proponer situaciones problemáticas sobre cómo medir una superficie, cómo transformarla en otra equivalente, cómo cubrir una superficie con otra unidad sin dejar huecos ni producir solapamientos, cómo reconocer la superficie de un objeto independientemente de otras cualidades "peligrosas" como el perímetro.

Se selecciona un séptimo año de EGB para la implementación de la secuencia dado que en este año se avanza sobre el concepto de área. La elección de la institución en la que se lleva a cabo la experiencia tiene que ver con la apertura por parte de los docentes de matemática y la posibilidad de continuar la experiencia con el mismo grupo de alumnos y con el mismo docente en octavo año. El docente del curso participa de reuniones con el equipo de investigación para interiorizarse del diseño de la propuesta pero, en la clase se preocupa por el desarrollo de los procesos de enseñanza y de aprendizaje y no por el problema de investigación. Actúa como facilitador, presentando las consignas y materiales, permitiendo el avance del conocimiento por parte de los alumnos.

La dinámica de trabajo se explica en cada actividad; en algunos casos se trabaja individualmente, socializando luego en pequeños grupos o en plenario y en otras ocasiones se trabaja en pequeños grupos y luego en plenario.

Para la documentación de las actividades de clase se trabaja con las anotaciones que los alumnos producen en sus carpetas o en afiches, con grabadores, videos y registros de diálogos entre los alumnos y entre docente y alumnos realizados por un observador no participante. Con respecto al audio y video queremos destacar que los alumnos no se inhibieron frente a los instrumentos utilizados. La filmación la realiza una persona distinta al observador. La grabación del video es apenas audible dado que el ruido del ambiente dificulta la correcta filmación; no obstante, la grabación en audio es buena porque el aparato se situó en los pupitres donde cada grupo discutía. Los alumnos contaban individualmente con reglas graduadas, bolígrafos, calculadoras, instrumentos de geometría, tijeras, goma de pegar, cinta adhesiva, hojas lisas y cuadriculadas y papel afiche. Para cada actividad se entrega el material que se describe en la secuencia.

Primera parte de la secuencia

Esta propuesta se implementa en un séptimo año del tercer ciclo de la EGB, en una escuela de la ciudad de Santa Fe y se trabaja sobre figuras equivalentes en áreas y cálculo de área de una figura con unidades no convencionales. La experiencia demanda tres jornadas.

Primera jornada

El objetivo de las actividades propuestas es saber si los alumnos logran reconocer figuras equivalentes en área. Los alumnos trabajan en forma individual y socializan en cada caso los resultados obtenidos.

Actividad

Consignas

1. *¿Qué es una superficie?*

2. *Dibujar distintas superficies.*

3. *Rodear las figuras que ocupan el mismo lugar en la hoja* (Figura 1).

Observación: luego de esta actividad se formula que las figuras que rodearon se denominan **figuras equivalentes en área.**

4. *Rodear las figuras de igual área* (Figura 2).

Observación: las figuras propuestas tienen igual área. Están diseñadas para determinar si los alumnos pueden reconocer figuras de igual área y distinta forma cuando estas se presentan sin pavimentar.

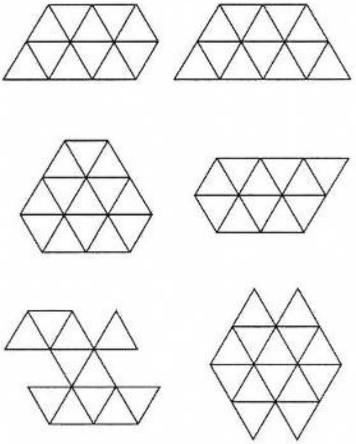


Figura 1.

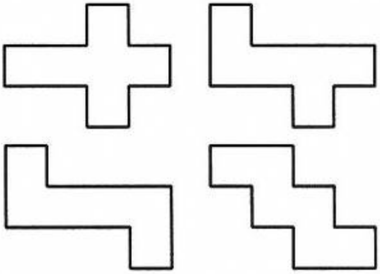


Figura 2.

Nuestro supuesto es que los alumnos podrían realizar algunos de los siguientes procedimientos en la resolución de las tareas consignadas:

- dibujar superficies planas, tridimensionales, con agujeros, cóncavas y convexas;
- contar el número de triángulos para determinar el lugar que ocupan las figuras;
- cuadricular las figuras para obtener la equivalencia del área;
- reconocer las figuras como desarrollos planos de un cubo y
- comparar por superposición de piezas.

Al realizar las consignas solicitadas notamos que aparecen figuras geométricas y de objetos cotidianos en 3D y 2D, como por ejemplo una taza, una cartón de leche...

Respecto del punto 4 las respuestas se pueden clasificar en tres categorías:

- respuestas correctas por cubrimiento o pavimentado en las cuatro figuras dadas;
- respuestas correctas por uso de transformaciones geométricas (traslaciones, simetrías) para identificar las figuras equivalentes en área;
- respuestas incorrectas por considerar los perímetros y no las áreas.

No reconocen las figuras dadas como desarrollos planos del cubo sino que las relacionan con la representación de fracciones, usando el significado de "las fracciones como subárea de una región unitaria" (Dickson y otros 1991; 296).

Segunda jornada

En este caso nos planteamos como objetivo indagar si los alumnos pueden obtener el concepto de área. Para esto planteamos tres actividades en las cuales los alumnos trabajan en grupo.

Actividad 1

Consignas

1) *Dados los siguientes pares de figuras ¿cuál de las dos tiene mayor área?*

2) *¿Cuántas veces mayor es F1 respecto de F2?* (Figura 3).

Observación: las consignas no son entregadas simultáneamente.

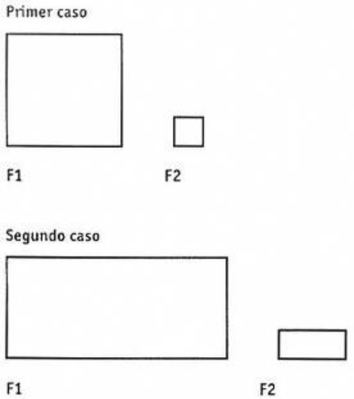


Figura 3.

Las figuras están construidas de tal manera que la de menor área no en todos los casos entra un número exacto de veces en la de mayor área. Con esto pretendemos evitar que el alumno identifique "que la unidad de área elegida debe entrar un número entero de veces en la otra" o "que el área es un número natural".

Nuestro supuesto es que los alumnos podrían realizar algunos de estos procedimientos en la resolución de la tarea consignada:

- cuadricular ambas figuras, con unidades iguales;
- recortar la figura de menor área y por reiteraciones sucesivas sobre la de mayor área, obtener el número que permite decir cuántas veces F_1 es mayor que F_2.

Podríamos definir tres categorías con las cuestiones observadas en la realización de esta tarea:

- respuestas correctas por cubrimiento en el primer caso y por exhausción por unidades en el segundo caso;
- respuestas incorrectas, por embaldosado con unidades distintas; se concluye que las figuras dadas tienen igual área y
- respuestas incorrectas por determinar el número de baldosas perceptualmente.

Puesta en común

Uno de los grupos cuadricula las figuras con cuadrados iguales en cada una pero con lados de longitud diferente en F_1 y F_2 (Figura 4). Concluyen que F_1 y F_2 están formadas por 16 cuadrados, por lo tanto ninguna es mayor que la otra. Plantean sus procedimientos y discuten con todos los alumnos de la clase hasta acordar que el modo utilizado por este grupo es erróneo, pues los cuadrados en los que se dividió cada una de las figuras "no tienen igual longitud de lado".

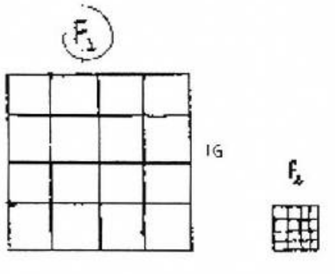


Figura 4.

Los alumnos evidencian dificultad para comparar las figuras en donde F_2 no entra un número exacto de veces en F_1; en principio suponen que se debe a un error de medición. Descartada esta posibilidad comienzan a rellenar el interior de la superficie a medir con unidades colocadas unas junto con otra y no superpuestas y, en aquellas partes de la superficie donde no es posible ubicar la unidad se recurre a rellenar con unidades más pequeñas; es decir que utilizan el método de exhausción por unidades. Concluyen en el primer caso que F_1 es igual a 16 F_2 y en el segundo caso que F_1 es igual a 8,125 F_2 (Figura 5).

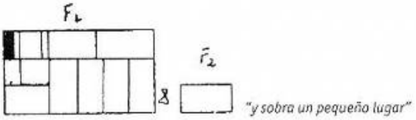


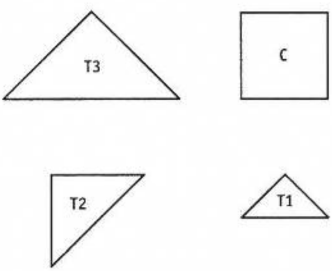
Figura 5.

Un alumno plantea que en el segundo caso F_2 es igual a 8 veces F_1, porque "se ve", recibiendo como respuesta de otro alumno que no siempre se puede confiar en lo que "se ve", lo que se corrobora con la aplicación del método de exhausción por unidades.
Se formaliza la notación del área de una figura respecto de una unidad arbitraria.

Actividad 2

Consigna

1) *Dadas las siguientes baldosas determinar con cuál o cuáles de ellas es posible embaldosar las figuras dadas* (Figura 6).
Observación: antes que los alumnos comiencen a trabajar el docente interroga acerca de qué significa embaldosar.



Baldosas

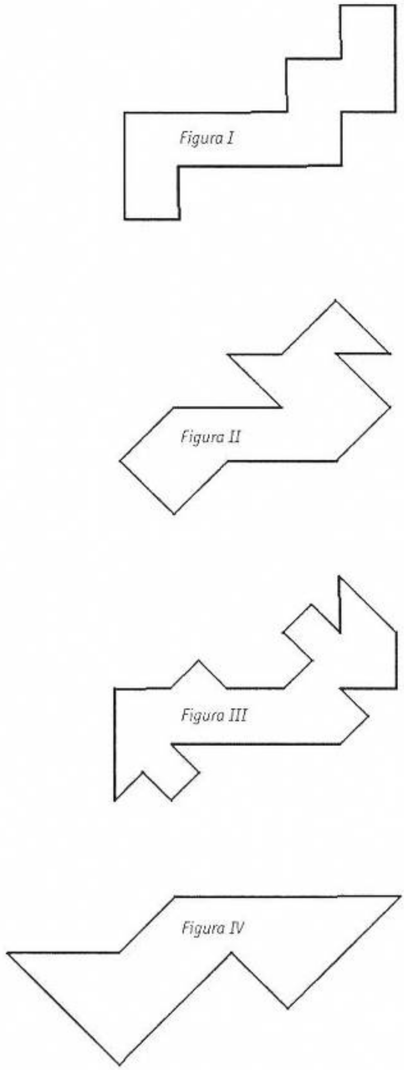


Figura 6.

Se presentan figuras que son embaldosables sólo con algunas de las baldosas dadas. Estas últimas se construyen de manera que permitan calcular las áreas de las figuras dadas con todas las baldosas tomadas como unidad sin necesidad que estas embaldosen la superficie.

Suponemos que para realizar el embaldosado pueden considerar los siguientes procedimientos:

- calcar la figura dada como baldosa y marcarla reiteradamente sobre la figura a embaldosar y
- recortar la figura dada como baldosa y aplicarla sucesivamente, sin que se solapen ni queden espacios.

Ante el interrogante planteado por el docente concluyen que embaldosar una superficie significa cubrirla con otras figuras sin cortarlas, sin que queden huecos ni se produzcan solapamientos.

Los alumnos no evidenciaron dificultad para encontrar las figuras que embaldosan cada una de las superficies y el procedimiento utilizado es el calcado de baldosas.

Puesta en común

Sin dificultad los alumnos organizan la información obtenida en la actividad dada, en una tabla provista por el docente.

Establecen algunas relaciones, advirtiendo que al embaldosar una figura determinada se visualiza el embaldosado con otra u otras de las baldosas dadas (Figura 7).

	C	*T1*	*T2*	*T3*
Figura I	8	32	16	
Figura II		32	16	8
Figura III		32		
Figura IV		36	18	9

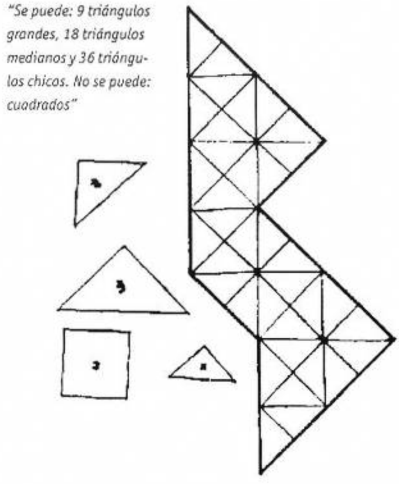


Figura 7.

Actividad 3

Consignas

1) *Establecer la relación existente entre el área de las distintas baldosas.*

2) *Completar la tabla utilizando las relaciones obtenidas.*

3) *Calcular el área de las figuras dadas, teniendo en cuenta las relaciones de la tabla.*

Consideramos que para realizar la tarea, los alumnos pueden:

- obtener algunas relaciones a partir de los embaldosados realizados;
- establecer relaciones entre las baldosas a partir de las observaciones realizadas;
- recortar una baldosa y por cubrimiento lograr otra.

De lo observado en el desarrollo de la actividad podemos clasificar las respuestas en 2 categorías:

- respuestas correctas por división de una baldosa dada y
- respuestas correctas por completamiento de baldosas (Figura 8).

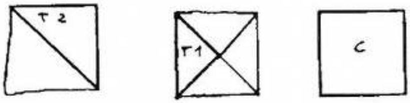


Figura 8.

Los alumnos no tuvieron dificultad para realizar esta actividad y, a partir del conocimiento intuitivo de propiedades geométricas lograron calcular el área de las figuras con las distintas unidades arbitrarias a partir de modificaciones de las baldosas. "Tales modificaciones exigen saber explotar las propiedades geométricas de las figuras propuestas y también poder reconocerlas; por otra parte ellas exigen poder anticipar las consecuencias del embaldosado" (Douady y otros 1988; 53).
Observando las divisiones realizadas en la actividad anterior establecen las relaciones entre ellas y completan la tabla sin dificultad (Figura 7).
Para realizar la consigna *3* utilizan la notación introducida en la actividad 1 sin inconvenientes.

Tercera jornada

Se pretende observar si los alumnos logran identificar el cm^2 con un área y no con la figura cuadrada de 1 cm de lado. Los alumnos trabajan en forma individual, socializando en cada caso los resultados obtenidos.

Actividad 1

Consigna

1) *¿Qué es el cm^2?*

2) *Dibujar 5 figuras distintas que tengan 1 cm^2 de área.*

3) *Dibujar 5 figuras distintas que tengan 2 cm^2 de área.*

4) *Dibujar 5 figuras distintas que tengan 3 cm^2 de área.*

En esta actividad los alumnos pueden utilizar alguno de estos procedimientos:
- responder qué es el área de un cuadrado de 1 cm de lado;
- expresar cuál es el lugar que ocupa un cuadrado de 1 cm de lado
- recortar el cuadrado de 1 cm de lado y armar otra figura, para conseguir distintas figuras de 1 cm^2. Por ejemplo cortar el cuadrado por una base media y armar un rectángulo de $2 \times {}^1/_2$ cm.

Cuestiones observadas

En la respuesta inmediata los alumnos responden correctamente. Consideran que el cm^2 es el lugar que ocupa un cuadrado de 1 cm de lado, no surgiendo otra respuesta.
Los alumnos trabajan en hoja cuadriculada y no manifiestan dificultades para representar las distintas figuras con 1 cm^2 de área, haciendo modificaciones al cuadrado de 1 cm de lado, ya sea contando el número de cuadrados de la hoja que lo forman o quitando una parte del cuadrado de 1 cm de lado o de uno de los cuadrados de la hoja y colocándolo en otro lado, obteniendo una figura distinta pero equivalente en área a la dada (Figura 9).
Aparecen figuras cóncavas y convexas en las modificaciones realizadas.

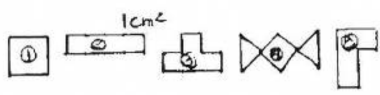


Figura 9.

Observaciones

Al analizar la secuencia realizada observamos que en los puntos 2, 3 y 4 de la actividad de la última jornada los alumnos cuentan el número de cuadraditos de la hoja que forman la figura tanto de 1 cm^2 como de 2 y 3 cm^2 para obtener figuras equivalentes en área.

Decidimos, por ello plantear la misma actividad pero en papel liso.

En este caso las respuestas pueden clasificarse en dos categorías:

- respuestas correctas por considerar al cm^2 representado por el lugar que ocupa un cuadrado de 1 cm de lado o un paralelogramo no cuadrado de base y altura 1 cm (Figura 10);
- respuestas incorrectas por considerar al cm^2 como el lugar que ocupa un polígono cuyos lados tienen una longitud de 1cm (Figura 11).

Figura 10.

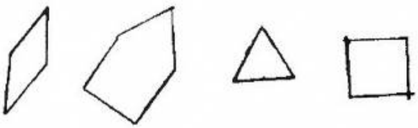


Figura 11.

Segunda parte de la secuencia

Las actividades que se plantean y analizan a continuación se implementaron en el año 2004 en octavo año, con el mismo grupo de alumnos que realizaron la primera parte. Cabe destacar que al grupo que trabajó en el 2003 se incorporaron 4 alumnos provenientes de otros establecimientos escolares.

En la primera parte de este artículo trabajamos la construcción del concepto de área y planteamos para esta segunda etapa la relación área - perímetro.

Primera jornada

El objetivo de las actividades de esta jornada es que los alumnos logren diferenciar las nociones de área y longitud.

En primer lugar se plantea la siguiente actividad, cuyo objetivo es la revisión del concepto de cm^2. Se realiza en forma individual y luego se hace la puesta en común.

Consigna

1) *Dibuja 3 figuras distintas de 1 cm^2 de área.*

En general, los alumnos resuelven la actividad sin dificultad.

Actividad 1

Se organiza la clase en grupos de 3 y 4 alumnos; a cada grupo se le entregan los siguientes materiales: hojas cuadriculadas, goma de pegar, hilo que no se estira.

Consignas

1) *Dibujen 5 figuras distintas de 15 cm^2 de área.*

2) *Pidan por escrito la longitud de hilo necesaria para bordear exactamente cada una de las figuras realizadas y verifiquen si la longitud es la correcta pegando el hilo sobre el borde. Si la longitud no es la correcta realicen nuevamente el pedido y vuelvan a intentarlo.*

3) *Comparen los perímetros de las figuras dibujadas.*

4) *Escriban sus conclusiones y las dificultades encontradas en el papel afiche. Comparen las áreas de las figuras obtenidas. Escriban sus conclusiones.*

Nuestro supuesto es que los alumnos realicen alguno de los siguientes procedimientos en la resolución de la tarea:

- "comparar por superposición de piezas;
- considerar que la unión de las piezas recortadas sin superposición nos da la misma área (concepto de equivalencia de áreas);
- calcular el área de ambas figuras aplicando fórmulas y comparando resultados" (Mántica y otros, 2002; 115).

Se pueden establecer cuatro categorías, en función del análisis de las respuestas de los alumnos respecto de la consigna 4:

- respuestas correctas por considerar que parten de las figuras de 15 cm^2;
- respuestas correctas por contar los cuadraditos en cada figura;
- respuestas correctas por aplicación de fórmulas y
- respuestas incorrectas por aplicación de fórmulas.

Puesta en común

Entre los grupos que utilizaron fórmulas (correcta o incorrectamente) se encuentran los alumnos que provienen de otros establecimientos y que conocen las fórmulas para el cálculo de áreas.

El grupo que resuelve como muestra la figura, luego de la discusión generada comprende que hubo una incorrecta utilización de la fórmula. Un alumno plantea que no se puede aplicar la fórmula porque *"en toda la figura no tiene la misma base y la misma altura, es decir tiene la misma altura pero no tiene la misma base"* (Figura 12). Pero analizando el modo en que algunos grupos realizaron la actividad, contando cuadrados, pueden asegurar que todas las figuras tienen igual área, aunque el perímetro es distinto para cada una de ellas.

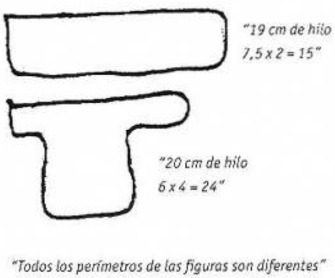


Figura 12.

Actividad 2

Consigna

1) *Rodeen las figuras de igual área y calculen el perímetro de las que tienen igual área* (Figura 13).

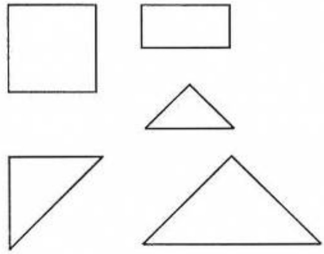


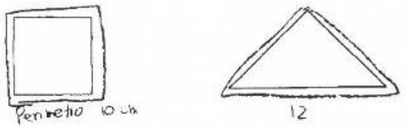
Figura 13.

Nuestro supuesto es que para determinar las figuras de igual área realicen alguno de los siguientes procedimientos:

- cuadricular las figuras con cuadrados de igual área y contar el número de cuadrados que se obtienen en cada una;
- por transformaciones de romper y rehacer, reorganizando las partes de una de ellas para obtener otra y
- elegir una de ellas como unidad e intentar calcular el área de las otras en función de ésta, ya sea por embaldosado o por el método de exhausción por unidades.

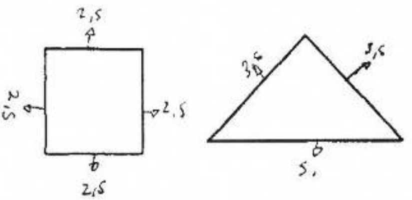
Analizando los trabajos realizados por los alumnos podríamos clasificarlos en las siguientes categorías:

- respuestas correctas, por cuadriculado se obtienen las figuras equivalentes en área;
- respuestas correctas, se obtienen figuras equivalentes en área por transformaciones de romper y rehacer;
- respuestas correctas por embaldosado (Figura 14).
- respuestas incorrectas, aplicando fórmulas, por errores en las mediciones de las dimensiones lineales;
- respuestas incorrectas por errores en la utilización de las fórmulas. Por ejemplo, en el triángulo utilizan base por altura y
- respuestas incorrectas por confundir las nociones de área y perímetro (Figura 15).



"Primero elegí el triángulo más chico como unidad de medida y después vi cuántos entraban en cada figura y así me di cuenta que tienen la misma área"

Figura 14.



"Para mí ninguna tiene igual área porque todos tienen distinta medida"

Figura 15.

Segunda jornada

El objetivo de esta actividad es observar si los alumnos pueden reconocer la independencia de las variaciones del área y del perímetro de una figura dada.

Actividad

Consignas

1) *(Individual) Modificá la figura recibida de manera de obtener otra de menor área y mayor perímetro (Figura 16).*

2) *Reúnanse los compañeros que recibieron originalmente el mismo polígono.*

3) *Peguen en el papel afiche las figuras obtenidas. Discutan si cumplen las condiciones pedidas en la consigna 1 y anoten las conclusiones en el afiche.*

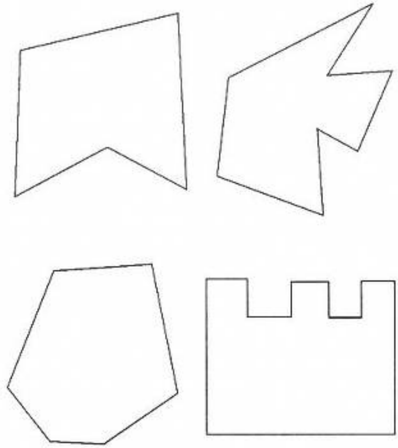


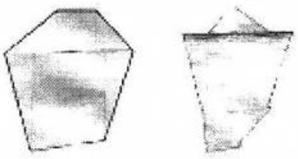
Figura 16.

Nuestro supuesto es que los alumnos realicen alguno de los siguientes procedimientos en la resolución de la tarea:

- "cortar una pieza del borde. Esto asegura la disminución del área pero no siempre el aumento de perímetro; una forma de asegurar lo último es aumentar la irregularidad del borde;
- dibujar una figura incluida en la anterior con borde suficientemente irregular, asegurándose de esta manera la consiga pedida y
- quitar una parte del interior de la figura, que asegura la disminución del área y el aumento de perímetro" (Mántica y otros, 2000; 117).

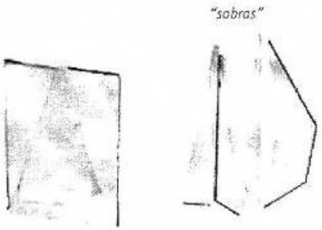
En función de las respuestas de los alumnos se pueden establecer dos categorías:

- respuestas incorrectas; logran modificar el perímetro pero mantienen constante el área (Figura 17);
- respuestas incorrectas; logran disminuir el área, pero no aumentar el perímetro (Figura 18).



"tiene mayor perímetro pero le falta que el área sea menor y es igual a la 1° figura"

Figura 17.



"cumple que tiene menor área pero no tiene mayor perímetro"

Figura 18.

La docente propone entonces estas preguntas:
D: *¿Cómo hacen para que se cumplan las dos condiciones a la vez?*
A: ... (silencio)
D: *¿Cómo hago para disminuir el área?*
A: *Saco un pedazo.*
D: *¿Cómo hago para aumentar el perímetro?*
A: *La cortás y la acomodás de una manera que tenga mayor perímetro.*
D: *¿Cómo?*
A: *Así, ... que quede más larga.* (Indica el modo en la figura que está realizada en el afiche por uno de los grupos.)

Si bien del trabajo en grupo no lograron armar una figura que cumpla con la consigna dada, luego de la discusión con el grupo clase se pudo determinar cuáles son las condiciones para disminuir el área y aumentar el perímetro.
Queremos destacar que los alumnos no utilizaron ninguno de los procedimientos supuestos para la realización de esta tarea. Consideran que para disminuir el área deben cortar una parte; para aumentar el perímetro toman la parte de mayor área y realizan cortes de modo que se obtengan varias figuras y, luego las acomodan de modo que tengan un perímetro mayor que la figura inicial. Para validar esto último realizan medición con regla graduada.

Puesta en común
Al analizar las figuras realizadas por los diferentes grupos los alumnos pueden ver que ninguno logró cumplir la consigna pedida. Se genera un debate conducido por la docente y los estudiantes analizan todas las condiciones. Uno de ellos dice que podría realizarse pero que *"depende de la figura inicial"*; otro responde que *"debería poder hacerse siempre"*.

Conclusión

Sabemos que el proceso de medida es complejo y que para adquirir el concepto de unidad se debe considerar, primero, que una región se compone de subregiones que pueden "reacomodarse" y, segundo que las subregiones que la forman deben tener la misma área y que haciendo uso de la iteración de la subregión es posible asignar un número a una región dada. Coincidimos con del Olmo (1993) que en general, las actividades para trabajar área se suelen limitar a presentar la uni-

dad y a realizar mediciones, sin plantear la necesidad de un intermediario para comparar dos objetos o cuantificar esta comparación.
Consideramos que se deben proponer experiencias que puedan provocar una ruptura entre las imágenes intuitivas y las deducciones lógicas de ciertas propiedades de las que gozan las superficies.
En la implementación de la secuencia completa podemos destacar aspectos positivos y dificultades que hacen a la adquisición del concepto por parte de los alumnos.
Consideraremos las fortalezas que se presentaron en la implementación de la secuencia.

- Los alumnos consideran tanto figuras en 2D como en 3D, cuando se les solicita dibujar superficies.
Esto nos muestra que debemos darles la oportunidad de captar al área como una cualidad de los objetos, descartando el carácter bidimensional de las superficies consideradas, no limitándonos al caso de los polígonos sino trabajando el área en los contextos en que aparece. "La percepción del área puede desarrollarse a partir de la idea de *cubrir objetos*; actividad que también puede realizarse para el caso de recintos no planos" (del Olmo y otros, 1993; 48).

- Cálculo de áreas respecto de unidades no convencionales.
No se presentaron dificultades en las actividades para obtener el área de una figura en función de una unidad dada. Pudieron cortar, plegar, calcar, copiar, transformar, embaldosar ... para realizar dicha tarea. Esto muestra que los alumnos no parecen necesitar las fórmulas para iniciar el cálculo de áreas sino que prefieren utilizar otras estrategias, como cuadricular la figura y contar cuadrados. "Se deben plantear situaciones donde se precise la *búsqueda de un intermediario* para poder comparar figuras [...] Las actividades de *pavimentado* son muy aconsejables y facilitarán, posteriormente, las tareas de aritmetización" (del Olmo y otros, 1993; 63).

Consideraremos las dificultades que se les plantean a los alumnos a la hora de la adquisición del concepto de área.

- Respecto de la unidad de medida.
Las figuras no pavimentadas generan en los alumnos la dificultad de tener que seleccionar la unidad de medida. Evidencian una dificultad mayor para representar figuras de un área determinada si no cuentan con papel cuadriculado. "El grado de éxito con que los niños alcanzan a conceptualizar la definición de áreas en aquellas situaciones en que el espacio no se encuentra *visualmente* recubierto con unidades necesarias es muy inferior al de las situaciones en las que el recubrimiento de la superficie que hay que medir salta a la vista" (Dickson y otros, 1991; 120).

- El contar unidades no enteras.
Contar cuadrados enteros o mitades resulta fácil pero la tarea se complica si se debe considerar cuartos u octavos y, resulta aun más difícil si la unidad es un rectángulo o un triángulo. "Con frecuencia se abusa en el uso de medidas enteras; de esta forma en los problemas suelen obtenerse siempre números enteros para las soluciones y el alumno tiende a pensar que todas las medidas son así" (Chamorro y otros, 1994; 47).

- Confusión área - perímetro.
El que dos figuras tengan la misma área induce a algunos alumnos a creer que tienen el mismo perímetro. Muchas veces los alumnos se dejan llevar por lo perceptual, sin realizar un análisis del concepto interviniente en la situación. "Es muy posible que los alumnos no dispongan de oportunidades suficientes para la exploración práctica de los fundamentos espaciales de estas dos ideas y de las relaciones que las ligan" (Dickson y otros, 1991; 124).
Esta confusión entre perímetro y área es de tal persistencia que, según Chamorro (1995) puede ser considerada como un "obstáculo epistemoló-

gico" que requiere un tratamiento específico.

En el desarrollo de la secuencia observamos que los alumnos se acercan al concepto de área haciendo uso de las aproximaciones que plantea Freudenthal; por ejemplo utilizando el método de exhauscíón por unidades, por transformaciones geométricas, por transformaciones de romper y rehacer, reparto equitativo por cuadriculado, por inclusión y por aplicación de fórmulas midiendo las dimensiones lineales.

En la próxima etapa nos proponemos trabajar la obtención de las fórmulas para el cálculo de áreas de figuras geométricas utilizando transformaciones de romper y rehacer, duplicación de figuras y transformaciones geométricas, como también plantear actividades donde la unidad para medir sea mayor que el área a medir.

Notas

(1) Alumnos de 12-13 años.

(2) El análisis de esta secuencia puede verse en la revista *Educación Matemática*, vol.14, n°1.

(3) El análisis completo de las entrevistas puede verse en la revista *Escrituras*, vol. 5.

Referencias bibliográficas

Chamorro, M. (1995). "Aproximación a la medida de las magnitudes en la enseñanza primaria". En: *UNO. Procedimientos en Matemáticas,* Barcelona, Graó, (3) 31-53.

Chamorro, M.; Belmonte, J. (1994). *El problema de la medida*. Didáctica de las magnitudes lineales. Madrid, Síntesis.

del Olmo, M.; Moreno, M.; Gil, F. (1993). *Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid, Síntesis.

Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona, Labor.

Douady, R.; Perrin, M. (1988). "Investigaciones en didáctica de matemáticas: áreas de superficies planas en CM y 6éme". En: *Hacer Escuela,* Bs.As., Escuela Nueva Soc. Coop. Ltda, (9) 34-60.

Fischbein, E. (1993). "The theory of figural concepts". En: *Educational Studies in Mathematics* (24) 139-162.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Boston, Reidel Publishing Company.

Laborde, C. (1996). "Cabri Geómetra o una nueva relación con la geometría". En: *Investigación y didáctica de las matemática*, Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia.

Mántica, A.; Dal Maso, M.; Götte, M.; Marzioni, A. (2002). "La confusión entre área y perímetro. Análisis de una propuesta áulica". En *Educación Matemática*, 14 (1) 111-119, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Mántica, A.; Dal Maso, M.; Götte, M.; Marzioni, A. (2004). "De la percepción a la interpretación: un camino no siempre exitoso". En: *Escrituras,* 5: 91-101, Santa Fe, UNL.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid, Ediciones Morata.