Razonar y conocer. Aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos

Mabel Panizza, (2005).
Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Reseña: Oscar Vallejos
Universidad Nacional del Litoral, Argentina
ovallejo@unl.edu.ar

El libro que reseñamos muestra las complejidades del campo de investigación de la educación matemática de los últimos tiempos. Al trabajar en una zona de borde y solapamiento disciplinar, la investigación en educación matemática requiere de la convivencia de teorías acerca de la naturaleza del conocimiento matemático, de la naturaleza del aprendizaje, de la naturaleza de la comunicación y de las interacciones sociales y culturales. Esto se vuelve más visible cuando, como en este libro, no se aborda un problema particular sino uno general como el del razonamiento matemático.
El libro se inicia con este párrafo:

El enunciado general de que la enseñanza debe tomar a su cargo el aprendizaje de los alumnos del razonamiento matemático constituye, sin duda, un avance respecto de una tradición educativa que sólo se planteaba como objetivo la enseñanza de contenidos curriculares. Significa el reconocimiento de que aprender a razonar según las reglas legítimas del pensamiento matemático no es algo que se produzca de manera espontánea (Panizza, 2005; 9).

Una vez diferenciados estos dos aspectos del aprendizaje de la matemática (los contenidos y los razonamientos) se abre el difícil problema de establecer las relaciones que esos aspectos mantienen entre sí. Es un topoi en la cultura occidental que el aprendizaje de la matemática dota al aprendiz de formas complejas de razonamiento. Así, podría alentarse la visión de que el razonamiento matemático es un objeto de enseñanza “en sí mismo”. Panizza niega explícitamente esta posibilidad. Esta negativa parece estar motivada por su concepción del razonamiento como aconteciendo (produciéndose) en la intersección de los planos lógico, lógico-semántico, semiótico y psicológico. Ya explicaremos esto pero, antes es importante decir que si bien Panizza reconoce la relación entre el “razonamiento natural” y el razonamiento matemático no parece considerar que el razonamiento matemático (una vez aprendido) mejore el razonamiento natural. Cuando se considera este último aspecto, se hace visible –retomando el topoi clásico– el aporte de la educación matemática a la educación general más allá de la disciplinaria. Tema éste sobre el que los profesores de matemática debieran volver a deliberar.

El plano lógico está vinculado, para la filosofía de la ciencia, con las formas de razonamiento en los procesos de investigación. Como dice Olivé "¿qué tipos de razonamientos se siguen en las ciencias?: inductivo, deductivo, analógico o algún otro tipo" (Olivé, 2000; 29). Desde el punto de vista lógico, el razonamiento matemático puede identificarse con el razonamiento deductivo. Una forma de razonamiento caracterizada, como dice Aliceda (2003), por la certeza y monotonía. La primera propiedad se relaciona con el hecho de que la relación entre premisas y conclusión sea de necesidad (la conclusión se sigue necesariamente de las premisas). La segunda propiedad tiene que ver con que la conclusión establecida por un razonamiento deductivo es no derrotable; esto es, que una vez que un teorema fue probado (deductivamente) no hay dudas de su validez a la luz de la adición de nuevos axiomas o teoremas al sistema. La matemática fue considerada y admirada por expresar idealmente esta forma de razonamiento.

El razonamiento deductivo es, desde el punto de vista lógico, una relación entre enunciados u oraciones. Pero la caracterización tradicional de la lógica como la "ciencia y/o el arte del pensamiento" indica un cariz psicológico. Como dice Alchourrón,

verbos como inferir, argumentar, deducir, etc., designan indudablemente procesos psicológicos que los hombres realizan con frecuencia. A su vez, los sustantivos correspondientes: inferencia, argumento, deducción, etc, y, a pesar de su clara ambigüedad proceso-producto, conservan en su designación la connotación psicológica de los verbos asociados. Es más, si bien en lógica se ha acuñado la expresión "premisa(s)" para indicar los puntos de partida de una inferencia, se sigue usando la expresión "conclusión", con su clara connotación de punto final de un proceso (en este caso psicológico), para referirse a lo que se pretende estar justificado por las premisas en un esquema inferencial (Alchourrón, 1995; 14).

La revolución conceptual de la lógica consistió en abandonar este psicologismo en favor de un enfoque semántico y sintáctico. Incluso, la revolución antipsicologista iniciada por Frege se gesta en la filosofía de la matemática. Sin embargo, la preocupación por el aprendizaje exige describir (explicar y predecir) los procesos psicológicos efectivos de razonamiento realizados por los aprendices. Se abre así a una investigación empírica sobre los procesos de razonamiento y se desarrollan instrumentos metodológicos para hacer visibles esos procesos en los "razonamientos-producto". Como fue visto de manera ejemplar por la Inteligencia Artificial, la investigación sobre los modos efectivos de razonar muestra que la deducción no abarca todo el orbe del razonar ni siquiera en matemática. Como afirma Carnota, razonar "es más próximo a revisar creencias" (1995; 180) y esto vincula el problema del razonamiento con una base de racionalidad como sostiene Panizza.

Es en este telón de problemas de fondo donde adquiere sentido anclar la base del razonamiento en la articulación de la relación entre conocimiento disponible y conocimiento nuevo, tema que abordaremos más adelante.

El plano que llamamos lógico-semántico corresponde al del significado de los términos matemáticos. Este es uno de los problemas más importantes para la filosofía de la ciencia del siglo XX. Para Panizza, el significado no es sólo un problema lógico-semántico sino también psicológico, un aspecto que cobra importancia cuando se mira el proceso constructivo del conocimiento. Este problema del significado de los términos científicos tiene una cuestión adicional para la matemática, y parece estar en la base de la búsqueda de caracterizaciones semióticas. En las ciencias empíricas, sin entrar en detalles teóricos, los términos y expresiones refieren claramente a entidades diferentes de sí. En la matemática no es claro que los términos, expresiones, figuras, diagramas, etcétera, tengan una referencia distinta de sí (cuáles son los objetos referidos). Esto aparece en el libro de Panizza como el problema de la representación. Incluso, aparece tratado con la "noción" de "registro de representación semiótica" desarrollada por Duval. Esta asunción teórica –los diferentes registros de representación semiótica permiten desarrollar ciertos procesos psicológicos de razonamiento– parece sostener la afirmación: "la capacidad de razonar no es independiente de los contenidos matemáticos en juego" (Panizza, 2005; 29). Hay una tensión entre estos supuestos y las particularidades que supone enseñar matemática con diversos registros de representación semiótica porque ello implica que hay que enseñar también las operaciones sobre esos registros: formación, tratamiento y conversión. La atribución de significado por parte del aprendiz a los términos y expresiones matemáticas está encabalgada en esta compleja articulación de lo lógico-semántico, lo psicológico y lo semiótico. Esta articulación oficia a la vez como trampolín para un buen aprendizaje y como su obstáculo más serio.

En cada momento, hay que distinguir entre el conocimiento disciplinar disponible y el conocimiento disponible en (de) un sujeto particular. El sujeto va construyendo nuevo conocimiento para sí; este nuevo conocimiento puede ampliar las fronteras del conocimiento disciplinar (conocimiento nuevo en un sentido fuerte) o puede ser la apropiación (o descubrimiento) del conocimiento ya disponible en la disciplina (conocimiento nuevo para sí propiamente dicho). En general, se asocia la inferencia como acto de ampliación del conocimiento o de obtención de conocimiento nuevo; es así como los procesos de inferencia se consideran centrales en los procesos de aprendizaje. Como dice Panizza: "¿Adónde nos dirigimos? A desarrollar una dimensión de análisis que tenga en cuenta el grado de novedad que representa el conocimiento producido por una inferencia (deductiva o no deductiva) para el sujeto que la realiza" (Panizza, 2005; 35).

La autora recupera en su favor una distinción de Eco entre significación e inferencia: la inferencia siempre aporta novedad (mientras la significación requiere codificación). La consideración clásica de la lógica es que el razonamiento deductivo no amplía el conocimiento; a diferencia del razonamiento inductivo (y el abductivo) que sí lo hace. Panizza cita a Obiols reiterando el tópico clásico de que en el razonamiento deductivo toda la información o el contenido fáctico de la conclusión está contenido al menos implícitamente en las premisas de las que se parten. La autora hace la siguiente afirmación:

Efectivamente, desde el punto de vista de la operación lógica, lo que produce este razonamiento es una extracción de la conclusión. Ahora bien, creemos que hacer una interpretación del razonamiento de un alumno desde esta perspectiva, significa una reducción del razonamiento humano a un cálculo sobre enunciados, lo que excluye el conjunto de asociaciones, cálculos intermedios y anticipaciones previos necesarios para realizar este razonamiento deductivo (Panizza 2005; 36).

Aquí se observa la dificultad señalada por Alchourrón de no distinguir entre lo lógico y lo psicológico. La manera en que el sujeto construye el argumento tiene, como diría Wittgenstein, un interés psicológico y cobra más interés en la medida en que se pretende realizar una acción pedagógica a partir de (o en) esa construcción. Pero no hay que confundir los dos planos; la lógica, en todo caso, no reduce el razonamiento humano a un cálculo porque ése no es su tema.

Panizza explora diferentes problemas vinculados con los razonamientos deductivos y no deductivos (los abductivos, los inductivos y los analógicos) y muestra el uso que hacen de ellos los aprendices. También indica que los profesores deben ser capaces de identificar el razonamiento realizado por los aprendices con el fin de hacer una "intervención" pedagógica de guía y control sobre sus procesos de razonamiento. Aquí es donde se hace visible lo que significa aprender a razonar según "reglas legítimas". Este tópico requiere ser analizado con un utillaje conceptual más preciso.

Una clase de matemática, como quizá cualquier otra, se arma con ejercicios ritualizados que suelen impedir el desarrollo de procesos reflexivos sobre el razonamiento matemático. La puesta en primer plano de que debe enseñarse a razonar como matemático parece exigir articulaciones pedagógicas más enriquecidas. Aquí reside la importancia de ofrecer, como hace este libro, una tipología de formas de razonamiento: el profesor de matemática puede diseñar actividades para favorecer el desarrollo de alguna modalidad específica. Aunque parezca una obviedad, es necesario decir, como lo hace Panizza, que los aprendices razonan "siempre". Es aquí donde se introduce una distinción poco feliz entre razonamiento espontáneo y razonamiento pautado. La distinción intenta captar el modo en que los aprendices razonan cuando la actividad diseñada por el profesor no está dirigida hacia una forma de razonamiento. Panizza dice que el contexto de los razonamientos espontáneos "no está *oficialmente* reconocido como importante" (Panizza, 2005; 94). Pero es claro que este contexto tiene una importancia de primer orden puesto que aquí, cuando el profesor no lo pide, puede verse si el aprendiz razona según las "reglas legítimas." Esto es lo que requiere mayor esfuerzo conceptual para ser tratado.

Panizza reconoce que el razonamiento ocurre en, al menos, dos momentos. Uno es el clásico: cuando realiza la deducción para una demostración. El otro es el que aparece cuando se produce "un conjunto de elecciones y anticipaciones" en el trabajo matemático. Con este segundo aspecto, Panizza intenta iluminar una región de la actividad matemática que Roberto Torretti enuncia con su habitual claridad y elegancia: "Como suele ocurrir en matemática, el genio del autor se manifiesta principalmente, no en la derivación misma de los teoremas –tarea relativamente fácil una vez bien planteada– sino en la selección de los conceptos apropiados para formularlos" (Torretti, 1998; 160-161).

Estas tareas del trabajo matemático, como sostiene Panizza, no se aprenden espontáneamente y por ello deben formar parte de la "responsabilidad didáctica" del profesor de matemática. Por otra parte, el reconocimiento del razonamiento matemático anterior a la demostración muestra la variedad de las formas no-deductivas de razonamiento presentes en la actividad matemática, sobre las que el profesor y el aprendiz deben trabajar. Pero estos dos lugares o momentos de ocurrencia del razonamiento matemático se comportan de maneras diferentes. Las "reglas legítimas" parecen estar establecidas para el razonar demostrativo deductivo. La distinción clásica de la filosofía de la ciencia, entre contexto de descubrimiento y contexto de justificación ilumina el hecho de que sólo sobre la justificación (demostración) hay "reglas legítimas" (lógicas). El contexto de descubrimiento es más difuso en cuanto a qué se considera legítimo. Esta distinción, aunque fuertemente cuestionada en la filosofía actual de la ciencia, deja ver que el aprender (o hacer) matemática (o cualquier ciencia) presenta esos dos momentos (con el problema conceptual de establecer sus relaciones). El libro de Panizza no es lo suficientemente claro en este sentido. El razonar previo a la demostración corresponde al contexto de descubrimiento y la demostración según reglas legítimas al contexto de justificación. El razonar previo a la demostración está menos explicitado en el trabajo matemático que las reglas del razonar demostrativo; pero, esta zona del razonar es sustantiva para el aprendiz en su formación dentro de la matemática. Mario Otero y Gonzalo Tornaría (2003) realizaron una encuesta a matemáticos del Uruguay sobre cuestiones referidas a la práctica matemática que incluye preguntas sobre la demostración, las conjeturas, las definiciones y sus usos, y las opiniones sobre el "rigor matemático", entre otras. La encuesta muestra que la zona del razonamiento más allá de la demostración está poco explicitada y existen menos regulaciones que en el caso de la demostración. Panizza hace visible la necesidad de más investigación en este campo.

El libro incluye acertadamente un relevamiento de los fenómenos que interfieren en los procesos de razonamiento y termina con "conclusiones de interés para la enseñanza". En este capítulo se recogen algunas de las principales afirmaciones que pueden tornarse fuente de reflexión para el trabajo de enseñanza de la matemática. El libro cierra así, con la exigencia que parece estar en la base de las investigaciones en educación en nuestro país: no sólo hay una pretensión de comprender el problema que se investiga (proyecto de comprensión) sino un compromiso de elaborar propuestas para la transformación de la educación (proyecto de reforma o transformación).

Referencias bibliográficas

Alchourrón, C. (1995). "Concepciones de la lógica". En Alchourrón, C.; J. Méndez y R. Orayen. (ed.) *Lógica*, Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, Madrid, Trotta, pp.11-47.

Aliceda, A. (2003). Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A structural approach. *Synthese*, n° 134, vol. 1-2, Kluwer Academic Publishers, pp. 24-44. Volumen dedicado al tema de Lógica y razonamiento matemático.

Carnota, R. (1995). "Lógica e inteligencia artificial". En Alchourrón, C.; J. Méndez y R. Orayen. (ed.) *Lógica*, Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, Madrid, Trotta, pp.143-183.

Olivé, L. (2000). *El bien, el mal y la razón.* Facetas de la ciencia y de la tecnología, México, UNAM/ Paidós.

Tornaría, G. y M. Otero (2003). "Encuesta de opinión sobre algunas preguntas significativas respecto a la práctica matemática". En: Otero, M. *Sobre ciertos avatares de las llamadas matemáticas puras*, Cuadernos de Historia de la Ciencia, Zaragoza, Universidad de Zaragoza, pp.141-151.

Torretti, R. (1998). *El paraíso de Cantor*. La tradición conjuntista en la filosofía matemática. Santiago de Chile, Editorial Universitaria.