Carmen Sessa (*) ***y Verónica Cambriglia*** (**)
(*) *Facultad de Cs. Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. pirata@dm.uba.ar*
(**) *IDH, Universidad Nacional de General Sarmiento. vcambrig@ungs.edu.ar*

La validación de procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones

Resumen

En este trabajo analizamos ciertos aspectos del tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales en los libros de texto argentinos. Nuestra atención está puesta en el papel que juegan las propiedades aritméticas y los gráficos cartesianos en la explicación y validación de los métodos algebraicos de resolución de ecuaciones. Se analiza un episodio de un texto en particular, en el cual se presentan propiedades de las operaciones aritméticas como marco explicativo de la resolución algebraica de los sistemas. Mostramos cómo, más que hacer aparecer los elementos de ruptura que traen consigo los objetos algebraicos, éstos se presentan en continuidad con el tratamiento aritmético. Se estudia también el papel que juega la resolución por gráficos cartesianos en el tratamiento de un sistema con infinitas soluciones.

Palabras claves: álgebra, validación, sistemas de ecuaciones, libros de texto.
Keywords: *algebra, validation, linear simultaneous equations, textbooks.*

Abstract

In this paper we analyse certain aspects of the treatment of linear simultaneous equations in Argentinean textbooks. We focus on the role played by arithmetic properties and Cartesian graphs in the explanations and validations of the algebraic methods used to solve equations. An episode from a particular textbook is analysed, in which the arithmetic properties are presented as an explicative framework for the algebraic resolution of simultaneous equations. We show how the algebraic elements are presented as a continuum with the arithmetic treatment instead of bringing forth the elements of rupture brought by them. We also study the role played by the graphical resolution in the treatment of a linear simultaneous equation with infinite solutions.

1. Antecedentes

Este estudio[1] se inscribe dentro de un trabajo que nuestro equipo viene desarrollando desde hace varios años, sobre las condiciones de enseñanza y aprendizaje del álgebra elemental. En el transcurso de nuestra investigación, y con el aporte teórico de numerosos investigadores en este campo (entre ellos, citamos fundamentalmente a Y. Chevallard, (1985 y 1989); B. Grugeon, (1995); G. Vergnaud, (1988); C. Kieran, (1989 y 1992), llegamos a una caracterización del funcionamiento del álgebra elemental en nuestro sistema educativo que revela un empobrecimiento de los sentidos que construyen los alumnos de los objetos algebraicos, en particular de las ecuaciones y de las letras que aparecen en su escritura.
Una primera indagación, realizada en 1994, con alumnos de 12-13 años nos permitió concluir que, a partir de las tareas que los estudiantes deben resolver referidas a ecuaciones con una variable, ellos "elaboran una concepción de las letras como incógnitas y de las ecuaciones como igualdades numéricas, con números desconocidos pero determinados" (cf., M. Panizza, *et al.*, 1996). Una indagación posterior con alumnos de 15-16 años, que ya habían estudiado sistemas de ecuaciones lineales nos permitió arribar a que, coherente con dicha concepción de las letras y las ecuaciones, la ecuación lineal con dos variables no es reconocida por los alumnos como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números. Cuando aparece en el contexto de los sistemas lineales, ellos adaptan bien la concepción de la letra como incógnita a la resolución de sistemas con solución única (la mayoría de los sistemas que se les presentan son de este tipo): antes se trataba de develar la x, ahora habrá que develar la x y la y. Por otra parte, cualquiera haya sido el trabajo realizado en torno a la "ecuación de la recta", éste no parece suficiente para que los alumnos puedan establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente. (cf., M- Panizza, *et al.*, 1999).

2. Delimitación del nuestro estudio actual

Los resultados que hemos reseñado nos llevaron a estudiar ciertos aspectos de las propuestas editoriales vigentes en nuestro país, en lo que refiere a los sistemas de ecuaciones lineales. Este trabajo cobra especial relevancia cuando se piensa en la influencia de los libros de texto en las decisiones didácticas de un profesor. Nos ubicamos en una posición según la cual el libro de texto se concibe como una de las fuentes de elaboración del discurso docente[2], en particular de los argumentos que permiten validar los procedimientos, reglas, técnicas, etc., que se juegan en la clase.
En este artículo caracterizaremos ciertos fenómenos que se inscriben en la compleja relación entre el marco aritmético, el algebraico y los gráficos cartesianos, que identificamos en los libros de texto cuando intentan *explicar y/o validar* los procedimientos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Específicamente, nuestro análisis pretende brindar aportes para el estudio de las siguientes cuestiones:
- ¿qué papel juegan los gráficos cartesianos en la validación de los procedimientos algebraicos de resolución: soporte de la validación, ilustración que acompaña la validación, información complementaria o resolución en otro registro?
- ¿qué papel juegan las propiedades de las operaciones aritméticas en esta validación? ¿cómo se extiende su utilización a los sistemas de ecuaciones?

Tres marcos diferentes, en el sentido de R. Douady (1984), se ponen en juego en la resolución de un sistema: el algebraico, el aritmético y el geométrico, con registros de representación semiótica diferentes. El estudio de los libros de texto que presentamos en este artículo tiene por objeto comprender cómo es que se configura la validación del procedimiento algebraico de resolución de sistemas de ecuaciones en ese "juego de marcos".

3. Los elementos teóricos que consideramos en nuestro análisis

Mencionamos anteriormente a varios autores que contribuyeron a la construcción de un marco general para nuestro proyecto global de estudio sobre la problemática didáctica del álgebra elemental. Si bien es este marco general el que nos ha permitido la identificación de ciertos fenómenos, la selección de aspectos teóricos relevantes para estudiarlos se ve condicionada por el impacto de la porción de realidad que tenemos delante. En este sentido, el análisis que resulta del aporte de los elementos teóricos seleccionados tiene su referencia en el complejo estímulo que produce lo observado en la totalidad de los conocimientos teóricos del observador(3). Es en esta línea que nuestro estudio de ciertos pasajes de los libros de texto nos llevó a revisar, dentro de las producciones en didáctica del álgebra, ciertas nociones teóricas específicas que resultaron fundamentales para "leer" los episodios sobre los que nos detendremos en este artículo:

a) La complejidad de la relación aritmética-álgebra. Varios investigadores, (mencionamos principalmente a Y. Chevallard, (1985) y G. Vergnaud, et al., (1988)) estudian la complejidad del proceso de pasaje de la aritmética al álgebra, que comporta tanto filiaciones entre ambas como elementos fuertes de ruptura. En relación con las filiaciones Y. Chevallard ubica al álgebra como una herramienta de estudio de lo numérico, y al mismo tiempo señala que para estudiar esa herramienta –el álgebra como objeto– lo numérico se transforma en un instrumento eficaz. Nuestro estudio sobre el tratamiento de los sistemas de ecuaciones nos llevará a analizar los alcances de lo numérico para validar ciertos procedimientos algebraicos.

b) Las leyes de tratamiento en el registro algebraico y su relación con otros registros de representación. Según R. Duval la comprensión conceptual está íntimamente ligada con la posibilidad de movilización y de articulación entre diferentes registros de representación semiótica (en matemática, p. ej.: el lenguaje natural, las escrituras algebraicas, las escrituras numéricas, los gráficos cartesianos, los dibujos de objetos geométricos, etc.) (R. Duval, 1993). La presente indagación nos llevará a preguntarnos acerca de la complejidad de esta articulación entre registros cuando lo que está en juego es la comprensión conceptual de un procedimiento de resolución.

c) El concepto de denotación. El término denotación fue acuñado por G. Frege (1892): toda expresión algebraica denota una función (para cada valor de la variable se obtiene un número que es la evaluación de la expresión para esos valores) mientras que una ecuación o un sistema de ecuaciones denota una función booleana (para cada valor de las variables en juego, se tiene una proposición de la cual se puede decir si es verdadera o falsa, el conjunto solución de la ecuación es el conjunto formados por aquellos valores que dan una proposición verdadera). Por ejemplo, las expresiones 4, 2+2 y 2^2 tienen la misma denotación, como así también las expresiones "$(x - y)(x + y)$" y "$(x^2 - y^2)$" y las ecuaciones "$2x+3=7$" y "$2x = 4$".

Geco (1997) señala que lo que falla fundamentalmente en los alumnos con dificultad en álgebra es que no tienen en cuenta la denotación de los objetos algebraicos que manipulan y que en particular desconocen que al trabajar con expresiones algebraicas o con ecuaciones es preciso conservar dicha denotación. J.P. Drouhard (1992), describe como "autómata formal" a un alumno que no tiene en cuenta, cuando manipula las expresiones algebraicas del álgebra elemental, que al transformar una expresión debe obtener una equivalente(4). La validación del resultado de la manipulación no se plantea en términos de la equivalencia de las escrituras obtenidas, sino ante todo en términos de conformidad con reglas y procedimientos (por ejemplo "lo que está restando pasa sumando")[5].

Modificar el sentido conservando la denotación es característico del trabajo algebraico y lo que le otorga su potencia: manipulando la escritura de una expresión se puede leer diferente información. Por ejemplo las expresiones:

"$(x - 1)(x - 5)$" y "$(x - 3)^2 - 4$", son equivalentes y desde el punto de vista de Frege denotan la misma función cuadrática, pero portan diferentes sentidos: la primera "muestra" los ceros de esta función (o las raíces de este polinomio) mientras que la segunda permite identificar rápidamente el eje de simetría y el vértice de la parábola que corresponde al gráfico de la función.

La noción de ecuaciones equivalentes se extiende naturalmente a los sistemas de ecuaciones. ¿Cómo interviene esta noción en la resolución de un sistema? En los pasos intermedios, controlar que se ha transformado el sistema en otro equivalente no puede pasar por verificar la igualdad de los respectivos conjuntos solución, ya que este conjunto no se conoce aún[6], lo que hay que controlar entonces es que las transformaciones efectuadas no modificaron el conjunto solución, cualquiera que él sea. Si bien el discurso explicativo de este hecho se vuelve más tedioso para el caso de los sistemas de ecuaciones, los conocimientos necesarios para garantizar la equivalencia se ubican entre las propiedades de las operaciones numéricas y la igualdad, como ocurre también en el caso de una sola ecuación.

Nos parece importante señalar que a pesar de esta aparente continuidad entre los objetos "ecuación" y "sistema de ecuaciones" las transformaciones necesarias para resolver un sistema no se pueden pensar como una mera extensión de aquellas necesarias para resolver una ecuación.

En el ámbito escolar es frecuente la omisión de la noción de equivalencia en el tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales. Nos preguntamos cómo puede operar esta omisión en la comprensión del objeto sistema de ecuaciones soslayando las rupturas que conlleva. En particular nos interesa analizar cuál es la influencia que los libros de texto juegan en esta omisión del sistema didáctico.

4. Nuestra búsqueda en los textos

Para nuestro estudio comenzamos con la selección de tres libros de texto de mucha circulación en nuestro medio. Dos de ellos corresponden al curso de tercer año de la escuela Secundaria (décimo año de escolaridad, alumnos de 14-15 años) y el otro corresponde al noveno año (alumnos de 13-14 años)[7]. En todos los casos los alumnos ya han pasado en años anteriores por el aprendizaje de las ecuaciones lineales con una incógnita.

Libro 1

En este libro se consideran solamente los sistemas de dos ecuaciones y se presenta un único método algebraico de resolución que equivale a una versión escolar del método de determinantes.

Se comienza trabajando con un problema en contexto que se modeliza con dos ecuaciones en x e y. El contexto del problema asegura la existencia de solución para x e y; en ese sentido permite tratar las ecuaciones como si fueran igualdades numéricas, con algunos tramos aún no conocidos. Luego de una manipulación (multiplicar cada ecuación por un número, restar entre sí dos ecuaciones de manera de obtener ecuaciones con una sola variable, etc.), el autor arriba a una expresión para x y otra para y en términos de cocientes construidos con los coeficientes de las ecuaciones originales. No se justifica por qué esta manipulación permite obtener las soluciones buscadas. Tampoco se reemplazan los valores obtenidos en la ecuaciones primitivas[8].

La misma manipulación se efectúa luego sobre un sistema genérico, sin advertir al lector que esta acción es válida solamente para sistemas con solución única[9]. Análogamente a lo realizado en el ejemplo, no se justifica la manipulación efectuada.

A partir de aquí, el trabajo matemático que se deja al alumno con relación a los sistemas de ecuaciones, se limita a la utilización de las fórmulas que expresan los pares solución en función de los coeficientes de las ecuaciones.

Hay varios asuntos que nos parece importante señalar. Por un lado, el libro evade el planteo respecto de la exhaustividad del procedimiento propuesto que ha quedado subsumido en la fórmula. Por otro lado, tampoco aborda la generalidad de dicho procedimiento como bien adaptado o no a la resolución de cualquier sistema de ecuaciones.

En síntesis, se han hecho varias opciones didáctica: por un lado se ha simplificado el tratamiento con la reducción del objeto que ello conlleva[10]; por otro, no se ha considerado a la validación de los procedimientos, en tanto procedimientos generales, como un aspecto importante del trabajo matemático en el aula.

Libro 2

En este libro se comienza definiendo la noción de sistemas equivalentes: son aquellos que tienen el mismo conjunto solución. Sin embargo, en los diferentes procedimientos de resolución presentados (por igualación y por sustitución) se opera reduciendo el sistema/dato rápidamente a una sola ecuación. La conservación del conjunto solución resulta un concepto inaplicable para justificar este tipo de transformación como se verá más en detalle al analizar el libro tres.

Los distintos métodos de resolución se presentan más bien como pasos a realizar que al final proporcionan la solución. El control del procedimiento se efectúa una vez finalizado el proceso, comprobando que los números obtenidos son solución del sistema. En la nota al pie 10 se analizaron ya los límites de este tipo de validación, agregamos ahora que este tipo de justificación del procedimiento por comprobación de las soluciones es aplicable solamente a los sistemas determinados.

A diferencia del libro 1, en este libro sí se presentan sistemas con ninguna solución y con infinitas soluciones y se propone para ellos una resolución gráfica. No se hace ninguna mención de qué pasaría con los métodos algebraicos aplicados a estos sistemas. Consideramos que tal omisión podría llevar al lector a asociar dichos métodos con los sistemas con única solución, restricción que reduciría considerablemente el dominio de aplicabilidad de los métodos algebraicos. Paradójicamente, habría que saber de antemano si el sistema tiene única solución para poder hallarla a partir de un trabajo algebraico.

La decisión didáctica de desvincular del tratamiento algebraico a los sistemas indeterminados o incompatibles podría estar condicionada por la omisión[11] de la noción de sistemas equivalente durante el tratamiento de los sistemas determinados. Por otro lado, el registro de representación gráfica parece ser bien adaptado para poder expresar las soluciones de un sistema indeterminado: el conjunto solución, aunque formado por infinitos elementos, aparece representado por un único objeto, la recta.

En síntesis, en este segundo libro el objeto sistema de ecuaciones no se ha reducido solamente a los sistemas con solución única. Sin embargo, se ha limitado la potencia del tratamiento algebraico como herramienta para abordar la resolución de cualquier sistema.

Libro 3

En este libro se intenta una validación de los pasos en los procedimientos algebraicos de resolución, y se tratan los casos infinitas soluciones y ninguna solución, algebraica y gráficamente.

Es sobre estos asuntos que vamos a profundizar nuestro análisis.

Aritmética y álgebra

Luego de estudiar las funciones lineales y su representación gráfica se aborda el análisis de los sistemas de ecuaciones lineales a partir de un problema de encuentro. El episodio que analizaremos seguidamente corresponde al segundo problema presentado (ver Figura 1):

Haciendo memoria

$$\begin{array}{c} a = b \\ \underline{\;c = d\;} \\ a - c = b - d \end{array}$$

Dos problemas más

a) Dos amigos van a desayunar juntos, piden dos cafés y un alfajor para uno de ellos. Junto con el pedido les entregan la cuenta: \$ 6. Luego piden otros dos cafés y al traer la nueva cuenta el mozo les informa que en la anterior les había cobrado un alfajor de más y que se lo descuenta en esta última, por lo que ahora deben pagar \$ 3. ¿Cuánto gastó cada uno?

$$\begin{cases} 2c + 2a = 6 \\ 2c - \;\; a = 3 \end{cases}$$

Si restamos ambas igualdades tendremos:

$$\begin{array}{r} 2c + 2a = 6 \\ - \; \underline{2c - \;\; a = 3} \\ 3a = 3 \end{array}$$

entonces un alfajor cuesta 1\$.

Ahora será muy fácil averiguar el precio del café:

$$2c - a = 3$$

$$2c - 1 = 3$$

$c = \frac{4}{2}$. Entonces el café cuesta \$ 2.

Figura 1.

Observemos el recuadro a la izquierda que es presentado acompañando los pasos algebraicos de la resolución del sistema.

Al poner a la cabeza del recuadro "Haciendo memoria" se podría estar apelando a considerar esta propiedad –restando miembro a miembro dos igualdades se obtiene una igualdad– como propiedad de la igualdad de números. Cabe aclarar que si bien en términos declarativos es un conocimiento que los alumnos podrían reconocer a partir del trabajo aritmético de la escolaridad básica, es difícil pensar que la misma se haya puesto en juego al abordar tareas en el campo numérico. Muy probablemente, la primera "aparición" de esta propiedad haya sido durante la resolución de las ecuaciones con una variable.

Nos preguntamos cuál es la relación que se quiere establecer entre el recuadro de la izquierda y la resolución de la derecha. ¿Es acaso esta propiedad enunciada el recurso utilizado para justificar el primer paso del procedimiento?

Se imbrican aquí ciertos aspectos de la complejidad del trabajo algebraico con relación a la variedad de usos e interpretaciones que la letra puede tener. En cada una de las dos ecuaciones del sistema las letras pueden ser interpretadas:

- como números fijos pero desconocidos;
- como variables ligadas a una condición y, por

ello, representando un determinado conjunto (infinito) de pares de números : las soluciones de la ecuación;
- como variables libres, aceptando que para ciertos valores se obtendrá una igualdad numérica verdadera y para otros una falsa.

Nuestras investigaciones previas nos han advertido acerca del privilegio que la escuela otorga a la primera interpretación. Problemas como este, donde el contexto de precios permite pensar en números dados aunque no conocidos, son usuales en el tratamiento escolar de los sistemas.
Ahora bien, también hay letras en el recuadro de la izquierda que parecen representar a números generales, ya que estamos considerando que se trata de enunciados de leyes sobre los números y las operaciones. La ausencia de un discurso que acompañe y que señale las diferencias de sentido en la utilización de las letras, delega en los alumnos la tarea de interpretar el uso que el libro está haciendo. La escuela tradicionalmente enfrenta a los alumnos con diferentes objetos que involucran expresiones literales –por ejemplo: ecuaciones, leyes generales sobre los números, funciones, objetos geométricos genéricos (puntos, rectas, étc.), fórmulas para calcular distintas magnitudes (superficie, perímetro)– sin contemplar un espacio de reflexión acerca de la variedad de significados posibles para las letras.[12]
A la complejidad señalada respecto de los usos e interpretaciones de las letras, se agrega la (complejidad) que introducen los límites de las extensiones de propiedades del contexto numérico al contexto algebraico. En el terreno de lo numérico, restando miembro a miembro dos igualdades, se obtiene otra igualdad. Si se partió de dos proposiciones verdaderas se obtiene otra verdadera. En el terreno del álgebra, restando miembro a miembro dos ecuaciones, se obtiene una ecuación cuyo conjunto no tiene por qué coincidir con el conjunto solución de cada una de las dos ecuaciones primitivas, o de ambas consideradas en conjunto. Analicemos este hecho sobre distintos ejemplos de ecuaciones con una variable:

$x + 5 = 6$ **$x + 2 = 4$**	Son dos ecuaciones con solución única pero diferente, al restarlas miembro a miembro obtenemos una ecuación sin solución
$2x + 5 = 6$ **$x + 2 = 6$**	Son dos ecuaciones con solución única pero diferente, al restarlas miembro a miembro obtenemos otra ecuación con una nueva solución.
$x + 5 = 6$ **$x + 2 =3$**	Son dos ecuaciones con la misma solución única, al restarlas miembro a miembro obtenemos una ecuación con infinitas soluciones.
$2x + 5 = 7$ **$x + 2 = 3$**	Son dos ecuaciones con la misma solución única, al restarlas miembro a miembro obtenemos una tercera ecuación con la misma solución única.

Esta variedad de ejemplos nos permite comprender mejor que la propiedad invocada en el recuadro de la izquierda del texto necesita un discurso específico para poder ser instrumental en el trabajo algebraico. Lo único que puede asegurarse es que un número (o par o n-upla de números) que sea solución de dos ecuaciones, será también solución de la ecuación que se obtiene restando miembro a miembro.
En el caso de un sistema de ecuaciones, como es el que nos ocupa, restando miembro a miembro las dos ecuaciones de un sistema se obtiene una tercer ecuación que denota una función booleana que en general difiere de las tres funciones booleanas que se pueden asociar al sistema (tanto las que corresponden al conjunto solución de cada ecuación como la definida por el propio sistema). El conjunto solución de la ecuación resultante contiene al conjunto solución del sistema pero en general también muchos otros elementos. En este sentido, el nuevo objeto (la ecuación "resta") no permite caracterizar el conjunto solución del sistema.
Analicemos sobre algunos ejemplos de sistemas 2x2 lo que acabamos de señalar.

$\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ x + y = 6 \end{cases}$	Es un sistema sin solución, si restamos miembro a miembro, obtenemos una ecuación con infinitos pares como solución.
$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + y = 5 \end{cases}$	Es un sistema sin solución, si restamos miembro a miembro, obtenemos una ecuación sin solución.
$\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ x + y = 5 \end{cases}$	Es un sistema con infinitas soluciones (los pares de la forma (t, 5-t)), si restamos miembro a miembro, obtenemos una ecuación con el mismo conjunto solución que el sistema. En este caso las dos ecuaciones que conforman el sistema, el sistema mismo y la ecuación resta son cuatro objetos algebraicos que denotan la misma función booleana.
$\begin{cases} 2x + y = 10 + x \\ x = 10 - y \end{cases}$	Es un sistema con infinitas soluciones, si restamos miembro a miembro, obtenemos una ecuación cuyo conjunto solución son todos los pares de números.
$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$	Es un sistema cuya única solución es el par (7, -1), si restamos miembro a miembro, obtenemos una ecuación con infinitos pares como solución, uno de ellos el par (7, -1).

En el último de los ejemplos considerados, la ecuación $y = -1$ que se obtiene al restar, no impone ninguna condición sobre la variable x, y por esa misma razón, por resultar una ecuación donde aparece solamente la variable y, permite inferir el valor que obligatoriamente deberá tomar y en todo par que sea solución de esta tercera ecuación.

En el ejemplo del texto que hemos analizado, similar a este último, tampoco se conserva la denotación del sistema de ecuaciones al restar miembro a miembro y no hay ninguna marca en el texto que prevenga sobre esto. La expresión obtenida $3a = 3$ es considerada no ya como ecuación en dos variables sino como ecuación en una variable, con solución única $a = 1$. En el contexto del problema el texto aborda con naturalidad el "cálculo" de la variable c.

En otro pasaje del texto, otro sistema con solución única es tratado de manera similar, pero apelando ahora a la propiedad transitiva de la igualdad de números (ver Figura 2).

Volvamos a la situación:

$$\begin{cases} d = 20\,t + 200 \\ d = 30\,t \end{cases}$$

Lo más inmediato para resolver el problema es:

$$20\,t + 200 = 30\,t$$
$$200 = 30\,t - 20\,t$$
$$20 = t$$

Haciendo memoria

Si a = b y a = c, entonces b = c.

Figura 2.

Nuevamente se presenta una propiedad de la igualdad entre números, para ser "aplicada" a las ecuaciones. La complejidad que reviste esta "aplicación" es similar a la que estudiamos en los ejemplos de la tabla de la página anterior (solamente la situación de la tercera fila no puede lograrse en este caso).

Todo el análisis que hemos desarrollado de estos episodios del libro, está soportado sobre la consideración de las identidades de los recuadros en

tanto propiedades de la igualdad de números. Es posible establecer otra interpretación: que se esté apelando a propiedades puestas en juego durante el trabajo con ecuaciones con una variable. En relación con el primer recuadro analizado habría que aceptar que a, b, c y d representan expresiones algebraicas, y por lo tanto los dos primeros renglones representan ecuaciones. Ahora bien, al restar a cada lado, resultará una tercera ecuación que, como acabamos de ver, no guarda en principio relación alguna con las dos primeras. Solamente en el caso particular en que c y d sean dos expresiones algebraicas equivalentes (de lo cual resultaría que todos los números reales son solución de la ecuación $c = d$[13]), la ecuación:
$a - c = b - d$, resultará equivalente a la primera dada ($a = b$). En el trabajo real del aula, al resolver ecuaciones con una variable, esta última propiedad se suele poner en juego restando a ambos lados de una ecuación un mismo número o una misma expresión algebraica (en términos de lo que se enuncia en el recuadro correspondería a considerar $c = c$ como segunda igualdad). Sin embargo, en la escritura del recuadro no hay ninguna pista que lleve a pensar que la segunda igualdad es de una naturaleza diferente a la primera. En este sentido, esta segunda interpretación que hacemos acerca de la posible naturaleza de los objetos en el recuadro conllevaría una carga de implícitos aún mayor que la que hemos analizado anteriormente.

Álgebra y gráficos cartesianos.

Analicemos ahora otro episodio donde se presenta un sistema con infinitas soluciones:

Resolvamos juntos este sencillo sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6x + 2y = 4 & \text{A} \\ y = -3x + 2 & \text{B} \end{cases}$$

Aquí lo más rápido parece ser:

$$6x + 2(-3x + 2) = 4$$

$$6x - 6x + 4 = 4$$

$$0 + 4 = 4$$

¡4 = 4! ¡Vaya novedad!

¿Y cuánto vale ***x***? ¡Se nos perdió por el camino!

¿Cómo haremos para saber su valor?

Los gráficos siempre nos ayudaron a pensar. ¡Volvamos a intentarlo!

Representaremos $6x + 2y = 4$ e $y = -3x + 2$

Figura 3.

El algoritmo de resolución conduce a la escritura final "4 = 4", que ha perdido gran parte de la información inicial, ante la ausencia de todo tipo de cuantificadores explícitos o implícitos.

Hay un llamado de atención por haber "perdido la variable x", aunque nunca antes se había hecho ninguna mención a la "pérdida de la variable y", siendo que la variable y había desaparecido en el primer paso en cada una de las resoluciones presentadas antes.

Los elementos desplegados hasta este momento en el libro no le permiten estructurar ninguna explicación de lo sucedido al intentar resolver este sistema: se realizaron operaciones aritméticamente correctas[14], pero no se llegó a la solución; no hay elementos discursivos que puedan dar una interpretación a la expresión que se obtuvo: "4 = 4".

Para poder interpretar este resultado como una información, y no como una pérdida de información, parece necesario conservar dos ecuaciones durante las distintas etapas de la resolución, y hacer explícito que se están considerando sistemas equivalentes en cada etapa. En ese caso, que "4 = 4" resulte una de las dos ecuaciones en alguna etapa, nos informa que el sistema tiene las mismas soluciones que la otra ecuación.

Ante la ausencia de esos elementos, el libro hace la opción de pasar al registro de gráficos cartesianos. A continuación del pasaje que hemos copiado más arriba, aparece un dibujo en dos ejes cartesianos donde se "ve" que las rectas asociadas a ambas ecuaciones son la misma. Se retorna entonces el trabajo en el registro algebraico y se enuncia "la igualdad a la que llegamos tratando de resolver (4 = 4) es verdadera independientemente del valor que tome x". Y entonces se le asocia una "leyenda" a esta igualdad que se considera como el estado final en el procedimiento algebraico de resolución: "el sistema tiene infinitas soluciones".

No se observa ningún intento de explicación de la resolución algebraica sino solamente una interpretación del estado final "4 = 4". Sin embargo, dado cualquier sistema, aún los de solución única, se pueden realizar transformaciones aquí y allá, sin equivocarse y usando operaciones permitidas aritméticamente como las que hemos visto en los recuadros, para arribar a expresiones del tipo "4 = 4" o "x = x"[15]. Hay entonces un riesgo en asignar significados a estas últimas expresiones sin controlar si el proceso por el cual se arribó a ellas permitió conservar la denotación del sistema.

Se ha apelado en el libro a dos registros de representación diferentes, pero con una articulación débil entre ambos, el procedimiento algebraico de resolución de sistemas no tiene correlato en el registro gráfico, sólo lo tienen su estado inicial [el sistema dato] y el estado final, donde la información que proviene del registro gráfico se traslada para dar significado al estado final en el registro algebraico. Observemos que, después de hacer los dibujos de cada recta, la resolución gráfica de un sistema consiste en "mirar en el dibujo" cuál es la intersección; no hay más tratamiento de la información que la traducción al registro gráfico de cada uno de los datos de entrada (las ecuaciones). Es el tratamiento en el registro algebraico el que no puede significarse desde la resolución gráfica, y queda entonces en la más completa oscuridad. En ese sentido la resolución por gráficos cartesianos no acompaña a la resolución algebraica sino que se ofrece a cambio de ella.

Si la resolución algebraica se presentara vía la transformación de sistemas equivalentes, todos los sistemas intermedios podrían ser resueltos mediante gráficos cartesianos. De este modo la noción de sistemas equivalentes tendría su correlato en el registro gráfico: los diferentes pares de rectas se cortan en el mismo punto (para el caso de sistemas con solución única). En particular podría observarse que el estado final en la resolución de sistemas determinados

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$, corresponde siempre al gráfico de dos rectas paralelas a los ejes.

Un trabajo así, soportado en la articulación entre los diferentes registros de representación, no resultaría económico desde la perspectiva de obtener las soluciones de un sistema de ecuaciones particular. Es decir, sería un trabajo que toma la resolución de los sistemas en sus diferentes registros como objeto de reflexión y no se centra en el cálculo de las soluciones. Asumimos que un trabajo de esta naturaleza debería acompañar al habitual de producción y apropiación de algoritmos de resolución, si se tiene en la mira dotar de sentido a los objetos y prácticas algebraicas. Si no se presentan los objetos en toda su complejidad, la potencia del cálculo algebraico se opaca al visualizarse como bien adaptado sólo para ciertos sistemas de ecuaciones.

5. Conclusiones

Como ya dijimos, cualquier libro de texto ofrece una versión de los objetos que presenta a partir del conjunto de actividades que propone y de los discursos que despliega. En cada uno de los tres libros que mencionamos se han hecho diferentes opciones frente al tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales. El aspecto que hemos considerado de interés para nuestro análisis, y referido al cuál las opciones de los libros fueron bien distintas, es la validación de los procedimientos de resolución que desarrollan.

Habilitar la discusión acerca de la validez del procedimiento de resolución, nos introduce en el análisis de los espacios de validación que un marco(16) determinado puede aportar para un procedimiento constituido inicialmente en otro marco. Nuestro análisis intenta advertir acerca de la complejidad y la necesidad de tomar conciencia de que los significados de un concepto en un marco específico –adquiridos a partir de objetos, relaciones y escrituras de ese marco– se modifican al cambiar de marco.

En particular, resulta imprescindible abordar el papel que pueden jugar las extensiones de propiedades y relaciones válidas en un determinado dominio matemático al ser importadas a otro. Las propiedades extendidas portan en su escritura marcas de los modos de expresión en el viejo dominio. Con esas marcas se importan también significados adquiridos al manipular esas escrituras. En este artículo hemos mostrado un ejemplo de esta complejidad, al analizar los límites que supone extender propiedades de las igualdades de números al terreno de las ecuaciones.

Por otro lado, hemos discutido cuestiones relativas a la articulación entre diferentes registros de representación. Es indudable el valor cognitivo que comportan las actividades de articulación entre registros. Ahora bien, en torno a un procedimiento de resolución de sistemas de ecuaciones, una verdadera articulación debería permitir explicar, vía el tratamiento en un determinado registro, los distintos pasos del procedimiento desplegado en otro. Si en cambio, la conversión al registro de gráficos cartesianos está al servicio de trasladar la información que se obtiene para dar significado al estado final de un procedimiento algebraico, el tratamiento algebraico no llega a ser explicado en tanto procedimiento de resolución y más que de articulación entre registros podríamos decir que el tratamiento en un registro se ofrece a cambio de otro.

En el artículo hemos señalado que en el caso de sistemas a dos variables, es posible atribuir significado en el registro de los gráficos cartesianos a cada uno de los pasos intermedios implicados en el procedimiento de resolución algebraica, cuando este se efectúa vía la transformación en sistemas equivalentes.

Frente a las limitaciones que el recurso gráfico presenta para la resolución de sistemas en más de dos variables, no parece oportuno didácticamente cerrar el camino al álgebra para el tratamiento de sistemas a dos variables con infinitas soluciones. Es en definitiva el lenguaje algebraico (del álgebra lineal) el que permitirá expresar las infinitas soluciones de los sistemas a varias variables indeterminados vía la noción de combinación lineal.

Esperamos que este estudio haya permitido identificar condiciones a tener en cuenta a la hora de diseñar una propuesta didáctica sobre los sistemas de ecuaciones lineales.

Notas

(1) Trabajo realizado en marco de los Proyectos X254 - UBACYT y 30/3045 - UNGS.

(2) La influencia del libro de texto se manifiesta también en la secuenciación de contenidos y en la selección de actividades. En definitiva, el libro ofrece "una versión" del objeto a través de las actividades que presenta y el discurso que despliega.

(3) En P. Cobb (1996), se menciona el punto de vista de Erickson (1986), acerca de la compleja trama teoría-realidad: *"Hay una relación reflexiva entre el desarrollo de perspectivas teóricas y el dar sentido a hechos y situaciones particulares. El análisis de lo particular constituye ocasiones para reconsiderar lo que necesita ser explicado y para revisar los constructos explicativos. Por el contrario, la selección de las situaciones particulares a considerar refleja la orientación teórica propia. Por lo tanto, las situaciones particulares sirven de base a los constructos teóricos de manera empírica, y los constructos teóricos influyen en la interpretación de las situaciones particulares (Erickson, 1986)"*. (la traducción es nuestra)

(4) En el lenguaje del álgebra escolar las expresiones (o las ecuaciones) que tiene la misma denotación se denominan equivalentes.

(5) En la misma línea que Geco, L. Linchevsky y A. Sfard (1991) observaron que, para la mayoría de los estudiantes que ellas entrevistaron, dos ecuaciones eran equivalentes solamente cuando ellos podían visualizar que se había efectuado una operación "permitida" que transformaba una en la otra. No observaron ningún rastro de la idea de "conservación del conjunto solución".

(6) El mismo fenómeno ocurre para una sola ecuación.

(7) A partir de la reforma educativa de los noventa, el tema "sistemas de ecuaciones lineales" se movió del tercero al segundo año de la escuela secundaria (o noveno año de la escolaridad).

(8) Este tipo de validación, usual en las prácticas del aula, sirve sólo para verificar que el par de números hallados es solución del sistema pero no para decidir si ese es todo el conjunto solución. Además, no apunta a justificar los procedimientos de resolución sino solo a corroborar sus resultados.

(9) Los problemas propuestos a continuación son todos con solución única, donde el método funciona perfectamente.

(10) El procedimiento de resolución seleccionado condiciona y modifica al objeto matemático implicado en él. Más en general, el conjunto de técnicas que se despliegan a propósito de un objeto o un conjunto de objetos (se plasmen o no en procedimientos o algoritmos) va configurando y restringiendo el sentido de estos objetos. Ver M. Bosch & Y. Chevallard (1999) y P. Sadovsky (2005) para profundizar acerca del papel de las técnicas en el trabajo matemático.

(11) Si bien el libro define la noción de sistema equivalente no establece un vínculo entre dicha noción y el tratamiento que efectúa.

(12) Varios investigadores en didáctica del álgebra se han ocupado, en los inicios de la investigación en

esta área, sobre los diferentes estatutos de las letras: en C. Kieran (1992) se señalan las diferencias entre un uso aritmético de la letra como etiqueta (en expresiones como 12m, que representa 12 metros en el trabajo) y el uso algebraico, con la letra representando un número (general o desconocido). En Kücheman (1978), tomando el punto de vista del alumno, se presenta un listado de interpretaciones posibles de las letras en el trabajo de los estudiantes: letra evaluada, letra ignorada, designando un objeto concreto, incógnita, número generalizado, y variable. Las tres primeras corresponderían a una escasa comprensión de lenguaje algebraico.

(13) Por ejemplo 7=7 o $3x + 4 = x + 2x + 4$.

(14) El método de "sustitución" que aquí se pone en juego ya se había presentado anteriormente en el libro, sin la inclusión –como en los ejemplos anteriores de resolución "por sumas o restas" y "por igualación"– de una propiedad aritmética que pudiera servir de apoyatura/analogía para validar este procedimiento. Es entendible, ya que la sustitución es una técnica típicamente algebraica que no suele desplegarse en el trabajo numérico.

(15) Por ejemplo: Consideremos tres ecuaciones E_1, E_2, E_3, operemos con ellas "restando de a dos miembro a miembro" $E'_1 = E_3 - E_1$, $E'_2 = E_3 - E_2$, $E'_3 = E_2 - E_1$ y continuemos con este tipo de operación. $E'_4 = E'_1 - E'_2$; $E'_5 = E'_4 - E'_3$ llegamos a obtener como ecuación E'_5 la ecuación $0 = 0$.

(16) En el sentido dado por R. Douady.

Referencias bibliográficas

Bosch, M.; Chevallard, Y. (1999). "La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique", *Recherches en Didactique des mathématiques* 19 (1), 77-124, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y. (1985). "Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège", Première partie, *L'évolution de la transposition didactique*, Petit x 5, 51-94.

Chevallard, Y. (1989). *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège*, Deuxième partie, Petit x 19, pp. 43-72.

Cobb, P.; Yackel, E. (1996). "Sociomathematical Norms, argumentation and autonomy in mathematics", *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4), pp. 458-477.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*, Berna, Suiza, Peter Lang.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*, Tesis doctoral, Université de Paris 7, Francia.

Drouhard, J.P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire.* Thèse doctorat. Univ. Paris 7.

Frege, G. (1892). *Escritos lógicos y Filosóficos*, Madrid, España, Tecnos.

Geco, L.; Drouhard, J. P.; Leonard, F. ; Maurel, M.; Pecal, M.; Sackur, C. (1997). *Comment requeiller des connaisances caché en algèbre et q'en faire*, Repéres-IREM, 28.

Grugeon, B. (1995). *Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement: BEP et Premiere B,* Tesis doctoral, Université de Paris 7, Francia.

Kieran, C.; Filloy Yague, E. (1989). "El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica", en *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), pp. 229-240.

Kieran, C. (1992). "The learning and teaching of school algebra", en Douglas A. Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York, Macmillan, pp. 390-419.

Kücheman, D. (1978). "Children understanding of numerical variables", *Mathematics in school*, 7 (4) y 7 (5).

Linchevsky, L.; Sfard A. (1991). "Rules without reason as processes without objects: The case of equations and inequalities", en F. Furinghetti (dir), *Proceedings of the Fifteenth Conference of International Group of Psychology of Mathematics Education*, Asissi, Dipartimento de Matemática dell'Università di Génova, Italia.

Panizza, M.; Sadovsky, P.; Sessa, C. (1996). "The first Algebraic Learning: the failure of success", en *Proceedings of the twentieth Conference of International Group of Psychology of Mathematics Education,* volumen 4, 107-114, Valence, España.

Panizza, M.; Sadovsky, P.; Sessa, C. (1999). "La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito", *Enseñanza de las Ciencias,* 17 (3), pp. 453-461.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Vergnaud, G.; Cortés, A.; Favre Artigue, P. (1988). "Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles: problèmes épistemologiques et didactiques", en *Actes du Colloque de Sèvres*, Grenoble, La Pensée Sauvage.