Los procesos de validación en estudiantes ingresantes a carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías

Rodolfo D'Andrea **(•)**, ***Lisando Curia*** **(••)**
y Andrea Lavalle **(•••)**
rodolfoeliseodandrea@uca.edu.ar; lisandro.curia@faea.uncoma.edu.ar; andrea.lavalle@faea.uncoma.edu.ar
(•) *Universidad Católica Argentina. Facultad de Química e Ingeniería «Fray Rogelio Bacon», Rosario.* (••) *Universidad Nacional del Comahue. Facultad de Economía y Administración. Departamento de Matemática, Neuquén.* (•••) *Universidad Nacional del Comahue. Facultad de Economía y Administración. Departamento de Estadística, Neuquén.*

Resumen

El objetivo de este trabajo es mostrar los resultados de la aplicación de una serie de ejercicios sobre validación a un grupo de 42 estudiantes ingresantes universitarios y voluntarios de carreras de grado en Ciencias Naturales e Ingenierías. Los resultados se utilizan para caracterizar la situación de este grupo de estudiantes en procesos de validación de proposiciones matemáticas. El análisis de los tipos de respuestas obtenidas es una adaptación de la clasificación de Bell (1976) e incorpora la realizada por Balacheff (2000) acerca de los tipos de prueba que suelen presentar los estudiantes.

Los resultados, en general, evidencian el desconocimiento del lenguaje matemático, lo que dificulta la lectura y en consecuencia entorpece los procesos de enseñanza y de aprendizaje en situaciones de validación. Ponen de manifiesto, además, la confusión del estudiante frente a acciones tan disímiles como verificar y demostrar.

Palabras clave: validación, estudiantes universitarios, lenguaje matemático, demostración.

Abstract

The aim of this work is to show the results of the application of a series of exercises on validation to a group of 42 incoming college students and volunteers in careers of degree in natural sciences and engineering. The results are used to characterize the situation of this group of students in process of validation of mathematical propositions. The analysis of the kinds of answers obtained is an adaptation of the classification by Bell (1976) and also incorporates the classification done by Balacheff (2000) about the types of proof made by the students.

The results, in general, make evidence of the ignorance of the mathematical language, which complicate the reading and in consequence hinders the process of teaching and learning in situations of validation. In addition, they also show up the confusion of the students in front of actions as dissimilar as verifying and showing.

Keywords: *validation, college students, mathematical language, demonstration.*

1. Introducción

El presente trabajo[1] es una parte de la investigación surgida de la tarea docente desarrollada desde 1984 hasta el presente en la Facultad de Química e Ingeniería «Fray Rogelio Bacon» de la Pontificia Universidad Católica Argentina, campus Rosario. Se fue observando cómo, año tras año, se agudizaba la dificultad del estudiante de carreras de grado en Ciencias Naturales e Ingenierías en los cursos de matemática a la hora de abordar la demostración de proposiciones matemáticas.
La investigación tuvo como objetivo principal analizar cualitativamente el proceso deductivo realizado en la demostración de proposiciones matemáticas por el estudiante del tipo de carreras antes mencionadas y presentar un modelo didáctico que permita generar un aprendizaje significativo y desarrollar capacidad de razonamiento deductivo con el objeto de enfrentar problemas nuevos en disciplinas específicas de su carrera, con métodos y criterios propios.
Específicamente, el objetivo de este trabajo es mostrar los resultados de una serie de ejercicios sobre validación aplicados a un grupo de estudiantes ingresantes a Ciencias Naturales e Ingenierías, resultados que permitieron caracterizar al grupo de estudiantes y su desempeño frente a tales ejercicios.

2. Marco teórico

2.1. Los diferentes tipos de demostraciones que puede presentar un estudiante

Distintos investigadores se han ocupado de las características y clasificaciones del tipo de respuestas y demostraciones efectuadas por estudiantes. A continuación sólo se detallan las que se requirieron para ser adaptadas para esta investigación.
Balacheff (2000) introduce una clasificación en la cual el énfasis no está solamente en la relación entre los ejemplos usados y el enunciado que se quiere demostrar sino en el motivo por el que los estudiantes usan los ejemplos. Y las divide en dos categorías: pragmáticas e intelectuales.
Las pruebas pragmáticas están ligadas a lo experimental ya que en ellas predomina una presencia de saberes prácticos. Las justificaciones son realizadas a través de la representación de un objeto concreto. Se clasifican en tres tipos, a saber:
I) El *empirismo ingenuo o näif* que se produce cuando el estudiante valida la proposición después de verificarla para algunos casos particulares, sin un criterio formado al hacerlo. Por ejemplo, para validar la propiedad correspondiente al cociente durante el tratamiento algebraico de los límites, el estudiante simplemente presenta un ejemplo donde verifica que la propiedad «funciona» para ese ejemplo. En algunos casos puede presentar dos o tres por inseguridad pensando que más de uno refuerza la validez. El estudiante no genera conclusión alguna, simplemente realiza la verificación como mecanismo de validación.
II) El *experimento crucial* consiste en que el estudiante toma en cuenta la problemática de la generalidad y la «resuelve» mediante el uso de un caso particular que reconoce como «no especial». Es decir que el estudiante verifica con un ejemplo que permite descartar alguna conclusión alternativa. Siguiendo con el ejemplo de las propiedades de límites, para validar la propiedad correspondiente al cociente, el estudiante plantea varios ejemplos diferentes. Considera que a partir de estos ejemplos puede generalizar el resultado que se quiere demostrar.
III) El *ejemplo genérico*, que consiste en que el estudiante justifica la afirmación operando sobre un objeto concreto al que considera representante de todos los pertenecientes al dominio de dicha afirmación. Intenta plantear una argumentación basada en un ejemplo al que da carácter de representante general de la clase. Por ejemplo, en el álgebra de los límites, para validar la propiedad correspondiente al cociente, el estudiante considera un ejemplo concreto con cierta carga de

abstracción. Considera dos funciones polinómicas: una cuadrática y una lineal, expresadas en forma general. Realiza el cálculo del límite del cociente para un hipotético valor al que se aproxima la variable. Observa que el límite del cociente para este ejemplo más elaborado es igual al cociente de los límites, siempre que éstos existan y que el límite del denominador se no nulo. A partir de este ejemplo genérico se permite concluir la tesis general.

Las pruebas intelectuales provienen de una forma particular de razonar, donde se articulan cadenas argumentativas, con una clara producción en el lenguaje simbólico propio de la ciencia matemática. Se dejan de lado los objetos materiales y su relación con la experiencia material. Las pruebas intelectuales se clasifican en tres tipos diferentes que comentamos a continuación:

I) El *experimento mental* se produce cuando el razonamiento del estudiante se independiza de la representación del objeto aunque no necesariamente se trate de una prueba con la estructura de una demostración. Aquí los estudiantes interiorizan las acciones realizadas previamente, generalmente a partir de la observación de ejemplos, y las disocian de esas acciones concretas convirtiéndolas en argumentos abstractos deductivos. Por ejemplo, en el estudio del álgebra de los límites, para justificar la propiedad correspondiente al cociente, el estudiante vuelve a considerar el límite del cociente de dos polinomios (suponiendo que los límites existen y que el del denominador es no nulo), como si fueran los únicos tipos de funciones existentes. Pero esta vez los polinomios son de grado n y m respectivamente, para n y m números naturales. Verifica que la propiedad se cumple para este ejemplo generalizado (con una construcción más elaborada que la del ejemplo genérico) y luego concluye que la propiedad en cuestión se cumple para cualquier par de funciones.

II) El *cálculo sobre enunciados* es una prueba que oscila entre la experiencia mental y la demostración. No tiene la característica de conformar una demostración pero tampoco tiene la característica del experimento mental. Se establecen construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, que se originan en una definición o propiedad y se basan en la transformación de expresiones simbólicas formales. Continuando con el ejemplo referido al álgebra de los límites, durante la validación de la propiedad correspondiente al cociente (bajo los supuestos ya considerados), el estudiante esta vez, se atreve a plantear el límite del cociente de dos funciones hipotéticas f y g, pensando el cociente como el producto de la primera por la recíproca de la segunda. Luego tiene en cuenta el límite del producto ya probado y lo aplica a este producto. Pero en su argumentación, utiliza el hecho de que el límite de la recíproca de g, existe y es la recíproca del límite. No tiene en cuenta que está aceptando un hecho que está presente en lo que quiere probar y que aún no está validado. Es una limitación muy común en los estudiantes de los primeros años, que no distinguen que en definitiva en la prueba de este tipo se genera una cadena propia de un sistema axiomático, donde cada propiedad probada es una verdad establecida que puede ser utilizada en las siguientes. Podría ocurrir, en el mejor de los casos, que pruebe previamente la validez del límite de la recíproca de la función g bajo el supuesto de que el límite de esta función es no nulo, para luego establecer el límite del producto antes mencionado.

III) La *demostración* se produce cuando el razonamiento que utiliza el estudiante tiene la función de explicar en un lenguaje reconocido por la comunidad matemática, y cuyas reglas de debate se sostienen sobre la lógica formal.

Por su parte, Bell (1976) se propuso analizar los intentos de los estudiantes por construir demostraciones o elaborar explicaciones en situaciones matemáticas elementales y comparó la forma en que difieren de los usos de la demostración que realiza un matemático profesional. A la luz de este análisis, elaboró una clasificación de los tipos de respuestas que un estudiante puede arrojar, a través de una categorización que distingue entre: empíricas y deductivas. La primera se caracteriza por el uso de ejemplos como factor esencial para la certeza mientras que la segunda se caracteriza por la utilización de la deducción como elemento conector con las conclusiones.

La categoría empírica distingue la siguiente subclasificación:

Completa: el estudiante encuentra y comprueba el conjunto finito completo de los casos requeridos.

Sistemática: el estudiante encuentra al menos algún subconjunto completo de casos y está intentando encontrarlos a todos.

Parcialmente sistemática: el estudiante encuentra algún subconjunto parcialmente completo de los casos requeridos y si bien no encuentra todos, tiene conciencia de la importancia de tal acción.

No sistemática: el estudiante halla algunos de los casos o ejemplos que se requieren que no constituyen el subconjunto completo y desconoce lo vital de encontrar absolutamente todos los casos.

Extrapolación: el estudiante infiere la conclusión de un resultado general a partir de un subconjunto de datos suficientemente representativos.

Incapacidad: el estudiante es incapaz de generar ejemplos adecuados que satisfagan las condiciones impuestas por la proposición a demostrar.

La categoría deductiva distingue la siguiente subclasificación:

Explicación completa: el estudiante llega a la conclusión a través de un argumento conexo que conecta los datos de la proposición a demostrar y también datos y principios aceptados.

Conexa: ésta, a su vez, admite dos subclasificaciones, a saber:

- **S:** el estudiante fracasa en el argumento porque éste apela a hechos o principios que no están más aceptados que la propia proposición a demostrar.
- **Incompleta:** el estudiante realiza un argumento conexo con calidad explicatoria pero es incompleto.

Relevante: del mismo modo que la categoría anterior, esta también admite dos subclasificaciones que se detallan y describen a continuación:

- **Detalles colaterales:** el estudiante hace algún análisis de la situación y menciona aspectos que podrían formar parte de una demostración pero fragmentariamente, fracasando al conectar las diferentes subclases en un argumento.
- **Reenunciado general:** el estudiante no hace análisis alguno de la situación, mencionando aspectos irrelevantes que representan la situación como un todo y se da cuenta de que existe una conexión deductiva pero es incapaz de exponerla.

Dependencia: el estudiante intenta unir deductivamente los datos con la conclusión pero no se consigue alcanzar una categoría superior.

No dependencia: el estudiante logra trabajar uno o más ejemplos correctamente pero no los utiliza para probar la conclusión general y no tiene conciencia de la conexión de los datos con la conclusión.

En general, existen muchos trabajos descriptivos sobre la demostración matemática, siendo la geometría la rama de la matemática inspiradora, ya que los procesos de argumentación asociados a la visualización son muy representativos.
Bell (1976) es un pionero en este tipo de clasificaciones, y analizó el tipo de respuesta que un estudiante puede presentar frente a procesos de validación. Posteriormente, otros investigadores siguieron esta línea tomando como base la clasificación expuesta. Para la instancia de la prueba se necesita de un proceso previo que es la determinación del valor de verdad de una proposición y la justificación que la sostiene. Estos procesos desarrollan en el estudiante el hábito de conjeturar, justificar, verificar y analizar cuidadosamente la elección de ejemplos y contraejemplos que sostengan el valor de verdad escogido.

2.2. La visualización

Debe destacarse que la investigación descrita en la introducción requiere de la manipulación del término visualización, acción vital de ser observada en los estudiantes y que se constituye en una de las facetas del lenguaje matemático que se manifiesta como coloquial, simbólico y visual.

Existen estructuras conceptuales e incluso pruebas que pueden captarse mejor a través de diagramas, esquemas o gráficas realizadas a mano alzada o mediante algún software. Son canales para la comprensión del estudiante y operan de forma más inmediata que una explicación coloquial, y una exposición tradicional a través del simbolismo propio de la ciencia matemática. De Guzmán (1996) cita como ejemplo las ideas elementales del cálculo, cuya génesis se encuentra en conceptos de orden, distancia, operaciones entre números. Estas nociones nacen de situaciones de hecho, concretas, simples y sustancialmente visuales. Esta captación visual puede presentarse eventual y paralelamente con la explicación coloquial. Lo simbólico puede exponerse luego de una primera aproximación a través de lo coloquial y visual. Se trata de proponer aproximaciones que favorezcan la apropiación de la estructura conceptual o procedimental, que resultan más accesibles para el ingresante actual que una presentación a través del lenguaje simbólico, el que requiere una abstracción directa por lo que resulta un proceso no tan asequible para estos estudiantes. El proceso descrito de apropiación permite una transición desde lenguajes más concretos hacia el lenguaje abstracto de la simbolización, propio de la ciencia matemática.

3. Los ejercicios de validación para los ingresantes

3.1. Generalidades introductorias_

Con el objeto de llevar a cabo el trabajo de campo se realizó una convocatoria voluntaria en la institución mencionada al comienzo de este trabajo durante el mes de abril de 2010. Los estudiantes voluntarios tenían que cumplir ciertas condiciones: debían tener 18 años de edad, haber aprobado el curso de ingreso, haber egresado del ciclo medio polimodal no técnico y ser estudiantes de las carreras de Ingeniería y Licenciatura en Química Industrial, haber aprobado el curso de ingreso y estar cursando el primer año regular de las carreras antes mencionadas.

Fueron seleccionados para la convocatoria 42 estudiantes, de los cuales 16 pertenecían a la carrera de Ingeniería Industrial y habían egresado del polimodal con terminalidad en Economía y Gestión, 16 eran estudiantes de Ingeniería Ambiental y 10 de Química, egresados del polimodal con terminalidad en Ciencias Naturales. Finalmente resultaron en cada grupo 50 % de varones y 50 % de mujeres. El curso de ingresó revisó ideas fundamentales de matemática vistas en el ciclo medio imprescindibles para el abordaje de los cursos universitarios de matemática, agrupándose tales contenidos en unidades temáticas bajo los siguientes títulos: 1. Conjuntos Numéricos; 2. Expresiones Algebraicas Enteras y Racionales; 3. Ecuaciones algebraicas y Sistemas Lineales; 4. Introducción a Funciones reales de variable real; 5. Introducción a las Funciones trigonométricas.

Al momento de realizar los ejercicios de validación, los estudiantes convocados se hallaban realizando el tercer mes de cursado de las carreras elegidas por lo cual los contenidos desarrollados hasta ese momento eran:

- Cálculo I de las Ingenierías: Trigonometría. El número real. Funciones reales de variable real;
- Álgebra y Geometría de las ingenierías: El número complejo. Polinomios reales y complejos. Análisis combinatorio;
- Matemática I (Álgebra e Introducción al Cálculo) de la Licenciatura en Química: Trigonometría. El número complejo. Polinomios reales y complejos.

Los ejercicios se realizaron al comienzo del tercer mes de cursado del primer año con el objeto de que los estudiantes pudieran tomar contacto con un curso de matemática universitaria y tuvieran la oportunidad de observar y estudiar procesos de validación, a fin de superar la concepción de que matemática es «sentarse a hacer ejercicios», según expresión textual de los estudiantes acerca de visión general de los cursos de matemática que recibieron en el ciclo medio. Asimismo, se pretendía también que el estudiante pudiera tomar conciencia de que en cualquier curso de matemática se requiere tener un adecuado soporte teórico para poder acceder a las actividades procedimentales.

3.2. El temario de los ejercicios

Se destaca que junto al temario se adjuntó una hoja con estructuras conceptuales vinculadas con los temas abordados en los ejercicios de validación, a los efectos de que cada estudiante no se perturbara por el recuerdo de una fórmula o definición o gráfica que por elemental que fuese, interfiriera en el razonamiento de cada ejercicio planteado.
El análisis del tipo de respuesta obtenida en cada uno de los ejercicios es una adaptación de la categoría de respuestas de Bell (1976) y el análisis del razonamiento seguido en el proceso de validación constituye una adaptación de la clasificación de Balacheff (2000). La elección de los ejercicios no fue arbitraria, sino que se le presentaron respectivamente y en este orden:

- Dos proposiciones verdaderas cuantificadas existencialmente con una ligera variación en el conjunto referencial, de manera que eso permitiera observar si había alguna variación en las resoluciones.
- Una proposición falsa cuantificada universalmente, con el fin de observar cómo justificaban la falsedad de la proposición o elegían un contraejemplo, a partir de la intuición.
- Una proposición verdadera cuantificada existencialmente, donde lo esperado era que el estudiante pudiera recurrir a la visualización.
- Una proposición verdadera cuantificada universalmente, donde lo esperado era una prueba informal o una visual que en cualquiera de los casos promoviera una aproximación a la demostración. Y finalmente,
- Dos proposiciones verdaderas cuantificadas universalmente donde lo requerido era la prueba.

En cualquiera de los tres últimos casos, se trataba de pruebas muy elementales y que no revestían artificiosidad de ningún tipo.
Como ya se indicó, estos ejercicios fueron aplicados a los dos meses de cursado del primer año, luego de que los estudiantes realicen un examen parcial teórico–práctico, de forma que ya hubieran adquirido cierta experiencia en desarrollos matemáticos, sus conceptualizaciones y su relación con la práctica.

3.2.1. Ejercicio 1

Considera las siguientes proposiciones:
a) $\exists\, x \in A /\ (x\text{-}1)\cdot(x\text{-}2)\cdot(x\text{-}4) = 0$,
con $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
b) $\exists\, x \in \Re /\ (x\text{-}1)\cdot(x\text{-}2)\cdot(x\text{-}4) = 0$

Decide si las proposiciones precedentes son verdaderas o falsas, justificando coloquialmente la elección del valor de verdad escogido en cada caso.

Este ejercicio presenta una función proposicional cuantificada existencialmente. Es una proposición verdadera, siendo el referencial un conjunto siendo finito (caso **a**) o infinito (caso **b**), y por tanto puede o no ser físicamente realizado su recuento. La validación requiere en este caso que el estudiante compruebe que la función proposicional asociada al cuantificador es verdadera con un único valor (cualquiera) que escoja del referencial. La idea de este ejercicio fue observar cómo intuitivamente el estudiante evalúa el valor de verdad de las proposiciones dadas con diferente conjunto referencial. Esta diferencia es sustancial, ya que el proceso de validación es el mismo para los dos casos, pero es fundamental ver qué actitud asume el estudiante frente a esa diferencia. En la realización de este ejercicio, se apela a la noción implícita de recuento discreto, que direcciona dicha noción de cuantificación desarrollada entre los estadios del final del período preoperacional y el comienzo de las operaciones concretas según Piaget (1981). Con esto se hace referencia a las relaciones cuantitativas alcanzadas durante la mitad del ciclo primario tales como: muchos–pocos; todo–nada, entre otras, imprescindibles para la construcción del número.

- *Tipo de respuesta obtenida:* incluye el tipo de razonamiento seguido por el estudiante, de modo que para el análisis que continúa se adaptó específicamente la clasificación hecha por Bell (1976). Los casos I y II no corresponden al ejercicio 1 en análisis, mientras que los casos III a VII sí corresponden:

I. Completa universal = Completa Bell: el estudiante encuentra y comprueba el conjunto finito completo de casos requeridos. Este caso corresponde a una proposición verdadera cuantificada universalmente siendo el referencial, un conjunto finito cuyo recuento es posible de ser llevado a cabo. La prueba de validez de esta proposición requiere que el estudiante compruebe que la función proposicional asociada al cuantificador es verdadera para cada uno de los elementos del referencial. Es decir que el estudiante es capaz de encontrar todos los casos requeridos que hacen verdadera a la función proposicional asociada al cuantificador universal.

II. Incapacidad frente a verdad universal = Incapacidad Bell: el estudiante es incapaz de encontrar todos los casos requeridos que satisfagan las condiciones impuestas por la proposición a demostrar o bien es incapaz de determinar el valor de verdad de la proposición que postula la verdad de una proposición cuantificada universalmente.

III. Completa existencial: el estudiante encuentra y comprueba que se requiere un único caso para probar la validez de la proposición.

IV. Incompleta inconsistente: el estudiante determina el valor de verdad de la proposición pero no justifica su decisión, es decir, no es capaz de escoger valores del referencial, o llevar a cabo otra acción equivalente.

V. Incompleta inconexa: el estudiante determina el valor de verdad de la proposición pero justifica inadecuadamente su decisión. Por ejemplo, evalúa la función proposicional asociada al cuantificador en al menos tres valores y cree que éstos son necesarios para sostener la verdad de la proposición, desconociendo que basta con uno.

VI. Incompleta existencial: el estudiante detecta que existe algún caso que prueba la validez de la proposición pero no lo indica.

VII. Incapacidad frente a verdad existencial: el estudiante es incapaz de dilucidar que la verdad de la proposición se comprueba con solo encontrar un valor que la satisfaga o bien es incapaz de detectar la verdad de la proposición cuantificada existencialmente.

Ejercicio 1.
Cuantificación existencial verdadera.

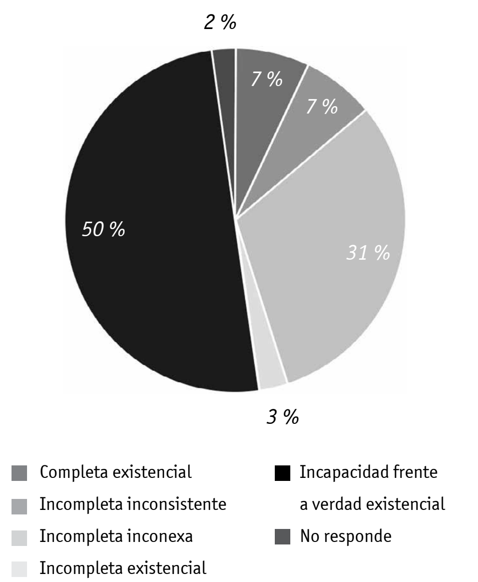

Figura 1.
Resultados correspondientes al Ejercicio 1.

Se advierte a través de los resultados obtenidos que los estudiantes, en su mayoría, no pudieron evaluar el valor de verdad de la función proposicional cuantificada existencialmente. En algunos casos, posiblemente desde su intuición, confunden en muchas ocasiones con el referencial y, en otras, evalúan correctamente la función proposicional pero no saben justificar su elección. Los estudiantes de esta muestra conocen el símbolo mostrado simplemente como un símbolo más, pero no necesariamente este conocimiento implica que la lectura del mismo es meditativa y atenta, lo que influye notablemente a la hora de la prueba. Es interesante destacar que, de una buena lectura de la proposición, se apela a que el estudiante intuitivamente «pruebe» la verdad, que en este caso es la simple exhibición de un ejemplo. Se observa también que los pocos estudiantes que pudieron sostener la verdad de la proposición con un único caso como se requería, no distinguieron entre los ítems **a** y **b**, o al menos las acciones realizadas no evidenciaron diferencias entre los referenciales. Para los dos ítems establecieron la verdad de la proposición y eligieron el mismo valor.

3.2.2. Ejercicio 2

> Considera la siguiente proposición:
> $\forall x \in \Re : |x| < 0$.
>
> Decide si la proposición anterior es verdadera o falsa explicando qué razonamientos sigues para justificar la respuesta.

La idea de este ejercicio es ver cómo intuitivamente el estudiante reacciona frente a una proposición falsa cuantificada universalmente. Primero se observa cómo evalúa su valor de verdad y luego cómo valida a la misma. En este caso se espera que el estudiante pueda probar la falsedad de la proposición utilizando un contraejemplo o bien que justifique a través de la definición de valor absoluto o apele a la interpretación geométrica de la definición mencionada. Aquí puede entrar en juego la visualización en el último caso, o la mera justificación conceptual si apela directamente a la definición.

- *Tipo de respuesta obtenida* (idéntica observación a Ejercicio 1):

VIII. Falsedad universal completa: el estudiante encuentra y comprueba el único caso requerido —contraejemplo— que le permitirá probar la falsedad de la función proposicional cuantificada universalmente.

IX. Falsedad universal incompleta: el estudiante detecta la falsedad de la función proposicional cuantificada universalmente, no encuentra el contraejemplo, aunque justifica tal falsedad con argumentos consistentes.

X. Falsedad universal inconexa: el estudiante detecta la falsedad de la función proposicional cuantificada universalmente y, al no encontrar el contraejemplo, intenta justificar tal falsedad inadecuadamente con argumentos erróneos.(2)

XI. Incapacidad frente a falsedad universal: el estudiante es incapaz de detectar tal falsedad o, detectándola, procede de forma opuesta a lo requerido para este caso.

XII. Falsedad universal inconsistente: el estudiante detecta la falsedad de la función proposicional cuantificada universalmente pero no justifica su decisión.

Luego de la lectura de los trabajos de los estudiantes de la muestra se observa que una buena parte pudo determinar adecuadamente el valor de verdad de la función proposicional cuantificada universalmente. Ninguno de los estudiantes supo encontrar el contraejemplo, pero todos argumentaron adecuadamente, ya sea por la definición de valor absoluto o mediante la interpretación geométrica de la misma. Un porcentaje menor, habiendo detectado el valor de verdad de la proposición, no lo justificó o lo hizo erróneamente.

Ejercicio 2.

Cuantificación universal falsa.

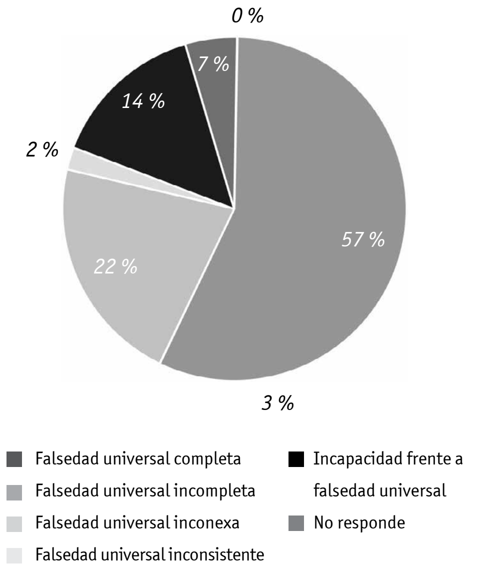

Figura 2.

Resultados correspondientes al Ejercicio 2.

Aquí nos enfrentamos con una duda importante respecto al rol del contraejemplo para el estudiante: ¿no podría considerar que se trata de un caso particular?, ¿realmente tiene conciencia acerca de la acción que está llevando a cabo?, ¿procede de manera similar a la validación de proposiciones verdaderas de forma compulsiva y no meditada? El principio de la verdad (Johnson–Laird, 2001) describe la tendencia del sujeto a representar los casos verdaderos más que los falsos. En un primer nivel (o representación inicial), las personas se representan, inicialmente mediante modelos, las posibilidades verdaderas, dejando para hacer explícitas en un momento posterior el resto de la información. Si las personas no suelen representarse lo que es falso, es necesario explicar cómo hacen para imaginar situaciones falsas cuando se les pide. En otro lugar (Santamaría y Espino, 2000) se puede proponer un procedimiento que podría usarse en tales situaciones: el heurístico de negación. Su funcionamiento sería muy simple. Si se le pide a alguien que exprese el caso en que una proposición es falsa, producirá la representación inicial de la situación en que es verdadera y entonces la negará. Como cualquier heurístico, el de negación es adecuado en la mayoría de los casos (de ahí su utilidad). Se podría citar un ejemplo muy elemental pero representativo: la diferencia entre conjuntos. La reacción usual del estudiante para probar que esta operación no es conmutativa, es pensar en la propiedad conmutativa, y generar un ejemplo consistente en realizar la diferencia de dos conjuntos, en uno y otro orden. Finalmente observará, si eligió los conjuntos adecuadamente, que ambas operaciones ofrecen resultados diferentes. Por ende, la secuencia de razonamiento consiste en pensar primero la conmutatividad y luego efectuar una comparación para ver que la propiedad no se cumple para el ejemplo propuesto.

3.2.3. Ejercicio 3

Considera la siguiente proposición:
existe un ángulo t tal que $cos(t)=t$.
Decide si la proposición anterior es verdadera o falsa, explicando qué razonamiento sigues para justificar la respuesta.
Observación: se sugiere al estudiante que observe la igualdad dada como la igualdad de dos funciones reales de variable real y a partir de allí genere la solución del problema planteado.

En este ejercicio, tomado de Solow (1992:19), nuevamente se propone una función proposicional cuantificada existencialmente que es verdadera, similarmente al ejercicio 1, pero aquí se apela a cuestiones totalmente distintas por parte del estudiante. Los resultados esperados pueden oscilar desde simples tanteos ingenuos, refiriendo a la clasificación que Balacheff (2000) hace sobre tipos de demostraciones empíricas en las que los estudiantes utilizan ejemplos para validar enunciados. Por otro lado, se espera que el estudiante pruebe la validez de esta proposición haciendo uso de la visualización y generando lo que Hanna (1995) denomina *visual proof* (Hanna, 1995:43), intersecando la función identidad con la función coseno y viendo que existe un valor que en efecto satisface la proposición, que el mismo supera a 0 y es estrictamente menor que $\frac{\pi}{2}$. No es la intención que el estudiante encuentre tal valor, sino únicamente que muestre que existe. Téngase en cuenta la sugerencia que se le hace al estudiante como observación, finalizado el enunciado del ejercicio. Balacheff (1987) considera que los dibujos son, en su mayoría, auxilio de la imaginación que ayudan a una mejor retención de las relaciones que se consideran de utilidad y que contribuyen a mejorar la comprensión de los diferentes temas que se tratan y los problemas que se intentan resolver.

Estos estudiantes estudiaron Trigonometría y Funciones en el curso de ingreso y luego los desarrollaron en profundidad durante los dos primeros meses. Por ende conocen el comportamiento de las funciones trigonométricas y la función identidad, entre otras. Recuérdese que los estudiantes cuentan con una hoja adicional de fórmulas y estructuras conceptuales y entre ellas se encuentran las gráficas de las funciones trigonométricas y algunas otras, en particular la función identidad.

- *Observación previa:* aquí el tipo de respuesta obtenida no incluye el tipo de razonamiento seguido por el estudiante, de modo que se consideraron las categorías adaptadas de Bell (1976) para el Ejercicio 1. Mientras que para el tipo de razonamiento seguido se adaptó la clasificación hecha por Balacheff (2000).

- *Tipo de respuesta obtenida*

Empirismo perceptivo: el estudiante opera según el empirismo ingenuo descripto por Balacheff (2000) pero utilizando el comportamiento visual de la gráfica de una función, en este caso particular: la función coseno. La percepción aquí actuaría a través de un diseño con lápiz o virtualmente a través de la utilización del software que permita tal gráfica. Particularmente, el estudiante intentó observar el comportamiento de la función coseno pero sin sentido alguno, ya que no captó que lo que debía observar es si la función citada y la función identidad tienen puntos en común.

Empirismo perceptivo/comparativo: el estudiante opera según el empirismo perceptivo pero comparando con otras gráficas. En este caso, compara con la función seno y la función tangente, pero tales intentos como los descriptos en la categoría anterior fueron procedimientos sin sentido y sin fundamento por parte de los estudiantes.

Intento de experimento mental o experimento mental fallido: el estudiante dispara su razonamiento a partir de un ejemplo particular e intenta argumentar pero luego vuelve a una simple verificación de lo «poco y débilmente argumentado». E inclusive puede ser que especule a partir de una consideración genérica o un argumento genérico, y vuelva sobre la misma a una simple verificación. En particular, para este caso, algunos realizaron una transformación trigonométrica que luego terminó en una verificación de esta expresión transformada, entre otros.

Tipo de respuesta	Cantidad de estudiantes	Porcentaje
Incompleta inconexa	1	2,38
Incapacidad frente a verdad existencial	31	73,81
No responde	10	23,81

Figura 3.

Porcentajes del tipo de respuesta obtenida.

Razonamiento seguido	Cantidad de estudiantes	Porcentaje
Empirismo ingenuo	7	16,67
Empirismo perceptivo	4	9,52
Empirismo perceptivo/ comparativo	2	4,76
Experimento mental fallido	13	30,95
Ausencia de razonamiento	6	14,29
No responde	10	23.81

Figura 4.

Porcentajes del tipo de razonamiento seguido.

Recapitulando, durante la realización de este ejercicio se manifestaron cinco resoluciones distintas, a saber: 1) un solo estudiante detectó el valor de verdad de la proposición pero no pudo sostenerlo; 2) un grupo realizó tanteos aleatorios en la igualdad dada buscando ese valor de t e ignorando la sugerencia; 3) algunos estudiantes enfocaron en el comportamiento de la gráfica de la función coseno observando diferentes valores; 4) un grupo se enfocó en el comportamiento de las gráficas de la funciones seno, coseno y tangente, comparándolas, y finalmente; 5) algunos estudiantes se centraron en la expresión trascendente del coseno e intentó transformarla a través de identidades clásicas.

La mayoría de los estudiantes estableció erróneamente el valor de verdad de la proposición dada. Y, a pesar de las sugerencias dadas en el ejercicio como una observación, algunos estudiantes «tantearon» con la calculadora tal como se pronosticó en el prolegómeno, no remitiéndose al análisis de la función trigonométrica involucrada, es decir que no apelaron a la visualización. Esta faceta del lenguaje matemático, que se describió en el marco teórico, requiere ejercicio cotidiano, y los ingresantes actuales no están entrenados a tales efectos. Las argumentaciones establecidas, por un lado consistieron en la selección de valores, producto de «tanteos» aleatorios por la utilización de una simple calculadora electrónica, observando si podían tales valores satisfacer la igualdad planteada. Algunos se remitieron en tal argumentación al análisis breve del comportamiento de la función coseno, y en otros casos comparando el comportamiento con las funciones seno y tangente, manifestando que satisfacían el comportamiento planteado por la proposición para las dos funciones últimas mencionadas o para una de ellas, pero desde lo analítico y no desde el gráfico. Debe notarse que salvo en los casos en que utilizaron la calculadora electrónica, en el resto las observaciones, tanteos y comparaciones dejaron de lado a la función identidad, ignorando su presencia por completo y remitiéndose únicamente a la función coseno.

Esta actitud es muy común en los estudiantes, y consiste en descartar o transformar aquello que puede entorpecer o demorar una resolución. Un ejemplo clásico aunque elemental es la resolución de una ecuación como $2x = 0$. En algunas ocasiones, el estudiante ignora el 0 y transforma la ecuación en $2x = 1$. Esto ocurre porque el 0, en estos casos, no significa absolutamente nada a nivel operacional, es decir, el estudiante desconoce el rol que este símbolo tiene en el álgebra. Algo análogo ocurre con la ecuación planteada en este ejercicio. El estudiante observa que se trata de una ecuación totalmente diferente a las que está acostumbrado y termina reduciéndola a una identidad trigonométrica, estructura con la que se encuentra familiarizado. De hecho, los que transformaron la función coseno, generaron una igualdad del modo siguiente, ignorando la original: $cos(x) = \sqrt{1 - sen^2(x)}$. A partir de aquí, elevaron al cuadrado ambos miembros y volvieron a sustituir el coseno cuadrado por una expresión equivalente a la citada sin la raíz, conduciendo el razonamiento a una identidad carente de sentido. Pocos recurrieron a la representación gráfica, y los que lo hicieron no obtuvieron resultados significativos, ya que no relacionaron la función coseno con la función identidad, que era el objetivo. Simplemente se limitaron a mostrar visualmente valores notables en la gráfica y compararlos analíticamente con la imagen de éstos, lo que no varió demasiado de los «tanteos arbitrarios» que hizo otro grupo. Por otro lado, el único estudiante que postuló la verdad para esta proposición no pudo sostenerla con justificación alguna.

3.2.4. Ejercicio 4

> Considera la siguiente proposición: toda ecuación cuadrática sin término independiente siempre tiene a 0 como raíz.
> Decide si la proposición anterior es verdadera o falsa, explicando el razonamiento seguido para justificar tu respuesta.

La proposición incluida en el enunciado, expresada coloquialmente, se trata de una función proposicional cuantificada universalmente que en este caso resulta verdadera. Aquí lo esperado de parte de los estudiantes es que, una vez determinado el valor de verdad de la proposición, validen la misma proponiendo la forma de la ecuación cuadrática sin término independiente en forma genérica, y la resuelvan, de modo que quede demostrado a través de esa resolución que una de las raíces es 0. También podría ser válida la propuesta de razonamiento visual apoyado en la representación gráfica de un polinomio del tipo requerido, cuya gráfica corresponde a la de una función de segundo grado sin término independiente. Aquí, se podría considerar una con coeficiente cuadrático positivo y otra con coeficiente cuadrático negativo, de modo que pueda observarse que en cualquier caso, la gráfica pasa por el origen. Ambas parábolas podrían ser ejemplos concretos, en cuyo caso la cuestión seguiría la línea del experimento crucial. Asimismo, podría llegar a establecer este razonamiento mediante una prueba visual en el caso en que no se trabaje con ejemplos particulares de parábolas, y una pseudoprueba visual en el caso contrario. Aquí en el tipo de respuesta obtenida se consideró directamente la clasificación de Bell (1976), mientras que para el tipo de razonamiento seguido se consideró la clasificación de Balacheff (2000).

Ejercicio 4.

Proposición universalmente verdadera. **a)** Tipo de respuesta obtenida. **b)** Tipo de razonamiento seguido

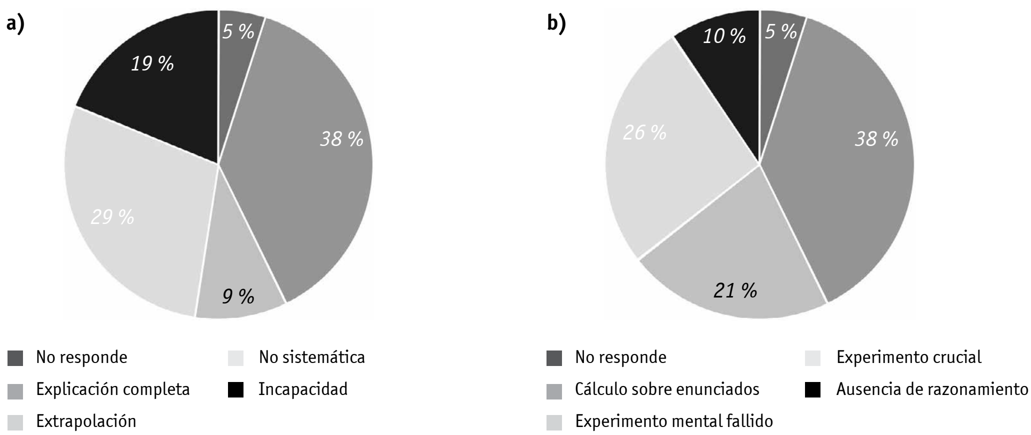

Figura 5.

Resultados correspondientes al Ejercicio 4.

Un porcentaje destacado de estudiantes efectuó la prueba. Esto podría ser posible debido a que el enunciado es meramente coloquial y con ausencia de símbolos. Los estudiantes creen conocer los símbolos pero este conocimiento suele ser superficial. También puede deberse a un conocimiento más profundo del contenido implícito en esta proposición, de modo que a diferencia de las otras consignas, un considerable número de estudiantes más que argumentar, hizo lo que Resnick (1992) denomina prueba informal (*working proof*). Otro buen número no pudo llegar a generar este razonamiento y se limitó a la exhibición de un ejemplo o dos y a resolverlos, con lo que le «alcanzó» para sustentar la verdad. Aproximadamente la cuarta parte de la muestra no sólo no supo ponderar correctamente el valor de verdad sino que lo justificó de modo inconsistente.

Ejercicio 5.

Prueba clásica de una preposición verdadera.
Tipo de razonamiento seguido.

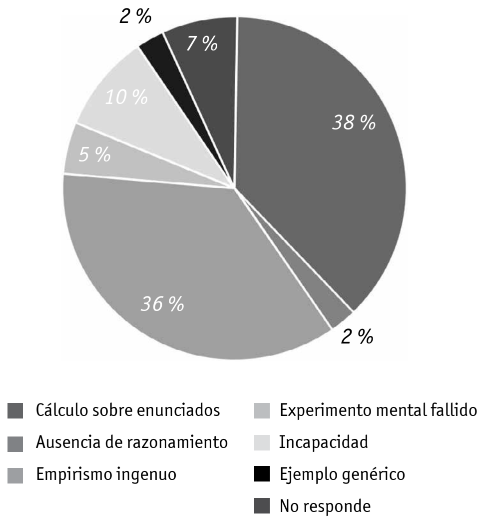

Figura 6.

Resultados correspondientes al Ejercicio 5.

3.2.5. Ejercicio 5

Considera las siguientes proposiciones verdaderas:
1. Si un número entero es par entonces su cuadrado es par.
2. Si un número entero es impar entonces su cuadrado es impar.
¿Cómo probarías la verdad de cada una?

En este ejercicio directamente se da por sentada la verdad de cada proposición y se interroga al estudiante sobre como probaría la verdad de cada una. La prueba de cada proposición es simple, y se espera que el estudiante a partir de la definición de número par o impar —en la hoja adjunta el estudiante cuenta con tales definiciones, por si no las recordara o se obnubilara en tales recuerdos— eleve entonces al cuadrado cada expresión del número —ya sea par o impar— y luego analice si el resultado obtenido es par o impar. No debe sorprender, dado todo el análisis hecho hasta el momento, que habrá estudiantes que mostrarán simples verificaciones como prueba de verdad. Aquí el razonamiento seguido incluye el tipo de respuesta del estudiante combinando las clasificaciones de Balacheff (2000) y Bell (1976).

De acuerdo con lo descrito en el prolegómeno a los resultados del análisis, una tercera parte aproximadamente pudo llevar a cabo el razonamiento esperado bajo diferentes matices, pero con una conclusión y cierre satisfactorio en cada caso. Otra tercera parte se limitó a verificar. De estos casos hay que distinguir los que solamente toman un par o un impar y lo elevan al cuadrado y ven que tal resultado es par o impar; mientras que otra tercera parte no responde, argumenta erróneamente o justifica tautológicamente. Las citas textuales que se detallan a continuación son reveladoras y ponen claramente de manifiesto la clásica confusión del estudiante entre verificación y demostración, y entre prueba y demostración.
- «Considero que la prueba es una verificación para cada caso».
- «Verificando pruebo pero no demuestro».
- «Tomando algunos valores pruebo la verdad de la proposición».

4. Conclusiones

Los resultados obtenidos en los ejercicios de validación para los estudiantes considerados ponen de relieve el desconocimiento del lenguaje propio de la matemática, lo cual dificulta la lectura de proposiciones e impide su validación, sobre todo en el caso de aquellas expresadas mediante lenguaje simbólico. Los resultados obtenidos en el grupo de estudiantes sustentan que este lenguaje es desconocido generalmente por el ingresante a la universidad, salvo casos excepcionales, y esto es posiblemente producto de la desaparición de los desarrollos teóricos en el ciclo medio. Durante la década del '90 comenzó progresivamente a eliminarse la presentación formal de teoremas, los desarrollos teóricos y su vinculación con la práctica, continuando esta situación hasta la actualidad (Legorburu y Miguiarra, 2004).

El ciclo medio, influido por la fuerza arrasadora de la resolución de problemas, hizo demasiado hincapié en estas cuestiones, relegando cierta formalidad y esta ausencia contribuyó en la actualidad a retardar el pensamiento formal. La resolución de problemas en el ciclo medio, no tiene una ortodoxia ni apunta al desarrollo de un razonamiento plausible que puede dotar de una heurística que contribuya notablemente al desarrollo del pensamiento deductivo. Se limita a ejercicios de «aplicación de algoritmos» no concebidos como un proceso y con una búsqueda basada únicamente en que el estudiante seleccione el algoritmo correcto, sin obligarlo a interactuar con situaciones que lo lleven a «comprometer sus conocimientos, a revisarlos, a modificarlos, o rechazarlos para formar un conocimiento nuevo» (Parra, 1990:13).

En el estudiante ingresante a la universidad en carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías, la tarea de abordaje de prueba de proposiciones y teoremas se hace muy compleja, ya que la misma requiere madurez en el tiempo. El acceso al proceso deductivo de validación de proposiciones matemáticas expuestas por el profesor en el aula les resulta complejo. Por lo general, entienden qué se espera de ellos cuando se les pide una demostración y reconocen que la verificación es un recurso insuficiente como demostración.

Estos estudiantes ya realizaron la mitad del primer cuatrimestre de su carrera y observaron procesos deductivos, aunque no vieron concretamente cuestiones específicas sobre lógica simbólica o el lenguaje matemático y notaron la diferencia entre realizar una deducción y una verificación. Sin embargo, tienden a recurrir a la verificación como mecanismo de prueba cuando encuentran dificultades. Esto probablemente está asociado al hecho de que en la vida y en las ciencias experimentales la verificación es el método de prueba estándar, enfrentándose de esta forma a un problema epistemológico no menor. Hay un requerimiento constante en los cursos universitarios de matemática, y es el sustento de la teoría para realizar la práctica, hábito no desarrollado en el ciclo medio, donde según expresión textual del estudiante: «matemática es sentarse a hacer ejercicios». Esta praxis, tan alejada del método matemático, persiste en la estructura mental del estudiante ya ingresado a la universidad, aunque se les muestre la forma de desempeñarse que corresponde a la ciencia matemática. Esto se refleja precisamente cuando se lo somete a situaciones nuevas para validar e inclusive en muchas oportunidades cuando se les pide que demuestren la validez de una proposición cuya prueba fue expuesta por el docente en clase. Su reacción, pese a conocer cuál es el procedimiento adecuado, suele ser la exhibición de ejemplos, sin saber cómo escogerlos para que la satisfagan. Esta actitud puede ser debida a que, aun cuando pueda parecer que los estudiantes conocen la prueba de una proposición matemática verdadera no axiomática, siguen sintiendo la necesidad de una verificación (Vinner, 1983). Healy y Hoyles (2000) sostienen que los estudiantes necesitan realizar ensayos de verificación —inclusive después de realizada la demostración— porque, precisamente, la demostración no los convence y la exhibición de ejemplos les refuerza la idea conceptual propugnada por la proposición demostrada. Más allá del hecho de que una prueba formal confiere validez general a un enunciado matemático, para confirmar esa validez necesitan de controles posteriores (Fishbein, 1982).

La elección adecuada de ejemplos es una tarea que requiere reflexión y su práctica cotidiana contribuye a la construcción del razonamiento del estudiante. Wason y Mason (2005) establecen como definición de ejemplo, a un procedimiento a partir del cual el estudiante podría establecer una generalización y definen al proceso de ejemplificación como la representación de una categoría genérica con la que el estudiante necesita entrar en contacto para extraer un caso particular. Lo que se postula a través de estas aproximaciones es precisamente establecer que el uso de ejemplos ayuda al estudiante a la generalización. Ésta permite la abstracción de situaciones concretas, constituyéndose en el puente para la construcción de argumentaciones. La elección adecuada de ejemplos y contraejemplos y la guía del docente en tal búsqueda en las instancias iniciales constituirían un disparador para la producción de demostraciones. Simplemente atinan a verificar sin criterio formado a la hora de abordar una proposición confundiendo acciones tan distantes como las de verificar y demostrar.

Esa relación, que debería estar claramente establecida y diferenciada desde el ciclo medio, no existe por lo precedentemente descrito y debe ser asimilada sin el debido y necesario tiempo de madurez mayormente en el primer año de la carrera elegida; y al no haber sido sedimentada en el tiempo correspondiente tiende a desdibujarse y a no quedar comprendida debidamente. La prueba es característica de la ciencia matemática e inherente a su epistemología. Ignorarla, especialmente en el ciclo universitario ya sea para estudiantes de matemática pura como para aquellos que utilizan a esta ciencia como herramienta, sería como exponer un «recetario» de fórmulas y conceptos cuyo verdadero sentido va más allá de la estructura conceptual. Ya que en estos casos el verdadero objetivo es disciplinar el raciocinio y la inteligencia, más allá de los contenidos, pero las fuertes creencias del estudiante se aproximan más a una matemática que tiene que ver con la experiencia vivida en el ciclo medio y con la resolución de ejercicios repetitivos sin un sustento teórico y donde no hay cabida para la reflexión y el razonamiento.

Notas

(1) El presente trabajo es una adaptación del Capítulo IV de la tesis de Maestría: «Análisis del razonamiento deductivo de estudiantes de Carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías en el proceso de validación de proposiciones matemáticas», realizada en el marco del Programa de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales con mención en Matemática, de la Universidad Nacional del Comahue (UNCOMA) en Neuquén, Argentina. La tesis fue realizada por el primer autor del artículo, docente e investigador de Pontificia Universidad Católica Argentina, campus Rosario, bajo la dirección de Lisandro Curia y la codirección de Andrea Lavalle, ambos docentes e investigadores de UNCOMA.
(2) Las argumentaciones erróneas pueden provenir, por ejemplo, para este caso particular, de especulaciones teóricas que muestran desconocimiento de la estructura conceptual de valor absoluto de un número real.

Referencias biliograficas

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics 18*, 147–176.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente y Universidad de Los Andes.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof–explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics 7*(1), 23–40.

D'Andrea, R. E. (2012). *Razonamiento deductivo y validación en estudiantes universitarios*. Saarbrücken: Editorial Académica Española.

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra*. Madrid: Ediciones Pirámide SA.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics 3*(2), 9–24.

Hanna, G. (1995). Challeges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics 15*(3), 43.

Healy, L. y Hoyles, C. (2000). A study of proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education 31*(4), 396 – 428.

Johnson–Laird, P. N. (2001). Mental models and deduction. *Trends in Cognitive Science 5*, 435–442.

Legorburu, N. y Miguiarra, M. (2004). Volver a las demostraciones. *Revista Enseñar. 3er Ciclo* 2(1), 6–8.

Parra, B. (1990). Dos concepciones de resolución de problemas. *Revista Educación Matemática 2* (3), 22–31.

Piaget, J. (1981). La teoría de Piaget. *Infancia y Aprendizaje, Monografías 2*, 13–54.

Resnick, M. D. (1992). Proof as a source of truth. En Detlefsen, M. (Ed.) *Proof and knowledge in mathematics*. Londres: Routledge.

Santamaría, C. y Espino, O. (2000). Truth and falsity in propositional reasoning: the negation heuristic. García–Madruga, J. A., Carriedo, N. y González Labra, M. J. *Mental Models in reasoning*. Madrid: UNED.

Solow, D. (1992). *Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas*. México: Limusa. Noriega Editores.

Vinner, S. (1983). The notion of proof some aspects of student's views at the senior high leve. En Hershkowitz, R. (Ed.) *Proceedings of the 7th Conference of the Psychology of Mathematics Education*. Shoresh, Israel.

Wason, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates publishers.