Los primeros aprendizajes algebraicos en el contexto de los problemas de cálculo aritmético: un estudio experimental

Leonardo Lupinacci, Rosa Ferragina y Susana Ammann
leolupinacci@yahoo.com.ar; rosanaf@arnet.com.ar; susyammann@hotmail.com
Universidad Nacional de San Martín, Bs. As., Argentina – CEDE (Centro de Estudios en Didácticas Específicas).

Resumen

En este artículo se presentan algunos resultados de una experiencia realizada en el marco de una investigación en torno a la problemática de la entrada al álgebra en la educación secundaria. Uno de los propósitos en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en este nivel es el proceso de modelización algebraica. Se parte del supuesto de que, si se los selecciona convenientemente, los procesos de resolución de los problemas aritméticos pueden ser tratados como objetos de estudio en sí mismos y, de este modo, se los podrá tomar como punto de partida para el proceso de modelización mencionado. En la experiencia se han implementado dos instancias que se corresponden con dos etapas del proceso de algebrización, correspondientes a la enseñanza básica y a la superior respectivamente. Se presenta un análisis de ambas etapas, realizado a partir de la narración del docente (investigador/participante) y de las producciones de los alumnos.

Palabras clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), modelización algebraica, Problemas de Cálculo Aritmético (PCA), educación secundaria.
Keywords: *Anthropological Theoryof Didactics (TAD), algebraic modelization, Problems of Arithmetical Calculation (PCA), secondary education.*

Abstract

In this paper we present some results of an experiment carried out in the framework of a research on the problem of the entry to algebra in secondary education. One of the purposes in teaching and learning mathematics at this level is the process of algebraic modeling. It is assumed that, if properly selected, the processes of solving arithmetic problems can be treated as objects of study themselves and, thus, can be taken as a starting point for the modeling process mentioned. In the experience, two instances have been implemented that correspond to two stages of the algebrization process, corresponding to the basic and higher education respectively. An analysis of both stages is presented, based on the narrative of the teacher (researcher/ participant) and student productions.

1. Introducción. La educación secundaria Argentina

El número de alumnos ingresantes a una escolarización secundaria en Argentina se ha incrementado desde el año 1984, coincidiendo con la recuperación de gobiernos democráticos en el país. En el año 2006, se sanciona la Ley de Educación Nacional (26206) que tiene como una de las metas más ambiciosas la extensión de la obligatoriedad para el nivel secundario. Este nivel está conformado por dos ciclos, uno Básico que es común a todas las orientaciones y otro Orientado, de características diversificadas.

En este trabajo se presentan algunos resultados de una experiencia realizada en el marco de una investigación en torno a la problemática de la entrada al álgebra en la educación secundaria. Uno de los propósitos en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en el nivel secundario es el proceso de modelización algebraica. En el artículo se parte del supuesto de que, si se los selecciona convenientemente, los procesos de resolución de los problemas de cálculo aritméticos pueden ser tratados como objetos de estudio en sí mismos y, de este modo, se los podrá tomar como punto de partida para el proceso de modelización mencionado.

2. El álgebra en los documentos curriculares de la educación secundaria. Jurisdicción provincia de Buenos Aires

El sistema educativo en Argentina propone que el proceso de *algebrización* se inicie en los primeros años de la educación secundaria (12 a 18 años). Este nivel de escolarización atraviesa, además de cambios curriculares, una discusión social sobre su finalidad y propósitos.

Por razones de espacio, solo se analizarán los contenidos de los documentos propuestos en la jurisdicción de la provincia de Buenos Aires para la enseñanza secundaria. En ellos, Matemática está dividida en cuatro ejes como organizadores de los núcleos temáticos: Geometría y Magnitudes, Números y Operaciones, Introducción al Álgebra y el estudio de las Funciones, Probabilidades y Estadística.

En el eje correspondiente al Álgebra, para 1° de la Educación Secundaria Básica (ESB) el diseño propone: «En este eje se trabajará con el pasaje de la aritmética al álgebra permitiendo generalizar propiedades de los números, expresar dependencia de variables en fórmulas y organizar información a través del lenguaje de las funciones» (Dirección General de Cultura y Educación, 2006:177). En el documento se presentan problemas a tener en cuenta por el docente. Para la iniciación al trabajo algebraico sugieren el tratamiento de configuraciones de embaldosados, guardas geométricas, secuencias numéricas con el fin de descubrir los términos generales de estas sucesiones.

En Matemática de 2° ESB, con referencia específica al eje de Introducción al Álgebra y al estudio de funciones, el diseño propone trabajar con el pasaje de la aritmética al álgebra permitiendo generalizar propiedades de los números. Además, uno de los núcleos temáticos es ecuaciones de primer grado con una incógnita para las que indica:

Se sugiere iniciar el trabajo de resolución de ecuaciones recurriendo a métodos informales que le otorgarán significado a la forma de resolución evitando la automatización de reglas sin ningún significado para el alumno/a. Por esta razón se propone excluir la presentación del tema a través del llamado «pasaje de términos». Se propondrá la resolución de situaciones en orden creciente de dificultad con la intención de provocar la necesidad de encontrar un método que simplifique y sintetice lo realizado a través de los métodos informales. (Dirección General de Cultura y Educación, 2007:334)

No se indican problemas como sugerencia al docente para abordar el tratamiento de las ecuaciones.

En el documento para 3° año de ESB, para el eje de álgebra se expresa que éste es un aprendizaje complejo puesto que la manipulación de expresiones literales como expresión general de una propiedad visualizada es la que presenta dificultades (Dirección General de Cultura y Educación, 2008). Es decir, estos documentos curriculares proponen que la enseñanza y aprendizaje del álgebra tengan por finalidad la generalización de regularidades, la búsqueda de fórmulas, la manipulación de expresiones. Finalmente en el diseño del Ciclo Superior, Matemática 4to año, se propone: «Los alumnos construirán el concepto de ecuación proposicional en la medida que resuelvan ecuaciones. Para que esto sea posible es indispensable que reflexionen acerca del conjunto de soluciones posibles y expliciten el concepto de ecuaciones equivalentes» (Dirección General de Cultura y Educación, 2010:19). Esta propuesta toma una postura de tratamiento lógico para la manipulación de ecuaciones partiendo de lo que caracteriza a las funciones proposicionales, que permitiría una mejor comprensión del significado de sus soluciones.

En los diseños mencionados, los objetos matemáticos en cuestión (ecuaciones, funciones, fórmulas, expresiones algebraicas, etc.) están fragmentados, sin conexión entre ellos, con actividades que se presentan aisladas, sin realizar una diferenciación entre el uso de variables, incógnitas y/o parámetros. No se propone una relación entre dos de los objetos matemáticos fundantes del álgebra, las ecuaciones y las funciones, a pesar de ubicarlos en el mismo eje temático. Hay, por el contrario, una clara separación: las ecuaciones para manipular expresiones y las funciones para modelizar.

3. Búsqueda de un marco teórico para los primeros aprendizajes algebraicos

Del análisis realizado en los párrafos anteriores se puede inferir que la propuesta para enseñanza y aprendizaje del álgebra en los primeros años del secundario se asume como una generalización de propiedades aritméticas. Este modelo del álgebra escolar resalta las similitudes entre aritmética y álgebra, presenta a la segunda como una continuación de la primera e identifica al álgebra con el «simbolismo algebraico» o «lenguaje algebraico», frente a un supuesto lenguaje aritmético.

Con lo cual, desde una prescripción curricular pautada con recomendaciones de actividades para el aula, con bibliografía acorde para el docente y el alumno,(1) se torna difícil pensar en otra propuesta que enmarque al álgebra y las funciones como actividades modelizadoras de la matemática, dando un tratamiento integrador para la enseñanza de este eje de contenidos en la Educación Secundaria. Además, dentro de las instituciones, el tratamiento del álgebra no acontece en solo un año de estudio, sino que se pauta su aprendizaje mediante determinados contenidos y/o actividades en cada año. Finalmente, si en cada institución no existe un consenso entre los profesores de Matemática sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en el transcurso de la secundaria, se dificulta el cambio de esta perspectiva puesto que la mayoría se preguntaría porqué cambiar sobre lo que se prescribe.

Las cuestiones restrictivas explicitadas en párrafos anteriores fueron analizadas por Chevallard (2001) al abordar los niveles de determinación de los fenómenos didácticos. Esta herramienta se propone dentro del marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) para explicar por qué el funcionamiento de un sistema didáctico puede considerarse a la vez como el producto y resultado de cierta legitimidad que, lejos de ser responsabilidad de los profesores de matemática, se genera u origina en instancias más alejadas, incluso de una institución en particular, como lo son la propia sociedad y más aún la cultura.

Chevallard (2001) expone estos niveles de determinación desde un cuestionamiento a la formación docente y en particular mirando a aquel que deberá enseñar Matemática. Este hecho genera, según el autor, dos consecuencias importantes que son separar el estudio de la matemática enseñada de la enseñanza de la Matemática y el rechazo, por parte de los profesores, a asumir las exigencias intelectuales y culturales aceptando solo aquellas que se refieren al saber matemático pero no a cómo enseñarlo.

Para poner en obra la experiencia que se detalla en este artículo, se hizo énfasis en la última frase del párrafo anterior. Se asume que el docente debería problematizar y reflexionar de manera colectiva acerca de qué es el álgebra en la secundaria y qué implicancias tiene su enseñanza, así como también desde qué modelo propuesto por la Didáctica de la Matemática enseñarla.

En el marco de la TAD, surge otra visión del álgebra escolar que la toma como objeto de estudio en sí. El estudio del álgebra dentro de esta teoría data de fines de la década de los ochenta mediante los trabajos de Chevallard (1989), Gascón (1993, 1999, 2007), Bolea (2003), Bolea, Bosch y Gascón (2001), Cid y Bolea (2007). Estos autores suponen la existencia de un proceso de *algebrización* de la matemática escolar(2) que comienza en los primeros años de la secundaria y termina en la universidad. En este marco, se postula al álgebra como instrumento algebraico y se considera que su aparición provoca un cambio sustancial en el trabajo matemático porque permite explicitar y manipular la estructura de los problemas (Gascón, 2007). No se considera al álgebra como una rama de la matemática, como puede ser la geometría o la aritmética, sino como un instrumento transversal que puede ser aplicado para el estudio de una determinada cuestión de esta ciencia.

La TAD tiene como objeto principal de investigación a las actividades matemáticas, las cuales son analizadas, cuestionadas, problematizadas, para finalmente ser modelizadas por la didáctica (Bolea *et al.*, 2001). Es decir que se describe a una actividad matemática como una actividad de modelización. La puesta en marcha de estas modelizaciones se realiza describiendo al saber matemático en el contexto de organizaciones matemáticas (Chevallard, 1999), que surgen como respuesta a una cuestión o cuestiones.

En este contexto, el álgebra se interpreta como un instrumento de modelización de Organizaciones Matemáticas (OM) o praxeologías,(3) que debe utilizarse para profundizar el estudio de determinadas *OM* previamente construidas (Bolea, 2003). Estamos, entonces, frente a un proceso como el siguiente: una actividad matemática (conformada por uno o varios problemas) describe un sistema sobre el cual se quiere obtener cierta información y se lo modeliza para obtener una organización matemática (se conocen sus tipos de problemas, técnicas, etc.). Si finalmente sobre esta organización se realiza una modelización algebraica, entonces lo que se obtendrá es una organización matemática algebrizada. Pero, una modelización algebraica, puede modelizar íntegramente todos los componentes de la organización matemática o solo las técnicas de dicha organización. Con lo cual, dependiendo de esta característica se puede hablar del grado de *algebrización* de una organización matemática.

Los párrafos anteriores han tratado de sintetizar los conceptos clave sobre los que la TAD propone un nuevo modelo epistemológico alternativo de la enseñanza y aprendizaje del álgebra, frente al que se practica y prescribe desde los diseños curriculares (que la consideran como una aritmética generalizada).

Los siguientes párrafos conformarán las razones principales por las que se ha determinado a la TAD como marco teórico de la experiencia presentada en este artículo y que tiene por intención el logro de los primeros aprendizajes algebraicos, mediante una ruptura entre la aritmética y el álgebra en la

medida que se avanza, en complejidad creciente, con las técnicas algebraicas (maneras de hacer), siempre con la intencionalidad de conformar un entramado de descripciones, justificaciones y explicaciones de esas técnicas, lo cual conforma una determinada tecnología.
Gascón (1999) expone en las siguientes líneas cómo el álgebra tratado como instrumento de modelización permite trabajar matemáticamente problemas complejos que son la razón de ser del álgebra escolar:

Aunque la aparición del álgebra se caracteriza materialmente por la proliferación de expresiones algebraicas y por la emergencia de una especie de «lenguaje algebraico», la nueva forma de hacer matemática basa su verdadera potencia en las inmensas posibilidades técnicas que surgen del doble juego de las letras como «incógnitas» y como «parámetros». Entre dichas posibilidades se destacan las siguientes: resolver simultáneamente una amplia clase de problemas, justificar, interpretar y controlar el ámbito de aplicación de las técnicas prealgebraicas (sean «aritméticas», «geométricas» o «combinatorias») y, además de obtener la incógnita cuando el problema tiene solución, explicar cuáles son las condiciones de existencia de dicha solución y describir la estructura del conjunto de las soluciones. (Gascón, 1999:80)

Finalmente, con la intención de continuar este análisis y justificar las elecciones efectuadas para poner en marcha la experiencia realizada, se exponen algunos contrapuestos entre la actividad algebraica y la aritmética:

La resolución de problemas: en «aritmética», está caracterizada por la realización de una cadena finita de problemas simples en los que cada resultado, de naturaleza numérica es calculable e interpretable en términos del enunciado y está formulado mediante una expresión sencilla del lenguaje natural. En cambio, la resolución de «problemas algebraicos» supone la producción de relaciones algebraicas que representan un «enunciado matemático», obtenida por una transformación, o por una operación legítima entre una o varias igualdades, o por la aplicación de un teorema.
Los resultados obtenidos: una medida concreta en el caso de las prácticas aritméticas. Sin embargo en las prácticas algebraicas podría ser una relación entre magnitudes.
Los objetos con los que se trabaja: con medidas concretas en aritmética frente a la manipulación de símbolos en álgebra, que deben ser interpretados de forma diferente, según el contexto en el que aparezcan (incógnitas, «números generalizados», parámetros, variables).
Significado de los símbolos y de los signos: en la aritmética los símbolos y signos tienen referentes muy concretos y un sentido muy preciso, frente a la actividad algebraica, en la que el significado de los signos se modifica de manera esencial. (García, 2007:73)

En la organización matemática preparada para la experiencia se intentará proponer actividades que pongan en evidencia estos aspectos.

4. Los Problemas de Cálculo Aritmético (PCA) como instrumento de los primeros aprendizajes algebraicos

Una vez tomada la decisión de poner en práctica una introducción al álgebra dentro del marco teórico de la TAD, queda por definir desde qué sistema inicial intramatemático partir para que luego de una modelización algebraica se llegue a una *OM algebrizada* del objeto matemático original.
Los trabajos de Bolea (2003), Gascón (2007), Ruiz, Bosch y Gascón (2007) posibilitaron que se pensara en los Programas de Cálculo Aritmético (PCA) como sistema inicial. Dichos autores sostienen que este tipo de actividades, basadas en

una secuencia de operaciones aritméticas que se realizan a partir de ciertos datos, son comunes en la educación primaria (criterio que es compartido en Argentina). En esa etapa, estos objetos no están matematizados, no se los estudia en sí mismos, no se los relaciona para establecer cuestiones tecnológicas sobre su forma, eficacia, justificación o para la obtención de propiedades. Con lo cual solo se los utiliza para encontrar un resultado numérico. La modelización algebraica de los PCA permitirá:

- Dar sentido a la manipulación de expresiones algebraicas con los temas que siempre están presentes en todo currículum de álgebra de secundaria.
- Reagrupar los diferentes tipos de problemas algebraicos en cuatro categorías: los que posibilitan pasar de su expresión natural, con palabras, a su traducción algebraica; los que requieren establecer la equivalencia entre dos programas de cálculo; los que permiten establecer una comparación entre dos programas de cálculo para determinar condiciones de solubilidad; los que requieren encontrar un programa de cálculo equivalente, pero más simple o simplificado que uno ya dado (Bolea, 2003).
- Dar respuestas a problemas didácticos desde la justificación de esas prácticas (bloques tecnológicos/teóricos) de modo que las dificultades tradicionales de «manipuleo algebraico» tengan otro significado o desaparezcan. Por ejemplo, la validez de la expresión *2x* como resultado de un PCA, la diferenciación entre *2x* y *x + 2* como expresiones de un mismo PCA, el reconocimiento de que *x+2* y *x – 5* no provienen de la equivalencia entre dos PCA (Bolea, 2003).

Finalmente, según Bolea, esta modelización permite obtener una OM prácticamente completa porque:

incluye los elementos tecnológicos básicos mínimos para justificar las técnicas, y (...) contiene al álgebra elemental de la Secundaria Obligatoria que hemos caracterizado como aritmética generalizada. Pero, además, la organización así obtenida es interpretable fácilmente por la cultura escolar ya que no contiene mucho más que el cálculo algebraico elemental, el cual existe de forma dispersa, aunque sin «sentido», en la matemática escolar actual. (2003:183)

Es decir, la modelización algebraica de los PCA puede pensarse como un proceso que se desencadena con los primeros aprendizajes algebraicos y que necesitará de sucesivas ampliaciones para responder a cuestiones tecnológicas que surgen sobre el sistema inicial. Se realizará un recorte sobre dicho sistema para trabajar solo con PCA cuyas formas simplificadas respondan a la expresión: $\{PCA(n) = an + b,\ n \in N;\ a, b \in Z\}$.
Se ha considerado que este proceso de *algebrización* puede dividirse en tres etapas. La primera se lleva a cabo en 2° de ESB, comenzando el trabajo sobre PCA que respondan a expresiones: PCA(n) = b, PCA(n) = an, teniendo como objetivo principal la justificación de técnicas como ser la propiedad distributiva, la supresión de paréntesis, la regla de los signos en enteros. Un segundo momento de esta primera etapa se centrará en el trabajo sobre PCA(n) = an + b = c, donde se comenzará con el desarrollo de las «técnicas ecuacionales», y se inicia el planteo sobre la existencia de solución. La segunda etapa girará en torno a la comparación de dos PCA, para determinar su equivalencia y, en caso de que ésta no se cumpla, se recurre nuevamente al cálculo ecuacional para lograr establecer las condiciones de solución. En esta segunda etapa se trabajará, más específicamente, sobre el cambio de significado que tiene el signo «=» dentro del álgebra. Además, se comenzarán a plantear enunciados que permitan el doble juego de las letras, como incógnitas y como parámetros. Esta segunda etapa de *algebrización* de los PCA, puede ser desarrollada en el último (3°) año de la ESB o en el primero de la secundaria superior (4°). Finalmente, la tercera etapa de *algebrización* de los PCA se centrará en este doble significado que

tienen las letras, comenzando con el estudio de ciertas funciones, es decir se inicia el recorrido funcional del cálculo ecuacional. Además, con el apoyo de recursos informáticos, se podrán resolver cuestiones tanto de igualdad como de desigualdad entre PCA. Esta tercera etapa está pensada para ser implementada en el primer año de Secundaria Superior, porque se podrán tomar sistemas iniciales de diferente índole: geométricos, económicos, físicos, propiamente algebraicos, etcétera.

La experiencia que se detalla a continuación se centró en las dos primeras etapas del proceso de *algebrización* de los PCA (Ruiz *et al.*, 2007), mediante la puesta en obra de una serie de actividades de estudio e investigación que fueron diseñadas de modo tal que en cada etapa se pudiera establecer una determinada técnica o tecnología. Se detallarán las características de las mismas conjuntamente con la experiencia.

5. Análisis de las actividades de estudio experimentadas

El diseño de actividades de estudio e investigación se formuló desde una cuestión generatriz Q: «Dado un conjunto de enunciados, si en cada uno se puede conocer el resultado de la ejecución del PCA, sabiendo o no el número pensado al comienzo, ¿cómo explicar por qué se conoce ese resultado y cómo construir nuevos enunciados para proponer?» Es decir, partimos de una cuestión generatriz *Q*, de la cual emergió un tipo de problemas y una técnica de resolución de dichos problemas, así como una tecnología apropiada para justificar y comprender mejor la actividad matemática correspondiente.

Como ya se mencionó, la presente serie de actividades de estudio se desarrolló en dos instancias, que fueron implementadas casi en forma simultánea con dos grupos para facilitar su análisis posterior. Una de ellas, que se corresponde con la primera etapa de *algebrización*, se realizó con un grupo de 25 alumnos de 13–14 años (2° año ESB) que tenían muy pocos conocimientos algebraicos previos. El trabajo sobre estas actividades se realizó durante 3 semanas (2 encuentros en cada una de dos horas de duración). Los enunciados propuestos se centraron en la forma del resultado final cuando se expresan por escrito los PCA.

La otra instancia de trabajo, correspondiente a la segunda etapa de *algebrización* de los PCA, fue llevada a cabo durante dos semanas (dos encuentros en cada una de dos horas de duración) con un grupo de 15–16 años (4° año) compuesto por 22 integrantes. Para esta etapa se les propuso la manipulación de la equivalencia entre dos expresiones algebraicas, puesto que la mayoría del grupo contaba con un buen dominio de «técnicas algebraicas de resolución».

6. Primera etapa del proceso de algebrización de los PCA

Centrándonos en esta etapa, la elección de los PCA puestos en obra estuvo supeditada a la búsqueda de enunciados que fueran capaces de provocar la aparición de contradicciones en pos de una primera ruptura entre la enseñanza de la aritmética y la introducción al álgebra. En esta elección se tuvo en cuenta lo propuesto por García (2007) con respecto a los problemas aritméticos y resultados obtenidos, además de lo que dice Bolea (2003) sobre dar sentido a la manipulación de expresiones y a la reagrupación de los diferentes tipos de problemas. Puesto que si bien dichos enunciados pueden ser resueltos en un principio por medio de técnicas asociadas a la resolución aritmética, tales herramientas se presentan como insuficientes en el momento de establecer cuáles son las condiciones y elementos tecnológicos que permiten llegar a tales resultados. En función de esto precisamente fueron seleccionados enunciados cuyos resultados, respectivamente, fueran valores constantes independientes de los

números elegidos (PCA(n) = b), o por el contrario valores dependientes de la elección realizada tales como el doble, triple, mismo número inicial, etc. (PCA(n) = an).
Los PCA seleccionados (seis en total) se dividieron en 3 grupos (A, B y C) y fueron entregados a cada alumno secuencialmente para que resuelva los enunciados de forma individual en un primer momento, luego compare sus resultados con otro compañero y entre ambos establezcan relaciones entre enunciados y resultados justificando las conjeturas a las que arribaran. A continuación de cada resolución de los diferentes grupos de PCA se estableció una puesta en común con el docente para compartir y analizar en conjunto los resultados obtenidos, las distintas conjeturas formuladas y las justificaciones presentadas.
El primer grupo de PCA con los que trabajaron los alumnos figura en la Tabla 1.

A	**P1:** Piensa un número natural. Súmale ocho. Al resultado súmale el anterior del número que pensaste. Ahora réstale el doble del número pensado y luego réstale cuatro. (PCA(n) = 3)
	P2: Piensa un número, súmale dieciséis. Súmale el doble del número pensado. Al resultado réstale el cuadrado de cuatro. (PCA(n) = 3n)

Tabla 1.
Primer grupo (A) de PCA seleccionados.

Luego del trabajo con el grupo A de PCA fue prevista una puesta en común que retomara y analizara las distintas escrituras realizadas por los alumnos como también las distintas conjeturas y validaciones en cuanto al porqué de los resultados obtenidos.
Centrándose en las resoluciones de los alumnos, se pudo ver cómo el trabajo fue realizado utilizando técnicas específicamente aritméticas, tanto mediante la utilización de algoritmos de sumas y restas, como por medio de una escritura horizontal del cálculo, apareciendo en algunos casos incorrectas utilizaciones del signo igual (Gráficos 1 y 2).

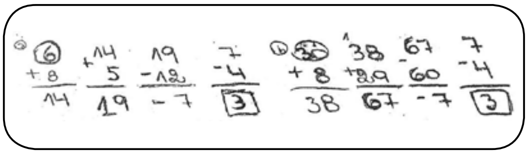

Gráfico 1.
*Producción del problema **P1** de la Tabla 1.*

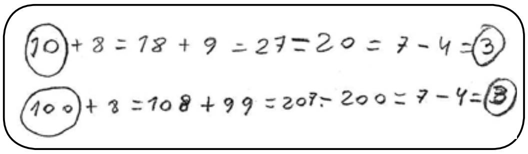

Gráfico 2.
*Otra producción del problema **P1** de la Tabla 1.*

En cuanto al análisis de los resultados obtenidos, se realizaron escrituras del tipo «da siempre lo mismo», «siempre da 3 sin importar el número que elijas» (en **P1**) y «da tres veces el número» o «da el triple» (para **P2**). Pero, en general, las resoluciones no presentaron ninguna argumentación acerca de las causas de dichos resultados. Solo un alumno presentó una justificación por escrito donde afirmaba que «da siempre lo mismo porque lo que se le agrega después se le saca».
Esto fue retomado en la puesta en común, donde el alumno completa su idea y dice: «El número que pienso primero lo sumo pero después lo resto, por eso se va y no importa lo que elija, queda siempre lo mismo». Lo mismo fue además tomado por otros alumnos que, si bien no lo expresaron por escrito, sí lo habían discutido entre ellos: «por ejemplo en el segundo... le sumas dieciséis y después se

lo restás... te queda el número más el doble del número, por eso siempre da el triple».
Con el grupo **B** de enunciados (Tabla 2) se pretende generar a través de las correspondientes formulaciones simbólicas además de los elementos trabajados en **A**, material de análisis en cuanto a la jerarquía de las operaciones, el uso de los paréntesis y la propiedad distributiva del producto en relación con la adición y sustracción.

B	**P3:** Piensa un número, súmale ocho. Al resultado súmale el doble del anterior del número pensado. Luego réstale el doble del número pensado y finalmente réstale cinco. (PCA(n) = n + 1)
	P4: Piensa un número, súmale siete. Al resultado multiplícalo por dos. A lo obtenido réstale ocho. Luego resta el valor del número que pensaste inicialmente y finalmente réstale seis. (PCA(n) = n)
	P5: Piensa un número, súmale siete. Al resultado multiplícalo por dos. A lo obtenido, primero réstale ocho y después réstale seis. Finalmente resta el doble del número que pensaste inicialmente. (PCA(n) = 0)

Tabla 2.
*Segundo grupo **(B)** de PCA seleccionados.*

En el grupo **C** (Tabla 3), con expresión final 10n + b, o lo que es lo mismo el número de dos cifras nb (siendo n y b, los dos números de una cifra seleccionados), se pretende trabajar también en la puesta en común aspectos del sistema de numeración posicional a partir de las simbolizaciones producidas.

C	**P6:** Piensa un número de una sola cifra, distinto de cero. Multiplícalo por cinco. Réstale cuatro y luego duplica el resultado. Luego, súmale cualquier otro número de una sola cifra y, finalmente, súmale ocho. (PCA(n) = 10n + b)

Tabla 3.
*Tercer grupo **(C)** de PCA seleccionados.*

Por último, cabe destacar que debido a que los alumnos no habían realizado ningún trabajo de simbolización algebraica previo a esta actividad, no era esperable que los mismos, desde un primer momento, efectuaran las simbolizaciones correspondientes a los PCA enunciados, sino que precisamente el objetivo recaía en que tales modelizaciones vayan siendo construidas y analizadas a lo largo de toda la actividad a partir de las propias resoluciones y del análisis conjunto entre pares y entre alumnos y docente.
En lo que respecta a las diferentes formas de escritura, se analizó la pertinencia de las mismas en cuanto a permitir un mejor análisis de las razones de los resultados obtenidos, llegándose a la conclusión de que la escritura horizontal del cálculo completo facilitaba esta tarea. En ese punto se analizó también la utilización del signo igual en las diversas escrituras.
Ante la sugerencia del docente de establecer una forma de escritura que sea propia de cada PCA sin importar el número elegido inicialmente un alumno hace referencia a que dicho valor podría ser representado con la letra «x», siendo refutada esta idea por un compañero quien afirma que «eso es para buscar la solución, y acá el número puede ser cualquiera». Se observa una clara referencia a las posibles primeras experiencias algebraicas vividas por los alumnos en años anteriores, donde sólo se ven enfrentados a ecuaciones con letras que designan números desconocidos o incógnitas, las cuales deben «despejar» para encontrar la solución.

Finalmente, los alumnos propusieron y acordaron trabajar con el símbolo Δ para indicar estos valores. En este punto se discutió y se introdujo la idea de variable, trabajando también con algunas técnicas de simplificación que permitieran transformar expresiones tales como $\Delta + 2\Delta$ en la expresión 3Δ, surgida de **P2**.

En cuanto al trabajo posterior con **B** y **C**, se observaron distintas formas de resolución a las realizadas en el punto anterior. Si bien algunos alumnos continuaron realizando encadenamientos de algoritmos para llegar a la solución, la mayoría optó por escribir el cálculo, completo o fragmentado, de forma horizontal.

Un elemento importante a destacar es la no utilización de variables para representar los números elegidos; por el contrario los alumnos continuaron utilizando ejemplos numéricos (en muchos casos remarcando cada introducción de esos valores elegidos) y luego intentaron agrupar y/o simplificar las expresiones para llegar a las justificaciones de los resultados obtenidos) (Gráficos 3 y 4).

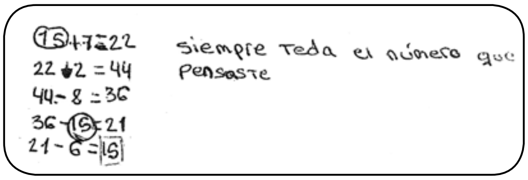

Gráfico 3.

Producción del problema P4 de la Tabla 2.

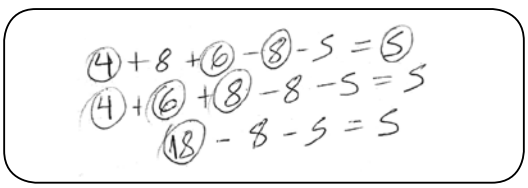

Gráfico 4.

Producción del problema P3 de la Tabla 2.

Precisamente, en los pocos casos en que apareció un intento de utilizar variables, dichas escrituras fueron desechadas para ser reemplazadas por ejemplos numéricos. Ante la consulta de las causas de ese cambio, los alumnos aludieron al hecho de «no poder escribir el doble del anterior de un número que desconocían». Posteriormente, en la puesta en común, se discutieron tales aspectos llegando conjuntamente a las escrituras algebraicas y analizando las propiedades puestas en juego en las mismas. Es decir que se intenta dar respuesta a estos problemas didácticos, justificando las prácticas de modo que las dificultades tradicionales de «manipuleo algebraico» tengan otro significado o desaparezcan (Bolea, 2003).

Por último, se propuso que fueran los mismos alumnos los encargados de formular PCA, que tuvieran resultados como los ya analizados en prácticas anteriores. La intención de esta actividad está puesta en analizar que diferentes PCA pueden dar un mismo resultado, enfrentando nuevamente esta ruptura entre aritmética y álgebra mediante el significado de los símbolos y de los signos (García, 2007).

7. Segunda etapa del proceso de algebrización de los PCA

En esta etapa, la elección de las actividades de estudio e investigación estuvo centrada en la manipulación de la equivalencia entre expresiones algebraicas.

A diferencia del grupo anterior, los alumnos ahora implicados ya disponían de técnicas relativas a la manipulación y al cálculo ecuacional. Es por eso que la elección de la tarea y de los PCA presentados, pretende trabajar desde un aspecto tecnológico la existencia de solución al comparar dos PCA. Esta comparación se realizará a partir del análisis de la expresión que resulta cuando se simplifican los enunciados correspondientes. De esta manera, la cuestión generatriz presentada a los alumnos fue **P**: «En las siguientes propuestas debes justificar en qué casos la igualdad se cumple para todos los números, en qué casos se cumple sólo para algunos números y si en algún caso no se cumple la igualdad para ningún número». A partir de esta cuestión, fueron presentados a los alumnos enunciados para que, mediante la comparación de dos programas de cálculo, puedan establecer las condiciones de solubilidad.

Los enunciados fueron separados en dos bloques (**A** y **B**) con el objeto de realizar una puesta en común conjunta al final de cada uno de ellos. A su vez, la selección de tales enunciados estuvo realizada de tal manera que en cada uno de los bloques existieran comparaciones que llevaran a afirmar la existencia de soluciones únicas, infinitas e inexistencia de dicha solución.

A	**P1—** ¿Puede ser que si a un número lo multiplicamos por nueve, le sumamos dos, le sumamos quince y le restamos treinta, se obtenga como resultado el doble de ese número? (solución única).
	P2— ¿Puede ser que si a un número lo multiplicamos por cuatro, le restamos siete, le sumamos trece y le sumamos ocho, se obtenga el mismo resultado que si a ese número le restamos nueve, le sumamos siete, le sumamos cinco y finalmente le sumamos once? (solución única).
	P3— ¿Puede ser que si a un número lo dividimos por seis, le sumamos dos, le sumamos ocho y al resultado lo multiplicamos por tres, se obtenga la mitad de ese número? (sin solución).
	P4— ¿Puede ser que si a un número le sumamos dos, lo multiplicamos por tres, le sumamos siete veces el número pensado y le sumamos seis, se obtenga el mismo resultado que si al doble de ese número le sumamos tres, multiplicamos el resultado por cinco y luego le restamos tres? (infinitas soluciones).

Tabla 4.

PCA correspondientes a la segunda etapa del proceso de algebrización *(grupo **A**).*

En el trabajo con el grupo **A** (Tabla 4), la mayoría de los alumnos no presentó dificultades para la resolución de **P1** y **P2** y resolvió los PCA a partir de su simbolización algebraica utilizando técnicas de transformación sobre las mismas. Solo en casos puntuales algunos alumnos no utilizaron dichas técnicas, sino que usaron ejemplos numéricos para establecer la existencia de solución (Gráficos 5 y 6).

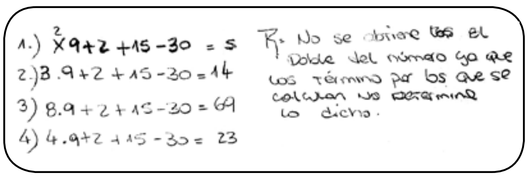

Gráfico 5.

*Producción del problema **P1** de la Tabla 4.*

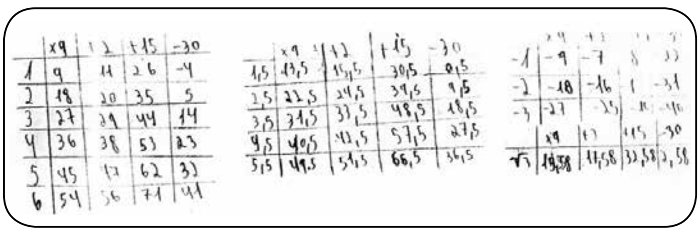

Gráfico 6.

*Otra producción del problema **P1** de la Tabla 4.*

En cuanto a la manipulación algebraica, la mayoría de los alumnos simbolizó las condiciones y estableció una igualdad desde un principio en pos de encontrar la solución de dicha igualdad por medio de técnicas ecuacionales (Gráfico 7). Por otra parte, algunos alumnos manipularon las transformaciones algebraicas por separado y compararon finalmente las transformaciones realizadas en función de la búsqueda de la solución, lo que a su vez indica una interpretación del signo «=» con la jerarquía de proposición a validar.

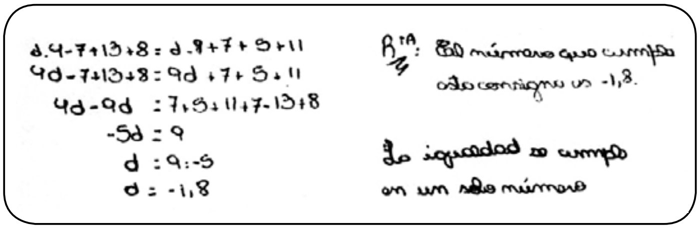

Gráfico 7.

*Producción del problema **P2** de la Tabla 4.*

En **P3** y **P4** las resoluciones se realizaron de igual modo que con los enunciados anteriores. Salvo en algunos casos puntuales (principalmente quienes trabajaron con los PCA por separado y luego los compararon), los alumnos presentaron dificultades para interpretar las manipulaciones realizadas y definir la cantidad de soluciones. Incluso en algunos casos intentaron modificar las técnicas empleadas para «adecuar» las resoluciones a la existencia de una única solución (Gráfico 8).

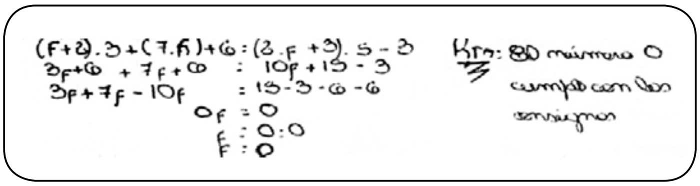

Gráfico 8.

*Producción del problema **P4** de la Tabla 4.*

Posteriormente, en la puesta en común se retomaron y analizaron estos aspectos. En cuanto a los ejemplos numéricos, se estableció su utilidad parcial para validar el hecho de que la igualdad no se cumplía para todos los valores, descartándose esta técnica para establecer que la igualdad propuesta se cumplía para algunos números o para ninguno. También se enfatizó en el análisis de las diferentes escrituras algebraicas efectuadas, centrándose en los diversos aspectos tecnológicos de las transformaciones realizadas, en la interpretación que tiene el signo igual cuando relaciona dos expresiones algebraicas y en las ventajas o carencias de las distintas escrituras para dar respuesta a la cuestión planteada.

El trabajo con el bloque de enunciados **B** (Tabla 5) estuvo destinado al momento de la técnica por parte de los alumnos como también al análisis de los distintos elementos tecnológicos puestos en juego que fueron trabajados durante la puesta en común.

B	**P5—** ¿Puede ser que si a un número lo multiplicamos por cuatro, le restamos ocho, al resultado lo multiplicamos por cinco y le sumamos ciento veinticuatro, se obtenga el mismo resultado que si al número le sumamos diez, le restamos dos, le sumamos veintiuno y lo multiplicamos todo por nueve?
	P6— ¿Puede ser que si a un número le restamos dos, le sumamos diez, le sumamos el consecutivo del número inicial y le restamos el doble del número inicial, se obtenga el mismo resultado que si al número lo multiplicamos por cinco, le sumamos diez, le restamos el número inicial, lo dividimos todo por dos y le restamos el doble del número inicial?
	P7— ¿Puede ser que si a un número le sumamos dos, lo multiplicamos por tres, le restamos diez, le sumamos quince y le sumamos cuatro veces el número inicial, se obtenga el mismo resultado que si al número lo multiplicamos por dos, le sumamos tres, lo multiplicamos todo por cuatro y le restamos el siguiente del número inicial?
	P8— ¿Puede ser que si a un número le sumamos diez, le restamos veinticinco, multiplicamos todo por dos, le restamos tres, dividimos todo por tres y le sumamos nueve, se obtenga el mismo resultado que si al número lo dividimos por tres, le sumamos dieciocho, le restamos dieciséis, lo multiplicamos todo por dos y le restamos cuatro?
	P9— ¿Puede ser que si a un número le restamos siete, lo multiplicamos por tres, le sumamos tres veces el número inicial y le sumamos cinco, se obtenga el mismo resultado que si al número lo multiplicamos por seis, le restamos doce, le sumamos uno y le restamos cinco?

Tabla 5.

PCA seleccionados en la segunda etapa del proceso de algebrización *(grupo **B**).*

Si bien no existió ningún condicionamiento respecto del tipo de producciones solicitadas, ya no aparecieron resoluciones basadas en ejemplos numéricos ni en tablas, todos los alumnos recurrieron a la simbolización algebraica. En cuanto a ésta última, la mayoría optó por realizar la manipulación de los PCA por separado para luego comparar expresiones, aunque algunos continuaron con un trabajo ecuacional. En tanto, quienes trabajaron de esta manera presentaron menores dificultades en cuanto a establecer las condiciones de solución en comparación al trabajo realizado sobre los enunciados del grupo **A** previos a la puesta en común.

Nuevamente, con esta serie de actividades de estudio se pretendió dar respuesta a problemas didácticos que aparecen con la «manipulación algebraica» y que se superan cuando se justifican esas prácticas desde un componente tecnológico.

8. Algunos comentarios finales

No es el propósito obtener conclusiones categóricas de esta primera experiencia pero sí comentar algunos aspectos relevantes de dos momentos diferentes en la realización de la misma, desde quien la piensa y la lleva a cabo. Asimismo, la percepción de este primer intento está contenida en la frase: «es posible hacerlo», o sea, es posible enseñar y aprender álgebra de una manera diferente de la habitual.

Se pudo evidenciar en el aula un aspecto teórico central de la TAD que implica considerar al álgebra como un proceso creciente de actividad matemática que permite superar la discontinuidad o encapsulamiento de los objetos matemáticos como ecuaciones, incógnitas, variables, parámetros y funciones. Este trabajo matemático hizo factible que, con los dos niveles de *algebrización* llevados a cabo, se logre avanzar en las técnicas algebraicas, y también en algunos aspectos tecnológicos mediante propiedades que permiten el logro de expresiones equivalentes y el uso de la letra como variable. Si bien la experiencia fue realizada para dos etapas de *algebrización*, al momento de escribir este artículo se está pensando en continuar con la tercera etapa, que correspondería al trabajo funcional, en donde la letra tomaría las características de variable y parámetro. Es probable que se tome como experiencia base de esta última etapa lo propuesto para un taller de modelización funcional con parámetros (Ruiz, Bosch y Gascón, 2005).

Notas

(1) Se han consultado las ediciones de tres editoriales que son las promovidas por el Ministerio de Educación de la Nación con el envío de ejemplares a las bibliotecas escolares y que están acordes con los últimos cambios curriculares. Dichos textos están conformados por once o doce unidades y no siguen la estructura de los ejes. Se proponen títulos como, por ejemplo: «Iniciación a las prácticas algebraicas», «¿Se cumple para todos los números?», «Expresiones equivalentes», «Búsqueda de regularidades», «Variación del resultado al variar los factores», «Transformar para interpretar».

(2) Se utilizará itálica para escribir palabras o frase propias de la TAD, tal como figura en los documentos de consulta.

(3) A las organizaciones se las caracteriza sólo por sus componentes: tipos de problemas o tareas, técnicas, tecnologías y teorías. Al analizar cómo se relacionan estos componentes dentro de la actividad matemática que se plantea para dar respuesta a las cuestiones iniciales se identifican dos partes en la misma: la práctica matemática en sí, formada por las tareas y técnicas y el razonamiento sobre dicha práctica, conformado por las tecnologías y las teorías. La unión de estos dos aspectos de la actividad matemática, conforma una praxeología matemática (Bolea, Bosch, Gascón, 2001).

Referencias bibliográficas

Bolea, P. (2003). El proceso de *algebrización* de organizaciones matemáticas escolares. *Monografías del Seminario Matemático «García de Galdeano»*, 29. Tesis doctoral publicada por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

Bolea, P.; Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de las organizaciones matemáticas en proceso de *algebrización*. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des MAthematiques*, 21(3), 247–304.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Perspectives curriculaires: voies d'attaque etproblèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5–38.

——— (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.

——— (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. Conferencia presentada en *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigaciones Didácticas de las Matemáticas*. Escuela de Magisterio de Huesca: Universidad de Zaragoza.

Cid, E. y Bolea, P. (2007). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. *Segundo Congreso Internacional de la TAD*. Ùzes, Francia.

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires (2006). *Diseño Curricular para la Educación Secundaria – 1° Año*. La Plata.

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires (2007). *Diseño Curricular para la Educación Secundaria – 2° Año*. La Plata.

——— (2008), *Diseño Curricular para la Educación Secundaria – 3° Año*. La Plata.

——— (2010). *Diseño Curricular para la Educación Secundaria. Matemática Ciclo Superior – 4° Año*. La Plata.

García, F. (2007). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio de las relaciones funcionales en la Educación Secundaria. *Segundo Congreso Internacional de la TAD*. Ùzes, Francia.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón análisis–síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en Didactique desMathématiques*, 13(3), 295–332.

——— (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática*, 11(1), 77–88.

——— (2007). El proceso de *algebrización* de las matemáticas escolares. Escuela de invierno de Didáctica de la Matemática. Buenos Aires: UNSAM. En prensa.

Ruiz, N.; Bosch, M. y Gascón, J. (2005). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris. *Primer Congreso Internacional de la TAD*. Baeza, España.

——— (2007). La *algebrización* de los Programas de Cálculo Aritmético y la introducción del álgebra en Secundaria. *Segundo Congreso Internacional de la TAD*. Ùzes, Francia.