

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL



Identificación y Control Predictivo

Germán Andrés Bustos

FICH

FACULTAD DE INGENIERIA
Y CIENCIAS HIDRICAS

INTEC

INSTITUTO DE DESARROLLO TECNOLÓGICO
PARA LA INDUSTRIA QUIMICA

Tesis de Doctorado **2014**



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

IDENTIFICACIÓN Y CONTROL PREDICTIVO

Germán Andrés Bustos

Tesis remitida al Comité Académico del Doctorado
como parte de los requisitos para la obtención
del grado de
DOCTOR EN INGENIERIA
Mención Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas
de la
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

2014

Comisión de Posgrado, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Ciudad Universitaria, Paraje "El Pozo",
S3000, Santa Fe, Argentina.

Doctorado en Ingeniería
Mención Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas

Título de la obra:

Identificación y Control Predictivo

Autor: Germán Andrés Bustos

Lugar: Santa Fe, Argentina

Palabras Claves:

Control predictivo, identificación en lazo cerrado,
excitación persistente, reactor de polimerización,
ganancias en estado estacionario, estimador multivariable.

A Soledad.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi familia por todo el apoyo que recibí durante mi formación académica, en especial a mis padres, que sin su apoyo y afecto no hubiese podido acceder a ninguno de mis logros personales.

A mis directores Jacinto L. Marchetti y Alejandro H. González, por su paciencia y consejos durante el doctorado.

Índice general

Agradecimientos	III
Acrónimos	XIII
Resumen	XVII
1. Introducción	1
2. Identificación de sistemas	7
2.1. Procedimiento de identificación	8
2.2. Método de Predicción de Error	10
2.3. Métodos clásicos de identificación en lazo	
cerrado	14
2.3.1. Método directo	15
2.3.2. Método indirecto	17
2.3.3. Método combinado entrada-salida	17
2.4. Identificación por subespacios	18
2.4.1. Modelo en Espacio de Estado	19
2.4.2. Interpretación geométrica de las operaciones algebraicas	20
2.4.3. Estructuras matriciales	24
2.4.4. Identificación de sistemas determinísticos	26
2.4.5. Determinación de las matrices del sistema	33
2.4.6. Identificación de sistemas determinísticos-estocásticos	37
2.4.7. Identificación en lazo cerrado por Subespacios	40
2.5. Excitación persistente del sistema	42

3. Control predictivo	47
3.1. Estructura jerárquica de control	47
3.1.1. Sistemas de control de múltiples entradas y salidas	50
3.1.2. Manejo de restricciones	51
3.2. Controladores predictivos en la industria	52
3.3. Modelos, restricciones y objetivos de control	53
3.3.1. Formulación básica	55
3.4. Estabilidad	57
3.4.1. Caracterización del equilibrio	57
3.4.2. Invarianza	59
3.4.3. Generalización de la convergencia al caso de conjuntos	59
3.5. Métodos de excitación bajo MPC	60
3.5.1. Identificación con excitación externa	61
3.5.2. Identificación con excitación interna	61
4. Control predictivo apto para re-identificación del modelo	65
4.1. Notación	65
4.2. Conjuntos invariantes objetivos para identificación	66
4.3. MPC para el seguimiento de conjuntos de equilibrio de control	69
4.4. MPC apto para re-identificación	72
4.4.1. MPC para el seguimiento de conjuntos invariantes para iden- tificación	72
4.4.2. Incluyendo el modo de excitación	76
4.4.3. Operación del lazo	77
4.5. Candidatos para la función distancia generalizada y el costo terminal	78
4.5.1. Distancia de un punto a un conjunto	78
4.5.2. Funcional modificado de Minkowski	79
4.5.3. Acción local de control, costo terminal y restricción terminal	80
4.6. Diferencia Planta-Modelo	83
4.6.1. Incertidumbre paramétrica	83

4.6.2. Cálculo práctico del conjunto ISI robusto	85
4.6.3. Incertidumbre de perturbación aditiva	85
4.7. Resultados de simulación	86
4.7.1. Caso nominal	86
4.7.2. Caso con diferencia entre Planta y Modelo	87
4.8. Conclusiones	96
5. Aplicación del MPC apto para re-identificación a un Reactor de Polimerización	97
5.1. Reactor de polimerización de estireno	97
5.2. Modelo para las predicciones	100
5.3. Resultados de las simulaciones	104
5.3.1. Caso nominal	104
5.3.2. Caso con diferencia entre Planta y Modelo	112
5.4. Conclusiones	123
6. Monitoreo de ganancias	127
6.1. Estimación de ganancias	129
6.1.1. Procesos estables con o sin tiempo muerto	129
6.1.2. Procedimiento cuando hay modos integradores en el proceso	130
6.1.3. Procedimiento general para explorar un conjunto de datos preliminares	133
6.2. Algoritmos para el monitoreo de estimaciones de ganancias	134
6.2.1. Cartas de control múltiples EWMA	135
6.2.2. Cartas de control múltiples CUSUM.	136
6.3. Aplicación a un sistema multivariable sencillo	137
6.3.1. Sistema MIMO adoptado para evaluación.	137
6.3.2. Configuración de colección de datos	138
6.3.3. Señales de excitación de entrada	140
6.3.4. Orden del modelo y rectangularidad de las matrices de Hankel	141
6.3.5. Estimaciones de ganancias individuales	143
6.3.6. Resultados obtenidos con EWMA	145
6.3.7. Resultados obtenidos mediante CUSUM	147

6.4. Estimación de ganancias estacionarias a lazo cerrado	148
6.4.1. Estructura de control	149
6.4.2. Resultados de la simulación en lazo cerrado	150
6.5. Conclusiones	153
7. Conclusiones	155
7.1. Perspectivas de trabajos futuros	156
Bibliografía	159

Índice de figuras

2.1. Estrategia de identificación de sistemas.	10
2.2. Sistema en lazo cerrado.	14
2.3. Interpretación geométrica de una proyección ortogonal.	21
2.4. Interpretación geométrica de una proyección oblicua.	23
2.5. Interpretación geométrica de la proyección oblicua de Y_f .	29
2.6. Métodos de identificación por subespacios	30
2.7. Interpretación geométrica de la proyección oblicua de Y_f sobre el espacio generado por W_p .	32
2.8. Algoritmo de identificación utilizando la secuencia de estados X_i .	35
2.9. Algoritmo de identificación utilizando Γ_i .	36
2.10. Interpretación geométrica de la proyección oblicua de los subespacios generados por los datos de entrada-salida.	39
2.11. Ejemplo de una señal PRBS.	45
3.1. Niveles de la estructura jerárquica de control.	48
3.2. Estructura jerárquica de control	49
3.3. En cada instante de tiempo k se resuelve un problema de optimización de longitud N , del cual solo el primer elemento del vector solución es implementado a la planta.	56
3.4. Equilibrio estable	58
3.5. Método de identificación con excitación externa	61
3.6. Estructura de control MPC de dos capas	63
4.1. Gráfica descriptiva de los conjuntos \mathcal{X} , \mathcal{X}_{ss} , \mathcal{X}^t y \mathcal{X}_{ss}^t .	69

4.2. Gráfica descriptiva de la manipulación del conjunto ISI como a) target de control, y b) conjunto para identificación.	70
4.3. Gráfica descriptiva de la Función Distancia asociada a un conjunto dado.	80
4.4. Conjuntos de nivel de la Función Distancia.	81
4.5. Gráfica descriptiva del Funcional Modificado de Minkowski asociado a un conjunto dado.	81
4.6. Conjuntos de nivel del Funcional Modificado de Minkowski.	82
4.7. Evolución de estados fuera de \mathcal{X}^t	87
4.8. Evolución de estados dentro de \mathcal{X}^t	88
4.9. Entrada, salida y costo.	89
4.10. Familia de 8 conjuntos ISI mínimos correspondientes a los parámetros w de $-0,2$ a $0,1$ y el conjunto ISI robusto \mathcal{X}^t	90
4.11. Familia de 8 conjuntos ISI mínimos correspondientes a los parámetros w de $-0,2$ a $0,1$ y el conjunto ISI robusto \mathcal{X}^t	91
4.12. Evolución de estado fuera de \mathcal{X}^t	92
4.13. Evolución de estado dentro de \mathcal{X}^t	93
4.14. Evolución de entrada, salidas y costo: evolución completa.	94
4.15. Evolución de entrada, salidas y costo: primeros 20 periodos de tiempo.	95
5.1. Diagrama del reactor de polimerización de estireno.	98
5.2. Señales de entrada para la identificación del modelo nominal.	102
5.3. Señales de salida para la identificación del modelo nominal.	102
5.4. Validación del proceso de identificación.	103
5.5. Gráficas de los conjuntos \mathcal{X} y \mathcal{X}^t	106
5.6. Gráfica del conjunto \mathcal{X}^t mínimo.	107
5.7. Evolución de estados fuera de \mathcal{X}^t	108
5.8. Gráficas de \mathcal{X}_{ss}^t y \mathcal{X}^t	109
5.9. Evolución de estados alrededor de \mathcal{X}_{ss}^t	110
5.10. Evolución de las entradas.	111
5.11. Evolución de las salidas.	111
5.12. Evolución del costo.	112
5.13. Evolución de las entradas: primeros 20 periodos de tiempo.	113

5.14. Evolución del costo: primeros 20 periodos de tiempo.	113
5.15. Evolución de las entradas correspondiente al cambio del punto de operación y re-identificación.	114
5.16. Evolución de las salidas correspondiente al cambio del punto de operación y re-identificación.	115
5.17. Evolución del costo correspondiente al cambio del punto de operación y re-identificación.	115
5.18. Cambio del estado de equilibrio x_{ss}^1 al x_{ss}^2	116
5.19. Comparación de trayectorias sobre x_{ss}^1 (blanco) y x_{ss}^2 (negro).	117
5.20. Comparación de trayectorias sobre x_{ss}^1 (blanco) y x_{ss}^2 (negro).	118
5.21. Evolución de estado correspondiente al modo re-identificación bajo una perturbación.	119
5.22. Evolución de estado correspondiente al modo re-identificación bajo una perturbación.	120
5.23. Evolución de las entradas correspondiente al modo re-identificación bajo una perturbación.	121
5.24. Evolución de las salidas correspondiente al modo re-identificación bajo una perturbación.	122
5.25. Evolución del costo correspondiente al modo re-identificación bajo una perturbación.	122
5.26. Comparación de las validaciones de los modelos M_1 y M_2	124
5.27. Respuestas al escalón de los modelos M_1 (rojo) y M_2 (azul).	125
6.1. Respuestas al escalón correspondiente a las funciones de transferencias de la Tabla 6.1.	139
6.2. Estrategia de recolección de datos.	139
6.3. Señales PRBS modificadas ingresadas al sistema de la Tabla 6.1.	141
6.4. Error Absoluto Promedio (AAE).	144
6.5. Secuencia preliminar de las estimaciones de las ganancias.	145
6.6. Cartas de control de EWMA que indican cambios en las ganancias G_{12} , G_{41} y G_{53}	146
6.7. Cartas de control CUSUM mostrando los cambios de las ganancias G_{12} , G_{41} y G_{53} . $S_{ji}^H(t)$ (azul) y $S_{ji}^L(t)$ (rojo).	147

6.8. Estructura de control LP-MPC.	148
6.9. PRBS y manipulada utilizadas para excitar el sistema en LC.	150
6.10. Secuencia de estimaciones de las ganancias en LC.	152
6.11. Cartas de control CUSUM mostrando los cambios de las ganancias	
G_{12} , G_{41} y G_{53} en Lazo Cerrado. $\overline{S}_{ji}^H(t)$ (azul) y $\overline{S}_{ji}^L(t)$ (rojo).	153

Acrónimos

4SID Subspace State Space System Identification

ARMAX Auto-Regressive Moving Average whit eXogenous inputs

ARX Auto-Regressive with eXogenous inputs

CES Control Equilibrium Set

CIS Control Invariant Set

CUSUM Cumulative Sum control chart

CVA Canonical Variate Analysis

DMC Dynamic Matrix Control

EIS Excitation Input Set

ES Equilibrium Set

EWMA Exponentially-Weighted Moving Average Chart

FIR Finite Impulse Response

GPC Generalized Predictive Control

IDCOM Identification-Command o Model Predictive Heuristic Control

IEM Innovation Estimation Method

IS Invariant Set

ISI Invariant Set for Identification

IV Instrumental Variable

IVM Instrumental Variable Method

LP Linear Programming

LTI Linear Time Invariant

MIMO Multi-Input Multi-Output

ML Maximum Likelihood

MOESP Multivariable Output Error State Space

MPC Model based Predictive Control

MPCI Model Predictive Control Identification

N4SIS Numerical Subspace State Space System Identification

PE Persistent Excitation

PE-MPC Persistently Exciting Model Predictive Control

PEM Prediction Error Method

PRBS Pseudo Random Binary Sequence

QDMC Quadratic Dynamic Matrix Control

QP Quadratic Programming

RTO Real Time Optimizer

SID Subspace Identification

SISO Single-Input Single-Output

SMOC Shell Multivariable Optimizing Control

SSTO Steady State Optimizer

SVD Singular Value Decomposition

Resumen

El control predictivo basado en modelos (MPC) se ha convertido en una técnica de control muy utilizada en la actualidad gracias a su capacidad de manejar sistemas multivariados (MIMO) y restricciones. Esta técnica hace uso de modelos del sistema que se desea controlar, por lo que el desempeño del controlador depende en gran medida de la precisión del mismo. Dentro del área de control de procesos, la parte que se dedica a proponer métodos para la obtención de modelos se denomina, en general, *identificación de sistemas*. En el marco concreto de MPC, la identificación de sistemas tiene una significación especial: por un lado, como se dijo, es imperioso tener modelos precisos y actualizados porque la técnica de control basa su desempeño en la precisión de éstos; por el otro, los procesos usualmente controlados mediante MPC no pueden ser identificados cada vez que se desea contar con un nuevo modelo (por razones que se verán más adelante).

Una técnica de identificación - independiente del sistema de control a utilizar - que ha demostrado ser una alternativa eficiente comparada con métodos de identificación clásicos, como el método de error de predicción (PEM), es el método de identificación por subespacios (SID). Dicha técnica aparece como promisoria en el marco de MPC, dado que permite obtener modelos en espacio de estado, multivariados, de un modo sencillo y directo. Por esta razón, el objetivo de esta Tesis es el estudio y desarrollo de métodos de identificación que den respuestas a los problemas típicos de la implementación de MPC. Este estudio incluye el monitoreo de modelos y la formulación de estrategias específicas de MPC apropiadas para la re-identificación de sistemas. En este último aspecto, características importantes en MPC con restricciones, como son la estabilidad y la factibilidad recursiva, deben ser tenidos en cuenta.

Los algoritmos propuestos, tanto en lo referente a estrategias de monitoreo como

de diseño de controles MPC, han sido evaluados mediante simulación.

Capítulo 1

Introducción

El control predictivo basado en modelos (Model Predictive Control, MPC) tiene una amplia aplicación en procesos de la industria química y otros sectores. La mayoría de los MPC comerciales son implementados en conjunto con optimizadores de programación lineal (LP) u optimizadores de programación cuadrática (QP)(Ying y Joseph [73]), cuya función principal es realizar un seguimiento del óptimo económico proporcionando un conjunto factible de set-points o targets para el controlador predictivo. A pesar de la amplia adopción de estos sistemas de control, sucesos de mal funcionamiento o desempeño deficiente continúan siendo reportados.

Desde un punto de vista teórico, se puede decir que el problema general de la estabilidad - y en particular de la estabilidad robusta - es un problema que ha preocupado especialmente a los investigadores del área. Si bien se han conseguido resultados satisfactorios en el caso nominal, aun continúa siendo tema de interés el conseguir un control robusto estable, que presente características apropiadas para aplicaciones industriales (Bemporad y Morari [4], Limon [41], Limon et al. [42], Qin y Badgwell [61], Rodrigues y D.Odloak [66], Zheng y Morari [74]). Lo que se pretende, en todo caso, es asegurar que los controladores permanezcan estables y factibles para una familia de modelos que representan el proceso a controlar. Es sabido que la gran mayoría de los sistemas físicos son de naturaleza no lineal, pero pueden ser aproximados por un conjunto de modelos lineales, cada uno de los cuales lo representa localmente. Para un modelo nominal, correspondiente generalmente al punto de operación más frecuente, la estabilidad puede ser garantizada de muchas maneras

(Rawlings y Mayne [63]); sin embargo, no todas estas formas pueden ser directamente aplicadas a casos industriales de interés. Esto se debe a que los requerimientos teóricos no siempre pueden ser garantizados en aplicaciones reales y, más aún, cuando estas formulaciones son extendidas al caso robusto, en que el control suele tornarse demasiado conservador.

Es bastante claro que el MPC depende fuertemente del modelo que se utiliza para realizar las predicciones. Es en este punto donde aparece la teoría de identificación de sistemas en estrecha relación con MPC: para tener desempeños aceptables, pero también para que sean válidas las garantías de estabilidad y factibilidad recursiva que se proponen en un marco teórico es necesario que el modelo represente lo más cercanamente posible a la planta. Surgen entonces, para las aplicaciones actuales, tres problemas relacionados con la necesidad de contar con modelos actualizados:

1. Primero, se debe contar con un mecanismo eficiente para **detectar cuándo el modelo utilizado por el control MPC ha dejado de ser adecuado**. Esto es independiente de la técnica que se utilice para la re-identificación, en caso que se considere necesaria una actualización.
2. Segundo, suponiendo que es necesaria una re-identificación del modelo, y dado que el proceso de identificación de sistemas de gran escala es complejo y lento, no es posible abrir el lazo de control (desconectar el controlador MPC) para realizar la identificación. De este modo surge el concepto de **identificación a lazo cerrado**, esto es, la necesidad de realizar la identificación mientras el lazo de control está operando. En general, los métodos de identificación en lazo cerrado están clasificados en tres grupos (Soderstrom y Stoica [67]):
 - a) El **método directo** ignora la señal de realimentación e identifica el modelo a partir de las señales de entrada y salida de la planta.
 - b) El **método indirecto** identifica el sistema en lazo cerrado y determina los parámetros de la planta a lazo abierto eliminando la dinámica del controlador.
 - c) El **método combinado entrada-salida** considera las señales de entrada y salida como las salidas del sistema y los set-points como las entradas.

Los dos últimos métodos requieren del conocimiento de la estructura del modelo del controlador (lineal), y por tanto, no son útiles para la identificación en lazo cerrado en sistemas controlados por MPC con restricciones (nótese que un control MPC con restricciones, aún cuando esté basado en modelos lineales, es un control no lineal, cuya ley de control no es explícita, sino que surge de resolver un problema de optimización en línea). Además, es altamente deseable que el procedimiento de re-identificación a lazo cerrado no deteriore las propiedades de estabilidad y factibilidad recursiva del MPC.

3. Tercero, es menester estudiar **cómo se llevará a cabo la identificación a lazo cerrado**. Esto incluye estudiar cómo se excitará el sistema a identificar (si se aplicará una excitación externa, si se aplicará la excitación por medio de una restricción adicional del MPC o por medio del costo, etc.).

En la actualidad se reconoce que la piedra angular del inicio de la teoría de identificación de sistemas son los trabajos de Aström y Bohlin [2] y Ho y Kalman [27]. En el primero, el método de *maximum likelihood* (ML) fue extendido a una sucesión de series temporales con el fin de estimar modelos ARMAX; en el segundo, se resuelve por primera vez el problema de realización determinística de espacios de estados a partir del uso de matrices de Hankel formadas en términos de respuesta al impulso. A partir de estos trabajos varias técnicas de identificación han sido desarrolladas, la mayoría de las cuales están comprendidas dentro de los que se denominan *métodos de predicción de error (PEM)* y *métodos de variable instrumental (IV)*.

A partir de principios de los noventa se propuso un nuevo método de identificación de sistemas, llamado identificación por subespacios (Subspace Identification, SID). Desde ese momento muchas extensiones se han realizado, entre las que se puede citar: Favoreel et al. [13], Jansson [31], Katayama [32], Overschee y Moor [55], Verhaegen [70]. Estos métodos son utilizados para la identificación de modelos en espacios de estados LTI directamente de datos de entrada-salida. Los métodos SID son una buena alternativa a los métodos de regresión como los ARX y ARMAX. Sin embargo, estos métodos se basan en un enfoque diferente, como son las *proyecciones geométricas* y el *álgebra lineal*.

La base teórica de los métodos SID está bien aceptada en la comunidad de control de procesos, aunque la aplicación de estos métodos para la identificación de

procesos reales todavía sigue siendo bastante excepcional. Esto se debe principalmente a su complejidad teórica y a problemas que surgen cuando se intenta realizar identificaciones en lazo cerrado (Huang y Kadali [29], Lin et al. [44]).

En lo referente específicamente a re-identificación en lazo cerrado bajo control predictivo, diversas estrategias fueron desarrolladas: Genceli y Nikolaou [18] proponen un controlador denominado MPC-I (Model Predictive Control and Identification), donde una condición de excitación persistente se agrega como restricción en el problema de optimización. Esta estrategia, que luego fue estudiada, por ejemplo, en Ballin [3], convierte el problema de optimización en no-convexo, perdiéndose así muchas de las propiedades de la formulación del MPC. En Sotomayor et al. [69] se propone una estrategia que manipula los “targets” de estados estacionarios con el objetivo de excitar el sistema sin modificar el algoritmo de control.

Por otro lado, Larsson et al. [38, 39] han propuesto diferentes métodos para el diseño de señales de excitación para modelos en controladores predictivos. En estos métodos, se garantiza con cierta probabilidad, que una performance de control específica pueda ser alcanzada.

En Marafioti [49] se presenta una nueva formulación denominada Persistently Exciting Model Predictive Control (PE-MPC). Esta formulación incorpora la señal de excitación persistente (Persistent Excitation, PE) mediante la inclusión de una restricción en el problema del MPC. La diferencia principal con el trabajo de Genceli y Nikolaou [18] radica en que esta restricción esté inactiva durante los transitorios del sistema, y de esta manera, no se fuerza al MPC a obtener soluciones (identificaciones) en cada período de muestreo.

En Heirung et al. [25] se propone la incorporación de un término en el costo del MPC y un algoritmo de mínimos cuadrados recursivos modificado como restricciones de igualdad para la identificación “on-line” en lazo cerrado. De esta manera, la condición de excitación persistente no es necesaria, ya que el sistema aumentará su excitación en función de la precisión de los parámetros estimados.

En general, en ninguno de los trabajos citados anteriormente se han presentado resultados acerca de la estabilidad de los sistemas bajo MPC cuando se realiza una re-identificación en lazo cerrado.

El objetivo de esta Tesis es por tanto proponer soluciones a los tres problemas

mencionados arriba. Por un lado, se busca diseñar un control MPC, que ante la necesidad de re-identificar el sistema bajo control, pueda hacerlo de forma eficiente y manteniendo en lo posible todas las propiedades del MPC. Por otro lado se busca aprovechar los beneficios de la técnica identificación por subespacios, para diseñar un procedimiento de detección de cambios en el modelo del proceso.

Parte del material presentado en esta Tesis se encuentra también en publicaciones en revistas y en presentaciones en congresos realizadas por el autor:

- A. H. González, A. Ferramosca, G. A. Bustos, J. L. Marchetti, M. Fiacchini and D. Odloak. **Model predictive control suitable for closed-loop re-identification**. Systems & Control Letters, (2014).
- G. A. Bustos, A. H. González and J. L. Marchetti. **Detecting stationary gain changes in large process systems**. Chemical Engineering Communications, Taylor & Francis Group, (2012).
- A. H. González, A. Ferramosca, G. A. Bustos, J. L. Marchetti and D. Odloak. **Model Predictive Control Suitable for Closed-loop Re-identification**. American Control Conference (ACC), Washington, DC, (2013).
- G. A. Bustos, A. H. González, A. Ferramosca and J. L. Marchetti. **Application of Model predictive control suitable for closed loop re-identification to a polymerization reactor**. XV Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (RPIC), Río Negro, Argentina, (2013).
- A. H. González, G. A. Bustos, A. Ferramosca and J. L. Marchetti. **Model predictive control suitable for closed-loop re-identification**. XXIII Congreso Argentino de Control Automático (AADECA), Buenos Aires, Argentina, (2012).
- G. A. Bustos, A. H. González and J. L. Marchetti. **Monitoring process gains used in LP-MPC systems**. XXIII Congreso Argentino de Control Automático (AADECA), Buenos Aires, Argentina, (2012).
- G. A. Bustos, A. H. González and J. L. Marchetti. **Monitoring steady-state gains in large process systems under closed-loop operation**. XIV Reu-

nión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (RPIC), Oro Verde, Argentina, (2011).

- G. A. Bustos , J. L. Godoy, A. H. González and J. L. Marchetti. **Monitoring steady-state gains in large process systems**. The 5th International Conference on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation (IMAACA), Rome, Italy, (2011).

A manera de resumen conceptual del desarrollo que se presenta en los siguientes capítulos, se desea indicar que los principales aportes de esta tesis radican en: i) la puesta a punto de una metodología de identificación basada en proyecciones del espacio de medición en subespacios específicos, asumiendo la utilización directa de datos crudos del proceso en estudio. ii) La especialización del problema de identificación a la determinación lo más exacta y precisa posible de las ganancias estacionarias de procesos multivariados, atendiendo al ajuste de los principales parámetros del método. iii) El tratamiento especial dado a las dinámicas que presentan modos integrales para lograr una estimación adecuada del comportamiento tipo “rampa” de las variables afectadas. iv) La novedosa utilización de conceptos y herramientas para la determinación de distancia a un conjunto en la definición de condiciones que disparan la re-identificación frente a la exclusiva búsqueda de estabilidad por parte del controlador. v) La aplicación de los conceptos anteriores mediante un MPC apto para re-identificación a un reactor de polimerización, la cual constituye una prueba crítica y novedosa que resalta las virtudes de la metodología descrita. vi) La utilización combinada del método de identificación por subespacios con los algoritmos “suma acumulada” o CUSUM, y “promedio móvil geométrico” o EWMA para la pronta detección de cambios incipientes en las ganancias estacionarias, parámetros de crítica importancia en la determinación de “targets” del MPC. Finalmente, por supuesto, se desea reconocer la inocultable y beneficiosa influencia del grupo de trabajo en el que este autor se ha desempeñado durante le desarrollo de su tesis.

Capítulo 2

Identificación de sistemas

La identificación de sistemas consiste en obtener modelos dinámicos de sistemas a partir de datos experimentales. En control, los métodos de identificación de sistemas son utilizados para crear reguladores, diseñar algoritmos de predicción, o realizar simulaciones. Por otro lado, en aplicaciones de procesamiento de señales, se utilizan para análisis espectral, detección de fallas (fault detection), reconocimiento de patrones, filtros adaptativos, predicción lineal, etc. (Soderstrom y Stoica [67]). La calidad del modelo que se utiliza en los controladores predictivos afecta directamente la performance del control del proceso. Sin embargo, en la búsqueda del modelo que mejor se adapte al comportamiento del sistema real, nunca se llegará a encontrar un modelo que represente en forma exacta al sistema; sólo se obtendrá una aproximación del mismo. Los métodos de identificación más populares en la actualidad son el método de predicción del error (PEM) y el método de identificación por subespacios (SID). El método PEM se basa en algoritmos de optimización local, mientras que los métodos de subespacios se basan en operaciones geométricas en subespacios generados por las matrices de datos y no utilizan criterios explícitos de optimización. Por lo tanto, en general, los métodos de subespacios son rápidos y confiables. Una desventaja es que son menos precisos que PEM.

El proceso de identificación puede realizarse en *lazo abierto* (LA) o en *lazo cerrado* (LC). El primero se realiza por lo general cuando el sistema de control se encuentra en su estado inicial de desarrollo, o sea, cuando se cuenta con la posibilidad de llevar el sistema a su punto de operación y moverlo alrededor del mismo sin ningún “feedback”

que trate de modificarlo. El segundo se realiza cuando no es posible abrir el lazo de control. Las razones para esto pueden ser varias: inestabilidad en lazo abierto, control de producción, ganancias (dinero), seguridad o debido a que el sistema contiene un mecanismo de retroalimentación inherente (Ljung [45]). A continuación se presentan algunas desventajas de la identificación en lazo cerrado (Forssell y Ljung [15]):

- El lazo de control produce la correlación entre las señales de entrada (manipuladas) y el ruido del sistema, lo que resulta en el fallo de muchos métodos de identificación, como por ejemplo el *N4SID*.
- Varias estructuras de modelos resultan muy difíciles de usar, especialmente en estructuras no paramétricas (Ljung [45]).
- Por definición, un sistema en lazo cerrado contiene un controlador que se esfuerza por reducir las perturbaciones del sistema, manteniendo el mismo en un punto de operación deseado. Esto resulta en la reducción de la excitación del sistema junto con la información que contienen los datos cuando se está identificando.

El último ítem refiere a un factor importante para obtener un modelo preciso del sistema identificado. Para el caso de lazo abierto, el único criterio para *datos informativos* es que la señal de entrada sea de excitación persistente (ver Sección [2.5]). Para el caso de lazo cerrado, esto último no es suficiente (Forssell y Ljung [15]).

2.1. Procedimiento de identificación

La construcción de modelos a partir de datos está relacionada con tres entidades básicas: (Ljung [45])

1. Conjunto de datos Z^N .
2. Un Conjunto de modelos candidatos.
3. Un criterio para asignar el modelo del conjunto que mejor se ajuste a los datos Z^N .

Los datos de entrada-salida son por lo general obtenidos a partir de un experimento específico de identificación, donde el usuario puede determinar qué señales medir, cuándo medirlas y las características de las señales de entradas que excitarán al sistema. El objetivo del experimento será entonces realizar estas elecciones en forma correcta de manera de obtener un conjunto de datos con la mayor información posible. En algunos casos, estas elecciones que realiza el usuario para la identificación no son posibles y éste se debe limitar a los datos que entrega el sistema cuando opera en forma normal, como por ejemplo en el caso de un sistema controlado en lazo cerrado. Definir qué conjunto de modelos serán los candidatos dependerá, por lo general, de la información previa que se tenga del sistema a identificar.

Determinar el modelo del conjunto que mejor se adapta a los datos mediante un criterio se denomina método de identificación. Los algoritmos que determinan los métodos de identificación pueden dividirse en tres clases:

- Métodos de predicción de error (PEM).
- Métodos de identificación por subespacios (SID).
- Métodos de análisis espectral y correlación.

Luego del procedimiento de identificación se determina cuándo el modelo es suficientemente bueno, o sea, cuándo es válido para el propósito en particular. Este test se denomina “*validación de modelo*”. Hay varias maneras de evaluar el modelo, la manera más natural es comparando el modelo en una simulación con los datos medidos en proceso real. Un índice que se utiliza para realizar la validación es el índice de ajuste FIT:

$$FIT(\%) = 100 \left(1 - \frac{\|\hat{y} - y\|}{\|y - \bar{y}\|} \right), \quad (2.1)$$

donde \hat{y} es el valor predicho por el modelo, y es el valor real de sistema y \bar{y} es el promedio de las mediciones obtenidas.

El procedimiento de identificación de sistemas se puede representar también en forma esquemática mediante el diagrama en bloque de la Figura (2.1). En éste, el bucle determina como primer paso que se adquieran los datos, luego se elija el conjunto de modelos y por último se determina el mejor modelo para ese conjunto.

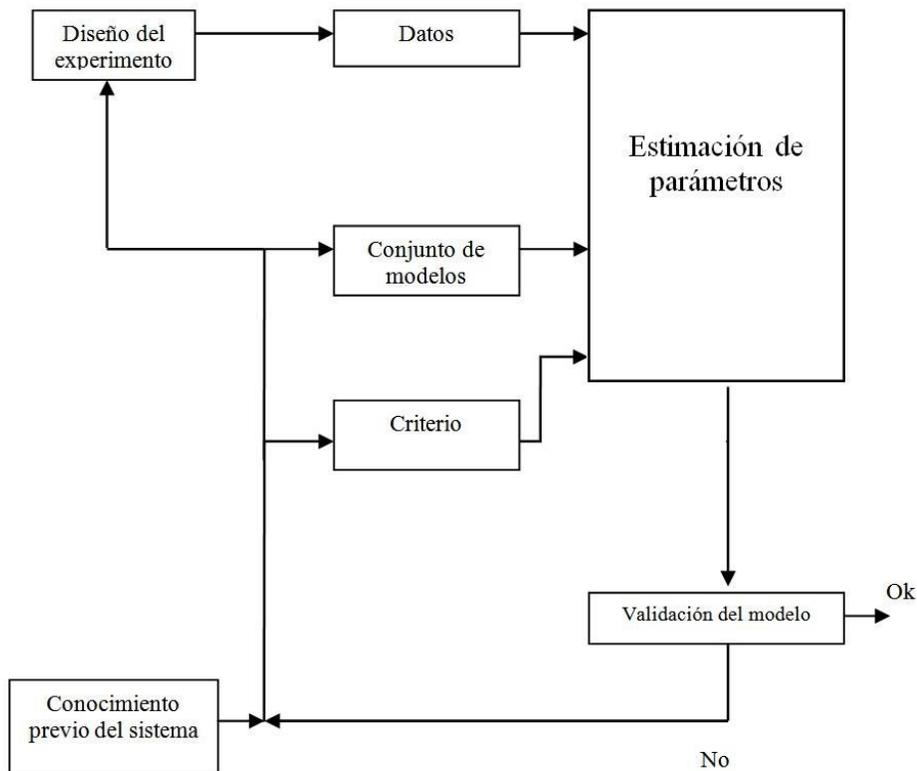


Figura 2.1: Estrategia de identificación de sistemas.

En el caso de que el modelo que se obtuvo no pase la validación, se debe revisar todos los pasos realizados previamente y repetir el procedimiento de identificación.

El modelo puede ser deficiente por varias razones: i) el procedimiento numérico falla en encontrar el mejor modelo acorde a nuestro criterio; ii) el criterio no fue elegido en forma correcta; iii) el conjunto de modelos no es apropiado (en este no se halla una buena descripción del sistema); iv) el conjunto de datos no tiene información suficiente para poder obtener un buen modelo.

2.2. Método de Predicción de Error

El Método del Error de Predicción (Prediction Error Method, PEM) es el método clásico de identificación de sistemas LTI (Linear Time Invariant) (Ljung [45]). Este método agrupa, como casos particulares, métodos como ARX, ARMAX, BJ, OE,

Polinomios	Modelo
B	FIR
A,B	ARX
A,B,C	ARMAX
A,C	ARMA
A,B,D	ARARX
A,B,C,D	ARARMAX
B,F	OE (OUTPUT ERROR)
B,C,D,F	BJ (BOX-JENKINS)

Tabla 2.1: Modelos utilizado en PEM.

etc. Estos algoritmos se basan en la resolución de problemas de optimización, que por lo general son no lineales. Estos métodos necesitan parametrizaciones previas del sistema, que para la convergencia de los parámetros requiere una estructura del modelo lo más precisa posible.

Justamente, el paso inicial en los métodos de predicción de error es la selección de la estructura del modelo que representará la dinámica del proceso. Una forma generalizada de estos modelos puede escribirse de la siguiente manera :

$$A(q^{-1})y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(t), \quad (2.2)$$

siendo $y(t)$, $u(t)$ y $e(t)$ las salidas, entradas y ruido del proceso, respectivamente. El orden de los polinomios A , B , C y D es un parámetro seleccionado por el usuario. El operador q^{-1} es utilizado como operador de retroceso ($q^{-1}f(t) = f(t-1)$). Dependiendo de cuales de estos polinomios son utilizados, la estructura del modelo recibe el nombre indicado en la Tabla [2.1](#).

Para hacer un análisis sencillo del método de predicción de error se utilizará una estructura simple y muy utilizada como es el modelo ARX:

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) + \frac{1}{A(q^{-1})}e(t), \quad (2.3)$$

donde

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + a_3q^{-3} + \dots + a_{n_a}q^{-n_a}$$

y

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + b_3q^{-3} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b}.$$

Los órdenes n_a y n_b de los polinomios respectivos son parámetros definidos por el usuario, y están relacionados con la estructura del sistema real. Transformando (2.3) en una ecuación en diferencias, se tiene

$$y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_{n_a}y(t-n_a) = b_1u(t-1) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) + e(t). \quad (2.4)$$

Para una notación más compacta se definen los siguientes vectores:

$$\theta = \left[a_1 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n_b} \right]^T \quad (2.5)$$

$$\varphi(t) = \left[-y(t-1) \quad \dots \quad -y(t-n_a) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-n_b) \right]^T. \quad (2.6)$$

Con (2.5) y (2.6), (2.4) puede reescribirse como :

$$y(t) = \varphi^T(t) \theta + e(t). \quad (2.7)$$

Para la estructura ARX, la salida predicha del modelo identificado queda definida como:

$$\hat{y}(t) = \varphi(t)^T \hat{\theta} \quad (2.8)$$

y el *error de predicción* queda definido como:

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t). \quad (2.9)$$

Ahora se hace necesario tomar un criterio de ajuste para seleccionar los parámetros del sistema. Los criterios pueden ser mínimo de la sumatoria de error, mínimo del valor absoluto del error, etc. Aunque existen diferentes criterios, el más utilizado es el criterio de *mínimos cuadrados*. De esta manera, el problema de obtener el vector de parámetros θ queda establecido a partir del siguiente problema de optimización

$$\underset{\theta}{\text{mín}} \quad V_N(\theta, Z^N). \quad (2.10)$$

donde

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - \hat{y}(t|\theta))^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - \varphi^T(t)\theta)^2. \quad (2.11)$$

Así los parámetros estimados mediante PEM, con el criterio de ajuste definido por (2.11), son obtenidos a partir de la resolución del siguiente problema de optimización

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta} V_N(\theta, Z^N) \quad (2.12)$$

Como V_N es cuadrática en θ , se puede encontrar fácilmente el mínimo derivando (2.11) e igualando a cero:

$$0 = \frac{d}{d\theta} V_N(\theta, Z^N) = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) (y(t) - \varphi^T(t)\theta) \quad (2.13)$$

y se obtiene

$$\sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t) = \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t)\theta. \quad (2.14)$$

Despejando ahora θ se obtiene la solución por mínimos cuadrados del problema (2.12)

$$\hat{\theta}_N = \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t) \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t). \quad (2.15)$$

Es importante destacar que el desarrollo de este método, por mera simplicidad, fue realizado para un sistema SISO. En el caso de un sistema MIMO, el procedimiento se torna más complejo, ya que los parámetros de los polinomios son descritos por matrices y el error de predicción se convierte en un vector. Además, debido a que es necesaria una aproximación del modelo propuesto a la dinámica real del sistema, el método de error de predicción suele caer en mínimos locales cuando se trabaja con sistemas MIMO. Esto incentiva al uso de métodos modernos de identificación, como el método de subespacios, el cual realiza una identificación del sistema mediante un modelo en espacios de estados, para el cual es indistinto si el sistema es SISO o

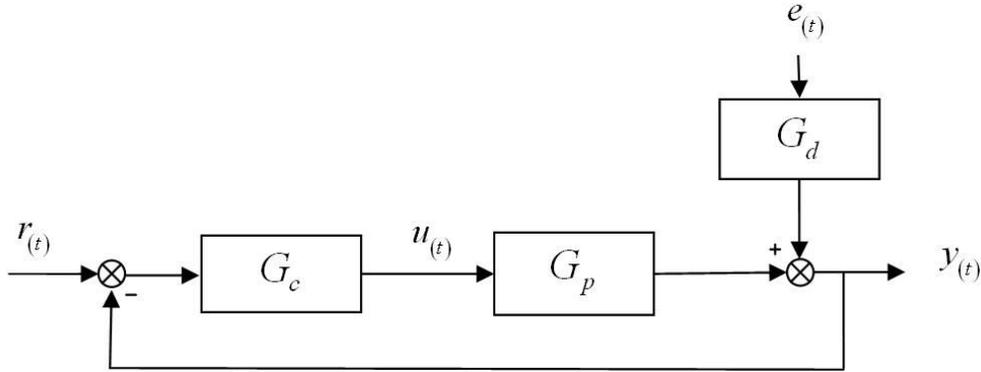


Figura 2.2: Sistema en lazo cerrado.

MIMO (ver sección [2.4](#)).

2.3. Métodos clásicos de identificación en lazo cerrado

En general, en la industria, es necesario realizar identificaciones en lazo cerrado. Las razones son varias: inestabilidad en lazo abierto, control de producción, pérdidas de ganancias, seguridad, o a que el sistema contiene un mecanismo de retroalimentación inherente (Ljung [45](#)).

En esta sección se mostrarán los tres métodos generales de identificación en lazo cerrado sobre el sistema definido por la Figura [2.2](#). A partir de este sistema se pueden observar dos ecuaciones principales:

$$y(t) = G_p(q^{-1}, \theta_0) u(t) + G_d(q^{-1}, \theta_0) e(t) \quad (2.16)$$

$$u(t) = -G_c(q^{-1}) y(t) + G_c(q^{-1}) r(t) \quad (2.17)$$

donde $e(t)$ es ruido blanco.

El objetivo de identificación en lazo cerrado es encontrar el modelo que mejor

se ajuste a los datos de entrada $u(t)$ y de salida $y(t)$ para la estructura adoptada $G_p(q^{-1}, \theta)$:

$$y(t) = G_p(q^{-1}, \theta) u(t). \quad (2.18)$$

2.3.1. Método directo

Si para el sistema definido por la Figura 2.2 existe una señal $r(t)$ con una excitación persistente (ver Capítulo 2.5) de orden suficientemente grande, luego mientras el número de muestras $N \rightarrow \infty$, $G_p(q^{-1}, \theta)$ y $G_d(q^{-1}, \theta)$ pueden converger a sus valores reales aplicando sobre los datos de entrada $u(t)$ y salida $y(t)$ el método de predicción de error. Esto es denominado como método directo de identificación en lazo cerrado (Ljung [45], Soderstrom y Stoica [67]). Para ilustrar los detalles del método, se realizará un ejemplo sencillo que consiste en la identificación de un sistema SISO (Huang y Kadali [29]). Supongamos que el proceso real y el modelo de la perturbación del sistema en la Figura 2.2 están definidos por $G_p(q^{-1}, \theta_0)$ y $G_d(q^{-1}, \theta_0)$ respectivamente. Luego, la respuesta del controlador en lazo cerrado se puede escribir como

$$u(t) = \frac{G_c(q^{-1})}{1 + G_c(q^{-1}) G_p(q^{-1}, \theta_0)} r(t) + \frac{G_d(q^{-1}, \theta_0) G_c(q^{-1})}{1 + G_c(q^{-1}) G_p(q^{-1}, \theta_0)} e(t). \quad (2.19)$$

Reemplazando (2.16) dentro del error de predicción $\varepsilon(t, \theta)$, se obtiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, \theta) &= \frac{1}{G_d(q^{-1}, \theta)} [y(t) - G_p(q^{-1}, \theta) u(t)] \\ &= \frac{1}{G_d(q^{-1}, \theta)} [G_p(q^{-1}, \theta_0) - G_p(q^{-1}, \theta)] u(t) + \frac{G_d(q^{-1}, \theta_0)}{G_d(q^{-1}, \theta)} e(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Usando (2.19) en la ecuación anterior se tiene

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, \theta) &= \frac{1}{G_d(q^{-1}, \theta)} [G_p(q^{-1}, \theta_0) - G_p(q^{-1}, \theta)] \left[\frac{G_c(q^{-1})}{1 + G_c(q^{-1}) G_p(q^{-1}, \theta_0)} r(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{-G_d(q^{-1}, \theta_0) G_c(q^{-1})}{1 + G_c(q^{-1}) G_p(q^{-1}, \theta_0)} e(t) \right] + \frac{G_d(q^{-1}, \theta_0)}{G_d(q^{-1}, \theta)} e(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Definiendo ahora las ecuaciones de sensibilidad

$$S(q^{-1}, \theta) = \frac{1}{1 + G_c(q^{-1}) G_p(q^{-1}, \theta)} \quad (2.22)$$

$$S(q^{-1}, \theta_0) = \frac{1}{1 + G_c(q^{-1}) G_p(q^{-1}, \theta_0)} \quad (2.23)$$

luego la ecuación (2.21) se puede simplificar como:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t, \theta) &= \frac{1}{G_d(q^{-1}, \theta)} [G_p(q^{-1}, \theta_0) - G_p(q^{-1}, \theta)] S(q^{-1}, \theta_0) G_c(q^{-1}) r(t) \\ &+ \frac{S(q^{-1}, \theta_0) G_d(q^{-1}, \theta_0)}{S(q^{-1}, \theta) G_d(q^{-1}, \theta)} e(t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\triangleq \Phi_r(q^{-1}, \theta, \theta_0) r(t) + \Phi_e(q^{-1}, \theta, \theta_0) e(t) \quad (2.25)$$

donde

$$\Phi_r(q^{-1}, \theta, \theta_0) = \frac{1}{G_d(q^{-1}, \theta)} [G_p(q^{-1}, \theta_0) - G_p(q^{-1}, \theta)] S(q^{-1}, \theta_0) G_c(q^{-1}) \quad (2.26)$$

$$\Phi_e(q^{-1}, \theta, \theta_0) = \frac{S(q^{-1}, \theta_0) G_d(q^{-1}, \theta_0)}{S(q^{-1}, \theta) G_d(q^{-1}, \theta)} \quad (2.27)$$

Como la excitación externa (set-point) $r(t)$ es independiente del ruido blanco $e(t)$, cuando se minimiza $Cov[\varepsilon(t, \theta)]$ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\Phi_r(q^{-1}, \theta, \theta_0) = 0$$

$$\Phi_e(q^{-1}, \theta, \theta_0) = 1$$

De esta manera se puede concluir que bajo lazo cerrado y aplicando el método de identificación directo, cuando $Cov[\varepsilon(t, \theta)]$ alcanza su mínimo $Cov[e(t)]$, las siguientes igualdades se cumplen

$$G_p(q^{-1}, \theta) = G_p(q^{-1}, \theta_0)$$

$$S(q^{-1}, \theta) = S(q^{-1}, \theta_0)$$

$$G_d(q^{-1}, \theta) = G_d(q^{-1}, \theta_0)$$

es decir que la identificación es consistente.

2.3.2. Método indirecto

El método de identificación indirecto está compuesto por dos pasos: 1) identificación del sistema en lazo cerrado; 2) luego extraer $G_p(q^{-1}, \theta)$ de la anterior identificación. A continuación se mostrará un ejemplo del procedimiento. En el caso de un sistema SISO, la respuesta de la salida acorde al sistema planteado en la Figura 2.2 queda definida con la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{G_c(q^{-1}) G_p(q^{-1}, \theta)}{1 + G_c(q^{-1}) G_p(q^{-1}, \theta)} r(t) + \frac{G_d(q^{-1}, \theta)}{1 + G_c(q^{-1}) G_p(q^{-1}, \theta)} e(t) \\ &\triangleq M(q^{-1}, \theta) r(t) + N(q^{-1}, \theta) e(t) \end{aligned}$$

Si se garantiza que el ruido en la salida $e(t)$ no está correlacionado con el set-point $r(t)$, las ecuaciones anteriores definen un problema de identificación en lazo abierto. De esta manera, identificando $M(q^{-1}, \theta)$ y $N(q^{-1}, \theta)$ primero, se pueden obtener $G_p(q^{-1}, \theta)$ y $G_d(q^{-1}, \theta)$ respectivamente. En este ejemplo en particular, $G_p(q^{-1}, \theta)$ puede ser calculada como:

$$G_p(q^{-1}, \theta) = \frac{1}{\frac{G_c(q^{-1})}{M(q^{-1}, \theta)} - G_c(q^{-1})}. \quad (2.28)$$

2.3.3. Método combinado entrada-salida

A diferencia del método anterior, el *método combinado entrada-salida* permite la identificación de $G_c(q^{-1})$ junto a $G_p(q^{-1}, \theta)$ y $G_d(q^{-1}, \theta)$. En el caso de un sistema SISO, las respuesta de entrada $u(t)$ y salida $y(t)$ quedan definidas como:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{G_c(q^{-1}) G_p(q^{-1}, \theta)}{1 + G_c(q^{-1}) G_p(q^{-1}, \theta)} r(t) + \frac{G_d(q^{-1}, \theta)}{1 + G_c(q^{-1}) G_p(q^{-1}, \theta)} e(t) \\ &= M(q^{-1}, \theta) r(t) + N(q^{-1}, \theta) e(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{G_c(q^{-1})}{1 + G_c(q^{-1})G_p(q^{-1}, \theta)} r(t) + \frac{G_d(q^{-1}, \theta) G_c(q^{-1})}{1 + G_c(q^{-1})G_p(q^{-1}, \theta)} e(t) \\
&= P(q^{-1}, \theta) r(t) + Q(q^{-1}, \theta) e(t)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores se pueden reescribir en forma vectorial,

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(q^{-1}, \theta) \\ P(q^{-1}, \theta) \end{pmatrix} r(t) + \begin{pmatrix} N(q^{-1}, \theta) \\ Q(q^{-1}, \theta) \end{pmatrix} e(t) \quad (2.29)$$

Como suponemos que el set-point $r(t)$ no está correlacionado con el ruido en la salida $e(t)$, luego $M(q^{-1}, \theta)$, $N(q^{-1}, \theta)$, $P(q^{-1}, \theta)$ y $Q(q^{-1}, \theta)$ pueden ser estimados a partir de un problema de identificación el lazo abierto, en el cual se obtiene $G_p(q^{-1}, \theta)$, $G_c(q^{-1}, \theta)$ y $G_d(q^{-1}, \theta)$.

Dentro del contexto de identificación en lazo cerrado bajo MPC, los últimos dos métodos no pueden ser utilizados. 1) En el método indirecto es necesario conocer los parámetros del controlador lineal; 2) en el método combinado entrada-salida, por más que se identifique los parámetros del controlador, este debe ser lineal. Además la solución de estos métodos no son triviales, principalmente en procesos multivariables de gran escala. Otro factor que hace inutilizables estos métodos es que los controles MPC que tienen incorporado la etapa de programación lineal (LP) no tienen la posibilidad de que el usuario manipule los set-point, ya que estos son resultado de la optimización de un costo económico.

La literatura indica que los experimentos el lazo abierto permiten una mayor excitación persistente del sistema y por lo tanto datos más informativos (Goodwin y Payne [23]).

2.4. Identificación por subespacios

El nombre de *identificación por subespacios* proviene del hecho de que los modelos lineales que se obtienen mediante este método surgen del espacio fila y columna (subespacios) de ciertas matrices, que son calculadas a partir de los datos de entrada-salida del sistema. Por lo general, el espacio columna de tales matrices de datos contiene información del sistema (Γ_i), mientras que el espacio fila permite obtener la secuencia de estados (X_i). Estas matrices se calculan directamente de los datos

de entrada-salida, sin conocimiento previo del sistema que las genera (Overschee y Moor [55]).

En la actualidad los algoritmos de *Métodos de Identificación por Subespacios* (SID) compiten en su performance con los *Métodos de Predicción de Error* (PEM) y han mostrado buenas propiedades. A continuación se presentan algunas de ellas:

1. *Identificación Multivariable*: Una de las principales ventajas de los métodos de identificación por subespacios es que no necesitan de una parametrización previa al proceso de identificación, que en el caso de sistemas MIMO es una tarea complicada.
2. *Robustez Numérica*: Otra de sus ventajas importantes es su eficiencia y robustez computacional otorgada por la utilización de herramientas de álgebra lineal como son la descomposiciones LQ y SVD.
3. *Pocos parámetros definidos por el usuario*: El único parámetro que se debe definir es el orden del sistema. No existe la necesidad de parametrizaciones complejas, aún para sistemas MIMO, ya que este método utiliza modelos en espacio de estados.
4. *Reducción del orden del sistema*: Este método incorpora implícitamente un reductor de orden, el cual es importante cuando se usan datos reales de planta.

El principal problema de estos métodos de identificación es que no son aptos para la identificación de sistemas bajo lazo cerrado (Huang y Kadali [29], Lin et al. [44]) (ver Sección 2.4.7).

2.4.1. Modelo en Espacio de Estado

En esta Tesis se considera un modelo en espacio de estados en forma de innovaciones, representado por:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Ke(k) \quad (2.30)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) + e(k), \quad (2.31)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de n estados, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de m entradas al sistema, $y(k) \in \mathbb{R}^l$ es el vector de l salidas del sistema, K es la ganancia de Kalman en estado estacionario y $e(k) \in \mathbb{R}^l$ es una innovación desconocida con matriz de covarianza igual a $E[e_k e_k^T] = R_e$. Este modelo está relacionado con el ampliamente utilizado modelo en espacio de estados estocástico

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + v(k) \quad (2.32)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) + w(k) \quad (2.33)$$

donde $w(k)$ y $v(k)$ son el ruido de medición y del proceso respectivamente, con matrices de covarianzas $E[v(k)v(k)^T] = Q$, $E[w(k)w(k)^T] = R$ y $E[v(k)w(k)^T] = S$.

Aunque el modelo (2.32-2.33) tiene mejores interpretaciones físicas, el modelo en espacio de estados en forma de innovaciones (2.30-2.31) es más adecuado para métodos de identificación por subespacios, debido a que el modelado del ruido tiene menos grados de libertad (Huang y Kadali [29]).

El problema a resolver por el método de subespacios puede ser descrito de la siguiente manera: dado un conjunto de datos suficientemente grande, generado por el sistema desconocido (2.30-2.31), determinar el orden n del sistema, las matrices del sistema A , B , C , D , K y la matriz de covarianza R_e del ruido $e(k)$. En la siguiente sección se presentan las principales herramientas con interpretación geométrica utilizadas en este método de identificación.

2.4.2. Interpretación geométrica de las operaciones algebraicas

En esta sección se presentan las principales herramientas algebraicas que utiliza el método SID, y su interpretación geométrica.

Consideremos las matrices $A \in \mathbb{R}^{p \times j}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times j}$ y $C \in \mathbb{R}^{r \times j}$. Los elementos de las filas de estas matrices se pueden interpretar como las coordenadas de un vector en un espacio de dimensión j . Por lo tanto, las filas de las matrices A , B y C definen una base para un espacio vectorial lineal en los espacios de dimensión j . Se considera además que $j \geq \max(p, q, r)$.

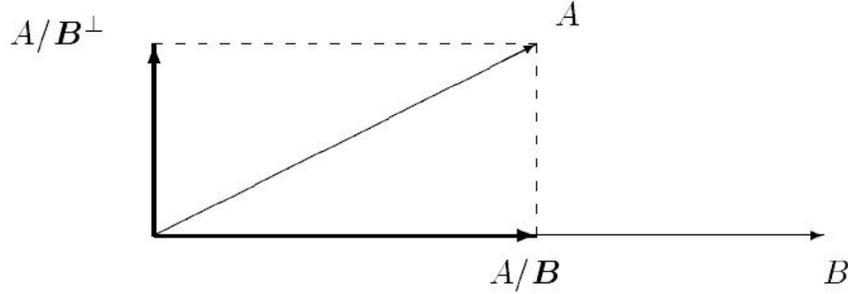


Figura 2.3: Interpretación geométrica de una proyección ortogonal.

Proyección ortogonal

La proyección ortogonal del subespacio generado por las filas de una matriz sobre el subespacio generado por las filas de la matriz B se realiza mediante el operador Π_B , que se define como:

$$\Pi_B = B^T \cdot (BB^T)^\dagger \cdot B \quad (2.34)$$

Por lo tanto la proyección ortogonal del espacio fila de A sobre el espacio fila de B , indicado por A/B , se define como:

$$A/B = A \cdot \Pi_B = A \cdot B^T \cdot (BB^T)^\dagger \cdot B \quad (2.35)$$

Este operador puede interpretarse esquemáticamente en el espacio de dimensión j ($j = 2$) como muestra la Figura 2.3. La herramienta del algebra lineal que se utiliza para realizar estas proyecciones es la descomposición LQ ¹.

En la Figura 2.3 también se muestra la proyección A/B^\perp , que representa la proyección del espacio fila de A sobre el complemento ortogonal del espacio fila de B . En este caso el operador y la proyección se definen como:

$$\Pi_{B^\perp} = I_j - \Pi_B = I_j - B^T (B \cdot B^T)^\dagger \cdot B \quad (2.36)$$

$$A/B^\perp = A \cdot \Pi_{B^\perp} = A - A \cdot B^T \cdot (B \cdot B^T)^\dagger \cdot B \quad (2.37)$$

¹La factorización LQ de A es esencialmente la misma que la factorización QR de A^T . Esto es $A = (A^T)^T = (QR)^T = LQ^T$.

Claramente de la gráfica se puede observar que el espacio fila de la matriz A puede considerarse como la suma de los espacios fila de las dos matrices que se obtiene de las descomposiciones que realizan los operadores Π_B y Π_{B^\perp} , las cuales son ortogonales entre si.

$$A = A.\Pi_B + A.\Pi_{B^\perp} \quad (2.38)$$

Se puede considerar también que la proyección ortogonal descompone a la matriz A en una combinación lineal de las filas de B y las filas del complemento ortogonal de B .

$$L_B.B = A/B \quad (2.39)$$

$$L_{B^\perp}.B^\perp = A/B^\perp \quad (2.40)$$

donde B^\perp es una base para el complemento ortogonal del espacio de las filas de la matriz B y A se puede expresar como

$$A = L_B.B + L_{B^\perp}.B^\perp \quad (2.41)$$

la cual representa a la matriz A (espacio fila de A) como una combinación lineal de las filas de B y B^\perp .

Una forma computacionalmente eficiente y robusta de calcular la proyección ortogonal es mediante la descomposición LQ:

$$\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} = LQ = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Luego, la proyección ortogonal puede escribirse como:

$$A/B = L_{21}Q_1, \quad (2.43)$$

$$A/B^\perp = L_{22}Q_2, \quad (2.44)$$

Proyección oblicua

La proyección oblicua del espacio fila de A a lo largo del espacio fila de B sobre el espacio fila de C se define como:

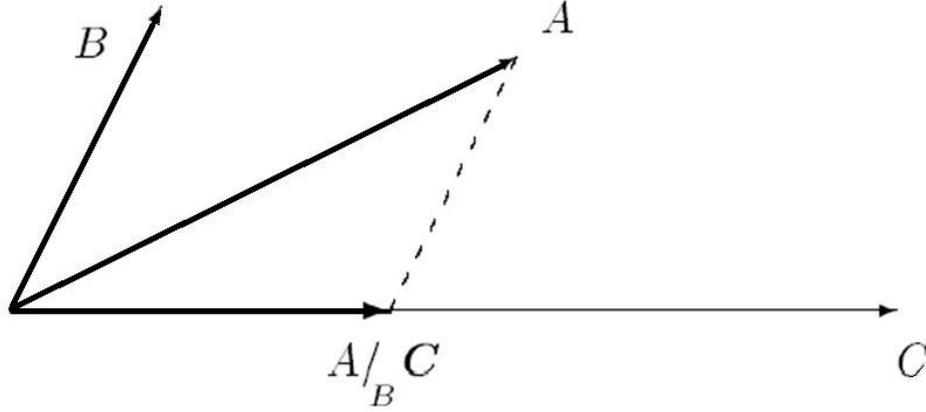


Figura 2.4: Interpretación geométrica de una proyección oblicua.

$$A/_B C = [A/B^\perp] [C/B^\perp]^\dagger \cdot C \quad (2.45)$$

En lugar de descomponer A como una combinación lineal de dos matrices ortogonales (B y B^\perp), también se la puede descomponer como una combinación lineal de dos matrices no-ortogonales (B y C) y el complemento ortogonal de ambas. Es decir, las filas de la matriz A son descompuestas mediante una combinación lineal de las filas de B y C y de las filas de una tercera matriz que es ortogonal a B y C .

$$A = L_B \cdot B + L_C \cdot C + L_{B^\perp, C^\perp} \cdot \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

donde $L_C \cdot C = A/_B C$.

Haciendo uso de la descomposición LQ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} A \\ C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Luego la proyección oblicua puede ser escrita como:

$$A/_B C = L_{32} L_{22}^{-1} C = L_{32} L_{22}^{-1} \begin{pmatrix} L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Notar que cuando $B = 0$ o cuando el espacio fila de B es ortogonal al espacio fila de C ($B.C^\perp = 0$) la proyección oblicua se reduce a la proyección ortogonal. Algunas propiedades de la proyección oblicua son:

$$B/_B C = 0 \quad (2.49)$$

$$C/_B C = C. \quad (2.50)$$

2.4.3. Estructuras matriciales

Las matrices con estructura de Hankel tienen un papel importante en los métodos SID, ya que los datos de entrada, salida y ruido, son organizados en el algoritmo en forma de matrices de Hankel. Por lo tanto, el primer paso en estos algoritmos es organizar los datos con esta estructura matricial.

Sean i y j índices enteros definidos por el usuario, tal que $i \geq n$ y $j \gg n$, se define la matriz de Hankel en bloques de entrada de la siguiente forma:

$$U_{0|2i-1} = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{i-1} & u_i & u_{i+1} & \dots & u_{i+j-2} \\ \hline u_i & u_{i+1} & u_{i+2} & \dots & u_{i+j-1} \\ u_{i+1} & u_{i+2} & u_{i+3} & \dots & u_{i+j} \\ u_{2i-1} & u_{2i} & u_{2i+1} & \dots & u_{2i+j-2} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

$$= \begin{pmatrix} U_{0|i-1} \\ U_{i|2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_p \\ U_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{0|i} \\ U_{i+1|2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_p^+ \\ U_f^- \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Los subíndices p y f indican pasado y futuro respectivamente. Las matrices U_p y U_f tienen muchos elementos en común; sin embargo, sus respectivas columnas no comparten elementos, y de allí surge el concepto de pasado y futuro en forma intuitiva. Como cada fila contiene m entradas, la matriz $U_{0|2i-1}$ tiene $2mi$ filas. Por lo general el número de columnas j es igual a $s - 2i + 1$, siendo s el número total de muestras, lo que implicaría que se utilizan todos los datos medidos. Las matrices

de Hankel en bloques de salida y de ruido se definen de la misma forma. Además, la matriz de Hankel de datos pasados de entrada y salida se definen como:

$$W_p = \begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Otra matriz necesaria es la de observabilidad extendida Γ_i , la cual es una extensión de la matriz de observabilidad para un número de bloques filas mayor al orden del sistema $i \geq n$

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Como se asume que el par $\{A, C\}$ es observable e $i \geq n$, la matriz $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{li \times n}$ es de rango completo, o sea: $Rank(\Gamma_i) = n$.

Las matriz de controlabilidad, en reversa, $\Delta_i^d \in \mathbb{R}^{n \times mi}$ y $\Delta_i^s \in \mathbb{R}^{n \times mi}$ correspondientes a parte determinística y estocástica respectivamente, se definen como

$$\Delta_i^d = \begin{pmatrix} A^{i-1}B & A^{i-2}B & \cdots & A^iB & B \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

$$\Delta_i^s = \begin{pmatrix} A^{i-1}K & A^{i-2}K & \cdots & A^iK & K \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Se asume también que el par $\{A, B\}$ es controlable. Los modos controlables pueden ser estables o inestables.

La secuencia de estados $X_i \in \mathbb{R}^{n \times j}$ se define como:

$$X_i = \begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} & \cdots & x_{i+j} & x_{i+j-1} \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

De la misma forma que se describieron las matrices de Hankel de entrada-salida se tiene: $X_p = X_o$ y $X_f = X_i$.

Las últimas matrices $H_i^d \in \mathbb{R}^{li \times mi}$ y $H_i^s \in \mathbb{R}^{li \times li}$ son matrices de Toeplitz en bloques triangular inferior formadas a partir de las respuestas al impulso de los

subsistemas determinísticos y estocásticos respectivamente

$$H_i^d = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & D \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

$$H_i^s = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CK & I & 0 & \cdots & 0 \\ CAK & CK & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ CA^{i-2}K & CA^{i-3}K & CA^{i-4}K & \cdots & I \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

La idea principal detrás de la identificación mediante el método de subespacios es que la secuencia de estados X_i o la matriz de observabilidad extendida Γ_i , pueden ser estimadas directamente a partir de proyecciones de los subespacios generados por las matrices de Hankel de entrada y salida.

2.4.4. Identificación de sistemas determinísticos

Se considera en esta sección el caso en que el sistema no está afectado por perturbaciones ni ruidos. Consecuentemente se asume que

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.60)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k). \quad (2.61)$$

Para relacionar este sistema de ecuaciones con una secuencia de datos de entrada-salida se considera la respuesta del sistema en los primeros k instantes de tiempo:

$$\begin{aligned}
x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\
x(2) &= A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) \\
x(3) &= A^3x(0) + A^2Bu(0) + \dots \\
&\vdots \\
x(k) &= A^kx(0) + A^{k-1}Bu(0) + \dots + ABu(k-2) + Bu(k-1)
\end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned}
y(0) &= Cx(0) + Du(0) \\
y(1) &= CAx(0) + CBu(0) + \dots \\
y(2) &= CA^2x(0) + CABu(0) + \dots \\
&\vdots \\
y(k-1) &= CA^{k-1}x(0) + CA^{k-2}Bu(0) + \dots + CBu(k-2) + Du(k-1)
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Expresando lo anterior en forma vectorial,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(i-1) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix}}_{\Gamma_i} x(0) + \\
&\underbrace{\begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \dots & D \end{bmatrix}}_{H_i^d} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(i-1) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Como el sistema se asume invariante en el tiempo, las matrices Γ_i y H_i^d son constantes y por lo tanto, desplazando $k + 1$ muestras los datos de entrada y salida se obtiene,

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+i-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ \vdots \\ u(k+i-1) \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Combinando estos sistemas para diferentes valores de k se llega a lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(j) \\ y(1) & y(2) & \cdots & y(j+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(i-1) & y(i) & \cdots & y(i+j-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) & x(1) & \cdots & x(j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \cdots & u(j) \\ u(1) & u(2) & \cdots & u(j+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(i-1) & u(i) & \cdots & u(i+j-2) \end{bmatrix}$$

A partir de este razonamiento se pueden obtener las siguientes ecuaciones matriciales de entrada-salida y secuencia de estados, denominadas *ecuaciones fundamentales* en el área de identificación por subespacios:

$$Y_p = \Gamma_i X_p^d + H_i^d U_p \quad (2.66)$$

$$Y_f = \Gamma_i X_f^d + H_i^d U_f \quad (2.67)$$

$$X_f^d = A^i X_p^d + \Delta_i^d U_p \quad (2.68)$$

La prueba de estas ecuaciones surge directamente de las ecuaciones del sistema antes mencionado. La interpretación geométrica de la ecuación (2.67) se ilustra me-

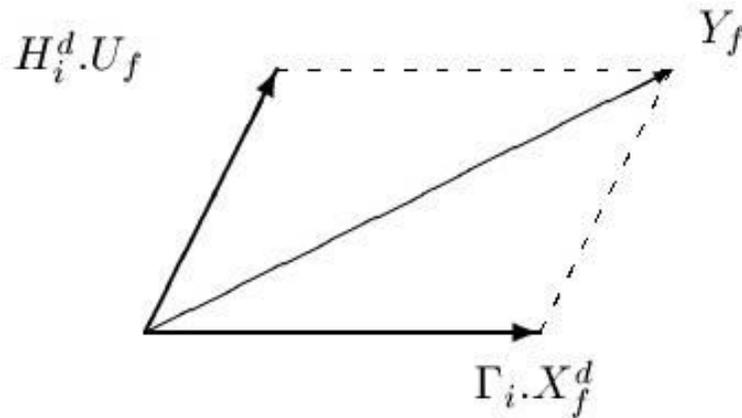


Figura 2.5: Interpretación geométrica de la proyección oblicua de Y_f .

diante la Figura [2.5](#). En la misma se puede observar cómo $\Gamma_i X_f^d$ puede interpretarse como la proyección oblicua del espacio fila generado por Y_f a lo largo del espacio generado por $H_i^d U_f$ sobre el espacio donde se encuentra $\Gamma_i X_f^d$ (ver Sección [2.4.2](#)). Otra forma de interpretar las ecuaciones [\(2.66\)](#) y [\(2.67\)](#) es como la combinación lineal de los estados por la matriz de observabilidad extendida Γ_i y la combinación lineal de las entradas por medio de la matriz H_i^d . La ecuación matricial [\(2.68\)](#) relaciona los estados futuros y pasados bajo la influencia de la entrada.

En la siguiente sección se describe el método y los algoritmos para resolver el problema de identificación que surgen del trabajo de Overschee y Moor [\[55\]](#), en el cual se sugiere un método que unifica gran parte de los algoritmos de identificación por subespacios existentes en la literatura.

La identificación por subespacios siempre consiste en dos pasos:

- Se realiza una proyección del subespacio generado por datos para encontrar una estimación de la matriz de observabilidad extendida y/o estimar la secuencia de estados del sistema desconocido (ver Figura [2.6](#)).
- Se obtienen las matrices del sistema a partir de las matrices generadas en el paso anterior.

Teorema 1. *Identificación determinística (Overschee y Moor [\[55\]](#)): Se asume que:*

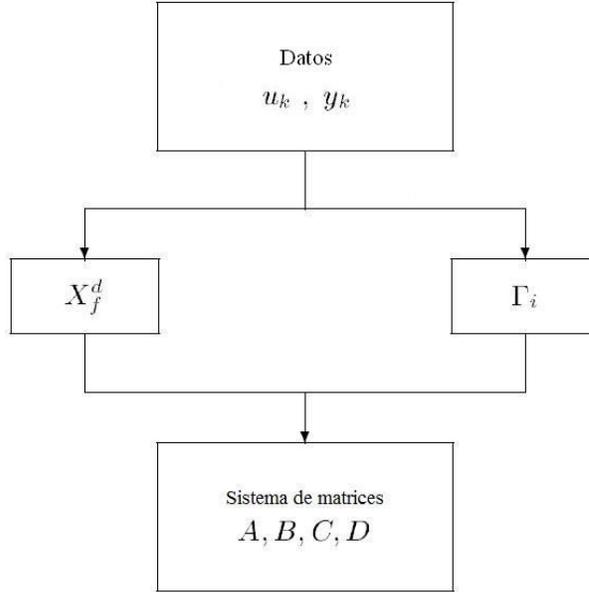


Figura 2.6: Métodos de identificación por subespacios

1. La señal de entrada tiene excitación persistente de orden $2i$.
2. La intersección del espacio fila de U_f y el espacio fila de X_p^d (secuencia de estados pasados) es el espacio nulo.
3. Las matrices $W_1 \in \mathbb{R}^{l_i \times l_i}$ y $W_2 \in \mathbb{R}^{j \times j}$ son definidas por el usuario de manera que W_1 es de rango completo y W_2 cumple : $\text{rank}(W_p) = \text{rank}(W_p \cdot W_2)$

Se define O_i como a la proyección oblicua de los datos de salida futuros Y_f en la dirección de los datos de entrada futuros U_f sobre los datos pasados W_p :

$$O_i = Y_f /_{U_f} W_p \quad (2.69)$$

y la descomposición en valores singulares (SVD)²:

²Una descomposición SVD de A , es una factorización del tipo $A = U\Sigma V^T$, con $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonales y $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz formada con los Valores Singulares de A en su diagonal principal, ordenados de mayor a menor.

$$W_1 O_i W_2 = (U_1 U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \quad (2.70)$$

A partir de lo anterior se tiene que:

1. La matriz O_i es igual al producto de la matriz de observabilidad extendida y la secuencia de estados X_f^d : $O_i = \Gamma_i X_f^d$.
2. El orden del sistema (2.60) es igual al número de valores singulares diferentes de cero definido por S_1 .
3. La matriz de observabilidad extendida es igual a $\Gamma_i = W_1^{-1} U_1 S_1^{1/2} T$. Donde $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz de transformación arbitraria no singular. De manera que el modelo que se obtiene es una realización equivalente $\{T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D\}$
4. La parte de la secuencia de estados X_f^d que cae en el espacio columna de W_2 puede ser recuperado a partir de: $X_f^d W_2 = T^{-1} \cdot S_1^{1/2} V_1^T$.
5. La secuencia de estados X_f^d es igual a $X_f^d = \Gamma_i^\dagger \cdot O_i$.

Demostración. A partir de (2.66) y (2.68) se puede demostrar que X_f^d se puede representar como una combinación lineal de los datos pasados W_p , lo que implica que el espacio fila de X_f^d esta contenido en el espacio fila de $[U_p \ Y_p]^T$.

De (2.66) se tiene,

$$X_p^d = \Gamma_i^\dagger Y_p - \Gamma_i^\dagger H_i^d U_p = \begin{bmatrix} -\Gamma_i^\dagger H_i & \Gamma_i^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_p \\ Y_p \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

y de (2.68)

$$\begin{aligned} X_f^d &= A^i [\Gamma_i^\dagger Y_p - \Gamma_i^\dagger H_i^d U_p] + \Delta_i^d U_p \\ &= [\Delta_i^d - A^i \Gamma_i^\dagger H_i^d \quad A^i \Gamma_i^\dagger] \begin{bmatrix} U_p \\ Y_p \end{bmatrix} \\ &= L_p \cdot W_p. \end{aligned} \quad (2.72)$$

De esta manera, la ecuación (2.67) se puede escribir de la de la siguiente manera

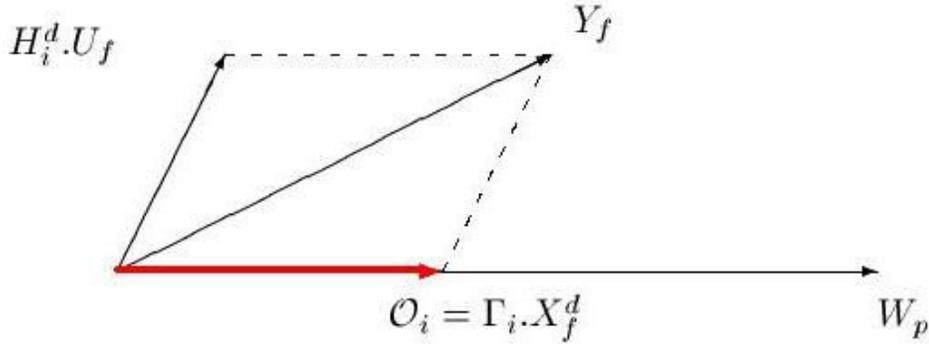


Figura 2.7: Interpretación geométrica de la proyección oblicua de Y_f sobre el espacio generado por W_p .

$$Y_f = \Gamma_i \cdot L_p \cdot W_p + H_i^d \cdot U_f. \quad (2.73)$$

Mediante esta última ecuación y la definición de proyección oblicua se puede demostrar el primer ítem del teorema:

$$Y_f = \Gamma_i \cdot L_p \cdot W_p + H_i^d \cdot U_f \quad (2.74)$$

$$Y_f / U_f^\perp = \Gamma_i \cdot L_p \cdot W_p / U_f^\perp, \quad (2.75)$$

que es el resultado de la proyección ortogonal del espacio fila de Y_f sobre el complemento ortogonal del espacio fila de U_f . Para obtener la proyección oblicua O_i multiplicamos ambos lados de la ecuación por $[W_p / U_f^\perp]^\dagger \cdot W_p$

$$[Y_f / U_f^\perp] \cdot [W_p / U_f^\perp]^\dagger \cdot W_p = \Gamma_i \cdot L_p \cdot [W_p / U_f^\perp] \cdot [W_p / U_f^\perp]^\dagger \cdot W_p \quad (2.76)$$

$$O_i = \Gamma_i \cdot L_p \cdot W_p \quad (2.77)$$

$$O_i = \Gamma_i \cdot X_f^d \quad (2.78)$$

Este resultado indica que el espacio columna de Γ_i es el mismo que el espacio columna de O_i , de manera que se puede calcularla mediante SVD, que se demuestra a continuación.

La demostración del segundo ítem se basa en el hecho de que la matriz $W_1 O_i W_2$ es igual al producto de $W_1 \Gamma_i$ (n columnas) y $X_f^d W_2$ (n filas). Como las dos matrices son de rango n , sus productos también son de rango n . De esta manera, $W_1 O_i W_2 = U_1 S_1 V_1^T$ puede separarse en dos partes:

$$X_f^d W_2 = T^{-1} \cdot S_1^{1/2} V_1^T \quad (2.79)$$

$$W_1 \Gamma_i = U_1 S_1^{1/2} \cdot T \quad (2.80)$$

Esto permite demostrar también los otros ítems 3 y 4. El ítem 5 es demostrado por el 1. Notar que la ecuación (2.71) expresa que los estados X_f^d pertenecen al espacio fila de los datos pasados W_p .

El efecto de W_1 y W_2 determina la base en la cual se identificará el modelo y establece además cuál es el algoritmo en particular que se utiliza para la identificación. \square

2.4.5. Determinación de las matrices del sistema

Tanto el orden del sistema n como la matriz de observabilidad extendida Γ_i , se hallan de la misma manera en los siguientes algoritmos.

Algoritmo que utiliza la secuencia de estados X_i

Del teorema I se concluye lo siguiente:

1. El orden del sistema se obtiene a partir de la observación de los valores singulares diferentes de cero que surgen de la descomposición en valores singulares (SVD) de $W_1 O_i W_2$:

$$W_1 O_i W_2 = (U_1 \ U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \quad (2.81)$$

2. La matriz de observabilidad extendida se obtiene por medio de:

$$\Gamma_i = W_1^{-1} U_1 S_1^{1/2}. \quad (2.82)$$

3. La secuencia de estados futuros es igual a:

$$X_i^d = \Gamma_i^\dagger \cdot O_i \quad (2.83)$$

A partir de lo anterior y teniendo en cuenta que se utiliza siempre la misma matriz de Hankel de datos, se busca la proyección oblicua trasladada un bloque

$$\begin{aligned} O_{i-1} &= Y_f^- / U_f^- W_p^+ \\ &= \underbrace{\Gamma_{i-1}}_{\in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n}} \underbrace{X_{i+1}^d}_{\in \mathbb{R}^{n \times j}} \end{aligned}$$

Recordando que:

$$\begin{aligned} Y_f^- &= Y_{i+1|2i-1} \\ U_f^- &= U_{i+1|2i-1} \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$W_p^+ = \begin{pmatrix} U_p^+ \\ Y_p^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{0|i} \\ Y_{0|i} \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

Despejando X_{i+1}^d :

$$X_{i+1}^d = \Gamma_{i-1}^\dagger O_{i-1} \quad (2.86)$$

Hasta esta instancia se han utilizando sólo datos de entrada-salida para calcular X_i^d y X_{i+1}^d . Con estas matrices se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_{i+1}^d \\ Y_{i|i} \end{pmatrix}}_{\text{Datos}} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} X_i^d \\ U_{i|i} \end{pmatrix}}_{\text{Datos}} \quad (2.87)$$

donde $Y_{i|i} \in \mathbb{R}^{l \times j}$ y $U_{i|i} \in \mathbb{R}^{m \times j}$ son matrices de Hankel de datos de un solo bloque. Este sistema de ecuaciones puede resolverse por medio de mínimos cuadrados (en el caso determinístico no es necesario utilizar mínimos cuadrados, ya que el sistema es consistente por no tener ruido adicionado).

La ventaja de este algoritmo respecto al que se analiza a continuación es que obtiene las cuatro matrices en un solo paso.

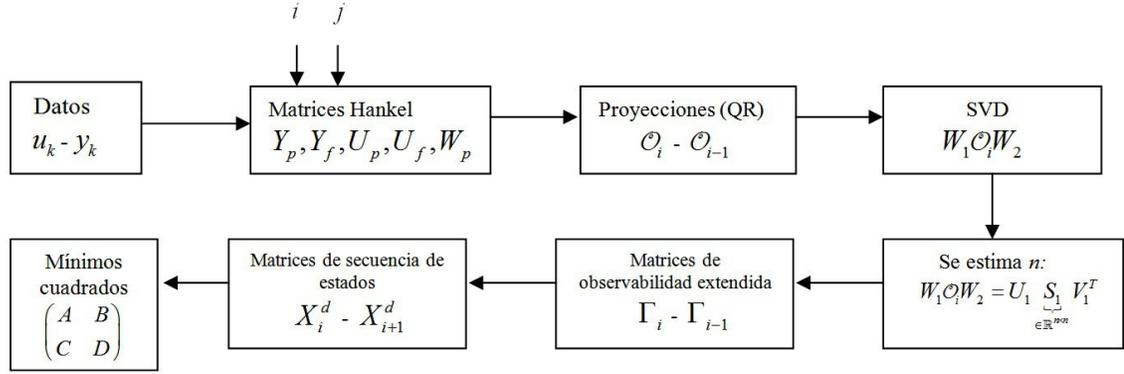


Figura 2.8: Algoritmo de identificación utilizando la secuencia de estados X_i .

Algoritmo que utiliza la matriz de observabilidad extendida Γ_i

En este algoritmo las matrices se obtienen en dos pasos. En el primero se obtiene A y C , luego se calcula B y D . El orden del sistema n y la matriz de observabilidad extendida se obtienen de la misma manera que el algoritmo anterior teniendo en cuenta el Teorema [1](#).

Paso 1: Determinar A y C

Las matrices A y C pueden determinarse a partir de la matriz de observabilidad extendida. El método usa la propiedad de invarianza al desplazamiento de Γ_i . Lo que implica que: $\bar{\Gamma}_i = \underline{\Gamma}_i A$. Donde $\bar{\Gamma}_i \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n}$ y $\underline{\Gamma}_i \in \mathbb{R}^{l(i-1) \times n}$ son las matrices de observabilidad extendida a las cuales se le extrae el primer y último bloque fila respectivamente. A partir de esta propiedad se puede estimar A de la siguiente manera:

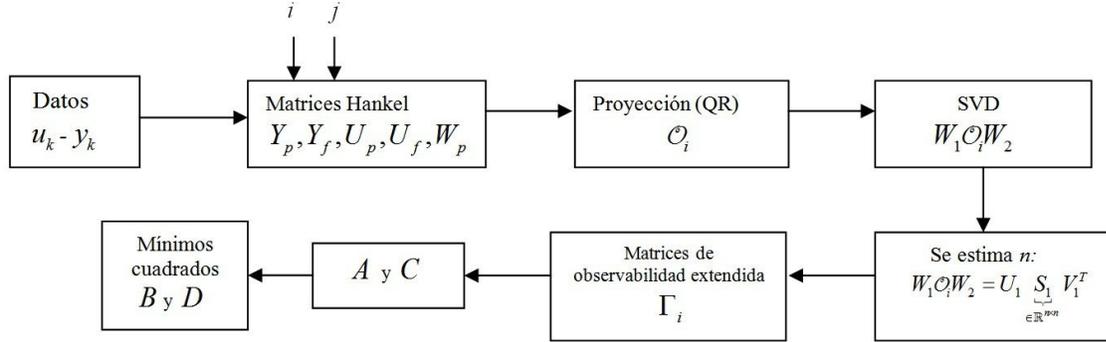
$$A = \underline{\Gamma}_i^\dagger \bar{\Gamma}_i \quad (2.88)$$

La matriz C se extrae del primer bloque fila de Γ_i , o sea: $C = \Gamma_i(0 : l-1, 0 : n-1)$

Paso 2: Determinar B y D

Multiplicando ambos lados de [\(2.67\)](#) por $\Gamma_i^\perp \in \mathbb{R}^{(li-n) \times li}$ se obtiene:

$$\underbrace{\Gamma_i^\perp Y_f}_{\in \mathbb{R}^{(li-n) \times j}} = \Gamma_i^\perp H_i^d U_f, \quad (2.89)$$

Figura 2.9: Algoritmo de identificación utilizando Γ_i .

donde $\Gamma_i^\perp \cdot \Gamma_i = 0$. Multiplicando ahora por $U_f^\dagger \in \mathbb{R}^{j \times mi}$ se obtiene una ecuación matricial lineal que es sólo función de B y D :

$$\underbrace{\Gamma_i^\perp Y_f U_f^\dagger}_{\in \mathbb{R}^{(li-n) \times mi}} = \underbrace{\Gamma_i^\perp}_{\text{Datos}} H_i^d. \quad (2.90)$$

Esta ecuación puede ser escrita como un sistema de ecuaciones lineales de la siguiente manera:

$$(M_1 M_2 \dots M_i) = (L_1 L_2 \dots L_i) \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \dots & D \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_i \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{i(li-n) \times m}} = \underbrace{\begin{pmatrix} L_1 & L_2 & \dots & L_{i-1} & L_i \\ L_2 & L_3 & \dots & L_i & 0 \\ L_3 & L_4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_i & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{i(li-n) \times li}} \underbrace{\begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & \Gamma_i \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{li \times (l+n)}} \begin{pmatrix} D \\ B \end{pmatrix}.$$

Siendo que $M_k \in \mathbb{R}^{(li-n) \times m}$ y $L_k \in \mathbb{R}^{(li-n) \times l}$, se halla así un sistema de ecuaciones lineales de donde se despeja B y D .

	W_1	W_2
N4SID	I_{il}	I_j
MOESP	I_{il}	$\Pi_{U_f}^\perp$
CVA	$\left((Y_f/U_f^\perp) (Y_f/U_f^\perp)^T \right)^{-1/2}$	$\Pi_{U_f}^\perp$

Tabla 2.2: Matrices de peso.

Matrices de peso

Las matrices de peso W_1 y W_2 están integradas dentro del Teorema 1 para poder tratar con diferentes métodos de identificación por subespacios (Overschee y Moor 56). En la Tabla 2.2 se puede observar las relaciones de los diferentes métodos con las matrices de peso.

2.4.6. Identificación de sistemas determinísticos-estocásticos

Como se observa en el desarrollo de la sección anterior, el punto inicial de los métodos de identificación por subespacios parte de la sustitución recursiva de las ecuaciones del sistema en espacio de estados. Realizando lo mismo para el caso determinístico-estocásticos (2.30 - 2.31) se obtiene

$$Y_p = \Gamma_i X_p^d + H_i^d U_p + H_i^s E_p \quad (2.91)$$

$$Y_f = \Gamma_i X_f^d + H_i^d U_f + H_i^s E_f \quad (2.92)$$

$$X_f^d = A^i X_p^d + \Delta_i^d U_p + \Delta_i^s E_p \quad (2.93)$$

Las ecuaciones (2.91) y (2.92) son las ecuaciones matriciales de Hankel de salida representadas como combinación lineal de los estados por la matriz de observabilidad extendida Γ_i y la combinación lineal de las entradas y ruidos por medio de las respectivas matrices H_i^d y H_i^s . La ecuación matricial (2.93) relaciona los estados futuros y pasados bajo la influencia de la entrada y el ruido.

En esta sección se desarrollará las diferencias principales respecto a la sección anterior (caso determinístico), siendo la estimación de los parámetros del modelo equivalente a la sección 2.4.5.

Obtención de Γ_i y X_i

A diferencia del caso determinísticos, en presencia de ruido, la matriz O_i será de rango completo. Por lo tanto, todos los valores singulares de la descomposición SVD sobre $W_1 O_i W_2$ serán diferentes de cero, es decir, la matriz diagonal S estará compuesta por elementos diferentes de cero en orden decreciente y como consecuencia el orden del sistema debe estimarse por medio del valor singular más significativo. Asumiendo que se determina el orden del sistema, se puede separar la matriz de la siguiente manera

$$W_1 O_i W_2 = \begin{pmatrix} U_s & U_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_s & 0 \\ 0 & S_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_s^T \\ V_r^T \end{pmatrix}, \quad (2.94)$$

donde U_s y V_s^T contienen los n principales vectores singulares, los cuales corresponden a los valores singulares contenidos en la matriz diagonal S_s . De esta manera se puede estimar la matriz de observabilidad extendida Γ_i y la secuencia de estados X_i de la siguiente forma

$$\Gamma_i = W_1^{-1} U_s S_s^{1/2}, \quad X_i = S_s^{1/2} V_s^T W_2^{-1}. \quad (2.95)$$

Estimación de O_i

De la misma forma que en el Teorema [1](#), el término $\Gamma_i \hat{X}_i$ se obtiene a partir de los datos de entrada-salida por medio de la proyección oblicua sobre la ecuación [\(2.92\)](#). Lo que se buscará mediante esta proyección es la eliminación de los dos últimos términos de la derecha, para luego poder utilizar la aproximación $O_i = \Gamma_i \hat{X}_i$, donde \hat{X}_i es la estimación de X_i que se obtiene a partir de los datos pasados W_p .

Por lo tanto, realizando la proyección oblicua de las salidas futuras Y_f sobre el espacio fila de los datos pasados W_p a lo largo del espacio fila de las entradas futuras U_f , se obtiene el primer término de la derecha de la ecuación [\(2.92\)](#) (ver Figura [2.10](#)).

Demostración. Como primer paso se realiza la proyección oblicua sobre todos los términos de la ecuación [\(2.92\)](#)

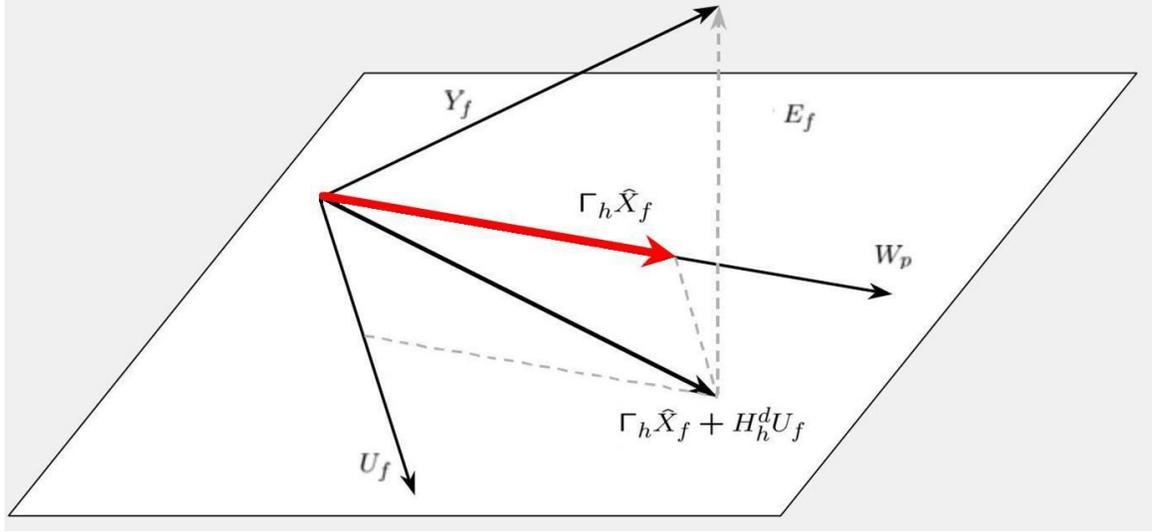


Figura 2.10: Interpretación geométrica de la proyección oblicua de los subespacios generados por los datos de entrada-salida.

$$\begin{aligned} Y_f /_{U_f} W_p &= (\Gamma_i X_i + H_i^d U_f + H_i^s E_f) /_{U_f} W_p \\ &= \Gamma_i X_i /_{U_f} W_p + H_i^d U_f /_{U_f} W_p + H_i^s E_f /_{U_f} W_p. \end{aligned}$$

Considerando cada término en forma separada y teniendo en cuenta las propiedades de la proyección oblicua definidas en la sección [2.4.2](#), se obtienen los siguientes resultados:

- Para un número de bloques filas i y número de columnas j (muestras) tendiendo a infinito ($i, j \rightarrow \infty$)

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} X_i /_{U_f} W_p = \lim_{i, j \rightarrow \infty} X_i / W_p = \hat{X}_i.$$

como se ha demostrado en el Teorema [1](#), X_i pertenece al espacio generado por W_p .

- Por la definición de la proyección oblicua se tiene que

$$U_f /_{U_f} W_p = 0.$$

- Para un número de muestras tendiendo al infinito y de la independencia del ruido con las entradas

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} E_f /_{U_f} W_p = 0.$$

En resumen se tienen que

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} Y_f /_{U_f} W_p = \Gamma_i \hat{X}_i$$

□

De esta manera, obteniendo la matriz de proyección oblicua O_i , se puede proseguir con la descomposición en valores singulares como se desarrolló anteriormente. Los parámetros del sistema pueden obtenerse mediante la matriz de observabilidad extendida Γ_i o la matriz de secuencia de estados \hat{X}_i (ver sección [2.4.5](#)).

2.4.7. Identificación en lazo cerrado por Subespacios

Como se comentó en secciones anteriores, a menudo es deseable que la identificación sea llevada a cabo a través de condiciones de lazo cerrado. El principal problema con los datos colectados a partir de un experimento en lazo cerrado es la correlación entre las perturbaciones no medibles y la entrada debido al esfuerzo del controlador para atenuar las influencias perturbaciones ([45](#), [67](#)).

Es bien sabido que los métodos tradicionales de identificación por subespacios (N4SID-MOESP-CVA) no son aplicables a sistemas operando bajo condición de lazo cerrado sin utilizar alguna adaptación o tratamiento en particular (Lin et al. [43](#)). En la mayoría de éstos no puede evitarse la obtención de un “bias” entre la planta y el modelo identificado.

Debido a esta inconsistencia en el algoritmo, varios trabajos se han presentado para solucionar este problema. En Lin et al. [43](#) desarrollan el método que denominan *Estimación de Innovación* (Innovation Estimation Method, IEM). En este se pre-estiman las innovaciones $e(t)$ y luego se utilizan como variables conocidas para desacoplar el ruido y la señal de entrada. La pre-estimación se realiza a través de un ARX de orden alto o mediante la descomposición de la ecuación matricial Y_f en i bloques, y se utiliza a la estimación de la innovación del bloque fila previo para estimar luego los parámetros del modelo del bloque siguiente. Lo que se pretende

con este método es asegurar que la consistencia de la estimación del método general de subespacios se conserve si se conocen de antemano las secuencias de innovación.

En Chiuso y Picci [7] se propone la idea de ver el sistema de manera inversa generando la innovación $e(t)$ a partir de los datos $y(t)$ y $u(t)$, denominándolo como *enfoque del filtro blanqueador* (Whitening Filter Approach, WFA):

$$\begin{aligned}x(t+1) &= \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) + Ky(t) \\e(t) &= Cx(t) - Du(t) + y(t)\end{aligned}$$

donde $\bar{A} = A - KC$ and $\bar{B} = B - KD$. El filtro blanqueador puede reescribirse de forma matricial de la siguiente forma:

$$Y_f = \bar{\Gamma}_f X_k + \bar{H}_f U_f + \bar{G}_f Y_f + E_f$$

La diferencia con el algoritmo standard de subespacios es que las proyecciones se realizan fila por fila (proyección multi-estado), y de esta manera se desacopla el ruido de la entrada.

En Overschee y Moor [54] se propone un método basado en el algoritmo N4SID (Numerical Subspace State Space Identification) para la identificación de sistemas a partir de datos en lazo cerrado. Este método requiere del conocimiento de los primeros i coeficientes de la respuesta al impulso del controlador, en donde i es el orden máximo del modelo en espacio de estados que se quiere identificar.

Ljung y McKelvey [46], por otra parte, presentan un método para la identificación de matrices de subespacios a partir de datos en lazo cerrado usando predictores estimados a partir de modelos ARX.

Otra clase de método por subespacio es el que se denomina *método por variables instrumentales* (Chou y Verhaegen [8], Gustafsson [24], Wang y Qin [72]). En estos métodos lo que se busca es eliminar el efecto de las perturbaciones con la selección apropiada de variables instrumentales que sean independientes de las perturbaciones.

En Huang et al. [28] se propone un método de identificación por subespacios en lazo cerrado a través de una proyección ortogonal y posteriormente una descomposición en valores singulares, obteniendo de esta manera, la matriz de observabilidad extendida o la secuencia de estados del filtro de Kalman.

Aunque estos trabajos presentan resultados prometedores, los mismos tienen limitaciones: requieren conocimiento previo de la estructura del controlador (lineal), el modelo estimado posee “bias”, existen condiciones en el tipo de señal de excitación, etc. Esto hace que en la práctica e implementación en la industria se sigan utilizando métodos de identificación tradicionales en lazo abierto, aunque los datos sean colectados de un sistema bajo control.

2.5. Excitación persistente del sistema

Para poder estimar el modelo a partir de los datos de entrada y salida, estos datos deben contar con información suficiente. Un caso extremo ocurriría cuando la entrada (test signal) se corresponde con una secuencia de datos tales que $u(k) = 0$, por lo que no puede obtenerse ninguna información acerca del sistema. De esta manera se deduce fácilmente que la entrada debe ser diferente de cero (con cierta estructura) para que el algoritmo de identificación que se utilice sea capaz de obtener un modelo del sistema. Esta propiedad que requiere la entrada, en relación con identificación de sistemas, se denomina *excitación persistente*.

En general se debe pedir, en el contexto de identificación por subespacios, que la señal de entrada $u(k)$ cumpla con la propiedad de excitación persistente para lograr la independencia lineal de las filas de la matriz en bloques de Hankel de datos de entradas. De no cumplirse esta propiedad, la matriz $U_f U_f^T$, que es necesario invertir para obtener tanto la proyección ortogonal como la oblicua, se convierte en singular. Esto produce la no unicidad de la solución del problema de estimación de parámetros.

Para evitar esta singularidad, por lo tanto, se le exige a la entrada que sea suficientemente “rica” (rich enough) y el criterio matemático que se utiliza para cuantificar esto se denomina *excitación persistente*.

Definición 1. La secuencia $u(k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$ es de excitación persistente de orden i si y sólo si existe un entero j tal que la matriz

$$U_{0|i-1} = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{i-1} & u_i & u_{i+1} & \dots & u_{i+j-2} \end{pmatrix}$$

es de rango completo ($\text{Rank}(U_{0|i-1}) = i$). Cuando la secuencia $u(k)$ es ergódica, o determinística, la condición en la definición anterior es equivalente a la no singularidad de la matriz de auto-correlación R^u :

$$\begin{aligned} R^u &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} U_{0|i-1} U_{0|i-1}^T \\ &= \begin{pmatrix} R^u(0) & R^u(1) & \dots & R^u(i-1) \\ R^u(1) & R^u(0) & \dots & R^u(i-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^u(i-1) & R^u(i-2) & \dots & R^u(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En los métodos de identificación por subespacios, las condiciones de rango que se asumen en las matrices de Hankel están directamente relacionadas con la condición de excitación persistente.

Otras definiciones de excitación persistente que se enmarcan en los trabajos de MPC con excitación interna son los de *excitación persistente débil* y *excitación persistente fuerte* (Marafioti [49], Marafioti et al. [50]). En estos controladores las entradas tienen una función doble: por un lado tratan de controlar el sistema (estabilizarlo) mediante un lazo de control, y por el otro, proveen una excitación necesaria para que el método de identificación obtenga la mayor cantidad de información dinámica posible.

Definición 2. Una señal escalar u es de excitación persistente fuerte de orden n si para todo k existe un entero T tal que

$$\rho_1 I > \sum_{i=k}^{k+T} \begin{bmatrix} u_{i+n} \\ u_{i+n-1} \\ \vdots \\ u_{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i+n} \\ u_{i+n-1} \\ \vdots \\ u_{i-1} \end{bmatrix}^T > \rho_0 I$$

donde $\rho_1, \rho_2 > 0$.

Esta definición es equivalente a la de *secuencia suficientemente rica* (Marafioti [49]).

Definición 3. Una señal escalar u es de *excitación persistente débil de orden n* si

$$\rho_1 I > \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} u_{i+n} \\ u_{i+n-1} \\ \vdots \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i+n} \\ u_{i+n-1} \\ \vdots \\ u_{i+1} \end{bmatrix}^T > \rho_0 I$$

donde $\rho_1, \rho_2 > 0$.

Esta definición tiene una interpretación frecuencial, que se establece de la siguiente manera:

Definición 4. Una señal estacionaria de entrada u es de *excitación persistente débil de orden n* si ambos lados de su espectro se tienen al menos n componentes diferentes de cero.

La *excitación persistente fuerte* con un orden adecuado es necesaria en la mayoría de los casos, especialmente cuando el algoritmo de identificación tiene un factor de olvido, como el de mínimos cuadrados recursivos (Recursive Least Squares, RLS). Por otro lado, el requerimiento de que la señal sea de *excitación persistente débil* puede ser suficiente para identificación en bloque (batch identification), si la longitud de los datos es grande o si señales de excitación específicas son aplicadas al sistema (Gertler [19]).

Una de las señales de excitación más utilizadas para la identificación de sistemas lineales es la *señal binaria pseudo-aleatoria* (Pseudo-Random Binary Signals, PRBS). Estas señales determinísticas periódicas tienen propiedades similares a las del ruido

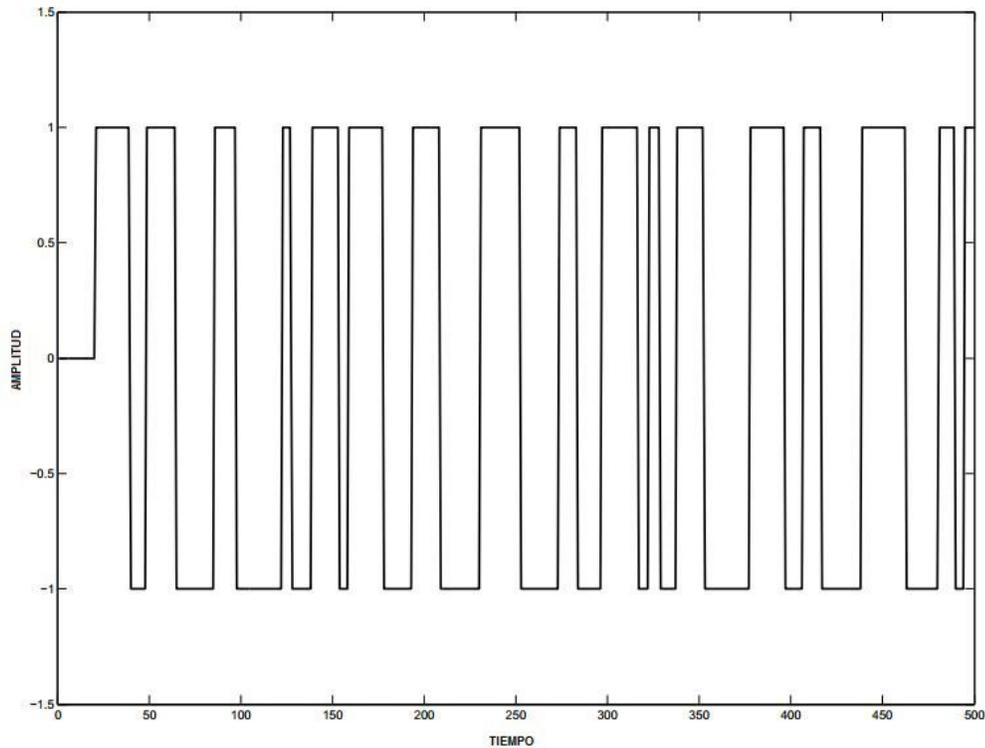


Figura 2.11: Ejemplo de una señal PRBS.

blanco. La principal ventaja es que son fáciles de implementar en la práctica, haciéndolas aptas para identificación en plantas. La Figura [2.11](#) muestra una secuencia de datos correspondiente a una señal PRBS.

Como la señal PRBS solo puede asumir 2^k valores, siendo k el número de registros que se utiliza para formar la secuencia, la misma tiene un periodo máximo igual a $M = 2^k - 1$. Las señales PRBS tienen la característica de tener un orden de excitación persistente igual a $M - 1$ (Ljung [\[45\]](#)).

Capítulo 3

Control predictivo

El control predictivo basado en modelos (Model based Predictive Control, MPC) es un paradigma de control que ha ganado una amplia aceptación en la industria y ha recibido un gran incremento de atención del área académica en las últimas décadas. Como resultado de esto, esta estrategia de control está siendo considerada actualmente como el principal método de control avanzado de procesos (Advanced Process Control, APC) para una amplia clase de procesos industriales. En este capítulo de la tesis se explican las principales características de esta metodología, junto con las herramientas matemáticas necesarias para poder fundamentarla.

3.1. Estructura jerárquica de control

La forma moderna de realizar tareas de control en la industria de grandes procesos químicos frecuentemente hace uso de una estructura jerárquica de control. En la capa más alta de esta estructura, un planificador económico se ocupa de determinar la producción de la planta (calidad, cantidad de producto, etc.), tomando para ello información de la misma planta y del mercado, y generando funcionales de costo económico que describan con precisión los objetivos perseguidos. Estos funcionales son provistos como información para la capa siguiente, conocida como Optimizador en Tiempo Real (Real Time Optimizer, RTO). La tarea del RTO es la de calcular puntos de operación estacionario, basándose en un modelo estacionario complejo de la planta real. Las salidas de este optimizador son los objetivos o target que se

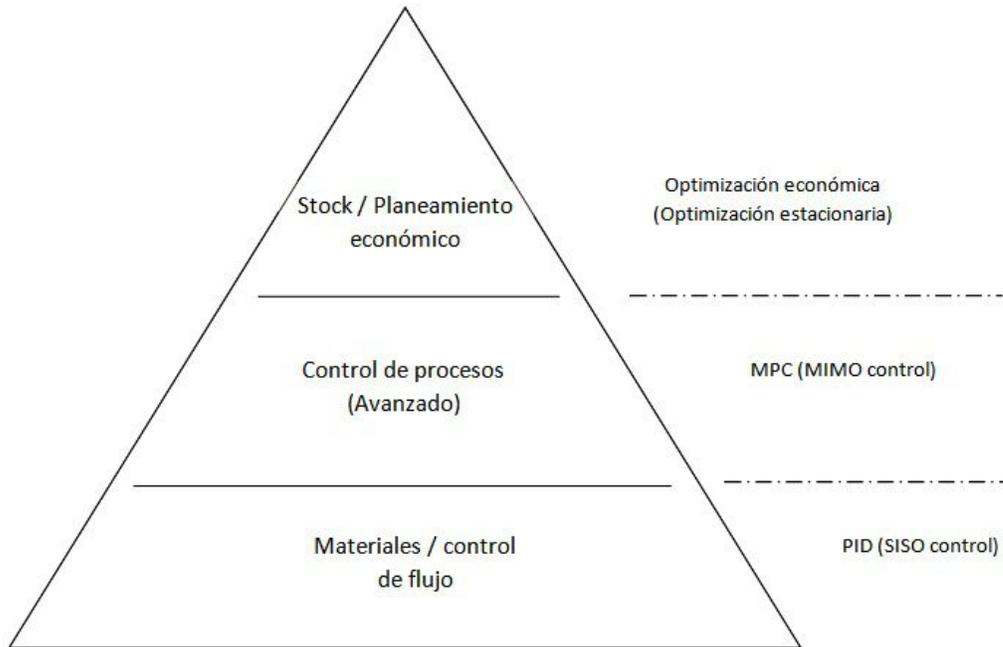


Figura 3.1: Niveles de la estructura jerárquica de control.

envían a la siguiente capa, que está formada por un controlador de tipo avanzado. A su vez, el controlador avanzado calcula las consignas de los controladores de bajo nivel (controladores del tipo PI, o PID) de modo de mantener el sistema en el punto de operación deseado. Para calcular las consignas, el controlador avanzado realiza predicciones basadas en un modelo dinámico de la planta, que incluye las restricciones de cada variable. La estructura completa se ilustra en la Figura 3.2. Otra forma reducida de visualizar la estructura jerárquica de control es mediante la Figura 3.1 y la Tabla 3.1, la cual consiste en tres niveles.

Como se comentará más adelante, en el segundo nivel (MPC), el requerimiento más importante es la habilidad de poder controlar sistemas multivariables (MIMO) de manera eficiente y poder manejar restricciones de manera no conservadora. Por otro lado, debido al bajo periodo de muestreo de este nivel, se pueden realizar cálculos computacionales complejos. Por lo anterior se puede concluir que el *control predictivo basado en modelos* se ajusta perfectamente a estos requerimientos.

El control de alto nivel se suele diseñar para regular el sistema alrededor del

Nivel	Tipo de Modelo	Restricciones	Frec. de muestreo	Algoritmo
3	Estático	Si	$\sim dia^{-1}$	Opt. Económica
2	Dinámico (MIMO)	Si	$\sim min^{-1}$	MPC
1	Dinámico (SISO)	No	$\sim seg^{-1}$	PID

Tabla 3.1: Requerimientos de los distintos niveles de la jerarquía de control especificados en la Figura 3.1

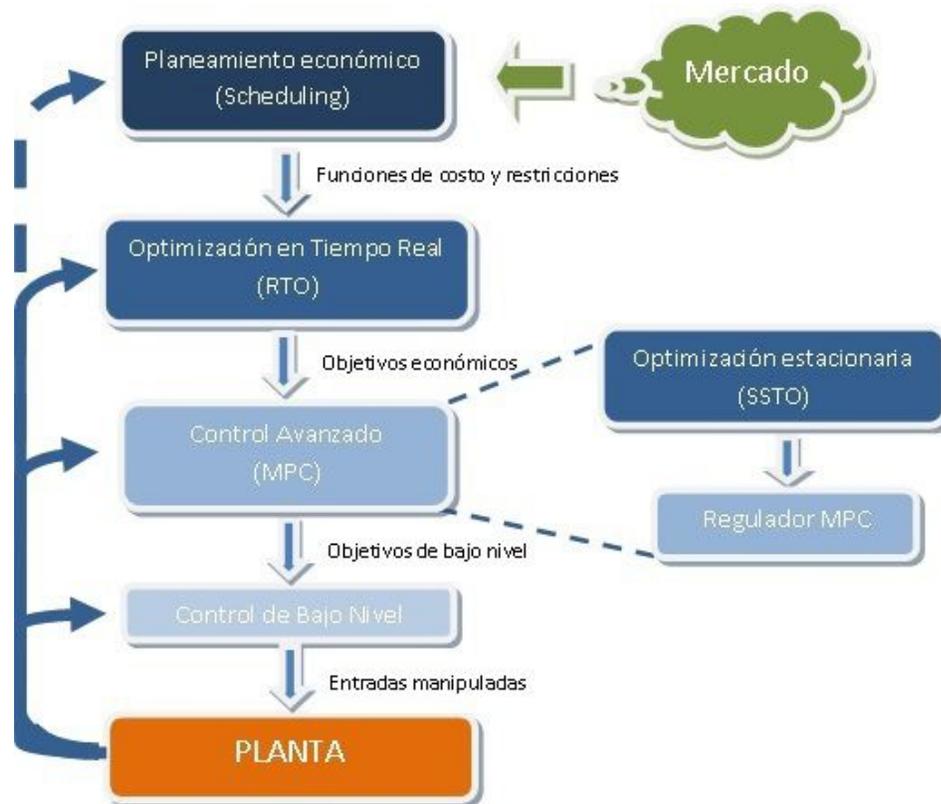


Figura 3.2: Estructura jerárquica de control

punto de operación y evitar la violación de las restricciones. Una de las estrategias de control avanzado que más éxito ha tenido en la industria de procesos es el control predictivo basado en modelos (Model Predictive Control, MPC), pues incorpora un criterio de óptimo y restricciones en la ley de control.

Un problema que surge en la implementación de esta estructura de control (que de hecho, es la más utilizada en la industria) es la inconsistencia que puede existir entre la capa estacionaria (RTO) y la capa de control avanzado (MPC), debido a los diferentes modelos utilizados por estos optimizadores, y a las diferentes escalas de tiempo en que operan. La consecuencia más dramática de esta inconsistencia es un escaso desempeño económico, que invalida, de algún modo, los objetivos primarios de la estructura completa. Una primera alternativa para solucionar el problema de la sincronización entre las etapas económico-estacionaria y dinámica es la introducción de una etapa de optimización intermedia (como se describe en la parte derecha de la Figura 3.2, denominada Optimizador de Punto de Equilibrio (Steady State Optimizer, SSTO). Este optimizador calcula los puntos de equilibrio en los cuales se puede estabilizar el sistema, teniendo en cuenta el punto de operación económico definido por el RTO. La ventaja de esta estructura está en que el modelo utilizado por el SSTO, es el mismo que el del MPC, y por tanto el MPC puede ser simplemente diseñado para funcionar como regulador. De este modo se evitan problemas de factibilidad o inconsistencia entre los modelos de las diferentes etapas. Sin embargo, el uso de un Optimizador de Punto de Equilibrio no resuelve el problema de los desempeños económicos inaceptables, y más aún, agrega un nuevo problema de optimización en la estructura general.

A continuación se discuten algunas características importantes de la estructura jerárquica de control.

3.1.1. Sistemas de control de múltiples entradas y salidas

Con el pasar de los años, los sistemas industriales se han vuelto cada vez más complejos. Por lo general, en la actualidad, diferentes sistemas mecánicos, químicos, eléctricos y electrónicos están interconectados e interactúan de manera dinámica y compleja. Por lo tanto, si se manipula la posición de una válvula, esto influye en el comportamiento de otras variables, como por ejemplo caudales, niveles, presiones,

temperaturas, etc. En otras palabras, un cambio de una variable manipulada (v_m) por lo general afecta a muchas variables controladas (v_c), o de manera inversa, una variable controlada puede depender de múltiples variables manipuladas. De esta manera, si se pretende controlar cada par (v_m, v_c) en forma independiente, esto tendrá resultados ineficientes ya que la interacción entre los diferentes lazos no será tomada en cuenta. Aunque en los niveles más bajos de las estructuras de control (válvulas, bombas, motores, etc.) son controlados por sistemas SISO (Single-Input / Single-Output), en los niveles más altos de la jerarquía de control, un control supervisor es utilizado para ajustar los set-points de los controladores de bajo nivel (PI-PID), teniendo en cuenta las dinámicas entre las diferentes v_m y v_c . Por lo tanto, el paradigma de control que se utilice en este nivel tiene que tener la capacidad de poder tener en cuenta sistemas de multiple entradas y salidas (MIMO).

3.1.2. Manejo de restricciones

Una complicación adicional es la presencia de restricciones en las variables de la planta. Estas restricciones pueden ser “duras” o “blandas” y pueden representar:

- *Limitaciones inherentes al sistema controlado*: las posiciones de las válvulas están restringidas a una apertura de 0% a 100%.
- *Limitaciones de seguridad* : máxima presión de tanques, máxima temperatura de reactor, etc.
- *Regulaciones ambientales*: producción prohibitiva o minimización de producción de residuos nocivos.
- *Restricciones de calidad*: uno o más productos tienen que superar determinadas especificaciones de calidad .
- *Restricciones de disponibilidad energética*: determinan la máxima cantidad de energía que se puede utilizar para la producción.

A pesar de que el sentido común haría escoger puntos de operaciones lo suficientemente lejos de estas restricciones, de manera de poder asegurar en alguna medida

la satisfacción en todo momento de las restricciones, aún en presencia de perturbaciones, por lo general, las empresas van en búsqueda del máximo beneficio económico, al mismo tiempo que hacen frente al incremento de la competitividad y a las demandas de calidad de los clientes. Consecuentemente, la tendencia es a llevar la operación de la planta a sus límites económicos, cerca de las restricciones operativas, ambientales y de seguridad. Por lo anterior, se entiende que el algoritmo de control utilizado debe permitir un manejo de restricciones eficiente y no conservador.

3.2. Controladores predictivos en la industria

El control predictivo ha sido impulsado principalmente por la industria, y ha sido la comunidad académica la que ha ido por detrás tratando de darle un sustento teórico adecuado. Si bien los controladores predictivos tienen su origen en el control óptimo (Kwon y Pearson [37], Lee y Markus [40], Propoi [60]), fue la industria, principalmente la industria petroquímica y de procesos, la que logró avances sustanciales en cuanto a la aplicabilidad de estos controladores. La necesidad de controlar procesos en puntos de operación en donde las variables permanecen saturadas o cercanas a la saturación promovió la aparición de controladores predictivos basados en modelos sencillos, orientados a la resolución de problemas de control asociados, tales como la consideración de restricciones, incertidumbre y no linealidades. A continuación se mencionan algunas de las formulaciones más conocidas:

IDCOM o MPHC : (Identification-Command o Model Predictive Heuristic Control) propuesto por Richalet et al. [64], utiliza como modelo de predicción la respuesta al impulso (Finite Impulse Response, FIR), función de costo cuadrática, y restricciones en las entradas y salidas.

DMC : (Dynamic Matrix Control) propuesto por Cutler y Ramaker [11], utiliza como modelo de predicción la respuesta al cambio escalón, lo cual limita su aplicación a plantas estables, considera un costo cuadrático penalizando el esfuerzo de control. Este controlador no considera restricciones en la optimización.

QDMC : (Quadratic Dynamic Matrix Control) propuesto por García y Morshedi [16], surge de la extensión del DMC al caso con restricciones. Este controlador

forma parte de la segunda generación de controladores predictivos y cuenta con dos tipos de restricciones: duras y blandas, permitiendo la violación de estas últimas durante algún periodo de tiempo.

SMOC : (Shell Multivariable Optimizing Control) propuesto por Marquis y Broustail [51], forma parte de la tercera generación de controladores predictivos. Permite la utilización de modelos en espacios de estados e incorpora observadores y modelos de perturbaciones. Introduce también restricciones duras, blandas y con niveles de prioridad.

GPC : (Generalized Predictive Control) propuesto por Clarke et al. [9] y Clarke et al. [10], utiliza como modelo de predicción la formulación CARIMA, que incorpora una perturbación modelada como ruido blanco. Incorpora restricciones y existen resultados asociados a la estabilidad.

Una lectura más profunda sobre todos estos controladores se puede encontrar en Camacho y Bordons [6], donde se analizan tanto los aspectos prácticos, como los relativos a la estabilidad y robustez. Un detalle importante a remarcar es que en la mayoría de los controladores mencionados la estabilidad no esta garantizada, requiriéndose para cada caso un ajuste específico.

3.3. Modelos, restricciones y objetivos de control

El modelo que se utiliza a lo largo de esta tesis para representar el comportamiento dinámico de la planta sobre un punto de operación es un modelo lineal en espacio estados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

donde $u(k) \in \mathbb{R}^m$ describe el vector de señales de entradas en el tiempo k y puede ser interpretado como los valores de las variables manipuladas del sistema. $y(k) \in \mathbb{R}^l$ es el vector de señales de salida que describen las variables controladas del sistema en el tiempo k . $x(k) \in \mathbb{R}^n$ describe el vector de estados en el tiempo k de un sistema discreto y actúa como memoria conteniendo toda la información acerca del pasado

del sistema que es necesaria para predecir el comportamiento futuro. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ son las matrices que definen el sistema en espacio de estados. En esta tesis se supone el conocimiento de los estados en cada periodo de muestreo. La solución del modelo (3.5), para una secuencia de entradas dada $\mathbf{u} = \{u(0), \dots, u(j-1)\}$ y un estado inicial x se define como: $x(j) = \phi(j; x, \mathbf{u}) = A^j x + \sum_{i=0}^{j-1} A^{j-i-1} B u(i)$, $j \in \mathbb{I}_{\geq 1}$ y $x = x(0)$. El objetivo del MPC es obtener una ley de control de la forma $u(k) = \mathcal{K}_{MPC}(x(k))$ para llevar el sistema a sus respectivas referencias u objetivos, aún cuando ocurren perturbaciones a las que se vea sometido el sistema, y a la vez satisfacer todas las restricciones en las entradas, salidas y estados:

$$u(k) \in \mathcal{U} \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

$$y(k) \in \mathcal{Y} \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

$$x(k) \in \mathcal{X} \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

Notar que si el MPC usa estados como feedback, la segunda ecuación de (3.1) no es utilizada para evaluar el error entre lo real y lo predicho, sino que solo son utilizados los estados del sistema. Por lo anterior, también se puede decir que las restricciones sobre las salidas pueden ser re-escritas como restricciones de estados $Cx(k) \in \mathcal{Y}, \forall k$, por lo que la definición de las restricciones serán equivalentes a

$$(x(k), u(k)) \in \mathcal{Z} \triangleq (\mathcal{X} \times \mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^{n+m},$$

para todo $k \geq 0$, donde $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$. Otra manera equivalente de expresar el modelo, y que se utiliza en esta tesis es el la siguiente:

$$x^+ = Ax + Bu \quad (3.5)$$

$$y = Cx. \quad (3.6)$$

En general, el objetivo de control que utiliza el MPC es minimizar el costo cuadrático,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \|x(k) - x_{ref}(k)\|_Q^2 + \|u(k) - u_{ref}(k)\|_R^2, \quad (3.7)$$

donde N es el horizonte de predicción, Q y R son las matrices de pesos de los estados y entradas respectivamente.

3.3.1. Formulación básica

Algoritmo 1. (*MPC: Model based Predictive Control*)

Dado un modelo según [3.1](#), sujeto a las restricciones [3.2](#) y un objetivo de control como [3.7](#), resolver en cada instante k , dado en valor actual del estado $x(k) \equiv x(k | k)$, el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\mathbf{x}_N(k), \mathbf{u}_N(k)} \sum_{i=0}^{N-1} \|x(k+i|k)\|_Q^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \|u(k+i|k)\|_R^2 + \|x(k+N|k)\|_P^2$$

sujeतोa

$$\begin{aligned} x(k+i|k) &\in \mathcal{X}, & i &= 1, \dots, N-1, \\ u(k+i|k) &\in \mathcal{U}, & i &= 0, \dots, N-1, \\ x(k+i+1|k) &= Ax(k+i|k) + Bu(k+i|k) \in \mathcal{X}, & i &= 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_N(k) &= [u(k|k); \dots; u(k+N-1|k)], \\ \mathbf{x}_N(k) &= [x(k+1|k); \dots; x(k+N|k)], \end{aligned}$$

y donde P es la penalización terminal. Luego aplicar la entrada $u(k) \equiv u(k|k)$ a la planta. Repetir este procedimiento en el siguiente muestreo de tiempo $k+1$ basado en la actualización de estados.

Del algoritmo anterior se puede concluir que el *control predictivo basado en modelo* consiste en resolver en cada periodo de muestreo k , un problema de optimización de horizonte finito, del cual sólo se aplica a la planta el primer elemento del vector solución (ver Figura [3.3](#)). La principal característica de esta metodología es su capacidad de poder manejar sistemas MIMO y tener en cuenta en forma explícita las restricciones del sistema.

En esta tesis, en relación al sistema y las restricciones, se asume lo siguiente:

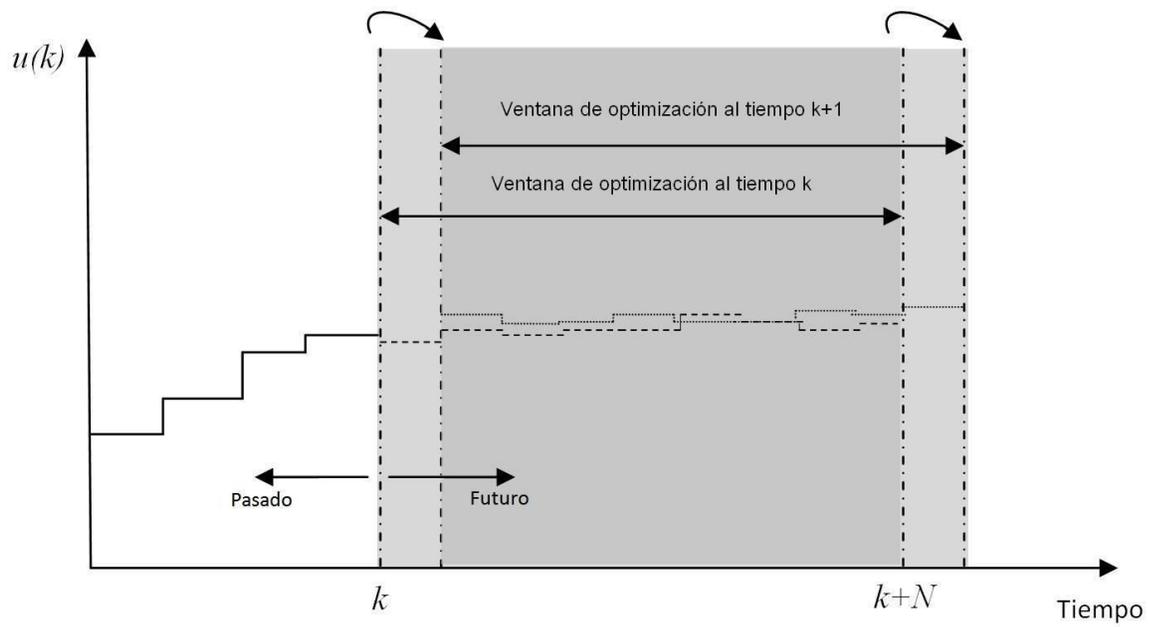


Figura 3.3: En cada instante de tiempo k se resuelve un problema de optimización de longitud N , del cual solo el primer elemento del vector solución es implementado a la planta.

Suposición 1. La matriz A tiene todos sus autovalores estrictamente dentro del círculo unitario, el par (A, B) es controlable y el estado se mide en cada instante de tiempo discreto. Además, el conjunto \mathcal{X} es convexo y cerrado, el conjunto \mathcal{U} es convexo y compacto, y ambos contienen el origen en su interior. Por simplicidad, $A\mathcal{X} \subseteq \lambda\mathcal{X}$, con $\lambda \in [0, 1)$.

3.4. Estabilidad

3.4.1. Caracterización del equilibrio

A continuación se consideran las siguientes definiciones de equilibrio:

Definición 5. Punto de equilibrio

El punto x_0 es un punto de equilibrio del sistema autónomo $x^+ = Ax$ si y solo si $x_0 = Ax_0$.

Definición 6. Equilibrio estable

El punto \bar{x} es un punto de equilibrio estable si para todo $k > 0$, el estado x permanece dentro de una región arbitrariamente pequeña del espacio de estados que contiene al punto \bar{x} , mientras que la condición inicial $x(0)$ se encuentre lo suficientemente cerca de \bar{x} , es decir, para todo $R > 0$ existe un $r > 0$ tal que

$$\|x(0) - \bar{x}\| < r \quad \Rightarrow \quad \|x(k) - \bar{x}\| < R, \quad \forall k > 0$$

Por lo tanto, un punto de equilibrio es estable si $x(k)$ puede estar contenida dentro de una región arbitrariamente pequeña para todo $k > 0$, estando $x(0)$ suficientemente cerca del punto de equilibrio (ver Figura 3.4).

Una definición menos fuerte que la *estabilidad* es el de *atractividad*.

Definición 7. Equilibrio atractivo

Un punto de equilibrio \bar{x} es localmente atractivo si $\|x(k) - \bar{x}\| \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$, para una vecindad de \bar{x} (que se denomina dominio de atracción).

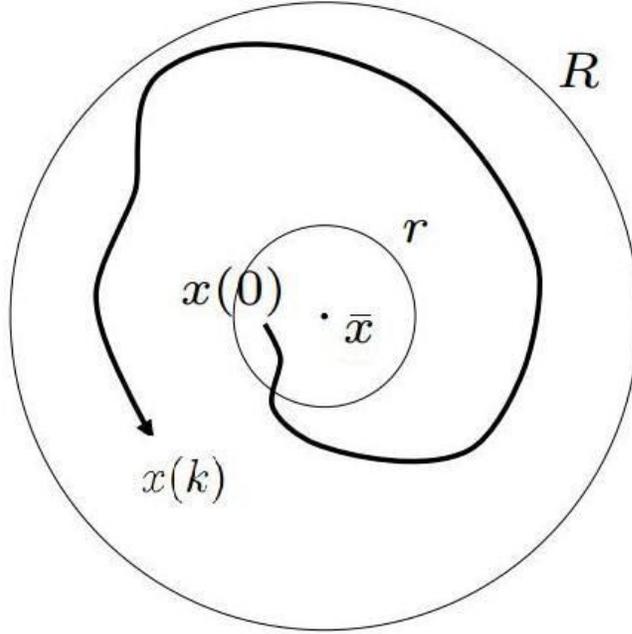


Figura 3.4: Equilibrio estable

Definición 8. *Conjunto equilibrio de control, CES (del acrónimo en inglés, Control Equilibrium Set)*

Un conjunto $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ es un conjunto equilibrio de control para el sistema no-autónomo $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}$, si para cada punto $x \in \Omega$ la condición $x = Ax + Bu$ se cumple para algún $u \in \mathcal{U}$.

El conjunto CES máximo, \mathcal{X}_{ss} , está dado por $\mathcal{X}_{ss} = (GBU) \cap \mathcal{X}$, donde $G = (I_n - A)^{-1}$.

Definición 9. *Conjunto de equilibrio, ES (del acrónimo en inglés, Equilibrium Set)*

Considérese un feedback de estado $u = \kappa(x)$. Un conjunto $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ es un conjunto de equilibrio para el sistema en lazo cerrado (o autónomo) $x^+ = Ax + B\kappa(x)$, $(x, \kappa(x)) \in \mathcal{Z}$, si para cada punto $x \in \Omega$ se cumplen las condiciones $x = Ax + B\kappa(x)$ y $\kappa(x) \in \mathcal{U}$.

3.4.2. Invarianza

En las definiciones de la sección anterior, fue presentado el concepto de conjunto de equilibrio (como mera agregación de puntos en estado estacionario). Sin embargo, la generalización del concepto de *punto de equilibrio* no es el concepto de *conjunto de equilibrio*, sino el de *conjunto invariante* (asociado a un conjunto de equilibrio), en el sentido de que ambos, el punto de equilibrio y el conjunto invariante son entidades geométricas tales que, si el sistema llega a ella, este permanece en ella indefinidamente.

A continuación se presentan dos definiciones de invarianza (Blanchini y Miani [5], Kerrigan [34], Kolmanovsky y Gilbert [36]):

Definición 10. Conjunto C

Un conjunto es un conjunto C si es convexo, compacto y contiene el origen. Un conjunto propio C es un conjunto C que contiene el origen como punto interior.

Definición 11. Conjunto λ -invariante de control, λ -CIS (del acrónimo en inglés, Control Invariant Set)

Un conjunto propio C , $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ es λ -invariante de control, con $\lambda \in [0, 1]$, para el sistema no autónomo $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}$, si $x \in \Omega$ implica $x^+ \in \lambda\Omega$, para algún $u \in \mathcal{U}$.

Definición 12. Conjunto λ -invariante, λ -IS (del acrónimo en inglés, Invariant Set)

Considerar un feedback de estado $u = \kappa(x)$. Un conjunto propio C , $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ es λ -invariante, con $\lambda \in [0, 1]$, para el sistema en lazo cerrado (o autónomo) $x^+ = Ax + B\kappa(x)$, $(x, \kappa(x)) \in \mathcal{Z}$, si $x \in \Omega$ implica $x^+ \in \lambda\Omega$ y $\kappa(x) \in \mathcal{U}$.

En las definiciones anteriores, si $\lambda = 1$, los conjuntos son simplemente *conjuntos invariantes*. Por otro lado, si $\lambda \in [0, 1)$ los conjuntos son conocidos como *conjuntos contractivos*.

3.4.3. Generalización de la convergencia al caso de conjuntos

El concepto de conjunto invariante, como un generalización de punto de equilibrio, hace posible la generalización del concepto de *atractividad de un punto de equilibrio*.

Esta generalización es importante, ya que a partir de ésta, una formulación MPC apto para re-identificación se presentará más adelante. La solución del sistema en lazo cerrado (o autónomo) $x^+ = Ax + B\kappa(x)$, $x \in \mathcal{X}$, $\kappa(x) \in \mathcal{U}$, para un estado inicial x , está dado por $x(j) = \phi(j; x)$, $j \in \mathbb{I}_{\geq 1}$, donde $x = \phi(0; x)$. Además, la secuencia de entrada está dada por $u(j) = \kappa(x(j))$. Luego, podemos definir la atractividad de un conjunto IS de la siguiente manera (Rawlings y Mayne [63]):

Definición 13. Atractividad local de un conjunto IS

El conjunto IS $\Omega \subset \mathcal{X}$ es localmente atractivo para el sistema en lazo cerrado (o autónomo) $x^+ = Ax + B\kappa(x)$, $(x, \kappa(x)) \in \mathcal{Z}$, si para cada x en una vecindad de Ω (que denominamos dominio de atracción), entonces $|\phi(j; x)|_{\Omega} \rightarrow 0$, $\phi(j; x) \in \mathcal{X}$, $\kappa(\phi(j; x)) \in \mathcal{U}$ para $j \rightarrow \infty$ ¹.

3.5. Métodos de excitación bajo MPC

La parte más costosa y que más tiempo consume de la puesta en marcha de un MPC industrial, es el modelado de la planta (Zhu [75]). Se ha estimado que el esfuerzo de modelado puede alcanzar el 90 % del costo y tiempo de una implementación típica de MPC. Por lo tanto, se pueden obtener grandes beneficios económicos si se reduce el tiempo y la complejidad de la identificación.

Cuando el MPC está en funcionamiento, el mantenimiento (performance) recae esencialmente en la actualización del modelo que utiliza para realizar las predicciones (estacionario - dinámico). Una manera de reducir los tiempos de identificación es realizando un seguimiento de ganancias del sistema (ver Capítulo 6) lo que permitiría identificar cuales son las relaciones entrada - salida que necesita una actualización.

Por otro lado, cuando se realiza una actualización del modelo o re-identificación de la planta, se tiene que tener en cuenta que el nivel de perturbación para excitar el sistema no supere ciertos límites relacionados con la estabilidad y la calidad del producto.

Dependiendo de la manera en que se excite el sistema bajo control predictivo, los métodos de identificación en lazo cerrado se pueden clasificar, en dos clases:

¹ $|x|_{\Omega}$ es la distancia de x a Ω , y será definido explícitamente en la sección 4.5

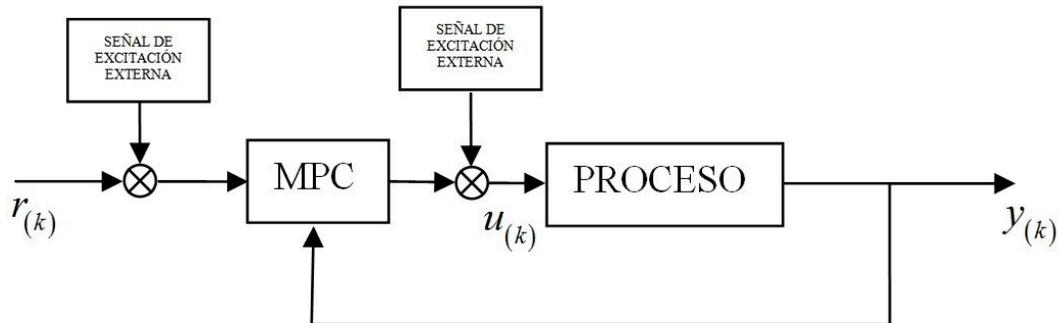


Figura 3.5: Método de identificación con excitación externa

i) excitación externa y ii) excitación interna. A continuación se realizará una explicación breve de estos métodos.

3.5.1. Identificación con excitación externa

En este caso, la identificación del sistema bajo MPC se realiza a partir del ingreso de una señal de excitación persistente en el set-point $r(k)$, la variable manipulada $u(k)$ o en ambas. En la Figura 3.5 se muestra la forma de ingreso de las señales de excitación.

Este método (Klerk y Craig [35], Overschee y Moor [57], Zhu y Butoyi [76]) es ampliamente utilizado en procesos industriales, principalmente en refinerías e industrias petroquímicas. La principal desventaja recae en el diseño de la señal de excitación, ya que la misma puede resultar en una excesiva (inestabilidad) o insuficiente excitación para el sistema. Una excitación excesiva puede comprometer los objetivos de control, violando eventualmente las restricciones de salida del proceso. Por otro lado, una señal con poca amplitud puede comprometer los objetivos de identificación.

3.5.2. Identificación con excitación interna

El método de identificación con excitación interna, a diferencia del método anterior, trata de obtener una solución de compromiso entre los objetivos de control e identificación.

En Genceli y Nikolaou [18] se propone un controlador denominado MPC-I (Model Predictive Control and Identification), donde una condición de excitación persistente se agrega en las restricciones del problema de optimización. Esta condición toma la forma de matriz de covarianza de la señal de entrada con un umbral inferior, la cual hace que el proceso de identificación sea consistente. A continuación se formula en forma general el controlador MPC-I:

$$\min_{u(k), \dots, u(k+M-1), \mu, \varepsilon} \sum_{i=1}^M [w_i (y(k+i) - y^{sp})^2 + r_i \Delta u(k+i-1)^2] + q_1 \mu^2 + q_2 \varepsilon^2 \quad (3.8)$$

sujeto a

$$u_{\max} \geq u(k+i-1) \geq u_{\min}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.9)$$

$$\Delta u_{\max} \geq \Delta u(k+i-1) \geq -\Delta u_{\min}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.10)$$

$$y_{\max} + \varepsilon \geq y(k+i-1) \geq y_{\min} - \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.11)$$

$$\sum_{j=1}^s \phi(k+1-j) \phi(k+1-j)^T \geq (\rho - \mu) \mathbf{I}, \quad \rho > \mu > 0, \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (3.12)$$

$$y(k+i) = \phi(k+i-1)^T \bar{\theta}(k), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.13)$$

$$\bar{\theta}(k) = \left[\sum_{j=i}^{s'} \phi(k-j) \phi(k-j)^T \right]^{-1} [\phi(k-1) \cdots \phi(k-s')] \mathbf{y}(k) \quad (3.14)$$

Esta estrategia, que luego fue estudiada en Ballin [3], asegura que las entradas tendrán la suficiente excitación para mover la dinámica del proceso. Como se anticipó, la excitación de las señales de entradas se generan a partir de la restricción (3.12). En cada solución del problema (3.8-3.13), se obtiene la secuencia de entradas óptimas y los parámetros identificados del sistema a través de *mínimos cuadrados* (3.14). El principal problema de esta formulación, debido a la no convexidad de la restricción (3.12), el problema se convierte en no-convexo, perdiéndose así muchas de las propiedades de la formulación del MPC.

Por otra parte, Sotomayor et al. [69] proponen una estrategia que manipula los target de estados estacionarios con el objetivo de excitar el sistema sin modificar el algoritmo de control. Esta estrategia se formula sobre una estructura de control de

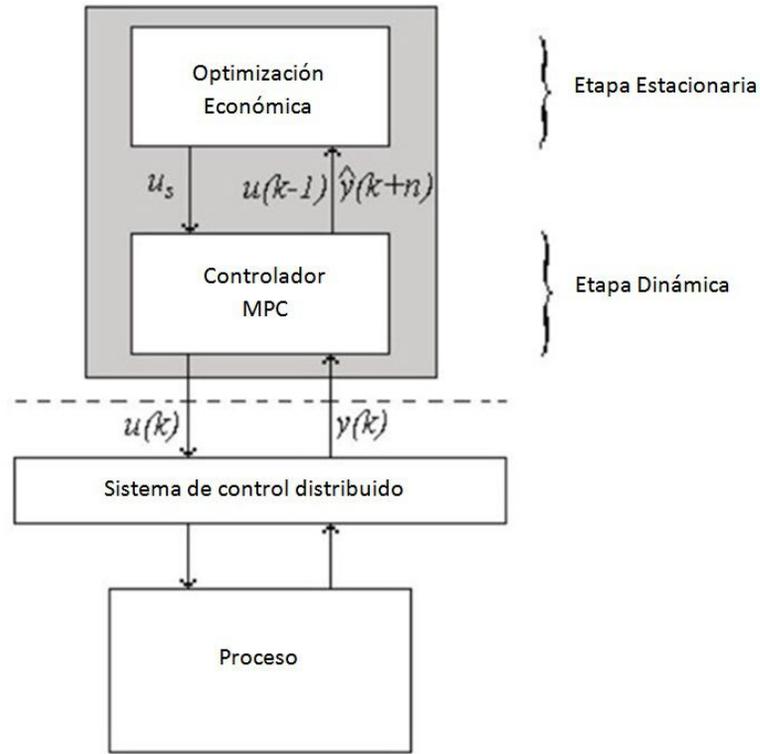


Figura 3.6: Estructura de control MPC de dos capas

dos capas (ver Figura 3.6). La excitación que se utiliza es una señal binaria $(1, -1)$, definida en la matriz W_{exc} , que multiplica a la matriz de coeficientes W_1 en la ecuación objetivo del problema de optimización estacionaria (3.15) (capa superior). El objetivo es mover en forma aleatoria los target que el controlador (segunda capa) entrega al sistema y sin dejar de satisfacer las restricciones de salida.

$$\min_{\Delta u_s, \delta_y} - (W_{exc} W_1) \Delta u_s + \|W_2 \Delta u_2\|_2^2 + \|W_3 \delta_y\|_2^2 \quad (3.15)$$

La desventaja de este método de excitación es que el costo de la función objetivo (costo económico) sufre una variación continua durante el procesos de excitación, reduciendo así sus beneficios económicos.

En Marafioti [49] se presenta una nueva formulación denominada Persistently Exciting Model Predictive Control (PE-MPC). Esta formulación incorpora la señal de excitación persistente (PE) mediante la inclusión de una restricción en el problema

del MPC. La diferencia principal con el trabajo de Genceli y Nikolaou [18] radica en la posibilidad que esta restricción sea inactiva durante los transitorios del sistema y de esta manera no forzar al MPC a obtener soluciones (identificaciones) en cada periodo de muestreo.

En Heirung et al. [25], se propone la incorporación de un término en el costo del MPC y el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos modificado como restricciones de igualdad para la identificación on-line en lazo cerrado. De ésta manera la condición de excitación persistente no es necesaria, ya que el sistema aumentará su excitación en función de la precisión de los parámetros estimados.

En general, ninguno de los reportes citados anteriormente han mostrado resultados respecto a la estabilidad del sistema bajo MPC mientras el sistema esta siendo re-identificado. En el capítulo 4, a partir del concepto de estabilidad de conjuntos invariantes (como una generalización de estabilización en un punto), se utiliza un controlador MPC con dominio de atracción extendido, el cual asegura estabilidad y al mismo tiempo permite la generación de una señal de excitación persistente para la re-identificación del sistema en lazo cerrado.

Capítulo 4

Control predictivo apto para re-identificación del modelo

El principal problema de las identificaciones en lazo cerrado es que, en general, los objetivos de “controlar” e “identificar” son opuestos. De hecho, para realizar una identificación adecuada, es necesario el ingreso de una señal de *excitación persistente* al sistema, mientras que el objetivo de control es estabilizar el sistema en un punto de equilibrio. Este capítulo se propone estudiar este conflicto, y analizar un control MPC que garantiza la estabilidad de conjuntos invariantes, y que al mismo tiempo, permite la re-identificación del sistema.

4.1. Notación

Las matrices $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $0_{n,m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ describen las matrices identidad y matriz nula respectivamente. Considerar dos conjuntos $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$, que contienen el origen y un número real λ . La suma de Minkowski $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ se define como $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \{(u + v) : u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}\}$; el conjunto $(\mathcal{U} \setminus \mathcal{V}) \subseteq \mathbb{R}^n$ es definido como $\mathcal{U} \setminus \mathcal{V} = \{u : u \in \mathcal{U} \wedge u \notin \mathcal{V}\}$; y el conjunto $\lambda\mathcal{U} = \{\lambda u : u \in \mathcal{U}\}$ es un conjunto escalado de \mathcal{U} . Dada la función continua $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, and $\gamma \geq 0$, el conjunto nivel $\mathcal{N}[\Psi, \gamma]$ esta definido por $\mathcal{N}[\Psi, \gamma] = \{x : \Psi(x) \leq \gamma\}$. $\mathbb{I}_{m:n}$ describe los enteros no negativos de m a n .

4.2. Conjuntos invariantes objetivos para identificación

En esta sección se definen algunos conjuntos con el objetivo de proponer una nueva formulación apta para re-identificación. Como se dijo, para estimar un modelo de un sistema a partir de datos de entradas y salidas, cada modo del sistema debe ser excitado. De esta manera, se puede definir una secuencia de *excitación persistente* (Persistent Excitation, PE), $\mathbf{u}_{PE} = \{u_{PE}(0), \dots, u_{PE}(T_{id})\}$, $u_{PE}(j) \in \mathbb{R}^m$, para $j \in \mathbb{I}_{0:T_{id}}$, donde T_{id} es la longitud de datos que es necesario para realizar una correcta identificación.

La entrada PE puede ser de diferentes formas, yendo de una señal Pseudo-Random Binary Signal (PRBS) a una señal Filtered Pseudo Gaussian White Noise. Una formulación reciente es la de Larsson et al. [39], en donde se propone un ruido gaussiano filtrado como señal de entrada, diseñada específicamente para controladores MPC.

Independientemente de la forma, la secuencia de excitación persistente debe ser acotada, ya que las señales no acotadas no tienen significado físico. Luego, se debe definir un conjunto compacto de entradas de excitación en donde la señal PE estará contenida.

Definición 14. *Conjunto de entradas de excitación, EIS (del acrónimo en inglés, Excitation Input Set)*

Un conjunto de entrada propio C , $\mathcal{U}^t \subset \mathcal{U}$, que contiene la secuencia de excitación de entrada PE, es decir, $u_{PE}(j) \in \mathcal{U}^t$, para $j \in \mathbb{I}_{0:T_{id}}$, es definido como el conjunto de entradas de excitación.

El conjunto EIS \mathcal{U}^t define un conjunto $\mathcal{Z}^t \triangleq (\mathcal{X} \times \mathcal{U}^t) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ en el espacio de estados-entradas. Notar que el conjunto EIS (volumen) proviene de la realidad, ya que en las plantas reales el ruido que se suma en las variables determina la amplitud mínima de la señal de excitación (Wahlberg et al. [71]).

Ahora, el conjunto EIS \mathcal{U}^t y la aleatoriedad de la entrada de excitación persistente definen un sistema autónomo dado por:

$$x^+ = Ax + Bu_{PE} \triangleq f_{PE}(x), \quad (4.1)$$

donde $u_{PE} \in \mathcal{U}^t$ son las entradas de la secuencia de excitación persistente \mathbf{u}_{PE} .

Nota 1. Notar que el sistema (4.1) puede ser considerado - con el objetivo de cálculos de conjuntos - un sistema no autónomo $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$, ya que la secuencia de excitación de entrada \mathbf{u}_{PE} puede tomar cualquier valor dentro de \mathcal{U}^t - incluyendo, con poca probabilidad, valores constantes.

Con estos conceptos ahora se puede definir:

Definición 15. *Conjunto λ -invariante para identificación, λ -ISI (del acrónimo en inglés, Invariant Set for Identification)*

Un conjunto propio C , $\mathcal{X}^t \subseteq \mathcal{X}$, es un conjunto λ -invariante para identificación, con $\lambda \in [0, 1]$, para el sistema no autónomo $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$, si $x \in \mathcal{X}^t$ implica $x^+ \in \lambda \mathcal{X}^t$, para todo $u \in \mathcal{U}^t$.

Un conjunto λ -ISI con $\lambda = 1$ es simplemente un conjunto ISI. Claramente, la definición de un conjunto ISI es una definición adaptada del *conjunto invariante robusto* para objetivos de identificación de sistemas. De esta manera, se puede definir el conjunto más pequeño ISI, para un sistema dado, que está determinado por el conjunto *ISI mínimo* (Kolmanovsky y Gilbert [36]): $\mathcal{X}^t = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (A^i B \mathcal{U}^t)$.

A continuación, se presentan algunas propiedades relacionadas a los conjuntos ISI:

Propiedad 1. *Un conjunto λ -ISI \mathcal{X}^t , con $\lambda \in [0, 1]$, para el sistema no autónomo $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$, es un conjunto λ -IS para el sistema autónomo $x^+ = f_{PE}(x)$.*

Propiedad 2. *Dado un conjunto ISI, \mathcal{X}^t , para el sistema no autónomo $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$, y el conjunto CES, $\mathcal{X}_{ss}^t = G B \mathcal{U}^t \subseteq \mathcal{X}$, para el mismo sistema, luego, $\mathcal{X}_{ss}^t \subseteq \mathcal{X}^t$. Además, si $m < n$, $\mathcal{X}_{ss}^m \subset \mathcal{X}^n$ (\mathcal{X}^n incluye además estados transitorios).*

Propiedad 3. *Sea un conjunto ISI, \mathcal{X}^t , para el sistema no autónomo $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$, y un conjunto λ -IS, $\Omega \subset \mathcal{X}$, con $\lambda \in [0, 1)$, para el sistema autónomo $x^+ = Ax$, $x \in \mathcal{X}$. Luego, dado que $(\mathcal{X}^t \oplus \Omega) \subset \mathcal{X}$, existe un real $\delta \in (\lambda, 1)$, tal que el conjunto $\mathcal{X}^t \oplus \Omega$ es un conjunto δ -ISI para el sistema no autónomo $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$.*

Demostración. (González et al. [21]) Considerar

$$A(\mathcal{X}^t \oplus \Omega) \oplus BU^t = (A\mathcal{X}^t \oplus BU^t) \oplus A\Omega \subseteq \mathcal{X}^t \oplus A\Omega \subseteq \mathcal{X}^t \oplus \lambda\Omega,$$

donde la primera inclusión parte de la definición del conjunto ISI \mathcal{X}^t y la última de la condición de conjunto λ -ISI de Ω . Ahora, ya que $\lambda \in [0, 1)$, y Ω contiene por definición el origen como punto interior, existe algún $\delta \in (\lambda, 1)$ tal que $\mathcal{X}^t \oplus \lambda\Omega \subseteq \delta(\mathcal{X}^t \oplus \Omega)$, y ya que $(\mathcal{X}^t \oplus \Omega) \subset \mathcal{X}$, lo establecido se cumple. \square

Propiedad 4. *El conjunto $\mathcal{X}^t \oplus \Omega$ que se define en la Propiedad 3 es también un conjunto δ -IS (contractivo) para el sistema autónomo $x^+ = f_{PE}(x)$.*

Propiedad 5. *Dado un conjunto λ -ISI \mathcal{X}^t para el sistema no autónomo $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$ y una constante positiva $\delta > 1$, luego, si $\delta\mathcal{X}^t \subset \mathcal{X}$, $\delta\mathcal{X}^t$ es además un conjunto λ -ISI.*

Demostración. (González et al. [21]) Considerar

$$A(\delta\mathcal{X}^t) \oplus BU^t = \delta(A\mathcal{X}^t \oplus B\delta^{-1}\mathcal{U}^t) \subseteq \delta(A\mathcal{X}^t \oplus BU^t) \subseteq \lambda(\delta\mathcal{X}^t).$$

La primera inclusión proviene del hecho que, ya que $\delta > 1$, luego $\delta^{-1}\mathcal{U}^t \subseteq \mathcal{U}^t$. La última inclusión proviene de la condición de conjunto λ -ISI de \mathcal{X}^t . Esto significa que $\delta\mathcal{X}^t$ es un conjunto λ -ISI para el sistema $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$. \square

Propiedad 6. *Un conjunto ISI \mathcal{X}^t para el sistema $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$ es un conjunto IS localmente atractivo para el sistema en lazo cerrado $x^+ = f_{PE}(x)$, para todo $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^t$.*

Demostración. (González et al. [21]) La demostración proviene del hecho que la función distancia es una función de Lyapunov para $x^+ = f_{PE}(x)$ (ver Propiedad 8). \square

A partir de los últimos conceptos, la idea principal de este capítulo es: *usar los conjuntos ISI como “targets” generalizados de control para evitar los conflictos entre los objetivos de control e identificación.*

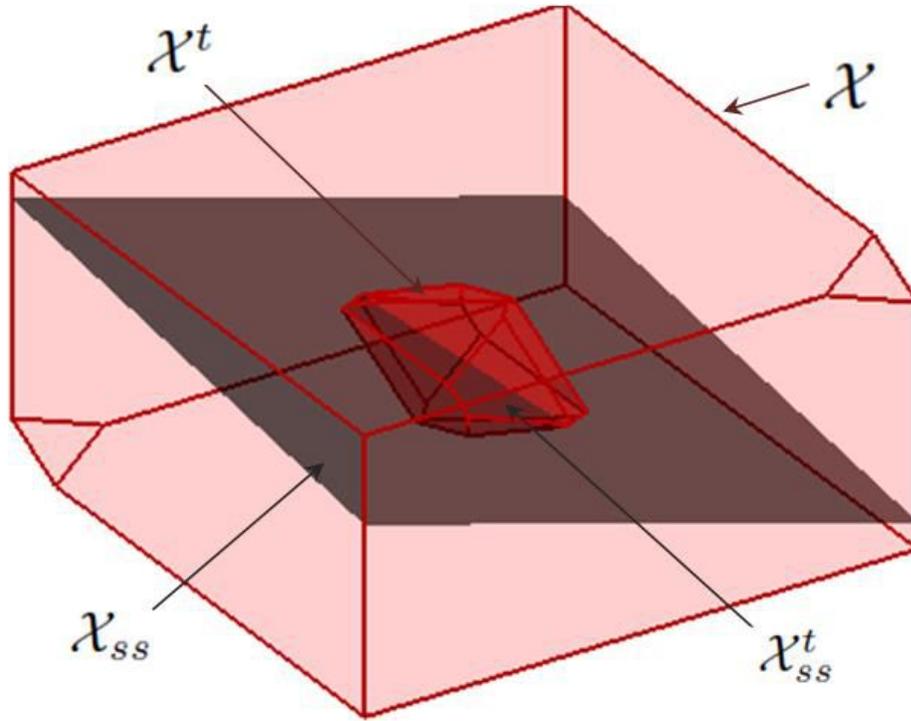


Figura 4.1: Gráfica descriptiva de los conjuntos \mathcal{X} , \mathcal{X}_{ss} , \mathcal{X}^t y \mathcal{X}_{ss}^t .

En definitiva, cuando el sistema se encuentra fuera del conjunto ISI, el conjunto ISI es un **“target” de control**. Por otro lado, cuando el sistema está dentro del conjunto ISI, el conjunto ISI es un **conjunto de identificación**.

La Figura 4.1 muestra una gráfica de los conjuntos \mathcal{X} , \mathcal{X}_{ss} , \mathcal{X}^t y \mathcal{X}_{ss}^t que fueron definidos anteriormente. Además, la Figura 4.2 muestra una gráfica del objetivo principal de este capítulo.

4.3. MPC para el seguimiento de conjuntos de equilibrio de control

La condición principal para obtener un controlador MPC con las características presentadas al final de la Sección 4.2 es la de proponer un costo del MPC que 1) penalice la distancia a un conjunto “target”, y 2) que sea nulo en cada punto de dicho conjunto, de la misma manera que en un controlador MPC estándar, con

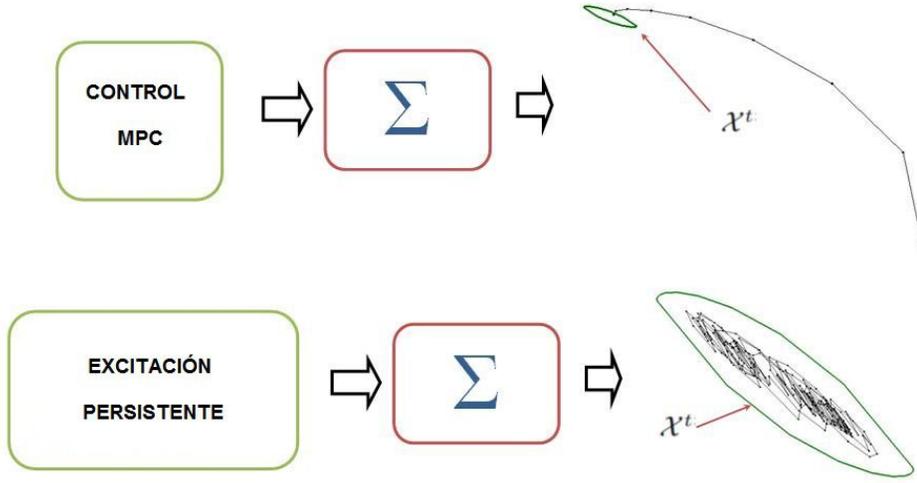


Figura 4.2: Gráfica descriptiva de la manipulación del conjunto ISI como a) target de control, y b) conjunto para identificación.

objetivo puntual, el costo es cero. Esto significa que el controlador no hace ninguna diferencia entre los diferentes puntos del conjunto “target”, o en otras palabras, el controlador deja el sistema en situación similar al de *lazo abierto* cuando se encuentra en el conjunto “target”. Esta clase de controlador comienza con un controlador para el seguimiento de *conjuntos de equilibrio de control* (CES, del acrónimo en inglés, Control Equilibrium Set) (Ferramosca et al. [14], Gonzalez y Odloak [22]).

Sea el conjunto EIS $\mathcal{U}^t \subset \mathcal{U}$, y el conjunto asociado CES $\mathcal{X}_{ss}^t = GBU^t \subseteq \mathcal{X}$. Este controlador es formulado siguiendo una estrategia similar a la propuesta en Ferramosca et al. [14], Gonzalez y Odloak [22], usualmente conocida como *control por zonas*. La función costo está dada por:

$$V_N^{CES}(x, \mathcal{X}_{ss}^t; \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{N-1} (\|x(j) - x_{ss}\|_Q^2 + \|u(j) - u_{ss}\|_R^2) + \gamma |x_{ss}|_{\mathcal{X}_{ss}^t},$$

donde $Q > 0$ y $R \geq 0$ son matrices de penalización, $\gamma > 0$ es un número real, $|x|_{\mathcal{X}_{ss}^t}$ es la función distancia (de x a \mathcal{X}_{ss}^t) y N es el horizonte de control. Además, el estado $x_{ss} \in \mathcal{X}_{ss} = GBU$ representa el valor estacionario correspondiente a u_{ss} . Para cada valor actual del estado $x \in \mathcal{X}$, el problema de optimización $P_N^{CES}(x, \mathcal{X}_{ss}^t)$ a ser resuelto está dado por:

Problema $P_N^{CES}(x, \mathcal{X}_{ss}^t)$

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}} V_N^{CES}(x, \mathcal{X}_{ss}^t; \mathbf{u}) \\ & \text{sujeto a} \\ & x(0) = x, \\ & x(j+1) = Ax(j) + Bu(j), \quad j \in \mathbb{I}_{0:N-1} \\ & x(j) \in \mathcal{X}, u(j) \in \mathcal{U}, \quad j \in \mathbb{I}_{0:N-1} \\ & u(j) = u_{ss}, \quad j \in \mathbb{I}_{N-1:\infty} \\ & x_{ss} = GBu_{ss}. \end{aligned}$$

En este problema de optimización, x y \mathcal{X}_{ss}^t son los parámetros, mientras que la secuencia $\mathbf{u} = \{u(0), \dots, u(N-1)\}$ y x_{ss}, u_{ss} , son las variables a optimizar. La ley de control, derivada de la aplicación de la estrategia del *horizonte deslizante*, está dada por $\kappa_N(x, \mathcal{X}_{ss}^t) = u^0(0; x)$, donde $u^0(0; x)$ es el primer elemento del vector solución $\mathbf{u}^0(x)$. Ahora se puede establecer el siguiente Teorema:

Teorema 2. *Considerar que la Suposición [1](#) se satisface, y considerar un conjunto CES $\mathcal{X}_{ss}^t = GB\mathcal{U}^t \subseteq \mathcal{X}$, con un conjunto de entrada asociado \mathcal{U}^t . Luego, \mathcal{X}_{ss}^t es un conjunto ES para el sistema en lazo cerrado $x^+ = Ax + B\kappa_N(x, \mathcal{X}_{ss}^t)$. Además, \mathcal{X}_{ss}^t es localmente atractivo para el sistema en lazo cerrado $x^+ = Ax + B\kappa_N(x, \mathcal{X}_{ss}^t)$, con un dominio de atracción dado por \mathcal{X} .*

Demostración. La demostración puede verse en (Ferramosca et al. [14](#), Gonzalez y Odloak [22](#)). □

La idea de llevar el sistema a un conjunto de equilibrio (con independencia del valor puntual al que se llega), sugiere la posibilidad de extender este concepto a los conjuntos invariantes, los cuales incluyen además estados transitorios.

4.4. MPC apto para re-identificación

4.4.1. MPC para el seguimiento de conjuntos invariantes para identificación

A continuación se presenta una generalización del controlador MPC para el seguimiento de conjuntos CES. Se comienza con una formulación general y se tratan casos particulares en las siguientes secciones.

Para este fin se considera un conjunto ISI \mathcal{X}^t (del acrónimo en inglés, Invariant Set for Identification) para el sistema $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$, y el conjunto asociado EIS \mathcal{U}^t . Para introducir la función costo del controlador, primero se define una *función distancia generalizada*.

Definición 16. Función distancia generalizada

Una función distancia generalizada $d_{\mathcal{X}^t}(x)$, de x a un conjunto ISI \mathcal{X}^t , es una función con las siguientes propiedades: (1) $d_{\mathcal{X}^t}(x)$ es convexo y continuo para todo $x \in \mathcal{X}$, (2) $d_{\mathcal{X}^t}(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{X}^t$, (3) $d_{\mathcal{X}^t}(x) > 0$ para todo $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^t$, (4) $d_{\mathcal{X}^t}(x)$ es una función de Lyapunov para el sistema autónomo $x^+ = f_{PE}(x)$, para todo $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^t$.

De esta manera, la función costo del controlador está dada por:

$$V_N^{ISI}(x, \mathcal{X}^t; \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{N-1} (\alpha d_{\mathcal{X}^t}(x(j)) + \beta d_{\mathcal{U}^t}(u(j))) + d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(x(N)). \quad (4.2)$$

donde α y β son números reales positivos y $d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(\cdot)$ es una función distancia definida sobre \mathcal{X}^{ter} , el cual es el *conjunto terminal* al cual el estado terminal $x(N)$ es forzado a pertenecer. Como es usual en los diseños de MPC, se necesita una acción de control local (definida por algunas condiciones) que actuará para las predicciones dentro del conjunto terminal. Por el momento, sólo se define una acción de control simple $\hat{u} \in \mathcal{U}^t$. Luego, asociados a esta acción de control local, el conjunto terminal y el costo terminal deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$\mathcal{X}^{ter} \subseteq \mathcal{X}^t \text{ es IS para } x^+ = Ax + B\hat{u}, x \in \mathcal{X} \quad (4.3)$$

$$d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(Ax + B\hat{u}) - d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(x) \leq -\alpha d_{\mathcal{X}^t}(x), \forall x \in \mathcal{X}^{ter} \quad (4.4)$$

$$d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(x) = 0, \forall x \in \mathcal{X}^t. \quad (4.5)$$

En la Sección [4.5.3](#), se presentan diferentes formas para la acción de control local, el costo terminal y el conjunto terminal. Para cada estado actual que pueda ser llevado de manera factible a \mathcal{X}^{ter} en N pasos (el conjunto controlable en N -pasos a \mathcal{X}^{ter}), $x \in \mathcal{X}_N(\mathcal{X}^{ter})$, el problema de optimización $P_N^{ISI}(x, \mathcal{X}^t)$ a ser resuelto, está dado por:

Problema $P_N^{ISI}(x, \mathcal{X}^t)$

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{u}}{\text{mín}} && V_N^{ISI}(x, \mathcal{X}^t; \mathbf{u}) \\ & \text{sujeto a} && \\ & && x(0) = x, \\ & && x(j+1) = Ax(j) + Bu(j), \quad j \in \mathbb{I}_{0:N-1} \\ & && x(j) \in \mathcal{X}, u(j) \in \mathcal{U}, \quad j \in \mathbb{I}_{0:N-1} \\ & && x(N) \in \mathcal{X}^{ter}. \end{aligned}$$

Como se puede observar, la principal diferencia entre este problema y el problema $P_N^{CES}(x, \mathcal{X}_{ss}^t)$ es que el conjunto “target” es un conjunto ISI, en lugar de un conjunto CES. El controlador que se obtiene de esta formulación asegura la convergencia del sistema en lazo cerrado al conjunto ISI \mathcal{X}^t , y una vez que el sistema se encuentra allí, se asegura que permanecerá en forma indefinida. A continuación se formaliza la convergencia en lazo cerrado a \mathcal{X}^t por medio de los siguientes teoremas:

Teorema 3. *Suponga que la Suposición [1](#) se cumple, y considerar un conjunto ISI $\mathcal{X}^t \subseteq \mathcal{X}$, con un conjunto asociado EIS \mathcal{U}^t . Luego, \mathcal{X}^t es un conjunto IS para el sistema en lazo cerrado $x^+ = Ax + B\kappa_N(x, \mathcal{X}^t)$.*

Demostración. (González et al. [\[21\]](#))

Sea un estado $x \in \mathcal{X}^t$. Luego, por definición de los conjuntos ISI, cualquier secuencia de entrada $\hat{\mathbf{u}} = \{u(0), \dots, u(N-1)\}$, con $u(j) \in \mathcal{U}^t$, para $j \in \mathbb{I}_{0:N-1}$, produce una secuencia de estados que permanecen en \mathcal{X}^t . Así, considerando la definición de la función distancia generalizada, la secuencia de entrada es una solución óptima trivial de $P_N^{ISI}(x, \mathcal{X}^t)$, con $V_N^{ISI}(x, \mathcal{X}^t; \hat{\mathbf{u}}) = 0$. Por otro lado, cualquier secuencia de entrada $\hat{\mathbf{u}}$ con $u(j) \notin \mathcal{U}^t$, para algún $j \in \mathbb{I}_{0:N-1}$, produce un costo $V_N^{ISI}(x, \mathcal{X}^t; \hat{\mathbf{u}}) \geq 0$. Esto significa que necesariamente $u^0(0; x) \in \mathcal{U}^t$, lo cual provee un costo del MPC $V_N^{ISI}(x, \mathcal{X}^t; \mathbf{u})$ que es nulo a lo largo de toda trayectoria que comienza en un estado

inicial dentro de \mathcal{X}^t , y además, $u^0(0; x)$ es una entrada de control dentro de \mathcal{U}^t . A partir de esto, surge directamente que \mathcal{X}^t es un conjunto IS para el sistema en lazo cerrado bajo MPC. \square

Teorema 4. *Asumir que la Suposición [1](#) se mantiene, y considerar el conjunto ISI $\mathcal{X}^t \subseteq \mathcal{X}$, con el conjunto EIS asociado \mathcal{U}^t . Luego, \mathcal{X}^t es localmente atractivo para el sistema en lazo cerrado $x^+ = Ax + B\kappa_N(x, \mathcal{X}^t)$, con un dominio de atracción dado por $\mathcal{X}_N(\mathcal{X}^{ter})$.*

Demostración. (González et al. [21](#))

Dado un estado $x \in \mathcal{X}_N(\mathcal{X}^{ter}) \setminus \mathcal{X}^t$ en un instante de tiempo k , la solución definida para este estado, $\mathbf{u}^0(x) = \{u^0(0; x), \dots, u^0(N-1; x)\}$, y la secuencia de estado correspondiente $\mathbf{x}^0(x) = \{x^0(0; x), \dots, x^0(N; x)\}$, con $x^0(N; x) \in \mathcal{X}^{ter}$, la función costo del problema $P_N^{ISI}(x, \mathcal{X}^t)$ correspondiente a $\mathbf{u}^0(x)$ está dado por:

$$\begin{aligned} V_N^{ISI^0}(x, \mathcal{X}^t) &= V_N^{ISI}(x, \mathcal{X}^t; \mathbf{u}^0(x)) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} (\alpha d_{\mathcal{X}^t}(x(j; x)^0) + \beta d_{\mathcal{U}^t}(u(j; x)^0)) + d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(x^0(N; x)). \end{aligned}$$

Ahora, considerar el estado sucesor $x^+ = Ax + Bu^0(0; x)$, al tiempo $k+1$, es obtenido por medio de la implementación de la ley de control $\kappa_N(x, \mathcal{X}^t) = u^0(0; x)$, la que define la siguiente secuencia: $\hat{\mathbf{u}} = \{u^0(1; x), \dots, u^0(N-1; x), \hat{u}\}$, donde \hat{u} es la acción de control local. Notar que dado que no se considera error entre planta y modelo, el estado sucesor x^+ es igual a $x^0(1; x)$. Esta solución tiene una secuencia de estado asociado $\hat{\mathbf{x}} = \{x^0(1; x), \dots, x^0(N; x), \hat{x}\}$, donde $\hat{x} = Ax^0(N; x) + B\hat{u}$. Como $x^0(N; x) \in \mathcal{X}^{ter}$ y \mathcal{X}^{ter} es un conjunto IS para el sistema $x^+ = Ax + B\hat{u}$, $x \in \mathcal{X}$, luego $\hat{x} \in \mathcal{X}^{ter}$. Por lo tanto, la secuencia $\hat{\mathbf{u}}$ es una solución factible para el problema $P_N^{ISI}(x, \mathcal{X}^t)$ al tiempo $k+1$. La función costo del Problema $P_N^{ISI}(x^+, \mathcal{X}^t)$, al tiempo $k+1$, para la secuencia $\hat{\mathbf{u}}$, está dada por:

$$V_N^{ISI}(x^+, \mathcal{X}^t; \hat{\mathbf{u}}) = \sum_{j=0}^{N-1} (\alpha d_{\mathcal{X}^t}(x(j; x^+)) + \beta d_{\mathcal{U}^t}(u(j; x^+))) + d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(x(N; x^+)),$$

donde $x^+ = x^0(1; x)$. Consecuentemente, este costo puede ser escrito como función

de x ,

$$V_N^{ISI}(x^+, \mathcal{X}^t; \hat{\mathbf{u}}) = \sum_{j=1}^{N-1} (\alpha d_{\mathcal{X}^t}(x(j; x)^0) + \beta d_{\mathcal{U}^t}(u(j; x)^0)) \\ + (\alpha d_{\mathcal{X}^t}(x(N; x)^0) + \beta d_{\mathcal{U}^t}(\hat{u})) + d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(\hat{x}).$$

Si se compara el costo factible propuesto al tiempo $k + 1$ con el óptimo al tiempo k , se tiene:

$$V_N^{ISI}(x^+, \mathcal{X}^t; \hat{\mathbf{u}}) - V_N^{ISI^0}(x, \mathcal{X}^t) = -\alpha d_{\mathcal{X}^t}(x^0(0; x)) - \beta d_{\mathcal{U}^t}(u^0(0; x)) \\ + (\alpha d_{\mathcal{X}^t}(x(N; x)^0) + \beta d_{\mathcal{U}^t}(\hat{u})) + d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(\hat{x}) - d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(x(N; x)^0)$$

Dado que $\hat{u} \in \mathcal{U}^t$ por definición, $d_{\mathcal{U}^t}(\hat{u}) = 0$. Además, como $x(N; x)^0 \in \mathcal{X}^{ter}$ y $\hat{x} \in \mathcal{X}^{ter}$, luego - por condición (4.4), $d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(\hat{x}) - d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(x(N; x)^0) \leq -\alpha d_{\mathcal{X}^t}(x(N; x)^0)$. Entonces,

$$V_N^{ISI}(x^+, \mathcal{X}^t; \hat{\mathbf{u}}) - V_N^{ISI^0}(x, \mathcal{X}^t) = -\alpha d_{\mathcal{X}^t}(x^0(0; x)) - \beta d_{\mathcal{U}^t}(u^0(0; x)) \\ + \alpha d_{\mathcal{X}^t}(x(N; x)^0) - \alpha d_{\mathcal{X}^t}(x(N; x)^0) \\ \leq -\alpha d_{\mathcal{X}^t}(x^0(0; x)) - \beta d_{\mathcal{U}^t}(u^0(0; x)).$$

Por optimalidad de la solución al problema $P_N^{ISI}(x^+, \mathcal{X}^t)$, al tiempo $k + 1$, se tiene $V_N^{ISI^0}(x^+, \mathcal{X}^t) \leq V_N^{ISI}(x^+, \mathcal{X}^t; \hat{\mathbf{u}})$, y así

$$V_N^{ISI^0}(x^+, \mathcal{X}^t) - V_N^{ISI^0}(x, \mathcal{X}^t) \leq -\alpha d_{\mathcal{X}^t}(x^0(0; x)) - \beta d_{\mathcal{U}^t}(u^0(0; x)). \quad (4.6)$$

Como la distancia generalizada es un función definida positiva, (4.6) implica que $x^0(0; x)$ tiende a \mathcal{X}^t y $u^0(0; x)$ tiende a \mathcal{U}^t cuando $k \rightarrow \infty$, y así, el sistema converge al conjunto ISI deseado. \square

Los teoremas 3 y 4 sugieren que un requerimiento extra a la entrada, como es el requerimiento de excitación persistente, puede incluirse en la función costo propuesto. De hecho, lo que se muestra es que cuando el sistema está en \mathcal{X}^t , cualquier entrada acotada externa que no lleve la entrada fuera de \mathcal{U}^t , no producirá ningún efecto en el controlador.

4.4.2. Incluyendo el modo de excitación

En esta sección se considera la secuencia de *excitación persistente* contenida en el conjunto \mathcal{U}^t , $\mathbf{u}_{PE} = \{u_{PE}(0), \dots, u_{PE}(T_{id})\}$, $u_{PE}(j) \in \mathcal{U}^t$, $j \in \mathbb{I}_{0:T_{id}}$, donde T_{id} es la longitud del vector de datos necesarios para realizar una correcta identificación. La formulación propuesta del *MPC con excitación persistente* se muestra a continuación:

$$V_N^{EXC}(x, \mathcal{X}^t, \mathbf{u}_{PE}, k; \mathbf{u}) = (1 - \rho(x))V_N^{ISI}(x, \mathcal{X}^t; \mathbf{u}) + \rho(x)\|u(0) - u_{PE}(k)\|,$$

donde $\rho(x) = 1$ si $x \in \mathcal{X}^t$, y $\rho(x) = 0$, de otra manera. Esta estrategia es claramente una estrategia de control “switching”, en donde el “switching” es operado por una función $\rho(x)$. Para cualquier estado inicial x en $\mathcal{X}_N(\mathcal{X}^{ter})$, en un instante de tiempo dado k , el problema de optimización $P_N^{EXC}(x, \mathcal{X}^t, \mathbf{u}_{PE}, k)$, a ser resuelto en cada instante de tiempo k , esta dado por:

Problema $P_N^{EXC}(x, \mathcal{X}^t, \mathbf{u}_{PE}, k)$

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{u}} V_N^{EXC}(x, \mathcal{X}^t, \mathbf{u}_{PE}, k; \mathbf{u}) \\ & \text{sujeto a} \\ & x(0) = x, \\ & x(j+1) = Ax(j) + Bu(j), \quad j \in \mathbb{I}_{0:N-1} \\ & x(j) \in \mathcal{X}, u(j) \in \mathcal{U}, \quad j \in \mathbb{I}_{0:N-1} \\ & x(N) \in \mathcal{X}^{ter} \end{aligned}$$

Notar que la función $\rho(x)$ es una función discontinua necesaria para anular el término relacionado con la excitación persistente en el caso de que una perturbación externa lleve el sistema afuera del conjunto invariante \mathcal{X}^t . El siguiente teorema formaliza las propiedades del controlador MPC propuesto.

Teorema 5. Considerar que la Suposición [I](#) se cumple, que se tiene un conjunto ISI \mathcal{X}^t y una secuencia de excitación persistente \mathbf{u}_{PE} contenida en un conjunto EIS \mathcal{U}^t . Luego, para cualquier estado inicial $x \in \mathcal{X}^t$, el sistema controlado por la ley de control MPC de horizonte móvil $\kappa_N(x, \mathcal{X}^t) = u^0(0; x)$ excitará el sistema dentro de \mathcal{X}^t (es decir, $x^+ = Ax + \kappa_N(x, \mathcal{X}^t) = f_{PE}(x)$). Además, para cualquier estado inicial

$x \in \mathcal{X}_N(\mathcal{X}^{ter}) \setminus \mathcal{X}^t$, el lazo cerrado converge a \mathcal{X}^t .

Demostración. (González et al. [21])

i) Considerar un estado inicial $x \in \mathcal{X}_N(\mathcal{X}^t) \setminus \mathcal{X}^t$. Luego, dado $\rho(x) = 0$, el problema $P_N^{EXC}(x, \mathcal{X}^t, \mathbf{u}_{PE}, k)$ es equivalente al **Problema** $P_N^{ISI}(x, \mathcal{X}^t)$. Además, por el Teorema [4] el sistema en lazo cerrado converge de forma admisible a \mathcal{X}^t .

ii) Considerar ahora un estado inicial $x \in \mathcal{X}^t$. Luego, dado que $\rho(x) = 1$, se activa la penalización de la excitación persistente. Además, $(1 - \rho(x))V_N^{ISI}(x, \mathcal{X}^t; \mathbf{u}) = 0$. Esto significa que el costo del **Problema** $P_N^{EXC}(x, \mathcal{X}^t, \mathbf{u}_{PE}, k)$ será:

$$V_N^{EXC}(x, \mathcal{X}^t, \mathbf{u}_{PE}, k; \mathbf{u}) = \|u(0) - u_{PE}(k)\|.$$

Luego, dado que \mathcal{X}^t es un conjunto ISI y la secuencia de excitación persistente \mathbf{u}_{PE} se encuentra dentro de \mathcal{U}^t , el sistema permanecerá dentro de \mathcal{X}^t . Así, el costo será nulo si y solo si $u^0(0; x) = u_{PE}(k)$ para cada instante de tiempo k . Esto garantiza la excitación persistente del sistema en lazo abierto. \square

4.4.3. Operación del lazo

Basado en lo presentado anteriormente, se presentará el controlador MPC. Se tienen dos modos de operación:

- **Modo de operación - Control:** En este modo no es necesario una re-identificación, y se implementa el *MPC para seguimiento* de conjuntos CES. (**Problema** $P_N^{CES}(x, \mathcal{X}_{ss}^t)$);
- **Modo de operación - Re-identificación:** Este modo sólo es activado cuando hay sospechas de que el modelo no representa correctamente la planta, y por lo tanto, es necesario realizarse una re-identificación. En este modo es utilizado el *MPC con excitación persistente* (**Problema** $P_N^{EXC}(x, \mathcal{X}^t, \mathbf{u}_{PE}, k)$).

4.5. Candidatos para la función distancia generalizada y el costo terminal

Debido a que las formulaciones MPC propuestas se basan fuertemente en el concepto de *Función distancia generalizada*, se presenta en esta sección dos posibles candidatos que satisfacen la Definición [16](#).

4.5.1. Distancia de un punto a un conjunto

Definición 17. *Distancia de un punto a un conjunto*

Dado un conjunto ISI $\mathcal{X}^t \subset \mathcal{X}$, la distancia de x a \mathcal{X}^t se define como

$$|x|_{\mathcal{X}^t} \triangleq \min_{\hat{x} \in \mathcal{X}^t} \|x - \hat{x}\|_M^2, \quad M > 0.$$

La función $|x|_{\mathcal{X}^t}$ tiene las siguientes propiedades:

Propiedad 7. (1) $|x|_{\mathcal{X}^t}$ es convexo y continuo para todo $x \in \mathcal{X}$, (2) $|x|_{\mathcal{X}^t} = 0$ para todo $x \in \mathcal{X}^t$, (3) $|x|_{\mathcal{X}^t} > 0$ para todo $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^t$, (4) $\mathcal{N}[|x|_{\mathcal{X}^t}, \gamma] = \mathcal{X}^t \oplus \mathcal{B}_\gamma$, para todo $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^t$, donde $\mathcal{B}_\gamma \triangleq \{x \in \mathcal{X} : \|x\|_M^2 \leq \gamma\}$, $\gamma > 0$.

Propiedad 8. Considerar que la Suposición [1](#) se cumple, y considerar que $\mathcal{X}^t \subseteq \mathcal{X}$ es un conjunto ISI para el sistema $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$. Además, si la matriz $M > 0$ asociada a la función distancia, es tal que $A^T M A - M = -Q$ para algún $Q > 0$, luego, la función distancia $|x|_{\mathcal{X}^t}$ es una función de Lyapunov para el sistema autónomo $x^+ = f_{PE}(x)$, para todo $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^t$.

Demostración. (González et al. [21](#))

Primero, notar que el conjunto \mathcal{B}_γ definido en la Propiedad [7](#)(4), es un conjunto λ -IS para el sistema $x^+ = Ax$, $x \in \mathcal{X}$, con $\lambda \in [0, 1)$, dado que la matriz $M > 0$ es tal que $AM A^T - M = -Q$ para algún $Q > 0$. Por lo tanto, de las Propiedades [4](#) y [7](#)(4) se deduce que los conjuntos de nivel $\mathcal{N}[|x|_{\mathcal{X}^t}, \gamma] = \mathcal{X}^t \oplus \mathcal{B}_\gamma$, con $\gamma > 0$, son conjuntos δ -IS, $\delta \in (\lambda, 1)$, para el sistema autónomo $x^+ = f_{PE}(x)$, para todo $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^t$ (se asume por simplicidad que $(\mathcal{X}^t \oplus \mathcal{B}_\gamma) \subset \mathcal{X}$). Considerar ahora un estado $x \in \partial(\mathcal{X}^t \oplus \mathcal{B}_\gamma)$, para algún $\gamma > 0$, que implica que $|x|_{\mathcal{X}^t} = \gamma$. Luego,

$$x^+ = (Ax + Bu) \in \delta(\mathcal{X}^t \oplus \mathcal{B}_\gamma), \quad \forall u \in \mathcal{U}^t.$$

Esto implica que $|x^+|_{\mathcal{X}^t} \leq \delta\gamma$, y así, $|x^+|_{\mathcal{X}^t} \leq \delta|x|_{\mathcal{X}^t}$, con $\delta \in (\lambda, 1)$, lo que significa que $|x|_{\mathcal{X}^t}$ es una función de Lyapunov para el sistema autónomo $x^+ = f_{PE}(x)$, para todo $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^t$. \square

4.5.2. Funcional modificado de Minkowski

El funcional de Minkowski (Blanchini y Miani [5]) es definido como:

Definición 18. *Dado un conjunto ISI $\mathcal{X}^t \subset \mathcal{X}$, el funcional de Minkowski $\Psi_{\mathcal{X}^t}$ asociado a \mathcal{X}^t se define como*

$$\Psi_{\mathcal{X}^t}(x) = \inf\{\mu \geq 0 : x \in \mu\mathcal{X}^t\}.$$

El funcional de Minkowski tiene varias características importantes (Blanchini y Miani [5]). Éste, además, fue usado como parte de costos de MPC en trabajos como Rakovic y Lazar [62] y [20]. Sin embargo, este funcional no es nulo dentro del conjunto con el cual esta relacionado. Para lograr esta propiedad, necesitamos introducir el *funcional modificado de Minkowski*

Definición 19. Funcional Modificado de Minkowski

Dado un conjunto convexo $\mathcal{X}^t \subset \mathcal{X}$ que incluye el origen como punto interior, y un conjunto λ -IS, Ω , con $\lambda \in [0, 1)$, para el sistema $x^+ = Ax$, $x \in \mathcal{X}$, el funcional modificado de Minkowski se define como

$$\hat{\Psi}_{\mathcal{X}^t}(x) \triangleq \inf\{\mu \geq 0 : x \in \mathcal{X}^t \oplus \mu\Omega\}$$

La función $\hat{\Psi}_{\mathcal{X}^t}(x)$ tiene las siguientes propiedades:

Propiedad 9. (1) $\hat{\Psi}_{\mathcal{X}^t}(x)$ es convexo y continuo para todo $x \in \mathcal{X}$, (2) $\hat{\Psi}_{\mathcal{X}^t}(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{X}^t$, (3) $\hat{\Psi}_{\mathcal{X}^t}(x) > 0$ para todo $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^t$, (4) $\mathcal{N}[\hat{\Psi}_{\mathcal{X}^t}(x), \gamma] = \mathcal{X}^t \oplus \gamma\Omega$, para todo $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^t$, $\gamma > 0$.

Propiedad 10. *Considerar que la Suposición [1] se cumple, y que $\mathcal{X}^t \subseteq \mathcal{X}$ es un conjunto ISI para el sistema $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$. Luego, $\hat{\Psi}_{\mathcal{X}^t}(x)$ es una función de Lyapunov para el sistema autónomo $x^+ = f_{PE}(x)$, para todo $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^t$.*

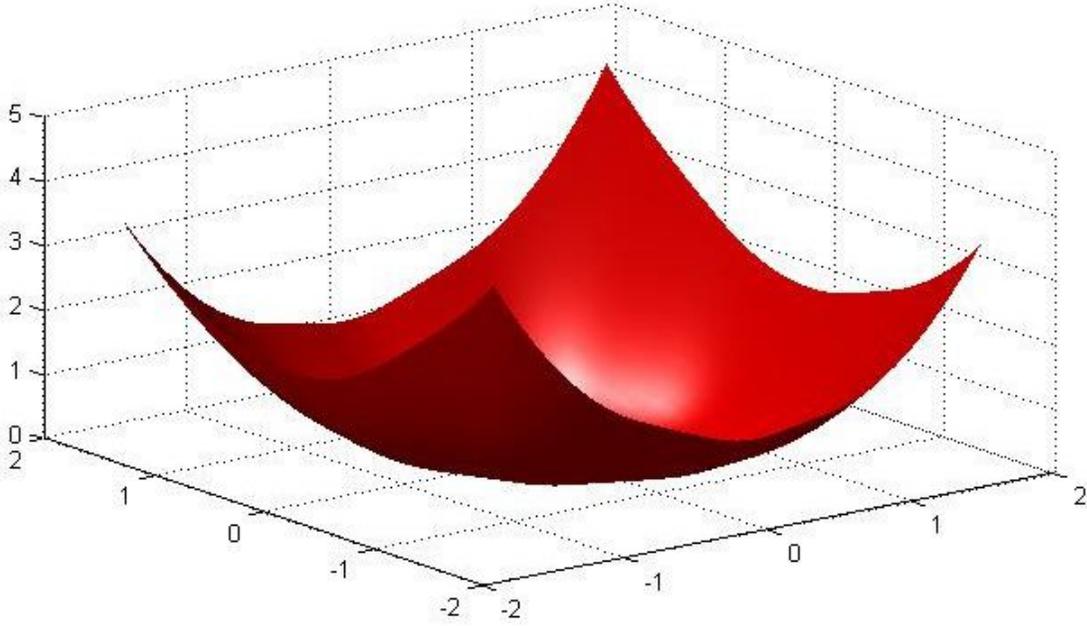


Figura 4.3: Gráfica descriptiva de la Función Distancia asociada a un conjunto dado.

Demostración. (González et al. [21])

Esta demostración tiene un procedimiento similar a la Propiedad [8] teniendo en cuenta la Propiedad [9] (4), del Funcional Modificado de Minkowski, y la condición de λ -IS condición de Ω . \square

Las Figuras [4.3] a [4.6] muestran las gráficas del Funcional Modificado de Minkowski y una Función Distancia asociada a un conjunto politópico arbitrario. También se observan los conjuntos de nivel asociados a cada función, donde se puede ver que dentro del conjunto las funciones son nulas.

4.5.3. Acción local de control, costo terminal y restricción terminal

La elección mas fácil para la acción de control, \hat{u} , es $\hat{u} \triangleq 0 \in \mathcal{U}^t$ (esta acción es posible ya que A es estable). Luego, el conjunto terminal y el costo terminal son $\mathcal{X}^{ter} \triangleq \mathcal{X}$ y $d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(x) \triangleq \delta d_{\mathcal{X}^t}(x(j)) \geq \sum_{j=0}^{\infty} \alpha d_{\mathcal{X}^t}(x(j))$, $x(0) = x$, respectivamente.

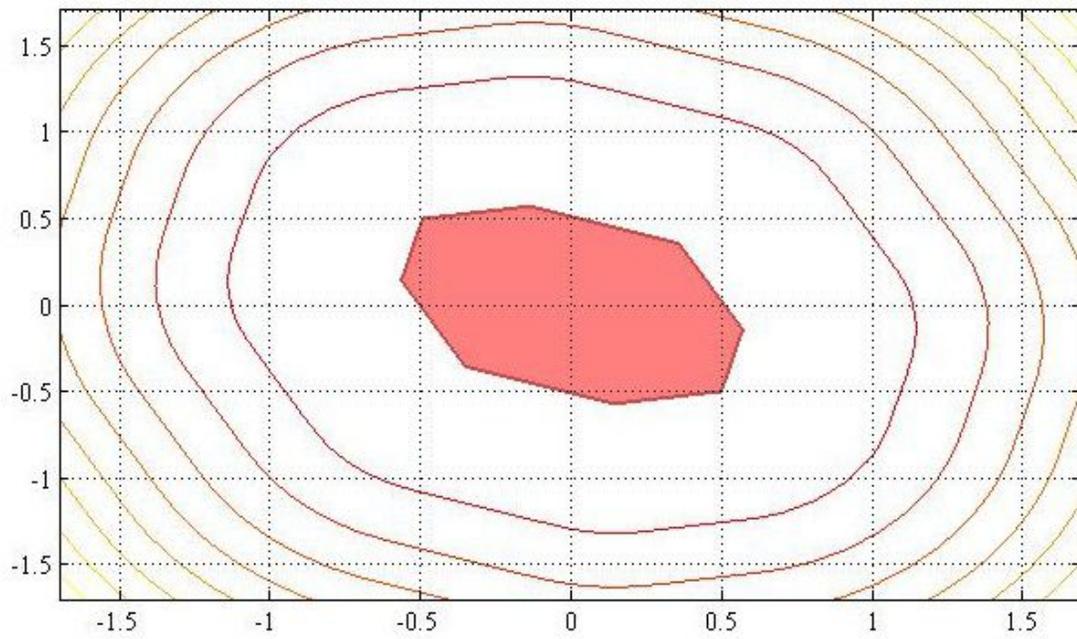


Figura 4.4: Conjuntos de nivel de la Función Distancia.

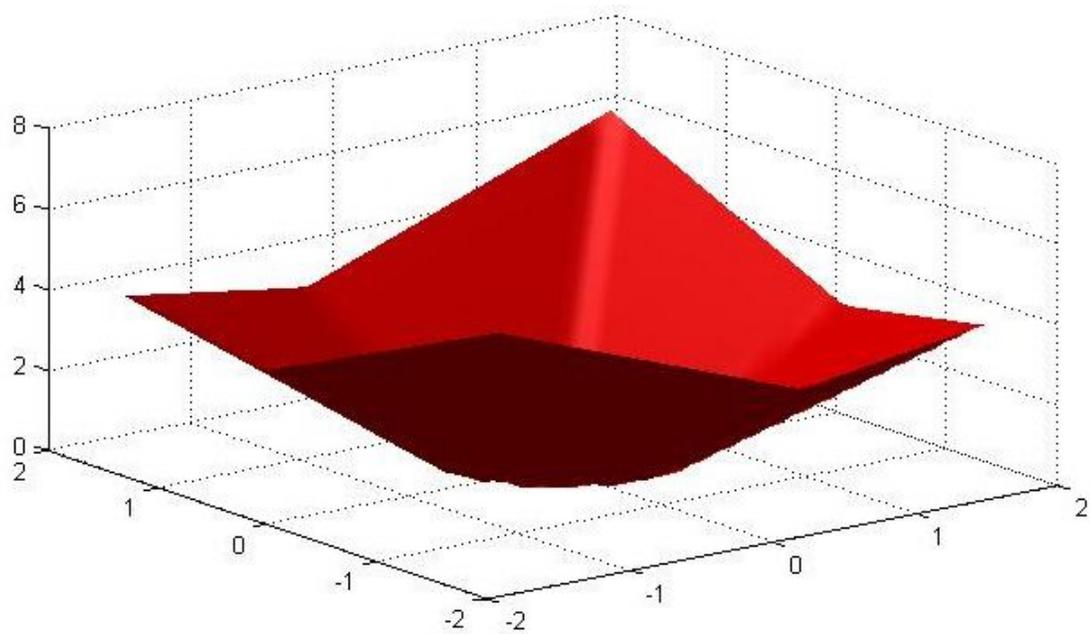


Figura 4.5: Gráfica descriptiva del Funcional Modificado de Minkowski asociado a un conjunto dado.

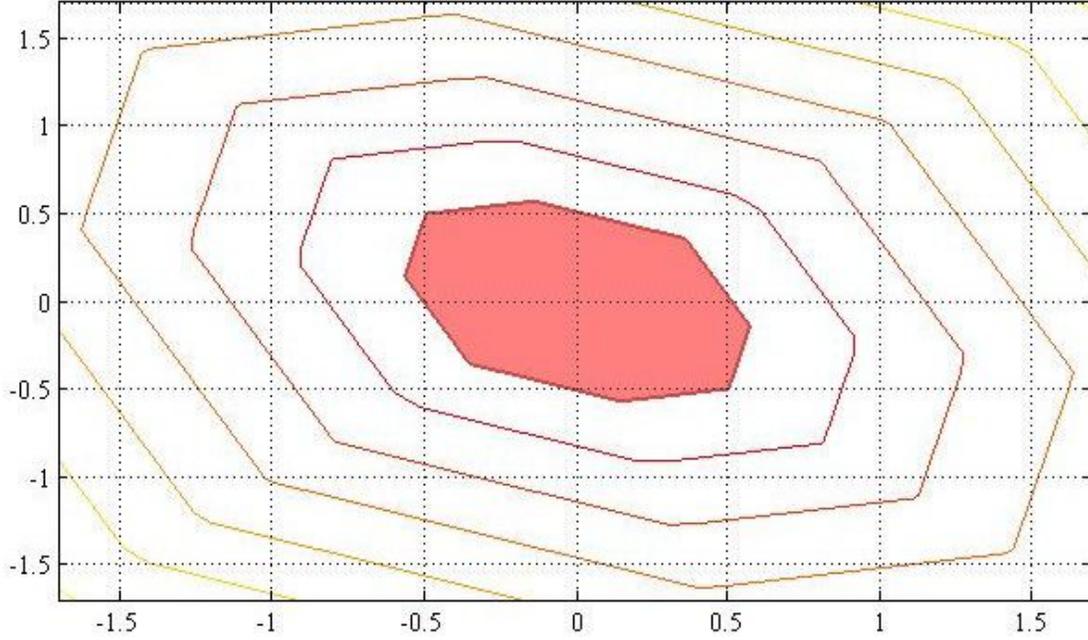


Figura 4.6: Conjuntos de nivel del Funcional Modificado de Minkowski.

Como \mathcal{X} es un conjunto IS para $x^+ = Ax$, por definición, luego \mathcal{X}^{ter} satisface la condición (4.3). Por otro lado, como $d_{\mathcal{X}^t}(x)$ es una función de Lyapunov para el sistema $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$, para $x \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^t$ (Propiedad 8 y 10), y $\hat{u}(j) = 0 \in \mathcal{U}^t$, para $j \in \mathbb{I}_{N-1:\infty}$, es posible seleccionar un número real $\delta > 0$ (suficientemente grande) tal que $d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(x)$ satisface la condición (4.4) para todo $x \in \mathcal{X}$. La condición (4.5) se cumple trivialmente. La desventaja de esta elección es que la solución del MPC propuesto puede estar lejos de la optimalidad, ya que ninguna acción de control es implementada para predicciones más allá del horizonte N .

La otra elección para la acción de control local es la simple selección de cualquier $\hat{u} \in \mathcal{U}^t$. Luego, dos opciones pueden ser considerados para el conjunto terminal y el costo terminal. La primera opción es $\mathcal{X}^{ter} \triangleq \mathcal{X}^t$ y $d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(x) \equiv 0$ (sin costo terminal). En este caso, \mathcal{X}^{ter} satisface la condición (4.3) y $d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(x)$ satisface la condición (4.4-4.5) trivialmente. Una desventaja de esta selección es que el dominio de atracción del MPC propuesto esta dado por $\mathcal{X}_N(\mathcal{X}^t)$, lo que puede ser considerablemente pequeño.

Una segunda opción es $\mathcal{X}^{ter} \triangleq \mathcal{X}^t \oplus \delta\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$ y $d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(x) \geq \sum_{j=0}^{\infty} \alpha d_{\mathcal{X}^t}(x(j))$, $x(0) = x$. En este caso, el número real $\delta < 0$ debe ser seleccionado para maximizar

el volumen de \mathcal{X}^{ter} . Notar que \mathcal{X}^{ter} es un conjunto ISI (por la Propiedad [3](#)), y así satisface la condición [\(4.3\)](#). Por otra parte, un procedimiento simple para la obtención de $d_{\mathcal{X}^t}^{ter}(x)$, que satisface las condiciones [\(4.4\)](#) y [\(4.5\)](#), se presentó anteriormente.

Nota 2. *Debe remarcar que en la formulación propuesta no hay un costo computacional adicional prohibitivo. Si se utiliza la Función Distancia como **función distancia generalizada**, el problema de optimización puede reorganizarse para mantener un problema QP. Si en cambio se utiliza el funcional de Minkowski, debe resolverse un problema de programación lineal adicional.*

4.6. Diferencia Planta-Modelo

Debe tenerse en cuenta que el conjunto objetivo, \mathcal{X}^t , el cual es un parámetro del costo de optimización del MPC, depende fuertemente del modelo. Ya que el escenario de excitación esta dado cuando se tienen sospechas que el modelo que utiliza el MPC no es lo suficientemente preciso, es necesaria una discusión acerca del efecto de la diferencia entre planta-modelo (Model mismatch) para la obtención del conjunto \mathcal{X}^t . En la siguiente sección dos clases de diseños de conjuntos ISI \mathcal{X}^t robustos son presentados.

4.6.1. Incertidumbre paramétrica

Considerar un sistema dado por

$$x^+ = A(w)x + B(w)u, \quad y = C(w)x, \quad w \in \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}, \quad (4.7)$$

donde $A(w)$ y $B(w)$ son funciones afines de w , i.e., $A(w) = A + \bar{A}w$, $B(w) = B + \bar{B}w$ con w perteneciente al conjunto propio $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}$. Además, se asume que el modelo Nominal esta dado por $x^+ = A(w_N = 0)x + B(w_N = 0)u = Ax + Bu$, y el modelo Real desconocido, esta dado por $x^+ = A(w_R)x + B(w_R)u$, para algún $w_R \in \mathcal{W}$. En este contexto, existe un conjunto ISI mínimo $\underline{\mathcal{X}}^t(w)$ asociado a cada modelo en particular. Considérese ahora el siguiente teorema:

Teorema 6. *Dado un conjunto λ -ISI $\mathcal{X}^t(w = 0)$, $\lambda \in [0, 1)$, para $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$. Luego, existe un conjunto no vacío $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}$ para el cual el conjunto*

$\mathcal{X}^t(w = 0)$ es un conjunto ISI para $x^+ = A(w)x + B(w)u$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$, para todo $w \in \mathcal{W}$.

Demostración. (González et al. [21]) Considerar

$$\begin{aligned} A(w)\mathcal{X}^t \oplus B(w)\mathcal{U}^t &= (A + w\bar{A})\mathcal{X}^t \oplus (B + w\bar{B})\mathcal{U}^t \\ &\subseteq (\lambda\mathcal{X}^t \oplus B\mathcal{U}^t) \oplus w(\bar{A}\mathcal{X}^t \oplus \bar{B}\mathcal{U}^t) \subseteq \lambda\mathcal{X}^t \oplus w\Theta \end{aligned}$$

donde $\Theta \triangleq \bar{A}\mathcal{X}^t \oplus \bar{B}\mathcal{U}^t$ es el conjunto alcanzable en un paso desde \mathcal{X}^t , para el sistema $x^+ = \bar{A}x + \bar{B}u$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$. La primera inclusión surge de las propiedades de la suma de Minkowski, mientras que la segunda surge del hecho de que $\mathcal{X}^t(w = 0)$ es un conjunto λ -ISI, $\lambda \in [0, 1)$, para $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$. Ahora, como \mathcal{X}^t y \mathcal{U}^t son conjuntos propios C, Θ es también un conjunto propio C. Luego, existe un valor $\bar{w} > 0$ tal que $\bar{w}\Theta \subseteq (1 - \lambda)\mathcal{X}^t$. De esta manera se tiene

$$A(w)\mathcal{X}^t \oplus B(w)\mathcal{U}^t \subseteq \lambda\mathcal{X}^t \oplus \bar{w}\Theta \subseteq \lambda\mathcal{X}^t \oplus (1 - \lambda)\mathcal{X}^t = \mathcal{X}^t$$

Finalmente, el conjunto no vacío $\mathcal{W} \triangleq [0, \bar{w}]$ es tal que \mathcal{X}^t es un conjunto ISI para $x^+ = A(w)x + B(w)u$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$, para todo $w \in \mathcal{W}$. Además, asumiendo que Θ es 0-simétrico, un procedimiento similar puede realizarse para $-\bar{w}$. En este caso, el conjunto (no vacío) \mathcal{W} estará dado por $\mathcal{W} \triangleq [-\bar{w}, \bar{w}]$. \square

Nota 3. Notar que lo descrito en (4.7) no es simplemente un escalamiento de las matrices A y B , ya que las matrices \bar{A} y \bar{B} son por lo general diferentes de las matrices del modelo nominal.

Nota 4. Notar que un conjunto general \tilde{X} conteniendo todos los posibles conjuntos invariantes mínimos para el sistema desconocido no es útil para una formulación de MPC robusto, ya que este conjunto no es necesariamente un conjunto ISI para cada modelo de la familia.

En base a los resultados del Teorema 6, en la siguiente sección se propone una forma práctica para la obtención del conjunto ISI robusto.

4.6.2. Cálculo práctico del conjunto ISI robusto

La Propiedad [3](#) provee una manera fácil para la obtención de un conjunto ISI como el que se requiere en la hipótesis del Teorema [6](#). Considerar un conjunto λ -IS como Ω_λ , $\lambda \in [0, 1)$, para el sistema en lazo abierto $x^+ = A(w=0)x = Ax$, $x \in \mathcal{X}$, y asumir que $\xi \Omega_\lambda$, $\xi > 0$, es además un conjunto (contractivo) λ -IS para el mismo sistema. Luego, el conjunto $\mathcal{X}^t = \mathcal{X}^t(\xi, \lambda) \triangleq \underline{\mathcal{X}}^t(w=0) \oplus \xi \Omega_\lambda$, donde $\underline{\mathcal{X}}^t(w=0)$ es el conjunto ISI mínimo para el sistema Nominal, es un conjunto δ -ISI, con $\delta \in (\lambda, 1)$, para $x^+ = Ax + Bu$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$. Ahora, para el conjunto dado $\mathcal{W} \triangleq [-\bar{w}, \bar{w}]$ y \mathcal{U}^t , es deseable obtener el conjunto ISI robusto más pequeño $\mathcal{X}^t(\xi, \lambda)$, que puede ser obtenido resolviendo el siguiente problema:

$$(\bar{\xi}, \bar{\lambda}) = \min_{\xi, \lambda} \{(\xi, \lambda) | (A\mathcal{X}^t(\xi, \lambda) \oplus BU^t) \oplus \bar{w}(\bar{A}\mathcal{X}^t(\xi, \lambda) \oplus \bar{B}U^t) \subseteq \mathcal{X}^t(\xi, \lambda)\} \quad (4.8)$$

De esta manera, el conjunto ISI más pequeño está dado por $\mathcal{X}^t = \mathcal{X}^t(\bar{\xi}, \bar{\lambda}) \triangleq \underline{\mathcal{X}}^t(w=0) \oplus \bar{\xi}\Omega_{\bar{\lambda}}$.

4.6.3. Incertidumbre de perturbación aditiva

En este caso se tiene un modelo de la forma

$$x^+ = Ax + Bu + Dd,$$

donde $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$ es la matriz de perturbación, $d \in \mathcal{D} \in \mathbb{R}^l$ es el vector de perturbación que describe la incertidumbre y \mathcal{D} es el conjunto propio \mathcal{C} . En tal caso, el conjunto ISI \mathcal{X}^t puede ser seleccionado como el conjunto ISI correspondiente al sistema extendido

$$x^+ = Ax + \begin{bmatrix} B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix} \in \mathcal{U}^t \times \mathcal{D}.$$

Por lo tanto, \mathcal{X}^t será un conjunto ISI para el sistema incierto $x^+ = Ax + Bu + Dd$, $(x, u) \in \mathcal{Z}^t$, para todo $d \in \mathcal{D}$.

4.7. Resultados de simulación

4.7.1. Caso nominal

En esta sección se presentan algunos resultados de simulación, que permiten evaluar la estrategia de control propuesta. Para este fin, un sistema estable de 3 estados con la estructura (3.5)-(3.6) es utilizado, con matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,2 & -0,3 \\ 0,4 & 0,3 & 0,4 \\ -0,3 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,85 \\ 0,5 & -0,67 \\ -0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -0,54 & 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & -1,1 & 0,7 \end{bmatrix},$$

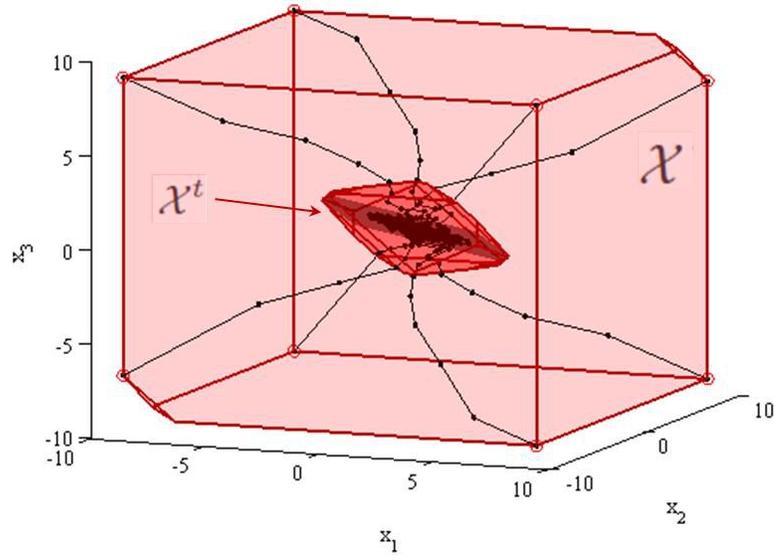
Las restricciones del sistema están dadas por: $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_\infty \leq 9\}$ y $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\|_\infty \leq 1,25\}$.

El conjunto EIS se ha seleccionado de manera que $\mathcal{U}^t = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\|_\infty \leq 0,8\}$, mientras que la señal de excitación persistente fue seleccionada para ser una señal de ruido blanco (acotada). El conjunto ISI, \mathcal{X}^t , fue seleccionado con un volumen suficientemente grande para dar cierta robustez al controlador.

La Figura 4.7 muestra la relación entre el espacio de estados factible \mathcal{X} (rojo) y el conjunto ISI \mathcal{X}^t (rojo oscuro).

Las simulaciones fueron diseñadas para mostrar el *Modo de operación - Re-identificación* del controlador. Se seleccionaron varios estados iniciales en $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^t$. Como se puede observar de la Figura 4.7, cada estado (factible) es llevado al conjunto objetivo \mathcal{X}^t , y una vez que el sistema se encuentra dentro de este conjunto, el procedimiento de excitación es activado. En la Figura 4.8 se muestra la evolución de estado dentro del conjunto objetivo. Notar que las trayectorias de estado están alrededor del objetivo estacionario \mathcal{X}_{ss}^t , el cual se observa en la gráfica (plano sombreado), pero nunca permanecen en él.

La Figura 4.9 muestra la evolución de la entrada, salidas y costo en función del tiempo. Notar que hay claramente dos modos: en el primero, a partir de $k = 0$ al tiempo $k = 5$, el sistema es llevado al conjunto ISI, con un decrecimiento de la

Figura 4.7: Evolución de estados fuera de \mathcal{X}^t .

función costo asociada; en el segundo, del tiempo $k = 6$ en adelante, la función costo se mantiene nula, lo que se corresponde con el ingreso al sistema de una señal de excitación persistente determinada por una señal de ruido blanco \mathbf{u}_{PE} . Los dos periodos de tiempo han sido separados por dos colores para su interpretación gráfica. Notar además que la señal de entrada está sobre su límite superior en el primer periodo de tiempo (modo de operación - control), ya que el controlador trata de hacer lo mejor posible para que el sistema alcance el conjunto objetivo \mathcal{X}^t . Además, luego del tiempo $k = 5$, la entrada permanece dentro del conjunto EIS \mathcal{U}^t , denotado por las líneas de puntos.

4.7.2. Caso con diferencia entre Planta y Modelo

En esta sección se presentan simulaciones que permiten evaluar la estrategia de control propuesta en un escenario de incertidumbre del modelo. Para este fin se propone un modelo estable de dos estados con estructura como (4.7)

$$x^+ = A(w)x + B(w)u, \quad y = C(w)x, \quad w \in \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R},$$

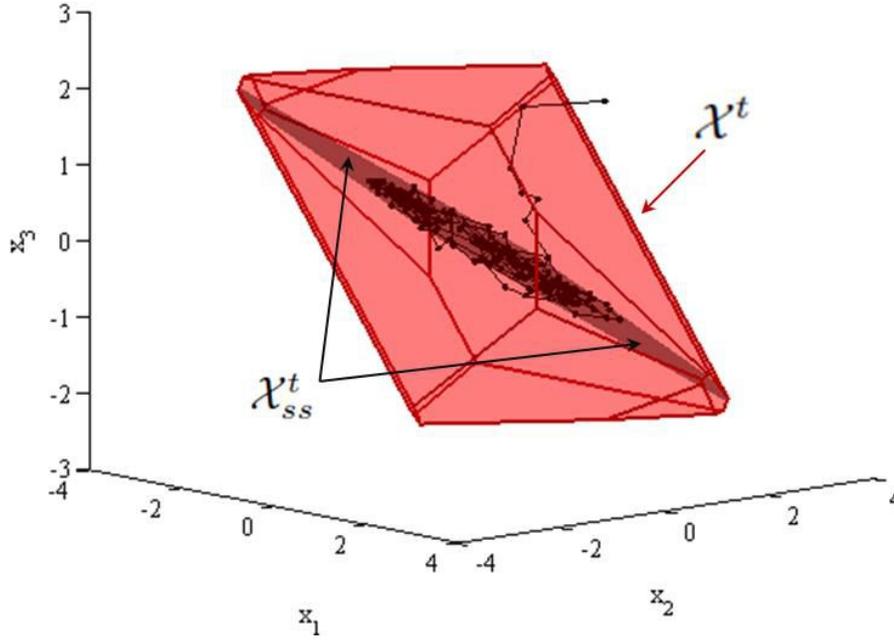


Figura 4.8: Evolución de estados dentro de \mathcal{X}^t .

con matrices dadas por:

$$A(w) = \begin{bmatrix} 0,42 & -0,28 \\ 0,02 & 0,6 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -0,6 & 0,4 \\ -0,6 & -0,85 \end{bmatrix},$$

$$B(w) = \begin{bmatrix} 0,3 \\ -0,4 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -0,2 \\ -0,4 \end{bmatrix},$$

$$C(w) = \begin{bmatrix} -0,3 & 0,6 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0,1 & 0,1 \end{bmatrix},$$

y $w \in \mathcal{W} = [-0,22, 0,22]$. El modelo Nominal está dado por $A(w_N)$, $B(w_N)$ y $C(w_N)$, con $w_N = 0$, mientras que el modelo Real está dado por $A(w_R) = [0,54 \ -0,20; \ 0,14 \ 0,43]$, $B(w_R) = [0,34; \ -0,32]^T$, $C(w_N) = [-0,32 \ 0,58]$, el cual corresponde a $w_R = -0,20$. Las restricciones del sistema están dadas por $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 17\}$ y $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : \|u\|_\infty \leq 1\}$. El conjunto EIS ha sido seleccionado como $\mathcal{U}^t = \{u \in \mathbb{R} : \|u\|_\infty \leq 0,65\}$, mientras la señal de excitación persistente como ruido blanco (acotado).

El conjunto ISI robusto, \mathcal{X}^t , fue seleccionado acorde a la observación [4.6.2](#) (y el

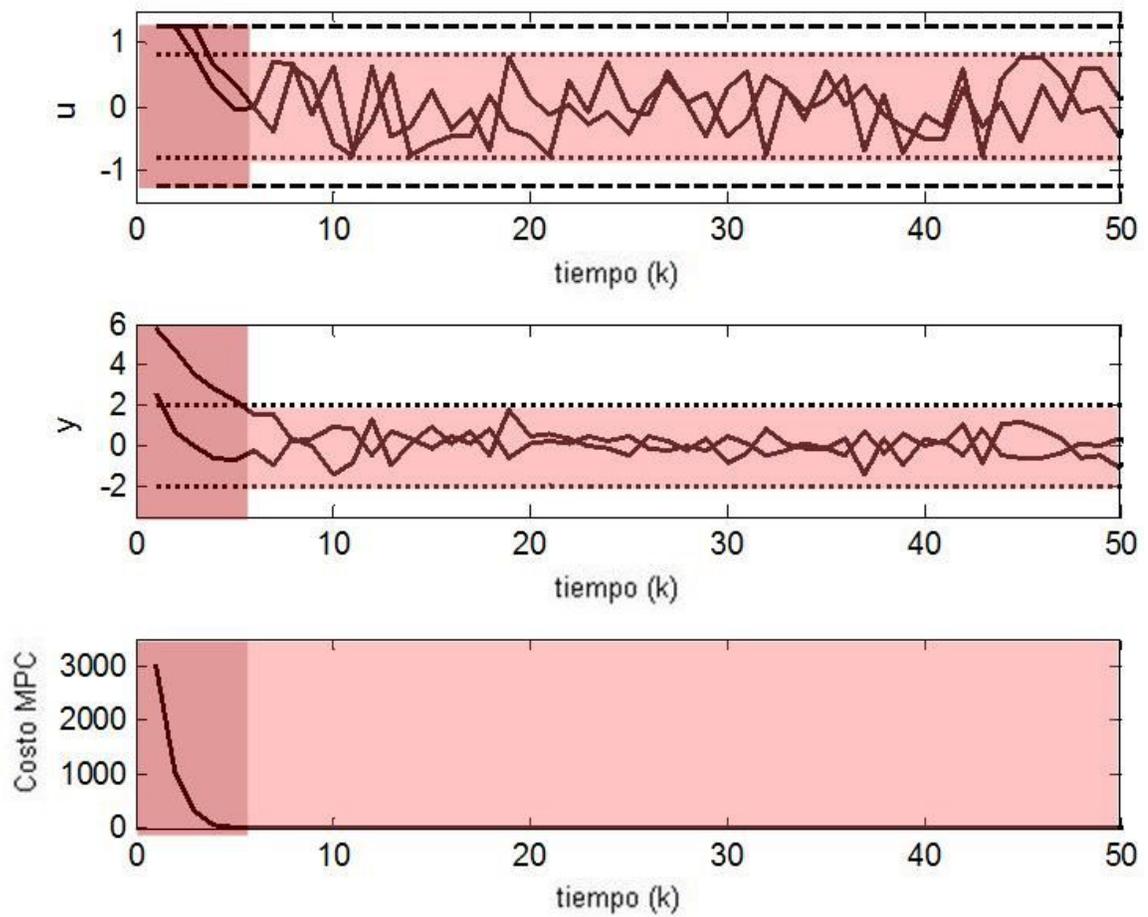


Figura 4.9: Entrada, salida y costo.

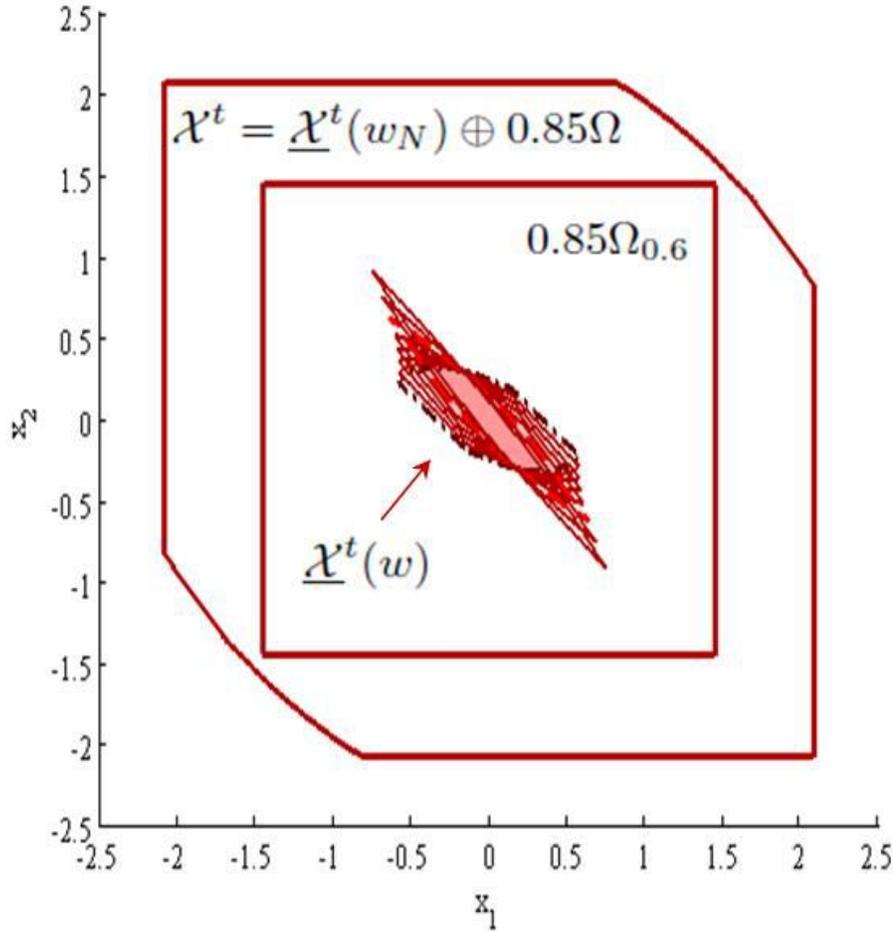


Figura 4.10: Familia de 8 conjuntos ISI mínimos correspondientes a los parámetros w de $-0,2$ a $0,1$ y el conjunto ISI robusto \mathcal{X}^t

Teorema [6](#)). Este está dado por:

$$\mathcal{X}^t = \mathcal{X}^t(\bar{\xi}, \bar{\lambda}) = \underline{\mathcal{X}}^t(w_N) \oplus \bar{\xi} \Omega_{\bar{\lambda}} = \underline{\mathcal{X}}^t(w_N) \oplus 0,85 \Omega_{0,6}$$

donde $\underline{\mathcal{X}}^t(w_N)$ es el conjunto ISI mínimo correspondiente al modelo Nominal, y $\Omega_{\bar{\lambda}}$ es un conjunto $\bar{\lambda}$ -invariante para $x^+ = A(w_N)x$. La Figura [4.10](#) muestra una familia de 8 conjuntos ISI mínimos, correspondiente a los parámetros w que van de $-0,2$ a $0,1$. Además, el conjunto ISI mínimo Nominal $\underline{\mathcal{X}}^t(w_N)$ y el Real $\underline{\mathcal{X}}^t(w_R)$, son graficados junto al conjunto \mathcal{X}^t y el conjunto $\bar{\xi} \Omega_{\bar{\lambda}}$. Las simulaciones fueron diseñadas para mostrar el modo de operación: re-identificación del controlador. Para este fin fueron

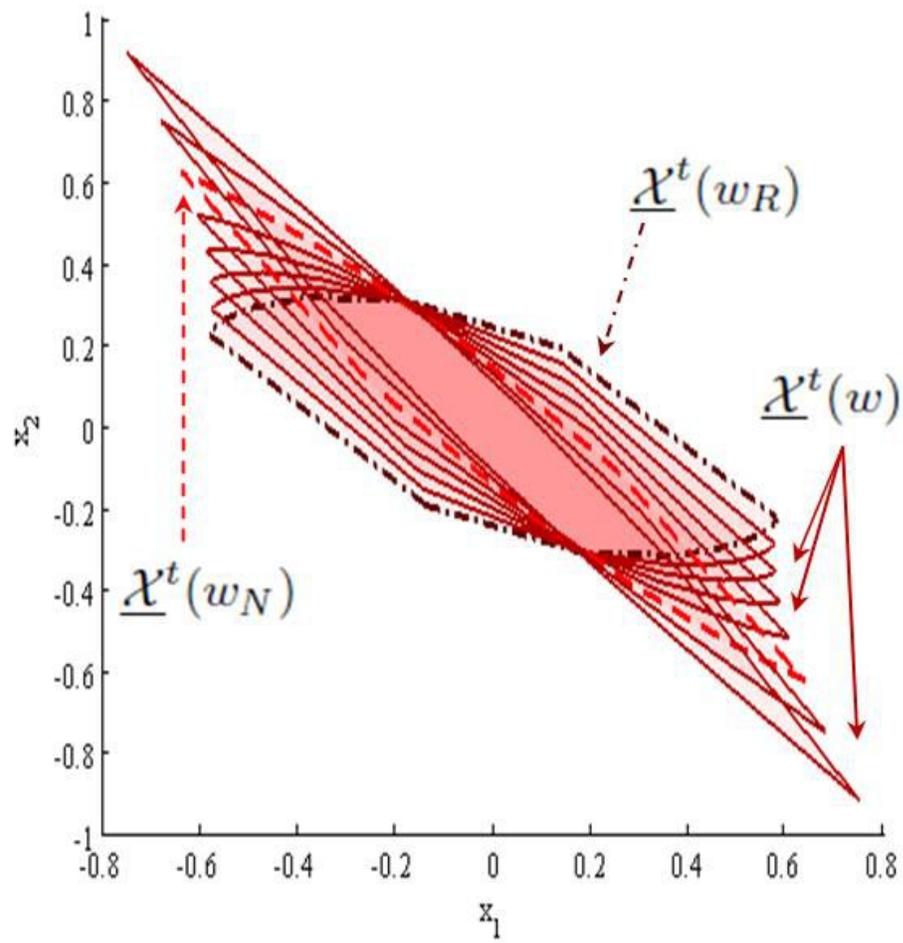


Figura 4.11: Familia de 8 conjuntos ISI mínimos correspondientes a los parámetros w de $-0,2$ a $0,1$ y el conjunto ISI robusto $\underline{\mathcal{X}}^t$

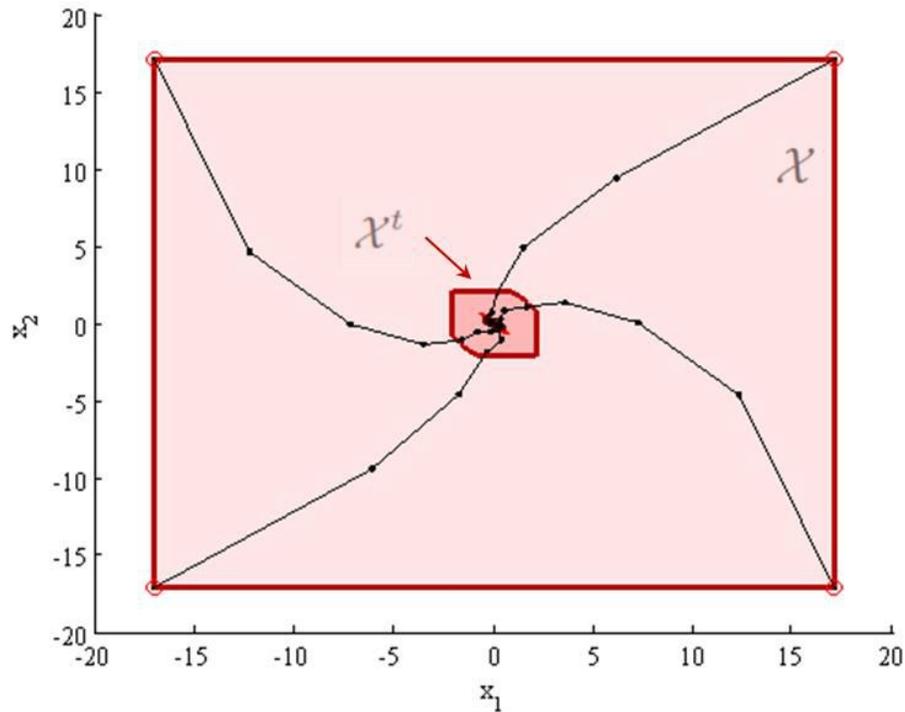
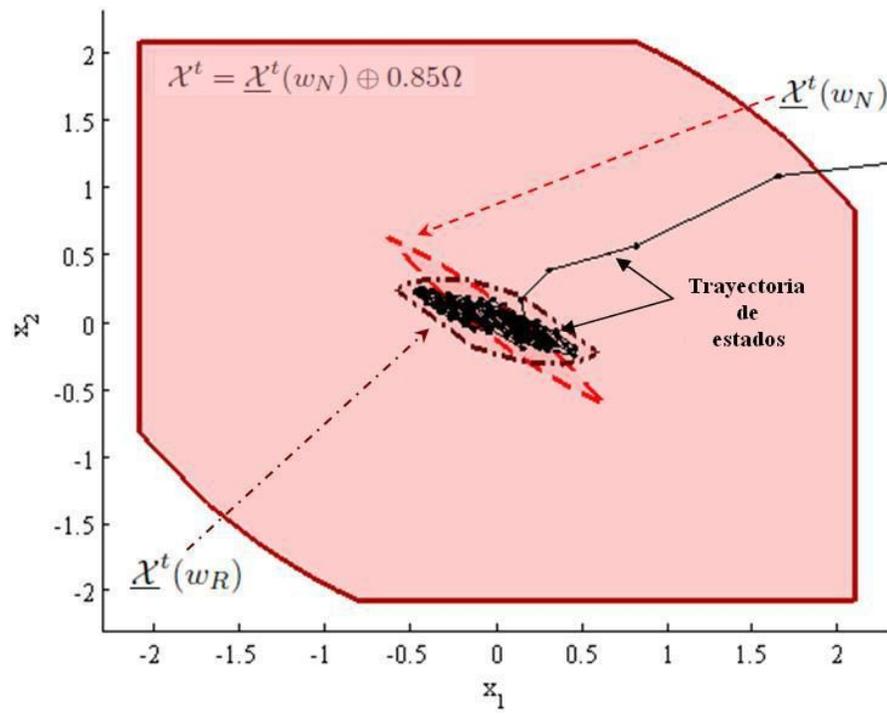


Figura 4.12: Evolución de estado fuera de \mathcal{X}^t .

seleccionados diferentes estados iniciales en $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^t$. Como puede observarse en la Figura 4.12, cada estado (factible) es llevado al conjunto objetivo \mathcal{X}^t , y una vez que el sistema está dentro de este conjunto, el procedimiento de excitación es activado. Notar que el sistema entra a $\underline{\mathcal{X}}^t(w_N)$ y luego lo deja, esto es porque este conjunto no está asociado el modelo real. De hecho, como se muestra en la Figura 4.13, el conjunto ISI mínimo para el sistema real está dado por $\underline{\mathcal{X}}^t(w_R)$ y puede observarse que una vez que el sistema entra a este conjunto, el sistema no lo deja nunca. El punto importante aquí es que el conjunto \mathcal{X}^t es además un conjunto ISI (no-mínimo) para el sistema Real, el estado nunca deja \mathcal{X}^t una vez que entra al conjunto. Este hecho se observa en la Figura 4.12. La Figura 4.14 y 4.15 muestran la evolución de la entrada, salidas y costo en función del tiempo. La Figura 4.15 tiene una escala de tiempo que llega a $k = 20$ para poder visualizar de una forma más clara cómo es el funcionamiento del controlador MPC sobre el sistema. Del tiempo $k = 0$ a $k = 5$, el sistema es llevado al conjunto ISI, con una disminución de la función costo asociada. Luego, a partir del tiempo $k = 5$, la función costo permanece nula, lo que

Figura 4.13: Evolución de estado dentro de \mathcal{X}^t .

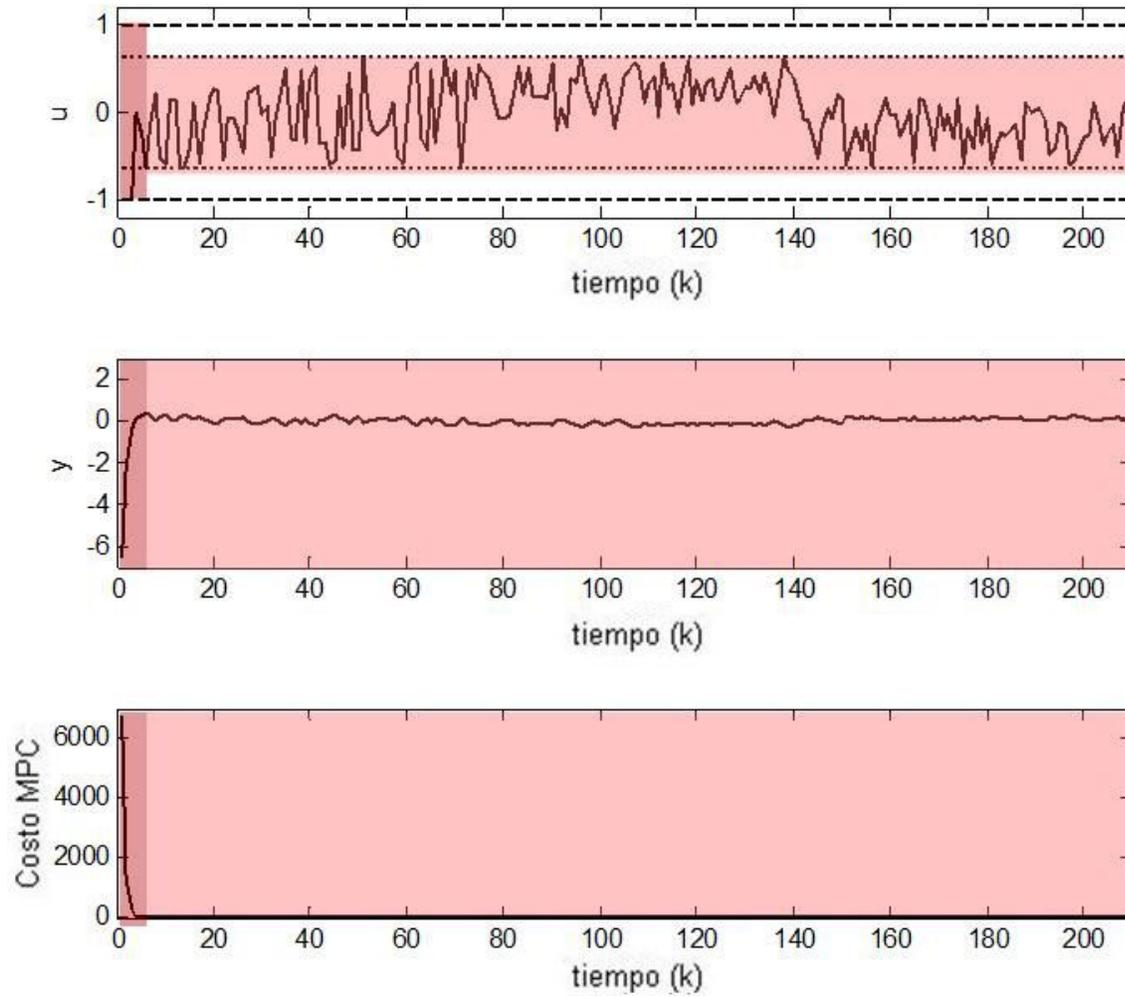


Figura 4.14: Evolución de entrada, salidas y costo: evolución completa

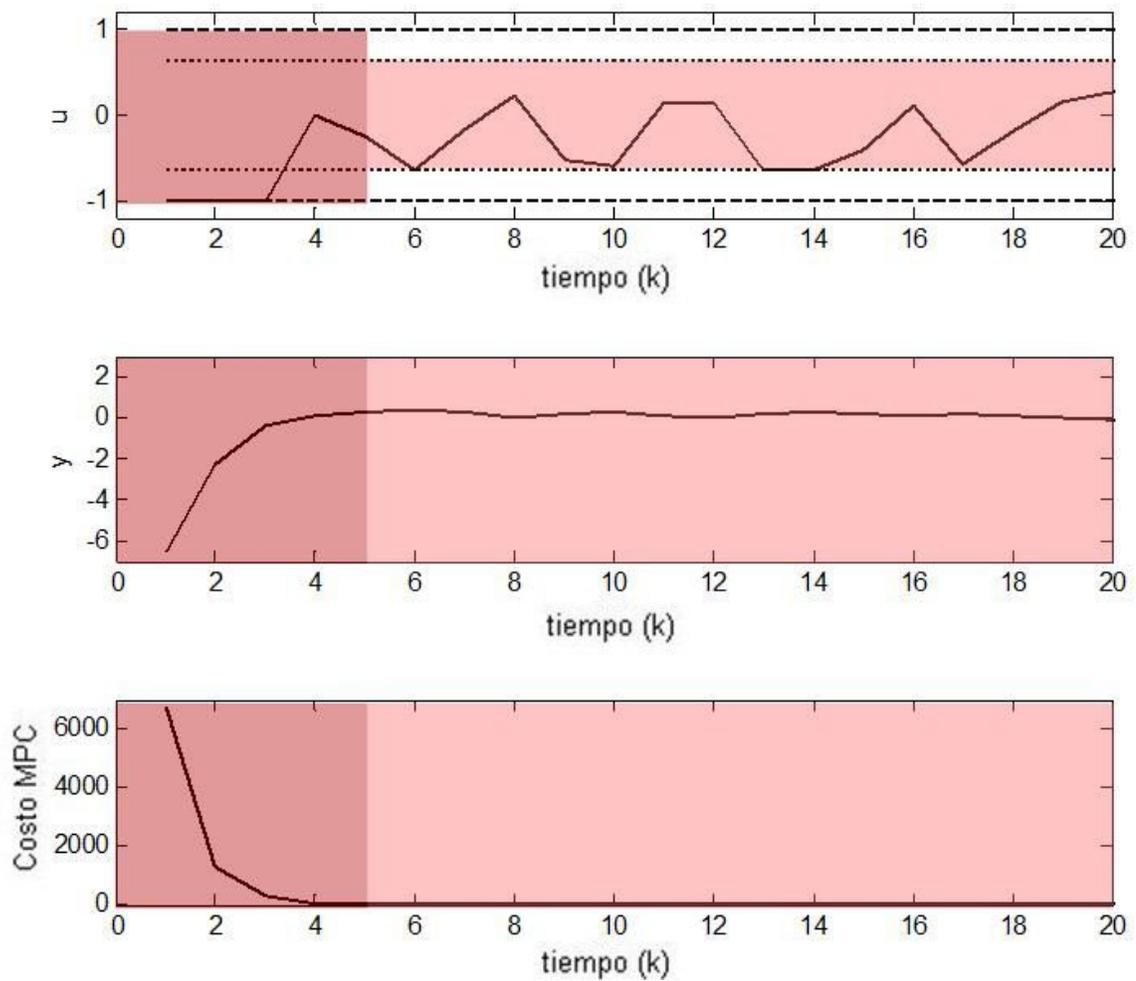


Figura 4.15: Evolución de entrada, salidas y costo: primeros 20 periodos de tiempo

corresponde al ingreso de la señal de excitación persistente \mathbf{u}_{PE} . Los dos periodos de tiempo han sido especificados con diferentes colores. Notar que la entrada se encuentra en su límite superior durante el primer periodo de tiempo, esto es así porque el controlador trata de hacer lo mejor posible para que el sistema alcance el conjunto objetivo. La Figura [4.14](#) llega al tiempo $k = 210$ para poder ver claramente el proceso de excitación. Notar que luego del tiempo $k = 5$, la entrada permanece dentro del conjunto EIS \mathcal{U}^t , denotado por líneas de puntos. La señal de excitación tiene diferentes valores medios a lo largo de la simulación para mostrar la condición de invarianza del conjunto ISI en este escenario.

4.8. Conclusiones

En este capítulo se desarrolla un nuevo algoritmo de control MPC, el cual permite la incorporación de una señal de excitación persistente a través del costo del problema de optimización. Este nuevo enfoque garantiza la excitación persistente cuando el sistema se encuentra dentro de la *región objetivo* además de garantizar la factibilidad recursiva y la estabilidad en lazo cerrado cuando se encuentra fuera del mismo.

A través de simulaciones numéricas sobre modelos genéricos se demostró que el controlador cumple con los objetivos pre-establecidos, tanto con el modelo nominal como con el no-nominal.

Los resultados de este Capítulo fueron presentados en la revista *Systems & Control Letters* (2014): **Model predictive control suitable for closed-loop re-identification**, y en los congresos *ACC* (2011): **Model Predictive Control Suitable for closed-loop Re-identification** y *AADECA* (2012): **Model predictive control suitable for closed-loop re-identification**.

Capítulo 5

Aplicación del MPC apto para re-identificación a un Reactor de Polimerización

5.1. Reactor de polimerización de estireno

El reactor de polimerización es generalmente el corazón del proceso de producción de polímeros y su funcionamiento puede ser difícil ya que en éste se llevan a cabo reacciones exotérmicas, reacciones cinéticas desconocidas y a altas viscosidades. En este capítulo se presentan los resultados de la aplicación del controlador MPC apto para re-identificación a un reactor tanque agitado continuo con camisa de enfriamiento (Continuous Stirred Tank Reactor, CSTR), donde se produce la polimerización de estireno en solución y en presencia de radicales libres. La polimerización de estireno es homogénea y, por lo general, se utilizan combinaciones de varios tanques para alcanzar las exigencias de producción. Como se muestra en la Figura [5.1](#) el CSTR tiene tres fuentes de alimentación: el monómero puro de estireno, el iniciador disuelto en benceno 2,2'-azoisobutironitrilo (AIBN) y el solvente puro de benceno. La salida del proceso contiene polímero, monómero sin reaccionar, iniciador y solvente. El modelo cinético que se utiliza para estos procesos de homopolimerización es muy general y puede ser descripto siguiendo los siguientes pasos (Jaisinghani y Ray [30](#)):

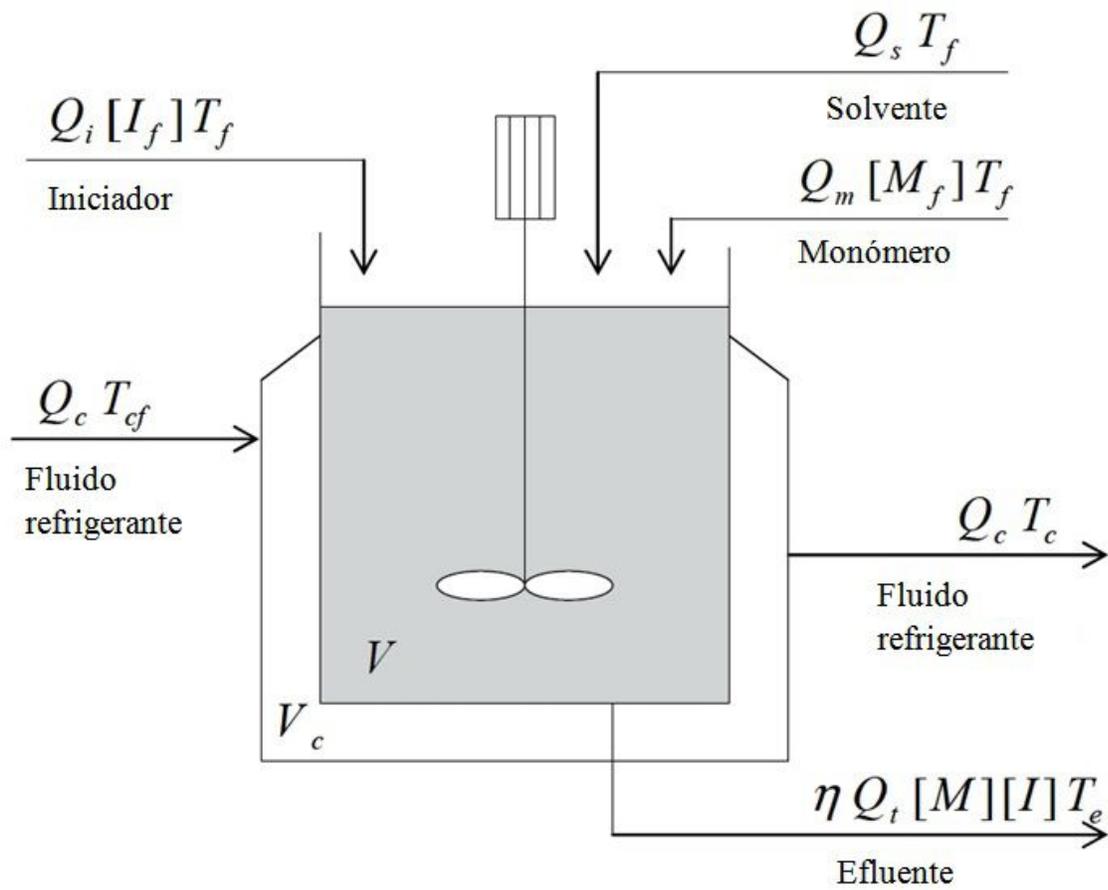
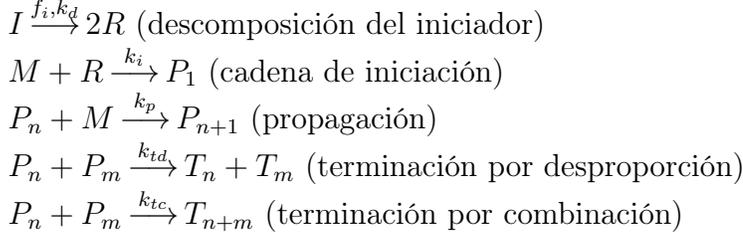


Figura 5.1: Diagrama del reactor de polimerización de estireno.



El proceso de polimerización se realiza en tres pasos: iniciación, propagación y terminación. La iniciación comienza con la descomposición del iniciador I para producir radicales libres R , los cuales reaccionan con las moléculas de monómero M para iniciar una cadena de polímero-activos P_1 (radicales). Durante el paso de propagación, las moléculas de monómero se van sumando, una a la vez, a la cadena de polímeros-activos P_n , con $n \geq 1$. El crecimiento de las cadenas termina cuando la propagación de los radicales pierde su actividad a través de cualquier reacción de terminación (desproporción o combinación), resultando en cadenas de polímeros-inactivos $T_n (n \geq 1)$. El calor generado en la reacción exotérmica es removido por el flujo de agua que pasa a través de la camisa de enfriamiento del reactor.

El modelo no lineal que representa la dinámica del reactor de polimerización por radicales libres queda definido por el siguiente sistema de ecuaciones (Maner et al. [48]):

$$\frac{d[I]}{dt} = \frac{(Q_i [I_f] - Q_t [I])}{V} - k_d [I] \quad (5.1)$$

$$\frac{d[M]}{dt} = \frac{(Q_m [M_f] - Q_t [M])}{V} - k_p [M] [P] \quad (5.2)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q_t (T_f - T)}{V} + \frac{(-\Delta H_r)}{\rho C_P} k_p [M] [P] - \frac{hA}{\rho C_P V} (T - T_c) \quad (5.3)$$

$$\frac{dT_c}{dt} = \frac{Q_c (T_{cf} - T_c)}{V_c} + \frac{hA}{\rho_c C_{pc} V_c} (T - T_c) \quad (5.4)$$

$$\frac{dD_0}{dt} = 0,5k_t [P]^2 - \frac{Q_t D_0}{V} \quad (5.5)$$

$$\frac{dD_1}{dt} = M_m k_p [M] [P] - \frac{Q_t D_1}{V} \quad (5.6)$$

$$(5.7)$$

donde

$$[P] = \left[\frac{2f_i k_d [I]}{k_t} \right]^{0,5} \quad (5.8)$$

$$k_j = A_j \exp\left(\frac{-E_j}{T}\right), \quad j = d, p, t \quad (5.9)$$

$$Q_t = Q_i + Q_s + Q_m \quad (5.10)$$

Los parámetros y las variables que forman parte de las ecuaciones anteriores están definidas en las Tablas [5.1](#) y [5.2](#), respectivamente. El peso molecular promedio se obtiene como:

$$\bar{M}_w = M_m \frac{D_2}{D_1} \quad (5.11)$$

Para control on-line, es más común medir la viscosidad en lugar del peso molecular promedio. En las simulaciones de este capítulo se asume que un viscosímetro on-line provee mediciones de la viscosidad intrínseca del proceso. La Ecuación [5.12](#) define la relación para simular la medición de la viscosidad (Gazi et al. [17](#)).

$$\eta = 0,0012 \bar{M}_w^{0,71} \quad (5.12)$$

El modelo fenomenológico de este reactor fue publicado en 1990, y a partir de ese momento, fue utilizado ampliamente como “benchmark” para estudios de controladores (Asteasuain et al. [1](#), Gazi et al. [17](#), Kendi y Doyle [33](#), Maner et al. [48](#), Prasad et al. [59](#), Sotomayor et al. [68](#)). En este capítulo, el principal objetivo es utilizar el modelo no lineal del reactor de polimerización como planta para evaluar el controlador MPC apto para re-identificación.

5.2. Modelo para las predicciones

En las siguientes simulaciones, el peso molecular promedio \bar{M}_W y la temperatura del reactor T son definidas como las variables controladas del proceso. Como se comentó anteriormente, la medición on-line de \bar{M}_W es difícil en la práctica; por lo tanto, se utiliza la viscosidad intrínseca η (Ecuación [5.12](#)). Para controlar $y_1 = \eta$ y

Variable	Símbolo	Valor	Unidades
Factor de frecuencia para la descomposición del iniciador	A_d	$2,142 \times 10^{17}$	h^{-1}
Energía de activación para la descomposición del iniciador	E_d	14897	K
Factor de frecuencia para la reacción de propagación	A_p	$3,816 \times 10^{10}$	$L.mol^{-1}.h^{-1}$
Energía de activación para la reacción de propagación	E_p	3557	K
Factor de frecuencia para la reacción de terminación	A_t	$4,50 \times 10^{12}$	$L.mol^{-1}.h^{-1}$
Energía de activación para la reacción de terminación	E_t	843	K
Eficiencia del iniciador	f_i	0,6	
Calor de polimerización	$-\Delta H_r$	$6,99 \times 10^4$	$J.mol^{-1}$
Coefficiente global de transferencia de calor	hA	$1,05 \times 10^6$	$J.K^{-1}.h^{-1}$
Capacidad calorífica media del líquido del reactor	ρC_p	1506	$J.K^{-1}.L^{-1}$
Capacidad calorífica del líquido refrigerante en la camisa	$\rho_c C_{pc}$	4043	$J.K^{-1}.L^{-1}$
Peso molecular del monómero	M_m	104,14	$g.mol^{-1}$

Tabla 5.1: Parámetros del reactor de polimerización

Variable	Símbolo	Valor	Unidades
Caudal del iniciador	Q_i	108	$L.h^{-1}$
Caudal del solvente	Q_s	459	$L.h^{-1}$
Caudal del monómero	Q_m	378	$L.h^{-1}$
Caudal del líquido refrigerante	Q_c	471,6	$L.h^{-1}$
Volumen del reactor	V	3000	L
Volumen del líquido refrigerante	V_c	3312,4	L
Concentración del iniciador de entrada (feed)	$[I_f]$	0,5888	$mol.L^{-1}$
Concentración del monómero de entrada (feed)	$[M_f]$	8,6981	$mol.L^{-1}$
Temperatura de alimentación del reactor	T_f	330	K
Temperatura de entrada del líquido refrigerante de la camisa	T_{cf}	295	K
Concentración del iniciador en el reactor	$[I]$	$6,6832 \times 10^{-2}$	$mol.L^{-1}$
Concentración del monómero en el reactor	$[M]$	3,3245	$mol.L^{-1}$
Temperatura del reactor	T	323,56	K
Temperatura del líquido refrigerante	T_c	305,17	K
Concentración molar de cadenas poliméricas muertas	D_0	$2,7547 \times 10^{-4}$	$mol.L^{-1}$
Concentración másica de cadenas poliméricas muertas	D_1	16,110	$g.L^{-1}$

Tabla 5.2: Condiciones en estado estacionario para el reactor de polimerización

$y_2 = T$, el controlador manipula el caudal del iniciador ($u_1 = Q_i$) y el caudal del líquido refrigerante de la camisa del reactor ($u_2 = Q_c$), ya que estas variables presentan gran sensibilidad a las salidas del proceso. Los caudales de entrada restantes Q_m y Q_s están relacionados a Q_i mediante las Ecuaciones [5.13](#) y [5.14](#).

$$Q_m = \frac{\bar{Q}_m}{\bar{Q}_i} Q_i \quad (5.13)$$

donde \bar{Q}_m y \bar{Q}_i son los valores nominales de Q_m and Q_i , respectivamente. Por otro lado, la fracción de volumen de solvente debe mantenerse en 0,6 para evitar el efecto gel (Hidalgo y Brosilow [\[26\]](#)), luego una ley de control para el caudal de solvente es

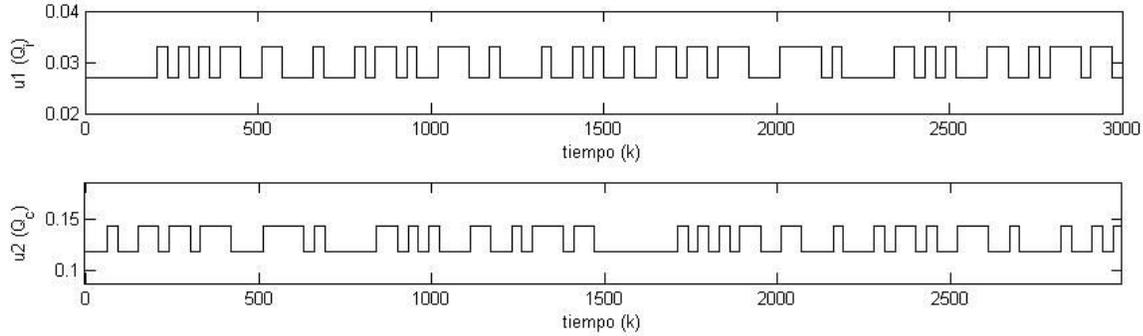


Figura 5.2: Señales de entrada para la identificación del modelo nominal.

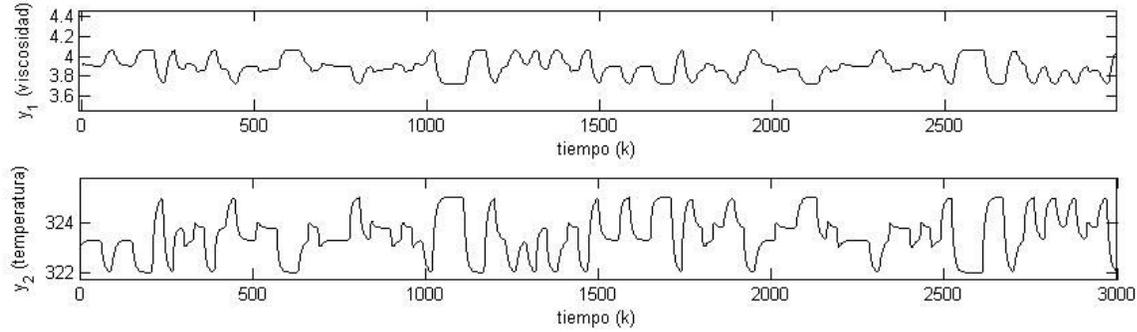


Figura 5.3: Señales de salida para la identificación del modelo nominal.

implementada de la siguiente manera:

$$Q_s = 1,5Q_m - Q_i \quad (5.14)$$

El control apto para re-identificación evaluado en esta sección necesita de un modelo lineal para realizar las predicciones futuras de las planta. Este modelo se obtiene mediante una identificación en lazo abierto sobre el reactor por el método de subespacios (Overschee y Moor [56]) alrededor de los puntos de operación $u_{ss}^1 = [0,030 \ 0,131]$ y $y_{ss}^1 = [3,8968 \ 323,56]$. La señal de excitación es una PRBS con una amplitud del 10 % de los valores estacionarios de las entradas u_{ss1} . Las Figuras [5.2] y [5.3] muestran la evolución de las señales de entradas y las salidas del reactor que son utilizadas para la identificación y validación del modelo. La duración del proceso de excitación es de 3000 unidades de tiempo, correspondientes a 3000 muestras de datos de entrada-

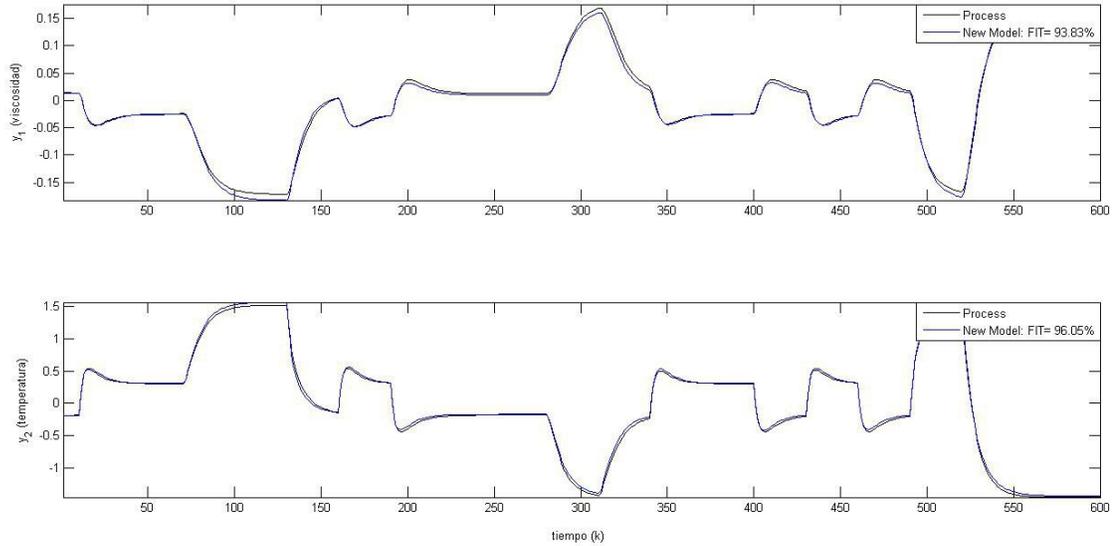


Figura 5.4: Validación del proceso de identificación.

salida. Como en todos los procedimientos de identificación, los datos presentados en las Figuras 5.2 y 5.3, son normalizados con el objetivo de que las entradas y las salidas sean igualmente importantes. Esto se obtiene sustrayendo de cada entrada y cada salida su media y dividiendo por el desvío estandar de cada variable. Las primeras 2000 muestras fueron utilizadas para el proceso de identificación y las últimas 600 para la validación del modelo obtenido. La Figura 5.4 muestra el resultado satisfactorio de la identificación, obteniendo un FIT de 95 % promedio para ambas salidas. El coeficiente FIT (2.1) indica el porcentaje de la de variación de salida de la planta que puede ser asociada al modelo. El modelo identificado, denominado M_1 ,

queda determinado por el siguiente modelo en espacio de estado de orden $n = 3$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,87929 & 0,14139 & 0,0055374 \\ -0,0027973 & 0,67812 & 0,0050078 \\ 0,063383 & -0,14482 & 0,76758 \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 55,474 & -7,5622 \\ -34,109 & -7,168 \\ -34,143 & 1,7111 \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -0,075737 & 0,044659 & -0,1073 \\ 0,60234 & -0,27493 & -0,025648 \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

5.3. Resultados de las simulaciones

5.3.1. Caso nominal

En esta sección se muestran resultados de la evaluación de la estrategia propuesta en el Capítulo 4 sobre el reactor de polimerización. Los puntos de operación se asumen conocidos (estos provienen de un problema de optimización RTO de niveles superiores de la estructura de control jerárquico), y las simulaciones comenzarán en un valor nominal dado por $u_{ss}^1 = [0,030 \ 0,131]$ y $y_{ss}^1 = [3,8968 \ 323,56]$. Bajo estas condiciones de operación, las expresiones (5.15) a (5.17), que definen el modelo lineal que denominamos M_1 , son utilizadas como modelo nominal del MPC. Las restricciones de estado y entrada (que están centradas en el punto de operación), \mathcal{X} y \mathcal{U} , están dadas por $[-20 \ -20 \ -20]^T \leq x \leq [20 \ 20 \ 20]^T$, $[-0,016 \ -0,080]^T \leq u \leq [0,016 \ 0,080]^T$, respectivamente. El conjunto de excitación de entrada (EIS), \mathcal{U}^t , se ha seleccionado en base al conocimiento del proceso, y esta dado por $[-0,0060 \ -0,0197]^T \leq u \leq [0,0060 \ 0,0197]^T$, mientras que la señal de excitación persistente es una señal binaria pseudo-aleatoria (PRBS).

El conjunto ISI \mathcal{X}^t , se calcula en función de \mathcal{U}^t y haciendo uso de la Propiedad 3 del Capítulo 4. De esta manera el conjunto para identificación ISI, asociado al modelo M_1 , se calcula como la suma del mínimo invariante para identificación $\underline{\mathcal{X}}^t$ y un invariante del sistema autónomo. Así este conjunto no será solamente invariante para el modelo M_1 , sino para una familia de modelos en la cercanías de M_1 , con lo que se le

da al controlador la robustez necesaria para posibles cambios de puntos de operación. Si bien anteriormente se muestra un procedimiento para calcular con exactitud este conjunto (Teorema [6](#)), es preciso remarcar que el procedimiento de robustificación de \mathcal{X}^t es lo suficientemente laxo (se trata de una mera suma que amplía tanto como se quiera el conjunto invariante) como para realizarlo en base al conocimiento previo del proceso. Más precisamente, si uno conoce aproximadamente las regiones del espacio de estado que el sistema recorre en sus habituales cambios de puntos de operación, entonces no es difícil ampliar $\underline{\mathcal{X}}^t$ de modo que cubra completamente esta región.

En la Figura [5.5](#) muestra la relación entre el espacio de estados factible X (rojo) y el conjunto ISI \mathcal{X}^t (rojo oscuro), el cual será utilizado en esta sección como parámetro del controlador MPC apto para re-identificación. Además, en la Figura [5.6](#) se muestra la forma y tamaño del conjunto $\underline{\mathcal{X}}^t$, que tiene un número elevado de caras, por lo que sería dificultoso trabajar directamente con él. Las simulaciones realizadas fueron diseñadas para mostrar el controlador en modo de operación *re-identificación*. Como se puede observar de la Figura [5.7](#), diferentes estados (factibles) en $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}^t$ son llevados al conjunto objetivo \mathcal{X}^t , y una vez que el sistema está dentro de este conjunto, el procedimiento de excitación es activado. Las Figuras [5.8](#) y [5.9](#) muestran en detalle al conjunto \mathcal{X}^t junto con el conjunto objetivo estacionario \mathcal{X}_{ss}^t . Notar que las trayectorias de estados se mueven alrededor de \mathcal{X}_{ss}^t mientras se está excitando al sistema, es decir, para pasar de un estado estacionario a otro (transitorio) el sistema tiene que salir necesariamente de \mathcal{X}_{ss}^t . Esto último muestra que no es posible utilizar directamente \mathcal{X}_{ss}^t como conjunto invariante objetivo. Las Figuras [5.10](#), [5.11](#) y [5.12](#) muestran las evoluciones de las entradas, salidas y el costo en función del tiempo respectivamente. Notar que hay dos modos bien definidos: primero, del instante de tiempo $k = 0$ al tiempo $k = 6$, el sistema es llevado al conjunto para identificación ISI, con un costo asociado decreciente. Luego, a partir del tiempo $k = 6$, el costo permanece nulo, lo que corresponde al ingreso de una señal persistente previamente definida por una PRBS, \mathbf{u}_{PE} . Notar además que las entradas se encuentran cercanas a los límites de las restricciones en el primer periodo de tiempo, ya que el controlador trata de hacer lo mejor posible para alcanzar el conjunto objetivo. Además, luego del tiempo $k = 6$, las entradas permanecen dentro del conjunto de excitación EIS \mathcal{U}^t , indicado por las líneas de puntos. En las Figuras [5.13](#) y [5.14](#) se observa la evolución

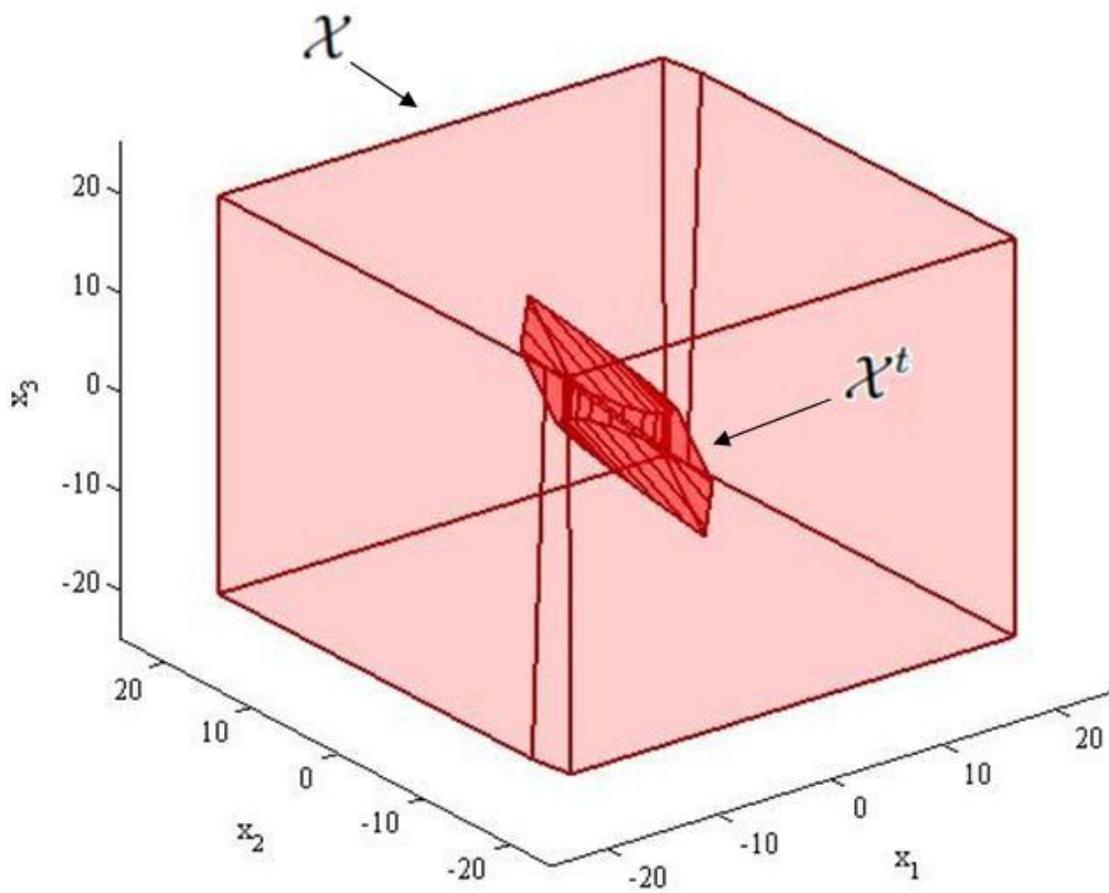
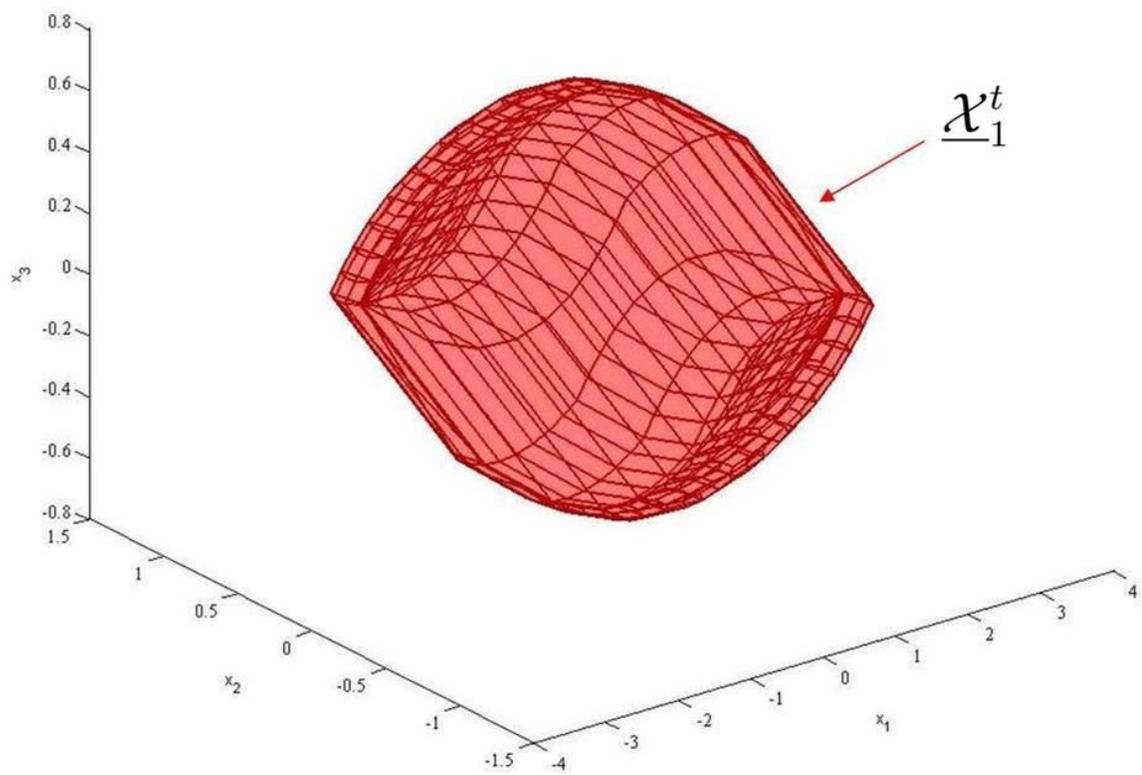
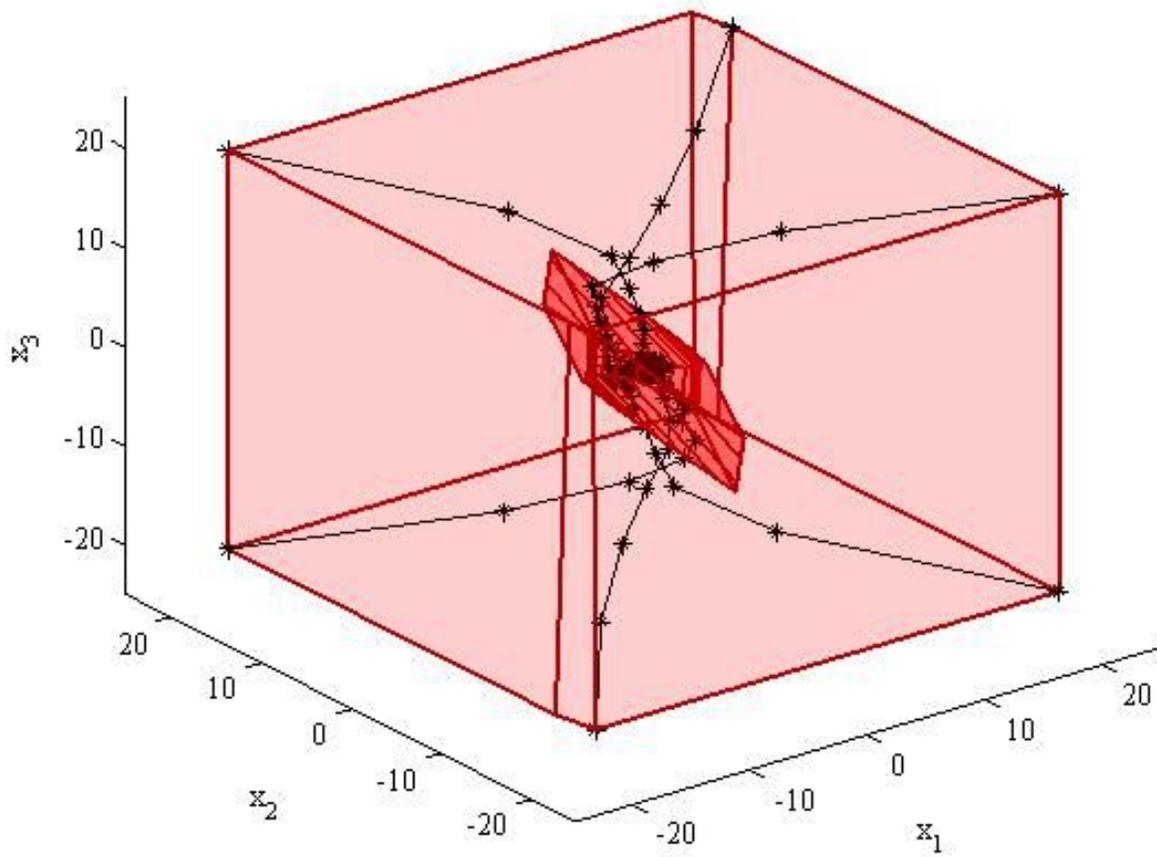
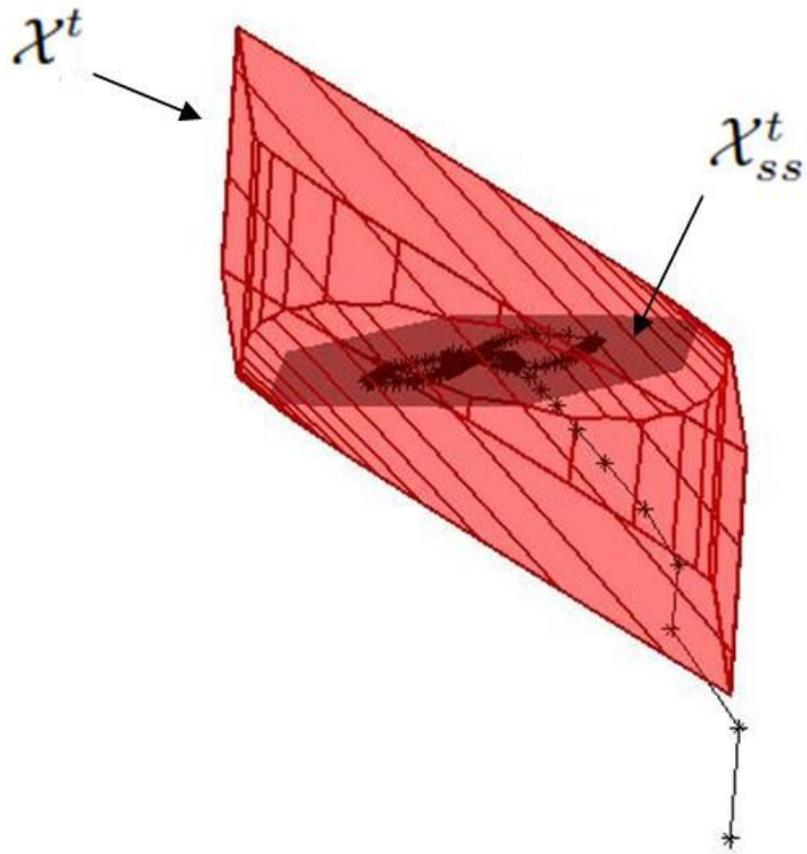
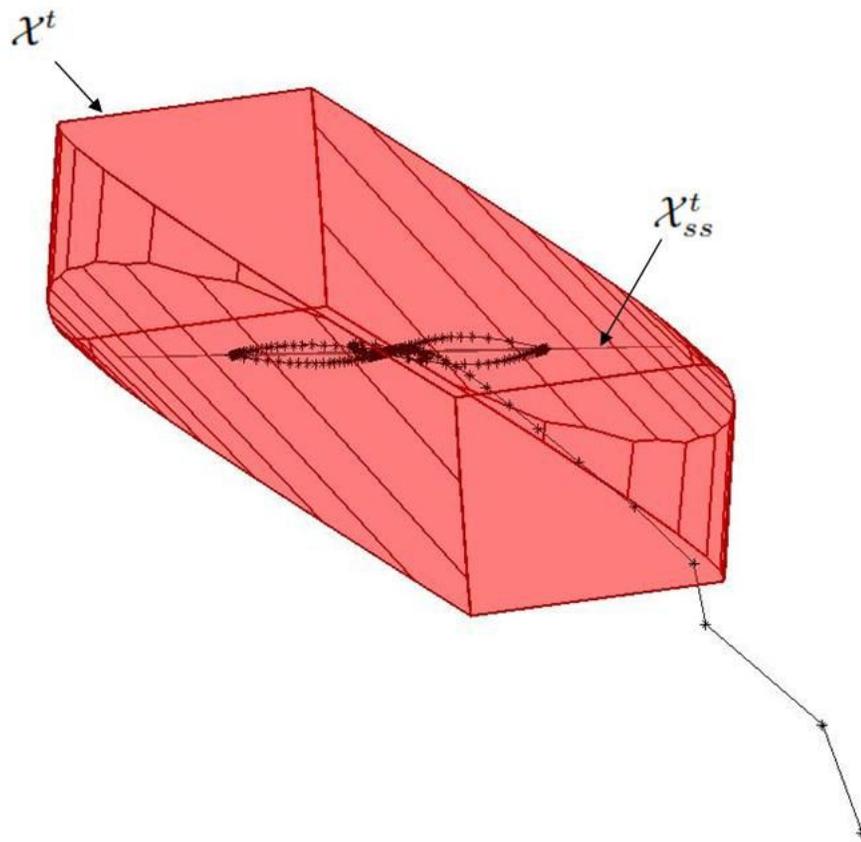


Figura 5.5: Gráficas de los conjuntos \mathcal{X} y \mathcal{X}^t .

Figura 5.6: Gráfica del conjunto \mathcal{X}^t mínimo.

Figura 5.7: Evolución de estados fuera de \mathcal{X}^t .

Figura 5.8: Gráficas de χ_{ss}^t y χ^t .

Figura 5.9: Evolución de estados alrededor de x_{ss}^t .

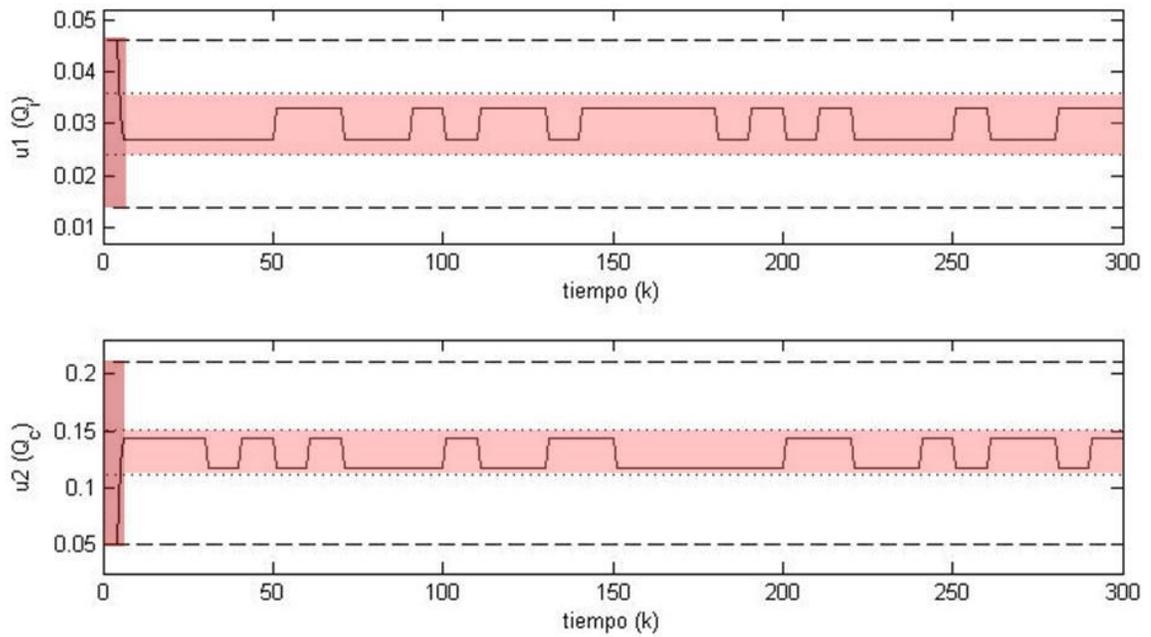


Figura 5.10: Evolución de las entradas.

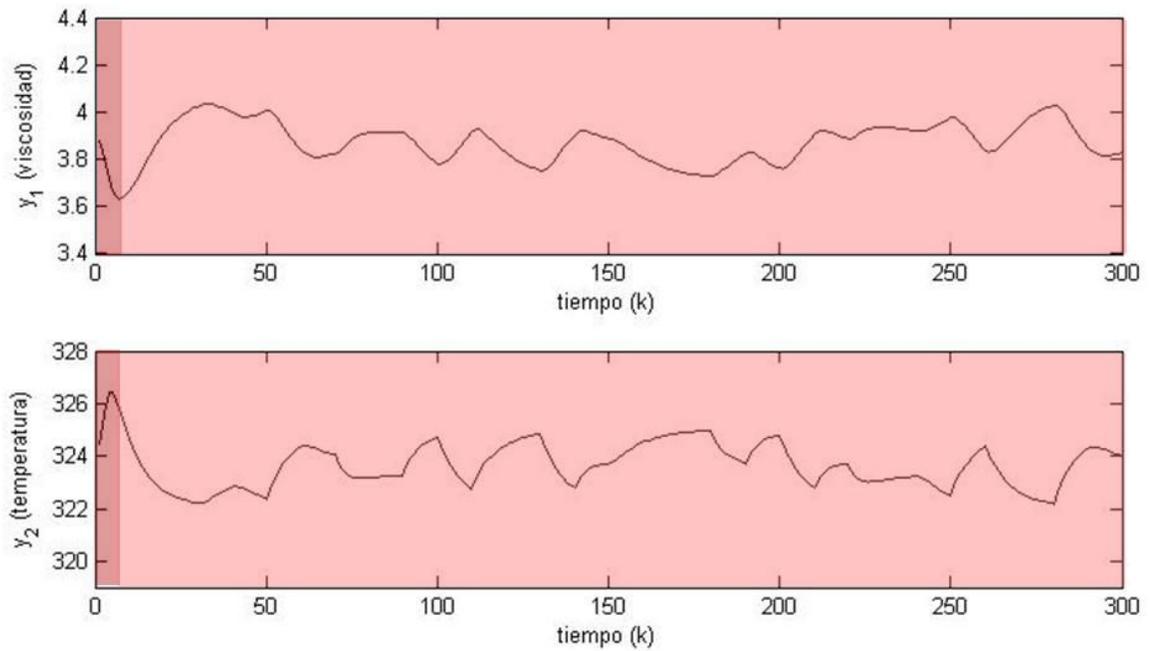


Figura 5.11: Evolución de las salidas.

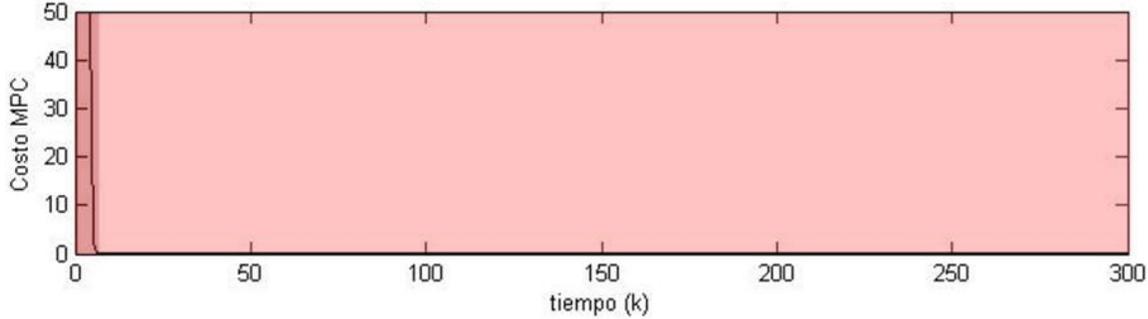


Figura 5.12: Evolución del costo.

durante las primeras 20 muestras de la entrada y el costo respectivamente.

5.3.2. Caso con diferencia entre Planta y Modelo

En esta sección se presentan resultados de la evaluación del controlador propuesto en un escenario de incertidumbre del modelo. Para este fin, se ha cambiado el punto de operación del sistema a $u_{ss}^2 = [0,0330 \ 0,1245]$ y $y_{ss}^2 = [3,7621 \ 324,66]$, lo que corresponde a un cambio del 10% y 5%, respectivamente. De esta manera, debido a la no linealidad del sistema bajo control, el MPC posee un modelo para realizar las predicciones que no representará en forma precisa la dinámica del sistema en el nuevo punto de operación. Para la simulación se supone que el nuevo punto de equilibrio es conocido, y por esa razón, es necesario realizar una nueva identificación del sistema en el nuevo punto. Las restricciones y el conjunto de excitación de entrada EIS no son modificados respecto a la sección anterior.

La trayectoria de entradas, salidas, costo y estados del sistema yendo del punto de operación nominal al nuevo se muestran en las Figuras [5.15](#), [5.16](#), [5.17](#) y [5.18](#) respectivamente. El sistema es guiado mediante el MPC en el *Modo de operación - Control* (**Problema** $P_N^{CES}(x, \mathcal{X}_{ss}^t)$), que es el modo en el que habitualmente trabaja el controlador cuando no se necesitan re-identificaciones.

En las figuras se observa que en el instante de tiempo $k = 100$ el sistema comienza a ser guiado del punto de operación $[u_{ss}^1 y_{ss}^1]$ al punto de operación $[u_{ss}^2 y_{ss}^2]$. Luego, a partir de $k = 200$ se pasa al modo de operación *Modo de operación - Re-identificación* (**Problema** $P_N^{EXC}(x, \mathcal{X}^t, \mathbf{u}_{PE}, k)$) en donde se comienza a excitar el

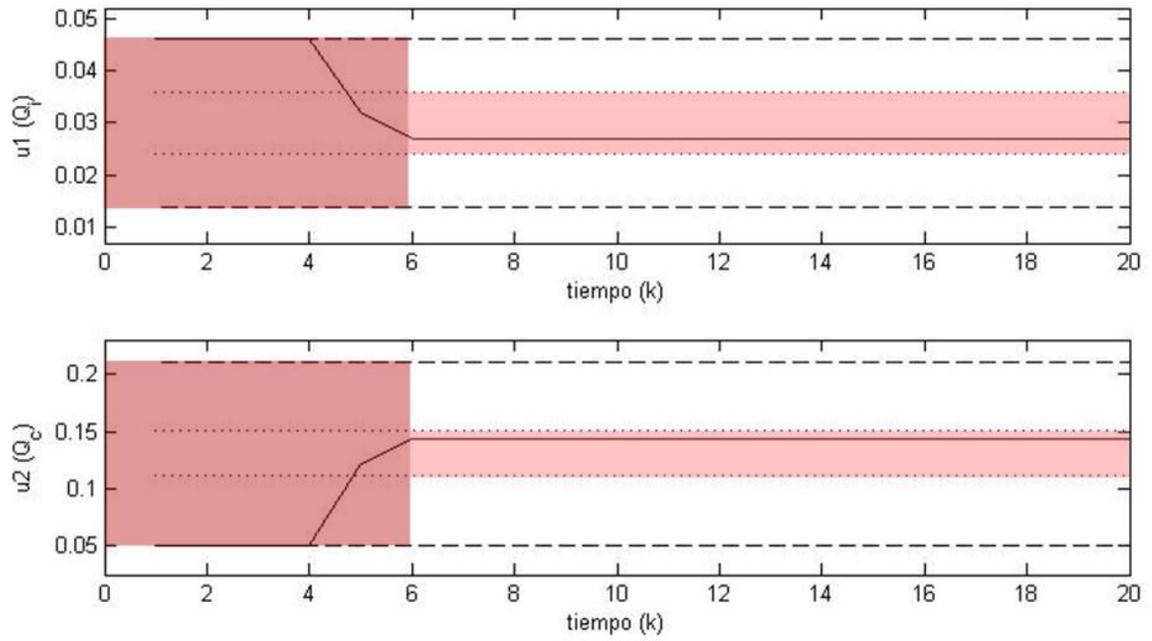


Figura 5.13: Evolución de las entradas: primeros 20 periodos de tiempo.

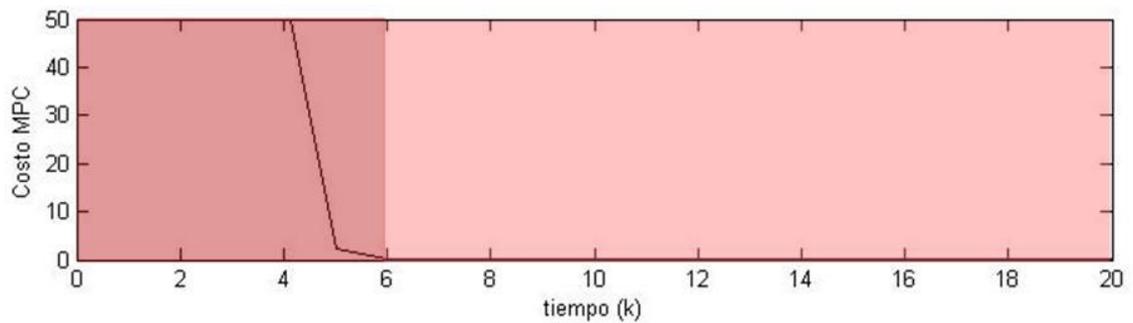


Figura 5.14: Evolución del costo: primeros 20 periodos de tiempo.

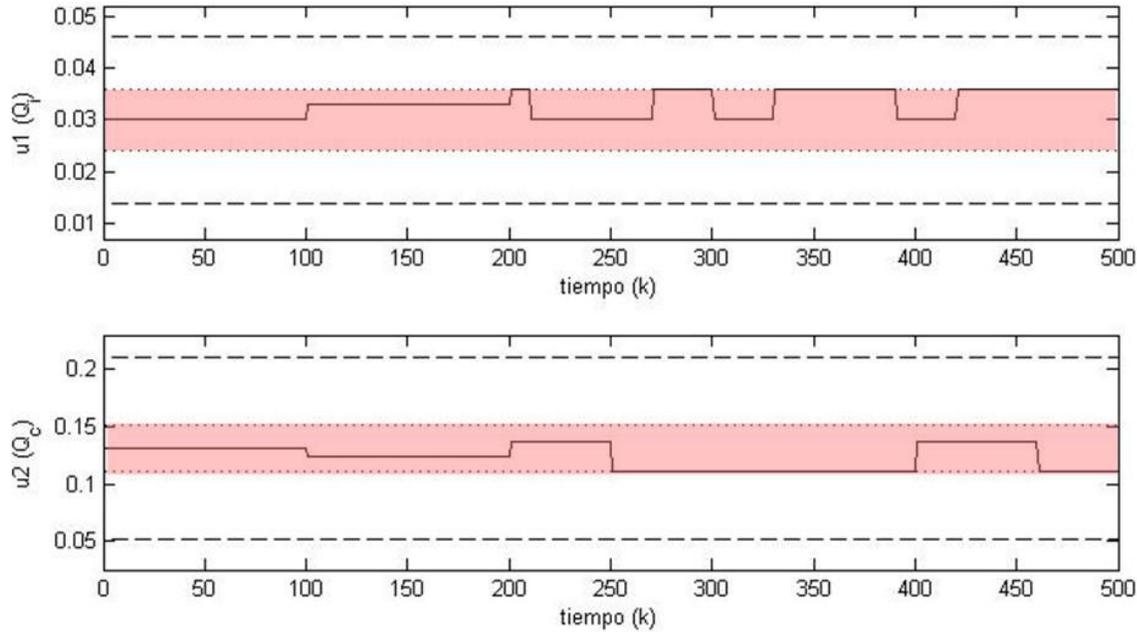


Figura 5.15: Evolución de las entradas correspondiente al cambio del punto de operación y re-identificación.

sistema para recolectar nuevamente datos con los que obtener un nuevo modelo del proceso. En este punto es interesante observar que, debido a la robustez del diseño, la nueva trayectoria de estados (correspondiente a la excitación persistente) está completamente contenida en el invariante robusto \mathcal{X}^t . Esto es así porque este conjunto no es el mínimo invariante para identificación correspondiente al Modelo M_1 , sino que le fue adicionado otro conjunto con lo que se consiguió la robustez deseada. Dada la naturaleza de la excitación (PRBS de frecuencia relativamente baja respecto de la respuesta del sistema), las trayectorias de estados recorren los mínimos invariantes para identificación de cada modelo en forma prácticamente completa. Así, los mínimos invariantes para identificación de cada modelo son polítopos que envuelven aproximadamente las trayectorias mostradas en la Figuras 5.19 y 5.20. Nótese que si bien los mínimos invariantes para identificación de cada modelo son diferentes (según se ve en las trayectorias blancas y negras), el invariante para identificación \mathcal{X}^t es uno solo para todos los escenarios, y no precisa ser adaptado.

A continuación se evaluará el comportamiento del controlador frente a una pertur-

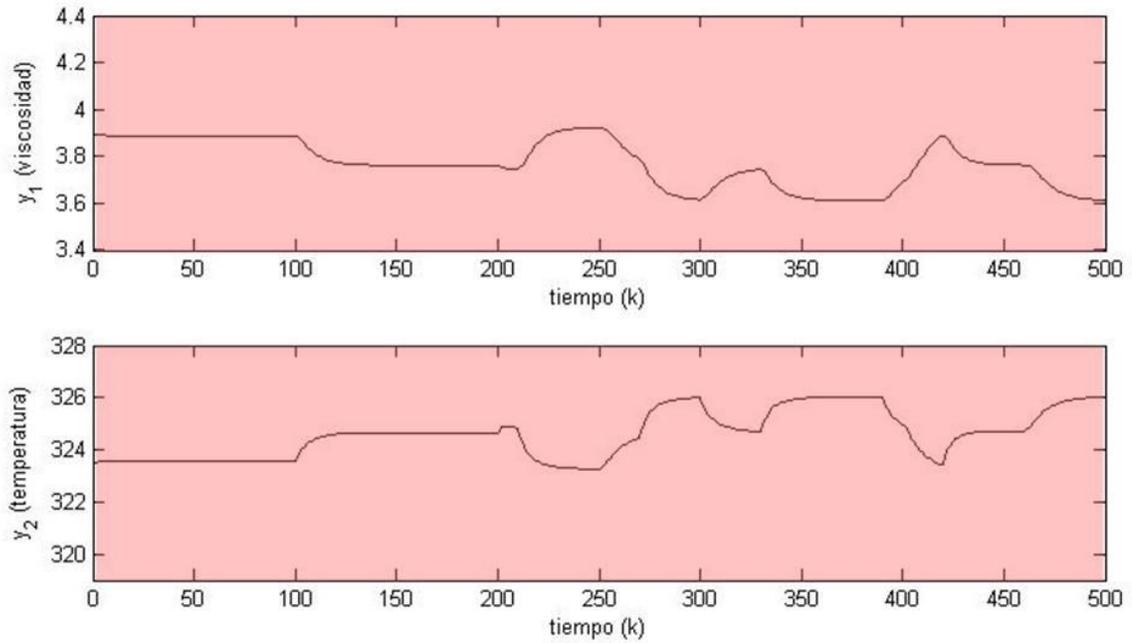


Figura 5.16: Evolución de las salidas correspondiente al cambio del punto de operación y re-identificación.

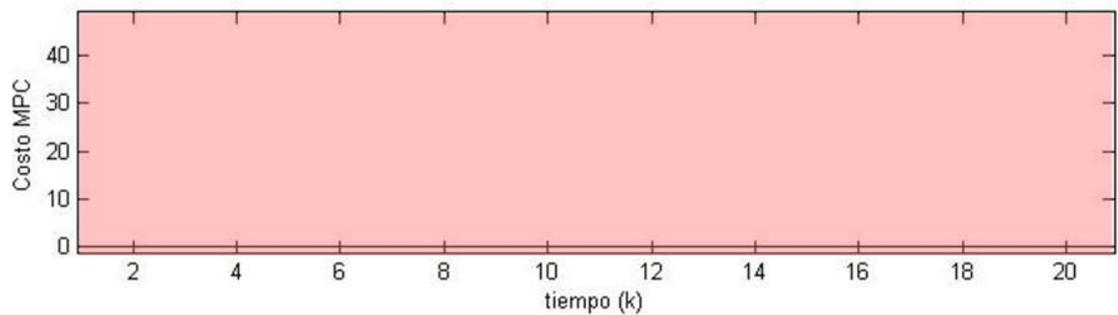


Figura 5.17: Evolución del costo correspondiente al cambio del punto de operación y re-identificación.

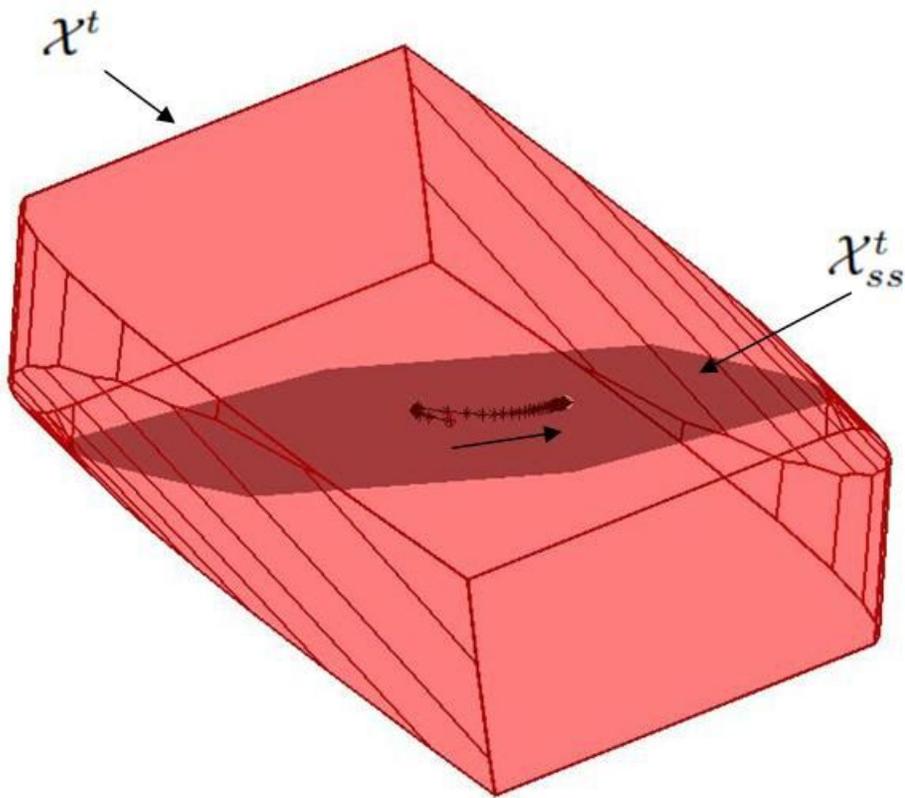


Figura 5.18: Cambio del estado de equilibrio x_{ss}^1 al x_{ss}^2 .

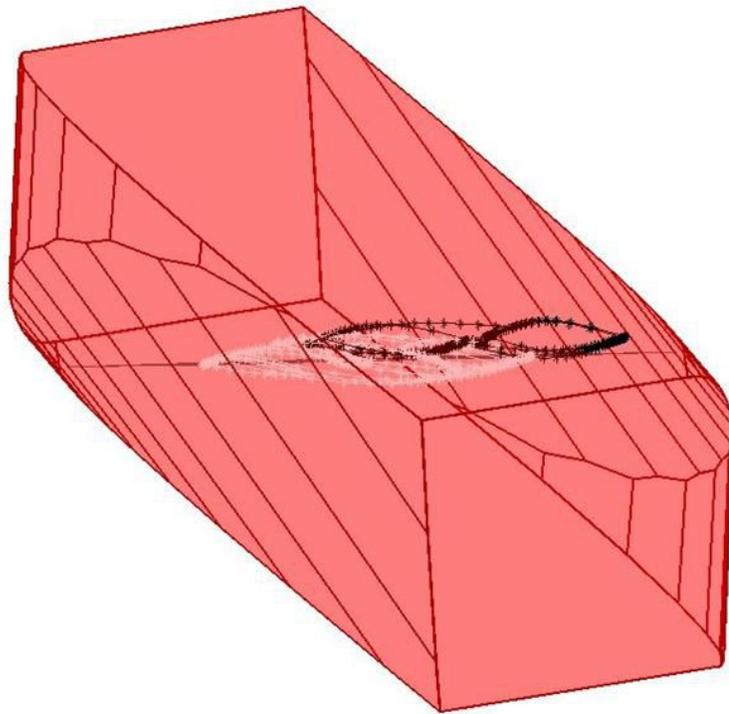


Figura 5.19: Comparación de trayectorias sobre x_{ss}^1 (blanco) y x_{ss}^2 (negro).

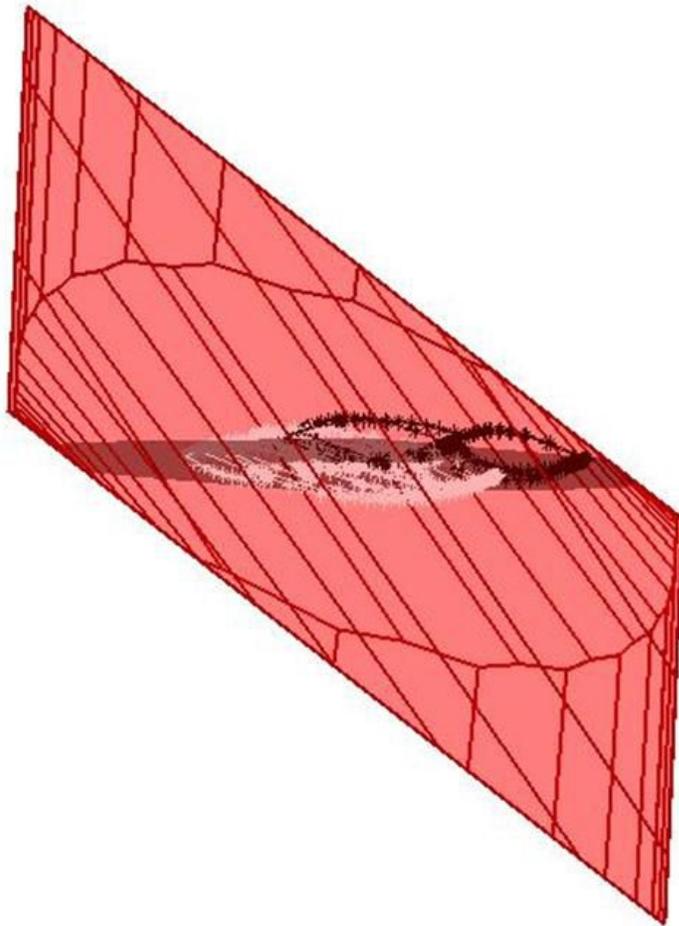


Figura 5.20: Comparación de trayectorias sobre x_{ss}^1 (blanco) y x_{ss}^2 (negro).

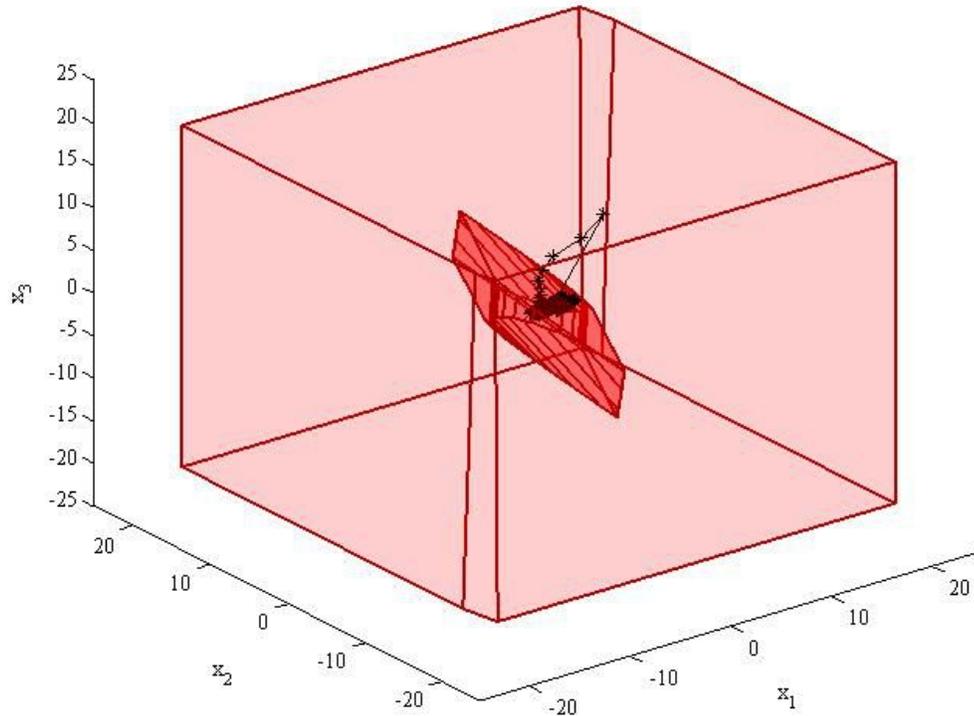


Figura 5.21: Evolución de estado correspondiente al modo re-identificación bajo una perturbación.

bación que ingresa al sistema durante el proceso de re-identificación. La perturbación consiste en modificar el valor del estado en un instante determinado, de manera que el sistema es llevado fuera del conjunto \mathcal{X}^t . La evolución de los estados para este caso se muestran en la Figuras [5.21](#) y [5.22](#). Allí se puede observar que el controlador - siempre en el *Modo de operación - Re-identificación* (**Problema** $P_N^{EXC}(x, \mathcal{X}^t, \mathbf{u}_{PE}, k)$), que en este caso, al estar el sistema fuera de \mathcal{X}^t , es equivalente a **Problema** $P_N^{ISI}(x, \mathcal{X}^t)$) - aborta el proceso de excitación del sistema para dedicarse exclusivamente a guiar el sistema de vuelta al conjunto \mathcal{X}^t .

Esto se mantiene durante unos 5 instantes de muestreo, lapso en el cual el sis-

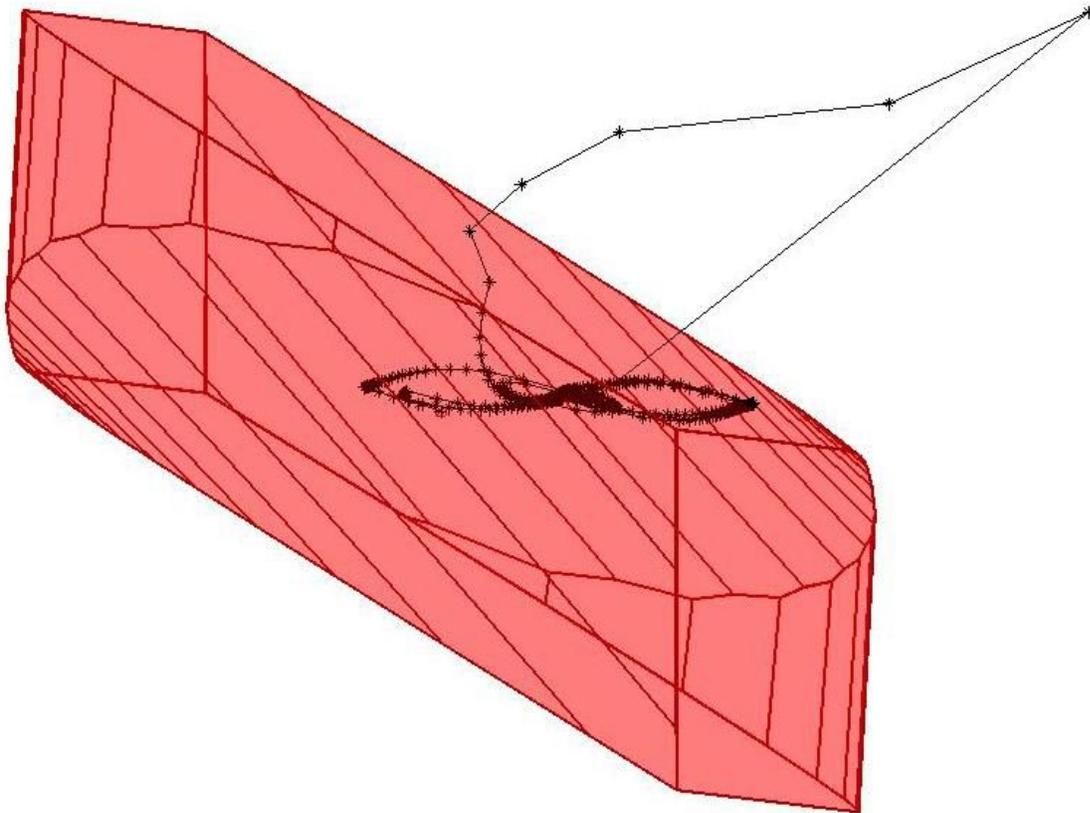


Figura 5.22: Evolución de estado correspondiente al modo re-identificación bajo una perturbación.

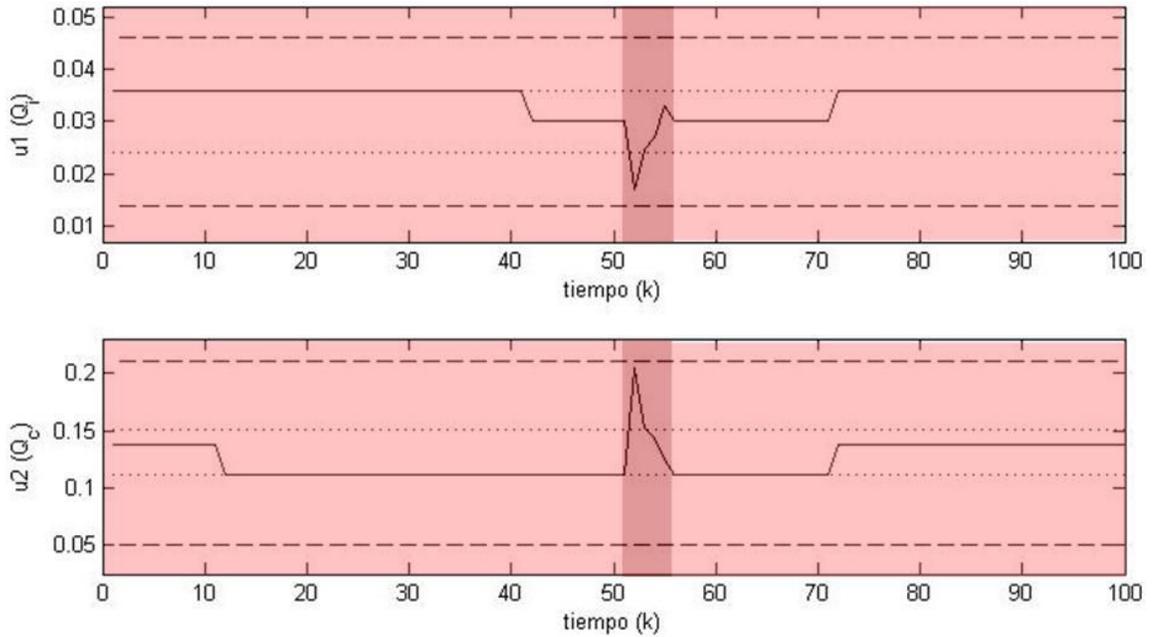


Figura 5.23: Evolución de las entradas correspondiente al modo re-identificación bajo una perturbación.

tema alcanza de nuevo el conjunto \mathcal{X}^t . Una vez dentro de este conjunto, el controlador - siempre en el *Modo de operación - Re-identificación* (ahora, **Problema** $P_N^{EXC}(x, \mathcal{X}^t, \mathbf{u}_{PE}, k)$) - retoma la excitación persistente del sistema con una señal PRBS. Los datos obtenidos para la identificación deberán, en caso de perturbaciones que saquen el sistema de \mathcal{X}^t , ser colectados de forma tal que los períodos de control hacia \mathcal{X}^t , cuando no hay excitación del sistema, sean descartados. Las Figuras [5.23](#), [5.24](#) y [5.25](#) muestran las evoluciones de las entradas, salidas y el costo en función del tiempo, respectivamente.

De la misma forma que en la sección [5.2](#), el modelo se obtiene excitando el sistema alrededor del nuevo punto de operación mediante una señal PRBS. Aunque el sistema está en lazo cerrado, mientras los estados se encuentren dentro del conjunto \mathcal{X}^t , no hay señal de realimentación que se correlacione con la entrada, y por lo tanto, el método de identificación por subespacios no presentará “bias” en el modelo estimado. Igual que en la sección antes mencionada, el proceso de excitación es de 3000 muestras de datos de entrada-salida. Las primeras 2000 muestras fueron utilizadas para el proceso de identificación y las últimas 600 para la validación del modelo obtenido.

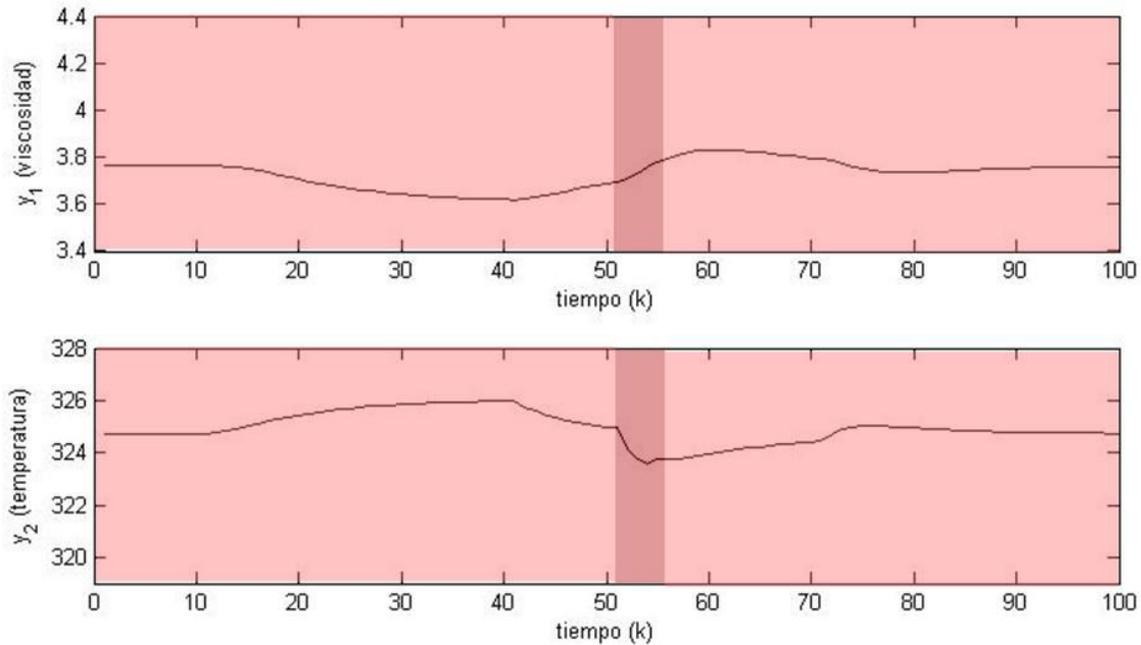


Figura 5.24: Evolución de las salidas correspondiente al modo re-identificación bajo una perturbación.

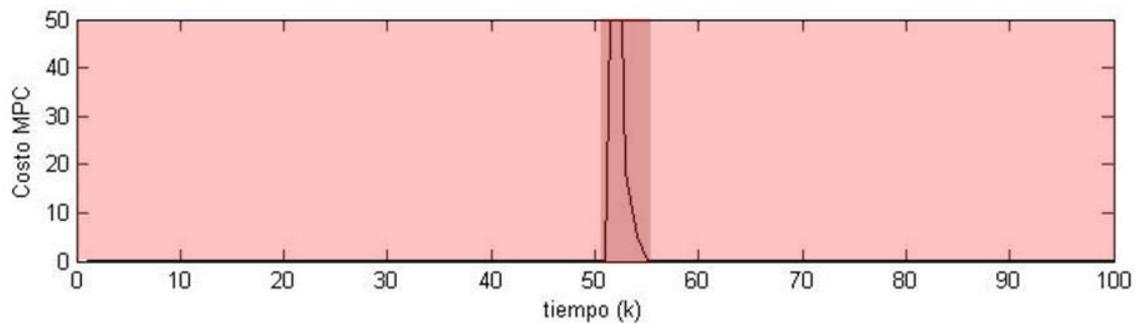


Figura 5.25: Evolución del costo correspondiente al modo re-identificación bajo una perturbación.

El nuevo modelo identificado, denominado M_2 , queda determinado por el siguiente modelo en espacio de estado de orden $n = 3$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0,92152 & 0,15935 & -0,02728 \\ 0,0024562 & 0,88195 & 0,27008 \\ 0,0050259 & 0,040115 & 0,70428 \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 41,457 & -6,5753 \\ -15,738 & -3,6524 \\ 28,053 & 4,0299 \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -0,063669 & 0,051947 & -0,0090607 \\ 0,55392 & -0,31588 & 0,13022 \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

La Figura 5.26 muestra la comparación de la validación del modelo “viejo” M_1 con el modelo “nuevo” M_2 utilizando los datos de validación del modelo M_2 . Como se puede observar el coeficiente FIT para el modelo M_2 es de 94% en promedio para ambas salidas, frente a un FIT de 82% correspondiente al modelo M_1 , **lo que evidencia la necesidad de realizar una nueva identificación cada vez que se cambia de punto de operación.**

La Figura 5.27 muestra las respuestas al escalón del modelo M_1 (rojo) y el modelo M_2 (azul).

5.4. Conclusiones

En este Capítulo se evaluó el comportamiento del controlador MPC apto para re-identificación desarrollado en el Capítulo 4, aplicándolo a un reactor de polimerización. Mediante esta aplicación se logró mostrar en forma exhaustiva que el controlador propuesto es suficientemente versátil para poder ser aplicado a un sistema moderadamente no lineal, y sobre todo, que más allá de los pormenores teóricos que subyacen su formulación (cálculo de conjuntos invariantes en el espacio de estado, etc.) es fácilmente aplicable en casos de simulación. En el ejemplo de este capítulo se pudo realizar la re-identificación del modelo sobre un nuevo punto de operación, sin la necesidad de abrir el lazo de control en ningún momento. Además se pudo observar que la robustez planteada en forma teórica en el Capítulo 4 funciona adecuadamente.

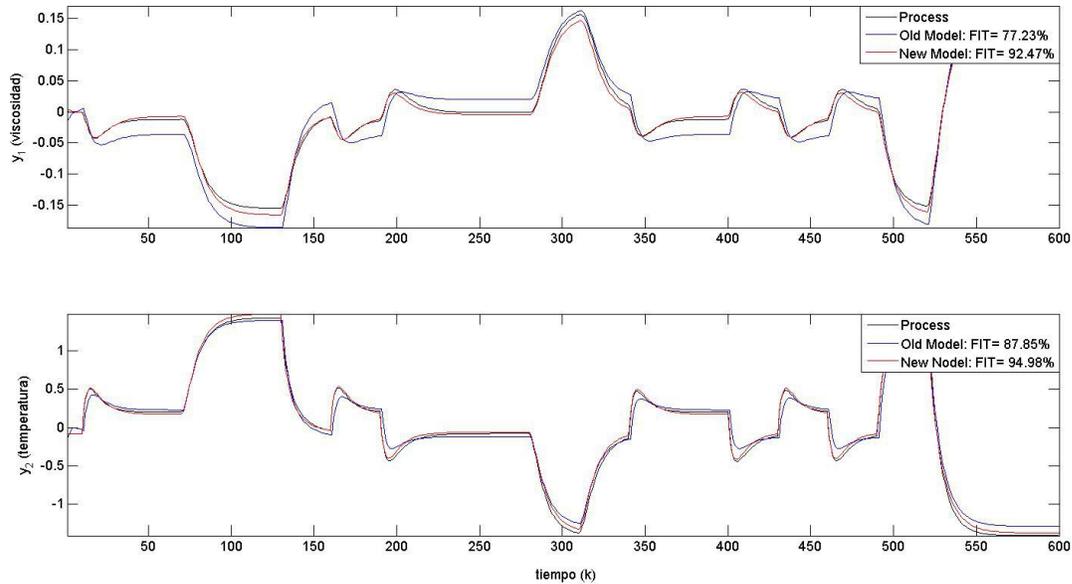
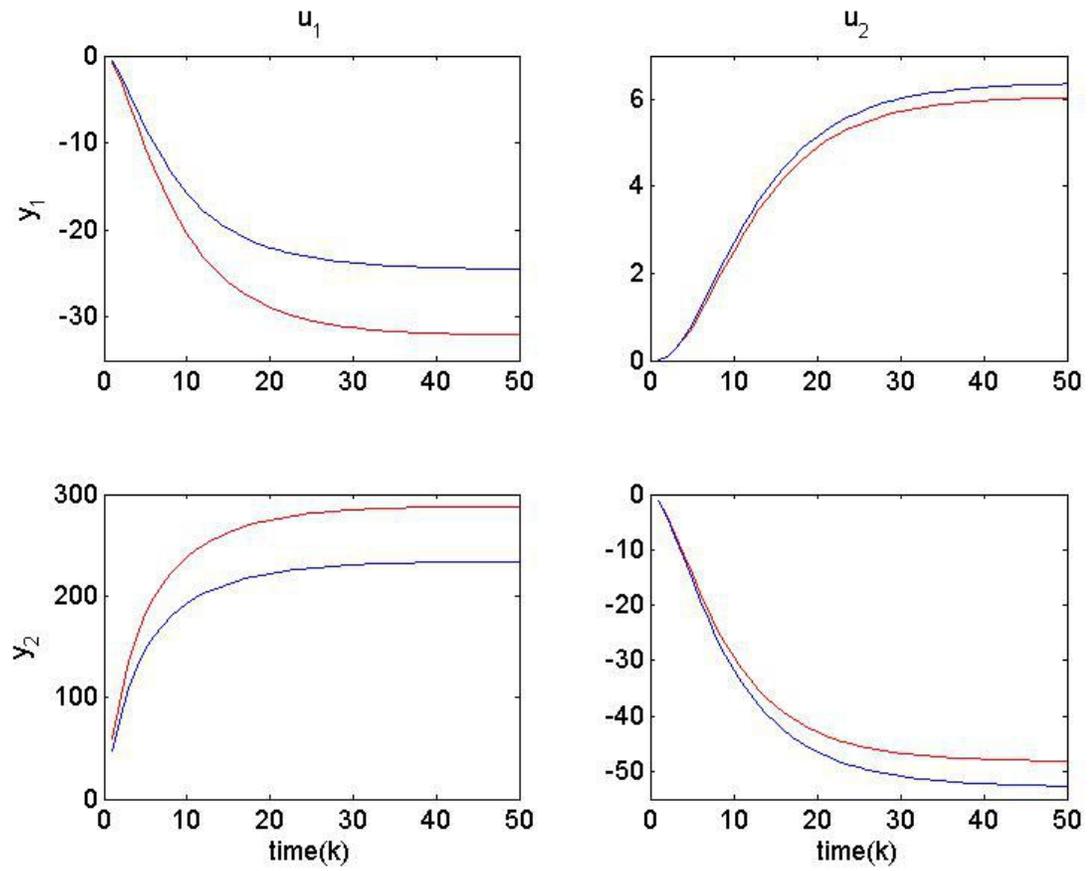


Figura 5.26: Comparación de las validaciones de los modelos M_1 y M_2 .

Naturalmente, el paso que sigue a esta etapa de simulación es la de aplicación a un sistema real, tarea que está pendiente para el futuro cercano.

Una versión preliminar de los resultados de este Capítulo fueron presentados en el congreso *RPIC* (2013): **Application of Model predictive control suitable for closed loop re-identification to a polymerization reactor.**

Figura 5.27: Respuestas al escalón de los modelos M_1 (rojo) y M_2 (azul).

Capítulo 6

Monitoreo de ganancias

Del material expuesto en los capítulos previos se desprende un tema importante desde el punto de las aplicaciones, como es la necesidad de evaluar en línea el nivel de desempeño de estos controladores. En este Capítulo se trata de dar una respuesta inicial a dicho problema proponiendo una forma de detectar condiciones que pueden ser las aceptables para el correcto funcionamiento de los sistemas bajo MPC.

Los paquetes comerciales de control multivariable como MPC son implementados por lo general en forma conjunta con optimizadores de programación lineal de estado estacionario (LP) o cuadráticos (QP) (Ying y Joseph [73]), cuya función principal es proveer set-points o targets factibles al controlador predictivo y conducir así el sistema al óptimo económico. Sin embargo, a pesar de la amplia adopción de sistemas de control de dos niveles, en la industria se han reportado casos de baja performance. Frecuentemente se han hecho aseveraciones sobre que la diferencia entre planta y modelo (model mismatch) llevan el punto de operación lejos del óptimo real, y que se han observado grandes variaciones en los cálculos de los targets (Nikandrov y Swartz [53]).

Las ganancias estacionarias del proceso son parámetros críticos del modelo para la determinación de los targets del MPC, por lo tanto se pueden obtener importantes beneficios económicos accediendo a un sistema de prevención temprana capaz de indicar cuando el proceso actual se aleja del comportamiento modelado, particularmente indicando cuándo las ganancias actuales del proceso ya no son representadas por aquellas incluidas en el modelo identificado durante la puesta en marcha del

controlador.

Los sistemas de adquisición de datos modernos permiten a los sistemas de control ser multivariables y proveer la base tecnológica para desarrollar aplicaciones de monitoreo capaces de supervisar en forma simultánea diferentes variables. Este hecho ha motivado el desafío de extender diferentes métodos estadísticos de monitoreo monovariado a aplicaciones multivariadas. A pesar de los importantes avances en los sistemas de monitoreo multivariado, en este capítulo se adopta una estrategia de monitoreo de múltiples ganancias individuales (multiple single-gain strategy). La razón de esta elección en esta parte de la tesis, se basa en la idea de detectar y localizar aquellas ganancias que se han alejado de los valores esperados, definidos por el modelo, y si es posible, estimar la amplitud de los cambios individuales. En este capítulo de la tesis se obtienen resultados de una metodología capaz de estimar ganancias de procesos multivariados a partir de bloques de datos, y se logra crear las bases para una herramienta de detección capaz de proveer señales de advertencia cuando han ocurrido cambios significativos de ganancias. En busca de este objetivo, se ha observado un incremento de atención en los últimos años en los métodos de identificación por subespacios (SID) para aplicaciones industriales. Comparado con modelos de respuesta al escalón (FIR), la experiencia ha mostrado que el método de identificación por subespacios obtiene estimaciones más precisas de ganancias, que son críticas para capturar los grados de libertad en el MPC y garantiza un rendimiento fiable del LP del optimizador de set-points (Darby y Nikolaou [12]).

Una dificultad típica, que surge cuando se enfrentan aplicaciones tecnológicas de modelado empírico a procesos reales, es la necesidad de perturbar el proceso artificialmente y encontrar un punto en donde la relación señal/ruido es lo suficientemente buena para obtener una identificación aceptable (esto suele ser un ejercicio estresante para los operadores de control). La estrategia analizada aquí para detectar cambios asume la posibilidad de usar periodos de tiempo para poder excitar el sistema. Así, una secuencia de colecciones de datos discontinuos (batch-wise data) es considerada como información relevante para el seguimiento de ganancias que se muestra a continuación.

Otra fuente de preocupación, particularmente en procesos químicos industriales, es la presencia de capacidades o acumuladores que generan comportamientos dinámi-

cos similares a los descriptos por los modos integradores, lo que imposibilita la aplicación de señales de identificación estándar como las señales pseudo-aleatorias binarias (PRBS). En este capítulo, con el fin de superar esta dificultad, se propone un enfoque racional basado en un enfoque algebraico y una PRBS modificada. De esta manera se puede identificar tanto las ganancias de la planta como los coeficientes de la relación entrada y salida con características integradoras.

6.1. Estimación de ganancias

6.1.1. Procesos estables con o sin tiempo muerto

Una vez que las matrices del sistema A , B , C y D fueron obtenidas (ver Sección 2.4.5), la condición estacionaria predicha por el modelo tiene que satisfacer la siguiente relación:

$$x_{SS} = A x_{SS} + B u_{SS} \quad (6.1)$$

$$y_{SS} = C x_{SS} + D u_{SS} \quad (6.2)$$

donde x_{SS} , u_{SS} y y_{SS} son los valores estacionarios para las variables de estados, entradas y salidas respectivamente. Reemplazando x_{SS} (6.1) dentro de (6.2) y reorganizando las ecuaciones, la matriz de ganancias del sistema es determinada por la relación entre la entrada estacionaria u_{SS} y la salida estacionaria y_{SS}

$$y_{SS} = [C(I - A)^{-1}B + D] u_{SS} = G u_{SS} \quad (6.3)$$

Así, asumiendo que un método de identificación entrega las estimaciones \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} y \hat{D} , la matriz de ganancias puede ser estimada mediante

$$\hat{G} \triangleq \hat{C} (I - \hat{A})^{-1} \hat{B} + \hat{D} \quad (6.4)$$

Notar que a pesar de que las ganancias pueden ser estimadas a partir de diferentes estados estacionarios, es decir, sin información transitoria, en muchos casos prácticos no es posible esperar hasta que la próxima condición de estado estacionario se alcance. Además, hay muchos procesos reales en donde los estados estacionarios son sólo

ocasionales. Los métodos de identificación por subespacios tienen la capacidad de trabajar con datos transitorios, lo cual es fundamental cuando se trabaja con un sistema bajo lazo cerrado. Por otra parte, las ganancias de los procesos reales no cambian de un periodo de muestreo a otro, es decir, en 1 ó 2 minutos; por lo general son cambios lentos que no permiten que la tarea de monitoreo se realice a una frecuencia mayor de una vez por día, lo cual se permite el tiempo suficiente para la colección de datos.

6.1.2. Procedimiento cuando hay modos integradores en el proceso

Para relaciones de entrada-salida que contienen modos integradores (i.e., polos en el origen, o equivalentemente, autovalores unitarios en la matriz A) el concepto de las ganancias del sistema debe ser revisado. De hecho, en un sistema integrador puro, el valor instantáneo de la salida no depende del valor instantáneo de la entrada, sino de la “historia” del comportamiento de la entrada; más precisamente, la salida depende de la integral de la señal de entrada completa. Esto claramente implica que, en el estado estacionario, ya no hay relaciones lineales predeterminadas entre las salidas y entradas estacionarias, y de esta manera, el concepto de ganancias del sistema (en el sentido que se presentó en la sección anterior) ya no es aplicable. Algebraicamente, la presencia de un sistema integral puede ser detectado por la imposibilidad de invertir la matriz $(I - A)$ para poder obtener G , como en la ecuación (6.4).

Consideremos un sistema general MIMO, con $D = 0$ donde cada función de transferencia es estable excepto $G_{ji}(s)$, la cual incluye un modo integrador,

$$\begin{bmatrix} y_1(z) \\ \vdots \\ y_j(z) \\ \vdots \\ y_l(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & \cdots & G_{1i}(z) & \cdots & G_{1m}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{j1}(z) & \cdots & G_{ji}(z) = \frac{K_{ji}}{z} \tilde{G}_{ji}(z) & \cdots & G_{jm}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{l1}(z) & \cdots & G_{li}(z) & \cdots & G_{lm}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(z) \\ \vdots \\ u_i(z) \\ \vdots \\ u_m(z) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Notar en la expresión anterior que K_{ji} no es una ganancia estacionaria sino la pendiente final de la respuesta al escalón de la función de transferencia $G_{ji}(s)$.

Para analizar este caso, se empieza considerando la versión diagonal de la matriz de estados A , A_d , del modelo en espacios de estados discreto, que puede obtenerse mediante una descomposición de Jordan,

$$A_d = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (6.6)$$

donde $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, son los modos estables del sistema, $\lambda_1 = 1$ representa el modo integrador, y V es la matriz de transformación invertible. Además, las correspondientes matrices transformadas B_d y C_d pueden obtenerse como:

$$B_d = V^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & B_{d,1i} & \cdots & 0 \\ B_{d,21} & \cdots & B_{d,2i} & \cdots & B_{d,2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{d,n1} & \cdots & B_{d,ni} & \cdots & B_{d,nm} \end{bmatrix} \in n \times m \quad (6.7)$$

$$C_d = CV = \begin{bmatrix} 0 & C_{d,12} & \cdots & C_{d,1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{d,j1} & C_{d,j2} & \cdots & C_{d,jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & C_{d,l2} & \cdots & C_{d,ln} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times n} \quad (6.8)$$

Una vez que la representación del sistema se encuentra de esta forma, los modos integradores pueden separarse quitando de las matrices los parámetros asociados a los modos integrales *exclusivamente*, obteniendo de esta manera un subsistema estable. Por lo tanto, se consideraran las siguientes matrices

$$\tilde{A}_d = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} \quad (6.9)$$

$$\tilde{B}_d = \begin{bmatrix} B_{d,21} & \cdots & B_{d,2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{d,n1} & \cdots & B_{d,nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times m} \quad (6.10)$$

$$\tilde{C}_d = \begin{bmatrix} C_{d,12} & \cdots & C_{d,1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{d,j2} & \cdots & C_{d,jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{d,l2} & \cdots & C_{d,ln} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times n} \quad (6.11)$$

donde \tilde{A}_d se obtiene mediante la eliminación de la fila y la columna asociada a $\lambda_1 = 1$, mientras que \tilde{B}_d y \tilde{C}_d se obtienen eliminando la fila y columna asociadas, respectivamente, al modo integrador. El nuevo sistema $(\tilde{A}_d, \tilde{B}_d, \tilde{C}_d)$ es completamente estable, y la matriz de ganancia de este sistema reducido esta dada por

$$G = \tilde{C}_d (I - \tilde{A}_d)^{-1} \tilde{B}_d \in \mathbb{R}^{l \times m} \quad (6.12)$$

Notar que G tiene la misma dimensión que el sistema original. La *ganancia* correspondiente al modo integrador es igual a cero, lo cual tiene que interpretarse como una función de transferencia sin ganancia estacionaria. La forma diagonal de (A_d, B_d, C_d) provee una forma simple de identificar la función de transferencia que incluye un modo integrador, y encontrar el valor de las constantes de integración correspondientes, K_{ji} . Como se puede observar fácilmente en la ecuación (6.7), la matriz B_d contiene un solo elemento diferente de cero, $B_{d,1i}$, en la fila correspondiente al modo integrador, mientras que la matriz C_d presenta también un elemento diferente de cero, $C_{d,j1}$, en la columna correspondiente al modo integrador. Esto significa que la entrada asociada al modo integrador es i , y la salida asociada es j , es decir, la función de transferencia con el modo integrador es $G_{ji}(s)$, y no hay necesidad de saber esto *a priori*. Además, integrando el primer estado de la ecuación en diferencias,

$$x_1(k+1) = x_1(k) + B_{d,1i}u_i \quad (6.13)$$

y la ecuación de salida (2.31) con $D = 0$, permite estimar la constante asociada al

modo integrador mediante

$$\hat{K}_{ji} = \frac{1}{T} \hat{C}_{d,j1} \hat{B}_{d,1i} \quad (6.14)$$

donde T es el intervalo de muestreo usado al realizar la experiencia.

6.1.3. Procedimiento general para explorar un conjunto de datos preliminares

Ya que los ingenieros en control pueden o no estar preocupados por la presencia en los sistemas de modos integradores o comportamientos dinámicos muy cercanos a un integrador, lo aconsejable es llevar a cabo un análisis preliminar de los datos disponibles para determinar la presencia y localización de los modos integrales. Este análisis numérico se basa en los argumentos presentados en las Secciones [6.1.1](#) y [6.1.2](#), y el procedimiento pueden seguir los pasos que se detallan a continuación:

1. Adoptar un modelo multivariable de orden n a partir de algún conocimiento a priori de la planta. El mínimo valor aconsejable es $n = m.l$, lo cual es equivalente a asumir una dinámica de primer orden en cada una de las funciones de transferencias $G_{ji}(s)$ del sistema MIMO. Siguiendo la nomenclatura de la Sección [2.4.3](#), se adopta el parámetro i tal que $i \geq n$ y se elige un parámetro j tal que $j/i > 10$.
2. Estimar las matrices del sistema A , B y C usando el método de identificación por subespacios, luego calcular los autovalores de la matriz A .
3. Si los autovalores están incluidos en el círculo unitario, calcular la matriz de ganancia mediante la ecuación [\(6.4\)](#); si resulta lo contrario, la matriz A debe diagonalizarse apropiadamente mediante una matriz de transformación V , luego obtener las matrices del sistema transformadas A_d , B_d y C_d , como se muestra en la Sección [6.1.2](#).
4. Las filas y columnas de A_d , las correspondientes filas B_d y columnas de C_d , asociadas a los modos integradores, son identificadas y aisladas. Luego, de los bloques diferentes de cero de las submatrices aisladas B_d^{int} y C_d^{int} , se calcula la matriz $K = C_d^{\text{int}} B_d^{\text{int}}$.

5. Los modos integradores pueden ser identificados en la matriz K observando los valores distintos de cero, multiplicados por $1/T$, dando así las estimaciones de las constantes de integración K_{ji} , como es indicado en (6.12).
6. Las matrices de la parte no integradora, \tilde{A}_d , \tilde{B}_d y \tilde{C}_d , que se obtienen eliminando las filas y columnas como se describe en el **paso 4**, son usadas para calcular la matriz de ganancia del sistema, como se indica en (6.10).
7. Una vez que se verificó la existencia o no de dinámicas integradores, la dimensión de la relación j/i de las matrices de Hankel y el orden del sistema n , deben ser revisados para obtener una precisión deseada de las estimaciones.

6.2. Algoritmos para el monitoreo de estimaciones de ganancias

La tarea de monitorear procesos se basa generalmente en la estimación de parámetros importantes de un modelo representativo del sistema a ser observado. Si la función densidad de probabilidad de un estimador es conocida o puede ser aproximada, una carta de control de Shewhart puede ser fácilmente implementada definiendo un intervalo de confianza con un nivel asociado de probabilidad. Como la estimación de la matriz de ganancias es un arreglo de estimaciones, el procedimiento para determinar si ha ocurrido un cambio significativo en alguna de ellas debe ser realizado mediante el análisis de estadísticos individuales. Estos análisis son típicamente implementados mediante estimadores de intervalo o intervalos de confianza definidos por dos límites laterales alrededor del valor esperado. Cuando las estimaciones se repiten en intervalos de tiempos predeterminados, las cartas de control de Shewhart surgen naturalmente como un test de hipótesis para evaluar los posibles cambios en los parámetros de interés. En caso de que se desee alta sensibilidad para detectar cambios, dos algoritmos del Control Estadístico de Proceso (SPC) pueden utilizarse,

1. Promedios móviles ponderados exponencialmente (EWMA), propuesto por Roberts [65].
2. Sumas acumuladas (CUSUM), propuesto por Page [58].

6.2.1. Cartas de control múltiples EWMA

El algoritmo EWMA provee un adecuado estadístico para detectar pequeños pero sostenidos cambios o corrimientos de las ganancias individuales, e incrementa la robustez de los valores estimados que permanecieron sin cambios. Dada una secuencia de estimaciones, $\hat{G}_{ji}(t)$ para $t = 1, 2, \dots$, el algoritmo ejecuta un promedio móvil recursivo mediante la siguiente expresión,

$$M_{ji}(t) = \lambda \hat{G}_{ji}(t) + (1 - \lambda)M_{ji}(t - 1) \quad (6.15)$$

$$M_{ji}(0) = \bar{G}_{ji} \quad j = 1, 2, \dots, l; \quad i = 1, 2, \dots, m$$

donde los subíndices j e i representan las salidas y entradas respectivamente, $\lambda \in [0, 1]$ es un parámetro de ajuste de sensibilidad y velocidad de respuesta. Para calcular el valor inicial \bar{G}_{ji} (valor medio) y diseñar los límites de control para los estadísticos M_{ji} , se utilizan N estimaciones preliminares de la matriz de ganancia a partir de los datos de planta asumiendo que no hay cambios en las ganancias durante el periodo de recolección y descartar aquellas muestras que presenten perturbaciones no deseadas. De esta manera, cada variable estadística tiene límites superior e inferior definido por

$$UL_{M_{ji}} = \bar{G}_{ji} + 3\hat{\sigma}_{M_{ji}} = \bar{G}_{ji} + 3\hat{\sigma}_{\hat{G}_{ji}} \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \quad (6.16)$$

$$LL_{M_{ji}} = \bar{G}_{ji} - 3\hat{\sigma}_{M_{ji}} = \bar{G}_{ji} - 3\hat{\sigma}_{\hat{G}_{ji}} \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \quad (6.17)$$

donde $\hat{\sigma}_{M_{ji}}$ es la estimación de la desviación estándar de la variable estadística M_{ji} , \bar{G}_{ji} y $\hat{\sigma}_{\hat{G}_{ji}}$ son la media estimada y la desviación estándar estimada del estimador \hat{G}_{ji} respectivamente. La distancia *3-sigma* entre la línea central y los límites es consecuencia de una convención aceptada en el diseño de cartas de control estadístico estándar; esta distancia constituye un parámetro de diseño adoptado en forma simultánea con el nivel de prueba significativa cuando la función de distribución es conocida. La línea central para estas cartas de control son calculadas usando N estimaciones de la matriz de ganancias preliminares como

$$\bar{G}_{ji} = \sum_{k=1}^N \hat{G}_{ji}(k)/N \quad (6.18)$$

y el estimador del error estándar mediante

$$\hat{\sigma}_{\hat{G}_{ji}} = \left\{ \sum_{k=1}^N \left(\hat{G}_{ji}(k) - \bar{G}_{ji} \right)^2 / (N - 1) \right\}^{1/2} \quad (6.19)$$

El procedimiento implica un test de hipótesis en cada momento en que un nuevo valor de M_{ji} es obtenido. Si el estimador se mantiene entre los límites, se acepta que no hay suficiente evidencia para pensar que un cambio ha ocurrido; de lo contrario, uno o más valores de M_{ji} fuera de los límites debe tomarse como evidencia significativas de que un corrimiento en la media poblacional ha ocurrido.

6.2.2. Cartas de control múltiples CUSUM.

Alternativamente, el algoritmo conocido como suma acumulada (CUSUM) puede utilizarse para detectar pequeños cambios (Montgomery [52]). En este caso, las siguientes expresiones son aplicadas a la secuencia de estimaciones de las ganancias:

$$S_{ji}^H(t) = \max \left\{ 0, [\hat{G}_{ji}(t) - (\bar{G}_{ji} + b_{ji})] + S_{ji}^H(t - 1) \right\}, \quad S_{ji}^H(0) = 0, \quad (6.20)$$

$$S_{ji}^L(t) = \max \left\{ 0, [(\bar{G}_{ji} - b_{ji}) - \hat{G}_{ji}(t)] + S_{ji}^L(t - 1) \right\}, \quad S_{ji}^L(0) = 0, \quad (6.21)$$

donde b_{ji} es usado como parámetro de ajuste o sensibilidad. Por lo general, el diseño de los algoritmos CUSUM incluye una variable de decisión h tal que si $S_{ji}^H(t) > h$ o $S_{ji}^L(t) > h$ implica que un cambio ha ocurrido. Esta variable de decisión no es estrictamente necesaria para la aplicación que se plantea en esta tesis, ya que el foco de ésta apunta a descubrir un corrimiento o “bias” persistente en el tiempo entre el estimador $\hat{G}_{ji}(t)$ y el valor medio \bar{G}_{ji} . Notar de las ecuaciones (6.20) y (6.21), que mientras las estimaciones $\hat{G}_{ji}(t)$ estén dentro del rango definido por $\bar{G}_{ji} \pm b_{ji}$, no habrá acumulación en $S_{ji}^H(t)$ o $S_{ji}^L(t)$ y permanecerán levemente arriba de cero. Sin embargo, tan pronto como la serie de estimaciones de $\hat{G}_{ji}(t)$ empiece a desviarse

sistemáticamente hacia alguno de los lados del intervalo antes definido, se observará un claro alejamiento de cero de $S_{ji}^H(t)$ o $S_{ji}^L(t)$, indicando que ha sucedido un cambio significativo y persistente.

6.3. Aplicación a un sistema multivariable sencillo

6.3.1. Sistema MIMO adoptado para evaluación

El método de estimación de ganancias propuesto en la sección 6.1 es evaluado mediante simulación numérica de un proceso representado por un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) 5×3 especificado en la Tabla 6.1. Este ejemplo arbitrario es definido con más salidas que entradas ya que ésta es una característica frecuente de los sistemas de procesos actuales, en donde controladores avanzados como MPCs son aplicados. Además, cabe destacar que el sistema incluye importantes tiempos muertos y modos integradores, entregando de este modo desafíos similares a los encontrados en aplicaciones a plantas reales. La Figura 6.1 muestra las respuestas al escalón de las funciones de transferencia de la Tabla 6.1 donde se presentan dinámicas diferentes pero típicas de procesos reales y en donde el tiempo de establecimiento más largo puede estimarse. La ventaja de usar un sistema multivariable conocido obedece a la posibilidad de poder evaluar la precisión que se espera y la necesidad de buscar condiciones metodológicas adecuadas para reducir el "bias" de la estimación con los valores actuales de ganancia. Así, la experiencia numérica en esta sección tiene la intención de descubrir dificultades que puedan surgir cuando se utilice el método SID como base para el desarrollo de la herramienta de seguimiento deseado, aún cuando la aplicación no considera explícitamente no-linealidades del proceso.

En esta sección se asume la disponibilidad de dos secuencias de datos: la primera corresponde a simulaciones donde el sistema se encuentra estable y sin ningún cambio pero recibiendo una mínima amplitud de una señal de excitación sobre las variables manipuladas. Este primer conjunto de datos se utiliza para diseñar los límites de control y los algoritmos de detección especificados en la Sección 6.2. El segundo conjunto de datos proviene de simulaciones donde tres ganancias son arbitrariamente modificadas en orden de evaluar la sensibilidad del método propuesto para detectar corrimientos inesperados en las ganancias del proceso.

$\frac{-0,8}{15s^2+3s+1}$	$\frac{4,7}{10s^2+7,8s+1}$	$\frac{1}{s}$
$\frac{1,4e^{-10s}}{8s^2+5s+1}$	$\frac{0,8e^{-10s}}{10s^2+3s+1}$	0,0
$\frac{1,5}{7,5s+1}$	$\frac{2}{s}$	$\frac{0,9}{15s^2+10s+1}$
$\frac{4,0}{7,8s+1}$	0,0	$\frac{2,5}{5s+1}$
$\frac{-0,3}{10s^2+4s+1}$	$\frac{5,0e^{-5s}}{16s^2+5s+1}$	$\frac{-2,8}{9,8s^2+10s+1}$

Tabla 6.1: Sistema Lineal Multivariable usado para evaluar el método de detección de cambios.

6.3.2. Configuración de colección de datos

La estrategia de monitoreo analizada aquí asume la posibilidad de tener periodos de operación donde una señal de excitación persistente puede ser ingresada al sistema. Por lo tanto, una secuencia de colección de datos en bloques (batch-wise data) deben estar disponibles como información relevante para poder aplicar el método de seguimiento de ganancias. La configuración para la colección de datos se muestra en la Figura [6.2](#). Además, y más importante, una PRBS modificada (MPRBS) se ingresa a las variables manipuladas para obtener una salida con variabilidad suficiente y obtener así reacciones de causa-efecto útiles para la identificación. La modificación que se introduce a la señal PRBS estándar y explicada en detalle en la Sección [6.3.3](#), es motivada por la posibilidad de encontrar modos integradores frecuentemente encontrados en las dinámicas de los procesos químicos, lo que puede conducir al sistema en lazo abierto a la inestabilidad si estos no están apropiadamente compensados. Recordar que se asume que no hay conocimiento previo acerca de la presencia de dinámicas integradoras en el conjunto de datos recogidos durante la experiencia.

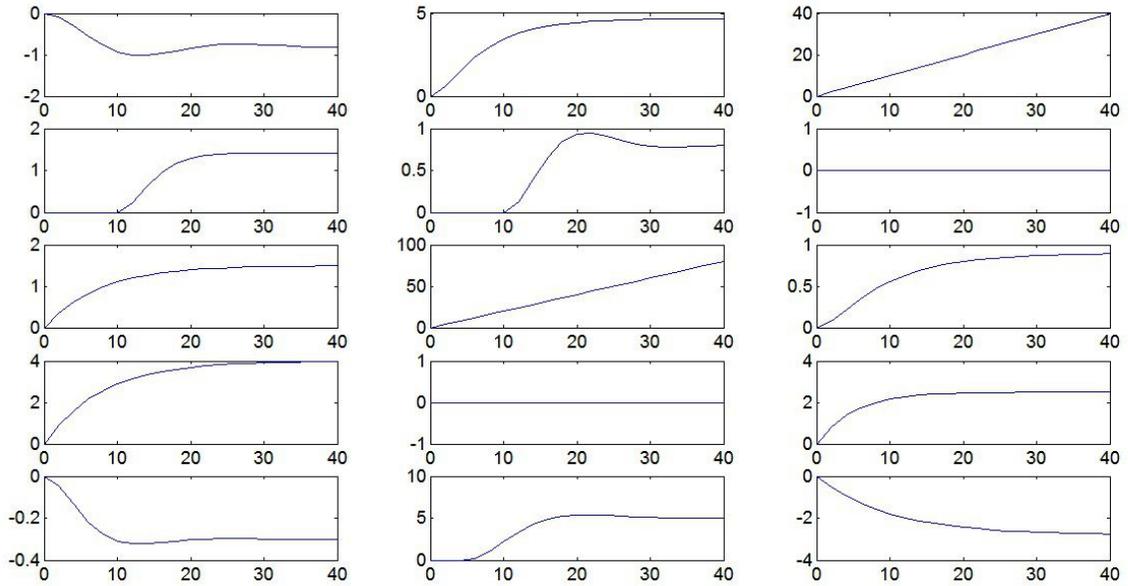


Figura 6.1: Respuestas al escalón correspondiente a las funciones de transferencias de la Tabla [6.1](#).

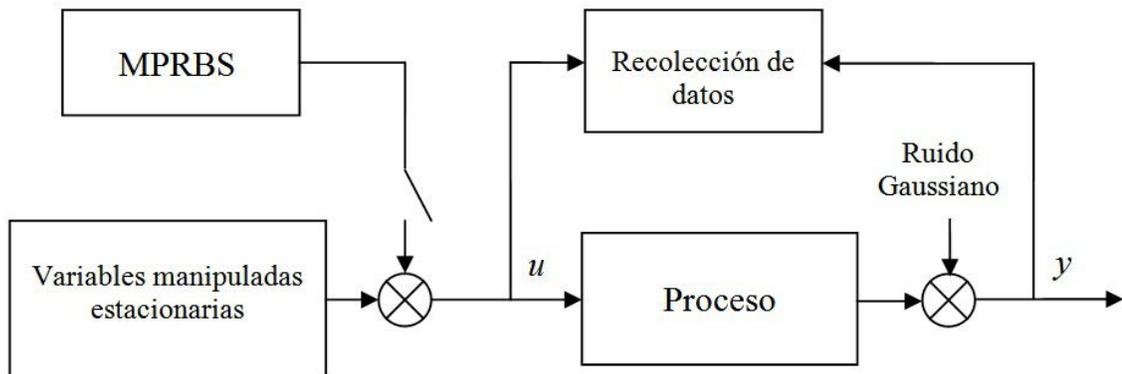


Figura 6.2: Estrategia de recolección de datos.

6.3.3. Señales de excitación de entrada

Como en todos los procedimientos de identificación, la experiencia comienza ingresando una señal de excitación a las variables manipuladas y registrando las señales de entrada y salida simultáneamente, como se muestra en la Figura 6.2. Con el fin de acercarse a señales típicas de las obtenidas en sistemas de procesos reales, se le suma ruido gaussiano a las variables de salida. Las señales de excitación que se utilizan en esta aplicación son similares a las PRBS estándar pero condicionadas de cumplir con los siguientes dos requerimientos: i) ser de excitación persistente e independiente para cada entrada, y ii) ser diseñada de manera que se eviten largos intervalos durante los cuales los modos integradores pueden llevar al sistema afuera de los límites operacionales.

El primer requerimiento para la señal de entrada $u(k)$ está asociado a la independencia lineal de los bloques fila de la matriz de Hankel de datos de entrada (ver Sección 2.4.3). Si esta condición no se cumple, la matriz $U_f U_f^T$, cuya inversa es necesaria para obtener las proyecciones ortogonales y oblicuas en el método de subespacios, se convierte en singular y el problema de las estimaciones de ganancias no provee una solución única. Para evitar esta dificultad, las señales de entrada necesitan ser "suficientemente ricas", lo que matemáticamente significa que deben cumplir con la condición de excitación persistente (ver Sección 2.5). El segundo requerimiento es resuelto creando *ciclos de integral-cero* diseñado por una señal con signos opuestos, tal que, cada vez que se termina en ciclo, la integral de la señal tiende a cero. La gráfica de la señal en la Figura 6.3 muestra esta característica particular conteniendo líneas verticales a rayas para poder visualizar los ciclos compensados. La característica aleatoria de la señal aparece con la longitud y la dirección del primer movimiento en cada ciclo. Estas señales PRBS modificados (MPRBS) comienzan con diferentes semillas para cada entrada, de manera de evitar secuencias similares simultáneamente y correlaciones entre las variables manipuladas. La banda frecuencial de interés en las señales entrada está determinada por límites superiores e inferiores asociados a los tiempos de establecimiento más largos y cortos respectivamente. En cuanto a la amplitud de la señal, la excitación sumada es tal que la relación señal-ruido (SNR) en cada variable de salida es lo suficientemente grande como para distinguir entre la parte determinística y el ruido. La Figura 6.3 muestra las señales MPRBS antes de

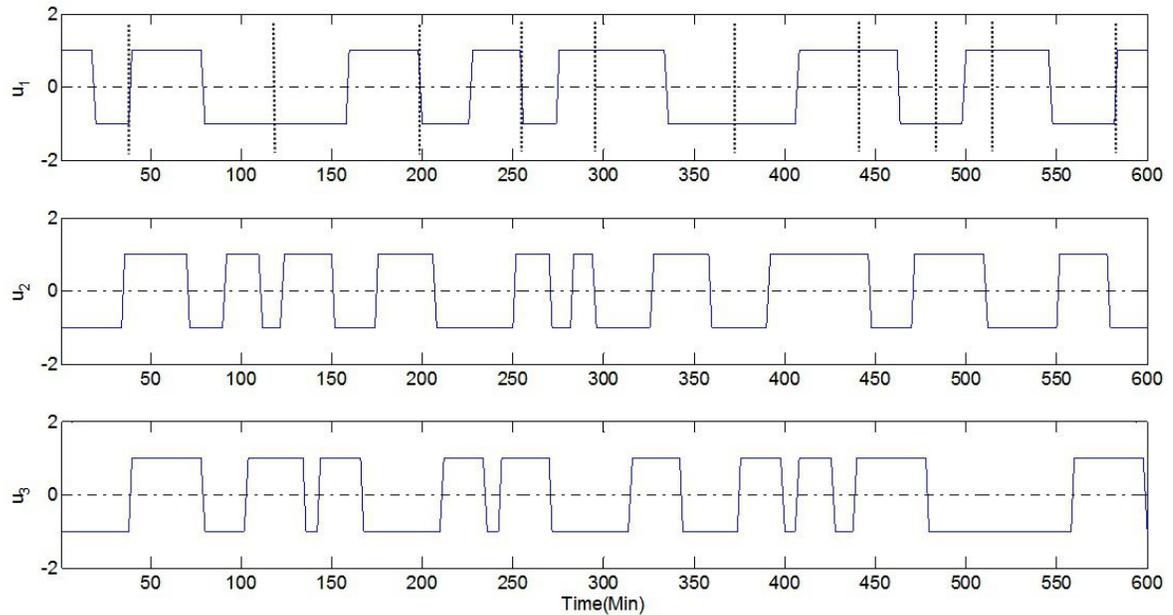


Figura 6.3: Señales PRBS modificadas ingresadas al sistema de la Tabla [6.1](#)

ser afectadas por los factores de amplitud individuales.

6.3.4. Orden del modelo y rectangularidad de las matrices de Hankel

Un punto a destacar aquí es la manera de determinar el orden del modelo cuando este es desconocido. La mayoría de los métodos de identificación, aún para sistemas SISO, requieren una adopción preliminar del orden del sistema. Contribuciones previas realizadas por varios autores (Favoreel et al. [\[13\]](#), Jansson [\[31\]](#), Katayama [\[32\]](#), Overschee y Moor [\[55\]](#), Verhaegen [\[70\]](#)) indican que este parámetro puede ser estimado mediante la descomposición en valores singulares de una matriz de proyección obtenida en uno de los pasos del método de identificación por subespacios. Esto se logra seleccionando el escalón más pronunciado en la curva de los valores singulares de dicha proyección. Sin embargo, cuando el sistema es un proceso multivariable complejo y se agrega ruido al sistema, la selección del orden del sistema se convierte en un problema complicado, ya que la curva de valores singulares no presenta una

forma que ayude a la determinación de este parámetro.

Para evitar las complicaciones mencionadas se propone la realización de un análisis numérico para determinar las dimensiones convenientes de las matrices en bloque de Hankel que son utilizadas en los métodos SID, así también para el orden del sistema. Estas dimensiones se discuten en detalle en la Sección [2.4.3](#) donde i y j están condicionadas a $i \geq n$ y $j \gg i$, siendo n el orden del sistema adoptado. Recordar que en esta parte de la Tesis, el foco de interés está en la identificación de las ganancias del proceso y que la identificación precisa de las dinámicas transitorias del sistema no es necesaria. Consecuentemente, se sugieren algunos experimentos numéricos para encontrar el orden del sistema mínimo n y la relación j/i lo que provee una precisión de las estimaciones aceptable. Notar que la relación j/i define la “rectangularidad” de las matrices de Hankel; mientras más grande sea esta razón, mayor es la rectangularidad de la matriz.

Aunque hay diferentes métodos, un enfoque simple para cuantificar la precisión de las matrices de ganancias estimadas consiste en evaluar el promedio individual del error absoluto de las ganancias estimadas, lo que se define de la siguiente manera:

$$AAE = \frac{1}{l.m} \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^m \left| \hat{G}_{ji} - G_{ji} \right|, \quad (6.22)$$

donde G_{ji} es el valor de la ganancia verdadera entre la salida j y la entrada i . La Figura [6.4](#) muestra como la función AAE varía con n y j/i cuando el método SID se utiliza para la estimación de las ganancias de sistema definido en la Tabla 1. Este resultado se obtiene a partir de un intervalo de muestreo de 2 minutos, el cual podría estar cerca de los valores implementados en la práctica cuando procesos grandes de complejidad estándar son considerados. Este intervalo de tiempo significa que el conjunto de datos disponible para una estimación de la matriz de ganancias por día puede estar compuesto por al menos 600 a 700 muestras por variable, aunque alguna de ellas pueda llegar a estar excluidas debido a fallas de instrumentos, perturbaciones en el proceso, etc. Notar que de la Figura [6.4](#) se identifica una variación insignificante del error promedio de la ganancia cuando ambos, el orden n y la razón j/i superan los valores de 15 o 16; a partir de ahí, un error absoluto debajo de 0.035 se obtiene como promedio sobre las 15 estimaciones de ganancias. El hecho de que la precisión

sea muy buena aún para $n = 10$ cuando la razón j/i es lo suficientemente grande confirma implícitamente que no se necesitan considerar todos los modos del sistema para tener buenas estimaciones en las ganancias. Este análisis preliminar produce una reducción considerable en el gasto computacional ayudando a evitar parámetros innecesariamente largos, y contribuyendo a la implementación de sistemas de procesos grandes.

El error absoluto utilizado para graficar la Figura 6.4 es calculado usando como valores verdaderos de las ganancias aquellos utilizados en las funciones de transferencias definidas en la Tabla 6.1. Sin embargo, en un problema real, los valores verdaderos de las ganancias no serán conocidos, sino solo estimados. Así, el análisis numérico para determinar los valores convenientes de los parámetros j/i y n , tiene que realizarse sin el conocimiento a priori de las ganancias reales del sistema. Afortunadamente el comportamiento asintótico observado en la función AAE , cuando j/i y n aumentan, se mantiene independientemente de los *valores verdaderos* usados como referencia para calcular esa función. Esto significa que cualquier diferencia entre estas referencias y los valores actuales de ganancias simplemente producen un corrimiento en la función de la Figura 6.4 sin cambiar en forma significativa, y así, se mantiene la capacidad de ayudar en la selección de los valores de i y n . Teniendo en cuenta que el objetivo principal es la detección de cambios en las ganancias del proceso que se alejan de aquellas utilizadas en los controladores MPC, el uso de las ganancias del MPC como referencia para el cálculo de la función AAE se convierte en una adopción natural en el momento de aplicar este procedimiento a procesos reales bajo control MPC.

6.3.5. Estimaciones de ganancias individuales

En el sistema definido en la Tabla 6.1, la función de transferencia $G_{13}(s)$ y $G_{32}(s)$ son ambas integradoras puras con constantes de integración 1,0 y 2,0 respectivamente. Una vez que estas han sido localizadas y estimadas, la tarea pendiente es la estimación de las ganancias asociadas a los modos estables, como se describe en el análisis presentado en la Sección 6.1.2. La Figura 6.5 muestra las estimaciones realizadas *una por día* con datos tomados a partir de la primer secuencia de simulaciones, donde se asume que el proceso permanece estable y las ganancias sin cambios.

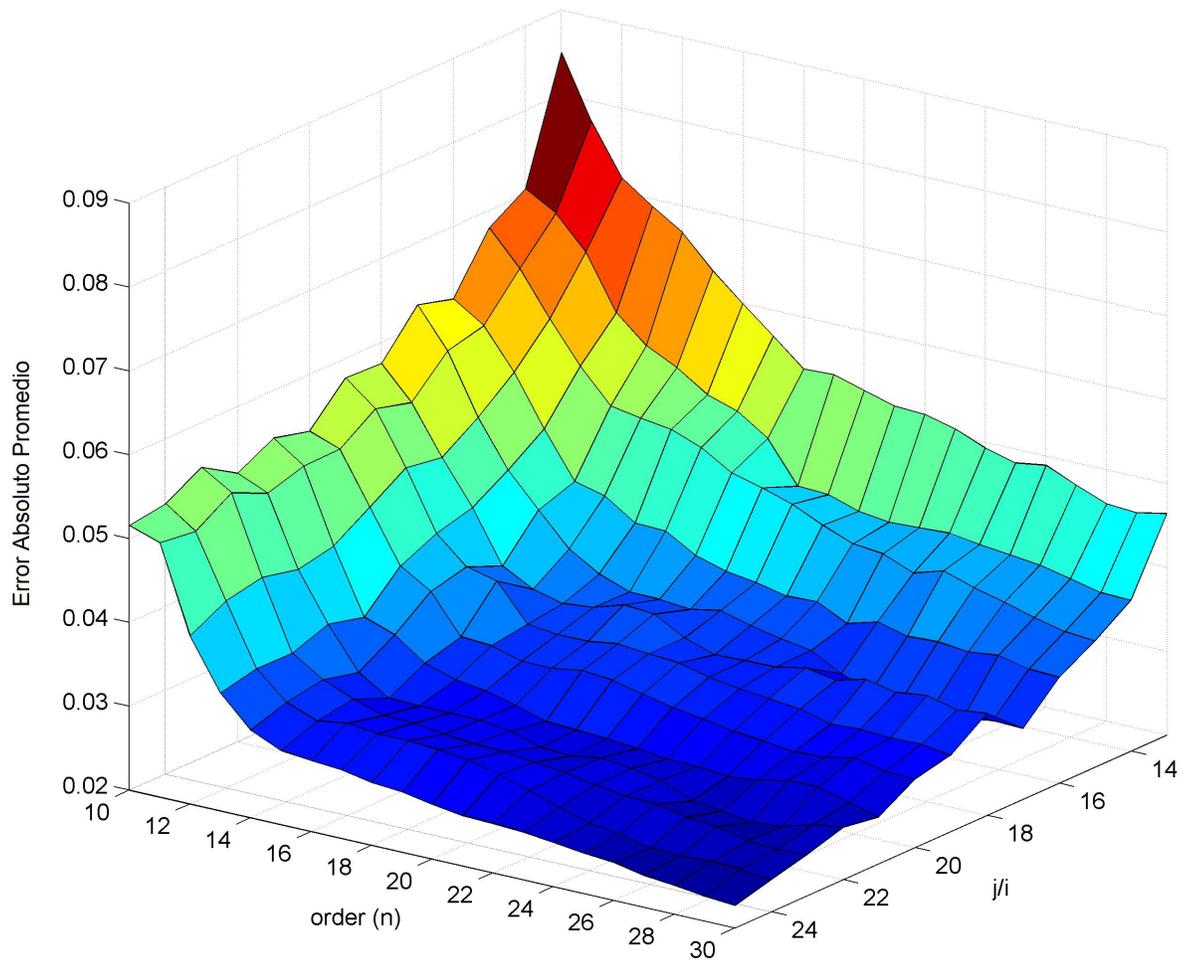


Figura 6.4: Error Absoluto Promedio (AAE).

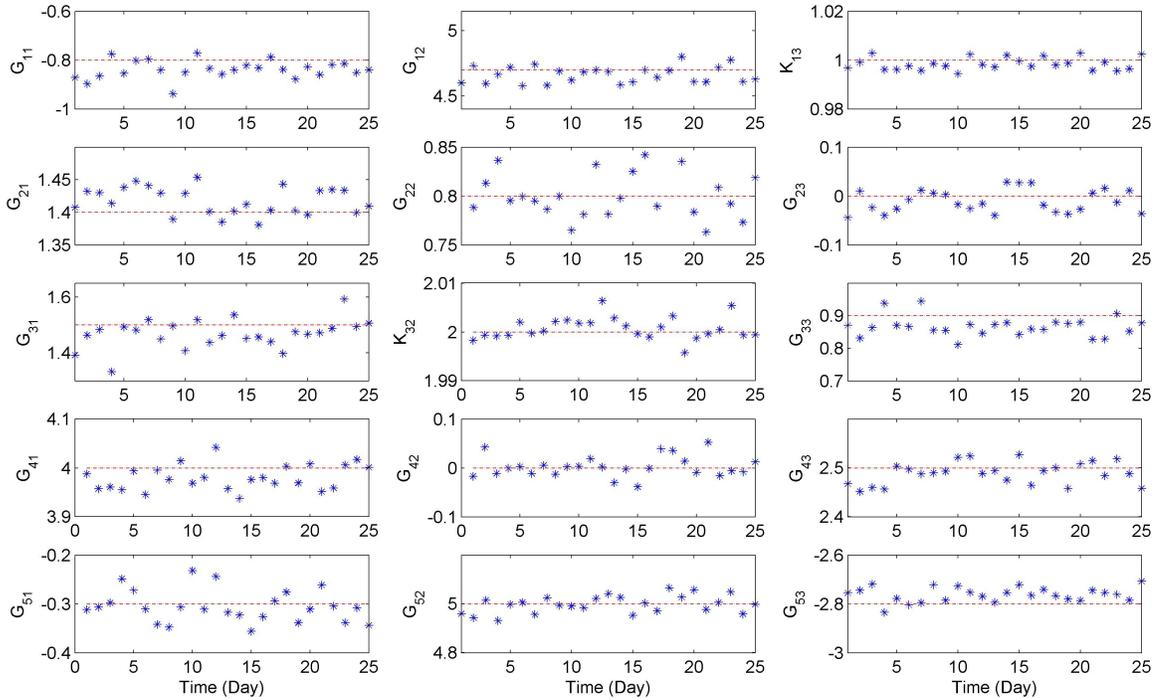


Figura 6.5: Secuencia preliminar de las estimaciones de las ganancias.

De la simple inspección visual se puede concluir que los resultados poseen muy buena exactitud y una aceptable precisión en la mayoría de las ganancias.

6.3.6. Resultados obtenidos con EWMA

Como se indicó previamente, cada estimación de ganancia es una variable estadística que trata de determinar el valor real de la ganancia. Consecuentemente, una declaración acertada acerca del cambio de una ganancia específica G_{ji} debe hacerse mediante un test de hipótesis sobre la media del estimador $\hat{G}_{ji}(t)$. La sensibilidad de esta inferencia estadística puede mejorarse significativamente cuando el test se realiza mediante el algoritmo EWMA tan pronto como se tenga una nueva estimación disponible. En esta experiencia numérica, algunas de las ganancias del “proceso” descrito por las funciones transferencias de la Tabla [6.1](#) son cambiadas de la siguiente manera:

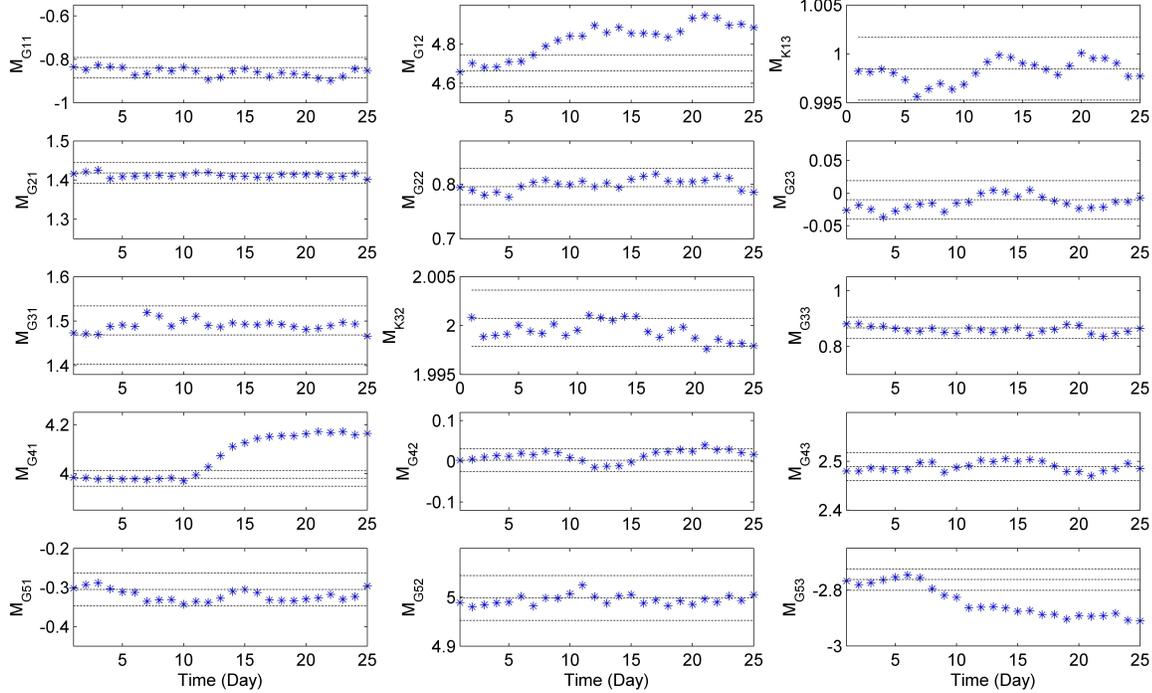


Figura 6.6: Cartas de control de EWMA que indican cambios en las ganancias G_{12} , G_{41} y G_{53} .

1. Un cambio tipo rampa positivo del 3% es simulado en la ganancia G_{12} a partir del día 5 al 8.
2. Un cambio tipo rampa positivo del 3% es simulado en la ganancia G_{41} a partir del día 10 al 13.
3. Un cambio tipo rampa negativo del 5% es simulado en la ganancia G_{53} a partir del día 5 al 8.

La Figura [6.6](#) muestra las 15 estimaciones de ganancias a lo largo de 25 días; las gráficas dejan ver claramente cómo los EWMA correspondientes a las ganancias perturbadas salen de sus límites de control. En general, EWMA funciona bien en la práctica cuando $0,05 \leq \lambda \leq 0,3$, en estas aplicaciones la sensibilidad que se observa es obtenida adoptando λ igual a 0,3.

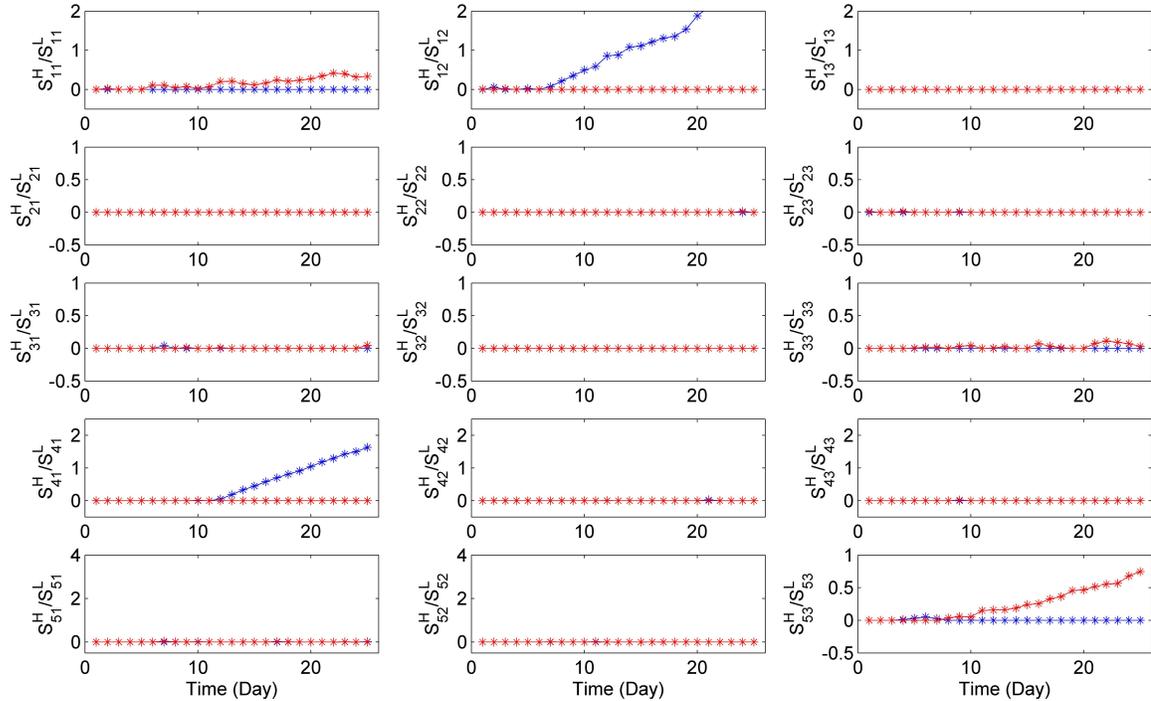


Figura 6.7: Cartas de control CUSUM mostrando los cambios de las ganancias G_{12} , G_{41} y G_{53} . $S_{ji}^H(t)$ (azul) y $S_{ji}^L(t)$ (rojo).

6.3.7. Resultados obtenidos mediante CUSUM

Un análisis numérico similar se realiza usando CUSUM individuales. Los resultados de aplicar CUSUM se presentan en la Figura [6.7](#), en la que son graficadas a lo largo de 25 días definidos por el tiempo total de simulación. Para obtener una buena sensibilidad, los valores de b_{ji} son fijados a 0.05. Aunque no se utilice el límite de control h en las gráficas, como en las aplicaciones tradicionales (Page [58](#)), es evidente que se logran los objetivos de detección y localización de las ganancias que sufrieron modificaciones (ver las gráficas correspondientes a las ganancias G_{12} , G_{41} y G_{53}). Además, si los cambios son permanentes, la importancia o amplitud del corrimiento de la ganancia puede ser cuantificado a partir de la pendiente representada por la señal de detección (Lucas [47](#)).

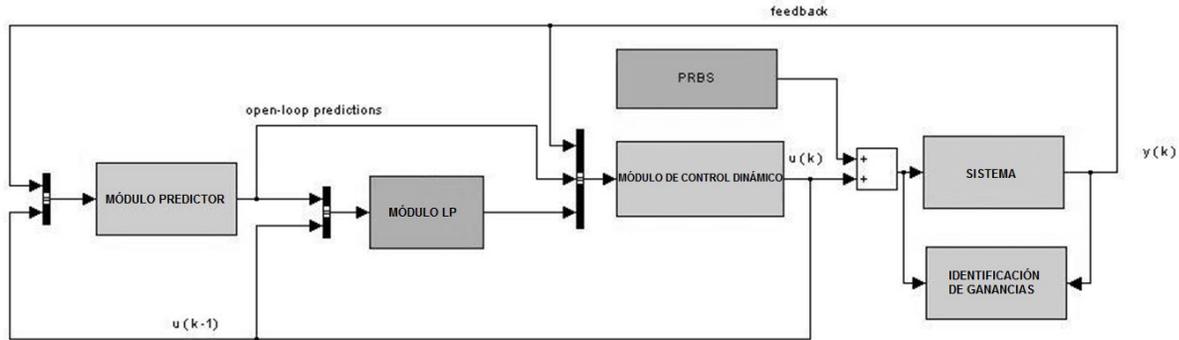


Figura 6.8: Estructura de control LP-MPC.

6.4. Estimación de ganancias estacionarias a lazo cerrado

En esta sección, una estrategia de identificación a lazo cerrado es desarrollada con el objetivo de estimar las ganancias de un proceso multivariable directamente de datos en línea. La estructura de control adoptada para evaluar la estrategia propuesta es una estructura de control LP-MPC, usada habitualmente en aplicaciones industriales. Como se observa en la Figura [6.8](#), la estructura de control esta dada por un módulo predictor, un módulo de programación lineal donde se calculan los valores deseados de las variables controladas y manipuladas en un futuro estacionario, y un módulo de control dinámico (DCM) que calcula las acciones de control que deben ser aplicadas directamente a la planta o que son enviadas a controladores de nivel inferior (P, PI, PID, etc.). De la misma manera que se implementaron las estimaciones de ganancias a lazo abierto en las secciones anteriores, en esta sección el esquema de identificación a lazo cerrado también se basa en el método de subespacios. A diferencia del caso anterior, en donde la señal de excitación necesaria para mover los modos del sistema es introducida directamente en las manipuladas, en el caso de lazo cerrado la excitación se logra sumando una señal de excitación persistente a la señal calculada por el módulo DMC (Ver Figura [6.8](#)).

6.4.1. Estructura de control

Como se mencionó en la sección anterior, la estructura de control adoptada para evaluar la estrategia propuesta es una estructura de control LP-MPC, ver Figura 6.8. En ella se pueden observar tres partes principales: módulo predictor, módulo de programación lineal estacionaria y módulo de control dinámico (DMC). El primer módulo calcula, mediante un modelo lineal, predicciones dinámicas y estacionarias para un horizonte dado. El segundo es un módulo de optimización que calcula los "targets" de las variables manipuladas y controladas en el futuro estado estacionario, las cuales deben alcanzarse para maximizar los beneficios económicos. Para lograr este objetivo, el módulo LP resuelve en cada período de tiempo un problema de programación lineal con la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \underset{y_t, u_t}{\text{mín}} (\alpha y_t + \beta u_t) \\
 \text{s.a.} \quad & y_t = Gu_t + d_t \\
 & u_{\text{mín}} \leq u_t \leq u_{\text{máx}} \\
 & y_{\text{mín}} \leq y_t \leq y_{\text{máx}}
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

donde u_t y y_t son los targets o set-points estacionarios de las manipuladas y controladas a ser determinadas por el problema LP. Los vectores $\alpha \leq 0$ y $\beta \geq 0$ representan el beneficio de las variables controladas y el costo de mover las variables manipuladas respectivamente. Nótese que en este problema estacionario, las variables manipuladas y controladas están relacionadas con la ganancia del modelo G y la perturbación d_t (primera restricción). Además, ambas, las variables manipuladas y las controladas, tienen restricciones definidas mediante límites inferiores y superiores. Dada la primera restricción, el problema LP puede ser reescrito de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \underset{u_t}{\text{mín}} (\alpha G + \beta) u_t + d_t \\
 \text{s.a.} \quad & u_{\text{mín}} \leq u_t \leq u_{\text{máx}} \\
 & y_{\text{mín}} \leq Gu_t + d_t \leq y_{\text{máx}}
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

donde se puede observar que tanto la función objetivo como las restricciones dependen de la ganancia del modelo G .

Por último, el tercer módulo tiene como función guiar en forma dinámica las variables del proceso a los targets calculados por el módulo LP. Este módulo resuelve

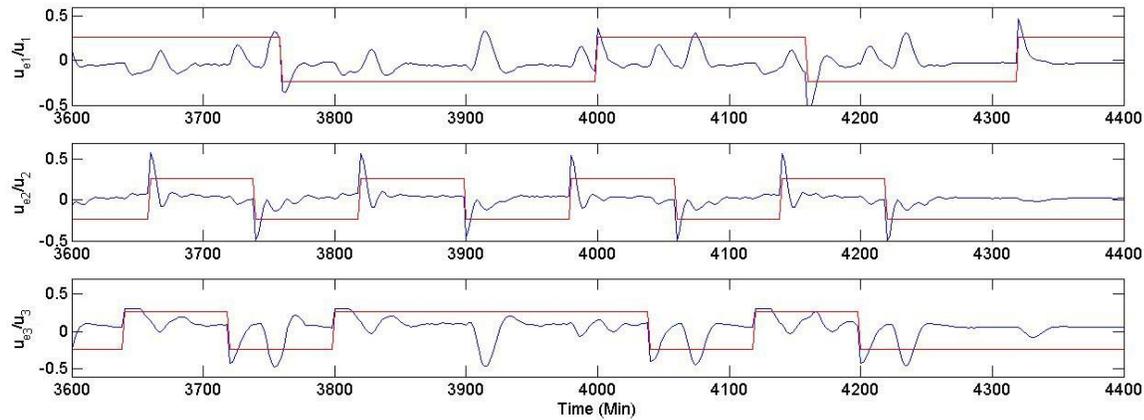


Figura 6.9: PRBS y manipulada utilizadas para excitar el sistema en LC.

en línea un problema de optimización con restricciones, con el objetivo de minimizar la distancia a la condición objetivo. El principal objetivo de esta sección es mostrar la importancia del módulo LP en la estructura completa. Notar que no hay otro módulo donde se consideren las restricciones de las variables, y además, este es el módulo que determina el beneficio económico de toda la operación del proceso.

6.4.2. Resultados de la simulación en lazo cerrado

Para realizar el análisis del lazo cerrado se asume que el orden del proceso es el adoptado en el que utiliza el MPC. El método de estimación de ganancias en este caso es evaluado mediante simulación numérica de una planta o proceso representada por el sistema LTI 5×3 definido en la Tabla [6.2](#). Al igual que la mayoría de los procesos de identificación, la experiencia comienza introduciendo una señal de excitación PRBS en las variables manipuladas como se muestra en la Figura [6.8](#). Con el fin de obtener señales con típicas condiciones de sistemas reales, se suma a las variables controladas, ruido Gaussiano con media cero y desvío estándar igual a 0.1. En la Figura [6.9](#) se muestra la señal PRBS junto con la señal de excitación del sistema. Igual que en el caso anterior, dos secuencias de datos fueron simulados, el primero asume que el sistema se encuentra estable y sin ninguna perturbación o cambio, y el segundo tiene como objetivo la verificación y demostración de la habilidad de la estrategia para detectar cambios lentos de ganancias en lazo cerrado. La Figura [6.10](#)

$\frac{-0,8}{15s^2+3s+1}$	$\frac{4,7}{10s^2+7,8s+1}$	$\frac{-2,0}{9,14s+1}$
$\frac{1,4}{8s^2+5s+1}$	$\frac{0,8}{10s^2+3s+1}$	0,0
$\frac{1,5}{7,5s+1}$	$\frac{1,9}{6s^2+4s+1}$	$\frac{0,9}{15s^2+10s+1}$
$\frac{4,0}{7,8s+1}$	0,0	$\frac{2,5}{5s+1}$
$\frac{-0,3}{10s^2+4s+1}$	$\frac{5,0}{16s^2+5s+1}$	$\frac{-2,8}{9,8s^2+10s+1}$

Tabla 6.2: Sistema Lineal Multivariable usado para evaluar el método de detección de cambios en Lazo Cerrado

muestra 25 estimaciones de la matriz de ganancia obtenida a partir de 800 minutos de recolección de datos por día. En esta experiencia numérica la ganancia de la planta G_{12} recibe un cambio positivo en rampa del 2% entre los tiempo 6 y 8.5. Además, las ganancias G_{41} y G_{53} tienen un cambio en rampa del 3% positivo y 5% negativo respectivamente entre los tiempo 5 y 7.5 en la escala de números de estimación. Notar que la mayoría de las estimaciones muestran buena precisión, aunque con diferentes patrones de dispersión. En el caso de lazo cerrado las estimaciones pierden precisión durante el periodo de cambio de ganancia (de la estimación 5 a 9 aproximadamente), particularmente en el comienzo de ese periodo, donde dos o tres puntos aparecen bastante lejos del patrón estable de estimaciones. Los resultados de aplicar CUSUM se presentan en la Figura [6.11](#), en donde son graficadas a lo largo de 25 días (25 estimaciones). Una simple inspección en esta figura, muestra 3 señales de incrementos persistentes en el tiempo, los cuales están en completa coincidencia, tanto en posición como en dirección, con los cambios realizados en las ganancias. Los comportamientos decrecientes, como aquellos representados en las estimaciones, son

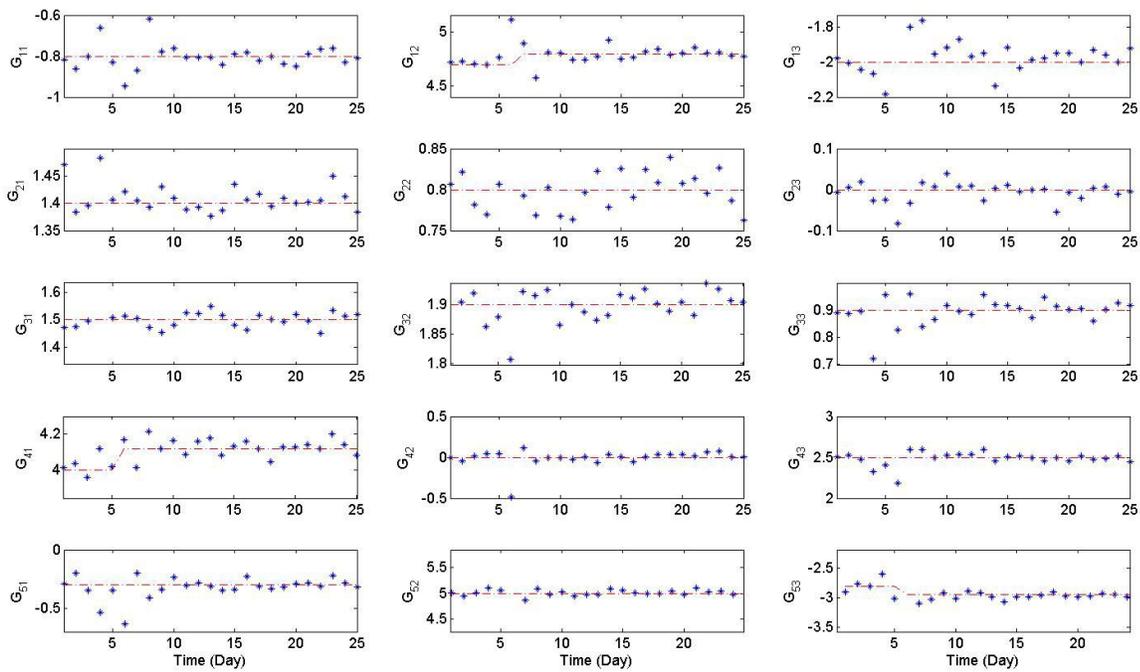


Figura 6.10: Secuencia de estimaciones de las ganancias en LC.

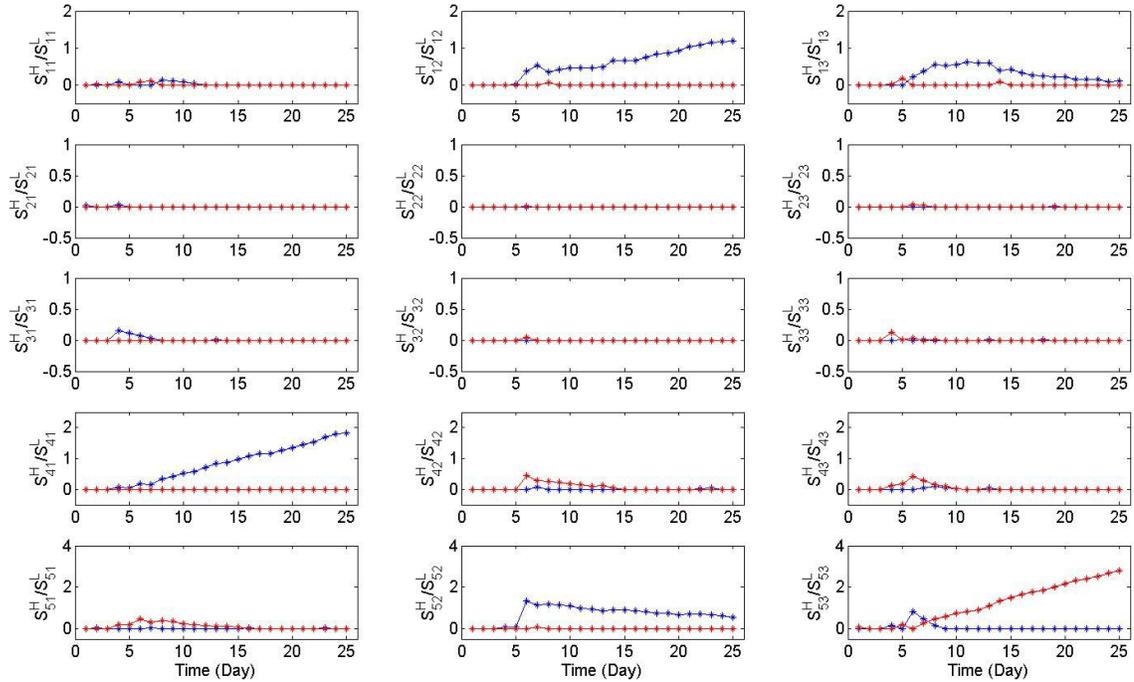


Figura 6.11: Cartas de control CUSUM mostrando los cambios de las ganancias G_{12} , G_{41} y G_{53} en Lazo Cerrado. $S_{ji}^H(t)$ (azul) y $S_{ji}^L(t)$ (rojo).

consecuencias de la perturbación inicial del estimador y la naturaleza interactiva del sistema, pero estos no tienen la característica de responder a cambios permanentes. Un cambio positivo permanente claramente produce una tendencia hacia arriba en mientras que un cambio negativo será representado mediante una tendencia hacia abajo.

6.5. Conclusiones

Estos resultados proveen evidencias de que las ganancias estacionarias de un proceso multivariable bajo estructura de control LP-MPC pueden ser satisfactoriamente estimadas mediante la técnica de identificación por subespacios. Este hecho abre la oportunidad de desarrollar estrategias de monitoreo capaces de detectar cambios de los parámetros más importantes del modelo que es utilizado por el módulo LP cuan-

do determina los targets de control. Esta experiencia también muestra que, por su sensibilidad, el algoritmo CUSUM puede tomarse como una estrategia prometedora para detectar y localizar cambios en las ganancias de los procesos.

Los resultados de este Capítulo fueron presentados en la revista *Chemical Engineering Communications* (2012): **Detecting stationary gain changes in large process systems**, y en los congresos *IMMACA* (2011): **Monitoring steady-state gains in large process systems**, *RPIC* (2011): **Monitoring steady-state gains in large process systems under closed-loop operation** y *AADECA* (2012): **Monitoring process gains used in LP-MPC systems**.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis se presenta una solución al problema que surge en los métodos tradicionales de excitación, que por lo general no tienen en cuenta la estabilidad o alguna clase de estabilidad cuando se está identificando el sistema en lazo cerrado, tanto para identificación de ganancias como modelos dinámicos. Para esto se propone una nueva formulación de MPC que garantiza la excitación persistente cuando el sistema se encuentra dentro de la *región objetivo* además de garantizar la factibilidad recursiva y la estabilidad en lazo cerrado cuando se encuentra fuera del mismo. El concepto principal que permite la fusión de estos objetivos opuestos son los conceptos de *atractividad* de un *conjunto invariante robusto*, dentro del cual la excitación del sistema puede llevarse a cabo. De esta manera el controlador no superpone sus objetivos de identificación y control, ya que dentro de la *región objetivo* no se realiza ninguna acción de control, y fuera de esta no se ingresa al sistema ninguna señal persistente. Para lograr esto, se han utilizado funciones distancia para incorporar a la función costo del MPC. Además, una vez probada teóricamente la convergencia del método en base a conceptos asociados a funciones de Lyapunov (González et al. [21]), este trabajo ha confirmado computacionalmente las propiedades numéricas esperadas. Desde un punto de vista práctico, la principal ventaja del método es que el proceso de identificación puede realizarse en forma de lazo abierto. Esto es debido a que cuando el sistema está dentro de la región objetivo, no hay acción de control que afecte el sistema y por lo tanto no hay feedback que genere la correlación entre la señal de entrada y el ruido de la salida, motivo por el cual métodos de identificación

como el *N4SID*, generan estimaciones de los parámetros del sistema erróneos.

Además, se evaluó el comportamiento del controlador MPC apto para re-identificación sobre un sistema con dinámica no lineal. El sistema que se utilizó fue un reactor de polimerización sobre un punto de operación pre-determinado. En este punto se identificó un sistema lineal y se calculó la región objetivo (invariante) para ver el comportamiento del sistema cuando el reactor se encuentra bajo el modo de re-identificación (caso nominal). En el siguiente experimento se planteó el problema de cambiar el punto de operación de manera que el modelo que utiliza el controlador no es más representativo de la dinámica de la planta (caso con diferencia entre planta y modelo). Los resultados en ambos casos fueron satisfactorios, observándose en las figuras que las trayectorias de los estados no se escapan de las regiones de excitación.

Por último, se presentó un método de identificación de ganancias de estado estacionario basado en el método de identificación de sistemas por subespacios (SID). Las ganancias estacionarias del proceso son parámetros críticos del modelo para la determinación de los targets del MPC, por lo tanto se pueden obtener importantes beneficios económicos si se identifica en forma temprana el alejamiento de estas ganancias con las del modelo identificado para el MPC. Se realizaron simulaciones numéricas que dieron evidencia que las ganancias estacionarias de procesos multivariables pueden ser estimadas con éxito usando el método propuesto. Esto permite el desarrollo de estrategias de monitoreo capaces de detectar cambios de los parámetros más importantes del modelo, en particular, las ganancias estacionarias del módulo LP del controlador predictivo, el cual calcula los targets del óptimo económico. Los experimentos se realizaron tanto en *lazo abierto* como en *lazo cerrado* y mostraron que técnicas sensibles de monitoreo como EWMA o CUSUM, típicamente usadas en problemas de simple variable, pueden considerarse como algoritmos prometedores para la detección y localización de cambios en procesos multivariables.

7.1. Perspectivas de trabajos futuros

A partir de los resultados presentados en esta tesis surgen las siguientes líneas de investigación:

- Incluir en el estudio de los conjuntos la relación entre el conjunto invariante

objetivo y el conjunto de excitación de entrada, de manera de obtener una formulación menos conservadora.

- Extensión del MPC para identificación, de modo de garantizar la invariancia robusta del conjunto objetivo. Este tema no fue tratado con profundidad en el desarrollo de la tesis doctoral y por lo tanto se propone la evaluación del controlador apto para re-identificación para diferentes modelos no nominales. Este análisis puede realizarse mediante incertidumbre paramétrica como perturbación aditiva.
- Otro punto de interés consiste en el estudio y desarrollo de controladores predictivos de un MPC para identificación explícitamente robusto (mediante los conceptos de tubos o incertidumbre paramétrica). En este caso, se trata en forma integral tanto la incertidumbre del modelo de la planta como las restricciones duras del sistema.
- Finalmente, un objetivo interesante de trabajo será la aplicación de dichos controladores a modelos de grades procesos de la industria petrolera o petroquímica, aprovechando las relaciones de trabajo con YPF.

Bibliografía

- [1] M. Asteasuain, A. Bandoni, C. Sarmoria, y A. Brandolin. Simultaneous process and control system design for grade transition in styrene polymerization. *Chem. Eng. Sci.*, 61:3362–3378, 2006.
- [2] K. J. Aström y T. Bohlin. Numerical identification of linear systems for normal operating records. *Proc. 2nd IFAC Symp. Theory of Self-Adaptive Systems*, págs. 96–111, 1965.
- [3] S. L. Ballin. *Controlador preditivo multivariavel com restricoes de excitacao para identificacao de processos em malha fechada*. Universidade de Sao Paulo, 2008.
- [4] A. Bemporad y M. Morari. Robust model predictive control: A survey. *Robustness in Identification and Control*, 245:207–226, 1999.
- [5] F. Blanchini y S. Miani. *Set-Theoretic Method in Control*. Birkhauser, 2008.
- [6] E. F. Camacho y C. Bordons. *Model Predictive Control*. Springer - Verlag, 1999.
- [7] A. Chiuso y G. Picci. Prediction error vs. subspace methods in closed loop identification. En *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*. Kidlington, Oxford, 2005.
- [8] C. T. Chou y M. Verhaegen. Subspace algorithms for the identification of multivariable dynamic errors-in-variables models. *Automatica*, 33:1857–1869, 1997.
- [9] D. W. Clarke, C. Mohtadi, y P. S. Tuffs. Generalized predictive control. part i: The basic algorithms. *Automatica*, 23:137 – 148, 1987.

-
- [10] D. W. Clarke, C. Mohtadi, y P. S. Tuffs. Generalized predictive control. part ii: Extensions and interpretations. *Automatica*, 23:149–160, 1987.
- [11] C. R. Cutler y B. L. Ramaker. *Dynamic matrix control - a computer control algorithm*. Proceedings of Automatic Control Conference, 1980.
- [12] M. L. Darby y M. Nikolaou. MPC: Current practice and challenges. *Control Engineering Practice*, 20:328–342, 2012.
- [13] W. Favoreel, B. De Moor, y P. Van Overschee. Subspace state space system identification for industrial processes. *Journal of Process Control*, 10:149–155, 2000.
- [14] A. Ferramosca, D. Limon, A. H. González, D. Odloak, y E. F. Camacho. MPC for tracking zone regions. *JPC*, 20:506–516, 2010.
- [15] U. Forssell y L. Ljung. Closed-loop identification revisited. *Automatica*, 35:1215–1241, 1999.
- [16] C. E. García y A. M. Morshedi. Quadratic programming solution of dynamic matrix control (QDMC). *Chemical Engineering Communications*, 14:73 – 87, 1978.
- [17] E. Gazi, W. Seider, y L. Ungar. Verification of controllers in the presence of uncertainty: Application to styrene polymerization. *Ind. Eng. Chem.*, 35:2277–2287, 1996.
- [18] H. Genceli y M. Nikolaou. New approach to constrained predictive control with simultaneous model identification. *AIChE Journal*, 42:2857–2868, 1996.
- [19] J. Gertler. *Fault Detection and Diagnosis in Engineering Systems*. CRC Press, 1998.
- [20] A. H. González, E. J. Adam, M. G. Marcovecchio, y D. Odloak. Stable MPC for tracking with maximal domain of attraction. *Journal of Process Control*, 21:573–584, 2011.

-
- [21] A. H. González, A. Ferramosca, G. A. Bustos, J. L. Marchetti, M. Fiacchini, y D. Odloak. Model predictive control suitable for closed-loop re-identification. *Systems and Control Letters*, 69:23–33, 2014.
- [22] A. H. Gonzalez y D. Odloak. A stable MPC with zone control. *Journal of Process Control*, 19:110–122, 2009.
- [23] G. C. Goodwin y R. L. Payne. *Dynamic System Identification. Experiment Design and Data Analysis*. Academic Press, 1st edition, 1977.
- [24] T. Gustafsson. Subspace identification using instrument variable techniques. *Automatica*, 37:2005–2010, 2001.
- [25] T. A. N. Heirung, B. E. Ydstie, y B. Foss. Towards dual MPC. *4th IFAC Nonlinear Model Predictive Control Conference*, 4:502–507, 2012.
- [26] P. Hidalgo y C. Brosilow. Nonlinear model predictive control of styrene polymerization at unstable operating points. *Comp. Chem. Eng.*, 14:481–494, 1990.
- [27] B. L. Ho y R. E. Kalman. Effective construction of linear state-variable models from input/output functions. *Regelungstechnik*, 14:545–548, 1966.
- [28] B. Huang, S. X. Ding, y S. J. Qin. Closed-loop subspace identification: an orthogonal projection approach. *Journal of Process Control*, 24:53 – 66, 2005.
- [29] B. Huang y R. Kadali. *Dynamic Modeling, Predictive Control and Performance Monitoring*. Springer, 2008.
- [30] R. Jaisinghani y W. Ray. On the dynamic behaviour of a class of homogeneous continuous stirred tank polymerization reactor. *Chem. Eng. Sci.*, 32:811–825, 1977.
- [31] M. Jansson. Subspace identification and arx modelling. *IFAC*, 13:27–29, 2003.
- [32] T. Katayama. *Subspace methods for system identification*. Springer, 2005.
- [33] T. Kendi y F. Doyle. Nonlinear internal model control for systems with measured disturbances and input constraints. *Ind. Eng. Chem.*, 37:489 – 505, 1998.

-
- [34] E. C. Kerrigan. *Robust Constraint Satisfaction: Invariant Sets and Predictive Control*. Tesis Doctoral, University of Cambridge, 2000.
- [35] E. De Klerk y I. K. Craig. Multivariable closed-loop system identification of plants under model predictive control. En *Proceedings of the 13th IFAC System Identification*. Rotterdam, The Netherlands, 2003.
- [36] I. Kolmanovsky y E. G. Gilbert. Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems. *Mathematical Problems in Engineering: Theory, Methods and Applications*, 4:317–367, 1998.
- [37] W. H. Kwon y A. E. Pearson. A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system. *Automatica*, 22:838 – 842, 1977.
- [38] C. A. Larsson, M. Annergren, y H. Hjalmarsson. On optimal input design in system identification for model predictive control. *Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 50:805–810, 2011.
- [39] C. A. Larsson, C. R. Rojas, y H. Hjalmarsson. MPC oriented experiment design. *IFAC*, 18:9966–9971, 2011.
- [40] E. B. Lee y L. Markus. *Foundations of optimal control theory*. Wiley, 1967.
- [41] D. Limon. *Control Predictivo de sistemas no lineales con restricciones: estabilidad y robustez*. Universidad de Sevilla, 2002.
- [42] M. Limon, T. Alamo, y E.F. Camacho. Stability analysis of systems with bounded additive uncertainties based on invariant sets: Stability and feasibility of MPC. *American Control Conference*, 1:364–369, 2002.
- [43] W. Lin, S. J. Qin, y L. Ljung. Comparison of subspace identification action methods for systems operating on closed-loop. En *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*. Kidlington, Oxford, 2005.
- [44] W. Lin, S. J. Qin, y L. Ljung. *A Framework for Closed-loop Subspace Identification with Innovation Estimation*, 2007.
- [45] L. Ljung. *System Identification: Theory for the User*. Pearson Education, 1999.

-
- [46] L. Ljung y T. McKelvey. Subspace identification from closed loop data. *Signal Processing*, 52:209–215, 1996.
- [47] J. M. Lucas. Combined shewhart-CUSUM quality control scheme. *Journal of Quality Technology*, 14:51–59, 1982.
- [48] B. Maner, F. Doyle III, B. Ogunnaike, y R. Pearson. Nonlinear model predictive control of a simulated multivariable polymerization reactor using second-order volterra models. *Automatica*, 32:1285 – 1301, 1996.
- [49] G. Marafioti. *Enhanced Model Predictive Control: Dual Control Approach and State Estimation Issues*. Tesis Doctoral, Norwegian University of Science and Technology, 2010.
- [50] G. Marafioti, R. R Bitmead, y M. Hovd. Persistently exciting model predictive control using fir models. En *International Conference CYBERNETICS AND INFORMATICS*. Slovak Republic, 2010.
- [51] P. Marquis y J. P. Broustail. *SMOC, a bridge between state space and model predictive controllers: application to the automation of a hydrotreating unit*. Proceedings of the IFAC Workshop on model based predictive control, 1988.
- [52] D. C. Montgomery. *Introduction to Statistical Quality Control*. John Wiley and Sons, 2009.
- [53] A. Nikandrov y C.L.E. Swartz. Sensitivity analysis of LP-MPC cascade control systems, journal of process control. *Journal of Process Control*, 19:16–24, 2009.
- [54] P. Van Overschee y B. De Moor. Closed loop subspace system identification. En *Proceedings of the 36th IEEE Conference*. 1197.
- [55] P. Van Overschee y B. De Moor. *Subspace Identification for linear systems: theory, implementation, applications*. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [56] P. Van Overschee y B. De Moor. *Subspace Identification for linear systems: theory, implementation, applications*. Kluwer Academic Publishers, 1996.

-
- [57] P. Van Overschee y B. De Moor. Closed loop subspace identification. En *Proceedings of the 66th IEEE Control and Decision Conference*. San Diego, 1997.
- [58] E. S. Page. Continuous inspection schemes. *Biometrika*, 41:239–250, 1954.
- [59] V. Prasad, M. Schley, L. Russo, y B. Bequette. Product property and production rate control of styrene polymerization. *J. Process Control*, 12:353–372, 2002.
- [60] A. I. Propoi. Use of linear programming methods for synthesizing sampled-data automatic systems. *Automation and Remote Control*, 24:837 – 844, 1963.
- [61] S.J. Qin y T.A. Badgwell. A survey of industrial model predictive control technology. *Journal of Process Control*, 11:733–764, 2003.
- [62] S. V. Rakovic y M Lazar. Minkowski terminal cost function for MPC. 48:2721–2725, 2012.
- [63] J. B. Rawlings y D. Q. Mayne. *Model Predictive Control: Theory and Design*. Nob-Hill Publishing, 1st edition, 2009.
- [64] J. Richalet, A. Rault, J. L. Testud, y J. Papon. Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. *Automatica*, 14:413 – 428, 1978.
- [65] S. W. Roberts. Control charts based on geometric moving averages. *Technometrics*, 1:100–114, 1959.
- [66] M. A. Rodrigues y D. Odloak. Output feedback MPC with guaranteed robust stability. *Journal of Process Control*, 10:557–572, 2000.
- [67] T. Soderstrom y P. Stoica. *System Identification*. Prentice Hall, 1st edition, 1989.
- [68] O. Sotomayor, D. Odloak, y R. Giudici. Diagnosis of abnormal situations in a continuous solution polymerization reactor. *Macromolecular Theory and Simulation*, 16:247–261, 2007.
- [69] O. Sotomayor, D. Odloak, y L. Moro. Closed-loop model re-identification of processes under MPC with zone control. *Control Engineering Practice*, 17:551 – 563, 2009.

-
- [70] M. Verhaegen. Application of a subspace model identification technique to identify LTI systems operating in closed-loop. *Automatica*, 29:1027–1040, 1993.
- [71] B. Wahlberg, M. Jansson, T. Matsko, y M. A. Molander. Experiences from subspace system identification - comments from process industry users and researchers. En A. Chiuso, ed., *Modeling, Estimation and Control*. Springer-Verlag, 2007.
- [72] J. Wang y J. Qin. A new subspace identification approach based on principal component analysis. *Journal of Process Control*, 12:841–855, 2002.
- [73] C.M. Ying y B. Joseph. Performance and stability analysis of LP-MPC and QPMPC cascade control systems. *AIChE*, 45:1521–1534, 1999.
- [74] Z. Q. Zheng y M. Morari. Robust stability of constrained model predictive control. *American Control Conference*, 1:379–383, 1993.
- [75] Y. Zhu. *Multivariable System Identification For Process Control*. Elsevier, 2001.
- [76] Y. Zhu y F. Butoyi. Case studies on closed-loop identification for MPC. *Control Engineering Practice*, 10:403–417, 2002.