XX Encuentro de Jóvenes Investigadores
de la Universidad Nacional del Litoral
18 y 19 de Octubre de 2016

EL MÉTODO DE LEBESGUE BESENYEI SOBRE ANTIDERIVADAS EN EL CONTEXTO DE LOS ESPACIOS DE BANACH

Salazar, María Gracia y Zurschmitten, Carolina

Adscriptas en Investigación. Facultad de Humanidades y Ciencias. UNL

Área: Ciencias Exactas
Sub-Área: Matemática
Grupo: X

Palabras clave: continuidad, antiderivadas, espacios de Banach

INTRODUCCIÓN

Ante el problema de encontrar una función $F(x)$ la cual admita como derivada a una función $f(x)$ dada ($F'(x) = f(x)$), sabemos que una respuesta la encontramos en el siguiente teorema

Si $f: [a, b] \to R$ continua, entonces *f* admite antiderivada.

La forma tradicional de demostrar la existencia de antiderivadas de funciones continuas es a través del concepto de integral indefinida. En efecto, este resultado puede obtenerse como una consecuencia del Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral. Es conocido dentro del contexto de la integral de Riemann que

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$$

vale en todos los puntos de continuidad de f en $[a, b]$ siempre que f sea integrable Riemann en $[a, b]$. En el mundo de Lebesgue, este teorema es mucho mejor ya que vale en casi todo $x \in [a, b]$ (casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue) para cualquier función integrable Lebesgue f. Es de destacar que una función arbitraria integrable Lebesgue puede no tener ningún punto de continuidad, y aún el teorema vale en casi todo punto para la integral de Lebesgue.

Ya que el enunciado del teorema no involucra el concepto de integral, es natural preguntarse si el teorema puede ser probado sin usar la teoría de integración. Fue precisamente Henri Lebesgue (1904) quien dio una prueba alternativa en esta dirección. El método de Lebesgue está basado en las aproximaciones de funciones continuas por funciones lineales a trozos. La existencia de antiderivadas para estos tipos especiales de funciones es inmediata. Cabe destacar que este enfoque también da una prueba de una desigualdad del tipo valor medio y la convergencia uniforme de las antiderivadas de sucesiones de funciones continuas uniformemente convergentes.

Ambos enfoques hacen uso de un teorema de Heine el cual establece que las funciones continuas en intervalos cerrados y acotados son uniformemente continuas. En el abordaje que usa integral, este resultado sirve para mostrar que las funciones continuas son integrables sobre intervalos cerrados y acotados. En la propuesta de Lebesgue, el resultado mencionado proporciona la convergencia de la aproximación de funciones continuas por funciones lineales a trozos, sin requerir las nociones de supremo, ínfimo y oscilación.

Besenyei (2013) usa las ideas de Lebesgue y logra probar el resultado sin hacer uso ni de integrales ni del Teorema del Valor Medio.

Proyecto: CAI+D 50320160200221LI UNL **Director:** Bibiana Iaffei
Adscripta M. G. Salazar. Director Bibiana Iaffei **Codirector:** Marilina Carena
Adscripta C. Zurschmitten. Director Bibiana Iaffei **Codirector:** Marisa Toschi

El propósito de este trabajo es usar el método de Lebesgue (1904) reformulado por Besenyei (2013) en el contexto de los espacios de Banach.

OBJETIVOS

- Identificar las herramientas necesarias del cálculo diferencial en espacios de Banach de dimensión arbitraria para implementar el método de Lesbegue-Besenyei para probar la existencia de antiderivadas de operadores continuos.
- Describir el método de Lesbegue-Besenyei para probar la existencia de antiderivadas de operadores continuos en el contexto de los espacios de Banach de dimensión arbitraria.
- Estudiar las versiones particulares para espacios de Banach clásicos: $C([0,1])$, ℓ_2, $C'([0,1])$, entre otros.

METODOLOGÍA

La metodología fue principalmente de tipo exploratorio, puesto que hubo que familiarizarse con conceptos que eran desconocidos, ya que no integran el plan de estudio del Profesorado en Matemática. Se diseñó un plan para alcanzar una visión general de la diferenciación en espacios de Banach desde un punto de vista aproximativo. Asimismo, la metodología también fue de tipo descriptivo si se tiene en cuenta que se identificaron las herramientas del cálculo diferencial y las nociones de convergencia presentes en el método de Lebesgue-Besenyei.
Lo primero que se requirió fue investigar el concepto de diferenciabilidad cuando $[a,b]$ y R se sustituyen respectivamente por X y Y espacios de Banach. Vimos entre otros en Jost (2005) que hay dos posibles generalizaciones de la derivada, igual que en el cálculo de varias variables: la diferencial, y la derivada direccional. La diferenciabilidad (derivada de Frechet), es un concepto más fuerte, ya que implica la existencia de derivadas direccionales, mientras que el concepto de derivada direccional (derivada de Gateaux) es más débil, y se necesitan condiciones auxiliares para garantizar la diferenciabilidad.
El esquema del método de Lebesgue-Besenyei que debimos reproducir en el contexto de los espacios de Banach, sigue los siguientes pasos:
1) Mostrar la existencia de antiderivadas para la clase de funciones continuas lineales a trozos.
2) Usar un lema que provee una desigualdad para funciones cuadráticas a trozos.
3) Probar el caso general usando aproximación de una función continua por funciones continuas lineales a trozos.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Besenyei, Ádám, 2013. Lebesgue's road to antiderivatives. Math. Mag. 86, no. 4, 255-260.

Jost, Jürgen, 2005. Postmodern analysis. Third edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. xvi+371 pp. ISBN: 978-3-540-25830-8; 3-540-25830-2.

Lebesgue, Henri Leon, 1904. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Gauthier-Villars, París.