

DESIGUALDAD MATEMÁTICA: DISEÑO DE UN INSTRUMENTO

Micaela Mazzola

Facultad de Humanidades y Ciencias, UNL

Área: Humanidades

Sub-Área: Ciencias de la Educación

Grupo: X

Palabras clave: Desigualdad matemática, Objeto Mental, Fenómenos que organiza.

INTRODUCCIÓN

En el trabajo de tesis, titulado “Rupturas en el tratamiento de las desigualdades matemáticas”, Bernardis (2015) describe una investigación realizada con ingresantes de la carrera de Profesorado en Matemática. En la misma detecta fenómenos matemáticos que son organizados por el concepto de desigualdad y describe las características del *objeto mental desigualdad* construido por los estudiantes mencionados.

En base a dicha tesis y bajo la idea de que este objeto mental se va reelaborando y complejizando a lo largo de la historia académica del estudiante, diseñamos una investigación cualitativa bajo la modalidad de estudio de caso, focalizando ahora la investigación en el análisis de las producciones de los estudiantes que se encuentran en el segundo ciclo de la carrera Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional del Litoral.

En una primera etapa realizamos un análisis de la bibliografía de base de las asignaturas del primer ciclo de la carrera. Las desigualdades matemáticas son utilizadas por los estudiantes desde la perspectiva de cada una de las áreas de la carrera (análisis, álgebra, geometría, etc.).

A partir de esto, el objetivo de nuestra investigación es caracterizar el *objeto mental desigualdad* elaborado por los estudiantes mencionados y analizar su influencia en el tipo de abordaje de problemas en los que están involucradas las desigualdades.

En esta comunicación nos centramos en la segunda parte del objetivo. Presentamos algunos aspectos relevantes del proceso seguido para el análisis de un problema, como parte del diseño de un cuestionario que será implementado a los sujetos de estudio.

MARCO TEÓRICO

Siguiendo las ideas de Freudenthal (1983), los objetos matemáticos surgen en la práctica matemática como medios de organización de los fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas es decir, de los objetos de nuestra experiencia matemática con el mundo real, físico, cotidiano. Bernardis (2015) identifica tres fenómenos matemáticos para los cuales la desigualdad es un medio de organización: ordenación, especificación y generalización.

Comenta la autora que el fenómeno de ordenación está presente en la necesidad de comparar y ordenar, es decir, la desigualdad como una relación que cumple con ciertas propiedades (tricotomía y transitividad). El de generalización, se presenta en la necesidad de demostrar la validez de una propiedad que es cierta para todos los valores posibles de la variable. Por último, el de especificación se presenta en la Proyecto CAID “La construcción del sentido en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática”.

Director del proyecto: Sara Scaglia.

Director del becario: Silvia Bernardis; Co-Director del becario: Liliana Nitti

búsqueda del(los) valor(es) que verifican la condición de desigualdad.

Freudenthal desarrolla la idea de “constitución de objetos mentales” en contraposición a la “adquisición de conceptos”. Con esta contraposición se pretende dar cuenta “de la diferencia y la relación entre cómo concibe una persona concreta un concepto matemático y el concepto social, cultural e históricamente establecido en las matemáticas” (Puig, 2012).

Ambos se constituyen como medios de organización de fenómenos: como los conceptos matemáticos son medios de organización de fenómenos para una cultura, los objetos mentales son medios de organización de fenómenos para una persona concreta, elaborados a través de sus experiencias. El objeto mental está bien constituido si puede organizar todos los fenómenos correspondientes esto es, si son capaces de dotar de significado de forma afortunada todas las situaciones en que hayan de usar ese concepto matemático.

Siguiendo a Douady (1986) un concepto matemático puede intervenir en distintos marcos. Un marco está constituido de objetos de una rama de la matemática, de las relaciones entre éstos, de formulaciones diversas y de las imágenes mentales asociadas a esos objetos y a esas relaciones. Al incluir las imágenes mentales en la definición de marco se está atribuyendo a dicha noción una dimensión individual, y en cierta medida, una relatividad personal del significado de los objetos matemáticos.

Según Bernardis (2015) los fenómenos organizados por la desigualdad pueden ser expresados en diferentes marcos: algebraico, geométrico y funcional. En cada uno de los marcos los fenómenos toman significados distintos que permiten dar cuenta del objeto mental.

METODOLOGÍA

Entre los métodos de recolección de datos utilizamos un cuestionario con el objetivo de recolectar información sobre la influencia de los *objetos mentales* elaborados por los estudiantes en el tipo de abordaje de problemas en los que están involucradas las desigualdades.

Para el diseño de dicho instrumento seleccionamos una lista de problemas teniendo en cuenta por un lado, que se involucren con cada uno de los fenómenos que organiza el concepto de desigualdad; por el otro, que la resolución de los problemas pueda ser abordada en cada uno de los marcos.

El tratamiento seguido para el estudio de los problemas seleccionados es el siguiente:

- Interpretación del enunciado original.
- Reformulación de las condiciones o datos iniciales.
- Resolución del problema reformulado desde los distintos marcos.

ANÁLISIS PREVIO DEL PROBLEMA

De la lista de problemas, seleccionamos dos para que conformen el cuestionario. A continuación mostramos el análisis realizado de uno de ellos dos:

Problema original

Para un producto determinado, ¿cuándo la suma de dos números positivos es mínima? (Nelsen, 1993, p.52)

Atendiendo a nuestro objetivo tomamos las siguientes decisiones:

- darle el valor 1 (uno) al producto para evitar complejidad en cuestiones que no hacen a nuestro objetivo,
- enunciarlo de forma más sencilla,

- formular cada ítem para que responda a uno de los fenómenos: (a) ordenación, (b) generalización y (c) especificación.

Problema reformulado

Si el producto entre dos números reales positivos es igual a 1,

(a) ¿Qué valores puede tomar la suma entre estos dos números?

(b) Justifica la validez de lo afirmado en (a)

(c) ¿Para qué números cuyo producto es igual a 1, su suma es menor que 3?

A continuación, presentamos la resolución del ítem (b) del problema, que corresponde al fenómeno de generalización. Si bien las respuestas esperadas de los estudiantes podrán combinar los distintos marcos, mostramos las resoluciones para cada marco.

Resolución del problema reformulado

A partir del ítem (a) esperamos que mediante una exploración previa los estudiantes establezcan la siguiente conjetura: *Si el producto entre dos números positivos es igual a 1, la suma entre ambos números puede tomar valores mayores o iguales a 2.*

A partir de ello, deberán justificar la validez de la desigualdad formulada.

Marco algebraico: en este marco la validez de una desigualdad se establece por medio de una demostración analítica, centrada en la manipulación algebraica usando propiedades de los objetos y sus relaciones dentro de la estructura algebraica.

En este problema, si x, y son números reales positivos con $x \cdot y = 1$, entonces $y = 1/x$. La suma entre estos dos números viene dada por:

$$x + y = x + \frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \geq 2$$

Otra forma de resolución en este marco es utilizando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica: Sean x, y números reales positivos tales que $x \cdot y = 1$; la suma entre x e y viene dada por:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{1} = 2$$

Marco geométrico: en este marco la validez de una desigualdad se establece mediante la representación de un número positivo como el área o el volumen de un objeto. Las construcciones y las propiedades de los objetos geométricos respaldan las comparaciones. En este problema, a partir de la **Figura 1**,

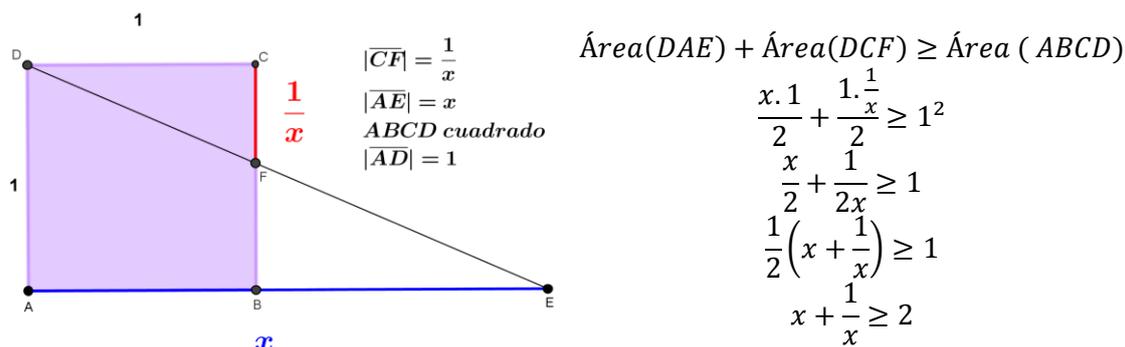


Figura 1: Problema en el marco geométrico

Marco Funcional: considerando que cada miembro de una desigualdad puede ser visto como una función de x , las gráficas de las funciones involucradas otorgan un elemento de visualización de la situación.

En la **Figura 2**, tenemos la gráfica de una rama de la hipérbola rectangular $f(x) = \frac{1}{x}$ y la recta tangente $g(x) = 2 - x$ a la hipérbola en el punto $(1, 1)$. Como la gráfica de la

hipérbola es convexa, coincide o está por encima de la recta tangente para $x > 0$. Por tanto, para cualquier valor de x positivo, la suma de cualquier número positivo y su recíproco es de al menos 2.

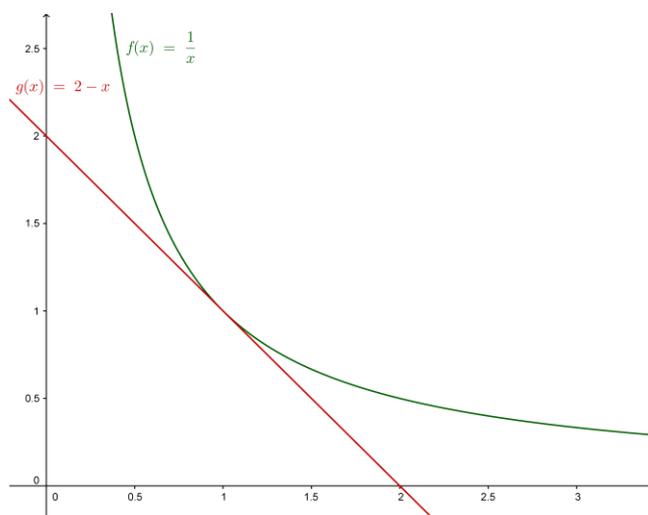


Figura 2: Problema en el marco funcional

CONSIDERACIONES FINALES

Actualmente nos encontramos en el proceso de implementar el cuestionario. Luego, nos abocaremos a la tarea de analizar sus respuestas y a categorizarlas en función del marco teórico.

Consideramos que la resolución presentada nos permite dar sentido al propósito de establecer relaciones entre el objeto matemático desigualdad y el fenómeno de generalización.

Estas relaciones entre objeto y fenómenos las encontraremos expresadas por parte de los estudiantes a la hora de abordar la tarea, en las destrezas, los razonamientos y las estrategias que ellos deben desarrollar para identificar la situación matemática que corresponde al problema que se refiere a un fenómeno. A fin de expresar ese fenómeno en términos de uno o más marcos, resolver el problema o interpretar el fenómeno dentro de esos marcos, traducir la solución o la interpretación en términos del fenómeno y verificar esa solución o interpretación. Estas cuestiones nos darán evidencias del tipo de condicionamientos para abordar los problemas de acuerdo a las características del objeto mental construido por los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Bernardis, S., 2015. *Rupturas en el tratamiento de desigualdades matemáticas*. (tesis de maestría no publicada). Facultad de Humanidades y Ciencias (UNL). Santa Fe.

Douady, R., 1986. Jeux de cadres et dialectique outil objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.

Freudenthal, H., 1983. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Nelsen, R., 1993. *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. Washington: The Mathematical Association of America.

Puig, L., 2012. Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (Anexo, pp. 1 - 20). Jaén: SEIEM