

UN ENFOQUE ESTADÍSTICO PARA LA DETECCIÓN DE OBJETOS FOCALES EN UN PROBLEMA INVERSO DE RESTAURACIÓN DE IMÁGENES

María Josefina Carrió^A

^ADepartamento de Matemática, Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas, UNL

Área: Ciencias Exactas

Sub-Área: Matemática

Grupo: Y

Palabras clave: Problemas inversos, Estimación Bayesiana, Deconvolución

INTRODUCCIÓN

Desde el punto de vista de la teoría de inversión estadística, la solución de un problema inverso es una distribución de probabilidades que puede utilizarse para obtener estimaciones de la variable de interés. Esta distribución, denominada distribución de probabilidades *a-posteriori*, describe el grado de conocimiento de la variable después de que la información contenida en los datos ha sido procesada.

A lo largo de este trabajo se supone que las variables aleatorias involucradas en los distintos modelos son absolutamente continuas y, por ende, su distribución de probabilidades se representa por medio de una función de densidad. El modelo general considerado es de la forma $Y = h(X, E)$, donde X es la variable de interés (incógnita); h la función asociada al modelo; Y la variable observable (dato) y E , el error cometido en las mediciones del dato.

Desde el punto de vista Bayesiano, un problema inverso se expresa de la siguiente manera: *dada una observación y_{obs} de Y con $\pi(y_{obs}) > 0$, hallar la distribución de probabilidad condicional $\pi(x|Y = y_{obs})$ de la variable X .* Esta distribución se puede determinar utilizando el Teorema de Bayes (Kaipio J., Somersalo E., 2005) del cual se sigue que

$$\pi_{post}(x) \doteq \pi(x|Y = y_{obs}) = \frac{\pi_{pr}(x)\pi(y_{obs}|x)}{\pi(y_{obs})} \propto \pi_{pr}(x)\pi(y_{obs}|x).$$

Luego, la resolución de un problema inverso desde este punto de vista requiere llevar a cabo las siguientes tareas: **1)** hallar una distribución *a-priori* $\pi_{pr}(x)$ que refleje la información disponible (o el comportamiento esperado) de X ; **2)** hallar la función de verosimilitud $\pi(y|x)$; **3)** desarrollar métodos para explorar la distribución *a-posteriori*.

Desde un punto de vista práctico, la solución de un problema inverso como una distribución de probabilidad no resulta útil. En general, se pretende hallar estimadores puntuales de X . Entre los más utilizados se encuentran el estimador *máximo a-posteriori*, x_{MAP} , definido como $x_{MAP} \doteq \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} \pi(x|y)$, y la *media condicional*, x_{CM} , dada por $x_{CM} \doteq E(x|y) = \int x \pi(x|y) dx$ (siempre que el máximo exista y la integral converja).

OBJETIVOS

El principal objetivo de este trabajo es detectar objetos focales en un problema inverso de restauración de imágenes, a partir del enfoque estadístico Bayesiano.

DETECCIÓN DE OBJETOS FOCALES EN IMÁGENES

En este trabajo se presenta un problema inverso de restauración de imágenes. Un modelo matemático muy general para el proceso de degradación de imágenes (problema directo) está dado por la siguiente ecuación integral

$$y(s, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_h\sigma_v} \int_0^1 \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{s-s'}{\sigma_h}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{t-t'}{\sigma_v}\right)^2\right) x(s', t') dt' ds',$$

donde x e y son las imágenes original y degradada (continuas) y las desviaciones estándar σ_h y σ_v caracterizan la degradación en la dirección horizontal y vertical, respectivamente. La discretización de este modelo, con ruido aditivo \tilde{e} , resulta en $\tilde{y} = A\tilde{x} + \tilde{e}$, donde la matriz A de orden $n^2 \times n^2$ está asociada a la discretización del núcleo, siendo la imagen original de tamaño $n \times n$. Luego, la versión estocástica del modelo discretizado está dada por $Y = AX + E$ donde $X, Y, E \in \mathbb{R}^{n^2}$ son vectores aleatorios. El objetivo es, entonces, estimar X utilizando su distribución *a-posteriori* construida a partir del dato Y y de la información *a-priori* disponible de la variable incógnita.

En este ejemplo, se supone que la imagen original consta de un fondo negro con algunos objetos focales, como por ejemplo estrellas, cuya ubicación queremos determinar. Si bien el dato puede aportar una sugerencia respecto de la localización, es posible que una región borrosa en el dato contenga más de una fuente focal en la imagen original.

Para resolver este problema consideramos dos posibles distribuciones *a-priori* para X : una prior de impulso y una Gaussiana con hiperparámetro, dando lugar esta última a un hipermodelo (Calvetti D., Somersalo E., 2011).

Caso I: Prior de impulso ℓ^1

Como hemos mencionado anteriormente, la variable de interés X puede contener unos pocos píxeles que se diferencian notablemente del fondo. Para modelar este tipo de variable, se utiliza una prior de impulso ℓ^1 dada por $\pi_{pr}(x) \propto \pi_+(x) \exp(-\gamma\|x\|_1)$, donde $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n^2} |x_j|$, el parámetro $\gamma > 0$ se supone conocido y π_+ es la restricción de positividad, es decir, $\pi_+(x) = 1$ si todas las componentes de x son positivas y cero en otro caso (Kaipio J., Somersalo E., 2005). Por último, se supone que el ruido E es Gaussiano de media cero y matriz de covarianza $\Gamma_e \doteq \sigma_e^2 I_{n^2}$ e independiente de X .

De las densidades de los vectores aleatorios involucrados en el modelo y del Teorema de Bayes se deduce fácilmente la siguiente densidad *a-posteriori* para X

$$\pi_{post}(x) \propto \pi(y|x) \pi_{pr}(x) \propto \pi_+(x) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_e^2}\|y - Ax\|^2 - \gamma\|x\|_1\right) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(x^T Bx - 2x^T q)\right), \quad (1)$$

donde $B = \frac{A^T A}{\sigma_e^2}$ y $q = \frac{A^T}{\sigma_e^2} y - \gamma \mathbf{1}$, con $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$.

Caso II: Hipermodelo con prior Gaussiana

En este caso se considera, para la variable de interés X , una densidad *a-priori* Gaussiana con hiperparámetro $\theta \in \mathbb{R}^{n^2}$ dada por

$$\pi_{pr}(x|\theta) \propto \left(\frac{1}{\theta_1\theta_2\cdots\theta_{n^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n^2}\frac{x_j^2}{\theta_j}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left\|D_{\theta}^{-\frac{1}{2}}x\right\|^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n^2}\log\theta_j\right),$$

donde $D_{\theta} = \text{diag}(\theta_1, \dots, \theta_{n^2})$. Intuitivamente, la varianza θ_j podrá ser grande para un píxel correspondiente a una estrella mientras que será pequeña para un píxel del fondo negro. El parámetro θ se supone con distribución Gamma Inversa de parámetros (α, θ_0) y, nuevamente, para el ruido E se considera una distribución Gaussiana de media cero y matriz de covarianza Γ_e e independiente de X . Finalmente, se obtiene una densidad conjunta dada por

$$\pi(x, \theta, y) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_e^2}\|y - Ax\|^2 - \frac{1}{2}\left\|D_{\theta}^{-\frac{1}{2}}x\right\|^2 - \sum_{j=1}^{n^2}\frac{\theta_0}{\theta_j} - \left(\alpha + \frac{3}{2}\right)\sum_{j=1}^{n^2}\log\theta_j\right). \quad (2)$$

De (2), se deducen fácilmente las distribuciones condicionales $\pi(x|\theta, y)$ y $\pi(\theta|x, y)$, a partir de las cuales se obtienen los estimadores x_{MAP} y θ_{MAP} . Para ello, se utiliza un algoritmo iterativo de manera tal que dada la estimación $(x^{(k)}, \theta^{(k)})$ se obtiene:

Paso 1: $x^{(k+1)} = \arg \max_x \pi(x|\theta^{(k)}, y)$, resolviendo el sistema $\begin{bmatrix} \sigma_e^{-1}A \\ D_{\theta^{(k)}}^{-1/2} \end{bmatrix} x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \sigma_e^{-1}y \\ 0 \end{bmatrix}$;

Paso 2: $\theta^{(k+1)} = \arg \max_{\theta} \pi(\theta|x^{(k+1)}, y)$ dado por $\theta_j^{(k+1)} = \frac{1}{\alpha+3/2}\left(\frac{1}{2}(x_j^{(k+1)})^2 + \theta_0\right)$.

RESULTADOS NUMÉRICOS Y CONCLUSIONES

A continuación se presenta un ejemplo numérico donde consideramos una imagen original de 60×60 píxeles con cuatro fuentes focales. La matriz A del modelo fue obtenida utilizando un núcleo Gaussiano con $\sigma_h = \sigma_v = 2$ y condición de borde reflexiva (Hansen P.C., Nagy J.G., O'Leary D.P., 2006). A su vez, se consideró el ruido E con distribución $N(0, \sigma_e^2 I_{n^2})$ donde $\sigma_e = 0.01\|\tilde{y}\|_{\infty}$. En la **Figura 1** se muestran las imágenes original y borrosa con ruido.

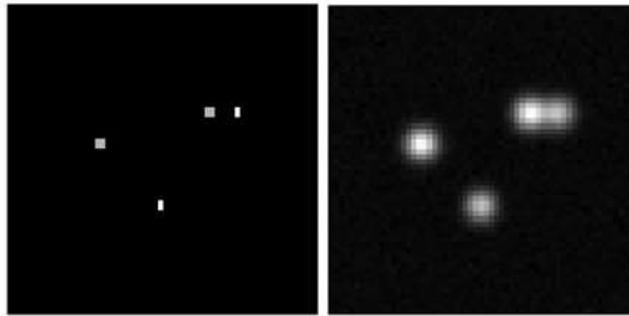


Figura 1: imagen original (izquierda) y borrosa con ruido (derecha).

Caso I: Prior de impulso ℓ^1

Con el objetivo de calcular el estimador x_{CM} se obtuvo una muestra de tamaño 130 a partir de la densidad *a-posteriori* en (1) utilizando el Método de Monte Carlo con

cadena de Markov (MCMC) llamado muestreador de Gibbs (Kaipio J., Somersalo E., 2005). Para poder determinar el período *burn-in* del método (100 iteraciones), se estudió la convergencia del promedio muestral a lo largo de las iteraciones en dos píxeles diferentes, uno correspondiente a un objeto focal y otro al fondo negro. En la **Figura 2** se muestra la media condicional obtenida para X con $\gamma = 65$ en (1).

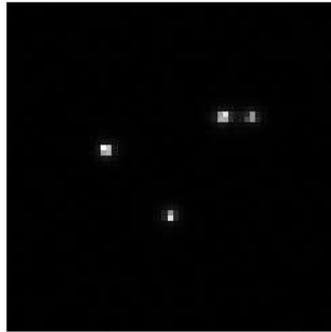


Figura 2: x_{CM} con $\gamma = 65$.

Caso II: Hipermodelo con prior Gaussiana

Se realizaron 300 iteraciones del algoritmo iterativo descrito para este caso, utilizando $\alpha = 1000$ y $\theta_0 = 1$ en el Paso 2. A partir del estimador θ_{MAP} obtenido, se definió $\tilde{\theta}$ dado por $\tilde{\theta}(i) = 1$, donde i es un píxel de θ_{MAP} cuya intensidad es mayor o igual a $\frac{\max(\theta_{MAP}) + \min(\theta_{MAP})}{2}$ y cero en otro caso. Luego, utilizando $\tilde{\theta}$ en el Paso 1, se obtuvo el estimador x_{MAP} que se muestra en la **Figura 3**, junto a θ_{MAP} y $\tilde{\theta}$.

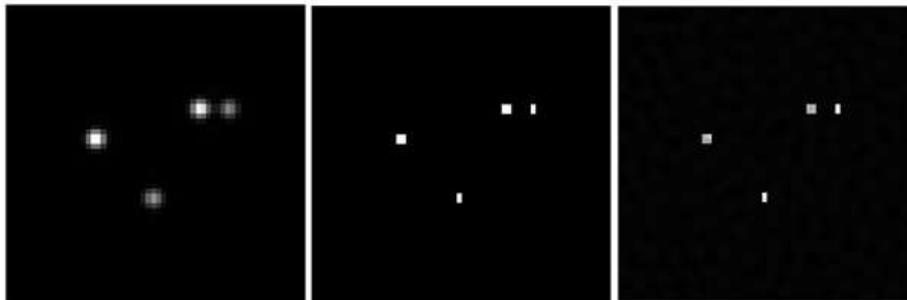


Figura 3: θ_{MAP} (izquierda), $\tilde{\theta}$ (medio) y x_{MAP} (derecha).

En los estimadores obtenidos en ambos casos, se observa claramente que pueden detectarse la ubicación y forma de los objetos focales. Es importante mencionar que mediante el uso de las dos priors presentadas fue posible detectar las distintas formas de las fuentes focales donde, a juzgar por la información del dato, parecía haber una forma única.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

- Calvetti D., Somersalo E.**, 2011. Subjective knowledge or objective belief? An oblique look to Bayesian methods, Largescale inverse problems and quantification of uncertainty, pp. 33-70, Wiley Ser. Comput. Stat., Wiley, Chichester.
- Hansen P.C., Nagy J.G., O'Leary D.P.**, 2006. Deblurring Images - Matrices, Spectra, and Filtering, SIAM, Philadelphia.
- Kaipio J., Somersalo E.**, 2005. Statistical and computational inverse problems, Applied Mathematical Sciences, volume 160. Springer-Verlag, New York.