

LA OBRA CIENTIFICA DEL PROFESOR JOSE LEVI

En el discurso de presentación pronunciado en el acto inaugural del Instituto de Matemática, hicimos un somero análisis de la extensa obra científica del profesor Levi, que llena casi medio siglo, así como también de las importantes aportaciones a la Geometría integral debidas al profesor Santaló en su breve, pero ya brillante carrera. Dejando para otra ocasión el análisis de estas contribuciones a la rejuvenecida disciplina, nos ocupamos en este trabajo de reseñar el significado de la obra del profesor Levi, ampliando las breves frases pronunciadas en el solemne acto.

Quienes solamente han saludado los rudimentos de la geometría algebraica creen ingenuamente que los puntos singulares de una curva algebraica son siempre del tipo simplicísimo que se presenta en las más conocidas, a saber, nodales (con dos tangentes distintas) cuspidales (con dos tangentes coincidentes) o aislados (dos tangentes imaginarias); y se imaginan que los puntos de multiplicidad superior se pueden clasificar análogamente; pero pocos principiantes saben que ya en la clase de los puntos dobles cuspidales caben infinitos tipos y que cada uno de tales puntos cuspidales de especie superior equivale a varios puntos dobles ordinarios en la eva-

luación de las singularidades de cada uno; y que la complicación se agrava al pasar a los puntos múltiples de orden superior.

Gracias al instrumento de las transformaciones cuadráticas logró Noether la descomposición del entorno de cada punto singular en varios arcos simples, es decir, la transformación cuadrática hace corresponder a aquel punto múltiple de la curva dada varios puntos simples de la curva transformada.

Mas no crea el lector que así quedan deshechas todas las singularidades de la curva, pues a cambio de tal simplificación se introducen nuevos puntos singulares; pero éstos son ya puntos múltiples *ordinarios*, es decir, con tangentes distintas; la simplificación ha sido lograda a expensas de la elevación del grado y de la introducción de nuevos puntos múltiples, pero la curva obtenida es en realidad mucho más sencilla que la primera, porque la complicación no es debida al grado, sino a la índole de sus singularidades.

Tal fué en esencia el progreso logrado en 1871 por Noether (y perfeccionado por Bertini) para las curvas algebraicas planas, que abrió una nueva vía a la geometría algebraica y planteó inmediatamente problemas análogos en las curvas alabeadas y en las superficies. Para un joven geómetra, como Levi, educado en la escuela de Segre, que fué el primero en abordar el problema para las superficies, la cuestión era apasionante y a ella se dedicó con el entusiasmo de los 22 años, logrando superar las dificultades que hicieron fracasar a Del Pezzo y Kobb.

Es interesante observar cómo queda decidido el porvenir de cada matemático con su primer trabajo de aliento. (*) Repasando la producción de los matemáticos de nota se observa que tras los primeros titubeos, como oteando el horizonte, cada uno descubre en lontananza la meta ideal hacia la cual debe encaminar su vida y se lanza hacia ella en certero y rau-

(*) Antes de éste había escrito su tesis doctoral sobre las cuerdas de las curvas atabeadas, en que introdujo la noción de *cuerda impropia*.

do vuelo, que a veces dura tanto como la vida misma, plácidamente vivida en un constante descubrimiento de nuevos paisajes y de insospechados horizontes.

Hay ciertamente muchos casos de apostasía a la religión a que se entregó voluntariamente maniatada el alma joven, obediente a ese llamamiento interno de la conciencia que se llama vocación; otras veces la culpable de infidelidad es la ciencia elegida como dueña y compañera para toda la vida; son casos de equivocación que obligan a trazarse nuevo rumbo, virando en redondo hacia nuevas atalayas; pero hay en ambos casos una fuerza fatal que impele al hombre a retrotiempo y al final de su vida terrena le hace retornar a sus primeros amores.

En la vida del prof. Levi hay un viraje desde la geometría algebraica a que consagró su primera juventud, hacia las teorías algebraicas y analíticas a las cuales encaminó poco después su vida y su esfuerzo.

Hubo en este cambio de rumbo clarividente visión de lo que después habría de acaecer en Italia, feudo de la geometría durante la segunda mitad del pasado siglo, a partir del gran Cremona, que importó la geometría proyectiva de Staudt, iluminándola con la claridad de su talento y prolongándola al mundo algebraico no lineal ni cuadrático con sus famosas obras sobre curvas y sobre superficies de orden superior en que avanza considerablemente respecto de Chasles y Jonquières y abre nuevas vías a la investigación geométrica.

Una brillante pléyade de jóvenes italianos se encamina por ella, dando gloria a la estirpe latina, y conquistando al final de su carrera el título de grandes geométras; fueron Veronese, Bertini y Segre en la primera época, para solo citar a los más grandes, mientras en la geometría diferencial levantaba el coloso Bianchi su ingente construcción sólida y sistemática ya iniciada por el genial Beltrami y les siguieron después, en orden cronológico, los geométras actuales: Berzolari, Castelnuovo, Loria, Amodeo, Enriques, Severi, Bompiani, Ter-

racini, Comesatti, Beniamino Segre y tantos otros, que harían interminable la lista.

Pero la geometría algebraica no era filón inagotable y el activo laboreo a que la sometieron tan esforzados obreros fué mermando sus vetas, mientras el campo inmenso del Análisis no rendía los aportes que exigía la tradición de Brioschi y Casorati y la falta de brazos dejaba languidecer los ricos predios del Análisis funcional roturados por Volterra, Arzelá, Ascoli y Pincherle.

Se imponía, pues, una nueva distribución de fuerzas y fué Levi uno de los primeros en iniciar el éxodo en las huestes de los geómetras. Castelnuovo se dedicó al Cálculo de probabilidades, Severi ocupó la cátedra de Análisis superior de Roma y la nueva generación ha abandonado totalmente la tradición cremoniana, para sentar plaza en la más fértil disciplina del Análisis superior. La escuela de Tonelli y la de Picone ganan nuevos prosélitos y extienden sus ramificaciones. El equilibrio ha sido ya logrado.

Volviendo a nuestro biografiado pasemos revista a sus trabajos matemáticos. Después de varias pequeñas notas encontramos un estudio interesante realizado en 1906 sobre las formas cúbicas ternarias (Atti Accad. Torino t. 41) en el cual aborda la resolución de la ecuación indeterminada de tercer grado en números racionales, generalizando un método de Euler por vía geométrica y calculando los invariantes característicos. Si la discusión geométrica dada por Levi agota o no todos los casos posibles, es problema todavía abierto.

En su conocida obra sobre geometría de los números enunció Minkowski su sospecha de que si un sistema de formas lineales con determinante $\neq 1$, presenta el caso límite, alguna de las formas tiene coeficientes enteros. El significado de este caso límite es el siguiente: el único sistema de números que da a las formas valores absolutos menores que 1 es la solución idénticamente nula.

Minkowski resolvió el problema para los sistemas de dos y tres formas, y Levi dió una solución general, en su memo-

ria del Rendisconti de Palermo (1911), en la cual hace un estudio sistemático del problema llegando a la demostración general por vía geométrica; pues el método analítico tropieza, como ya observó Minkowski, con dificultades insuperables para $n > 4$.

De intento hemos dejado para el final otro trabajo anterior, pero más importante, al que dedicaremos mayor atención.

El Cálculo de variaciones ha evolucionado considerablemente después de Euler. Los ingenieros, los físicos y todos los técnicos que utilizan la famosa ecuación euleriana a que debe satisfacer la función buscada, para que cumpla la condición de hacer mínima una integral, creen ingenuamente resuelto el problema, sin preguntarse si la condición euleriana, que es necesaria para que la función haga mínima la integral, será también suficiente.

Fué Hilbert quien primeramente atacó de frente el problema, en vez de reducirlo a otro, y dió método constructivo para probar la existencia de solución; método inatacable en el caso de las integrales simples, pero erizado de dificultades cuando las integrales son múltiples. A partir de 1898 en que el genial matemático de Göttingen emitió la fecunda idea, el método llamado directo ha hecho grandes progresos, especialmente por la obra de su discípulo Courant, y las deficiencias de la solución hilbertiana han sido ya salvadas; pero es deber de justicia colocar el nombre de Levi en la vanguardia de este movimiento revisionista iniciado por Hilbert, pues fué en 1904 el primero en abordar el problema para el caso especial, pero importante, de la integral de $(u_x)^2 + (u_y)^2$ sobre un dominio plano. La existencia de una función que haga mínima esta integral, tiene capital interés en diversos problemas y la teoría de la representación conforme creada por Riemann así como la integración de la ecuación de Laplace se apoyan sobre esta piedra fundamental; pues de la existencia de solución del problema variacional depende la representación conforme de cualquier recinto simplemente conexo sobre el círculo.

El inmortal creador no se detuvo, sin embargo, en desatar este nudo de la cuestión, ni el estado del Análisis en aquel tiempo habría permitido hacerlo con éxito. Puesto que la integral es siempre > 0 cualquiera que sea la función u , no idénticamente nula, el conjunto de valores de la integral tiene un mínimo ≥ 0 , o más estrictamente un extremo inferior, y la función correspondiente es según Dirichlet, la solución buscada.

Hay en este razonamiento una petición de principio, pues cabe que tal extremo inferior, siempre existente, sea inaccesible, es decir, que no corresponda a ninguna función; pero en aquella época eran frecuentes tales conclusiones, y hasta el rigorista Cauchy había cometido en otros problemas análoga falta de rigor.

En realidad Dirichlet no admitió como verdad demostrada la existencia de la función, sino que se limitó a postularla, y así intitula Riemann la conclusión *principio Dirichlet*, mientras que los ingleses suelen llamarlo Dr. *Thomson*.

La demostración rigurosa de este famoso principio fué abordada por Levi en dos memorias aparecidas en el Rendiconti del Circolo matematico di Palermo de 1906.

Es cierto que Hilbert y sus discípulos habían atacado con éxito ciertos casos particulares del problema, pero Levi lo abordó con más amplia generalidad, utilizando la integral de Lebesgue que en aquel entonces constituía una sorprendente novedad.

Mucho ha progresado desde entonces la teoría; pero la idea de las mediatrices, debido a Levi, conserva siempre valor actual.

Algunas acertadas observaciones de su colega Fubini, aparecidas en el mismo volumen de los Rendiconti, le dieron pie para modificar la teoría, utilizando solamente integrales de Riemann pero restringiendo, naturalmente, la generalidad de las hipótesis. Tal es el contenido de su segunda memoria.

El concepto de integral es uno de los problemas que le preocuparon siempre y sobre el cual ha publicado en los Anna-

li di Brioschi en 1923 una memoria completada en 1936 con motivo del homenaje a Berzolari, con el objeto de eludir la teoría de la medida, que es previa a la exposición clásica de Lebesgue. Este mismo fin han perseguido diversos matemáticos, como Young, Riesz, Tonelli y otros. La idea esencial de Levi es definir simultáneamente la medida y la integral de Lebesgue mediante sistemas de rectángulos rampantes que cubren las ordenadas de la función y cuando esta es la función característica del conjunto, resulta la medida de éste. La idea no puede menos de parecernos excelente, cuando ya en nuestras primeras conferencias en Buenos Aires, (*) hicimos un rápido esbozo de una definición muy general, que sigue la pauta de Riemann y no solamente da la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue, sino también la teoría general de la medida con abscisas cualesquiera y la integral de Lebesgue-Stieltjes; idea que posteriormente hemos desarrollado en varias ocasiones; la cual creemos tiene además la ventaja de seguir la misma vía ya conocida en los cursos elementales, sin necesidad de utilizar rectángulos rampantes ni recursos distintos de los ya sabidos.

Quedaría incompleta esta reseña si no incluyéramos en ella los tratados didácticos y los trabajos acerca de los fundamentos de la matemática. Su *Introducción al Análisis Matemático*, que data de 1916, está concebida dentro del círculo de ideas de Kronecker, Steinitz, . . . que modernamente ha adquirido gran desarrollo bajo el nombre de álgebra moderna o abstracta, con exclusión de toda noción infinitesimal, conservando la pureza aritmética de la disciplina algebraica; en cambio, su tratado de *Análisis algebraico e infinitesimal*, publicado 20 años después, sistematiza los métodos infinitesimales. Esta preocupación metodológica adquiere mayor relieve en otro grupo de trabajos relativos a los fundamentos de la Matemática en que revela agudeza en la crítica e ingenio en las soluciones.

Sabida es la divergencia de puntos de vista en que se colo-

(*) *Fundamentos de la Matemática moderna*. Buenos Aires, 1917.

can los diversos matemáticos ante los serios problemas que plantea la concepción cantoriana del infinito actual; divergencia análoga por más de un concepto a la que dividió a los matemáticos a raíz de la organización del Cálculo infinitesimal, y persistió más de un siglo, hasta que fueron vencidas satisfactoriamente las dificultades metodológicas.

Desde el idealismo extremo de Cantor, Zermelo, Hadamard... (que en lenguaje político se llamaría la posición más avanzada), hasta el intuicionismo más intransigente de Brouwer, existe toda una gama de posiciones intermedias, en la cual figura Levi entre los más reacios a la admisión de las atrevidas concepciones cantorianas, que Zermelo articuló en forma de principios, resistidos por un gran núcleo de matemáticos.

Mientras para los idealistas la existencia de los entes matemáticos es sinónima de no contradicción, para los intuicionistas, por el contrario, carece de sentido la existencia de todo ente que no se pueda calcular, siquiera aproximadamente, mediante un número finito de operaciones bien definidas. En este sentido se dirigen algunos trabajos de Levi, cuyos títulos pueden verse en el elenco de sus trabajos (*) al cual debe agregarse el muy reciente sobre la teoría intuicionista de las funciones enteras, que acaba de aparecer en la serie de monografías publicadas por el Instituto de Matemáticas de Rosario.

Es de esperar que la nueva escuela creada con elevadas miras y desinteresada finalidad, produzca pronto los sazonados frutos que la Universidad desea, bajo la eficaz dirección de quien tantas pruebas tiene dadas en su dilatada labor científica y docente de agudo espíritu crítico y generalizador, a la par que sus eximias dotes de maestro harán proficuas sus enseñanzas, levantando sensiblemente el nivel de la cultura matemática en aquel centro docente y también, por benéfica acción catalítica en los restantes centros matemáticos de la República Argentina.

J. REY PASTOR

(*) Revista de la Unión Matemática Argentina. Vol. II, 1939; N° 5.