

## EVOLUCION DEL PENSAMIENTO MATEMATICO

Dijo Galileo que “la filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto dinanzi agli occhi (io dico l’Universo), ma non si può intendere se prima non s’impara a intender la lingua e a conoscer i caratteri ne’ quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche...”. Números, figuras y mediciones son los útiles para fijar en nuestra mente las manifestaciones del cosmos: pero no habría números ni mediciones si no hubiera hombres. Podrían los astros rodar por los espacios, podría la luz recorrerlos, pero faltaría la pregunta de la velocidad de la luz y faltaría la respuesta de Michelson. Los números, Dios no nos los dió con darnos el pensamiento, y la matemática se encuentra siempre allá donde los hechos de la naturaleza se sueldan con los del intelecto. No se trata además de un punto de intersección, sino de un contacto bastante extenso, ya que no es sólo para dar precisión y forma mnemónica a nuestros conocimientos que se cuenta y se mide; es también, y quizás más, porque una necesidad del espíritu nos empuja a plegar los hechos de la naturaleza dentro de los esquemas de las relaciones lógicas. Esta necesidad no está sin embargo igualmente sentida por todos los hombres, ni siquiera por todos los pueblos y en todos los

tiempos. Varía por tanto el mismo concepto de la matemática, varía el valor que se le presta, varía su desarrollo.

Las noticias más antiguas que hoy en día se tienen sobre conocimientos matemáticos parecen remontar alrededor de cuatro mil años y se refieren a dos pueblos no demasiado lejanos por el sitio en que vivieron, pero de razas y civilizaciones bastante distintas: los egipcios y los babilonios; y mientras que, por lo que respecta a los primeros trátase sólo de reglas aritméticas en vista de cálculos concretos o de reglas geométricas que parecen consagrar algún resultado experimental de práctica aplicación, para los segundos puede pensarse en una matemática desinteresada y quizás ya de estructura lógica. Fué Neugebauer — intérprete sagaz de numerosas tabletas de ladrillo extraídas en las excavaciones realizadas en el valle del Eufrates — quien descubrió estos documentos de un saber algebraico, muy semejante, al parecer, al que floreció en Europa en los primeros años del renacimiento científico, no solo por su contenido, sino también por la forma geométrica en que está expresado. Sin embargo, la interpretación genial de Neugebauer nos deja algo asombrados; porque los documentos sólo presentan reglas dogmáticas, mediante ejemplos escogidos de manera de acentuar combinaciones numéricas que ocultan el contenido lógico. Supone Neugebauer que el papel deductivo ausente fuese reservado a la enseñanza oral, y también que esta enseñanza tuviese cierto carácter de importación: más probable me parece que estos documentos reflejen una fase de decadencia, en la cual, perdido el gusto para el razonamiento deductivo, no hubiese quedado más que una tradición de escuela: cosa comparable tal vez a lo que aconteció en nuestra Edad Media, cuando proposiciones euclídeas de que se había perdido el verdadero sentido, fueron objeto de disputas escolásticas. Cierto es que a esta antiquísima cultura matemática tuvo que seguir un período de obscurecimiento, y hubo de pasar no menos de un milenio antes que la llama volviese a encenderse en otro lugar, en otro pueblo: el pueblo griego.

De que a los griegos hayan llegado algunas tradiciones prácticas de naturaleza matemática de los cercanos pueblos mediterráneos, es cosa muy probable, porque, según el testimonio de Heródoto, ellos habrían aprendido las primeras nociones geométricas de los agrimensores egipcios; y el nombre de geometría expresa claramente un originario intento práctico. Pero ¿quién podría jamás tomar los "Elementos" de Euclides por un tratado de topografía? Ya no en la medición de los campos, sino en las disputas de las escuelas filosóficas, bajo el aguijón de la crítica lógica, se ha desarrollado la geometría griega, cuyo pensamiento, llegando a la cumbre con la obra de Arquímedes, anuncia casi todos los motivos fundamentales de la matemática moderna. Si el rápido anieblarse de este pensamiento con el llegar de la Edad Media no nos sorprende demasiado, es sólo porque estamos acostumbrados a considerar este período quizás más de lo que verdaderamente fué, como época de barbarie. Pero, en verdad, aún más que por el adelantarse de la Edad Media, la caída de la matemática coincide con la expansión del mundo romano. Al contrario de la Grecia, Roma, que en tantas ramas del progreso civil le fué rival, que por el poder militar y político le fué inmensamente superior, por cierto tuvo una arte del cálculo, pero no tuvo, o muy poco, un pensamiento matemático. Los problemas prácticos de la medición de los terrenos, del trazo de los caminos, de las construcciones edilicias, existieron, y grandiosos, en la época romana; no dejaron de existir, aunque empequeñecidos, con el declinar del imperio; mas ellos pueden también resolverse por medio de un tecnicismo más o menos perfecto. Claro parece que el decaer de la matemática coincide con el desplazarse del interés desde los problemas de la razón hacia los más simples pedidos de la acción.

Durante muchos siglos el pensamiento matemático parece haberse apagado del todo. Para hablar de una matemática medioeval es menester dar valor a mínimos perfeccionamientos en el arte del cálculo numérico y de la numeración.

La matemática renace con la vuelta del libre pensamien-

to, del pensamiento crítico, con el afirmarse de la filosofía positiva: lo que distingue al pensamiento positivo del escolástico o del idealista no está, como unas veces se dice, en que el primero mire a la naturaleza, porque es igualmente escolástico un materialismo milagrosista que se reduzca a la afirmación de hechos, de acontecimientos, de atributos. Lo que distingue al pensamiento positivo, digo, está en pedir a la naturaleza respuestas bien definidas, lógicamente determinadas. Por lo cual hay que afirmar que la que se llama por antonomasia ciencia de la deducción, es, a la verdad, como forma mental aún antes y también más que como instrumento técnico, el antecedente necesario, la guía luminosa de la ciencia experimental. El nombre de Galileo que está escrito al frente de la escuela filosófica positiva, es también el primer gran nombre del renacimiento matemático, no sólo porque, como he recordado, él haya afirmado ser la matemática el lenguaje en que se expresan los hechos físicos, ni siquiera porque la matemática le sea deudora directamente por algún descubrimiento, sino porque de su escuela salieron los Cavalieri, los Torricelli, los Viviani, porque el pensamiento de Galileo abrió la ruta a la obra de Newton. Como ya en la escuela griega de Platón, pareció nuevamente con Descartes, Leibniz, Pascal, ser la matemática el fundamento mismo de la filosofía; y el siglo del iluminismo, de las revoluciones de América y de Francia, de la declaración de los derechos del hombre, fué también el que puso las bases de las principales teorías matemáticas y físicas modernas. Que este período del desarrollo de las matemáticas ya haya sobrepujado con su esplendor todos los anteriores, puédesse afirmar sin duda alguna: nombraremos a Euler, Lagrange, Gauss, Fourier, Ampère, Cauchy, Hermite, Poincaré, . . . En el prólogo al primer volumen de las Acta Matemática, Mittag Leffler podía decir: "La época en que empezamos nuestra publicación es ciertamente una de las más fecundas en la historia de las matemáticas, por el número y la importancia de los descubrimientos que se refieren a los principios más esenciales del Análisis": esto era en 1882, y, a pesar de que siempre sea fácil a

los contemporáneos equivocarse por falta de perspectiva, se puede, ahora también, coincidir bastante con la afirmación.

¡Llegamos así a mis recuerdos personales: a la matemática que yo mismo he vivido!

Hacia el término del siglo pasado había venido de moda una definición de la matemática que la identificaba con la lógica deductiva; y un matemático filósofo llegaba a la formulación paradójica de que la matemática sea la ciencia en la cual se concluye exactamente, sin conocer el objeto de que se habla, ni la verdad de lo que se dice de él: porque las reglas de la lógica operan sobre las proposiciones independientemente de su significado intrínseco, independientemente de su verdad objetiva, asegurando a las deducciones una verdad hipotética, condicionada a la verdad de las proposiciones de donde se parte. Por la misma razón se ha dicho de la matemática que ella es ciencia tautológica, que nada nos hace conocer que no conociéramos de antemano; y algún filósofo idealista puede haber tomado argumento de aquí para proclamar la vanidad científica de la matemática, ciencia de pseudo-conceptos.

Al primer argumento contestamos, pues, que caracterizar a una ciencia por el instrumento que emplea es tal vez, en el mismo tiempo, demasiada presunción y demasiada humildad: presunción porque le dá a esa ciencia un campo sin límite; humildad porque se la priva de todo derecho al juicio intrínseco sobre el valor del objeto que investiga.

En cuanto respecta al segundo argumento, hay un sofisma disimulado, como siempre, en un juego de palabras: no hay que negar que la tautología matemática sólo nos hace conocer lo que se ha afirmado de antemano: pero tampoco tiene sentido querer conocer lo que de antemano no sea, o en la naturaleza que nos rodea, o en nuestro interior, o, también, en las afirmaciones de nuestro pensamiento: y si la pretendida tautología consigue descubrir en algún sistema muy restringido y al parecer sencillo de tales afirmaciones un contenido de inagotable extensión, de sorprendente variedad y her-

mosura, de que a menudo tampoco se sospechaba, me parece que la ironía se convierte en sublime exaltación.

Quiero agregar que, si bien la deducción lógica es el rasgo característico de la matemática, sería paradójico llamar matemática a toda deducción; si bien las teorías matemáticas aparentan como el desarrollo unívoco de las implicaciones contenidas en pocas proposiciones iniciales, el verdadero espíritu matemático se manifiesta precisamente en el acto de elegir estas proposiciones y en él de elegir, entre esas implicaciones, las valiosas e interesantes.

Quizás poniéndose desde este punto de vista, al mirar la inmensa variedad y el desarrollo inmenso de nuestra literatura matemática contemporánea, pueda alguna vez surgir la duda de que la indiscutible arbitrariedad del objeto sobre el cual se ejerce la deducción matemática lleve al final al mero capricho individual. Se opone unas veces a esta duda que nosotros, los hombres, no podemos prever, lo que podrá mostrarse útil para las aplicaciones venideras, que la matemática prepare cuadros racionales que, por el progresar de la ciencia, podrán resultar útiles, acaso necesarios, para colocar en ellos los datos o los interrogantes de la experiencia y de la práctica; y que muchos de estos cuadros posibles son necesarios si se quiere que práctica y experiencia puedan hallar, en su oportunidad, lo que ellas necesitan. Corren por las bocas ejemplos vislumbradores, como el del cálculo diferencial absoluto que ha encontrado aplicación en la teoría de la relatividad y el del cálculo de las matrices y de los autovalores en las teorías atómicas. No es aquí el momento para discutir semejantes ejemplos: hay, por verdad, diferencias esenciales entre los dos casos: en el primero se puede pensar que el enlace está exactamente en la madurez del tiempo: en el hecho de que las consideraciones pluridimensionales hoy en día son habituales entre los matemáticos y algo, diría también, entre los no matemáticos; en el uso más y más generalizado de referimientos intrínsecos en la mecánica y en la física matemática; etc.: se puede pensar que, si la concepción de Einstein no hubiese encontra-

do listo el cálculo de Ricci y Levi-Civita, no habría encontrado dificultades esenciales por esto y habría originado ella misma este desarrollo teórico, por cuanto le necesitaba y más allá: la historia de las teorías vectoriales, que no tiene todavía un siglo puede servir de prueba. Se puede pensar propiamente el contrario por el segundo caso: no es fácil imaginar que algunas ideas corrientes en la física llamada ondulatoria se habrían producido sin el antecedente abstracto de ciertas teorías matemáticas: pero me parece tratarse, más que de aplicación, de simples analogías por las cuales tengo todavía alguna duda.

Diré concluyendo que no creo en una ciencia hecha de ladrillos o, si se quiere, de fábricas compuestas pero al mismo tiempo independientes. Creo que la matemática tiene, respecto a las ciencias de la naturaleza, la misma posición que la filosofía respecto a la historia y a las ciencias morales: mucho menos son los resultados, las fórmulas, los que dan valor a la matemática como factor del progreso, menos, digo, de los métodos, de la suma de experiencias mentales de que ella va enriqueciendo nuestra facultad racionativa. Nada dice un caso afortunado en que una fórmula matemática puede encontrarse lista para contestar a un llamado aplicativo, porque la historia nos muestra que mucho más frecuente es el caso en que los problemas propuestos por la filosofía natural constituyen, ellos, el punto de salida para el desarrollo de nuevas teorías matemáticas. Y yo pienso que, para la ciencia, hay que temer como una enfermedad el ir buscando una justificación fuera de sí misma, así como hay que temer en el hombre la pregunta del fin, del ¿para qué? de la vida. Uds. saben cuanta filosofía desesperada se halla en el fondo de esta pregunta; y, sin embargo se vive por el amor de la vida, por el amor de los hijos, por el amor de la humanidad. Así es para la ciencia: las teorías valen por la luz interior que han dado a quien las creó, valen por la luz que dan todavía a quien las estudia. No importa si esta luz pueda derivar de una pregunta del entendimiento puro o de una de la ciencia aplicada! ¿débese pues considerar solo como una suerte de que a menudo una y otra clase

de preguntas vienen a coincidir en sus resultados? Tampoco lo creo, porque está en el entendimiento la fuerza del hombre, y la distinción entre entendimiento y aplicación sólo puede ser provisoria y aparente.

El fin de la vida es la vida digna y el fin de la ciencia es la ciencia digna; mas el juicio de la dignidad sale sólo de nuestra conciencia; por lo cual están igualmente lejanas de la verdad ambas fórmulas: la de la ciencia para la práctica y la de la ciencia para la ciencia.

Uno de los campos en que más se ha ejercitado la matemática como mera deducción lógica es la averiguación de los "fundamentos". Se puede decir con verdad que ha sido propiamente el gran fermento que se ha despertado alrededor de los fundamentos lo que hizo nacer la definición de la matemática como lógica pura. ¿Uo se puede creer por esto que la de los fundamentos lógicos de las deducciones matemáticas sea preocupación exclusivamente moderna! ¿Cuanta investigación de fundamentos está contenida en la obra de Euclides!: en el cuidado con que están enunciados en los "Elementos" — aún cuando de manera no completamente correspondiente a las exigencias modernas — los axiomas, las "naciones comunes"; en el esfuerzo para atrasar lo más posible el uso del célebre axioma que ha preocupado después a los géometras por muchos siglos; en la teoría de las proporciones, en el principio de exhaustión. El método, por cierto, es distinto del nuestro: nunca en la antigüedad se trató de construir sistemas lógicos hipotéticos; se pensaba entonces en dar forma lógica, basada sobre algunos conceptos que parecían más intuitivos, a teorías conocidas sea por la experiencia, sea por la intuición. Nosotros, al contrario, construimos a priori las geometrías no-euclidianas. Pero, ¿es verdaderamente para anticipar una geometría posible en un espacio físico que una pretendida experiencia vendría demostrar no-euclideo que nos interesan, que han interesado desde cerca de dos siglos, las geometrías no-euclidiana? ¿las geometrías de los espacios curvos? La contestación no puede ser más



que negativa si se mira a los orígenes: empezando con la obra de Saccheri, siguiendo con Gauss, Golyai, Lobachewski, Riemann, nunca el estímulo hacia la búsqueda matemática fué una duda acerca de la naturaleza física del espacio, si bien el deseo de penetrar, a través del artificio de la hipótesis contraria, en el íntimo sentido de las hipótesis que caracterizan la geometría euclidiana que domina nuestras experiencias diarias. Ciertamente es que, formada la teoría, bajo la influencia de una filosofía empirista, quizá en el vano deseo de una justificación utilitaria, pudo ponerse la pregunta si una geometría no-euclidiana, con radio de curvatura bastante grande, pero no infinito, correspondería mejor a los hechos experimentales. Yo creo que si la respuesta nunca fué decisiva, es que no podía serlo, porque la geometría precede a las medidas, es la condición para su interpretación, es la teoría de los instrumentos para medir.

En la filosofía matemática moderna ha tomado trascendencia sobresaliente la consideración de que los conceptos que se ponen como fundamento de las teorías obran en la deducción, no por las "intuiciones" que ellos representan, sino por las propiedades que adhieren a estas intuiciones. Todo lo que concebimos como intuición inmediata, todo lo que expresamos habitualmente con una palabra, "número", "punto", "recta", "espacio", "curvo", "infinito"... es siempre, sin que nos demos cuenta, un conjunto, una constelación de atributos que pueden decirse más simples en el mismo sentido que cloro y sodio son más simples, pero no más intuitivos, que la sal común: la matemática obra como el reactivo revelador: sin renunciar a la tarea de reducir, cuando y como puede, el problema complejo a las intuiciones sencillas, ella va descubriendo a menudo el complejo bajo la ilusión del sencillo; desvincula entonces la constelación de atributos y una u otra parte empuja hacia consecuencias lógicas, unas veces inesperadas. Muchas de las teorías matemáticas modernas más valiosas han derivado de esta descomposición de conceptos más o menos intuitivos

en otros de menor contenido (y, por esto, desde el punto de vista lógico, de mayor extensión). Recordaré las teorías de las operaciones y de los grupos, las generalizaciones de la noción de número (números algebraicos, números complejos, ideales, módulos...), la teoría de los conjuntos. Tiene sus raíces, esta última, en la inquietud de aclarar las nociones fundamentales de aquel "cálculo infinitesimal", cálculo de fluentes y flujiones, cálculo de los indivisibles, análisis infinitorum, que desde Newton y Leibniz, durante dos siglos, a menudo por brillantes intuiciones, había dado tan sorprendentes resultados. Están relacionadas con ella las cuestiones de lógica matemática: si bien, como teoría, ocupa un puesto bastante limitado entre otras teorías matemáticas, esta lleva nombres ilustres como Peano, Russell, Hilbert, la escuela de Varsovia y la de Viena; y ciertas exigencias lógicas no conocidas anteriormente han adquirido trascendencia en todo el dominio matemático.

Hablar de las grandes teorías más estrechamente relacionadas con el desarrollo de la mecánica y de la física matemática, no sería aquí el lugar ni el tiempo: ecuaciones diferenciales y a las derivadas parciales, ecuaciones integrales, cálculo de las variaciones, problemas de valores al contorno... Recordaré a la vez como la fuerza de abstracción contenida en los símbolos, impeliendo a las intuiciones primitivas a desvincularse de ideas contingentes ha generado extrapolaciones importantes en el desarrollo de la física: tales los conceptos de energía y de campo: de aquí las teorías de Maxwell, de Planck, de Einstein.

En los últimos años ha parecido que la matemática pudiese alumbrarnos la vía hacia los secretos de la naturaleza, no más por esa facultad de generalización en la cual la fantasía se concilia con la lógica, sino sólo por las propiedades formales de sus símbolos; ha parecido que, sin claras hipótesis inteligibles, un mero mecanismo algorítmico pudiese, casi diría por una nueva magia, revelarnos alguna cosa de la esencia

íntima, de las íntimas leyes de la materia. Si esta tarea, en esta forma, pudiese cumplir la matemática, entonces se justificaría acumular fórmulas con preceptos combinatorios completamente arbitrarios. No creo; tengo fe que, también en el campo reservado ahora a las nuevas mecánicas, otros triunfos pueda lograr la matemática, dando al intelecto humano el gozo de conocer racionalmente.

BEPP0 LEVI

