UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de

Doctor en Matemática

En el campo de: **Análisis**

Título de la tesis:

Operadores Asociados a la Convergencia Cesàro Múltiple y Aplicaciones a la Teoría Ergódica.

Institución donde se realizó:
Departamento de Matemática - FIQ - UNL
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL)

Autor:
Cecilia Ferrari Freire

Director de Tesis:
Dra. Ana Bernardis

Codirector de Tesis:
Dra. Raquel Crescimbeni

Defendida ante el jurado compuesto por:
Dra. Eleonor Harboure
Dra. Élida Ferreyra
Dr. Sheldy Ombrosi

Año de presentación: 2012

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a todas aquellas personas quienes, de un modo u otro, han hecho posible que finalizara la redacción de esta tesis.

A *Ana Bernardis*, por guiarme durante estos años, por la dedicación con la que trabajó en mi tesis, por su paciencia, por su apoyo y estímulo, y por su enorme generosidad. Gracias por permitirme aprender de su forma de pensar los problemas, y sobre todo por su calidez humana.

A *Raquel Crescimbeni*, por alentarme desde que era alumna de la licenciatura, por su inmensa generosidad, por su dedicación con la que trabajo en mi tesis, por escucharme y brindarme palabras de aliento en los momentos difíciles, su apoyo incondicional y por su calidez humana.

A *mi esposo Francisco,* por compartir su vida conmigo, porque sin él esto no hubiera sido posible, por su apoyo en mis decisiones y por haberme dado dos hijos hermosos, Juan Francisco y Ramiro, mis amores.

A *mis padres*, Liliana y Luis; a *mis hermanos* Martín, Juan Pablo y Nicolás y a sus respectivas *familias* por apoyarme en mis decisiones y darme aliento con sus afectos.

A *Roberto Macías*, a quien le tengo un profundo respecto, le agradezco por su paciencia y por haberme guiado en este trabajo.

A *cada miembro del jurado*, por haber aceptado leer este trabajo.

A *Celeste González, Alejandra Perini y Laura Santori* por su amistad y por estar siempre presentes.

A *Marilina Carena, Marisa Toschi, Virginia Rodriguez* por brindarme contención afectiva y emocional cuando fue necesario, por su amistad.

A *Zulma Arralde, Karina Temperini, Adriana Fraucin, Ivana Gómez, Ezequiel López, Patricio Campero, Eduardo Garau y Silvia Hartzstein* por los momentos compartidos.

Al Consejo de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y a la Universidad Nacional del Comahue por el aporte económico que me permitió el desarrollo de esta tesis. A Coca y Marcela por su ayuda y buena voluntad.

Finalmente, quiero agradecer a *mis familiares y amigos*, quienes estuvieron siempre pendientes de mi tarea y me dieron aliento con sus afectos.

A mi esposo, Francisco,
por compartir su vida conmigo;
A mis hijos, Juan Francisco y Ramiro,
mis amores.

Índice general

Resumen

En esta tesis estudiaremos la convergencia en el sentido de Cesàro de ciertos operadores cuando los mismos están definidos en espacios producto. Concretamente, en el contexto de estos espacios, estudiamos la convergencia de los promedios de tipo Cesàro y la existencia de integrales singulares en el sentido de Cesàro. El contexto en el que trabajamos es el siguiente. Dado $L \in \mathbb{N}$, consideramos a $\mathbb{R}^n$ compuesto por L bloques de la siguiente manera

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_L}.$$

Si $D_i := \{j \in \mathbb{N} : n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1 \leq j \leq n_2 + \cdots + n_i\}$, con

$$x^i := (x_j : j \in D_i) \in \mathbb{R}^{n_i}, i = 1, \cdots, L,$$

representamos las coordenadas del bloque n_i. Luego, si $Q_i = Q(x^i, \epsilon_i)$, con $i = 1, \cdots, L$, definimos los promedios como

$$\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}^{\bar{n}} f(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{L} |Q_i|} \int_{Q_1} \cdots \int_{Q_L} f(y^1, \cdots, y^L)\, dy^L \cdots dy^1,$$

donde $\bar{n} = (n_1, \cdots, n_L)$ y $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_L)$.

Dados $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_L)$ con $0 < \alpha_i \leq 1$, $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_L)$, con $\epsilon_i > 0$ para todo $i = 1, \cdots, L$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos la función

$$\Phi_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}}(x) = \varphi_{\epsilon_1}^{\alpha_1}(x^1) \cdots \varphi_{\epsilon_L}^{\alpha_L}(x^L)$$

donde

$$\varphi_{\epsilon_i}^{\alpha_i}(x^i) = \frac{1}{\epsilon_i^{n_i}} \varphi^{\alpha_i}\left(\frac{x^i}{\epsilon_i}\right)$$

y $\varphi^{\alpha_i} : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ es la función

$$\varphi^{\alpha}(x) = c(\alpha, n)(1 - |x|_\infty)^{\alpha - 1} \chi_{Q(0,1)}(x), \tag{0.0.1}$$

con $|x|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ y donde $c(\alpha, n)$ es la constante, dependiente de α y n, tal que $\int \varphi^\alpha(x)\, dx = 1$.

Llamamos *promedios de Cesàro en espacio producto* o simplemente *promedios de Cesàro generalizados* a los promedios

$$\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} f(x) = f * \Phi_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}}(x). \tag{0.0.2}$$

Asociado a los promedios de Cesàro $\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}}$ tenemos el operador maximal

$$\mathcal{M}_{\bar{\alpha}} f(x) = \sup_{\bar{\epsilon}>0} \mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} |f|(x), \tag{0.0.3}$$

donde $\bar{\epsilon} > 0$ significa $\epsilon_i > 0$ para todo $i = 1, \cdots, L$. En el caso usual en que $\mathbb{R}^n$ se considera como un sólo bloque, es decir, $L = 1$, la convergencia de los promedios de Cesàro fue estudiada por W. Jourkat y J. Troutman en [**28**]. El resultado de convergencia obtenido para los promedios $\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} f$ es el siguiente.

TEOREMA 0.0.1. *Dado $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_L)$, sea $\alpha_* = \min_{1\le i\le L} \alpha_i$ y supongamos que existen exactamente k números α_i, con $1 \le k \le L$, tales que $\alpha_* = \alpha_i$. Luego,*

$$\lim_{\bar{\epsilon}\to 0} \mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} f(x) = f(x),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p > 1/\alpha_*$ y para toda f en el espacio de Orlicz-Lorentz $\Lambda(1/\alpha_*, \varphi_{k-1})$ donde $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$.

El espacio $\Lambda(p, \varphi)$ se define de la siguiente manera:

$$\Lambda(p, \varphi) := \{f : \ \Psi_{p,\varphi}(cf) < \infty \text{ para algún } c > 0\},$$

donde

$$\Psi_{p,\varphi}(f) = \int_0^\infty \varphi(f^*(t)) t^{\frac{1}{p}-1} \, dt.$$

Posteriormente estudiamos los promedios $P_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} f$ cuando restringimos los valores de ϵ_i, $i = 1, \cdots, L$ a sucesiones lacunares. El restringirnos a estas sucesiones nos permitió, por un lado, obtener resultados de convergencia para una clase más amplia de funciones y por otro, probar resultados sobre la velocidad de convergencia de estos promedios. Como antecedentes en el caso $L = 1$ tenemos [**27**], [**2**], [**6**].

En otra etapa del trabajo investigamos las integrales singulares en el sentido Cesàro en espacios producto. Las integrales singulares en el sentido Cesàro fueron estudiados en [**3**]. En dicho trabajo, dado un núcleo de Calderón-Zygmund K, se estudia la existencia del siguiente límite

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x-y|>\epsilon} f(y) K(x,y) \left(1 - \frac{\epsilon}{|x-y|}\right)^\beta \, dy, \tag{0.0.4}$$

donde $-1 < \beta \le 0$.

Nuestro propósito en esta parte es estudiar los espacios de funciones para los cuales existe la integral singular en el sentido Cesàro en el contexto de espacios producto. Consideremos los núcleos de Calderón Zygmund K_i definidos sobre $\mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i} \setminus \Delta$, donde Δ es la diagonal de $\mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i}$. Sea

$$K_{i,\delta,\beta}(x,y) = K_i(x,y) \left(1 - \frac{\delta}{|x-y|}\right)^\beta, \qquad \delta > 0 \quad \text{y} \quad -1 < \beta \le 0.$$

Dados $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_L) \in R_+^L$ y $\bar{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_L)$ con $-1 < \beta_i \leq 0$, $i = 1, \cdots, L$ definimos los núcleos

$$\mathcal{K}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}}(x,y) = \prod_{i=1}^{L} K_{i,\epsilon_i,\beta_i}(x^i, y^i).$$

Con estos núcleos definimos las truncaciones

$$\mathcal{T}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}} f(x) = \int_{|x^1-y^1|>\epsilon_1} \cdots \int_{|x^L-y^L|>\epsilon_L} f(y) \mathcal{K}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}}(x,y)\, dy^L \cdots dy^1$$

y el operador maximal asociado

$$\mathcal{T}_{\bar{\beta}}^{*} f(x) = \sup_{\bar{\epsilon} \in \mathbb{R}_+^L} |T_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}} f(x)|.$$

Como en el caso clásico, para estudiar la existencia del límite $\lim\limits_{\bar{\epsilon}\to 0} \mathcal{T}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}} f(x)$ estudiamos el operador maximal $\mathcal{T}_{\bar{\beta}}^{*}$ estimándolo puntualmente por una suma de composición de operadores.

A continuación se aplican algunos de los resultados obtenidos en la primera parte del trabajo al contexto de Teoría Ergódica multiparamétrica. Nos planteamos, para $T_1, \cdots, T_k$ operadores lineales y positivos, los promedios de tipo Cesàro ergódicos múltiples definidos como

$$\mathcal{R}_{\bar{n},\bar{\alpha}} f(x) = R_{n_1,\alpha_1} \circ \cdots R_{n_k,\alpha_k} f(x) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} A_{n_j}^{\alpha_j}} \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_k=0}^{n_k} \prod_{j=1}^{k} A_{n_j - i_j}^{\alpha_j - 1} T_k^{i_k} \cdots T_1^{i_1} f(x)$$

donde $A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{n!}$, $n \neq 0$ y $A_0^\alpha = 1$.

En el caso uniparamétrico estos promedios fueron estudiados en [**26**], [**12**], [**9**], [**34**] y [**7**] entre otros.

También abordamos el estudio de la Transformada de Hilbert ergódica multiparamétrica. En este sentido generalizamos al caso biparamétrico un resultado de R. Sato [**37**] y posteriormente abordamos el estudio de la existencia de la Transformada de Hilbert ergódica biparamétrica en el sentido de Cesàro (ver [**7**] para resultados de este operador en el contexto uniparamétrico).

La última parte de este trabajo está dedicado a estudiar las acotaciones con pesos del operador maximal $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$. El operador maximal M_α definido en $\mathbb{R}^n$ (considerando $\mathbb{R}^n$ como un sólo bloque) en el contexto de los espacios L^p con pesos fue estudiado en [**5**]. En dicho trabajo se caracterizan los pesos w para los cuales el operador M_α resulta ser de tipo fuerte y de tipo débil (p,p) con respecto a la medida $w(x)dx$.

El trabajo de generalizar los resultados de [**5**] al caso de espacios producto comienza caracterizando los pesos para los cuales la versión no centrada $\mathcal{N}_{\bar{\alpha}}$ del operador $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ satisface desigualdades de tipo débil y fuerte con respecto a dicho peso.

Obtener los resultados del teorema anterior para el operador centrado $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ no es trivial. Mediante la introducción de ciertos operadores maximales no centrados definidos sobre partes de cada uno de los cubos donde se integra en la definición de $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$, es posible probar que la clase de pesos en uno y otro caso es la misma.

Distribución del material

El contenido de esta tesis se encuentra distribuido de la siguiente manera.

En el **Capítulo 1** definimos los espacios en los cuales trabajaremos a lo largo de toda la tesis. A continuación se presentan resultados donde se ilustra el comportamiento de la composición de operadores cuando se conoce alguna acotación de los mismos.

Aplicando los resultados obtenidos en el capítulo anterior estudiamos, en el **Capítulo 2**, la convergencia de los Promedios de Cesàro en espacios producto como así también la velocidad de convergencia de estos promedios. También analizamos cómo mejoran los resultados de convergencia, ampliando los espacios de funciones donde se obtiene dicha convergencia cuando nos restringimos a tomar promedios sobre sucesiones lacunares.

El objetivo del **Capítulo 3** es estudiar la existencia de la integral singular en el sentido Cesàro en el contexto de espacios producto.

El **Capítulo 4** está dedicado a mostrar aplicaciones de los resultados obtenidos al contexto de Teoría Ergódica. Se comienza analizando los promedios de Cesàro ergódicos multiparamétricos. Luego, se estudia La Transformada de Hilbert doble y a continuación, se plantea el estudio de la Transformada de Hilbert ergódica doble Cesàro.

Finalmente, en el **Capítulo 5** se caracterizan los pesos w para los cuales el operador maximal de Cesàro definido en el contexto de espacios producto resulta ser de tipo fuerte y de tipo débil (p, p) con respecto a la medida $w(x)dx$.

Introducción

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice continua en promedio o, equivalentemente, que es Cesàro-1 continua en $x \in \mathbb{R}^n$ si los promedios

$$P_\epsilon^1 f(x) = \frac{1}{|Q(x,\epsilon)|} \int_{Q(x,\epsilon)} f(y)dy$$

convergen a $f(x)$ cuando ϵ tiende a cero, donde $Q(x,\epsilon) = [x-\epsilon, x+\epsilon]^n$ y $|E|$ es la medida de Lebesgue del conjunto E. Usando la notación

$$\psi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

podemos escribir a los promedios $P_\epsilon^1 f(x)$ como

$$P_\epsilon^1 f(x) = f * \varphi_\epsilon^1(x),$$

donde $\varphi^1(x) = 2^{-n}\chi_{Q(0,1)}(x)$ y χ_E es la función característica del conjunto E.

De manera similar a la definición de continuidad Cesàro-1, se define la continuidad Cesàro-α para cualquier $\alpha > 0$. Se dice que una función f es Cesàro-α continua en x si los promedios

$$P_\epsilon^\alpha f(x) = f * \varphi_\epsilon^\alpha(x) \tag{0.0.5}$$

convergen a $f(x)$ cuando ϵ tiende a cero, donde

$$\varphi^\alpha(x) = c(\alpha,n)(1-|x|_\infty)^{\alpha-1}\chi_{Q(0,1)}(x), \tag{0.0.6}$$

con $|x|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$ y donde $c(\alpha,n)$ es la constante, dependiente de α y n, tal que $\int \varphi^\alpha(x)\,dx = 1$.

Notemos que los promedios P_ϵ^α son casos especiales de aproximaciones de la identidad con núcleo $\varphi^\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Otra forma de escribir los promedios P_ϵ^α es la siguiente

$$P_\epsilon^\alpha f(x) = \frac{c(\alpha,n)}{\epsilon^{n+\alpha-1}} \int_{Q(x,\epsilon)} f(y) d(y, \partial Q(x,\epsilon))^{\alpha-1}\,dy, \tag{0.0.7}$$

donde $d(y,\partial Q(x,\epsilon)) = \min\limits_{1\le i\le n}\{x_i+\epsilon-y_i, y_i-(x_i-\epsilon)\}$ es la distancia en la norma infinito de y al borde de $Q(x,\epsilon)$.

El Teorema de Diferenciación de Lebesgue nos dice que si f es una función localmente integrable entonces es Cesàro-1 continua en casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ y como es bien conocido, este resultado se obtiene a partir del estudio de la maximal de Hardy-Littlewood M.

El operador maximal asociado a los promedios $P_\epsilon^\alpha f$ se define como

$$\begin{aligned} M_\alpha f(x) &= \sup_{\epsilon>0} P_\epsilon^\alpha |f|(x) \\ &\approx \sup_{\epsilon>0} \frac{1}{\epsilon^{n+\alpha-1}} \int_{Q(x,\epsilon)} |f(y)| d(y, \partial Q(x,\epsilon))^{\alpha-1}\, dy. \end{aligned} \tag{0.0.8}$$

Si $\alpha > 1$, el operador M_α es puntualmente equivalente al operador maximal de Hardy Littlewood y los resultados de convergencia de los promedios $P_\epsilon^\alpha f$ en este caso se siguen del caso $\alpha = 1$.

Si $0 < \alpha < 1$ la situación es diferente, dado que el núcleo en los promedios tiende a infinito cuando y se acerca al borde del cubo $Q(x,\epsilon)$.

Como consecuencia de un resultado de W. Jourkat y J. Troutman [**28**] se obtiene que el operador M_α, $0 < \alpha < 1$, es de tipo débil restringido $(1/\alpha, 1/\alpha)$ y, consecuentemente, M_α es de tipo fuerte (p,p) para $p > 1/\alpha$. También se sabe que el operador M_α no es de tipo débil $(1/\alpha, 1/\alpha)$ en el caso $0 < \alpha < 1$. Con estos resultados es posible obtener la convergencia puntual de los promedios de Cesàro $P_\epsilon^\alpha f$ para funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p > 1/\alpha$ y para funciones en el espacio de Lorentz $L(1/\alpha, 1)$. En el Capítulo 2 damos los detalles de estos resultados.

Así como definimos los promedios $P_\epsilon^\alpha f$ utilizando cubos, es posible definir promedios similares utilizando rectángulos n dimensionales de lados paralelos a los ejes coordenados y, en general, podemos definir los promedios en espacios producto. Para definir estos promedios comenzamos con algo de notación. Sea $L \in \mathbb{N}$, consideramos a $\mathbb{R}^n$ compuesto por L bloques de la siguiente manera

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_L}.$$

Si $D_i := \{j \in \mathbb{N} : n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1 \le j \le n_2 + \cdots + n_i\}$, con

$$x^i := (x_j : j \in D_i) \in \mathbb{R}^{n_i}, i = 1, \cdots, L,$$

representamos las coordenadas del bloque n_i. Dados $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_L)$ con $0 < \alpha_i \le 1$, $i = 1, \cdots, L$ y $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_L)$, con $\epsilon_i > 0$ para todo i, $1 \le i \le L$, definimos la función

$$\Phi_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}}(x) = \varphi_{\epsilon_1}^{\alpha_1}(x^1) \cdots \varphi_{\epsilon_L}^{\alpha_L}(x^L)$$

donde

$$\varphi_{\epsilon_i}^{\alpha_i}(x^i) = \frac{1}{\epsilon_i^{n_i}} \varphi^{\alpha_i}\left(\frac{x^i}{\epsilon_i}\right)$$

y $\varphi^{\alpha_i} : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ es la función definida en (0.0.6). Notemos que $\Phi_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}}(x)\, dx = 1.$$

Llamaremos *promedios de Cesàro en espacios producto* o simplemente *promedios de Cesàro generalizados* a los promedios

$$\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} f(x) = f * \Phi_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}}(x). \tag{0.0.9}$$

Si escribimos $Q_i = Q(x^i, \epsilon_i)$, los promedios $\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}}$ se pueden escribir como

$$\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} f(x) = \frac{C(\bar{n}, \bar{\alpha})}{\prod_{i=1}^{L} \epsilon_i^{n_i+\alpha_i-1}} \int_{Q_1} \cdots \int_{Q_L} f(y) \prod_{i=1}^{L} d(y^i, \partial Q_i)^{\alpha_i - 1}\, dy^L \cdots dy^1.$$

Asociado a los promedios de Cesàro $\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}}$ tenemos el operador maximal

$$\mathcal{M}_{\bar{\alpha}} f(x) = \sup_{\bar{\epsilon}>0} \mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} |f|(x), \tag{0.0.10}$$

donde, como antes, $\bar{\epsilon} > 0$ significa $\epsilon_i > 0$ para todo $i = 1, \cdots, L$. Resulta claro que el operador $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ verifica la siguiente desigualdad

$$\mathcal{M}_{\bar{\alpha}} f(x) \leq M_{\alpha_1}^1 \circ \cdots \circ M_{\alpha_L}^L f(x), \tag{0.0.11}$$

donde los operadores $M_{\alpha_i}^i$ son los operadores maximales M_{α_i} actuando sólo en las variables x^i.

Con el propósito de obtener acotaciones para el operador $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$, teniendo en cuenta la desigualdad (0.0.11), en el Capítulo 1 nos planteamos la acotación de operadores T que resultan de la composición de L operadores T_i, cuando conocemos determinadas acotaciones de los operadores T_i. En este caso, obtener desigualdades de tipo fuerte para operadores de tipo composición a partir de desigualdades de tipo fuerte de cada uno de los operadores que lo componen, resulta sencillo. Sin embargo, resulta más delicado el obtener para el operador T desigualdades en el extremo donde deja de ser de tipo fuerte. Como antecedentes podemos citar los trabajos de C.J. Neugebauer [**36**] y de B. Bongioanni y E. Harboure [**8**], donde tratan los casos en que en el extremo todos los operadores verifican el mismo tipo de desigualdad, de tipo débil en el primer caso y de tipo débil restringido en el segundo caso. El resultado que probamos en el Capítulo 1 es el siguiente.

Teorema 0.0.2. *Sean $1 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_{L-1} \leq p_L$ y supongamos que existe k con $0 \leq k \leq L-1$ tal que $1 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_{L-k-1} < p_{L-k} = \cdots = p_L$. Sean T_i, $i = 1, \cdots, L$, operadores sublineales de tipo fuerte (∞, ∞) y donde cada T_i es de tipo débil restringido (p_i, p_i). Luego, $T = T_1 \circ \cdots \circ T_L$ satisface la siguiente desigualdad*

$$\nu(\{x \in X : |Tf(x)| > t\}) \leq C \left(\varphi_k(1/t) \int_0^\infty s^{\frac{1}{p_L}-1} \varphi_k(f^*(s))\, ds \right)^{p_L},$$

para todo $t > 0$, donde $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$ y f^* es la reordenada decreciente de f.

Aplicando este resultado a la composición $M_{\alpha_1}^1 \circ \cdots \circ M_{\alpha_L}^L$ en el Capítulo 2 probamos el siguiente resultado.

TEOREMA 0.0.3. *Dado $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_L)$, sea $\alpha_* = \min\limits_{1\le i\le L} \alpha_i$ y supongamos que existen exactamente k números α_i, con $1 \le k \le L$, tales que $\alpha_* = \alpha_i$. Luego,*

$$\lim_{\bar{\epsilon}\to 0} \mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} f(x) = f(x),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p > 1/\alpha_*$ y para toda f en el espacio de Orlicz-Lorentz $\Lambda(1/\alpha_*, \varphi_k)$, donde $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$.

El espacio $\Lambda(p, \varphi)$ está definido por

$$\Lambda(p, \varphi) := \{f : \ \Psi_{p,\varphi}(cf) < \infty \text{ para } \text{ algún } c > 0\},$$

donde

$$\Psi_{p,\varphi}(f) = \int_0^\infty \varphi(f^*(t)) t^{\frac{1}{p}-1}\, dt$$

y con las funciones φ que trabajaremos, resulta ser un espacio de Banach con la norma de Luxemburg definida por

$$||f||_{p,\varphi} = \inf\{c > 0 : \ \Psi_{p,\varphi}(f/c) \le 1\}.$$

El estudio de algunas propiedades de estos espacios se encuentra también en el Capítulo 1.

En el Capítulo 2 de este trabajo también estudiamos los promedios $P_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} f$ cuando restringimos los valores de ϵ_i, $i = 1, \cdots, L$ a sucesiones lacunares. El restringirnos a estas sucesiones tiene dos propósitos: por un lado, obtener resultados de convergencia para una clase más amplia de funciones y, por otro, medir de alguna forma la velocidad de dicha convergencia. Al igual que antes comenzamos considerando el caso n dimensional, es decir, cuando $L = 1$.

Dado un número real $\rho > 1$, diremos que una sucesión de números reales positivos $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión ρ-lacunar si $\rho \le \frac{\epsilon_{k+1}}{\epsilon_k} < \rho^2$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Dada una sucesión ρ-lacunar $\{\epsilon_k\}$ definimos los promedios de Cesàro lacunares como

$$\mathcal{P}_{\epsilon_k}^{\alpha} f(x) = f * \varphi_{\epsilon_k}^{\alpha}(x),$$

y el operador maximal de Cesàro lacunar como

$$M_{\alpha,\rho} f(x) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\mathcal{P}_{\epsilon_k}^{\alpha} f(x)|,$$

donde φ^α es la función definida en (0.0.6).

Claramente el operador maximal $M_{\alpha,\rho}$ está acotado por el operador maximal M_α, por lo tanto, $M_{\alpha,\rho}$ es de tipo fuerte (p, p) para $p > 1/\alpha$ y es de tipo débil restringido $(1/\alpha, 1/\alpha)$. Pero el operador $M_{\alpha,\rho}$ es "bastante"más chico que el operador M_α, dado que probamos el siguiente resultado.

TEOREMA 0.0.4. *El operador maximal $M_{\alpha,\rho}$ es de tipo débil $(1,1)$ y de tipo fuerte (p,p), para todo p con $1 < p \leq \infty$.*

Este resultado, junto con resultados estándar de densidad nos permiten obtener la convergencia puntual de los promedios $\mathcal{P}^{\alpha}_{\epsilon_k} f$ para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \geq 1$.

Definiremos ahora los promedios de Cesàro generalizados sobre sucesiones lacunares. Sean $\{\epsilon^i_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $i = 1, \cdots, L$, L sucesiones ρ-lacunares de números reales. Definimos una sucesión ρ-lacunar en $\mathbb{R}^L$ como $\{\bar{\epsilon}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, donde $\bar{\epsilon}_j = (\epsilon^1_j, \cdots, \epsilon^L_j)$.

Dados $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_L)$ con $0 < \alpha_i \leq 1$, $\{\bar{\epsilon_j}\} = \{(\epsilon^1_j, \cdots, \epsilon^L_j)\}$ una sucesión ρ-lacunar en $\mathbb{R}^L$ y $x \in \mathbb{R}^n$ definimos los promedios de Cesàro generalizados sobre sucesiones lacunares como

$$\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_j} f(x) = f * \Phi^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_j}(x) \tag{0.0.12}$$

y el operador maximal sobre sucesiones lacunares como

$$\mathcal{M}_{\bar{\alpha},\rho} f(x) = \sup_{j\in\mathbb{Z}} |\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_j} f(x)| \tag{0.0.13}$$

donde

$$\Phi^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_j}(x) = \varphi^{\alpha_1}_{\epsilon^1_j}(x^1) \cdots \varphi^{\alpha_L}_{\epsilon^L_j}(x^L)$$

con

$$\varphi^{\alpha_i}_{\epsilon^i_j}(x^i) = \frac{1}{(\epsilon^i_j)^{n_i}} \varphi^{\alpha_i}\left(\frac{x^i}{\epsilon^i_j}\right)$$

y $\varphi^{\alpha_i} : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ es la función definida en (0.0.6).

Como en el caso no lacunar, la siguiente desigualdad puntual

$$\mathcal{M}_{\bar{\alpha},\rho} f(x) \leq M^1_{\alpha_1,\rho} o \cdots o M^L_{\alpha_L,\rho} f(x),$$

donde los operadores $M^i_{\alpha_i,\rho}$ son todos de tipo débil $(1,1)$ y de tipo fuerte (p,p) para todo p, $1 < p \leq \infty$ y los resultados sobre composición de operadores nos permiten probar el siguiente resultado.

TEOREMA 0.0.5. *Sean $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_L)$ con $0 < \alpha_i \leq 1$ y $\{\bar{\epsilon_j}\}$ una sucesión ρ-lacunar de $\mathbb{R}^L$. Luego,*

$$\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_j} f(x) \to f(x)$$

cuando $j \to \infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < \infty$ y para toda f en el espacio de Orlicz $\Lambda(1, \varphi_{L-1})$.

Una vez probada la convergencia puntual de una sucesión $\{U_k f(x)\}$, es de interés preguntarse por la rapidez o velocidad de convergencia. Una forma de medir la velocidad de convergencia es estudiar la convergencia de la serie de diferencias

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k[U_k f(x) - U_{k-1} f(x)]$$

donde $\{v_k\}$ es una sucesión acotada de números reales o complejos.

Así por ejemplo en [**27**] Jones y Rosenblatt estudian la serie de arriba para los promedios $U_k f(x) = 2^k \int_0^{1/2^k} f(x+t)\, dt$, en [**2**] prueban resultados similares con promedios asociados a sucesiones lacunares generales y en espacios con pesos y en [**6**] se realiza el correspondiente estudio cuando los $U_k f$ son los promedios de Cesàro unidimensionales.

Nuestro objetivo en esta parte es estudiar la convergencia de la serie de arriba cuando los U_k están dados por los operadores de Cesàro lacunares n dimensionales y, en general, cuando tenemos promedios de Cesàro lacunares en espacios producto.

Para cada $N \in \mathbb{Z}^2$, $N = (N_1, N_2)$ con $N_1 < N_2$ definimos la suma

$$\mathcal{T}_N^{\bar{\alpha}} f(x) = \sum_{N_1}^{N_2} v_k[\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}_k}^{\bar{\alpha}} f(x) - \mathcal{P}_{\bar{\epsilon}_{k-1}}^{\bar{\alpha}} f(x)].$$

Nuestro propósito es probar resultados de convergencia de $\mathcal{T}_N^{\bar{\alpha}} f(x)$ en casi todo punto cuando $N = (N_1, N_2)$ tiende a $(-\infty, +\infty)$. Para ello, como es usual, estudiamos la acotación del operador maximal asociado

$$\mathcal{T}^* f(x) = \sup_N |\mathcal{T}_N^{\bar{\alpha}} f(x)|$$

.

Utilizando un resultado de J. Duandikoetxea y J. L. Rubio de Francia [**16**] probamos que el operador $\mathcal{T}^*$ es de tipo fuerte (p, p) para $p > 1$. En una primera etapa lo hicimos para el caso de $\mathbb{R}^n$ considerado como un sólo bloque y posteriormente cuando consideramos a $\mathbb{R}^n$ compuesto por dos bloques ($\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$). En el caso $p = 1$ ya no es posible aplicar los resultados de [**16**]. En este caso sólo pudimos resolver en este trabajo el caso de los promedios de Cesàro actuando sobre $\mathbb{R}^n$ como un bloque completo, obteniendo en este caso que el operador T^* (el operador $\mathcal{T}^*$ cuando $L = 1$) es de tipo débil $(1, 1)$. Como consecuencia de estos resultados de acotación que están probado en el Capítulo 2, logramos probar los siguientes resultados.

(i) $\mathcal{T}_N^{\bar{\alpha}} f$ converge en casi todo punto para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < \infty$ cuando $N = (N_1, N_2)$ tiende a $(-\infty, +\infty)$.

(ii) $T_N^\alpha f$ (el operador $\mathcal{T}_N^{\bar{\alpha}} f$ cuando $L=1$) converge en casi todo punto para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$ cuando $N=(N_1,N_2)$ tiende a $(-\infty,+\infty)$.

En otra etapa del trabajo investigamos las integrales singulares en el sentido Cesàro en espacios producto. El Capítulo 3 está dedicado a este tema. Las integrales singulares en el sentido Cesàro fueron estudiados en [**3**]. En dicho trabajo, dado un núcleo de Calderón-Zygmund K, se estudia la existencia del siguiente límite

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x-y|>\epsilon} f(y)K(x,y)\left(1-\frac{\epsilon}{|x-y|}\right)^\beta dy \tag{0.0.14}$$

donde $-1 < \beta \leq 0$. Para estudiar la existencia de este límite, los autores de [**3**] estudian la acotación del operador maximal asociado $T_\beta^* f = \sup_{\epsilon>0} |T_{\epsilon,\beta} f|$, donde

$$T_{\epsilon,\beta} f(x) = \int_{|x-y|>\epsilon} f(y)K(x,y)\left(1-\frac{\epsilon}{|x-y|}\right)^\beta dy$$

y obtienen la siguiente desigualdad puntual

$$T_\beta^* f(x) \leq C[T^* f(x) + \tilde{M}_\beta f(x)], \tag{0.0.15}$$

donde $T^* = T_0^*$, es decir, es el operador maximal asociado a las truncaciones correspondiente al caso $\beta = 0$ y

$$\begin{aligned}\tilde{M}_\beta f(x) =& \sup_{\epsilon>0} \frac{1}{\epsilon^{n+\beta}} \int_{\epsilon<|x-y|\leq 2\epsilon} |f(y)|(|x-y|-\epsilon)^\beta\, dy \\ =& \sup_{\epsilon>0} \frac{1}{\epsilon^{n+\beta}} \int_{B(x,2\epsilon)\setminus B(x,\epsilon)} |f(y)|(d(y,\partial B(x,\epsilon))^\beta\, dy,\end{aligned}$$

donde $B(x,\epsilon)$ es la bola n dimensional con centro en x y radio ϵ. Notemos que, a diferencia de los operadores estudiados al principio, en el operador $\tilde{M}_\beta$ definido arriba integramos sobre coronas y el núcleo es una potencia $\beta \leq 0$ de la distancia al borde interior de la corona $B(x,2\epsilon)\setminus B(x,\epsilon)$, donde $B(x,r) = \{y : \ |x-y| \leq r\}$.

Con las mismas técnicas utilizadas para probar los resultados de acotación para el operador maximal M_α, $0 < \alpha \leq 1$, definido en (0.0.8), es posible probar que el operador $\tilde{M}_\beta$, $-1 < \beta \leq 0$, es de tipo débil restringido $(1/(1+\beta), 1/(1+\beta))$, no es de tipo débil (p,p) para ningún $p \leq 1/(1+\beta)$ y es de tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1/(1+\beta)$. Luego, como T^* es de tipo fuerte (p,p) para todo $p>1$ y es de tipo débil $(1,1)$, de (0.0.15) se tiene que el operador T_β^* verifica el mismo tipo de desigualdades que el operador $\tilde{M}_\beta$. Como consecuencia de estos resultados se obtiene en [**3**] el siguiente resultado.

Teorema 0.0.6. *Sea $-1 < \beta \leq 0$ y K un núcleo de Calderón-Zygmund. Si K satisface que*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\epsilon<|x-y|<1} K(x,y)\left(1-\frac{\epsilon}{|x-y|}\right)^\beta dy,$$

existe para casi todo x, luego el límite en (0.0.14) *existe en casi todo punto para cualquier función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $p > 1/(1+\beta)$ y para cualquier $f \in L(1/(1+\beta), 1)$.*

Nuestro propósito en esta parte es estudiar los espacios de funciones para los cuales existe la integral singular en el sentido Cesàro en el contexto de espacios producto. Comenzaremos definiendo los operadores con los que trabajamos. Consideremos nuevamente $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_L}$ y $x = (x^1, \cdots, x^L)$, con $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$. También consideremos los núcleos de Calderón Zygmund K_i definidos sobre $\mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i} \setminus \Delta$, donde Δ es la diagonal de $\mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i}$ y definamos el núcleo producto

$$\mathcal{K}(x,y) = \prod_{i=1}^{L} K_i(x^i, y^i)$$

y para $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_L) \in \mathbb{R}_+^L$ definimos las truncaciones y el operador maximal asociados al núcleo $\mathcal{K}$ como

$$\mathcal{T}_{\bar{\epsilon}} f(x) = \int_{|x^1-y^1|>\epsilon_1} \cdots \int_{|x^L-y^L|>\epsilon_L} \mathcal{K}(x,y) f(y)\, dy$$

y

$$\mathcal{T}^* f = \sup_{\bar{\epsilon} \in \mathbb{R}_+^L} |T_{\bar{\epsilon}} f|.$$

Las integrales singulares asociadas a estos núcleos producto generalizan a la Transformada de Hilbert múltiple (ver [**19**]) y son casos particulares de las integrales singulares estudiadas en [**20**]. Así, el operador $\mathcal{T}^*$ resulta ser de tipo fuerte (p,p) para $1 < p < \infty$.

Procediendo como en [**3**] definimos las integrales singulares en espacios producto en el sentido Cesàro.

Dados $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_L) \in R_+^L$ y $\bar{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_L)$ con $-1 < \beta_i \leq 0$, $i = 1, \cdots, L$, sea

$$\mathcal{K}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}}(x,y) = \prod_{i=1}^{L} K_{i,\epsilon_i,\beta_i}(x^i, y^i),$$

donde

$$K_{i,\epsilon_i,\beta_i}(x^i, y^i) = K_i(x^i, y^i) \left(1 - \frac{\epsilon_i}{|x^i - y^i|}\right)^{\beta_i}$$

y K_i es un núcleo de Calderón-Zygmund definido en $\mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i} \setminus \Delta_i$. Con estos núcleos definimos las truncaciones

$$\mathcal{T}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}} f(x) = \int_{|x^1-y^1|>\epsilon_1} \cdots \int_{|x^L-y^L|>\epsilon_L} f(y) \mathcal{K}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}}(x,y)\, dy^1 \cdots dy^L$$

y el operador maximal asociado

$$\mathcal{T}_{\bar{\beta}}^* f(x) = \sup_{\bar{\epsilon} \in \mathbb{R}_+^L} |T_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}} f(x)|.$$

Como en el caso clásico, para estudiar la existencia del límite

$$\lim_{\bar{\epsilon}\to 0} \mathcal{T}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}} f(x)$$

estudiamos el operador maximal $\mathcal{T}^*_{\bar{\beta}}$. La acotación puntual que obtuvimos, por ejemplo para el caso más sencillo de dos bloques, es la siguiente

$$\mathcal{T}^*_{\bar{\beta}} \leq C\left[\tilde{\mathcal{M}}_{\bar{\beta}} + \tilde{M}^1_{\beta_1} \circ T^{2,*} + \tilde{M}^2_{\beta_2} \circ T^{1,*} + \mathcal{T}^*\right],$$

donde

$$\tilde{M}^i_\beta f(x) = \sup_{\epsilon>0} \int_{B(x^i,2\epsilon)\setminus B(x^i,\epsilon)} |f(x^1,\cdots,y^i,\cdots,x^L)| \left(1 - \frac{\epsilon}{|x^i - y^i|}\right)^\beta dy^i,$$

$$T^i_{\epsilon,\beta} f(x) = \int_{|x^i-y^i|>\epsilon} f(x^1,\cdots,y^i,\cdots,x^L) K_{i,\epsilon,\beta}(x^i,y^i)\, dy^i$$

y

$$T^{i,*}_\beta f(x) = \sup_{\epsilon>0} |T^i_{\epsilon,\beta} f(x)|.$$

Cuando $\beta = 0$ denotamos a $T^{i,*}_\beta$ simplemente con $T^{i,*}$.

Cuando en la primera parte de esta introducción se trató el comportamiento de la composición de operadores, los operadores involucrados en la composición eran todos operadores maximales de tipo Cesàro y por tanto verifican desigualdades de tipo débil restringido en un extremo y en el otro ($p = \infty$) son de tipo fuerte (∞,∞). Esta situación es diferente al tratar con el operador $\mathcal{T}^*_{\bar{\beta}}$, puesto que en la suma de operadores que lo acotan puntualmente tenemos sumandos que resultan ser la composición de operadores donde uno de ellos (el correspondiente al operador maximal asociado a las truncaciones de integrales singulares) es de tipo fuerte (p,p) para $p > 1$, pero no de tipo fuerte (∞,∞). Este hecho nos condujo a estudiar el comportamiento de este tipo de composición. En el Capítulo 1 demostramos el siguiente teorema que nos permite obtener la acotación del operador $\mathcal{T}^*_{\bar{\beta}}$.

Teorema 0.0.7. *Dados $j \in \mathbb{N}$ y $p > 1$, sea S un operador que verifica la siguiente desigualdad: existe $C > 0$ tal que*

$$\nu(\{x : |Sf(x)| > t\}) \leq \left(\frac{C}{t}\int_t^\infty \nu(\{x : |f(x)| > s/C\})^{1/p} [\log(s/t)]^{j-1}\, ds\right)^p, \tag{0.0.16}$$

para todo $t > 0$. Sea T un operador sublineal tal que T es de tipo débil restringido (q,q), para algún $q > p(j+1)$ y para $q = p$. Luego $S \circ T$ verifica la siguiente desigualdad: existe $C > 0$ tal que

$$\nu(\{x : |(S\circ T)f(x)| > t\}) \leq \left(\frac{C\phi_j(1/t)}{t}\int_0^\infty \nu(\{x : |f(x)| > s\})^{1/p} \phi_j(s)\, ds\right)^p, \tag{0.0.17}$$

donde $\phi_j(t) = (1 + \log^+ t)^j$.

Luego, como consecuencia de los resultados para la composición de operadores probados en el capítulo 1, probamos el siguiente resultado.

Teorema 0.0.8. *Dado $\bar{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_L)$ con $-1 < \beta_i \leq 0$ y supongamos que existen exactamente k números β_i, con $1 \leq k \leq L$ tales que $\beta_* = \text{mín}\, \beta_i$. Sean K_i núcleos de Calderón-Zygmund definidos sobre $\mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i} \setminus \Delta$, donde Δ es la diagonal de $\mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i}$, $1 \leq i \leq L$, tales que existen los límites*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon < |x^i - y^i| < 1} K_i(x^i, y^i) \left(1 - \frac{\epsilon}{|x^i - y^i|}\right)^{\beta_i} dy^i, \quad 1 \leq i \leq L,$$

en casi todo punto. Entonces existe el límite

$$\lim_{\bar{\epsilon} \to 0} \mathcal{T}_{\bar{\epsilon}, \bar{\beta}} f(x)$$

en casi todo punto para cualquier $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p > 1/(1 + \beta_*)$ y y para toda $f \in \Lambda(1/(1 + \beta_*), \varphi_{k-1})$ donde $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$.

El Capítulo 4 de esta tesis está dedicado a la aplicación de algunos de los resultados obtenidos en la primera parte del trabajo al contexto de Teoría Ergódica multiparamétrica. Comenzaremos describiendo los resultados sobre convergencia de promedios ergódicos de tipo Cesàro multiparamétricos.

Sea $(X, \mathcal{F}, \nu)$ un espacio de medida σ- finito, $0 < \alpha < 1$ y sea T un operador lineal definido sobre algún $L^p(\nu)$, $1 < p < \infty$. Los promedios Cesàro-α y el operador maximal asociados al operador T se definen como

$$R_{n,\alpha} f = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{i=0}^{n} A_{n-i}^{\alpha-1} T^i f$$

y

$$M_\alpha f = \sup_{n \in \mathbb{N}} |R_{n,\alpha} f|,$$

donde $A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{n!}$, $n \neq 0$ y $A_0^\alpha = 1$.

En [**34**] y en [**7**] se prueba que si $1/\alpha < p < \infty$ y T es un operador de Lamperti invertible sobre $L^p(\nu)$ (T es un operador de Lamperti si T es lineal y envía funciones con soportes disjuntos en funciones del mismo tipo) tal que

$$\sup_{n \geq 0} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |T|_\alpha^k \right\|_{L^{p\alpha}(\nu)} < \infty, \tag{0.0.18}$$

donde $|T|$ es tal que $|Tf| = |T||f|$ y $|T|_\alpha f = [|T|(f^\alpha)]^{1/\alpha}$, luego los promedios $R_{n,\alpha} f$ convergen en casi todo punto y en $L^p(\nu)$ para toda $f \in L^p(\nu)$.

Por otro lado, en [**4**] se trata el caso límite $p = 1/\alpha$ considerando operadores de Lamperti T sobre $L^{1/\alpha}$ invertibles y tales que

$$\sup_{n \geq 0} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |T|_\alpha^k \right\|_{L^1(\nu)} < \infty \tag{0.0.19}$$

y

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} ||T^n||_\infty < \infty. \tag{0.0.20}$$

Estos resultados generalizan resultados previos dados en [**26**] y [**9**].

En esta etapa del trabajo nos planteamos, para $T_1, \cdots, T_k$ operadores lineales, los promedios de tipo Cesàro ergódicos múltiples definidos como

$$\mathcal{R}_{\bar{n},\bar{\alpha}}f(x) = R_{n_1,\alpha_1} \circ \cdots \circ R_{n_k,\alpha_k} f(x) = \frac{1}{\prod_{j=1}^k A_{n_j}^{\alpha_j}} \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_k=0}^{n_k} \prod_{j=1}^{k} A_{n_j-i_j}^{\alpha_j-1} T_k^{i_k} \cdots T_1^{i_1} f(x)$$

y su operador maximal ergódico asociado

$$\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}f(x) = \sup_{\bar{n}>0} |R_{\bar{n},\bar{\alpha}}f(x)|,$$

donde $\bar{n} = (n_1, \cdots, n_k) > 0$ significa que $n_j > 0$ para todo $1 \le j \le k$ y $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$, con $0 < \alpha_j \le 1$, para $1 \le j \le k$.

Dado que

$$\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}f(x) \le M_{\alpha_1} \circ \cdots \circ M_{\alpha_k} f(x),$$

se pueden aplicar los resultados de composición de operadores dados en el Capítulo 1 para obtener acotaciones para el operador $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$. Esto, junto con la convergencia de los promedios $\mathcal{R}_{\bar{n},\bar{\alpha}}f$ en subconjuntos densos adecuados, nos permite obtener los siguientes resultados.

Teorema 0.0.9. *Sea (X, F, ν) un espacio de medida σ- finito. Sea $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$, $0 < \alpha_j \le 1$, para todo $i = 1, \cdots, k$, sea $\alpha_* = \min_{1\le j\le k} \alpha_j$ y $p > 1/\alpha_*$. Sean T_j, $1 \le j \le k$, operadores de Lamperti invertibles sobre $L^p(\nu)$ que conmutan entre sí. Supongamos que para cada $j = 1, \cdots, k$*

$$\sup_{n\ge0} \left|\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |T_j|_{\alpha_j}^k \right|\right|_{p\alpha_j} < \infty.$$

Luego,

(i) el operador $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ es de tipo fuerte (p, p) y

(ii) los promedios $\mathcal{R}_{\bar{n},\bar{\alpha}}f$ convergen para casi todo $x \in X$ y en la norma $L^p(\nu)$ para toda $f \in L^p(\nu)$, cuando $\bar{n}$ tiende a infinito.

Teorema 0.0.10. *Sea (X, F, ν) un espacio de medida σ- finito y $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$, $0 < \alpha_j \le 1$, $j = 1, \cdots, k$. Sea $\alpha_* = \min_{1\le j\le k} \alpha_j$ y supongamos que el mínimo α_* se alcanza en k de los números α_j. Sean T_j, $1 \le j \le k$, operadores de Lamperti invertibles sobre L^{1/α_j} que conmutan entre sí. Supongamos que para cada $j = 1, \cdots, k$*

$$\sup_{n\ge0} \left|\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |T_j|_{\alpha_j}^k \right|\right|_1 < \infty$$

y

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} ||T_j^n||_\infty < \infty.$$

Luego,

(i) el operador $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ verifica la siguiente desigualdad

$$\nu(\{x \in X :\ \mathcal{M}_{\bar{\alpha}} f(x) > t\}) \leq \left(C\varphi_{k-1}(1/t) \int_0^\infty \varphi_{k-1}(f^*)(s) s^{\alpha_*-1}\, ds \right)^{1/\alpha_*},$$

donde $\varphi_k(t) = t(1+\log^+ t)^k$ y

(ii) los promedios $\mathcal{R}_{\bar{n},\bar{\alpha}} f$ convergen para casi todo $x \in X$ y para toda $f \in \Lambda(1/\alpha_*, \varphi_{k-1})$, cuando $\bar{n}$ tiende a infinito.

Posteriormente abordamos el estudio de la Transformada de Hilbert ergódica multiparamétrica. En [**10**] M. Cotlar estudia la Transformada de Hilbert ergódica asociada a operadores que vienen dados por una transformación puntual que preserva la medida. El tipo de operador al que se asocia la Transformada de Hilbert ergódica fue generalizado por distintos autores, por ejemplo en [**37**] R. Sato considera operadores positivos, invertibles sobre $L^p(\nu)$, $1 < p < \infty$, tales que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} ||T^n||_p < \infty.$$

Bajo estas hipótesis prueba que el límite cuando $n \to \infty$ de las truncaciones

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{T^k f - T^{-k} f}{k} \right) = \sum_{1\leq |k| \leq n} \frac{T^k f}{k}$$

existe en casi todo punto de X y en la norma $L^p(\nu)$ para toda $f \in L^p(\nu)$. En trabajos posteriores (ver [**38**] o [**7**]) se generalizan aún más las hipótesis en el operador T.

Siguiendo la ideas desarrolladas hasta el momento en este trabajo, nos planteamos la existencia de la transformada de Hilbert ergódica doble. Es decir, dados T_1 y T_2 dos operadores lineales e invertibles que conmutan entre sí, nos preguntamos por el límite, cuando $n_1, n_2 \to \infty$ independientemente, de las truncaciones

$$\begin{aligned} H_{\bar{n}} f(x) &= H_{n_1} \circ H_{n_2} f(x) \\ &= \sum_{1\leq |k_1| \leq n_1} \sum_{1\leq |k_2| \leq n_2} \frac{T_1^{k_1} T_2^{k_2} f(x)}{k_1 k_2}. \end{aligned}$$

Hasta donde sabemos, este operador no fue estudiado previamente. Por lo tanto, esta etapa del trabajo comienza con el estudio del operador maximal $H^* f = \sup_{n_1,n_2\geq 1} |H_{\bar{n}} f|$. Las hipótesis que consideramos en esta parte del trabajo son las correspondientes al artículo de R. Sato [**37**].

En [**7**] se estudia la existencia de la transformada de Hilbert ergódica en el sentido Cesàro-β, con $-1 < \beta < 0$, esto es, se estudia la existencia del límite cuando $n \to \infty$ de

$$H_{n,\beta} = \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{k=1}^{n+1} A_{n+1-k}^\beta \left(\frac{T^k f - T^{-k} f}{k} \right) = \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{1 \le |k| \le n+1} A_{n+1-|k|}^\beta \frac{T^k f}{k}.$$

Estudiar la existencia del límite de los $H_{n,\beta} f$ equivale a estudiar el límite en el sentido Cesàro-β de las truncaciones ergódicas usuales H_n.

Bajo condiciones similares a las expuestas para el caso de los promedios ergódicos de tipo Cesàro, en [**7**] se prueba que para cualquier $f \in L^p(\nu)$ el límite de las truncaciones $H_{n,\beta}$ cuando $n \to \infty$ existe en casi todo punto y en el sentido de $L^p(\nu)$ y, en el caso límite $p = 1/(1+\beta)$, en [**4**] se prueba la existencia de dicho límite en casi todo punto, para cualquier $f \in L_{1/\beta,1}(\nu)$.

Con estos resultados nos planteamos la existencia de la transformada de Hilbert ergódica doble en el sentido Cesàro-β. Es decir, dados T_1 y T_2 dos operadores lineales e invertibles que conmutan entre sí y dados $-1 < \beta_1, \beta_2 < 0$ nos preguntamos por la existencia del límite, cuando $n_1, n_2 \to \infty$ independientemente, de las truncaciones

$$\begin{aligned} H_{\bar{n},\bar{\beta}} f(x) &= H_{n_1,\beta_1} \circ H_{n_2,\beta_2} f(x) \\ &= \frac{1}{A_{n_1}^{\beta_1} A_{n_2}^{\beta_2}} \sum_{1 \le |k_1| \le n_1} \sum_{1 \le |k_2| \le n_2} A_{n_1+1-|k_1|}^{\beta_1} A_{n_2+1-|k_2|}^{\beta_2} \frac{T_1^{k_1} T_2^{k_2} f(x)}{k_1 k_2}. \end{aligned}$$

Como lo hemos hecho anteriormente, para estudiar el límite puntual de estas truncaciones probamos que el operador maximal

$$H_{\bar{\beta}}^* f(x) = \sup_{n_1 \ge 1, n_2 \ge 1} |H_{\bar{n},\bar{\beta}} f(x)|.$$

está acotado en los espacios correspondientes y que las truncaciones $H_{\bar{n},\bar{\beta}} f$ convergen puntualmente para funciones en un subconjunto denso de dichos espacios. Cabe destacar que la acotación del operador maximal $H_{\bar{\beta}}^*$ se obtiene como consecuencia de acotar al mismo puntualmente por la suma de composición de operadores de los cuales se conocen algunas acotaciones. Por otra parte, la convergencia puntual de las truncaciones $H_{\bar{n},\bar{\beta}} f$ para funciones en un subconjunto denso de dichos espacios también resulta clave en este caso. Concretamente obtuvimos el siguiente resultado.

Teorema 0.0.11. *Sea (X, F, ν) un espacio de medida σ- finito, $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$, $-1 < \beta_1, \beta_2 \le 0$ y $p > 1/(1+\beta_*)$, donde $\beta_* = \min\{\beta_1, \beta_2\}$. Sean T_1 y T_2 operadores lineales positivos invertibles con inversos positivos sobre L^p que conmutan entre sí y tales que* $\sup\{||T_i^n||_p : n \in \mathbb{Z}\} = M < \infty$. *Entonces, el límite*

$$\mathcal{H}_{\bar{\beta}} f(x) = \lim_{\bar{n} \to \infty} H_{\bar{n},\bar{\beta}} f(x)$$

existe en casi todo punto y en la norma de $L^p(\nu)$, para toda $f \in L^p(\nu)$.

Finalmente, el Capítulo 5 está dedicado a caracterizar los pesos w para los cuales el operador maximal de Cesàro definido en el contexto de espacios producto resulta de tipo fuerte y de tipo débil (p,p) con respecto a la medida $w(x)dx$. El operador maximal M_α definido en $\mathbb{R}^n$ (considerando $\mathbb{R}^n$ como un sólo bloque) en el contexto de los espacios L^p con pesos fue estudiado en [**5**]. En dicho trabajo se caracterizan los pesos w para los cuales el operador M_α resulta ser de tipo fuerte, de tipo débil y de tipo débil restringido con respecto a la medida $w(x)dx$. La condición que caracteriza el tipo fuerte (p,p) y el tipo débil (p,p) del operador M_α es la denominada condición $A_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ definida de la siguiente manera: $w \in A_{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ si existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$,

$$\left(\int_Q w\right)^{1/p}\left(\int_Q w(y)^{1-p'}d(y,\partial Q)^{(\alpha-1)p'}\right)^{1/p} \leq C|Q|^{1+\frac{\alpha-1}{n}}, \quad 0<\alpha\leq 1.$$

El trabajo de generalizar los resultados de [**5**] al caso de espacios producto comienza caracterizando los pesos para los cuales la versión no centrada $\mathcal{N}_{\bar\alpha}$ del operador $\mathcal{M}_{\bar\alpha}$ satisface desigualdades de tipo débiles y fuerte con respecto a dicho peso. El operador maximal de Cesàro no centrado se define como

$$\mathcal{N}_{\bar\alpha}f(x) = \sup_{\mathcal{R}:x\in\mathcal{R}} \frac{1}{\prod_{i=1}^L |Q_i|^{1+\frac{\alpha_i-1}{n_i}}} \int_{Q_1}\cdots\int_{Q_L} |f(y^1,\cdots,y^L)| \prod_{i=1}^L d(y^i,\partial Q_i)^{\alpha_i-1}\,dy^1\cdots dy^L,$$

donde $\mathcal{R} = Q_1\times\cdots\times Q_L$ y los Q_i son cubos de $\mathbb{R}^{n_i}$. Con técnicas similares a las empleadas para probar el correspondiente resultado para el operador maximal fuerte (caso $\alpha_i = 1$ para todo i), ver por ejemplo [**21**], podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 0.0.12. *Sea $\bar\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_L)$, $0<\alpha_i\leq 1$, $i=1,\cdots,L$, $w\geq 0$ y $1/\alpha_* < p < \infty$ donde $\alpha_* = \min \alpha_i$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $w \in \mathcal{A}^*_{p,\bar\alpha}$ esto es, existe $C>0$ tal que para todo rectángulo de la forma $\mathcal{R} = Q_1\times\cdots\times Q_L$, con Q_i cubos contenidos en $\mathbb{R}^{n_i}$ se verifica

$$\left(\int_{\mathcal{R}} w\right)^{1/p}\left(\int_{\mathcal{R}} w^{1-p'}(y)\prod_{i=1}^L d(y^i,\partial Q_i)^{\alpha_i-1}\,dy\right)^{1/p'} \leq C\prod_{i=1}^L |Q_i|^{1+\frac{\alpha_i-1}{n_i}}.$$

(ii) Existe $C>0$ tal que para cada $i=1,\cdots,L$,

$$w_{\tilde{x}_i}(\cdot) = w(x^1,\cdots,x^{i-1},\cdot,x^{i+1},\cdots,x^L) \in A_{p,\alpha_i}(\mathbb{R}^{n_i}),$$

para casi todo $(x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^L)\in\mathbb{R}^{n-n_i}$, es decir, para todo $Q_i\subset\mathbb{R}^{n_i}$ y casi todo $(x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^L)\in\mathbb{R}^{n-n_i}$, se verifica

$$\left(\int_{Q_i} w_{\tilde{x}_i}(y^i)dy^i\right)^{1/p}\left(\int_{Q_i} w_{\tilde{x}_i}^{1-p'}(y^i)d(y^i,\partial Q_i)^{(\alpha_i-1)p'}dy^i\right)^{1/p'} \leq C|Q_i|^{1+\frac{\alpha_i-1}{n_i}}.$$

(iii) $\mathcal{N}_{\bar\alpha}$ es de tipo fuerte (p,p) con respecto a w.

(iv) $\mathcal{N}_{\bar\alpha}$ es de tipo débil (p,p) con respecto a w.

Obtener los resultados del teorema anterior para el operador centrado $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ no es trivial. Mediante la introducción de ciertos operadores maximales no centrados definidos sobre partes de cada uno de los cubos donde se integra en la definición de $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$, es posible probar que la clase de pesos $\mathcal{A}_{p,\bar{\alpha}}$ también caracteriza las desigualdades de tipo fuerte y débil para el operador $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ en el rango $p > 1/\alpha_*$.

Capítulo 1

Composición de Operadores

Comenzamos este capítulo dando algunas definiciones y notaciones sobre los espacios y las desigualdades con que se trabajará a lo largo de toda la tesis . Consideramos los espacios de Lebesgue, Lorentz, Orlicz y Orlicz-Lorentz. Probamos además dos propiedades de los espacios de Orlicz-Lorentz que serán utilizadas en el resto del trabajo. En la segunda sección presentamos resultados donde se ilustra el comportamiento de la composición de operadores cuando se conocen determinadas acotaciones de los operadores que lo componen.

1.1. Algunas definiciones y notaciones

Sea (X, ν) un espacio de medida σ- finito y $\mathfrak{M}$ el espacio de las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ medibles con respecto a la medida ν. Para $f \in \mathfrak{M}$ se definen las normas

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\nu \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

y

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{a \geq 0 : \nu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\},$$

con la convención que $\text{ínf}\,\emptyset = \infty$. Con estas normas se definen los **espacios de Lebesgue**

$$L^p(X, \nu) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \|f\|_p < \infty\}.$$

Abreviaremos algunas veces $L^p(X, \nu)$ mediante $L^p(\nu)$ o simplemente L^p. Es conocido que los espacios L^p, $1 \leq p \leq \infty$, son espacios de Banach.

Los **espacios de Lorentz** $L(p, q)$ constituyen una generalización de los espacios de Lebesgue y se definen como

$$L(p, q) = L(p, q)(X, \nu) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \|f\|_{p,q} < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left[\dfrac{q}{p} \displaystyle\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} & \text{si} \quad 1 \leq p < \infty \quad 1 \leq q < \infty, \\ \\ \displaystyle\sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) & \text{si} \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad q = \infty. \end{cases}$$

La función f^* es la **función reordenada decreciente** de f definida sobre $[0,\infty]$ como

$$f^*(t) = \text{ínf}\{s : \lambda_f(s) \leq t\}$$

y λ_f es la **función de distribución** de f, esto es, $\lambda_f : (0,\infty) \to [0,\infty]$ y

$$\lambda_f(s) = \nu(\{x : |f(x)| > s\}).$$

Si bien f^* y λ_f dependen de la medida ν, por simplicidad no pondremos la medida en la notación. En cada Capítulo quedará claro cuál es la medida con la que se está trabajando.

El funcional $\|\cdot\|_{p,q}$ definido recientemente resulta ser una casi-norma, dado que no verifica la desigualdad triangular. Sin embargo, es posible definir una norma equivalente que hace de los espacios de Lorentz espacios de Banach. Es conocido que estas casi-normas se pueden definir también utilizando la función distribución. Concretamente,

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left[p \displaystyle\int_0^\infty \left(\lambda_f(s)^{1/p} s\right)^q \frac{ds}{s}\right]^{1/q} & \text{si} \quad 1 \leq p < \infty, \quad 1 \leq q < \infty, \\ \\ \displaystyle\sup_{t>0} t\,(\lambda_f(t))^{1/p} & \text{si} \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad q = \infty. \end{cases}$$

Las definiciones de $\|\cdot\|_{p,q}$ también tienen sentido cuando $0 < p < 1$ y $0 < q < 1$, pero trabajaremos sólo con los casos $p, q \geq 1$.

Otra generalización de los espacios de Lebesgue la constituyen los espacios de Orlicz. Diremos que una función $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función de Young si φ es no decreciente, continua, convexa, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ si $t > 0$ y $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. Definimos los **espacios de Orlicz** asociados a funciones φ de Young como

$$L^\varphi := \{f \in \mathfrak{M} : \int_X \varphi\left(\frac{|f|}{k}\right) d\nu < \infty \text{ para algún } k > 0\}.$$

Finalmente, una generalización común a los espacios de Lorentz y de Orlicz son los denominados espacios de Orlicz-Lorentz. Sea $w : (0,\infty) \to (0,\infty)$ una función no creciente, localmente integrable y tal que $\int_0^\infty w(t)\,dt = \infty$. Sea φ una función de Young. Para cualquier función medible f definimos

$$\Psi_{w,\varphi}(f) = \int_0^\infty \varphi(f^*(t))w(t)\,dt.$$

El **espacio de Orlicz-Lorentz** $\Lambda(w,\varphi)$ se define como

$$\Lambda(w,\varphi) := \{f \in \mathfrak{M} : \Psi_{w,\varphi}(cf) < \infty \text{ para algún } c > 0\}.$$

Notar que si w es constante, el espacio $\Lambda(w,\varphi)$ coincide con el espacio de Orlicz L^φ. Por otro lado, si $\varphi(t) = t^p$ y $w(t) = \frac{p}{q} t^{\frac{q}{p}-1}$, $1 \leq q \leq p < \infty$, el espacio $\Lambda(w,\varphi)$ coincide con el espacio de Lorentz $L(p,q)$.

A lo largo de este trabajo utilizaremos espacios de Orlicz-Lorentz particulares, concretamente consideraremos funciones $w(t)=t^{\frac{1}{p}-1}$, con $p\geq 1$ y funciones de Young que verifican la denomina condición Δ_2, es decir, existe $C>0$ tal que $\varphi(2t)\leq C\varphi(t)$, para todo $t\geq 0$. Denotaremos a estos espacios particulares con $\Lambda(p,\varphi)$. Este espacio con la norma de Luxemburgo definida por

$$||f||_{p,\varphi}=\text{ínf}\{c>0:\ \Psi_{p,\varphi}(f/c)\leq 1\}$$

resulta ser un espacio de Banach. (ver por ejemplo [**23**], [**11**]).

Así como ocurre con los espacios de Lorentz, cuyas casi normas $||\cdot||_{p,q}$ se pueden definir a través de la función reordenada o utilizando la función distribución, cuando $w(t)=t^{\frac{1}{p}-1}$, con $p\geq 1$, es posible tener un resultado similar para los espacios de Orlicz-Lorentz. Como no encontramos referencia a este hecho en la bibliografía, incluimos también su prueba que resulta ser una generalización directa del resultado para Lorentz.

Lema 1.1.1. *Sea φ una función de Young y sea $\phi=\varphi'$ en casi todo punto, donde φ' es la derivada de φ. Luego, para cualquier $p\geq 1$ se tiene que*

$$p\int_0^\infty \phi(s)\lambda_f(s)^{1/p}ds=\int_0^\infty s^{\frac{1}{p}-1}\varphi(f^*(s))ds.$$

Demostración. Sin perder generalidad, podemos probar el lema para funciones no negativas. Probaremos primero el lema para funciones simples. Sea f una función simple, es decir, $f(x)=\sum_{j=1}^{N}c_j^*\chi_{E_j}(x)$ donde $c_1^*,\dots,c_N^*$ son distintos, no nulos y $E_1,\dots,E_N$ son conjuntos medibles y disjuntos. Siempre podemos suponer que $c_1^*\geq c_2^*\geq\cdots\geq c_N^*>0$. Usando la definición, tenemos que

$$\lambda_f(s)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\nu(E_j) & \text{si}\quad 0<s<c_N^*\\[2ex] \displaystyle\sum_{j=1}^{k}\nu(E_j) & \text{si}\quad c_{k+1}^*\leq s<c_k^*,\quad 1\leq k<N\\[2ex] 0 & \text{si}\quad s\geq c_1^*.\end{cases}$$

y

$$f^*(t) = \begin{cases} c_1^* & \text{si} \quad 0 < t < \nu(E_1) \\ \\ c_j^* & \text{si} \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \nu(E_k) \leq t < \sum_{k=1}^{j} \nu(E_k), \quad j = 2, 3, \ldots, N \\ \\ 0 & \text{si} \quad t \geq \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \nu(E_j). \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&p \int_0^\infty \phi(s) \left(\lambda_f(s)\right)^{1/p} ds \\
&= p \int_0^{c_N^*} \phi(s) \left(\sum_{j=1}^{N} \nu(E_j) \right)^{1/p} ds + \cdots + p \int_{c_{k+1}^*}^{c_k^*} \phi(s) \left(\sum_{j=1}^{k} \nu(E_j) \right)^{1/p} ds + \cdots \\
&\quad + p \int_{c_2^*}^{c_1^*} \phi(s) \left(\nu(E_1)\right)^{1/p} ds \\
&= p \left(\sum_{j=1}^{N} \nu(E_j) \right)^{1/p} \int_0^{c_N^*} \phi(s) ds + \cdots + p \left(\sum_{j=1}^{k} \nu(E_j) \right)^{1/p} \int_{c_{k+1}^*}^{c_k^*} \phi(s) ds + \cdots \\
&\quad + p \nu(E_1)^{1/p} \int_{c_2^*}^{c_1^*} \phi(s) ds \\
&= p \left(\sum_{j=1}^{N} \nu(E_j) \right)^{1/p} \left(\varphi(c_N^*) - \varphi(0) \right) + p \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{k} \nu(E_j) \right)^{1/p} \big(\varphi(c_k^*) - \varphi(c_{k+1}^*) \big) \\
&= p \left(\sum_{j=1}^{N} \nu(E_j) \right)^{1/p} \varphi(c_N^*) - p \left(\sum_{j=1}^{N} \nu(E_j) \right)^{1/p} \varphi(0) + p \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{k} \nu(E_j) \right)^{1/p} \varphi(c_k^*) \\
&\quad - p \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{k} \nu(E_j) \right)^{1/p} \varphi(c_{k+1}^*).
\end{aligned}$$

Como $\varphi(0) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&p \int_0^\infty \phi(s) \lambda_f(s)^{1/p} ds \\
&= p \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{k} \nu(E_j) \right)^{1/p} \varphi(c_k^*) - p \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{k} \nu(E_j) \right)^{1/p} \varphi(c_{k+1}^*).
\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Por otro lado,

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-1}\varphi(f^*(t))dt$$

$$= \int_0^{\nu(E_1)} t^{\frac{1}{p}-1}\varphi(c_1^*)dt + \sum_{k=2}^{N}\varphi(c_k^*)\int_{\sum_{j=1}^{k-1}\nu(E_j)}^{\sum_{j=1}^{k}\nu(E_j)} t^{\frac{1}{p}-1}dt$$

$$= p\left\{\varphi(c_1^*)\nu(E_1)^{\frac{1}{p}} + \sum_{k=2}^{N}\varphi(c_k^*)\left[\left(\sum_{j=1}^{k}\nu(E_j)\right)^{1/p} - \left(\sum_{j=1}^{k-1}\nu(E_j)\right)^{1/p}\right]\right\}$$

$$= p\left[\varphi(c_1^*)\nu(E_1)^{\frac{1}{p}} + \sum_{k=2}^{N}\varphi(c_k^*)\left(\sum_{j=1}^{k}\nu(E_j)\right)^{1/p} - \sum_{k=2}^{N}\varphi(c_k^*)\left(\sum_{j=1}^{k-1}\nu(E_j)\right)^{1/p}\right]$$

$$= p\sum_{k=1}^{N}\varphi(c_k^*)\left(\sum_{j=1}^{k}\nu(E_j)\right)^{1/p} - p\sum_{l=1}^{N-1}\varphi(c_{l+1}^*)\left(\sum_{j=1}^{l}\nu(E_j)\right)^{1/p}.$$

Comparando la última expresión con (1.1.1), se obtiene el resultado deseado para funciones simples.
Si f es una función medible no negativa podemos encontrar una sucesión $\{f_k\}$ de funciones simples no negativas tal que $\{f_k\}$ es monótona creciente y converge puntualmente a f. Sea λ_{f_k} la función distribución de f_k y f_k^* su reordenada. Dados $s, t > 0$ se verifica, $\lambda_{f_k}(s) \uparrow \lambda_f(s)$ y $f_k^*(t) \uparrow f^*(t)$ (ver por ejemplo [**22**] o [**25**]). Como φ es no decreciente y continua, $\varphi(f_k^*(t)) \uparrow \varphi(f^*(t))$. Por lo demostrado para funciones simples, para cada k tenemos que

$$p\int_0^\infty \phi(s)\lambda_{f_k}(s)^{1/p}ds = \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-1}\varphi(f_k^*(t))dt.$$

El resultado deseado es una consecuencia del Teorema de la Convergencia Monótona. □

Los espacios de Orlicz-Lorentz con los que trabajaremos están asociados a funciones de Young de la forma $\varphi(t) = t(1+\log^+ t)^k$, con $k \in \mathbb{N}$ y donde $\log^+ t = \max\{0, \log t\}$. Estas funciones son submultiplicativas, es decir, $\varphi(st) \leq C\varphi(s)\varphi(t)$, para cualesquiera $s, t \geq 0$. En particular, verifican la denomina condición Δ_2.

Un resultado que necesitaremos en los siguientes capítulos es el de la densidad de las funciones simples en estos espacios de Orlicz-Lorentz que estamos considerando. Este resultado en el caso unidimensional está probado por F. Levis en [**31**] . Nosotros presentamos a continuación una prueba de este resultado utilizando argumentos similares a los correspondientes en el contexto de los espacios de Lorentz.

Teorema 1.1.2. *Sea φ una función de Young que verifica la condición Δ_2 y sea $p \geq 1$. Luego, las funciones simples son densas en $\Lambda(p, \varphi)$.*

Para demostrarlo necesitamos del siguiente lema.

Lema 1.1.3. *Con las hipótesis del Teorema 1.1.2, sea $f \in \Lambda(p, \varphi)$. Luego,*

a) $f^*(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$,

b) para todo $s > 0$, $\lambda_f(s) < \infty$.

Demostración. Como φ satisface la condición Δ_2 y $f \in \Lambda(p, \varphi)$, se tiene que

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-1} \varphi(f^*(t))dt < \infty,$$

y puesto que f^* es decreciente, si $f^*(t)$ no converge a 0 cuando $t \to \infty$, será $f^*(t) \geq A > 0$, para todo $t > 0$, luego como φ es una función no decreciente resulta que $\varphi(f^*(t)) \geq \varphi(A)$. De esta manera $\varphi(A) \displaystyle\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-1} dt \leq \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-1} \varphi(f^*(t))dt < \infty$, lo cual es una contradicción. Así $f^*(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Esto prueba a).

Por otro lado, para demostrar b) supongamos que $\lambda_f(s) = \infty$ para un cierto $s > 0$, entonces, $\lambda_f(y) = \infty$, para $0 < y \leq s$, por lo tanto para todo $t > 0$ se tiene que $f^*(t) = \inf\{y > 0 : \lambda_f(y) \leq t\} \geq s$, que contradice lo obtenido en a). Luego, $\lambda_f(s) < \infty$, para $s > 0$.□

Demostración del Teorema 1.1.2. Probaremos que para cada función f no negativa en $\Lambda(p, \varphi)$ existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}$ tal que

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-1} \varphi((f - f_n)^*(t))dt \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Dada $f \in \Lambda(p, \varphi)$, $f \geq 0$ existe una sucesión creciente $\{S_n\}$, de funciones simples que convergen puntualmente a f. Además por el Lema 1.1.3 para cada $k \in N$, se tiene que $\lambda_f(1/k) < \infty$.

Si denotamos por $E_s(f) = \{x : |f(x)| > s\}$. Por el Teorema de Egorof (Ver [**44**]), dado $E_1(f)$ existe un conjunto A_1, con $A_1 \subset E_1(f)$, $\nu(E_1(f) - A_1) < 1$ y tal que, $S_n \uparrow f$ uniformemente en A_1. Luego, existe un índice n_1, tal que $0 \leq f - S_{n_1} \leq 1$ en A_1.

Análogamente, para $E_{1/2}(f)$, existen un conjunto A_2, con $A_2 \subset E_{1/2}(f)$, $\nu(E_{1/2}(f) - A_2) < 1/2$ y un índice n_2 con $n_2 > n_1$, tal que $0 \leq f - S_{n_2} \leq 1/2$ en A_2. Sucesivamente vamos obteniendo una subsucesión S_{n_k}. Sea $f_k = S_{n_k} \chi_{E_{1/k}}$. $\{f_k\}$ es creciente y verifica: $f_k(x) = 0$ si $x \notin E_{1/k}$ y $0 \leq (f - f_k)(x) \leq 1/k$ si $x \in A_k$ con $\nu(E_{1/k}(f) - A_k) < 1/k$. Entonces $\nu(\{x : |(f - f_k)(x)| > 1/k\}) \leq \nu(E_{1/k}(f) - A_k) < 1/k$. Para $t > 1/k$, $(f - f_k)^*(t) \leq (f - f_k)^*(1/k) \leq 1/k$. En consecuencia dado un t' fijo, para k grande ($k > 1/t'$), tenemos que $0 \leq (f - f_k)^*(t') \leq 1/k$ y tomando límites en k, $(f - f_k)^*(t') \to 0$ cuando $k \to \infty$. Así $(f - f_k)^*$ converge puntualmente a 0, cuando $k \to \infty$.

En definitiva, hemos obtenido una sucesión de funciones simples $\{f_k\}$, y tal que $f_k^* \uparrow f^*$ y $(f - f_k)^* \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Para $t > 0$, tenemos que

$$(f - f_k)^*(t) \leq f^*(t/2) + f_k^*(t/2) \leq f^*(t/2) + f^*(t/2) = 2f^*(t/2),$$

y como φ es no decreciente y satisface Δ_2 resulta que $\varphi((f - f_k)^*)(t) \leq \varphi(2f^*(t/2)) \leq C\varphi(f^*(t/2))$. Si $f \in \Lambda(p, \varphi)$, la función $0 < g(t) = t^{\frac{1}{p}-1}\varphi(f^*(t/2)) \in L^1$, por el Teorema de la Convergencia Dominada, se sigue que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-1}\varphi((f - f_k)^*(t))dt = 0.$$

□

A continuación daremos la notación correspondiente a la mayoría de las acotaciones que verificarán los operadores con los que trabajaremos.

Decimos que un operador T es de **tipo fuerte (p, q)** $(1 \leq p, q \leq \infty)$ si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p, \tag{1.1.2}$$

para toda $f \in L^p(\nu)$. Se dice que T es de **tipo débil (p, q)** $(1 \leq p < \infty,\ 1 \leq q < \infty)$ si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\nu(\{x : |Tf(x)| > t\}) \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{t}\right)^q, \tag{1.1.3}$$

para todo $t > 0$ y para toda $f \in L^p(\nu)$. Decimos que T es de **tipo débil restringido** (p, q) $(1 \leq p < \infty,\ 1 \leq q \leq \infty)$ si existe una constante $C > 0$ tal que

$$||Tf||_{q,\infty} \leq C||f||_{p,1}. \tag{1.1.4}$$

En este trabajo trataremos con operadores sublineales, esto es, $|T(f + g)| \leq |Tf| + |Tg|$. Para este tipo de operadores ser de tipo débil restringido (p, q) equivale a decir que T es de tipo débil (p, q) sobre funciones características de conjuntos medibles con medida finita (ver [**41**] o [**22**]).

Algunos de los operadores con los que trabajaremos resultan ser operadores sublineales de tipo fuerte (∞, ∞) y de tipo débil restringido (p, p) para $p \geq 1$. Como se afirma en [**8**], es un hecho conocido que estas acotaciones se pueden expresar como una única desigualdad:

$$\lambda_{Tf}(t) \leq \left(\frac{C}{t}\int_{t/C}^\infty \lambda_f(s)^{1/p}\, ds\right)^p, \quad \text{para todo } t > 0, \tag{1.1.5}$$

donde C es una constante independiente de f y t. Ver también [**42**] pág. 91 para el caso $p = 1$.

Otros operadores en lugar de ser de tipo débil restringido verifican el siguiente tipo de desigualdad

$$\lambda_{Tf}(t) \leq \left(C\psi(t) \int_0^\infty \lambda_f(s)^{1/p} \phi(s)\, ds \right)^p, \quad \text{para todo } t > 0, \tag{1.1.6}$$

para determinadas funciones no negativas ψ y ϕ. Con los mismos argumentos que en el caso anterior se puede probar que un operador sublineal T es de tipo fuerte (∞, ∞) y verifica (1.1.6) si y sólo si verifica la siguiente desigualdad

$$\lambda_{Tf}(t) \leq \left(C\psi(t) \int_{t/C}^\infty \lambda_f(s)^{1/p} \phi(s)\, ds \right)^p, \quad \text{para todo } t > 0, \tag{1.1.7}$$

con constantes independientes de t y de f.

1.2. Composición de operadores

Consideremos L operadores sublineales $T_1, \cdots, T_L$, definidos sobre $\mathfrak{M}$. En esta sección estamos interesados en obtener acotaciones para el operador T que resulta de la composición de los operadores $T_1, \cdots, T_L$, es decir,

$$T = T_1 \circ \cdots \circ T_L,$$

a partir de las acotaciones de los operadores T_i, $1 \leq i \leq L$.

Cuando se trabaja con desigualdades de tipo fuerte es sencillo deducir alguna desigualdad para el operador T a partir de desigualdades de tipo fuertes para los T_i. Sin embargo, cuando se trabaja con desigualdades de tipo débil o débil restringido, el problema exige más cuidado. Nuestro propósito será obtener, a partir del conocimiento de determinadas acotaciones en los operadores T_i, $1 \leq i \leq L$, información sobre las acotaciones del operador T en el extremo donde deja de ser de tipo fuerte (p, p) para un determinado valor de p.

En [**36**] C. J. Neugebauer prueba para el caso en que todos los T_i son un mismo operador el siguiente resultado.

Teorema 1.2.1. [**36**] *Si T es un operador sublineal que es de tipo débil $(1, 1)$ y de tipo fuerte (∞, ∞), luego $T^{(j)} = T \circ \cdots \circ T$, (la composición de j veces el operator T), satisface la siguiente desigualdad*

$$\nu(\{x :\ |T^{(j)} f(x)| > t\}) \leq \frac{C^j}{(j-1)!\ t} \int_{t/C^j}^\infty \nu(\{x :\ |f(x)| > s\}) [\log(sC^j/t)]^{j-1}\, ds, \tag{1.2.1}$$

para todo $t > 0$, donde C depende sólo de las constantes en las desigualdades de tipo débil $(1, 1)$ y de tipo fuerte (∞, ∞) de T.

Cuando el operador T en lugar de verificar una desigualdad de tipo débil $(1,1)$ verifica una desigualdad de tipo débil restringido (p,p) con $p \geq 1$, en [**8**] B. Bongioanni y E. Harboure prueban el siguiente resultado.

Teorema 1.2.2. [**8**] *Si T es un operador sublineal que es de tipo débil restringido (p,p), $p \geq 1$, y de tipo fuerte (∞,∞), luego $T^{(j)} = T \circ \cdots \circ T$, (la composición de j veces el operator T), satisface la siguiente desigualdad*

(1.2.2)

$$\nu(\{x: \ |T^{(j)}f(x)| > t\}) \leq \left(\frac{1}{(j-1)!\ t} \int_t^\infty \nu(\{x: \ |f(x)| > s/C^j\})^{1/p} [\log(s/t)]^{j-1}\, ds \right)^p,$$

para todo $t > 0$, donde C depende sólo de las constantes en las desigualdades que verifica T.

Observación 1.2.3. *Es fácil ver que se pueden obtener los mismos resultados de los teoremas anteriores si componemos j operadores diferentes $T_1, \cdots, T_j$, en lugar de componer j veces un mismo operador T, siempre que todos esos operadores verifiquen el mismo tipo de desigualdades, es decir, todos resulten de tipo débil $(1,1)$ y de tipo fuerte (∞,∞), en el primer caso, o todos resulten de tipo débil restringido (p,p) con $p \geq 1$ y de tipo fuerte (∞,∞), en el segundo caso.*

Analizaremos a continuación los casos en que tenemos operadores T_i que son todos de tipo fuerte (∞,∞), pero cada T_i es de tipo débil restringido p_i, donde los p_i pueden coincidir o no entre unos y otros. En el siguiente teorema se trata el caso en que tenemos L operadores T_i, $1 \leq i \leq L$, de tipo débil restringido (p_i, p_i) donde el mayor de los p_i es diferente de todos los demás.

Teorema 1.2.4. *Sean $1 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_{L-1} < p_L$ y T_i, $i = 1, \cdots, L$, operadores sublineales que son de tipo fuerte (∞,∞) y cada T_i es de tipo débil restringido (p_i,p_i). Luego, $T = T_1 \circ \cdots \circ T_L$ es de tipo fuerte (∞,∞) y de tipo débil restringido (p_L, p_L).*

Demostración. Por inducción, se puede ver fácilmente que es suficiente probar el teorema para dos operadores. Sean $1 \leq p_1 < p_2$ y T_i, $i = 1, 2$, dos operadores que satisfacen la desigualdad (1.1.5) con $p = p_i$ y supongamos que la constante en esta desigualdad (1.1.5) para ambos operadores es la misma. Luego, el operador $T = T_1 \circ T_2$ satisface la desigualdad (1.1.5) con $p = p_2$. En efecto, la desigualdad de Minkowski integral permite obtener que

$$\begin{aligned}
\lambda_{T_1 \circ T_2 f}(t) &\leq \left(\frac{C}{t} \int_{t/C}^\infty \lambda_{T_2 f}(s)^{1/p_1}\, ds \right)^{p_1} \\
&\leq \left[\frac{C}{t} \int_{t/C}^\infty \left(\frac{C}{s} \int_{s/C}^\infty \lambda_f(u)^{1/p_2}\, du \right)^{p_2/p_1} ds \right]^{p_1} \\
&\leq \left(\frac{C}{t} \right)^{p_1} \left[\int_{t/C^2}^\infty \lambda_f(u)^{1/p_2} \left(\int_{t/C}^\infty \left(\frac{C}{s} \right)^{p_2/p_1} ds \right)^{p_1/p_2} du \right]^{p_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \tilde{C}\left(\frac{1}{t}\int_t^\infty \lambda_f(u/C^2)^{1/p_2}\,du\right)^{p_2}\\
&\leq \tilde{C}\left(\frac{C^2}{t}\int_{t/C^2}^\infty \lambda_f(s)^{1/p_2}\,ds\right)^{p_2}.
\end{aligned}$$

□

A continuación consideramos el caso en que el máximo de los p_i (tales que los operadores T_i son de tipo débil restringido (p_i, p_i)) se alcanza en más de un exponente p_i.

TEOREMA 1.2.5. *Sean $1 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_{L-1} \leq p_L$ de modo que existe k con $1 \leq k \leq L-1$ tal que $1 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_{L-k-1} < p_{L-k} = \cdots = p_L$ y sean T_i, $i = 1, \cdots, L$, operadores sublineales de tipo fuerte (∞, ∞) y donde cada T_i es de tipo débil restringido (p_i, p_i). Luego, $T = T_1 \circ \cdots \circ T_L$ es de tipo fuerte (∞, ∞) y satisface la siguiente desigualdad*

$$\nu(\{x:\ |Tf(x)| > t\}) \leq \left(\frac{C}{k!\ t}\int_t^\infty \nu(\{x:\ |f(x)| > s/C^{k+1}\})^{1/p_L}[\log(s/t)]^k\,ds\right)^{p_L}, \tag{1.2.3}$$

para todo $t > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $S = T_1 \circ \cdots \circ T_{L-k-1}$ y $\tilde{S} = T_{L-k} \circ \cdots \circ T_L$. Utilizando interpolación, (ver por ejemplo Teorema 3.15 en [**41**]) tenemos que el operador T_{L-k-1} es de tipo fuerte (p,p) (y de aquí de tipo débil restringido (p,p)) para todo $p > p_{L-k-1}$. Elegimos $p = p_{L-k-1} + \epsilon_{L-k-1} < p_{L-k}$. Aplicando el Teorema 1.2.4 tenemos que el operador S satisface la desigualdad (1.1.5) con $p = p_{L-k-1} + \epsilon_{L-k-1}$. Por otro lado, por el Teorema 1.2.2 el operador $\tilde{S}$ satisface la desigualdad (1.2.2) con $p = p_L$ y $j = k+1$.
El teorema estará probado como consecuencia de la siguiente observación: si $1 \leq p_1 < p_2$, S_1 es un operador que satisface (1.1.5) con $p = p_1$ y S_2 es un operador que satisface (1.2.2) para cualquier $j \geq 2$ y $p = p_2$, luego $S = S_1 \circ S_2$ satisface la misma desigualdad que S_2. En efecto, por la desigualdad integral de Minkowski,

$$\begin{aligned}
\lambda_{S_1\circ S_2 f}(t) &\leq \left(\frac{C}{t}\int_{t/C}^\infty \lambda_{S_2 f}(s)^{1/p_1}\,ds\right)^{p_1}\\
&\leq \left[\frac{C}{t}\int_{t/C}^\infty\left(\frac{1}{j!s}\int_s^\infty \lambda_f(u/C^{j+1})^{1/p_2}[\log(u/s)]^j\,du\right)^{p_2/p_1} ds\right]^{p_1}\\
&\leq \left(\frac{C}{t}\right)^{p_1}\left[\frac{1}{j!}\int_{t/C}^\infty \lambda_f(u/C^{j+1})^{1/p_2}\left(\int_{t/C}^\infty\left(\frac{[\log(u/s)]^j}{s}\right)^{p_2/p_1} ds\right)^{p_1/p_2} du\right]^{p_2}\\
&\leq \left(\frac{C}{t}\right)^{p_1}\left[\frac{1}{j!}\int_{t/C}^\infty \lambda_f(u/C^{j+1})^{1/p_2}[\log(uC/t)]^j\left(\int_{t/C}^\infty s^{-p_2/p_1}\,ds\right)^{p_1/p_2} du\right]^{p_2}\\
&\leq \tilde{C}\left(\frac{1}{j!t}\int_t^\infty \lambda_f(u/C^{j+1})^{1/p_2}[\log(u/t)]^j\,du\right)^{p_2}.
\end{aligned}$$

□

Notemos que si S es un operador que satisface (1.2.2) y recordando que $\log^+(t) = \text{máx}\{0, \log t\}$ luego

$$\begin{aligned}\lambda_{Sf}(t) &\leq \left(\frac{1}{(j-1)!\,t}\int_0^\infty \lambda_f(s/C^j)^{1/p}[\log^+(s/t)]^{j-1}\,ds\right)^p\\ &\leq \left(\frac{1}{(j-1)!\,t}\int_0^\infty \lambda_f(s/C^j)^{1/p}\phi_{j-1}(s/t)\,ds\right)^p,\end{aligned}$$

donde $\phi_k(t) = (1+\log^+ t)^k$ con $k \in \mathbb{N}$. Como las funciones $\phi_k(t)$, son submultiplicativas podemos acotar la función distribución de Sf como sigue

$$\lambda_{Sf}(t) \leq C\left(\frac{\phi_{j-1}(1/t)}{t}\int_0^\infty \lambda_f(s)^{1/p}\phi_{j-1}(s)\,ds\right)^p.$$

Usando esta observación podemos resumir los Teoremas 1.2.2, 1.2.4 y 1.2.5 en el siguiente resultado general.

Teorema 1.2.6. *Sean $1 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_{L-1} \leq p_L$ y supongamos que existe k con $0 \leq k \leq L-1$ tal que $1 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_{L-k-1} < p_{L-k} = \cdots = p_L$. Sean T_i, $i = 1, \cdots, L$, operadores sublineales de tipo fuerte (∞, ∞) y donde cada T_i es de tipo débil restringido (p_i, p_i). Luego, $T = T_1 \circ \cdots \circ T_L$ satisface la siguiente desigualdad*

$$\nu(\{x : |Tf(x)| > t\}) \leq C\left(\frac{\phi_k(1/t)}{t}\int_0^\infty \nu(\{x :\ |f(x)| > s\})^{1/p_L}\phi_k(s)\,ds\right)^{p_L},$$

para todo $t > 0$, donde $\phi_k(t) = (1 + \log^+ t)^k$.

Notemos que si $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$ luego

$$\phi_k(t) \leq \varphi_k'(t) \leq (k+1)\phi_k(t),$$

para todo $t > 0$. Luego podemos escribir el teorema anterior de la siguiente manera.

Teorema 1.2.7. *Con las mismas hipótesis que en Teorema 1.2.6, el operador $T = T_1 \circ \cdots \circ T_L$ satisface la siguiente desigualdad*

$$\begin{aligned}\nu(\{x \in X : |Tf(x)| > t\}) &\leq C\left(\frac{\phi_k(1/t)}{t}\Psi_{(p_L,\varphi_k)}(f)\right)^{p_L}\\ &= C\left(\frac{\phi_k(1/t)}{t}\int_0^\infty s^{\frac{1}{p_L}-1}\varphi_k(f^*(s))\,ds\right)^{p_L},\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, donde $\phi_k(t) = (1 + \log^+ t)^k$ y $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$.

Observación 1.2.8. *Notemos que utilizando la norma de Luxemburgo*

$$||f||_{p,\varphi} = \text{ínf}\{c > 0 : \int_0^\infty \varphi(f^*(t)/c)t^{1/p-1} \leq 1\},$$

podemos escribir el resultado del Teorema 1.2.7 como

$$\nu(\{x \in X : |Tf(x)| > t\}) \leq C\left(\varphi_k(1/t)\varphi_k(||f||_{p_L,\varphi_k})\right)^{p_L}$$

$$= \quad C\left(\varphi_k(1/t)||f||_{p_L,\varphi_k}(1+\log^+||f||_{p_L,\varphi_k})^k\right)^{p_L}.$$

En efecto, aplicando el resultado del Teorema 1.2.7 a $g = f/||f||_{p_L,\varphi_k}$ *tenemos que*

$$\nu(\{x \in X : |Tg(x)| > \lambda\}) \leq C\left(\frac{\phi_k(1/\lambda)}{\lambda}\right)^{p_L}.$$

Luego, como $\nu(\{x \in X : |Tg(x)| > \lambda\}) = \nu(\{x \in X : |Tf(x)| > \lambda||f||_{p_L,\varphi_k}\})$*, reemplazando en la desigualdad de arriba* λ *por* $t/||f||_{p_L,\varphi_k}$ *y usando que* φ_k *es submultiplicativa, tenemos el resultado deseado.*

Como se puede observar de los resultados de composición de operadores que hemos expuesto, todos los operadores involucrados en la composición verifican que son de tipo fuerte (∞,∞). Esta hipótesis se cumple para muchos operadores maximales, sin embargo, existen otros operadores como por ejemplo las integrales singulares o los operadores maximales asociados a las integrales singulares que no cumplen con esta propiedad de acotación. En lo que sigue trataremos el caso de la composición de dos operadores $S \circ T$ cuando el operador S satisface una desigualdad del tipo (1.2.3) con exponentes $p \geq 1$ y k en el logaritmo, y el operador T satisface desigualdades de tipo débil restringido (q,q) para $q = p$ y para algún otro valor de $q > p$ que depende de k.

Teorema 1.2.9. *Dados* $j \in \mathbb{N}$ *y* $p > 1$*, sea* S *un operador que verifica la siguiente desigualdad: existe* $C > 0$ *tal que*

$$\nu(\{x : |Sf(x)| > t\}) \leq \left(\frac{C}{t}\int_t^\infty \nu(\{x : |f(x)| > s/C\})^{1/p}[\log(s/t)]^{j-1}\,ds\right)^p, \tag{1.2.4}$$

para todo $t > 0$*. Sea* T *un operador sublineal tal que* T *es de tipo débil restringido* (q,q)*, para algún* $q > p(j+1)$ *y para* $q = p$*. Luego* $S \circ T$ *verifica la siguiente desigualdad: existe* $C > 0$ *tal que*

$$\nu(\{x : |(S\circ T)f(x)| > t\}) \leq \left(\frac{C\phi_j(1/t)}{t}\int_0^\infty \nu(\{x : |f(x)| > s\})^{1/p}\phi_j(s)\,ds\right)^p, \tag{1.2.5}$$

donde $\phi_j(t) = (1+\log^+ t)^j$*.*

La prueba de este teorema sigue la misma idea de la prueba del Teorema de Marcinkiewicz en espacios de Lorentz (ver [**24**], [**1**]), esto es, utiliza como herramienta el teorema de Muckenhoupt [**35**] que da la caracterización de los pares de pesos (u,v) para los cuales el operador de Hardy $Hf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ está acotado de $L^p((0,\infty),v)$ en $L^p((0,\infty),u)$. A continuación enunciamos dicho resultado.

Teorema 1.2.10. [**35**] *Sea* $1 \leq p < \infty$ *y sean* u *y* v *funciones medibles no negativas. Existe una constante* C *tal que*

$$\left(\int_0^\infty \left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^p u(x)\,dx\right)^{1/p} \leq C\left(\int_0^\infty [f(x)]^p v(x)\,dx\right)^{1/p}, \tag{1.2.6}$$

para toda f medible no negativa, si y sólo si

$$B = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty u(x)\, dx \right)^{1/p} \left(\int_0^t v(x)^{1-p'}\, dx \right)^{1/p'} < \infty, \tag{1.2.7}$$

donde $1/p + 1/p' = 1$.

En el clásico Teorema de Marcinkiewicz se utiliza como herramienta clave que ciertos pesos de tipo potencias verifican la condición (1.2.7) y por lo tanto para esos pesos se tiene la acotación (1.2.6). En el siguiente lema probamos que la condición (1.2.7) se verifica también para otro tipo de pesos, esto nos permitirá obtener luego el resultado de interpolación que necesitamos.

Lema 1.2.11. *Dado $j \in \mathbb{N}$, si $1 + j < p < \infty$ y $\phi_j(t) = (1 + \log^+ t)^j$, las funciones $u(s) = s^{-p}\phi_j(s)$ y $v(s) = \phi_j(s)$ satisfacen la condición* (1.2.7)*, es decir,*

$$\sup_{t>0} \left(\int_t^\infty s^{-p}\phi_j(s)\, ds \right)^{1/p} \left(\int_0^t [\phi_j(s)]^{1-p'}\, ds \right)^{1/p'} < \infty.$$

Demostración. Dado $\delta > 0$ tal que $-p + \delta + 1 < 0$, sea $N = N(\delta, j) > 1$ tal que para alguna constante $C > 0$,

$$\log s \leq C s^{\frac{\delta}{j}} \quad \text{y} \quad \log s \leq C\sqrt{s} \tag{1.2.8}$$

para todo $s > N$. Dividimos ahora la prueba en dos casos: $t \leq N$ y $t > N$.

Caso 1: Supongamos que $t \leq N$,

$$\begin{aligned} I = \left(\int_t^\infty s^{-p}\phi_j(s)\, ds \right)^{1/p} &= \left(\int_t^\infty s^{-p}(1 + \log^+ s)^j\, ds \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_t^N s^{-p}(1 + \log^+ s)^j\, ds \right)^p + \left(\int_N^\infty s^{-p}(1 + \log^+ s)^j\, ds \right)^{1/p} \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\int_t^N s^{-p}(1 + \log^+ s)^j\, ds \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\phi_j(N) \int_t^N s^{-p}\, ds \right)^{1/p} \\ &\leq C(p, N)t^{1/p-1} = C(p, N)t^{-1/p'} \end{aligned}$$

Por la desigualdad (1.2.8) tenemos que

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(\int_N^\infty s^{-p}(1 + \log^+ s)^j\, ds \right)^{1/p} \\ &\leq C \left(\int_N^\infty s^{-p+\delta}\, ds \right)^{1/p} \\ &\leq C(p, N) \end{aligned}$$

Luego,

$$I \leq C(p,N)\,\mathrm{máx}\{1, t^{-1/p'}\}.$$

Por otro lado, como $1-p'<0$ y $\phi_j(s)\geq 1$

$$II = \left(\int_0^t [\phi_j(s)]^{1-p'}\,ds\right)^{1/p'} \leq t^{1/p'}.$$

Por último, como $t\leq N$, resulta

$$\begin{aligned} I.II &\leq C(N,p)\,\mathrm{máx}\{1, t^{-\frac{1}{p'}}\}.t^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C(N,p)\,\mathrm{máx}\{t^{\frac{1}{p'}},1\} \leq \tilde{C}(N,p). \end{aligned}$$

Caso 2: Supongamos que $t>N$. Como podemos considerar N suficientemente grande tenemos que

$$\begin{aligned} I = C\left(\int_t^\infty s^{-p}\phi_j(s)\,ds\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=0}^\infty \int_{2^k t}^{2^{k+1}t} s^{-p}(\log s)^j\,ds\right)^{1/p} \\ &\leq C\left(\sum_{k=0}^\infty (2^k t)^{1-p}\log(2^{k+1}t)^j\right)^{1/p} \\ &\leq Ct^{-1+1/p}\left(\sum_{k=0}^\infty (2^{1-p})^k(\log(2^{k+1}))^j\right)^{1/p} \\ &\quad +Ct^{-1+1/p}(\log t)^{j/p}\left(\sum_{k=0}^\infty (2^{1-p})^k\right)^{1/p} \\ &\leq Ct^{-1+1/p}(\log t)^{j/p}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} II &= \left(\int_0^t [\phi_j(s)]^{1-p'}\,ds\right)^{1/p'} \\ &\leq \left(C + \int_e^{\sqrt{t}}(1+\log s)^{j(1-p')}\,ds + \int_{\sqrt{t}}^t (1+\log s)^{j(1-p')}\,ds\right)^{1/p'} \end{aligned}$$

Notemos que como $p>j+1$ implica $j(1-p')>-1$, luego

$$\begin{aligned} \int_e^{\sqrt{t}}(1+\log s)^{j(1-p')}\,ds &\leq \sqrt{t}\int_e^{\sqrt{t}}(\log s)^{j(1-p')}\,\frac{ds}{s} \\ &\leq Ct^{1/2}(\log t)^{j(1-p')+1}. \end{aligned}$$

Por otro lado, es claro que

$$\int_{\sqrt{t}}^t (1+\log s)^{j(1-p')}\,ds \leq C\int_{\sqrt{t}}^t (\log s)^{j(1-p')}\,ds \leq C(\log t)^{j(1-p')}t.$$

Luego,

$$II \leq C(N,p)\left(1 + t^{\frac{1}{2p'}}(\log t)^{j\left(\frac{1}{p'}-1\right)+\frac{1}{p'}} + t^{\frac{1}{p'}}(\log t)^{j\left(\frac{1}{p'}-1\right)}\right).$$

Como $\log t \leq C\sqrt{t}$ para todo $t > N$

$$\begin{aligned} II &\leq C(N,p)\left(1 + t^{\frac{1}{2p'}}(\log t)^{j\left(\frac{1}{p'}-1\right)}t^{\frac{1}{2p'}} + t^{\frac{1}{p'}}(\log t)^{j\left(\frac{1}{p'}-1\right)}\right) \\ &\leq C(N,p)\left(1 + t^{\frac{1}{p'}}(\log t)^{j\left(\frac{1}{p'}-1\right)}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $-p+\delta+1 < 0$ obtenemos que

$$\begin{aligned} I.II &\leq C(N,p)\left(t^{-1+\frac{1}{p}}(\log t)^{\frac{j}{p}}\left(1 + t^{\frac{1}{p'}}(\log t)^{j\left(\frac{1}{p'}-1\right)}\right)\right) \\ &\leq C(N,p)(t^{-1+\frac{1}{p}}(\log t)^{j/p} + 1) \\ &\leq C(N,p)(t^{\frac{-p+\delta+1}{p}} + 1) \leq \tilde{C}(N,p), \end{aligned}$$

donde en la penúltima desigualdad hemos usado la desigualdad (1.2.8). □

Demostración del Teorema 1.2.9. Dado $s > 0$, sean $f^s(x) = f(x)\chi_{\{x:|f(x)|>s\}}(x)$ y $f_s = f - f^s$. Como T es sublineal, $|Tf| \leq |Tf^s| + |Tf_s|$ para cualquier $s > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \nu(\{x : |S \circ Tf(x)| > t\}) &\leq \left(\frac{C}{t}\int_t^\infty \lambda_{Tf^s}(s/C)^{1/p}[\log(s/t)]^{j-1}\, ds\right)^p \\ &\quad + \left(\frac{C}{t}\int_t^\infty \lambda_{Tf_s}(s/C)^{1/p}[\log(s/t)]^{j-1}\, ds\right)^p = I + II. \end{aligned}$$

Usando que T es de tipo débil restringido (p,p) y la definición de f^s tenemos que

$$\begin{aligned} I &\leq \left(\frac{C}{t}\int_t^\infty \frac{2C^j}{s}\int_0^\infty \lambda_{f^s}(u)^{1/p}\, du[\log(s/t)]^{j-1}\, ds\right)^p \\ &= \left(\frac{C}{t}\int_t^\infty \frac{1}{s}\left(\int_0^s \lambda_{f^s}(u)^{1/p}\, du + \int_s^\infty \lambda_{f^s}(u)^{1/p}\, du\right)[\log(s/t)]^{j-1}\, ds\right)^p \\ &\leq \left(\frac{C}{t}\int_t^\infty \lambda_f(s)^{1/p}[\log(s/t)]^{j-1}\, ds\right)^p \\ &\quad + \left(\frac{C}{t}\int_t^\infty \frac{1}{s}\left(\int_s^\infty \lambda_f(u)^{1/p}\, du\right)[\log(s/t)]^{j-1}\, ds\right)^p \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Como ϕ_j es submultiplicativa se tiene

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\frac{C}{t}\int_t^\infty \lambda_f(s)^{1/p}[\log(s/t)]^{j-1}\, ds\right)^p \\ &\leq \left(\frac{C}{t}\int_0^\infty \lambda_f(s)^{1/p}[1 + \log^+(s/t)]^j\, ds\right)^p \\ &\leq \left(\frac{C\phi_j(1/t)}{t}\int_0^\infty \lambda_f(s)^{1/p}\phi_j(s)\, ds\right)^p. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Tonelli y procediendo como en I_1 resulta que

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left(\frac{C}{t}\int_t^\infty \frac{1}{s}\left(\int_s^\infty \lambda_f(u)^{1/p}\,du\right)[\log(s/t)]^{j-1}\,ds\right)^p \\
&= \left(\frac{C}{t}\int_t^\infty \int_t^u \frac{1}{s}\lambda_f(u)^{1/p}\,[\log(s/t)]^{j-1}\,ds\,du\right)^p \\
&\le \left(\frac{C}{t}\int_t^\infty \lambda_f(u)^{1/p}\,[\log(u/t)]^{j}\,du\right)^p \\
&\le \left(\frac{C\phi_j(1/t)}{t}\int_0^\infty \lambda_f(u)^{1/p}\phi_j(u)\,du\right)^p .
\end{aligned}$$

Para acotar II usaremos que T es de tipo débil restringido (q,q) para algún $q > p(j+1)$, el Lema 1.2.11 y por lo tanto, la desigualdad (1.2.7)

$$\begin{aligned}
II &= \left(\frac{C}{t}\int_t^\infty \lambda_{Tf_s}(s/C)^{1/p}[\log(s/t)]^{j-1}\,ds\right)^p \\
&\le \left(\frac{C}{t}\int_0^\infty \left(\frac{C}{s}\int_0^\infty \lambda_{f_s}(u)^{1/q}\,du\right)^{q/p}\phi_j(s/t)\,ds\right)^p \\
&\le \left(C\frac{\phi_j(1/t)}{t}\int_0^\infty \left(\int_0^s \lambda_f(u)^{1/q}\,du\right)^{q/p} s^{-q/p}\phi_j(s)\,ds\right)^p \\
&\le C\left(\frac{\phi_j(1/t)}{t}\int_0^\infty \lambda_f(u)^{1/p}\phi_j(u)\,du\right)^p .
\end{aligned}$$

□

Para el caso en que el operador S es de tipo débil restringido (p,p) una simple consecuencia del Teorema de interpolación de Marcinkiewicz en espacios de Lorentz (ver pág.225 en [**1**]) nos da el siguiente teorema.

TEOREMA 1.2.12. *Sean S y T dos operadores sublineales tales que S es de tipo débil restringido (p_0,p_0) y T es un operador de tipo débil restringido (p_1,p_1) y (p_2,p_2) con $p_1 < p_0 < p_2$. Luego, $S\circ T$ es de tipo débil restringido (p_0,p_0).*

DEMOSTRACIÓN. El Teorema de interpolación de Marcinkiewicz y las hipótesis sobre el operador T permiten decir que $||Tf||_{p,r} \le ||f||_{p,r}$ para cualquier p tal que $p_1 < p < p_2$ y cualquier r con $1 \le r \le \infty$. Tomando $r = 1$ y $p = p_0$ y teniendo en cuenta la hipótesis sobre S, resulta que $||S\circ T(f)||_{p_0,\infty} \le C||Tf||_{p_0,1} \le C||f||_{p_0,1}$. □

Capítulo 2

Promedios de Cesàro en espacios producto

Este Capítulo se divide en dos secciones. En la primera exponemos los resultados sobre los promedios de Cesàro n dimensionales considerando a $\mathbb{R}^n$ como un único bloque y en la segunda trataremos el caso en el contexto de espacios producto.

2.1. Promedios de Cesàro n dimensionales

Esta sección está dividida en tres partes. Comenzaremos exponiendo en la primera parte los resultados conocidos sobre los promedios de Cesàro n dimensionales. A continuación veremos cómo mejoran los resultados de convergencia, ampliando los espacios de funciones donde se obtiene dicha convergencia, cuando nos restringimos a tomar promedios sobre sucesiones lacunares. Finalmente, en la tercer subsección estudiamos la velocidad de convergencia de estos promedios lacunares utilizando el operador transformada de diferencias.

2.1.1. Resultados conocidos sobre los promedios de Cesàro n dimensionales.

Se dice que una función f es Cesàro-α, $\alpha > 0$ continua en x si los promedios

$$P_\epsilon^\alpha f(x) = f * \varphi_\epsilon^\alpha(x) \tag{2.1.1}$$

convergen a $f(x)$ cuando ϵ tiende a cero, donde

$$\varphi^\alpha(x) = c(\alpha, n)(1 - |x|_\infty)^{\alpha-1}\chi_{Q(0,1)}(x), \tag{2.1.2}$$

con $|x|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$ y donde $c(\alpha, n)$ es la constante, dependiente de α y n, tal que $\int \varphi^\alpha(x)\,dx = 1$.

Notemos que los promedios P_ϵ^α son casos especiales de aproximaciones de la identidad con núcleo $\varphi^\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (ver por ejemplo [**13**]).

Otra forma de escribir los promedios P_ϵ^α es la siguiente

$$P_\epsilon^\alpha f(x) = \frac{c(\alpha, n)}{\epsilon^{n+\alpha-1}} \int_{Q(x,\epsilon)} f(y) d(y, \partial Q(x, \epsilon))^{\alpha-1}\, dy, \tag{2.1.3}$$

donde $d(y, \partial Q(x,\epsilon)) = \min_{1\le i\le n} \{x_i + \epsilon - y_i, y_i - (x_i - \epsilon)\}$ es la distancia en la norma infinito de y al borde de $Q(x,\epsilon)$.

El Teorema de Diferenciación de Lebesgue nos dice que si f es una función localmente integrable, entonces es Cesàro-1 continua en casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ y como es bien conocido, este resultado se obtiene a partir del estudio de la maximal de Hardy-Littlewood.

Para estudiar la continuidad Cesàro-α se considera el operador maximal asociado

$$\begin{aligned} M_\alpha f(x) &= \sup_{\epsilon>0} P_\epsilon^\alpha |f|(x) \\ &\approx \sup_{\epsilon>0} \frac{1}{\epsilon^{n+\alpha-1}} \int_{Q(x,\epsilon)} |f(y)| d(y, \partial Q(x,\epsilon))^{\alpha-1}\, dy. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Se puede observar fácilmente que si $\alpha \ge 1$, el operador M_α es puntualmente equivalente al operador maximal de Hardy-Littlewood. Por esta razón consideraremos valores de α tales que $0 < \alpha \le 1$.

Observemos que las funciones φ^α tienen soporte en el cubo $Q(0,1)$, $\int \varphi^\alpha = 1$ y $\varphi^\alpha \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q < 1/(1-\alpha)$. Luego, usando la desigualdad de Hölder con $q < 1/(1-\alpha)$ y p tal que $1/p + 1/q = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} M_\alpha f(x) &= \sup_{\epsilon>0} |f| * \varphi_\epsilon^\alpha(x) \\ &\le \sup_{\epsilon>0} \left(\int_{Q(x,\epsilon)} |f(y)|^p\, dy \right)^{1/p} \left(\int_{Q(x,\epsilon)} [\varphi_\epsilon^\alpha(x-y)]^q\, dy \right)^{1/q} \\ &= ||\varphi^\alpha||_q \left(M(|f|^p) \right)^{1/p} \\ &= ||\varphi^\alpha||_q M_p(f)(x). \end{aligned}$$

Esta estimación y el tipo débil $(1,1)$ del operador maximal de Hardy-Littlewood, nos permite decir que el operador M_α es de tipo débil (p,p) para todo $p > 1/\alpha$. Además, como claramente M_α es de tipo fuerte (∞,∞), el teorema de interpolación de Marcinkiewicz nos conduce a concluir que M_α es de tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1/\alpha$.

Estos resultados para el operador maximal M_α y la convergencia de los promedios P_ϵ^α en un conjunto denso, hacen posible la obtención de la continuidad Cesàro-α, $0 < \alpha \le 1$, en casi todo punto para toda función de $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p > 1/\alpha$. Este resultado también se puede obtener como consecuencia del siguiente teorema probado por Felipe Zó en [**18**].

Teorema 2.1.1. [**18**] *Sea $K \in L^q(\mathbb{R}^n)$ con $1 < q < \infty$, una función con soporte compacto cuya integral vale uno y sea q' tal que $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\lim_{\epsilon\to 0} K_\epsilon * f(x) = f(x),$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $q' \leq p < \infty$.

A continuación presentamos los resultados conocidos para los operadores M_α en el extremo $p = 1/\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Los operadores M_α no son de tipo débil $(1/\alpha, 1/\alpha)$ para $0 < \alpha < 1$ como lo muestra el siguiente ejemplo unidimensional planteado en [**3**].

Ejemplo 2.1.2. *Sea $f = |y|^{-\alpha}|\log y|^\gamma \chi_{(0,1/2)}(y)$, con $-1 \leq \gamma < -\alpha$. Luego $f \in L^{\frac{1}{\alpha}}(\mathbb{R})$ pero $M_\alpha f(x) = \infty$ para todo $x > 1/2$. En efecto,*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^{1/\alpha} dy = \int_0^{1/2} y^{-1}|\log y|^{\gamma/\alpha} dy = \int_{log2}^{\infty} u^{\gamma/\alpha} du$$

es finita si $\frac{\gamma}{\alpha} + 1 < 0$.
Por otro lado, sea $x > 1/2$, acotando $M_\alpha f(x)$ por un promedio con $Q(x,\epsilon) = [0, 2x]$ se tiene que

$$\begin{aligned} M_\alpha f(x) &\geq \frac{1}{x^\alpha} \int_0^{2x} |f(y)| d(y, \partial Q(x,\epsilon))^{\alpha-1}\, dy \\ &= \frac{1}{x^\alpha} \int_0^{1/2} y^{-\alpha}|\log y|^\gamma y^{\alpha-1} dy \\ &= \frac{1}{x^\alpha} \int_{\log 2}^{\infty} u^\gamma du, \end{aligned}$$

como $\gamma \geq -1$, la integral resulta infinita.

Para obtener información sobre lo que ocurre con el operador M_α, $0 < \alpha < 1$, en el caso $p = 1/\alpha$, se puede aplicar el siguiente resultado obtenido por Jurkat y Troutmann en [**28**].

Teorema 2.1.3. [**28**] *Sea φ una función medible, no negativa y con soporte en el cubo $Q(0,1) = [-1,1]^n$. Sea $\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ y $M_\varphi f(x) = \sup_{\epsilon>0} |f| * \varphi_\epsilon(x)$. Luego, para cualquier $\xi > 0$*

$$(M_\varphi f)^*(\xi) \leq \frac{A}{\xi} \int_0^\infty \varphi^*(t/\xi) f^*(t)\, dt,$$

donde A es una constante absoluta tal que $A \in [1, 3^n]$ y g^* es la función reordenada no creciente de g.

En primer lugar notemos que la función φ^α que define al operador maximal M_α está en las condiciones del teorema. Por otro lado, no es difícil probar que $(\varphi^\alpha)^*(s) \leq C s^{\alpha-1}$. Luego, aplicando el Teorema 2.1.3, se obtiene que

$$\begin{aligned} (M_\alpha f)^*(\xi) &\leq \frac{C}{\xi} \int_0^\infty \left(\frac{t}{\xi}\right)^{\alpha-1} f^*(\xi t)\, dt \\ &\leq \frac{C}{\xi^\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha-1} f^*(\xi t)\, dt, \end{aligned}$$

es decir,

$$\xi^\alpha (M_\alpha f)^*(\xi) \leq C \int_0^\infty t^{\alpha-1} f^*(t)\, dt,$$

o, equivalentemente, escrito en normas de Lorentz resulta que

$$||M_\alpha f||_{\frac{1}{\alpha},\infty} \leq C||f||_{\frac{1}{\alpha},1},$$

esto es, el operador M_α es de tipo débil restringido $(1/\alpha, 1/\alpha)$.

Es conocido que el espacio $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L(1/\alpha, 1)(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L(1/\alpha, 1)(\mathbb{R}^n)$ para cualquier p con $1 < p < \infty$, dado que las funciones simples son densas en $L(1/\alpha, 1)(\mathbb{R}^n)$. Este resultado y el hecho que los promedios $P_\epsilon^\alpha f(x)$ converjan en casi todo punto a $f(x)$ para funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p > 1/\alpha$, nos aseguran la convergencia en casi todo punto de dichos promedios para toda función de $L(1/\alpha, 1)(\mathbb{R}^n)$.

Todo esto que se describió para promedios y maximales de Cesàro definidos sobre cubos se puede hacer con los correspondientes operadores definidos sobre bolas, en este caso la función φ^α se define como en (2.1.2) pero utilizando la norma euclídea y cambiando $Q(0, 1)$ por la bola de centro cero y radio uno.

2.1.2. Convergencia de los promedios de Cesàro lacunares n dimensionales.

Comenzaremos esta subsección definiendo lo que entenderemos por una sucesión ρ-lacunar y daremos algunas propiedades que serán de utilidad en lo que sigue.

DEFINICIÓN 2.1.4. *Dado un número real $\rho > 1$, diremos que una sucesión de números reales positivos $\{\epsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una **sucesión ρ-lacunar** si $\rho \leq \frac{\epsilon_{k+1}}{\epsilon_k} < \rho^2$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

En [**2**] los autores prueban el siguiente lema que reúne las propiedades básicas de una sucesión ρ-lacunar.

LEMA 2.1.5. *Sea $\{\epsilon_k\}$ una sucesión ρ-lacunar.*

i) Para cualquier $m > n$,

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^{2(m-n)} \leq \frac{\epsilon_n}{\epsilon_m} \leq \left(\frac{1}{\rho}\right)^{m-n}.$$

ii) Dado $s > 0$,

$$\sum_{k=-\infty}^{n} \epsilon_k^s \leq C\epsilon_n^s \quad y \quad \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{1}{\epsilon_k^s} \leq C\frac{1}{\epsilon_m^s}.$$

iii) Si β es el menor entero positivo tal que $1/\rho + (1/\rho)^\beta \leq 1$, luego

$$\epsilon_k + \epsilon_m \leq \epsilon_{m+1}, \quad \text{para todo } m \geq k + \beta - 1.$$

DEMOSTRACIÓN. El inciso $i)$ se obtiene en forma directa a partir de la definición de sucesión ρ-lacunar y de la siguiente igualdad

$$\frac{\epsilon_n}{\epsilon_m} = \frac{\epsilon_n}{\epsilon_{n+1}} \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_{n+2}} \cdots \frac{\epsilon_{m-1}}{\epsilon_m}.$$

Para probar $ii)$ notemos que usando $i)$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} \epsilon_k^s = \epsilon_n^s \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\frac{\epsilon_k}{\epsilon_n}\right)^s \leq \epsilon_n^s \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\frac{1}{\rho}\right)^{(n-k)s} = \epsilon_n^s \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho^s}\right)^j.$$

Como $\rho > 1$, se obtiene el resultado buscado. De la misma forma se prueba la otra desigualdad. Finalmente, el item $iii)$ se sigue del item $i)$. Dado que $m \geq k$, usando el item $i)$ se tiene que

$$\left(\frac{\epsilon_k}{\epsilon_{m+1}}\right) + \frac{\epsilon_m}{\epsilon_{m+1}} \leq \left(\frac{1}{\rho}\right)^{m+1-k} + \frac{1}{\rho},$$

luego tomando $\beta = m + 1 - k$ se obtiene la desigualdad deseada. □

Dada una sucesión ρ-lacunar $\{\epsilon_k\}$ y $0 < \alpha \leq 1$ definimos los promedios de Cesàro lacunares como

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{\epsilon_k} f(x) = f * \varphi^{\alpha}_{\epsilon_k}(x),$$

y el operador maximal de Cesàro lacunar como

$$M_{\alpha,\rho} f(x) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |\mathcal{P}^{\alpha}_{\epsilon_k} f(x)|,$$

donde φ^{α} es la función definida en (2.1.2), es decir,

$$\varphi^{\alpha}(x) = C(\alpha, n)(1 - |x|_{\infty})^{\alpha-1} \chi_{Q(0,1)}(x).$$

Claramente el operador maximal $M_{\alpha,\rho}$ está acotado por el operador maximal M_{α}, por lo tanto, $M_{\alpha,\rho}$ es de tipo fuerte (p,p) para $p > 1/\alpha$ y es de tipo débil restringido $(1/\alpha, 1/\alpha)$. Pero el operador $M_{\alpha,\rho}$ es "bastante"más chico que el operador M_{α}, dado que podemos probar el siguiente resultado.

TEOREMA 2.1.6. *El operador maximal $M_{\alpha,\rho}$ es de tipo débil $(1,1)$ y de tipo fuerte (p,p), para todo p con $1 < p \leq \infty$.*

Para demostrar este teorema será suficiente probar que $M_{\alpha,\rho}$ es de tipo débil $(1,1)$, dado que como $M_{\alpha,\rho}$ es de tipo fuerte (p,p) para cualquier $p > 1/\alpha$, usando el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz, obtendremos como consecuencia inmediata el tipo fuerte (p,p) para $1 < p \leq \infty$. La demostración del tipo débil $(1,1)$ de $M_{\alpha,\rho}$ se hará utilizando la descomposición de Calderón-Zygmund siguiendo las ideas del correspondiente resultado unidimensional en el contexto lateral probado por los autores en [**6**]. Comenzaremos probando el siguiente lema.

Lema 2.1.7. *Sea $\{\epsilon_k\}$ una $\rho-$sucesión lacunar, $Q_i = [-\epsilon_i, \epsilon_i]^n$ y $Q_i^* = [-\epsilon_{i+\beta}, \epsilon_{i+\beta}]^n$, donde β es la constante en el Lema 2.1.5. Sea a con soporte en Q_i y tal que $\int_{Q_i} a = 0$. Entonces existe $c > 0$, independiente de a, tal que*

$$\int_{z \notin Q_i^*} M_{\alpha,\rho} a(z)\, dz \le c \int_{Q_i} |a(z)|\, dz.$$

Demostración. Escribimos

$$\int_{z \notin Q^*} M_{\alpha,\rho} a(z)\, dz = \sum_{m=i+\beta}^{\infty} \int_{C_m} M_{\alpha,\rho} a(z)\, dz.$$

donde $C_m = \{z :\ \epsilon_m \le |z|_\infty < \epsilon_{m+1}\}$. Notemos que

$$M_{\alpha,\rho} a(z) \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_{Q_i} a(u) \frac{(\epsilon_k - |z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}} \chi_{\{|z-u|_\infty \le \epsilon_k\}}\, du \right|.$$

Si $z \in C_m$ y $u \in Q_i$, luego $\epsilon_m - \epsilon_i \le |z-u|_\infty \le \epsilon_{m+1} + \epsilon_i$. Utilizando *iii*) del Lema 2.1.5 se tiene que $\epsilon_{m-1} \le |z-u|_\infty \le \epsilon_{m+2}$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} M_{\alpha,\rho} a(z) \le& \left| \int_{Q_i} \frac{(\epsilon_m - |z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_m^{n+\alpha-1}} \chi_{\{|z-u|_\infty \le \epsilon_m\}} a(u)\, du \right| \\ &+ \left| \int_{Q_i} \frac{(\epsilon_{m+1} - |z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_{m+1}^{n+\alpha-1}} \chi_{\{|z-u|_\infty \le \epsilon_{m+1}\}}(u) a(u)\, du \right| \\ &+ \left| \int_{Q_i} \frac{(\epsilon_{m+2} - |z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_{m+2}^{n+\alpha-1}} a(u)\, du \right| \\ &+ \sum_{k \ge m+3} \left| \int_{Q_i} \frac{(\epsilon_k - |z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}} a(u)\, du \right| \\ =& A_m(z) + B_m(z) + C_m(z) + D_m(z). \end{aligned}$$

Notemos que

$$\int_{z \in C_m} A_m(z)\, dz \le \int_{z \in C_m} \int_{Q_i} \frac{(\epsilon_m - |z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_m^{n+\alpha-1}} \chi_{\{\epsilon_m - \epsilon_i < |z-u|_\infty \le \epsilon_m\}}(u) |a(u)|\, du\, dz.$$

Además,

$$\begin{aligned} \int_{z \in C_m} B_m(z)\, dz \le& \int_{\epsilon_{m+1} - 2\epsilon_i < |z|_\infty \le \epsilon_{m+1}} \left| \int_{Q_i} \frac{(\epsilon_{m+1} - |z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_{m+1}^{n+\alpha-1}} \chi_{\{|z-u|_\infty \le \epsilon_{m+1}\}}(u) a(u)\, du \right| dz \\ &+ \int_{|z|_\infty \le \epsilon_{m+1} - 2\epsilon_i} \left| \int_{Q_i} \frac{(\epsilon_{m+1} - |z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_{m+1}^{n+\alpha-1}} a(u)\, du \right| dz \end{aligned}$$

y

$$\int_{z\in C_m} C_m(z)\,dz \le \int_{\epsilon_{m+2}-2\epsilon_i<|z|_\infty\le\epsilon_{m+2}} \left|\int_{Q_i} \frac{(\epsilon_{m+2}-|z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_{m+2}^{n+\alpha-1}}\chi_{\{|z-u|_\infty\le\epsilon_{m+2}\}}(u)a(u)\,du\right| dz$$
$$+\int_{|z|_\infty\le\epsilon_{m+2}-2\epsilon_i} \left|\int_{Q_i} \frac{(\epsilon_{m+2}-|z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_{m+2}^{n+\alpha-1}} a(u)\,du\right| dz.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\int_{z\notin Q_i^*} M_{\alpha,\rho}a(z)\,dz\\
\le& \sum_{m\ge i+\beta}^{\infty}\int_{C_m}(A_m(z)+B_m(z)+C_m(z)+D_m(z))\,dz\\
\le& \sum_{m\ge i+\beta}^{\infty}\int_{z\in C_m}\int_{Q_i}\frac{(\epsilon_m-|z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_m^{n+\alpha-1}}\chi_{\{\epsilon_m-\epsilon_i<|z-u|_\infty\le\epsilon_m\}}(u)|a(u)|\,du\,dz\\
&+2\sum_{m\ge i+\beta}^{\infty}\int_{\epsilon_{m+1}-2\epsilon_i<|z|_\infty\le\epsilon_{m+1}}\left|\int_{Q_i}\frac{(\epsilon_{m+1}-|z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_{m+1}^{n+\alpha-1}}\chi_{\{|z-u|_\infty\le\epsilon_{m+1}\}}(u)a(u)\,du\right| dz\\
&+2\sum_{m\ge i+\beta}^{\infty}\int_{|z|_\infty\le\epsilon_{m+1}-2\epsilon_i}\left|\int_{Q_i}\frac{(\epsilon_{m+1}-|z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_{m+1}^{n+\alpha-1}}a(u)\,du\right| dz\\
&+\sum_{m\ge i+\beta}^{\infty}\int_{z\in C_m}\sum_{k\ge m+3}\left|\int_{Q_i}\frac{(\epsilon_k-|z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}}a(u)\,du\right| dz\\
=&I+II+III+IV.
\end{aligned}$$

Queremos probar que cada suma esta dominada por $C\int_{Q_i}|a|$. Notemos en primer lugar que

$$\begin{aligned}
\int_{\epsilon_m-\epsilon_i\le|z-u|_\infty\le\epsilon_m}(\epsilon_m-|z-u|_\infty)^{\alpha-1}\,dz &= \int_{\epsilon_m-\epsilon_i\le|y|_\infty\le\epsilon_m}(\epsilon_m-|y|_\infty)^{\alpha-1}\,dy\\
&\le C\sum_{j=1}^{n}\int_{\epsilon_m-\epsilon_i\le|y|_\infty\le\epsilon_m,\ |y|_\infty=|y_j|}(\epsilon_m-|y|_\infty)^{\alpha-1}\,dy\\
&\le C\sum_{j=1}^{n}\int_{\epsilon_m-\epsilon_i\le|y_j|\le\epsilon_m,\ |y|_\infty\le\epsilon_m}(\epsilon_m-|y_j|)^{\alpha-1}\,dy\\
&= C\sum_{j=1}^{n}2\left(\int_{\epsilon_m-\epsilon_i}^{\epsilon_m}(\epsilon_m-t)^{\alpha-1}dt\right)(\epsilon_m)^{n-1}\\
&= C\epsilon_m^{n-1}\epsilon_i^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Por el Teorema de Fubini y el Lema 2.1.5 resulta

$$I \le \sum_{m\ge i+\beta}^{\infty}\int_{z\in C_m}\int_{Q_i}\frac{(\epsilon_m-|z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_m^{n+\alpha-1}}\chi_{\{\epsilon_m-\epsilon_i\le|z-u|_\infty\le\epsilon_m\}}(u)|a(u)|\,du\,dz$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{m\geq i+\beta}^{\infty}\int_{Q_i}\frac{|a(u)|}{\epsilon_m^{n+\alpha-1}}\left(\int_{\epsilon_m-\epsilon_i\leq|z-u|_\infty\leq\epsilon_m}(\epsilon_m-|z-u|_\infty)^{\alpha-1}\,dz\right)du\\
&= C\left(\int_{Q_i}|a(u)|du\right)\epsilon_i^{\alpha}\sum_{m\geq i+\beta}^{\infty}\frac{1}{\epsilon_m^{\alpha}}\\
&\leq C\int_{Q_i}|a(u)|du.
\end{aligned}$$

Por el Teorema de Fubini, el hecho que $\epsilon_{m+1}-3\epsilon_i \leq |z-u|_\infty \leq \epsilon_{m+1}$ pues $|z-u|_\infty \geq |z|_\infty - |u|_\infty \geq \epsilon_{m+1}-2\epsilon_i-\epsilon_i = \epsilon_{m+1}-3\epsilon_i$ y el Lema 2.1.5 resulta

$$\begin{aligned}
II &\leq 2\sum_{m\geq i+\beta}^{\infty}\int_{\epsilon_{m+1}-2\epsilon_i<|z|_\infty\leq\epsilon_{m+1}}\int_{Q_i}\frac{(\epsilon_{m+1}-|z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_{m+1}^{n+\alpha-1}}\chi_{\{|z-u|\leq\epsilon_{m+1}\}}(u)|a(u)|\,du\,dz\\
&\leq 2\sum_{m\geq i+\beta}^{\infty}\int_{Q_i}\frac{|a(u)|}{\epsilon_{m+1}^{n+\alpha-1}}\left(\int_{\epsilon_{m+1}-3\epsilon_i<|z-u|_\infty\leq\epsilon_{m+1}}(\epsilon_{m+1}-|z-u|_\infty)^{\alpha-1}\,dz\right)du\\
&\leq C\left(\int_{Q_i}|a(u)|\,du\right)\epsilon_i^{\alpha}\sum_{m\geq i+\beta}^{\infty}\frac{1}{\epsilon_{m+1}^{\alpha}}\\
&\leq C\left(\int_{Q_i}|a(u)|\,du\right).
\end{aligned}$$

Sea l_o tal que $\epsilon_{m+1}-2^{l_o+1}\epsilon_i<0$ y $\epsilon_{m+1}-2^{l_o}\epsilon_i>0$ de manera que, usando que $\int_{Q_i} a = 0$, escribimos a III como

$$\begin{aligned}
III &= \sum_{m\geq i+\beta}^{\infty}\int_{|z|_\infty\leq\epsilon_{m+1}-2\epsilon_i}\left|\int_{Q_i}\frac{(\epsilon_{m+1}-|z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_{m+1}^{n+\alpha-1}}a(u)\,du\right|dz\\
&\leq C\sum_{m\geq i+\beta}^{\infty}\sum_{l=1}^{l_o}\int_{\epsilon_{m+1}-2^{l+1}\epsilon_i<|z|_\infty\leq\epsilon_{m+1}-2^{l}\epsilon_i}\int_{Q_i}\frac{|(\epsilon_{m+1}-|z-u|_\infty)^{\alpha-1}-(\epsilon_{m+1}-|z|_\infty)^{\alpha-1}|}{\epsilon_{m+1}^{n+\alpha-1}}|a(u)|\,du\,dz.
\end{aligned}$$

Usando el Teorema del Valor Medio, para $\epsilon_{m+1}-2^{l+1}\epsilon_i<|z|_\infty\leq\epsilon_{m+1}-2^{l}\epsilon_i$ se tiene que

$$\int_{Q_i}\frac{|(\epsilon_{m+1}-|z-u|_\infty)^{\alpha-1}-(\epsilon_{m+1}-|z|_\infty)^{\alpha-1}|}{\epsilon_{m+1}^{n+\alpha-1}}|a(u)|\,du \leq c(\alpha)\frac{2^{l(\alpha-2)}\epsilon_i^{\alpha-1}}{\epsilon_{m+1}^{n+\alpha-1}}\int_{Q_i}|a(u)|\,du.$$

Además,

$$|\{y:\ \epsilon_{m+1}-2^{l+1}\epsilon_i<|y|_\infty\leq\epsilon_{m+1}-2^{l}\epsilon_i\}|\leq c(n)2^{l}\epsilon_i(\epsilon_{m+1})^{n-1}.$$

Luego, utilizando el Lema 2.1.5 resulta

$$\begin{aligned}
III &\leq C\left(\int_{Q_i}|a|\right)\sum_{m\geq i+\beta}^{\infty}\frac{\epsilon_i^{\alpha}}{\epsilon_{m+1}^{\alpha}}\sum_{l=1}^{l_o}2^{l(\alpha-1)}\\
&\leq C\left(\int_{Q_i}|a|\right)\epsilon_i^{\alpha}\sum_{m\geq i+\beta}^{\infty}\frac{1}{\epsilon_{m+1}^{\alpha}}
\end{aligned}$$

$$\leq \quad C\left(\int_{Q_i} |a|\right).$$

Para acotar IV usamos nuevamente que $\displaystyle\int_{Q_i} a = 0$,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{Q_i} \frac{(\epsilon_k - |z-u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}} a(u)\, du\right| \\
\leq\ & \int_{Q_i} \frac{|(\epsilon_k - |z-u|_\infty)^{\alpha-1} - (\epsilon_k - |z|_\infty)^{\alpha-1}|}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}} |a(u)|\, du \\
\leq\ & \int_{Q_i \cap \{|z-u|_\infty > |z|_\infty\}} \frac{|(\epsilon_k - |z-u|_\infty)^{\alpha-1} - (\epsilon_k - |z|_\infty)^{\alpha-1}|}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}} |a(u)|\, du \\
& + \int_{Q_i \cap \{|z-u|_\infty \leq |z|_\infty\}} \frac{|(\epsilon_k - |z-u|_\infty)^{\alpha-1} - (\epsilon_k - |z|_\infty)^{\alpha-1}|}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}} |a(u)|\, du.
\end{aligned}$$

Si $|z-u|_\infty > |z|_\infty$, por el Teorema del Valor Medio,

$$\frac{|(\epsilon_k - |z-u|_\infty)^{\alpha-1} - (\epsilon_k - |z|_\infty)^{\alpha-1}|}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}} \leq C \frac{(\epsilon_k - |z-u|_\infty)^{\alpha-2}}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}} |u|_\infty \leq C(\rho) \left(\frac{(\epsilon_{m+1})^{\alpha-2}\epsilon_i}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}}\right),$$

pues como $|z-u|_\infty \leq |z|_\infty + |u|_\infty \leq \epsilon_{m+1} + \epsilon_i \leq \epsilon_{m+2}$ entonces

$$\begin{aligned}
\epsilon_k - |z-u|_\infty \quad &\geq \quad \epsilon_k - \epsilon_{m+2} \geq \epsilon_{m+3} - \epsilon_{m+2} = \epsilon_{m+3}\left(1 - \frac{\epsilon_{m+2}}{\epsilon_{m+3}}\right) \geq \epsilon_{m+3}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \\
&= \quad c(\rho)\epsilon_{m+3} = c'(\rho)\epsilon_{m+1}.
\end{aligned}$$

En el caso que $|z-u|_\infty \leq |z|_\infty$ el Teorema del Valor Medio permite obtener de forma análoga que

$$\frac{|(\epsilon_k - |z-u|_\infty)^{\alpha-1} - (\epsilon_k - |z|_\infty)^{\alpha-1}|}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}} \leq C(\rho) \left(\frac{(\epsilon_{m+1})^{\alpha-2}\epsilon_i}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}}\right).$$

Luego, por las acotaciones anteriores y el Lema 2.1.5, se tiene

$$\begin{aligned}
IV \quad &= \quad 2 \sum_{m \geq i+\beta}^{\infty} \int_{z \in C_m} \sum_{k \geq m+3} \left|\int_{Q_i} \frac{(\epsilon_k - |z-u|)^{\alpha-1}}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}} a(u)\, du\right| dz \\
&\leq \quad C\left(\int_{Q_i} |a(u)|\, du\right) \sum_{m \geq i+\beta}^{\infty} \sum_{k \geq m+3} \frac{(\epsilon_{m+1})^{\alpha-2}\epsilon_i}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}} |C_m| \\
&\leq \quad C\left(\int_{Q_i} |a(u)|\, du\right) \sum_{m \geq i+\beta}^{\infty} \sum_{k \geq m+3} \frac{(\epsilon_{m+1})^{\alpha-2}\epsilon_i}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}} (\epsilon_{m+1})^n \\
&\leq \quad C\left(\int_{Q_i} |a(u)|\, du\right) \epsilon_i \sum_{m \geq i+\beta}^{\infty} (\epsilon_{m+1})^{n+\alpha-2} \sum_{k \geq m+3} \frac{1}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\left(\int_{Q_i}|a(u)|\,du\right)\epsilon_i\sum_{m\geq i+\beta}^{\infty}\frac{1}{\epsilon_{m+1}}\left(\frac{\epsilon_{m+1}}{\epsilon_{m+3}}\right)^{n+\alpha-1}\\
&\leq C\left(\int_{Q_i}|a(u)|\,du\right)\epsilon_i\sum_{m\geq i+\beta}^{\infty}\frac{1}{\epsilon_{m+1}}\\
&\leq C\left(\int_{Q_i}|a(u)|\,du\right).
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.1.8. *Sea $Q = Q(x,R)$ y $Q^* = Q(x,kR)$ con $k = \rho^{2(\beta+1)}$. Sea a con soporte en Q y tal que $\int_Q a = 0$. Entonces existe $c > 0$, independiente de a, tal que*

$$\int_{z\notin Q^*} M_{\alpha,\rho}a(z)\,dz \leq c\int_Q |a(z)|\,dz.$$

Demostración. Es claro que es suficiente probar el corolario para $x = 0$. Sea $Q = Q(0,R)$ y $Q^* = Q(0,kR)$ donde $k = \rho^{2(\beta+1)}$. Sea i tal que $\epsilon_{i-1} \leq R < \epsilon_i$. Denotamos $Q_i = [-\epsilon_i,\epsilon_i]^n$ y $Q_i^* = [-\epsilon_{i+\beta},\epsilon_{i+\beta}]^n$. Se tiene que $\epsilon_{i+\beta} < kR$. En efecto, tomando $m = i+\beta$ y $n = i-1$ en el Lema 2.1.5 resulta que

$$\rho^{\beta+1} \leq \frac{\epsilon_{\beta+i}}{\epsilon_{i-1}} < \rho^{2(\beta+1)},$$

lo cual implica que

$$\epsilon_{i-1}\rho^{\beta+1} \leq \epsilon_{i+\beta} < \epsilon_{i-1}\rho^{2(\beta+1)} \leq R\rho^{2(\beta+1)} = kR.$$

Como a tiene soporte en Q y por lo tanto en Q_i, por el Lema 2.1.14 resulta

$$\begin{aligned}
\int_{z\notin Q^*} M_{\alpha,\rho}a(z)\,dz &\leq \int_{z\notin Q_i^*} M_{\alpha,\rho}a(z)\,dz\\
&\leq C\int_{Q_i}|a(z)|\,dz = C\int_Q |a(z)|\,dz.
\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 2.1.6. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $t > 0$. La descomposición de una función dada por el método de Calderón-Zygmund permite escribir a f como

$$f = g + b$$

donde $b = \sum_i b_i = \sum_i \left(f - \frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} f\,dx\right)\chi_{Q_i}$ y $g = f - b$ con $\{Q_i\}$ la familia de cubos diádicos de $\mathbb{R}^n$.

Sea Q_i^* el cubo que tiene mismo centro que el cubo Q_i y $\ell(Q_i^*) = k\ell(Q_i)$ donde $k = \text{máx}\{2,\rho^{2(\beta+1)}\}$ y $l(Q_i)$ indica el lado del cubo Q_i. Luego,

$$|\{x : M_{\alpha,\rho}f(x) > t\}| \leq |\{x : M_{\alpha,\rho}g(x) > t/2\}| + |\{x : M_{\alpha,\rho}b(x) > t/2\}|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq |\{x : M_{\alpha,\rho}g(x) > t/2\}| + \left|\bigcup Q_i^*\right| + |\{x \notin \bigcup Q_i^* :\ M_{\alpha,\rho}b(x) > t/2\}| \\
&= I + II + III.
\end{aligned}
$$

Como $Q_i \subset Q_i^*$, por duplicación de la medida de Lebesgue se tiene que $|Q_i^*| \leq C|Q_i|$. Además, la descomposición de Calderón-Zygmund del espacio asociado a los cubos diádicos asociado a una tal f permite decir que

$$II = \left|\bigcup Q_i^*\right| \leq \sum |Q_i^*| \leq C \sum |Q_i| \leq \frac{C}{t}||f||_1.$$

Además, para cualquier $p > 1$ se tiene

$$||g||_p \leq ||g||_1^{1/p} ||g||_\infty^{1-1/p} \leq ||f||_1^{1/p} (2^n t)^{1/p'},$$

entonces

$$||g||_p^p \leq ||f||_1 (2^n t)^{p-1}.$$

Luego, como $M_{\alpha,\rho}$ es acotado en L^p para cualquier $p > 1/\alpha$, usando cualquiera de esos valores de p,

$$
\begin{aligned}
I &= |\{x : M_{\alpha,\rho}g(x) > t/2\}| \\
&\leq \left(\frac{2}{t}\right)^p ||g||_p^p \\
&\leq \left(\frac{2}{t}\right)^p ||f||_1 (2^n t)^{p-1} \\
&= \frac{C(n,p)}{t}||f||_1.
\end{aligned}
$$

Por la Desigualdad de Chebyshev, el Corolario 2.1.8, el hecho $b(x) = b_i(x)$ en cada Q_i resulta

$$
\begin{aligned}
III &= |\{x \notin \bigcup Q_i^* :\ M_{\alpha,\rho}b(x) > t/2\}| \\
&\leq \frac{2}{t} \int_{x \notin \bigcup Q_i^*} M_{\alpha,\rho}b(x)\, dx \\
&\leq \frac{2}{t} \sum_i \int_{x \notin Q_i^*} M_{\alpha,\rho}b_i(x)\, dx \\
&\leq \frac{C}{t} \sum_i \int_{Q_i} |b_i(x)|\, dx \\
&\leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |b(x)|\, dx \\
&= \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|\, dx \\
&\leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx + \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\, dx \\
&\leq \frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx.
\end{aligned}
$$

□

El Teorema 2.1.6 en el caso unidimensional también puede obtenerse a partir de un corolario probado en el libro de E. Stein (ver Corolario en la página 75 de [**40**]). Posiblemente también se pueda obtener el resultado n dimensional también, pero comprobar que la función φ^α verifica las condiciones que allí aparecen resulta más complicado cuando aumentamos la dimensión.

Una vez probada la acotación del operador maximal $M_{\alpha,\rho}$ podemos probar el siguiente resultado de convergencia para los promedios $\mathcal{P}^\alpha_{\epsilon_k} f$.

TEOREMA 2.1.9. *Sea $\{\epsilon_k\}$ una $\rho-$sucesión lacunar y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \geq 1$. Luego, los promedios de Cesàro lacunares $\mathcal{P}^\alpha_{\epsilon_k} f$ convergen puntualmente, y en casi todo punto, a f cuando $k \to -\infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $p > 1/\alpha$, como los promedios $\mathcal{P}^\alpha_\epsilon f$ convergen en casi todo punto para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y dado que los promedios lacunares $\{\mathcal{P}^\alpha_{\epsilon_k} f\}$ son una subsucesión, se tiene la convergencia de los mismos en casi todo punto para funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p > 1/\alpha$. En el caso que $1 \leq p \leq 1/\alpha$, consideramos el subespacio $D = L^p \cap L^q$ con $q > 1/\alpha$. Notemos que D es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y para toda función f en D tenemos la convergencia de los promedios lacunares $\{\mathcal{P}^\alpha_{\epsilon_k} f\}$ en casi todo punto. Este hecho, junto con las acotaciones probadas para el operador maximal $M_{\alpha,\rho}$, permiten obtener el resultado deseado. □

2.1.3. Velocidad de convergencia para promedios de Cesàro lacunares n dimensionales.

Con el propósito de obtener información sobre cómo ocurre la convergencia de los promedios $\mathcal{P}^\alpha_{\epsilon_j} f$, al igual que en los artículos [**27**], [**2**] o [**6**], estudiamos la convergencia de la serie de diferencias

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k[\mathcal{P}^\alpha_{\epsilon_k} f(x) - \mathcal{P}^\alpha_{\epsilon_{k-1}} f(x)]$$

donde $\{v_k\}$ es una sucesión acotada de números reales o complejos.

Para cada $N \in \mathbb{Z}^2$, $N = (N_1, N_2)$ con $N_1 < N_2$ definimos la suma

$$T_N f(x) = \sum_{N_1}^{N_2} v_k[\mathcal{P}^\alpha_{\epsilon_k} f(x) - \mathcal{P}^\alpha_{\epsilon_{k-1}} f(x)].$$

Nuestro objetivo es probar resultados de convergencia de $T_N f(x)$ en casi todo punto cuando $N = (N_1, N_2)$ tiende a $(-\infty, +\infty)$ lo cual significa que $N_1 \to -\infty$ y $N_2 \to +\infty$. Para ello estudiamos la acotación del operador maximal asociado

$$T^* f(x) = \sup_N |T_N f(x)|$$

en el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$. El primer resultado que probaremos se encuentra en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.1.10. *El operador maximal $T^*f(x)$ es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo p con $1 < p < \infty$.*

Para demostrar este teorema utilizaremos el siguiente resultado de J. Duoandikoetxea and J.L. Rubio de Francia (ver Teorema E en [**16**]).

TEOREMA 2.1.11. [**16**] *Sea $\gamma > 0$ fija y sean σ_k medidas de Borel soportadas en $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \epsilon_k\}$. Supongamos que $||\sigma_k||_{L^1} \leq 1$ y*

$$|\hat{\sigma}_k(\xi)| \leq C|\epsilon_k \xi|^{\gamma} \tag{2.1.5}$$

$$|\hat{\sigma}_k(\xi)| \leq C|\epsilon_{k-1} \xi|^{-\gamma} \tag{2.1.6}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ y supongamos también que para todo $q > 1$

$$|| \sup_k ||\sigma_k| * f|||_q \leq C||f||_q \tag{2.1.7}$$

donde $|\sigma_k|$ es la variación total de σ_k. Luego,

$$T^*f = \sup_k |T_k f|$$

donde $T_k f = \displaystyle\sum_{j=k}^{\infty} \sigma_j * f$, es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$.

El teorema también se puede enunciar y probar utilizando la norma infinito en $\mathbb{R}^n$ en lugar de la euclídea, es decir, cubos en lugar de bolas.

Comenzaremos probando el siguiente lema sobre la Transformada de Fourier de la función φ^α.

LEMA 2.1.12. *Sea $0 < \alpha \leq 1$ y $\varphi^\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función definida como*

$$\varphi^\alpha(x) = C(\alpha, n)(1 - |x|_\infty)^{\alpha-1} \chi_{\{|x|_\infty < 1\}}(x).$$

La transformada de Fourier de φ^α, dada por

$$\widehat{\varphi^\alpha}(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^\alpha(x) e^{-2\pi i x.\xi} dx,$$

verifica las siguientes propiedades:

i) Existe una constante C que depende de α tal que

$$|\widehat{\varphi^\alpha}(\xi_1, \cdots, \xi_n)| \leq \frac{C}{|\xi|_\infty^\alpha},$$

para todo ξ tal que $|\xi|_\infty > 1$.

ii) $\left|\nabla(\widehat{\varphi^\alpha})(\xi)\right| \leq C$ para todo ξ.

Demostración. Consideremos la siguiente división del cubo $Q(0,1) = \{|x|_\infty < 1\}$:

$$U_i = K_i \cap \{x \in Q(0,1) : x_i \geq 0\}$$

$$V_i = K_i \cap \{x \in Q(0,1) : x_i \leq 0\}$$

donde $K_i = \{x \in Q(0,1) : |x_j|_\infty \leq |x_i|_\infty, j = 1, \cdots, n\}$

Sea $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ podemos escribir

$$\varphi^\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \left[(1-x_i)^{\alpha-1}\chi_{U_i}(x) + (1+x_i)^{\alpha-1}\chi_{V_i}(x)\right].$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi^\alpha}(\xi_1, \cdots, \xi_n) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.\xi}\varphi^\alpha(x)\ dx \\
&= \sum_{i=1}^n \left[\int_{U_i} e^{-2\pi i x.\xi}(1-x_i)^{\alpha-1}\ dx + \int_{V_i} e^{-2\pi i x.\xi}(1+x_i)^{\alpha-1}\ dx\right] \\
&= \sum_{i=1}^n (A_i + B_i).
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{U_1} e^{-2\pi i x.\xi}(1-x_1)^{\alpha-1}\ dx \\
&= \int_0^1 e^{-2\pi i x_1\xi_1}(1-x_1)^{\alpha-1}\left(\int_{|x_2|\leq x_1} e^{-2\pi i x_2\xi_2}\ dx_2\right)\cdots\left(\int_{|x_n|\leq x_1} e^{-2\pi i x_n\xi_n}\ dx_n\right)\ dx_1 \\
&= \int_0^1 e^{-2\pi i x_1\xi_1}(1-x_1)^{\alpha-1}\prod_{j=2}^n \frac{sen(2\pi x_1\xi_j)}{\pi\xi_j}\ dx_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \int_{V_1} e^{-2\pi i x.\xi}(1+x_1)^{\alpha-1}\ dx \\
&= \int_{-1}^0 e^{-2\pi i x_1\xi_1}(1+x_1)^{\alpha-1}\left(\int_{|x_2|\leq|x_1|} e^{-2\pi i x_2\xi_2}\ dx_2\right)\cdots\left(\int_{|x_n|\leq|x_1|} e^{-2\pi i x_n\xi_n}\ dx_n\right)\ dx_1 \\
&= -\int_{-1}^0 e^{-2\pi i x_1\xi_1}(1+x_1)^{\alpha-1}\prod_{j=2}^n \frac{sen(2\pi x_1\xi_j)}{\pi\xi_j}\ dx_1.
\end{aligned}$$

Luego,

$$I_1 = A_1 + B_1 = \int_0^1 2(1-x_1)^{\alpha-1}\cos(2\pi x_1\xi_1)\prod_{j=2}^n \frac{sen(2\pi x_1\xi_j)}{\pi\xi_j}\ dx_1.$$

En general se tiene que

$$I_i = A_i + B_i = \int_0^1 2(1-x_i)^{\alpha-1}\cos(2\pi x_i\xi_i)\prod_{j=1, j\neq i}^n \frac{sen(2\pi x_i\xi_j)}{\pi\xi_j}\ dx_i.$$

Notemos que, usando convenientemente las acotaciones $|\operatorname{sen} t|, |\cos t| \leq 1$ y $\left|\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right| \leq 1$, tenemos que

$$I_i \leq \frac{C}{|\xi_j|},$$

para cualquier $j \neq i$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} I_i &= \left(\int_0^{1-\frac{1}{|\xi|_\infty}} + \int_{1-\frac{1}{|\xi|_\infty}}^1 \right) 2(1-x_i)^{\alpha-1} \cos(2\pi x_i \xi_i) \prod_{j=1, j\neq i}^n \frac{sen(2\pi x_i \xi_j)}{\pi \xi_j} \; dx_i \\ &= C_i + D_i. \end{aligned}$$

Claramente

$$|D_i| \leq C \int_{1-\frac{1}{|\xi|_\infty}}^1 2(1-x_i)^{\alpha-1} x_i \; dx_i \leq \frac{C}{|\xi|_\infty^\alpha}.$$

Para acotar C_i integramos por partes con $u(x_i) = (1-x_i)^{\alpha-1} \displaystyle\prod_{j=1, j\neq i}^n \frac{sen(2\pi x_i \xi_j)}{\pi \xi_j}$ y $v'(x_i) = 2\cos(2\pi x_i \xi_i)$, así

$$\begin{aligned} C_i = &\int_0^{1-\frac{1}{|\xi|_\infty}} 2(1-x_i)^{\alpha-1} \cos(2\pi x_i \xi_i) \prod_{j=1, j\neq i}^n \frac{sen(2\pi x_i \xi_j)}{\pi \xi_j} \; dx_i \\ = &\frac{1}{|\xi|_\infty^{\alpha-1}} \prod_{j=1, j\neq i}^n \frac{sen\left(2\pi \left(1-\frac{1}{|\xi|_\infty}\right)\xi_j\right)}{\pi \xi_j} \frac{2sen\left(2\pi\left(1-\frac{1}{|\xi|_\infty}\right)\xi_i\right)}{2\pi \xi_i} \\ &- \int_0^{1-\frac{1}{|\xi|_\infty}} \frac{sen(2\pi x_i \xi_i)}{\pi \xi_i} (1-\alpha)(1-x_i)^{\alpha-2} \prod_{j=1, j\neq i}^n \frac{sen(2\pi x_i \xi_j)}{\pi \xi_j} \; dx_i \\ &- \int_0^{1-\frac{1}{|\xi|}} \frac{sen(2\pi x_i \xi_i)}{\pi \xi_i} + (1-x_i)^{\alpha-1} \sum_{k=1, k\neq i} \prod_{j=1, j\neq i,k}^n \frac{sen(2\pi x_i \xi_j)}{\pi \xi_j} 2\cos(2\pi x_i \xi_k) \; dx_i \end{aligned}$$

Usando nuevamente las acotaciones de las funciones trigonométricas y la función $\frac{sen\, t}{t}$ resulta,

$$|C_i| \leq \frac{C}{|\xi|_\infty^{\alpha-1}} \frac{1}{|\xi_i|} + \frac{C}{|\xi_i|} \int_0^{1-\frac{1}{|\xi|_\infty}} (1-x_i)^{\alpha-2} \; dx_i \leq \frac{C}{|\xi|_\infty^{\alpha-1}|\xi_i|}.$$

Por lo tanto, para cualquier $i = 1, \cdots, n$, tenemos que concretamente,

$$I_i \leq \frac{C}{|\xi|_\infty^\alpha}, \tag{2.1.8}$$

si $|\xi|_\infty > 1$ y la parte $i)$ del lema se sigue de este resultado.

De forma inmediata se obtiene $ii)$ pues,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.\xi} \varphi^\alpha(x) \; dx \right) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x.\xi} (-2\pi i x_i) \varphi^\alpha(x) \; dx \right| \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |x_i| |\varphi^\alpha(x)| \; dx \leq C. \end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 2.1.10. Consideremos las funciones $\sigma_k = \tilde{v}_k(\varphi^\alpha_{\epsilon_k} - \varphi^\alpha_{\epsilon_{k-1}})$, donde $\tilde{v}_k = \frac{v_k}{2||v_k||_\infty}$. Notemos que las funciones σ_k están soportadas en $\{x : \ |x|_\infty < \epsilon_k\}$ y $||\sigma_k||_1 \leq 1$. Veamos que estas funciones verifican la desigualdad (2.1.5). Como $|\hat{\sigma}_k(\xi)| \leq ||\sigma_k||_1 \leq 1$, la desigualdad (2.1.5) tiene relevancia cuando $|\epsilon_k \xi| \leq 1$. Utilizando el Teorema del Valor Medio y el Lema 2.1.12, resulta

$$\begin{aligned}
|\hat{\sigma}_k(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_k(t) e^{-2\pi i x \xi} dx \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi^\alpha_{\epsilon_k}(x) - \varphi^\alpha_{\epsilon_{k-1}}(x)] e^{-2\pi i x \xi} dx \right| \\
&= \frac{1}{2} |\widehat{\varphi^\alpha_{\epsilon_k}}(\xi) - \widehat{\varphi^\alpha_{\epsilon_{k-1}}}(\xi)| \\
&= \frac{1}{2} |\widehat{\varphi^\alpha}(\epsilon_k \xi) - \widehat{\varphi^\alpha}(\epsilon_{k-1}\xi)| \\
&\leq C|\epsilon_k \xi - \epsilon_{k-1}\xi| \leq C|\epsilon_k \xi|,
\end{aligned}$$

y, como $|\epsilon_k \xi| \leq 1$, tenemos que $|\hat{\sigma}_k(\xi)| \leq C|\epsilon_k\xi|^\alpha$.

Veamos que las funciones σ_k también verifican (2.1.6). Si $|\epsilon_{k-1}\xi| \leq 1$, la desigualdad es trivial puesto que $|\hat{\sigma}_k(\xi)| \leq ||\sigma_k||_1 \leq 1$. Si $|\epsilon_{k-1}\xi| > 1$, la desigualdad deseada se deduce del Lema 2.1.12 puesto que

$$|\hat{\sigma}_k(\xi)| \leq C \left(|\widehat{\varphi^\alpha}(\epsilon_k \xi)| + |\widehat{\varphi^\alpha}(\epsilon_{k-1}\xi)| \right) \leq \frac{C}{|\epsilon_k \xi|^\alpha}.$$

Por otro lado, como $\sup_k ||\sigma_k| * f| \leq M_{\alpha,\rho} f$, la acotación (2.1.7) para $\sup_k ||\sigma_k| * f|$ se deduce de la acotación del operador lacunar $M_{\alpha,\rho}$ estudiada previamente. Luego, aplicando el Teorema 2.1.11 con medidas de Borel absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue con densidad σ_k y con $\gamma = \alpha$, tenemos probado el resultado deseado. En efecto, notemos que

$$\begin{aligned}
T^* f(x) &= 2||v_k||_\infty \sup_{N \in \mathbb{Z}^2} \left| \sum_{k=N_1}^{N_2} \sigma_k * f(x) \right| \\
&= \sup_{N_1, N_2} \left| \sum_{k=N_1}^{\infty} \sigma_k * f(x) - \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sigma_k * f(x) \right| \\
&\leq 2 \sup_N \left| \sum_{k=N}^{\infty} \sigma_k * f(x) \right|.
\end{aligned}$$

□

En el caso extremo $p = 1$ tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.1.13. *Sea $\{\epsilon_k\}$ una ρ-sucesión lacunar y $\{v_k\}$ una sucesión acotada de números reales o complejos. Luego, T^* es de tipo débil $(1,1)$, es decir, existe $C > 0$ tal que*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \ |T^* f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int |f(x)| \, dx$$

para todo $\lambda > 0$ y para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

La demostración de este teorema se sigue de forma completamente similar a la demostración del correspondiente resultado en el Teorema 2.1.6. Sólo tenemos que verificar que se cumple el siguiente lema que es la versión correspondiente a T^* del Lema 2.1.7.

LEMA 2.1.14. *Sea $\{\epsilon_k\}$ una sucesión ρ-lacunar, $Q_i = [-\epsilon_i, \epsilon_i]^n$ y $Q_i^* = [-\epsilon_{i+\beta}, \epsilon_{i+\beta}]^n$. Sea a con soporte en Q_i y tal que $\int_{Q_i} a = 0$. Entonces existe $c > 0$, independiente de a, tal que*

$$\int_{z\notin Q_i^*} T^*a(z)\,dz \leq c \int_{Q_i} |a(z)|\,dz.$$

DEMOSTRACIÓN. Como en la prueba del Lema 2.1.7 escribimos

$$\int_{z\notin Q^*} T^*a(z)\,dz = \sum_{m=i+\beta}^{\infty} \int_{C_m} T^*a(z)\,dz$$

donde $C_m: \ \epsilon_m \leq ||z||_\infty < \epsilon_{m+1}$. Sea $z \in C_m$. Para $N \in \mathbb{Z}^2$ fijo se tiene que

$$|T_N a(z)| \leq C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|[\varphi_k^\alpha(z-u) - \varphi_{k-1}^\alpha(z-u)]a(u)\,du\right|.$$

Si $z \in C_m$ y $u \in Q_i$ luego $\epsilon_m - \epsilon_i \leq ||z-u||_\infty \leq \epsilon_{m+1} + \epsilon_i$. Además, por el Lema 2.1.5 $\epsilon_i + \epsilon_m \leq \epsilon_{m+1}$ luego se tiene $\epsilon_{m-1} \leq ||z-u||_\infty \leq \epsilon_{m+2}$. Dado que $\{u : \varphi_k^\alpha(z-u) \neq 0\} \subset \{u : ||z-u||_\infty \leq \epsilon_k\}$ resulta que $\varphi_k^\alpha(z-u) = 0$ para todo $k \leq m-1$. Luego,

$$\begin{aligned}
|T_N a(z)| &\leq C\left|\int_{Q_i} \frac{(\epsilon_m - ||z-u||_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_m^{n+\alpha-1}} \chi_{\{||z-u||_\infty \leq \epsilon_m\}} a(u)\,du\right| \\
&\quad + C\left|\int_{Q_i} \frac{(\epsilon_{m+1} - ||z-u||_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_{m+1}^{n+\alpha-1}} \chi_{\{||z-u||_\infty \leq \epsilon_{m+1}\}}(u) a(u)\,du\right| \\
&\quad + C\left|\int_{Q_i} \frac{(\epsilon_{m+2} - ||z-u||_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_{m+2}^{n+\alpha-1}} a(u)\,du\right| \\
&\quad + C\sum_{k\geq m+3}\left|\int_{Q_i} \frac{(\epsilon_k - ||z-u||_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}} a(u)\,du\right| \\
&= A_m(z) + B_m(z) + C_m(z) + D_m(z).
\end{aligned}$$

Dados que los términos A_m, B_m, C_m y D_m son exactamente los mismos términos que aparecen en la prueba del Lema 2.1.7, la demostración se sigue exactamente como la demostración de dicho lema. □

Una vez que tenemos las acotaciones del operador maximal T^* estamos en condiciones de probar el siguiente resultado.

TEOREMA 2.1.15. *Sea $\{\epsilon_k\}$ una sucesión ρ-lacunar y $\{v_k\}$ una sucesión de números reales o complejos. Entonces*

$$T_N f(x) = \sum_{N_1}^{N_2} v_k[\mathcal{P}_{\epsilon_k}^\alpha f(x) - \mathcal{P}_{\epsilon_{k-1}}^\alpha f(x)] = \sum_{N_1}^{N_2} \sigma_k * f(x)$$

converge en casi todo punto cuando $N = (N_1, N_2) \to (-\infty, +\infty)$ *para toda* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *con* $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Para obtener la convergencia puntual de los operadores truncados $T_N f(x)$ solo tenemos que ver la convergencia de estos operadores en un subespacio denso de $L^p(\mathbb{R}^n)$. Para ello consideramos el espacio $\mathcal{S}$ de las funciones de Schwartz. La demostración es similar a la dada en [**6**] para el caso unidimensional. En efecto, sea $f \in \mathcal{S}$, para estudiar $\lim_{N\to(-\infty,\infty)} \sum_{k=-N_1}^{N_2} \sigma_k * f(x)$, es suficiente ver que $T_{-M,0}f(x) = \sum_{k=-M}^{0} \sigma_k * f(x)$ y $T_{0,M}f(x) = \sum_{k=0}^{M} \sigma_k * f(x)$ convergen cuando $M \to +\infty$. Para ello veremos que las sucesiones son de Cauchy. Observemos que

$$|T_{-M,0}f(x) - T_{-N,0}f(x)| + |T_{0,M}f(x) - T_{0,N}f(x)| = |T_{-M,-N-1}f(x)| + |T_{N+1,M}f(x)|,$$

por lo tanto es suficiente probar que con $N < M$,

$$I = |T_{-M,-N-1}f(x)| \qquad II = |T_{N+1,M}f(x)|$$

tienden a cero cuando $N \to \infty$.

Observando que $\int_{\mathbb{R}^n} [\varphi^\alpha_{\epsilon_k}(x-y) - \varphi^\alpha_{\epsilon_{k-1}}(x-y)]dx = 0$, por el Teorema del Valor Medio y el Lema 2.1.5 se tiene

$$\begin{aligned}
I &= \left|\sum_{k=-M}^{-N-1} \sigma_k * f(x)\right| \\
&\leq ||v_k||_\infty \sum_{k=-M}^{-N-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi^\alpha_{\epsilon_k}(x-y) - \varphi^\alpha_{\epsilon_{k-1}}(x-y)||f(y)-f(x)|\,dy \\
&\leq C||v_k||_\infty \sum_{k=-M-1}^{-N-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi^\alpha_{\epsilon_k}(x-y)||x-y|\,dy \\
&\leq C||v_k||_\infty \sum_{k=-M-1}^{-N-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi^\alpha_{\epsilon_k}(u)||u|\,du \\
&\leq C||v_k||_\infty \sum_{k=-M-1}^{-N-1} \int_{|u|_\infty<\epsilon_k} \frac{(\epsilon_k - |u|_\infty)^{\alpha-1}}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}}|u|_\infty\,du \\
&\leq C||v_k||_\infty \sum_{k=-M-1}^{-N-1} \frac{1}{\epsilon_k^{n+\alpha-2}} \int_{|u|_\infty<\epsilon_k} (\epsilon_k - |u|_\infty)^{\alpha-1}\,du \\
&\leq C||v_k||_\infty \sum_{k=-M-1}^{-N-1} \frac{1}{\epsilon_k^{n+\alpha-2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{|u|_\infty<\epsilon_k, |u|_\infty=|u_j|} (\epsilon_k - |u|_\infty)^{\alpha-1}\,du \\
&\leq C||v_k||_\infty \sum_{k=-M-1}^{-N-1} \frac{1}{\epsilon_k^{n+\alpha-2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{|u_j|<\epsilon_k, |u|_\infty<\epsilon_k} (\epsilon_k - |u_j|)^{\alpha-1}\,du
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le C||v_k||_\infty \sum_{k=-M-1}^{-N-1} \frac{1}{\epsilon_k^{\alpha-1}} C(n) \left(\int_0^{\epsilon_k} (\epsilon_k - t)^{\alpha-1}\, dt \right) \\
&= C||v_k||_\infty \sum_{k=-M-1}^{-N-1} \frac{1}{\epsilon_k^{\alpha-1}} \int_0^{\epsilon_k} t^{\alpha-1}\, dt \\
&\le C||v_k||_\infty \sum_{k=-M-1}^{-N-1} \epsilon_k \\
&\le C||v_k||_\infty \epsilon_{-N-1}.
\end{aligned}
$$

Luego, tomando límite cuando $N \to \infty$ resulta que $I \to 0$. Aplicando la desigualdad de Hölder con $s > 1/\alpha$ se tiene

$$
\begin{aligned}
II &= |T_{N+1,M} f(x)| \\
&= \left| \sum_{k=N+1}^{M} \sigma_k * f(x) \right| \\
&\le 2||v_k||_\infty \sum_{k=N}^{M} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\epsilon_k}^{\alpha}(x-y)|f(y)|\, dy \\
&\le 2||v_k||_\infty \sum_{k=N}^{M} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_{\epsilon_k}^{\alpha}(x-y))^{s'}\, dy \right)^{1/s'} ||f||_s \\
&\le 2||v_k||_\infty ||f||_s \sum_{k=N}^{M} \frac{1}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}} \left(\int_{|u|_\infty < \epsilon_k} (\epsilon_k - |u|_\infty)^{(\alpha-1)s'}\, du \right)^{1/s'} \\
&\le C||v_k||_\infty ||f||_s \sum_{k=N}^{M} \frac{1}{\epsilon_k^{n+\alpha-1}} \epsilon_k^{\alpha-1+n/s'} \\
&\le C||v_k||_\infty ||f||_s \sum_{k=N}^{M} \frac{1}{\epsilon_k^{n/s}} \\
&\le \frac{C||f||_s}{\epsilon_N^{n/s}}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, tomando límite cuando $N \to \infty$ resulta que $II \to 0$.$\square$

2.2. Promedios de Cesàro en espacios producto

En esta sección, abordamos el estudio de la convergencia de los promedios de Cesàro definidos sobre espacios producto. Como la primer sección, la misma está dividida en tres partes. En primer lugar damos la notación necesaria para definir los promedios en espacios producto y mostramos los resultados obtenidos en este caso. A continuación, exponemos los resultados de convergencia en este contexto cuando consideramos a los promedios sobre sucesiones lacunares.

Por último, en la tercera parte de esta sección extendemos los resultados sobre velocidad de convergencia al contexto de espacios producto.

2.2.1. Convergencia de los promedios de Cesàro en espacios producto.

Comenzaremos esta parte introduciendo la notación que utilizaremos. Dado $L \in \mathbb{N}$, consideramos a $\mathbb{R}^n$ formado por L bloques de la siguiente manera

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_L}.$$

Si $D_i := \{j \in \mathbb{N} : n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1 \leq j \leq n_2 + \cdots + n_i\}$, con

$$x^i := (x_j : j \in D_i) \in \mathbb{R}^{n_i}, i = 1, \cdots, L,$$

representamos las coordenadas del bloque n_i.

Dados $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_L)$ con $0 < \alpha_i \leq 1$, $i = 1, \cdots, L$, $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_L) \in \mathbb{R}^L_+$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos la función

$$\Phi^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}}(x) \quad = \quad \varphi^{\alpha_1}_{\epsilon_1}(x^1) \cdots \varphi^{\alpha_L}_{\epsilon_L}(x^L)$$

donde

$$\varphi^{\alpha_i}_{\epsilon_i}(x^i) = \frac{1}{\epsilon_i^{n_i}} \varphi^{\alpha_i}\left(\frac{x^i}{\epsilon_i}\right)$$

y $\varphi^{\alpha_i} : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ es la función definida en (2.1.2).

Llamaremos *promedios de Cesàro en espacio producto* o simplemente *promedios de Cesàro generalizados* a los promedios

$$\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}} f(x) = f * \Phi^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}}(x). \tag{2.2.1}$$

Si escribimos $C(\bar{\alpha}, \bar{n}) = \left[\prod_{i=1}^{L} C(\alpha_i, n_i)\right]^{-1}$, donde $\bar{n} = (n_1, \cdots, n_L)$ y $C(\alpha_i, n_i)$ es la constante de la función φ^{α} definida en 2.1.2 y $Q_i = Q(x^i, \epsilon_i)$, los promedios $\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}}$ se pueden escribir como

$$\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}} f(x) = \frac{C(\bar{\alpha}, \bar{n})}{\prod_{i=1}^{L} \epsilon_i^{n_i+\alpha_i-1}} \int_{Q_1} \cdots \int_{Q_L} f(y^1, \cdots, y^L) \prod_{i=1}^{L} d(y^i, \partial Q_i)^{\alpha_i - 1} \, dy^1 \cdots dy^L.$$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$ y $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$, sea

$$\tilde{x}_i = (x^1, \cdots, x^{i-1}, x^{i+1}, \cdots, x^L).$$

Para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sea $f_{\tilde{x}_i} : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ dada por $f_{\tilde{x}_i}(x^i) = f(x^1, \cdots, x^i, \cdots, x^L)$. Dados $0 < \gamma \leq 1$ y $\delta > 0$, definimos los promedios

$$P^{i,\gamma}_{\delta} f(x) \quad = \quad P^{\gamma}_{\delta}(f_{\tilde{x}_i})(x^i)$$

$$= \frac{C(\gamma, n_i)}{\delta^{n_i+\gamma-1}} \int_{Q(x^i,\delta)} |f_{\tilde{x}_i}(y^i)| d(y^i, \partial Q(x^i,\delta))^{\gamma-1}\, dy^i.$$

Asociados a los promedios de Cesàro $P_\delta^{i,\gamma}$ tenemos los operadores maximales

$$M_\gamma^i f(x) = M_\gamma(f_{\tilde{x}_i})(x^i) = \sup_{\delta>0} P_\delta^{i,\gamma}|f|(x).$$

Dado que el operador M_γ es el operador maximal de Cesàro definido en la primera parte de este capítulo, para cualquier $i = 1, \cdots, L$, los operadores M_γ^i son de tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1/\gamma$ y de tipo débil restringido $(1/\gamma, 1/\gamma)$, es decir, existe $C > 0$ tales que

$$\int_{\mathbb{R}^n} [M_\gamma^i f(x)]^p\, dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx,$$

y

$$|\{x \in \mathbb{R}^n :\ M_\gamma^i f(x) > t\}| \le \left(\frac{C}{t} \int_0^\infty |\{x \in \mathbb{R}^n :\ |f(x)| > t\}|^\gamma\, ds \right)^{1/\gamma},$$

para todo $t > 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} [M_\gamma^i f(x)]^p\, dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-n_i}} \int_{\mathbb{R}^{n_i}} [M_\gamma(f_{\tilde{x}_i})(x^i)]^p\, dx^i\, d\tilde{x}_i \\ &\le C \int_{\mathbb{R}^{n-n_i}} \int_{\mathbb{R}^{n_i}} |f_{\tilde{x}_i}(x^i)|^p\, dx^i\, d\tilde{x}_i = C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando la desigualdad integral de Minkowski y el tipo débil restringido de M_γ, como se muestra en [**8**], tenemos que

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n :\ M_\gamma^i f(x) > t\}| &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{y:\ M_\gamma^i f(y) > t\}}(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-n_i}} \int_{\mathbb{R}^{n_i}} \chi_{\{y^i:\ M_\gamma f_{\tilde{x}_i}(y^i) > t\}}(x^i)\, dx^i\, d\tilde{x}_i \\ &\le \int_{\mathbb{R}^{n-n_i}} \left(\frac{C}{t} \int_0^\infty |\{x^i : |f_{\tilde{x}_i}(x^i)| > s\}|^\gamma\, ds \right)^{1/\gamma} d\tilde{x}_i \\ &\le \left(\frac{C}{t} \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^{n-n_i}} |\{x^i : |f(x)| > s\}| d\tilde{x}_i \right)^\gamma ds \right)^{1/\gamma} \\ &= \left(\frac{C}{t} \int_0^\infty |\{x \in \mathbb{R}^n :\ |f(x)| > t\}|^\gamma\, ds \right)^{1/\gamma}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} f(x) = P_{\epsilon_1}^{1,\alpha_1} \circ \cdots \circ P_{\epsilon_L}^{L,\alpha_L} f(x).$$

y que su maximal asociado verifica

$$\mathcal{M}_{\bar{\alpha}} f(x) = \sup_{\bar{\epsilon}>0} \mathcal{P}_{\bar{\epsilon}}^{\bar{\alpha}} |f|(x) \le M_{\alpha_1}^1 \circ \cdots \circ M_{\alpha_L}^L f(x), \tag{2.2.2}$$

donde $\bar{\epsilon} > 0$ significa $\epsilon_i > 0$ para todo $i = 1, \cdots, L$.

Dado que se puede intercambiar el orden en que aparecen los operadores $M_{\alpha_i}^i$ en la desigualdad de arriba, como una aplicación directa de los resultados de acotación para cada operador

$M^i_{\alpha_i}$ y el Teorema 1.2.7 sobre composición de operadores nos permiten obtener el siguiente resultado.

TEOREMA 2.2.1. *Dado $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_L)$, sea $\alpha_* = \min_{1\le i\le L} \alpha_i$ y supongamos que existen exactamente k números α_i, con $1 \le k \le L$, tales que $\alpha_* = \alpha_i$. Luego, existe $C > 0$ tal que el operador $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ satisface*

i) $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ es de tipo fuerte (p, p) para todo $p > 1/\alpha_*$, es decir existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}_{\bar{\alpha}} f(x)|^p \, dx \le C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

ii)

$$|\{x : \ \mathcal{M}_{\bar{\alpha}} f(x) > t\}| \le C \left(\varphi_{k-1}(1/t) \int_0^\infty s^{\alpha_*-1} \varphi_{k-1}(f^*(s)) \, ds \right)^{1/\alpha_*},$$

para todo $t > 0$ y para toda $f \in \Lambda(1/\alpha_*, \varphi_k)$ donde $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$.

Como consecuencia del teorema anterior obtenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 2.2.2. *Dado $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_L)$, sea $\alpha_* = \min_{1\le i\le L} \alpha_i$ y supongamos que existen exactamente k números α_i, con $1 \le k \le L$, tales que $\alpha_* = \alpha_i$. Luego,*

$$\lim_{\bar{\epsilon}\to 0} \mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}} f(x) = f(x),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p > 1/\alpha_*$ y para toda $f \in \Lambda(1/\alpha_*, \varphi_{k-1})$ donde $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que los promedios $\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}} f(x)$ convergen puntualmente cuando tomamos funciones continuas y de soporte compacto ($f \in \mathcal{C}_0$). En efecto, dado $x \in \mathbb{R}^n$, por las propiedades de la función $\Phi^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}}$ tenemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}} f(x) - f(x)| &= |\Phi^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}} * f(x) - f(x)| \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - f(x)| \Phi^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}}(x - y) \, dy \\ &\le \sup_{y \in R(x,\bar{\epsilon})} |f(x) - f(y)|, \end{aligned}$$

donde $R(x, \bar{\epsilon}) = \prod_{i=1}^{L} Q(x^i, \epsilon_i)$. Luego, si $f \in \mathcal{C}_0$, el lado derecho de la desigualdad anterior tiende a cero cuando $\bar{\epsilon}$ tiende a cero. Ahora bien, dado que el espacio de las funciones continuas con soporte compacto es denso en L^p, $1 < p < \infty$, el resultado anterior junto con la acotación en los espacios de Lebesgue del operador maximal $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ (Teorema 2.2.1) nos permite obtener el resultado deseado.

Para probar la convergencia para funciones del espacio $\Lambda(1/\alpha_*, \varphi_{k-1})$ utilizaremos como denso al conjunto de las funciones simples (ver Teorema 1.1.2). Como las funciones simples son funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$ para cualquier $p > 1/\alpha_*$, tenemos que los promedios $\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}} f$ convergen en casi todo punto para las funciones simples. Finalmente, veamos cómo la acotación del operador $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ (Teorema 2.2.1) nos permite obtener el resultado de convergencia deseado. En efecto, dada $f \in \Lambda(1/\alpha_*, \varphi_{k-1})$ basta ver que

$$\{x : \limsup_{\bar{\epsilon}\to 0} |\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}} f(x) - f(x)| > 0\}$$

tiene medida cero. Como

$$\{x : \limsup_{\bar{\epsilon}\to 0} |\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}} f(x) - f(x)| > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^+} \{x : \limsup_{\bar{\epsilon}\to 0} |\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}} f(x) - f(x)| > 1/n\},$$

si denotamos por

$$A_t(f) = \{x : \limsup_{\bar{\epsilon}\to 0} |\mathcal{P}_{\bar{\epsilon}} f(x) - f(x)| > t\}$$

y probamos que $|A_t(f)| = 0$ para cualquier $t > 0$ y $f \in \Lambda(1/\alpha_*, \varphi_{k-1})$, se obtiene la conclusión deseada.
Sean $f \in \Lambda(1/\alpha_*, \varphi_{k-1})$ y $t > 0$ fijos. Sea g una función simple. Luego

$$\begin{aligned} |A_t(f)| &\leq |A_{t/2}(f - g)| \\ &\leq 2|\{x : \mathcal{M}_{\bar{\alpha}}(f - g)(x) > t/4\}| \\ &\leq 2[\varphi_{k-1}(4/t)\Psi_{1/\alpha_*,\varphi_{k-1}}(f - g)]^{1/\alpha_*}. \end{aligned}$$

Luego, como dado cualquier $\epsilon > 0$ y cualquier $t > 0$ podemos elegir una función g simple tal que $\left[\varphi_{k-1}(4/t)\Psi_{1/\alpha_*,\varphi_{k-1}}(f - g)\right]^{1/\alpha_*} < \epsilon$, tenemos el resultado buscado. □

2.2.2. Convergencia de los promedios de Cesàro lacunares en espacios producto.

En esta parte veremos cómo mejoran los resultados de convergencia de los promedios $\mathcal{P}^{\alpha}_{\bar{\epsilon}} f$ si reemplazamos los números reales $\epsilon_i > 0$ que componen a $\bar{\epsilon}$ por sucesiones lacunares $\{\epsilon^i_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

Sean $\{\epsilon^i_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $i = 1, \cdots, L$, sucesiones ρ-lacunares de números reales. Definimos una sucesión en $\mathbb{R}^L$ como $\{\bar{\epsilon}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, donde $\bar{\epsilon}_j = (\epsilon^1_j, \cdots, \epsilon^L_j)$. Dado $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_L)$ con $0 < \alpha_i \leq 1$, definimos los promedios de Cesàro sobre sucesiones lacunares como

$$\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_j} f(x) = f * \Phi^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_j}(x) \tag{2.2.3}$$

y el operador maximal asociado como

$$\mathcal{M}_{\bar{\alpha},\rho} f(x) = \sup_{j\in\mathbb{Z}} |\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_j} f(x)| \tag{2.2.4}$$

donde

$$\Phi^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_j}(x) = \varphi^{\alpha_1}_{\epsilon^1_j}(x^1) \cdots \varphi^{\alpha_L}_{\epsilon^L_j}(x^L)$$

con

$$\varphi^{\alpha_i}_{\epsilon^i_j}(x^i) = \frac{1}{(\epsilon^i_j)^{n_i}}\varphi^{\alpha_i}\left(\frac{x^i}{\epsilon^i_j}\right)$$

y $\varphi^{\alpha_i} : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ es la función definida en (2.1.2).

Como en la subsección anterior, notemos que

$$\mathcal{M}_{\bar{\alpha},\rho}f(x) \leq M^1_{\alpha_1,\rho}o\cdots oM^L_{\alpha_L,\rho}f(x), \tag{2.2.5}$$

donde los operadores $M^i_{\alpha_i,\rho}$ son todos de tipo débil $(1,1)$ y de tipo fuerte (p,p) para todo p, $1 < p \leq \infty$. De estos resultados y el Teorema 1.2.1 tenemos el siguiente resultado para el operador $\mathcal{M}_{\bar{\alpha},\rho}$.

TEOREMA 2.2.3. *El operador $\mathcal{M}_{\bar{\alpha},\rho}$ es de tipo fuerte (p,p) para todo p con $1 < p \leq \infty$, es decir existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n}[\mathcal{M}_{\bar{\alpha},\rho}f(x)]^p\,dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx \tag{2.2.6}$$

y en el caso $p = 1$ verifica la siguiente desigualdad

$$|\{x : \mathcal{M}_{\bar{\alpha},\rho}f(x) > t\} \leq C\varphi_{L-1}(1/t)\int_0^\infty \varphi_{L-1}(f^*(s))\,ds, \tag{2.2.7}$$

donde $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$.

A partir de este teorema podemos probar el siguiente resultado de convergencia puntual para los promedios lacunares.

TEOREMA 2.2.4. *Sean $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_L)$ con $0 < \alpha_i \leq 1$ y $\{\bar{\epsilon_j}\}$ una sucesión ρ-lacunar de $\mathbb{R}^L$. Luego,*

$$\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_j}f(x) \to f(x)$$

cuando $j \to -\infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < \infty$ y para $f \in \Lambda(1, \varphi_{L-1})$.

OBSERVACIÓN 2.2.5. *Notar que el espacio $\Lambda(1, \varphi_{L-1})$ es el espacio de Orlicz $L^{\varphi_{L-1}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f una función continua y de soporte compacto, luego $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para cualquier p con $1 \leq p \leq \infty$. Tenemos convergencia en casi todo punto de los promedios de Cesàro lacunares $\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_j}f$ puesto que son una subsucesión de los promedios $\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}}f$. Este hecho, junto con la acotación del operador maximal lacunar $\mathcal{M}_{\bar{\alpha},\rho}$, permiten obtener el resultado de convergencia para funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < \infty$.
Para probar la convergencia en el extremo $p = 1$ consideramos como subespacio denso de $\Lambda(1, \varphi_{L-1})$ el conjunto de las funciones simples (ver Teorema 1.1.2). Por lo probado anteriormente conocemos la convergencia en casi todo punto de los promedios de Cesàro lacunares $\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_j}f$ para toda f simple ya que las funciones simples son densas en $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < \infty$.

Nuevamente la convergencia en un subespacio denso y la acotación del operador maximal $\mathcal{M}_{\bar{\alpha},\rho}$ (desigualdad (2.2.7)), nos permiten obtener el resultado deseado. $\square$

2.2.3. Velocidad de convergencia para promedios lacunares en espacios producto.

El objetivo de esta parte es obtener resultados sobre la velocidad de convergencia de los promedios Cesàro en espacios producto sobre sucesiones lacunares. Como en el caso de los promedios Cesàro n dimensionales ($\mathbb{R}^n$ considerado como un sólo bloque), utilizaremos el correspondiente resultado de Duoandikoetxea y Rubio de Francia [**16**]. Trabajaremos considerando a $\mathbb{R}^n$ compuesto sólo por dos bloques ($\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$), dado que el resultado probado en [**16**] y en el cual nos basamos está en este contexto.

Al igual que lo hicimos en la sección 2.1.3, queremos estudiar la convergencia de la serie diferencia

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k[\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_k} f(x) - \mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_{k-1}} f(x)] \tag{2.2.8}$$

donde $\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_k} f(x) = P^{\alpha_1}_{\epsilon^1_k} P^{\alpha_2}_{\epsilon^2_k} f(x)$ y $\{v_k\}$ es una sucesión de números reales o complejos en ℓ^∞. Para ello escribimos, para cada $N \in \mathbb{Z}^2$, $N = (N_1, N_2)$ con $N_1 < N_2$, la suma

$$\mathcal{T}_N f(x) = \sum_{N_1}^{N_2} v_k[\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_k} f(x) - \mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_{k-1}} f(x)] \tag{2.2.9}$$

y el operador maximal asociado

$$\mathcal{T}^* f(x) = \sup_N |\mathcal{T}_N f(x)|.$$

Comenzaremos probando el siguiente resultado.

TEOREMA 2.2.6. *El operador maximal $\mathcal{T}^*$ es de tipo fuerte (p, p) para todo p, $1 < p < \infty$.*

Como ya mencionamos, para probar este teorema utilizaremos un resultado de Duoandikoetxea y Rubio de Francia. En el artículo [**16**] (ver Teorema E en [**16**]), los autores consideran a $\mathbb{R}^n$ descompuesto en dos bloques de la forma $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ con $1 \le m < n$. Utilizando la siguiente notación prueban el teorema que enunciamos a continuación: escriben a todo $x \in \mathbb{R}^n$ de la forma $x = (x^0, \bar{x})$, $x^0 \in \mathbb{R}^m$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$ y dada una medida σ en $\mathbb{R}^n$ definen otra medida $\sigma^{(0)}$ en $\mathbb{R}^m$ tal que $\sigma^{(0)}(E) = \sigma(E \times \mathbb{R}^{n-m})$ para cualquier conjunto de Borel $E \subset \mathbb{R}^m$.

TEOREMA 2.2.7. *Sean $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ una sucesión lacunar y $\gamma > 0$. Sean σ_k medidas de Borel soportadas en $\{x \in \mathbb{R}^n : |\bar{x}| < a_k\}$. Supongamos además que $||\sigma_k||_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le 1$ y que las medidas $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ satisfacen las siguientes estimaciones*

$$|\hat{\sigma}_k(\xi^0, \bar{\xi}) - \hat{\sigma}_k(\xi^0, 0)| \le C|a_k\bar{\xi}|^\gamma \tag{2.2.10}$$

(2.2.11) $$|\hat{\sigma}_k(\xi^0,\bar{\xi})| \leq C|a_{k-1}\bar{\xi}|^{-\gamma}$$

(2.2.12) $$|\hat{\sigma}_k(\xi^0,0)| \leq C|b_k\xi^0|^{\gamma}$$

(2.2.13) $$|\hat{\sigma}_k(\xi^0,0)| \leq C|b_{k-1}\xi^0|^{-\gamma}$$

donde $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es otra sucesión lacunar de números positivos.
Sean $\sigma^*(f) = \sup_k ||\sigma_k|*f|$ y $\sigma^*_{(0)}(g) = \sup_k ||\sigma_k^{(0)}|*g|$ maximales acotados en $L^q(\mathbb{R}^n)$ y en $L^q(\mathbb{R}^m)$ respectivamente para todo $q>1$. Luego,

$$T^*f = \sup_k |T_k f|$$

donde $T_k f = \sum_{j=k}^{\infty} \sigma_j * f$, *es acotado en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$.*

Demostración. Notemos que es suficiente estudiar el operador maximal asociado a $\mathcal{T}_N = \sum_{N_1}^{N_2} \sigma_k * f(x)$, con

$$\sigma_k(x^1,x^2) = \tilde{v}_k[\varphi^{\alpha_1}_{\epsilon^1_k}(x^1)\varphi^{\alpha_2}_{\epsilon^2_k}(x^2) - \varphi^{\alpha_1}_{\epsilon^1_{k-1}}(x^1)\varphi^{\alpha_2}_{\epsilon^2_{k-1}}(x^2)],$$

donde $\tilde{v}_k = \frac{v_k}{2||v_k||_\infty}$. Notemos que $||\sigma_k||_1 \leq 1$ y las funciones σ_k están soportadas en $\{x\in\mathbb{R}^n : |x^2|_\infty < \epsilon^2_k\}$. Por otro lado,

$$\hat{\sigma}_k(\xi_1,\xi_2) = \tilde{v}_k[\hat{\varphi^{\alpha_1}}(\epsilon^1_k x^1)\hat{\varphi^{\alpha_2}}(\epsilon^2_k x^2) - \hat{(\varphi^{\alpha_1})}(\epsilon^1_{k-1}x^1)\hat{\varphi^{\alpha_2}}(\epsilon^2_{k-1}x^2)].$$

Luego, aplicando el Lema 2.1.12 se pueden probar fácilmente las condiciones (2.2.10) a (2.2.13) con $\{a_k\} = \{\epsilon^2_k\}$, $\{b_k\} = \{\epsilon^1_k\}$ y $\gamma = \alpha_* = \mathrm{mín}\{\alpha_1,\alpha_2\}$. En efecto, si $|\epsilon_k\xi| \leq 1$

$$\begin{aligned} |\hat{\sigma}_k(\xi^1,\xi^2) - \hat{\sigma}_k(\xi^1,0)| &\leq |\hat{\varphi^{\alpha_1}}(\epsilon^1_k x^1)||\hat{\varphi^{\alpha_2}}(\epsilon^2_k x^2) - 1| + |\hat{(\varphi^{\alpha_1})}(\epsilon^1_{k-1}x^1)||\hat{\varphi^{\alpha_2}}(\epsilon^2_{k-1}x^2) - 1| \\ &\leq C|\epsilon^2_k x^2| \leq C|\epsilon^2_k x^2|^{\alpha_*}. \end{aligned}$$

En el caso que $|\epsilon_k\xi| > 1$ la condición se deduce del hecho que $|\hat{\sigma}_k(\xi^1,\xi^2)| \leq 1$, para todo (ξ^1,ξ^2). Por otro lado,

$$\begin{aligned} |\hat{\sigma}_k(\xi^1,\xi^2)| &\leq |\hat{\varphi^{\alpha_1}}(\epsilon^1_k\xi^1)||\hat{\varphi^{\alpha_2}}(\epsilon^2_k\xi^2)| + |\hat{\varphi^{\alpha_1}}(\epsilon^1_{k-1}\xi^1)||\hat{\varphi^{\alpha_2}}(\epsilon^2_{k-1}\xi^2)| \\ &\leq C|\epsilon^2_k\xi^2|^{-\alpha_2} \leq C|\epsilon^2_k\xi^2|^{-\alpha_*} \end{aligned}$$

si $|\epsilon^2_k\xi^2| > 1$. Caso contrario, es decir si $|\epsilon^2_k\xi^2| \leq 1$ la condición (2.2.11) nuevamente sale de la condición $|\hat{\sigma}_k(\xi^1,\xi^2)| \leq 1$, para todo (ξ^1,ξ^2). Las condiciones (2.2.12) y (2.2.13) se obtienen de las siguientes estimaciones:

$$|\hat{\sigma}_k(\xi^1,0)| \leq |\hat{\varphi^{\alpha_1}}(\epsilon^1_k\xi^1) - \hat{\varphi^{\alpha_1}}(\epsilon^1_{k-1}\xi^1)| \leq C|\epsilon^1_k\xi^1| \leq C|\epsilon^1_k\xi^1|^{\alpha_*},$$

si $|\epsilon^1_k\xi^1| \leq 1$ y

$$|\hat{\sigma}_k(\xi^1,0)| \leq |\hat{\varphi^{\alpha_1}}(\epsilon^1_k\xi^1)| + |\hat{\varphi^{\alpha_1}}(\epsilon^1_{k-1}\xi^1)| \leq C|\epsilon^1_{k-1}\xi^1|^{-\alpha_1} \leq C|\epsilon^1_{k-1}\xi^1|^{\alpha_*},$$

si $|\epsilon^1_k\xi^1| > 1$.

Por otro lado, notemos que

$$\sigma^*(f)(x) = \sup_k ||\sigma_k| * f(x)| = C \sup_k |\Phi^{\bar{\alpha}}_{\epsilon_k} * f(x)| = C\mathcal{M}_{\bar{\alpha},\rho} f(x)$$

donde $\mathcal{M}_{\bar{\alpha},\rho} f$ es la maximal definida en (2.2.4). De la desigualdad (2.2.6), conocemos la acotación de $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q > 1$. Si llamamos

$$\sigma^{(0)}(x^1) = \tilde{v}_k[\varphi^{\alpha_1}_{\epsilon^1_k}(x^1) - \varphi^{\alpha_1}_{\epsilon^1_{k-1}}(x^1)],$$

Luego

$$\sigma^*_{(0)} g(x^1) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |\sigma^{(0)}| * g(x^1)$$

está acotado en $L^q(\mathbb{R}^{n_1})$ para todo $q > 1$, dado que $\sigma^*_{(0)} g(x^1) \leq M_{\alpha_1} g(x^1)$.
Finalmente, el resultado deseado es una consecuencia del Teorema 2.2.7 considerando medidas de Borel absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue y con densidad σ_k, con $\{a_k\} = \{\epsilon^2_k\}$, $\{b_k\} = \{\epsilon^1_k\}$ y $\gamma = \alpha_* = \text{mín}\{\alpha_1, \alpha_2\}$. $\square$

Como consecuencia del teorema anterior podemos probar el siguiente resultado de convergencia puntual.

TEOREMA 2.2.8. *Sea $\{\bar{\epsilon}_k\}$ una sucesión ρ-lacunar de $\mathbb{R}^2$ y $\{v_k\}$ una sucesión de números reales o complejos. Entonces los promedios*

$$\mathcal{T}_N f(x) = \sum_{N_1}^{N_2} v_k[\mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_k} f(x) - \mathcal{P}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\epsilon}_{k-1}} f(x)]$$

convergen en casi todo punto cuando $N = (N_1, N_2) \to (-\infty, +\infty)$ para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p < \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Dado que tenemos la acotación del operador maximal de los operadores $\mathcal{T}_N$, probaremos la convergencia puntual del mismo para funciones en un conjunto denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Sea

$$D = \{f : \; f(x^1, x^2) = f_1(x^1)f_2(x^2), \; f_i \in C^\infty_0(\mathbb{R}^{n_i}), i = 1, 2\}.$$

Claramente D es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Sea $f(x) = f_1(x^1)f_2(x^2) \in D$. Para estudiar $\lim_{N\to(-\infty,\infty)} \sum_{k=-N_1}^{N_2} \sigma_k *$ $f(x)$, como se hizo en la prueba del Teorema 2.1.15, es suficiente ver que si para $N < M$ escribimos

$$I = \left|\sum_{k=-M}^{-N-1} \sigma_k * f(x)\right| \qquad II = \left|\sum_{k=N+1}^{M} \sigma_k * f(x)\right|,$$

luego I y II tienden a cero cuando N tiende a infinito.

Dado que $\int_{\mathbb{R}^{n_i}} [\varphi^{\alpha_i}_{\epsilon^i_k}(x_i - y_i) - \varphi^{\alpha_i}_{\epsilon^i_{k-1}}(x^i - y^i)]dx^i = 0$, usando el Teorema del Valor Medio, el hecho que $\int_{\mathbb{R}^{n_i}} |\varphi_{\epsilon^i_k}| = 1$ y el Lema 2.1.5 se tiene

$$
\begin{aligned}
I &\leq ||v_k||_\infty \sum_{k=-M}^{-N-1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{\alpha_1}_{\epsilon^1_k}(x^1-y^1)[\varphi^{\alpha_2}_{\epsilon^2_k}(x^2-y^2) - \varphi^{\alpha_2}_{\epsilon^2_{k-1}}(x^2-y^2)] f_1(y^1) f_2(y^2)\, dy^1\, dy^2 \right| \\
&+ ||v_k||_\infty \sum_{k=-M}^{-N-1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^{\alpha_2}_{\epsilon^2_{k-1}}(x^2-y^2)[\varphi^{\alpha_1}_{\epsilon^1_k}(x^1-y^1) - \varphi^{\alpha_1}_{\epsilon^1_{k-1}}(x^1-y^1)] f_1(y^1) f_2(y^2)\, dy^1\, dy^2 \right| \\
&\leq ||v_k||_\infty ||f_1||_\infty \sum_{k=-M}^{-N-1} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \left| [\varphi^{\alpha_2}_{\epsilon^2_k}(x^2-y^2) - \varphi^{\alpha_2}_{\epsilon^2_{k-1}}(x^2-y^2)][f_2(y^2) - f_2(x^2)] \right| dy^2 \\
&+ ||v_k||_\infty ||f_2||_\infty \sum_{k=-M}^{-N-1} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \left| [\varphi^{\alpha_1}_{\epsilon^1_k}(x^1-y^1) - \varphi^{\alpha_1}_{\epsilon^1_{k-1}}(x^1-y^1)[f_1(y^1) - f_1(x^1)] \right| dy^1 \\
&\leq ||v_k||_\infty ||f_1||_\infty ||\nabla f_2||_\infty \sum_{k=-M-1}^{-N-1} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \varphi^{\alpha_2}_{\epsilon^2_k}(x^2-y^2)|x^2-y^2| dy^2 \\
&+ ||v_k||_\infty ||f_2||_{\infty ||\nabla f_1||_\infty \sum_{k=-M-1}^{-N-1} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \varphi^{\alpha_1}_{\epsilon^1_k}(x^1-y^1)|x^1-y^1| dy^1} \\
&\leq C||v_k||_\infty ||f_1||_\infty ||\nabla f_2||_\infty \sum_{k=-M-1}^{-N} \epsilon^2_k + C||v_k||_\infty ||f_2||_\infty ||\nabla f_1||_\infty \sum_{k=-M-1}^{-N} \epsilon^1_k \\
&\leq C||v_k||_\infty ||f_1||_\infty ||\nabla f_2||_\infty \epsilon^2_{-N-1} + C||v_k||_\infty ||f_2||_\infty ||\nabla f_1||_\infty \epsilon^1_{-N-1},
\end{aligned}
$$

de donde se concluye que $I \to 0$ cuando $N \to \infty$.

Sea $s > 1/\alpha_1$, por la desigualdad de Hölder y el Lema 2.1.5 se tiene,

$$
\begin{aligned}
II &= \left| \sum_{k=N+1}^{M} \sigma_k * f(x) \right| \\
&\leq 2||v_k||_\infty \sum_{k=N+1}^{M} \prod_{i=1}^{2} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} \varphi^{\alpha_i}_{\epsilon^i_k}(x^i-y^i)|f_i(y^i)| dy^i \right) \\
&\leq 2||v_k||_\infty ||f_1||_s ||f_2||_\infty \sum_{k=N+1}^{M} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} [\varphi^{\alpha_1}_{\epsilon^1_k}(x^1-y^1)]^{s'} dy^1 \right)^{1/s'} \\
&\leq 2||v_k||_\infty ||f_1||_s ||f_2||_\infty \sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{(\epsilon^1_k)^{1/s}} \\
&\leq \frac{C||v_k||_\infty ||f_1||_s ||f_2||_\infty}{(\epsilon^1_{N+1})^{1/s}}.
\end{aligned}
$$

Luego, tomando límite cuando $N \to \infty$ resulta que $II \to 0$. $\square$

Capítulo 3

Integrales singulares en el sentido Cesàro en espacios producto

En este capítulo trataremos la existencia de las integrales singulares en el sentido Cesàro en espacios producto. Para ello comenzamos, en la primer sección, con los resultados conocidos sobre el tema en el contexto $\mathbb{R}^n$ dimensional considerando a $\mathbb{R}^n$ como un único bloque. A continuación, en la segunda sección, trabajaremos en el contexto de espacios producto. Para ello, definimos las truncaciones de la integral singular en el sentido Cesàro y probamos la buena definición las mismas. Además definimos el operador maximal asociado a estas truncaciones y demostramos que resulta acotado por suma de composición de operadores de los cuales se conocen ciertas acotaciones. Con todos estos resultados, mediante un argumento de densidad obtenemos la existencia de las integrales singulares en el sentido Cesàro en espacios producto.

3.1. Integrales singulares en el sentido Cesàro en $\mathbb{R}^n$

En esta sección haremos una breve reseña de las Integrales singulares en el sentido Cesàro en $\mathbb{R}^n$ que fueron introducidas en [**3**].

Una función localmente integrable K definida sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta$, donde $\Delta = \{(x,y) : x = y\}$ es la diagonal, se llamará un núcleo de Calderón-Zygmund si existen constantes $C > 0$ y $0 < \gamma \leq 1$, tales que

$$|K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n}, \tag{3.1.1}$$

$$|K(x,y) - K(x',y)| \leq C\frac{|x-x'|^\gamma}{|x-y|^{n+\gamma}}, \qquad \text{si} \quad 2|x-x'| \leq |x-y|,$$

$$|K(x,y) - K(x,y')| \leq C\frac{|y-y'|^\gamma}{|x-y|^{n+\gamma}}, \qquad \text{si} \quad 2|y-y'| \leq |x-y|,$$

$$\int_{|x-x_0|<N} |I_{\epsilon,N}(x)|^2 \, dx \leq CN^n \quad \text{y} \quad \int_{|x-x_0|<N} |I^*_{\epsilon,N}(x)|^2 \, dx \leq CN^n,$$

para todo ϵ, N y x_0, donde

$$I_{\epsilon,N}(x) = \int_{\epsilon<|x-y|<N} K(x,y) \, dy \quad \text{y} \quad I^*_{\epsilon,N}(x) = \int_{\epsilon<|x-y|<N} K^*(x,y) \, dy,$$

con $K^*(x,y) = \bar{K}(y,x)$ el adjunto de K.

Estas condiciones son suficientes para obtener desigualdades de tipo fuerte (p, p), $1 < p < \infty$, y de tipo débil (1,1) para los operadores truncados

$$T_\epsilon f(x) = \int_{|x-y|>\epsilon} K(x,y) f(y)\ dy$$

y el operador maximal

$$T^* f(x) = \sup_{\epsilon>0} |T_\epsilon f(x)|.$$

Además, si el núcleo K satisface que

$$\text{existe} \quad \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\epsilon<|x-y|<1} K(x,y)\ dy \quad \text{para casi todo } x,$$

entonces existe la integral $\int K(x,y) f(y)\, dy$ en el sentido del valor principal, es decir, existe la integral singular

$$T f(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} T_\epsilon f(x) \qquad \text{en casi todo punto.}$$

Es extensa la bibliografía donde se pueden estudiar estos resultados, como una referencia podemos dar [**40**].

En [**3**] se estudia la existencia de la integral singular $\int K(x,y) f(y)\, dy$ en el sentido Cesàro-β, es decir, la existencia del límite

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} T_\epsilon f(x) = \lim_{R\to\infty} T_{1/R} f(x)$$

en el sentido Cesàro-β. Esto significa, para $\beta > 0$, estudiar el límite

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\beta}{R^\beta} \int_0^R (R-t)^{\beta-1} T_{1/t} f(x)\, dt.$$

Intercambiando las integrales y volviendo al parámetro ϵ, el límite de arriba se puede escribir como

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{|x-y|>\epsilon} f(y) K(x,y) \left(1 - \frac{\epsilon}{|x-y|}\right)^\beta\ dy.$$

Para determinadas clases de funciones, en [**3**] se prueba que las integrales

$$T_{\epsilon,\beta} f(x) = \int_{|x-y|>\epsilon} f(y) K(x,y) \left(1 - \frac{\epsilon}{|x-y|}\right)^\beta\ dy$$

tienen sentido no sólo para $\beta > 0$ sino también para $\beta > -1$. Como la existencia de la integral singular en el sentido Cesàro-0 (es decir, en el sentido del valor principal) implica la existencia en el sentido Cesàro-β para $\beta > 0$, en [**3**] se considera sólo el caso $\beta < 0$. En el caso no pesado el siguiente teorema reúne los resultados de [**3**].

Teorema 3.1.1. [**3**] *Sea $-1 < \beta < 0$ y sea K un núcleo de Calderón-Zygmund tal que existe el límite*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\epsilon<|x-y|<1} K(x,y) \left(1 - \frac{\epsilon}{|x-y|}\right)^\beta\ dy,$$

en casi todo punto, luego la integral singular existe en el sentido Cesàro-β, es decir, existe el límite

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} T_{\epsilon,\beta}f(x),$$

en casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p > 1/1+\beta$ y para toda función f en el espacio de Lorentz $L(1/(1+\beta),1)(\mathbb{R}^n)$.

Para probar este resultado, los autores de [**3**] estudian el operador maximal $T^*_\beta f = \sup_{\epsilon>0} |T_{\epsilon,\beta}f|$ obteniendo la siguiente desigualdad puntual

$$T^*_\beta f(x) \le C[T^*f(x) + \tilde{M}_\beta f(x)], \tag{3.1.2}$$

donde $T^* = T^*_0$, es decir, es el operador maximal de las truncaciones correspondiente al caso $\beta = 0$ y

$$\tilde{M}_\beta f(x) = \sup_{\epsilon>0} \frac{1}{\epsilon^{n+\beta}} \int_{\epsilon<|x-y|\le 2\epsilon} |f(y)|(|x-y|-\epsilon)^\beta \, dy \quad -1<\beta\le 0.$$

Notemos que, a diferencia de los operadores maximales estudiados en el capítulo anterior, en el operador $\tilde{M}_\beta$ definido arriba integramos sobre coronas y el núcleo es una potencia $\beta \le 0$ de la distancia al borde interior de la corona $B(x,2\epsilon)\setminus B(x,\epsilon)$, donde $B(x,r) = \{y: \ |x-y| \le r\}$.

Dado $\alpha \in (0,1]$, el operador M_α definido en el capítulo anterior y el operador $\tilde{M}_{\alpha-1}$ definido arriba no parecen ser puntualmente equivalentes. El resultado no es claro ni siquiera si en los operadores del tipo de los definidos en el capítulo anterior cambiamos cubos por bolas. Sin embargo, para los operadores $\tilde{M}_\beta$, $\beta \in (-1,0]$, tenemos el mismo tipo de acotaciones que para los correspondientes operadores maximales del Capítulo 2, es decir, $\tilde{M}_\beta$ es de tipo fuerte (p,p) para todo $p > 1/(1+\beta)$ y es de tipo débil restringido $(1/(1+\beta), 1/(1+\beta))$. La prueba de estos resultados se puede realizar adaptando las pruebas dadas en el Capítulo 2 para el operador M_β o bien ver [**3**].

A continuación presentamos el detalle de la prueba de la estimación del operador T^*_β porque será de utilidad en lo que sigue. Si denotamos por

$$K_{\epsilon,\beta}(x,y) = K(x,y)\left(1 - \frac{\epsilon}{|x-y|}\right)^\beta,$$

luego,

$$\begin{aligned} T_{\epsilon,\beta}f(x) &= \int_{|x-y|>\epsilon} f(y)K_{\epsilon,\beta}(x,y)\,dy \\ &= \int_{\epsilon<|x-y|\le 2\epsilon} f(y)K_{\epsilon,\beta}(x,y)\ dy \\ &\quad + \int_{|x-y|>2\epsilon} f(y)K(x,y)\ dy \end{aligned}$$

$$+\int_{|x-y|>2\epsilon} f(y)[K_{\epsilon,\beta}(x,y)-K(x,y)]\,dy$$

$$(3.1.3)\qquad = U_{\epsilon,\beta}f(x)+T_{2\epsilon}f(x)+V_{\epsilon,\beta}f(x).$$

Claramente $|T_{2\epsilon}f(x)|\leq T^*f(x)$. Usando la estimación (3.1.1) del núcleo K resulta que

$$\begin{aligned}|U_{\epsilon,\beta}f(x)| &\leq C\int_{\epsilon<|x-y|\leq 2\epsilon}|f(y)||K(x,y)|\left(1-\frac{\epsilon}{|x-y|}\right)^{\beta}\\ &\leq \frac{C}{\epsilon^{n+\beta}}\int_{\epsilon<|x-y|\leq 2\epsilon}|f(y)|\left(|x-y|-\epsilon\right)^{\beta}\,dy.\end{aligned}$$

De donde se tiene que, para cualquier $\epsilon>0$,

$$(3.1.4)\qquad |U_{\epsilon,\beta}f(x)|\leq C\tilde{M}_{\beta}f(x).$$

Por otro lado, usando nuevamente (3.1.1) y el Teorema del Valor Medio se tiene que

$$\begin{aligned}|V_{\epsilon,\beta}f(x)| &\leq \int_{|x-y|>2\epsilon}|f(y)|\,|K_{\epsilon,\beta}(x,y)-K(x,y)|\,dy\\ &\leq \int_{|x-y|>2\epsilon}|f(y)|\frac{C}{|x-y|^{n}}\left|\left(1-\frac{\epsilon}{|x-y|}\right)^{\beta}-1\right|\,dy\\ &\leq C\epsilon\int_{|x-y|>2\epsilon}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n+1}}\,dy\\ &\leq C\epsilon\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^k\epsilon<|x-y|\leq 2^{k+1}\epsilon}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n+1}}\,dy\\ &\leq C\epsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2^k\epsilon)^{n+1}}\int_{2^k\epsilon<|x-y|\leq 2^{k+1}\epsilon}|f(y)|\,dy\\ &\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{1}{(2^k\epsilon)^{n}}\int_{2^k\epsilon<|x-y|\leq 2^{k+1}\epsilon}|f(y)|\,dy.\end{aligned}$$

De las estimaciones de arriba se tiene que, para cualquier $\epsilon>0$,

$$(3.1.5)\qquad |V_{\epsilon,\beta}f(x)|\leq C\tilde{M}_{\beta}f(x),$$

pues el operador maximal de Hardy-Littlewood está acotado por puntualmente por $\tilde{M}_{\beta}$ para cualquier β, $-1<\beta\leq 0$.

3.2. Integrales singulares en el sentido Cesàro en espacios producto

Trabajaremos en este capítulo con la notación introducida en el capítulo anterior, es decir, $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{n_L}$ y $x=(x^1,\cdots,x^L)$, con $x^i\in\mathbb{R}^{n_i}$. Partiendo de L núcleos de Calderón

Zygmund K_i, $i = 1, \cdots L$, donde cada K_i está definido sobre $\mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i} \setminus \Delta_i$, con Δ_i la diagonal de $\mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i}$, en [**43**] se define el núcleo producto

$$\mathcal{K}(x, y) = \prod_{i=1}^{L} K_i(x^i, y^i)$$

y para $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_L) \in \mathbb{R}^L_+$ se definen las truncaciones y el operador maximal asociados al núcleo $\mathcal{K}$ como

$$\mathcal{T}_{\bar{\epsilon}} f(x) = \int_{|x^1-y^1|>\epsilon_1} \cdots \int_{|x^L-y^L|>\epsilon_L} f(y)\mathcal{K}(x, y)\, dy^L \cdots dy^1$$

y

$$\mathcal{T}^* f = \sup_{\bar{\epsilon}\in\mathbb{R}^L_+} |\mathcal{T}_{\bar{\epsilon}} f|.$$

Las integrales singulares asociadas a estos núcleos producto generalizan a la Transformada de Hilbert múltiple (ver [**19**]) y son casos particulares de las integrales singulares estudiadas en [**20**]. Así, el operador $\mathcal{T}^*$ resulta ser de tipo fuerte (p, p) para $1 < p < \infty$.

Definiremos a continuación las integrales singulares en espacios producto en el sentido Cesàro que consideraremos. Dados $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_L) \in \mathbb{R}^L_+$ y $\bar{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_L)$ con $-1 < \beta_i \leq 0$, $i = 1, \cdots, L$, sea

$$\mathcal{K}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}}(x, y) = \prod_{i=1}^{L} K_{i,\epsilon_i,\beta_i}(x^i, y^i),$$

donde

$$K_{i,\epsilon_i,\beta_i}(x^i, y^i) = K_i(x^i, y^i) \left(1 - \frac{\epsilon_i}{|x^i - y^i|}\right)^{\beta_i}$$

y K_i es un núcleo de Calderón-Zygmund definido en $\mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i} \setminus \Delta_i$. Con estos núcleos definimos las truncaciones

$$\mathcal{T}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}} f(x) = \int_{|x^1-y^1|>\epsilon_1} \cdots \int_{|x^L-y^L|>\epsilon_L} f(y)\mathcal{K}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}}(x, y)\, dy^L \cdots dy^1.$$

Como primer resultado veremos en la siguiente proposición para qué conjuntos de funciones están bien definidas las truncaciones $\mathcal{T}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}} f(x)$, es decir, para qué funciones f la función $y \to f(y)\mathcal{K}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}}(x, y)$ pertenece a $L^1(dy)$ para todo x.

PROPOSICIÓN 3.2.1. *Sea $L \in \mathbb{N}$, $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_L) \in \mathbb{R}^L_+$, $\bar{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_L)$ con $-1 < \beta_i \leq 0$, $i = 1, \cdots, L$, sea $\beta_* = \min_{1\leq i\leq L} \beta_i$ y supongamos que el mínimo β_* se alcanza en k números β_i. Luego, las truncaciones $\mathcal{T}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}} f(x)$ están bien definidas para los siguientes conjuntos de funciones:*

(i) $L^p(\mathbb{R}^n)$ *con* $p > 1/(1 + \beta_*)$ *y*

(ii) $\Lambda(1/(1 + \beta_*), \varphi_{k-1})$, *donde* $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$.

Demostración. Comenzamos introduciendo la siguiente notación. Dados $L \in \mathbb{N}$ y $1 \le j \le L$, denotemos con Ω_j^L a la familia de todos los subconjuntos $\sigma = \{\sigma(1), \cdots, \sigma(j)\}$ de $\{1, \cdots, L\}$ de j elementos diferentes donde $\sigma(i) < \sigma(j)$ cuando $i < j$. Para $\sigma \in \Omega_j^L$, sea $\gamma = \{\gamma(1), \cdots, \gamma(L - j)\} = \{1, \cdots, L\} \setminus \sigma$. Escribiendo cada integral que compone la truncación como suma de dos integrales, donde en una de ellas integramos en el conjunto $\{y^i : \epsilon_i < |x^i - y^i| \le 2\epsilon_i\}$ y en la otra integramos en el conjunto $\{y^i : |x^i - y^i| > 2\epsilon_i\}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{|x^1-y^1|>\epsilon_1} \cdots \int_{|x^L-y^L|>\epsilon_L} |f(y)\mathcal{K}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}}(x,y)|\, dy^1 \cdots dy^L \\
= & \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n_L}} |f(y^1, \cdots, y^L)| \prod_{i=1}^{L} |K(x^i, y^i)| \left(1 - \frac{\epsilon_i}{|x^i - y^i|}\right)^{\beta_i} \chi_{\{|x^i-y^i|>2\epsilon_i\}}(y^i)\, dy^L \cdots dy^1 \\
& + \sum_{j=1}^{L} \sum_{\sigma \in \Omega_j^L} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n_L}} |f(y^1, \cdots, y^L)| \prod_{i=1}^{L} |K(x^i, y^i)| \Phi_{\bar{\beta},\bar{\epsilon}}(x^1 - y^1, \cdots, x^L - y^L)\, dy^L \cdots dy^1 \\
= & A + B,
\end{aligned}$$

donde

$$\Phi_{\bar{\beta},\bar{\epsilon}}(x) = \prod_{i=1}^{j} \varphi_{\beta_{\sigma(i)},\epsilon_{\sigma(i)}}(x^{\sigma(i)}) \prod_{i=1}^{L-j} \psi_{\beta_{\gamma(i)},\epsilon_{\gamma(i)}}(x^{\gamma(i)}),$$

con $\varphi_{\beta_k,\epsilon_k}(x^k) = \left(1 - \frac{\epsilon_k}{|x^k|}\right)^{\beta_k} \chi_{\{\epsilon_k < |x^k| \le 2\epsilon_k\}}(x^k)$ y $\psi_{\beta_k,\epsilon_k}(x^k) = \left(1 - \frac{\epsilon_k}{|x^k|}\right)^{\beta_k} \chi_{\{|x^k|>2\epsilon_k\}}(x^k)$.

Demostración de (i). Como $|K(x^i, y^i)| \le C|x^i - y^i|^{-n_i}$ y dado que $|x^i - y^i| > 2\epsilon_i$ implica que $\left(1 - \frac{\epsilon_i}{|x^i-y^i|}\right)^{\beta_i} \le \frac{1}{2^{\beta_i}}$. Luego, por la desigualdad de Hölder resulta que

$$\begin{aligned}
A &\le \frac{C}{2^{\beta_1+\cdots+\beta_L}} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n_L}} |f(y^1, \cdots, y^L)| \prod_{i=1}^{L} \frac{1}{|x^i - y^i|^{n_i}} \chi_{\{|x^i-y^i|>2\epsilon_i\}}(y^i)\, dy^L \cdots dy^1 \\
&\le C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n_L}} \prod_{i=1}^{L} \frac{1}{|x^i - y^i|^{n_i p'}} \chi_{\{|x^i-y^i|>2\epsilon_i\}}(y^i)\, dy^L \cdots dy^1\right)^{1/p'} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p > 1$, ya que $-n_i p' + n_i < 0$. Por otro lado, como la función

$$\prod_{i=1}^{L} |K(x^i, y^i)| \Phi_{\bar{\beta},\bar{\epsilon}}(x^1 - y^1, \cdots, x^L - y^L)$$

pertenece a $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ para $p'\beta_i + 1 \ge p'\beta_* + 1 > 0$, usando la desigualdad de Hölder con $p > 1/(1 + \beta_*)$ y p' tenemos que $B < \infty$ si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p > 1/(1 + \beta_*)$.

Demostración de (ii). Notemos que, para cualquier $p > 1$ y $k \in \mathbb{N}$, $\Lambda(p, \varphi_k) \subset L(p, 1) \subset L^p$. Luego para $f \in \Lambda(1/(1 + \beta_*), \varphi_{k-1})$ la acotación de A se sigue como en el caso (i). Para acotar B notemos que cambiando variables y acotando términos resulta que

$$B \le C \sum_{j=1}^{L} \sum_{\sigma \in \Omega_j^L} \int_{\mathbb{R}^{n_1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{n_L}} |f(y^1, \cdots, y^L)| \prod_{i=1}^{L} \frac{1}{|x^i - y^i|^{n_i}} \Phi_{\bar{\beta},\bar{\epsilon}}(x^1 - y^1, \cdots, x^L - y^L)\, dy^L \cdots dy^1$$

$$\leq \quad C(\bar{\epsilon})\sum_{j=1}^{L}\sum_{\sigma\in\Omega_j^L}\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\cdots\int_{\mathbb{R}^{n_L}}|f(x^1-\epsilon_1 z^i,\cdots,x^L-\epsilon_L z^L)|\Phi_{\tilde{\beta}_j}(z^1,\cdots,z^L)\,dy^L\cdots dy^1$$

donde $\Phi_{\tilde{\beta}_j}(z)=\prod_{i=1}^{j}\varphi_{\beta_{\sigma(i)},n_{\sigma(i)}}(z^{\sigma(i)})\prod_{i=1}^{L-j}\psi_{n_{\gamma(i)}}(z^{\gamma(i)})$ con $\varphi_{\beta_k,n_k}(z^k)=\dfrac{(|z^k|-1)^{\beta_k}}{|z^k|^{n_k}}\chi_{\{1<|z^k|\leq 2\}}(z^k)$ y $\psi_{n_k}(z^k)=\dfrac{1}{|z^k|^{n_k}}\chi_{\{|z^k|>2\}}(z^k)$. Con esta notación $\tilde{\beta}_j=(\beta_{\sigma(1)},\cdots,\beta_{\sigma(j)})$. Luego,

$$B\leq C(\bar{\epsilon})\sum_{j=1}^{L}\sum_{\sigma\in\Omega_j^L}\int_0^\infty f^*(cs)\left[\Phi_{\tilde{\beta}_j}\right]^*(s)\,ds,$$

donde c es una constante que depende de $\bar{\epsilon}$ y de n, mientras que f^* es la reordenada de f. Para estimar $\left[\Phi_{\tilde{\beta}_j}\right]^*(s)$ utilizaremos el siguiente lema.

Lema 3.2.2. *Dados $1\leq j\leq L$ y $\tilde{\beta}_j=(\beta_{\sigma(1)},\cdots,\beta_{\sigma(j)})$, si $\beta=\min_{1\leq i\leq j}\{\beta_{\sigma(i)}\}$ se alcanza en k de los números $\beta_{\sigma(i)}$, luego*

$$\left[\Phi_{\tilde{\beta}_j}\right]^*(s)\leq \tilde{C}s^\beta\left[1+\log^+\left(\frac{1}{s}\right)\right]^{k-1}.$$

Por el lema anterior notemos que

$$\begin{aligned}
B_j &= \int_0^\infty f^*(cs)\left[\Phi_{\tilde{\beta}_j}\right]^*(s)\,ds\\
&\leq \tilde{C}\int_0^\infty f^*(cs)s^\beta\left[1+\log^+\left(\frac{1}{s}\right)\right]^{k-1}\,ds\\
&= \tilde{C}\int_0^1 f^*(cs)s^\beta\left[1+\log\left(\frac{1}{s}\right)\right]^{k-1}\,ds+\tilde{C}\int_1^\infty f^*(cs)s^\beta\,ds=B_j^1+B_j^2
\end{aligned}$$

Claramente $B_j^2<\infty$ si f pertenece al espacio de Lorentz $L\left(1/(1+\beta),1\right)$.

Veamos que si $f\in\Lambda(1/(1+\beta),\varphi_{k-1})$ luego $B_j^1<\infty$. Consideremos el conjunto $E_\delta=\{s\in(0,1):f^*(cs)>s^{-\delta}\}$ y sea $\mathcal{C}E_\delta=(0,1)\setminus E_\delta$. Eligiendo apropiadamente el número δ tenemos que

$$\int_{\mathcal{C}E_\delta}f^*(cs)s^\beta\left[1+\log(\frac{1}{s})\right]^{k-1}\,ds\leq\int_0^1 s^{-\delta+\beta}\left[1+\log(\frac{1}{s})\right]^{k-1}\,ds<\infty.$$

Por otro lado, como si $s\in E_\delta$ luego $1+\log(\frac{1}{s})\leq C(1+\log f^*(cs))$, tenemos el resultado deseado. Finalmente, notemos que el mínimo β en el Lema 3.2.2 en realidad depende de j, si llamamos β_j a este mínimo para cada j, tenemos que $\beta_*\leq\beta_j<0$ para todo j y por tanto $1/(1+\beta_*)\geq 1/(1+\beta_j)$ para todo j. Siguiendo las cuentas de acotación para cada B_j se puede ver que si $f\in\Lambda(1/(1+\beta_*),\varphi_{k-1})$ luego

$$B\leq C(\bar{\epsilon})\sum_{j=1}^{L}\sum_{\sigma\in\Omega_j^L}B_j<\infty.$$

□

Para probar el Lema 3.2.2 comenzaremos estimando la función distribución $\lambda_{\Phi_{\tilde{\beta}_j}}(t)$. El resultado es el siguiente.

LEMA 3.2.3. *Dados $1 \leq j \leq L$ y $\tilde{\beta}_j = (\beta_{\sigma(1)}, \cdots, \beta_{\sigma(j)})$, supongamos que $\beta = \min_{1\leq i\leq j} \beta_{\sigma(i)}$ se alcanza en k $(1 \leq k \leq j)$ de los $\beta_{\sigma(i)}$, luego*

$$\lambda_{\Phi_{\tilde{\beta}_j}}(t) = |\{x : \Phi_{\tilde{\beta}_j}(x) > t\}| \leq Ct^{\beta}\left(1 + \log^+ t\right)^{k-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Phi_{\tilde{\beta}_j}(z) = \prod_{i=1}^{L} h_i(z^i)$ donde $h_i(z^i) = \varphi_{\beta_{\sigma(i)},n_{\sigma(i)}}(z^{\sigma(i)})$ o $h_i(z^i) = \psi_{n_{\gamma(i)}}(z^{\gamma(i)})$. Probaremos el lema por inducción en el número de k de valores $\beta_{\sigma(i)}$ donde se alcanza el mínimo. Es decir, probaremos que cualquiera sea L, si el mínimo β se alcanza en k de los números $\beta_{\sigma(i)}$, luego

$$|\{z = (z^1, \cdots, z^L) : \prod_{i=1}^{L} h_i(z^i) > t\}| \leq Ct^{\beta}\left(1 + \log^+ t\right)^{k-1}.$$

Caso $k = 1$: Supongamos que el mínimo de los $\beta_{\sigma(i)}$ se alcanza en un único valor, luego tenemos que probar que para cualquier $L \in \mathbb{N}$,

$$|\{z = (z^1, \cdots, z^n) : \prod_{i=1}^{L} h_i(z^i) > t\}| \leq Ct^{1/\beta}.$$

Probaremos que esto es cierto por inducción en L, donde L la cantidad de bloques o de productos en la función $\Phi_{\tilde{\beta}_j}(z)$.

a) Si $L = 1$, $\Phi_{\tilde{\beta}_j}(z) = \varphi_{\beta,n}(z) = \dfrac{(|z|-1)^{\beta}}{|z|^n}\chi_{(1,2)}(|z|)$. Luego

$$\lambda_{\Phi_{\tilde{\beta}_j}}(t) \leq |\{z : 1 < |z| < 2 \ \wedge \ (|z|-1)^{\beta} > t\}| = |\{z : 1 < |z| < 2 \ \wedge \ |z| < 1 + t^{\frac{1}{\beta}}\}|.$$

Si $1 + t^{1/\beta} \geq 2$ (equivalentemente $t \leq 1$) entonces $\lambda_{\Phi_{\tilde{\beta}_j}}(t) = C_n$.
Si $1 + t^{1/\beta} < 2$ (equivalentemente $t > 1$) entonces por el Teorema del Valor Medio se tiene

$$\lambda_{\Phi_{\tilde{\beta}_j}}(t) = C_n[(1 + t^{1/\beta})^n - 1] \leq \tilde{C}_n t^{1/\beta}.$$

Luego, como para $t \in (0,1)$, $t^{1/\beta} > 1$ (dado que $\beta < 0$), existe $C > 0$ tal que

$$\lambda_{\Phi_{\tilde{\beta}_j}}(t) \leq Ct^{1/\beta}, \qquad t > 0.$$

b) Supongamos que la acotación está probada para el caso de k bloques o de factores y probemos que lo mismo se obtiene cuando tenemos $k+1$ factores. Luego, por la hipótesis inductiva tenemos

$$\begin{aligned} & |\{z = (z^1, \cdots, z^{k+1}) : \prod_{i=1}^{k+1} h_i(z^i) > t\}| \\ = & \left|\left\{z : z^{k+1} \in sop(h_{k+1}) \ \wedge \ \prod_{i=1}^{k} h_i(z^i) > \frac{t}{h_{k+1}(z^{k+1})}\right\}\right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{z^{k+1}\in sop(h_{k+1})} \left| \left\{ z=(z^1,\cdots,z^k) : \prod_{i=1}^{k} h_i(z^i) > \frac{t}{h_{k+1}(z^{k+1})} \right\} \right| \, dz^{k+1} \\
&\leq C \int_{z^{k+1}\in sop(h_{k+1})} \left(\frac{t}{h_{k+1}(z^{k+1})} \right)^{1/\beta} dz^{k+1} \\
&= Ct^{1/\beta} \int_{z^{k+1}\in sop(h_{k+1})} \left[h_{k+1}(z^{k+1}) \right]^{-1/\beta} dz^{k+1} \\
&\leq Ct^{1/\beta}
\end{aligned}
$$

tanto para $h_{k+1} = \varphi_{\beta_i,n_i}$ o bien $h_{k+1} = \psi_{\beta_i,n_i}$. En efecto, si $h_{k+1} = \varphi_{\beta_i,n_i}$,

$$
\begin{aligned}
\int_{z^{k+1}\in sop(h_{k+1})} \left[h_{k+1}(z^{k+1}) \right]^{-1/\beta} dz^{k+1} &= \int_{1<|z^i|<2} \left(\frac{(|z^i|-1)^{\beta_i}}{|z^i|^{n_i}} \right)^{-1/\beta} dz^i \\
&\leq \int_{1<|z^i|<2} \left(|z^i|-1 \right)^{-\beta_i/\beta} dz^i \\
&= C_{n_i} \int_1^2 (s-1)^{-\beta_i/\beta} s^{n_i-1} \, ds \\
&\leq C_{n_i} \int_1^2 (s-1)^{-\beta_i/\beta} \, ds \\
&= C_{n_i} \int_0^1 s^{-\beta_i/\beta} \, ds < \infty,
\end{aligned}
$$

pues $-\beta_i/\beta > -1$ ya que $\beta_i > \beta$. En el caso que $h_{k+1} = \psi_{n_i}$,

$$
\begin{aligned}
\int_{z^{k+1}\in sop(h_{k+1})} \left[h_{k+1}(z^{k+1}) \right]^{-1/\beta} dz^{k+1} &= \int_{|z^i|>2} |z^i|^{n_i/\beta} \, dz^i \\
&= C_{n_i} \int_2^{\infty} s^{n_i/\beta} s^{n_i-1} \, ds < \infty,
\end{aligned}
$$

pues $n_i/\beta + n_i < 0$ ya que $-1 < \beta < 0$.

Caso $k \Rightarrow k+1$: Supongamos ahora que el mínimo β se alcanza en k de los números $\beta_{\sigma(i)}$, $1 \leq i \leq j$, luego, para cualquier $m \geq k$ se tiene que

$$
|\{z=(z^1,\cdots,z^m) : \prod_{i=1}^{m} h_i(z^i) > t\}| \leq Ct^{1/\beta}(1+\log^+ t)^{k-1}.
$$

Probaremos que si el mínimo β se alcanza en $k+1$ de los números $\beta_{\sigma(i)}$, $1 \leq i \leq j$, para cualquier $m \geq k+1$ se tiene que

$$
|\{z=(z^1,\cdots,z^m) : \prod_{i=1}^{m} h_i(z^i) > t\}| \leq Ct^{1/\beta}(1+\log^+ t)^{k}.
$$

Supongamos que h_1 es de la forma φ_{β_i,n_i} donde β_i es uno de los números donde se alcanza el mínimo.

Por la hipótesis inductiva se tiene que

$$
|\{z=(z^1,\cdots,z^m) : \prod_{i=1}^{m} h_i(z^i) > t\}|
$$

$$\begin{aligned}
&= |\{z=(z^1,\cdots,z^m): z^1\in sop(h_1)\ \wedge\ \prod_{i=2}^m h_i(z^i) > \frac{t}{h_1(z^1)}\}| \\
&= \int_{z^1\in sop(h_1)} |\{(z^2,\cdots,z^m): z^1\in sop(h_1)\ \wedge\ \prod_{i=2}^m h_i(z^i) > \frac{t}{h_1(z^1)}\}|\, dz^1 \\
&\le Ct^{1/\beta}\int_{z^1\in sop(h_1)} \frac{1}{h_1(z^1)^{1/\beta}}\left[1+\log^+\left(\frac{t}{h_1(z^1)}\right)\right]^{k-1} dz^1 \\
&= Ct^{1/\beta}\int_{z^1\in sop(h_1); t\le h_1(z^1)} \frac{1}{h_1(z^1)^{1/\beta}}\, dz^1 \\
&\quad +Ct^{1/\beta}\int_{z^1\in sop(h_1); t> h_1(z^1)} \frac{1}{h_1(z^1)^{1/\beta}}\left[1+\log\left(\frac{t}{h_1(z^1)}\right)\right]^{k-1} dz^1 = I+II.
\end{aligned}$$

Notemos que ya probamos en el *Caso k=1* b) que $I\le Ct^{1/\beta}$. Acotemos ahora II.

$$\begin{aligned}
II &\le C_{n_1}t^{1/\beta}\int_{1<|z^1|<2;1+(2^{n_1}t)^{1/\beta}<|z^1|} \frac{1}{|z^1|-1}\left[1+\log\left(\frac{t|z^1|^{n_1}}{(|z^1|-1)^\beta}\right)\right]^{k-1} dz^1 \\
&= C_{n_1}t^{1/\beta}\int_{1<|z^1|<2;1+(2^{n_1}t)^{1/\beta}<|z^1|} \frac{1}{|z^1|-1}\left[1+(-\beta)\log\left(\frac{|z^1|-1}{(2^{n_1}t)^{1/\beta}}\right)\right]^{k-1} dz^1 \\
&\le C_{n_1}t^{1/\beta}\int_{(2^{n_1}t)^{1/\beta}}^1 \frac{1}{r}\left[1+\log\left(\frac{r}{(2^{n_1}t)^{1/\beta}}\right)\right]^{k-1} dr \\
&= Ct^{1/\beta}\left[1+\log\left((2^{n_i}t)^{-1/\beta}\right)\right]^k \\
&\le Ct^{1/\beta}\left(1+\log^+ t\right)^k.
\end{aligned}$$

Luego, existe $C>0$ tal que $I+II\le Ct^{1/\beta}\left(1+\log^+ t\right)^k$. □

Demostración del Lema 3.2.2. Dado que $\left[\Phi_{\tilde\beta_j}\right]^*(s)=\text{ínf}\{t>0:\lambda_{\Phi_{\tilde\beta_j}}(t)\le s\}$, para probar el lema basta ver que $\lambda_{\Phi_{\tilde\beta_j}}(t_s)\le s$, con $t_s=\tilde C s^\beta\left[1+\log^+(\frac{1}{s})\right]^{k-1}$, para alguna constante adecuada $\tilde C$.

Notemos que si $s>1$, $t_s=\tilde Cs^\beta$ y

$$\lambda_{\Phi_{\tilde\beta_j}}(t_s)\le C\tilde C^{1/\beta}\ s[1+\log^+(\tilde Cs^\beta)]^{k-1}\le C\tilde C^{1/\beta}[1+\log^+(\tilde C)]^{k-1}\ s.$$

Luego, eligiendo apropiadamente la constante $\tilde C$ tenemos que $\lambda_{\Phi_{\tilde\beta_j}}(t_s)\le s$ en este caso.

Si $0<s<1$, $t_s=\tilde Cs^\beta\left[1+\log(\frac{1}{s})\right]^{k-1}$ y

$$\begin{aligned}
\lambda_{\Phi_{\tilde\beta_j}}(t_s) &\le C\tilde C^{1/\beta}\ s\left(1+\log\left(\frac{1}{s}\right)\right)^{(k-1)/\beta}\left[1+\log\left(\tilde Cs^\beta\left[1+\log\left(\frac{1}{s}\right)\right]^{k-1}\right)\right]^{k-1} \\
&\le C\tilde C^{1/\beta}\ s\left[\frac{1+\log\tilde C+(-\beta)\log\left(\frac{1}{s}\right)+(k-1)\log(1+\log(\frac{1}{s}))}{1+\log(\frac{1}{s})}\right]^{k-1}.
\end{aligned}$$

Luego, eligiendo apropiadamente la constante $\tilde C$, también en este caso podemos probar que $\lambda_{\Phi_{\tilde\beta_j}}(t_s)\le s$. □

Nuestro propósito es estudiar la existencia del límite

$$\lim_{\bar{\epsilon}\to 0} \mathcal{T}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}} f(x).$$

Como resulta natural en este tema, comenzaremos estudiando el operador maximal

$$\mathcal{T}^*_{\bar{\beta}} f(x) = \sup_{\bar{\epsilon}\in\mathbb{R}^L_+} |\mathcal{T}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}} f(x)|.$$

Siguiendo las ideas de [**3**] probaremos una desigualdad puntual para $\mathcal{T}^*_{\bar{\beta}}$.

Como ya se hizo en el Capítulo 2, utilizaremos la siguiente notación. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ y $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$ denotamos con $\tilde{x}_i$ a $(x^1, \cdots, x^{i-1}, x^{i+1}, \cdots, x^L)$ y para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sea $f_{\tilde{x}_i} : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ dada por $f_{\tilde{x}_i}(x^i) = f(x^1, \cdots, x^i, \cdots, x^L)$.

Para $\delta > 0$ definimos los conjuntos $\mathcal{A}_i(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^{n_i} : \ \delta < |x - y| \leq 2\delta\}$ y para $-1 < \beta_i \leq 0$, el operador maximal

$$\tilde{M}^i_{\beta_i} f(x) = \tilde{M}_{\beta_i}(f_{\tilde{x}_i})(x^i) = \sup_{\delta>0} \frac{1}{\delta^{n_i+\beta_i}} \int_{\mathcal{A}_i(x^i,\delta)} |f_{\tilde{x}_i}(y^i)|(|x_i - y_i| - \delta)^{\beta_i}\, dy^i.$$

También necesitaremos una notación para las truncaciones y el operador maximal asociado cuando se integra sólo en un bloque de variables, así

$$T^i_{\delta,\beta_i} f(x) = T_{\delta,\beta_i}(f_{\tilde{x}_i})(x^i) = \int_{|x^i-y^i|>\delta} f_{\tilde{x}_i}(y^i) K_{i,\delta,\beta_i}(x^i, y^i)\ dy^i$$

y

$$T^{i,*}_{\beta_i} f(x) = \sup_{\delta>0} |T^i_{\delta,\beta_i} f(x)| = \sup_{\delta>0} |T_{\delta,\beta_i}(f_{\tilde{x}_i})(x^i)|.$$

Cuando $\beta = 0$ denotaremos a $T^i_{\delta,\beta}$ y a $T^{i,*}_{\beta}$ simplemente con T^i_δ y $T^{i,*}$. A partir de los operadores $U_{\delta,\beta}$ y $V_{\delta,\beta}$ definidos en la sección anterior definimos los operadores

$$U^i_{\delta,\beta_i} f(x) = U_{\delta,\beta_i}(f_{\tilde{x}_i})(x^i) = \int_{\mathcal{A}_i(x^i,\delta)} f_{\tilde{x}_i}(y^i) K_{i,\delta,\beta_i}(x^i, y^i)\ dy^i$$

y

$$V^i_{\delta,\beta_i} f(x) = V_{\delta,\beta_i}(f_{\tilde{x}_i})(x^i) = \int_{|x^i-y^i|>2\delta} f_{\tilde{x}_i}(y^i)[K_{i,\delta,\beta_i}(x^i, y^i) - K_{i,\delta,0}(x^i, y^i)]\ dy^i.$$

A continuación mostraremos cómo se puede obtener una desigualdad puntual similar a la obtenida en (3.1.2). Por simplicidad de notación, comenzaremos tratando el caso de dos bloques. Dados $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2)$, $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ y $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, como

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}} f(x) =& \int_{|x^1-y^1|>\epsilon_1} \int_{|x^2-y^2|>\epsilon_2} f(y^1, y^2) K_{1,\epsilon_1,\beta_1}(x^1, y^1) K_{2,\epsilon_2,\beta_2}(x^2, y^2)\, dy^2 dy^1 \\ =& T^1_{\epsilon_1,\beta_1} \circ T^2_{\epsilon_2,\beta_2} f(x) \\ =& T^2_{\epsilon_2,\beta_2} \circ T^1_{\epsilon_1,\beta_1} f(x),\end{aligned}$$

usando (3.1.3) en cada operador $T^i_{\epsilon_i,\beta_i}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\bar\epsilon,\bar\beta}f(x) =& T^1_{\epsilon_1,\beta_1}\circ T^2_{\epsilon_2,\beta_2}f(x)\\ =& U^1_{\epsilon_1,\beta_1}\circ U^2_{\epsilon_2,\beta_2}f(x)+U^1_{\epsilon_1,\beta_1}\circ T^2_{2\epsilon_2}f(x)+U^1_{\epsilon_1,\beta_1}\circ V^2_{\epsilon_2,\beta_2}f(x)\\ &+T^1_{2\epsilon_1}\circ U^2_{\epsilon_2,\beta_2}f(x)+T^1_{2\epsilon_1}\circ T^2_{2\epsilon_2}f(x)+T^1_{2\epsilon_1}\circ V^2_{\epsilon_2,\beta_2}f(x)\\ &+V^1_{\epsilon_1,\beta_1}\circ U^2_{\epsilon_2,\beta_2}f(x)+V^1_{\epsilon_1,\beta_1}\circ T^2_{2\epsilon_2}f(x)+V^1_{\epsilon_1,\beta_1}\circ V^2_{\epsilon_2,\beta_2}f(x).\end{aligned}$$

Claramente el operador $T^1_{2\epsilon_1}\circ T^2_{2\epsilon_2}f(x)$ es el operador $\mathcal{T}_{2\bar\epsilon}f(x)$, donde $2\bar\epsilon=(2\epsilon_1,2\epsilon_2)$ y este operador está acotado por el operador maximal $\mathcal{T}^*$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que estos operadores conmutan y usando las estimaciones (3.1.4) y (3.1.5) se tiene que los operadores $U^1_{\epsilon_1,\beta_1}\circ U^2_{\epsilon_2,\beta_2}$, $U^1_{\epsilon_1,\beta_1}\circ V^2_{\epsilon_2,\beta_2}$, $V^1_{\epsilon_1,\beta_1}\circ U^2_{\epsilon_2,\beta_2}$ y $V^1_{\epsilon_1,\beta_1}\circ V^2_{\epsilon_2,\beta_2}$ están acotados por una constante veces el operador maximal $\tilde M^1_{\beta_1}\circ\tilde M^2_{\beta_2}$.

Los operadores $U^1_{\epsilon_1,\beta_1}\circ T^2_{2\epsilon_2}$, $T^1_{2\epsilon_1}\circ U^2_{\epsilon_2,\beta_2}$, $T^1_{2\epsilon_1}\circ V^2_{\epsilon_2,\beta_2}$ y $V^1_{\epsilon_1,\beta_1}\circ T^2_{2\epsilon_2}$ resultan acotados por una constante veces la suma de los siguientes operadores $\tilde M^1_{\beta_1}\circ T^{2,*}$ y $\tilde M^2_{\beta_2}\circ T^{1,*}$. En efecto, por ejemplo, usando la estimación (3.1.4) tenemos que

$$\begin{aligned}|U^1_{\epsilon_1,\beta_1}\circ T^2_{2\epsilon_2}f(x^1,x^2)| &\le \int_{\mathcal{A}_1(x^1,\epsilon_1)}|T^2_{2\epsilon_2}f(y^1,x^2)|K_{1,\epsilon_1,\beta_1}(x^1,y^1)\,dy^1\\ &\le \int_{\mathcal{A}_1(x^1,\epsilon_1)}T^{2,*}f(y^1,x^2)K_{1,\epsilon_1,\beta_1}(x^1,y^1)\,dy^1\\ &\le C\tilde M^1_{\beta_1}(T^{2,*}f)(x^1,x^2).\end{aligned}$$

Luego, reuniendo todas las estimaciones, hemos probado para el caso $L=2$ la siguiente estimación puntual

$$\mathcal{T}^*_{\bar\beta}\le C\left[\tilde M^1_{\beta_1}\circ\tilde M^2_{\beta_2}+\tilde M^1_{\beta_1}\circ T^{2,*}+\tilde M^2_{\beta_2}\circ T^{1,*}+\mathcal{T}^*\right].$$

En general cuando $L>2$ escribimos al operador $\mathcal{T}_{\bar\epsilon,\bar\beta}$ como

$$\mathcal{T}_{\bar\epsilon,\bar\beta}=\mathcal{T}^1_{\epsilon_1,\beta_1}\circ\cdots\circ\mathcal{T}^L_{\epsilon,\beta_L},$$

donde cada operador $\mathcal{T}^i_{\epsilon_i,\beta_i}$ se puede escribir como la siguiente suma de operadores

$$\mathcal{T}^i_{\epsilon_i,\beta_i}=U^i_{\epsilon_i,\beta_i}+\mathcal{T}^i_{2\epsilon_i}+V^i_{\epsilon_i,\beta_i}.$$

Procediendo como en el caso $L=2$ podemos acotar al operador $\mathcal{T}_{\bar\epsilon,\bar\beta}$ como suma de operadores de 3 tipos:

Operadores de tipo I: operadores que son composición sólo de operadores truncados $\mathcal{T}^i_{2\epsilon_i}$. Hay un único operador de tipo I, el cual se puede acotar de manera trivial por el operador maximal $\mathcal{T}^*$.

Operadores de tipo II: operadores que son composición de L operadores del tipo $U^i_{\epsilon_i,\beta_i}$ y/o operadores del tipo $V^i_{\epsilon_i,\beta_i}$.
Procediendo como en el caso de dos bloques se pueden acotar cada uno de los operadores de tipo II por el operador $\tilde{M}^1_{\beta_1} \circ \cdots \circ \tilde{M}^L_{\beta_L}$.

Operadores de tipo III: operadores que son composición de operadores del tipo $U^i_{\epsilon_i,\beta_i}$ o del tipo $V^i_{\epsilon_i,\beta_i}$ y operadores truncados del tipo $\mathcal{T}^i_{2\epsilon_i}$. Cambiando el orden de integración si es necesario, podemos suponer que aplicamos primero los operadores del tipo $\mathcal{T}^i_{2\epsilon_i}$ y luego los de la forma $U^i_{\epsilon_i,\beta_i}$ o $V^i_{\epsilon_i,\beta_i}$.
Para escribir la forma que tienen estos operadores de una forma compacta utilizamos la notación introducida en la prueba de la Proposición 3.2.1. Dados $L \in \mathbb{N}$ y $1 \leq j \leq L$, denotemos con Ω^L_j a la familia de todos los subconjuntos $\sigma = \{\sigma(1), \cdots, \sigma(j)\}$ de $\{1, \cdots, L\}$ de j elementos diferentes donde $\sigma(i) < \sigma(j)$ cuando $i < j$. Para $\sigma \in \Omega^L_j$, sea $\gamma = \{\gamma(1), \cdots, \gamma(L-j)\} = \{1, \cdots, L\} \setminus \sigma$. Utilizando esta notación, los operadores de tipo III tienen la forma

$$W^{\sigma(1)}_{\beta_{\sigma(1)}} \circ \cdots \circ W^{\sigma(j)}_{\beta_{\sigma(j)}} \circ \mathcal{T}^{\gamma(1)}_{2\epsilon_{\gamma(1)}} \circ \cdots \circ \mathcal{T}^{\gamma(L-j)}_{2\epsilon_{\gamma(L-j)}},$$

donde $1 \leq j \leq L-1$, $\sigma \in \Omega^L_j$ y $W^{\sigma(i)}_{\beta_{\sigma(i)}}$ es un operador del tipo $U^{\sigma(i)}_{\beta_{\sigma(i)},\epsilon_{\sigma(i)}}$ o del tipo $V^{\sigma(i)}_{\beta_{\sigma(i)},\epsilon_{\sigma(i)}}$. Notar que $\mathcal{T}^{\gamma(1)}_{2\epsilon_{\gamma(1)}} \circ \cdots \circ \mathcal{T}^{\gamma(L-j)}_{2\epsilon_{\gamma(L-j)}}$ es el mismo operador independientemente de orden en que se tomen los $\gamma(k)$ en γ. Si $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \cdots \epsilon_{L-j})$, llamamos

$$\mathcal{T}^{\gamma,*} = \sup_{\bar{\epsilon} \in \mathbb{R}^{L-j}_+} |\mathcal{T}^{\gamma(1)}_{2\epsilon_1} \circ \cdots \circ \mathcal{T}^{\gamma(L-j)}_{2\epsilon_{L-j}}|.$$

Luego, reuniendo las estimaciones realizadas tenemos probada la siguiente desigualdad puntual

(3.2.1)

$$\mathcal{T}^*_{\bar{\beta}} f(x) \leq C \left[\mathcal{T}^* f(x) + \tilde{M}^1_{\beta_1} \circ \cdots \circ \tilde{M}^L_{\beta_L} f(x) + \sum_{j=1}^{L-1} \sum_{\sigma \in \Omega^L_j} \tilde{M}^{\sigma(1)}_{\beta_{\sigma(1)}} \circ \cdots \circ \tilde{M}^{\sigma(j)}_{\beta_{\sigma(j)}} \circ \mathcal{T}^{\gamma,*} f(x) \right].$$

Como consecuencia de esta desigualdad puntual, de las acotaciones que verifican los operadores que allí aparecen y de los teoremas de composición de operadores probados en el Capítulo 1 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.4. *Sea $\bar{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_L)$ y supongamos que existen exactamente k números β_i, con $1 \leq k \leq L$ tales que $\beta_* = \min_{1 \leq j \leq L} \beta_j$. Luego,*

i) el operador $\mathcal{T}^*_{\bar{\beta}}$ es de tipo fuerte (p,p) para $p > 1/(1+\beta_*)$ y

ii) en el extremo $p = 1/(1+\beta_*)$, el operador $\mathcal{T}^*_{\bar{\beta}}$ satisface la siguiente desigualdad

$$|\{x : \ \mathcal{T}^*_{\bar{\beta}} f(x) > t\}| \leq C \left(\frac{\varphi_{k-1}(1/t)}{t} \int_0^\infty s^{\beta_*} \varphi_{k-1}(f^*(s))\, ds \right)^{1/(1+\beta_*)} \qquad (3.2.2)$$

para todo $t > 0$, donde $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$.

Demostración. *i)* El operador $\mathcal{T}^*$ es un caso particular de las integrales singulares en espacios producto tratadas en [**20**], por lo que este operador resulta ser de tipo fuerte (p,p) para todo $p>1$. Lo mismo ocurre con los operadores $\mathcal{T}^{\gamma,*}$. Por otro lado, todos los operadores $\tilde{M}^i_{\beta_i}$ son de tipo fuerte (p,p) para todo $p>1/(1+\beta_i)$. Luego, dado que $1/(1+\beta_*)>1/(1+\beta_i)$ para todo i $(1\le i\le L)$, podemos concluir fácilmente el resultado en *i)*.

ii) Como $\mathcal{T}^*$ es de tipo fuerte $(1/(1+\beta_*),1/(1+\beta_*))$, es de tipo débil restringido $(1/(1+\beta_*),1/(1+\beta_*))$ y esto implica que $\mathcal{T}^*$ verifica (3.2.2). Por otro lado, aplicando el Teorema 1.2.7 a los operadores $\tilde{M}^i_{\beta_i}$, $1\le i\le L$, tenemos (3.2.2) para la composición $\tilde{M}^1_{\beta_1}\circ\cdots\circ\tilde{M}^L_{\beta_L}$. Veamos ahora que todos los operadores de la forma $\tilde{M}^{\sigma(1)}_{\beta_{\sigma(1)}}\circ\cdots\circ\tilde{M}^{\sigma(j)}_{\beta_{\sigma(j)}}\circ\mathcal{T}^{\gamma,*}$ también satisfacen (3.2.2). Sin perder generalidad, podemos suponer que $\beta_{\sigma(j)}$ es uno de los números donde se alcanza el mínimo β_*. Como los operadores $\mathcal{T}^{\gamma,*}$ son de tipo fuerte (p,p) para todo $p>1$, son de tipo débil restringido (p,p) para todo $p>1$. Además, como el operador $\tilde{M}^{\sigma(j)}_{\beta_{\sigma(j)}}$ es de tipo débil restringido (q,q) para todo $q\ge 1/(1+\beta_{\sigma(j)})$, aplicando el Teorema 1.2.12 tenemos que la composición $\tilde{M}^{\sigma(j)}_{\beta_{\sigma(j)}}\circ\mathcal{T}^{\gamma,*}$ también es de tipo débil restringido (q,q) para todo $q\ge 1/(1+\beta_{\sigma(j)})$. Por otro lado, la composición $\tilde{M}^{\sigma(1)}_{\beta_{\sigma(1)}}\circ\cdots\circ\tilde{M}^{\sigma(j-1)}_{\beta_{\sigma(j-1)}}$ verifica la desigualdad (1.2.4) del Teorema 1.2.9 donde el exponente del logaritmo en aquella desigualdad es la lo sumo $k-2$ y $p=1/(1+\tilde{\beta})$ con $\tilde{\beta}=\text{mín}\{\beta_{\sigma(1)},\cdots,\beta_{\sigma(j-1)}\}$. Finalmente, aplicando el Teorema 1.2.9 con $S=\tilde{M}^{\sigma(1)}_{\beta_{\sigma(1)}}\circ\cdots\circ\tilde{M}^{\sigma(j-1)}_{\beta_{\sigma(j-1)}}$ y $T=\tilde{M}^{\sigma(j)}_{\beta_{\sigma(j)}}\circ\mathcal{T}^{\gamma,*}$ tenemos probada la desigualdad (3.2.2) y por lo tanto, el resultado deseado para todos los términos que acotan a $\mathcal{T}^*_{\bar{\beta}}$. □

Finalmente, la existencia de la integral singular en el sentido Cesàro en espacios producto se obtiene en el siguiente resultado.

Teorema 3.2.5. *Dado $\bar{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_L)$ con $-1<\beta_i\le 0$ y supongamos que existen exactamente k números β_i, con $1\le k\le L$ tales que $\beta_*=\text{mín}\,\beta_i$. Sean K_i núcleos de Calderón-Zygmund definidos sobre $\mathbb{R}^{n_i}\times\mathbb{R}^{n_i}\setminus\Delta$, donde Δ es la diagonal de $\mathbb{R}^{n_i}\times\mathbb{R}^{n_i}$, $1\le i\le L$, tales que existen los límites*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon<|x^i-y^i|<1}K_i(x^i,y^i)\left(1-\frac{\epsilon}{|x^i-y^i|}\right)^{\beta_i}dy^i,\quad 1\le i\le L,$$

en casi todo punto. Entonces existe el límite

$$\lim_{\bar{\epsilon}\to 0}\mathcal{T}_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}}f(x)$$

en casi todo punto para cualquier $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p>1/(1+\beta_*)$ y y para toda $f\in\Lambda(1/(1+\beta_*),\varphi_{k-1})$ donde $\varphi_k(t)=t(1+\log^+t)^k$.

Demostración. Teniendo en cuenta que a partir del teorema anterior tenemos las acotaciones del operador maximal $\mathcal{T}^*_{\bar{\beta}}$ en los espacios correspondientes, el teorema se seguirá si probamos la convergencia de las truncaciones $T_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}}f$ en subespacios densos. Comenzaremos con el caso del espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p > 1/(1+\beta_*)$. Dado que las combinaciones lineales finitas de funciones de variables separadas con factores en $L^p(\mathbb{R}^{n_i})$ son densas en $L^p(\mathbb{R}^n)$, es suficiente chequear la existencia del límite de las truncaciones $T_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}}f$ para funciones del tipo $f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{k=1}^{m} c_k f_1^k(x^1) f_2^k(x^2)\cdots f_L^k(x^L)$, con $f_i^k \in L^p(\mathbb{R}^{n_i})$, $1 \le i \le L$. Notemos que si f es de esta forma,

$$\begin{aligned} T_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}}f(x) &= T_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k f_1^k(x^1) f_2^k(x^2)\cdots f_L^k(x^L)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} c_k T_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}}(f_1^k(x^1) f_2^k(x^2)\cdots f_L^k(x^L)) \\ &= \sum_{k=1}^{m} c_k \left(T_{\epsilon_1,\beta_1} f_1^k(x^1) T_{\epsilon_2,\beta_2} f_2^k(x^2)\cdots T_{\epsilon_L,\beta_L} f_L^k(x^L)\right) \end{aligned}$$

Luego, de las hipótesis en los núcleos K_i y en la funciones f_i, aplicando el Teorema 3.1.1 a cada bloque tenemos que el

$$\lim_{\epsilon_i \to 0^+} T_{\epsilon_i,\beta_i} f_i(x^i) \tag{3.2.3}$$

existe para casi todo $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$ y $p > 1/(1+\beta_i)$ con $i = 1,\cdots,L$. Como $\beta_* \le \beta_i$ para todo $i = 1,\cdots,L$ entonces $1/(1+\beta_i) \le 1/(1+\beta_*)$. Luego, el límite (3.2.3) existe para casi todo $x^i \in \mathbb{R}^{n_i}$ y $p > 1/(1+\beta_*)$. Esto nos asegura la existencia del límite de $T_{\bar{\epsilon},\bar{\beta}}$ cuando $\bar{\epsilon}$ tiende a cero para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ y funciones en un subespacio denso de L^p con $p > 1/(1+\beta_*)$.

Al igual que hicimos con los promedios de Cesàro en espacios producto, la convergencia para funciones en el espacio $\Lambda(1/(1+\beta_*), \varphi_{k-1})$ se sigue del hecho que el espacio $L^p \cap \Lambda(1/(1+\beta_*), \varphi_{k-1})$ es un subespacio denso de $\Lambda(1/(1+\beta_*), \varphi_{k-1})$. $\square$

Capítulo 4

Aplicaciones a la Teoría Ergódica

En este capítulo aplicaremos algunos de los resultados y técnicas desarrolladas en los capítulos anteriores al contexto de Teoría Ergódica. Concretamente, en la primera parte de este capítulo estudiamos resultados de convergencia puntual y en norma de los promedios de Cesàro ergódicos multiparamétricos. Posteriormente abordaremos el estudio de la Transformada de Hilbert ergódica doble y, a partir de estos resultados, estudiamos la existencia de la Transformada de Hilbert ergódica doble en el sentido de Cesàro.

4.1. Promedios de Cesàro Ergódicos

Sea (X, F, ν) un espacio de medida σ- finito y sea T un operador lineal definido sobre algún $L^p(\nu)$, $1 < p < \infty$. Los promedios ergódicos asociados al operador T se definen como

$$R_n f = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} T^k f,$$

donde $T^k = T \circ \cdots \circ T$ denota la composición de k veces el operador T.

Existen numerosos trabajos en los cuales se estudia la convergencia puntual y en norma $L^p(\nu)$ de los promedios $R_n f$. Desde el caso más clásico en el que T viene dado por una transformación $\tau : X \to X$ que conserva la medida (Teoremas de Birkoff y Von Neumann, ver por ejemplo [**30**]), hasta casos más generales como por ejemplo en [**32**] donde T es un operador lineal positivo con inverso positivo en $L^p(\nu)$, $1 < p < \infty$, tal que

$$\sup_{n \geq 0} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} T^k \right\|_p < \infty.$$

Bajo estas condiciones en T se prueba que los promedios ergódicos $R_n f$ convergen en casi todo punto y en la norma de $L^p(\nu)$ para toda $f \in L^p(\nu)$.

Una generalización de estos promedios son los promedios ergódicos Cesàro$-\alpha$ con $0 < \alpha < 1$. Estos promedios se definen como

$$R_{n,\alpha} f = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} T^k f,$$

donde $A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{n!}$, $n \neq 0$ y $A_0^\alpha = 1$.

En su tesis, R. Irmisch [**26**] probó que si $\alpha p > 1$ y $T : L^p(\nu) \to L^p(\nu)$ es una contracción lineal y positiva luego el operador maximal

$$M_\alpha f = \sup_{n\geq 0} |R_{n,\alpha} f|$$

está acotado en $L^p(\nu)$ y los promedios $R_{n,\alpha} f$ convergen en casi todo punto y en la norma de $L^p(\nu)$ para toda $f \in L^p(\nu)$.

En el caso límite $\alpha p = 1$, el resultado no es cierto ni siquiera si T está inducido por una transformación ergódica que preserva la medida [**12**]. En este caso límite, Broise, Deniel y Derriennic [**9**] probaron que si $Tf = f \circ \tau$, donde τ conserva la medida, el operador M_α es de tipo débil restringido $(1/\alpha, 1/\alpha)$ y los promedios $R_{n,\alpha} f$ convergen en casi todo punto para toda f que pertenece al espacio de Lorentz $L(1/\alpha, 1)(\nu)$.

En [**34**] y en [**7**] se generalizan los resultados de Irmisch. Para describir esta generalización daremos algunas definiciones.

Diremos que un operador T es un **operador de Lamperti** sobre $L^p(\nu)$ si T es un operador lineal y acotado sobre $L^p(\nu)$ tal que T separa soportes, es decir, envía funciones con soportes disjuntos en funciones del mismo tipo. Dado un operador de Lamperti sobre $L^p(\nu)$, existe un operador lineal y positivo sobre $L^p(\nu)$, el módulo lineal de T y al que denotaremos $|T|$, tal que $|Tf| = |T||f|$, para toda $f \in L^p(\nu)$. Finalmente, con $|T|_\alpha$ denotaremos al operador lineal dado por $|T|_\alpha f = [|T|(f^\alpha)]^{1/\alpha}$, para $f \geq 0$.

Si T es un operador de Lamperti invertible, luego su inverso T^{-1} y su módulo lineal $|T|$ son también operadores de Lamperti invertibles (ver [**29**]).

TEOREMA 4.1.1. [**34**],[**7**] *Sea (X, F, ν) un espacio de medida σ- finito, $0 < \alpha \leq 1$, $1/\alpha < p < \infty$ y sea T un operador de Lamperti invertible sobre $L^p(\nu)$ tal que*

$$\sup_{n\geq 0} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |T|_\alpha^k \right\|_{p\alpha} < \infty.$$

Luego, para cualquier $f \in L^p(\nu)$, el límite $\lim_{n\to\infty} R_{n,\alpha} f$ existe en casi todo punto y en la norma de $L^p(\nu)$.

En [**34**] se considera T y T^{-1} positivos y por lo tanto $|T| = T$ en la hipótesis del teorema anterior. Los resultados previos para probar el teorema anterior y que serán utilizados posteriormente están reunidos en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.1.2. [**34**],[**7**] *Dados* (X, F, ν)*,* α*,* p *y* T *como en el Teorema 4.2, luego*

(i) el operador maximal M_α *está acotado en* $L^p(\nu)$ *y*

(ii) el conjunto $D = \{g + (h - Th) : g, h \in L^p(\nu)\ g = Tg$ *y* h *es una función simple*$\}$ *es denso en* $L^p(\nu)$*.*

Por otro lado, en [**4**] los autores generalizan los resultados del caso límite $p = 1/\alpha$ por medio del siguiente teorema.

TEOREMA 4.1.3. [**4**] *Sea* (X, F, ν) *un espacio de medida* σ*- finito,* $0 < \alpha \leq 1$ *y sea* T *un operador de Lamperti sobre* $L^{1/\alpha}(\nu)$ *invertible y tal que*

$$\sup_{n \geq 0} \left|\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |T|_\alpha^k \right|\right|_1 < \infty$$

y

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} ||T^n||_\infty < \infty.$$

Luego existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n,\alpha} f$ *en casi todo punto, para cualquier* $f \in L(1/\alpha, 1)(\nu)$*.*

La demostración del teorema anterior se basa en el siguiente resultado de acotación para el operador maximal M_α.

TEOREMA 4.1.4. [**4**] *Dados* (X, F, ν)*,* α *y* T *como en el Teorema 4.1.3, luego el operador maximal* M_α *es de tipo débil restringido* $(1/\alpha, 1/\alpha)$*, es decir, existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\nu(\{x : M_\alpha f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^{1/\alpha}} ||f||_{1/\alpha,1}^{1/\alpha},$$

para todo $\lambda > 0$ *y toda* $f \in L(1/\alpha, 1)(\nu)$*.*

4.2. Promedios de Cesàro múltiples Ergódicos

En esta sección se definen y analizan los promedios ergódicos múltiples. En el libro de Dunford y Schwartz [**14**] se consideran los promedios ergódicos

$$\mathcal{R}_{\bar{n}} f(x) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} n_j} \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_k=0}^{n_k} T_1^{i_1} \cdots T_k^{i_k} f(x)$$

asociados a k operadores lineales T_i, $i = 1, \cdots, k$, para $\bar{n} = (n_1, \cdots, n_k)$. En [**14**] se prueba que si los operadores T_i son contracciones en $L^1(\nu)$ y en $L^\infty(\nu)$ luego, para toda $f \in L^p(\nu)$ con $1 < p < \infty$ los promedios $\mathcal{R}_{\bar{n}} f$ convergen (cuando $n_1, \cdots, n_k \to \infty$ independientemente) en casi todo punto y en la norma de $L^p(\nu)$. En el caso límite $p = 1$, con las mismas hipótesis en los T_i, $i = 1, \cdots, k$ que en [**14**] y suponiendo que todos los T_i son positivos, N. Fava demostró en [**17**] que los promedios $\mathcal{R}_{\bar{n}} f$ convergen en casi todo punto para toda función f en el espacio de

Orlicz $L^{\varphi_{k-1}}$ con $\varphi_k(t) = t(1 + \log^+ t)^k$.

En lo que sigue se extienden los resultados de [**14**] y [**17**] al caso de promedios ergódicos de tipo Cesàro múltiples.

Dado $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$, con $0 < \alpha_j \leq 1$, para $j = 1, \cdots, k$ y k operadores lineales $T_1, \cdots, T_k$, definimos los *promedios ergódico Cesàro-$\bar{\alpha}$ múltiples* como

$$\mathcal{R}_{\bar{n},\bar{\alpha}} f(x) = R_{n_1,\alpha_1} \circ \cdots \circ R_{n_k,\alpha_k} f(x) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} A_{n_j}^{\alpha_j}} \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_k=0}^{n_k} \prod_{j=1}^{k} A_{n_j - i_j}^{\alpha_j - 1} T_1^{i_1} \cdots T_k^{i_k} f(x)$$

y el operador maximal asociado

$$\mathcal{M}_{\bar{\alpha}} f(x) = \sup_{\bar{n}>0} |\mathcal{R}_{\bar{n},\bar{\alpha}} f(x)|,$$

donde $\bar{n} = (n_1, \cdots, n_k) > 0$ significa que $n_j > 0$ para todo $1 \leq j \leq k$. Claramente se verifica la siguiente estimación puntual

$$\mathcal{M}_{\bar{\alpha}} f(x) \leq M_{\alpha_1} \circ \cdots \circ M_{\alpha_k} f(x), \tag{4.2.1}$$

donde los operadores M_{α_i} son los operadores maximales correspondientes a los promedios ergódicos Cesàro-α_i asociados al operador T_i.

Los principales resultados de esta sección se encuentran en los siguientes dos teoremas.

TEOREMA 4.2.1. *Sea (X, F, ν) un espacio de medida σ- finito. Sea $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$, $0 < \alpha_j \leq 1$, para todo $i = 1, \cdots, k$, sea $\alpha_* = \min\limits_{1\leq j\leq k} \alpha_j$ y $p > 1/\alpha_*$. Sean T_j, $1 \leq j \leq k$, operadores de Lamperti invertibles sobre $L^p(\nu)$ que conmutan entre sí. Supongamos que para cada $j = 1, \cdots, k$*

$$\sup_{n\geq 0} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |T_j|_{\alpha_j}^k \right\|_{p\alpha_j} < \infty.$$

Luego,

(i) el operador $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ es de tipo fuerte (p, p) y

(ii) los promedios $\mathcal{R}_{\bar{n},\bar{\alpha}} f$ convergen para casi todo $x \in X$ y en la norma $L^p(\nu)$ para toda $f \in L^p(\nu)$, cuando $\bar{n}$ tiende a infinito.

TEOREMA 4.2.2. *Sea (X, F, ν) un espacio de medida σ- finito y $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$, $0 < \alpha_j \leq 1$, $j = 1, \cdots, k$. Sea $\alpha_* = \min\limits_{1\leq j\leq k} \alpha_j$ y supongamos que el mínimo α_* se alcanza en k de los números α_j. Sean T_j, $1 \leq j \leq k$, operadores de Lamperti invertibles sobre L^{1/α_j} que conmutan entre sí. Supongamos que para cada $j = 1, \cdots, k$*

$$\sup_{n\geq 0} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |T_j|_{\alpha_j}^k \right\|_1 < \infty$$

y

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} ||T_j^n||_\infty < \infty.$$

Luego,

(i) el operador $\mathcal{M}_{\bar\alpha}$ verifica la siguiente desigualdad

$$\nu(\{x \in X : \ \mathcal{M}_{\bar\alpha} f(x) > t\}) \leq \left(C\varphi_{k-1}(1/t) \int_0^\infty \varphi_{k-1}(f^*)(s) s^{\alpha_*-1}\, ds \right)^{1/\alpha_*},$$

donde $\varphi_k(t) = t(1+\log^+ t)^k$ y

(ii) los promedios $\mathcal{R}_{\bar n,\bar\alpha} f$ convergen para casi todo $x \in X$ y para toda $f \in \Lambda(1/\alpha_*, \varphi_{k-1})$, cuando $\bar n$ tiende a infinito.

Como herramienta para demostrar estos resultados utilizaremos las siguientes proposiciones, la primera de ellas probada en [**33**] y la segunda citada en [**7**] como consecuencia directa de un resultado probado en [**39**].

Proposición 4.2.3. [**33**] *Sea (X, F, ν) un espacio de medida σ- finito y T un operador invertible tal que T y T^{-1} son lineales y positivos sobre $L^p(\nu)$, $1 < p < \infty$, y*

$$\sup_{n\geq 0} \left|\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} T^k \right|\right|_p < \infty$$

luego, para cualquier r con $1 < r < \infty$ el operador $Q_{r,T}$ definido por

$$Q_{r,T} f = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (|k|+1)^{-r} |T^k f|^r \right]^{1/r}$$

está acotado en $L^p(\nu)$ con constante independiente de r.

Proposición 4.2.4. [**39**],[**7**] *Sea (X, F, ν) un espacio de medida σ- finito y T un operador invertible de Lamperti sobre $L^p(\nu)$, $1 < p < \infty$, tal que su módulo lineal $|T|$ satisface*

$$\sup_{n\geq 0} \left|\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |T|^k \right|\right|_p < \infty.$$

Luego, para cualquier $f \in L^p(\nu)$,

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} T^n f = 0$ en casi todo punto de X y en la norma de $L^p(\nu)$ y

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |T^k f| < \infty$ en casi todo punto de X.

Asimismo utilizaremos las siguientes propiedades de los números de Cesàro A_n^α con $\alpha > -1$ (ver por ejemplo [**45**]):

(C1) Los números A_n^α son positivos, crecientes (como función de n) para $\alpha > 0$ y decrecientes (como función de n) para $-1 < \alpha < 0$.

(C2) $A_n^\alpha - A_{n-1}^\alpha = \dfrac{\alpha}{n} A_{n-1}^\alpha$, para todo $n \geq 1$.

(C3) Existen constantes positivas C_1 y C_2 dependientes sólo de α tales que, para todo $n \geq 0$

$$C_1(n+1)^\alpha \leq A_n^\alpha \leq C_2(n+1)^\alpha.$$

Demostración del Teorema 4.2.1. (i) Sea $p > 1/\alpha_*$. Como los operadores T_j satisfacen las hipótesis del Teorema 4.1.2 con $\alpha = \alpha_j$ y $p > 1/\alpha_* \geq 1/\alpha_j$, tenemos que cada M_{α_j} está acotado en $L^p(\nu)$. Por lo tanto, a partir de la desigualdad (4.2.1) se tiene que el operador $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ está acotado en $L^p(\nu)$.

Para obtener la convergencia puntual de los promedios $\mathcal{R}_{\bar{n},\bar{\alpha}}$ estudiamos la convergencia de los mismos en un subespacio denso de $L^p(\nu)$. Teniendo en cuenta el Teorema 4.1.2 (ii) y las hipótesis en los operadores T_j, se sabe que los conjuntos

$$D_j = \{g + (h - T_j h) : g, h \in L^p,\ g = T_j g,\ h \text{ simple}\}$$

son densos en $L^p(\nu)$ para todo $j = 1, \cdots, k$.

Siguiendo las ideas de [**14**] probaremos la convergencia de los promedios $\mathcal{R}_{\bar{n},\bar{\alpha}} f$ para toda $f \in D_1$, por inducción en el número de operadores. Si $k = 1$ el resultado está probado en [**7**]. Ahora supongamos que el resultado es válido para $k-1$ operadores $T_2, \cdots, T_k$, es decir, para cualquier $f \in D_1$ existe el límite de $R_{n_k,\alpha_k} \circ \cdots \circ R_{n_2,\alpha_2} f(x)$ para casi todo $x \in X$ cuando $n_k, \cdots, n_2 \to \infty$. Por simplicidad de notación sea $S = R_{n_k,\alpha_k} \circ \cdots \circ R_{n_2,\alpha_2}$ y $S^* = M_{\alpha_k} \circ \cdots \circ M_{\alpha_2}$. Debemos probar que existe el límite $\lim\limits_{\bar{n}\to\infty} S \circ R_{n_1,\alpha_1} f(x)$ para casi todo $x \in X$ y para cualquier $f \in D_1$.

Sea $g \in L^p$ tal que $T_1 g = g$, luego

$$\mathcal{R}_{\bar{n},\bar{\alpha}} g(x) = R_{n_k,\alpha_k} \circ \cdots \circ R_{n_2,\alpha_2} g(x) = Sg(x)$$

y usando la hipótesis inductiva resulta que $R_{\bar{n},\bar{\alpha}} g(x)$ converge para casi todo $x \in X$ cuando $\bar{n} \to \infty$. Resta probar que $R_{\bar{n},\bar{\alpha}}(h - T_1 h)(x)$, con h simple, converge para casi todo $x \in X$ cuando $\bar{n} \to \infty$. Notemos que será suficiente estudiar la convergencia de $R_{\bar{n},\bar{\alpha}}(\chi_A - T_1\chi_A)(x)$ con A un subconjunto medible de X con $\nu(A) < \infty$. Al igual que en [**7**] p.395, reagrupando los términos y utilizando las propiedades de los números A_n^α resulta que

$$\begin{aligned}
&R_{n_1,\alpha_1}(\chi_A - T_1\chi_A)(x)\\
=\ & \sum_{i=0}^{n_1} \frac{A_{n_1-i}^{\alpha_1-1}}{A_{n_1}^{\alpha_1}} \left(T_1^i \chi_A(x) - T_1^{i+1}\chi_A(x)\right)\\
=\ & \frac{A_{n_1}^{\alpha_1-1}}{A_{n_1}^{\alpha_1}} \chi_A(x) - \frac{A_{n_1}^{\alpha_1-1}}{A_{n_1}^{\alpha_1}} T_1\chi_A(x) + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A_{n_1-i}^{\alpha_1-1}}{A_{n_1}^{\alpha_1}} T_1^i\chi_A(x) - \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A_{n_1-i}^{\alpha_1-1}}{A_{n_1}^{\alpha_1}} T_1^{i+1}\chi_A(x)\\
=\ & \frac{A_{n_1}^{\alpha_1-1}}{A_{n_1}^{\alpha_1}} \chi_A(x) - \frac{A_{n_1}^{\alpha_1-1}}{A_{n_1}^{\alpha_1}} T_1\chi_A(x) + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A_{n_1-i}^{\alpha_1-1}}{A_{n_1}^{\alpha_1}} T_1^i\chi_A(x) - \sum_{i=2}^{n_1+1} \frac{A_{n_1+1-i}^{\alpha_1-1}}{A_{n_1}^{\alpha_1}} T_1^i\chi_A(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A_{n_1}^{\alpha_1-1}}{A_{n_1}^{\alpha_1}}\chi_A(x) - \frac{1}{A_{n_1}^{\alpha_1}}T_1^{n_1+1}\chi_A(x) + \frac{1}{A_{n_1}^{\alpha_1}}\sum_{i=1}^{n_1}\left(A_{n_1-i}^{\alpha_1-1} - A_{n_1+1-i}^{\alpha_1-1}\right)T_1^i\chi_A(x) \\
&= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+n_1}\chi_A(x) - \frac{T_1^{n_1+1}\chi_A(x)}{A_{n_1}^{\alpha_1}} + \frac{1-\alpha}{A_{n_1}^{\alpha_1}}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{A_{n_1-i}^{\alpha_1-1}}{n_1+1-i}T_1^i\chi_A(x).
\end{aligned}
$$

Como los operadores T_j son lineales y conmutan entre sí, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\bar{n},\bar{\alpha}}(\chi_A - T_1\chi_A)(x) &= S\circ R_{n_1,\alpha_1}(\chi_A - T_1\chi_A)(x) \\
&= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+n_1}S\chi_A(x) - \frac{T_1^{n_1+1}(S\chi_A)(x)}{A_{n_1}^{\alpha_1}} \\
&\quad + \frac{1-\alpha_1}{A_{n_1}^{\alpha_1}}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{A_{n_1-i}^{\alpha_1-1}}{n_1+1-i}T_1^i(S\chi_A)(x) = A_{\bar{n}}(x) - B_{\bar{n}}(x) + C_{\bar{n}}(x).
\end{aligned}
$$

Dado que

$$|S(f)| \leq S^*(f) \leq S^*(Mf) \leq M_{\alpha_k}\circ\cdots\circ M_{\alpha_1},$$

se tiene que los operadores S y S^* están acotados en $L^p(\nu)$. Luego es claro que $\lim_{\bar{n}\to\infty} A_{\bar{n}}(x) = 0$ para casi todo $x \in X$.

Por otro lado, utilizando que $\frac{1}{A_{n_1}^{\alpha_1}} \leq \frac{C}{(n_1+1)^{\alpha_1}}$ y la notación $T_\alpha f = (T(f^\alpha))^{1/\alpha}$, para $f \geq 0$ se obtiene que

$$|B_{\bar{n}}(x)| \leq C\frac{|T_1|^{n_1+1}(|S\chi_A|)(x)}{(n_1+1)^{\alpha_1}} \leq C\left[\frac{|T_1|_{\alpha_1}^{n_1+1}(S^*\chi_A)^{1/\alpha_1}(x)}{n_1+1}\right]^{\alpha_1}.$$

Por hipótesis, el operador $|T_1|_{\alpha_1}$ tiene los promedios uniformemente acotados en $L^{p\alpha_1}(\nu)$, luego por la Proposición 4.2.4 tenemos que, para cualquier $f \in L^{p\alpha_1}$,

$$\frac{|T_1|_{\alpha_1}^{n_1+1}f}{n_1+1} \to 0,$$

cuando $n_1 \to \infty$. Ahora bien, como $S^*\chi_A \in L^p(\nu)$ y de aquí, $(S^*\chi_A)^{1/\alpha_1} \in L^{p\alpha_1}(\nu)$, tenemos que $B_{\bar{n}}(x) \to 0$ cuando $\bar{n} \to \infty$ para casi todo $x \in X$.

Finalmente resta analizar el término $C_{\bar{n}}(x)$. Como en [**7**] se definen los conjuntos $N_1 = \{i : 1 \leq i \leq \frac{n_1}{2}\}$ y $N_2 = \{i : \frac{n_1}{2} < i \leq n_1\}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
|C_{\bar{n}}(x)| &\leq \frac{1-\alpha_1}{A_{n_1}^{\alpha_1}}\sum_{i\in N_1}\frac{A_{n_1-i}^{\alpha_1-1}}{n_1+1-i}|T_1|^i(S^*\chi_A(x)) \\
&\quad + \frac{1-\alpha_1}{A_{n_1}^{\alpha_1}}\sum_{i\in N_2}\frac{A_{n_1-i}^{\alpha_1-1}}{n_1+1-i}|T_1|^i(S^*\chi_A(x)) = I + II.
\end{aligned}
$$

Para estimar I sea r tal que $1 < r < \infty$. Por la desigualdad de Hölder se tiene,

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{(1-\alpha_1)}{A_{n_1}^{\alpha_1}} \sum_{i\in N_1} \frac{(i+1)A_{n_1-i}^{\alpha_1-1}}{n_1+1-i}(i+1)^{-1}|T_1^i|(S^*\chi_A(x)) \\
&\leq C\left(\sum_{i\in N_1}\left(\frac{(i+1)A_{n_1-i}^{\alpha_1-1}}{A_{n_1}^{\alpha_1}(n_1+1-i)}\right)^{r'}\right)^{1/r'} \left(\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)^{-r}(|T_1|^i(S^*\chi_A(x)))^r\right)^{1/r}.
\end{aligned}
$$

Dado que para $p > 1/\alpha_* \geq 1/\alpha_1$

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{n_1+1}\sum_{i=0}^{n_1}|T_1|^i f\right\|_p &\leq \left\|\frac{1}{n_1+1}\sum_{i=0}^{n_1}\left(|T_1|^i|f|\right)^{1/\alpha_1}\right\|_{p\alpha_1}^{\alpha_1} \\
&\leq \left\|\frac{1}{n_1+1}\sum_{i=0}^{n_1}|T_1|_{\alpha_1}^i\left(|f|\right)^{1/\alpha_1}\right\|_{p\alpha_1}^{\alpha_1}.
\end{aligned}
$$

Luego, de la hipótesis en T_1 tenemos que

$$\sup_{n_1\geq 0}\left\|\frac{1}{n_1+1}\sum_{i=0}^{n_1}|T_1|^i\right\|_p < \infty.$$

Además, como $S^*\chi_A(x) \in L^p(\nu)$, por la Proposición 4.2.3 resulta que el segundo término en la acotación de I tiene norma $L^p(\nu)$ finita y por lo tanto es finito en casi todo punto.

Por otro lado,

$$\left(\sum_{i\in N_1}\left(\frac{(i+1)A_{n_1-i}^{\alpha_1-1}}{A_{n_1}^{\alpha_1}(n_1+1-i)}\right)^{r'}\right)^{1/r'} \leq Cn_1^{-1/r}.$$

En efecto, dado que $i \in N_1$, utilizando la propiedad (C3) de los números de Cesàro se tiene la siguiente estimación

$$\frac{(i+1)A_{n_1-i}^{\alpha_1-1}}{A_{n_1}^{\alpha_1}(n_1+1-i)} \leq \frac{(n_1+1)(n_1+1-i)^{\alpha_1-1}}{(n_1+1)^{\alpha_1}(n_1+1-i)} \leq \frac{C}{n_1}.$$

Por lo tanto,

$$\left(\sum_{i\in N_1}\left(\frac{(i+1)A_{n_1-i}^{\alpha_1-1}}{A_{n_1}^{\alpha_1}(n_1+1-i)}\right)^{r'}\right)^{1/r'} \leq C\left(\sum_{i\in N_1}\left(\frac{1}{n_1}\right)^{r'}\right)^{1/r'} \leq C\left(\frac{1}{n_1^{r'-1}}\right)^{1/r'} = Cn_1^{-1/r}.$$

Tomando límite cuando $\bar{n}$ tiende a infinito se obtiene que $I \to 0$.

Para analizar II se procede de la siguiente manera utilizando las propiedades de los números de Cesàro y la notación $T_\alpha = (Tf^\alpha)^{1/\alpha}$, para $f \geq 0$,

$$II = \frac{1-\alpha_1}{A_{n_1}^{\alpha_1}}\sum_{i\in N_2}\frac{A_{n_1-i}^{\alpha_1-1}}{n_1+1-i}|T_1|^i(S^*\chi_A(x))$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\sum_{i\in N_2}\frac{A^{\alpha_1-1}_{n_1-i}}{(n_1+1-i)(n_1+1)^{\alpha_1}}|T_1|^i(S^*\chi_A(x))\\
&\leq \frac{A^{\alpha_1-1}_0}{(n_1+1)^{\alpha_1}}|T_1|^{n_1}(S^*\chi_A(x))\\
&\quad +C\sum_{[\frac{n_1}{2}]+1}^{n_1-1}\frac{A^{\alpha_1-1}_{n_1-i}}{(n_1+1-i)(i_1+1)^{\alpha_1}}|T_1|^i(S^*\chi_A(x))\\
&\leq \frac{\left(|T_1|^{n_1}_{\alpha_1}(S^*\chi_A(x))^{1/\alpha_1}\right)^{\alpha_1}}{(n_1+1)^{\alpha_1}}\\
&\quad +C\sup_{n_1\in N; i>\frac{n_1}{2}}\left(\frac{|T_1|^{i_1}_{\alpha_1}(S^*\chi_A(x))^{1/\alpha_1}}{(i_1+1)}\right)^{\alpha_1}\sum_{[\frac{n_1}{2}]+1}^{n_1-1}\frac{A^{\alpha_1-1}_{n_1-i}}{n_1+1-i}=III+IV.
\end{aligned}
$$

Como en el caso de $B_{\bar{n}}(x)$ se tiene que III tiende a cero cuando $\bar{n}\to\infty$. Por otro lado,

$$
\sum_{[\frac{n_1}{2}]+1}^{n_1-1}\frac{A^{\alpha_1-1}_{n_1-i}}{n_1+1-i}\leq C\sum_{[\frac{n_1}{2}]+1}^{n_1-1}(n_1+1-i)^{\alpha_1-2}\leq C\sum_{j\geq 1}j^{(\alpha_1-2)}<\infty.
$$

Luego, aplicando nuevamente la Proposición 4.2.4 (i) al operador $|T_1|_{\alpha_1}$ se obtiene que $IV\to 0$ cuando $\bar{n}\to\infty$.
Finalmente, usando el Principio de Banach (ver por ejemplo [**1**], pág. 237) y el Teorema de la Convergencia Dominada tenemos probado el teorema. □

Demostración del Teorema 4.2.2. (i) De las hipótesis en los operadores T_j tenemos que cada operador M_{α_j} es de tipo débil restringido $(1/\alpha_j, 1/\alpha_j)$ y de tipo fuerte (∞,∞). Luego, de los resultados del Capítulo 1 y la desigualdad puntual (4.2.1) obtenemos la acotación (i) para el operador $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$.

(ii) En la prueba del Teorema 4.1.3 (pág.235) en [**4**] se prueba que por ser un operador de Lamperti, todo operador T que verifica las hipótesis del Teorema 4.1.4 también satisface las hipótesis del Teorema . Luego, aplicando este hecho a cada operador T_j tenemos que los operadores que estamos considerando están en las condiciones del Teorema 4.2.1. Sea $D=L^p(\nu)\cap\Lambda(1/\alpha_*,\varphi_{k-1})$, con $p>1/\alpha_*$. Claramente D es denso en $\Lambda(1/\alpha_*,\varphi_{k-1})$. Este hecho, unido al Teorema 4.2.1, permite obtener la convergencia de los promedios $\mathcal{R}_{\bar{n},\bar{\alpha}}f$ para casi todo $x\in X$ y para toda $f\in D$, y así lograr el resultado deseado. □

4.3. Transformada de Hilbert Ergódica en el sentido Cesàro

Sea (X, F, ν) un espacio de medida σ- finito y sea T un operador lineal invertible, la Transformada de Hilbert ergódica se define como

$$Hf = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{T^k f - T^{-k} f}{k} \right).$$

Usando la notación

$$H_{n,0} f = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{T^k f - T^{-k} f}{k} \right) = \sum_{1\leq |k| \leq n} \frac{T^k f}{k},$$

el siguiente resultado es debido a R. Sato [**37**].

Teorema 4.3.1. [**37**] *Sea T un operador invertible positivo sobre $L^p(\nu)$, $1 < p < \infty$ tal que $\sup\{||T^n||_p : -\infty < n < \infty\} = M < \infty$. Entonces,*

(i) el operador maximal, $H^* f(x) = \sup_{n\geq 1} |H_{n,0} f(x)|$ es acotado en $L^p(\nu)$.
(ii) la transformada de Hilbert ergódica $\lim_{n\to\infty} H_{n,0} f(x)$ existe para casi todo $x \in X$ y en la norma de $L^p(\nu)$.

Posteriormente, R. Sato probó en [**38**] que el resultado anterior se puede generalizar para T un operador de Lamperti.

La Transformada de Hilbert ergódica en el sentido Cesàro$-\beta$ con $-1 < \beta < 0$ se define como

$$H_\beta f = \lim_{n\to\infty} H_{n,\beta} f$$

cuando el límite exista, donde

$$H_{n,\beta} f = \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{k=1}^{n+1} A_{n+1-j}^\beta \left(\frac{T^k f - T^{-k} f}{k} \right) = \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{1\leq |k| \leq n+1} A_{n+1-|k|}^\beta \frac{T^k f}{k},$$

recordando que $A_n^\beta = \frac{(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{n!}$ y $A_0^\beta = 1$. Observar que esto significa existencia del límite de los promedios $H_{n,0} f$ en el sentido Cesaro-β.

En [**7**], se define la Transformada de Hilbert ergódica en el sentido Cesàro-β y obtienen condiciones que aseguran la existencia como lo dice el siguiente resultado.

Teorema 4.3.2. [**7**] *Sea (X, F, ν) un espacio de medida σ- finito, $-1 < \beta < 0$, $1/(1+\beta) < p < \infty$ y T un operador invertible de Lamperti sobre $L^p(\nu)$ tal que*

$$\sup_{n\geq 0} \left\| \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} |T|_{1+\beta}^k \right\|_{p(1+\beta)} < \infty. \tag{4.3.1}$$

Entonces, para toda $f \in L^p(\nu)$ existe

$$\lim_{n\to\infty} H_{n,\beta} f$$

en casi todo punto y en la norma de $L^p(\nu)$.

4.4. Transformada de Hilbert doble Ergódica

Dados T_1, T_2 dos operadores lineales invertibles que conmutan entre sí, definimos la Transformada de Hilbert ergódica doble como

$$\mathcal{H}f(x) = \lim_{\bar{n}\to\infty} H_{\bar{n}} f(x),$$

donde $H_{\bar{n}}$ son las truncaciones definidas como

$$H_{\bar{n}} f(x) = H_{n_1} \circ H_{n_2} f(x) = \sum_{1\leq|k_1|\leq n_1} \sum_{1\leq|k_2|\leq n_2} \frac{T_1^{k_1} T_2^{k_2} f(x)}{k_1 k_2},$$

y donde $\bar{n} \to \infty$ significa que $n_1, n_2 \to \infty$ independientemente.

Hasta donde sabemos este operador no fue estudiado previamente. Dado que los resultados de existencia del límite en este caso se derivarán de los resultados correspondientes al caso más general donde el límite se considera en el sentido de Cesàro, en esta sección se plantea sólo el estudio del operador maximal H^* definido como

$$H^* f(x) = \sup_{n_1,n_2\geq 1} |H_{\bar{n}} f(x)|,$$

dado que resulta una herramienta necesaria para el estudio del operador maximal en el contexto de Cesàro. Concretamente probaremos el siguiente teorema.

Teorema 4.4.1. *Sea (X, F, ν) un espacio de medida σ- finito y sean T_1, T_2 operadores positivos invertibles sobre $L^p(\nu)$, $1 < p < \infty$, que conmutan entre sí y tales que* $\sup\{||T_i^n||_p : n \in \mathbb{Z}\} = M < \infty$*. Entonces, existe $C > 0$ tal que*

$$\int_X |H^* f|^p \, d\nu \leq C \int_X |f|^p \, d\nu,$$

para toda $f \in L^p(\nu)$.

Para la prueba de este teorema es necesario hacer uso de algunos operadores que se definen a continuación y resultados relacionados con ellos.

Sea $a : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$, el operador

$$\mathrm{h}^* a(i_1, i_2) = \sup_{N_1>0, N_2>0} \left| \sum_{1\leq|j_1|\leq N_1} \sum_{1\leq|j_2|\leq N_2} \frac{a(i_1 + j_1, i_2 + j_2)}{j_1 j_2} \right|,$$

es el operador maximal asociado a las truncaciones de la transformada de Hilbert doble discreta. En el caso continuo, dicho operador se define como

$$\mathcal{H}^* f(x_1,x_2) = \sup_{\epsilon_1,\epsilon_2>0, M_1,M_2<\infty} \left| \int_{\epsilon_1<|x_1-y_1|<M_1} \int_{\epsilon_2<|x_2-y_2|<M_2} \frac{f(y_1,y_2)}{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}\, dy_2\, dy_1 \right|.$$

Usando la notación de la sección 2 del Capítulo 1, se denotará a los respectivos operadores maximales actuando sólo en una de las variables como

$$\mathrm{h}^{*,1}a(i_1,i_2) = \sup_{N_1>0} \left| \sum_{1\le|j_1|\le N_1} \frac{a(i_1+j_1,i_2)}{j_1} \right|, \quad \mathrm{h}^{*,2}a(i_1,i_2) = \sup_{N_2>0} \left| \sum_{1\le|j_2|\le N_1} \frac{a(i_1,i_2+j_2)}{j_2} \right|,$$

y, para $i=1,2$

$$\mathcal{H}^{*,i} f(x_1,x_2) = \sup_{\epsilon_i>0, M_i<\infty} \left| \int_{\epsilon_i<|x_i-y_i|<M_i} \frac{f(y_1,y_2)}{x_i-y_i}\, dy_i \right|.$$

Denotaremos con M al operador maximal de Hardy-Littlewood y con m al operador maximal de Hardy-Littlewood actuando sobre los enteros (discreto), es decir

$$ma(i_1,i_2) = \sup_{N_1,N_2>0} \frac{1}{(2N_1+1)(2N_2+1)} \sum_{|j_1|\le N_1} \sum_{|j_2|\le N_2} |a(i_1+j_1,i_2+j_2)|.$$

Al igual que se hizo para el operador maximal h^* y $\mathcal{H}^*$, utilizaremos M^i y m^i, $i=1,2$, para denotar a los operadores maximales M y m cuando actúan sólo sobre una de las variables.

La siguiente estimación puntual permitirá obtener la acotación del operador maximal de la transformada de Hilbert doble en los enteros, esto nos permitirá, vía un argumento de transferencia, probar el Teorema 4.4.1.

TEOREMA 4.4.2. *Sea (X,F,ν) un espacio de medida σ- finito. Dado $(i_1,i_2)\in\mathbb{Z}^2$, sea $J_k = (i_k-1/4, i_k+1/4)$, para $k=1,2$. Entonces*

$$\mathrm{h}^* a(i_1,i_2) \le C\left[\mathrm{M}^1\circ\mathcal{H}^{*,2} f(x_1,x_2) + m^2\circ \mathrm{h}^{*,1}a(i_1,i_2) + \mathcal{H}^* f(x_1,x_2)\right],$$

para todo $(x_1,x_2)\in J_1\times J_2$, donde $f(x_1,x_2)=a(i_1,i_2)$ cuando $(x_1,x_2)\in J_1\times J_2$ y $f(x_1,x_2)=0$ en el resto.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{a(i,j)\}_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ una sucesión de funciones de $\mathbb{Z}^2$ en $\mathbb{R}$ y sea $(i_1,i_2)\in\mathbb{Z}^2$. Consideremos una truncación de la transformada de Hilbert discreta doble fija

$$\mathrm{h}_{N_1,N_2}a(i_1,i_2) = \sum_{1\le|j_1|\le N_1} \sum_{1\le|j_2|\le N_2} \frac{a(i_1+j_1,i_2+j_2)}{j_1 j_2},$$

veamos que está acotada por la suma de operadores que establece el teorema con constante independiente de N_1 y N_2. La prueba es una adaptación a este contexto del resultado correspondiente al caso de la transformada de Hilbert en los enteros usual (ver [**35**]).

Como $f(y_1, y_2) = a(i_1 + j_1, i_2 + j_2)$ si $(y_1, y_2) \in (i_1 + j_1 - 1/4, i_1 + j_1 + 1/4) \times (i_2 + j_2 - 1/4, i_2 + j_2 + 1/4)$, si en cada intervalo $J_k = (i_k - 1/4, i_k + 1/4)$, $k = 1, 2$, consideramos $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1/2$, $M_1 = N_1 + 1/2$, $M_2 = N_2 + 1/2$ y $(x_1, x_2) \in J_1 \times J_2$ se tiene que la truncación continua se puede escribir como

$$\begin{aligned}
&\int_{\epsilon_1<|x_1-y_1|<M_1} \int_{\epsilon_2<|x_2-y_2|<M_2} \frac{f(y_1,y_2)}{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}\, dy_2\, dy_1 \\
(4.4.1) \qquad &= \sum_{1\le|j_1|\le N_1} \sum_{1\le|j_2|\le N_2} \int_{i_1+j_1-1/4}^{i_1+j_1+1/4} \int_{i_2+j_2-1/4}^{i_2+j_2+1/4} \frac{a(i_1+j_1, i_2+j_2)}{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}\, dy_2\, dy_1
\end{aligned}$$

La igualdad de verifica ya que f tiene soporte sólo en los cuadrados $(i_1 - 1/4, i_1 + 1/4) \times (i_2 - 1/4, i_2 + 1/4)$.

A continuación estimaremos la diferencia entre las truncaciones continuas y discretas. A partir de la igualdad (4.4.1), considerando a $I_1 = (i_1+j_1-1/4, i_1+j_1+1/4)$ e $I_2 = (i_2+j_2-1/4, i_2+j_2+1/4)$ se tiene

$$\begin{aligned}
&\int_{\epsilon_1<|x_1-y_1|<M_1} \int_{\epsilon_2<|x_2-y_2|<M_2} \frac{f(y_1,y_2)}{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}\, dy_2\, dy_1 - \frac{1}{4}\mathrm{h}_{N_1,N_2} a(i_1,i_2) \\
(4.4.2) \qquad &= \sum_{1\le|j_1|\le N_1} \sum_{1\le|j_2|\le N_2} a(i_1+j_1, i_2+j_2) \int_{I_1}\int_{I_2} \left[\frac{1}{(x_1-y_1)(x_2-y_2)} - \frac{1}{j_1 j_2}\right] dy_2\, dy_1.
\end{aligned}$$

Estimemos las integrales con la resta de los núcleos de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
&\int_{I_1}\int_{I_2} \left[\frac{1}{(x_1-y_1)(x_2-y_2)} - \frac{1}{j_1 j_2}\right] dy_2\, dy_1 \\
= &\int_{I_1}\int_{I_2} \left[\frac{1}{(x_1-y_1)(x_2-y_2)} - \frac{1}{j_1(x_2-y_2)} + \frac{1}{j_1(x_2-y_2)} - \frac{1}{j_1 j_2}\right] dy_2\, dy_1 \\
= &\int_{I_1}\int_{I_2} \frac{1}{x_2-y_2}\left[\frac{1}{x_1-y_1} - \frac{1}{j_1}\right] dy_2\, dy_1 + \int_{I_1}\int_{I_2} \frac{1}{j_1}\left[\frac{1}{x_2-y_2} - \frac{1}{j_2}\right] dy_2\, dy_1 \\
= &\left(\int_{I_2} \frac{dy_2}{x_2-y_2}\right)\left(\int_{I_1}\left(\frac{1}{x_1-y_1} - \frac{1}{j_1}\right) dy_1\right) + \left(\int_{I_1} \frac{dy_1}{j_1}\right)\left(\int_{I_2}\left(\frac{1}{x_2-y_2} - \frac{1}{j_2}\right) dy_2\right)
\end{aligned}$$

Reemplazando la igualdad anterior en la igualdad (4.4.2) se tiene

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\epsilon_1<|x_1-y_1|<M_1} \int_{\epsilon_2<|x_2-y_2|<M_2} \frac{f(y_1,y_2)}{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}\, dy_2\, dy_1 - \frac{1}{4}\mathrm{h}_{N_1,N_2} a(i_1,i_2)\right| \\
\le &\left|\sum_{1\le|j_1|\le N_1} \sum_{1\le|j_2|\le N_2} a(i_1+j_1, i_2+j_2)\left(\int_{I_1}\left(\frac{1}{x_1-y_1} - \frac{1}{j_1}\right) dy_1\right)\left(\int_{I_2} \frac{dy_2}{x_2-y_2}\right)\right| \\
&+\left|\sum_{1\le|j_1|\le N_1} \sum_{1\le|j_2|\le N_2} a(i_1+j_1, i_2+j_2)\frac{1}{2j_1}\left(\int_{I_2}\left(\frac{1}{x_2-y_2} - \frac{1}{j_2}\right) dy_2\right)\right| \\
= &\; I + II.
\end{aligned}$$

Sea $k=1,2$ notemos que como $i_k+j_k-1/4<y_k<i_k+j_k+1/4$ y $i_k-1/4<x_k<i_k+1/4$ entonces multiplicando por (-1) la desigualdad que involucra a x_k y luego sumando miembro a miembro ambas desigualdades resulta que $j_k-1/2<y_k-x_k<j_k+1/2$ con lo cual se tiene que

$$|(y_k-x_k)-j_k|<1/2. \tag{4.4.3}$$

Además, dado que $|j_k|\geq 1$, $k=1,2$ resulta que

$$\frac{|j_k|}{2}<|x_k-y_k|<2|j_k|. \tag{4.4.4}$$

En efecto, la primer desigualdad se obtiene del hecho que

$$|j_k|\leq |j_k-(x_k-y_k)|+|x_k-y_k|<1/2+|x_k-y_k|<\frac{|j_k|}{2}+|x_k-y_k|$$

mientras que la segunda desigualdad se tiene ya que

$$|y_k-x_k|\leq |(x_k-y_k)-j_k|+|j_k|<1/2+|j_k|<3/2|j_k|<2|j_k|.$$

Para acotar I veamos primero que para $y_1\in I_1$ y $x_1\in J_1$

$$\left|\frac{1}{(x_1-y_1)}-\frac{1}{j_1}\right|\leq\frac{1}{(x_1-y_1)^2}. \tag{4.4.5}$$

En efecto, a partir de las desigualdades (4.4.3) y (4.4.4) con $k=1$, se tiene que

$$\left|\frac{1}{x_1-y_1}-\frac{1}{j_1}\right|=\left|\frac{(y_1-x_1)-j_1}{(y_1-x_1)j_1}\right|\leq\frac{1}{2|x_1-y_1||j_1|}\leq\frac{1}{(x_1-y_1)^2}.$$

A partir de la estimación (4.4.5) se tiene que,

$$\begin{aligned}
I &= \left|\sum_{1\leq|j_1|\leq N_1}\sum_{1\leq|j_2|\leq N_2} a(i_1+j_1,i_2+j_2)\left(\int_{I_1}\left(\frac{1}{x_1-y_1}-\frac{1}{j_1}\right)dy_1\right)\left(\int_{I_2}\frac{dy_2}{y_2-x_2}\right)\right|\\
&= \left|\sum_{1\leq|j_1|\leq N_1}\sum_{1\leq|j_2|\leq N_2}\int_{I_1}\left(\frac{1}{x_1-y_1}-\frac{1}{j_1}\right)\int_{I_2}\frac{a(i_1+j_1,i_2+j_2)}{y_2-x_2}\,dy_2\,dy_1\right|\\
&= \left|\sum_{1\leq|j_1|\leq N_1}\int_{I_1}\left(\frac{1}{x_1-y_1}-\frac{1}{j_1}\right)\sum_{1\leq|j_2|\leq N_2}\int_{I_2}\frac{f(y_1,y_2)}{y_2-x_2}\,dy_2\,dy_1\right|\\
&\leq \sum_{1\leq|j_1|\leq N_1}\int_{I_1}\left|\frac{1}{x_1-y_1}-\frac{1}{j_1}\right|\left|\int_{\epsilon_2<|x_2-y_2|<M_2}\frac{f(y_1,y_2)}{y_2-x_2}\,dy_2\right|dy_1\\
&\leq \sum_{1\leq|j_1|\leq N_1}\int_{I_1}\left|\frac{1}{x_1-y_1}-\frac{1}{j_1}\right|\mathcal{H}^{*,2}f(y_1,x_2)\,dy_1\\
&\leq \int_{\epsilon_1<|x_1-y_1|<M_1}\frac{1}{(x_1-y_1)^2}\mathcal{H}^{*,2}f(y_1,x_2)\,dy_1\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k\epsilon_1<|x_1-y_1|<2^{k+1}M_1}\frac{\mathcal{H}^{*,2}f(y_1,x_2)}{(x_1-y_1)^2}\,dy_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k\epsilon_1)^2} \int_{|x_1-y_1|<2^{k+1}\epsilon_1} \mathcal{H}^{*,2} f(y_1,x_2)\, dy_1 \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k\epsilon_1} \mathrm{M}^1 \circ \mathcal{H}^{*,2} f(x_1,x_2) \\
&= C\mathrm{M}^1 \circ \mathcal{H}^{*,2} f(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

Para acotar II notemos primero que para $x_2 \in J_2$ y $y_2 \in I_2$,

$$\int_{I_2} \left| \frac{1}{y_2-x_2} - \frac{1}{j_2} \right| dy_2 \leq \frac{1}{j_2^2}.$$

En efecto, considerando $k=2$ en las desigualdades (4.4.3) y (4.4.4) se tiene que

$$\left| \frac{1}{y_2-x_2} - \frac{1}{j_2} \right| = \left| \frac{j_2-(y_2-x_2)}{(y_2-x_2)j_2} \right| < \frac{1}{2|y_2-x_2||j_2|} < \frac{1}{j_2^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
II &= \left| \sum_{1\leq|j_1|\leq N_1} \sum_{1\leq|j_2|\leq N_2} a(i_1+j_1,i_2+j_2)\frac{1}{j_1}\left(\int_{I_2}\left(\frac{1}{x_2-y_2}-\frac{1}{j_2}\right)dy_2\right)\right| \\
&\leq \sum_{1\leq|j_2|\leq N_2}\left(\int_{I_2}\left|\frac{1}{x_2-y_2}-\frac{1}{j_2}\right|dy_2\right)\left|\sum_{1\leq|j_1|\leq N_1}\frac{a(i_1+j_1,i_2+j_2)}{j_1}\right| \\
&\leq \sum_{1\leq|j_2|\leq N_2}\int_{I_2}\left|\frac{1}{x_2-y_2}-\frac{1}{j_2}\right|dy_2\, \mathrm{h}^{*,1}a(i_1,i_2+j_2) \\
&\leq \sum_{1\leq|j_2|\leq N_2}\frac{\mathrm{h}^{*,1}a(i_1,i_2+j_2)}{j_2^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{2^k\leq|j_2|<2^{k+1}}\frac{\mathrm{h}^{*,1}a(i_1,i_2+j_2)}{j_2^2} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{|j_2|<2^{k+1}}\mathrm{h}^{*,1}a(i_1,i_2+j_2)\right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(m^2\circ\mathrm{h}^{*,1}a(i_1,i_2)\right) \\
&= C\, m^2\circ\mathrm{h}^{*,1}a(i_1,i_2).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\epsilon_1<|x_1-y_1|<M_1}\int_{\epsilon_2<|x_2-y_2|<M_2}\frac{f(y_1,y_2)}{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}\,dy_2\,dy_1-\frac{1}{4}h_{N_1,N_2}a(i_1,i_2)\right| \\
&\qquad\leq C\left(\mathrm{M}^1\circ\mathcal{H}^{*,2}f(x_1,x_2)+m^2\circ\mathrm{h}^{*,1}a(i_1,i_2)\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|\mathrm{h}_{N_1,N_2}a(i_1,i_2)| \leq C\big(\mathrm{M}^1\circ\mathcal{H}^{*,2}f(x_1,x_2)+m^2\circ\mathrm{h}^{*,1}a(i_1,i_2))$$

$$+C\left|\int_{\epsilon_1<|x_1-y_1|<M_1}\int_{\epsilon_2<|x_2-y_2|<M_2}\frac{f(y_1,y_2)}{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}\,dy_2\,dy_1\right|$$
$$\leq\ C\left(\mathrm{M}^1\circ\mathcal{H}^{*,2}f(x_1,x_2)+m^2\circ \mathrm{h}^{*,1}a(i_1,i_2)+\mathcal{H}^*f(x_1,x_2)\right).$$

Finalmente, tomando supremo sobre $N_1, N_2 > 0$ obtenemos la desigualdad deseada. □

Esta desigualdad puntual permite concluír el siguiente resultado.

TEOREMA 4.4.3. *El operador maximal* h^* *es de tipo fuerte* (p,p) *con* $1 < p < \infty$*, es decir, existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$||\mathrm{h}^*a||_{l^p(\mathbb{Z}^2)} \leq C||a||_{l^p(\mathbb{Z}^2)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 4.4.2 resulta que

$$\begin{aligned}\sum_{i_1=-\infty}^{\infty}\sum_{i_2=-\infty}^{\infty}|\mathrm{h}^*a(i_1,i_2)|^p &\leq C\sum_{i_1=-\infty}^{\infty}\sum_{i_2=-\infty}^{\infty}|m^2\circ\mathrm{h}^{*,1}a(i_1,i_2)|^p\\ &+C\sum_{i_1=-\infty}^{\infty}\sum_{i_2=-\infty}^{\infty}\int_{J_1}\int_{J_2}(\mathrm{M}^1\circ\mathcal{H}^{*,2}f(x_1,x_2)+\mathcal{H}^*f(x_1,x_2))^p\,dx_2\,dx_1\end{aligned}$$

donde $J_1 = (i_1 - 1/4, i_1 + 1/4)$ e $J_2 = (i_2 - 1/4, i_2 + 1/4)$. Es conocido que tanto el operador maximal de Hardy-Littlewood, como el operador maximal asociado a las truncaciones de la Transformada de Hilbert, ambos en sus versiones continuas y discretas son operadores de tipo fuerte (p, p), para $1 < p < \infty$. También se sabe que las versiones de estos operadores correspondientes a tomar una función de dos variables (reales o enteras) y hacer actuar cualquiera de estos operadores en sólo una de esas variables, también resultan ser operadores de tipo fuerte (p, p), para $1 < p < \infty$. Usando además que $f(x_1, x_2) = a(i_1, i_2)$ cuando $(x_1, x_2) \in J_1 \times J_2$ y $f(x_1, x_2) = 0$ en el resto se tiene,

$$\begin{aligned}\sum_{i_1=-\infty}^{\infty}\sum_{i_2=-\infty}^{\infty}|\mathrm{h}^*a(i_1,i_2)|^p &\leq C||m^2\circ\mathrm{h}^{*,1}a||^p_{l^p(\mathbb{Z}^2)}+C\int_{\mathbb{R}^2}|M^1\circ\mathcal{H}^{*,2}f(x)|^p\,dx+C\int_{\mathbb{R}^2}|\mathcal{H}^*f(x)|^p\,dx\\ &= C||a||^p_{l^p(\mathbb{Z}^2)}+C||f||^p_{L^p(\mathbb{R}^2)}\leq C||a||^p_{l^p(\mathbb{Z}^2)},\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se verifica pues

$$||f||^p_{L^p(\mathbb{R}^2)}=\int\int_{\mathbb{R}^2}|f(x_1,x_2)|^p\,dx_1\,dx_2=\sum_{i_1\in\mathbb{Z}}\sum_{i_2\in\mathbb{Z}}\frac{1}{4}|a(i_1,i_2)|^p=\frac{1}{4}||a||^p_{l^p(\mathbb{Z}^2)}.$$

□

La acotación del operador maximal de la Trasformada de Hilbert discreta y el clásico método de transferencia permitirá obtener el correspondiente resultado de acotación para el operador maximal asociado a la transformada de Hilbert ergódica doble.

Demostración del Teorema 4.4.1. Sea $\bar{L} = (L_1, L_2)$ con L_1, L_2 enteros y $L_1, L_2 \geq 1$ definimos el operador maximal truncado $H^*_{\bar{L}}$ como

$$H^*_{\bar{L}}f(x) = H^*_{L_1,L_2}f(x) = \sup_{1\leq N_i\leq L_i, i=1,2}\left|\sum_{1\leq|j_1|\leq N_1}\sum_{1\leq|j_2|\leq N_2}\frac{T_1^{j_1}T_2^{j_2}f(x)}{j_1j_2}\right|.$$

Dado que los operadores T_1 y T_2 son positivos y conmutan entre resulta que

$$H^*_{\bar{L}}(T_1^{i_1}T_2^{i_2}f(x)) \leq T_1^{i_1}T_2^{i_2}(H^*_{\bar{L}}f(x)).$$

Si reemplazamos f por $T_1^{-i_1}T_2^{-i_2}f$ se tiene que

$$H^*_{\bar{L}}f(x) \leq T_1^{i_1}T_2^{i_2}(H^*_{\bar{L}}(T_1^{-i_1}T_2^{-i_2}f(x))).$$

Luego, de la hipótesis de acotación para los operadores T_1 y T_2, se tiene

$$\begin{aligned}\int_X |H^*_{\bar{L}}f|^p\,d\nu &\leq \frac{1}{M_1M_2}\sum_{i_1=1}^{M_1}\sum_{i_2=1}^{M_2}\int_X |T_1^{i_1}T_2^{i_2}(H^*_{\bar{L}}(T_1^{-i_1}T_2^{-i_2}f))|^p\,d\nu\\ &\leq \frac{C}{M_1M_2}\sum_{i_1=1}^{M_1}\sum_{i_2=1}^{M_2}\int_X |H^*_{\bar{L}}(T_1^{-i_1}T_2^{-i_2}f)|^p\,d\nu. \qquad (4.4.6)\end{aligned}$$

Por otro lado, sea $x = (x_1, x_2)$ fijo, $f_x(i,j) = T_1^iT_2^jf(x)$ y $\mathcal{R} = [-L-M_1, L]\times[-L-M_2, L]$. Luego,

$$\begin{aligned}&H^*_{\bar{L}}(T_1^{-i_1}T_2^{-i_2}f)(x)\\ &= \sup_{1\leq N_i\leq L_i, i=1,2}\left|\sum_{1\leq|j_1|\leq N_1}\sum_{1\leq|j_2|\leq N_2}\frac{T_1^{j_1}T_2^{j_2}(T_1^{-i_1}T_2^{-i_2}f)(x)}{j_1j_2}\right|\\ &= \sup_{1\leq N_i\leq L_i, i=1,2}\left|\sum_{1\leq|j_1|\leq N_1}\sum_{1\leq|j_2|\leq N_2}\frac{T_1^{j_1-i_1}T_2^{j_2-i_2}f(x)}{j_1j_2}\right|\\ &\leq \sup_{1\leq N_i\leq L_i, i=1,2}\left|\sum_{1\leq|j_1|\leq N_1}\sum_{1\leq|j_2|\leq N_2}\frac{f_x(j_1-i_1, j_2-i_2)}{j_1j_2}\chi_{\mathcal{R}}(j_1-i_1, j_2-i_2)\right|\\ &\leq \mathrm{h}^*(f_x\chi_{\mathcal{R}})(-i_1,-i_2).\end{aligned}$$

Reemplazando la desigualdad de arriba en (4.4.6) y el usando el hecho que h^* es de tipo fuerte (p,p), resulta

$$\begin{aligned}\int_X |H^*_L f(x)|^p\,d\nu &\leq \frac{C}{M_1M_2}\sum_{i_1=0}^{M_1}\sum_{i_2=0}^{M_2}\int_X |H^*_L(T^{-i_1}T^{-i_2}f(x))|^p\,d\nu(x)\\ &\leq \frac{C}{M_1M_2}\sum_{i_1=0}^{M_1}\sum_{i_2=0}^{M_2}\int_X |\mathrm{h}^*(f_x\chi_{\mathcal{R}})(-i_1,-i_2)|^p\,d\nu(x)\\ &\leq \frac{C}{M_1M_2}\int_X\sum_{i_1=-\infty}^{\infty}\sum_{i_2=-\infty}^{\infty}|\mathrm{h}^*(f_x\chi_{\mathcal{R}})(-i_1,-i_2)|^p\,d\nu(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{M_1M_2}\int_X \sum_{i_1=-\infty}^{\infty}\sum_{i_2=-\infty}^{\infty} |f_x\chi_{\mathcal{R}})(i_1,i_2)|^p\,d\nu(x)\\
&= \frac{C}{M_1M_2}\int_X \sum_{i_1=-L-M_1}^{L}\sum_{i_2=-L-M_2}^{L} |T_1^{i_1}T_2^{i_2}f(x)|^p\,d\nu(x)\\
&\leq \frac{C(M_1+2L+1)(M_2+2L+1)}{M_1M_2}\int_X |f(x)|^p\,d\nu(x).
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $(M_1,M_2)\to(\infty,\infty)$ resulta

$$\int_X |H_L^*f(x)|^p\,d\nu(x)\leq C\int_X |f(x)|^p\,d\nu(x).$$

Finalmente, aplicando el Teorema de la Convergencia Monótona se obtiene el resultado deseado. □

4.5. Transformada de Hilbert doble Ergódica en el sentido Cesàro

Sean T_1 y T_2 operadores lineales e invertibles que conmutan entre sí y dados $-1<\beta_1,\beta_2<0$ se define la transformada de Hilbert ergódica doble en el sentido Cesàro como

$$\mathcal{H}_{\bar\beta}f(x)=\lim_{\bar n\to\infty} H_{\bar n\bar\beta}f(x)$$

donde $H_{\bar n,\bar\beta}$ son las truncaciones definidas como

$$H_{\bar n,\bar\beta}f(x)=H_{n_1,\beta_1}\circ H_{n_2,\beta_2}f(x)=\frac{1}{\prod_{i=1}^2 A_{n_i}^{\beta_i}}\sum_{1\leq|k_1|\leq n_1+1}\sum_{1\leq|k_2|\leq n_2+1}\prod_{i=1}^{2}A_{n_i+1-|k_i|}^{\beta_i}\frac{T_1^{k_1}\circ T_2^{k_2}f(x)}{k_1k_2}.$$

Para enunciar el siguiente lema, que nos permitirá obtener la acotación del operador maximal ergódico $H_{\bar\beta}^*=\sup_{n_1,n_2\geq 1}|H_{\bar n,\bar\beta}|$, utilizaremos la siguiente notación: $M_{1+\beta,S}$ será el operador maximal ergódico Cesàro-$(1+\beta)$ asociado al operador S, es decir,

$$M_{1+\beta,S}f(x)=\sup_{n\geq 0}\left|\frac{1}{A_n^{1+\beta}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\beta}S^kf(x)\right|.$$

Además H_S^* denotará el operador maximal de la transformada de Hilbert ergódica asociada al operador S, mientras que H_0^* es el operador maximal de la transformada de Hilbert ergódica doble asociada a los operadores T_1 y T_2.

Lema 4.5.1. *Dado $\bar\beta=(\beta_1,\beta_2)$ con $-1<\beta_1,\beta_2<0$, sean T_1 y T_2 operadores lineales positivos invertibles con inversos positivos sobre L^p que conmutan entre sí, existe una constante C tal que*

$$\begin{aligned}
H_{\bar\beta}^*f(x) \;\leq\; & C\big[M_{1+\beta_1,T_1}\circ M_{1+\beta_2,T_2}|f|f(x)+M_{1+\beta_1,T_1}\circ M_{1+\beta_2,T_2^{-1}}|f|(x)\\
&+M_{1+\beta_1,T_1^{-1}}\circ M_{1+\beta_2,T_2}|f|(x)+M_{1+\beta_1,T_1^{-1}}\circ M_{1+\beta_2,T_2^{-1}}|f|(x)\\
&+H_0^*f(x)+M_{1+\beta_2,T_2}\circ H_{T_1}^*f(x)+M_{1+\beta_2,T_2^{-1}}\circ H_{T_1}^*f(x)
\end{aligned}$$

$$+M_{1+\beta_1,T_1} \circ H^*_{T_2} f(x) + M_{1+\beta_1,T_1^{-1}} \circ H^*_{T_2} f(x)\big].$$

Demostración. Para el caso de un único operador T, en [**7**] escriben a la truncación asociada a la transformada de Hilbert en el sentido Cesàro-β de la siguiente manera: si $N_1 = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n/2\}$ y $N_2 = \{k \in \mathbb{N} : n/2 < k \leq n+1\}$,

$$\begin{aligned}
H^T_{n,\beta} f(x) &= \frac{1}{A^\beta_n} \sum_{1\leq |k| \leq n+1} A^\beta_{n+1-k} \frac{T^k f(x)}{k} \\
&= \frac{1}{A^\beta_n} \sum_{k=1}^{n+1} A^\beta_{n+1-k} \left(\frac{T^k f(x) - T^{-k} f(x)}{k} \right) \\
&= \sum_{k\in N_1} \left(\frac{A^\beta_{n+1-k}}{A^\beta_n} - 1 \right) \left(\frac{T^k f(x) - T^{-k} f(x)}{k} \right) + \sum_{k \in N_1} \frac{T^k f(x) - T^{-k} f(x)}{k} \\
&\quad + \sum_{k\in N_2} \frac{A^\beta_{n+1-k}}{A^\beta_n} \left(\frac{T^k f(x) - T^{-k} f(x)}{k} \right) \\
&= A^T_n f(x) + B^T_n f(x) + C^T_n f(x).
\end{aligned}$$

Claramente, $B^T_n f(x) = H_{[n/2],T} f(x)$. Por otro lado, en [**7**] los autores prueban que

$$|A^T_n f(x)| \leq C \left[M_{|T|}(|f|)(x) + M_{|T|^{-1}}(|f|)(x) \right], \tag{4.5.1}$$

donde $|T|$ es el módulo lineal de T y

$$|C^T_n f(x)| \leq C \left[M_{1+\beta,|T|}(|f|)(x) + M_{1+\beta,|T|^{-1}}(|f|)(x) \right]. \tag{4.5.2}$$

Notemos que separando de la misma forma las sumas en $H_{\bar\beta,\bar n}$, utilizando conjuntos del tipo N_1 y N_2 y dado que los operadores T_1 y T_2 conmutan entre sí, tenemos que

$$\begin{aligned}
H_{\bar n,\bar\beta} f(x) &= H^{T_1}_{n_1,\beta_1} \circ H^{T_2}_{n_2,\beta_2} f(x) \\
&= H^{T_1}_{n_1,\beta_1} (A^{T_2}_{n_2} f(x) + B^{T_2}_{n_2} f(x) + C^{T_2}_{n_2} f(x)) \\
&= A^{T_1}_{n_1} \circ A^{T_2}_{n_2} f(x) + A^{T_1}_{n_1} \circ B^{T_2}_{n_2} f(x) + A^{T_1}_{n_1} \circ C^{T_2}_{n_2} f(x) \\
&\quad + A^{T_2}_{n_2} \circ B^{T_1}_{n_1} f(x) + B^{T_1}_{n_1} \circ B^{T_2}_{n_2} f(x) + C^{T_2}_{n_2} \circ B^{T_1}_{n_1} f(x) \\
&\quad + C^{T_1}_{n_1} \circ A^{T_2}_{n_2} f(x) + C^{T_1}_{n_1} \circ B^{T_2}_{n_2} + C^{T_1}_{n_1} \circ C^{T_2}_{n_2} f(x).
\end{aligned}$$

Claramente

$$B^{T_1}_{n_1} \circ B^{T_2}_{n_2} f(x) = H_{[n_1/2],T_1} \circ H_{[n_2/2],T_2} f(x) \leq H^*_{\bar 0} f(x).$$

Por otro lado, aplicando la estimación (4.5.1) y dado que los operadores son positivos, se tiene que

$$\begin{aligned}
|A^{T_1}_{n_1} \circ A^{T_2}_{n_2} f(x)| &\leq C[M_{T_1}(|A_{n_2} f|(x)) + M_{T_1^{-1}}(|A_{n_2} f|(x))] \\
&\leq C[M_{T_1} \circ M_{T_2}(|f|)(x) + M_{T_1} \circ M_{T_2^{-1}}(|f|)(x) \\
&\quad + M_{T_1^{-1}} \circ M_{T_2}(|f|)(x) + M_{T_1^{-1}} \circ M_{T_2^{-1}}(|f|)(x).
\end{aligned}$$

Como $M_S(|f|) \leq CM_{1+\beta,S}(|f|)$ para cualquier $-1<\beta<0$ (ver [**7**]) tenemos acotado el valor absoluto del sumando $A^{T_1}_{n_1} \circ A^{T_2}_{n_2} f(x)$ por la suma de los cuatro términos del tipo $M_{1+\beta_1,S_1} \circ M_{1+\beta_2,S_2}(|f|)(x)$ considerando todos las posibilidades de $S_i = T_i, T_i^{-1}$, $i=1,2$. Análogamente, los términos $A^{T_1}_{n_1} \circ C^{T_2}_{n_2} f(x)$, $C^{T_1}_{n_1} \circ A^{T_2}_{n_2} f(x)$ y $C^{T_1}_{n_1} \circ C^{T_2}_{n_2} f(x)$ resultan acotados por la misma suma de operadores. Finalmente,

$$\begin{aligned} |A^{T_1}_{n_1} \circ B^{T_2}_{n_2} f(x)| &= |A^{T_1}_{n_1}(H_{[n_2/2],T_2} f)(x)| \\ &\leq C\left(M_{T_1} \circ H^*_{T_2} f(x) + M_{T_1^{-1}} \circ H^*_{T_2} f(x)\right) \\ &\leq C\left(M_{1+\beta_1,T_1} \circ H^*_{T_2} f(x) + M_{1+\beta_1,T_1^{-1}} \circ H^*_{T_2} f(x)\right), \end{aligned}$$

y de forma similar se acotan los términos $C^{T_1}_{n_1} \circ B^{T_2}_{n_2} f(x)$, $A^{T_2}_{n_2} \circ B^{T_1}_{n_1} f(x)$ y $C^{T_2}_{n_2} \circ B^{T_1}_{n_1} f(x)$. $\square$

Como una consecuencia de este último resultado tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 4.5.2. *Dado $\bar\beta = (\beta_1,\beta_2)$ con $-1<\beta_1,\beta_2<0$, $1/(1+\beta_*) < p < \infty$ donde $\beta_* = \text{mín}\{\beta_1,\beta_2\}$ y sean T_1, T_2 operadores lineales positivos invertibles con inversos positivos sobre L^p que conmutan entre sí y tales que $\sup\{||T_i^n||_p : n \in \mathbb{Z}\} = M < \infty$, $i=1,2$. Luego, existe una constante C tal que*

$$\int_X |H^*_{\bar\beta} f|^p \, d\nu \leq C \int_X |f|^p \, d\nu$$

para toda $f \in L^p(\nu)$.

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que la hipótesis de acotación uniforme de las normas en L^p para las potencias de los operadores T_1, T_2 y sus inversos, implica la hipótesis en el Teorema 4.2.1 para cada T_i y sus inversos con $\alpha_i = 1+\beta_i$. En efecto, por ejemplo para T_1 tenemos que

$$\left|\left|\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} |T_1|^i_{1+\beta_1} f\right|\right|_{p(1+\beta_1)} \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} ||T_1^i(|f|^{1+\beta_1})||_p^{1/(1+\beta_1)} \leq M^{1/(1+\beta_1)} ||f||_{p(1+\beta_1)}.$$

Luego, los operadores $M_{1+\beta_i,T_i}$ y $M_{1+\beta_i,T_i^{-1}}$, $i=1,2$, están acotados en $L^p(\nu)$ para $p>1/\beta_*$. Por otro lado, el Teorema 4.3.1 dice que los operadores $H^*_{T_1}$ y $H^*_{T_2}$ están acotados en $L^p(\nu)$. Finalmente, el Teorema 4.4.1 provee la acotación de $H^*_{\bar 0}$. Por lo tanto, como consecuencia de estas observaciones y del Lema 4.5.1 se obtiene el resultado deseado. $\square$

El siguiente resultado nos da un espacio de funciones para el cual existe la Transformada de Hilbert ergódica doble en el sentido de Cesàro y como caso particular (caso $\beta_1=\beta_2=0$) obtenemos la existencia de la Transformada de Hilbert ergódica doble.

TEOREMA 4.5.3. *Sea (X,F,ν) un espacio de medida σ- finito, $\bar\beta = (\beta_1,\beta_2)$, $-1<\beta_1,\beta_2 \leq 0$ y $p > 1/(1+\beta_*)$, donde $\beta_* = \text{mín}\{\beta_1,\beta_2\}$. Sean T_1 y T_2 operadores lineales positivos invertibles con inversos positivos sobre L^p que conmutan entre sí y tales que $\sup\{||T_i^n||_p : n \in \mathbb{Z}\} = M < \infty$. Entonces, el límite*

$$\mathcal{H}_{\bar\beta} f(x) = \lim_{\bar n \to \infty} H_{\bar n,\bar\beta} f(x)$$

existe en casi todo punto y en la norma de $L^p(\nu)$, para toda $f \in L^p(\nu)$.

Demostración. Para probar este resultado es suficiente demostrar la acotación en $L^p(\nu)$ para $p > 1/(1+\beta_*)$ del operador maximal $H^*_{\bar{\beta}}$ y la convergencia en un subconjunto denso de $L^p(\nu)$. Teniendo en cuenta lo probado en el Teorema 4.5.2, resta ver la convergencia de las truncaciones $H_{\bar{n},\bar{\beta}}f$ en un conjunto denso de $L^p(\nu)$. El conjunto denso a utilizar será

$$D_1 = \{g + (h - T_1 h) : g, h \in L^p, g = T_1 g, h \text{ simple}\}.$$

Para g tal que $g = T_1 g$, es claro que $\mathcal{H}_{\bar{n},\bar{\beta}} g(x) = 0$, pues $H_{n_1,\beta_1} g(x) = 0$. Por otra parte sea h simple luego $h \in L^p \cap L^\infty$, como los operadores T_1 y T_2 conmutan, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\bar{n},\bar{\beta}}(h - T_1 h)(x) &= H_{n_2,\beta_2} \circ H_{n_1,\beta_1}(h - T_1 h)(x) \\
&= H_{n_1,\beta_1}(H_{n_2,\beta_2} h(x) - T_1 H_{n_2,\beta_2} h(x)) \\
&= \frac{1}{A^{\beta_1}_{n_1}} \sum_{1 \le |k_1| \le n_1+1} A^{\beta_1}_{n_1+1-|k_1|} \frac{T_1^{k_1}(H_{n_2,\beta_2} h - T_1 H_{n_2,\beta_2} h)(x)}{k_1} \\
&= \frac{1}{A^{\beta_1}_{n_1}} \sum_{k_1=1}^{n_1+1} \frac{A^{\beta_1}_{n_1+1-k_1}}{k_1} [T_1^{k_1}(H_{n_2,\beta_2} h(x) - T_1 H_{n_2,\beta_2} h(x)) \\
&\quad - T_1^{-k_1}(H_{n_2,\beta_2} h(x) - T_1 H_{n_2,\beta_2} h(x))] \\
&= \frac{1}{A^{\beta_1}_{n_1}} \sum_{k_1=1}^{n_1+1} \frac{A^{\beta_1}_{n_1+1-k_1}}{k_1} (T_1^{k_1} H_{n_2,\beta_2} h(x) + T_1^{-k_1+1} H_{n_2,\beta_2} h(x)) \\
&\quad - \frac{1}{A^{\beta_1}_{n_1}} \sum_{k_1=1}^{n_1+1} \frac{A^{\beta_1}_{n_1+1-k_1}}{k_1} (T_1^{k_1+1} H_{n_2,\beta_2} h(x) + T_1^{-k_1} H_{n_2,\beta_2} h(x)).
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{A^{\beta_1}_{n_1}} \sum_{k_1=1}^{n_1+1} \frac{A^{\beta_1}_{n_1+1-k_1}}{k_1} (T_1^{k_1} H_{n_2,\beta_2} h(x) + T_1^{-k_1+1} H_{n_2,\beta_2} h(x)) \\
= \;& T_1^{k_1} H_{n_2,\beta_2} h(x) + H_{n_2,\beta_2} h(x) + \frac{1}{A^{\beta_1}_{n_1}} \sum_{k_1=2}^{n_1+1} \frac{A^{\beta_1}_{n_1+1-k_1}}{k_1} (T_1^{k_1} H_{n_2,\beta_2} h(x) + T_1^{-k_1+1} H_{n_2,\beta_2} h(x)) \\
= \;& T_1^{k_1} H_{n_2,\beta_2} h(x) + H_{n_2,\beta_2} h(x) + \frac{1}{A^{\beta_1}_{n_1}} \sum_{j_1=1}^{n_1} \frac{A^{\beta_1}_{n_1-j_1}}{j_1+1} (T_1^{j_1+1} H_{n_2,\beta_2} h(x) + T_1^{-j_1} H_{n_2,\beta_2} h(x)).
\end{aligned}$$

Luego, usando la igualdad anterior resulta que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\bar{n},\bar{\beta}}(h - T_1 h)(x) &= H_{n_2,\beta_2} h(x) + T_1 H_{n_2,\beta_2} h(x) \\
&\quad - \frac{1}{A^{\beta_1}_{n_1}(n_1+1)} \Big(T_1^{n_1+2} H_{n_2,\beta_2} h(x) + T_1^{-n_1-1} H_{n_2,\beta_2} h(x) \Big) \\
&\quad + \frac{1}{A^{\beta_1}_{n_1}} \sum_{k_1=1}^{n_1} \left(\frac{A^{\beta_1}_{n_1-k_1}}{k_1+1} - \frac{A^{\beta_1}_{n_1-k_1+1}}{k_1} \right) \Big(T_1^{k_1+1} H_{n_2,\beta_2} h(x) - T_1^{-k_1} H_{n_2,\beta_2} h(x) \Big)
\end{aligned}$$

$$= \quad H_{n_2,\beta_2}h(x) + H_{n_2,\beta_2}T_1 h(x) - \tilde{B}_{\bar{n}}(x) + \tilde{C}_{\bar{n}}(x).$$

Como se hizo en la demostración del Teorema 4.5.2 es fácil ver que la hipótesis de acotación uniforme de las normas en $L^p(\nu)$ para las potencias de T_1, T_2 y sus inversos implica la hipótesis (4.3.1) del Teorema 4.3.2 para cada T_i y sus inversos con $\beta = \beta_i$. Luego, como h y $T_1 h$ pertenecen a $L^p(\nu)$, el Teorema 4.3.2 garantiza la existencia de los límites

$$\lim_{n_2\to\infty} H_{n_2,\beta_2}h(x) \quad \text{y} \quad \lim_{n_2\to\infty} H_{n_2,\beta_2}T_1 h(x)$$

para casi todo $x \in X$. Por otro lado, dado que T_1 es positivo, de la propiedad $(C3)$ de los números A_n^β tenemos que

$$|\tilde{B}_{\bar{n}}(x)| \leq C\left[\frac{T_1^{n_1+2}(H^*_{\beta_2}h)(x)}{(n_1+1)^{1+\beta_1}} + \frac{T_1^{-n_1-1}(H^*_{\beta_2}h)(x)}{(n_1+1)^{1+\beta_1}}\right].$$

De las hipótesis en T_2 sabemos que $||H^*_{\beta_2}h||_p \leq C||h||_p$. Siguiendo las ideas de [**37**] y usando las hipótesis en T_1 y T_1^{-1} tenemos que para $p > 1/(1+\beta_*)$

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{(n_1+1)^{(1+\beta_1)p}}\left([T_1^{n_1+2}(H^*_{\beta_2}h)]^p + [T_1^{-n_1-1}(H^*_{\beta_2}h)]^p\right)\right\|_1 \\
&\leq CM^p||h||_p^p\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{(n_1+1)^{(1+\beta_1)p}} < \infty.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{(n_1+1)^{(1+\beta_1)p}}\left([T_1^{n_1+2}(H^*_{\beta_2}h)(x)]^p + [T_1^{-n_1-1}(H^*_{\beta_2}h)(x)]^p\right) < \infty$$

para casi todo $x \in X$ y, consecuentemente,

$$\lim_{n_1\to\infty}\frac{1}{(n_1+1)^{(1+\beta_1)}}\left([T_1^{n_1+2}(H^*_{\beta_2}h)(x)] + [T_1^{-n_1-1}(H^*_{\beta_2}h)(x)]\right) = 0$$

para casi todo $x \in X$ y de aquí $\lim_{\bar{n}\to\infty}\tilde{B}_{\bar{n}}(x) = 0$ para casi todo $x \in X$.

Para estudiar el término $\tilde{C}_{\bar{n}}$, como en [**7**], sean $N_1 = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n_1/2\}$ y $N_2 = \{k \in \mathbb{N} : n_1/2 < k \leq n_1 + 1\}$. Luego

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{\bar{n}}(x) &= \sum_{k_1\in N_1}\left[\frac{1}{A_{n_1}^{\beta_1}}\left(\frac{A_{n_1-k_1}^{\beta_1}}{k_1+1} - \frac{A_{n_1-k_1+1}^{\beta_1}}{k_1}\right) + \frac{1}{k_1(k_1+1)}\right]\left(T_1^{k_1+1}(H_{n_2,\beta_2}h(x)) - T_1^{-k_1}(H_{n_2,\beta_2}h(x))\right) \\
&\quad - \sum_{k_1\in N_1}\frac{1}{k_1(k_1+1)}\left(T_1^{k_1+1}(H_{n_2,\beta_2}h(x)) - T_1^{-k_1}(H_{n_2,\beta_2}h(x))\right) \\
&\quad + \frac{1}{A_{n_1}^{\beta_1}}\sum_{k_1\in N_2, k_1\leq n_1}\left(\frac{A_{n_1-k_1}^{\beta_1}}{k_1+1} - \frac{A_{n_1-k_1+1}^{\beta_1}}{k_1}\right)\left(T_1^{k_1+1}(H_{n_2,\beta_2}h(x)) - T_1^{-k_1}(H_{n_2,\beta_2}h(x))\right) \\
&= I - II + III.
\end{aligned}$$

De la propiedad $(C2)$ de los números A_n^β tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{A_{n_1-k_1}^{\beta_1}}{k_1+1} - \frac{A_{n_1-k_1+1}^{\beta_1}}{k_1} &= A_{n_1-k_1}^{\beta_1}\left(\frac{1}{k_1+1} - \frac{1}{k_1}\right) + \frac{1}{k_1}\left(A_{n_1-k_1}^{\beta_1} - A_{n_1-k_1+1}^{\beta_1}\right) \\
&= -\frac{A_{n_1-k_1}^{\beta_1}}{k_1(k_1+1)} - \frac{\beta_1 A_{n_1-k_1}^{\beta_1}}{k_1(n_1-k_1+1)}. \qquad (4.5.3)
\end{aligned}$$

Ahora, usando (4.5.3), escribimos

$$\left|\frac{1}{A_{n_1}^{\beta_1}}\left(\frac{A_{n_1-k_1}^{\beta_1}}{k_1+1} - \frac{A_{n_1-k_1+1}^{\beta_1}}{k_1}\right) + \frac{1}{k_1(k_1+1)}\right| = \left|\left(1 - \frac{A_{n_1-k_1}^{\beta_1}}{A_{n_1}^{\beta_1}}\right)\frac{1}{k_1(k_1+1)} - \frac{\beta_1 A_{n_1-k_1}^{\beta_1}}{k_1(n_1-k_1+1)A_{n_1}^{\beta_1}}\right|,$$

y usando nuevamente la propiedad $(C2)$ de los números A_n^β resulta que

$$\begin{aligned}
\left|\left(1 - \frac{A_{n_1-k_1}^{\beta_1}}{A_{n_1}^{\beta_1}}\right)\frac{1}{k_1(k_1+1)}\right| &= \left|\frac{1}{A_{n_1}^{\beta_1}k_1(k_1+1)}\sum_{i=n_1+1-k_1}^{n_1}\left(A_i^{\beta_1} - A_{i-1}^{\beta_1}\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{A_{n_1}^{\beta_1}k_1(k_1+1)}\sum_{i=n_1+1-k_1}^{n_1}\frac{\beta_1 A_{i-1}^{\beta_1}}{i}\right| \\
&\leq \frac{|\beta_1| A_{n_1-k_1}^{\beta_1}}{A_{n_1}^{\beta_1}(k_1+1)(n_1-k_1+1)}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|I| &\leq C\sum_{k_1\in N_1}\frac{A_{n_1-k_1}^{\beta_1}}{A_{n_1}^{\beta_1}(k_1+1)(n_1-k_1+1)}T_1^{k_1+1}(H_{\beta_2}^* h(x)) \\
&\quad + C\sum_{k_1\in N_1}\frac{A_{n_1-k_1}^{\beta_1}}{A_{n_1}^{\beta_1}(k_1+1)(n_1-k_1+1)}T_1^{-k_1}(H_{\beta_2}^* h(x)) = I_a + I_b.
\end{aligned}$$

Sea r tal que $1 < r < \infty$, utilizando la desigualdad de Hölder se tiene que

$$|I_a| \leq C\left(\sum_{k_1\in N_1}\left(\frac{A_{n_1-k_1}^{\beta_1}}{A_{n_1}^{\beta_1}(n_1-k_1+1)}\right)^{r'}\right)^{1/r'}\left(\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)^{-r}(T_1^i(H_{\beta_2}^* h(x))^r\right)^{1/r}.$$

Al igual que se hizo en la prueba del Teorema 4.2.1, utilizando la Proposición 4.2.3 y el hecho que

$$\left(\sum_{k_1\in N_1}\left(\frac{A_{n_1-k_1}^{\beta_1}}{A_{n_1}^{\beta_1}(n_1-k_1+1)}\right)^{r'}\right)^{1/r'} \leq C n_1^{-1/r},$$

se tiene que, para casi todo $x \in X$, $\lim_{\bar{n}\to 0} I_a = 0$. De la misma forma se prueba que $\lim_{\bar{n}\to 0} I_b = 0$, para casi todo $x \in X$.

Para acotar II, escribimos

$$\begin{aligned} II &= \sum_{k_1\in N_1} \frac{1}{k_1(k_1+1)} T_1^{k_1+1}(H_{n_2,\beta_2}h(x) - H_{\beta_2}h(x)) - \sum_{k_1\in N_1} \frac{1}{k_1(k_1+1)} T_1^{-k_1}(H_{n_2,\beta_2}h(x) - H_{\beta_2}h(x)) \\ &+ \sum_{k_1\in N_1} \frac{1}{k_1(k_1+1)} \left(T_1^{k_1+1}(H_{\beta_2}h(x)) - T_1^{-k_1}(H_{\beta_2}h(x))\right) = II_a + II_b + II_c. \end{aligned}$$

De las hipótesis en T_1 y T_2, siguiendo las ideas de [**37**] tenemos que para $p > 1/(1+\beta_*)$

$$\left\| \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{1}{k_1(k_1+1)} (T_1^{k_1+1}(H_{\beta_2}h) - T_1^{-k_1}(H_{\beta_2}h)) \right\|_p \leq C \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{1}{k_1(k_1+1)} ||H_{\beta_2}h||_p \leq C||h||_p \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{1}{k_1^2} < \infty.$$

Luego

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k_1(k_1+1)} \left(T_1^{k_1+1}(H_{\beta_2}h(x)) - T_1^{-k_1}(H_{\beta_2}h(x))\right) \right| < \infty,$$

para casi todo $x \in X$ y de aquí existe $\lim_{\bar{n}\to\infty} II_c$ para casi todo $x \in X$.Veamos que $\lim_{\bar{n}\to\infty} II_a = 0$. Notemos que $II_a \leq P_{T_1}(|H_{n_2,\beta_2}h(x) - H_{\beta_2}h(x)|)$, donde

$$P_{T_1}f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} T_1^{k+1} f(x).$$

De las hipótesis en T_1, el operador P_{T_1} resulta lineal, positivo y acotado en L^p. Por otro lado, de las hipótesis en T_2, las truncaciones $H_{n_2,\beta_2}h$ convergen puntualmente a $H_{\beta_2}h$ en casi todo punto. Sea $K_n = \sup_{n_2\geq n} |H_{n_2,\beta_2}h - H_{\beta_2}h|$, luego $K_n \searrow 0$ en casi todo punto y $0 \leq K_n \leq 2H^*_{\beta_2}$. Como P_{T_1} es positivo, $P_{T_1}K_n \searrow \inf_{m\geq 1} P_{T_1}K_m$. Dado que P_{T_1} está acotado en L^p, tenemos que

$$\int_X [\inf_{m\geq 1} P_{T_1}K_m f]^p \leq \int_X [K_n f]^p,$$

para cualquier n. Luego, por el Teorema de la Convergencia Dominada, tenemos que $\inf_{m\geq 1} P_{T_1}K_m f = 0$ en casi todo punto y esto nos da el resultado buscado. De forma similar se prueba que $\lim_{\bar{n}\to\infty} II_b$ para casi todo $x \in X$.

Finalmente, en virtud de (4.5.3) notemos que

$$\left| \frac{A^{\beta_1}_{n_1-k_1}}{k_1+1} - \frac{A^{\beta_1}_{n_1-k_1+1}}{k_1} \right| \leq \frac{CA^{\beta_1}_{n_1-k_1}}{n_1(n_1-k_1+1)}$$

para todo $k_1 \in N_2$. Entonces,

$$\begin{aligned} |III| &\leq \frac{C}{A^{\beta_1}_{n_1}} \sum_{k_1\in N_2, k_1\leq n_1} \frac{A^{\beta_1}_{n_1-k_1}}{n_1(n_1-k_1+1)} \left[T_1^{k_1+1}(H^*_{\beta_2}h(x)) + T_1^{-k_1}(H^*_{\beta_2}h(x))\right] \\ &\leq C \sum_{k_1=[n_1/2]+1}^{n_1} (n_1-k_1+1)^{\beta_1-1} \frac{1}{k_1^{1+\beta_1}} \left[T_1^{k_1+1}(H^*_{\beta_2}h(x)) + T_1^{-k_1}(H^*_{\beta_2}h(x))\right] \\ &\leq C \sup_{n_1\in\mathbb{N}, k_1\geq n_1/2} \frac{T_1^{k_1+1}(H^*_{\beta_2}h(x))}{k_1^{1+\beta}} \sum_{j\geq 1} j^{\beta_1-1} \end{aligned}$$

$$+ \sup_{n_1 \in \mathbb{N}, k_1 \geq n_1/2} \frac{T_1^{-k_1}(H_{\beta_2}^* h(x))}{k_1^{1+\beta}} \sum_{j \geq 1} j^{\beta_1 - 1}.$$

Como $\sum_{j \geq 1} j^{\beta_1 - 1} < \infty$, usando el argumento empleado para ver que $\lim_{\bar{n} \to 0} \tilde{B}_{\bar{n}}(x) = 0$, se prueba que $\lim_{\bar{n} \to 0} III = 0$. $\square$

Capítulo 5

Acotaciones con pesos de operadores maximales de Cesàro en espacios producto

Este capítulo está dedicado a caracterizar los pesos w para los cuales el operador maximal de Cesàro definido en el contexto de espacios producto resulta de tipo fuerte y de tipo débil (p,p) con respecto a la medida $w(x)dx$. Para ello describimos brevemente en la primer sección los resultados conocidos para el operador maximal definido en $\mathbb{R}^n$. A diferencia del operador maximal de Hardy-Littlewood, no es claro que las versiones centradas y no centradas del operador maximal de Cesàro resulten puntualmente equivalente. Por esta razón, en la segunda sección caracterizamos los pesos para el operador maximal de Cesàro no centrado $\mathcal{N}_{\bar{\alpha}}$ y posteriormente, en la Sección 3, lo hacemos para el operador centrado $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$.

5.1. Resultados conocidos del operador maximal de Cesàro n dimensional

En [**5**] los autores se plantean las acotaciones con pesos para el operador M_α definido en el Capítulo 2, es decir,

$$M_\alpha f(x) = \sup_{R>0} \frac{1}{R^{n+\alpha-1}} \int_{Q(x,R)} |f(y)| d(y, \partial Q(x,R))^{\alpha-1}\, dy, \qquad 0 < \alpha \leq 1,$$

donde $d(y, \partial Q(x,R))$ denota la distancia de y al borde del cubo $Q(x,R)$ considerando la distancia con la norma infinito, es decir, $d(y, \partial Q(x,R)) = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \{x_i + R - y_i, y_i - (x_i - R)\}$. Los principales resultados en [**5**] están resumidos en el siguiente teorema.

Teorema 5.1.1. [**5**] *Sea $0 < \alpha \leq 1$ y $1/\alpha < p < \infty$. Sea w una función medible, no negativa sobre $\mathbb{R}^n$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) M_α es de tipo débil (p,p) con respecto a w, es decir

$$w(\{x : M_\alpha f(x) > \lambda\}) \leq C\lambda^{-p} \int |f(x)|^p w(x)\, dx.$$

(ii) M_α es de tipo fuerte (p,p) con respecto a w, es decir existe una constante C tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |M_\alpha f(x)|^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\, dx,$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $w \in A_{p,\alpha}$*, es decir existe una constante* C *tal que para cualquier cubo* Q*,*

$$\left(\int_Q w\right)^{1/p}\left(\int_Q w(y)^{1-p'} d(y,\partial Q)^{(\alpha-1)p'}\, dy\right)^{1/p'} \leq C|Q|^{1+\frac{\alpha-1}{n}}.$$

Dado que para $y \in Q$, $d(y,\partial Q) \leq c(n)|Q|^{1/n}$ y $(\alpha-1)p' \leq 0$, es claro que $A_{p,\alpha} \subset A_p$, donde A_p es la conocida clase de pesos definida por Muckenhoupt. Consecuentemente, si $w \in A_{p,\alpha}$, luego la medida $w(x)dx$ duplica. Otra propiedad importante de las clases $A_{p,\alpha}$ demostrada en [**5**] es la siguiente.

Lema 5.1.2. [**5**] *Sea* $0 < \alpha < 1$*,* $1 < p < \infty$ *y* $w \in A_{p,\alpha}$*. Luego existe* $\epsilon > 0$*,* $0 < \epsilon < p-1$*, tal que* $w \in A_{p-\epsilon,\alpha}$*.*

El operador M_α es un operador centrado dado que $M_\alpha f(x)$ se define a través de promedios sobre cubos centrados en x. Como ya mencionamos, cuando $0 < \alpha < 1$ y debido a la forma que tiene el núcleo, no se conoce una equivalencia puntual entre el operador M_α y su versión no centrada N_α definida de la siguiente manera

$$N_\alpha f(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|^{1+(\alpha-1)/n}} \int_Q |f(y)| d(y,\partial Q)^{\alpha-1}\, dy, \qquad 0 < \alpha \leq 1.$$

Aunque no está explícitamente enunciado en [**5**] es posible obtener los mismos resultados que en el Teorema 5.1.1 para el operador no centrado N_α.

Teorema 5.1.3. *Sea* $0 < \alpha \leq 1$ *y* $1/\alpha < p < \infty$*. Sea* w *una función medible, no negativa sobre* $\mathbb{R}^n$*. Son equivalentes:*

(i) N_α *es de tipo débil* (p,p) *con respecto a* w*.*

(ii) N_α *es de tipo fuerte* (p,p) *con respecto a* w*.*

(iii) $w \in A_{p,\alpha}$*.*

Aunque la prueba del Teorema 5.1.3 se deduce fácilmente de los resultados probados en [**5**], a continuación describimos brevemente dicha prueba.

Demostración. Claramente $(ii) \Rightarrow (i)$. La implicación $(i) \Rightarrow (iii)$ se prueba de forma estándar. En efecto, dado un cubo Q y $k \in \mathbb{N}$, sea

$$f_k(y) = (w(y) + 1/k)^{1-p'} d(y,\partial Q)^{(\alpha-1)(p'-1)} \chi_Q(y).$$

Luego, para todo $x \in Q$

$$\begin{aligned} N_\alpha f_k(x) &\geq \frac{1}{|Q|^{1+(\alpha-1)/n}} \int_Q |f_k(y)| d(y,\partial Q)^{\alpha-1}\, dy \\ &= \frac{1}{|Q|^{1+(\alpha-1)/n}} \int_Q (w(y)+1/k)^{1-p'} d(y,\partial Q)^{(\alpha-1)p'}\, dy. \end{aligned}$$

Llamando

$$\lambda_k = \frac{1}{|Q|^{1+(\alpha-1)/n}} \int_Q (w(y) + 1/k)^{1-p'} d(y, \partial Q)^{(\alpha-1)p'} \, dy$$

tenemos que $w(Q) \leq w(\{x : \ N_\alpha f_k(x) \geq \lambda_k\})$. Aplicando la desigualdad de tipo débil (p,p) para N_α a esta última desigualdad y tomando luego límite cuando $k \to \infty$ tenemos probado (iii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. De la desigualdad de Hölder y la condición $A_{p,\alpha}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_Q |f(y)| d(y,\partial Q)^{\alpha-1} \, dy &\leq \left(\int_Q |f|^p w \right)^{1/p} \left(\int_Q w^{1-p'}(y) d(y,\partial Q)^{(\alpha-1)p'} \, dy \right)^{1/p'} \\ &\leq C \left(\int_Q |f|^p w \right)^{1/p} \left(\int_Q w \right)^{-1/p} |Q|^{1+(\alpha-1)/n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $N_\alpha f(x) \leq C[N_w(|f|^p)]^{1/p}(x)$, donde

$$N_w g(x) = \sup_{x \in Q} \left[\frac{1}{w(Q)} \int_Q |g| w \right].$$

Como $w \in A_{p,\alpha}$ implica que la medida $w(x)dx$ duplica, sabemos que el operador N_w es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a $w(x)dx$. De esto y de la desigualdad puntual con N_α se obtiene (i).

Finalmente $(iii) \Rightarrow (ii)$ se sigue de la equivalencia $(iii) \Leftrightarrow (i)$ y del Lema 5.1.2, vía el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz. $\square$

En el resto del capítulo utilizaremos la siguiente notación que fue introducida en [**5**]. Para cada i fijo, $i = 1, \cdots, L$, escribimos a cada cubo $Q(z^i, \epsilon_i) = [z^i - \epsilon_i, z^i + \epsilon_i]^{n_i}$ como

$$Q(z^i, \epsilon_i) = \bigcup_{k=1}^{n_i} K_k^i(z^i, \epsilon_i),$$

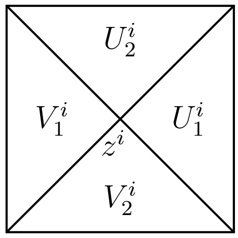
donde $K_k^i(z^i, \epsilon_i) = \{y^i \in Q(z^i, \epsilon_i) : |y_j^i - z_j^i| \leq |y_k^i - z_k^i|, \ j = 1, \cdots, n_i\}$. A partir de estos conjuntos $K_k^i(z^i, \epsilon_i)$ hacemos una división más fina de $Q(z^i, \epsilon_i)$ definiendo los siguientes conjuntos:

$$U_k^i(z^i, \epsilon_i) = K_k^i(z^i, \epsilon_i) \cap \{y^i : y_k^i \geq z_k^i\}$$

y

$$V_k^i(z^i, \epsilon_i) = K_k^i(z^i, \epsilon_i) \cap \{y^i : y_k^i \leq z_k^i\}$$

para $k = 1, 2, \cdots, n_i$. Para i fijo, en el caso que $n_i = 2$ tenemos los conjuntos U_1^i, V_1^i, U_2^i y V_2^i como se indica en la siguiente figura (Figura 1).



$Q(z^i, \epsilon_i)$

Figura 1.

Por simplicidad de notación, algunas veces llamaremos simplemente $S_k^i(z^i, \epsilon_i)$, $k = 1, \cdots, 2n_i$, a los conjuntos definidos arriba, es decir, $S_k^i(z^i, \epsilon_i)$ será $U_n^i(z^i, \epsilon_i)$ o $V_m^i(z^i, \epsilon_i)$, para algún n o m, con $n, m = 1, \cdots, n_i$. Con $\tilde{S}_k^i(z^i, \epsilon_i)$ denotaremos al complemento de $S_k^i(z^i, \epsilon_i)$ respecto de $K_k^i(z^i, \epsilon_i)$, es decir, $\tilde{S}_k^i(z^i, \epsilon_i) = K_k^i(z^i, \epsilon_i) \setminus S_k^i(z^i, \epsilon_i)$. Luego,

$$Q(z^i, \epsilon_i) = \bigcup_{k=1}^{2n_i} S_k^i(z^i, \epsilon_i) = \bigcup_{k=1}^{n_i} \left(U_k^i(z^i, \epsilon_i) \cup V_k^i(z^i, \epsilon_i) \right).$$

5.2. Maximal de Cesàro en espacios producto con pesos: caso no centrado

En esta sección caracterizaremos los pesos para el operador maximal de Cesàro no centrado

$$\mathcal{N}_{\bar{\alpha}} f(x) \;=\; \sup_{\mathcal{R}: x \in \mathcal{R}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{L} |Q_i|^{1+\frac{\alpha_i - 1}{n_i}}} \int_{Q_1} \cdots \int_{Q_L} |f(y^1, \cdots, y^L)| \prod_{i=1}^{L} d(y^i, \partial Q_i)^{\alpha_i - 1}\, dy^1 \cdots dy^L,$$

donde $\mathcal{R} = Q_1 \times \cdots \times Q_L$ y los Q_i son cubos de $\mathbb{R}^{n_i}$. Con técnicas similares a las empleadas para probar el correspondiente resultado para el operador maximal fuerte (caso $\alpha_i = 1$ para todo i), ver por ejemplo [**21**], podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 5.2.1. *Sea $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_L)$, $0 < \alpha_i \le 1$, $i = 1, \cdots, L$, $w \ge 0$ y $1/\alpha_* < p < \infty$ donde $\alpha_* = \min \alpha_i$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $w \in \mathcal{A}^*_{p,\bar{\alpha}}$ esto es, existe $C > 0$ tal que para todo rectángulo de la forma $\mathcal{R} = Q_1 \times \cdots \times Q_L$, con Q_i cubos contenidos en $\mathbb{R}^{n_i}$ se verifica

$$\left(\int_{\mathcal{R}} w \right)^{1/p} \left(\int_{\mathcal{R}} w^{1-p'}(y) \prod_{i=1}^{L} d(y^i, \partial Q_i)^{\alpha_i - 1}\, dy \right)^{1/p'} \le C \prod_{i=1}^{L} |Q_i|^{1+\frac{\alpha_i - 1}{n_i}}.$$

(ii) Existe $C>0$ tal que para cada $i=1,\cdots,L$,

$$w_{\tilde{x}_i}(\cdot)=w(x^1,\cdots,x^{i-1},\cdot,x^{i+1},\cdots,x^L)\in A_{p,\alpha_i}(\mathbb{R}^{n_i}),$$

para casi todo $(x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^L)\in\mathbb{R}^{n-n_i}$, es decir, para todo $Q_i\subset\mathbb{R}^{n_i}$ y casi todo $(x^1,\cdots,x^{i-1},x^{i+1},\cdots,x^L)\in\mathbb{R}^{n-n_i}$, se verifica

$$\left(\int_{Q_i} w_{\tilde{x}_i}(y^i)dy^i\right)^{1/p}\left(\int_{Q_i} w_{\tilde{x}_i}^{1-p'}(y^i)d(y^i,\partial Q_i)^{(\alpha_i-1)p'}dy^i\right)^{1/p'}\leq C|Q_i|^{1+\frac{\alpha_i-1}{n_i}}.$$

(iii) $\mathcal{N}_{\bar{\alpha}}$ es de tipo fuerte (p,p) con respecto a w.

(iv) $\mathcal{N}_{\bar{\alpha}}$ es de tipo débil (p,p) con respecto a w.

Demostración. Para simplificar notación, probaremos el teorema considerando a $\mathbb{R}^n$ compuesto por dos bloques, es decir $L=2$ y $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2}$ ya que este caso presenta las dificultades esenciales del caso general.

$(i)\Rightarrow(ii)$. Sea $w\in\mathcal{A}^*_{p,\bar{\alpha}}$ y sea Q_2 un cubo de $\mathbb{R}^{n_2}$. Definimos

$$m_{Q_2}(y^1)=\left(\frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} w(y^1,y^2)dy^2\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|Q_2|^{1+\frac{(\alpha_2-1)p'}{n_2}}}\int_{Q_2} w^{1-p'}(y^1,y^2)d(y^2,\partial Q_2)^{(\alpha_2-1)p'}dy^2\right)^{1/p'}.$$

Sea Q_1 un cubo en $\mathbb{R}^{n_1}$ centrado en x^1 y $\mathcal{R}=Q_1\times Q_2$. Dado que para $y^1\in Q_1$, $d(y^1,\partial Q_1)\leq c(n_1)|Q_1|^{1/n_1}$, aplicando la desigualdad de Hölder y la hipótesis, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q_1|}\int_{Q_1} m_{Q_2}(y^1)dy^1 &\leq \frac{c(\alpha_1,n_1)}{|Q_1|}\int_{Q_1}\left(\frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} w(y^1,y^2)dy^2\right)^{1/p}\\
&\times\left(\frac{1}{|Q_2|\prod_{i=1}^2|Q_i|^{\frac{(\alpha_i-1)p'}{n_i}}}\int_{Q_2} w^{1-p'}(y^1,y^2)\prod_{i=1}^2 d(y^i,\partial Q_i)^{(\alpha_i-1)p'}dy^2\right)^{1/p'}dy^1\\
&\leq \frac{c(\alpha_1,n_1)}{|Q_1|}\left(\int_{Q_1}\frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} w(y^1,y^2)dy^2dy^1\right)^{1/p}\\
&\times\left(\int_{Q_1}\frac{1}{|Q_2|\prod_{i=1}^2|Q_i|^{\frac{(\alpha_i-1)p'}{n_i}}}\int_{Q_2} w^{1-p'}(y^1,y^2)\prod_{i=1}^2 d(y^i,\partial Q_i)^{(\alpha_i-1)p'}dy^2\,dy^1\right)^{1/p'}\\
&\leq c(\alpha_1,n_1)\frac{1}{\prod_{i=1}^2|Q_i|^{1+\frac{(\alpha_i-1)}{n_i}}}\left(\int_{\mathcal{R}} w(y)dy\right)^{1/p}\left(\int_{\mathcal{R}} w^{1-p'}(y)\prod_{i=1}^2 d(y^i,\partial Q_i)^{(\alpha_i-1)p'}dy\right)^{1/p'}\\
&\leq C.
\end{aligned}$$

Por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue tenemos que $m_{Q_2}(x^1)\leq C$ para casi todo $x^1\in\mathbb{R}^{n_1}$. Por lo tanto, para cada cubo Q_2 existirá un conjunto de medida nula donde no se cumpla la desigualdad $m_{Q_2}(x^1)\leq C$. Luego, $m_{Q_r}(x^1)\leq C$ en casi todo $x^1\in\mathbb{R}^{n_1}$, para cualquier cubo Q_r con centro y radio racional.

Dado un cubo Q_2 cualquiera, con la notación introducida en la sección anterior tenemos que

$$m_{Q_2}(x^1) = \left(\frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} w(x^1,y^2)dy^2\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|Q_2|^{1+\frac{(\alpha_2-1)p'}{n_2}}}\int_{Q_2} w^{1-p'}(x^1,y^2)d(y^2,\partial Q_2)^{(\alpha_2-1)p'}dy^2\right)^{1/p'}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{2n_i}\left(\frac{1}{|Q_2|}\int_{Q_2} w(x^1,y^2)dy^2\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|Q_2|^{1+\frac{(\alpha_2-1)p'}{n_2}}}\int_{S_k^i} w^{1-p'}(x^1,y^2)d(y^2,\partial Q_2)^{(\alpha_2-1)p'}dy^2\right)^{1/p'}.$$

Para i fijo, sea S_k^i un conjunto cualquiera asociado a Q_2 del tipo U_k^i o V_k^i. Consideremos un cubo Q_r^i con centro y radio racional tal que $(S_k^i)_r$, un conjunto del mismo tipo que S_k^i pero asociado a Q_r^i, verifica que $(S_k^i)_r \subset S_k^i$. Dado que para $y^2 \in (S_k^i)_r$ se tiene que $d(y^2,\partial Q_2) \geq d(y^2,\partial Q_r^i)$,

$$\left(\frac{1}{|Q_r^i|}\int_{Q_r^i} w(x^1,y^2)dy^2\right)^{1/p}\left(\frac{1}{|Q_r^i|^{1+\frac{(\alpha_2-1)p'}{n_2}}}\int_{(S_k^i)_r} w^{1-p'}(x^1,y^2)d(y^2,\partial Q_2)^{(\alpha_2-1)p'}dy^2\right)^{1/p'} \leq C.$$

Luego, aproximando en cada sumando que acota a $m_{Q_2}(x^1)$ a Q_2 por cubos Q_r^i tales que $(S_k^i)_r \subset S_k^i$ tendremos probado (ii) con $i=2$. Análogamente se obtiene el caso $i=1$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Dada $f : \mathbb{R}^{n_1}\times\mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$, sea $f_{(x^2)} : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}$ tal que $f_{(x^2)}(x^1) = f(x^1,x^2)$, definamos

$$N^1_{\alpha_1} f(x) = N_{\alpha_1}(f_{(x^2)})(x^1) = \sup_{x^1\in Q_1}\frac{1}{|Q_1|^{1+\frac{\alpha_1-1}{n_1}}}\int_{Q_1}|f(y^1,x^2)|d(y^1,\partial Q_1)^{\alpha_1-1}\,dy^1.$$

Aplicando el Teorema 5.1.3 tenemos que si $p > 1/\alpha_1$, para casi todo $x^2 \in \mathbb{R}^{n_2}$,

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}}[N^1_{\alpha_1} f(x^1,x^2)]^p w(x^1,x^2)\,dx^1 \leq C\int_{\mathbb{R}^{n_1}}|f(x^1,x^2)|^p w(x^1,x^2)\,dx^1.$$

Integrando ambos miembros de la desigualdad de arriba con respecto a $x^2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ tenemos que el operador $N^1_{\alpha_1}$ está acotado en $L^p(w)$. Procediendo de la misma forma cambiando los roles de x^1 y x^2 tenemos el mismo resultado para el operador $N^2_{\alpha_2} f(x) = N_{\alpha_2}(f_{(x^1)})(x^2)$, para $p > 1/\alpha_2$. Esto junto con la desigualdad puntual

$$\mathcal{N}_{\bar\alpha} f(x) \leq N^1_{\alpha_1} o N^2_{\alpha_2} f(x)$$

nos da el resultado deseado cuando $p > 1/\alpha_*$.

Como claramente $(iii) \Rightarrow (iv)$, sólo nos resta probar $(iv) \Rightarrow (i)$. La prueba de esta implicación se sigue en forma similar a la demostración de $(i) \Rightarrow (iii)$ en el Teorema 5.1.3. En efecto, sea $\mathcal{R} = Q_1 \times Q_2$ fijo, $w_k(y) = w(y) + 1/k$, $k \in \mathbb{N}$ y

$$f_k(y) = w_k^{1-p'}(y)\prod_{i=1}^{2} d(y^i,\partial Q_i)^{(\alpha_1-1)(p'-1)}\chi_{\mathcal{R}}(y).$$

Afirmamos que existe λ_k tal que $\mathcal{R} \subset \{\mathcal{N}_{\bar{\alpha}} f_k > \lambda_k\}$. En efecto, sea $x \in \mathcal{R}$. Por la definición del operador maximal no centrado y de la función f_k resulta que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\bar{\alpha}} f_k(x) &\geq \frac{1}{\prod_{i=1}^2 |Q_i|^{1+\frac{\alpha_i-1}{n_i}}} \int_{\mathcal{R}} |f_k(y)| \prod_{i=1}^2 d(y^i, \partial Q_i)^{(\alpha_1-1)} dy \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^2 |Q_i|^{1+\frac{\alpha_i-1}{n_i}}} \int_{\mathcal{R}} w_k^{1-p'}(y) \prod_{i=1}^2 d(y^i, \partial Q_i)^{(\alpha_1-1)p'} dy \end{aligned}$$

Luego, tomando

$$\lambda_k = \frac{1}{\prod_{i=1}^2 |Q_i|^{1+\frac{\alpha_i-1}{n_i}}} \int_{\mathcal{R}} w_k^{1-p'}(y) \prod_{i=1}^2 d(y^i, \partial Q_i)^{(\alpha_1-1)p'} dy$$

se obtiene la inclusión deseada y se asegura que λ_k es finito para cada k. Como $\mathcal{N}_{\bar{\alpha}}$ es de tipo débil (p,p) con respecto a w, resulta

$$\begin{aligned} w(\mathcal{R}) &\leq w(\{\mathcal{N}_{\bar{\alpha}} f_k > \lambda_k\}) \\ &\leq \frac{C}{\lambda_k^p} \int |f_k(y)|^p w(y) dy. \end{aligned}$$

Luego, reemplazando la función f_k y λ_k por su expresión, se obtiene que

$$\left(\int_{\mathcal{R}} w \right) \left(\int_{\mathcal{R}} w_k^{1-p'}(y) \prod_{i=1}^2 d(y^i, \partial Q_i)^{(\alpha_1-1)p'} dy \right)^{p-1} \leq C \prod_{i=1}^2 |Q_i|^{1+\frac{\alpha_i-1}{n_i}},$$

y tomando límite cuando $k \to \infty$ tenemos que $w \in \mathcal{A}^*_{p,\bar{\alpha}}$. $\square$

5.3. Maximal de Cesàro en espacios producto con pesos: caso centrado

A continuación probaremos que la clase $A^*_{p,\bar{\alpha}}$ también caracteriza las desigualdades con pesos del operador maximal centrado

$$\mathcal{M}_{\bar{\alpha}} f(x) = \sup_{\bar{\epsilon}>0} \frac{C(\bar{\alpha}, \bar{n})}{\prod_{i=1}^L \epsilon_i^{n_i+\alpha_i-1}} \int_{Q(x^1,\epsilon_1)} \cdots \int_{Q(x^L,\epsilon_L)} |f(y^1, \cdots, y^L)| \prod_{i=1}^L d(y^i, \partial Q(x^i, \epsilon_i)\, dy^L \cdots dy^1$$

En efecto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.3.1. *Sea $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_L)$, $0 < \alpha_i \leq 1$, $i = 1, \cdots, L$, $w \geq 0$ y $1/\alpha_* < p < \infty$ donde $\alpha_* = \min \alpha_i$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ *es de tipo débil* (p,p) *con respecto a* w.

(ii) $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ *es de tipo fuerte* (p,p) *con respecto a* w.

(iii) $w \in \mathcal{A}^*_{p,\bar{\alpha}}$.

Para probar este teorema utilizaremos las técnicas empleadas en [**5**] para probar el resultado cuando no estamos en el contexto de espacios producto. Siguiendo con la notación introducida en la primer sección, sea $\mathcal{K} = \{\bar{k} = (k_1, \cdots, k_L),\ k_i \in \{1, \cdots, 2n_i\}, i = 1, \cdots, L\}$ y

$$\mathcal{S}_{\bar{k}}(z, \bar{\epsilon}) = S^1_{k_1}(z^1, \epsilon_1) \times \cdots \times S^L_{k_L}(z^L, \epsilon_L).$$

Dados $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_L)$, con $0 < \alpha_i < 1$, y $\bar{k} \in \mathcal{K}$, definimos el operador maximal de Cesàro no centrado en el espacio producto $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_L}$ como

$$\mathrm{N}_{\bar{\alpha},\bar{k}} f(x) = \sup_{x \in \mathcal{S}_{\bar{k}}(z,\bar{\epsilon})} \frac{1}{\prod_{i=1}^L \epsilon_i^{n_i+\alpha_i-1}} \int_{\tilde{S}^1_{k_1}} \cdots \int_{\tilde{S}^L_{k_L}} |f(y^1, \cdots, y^L)| \prod_{i=1}^{L} \left(d(y^i, \partial Q(z^i, \epsilon_i))\right)^{\alpha_i - 1} dy^L \cdots dy^1,$$

donde $\tilde{S}^j_{k_j} = \tilde{S}^j_{k_j}(z^j, \epsilon_j)$. Notemos que podemos definir $2^L n_1.n_2 \cdots n_L$ operadores maximales no centrados diferentes. Los siguientes resultados relacionados con los operadores $\mathrm{N}_{\bar{\alpha},\bar{k}}$ serán la herramienta clave para demostrar el Teorema 5.3.1.

Lema 5.3.2. *Para cualquier $\bar{k} \in \mathcal{K}$, existe $C > 0$ tal que $\mathrm{N}_{\bar{\alpha},\bar{k}} f(x) \leq C \mathcal{M}_{\bar{\alpha}} f(x)$.*

Demostración. Notemos que podemos escribir el borde de $Q(z^i, \epsilon_i)$ como

$$\partial Q(z^i, \epsilon_i) = \bigcup_{k=1}^{2n_i} \partial_{S^i_k} Q(z^i, \epsilon_i),$$

donde $\partial_{S^i_k} Q(z^i, \epsilon_i) = \partial Q(z^i, \epsilon_i) \cap S^i_k(z^i, \epsilon_i)$. Luego, dado $x^i \in S^i_{k_i}(z^i, \epsilon_i)$ definimos

$$R_i = d(x^i, \partial_{\tilde{S}^i_k} Q(z^i, \epsilon_i)),$$

donde la distancia se define utilizando la norma infinito. Para i fijo, $n_i = 2$ se tiene la siguiente situación (Figura 2).

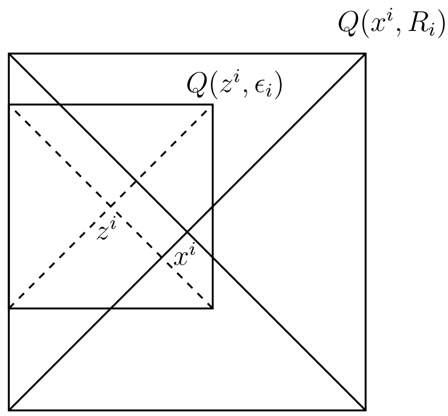


Figura 2.

Resulta claro que $\epsilon_i \leq R_i \leq 2\epsilon_i$. A continuación veremos que además se verifican las siguientes afirmaciones:

(i) $\tilde{S}^i_{k_i}(z^i,\epsilon_i) \subset \tilde{S}^i_{k_i}(x^i,R_i)$ y

(ii) $d(y^i,\partial Q(z^i,\epsilon_i)) = d(y^i,\partial Q(x^i,R_i))$ para todo $y^i \in \tilde{S}^i_{k_i}(z^i,\epsilon_i)$.

Supongamos que $S^i_{k_i}(z^i,\epsilon_i) = U^i_n(z^i,\epsilon_i)$ para algún $n = 1,\cdots,n_i$ y por lo tanto $\tilde{S}^i_{k_i}(z^i,\epsilon_i) = V^i_n(z^i,\epsilon_i)$. Comenzaremos probando (i), es decir, veamos que $V^i_n(z^i,\epsilon_i) \subset V^i_n(x^i,R_i)$. Sea $y^i \in V^i_n(z^i,\epsilon_i)$, luego para cualquier $j = 1,\cdots,n_i$

$$|y^i_j - z^i_j| \leq |y^i_n - z^i_n| \quad \text{y} \quad y^i_n \leq z^i_n. \tag{5.3.1}$$

Además, como $x^i \in U^i_n$, para cualquier $j = 1,\cdots,n_i$ se tiene

$$|x^i_j - z^i_j| \leq |x^i_n - z^i_n| \quad \text{y} \quad x^i_n \geq z^i_n. \tag{5.3.2}$$

De las desigualdades (5.3.1) y (5.3.2) resulta que $y^i_n \leq x^i_n$ y, para cualquier $j = 1,\cdots,n_i$, que

$$|y^i_j - x^i_j| \leq |y^i_j - z^i_j| + |z^i_j - x^i_j| \leq |y^i_n - z^i_n| + |x^i_n - z^i_n| = x^i_n - y^i_n = |x^i_n - y^i_n|.$$

Por otro lado, como $||y^i - x^i||_\infty = x^i_n - y^i_n \leq d(x^i, \partial_{V^i_n} Q(z^i,\epsilon_i)) = R_i$, tenemos que $y^i \in V^i_n(x^i,R_i)$.

Para probar (ii) notemos que si $y^i \in V^i_n(x^i,R_i)$, luego $d(y^i,\partial Q(z^i,\epsilon_i)) = \epsilon_i - z^i_n + y^i_n$ y $d(y^i,\partial Q(x^i,R_i)) = R_i - x^i_n + y^i_n$. Luego (ii) se sigue dado que en este caso $R_i = \epsilon_i - z^i_n + x^i_n$. Con el mismo razonamiento se prueban (i) y (ii) en el caso en que $S^i_{k_i}(z^i,\epsilon_i) = V^i_m(z^i,\epsilon_i)$ para algún $m = 1,\cdots,n_i$.

Ahora bien, dado $x \in \mathcal{S}_{\bar{k}}$, de las afirmaciones demostradas anteriormente resulta que

$$\begin{aligned}
&\int_{\tilde{S}^1_{k_1}(z^1,\epsilon_1)} \cdots \int_{\tilde{S}^L_{k_L}(z^L,\epsilon_L)} |f(y)| \prod_{i=1}^L \big(d(y^i,\partial Q_i(z^i,\epsilon_i))\big)^{\alpha_i - 1}\, dy^L \cdots dy^1 \\
&\quad = \int_{\tilde{S}^1_{k_1}(z^1,\epsilon_1)} \cdots \int_{\tilde{S}^L_{k_L}(z^L,\epsilon_L)} |f(y)| \prod_{i=1}^L \big(d(y^i,\partial Q_i(x^i,R_i))\big)^{\alpha_i - 1}\, dy^L \cdots dy^1 \\
&\quad \leq \int_{\tilde{S}^1_{k_1}(x^1,R_1)} \cdots \int_{\tilde{S}^L_{k_L}(x^L,R_L)} |f(y)| \prod_{i=1}^L \big(d(y^i,\partial Q_i(x^i,R_i))\big)^{\alpha_i - 1}\, dy^L \cdots dy^1 \\
&\quad \leq \int_{Q_1(x^1,R_1)} \cdots \int_{Q_L(x^L,R_L)} |f(y)| \prod_{i=1}^L \big(d(y^i,\partial Q_i(x^i,R_i))\big)^{\alpha_i - 1}\, dy^L \cdots dy^1.
\end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando las desigualdades de arriba por $\frac{1}{\prod_{i=1}^L \epsilon_i^{n_i+\alpha_i-1}}$, usando que $\epsilon_i \leq R_i \leq 2\epsilon_i$ y tomando supremos se obtiene la acotación deseada. $\square$

Lema 5.3.3. *Sea $\bar{\alpha} = (\alpha_1,\cdots,\alpha_L)$, $0 < \alpha_i \leq 1$, $i = 1,\cdots,L$ y $1/\alpha_* < p < \infty$ donde $\alpha_* = \min \alpha_i$. Sea $\bar{k} \in \mathcal{K}$ y $\mathrm{N}_{\bar{\alpha},\bar{k}}$ de tipo débil (p,p) con respecto a w entonces w satisface* *la siguiente condición: existe $C > 0$ tal que para cualquier rectángulo de la forma $R(z,\epsilon) = Q(z^1,\epsilon_1)\times\cdots\times Q(z^L,\epsilon_L)$ se tiene que*

$$\left(\int_{\mathcal{S}_{\bar{k}}(z,\bar{\epsilon})} w\right)^{1/p}\left(\int_{\tilde{\mathcal{S}}_{\bar{k}}(z,\bar{\epsilon})} w^{1-p'}(y)\prod_{i=1}^{L}\left(d(y^i,\partial Q_i(z^i,\epsilon_i))\right)^{(\alpha_i-1)p'}\,dy\right)^{1/p'} \leq C\prod_{i=1}^{L}\epsilon_i^{n_i+\alpha_i-1},$$

donde $\tilde{\mathcal{S}}_{\bar{k}}(z,\bar{\epsilon}) = \tilde{S}^1_{k_1}(z^1,\epsilon_1)\times\cdots\times\tilde{S}^L_{k_L}(z^L,\epsilon_L)$, $\mathcal{S}_{\bar{k}}(z,\bar{\epsilon}) = S^1_{k_1}(z^1,\epsilon_1)\times\cdots S^L_{k_L}(z^L,\epsilon_L)$ *y* $\tilde{S}^i_{k_i}(z^i,\epsilon_i) = K^i_{k_i}(z^i,\epsilon_i)\setminus S^i_{k_i}(z^i,\epsilon_i)$.

Demostración. La demostración de este lema es similar a la demostración de la implicación $(iv)\Rightarrow(i)$ en el Teorema 5.2.1. En efecto, sea $R(z,\epsilon) = Q_1(z^1,\epsilon_1)\times\cdots\times Q_L(z^L,\epsilon_L)$ y $\bar{k} = (k_1,\cdots,k_L)\in\mathcal{K}$ fijos. Sea $w_m(y) = w(y)+1/m$, $m\in\mathbb{N}$ y

$$f_m(y) = w_m^{1-p'}(y)\prod_{i=1}^{L}\left(d(y^i,\partial Q_i(z^i,\epsilon_i))\right)^{(\alpha_i-1)(p'-1)}\chi_{\tilde{S}_{\bar{k}(z,\bar{\epsilon})}}(y).$$

Si $x\in S_{\bar{k}}(z,\bar{\epsilon})$ luego $\mathrm{N}_{\bar{\alpha},\bar{k}}f_m(x)$ se acota por debajo por

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{L}\epsilon_i^{n_i+\alpha_i-1}}\int_{\tilde{S}^1_{k_1}(z^1,\epsilon_1)}\cdots\int_{\tilde{S}^L_{k_L}(z^L,\epsilon_L)} w_m^{1-p'}(y)\prod_{i=1}^{L}d(y^i,\partial Q(z^i,\epsilon_i))^{(\alpha_i-1)p'}\,dy^L\cdots dy^1 = \lambda_m.$$

Luego $\mathcal{S}_{\bar{k}}(z,\bar{\epsilon})\subset\{\mathrm{N}_{\bar{\alpha},\bar{k}}f_m(x)>\lambda_m\}$. Finalmente, usando que $\mathrm{N}_{\bar{\alpha},\bar{k}}$ es de tipo débil (p,p) con respecto a w y siguiendo los pasos de la prueba mencionada al principio tenemos que w satisface la desigualdad deseada.□

Demostración del Teorema 5.3.1. Notemos que la implicación $(ii)\Rightarrow(i)$ es trivial, mientras que $(iii)\Rightarrow(ii)$ es una consecuencia inmediata del Teorema 5.2.1 y del hecho que $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}\leq\mathcal{N}_{\bar{\alpha}}$. Sólo debemos probar $(i)\Rightarrow(iii)$. Notemos que $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}\geq\mathcal{M}_{\bar{1}}$, donde $\mathcal{M}_{\bar{1}}$ es el operador maximal de Cesàro correspondiente a $\bar{\alpha} = (1,\cdots,1)$. El operador $\mathcal{M}_{\bar{1}}$ ya no tiene a las potencias de la distancia al borde del rectángulo donde se integra, por lo tanto sus versiones centradas y no centradas son puntualmente equivalentes. Luego de (i) y aplicando el Teorema 5.2.1 al operador $\mathcal{M}_{\bar{1}}\approx\mathcal{N}_{\bar{1}}$ tenemos que $w\in\mathcal{A}^*_{p,\bar{1}}$, es decir, existe $C>0$ tal que para cualquier rectángulo $\mathcal{R}$ de la forma $\mathcal{R} = Q_1\times\cdots\times Q_L$,

$$\left(\int_{\mathcal{R}} w\right)^{1/p}\left(\int_{\mathcal{R}} w^{1-p'}\right)^{1/p'}\leq C|\mathcal{R}|.$$

Entonces, sea $\mathcal{R} = \mathcal{R}(x,\bar{\epsilon}) = Q_1\times\cdots\times Q_L$ por la desigualdad de Hölder y siguiendo la notación del Lema 5.3.3, se tiene que para cualquier $\bar{k} = (k_1,\cdots,k_L)\in\mathcal{K}$,

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathcal{R}} w\right)^{1/p}\left(\int_{\mathcal{R}} w^{1-p'}\right)^{1/p'} &\leq C|\mathcal{R}| = C|Q_1|\cdots|Q_L|\\ &\leq \tilde{C}|S^1_{k_1}|\cdots|S^L_{k_L}|\\ &= \tilde{C}\int_{S^1_{k_1}}\cdots\int_{S^L_{k_L}} dy^L\cdots dy^1\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \tilde{C}\left(\int_{S^1_{k_1}}\cdots\int_{S^L_{k_L}} w\right)^{1/p}\left(\int_{S^1_{k_1}}\cdots\int_{S^L_{k_L}} w^{1-p'}\right)^{1/p'}\\
&\leq \tilde{C}\left(\int_{\mathcal{S}_{\bar{k}}} w\right)^{1/p}\left(\int_{\mathcal{R}} w^{1-p'}\right)^{1/p'}.
\end{aligned}
$$

Luego, para cualquier $\bar{k}=(k_1,\cdots,k_L)\in\mathcal{K}$, tenemos que $w(\mathcal{R})\leq Cw(\mathcal{S}_{\bar{k}})$.

Por otro lado, notemos que

$$\mathcal{R}=Q_1\times\cdots\times Q_L=\bigcup_{j_1=1}^{2n_1}\cdots\bigcup_{j_L=1}^{2n_L} S^1_{j_1}\times\cdots\times S^L_{j_L},$$

donde $S^i_{j_i}$ es un conjunto del tipo U^i_n o V^i_m para algún n o m con $n,m=1,\cdots,L$, correspondientes al cubo Q_i. Luego,

$$\int_R w^{1-p'}(y)\prod_{i=1}^L\big(d(y^i,\partial Q_i(z^i,\epsilon_i))\big)^{(\alpha_i-1)p'}\,dy\leq\sum_{j_1=1}^{2n_1}\cdots\sum_{j_L=1}^{2n_L}\int_{\mathcal{S}_{\bar{j}}} w^{1-p'}(y)\prod_{i=1}^L\big(d(y^i,\partial Q_i(z^i,\epsilon_i))\big)^{(\alpha_i-1)p'}\,dy,$$

donde $\mathcal{S}_{\bar{j}}=\mathcal{S}_{\bar{j}}(z,\bar{\epsilon})=S^1_{j_1}(z^1,\epsilon_1)\times\cdots\times S^L_{j_L}(z^L,\epsilon_L)$. Notemos que dado $\bar{j}=(j_1,\cdots,j_L)$, existe $\bar{\ell}=(\ell_1,\cdots,\ell_L)$ tal que $S^i_{j_i}(z^i,\epsilon_i)=\tilde{S}^i_{\ell_i}(z^i,\epsilon_i)$. Ahora bien, usando que $\mathcal{M}_{\bar{\alpha}}$ es de tipo débil (p,p) con respecto a w, del Lema 5.3.2 resulta que los operadores $\mathrm{N}_{\bar{\alpha},\bar{k}}$ son de tipo débil (p,p) con respecto a w para todo $\bar{k}\in\mathcal{K}$. Finalmente, de las observaciones anteriores y el Lema 5.3.3 resulta que

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathcal{R}} w\right)^{1/p}\left(\int_{\mathcal{R}} w^{1-p'}(y)\prod_{i=1}^L\big(d(y^i,\partial Q_i(z^i,\epsilon_i))\big)^{(\alpha_i-1)p'}\,dy\right)^{1/p'}\\
&\leq \sum_{\ell_1=1}^{2n_1}\cdots\sum_{\ell_L=1}^{2n_L}\left(\int_{\mathcal{R}} w\right)^{1/p}\left(\int_{\tilde{\mathcal{S}}_{\bar{\ell}}} w^{1-p'}(y)\prod_{i=1}^L\big(d(y^i,\partial Q_i(z^i,\epsilon_i))\big)^{(\alpha_i-1)p'}\,dy\right)^{1/p'}\\
&\leq \tilde{C}\sum_{\ell_1=1}^{2n_1}\cdots\sum_{\ell_L=1}^{2n_L}\left(\int_{\mathcal{S}_{\bar{\ell}}} w\right)^{1/p}\left(\int_{\tilde{\mathcal{S}}_{\bar{\ell}}} w^{1-p'}(y)\prod_{i=1}^L\big(d(y^i,\partial Q_i(z^i,\epsilon_i))\big)^{(\alpha_i-1)p'}\,dy\right)^{1/p'}\\
&\leq C(\bar{n})\prod_{i=1}^L\epsilon_i^{n_i+\alpha_i-1}.
\end{aligned}
$$

Es decir, $w\in\mathcal{A}^*_{p,\bar{\alpha}}$. $\square$

Conclusiones generales

- Se extienden los resultados sobre el comportamiento de la composición de operadores cuando cada uno de los operadores involucrados en la composición verifican que son de tipo fuerte (∞, ∞) y de tipo débil restrindigo (p_i, p_i) como así también para el caso en que los operadores involucrados no satisfacen la acotación de tipo fuerte (∞, ∞).

- Se muestra, por un lado, cómo mejoran los resultados de convergencia, ampliando los espacios de funciones donde se obtiene dicha convergencia cuando nos restringimos a tomar promedios sobre sucesiones lacunares y se obtienen resultados sobre la velocidad de convergencia de estos promedios. Por otro lado, en el contexto de espacio producto se obtienen resultados sobre la convergencia de los promedios de Cesàro y se extienden los resultados sobre velocidad de convergencia.

- Se obtiene la existencia de la integral singular en el sentido Cesàro en el contexto de espacios producto.

- Se obtienen resultados sobre la convergencia de los promedios ergódicos Cesàro$-\alpha$ multiparamétricos.

- Se obtiene la existencia de la Transformada de Hilbert ergódica doble en el sentido Cesàro.

- Se caracterizan los pesos w para los cuales el operador maximal de Cesàro en el contexto de espacios producto es de tipo fuerte y de tipo débil.

Bibliografía

[1] Bennett, C., Sharpley, R.; *Singular Interpolation of Operators.* Academic Press, San Diego, 1988.

[2] Bernardis, A.L.; Lorente, M.; Martín-Reyes, F.J.; Martínez, M.T; de la Torre, A.; Torrea, J.L.; *Differential Transforms in Weighted Spaces.* Journal of Fourier Analysis and Applications Volume 12, Number 1, 83-103, DOI: 10.1007/s00041-005-5064-z.

[3] Bernardis, A.L.; Martín-Reyes, F.J.; *Singular Integrals in the Cesàro Sense.* The Journal of Fourier Analysis and Applications. Vol 6, Issue 2, 2000.

[4] Bernardis, A. L.; Martín-Reyes, F. J. *The limit case of the Cesàro-α convergence of the ergodic averages and the ergodic Hilbert transform*, Proc. Royal Soc. Edinb., **130** (2000), 225–237.

[5] Bernardis, A.L.; Martín-Reyes, F.J.; *The Cesàro maximal operator in dimension greater than one.* J. Math. Anal. Appl. 288 (2003) 69-77.

[6] Bernardis, A.L.; Martín-Reyes, F.J.; *Differential Transforms of Cesàro averages in weighted Spaces.* Publ. Math. 52 (2008), 101-127.

[7] Bernardis, A.L.; Martín-Reyes, F.J.; Sarrión Gavilán, M.D. *The Ergodic Hilbert Transform in the Cesàro-α sense for Invertible Lamperti Operators* Quart. J. Math. Oxford (2), **50** (1999), 389-399.

[8] Bongioanni, B. and Harboure, E.; *Composition of operators in Orlicz Spaces.* Rocky Mountain J. Math. Volume 38, Number 1 (2008), 41-59.

[9] Broise, M.; Déniel, Y., Derriennic, Y. *Réarrangement, inégalités maximales et théorémes ergodiques fractioonnaries* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 39 (1989), 689-714.

[10] Cotlar, M. *A unified theory of Hilbert transforms and ergodic theorems*, Rev. Mat. Cuyana 1 (1955), 105-167.

[11] Cwikel, M.; Kaminska, A.; Maligranda, L.; Pick,L.; *Are Generalized Lorentz "SpacesReally Spaces?.* Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 32, Number 12, (2004), 3615-3625.

[12] Deniel, Y.; *On the a.s. Cesàro-α Convergence for Stationary or Orthogonal Random Variables*, J. Theoretical Prob., **2** (1989), 475–485.

[13] De Guzmán, M.; *Real Variable Methods in Fourier Analysis.* North-Holland Publishing Company (1981).

[14] Dunford, N. ; Schwartz, J.T., *Linear Operators*, Wiley-Interscience Publ. Inc. (new York), 1958.

[15] Duoandikoetxea, J. and Rubio de Francia, J.L.; *Análisis de Fourier.* Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid (1991).

[16] Duoandikoetxea, J. and Rubio de Francia, J.L.; *Maximal and singular integral operators via Fourier transform estimates.* Invent. Math. 84, 541-561 (1986).

[17] Fava, N. ; *Weak type inequalities for product operators* Studia math. XLII (1972), 271-288.

[18] Fava, N. ; Zó, F.; *Medida e Integral de Lebesgue*, Red Olímpica, Buenos Aires, 1996.

[19] Fefferman, C.; *Estimates of doble Hilbert Transforms.* Studia Mathematics, T. XLIV. (1972).

[20] Fefferman, R. ; Stein, E. ; *Singular Integrals on Product Spaces.* Advances in Mathematics 45, 117-143 (1982).

[21] García-Cuerva, J. and Rubio de Francia, J.L. *Weighted norm inequalities and related topics*, North Holland, 1985.

[22] Grafakos, L.,*Classical and Modern Fourier Analysis*, Prentice Hall, 2004.

[23] Hudzik, H., Kaminska A., Mastylo M.; *On the dual Orlicz-Lorentz spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., 130, 6 (2002), 1645-1654.

[24] Hunt, R.; *An extension of Marcinkiewicz interpolation theorem to Lorentz spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. Volume 71, Number 2 (1965), 396.

[25] Hunt, R.; *On $L(p,q)$ spaces.* Enseignement Math. (2) 12 (1966) 249–276.

[26] Irmisch, R.; *Punktweise Ergodensätze für (C,α)-Vefahren,* $0 < \alpha < 1$, Dissertation, Fachbereich Mathematik, TH Darmstadt (1980).

[27] Jones R. and Rosenblatt; *Differential and ergodic transforms*, Math. Ann. 323(3) (2002), 525-546.

[28] Jurkat, W. and Troutman, J.; *Maximal inequalities related to generalized a.e.* Trans. Am. Math. Soc. 252 (1979), 49-64.

[29] Kan, C. H.; *Ergodic properties of Lamperti operators*, Canadian Journal Math. 30 (1978), 1206-1214.

[30] Krengel, U.; *Ergodic Theorems*, Walter de Gruyter Studies in Mathematics 6, 1985.

[31] Levis, F. E.; *Weak inequalities for maximal functions in Orlicz-Lorentz spaces and applications.* Journal of approximation theory, ISSN 0021-9045, Vol. 162, N^o 2, 2010 , págs. 239-251.

[32] Martín-Reyes,F.J. and De la Torre, A.; *The dominated ergodic estimate for mean bounded, invertible, positive operators* Proc. Amer. Math. Soc. Vol 104, No 1 (1988) 69-75.

[33] Martín-Reyes, F. J. and Ortega Salvador, P.; *Ergodic power functions for mean bounded, invertible, positive operators* Studia Math. XCI (1988) 131-139.

[34] Martín-Reyes, F. J. and Sarrión Gavilán, M. D. ; *Almost everywhere convergence and boundedness of Cesàro-α ergodic averages*, Illinois J. Math. , **43** (1999), 592–611.

[35] Muckenhoupt, B.; *Hardy's inequalities with weights.* Studia Mathematics, T. XLIV. (1972).

[36] Neugebauer, C.J.; *Orlicz-Type Integral Inequalities for Operators.* J.Korean Math. Soc. 38(2001), No. 1, pp. 163-176.

[37] Sato, R.; *On the ergodic Hilbert transform for operators in L^p,* $1 < p < \infty$ Canad. Math. Bull. 30 (2) (1987), 210-214.

[38] Sato, R.; *A remark on ergodic Hilbert transform* Math. J. Okayama Univ. 28 (1987), 159-163.

[39] Sato, R.; *On the ergodic power function for invertible positive operators*, Studia Math. 90 (1988), 129-134.

[40] Stein, E. M.; *Harmonic Analysis.* Pinceton University Press. Princeton, New Jersey. 1993.

[41] Stein, E. M. and Weiss, G.; *Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Pinceton University Press. Princeton, New Jersey. 1975.

[42] Torchinsky, A.; *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis.* Academic Press, INC. (1986).

[43] Weisz, F.; *Singular Integrals on product domains.* Arch. Math. 77 (2001) 328-336.

[44] Wheeden, R. and Zygmund, A.; *Measure and Integral. An Introduction to REal Analysis.* Marcel Dekker, Inc. New York. 1977.

[45] Zygmund, A. *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959.