

QUI

Eduardo J. Adam

**INSTRUMENTACIÓN  
Y CONTROL  
DE PROCESOS**  
NOTAS DE CLASE

INSTRUMENTACIÓN  
Y CONTROL  
DE PROCESOS  
NOTAS  
DE CLASE

UNIVERSIDAD  
NACIONAL DEL LITORAL



# **Instrumentación y control de procesos**



**UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DEL LITORAL**

Rector **Enrique Mammarella**

Director de Planeamiento y Gestión Académica **Daniel Comba**

Directora Ediciones UNL **Ivana Tosti**

.....

Adam, Eduardo J.  
Instrumentación y control de procesos :  
notas de clase / Eduardo J. Adam. - 3a ed . -  
Santa Fe : Ediciones UNL, 2020.  
Libro digital, PDF - (Cátedra)

Archivo Digital: descarga y online  
ISBN 978-987-749-201-9

1. Química. 2. Sistemas de Control.  
I. Título.  
CDD 660

.....

© Eduardo J. Adam, 2020.

© ediciones  UNL, 2020

Coordinación editorial  
**María Alejandra Sedrán**  
Coordinación diseño  
**Alina Hill**  
Producción general  
**Ediciones UNL**

—  
editorial@unl.edu.ar  
www.unl.edu.ar/editorial

.....



hdl.handle.net/11185/5542

# **Instrumentación y control de procesos**

**Notas de clase**

*Eduardo J. Adam*



COLECCIÓN  
CÁTEDRA

*A mi esposa Patricia, mi hijo Eduardo, mis padres y seres queridos.*



# Índice de contenidos

<b>1. Introducción al Control de Sistemas</b>	<b>19</b>
1.1. Introducción . . . . .	19
1.2. Breve Reseña Histórica . . . . .	20
1.3. Terminología y Definiciones . . . . .	21
1.3.1. Sistemas y variables . . . . .	21
1.3.2. Conceptos de sistemas de control . . . . .	22
1.4. Aspectos para el diseño de sistemas de control . . . . .	28
1.5. Sistema de Control Digital en Control de Procesos . . . . .	36
1.5.1. Sistema de control de set-point y control centralizado . . . . .	37
1.5.2. Sistemas de control distribuido . . . . .	38
1.5.3. Sistemas de control jerárquico distribuido . . . . .	41
1.6. Conclusiones . . . . .	42
1.7. Pensemos . . . . .	42
<b>I ANÁLISIS DE SISTEMAS A LAZO ABIERTO</b>	<b>45</b>
<b>2. Modelado Matemático de Sistemas</b>	<b>47</b>
2.1. Introducción . . . . .	47
2.2. Conceptos Elementales de Sistemas No Lineales . . . . .	49
2.2.1. Ejemplo ilustrativo. Sistema de almacenamiento de líquido . . . . .	51
2.3. Linealización de un Modelo Matemático No Lineal . . . . .	53
2.3.1. Técnica de linealización en torno a estados estacionarios . . . . .	53
2.3.2. Metodología de trabajo . . . . .	59
2.4. Sistemas Hidráulicos . . . . .	61
2.4.1. Sistema de tanques en cascada . . . . .	61
2.4.2. Sistema de tanques con interacción . . . . .	64
2.5. Intercambiador de Calor . . . . .	67
2.6. Sistema de Mezcla en Fase Líquida . . . . .	72
2.6.1. Sistema de mezcla a volumen constante . . . . .	72
2.6.2. Sistema de mezcla a volumen variable . . . . .	75
2.7. Reactores Tanques Continuos Agitados (CSTR) . . . . .	77

2.7.1.	Reactor tanque agitado continuo isotérmico . . . . .	78
2.7.2.	CSTR no isotérmico . . . . .	81
2.8.	Conclusiones . . . . .	89
2.9.	Pensemos . . . . .	90
2.10.	Problemas . . . . .	90
<b>3.</b>	<b>Respuestas Transitorias de Sistemas LTI</b>	<b>109</b>
3.1.	Introducción . . . . .	109
3.2.	Clasificación de Sistemas Lineales . . . . .	110
3.3.	Planteo General . . . . .	112
3.3.1.	Respuesta al impulso . . . . .	113
3.3.2.	Respuesta al escalón . . . . .	114
3.3.3.	Respuesta a la rampa . . . . .	115
3.4.	Respuestas Dinámicas de Sistemas de Primer Orden . . . . .	116
3.4.1.	Respuesta al impulso . . . . .	117
3.4.2.	Respuesta al escalón . . . . .	121
3.4.3.	Respuesta a la rampa . . . . .	124
3.4.4.	Ejemplos ilustrativos . . . . .	129
3.5.	Respuestas Dinámicas de Sistemas de Segundo Orden . . . . .	133
3.5.1.	Respuesta al impulso . . . . .	134
3.5.2.	Respuesta al escalón . . . . .	139
3.5.3.	Respuesta a la rampa . . . . .	145
3.6.	Respuesta Dinámica de Sistemas con Tiempo Muerto . . . . .	150
3.6.1.	Aproximaciones del tiempo muerto . . . . .	153
3.7.	Ejemplos de Interés en Ingeniería de Procesos . . . . .	156
3.7.1.	Sistema con respuesta inversa . . . . .	156
3.7.2.	Sistema adelanto-atraso . . . . .	159
3.7.3.	Sistema anticipativo . . . . .	160
3.8.	Conclusiones . . . . .	162
3.9.	Pensemos . . . . .	162
3.10.	Problemas . . . . .	167
<b>4.</b>	<b>Variables de Estados</b>	<b>171</b>
4.1.	Conceptos Preliminares . . . . .	171
4.2.	Modelo Dinámico de un Sistema en Variables de Estados . . . . .	172
4.2.1.	Representación matricial de las ecuaciones de estado . . . . .	174
4.2.2.	Relación entre las ecuaciones de estado y la función de transferencia . . . . .	174
4.3.	Representaciones en el Espacio de Estados. Formas Canónicas . . . . .	183
4.3.1.	Forma canónica controlable . . . . .	183
4.3.2.	Forma canónica observable . . . . .	184
4.3.3.	Forma canónica de Jordan . . . . .	185
4.3.4.	Diagonalización de la matriz de $n \times n$ . . . . .	185
4.4.	Solución de la Ecuación de Estados LTI . . . . .	187



4.4.1. Caso homogéneo . . . . .	187
4.4.2. Caso no homogéneo . . . . .	190
4.5. Propiedades y Definiciones . . . . .	191
4.6. Diagramas en el Plano de Fase . . . . .	191
4.7. Controlabilidad de Estados . . . . .	196
4.8. Observabilidad de Estados . . . . .	197
4.9. Conclusiones . . . . .	198
4.10. Problemas . . . . .	198
<b>5. Identificación de Sistemas</b>	<b>201</b>
5.1. Introducción . . . . .	201
5.2. Metodología Básica . . . . .	202
5.2.1. Planeamiento de las experiencias . . . . .	203
5.2.2. Selección de la estructura del modelo . . . . .	203
5.2.3. Estimación de parámetros . . . . .	205
5.2.4. Validación . . . . .	205
5.3. Técnicas de Identificación de Sistemas . . . . .	205
5.3.1. Identificación basada en respuesta al escalón . . . . .	206
5.3.2. Identificación basada en respuesta al impulso . . . . .	224
5.3.3. Identificación basada en cuadrados mínimos para cual- quier tipo de entrada y $G(s)$ genérica . . . . .	226
5.4. Conclusiones . . . . .	229
5.5. Pensemos . . . . .	230
5.6. Problemas . . . . .	230

## **II HARDWARE DE UN SISTEMA DE CONTROL DE PROCESOS** **237**

<b>6. Elementos de Medición</b>	<b>239</b>
6.1. Introducción . . . . .	239
6.2. Terminología y Definiciones . . . . .	240
6.3. Características de Elementos de Medición . . . . .	244
6.3.1. Características estáticas de un elemento de medición . . . . .	244
6.3.2. Características dinámicas de un elemento de medición . . . . .	250
6.3.3. Características deseables de un elemento de medición . . . . .	251
6.4. Dinámica de Elementos de Medición . . . . .	252
6.4.1. Dinámica de un transductor de temperatura . . . . .	253
6.5. Seguridad Intrínseca . . . . .	256
6.6. Criterios para la Selección de Elementos de Medición . . . . .	258
6.6.1. Consideraciones generales . . . . .	258
6.7. Localización de Sensores . . . . .	259
6.8. Fallas en Elementos de Medición . . . . .	260
6.8.1. Ruidos de medición . . . . .	261

6.9. Conclusiones . . . . .	261
6.10. Pensemos . . . . .	261
6.11. Problemas . . . . .	263
<b>7. Elementos de Control Final</b>	<b>269</b>
7.1. Introducción . . . . .	269
7.2. Definciones Preliminares . . . . .	270
7.3. Características de Caudal Inherente . . . . .	272
7.3.1. Tipo lineal . . . . .	273
7.3.2. Tipo igual porcentaje . . . . .	274
7.3.3. Tipo apertura rápida . . . . .	278
7.3.4. Tipo parabólica modificada . . . . .	278
7.3.5. Tipo raíz cuadrada . . . . .	278
7.4. Características de Caudal Instalada . . . . .	280
7.4.1. Cálculo de la ganancia de la válvula . . . . .	280
7.4.2. Caudal a través de una válvula de control . . . . .	281
7.4.3. Cambios en la característica de caudal instalada . . . . .	284
7.5. Procedimiento General para Dimensionamiento . . . . .	293
7.6. Histéresis de Válvulas de Control . . . . .	297
7.7. Modelado Matemático de una Válvula de Control Neumática . . . . .	298
7.7.1. Función de transferencia de una válvula de control . . . . .	299
7.8. Características Dinámicas de una Válvula . . . . .	301
7.9. Conclusiones . . . . .	301
7.10. Pensemos . . . . .	301
7.11. Problemas . . . . .	302
<b>8. Controladores PID</b>	<b>305</b>
8.1. Introducción . . . . .	305
8.2. Controladores o Reguladores PID . . . . .	306
8.2.1. Clasificación . . . . .	306
8.2.2. Ecuaciones y comportamiento temporal de un PID . . . . .	307
8.2.3. Algunas características tecnológicas de los PID . . . . .	329
8.2.4. Forma digital del controlador PID . . . . .	332
8.2.5. ¿Cuándo usar control PID? . . . . .	334
8.3. Controlador SI-NO . . . . .	335
8.4. Ejemplos de Aplicación . . . . .	337
8.5. Conclusiones . . . . .	339
8.6. Pensemos . . . . .	341
8.7. Problemas . . . . .	341

### III ANÁLISIS DE SISTEMAS A LAZO CERRADO 343

<b>9. Señales en Lazos de Control</b>	<b>345</b>
9.1. Acondicionamiento y Escalamiento de Señales . . . . .	345
9.2. Realimentación Unitaria y No Unitaria . . . . .	353
9.2.1. Realimentación Unitaria . . . . .	353
9.2.2. Realimentación No Unitaria . . . . .	355
9.3. Errores de Estado Estacionario . . . . .	356
9.4. Conclusiones . . . . .	368
9.5. Pensemos . . . . .	369
9.6. Problemas . . . . .	370
<b>10. Respuestas en Frecuencia de Sistemas LTI</b>	<b>373</b>
10.1. Introducción . . . . .	373
10.2. Respuestas en Frecuencia de Sistemas LTI . . . . .	374
10.2.1. Método rápido para encontrar la respuesta en frecuencia	378
10.2.2. Características de la respuesta en frecuencia de un siste-	
ma LTI más general . . . . .	378
10.3. Diagramas de Bode y Nyquist . . . . .	379
10.3.1. Diagramas de Bode y Nyquist de funciones básicas . . .	379
10.4. Filtrado de Señal de un Elemento de Medición de Temperatura .	398
10.5. Conclusiones . . . . .	404
10.6. Pensemos . . . . .	404
10.7. Problemas . . . . .	406
<b>11. Estabilidad de Sistemas LTI</b>	<b>409</b>
11.1. Introducción . . . . .	409
11.2. Conceptos Básicos de Estabilidad de Sistemas LTI . . . . .	410
11.3. Criterio de Estabilidad de Routh . . . . .	412
11.3.1. Casos especiales del criterio de Routh . . . . .	414
11.4. Análisis de Estabilidad en Base a Respuestas en Frecuencia . . .	417
11.4.1. Criterio de estabilidad de Bode . . . . .	419
11.4.2. Criterio de estabilidad de Nyquist . . . . .	423
11.4.3. Estabilidad relativa. Márgenes de ganancia y fase . . . .	428
11.5. Conclusiones . . . . .	434
11.6. Pensemos . . . . .	434
11.7. Problemas . . . . .	437
<b>12. Lugar Geométrico de las Raíces</b>	<b>445</b>
12.1. Introducción y Conceptos Preliminares . . . . .	445
12.2. Conceptos Teóricos Básicos . . . . .	449
12.3. Reglas para la Construcción del LR para $K \geq 0$ . . . . .	452
12.4. Lugar de Raíces de Sistemas con Tiempo Muerto . . . . .	464
12.5. Conclusiones . . . . .	469

12.6. Pensemos . . . . .	469
12.7. Problemas . . . . .	470
<b>13. Análisis de Sistemas LTI a Lazo Cerrado</b>	<b>479</b>
13.1. Introducción . . . . .	479
13.2. Control Proporcional de Sistemas LTI . . . . .	480
13.2.1. Control P de sistemas de primer orden . . . . .	480
13.2.2. Control P de sistemas de segundo orden . . . . .	487
13.2.3. Control P de sistemas de tercer orden . . . . .	491
13.3. Control Proporcional-Integral de Sistemas LTI . . . . .	495
13.3.1. Control PI de sistemas de primer orden . . . . .	497
13.3.2. Control PI de sistemas de segundo orden . . . . .	509
13.4. Control Proporcional-Derivativo de Sistemas LTI . . . . .	518
13.4.1. Control PD de sistemas de segundo orden . . . . .	518
13.5. Conclusiones . . . . .	523
13.6. Pensemos . . . . .	523
13.7. Problemas . . . . .	529
<b>14. Ajuste de Controladores PID</b>	<b>547</b>
14.1. Introducción . . . . .	547
14.2. Técnicas de Ajuste Basadas en Modelos . . . . .	548
14.2.1. Método de síntesis directa . . . . .	548
14.2.2. Control con modelo interno . . . . .	550
14.2.3. Técnicas de ajuste basadas en criterios de conducta integral	561
14.3. Técnicas de Ajuste Basadas en Ensayos Experimentales . . . . .	567
14.3.1. Método de Ziegler y Nichols . . . . .	567
14.3.2. Método de Cohen y Coon . . . . .	574
14.4. Conclusiones . . . . .	583
14.5. Pensemos . . . . .	584
14.6. Problemas . . . . .	585
<b>IV CONTROL DE PROCESOS AVANZADO TRADICIONAL</b>	<b>601</b>
<b>15. Estrategias de Control Avanzado Tradicional</b>	<b>603</b>
15.1. Introducción . . . . .	603
15.2. Control Feedforward . . . . .	604
15.2.1. Diseño de controladores FF . . . . .	606
15.3. Compensador de Tiempo Muerto . . . . .	614
15.4. Control en Cascada . . . . .	616
15.4.1. Consideraciones para el diseño del lazo de control en cascada . . . . .	619
15.5. Conclusiones . . . . .	624

15.6. Pensemos . . . . .	625
15.7. Problemas . . . . .	626
<b>16. Análisis de Configuraciones de Control Alternativas para Sistemas MIMO</b>	<b>629</b>
16.1. Introducción . . . . .	629
16.2. Conceptos Preliminares . . . . .	630
16.2.1. Estudio de variables y grado de libertad de un proceso . . . . .	630
16.3. Procedimiento Cualitativo para Generar Lazos .... . . . .	634
16.4. Procedimiento para Unidades Múltiples con Interacción . . . . .	640
16.5. Conclusiones . . . . .	647
16.6. Problemas . . . . .	647
<b>V APLICACIONES INDUSTRIALES</b>	<b>655</b>
<b>17. Control de Operaciones Unitarias</b>	<b>657</b>
17.1. Introducción . . . . .	657
17.2. Control de Intercambiadores de Calor . . . . .	657
17.2.1. Control de intercambiadores de calor líquido-líquido . . . . .	658
17.2.2. Control de intercambiadores de calor líquido-vapor . . . . .	662
17.3. Control de Reactores . . . . .	665
17.3.1. Control de temperatura . . . . .	665
17.3.2. Control de presión . . . . .	667
17.4. Control de Columnas de Destilación . . . . .	669
17.4.1. Lazos simples . . . . .	671
17.4.2. Sistemas de control de composición . . . . .	673
17.4.3. Esquemas combinados . . . . .	678
17.5. Control de Calderas . . . . .	681
17.5.1. Control de nivel de domo . . . . .	681
17.5.2. Control de balance de energía . . . . .	689
17.6. Conclusiones . . . . .	689
17.7. Problemas . . . . .	691
<b>VI APÉNDICES</b>	<b>693</b>
<b>A. Conceptos Básicos de Matemáticas</b>	<b>695</b>
A.1. Conceptos Elementales de Álgebra de Números Complejos . . . . .	695
A.2. Descomposición en Fracciones Parciales . . . . .	701
A.2.1. Cálculo de los coeficientes . . . . .	702
A.2.2. Cálculo de la transformada inversa de funciones con raíces complejas simples . . . . .	703
A.3. Conceptos Básicos de Cuadrados Mínimos . . . . .	704
A.4. Problemas . . . . .	705

<b>B. Transformada de Laplace</b>	<b>707</b>
B.1. Introducción . . . . .	707
B.2. Teoremas Útiles . . . . .	712
B.3. Propiedades de la Transformada de Laplace . . . . .	713
B.4. Transformada de Funciones de Uso Común . . . . .	717
B.4.1. Función exponencial . . . . .	717
B.4.2. Función escalón . . . . .	719
B.4.3. Función rampa . . . . .	720
B.4.4. Función sinusoidal . . . . .	721
B.4.5. Función pulso . . . . .	721
B.4.6. Delta de Dirac . . . . .	723
B.5. Funciones Generalizadas . . . . .	726
B.6. Transformada Inversa de Laplace . . . . .	727
B.7. Resolución de Ecuaciones Diferenciales . . . . .	728
B.8. Penesemos . . . . .	732
B.9. Problemas . . . . .	733
<b>C. Álgebra de Diagrama de Bloques</b>	<b>739</b>
C.1. Introducción . . . . .	739
C.2. Definiciones en Álgebra de Diagramas de Bloques . . . . .	740
C.3. Reglas del Álgebra de Diagramas de Bloques . . . . .	741
C.3.1. Reglas básicas para sistemas SISO . . . . .	742
C.3.2. Ejemplos ilustrativos . . . . .	747
C.3.3. Reglas básicas para sistemas SIMO, MISO y MIMO . . . . .	757
C.4. Conclusiones . . . . .	764
C.5. Penesemos . . . . .	764
C.6. Problemas . . . . .	764
<b>D. Documentación de Instrumentación, Procesos y Sistemas de Control</b>	<b>769</b>
D.1. Introducción . . . . .	769
D.2. Definiciones Preliminares . . . . .	770
D.3. Normas ISA para Documentar Instrumentación . . . . .	772
D.3.1. Identificación . . . . .	772
D.3.2. Símbolos . . . . .	773
D.3.3. Símbolos de Funciones, Instrumentos y Elementos . . . . .	776
D.4. Ejemplos de Aplicación . . . . .	778
D.5. Conclusiones . . . . .	780
D.6. Penesemos . . . . .	780
D.7. Problemas . . . . .	781

# Prefacio

Esta obra está basada en notas de clase originalmente escritos por el autor para la cátedra de Instrumentación y Control de Procesos<sup>1</sup> de la carrera de grado de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Litoral.

En ella se presenta una introducción a los principios y teoría básica de los sistemas de control aplicable a la industria de procesos. Si bien se busca presentar con rigurosidad las herramientas de análisis y diseño de sistemas a lazo abierto y cerrado, esta obra está destinada a estudiantes de las carreras de ingeniería en general e, ingeniería química y alimenticia en particular. La razón de dicha rigurosidad se basa en que se busca clarificar, en los estudiantes de grado, esa la dificultad de diferenciar entre cosas que son estrictamente demostrables y otras que son el resultado de simples criterios prácticos, o como vulgarmente se dice, *de cocina*.

En el Capítulo 1 de esta obra, se incluye una breve reseña histórica de la evolución de los sistemas de control y de la teoría asociada a ellos. Luego, se mencionan conceptos fundamentales que permiten iniciarnos en forma sistemática en la teoría de control lineal, introduciendo en forma general definiciones, nomenclatura y simbología. También, se mencionan configuraciones básicas de sistemas de control tratando de familiarizar al lector con ejemplos clásicos de la ingeniería. Por último, se hace mención a la evolución histórica del control digital aplicado al control de procesos.

En el Capítulo 2 se derivan modelados matemáticos de sistemas típicos de la industria de procesos con un orden creciente de complejidad. Los modelos matemáticos rigurosos aquí planteados son derivados desde sus ecuaciones fundamentales y resultan ser no lineales. De manera que a partir de ellos, es posible obtener modelos lineales válidos dentro de un intervalo de operación.

En el Capítulo 3, se estudian las respuestas dinámicas de sistemas lineales simples (cuyas funciones de transferencia son sencillas, como las de primero o segundo orden, entre otras) al ser sometidos a diversos tipos de excitación de

---

<sup>1</sup>El temario que se dicta en dicha asignatura, es mucho más amplio y lo aquí presentado es tan sólo una primer versión, aspirando a ir incrementando el material publicado a medida que transcurran las ediciones

entrada (impulso, escalón y rampa). Basado en este estudio, se aspira que el lector pueda extrapolar con facilidad este tema a sistema LTI más complejos, tanto para sistemas a lazo abierto (como en este capítulo) como para sistemas lazo cerrado, los que son estudiados a partir del Capítulo 9.

En el Capítulo 4, se presentan conceptos básicos de variables de estado y su relación con el esquema clásico de representación salida/entrada. Para una mejor comprensión del tema se introduce conceptos de representación bajo formas canónicas, planos de fase y conceptos de controlabilidad y observabilidad de estados.

En el Capítulo 5 se presenta conceptos básicos de identificación de sistemas junto como métodos simples de estimación de parámetros de plantas muy populares en la teoría clásica de control de procesos. También se presentan algunos métodos que hacen usos de la técnica de cuadrados mínimos, que presentan la ventaja de usar un gran número de puntos, lo que suele dar en muchos casos mejores resultados. A lo largo de este capítulo se incluyen ejemplos con datos experimentales reales que muestran y discuten las diferentes técnicas aquí presentadas.

En el Capítulo 6 se introduce primeramente la terminología y conceptos básicos asociados a los elementos de medición. Luego se analiza las características deseables de un transductor asociándolas con sus respuestas estacionarias y dinámicas. También se mencionan consideraciones generales para la selección de un elemento de medición, conceptos básicos de fallas y fuentes de ruidos de medición, complementando con ejemplos los conceptos vertidos.

En el Capítulo 7 se presenta un breve resumen de las características inherentes de las válvulas de control. También, se discute como la cambia la característica de caudal una vez instalada una válvula de control. Asimismo, se incluye un procedimiento de dimensionamiento de válvulas de control, se discute la histéresis, el modelado matemático y se analiza el comportamiento dinámico de estos elementos de control final. Mediante ejemplos se aspira a dar una mejor comprensión del tema.

El Capítulo 8 tiene por objetivos (1) comprender la estructura de diferentes tipos controladores lineales P, PI, PD y PID; (2) comprender cuáles son los parámetros modificables en sus algoritmos (3) analizar la influencia de estos parámetros sobre las respuestas temporales a lazo abierto (LA) de los distintos tipos de controlador y (4) presentar algunos desarrollos tecnológicos propuestos que mejoran el desempeño de los controladores PID. También se incluyen conceptos básicos de control si-no a fin de entender el funcionamiento de este tipo de controlador. Finalmente ejemplos de aplicación de sistemas de control en la industria de procesos son presentados con el objeto de mostrar su amplio uso en la ingeniería química.

En el Capítulo 9 se analiza conceptos de acondicionamiento y escalamien-



to de señales que son sumamente útiles para la implementación práctica de un sistema de control. Posteriormente, se discute la diferencia entre realimentación unitaria y no unitaria, y su impacto en el de error estado estacionario.

En el Capítulo 10 se presenta las respuestas en frecuencia de sistemas LTI sencillos (primero y segundo orden, pasa alto y pasa bajo, etc.) junto con los diagramas de Bode y Nyquist.

El Capítulo 11 tiene por objetivo estudiar la estabilidad de los sistemas lineales, un tema clave de constante preocupación por los ingenieros de control al momento de ajustar controladores.

En el Capítulo 12 se estudia la técnica del lugar geométrico de las raíces, la que resulta de mucha utilidad en la teoría de control clásico al momento el ajustar de controladores y estudiar el desempeño de los sistemas de control en el dominio del tiempo.

En el Capítulo 13 se analiza el comportamiento dinámico y la estabilidad de los sistemas lineales cuando son realimentados con controladores, P, PI y PD. El análisis progresivo propuesto, crece en orden de complejidad a medida que aumenta el orden de la función de transferencia de la planta y la complejidad del controlador. Por tanto, resulta sencillo extender el análisis aquí propuesto a sistemas de mayor orden.

El Capítulo 14 tiene por objetivo presentar y discutir técnicas de ajuste tradicionales de controladores PID muy usados en la industria de procesos. Las diferentes técnicas se clasifican en tres grandes grupos, esto es, aquellas técnicas basadas en el conocimiento del modelo de la función de transferencia, técnicas semiempíricas que buscan minimizar una integral de error y técnicas basadas en ensayos experimentales muy populares en la industria de procesos.

En el Capítulo 15 se presentan estrategias avanzadas *tradicionales* de control que son en este momento muy usadas en la industria de procesos, en especial el control feedforward y el control en cascada.

En el Capítulo 16 se presenta una metodología para el análisis de configuraciones de control alternativas para sistemas MIMO basada en dos procedimientos de análisis cualitativo de lazos de control individuales.

Por último, en el Capítulo 17, se presentan ejemplos de aplicación de esquemas de control feedback, feedforward, cascada, etc. aplicados a sistemas que son típicos de la industria de procesos.

Finalmente, complementa esta edición cuatro apéndices que contienen la información necesaria para auxiliar el contenido de algunos capítulos.

Es de destacar que, si bien en este momento hay muchas herramientas computacionales disponibles para la enseñanza de las ingenierías como, MATLAB®, OCTAVE®, SCILAB®, Control Station®, entre muchas otras. En

esta obra en particular, se hace inca pié con el uso de Octave ya que se trata de un software libre con licencia GPL<sup>2</sup>, y presenta un grado de compatibilidad muy alto en sus comandos con Matlab.

La idea de impulsar software libre en la enseñanza universitaria de grado, no sólo esta asociada a que se trata de un software gratuito disponible en la web, sino que se trata de utilizar software, que en muchos casos es de alta calidad y que contribuye a brindar la igualdad de oportunidades en el proceso de enseñanza-aprendisaje en la Universidad pública. En este punto, se destaca además, a la comunidad de usuarios de Octave existente en las distintas universitarias alrededor del mundo, quienes intercambian de manera desinteresada todo tipo de información que contribuye no sólo a resolver problemas puntuales sino también a mejorar día a día este software.

## Reconocimientos

La idea de escribir esta obra surge como resultado de haber escrito un importante número de apuntes de cátedra y de la sugerencia de muchos estudiantes, quienes me alentaron en su momento, a escribir un libro. Gracias al feedback establecido con ellos, en el transcurso de los años, es que fue posible ir depurando esta obra hasta la presente versión, y de ahí mi agradecimiento a ellos.

Además, deseo agradecer a quienes me formaron en la teoría de control, Ing. Carlos Jacquat de la Facultad de Ingeniería Química de la Universidad Nacional del Litoral y al Dr. Jacinto Marchetti del Instituto Tecnológico para la Industria Química de la Universidad Nacional del Litoral y del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), con quienes he compartido muchas horas de discusiones técnicas.

Además, deseo agradecer a la Universidad Nacional del Litoral por el soporte económico recibido a través de los diferentes CAI+D, que hicieron posible financiar en parte esta obra.

Finalmente, deseo agradecer a mi esposa e hijo ya que esta obra no hubiese podido ser posible sin su colaboración, cariño y afecto.

---

<sup>2</sup>Para más datos se sugiere consultar, <http://www.gnu.org/software/octave/>

# Capítulo 1

## Introducción al Control de Sistemas

Primeramente, en este capítulo se incluye una breve reseña histórica de la evolución de los sistemas de control y de la teoría asociada a ellos. Luego, se mencionan conceptos fundamentales que permiten iniciarnos en forma sistemática en la teoría de control lineal, introduciendo en forma general definiciones, nomenclatura y simbología. También, se mencionan configuraciones básicas de sistemas de control tratando de familiarizar al lector con ejemplos clásicos de la ingeniería. Además, se estudiará (sin entrar en grandes detalles) los aspectos generales necesarios para el diseño de sistemas realimentados, introduciendo conceptos de sensibilidad, influencia de perturbaciones y ruidos. También, se presentan ejemplos de sistemas realimentados en ingeniería. Finalmente, se presenta brevemente, la evolución histórica del control digital aplicado al control de procesos.

### 1.1. Introducción

El control automático ha jugado un papel importante en el avance de la ciencia y de la ingeniería. Es de extrema importancia en los procesos industriales y de manufactura, en el control de aeronaves y vehículos de alta tecnología, en sistemas de guías de proyectiles, entre muchos otros ejemplos.

Muchos trabajos que pueden ser incluidos en el área de control nacen posiblemente muchos siglos atrás, pero sin una teoría o un conocimiento sistemático que ordenara la automatización y el control de sistemas o procesos. Tal vez, uno de los primeros trabajos significativos en el control automático fue el regulador centrífugo de Watts para el control de velocidad de una máquina de vapor, pero también existen aplicaciones prácticas que se remontan a muchos siglos atrás como se comenta en la próxima sección. En la actualidad, los sistemas de con-

trol se encuentran en todo tipo de aplicaciones, tanto en industria de procesos química y alimenticia (control de reactores, columnas de destilación, intercambiadores de calor, etc.), como en tecnología satelital, militar, en máquinas extremas (vehículos de carreras, aviones de todo tipo y naves espaciales) y tecnología de aplicación doméstica como heladeras, lavarropas, etc. Podríamos decir que el mundo como hoy lo conocemos no estaría en funcionamiento sin el uso adecuado de los sistemas de control y estos sistemas han logrado alcanzar un alto grado de sofisticación gracias al avance de la electrónica, la computación y los sistemas de transmisión de señal, que permiten enviar y recibir información a distancia a alta velocidad.

## 1.2. Breve Reseña Histórica

Como se mencionó antes, los primeros trabajos relacionados al control de sistemas se remontan a varios siglos atrás. Así, puede encontrarse como antiguos constructores de templos desarrollaron un sistema automático de apertura y cierre de puertas. Este y otros ingeniosos mecanismos fueron estudiados y documentados por Herón <sup>1</sup> (aproximadamente siglo II aC) y presentados en su obra Neumática. Más cercanos a nuestros tiempos, nace con Laplace a finales del siglo XVIII una de las herramientas matemáticas por excelencia en la teoría de control lineal (ver apéndice) conocida como Transformada de Laplace. Lyapunov (1892) realiza su aporte a la teoría de estabilidad de sistemas, Minorsky (1922) trabajó en controladores automáticos de dirección de barcos y mostró como se podía determinar la estabilidad a partir de ecuaciones diferenciales que la describen. Hazen (1934) introdujo el término servomecanismo para sistemas de control de posición y desarrolló el diseño de dichos sistemas. Bode ([19]) y Nyquist ([64]) desarrollaron procedimientos relativamente simples para determinar la estabilidad de sistemas de control lineal a partir de respuestas en frecuencia.

Durante la década del 40, se impulsan los métodos de respuesta de frecuencia que posibilitaron a los ingenieros el diseño de sistemas de control basado en hipótesis de linealidad. El primer método de ajuste de controladores industriales aparece con el trabajo de Ziegler y Nichols ([88]) seguido de un sin número de trabajos similares que aún son motivo de tareas de investigación. Desde fines de los 40 y principio de los 50 Evans ([28] y [29]) desarrolló el método del lugar de las raíces <sup>2</sup>. Surge a finales de los 50 y principio de los 60 la teoría de control moderna y su desarrollo se orientó hacia lo que se designó como sistemas de control óptimo. En este contexto, el primer gran aporte fue hecho por Kalman

---

<sup>1</sup>"Neumática" se publicó en una traducción italiana por Aleotti en 1547 en Bolonia. Más tarde apareció una versión latina (del griego al latín) preparada por F. Commandine (Urbino, 1575). La traducción de éste texto (guardada en el Museo Británico) sirvió de base para la versión inglesa de "THE PNEUMATICS" (desde el original en griego) por Bennet Woodcroft (editada en 1851 y reeditada en 1971).

<sup>2</sup>Cabe aquí destacar que los métodos de análisis de respuesta en frecuencia y de lugar de las raíces constituyen una base importante de la teoría clásica de sistemas de control.

( [42]) y esta teoría fue clave en el desarrollo de la ingeniería aeroespacial para el control de proyectiles. Durante las décadas de los 60 y 70 se trabajó activamente en lo que se designó como control estadístico y estocástico que aún en la actualidad son motivo de fuertes tareas de investigación. Casi paralelamente con lo anterior nace la teoría de control de sistemas discretos producto de la posibilidad de muestrear señales por computadora de sistemas industriales y que posteriormente derivó en la teoría de control predictivo, la que se basa en predecir el comportamiento dinámico futuro de los sistemas y actuar en consecuencia. Hoy en día es una de las ramas del control con mayor aplicación en la industria de procesos y aún en la actualidad es motivo de investigación. Sobre finales de los 70 y principio de los 80 se trabajó activamente en sistemas de control con adaptación y aprendizaje dando paso a principio de los 90 a los sistemas de control difuso y las redes neuronales. También, durante la década de los 80 y 90 se trabajó, y actualmente se trabaja, activamente en una rama de control conocida como control robusto ( [63]).

Ya a principios del siglo XXI, la solidez teórica alcanzada con el control óptimo lineal y el control predictivo permitió realizar formulaciones de diseño en línea de sistemas de control que satisfacen restricciones operativas, permitiendo cumplir con límites en las variables manipuladas, estados, variables de control, etc.

Las aplicaciones más recientes de la teoría de control ya no son exclusivas de los sistemas ingenieriles sino que se la encuentra aplicada a sistemas biológicos, a modelos económicos y socioeconómicos, y en muchas otras ramas del conocimiento. Como se ve, la teoría de control ha avanzado mucho, no sólo en sistemas lineales sino también en el campo de los sistemas no lineales y sistemas de control multivariantes, dando lugar a un sin número de aplicaciones impensadas.

## 1.3. Terminología y Definiciones

### 1.3.1. Sistemas y variables

**Definición 1.3.1 — Sistema.** Un sistema es una combinación de componentes que actúan conjuntamente y cumplen un determinado objetivo.

Un sistema es expresado mediante un modelo matemático descrito por las leyes fundamentales que lo gobiernan. Así, nos referiremos a las variables independientes en este modelo como las *señales de entrada* o simplemente *entradas* y las variables dependientes como *señales de salida* o simplemente *salidas*.

**Definición 1.3.2 — Entradas.** Son aquellas variables que estimulan independientemente el sistema y pueden inducir cambios en sus condiciones internas. Se definen dos tipos de entrada a saber, las manipuladas y las perturbaciones exógenas. Así,

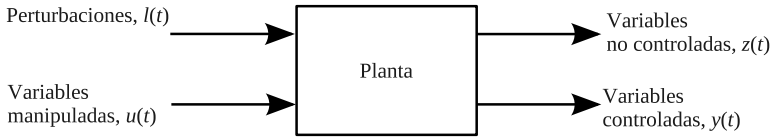


Figura 1.1: Variables de entrada y salida de un modelo de proceso.

1. Vector de variables manipuladas. Denotadas como  $u(t)$  son aquellas variables de entrada al sistema que están a nuestra disposición para ser accionadas libremente como queramos o bien, por medio del actuador vía orden del controlador.
2. Vector de perturbaciones. Denotadas como  $l(t)$  y consisten de todas las restantes señales de entrada al sistema que no son manipuladas y sobre las cuales no tenemos ningún control (es decir, que no estamos en posición de desear nada sobre ellas).

Por lo general, las perturbaciones son señales que tienden a *afectar adversamente* al sistema, suelen ser *no medibles*, y no se puede preveer el instante de tiempo en que actuarán. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina *interna*, mientras que si se genera fuera de éste se designa como *externa*, *exógena* o *variables de carga*. Las perturbaciones internas son generalmente difíciles de modelar y muchas veces no son consideradas en el modelo matemático de un sistema.

**Definición 1.3.3 — Salidas.** Son aquellas mediante las cuales obtenemos información a cerca del estado interno del proceso. Consisten de dos tipos, a saber:

1. Vector de señales o variables controladas. Denotadas como  $y(t)$  y consisten de las señales de salida que son accesibles al controlador vía sensor.
2. Vector de señales o variables no controladas. Denotadas como  $z(t)$  y consisten de todas las restantes señales de salida de un modelo.

Así, un modelo de un sistema consiste de dos vectores de entrada  $u$  y  $l$  (de dimensiones  $n_u$  y  $n_l$  respectivamente) y dos vectores de salida  $z$  e  $y$  (de dimensiones  $n_z$  y  $n_y$  respectivamente) de acuerdo con la Fig. 1.1.

Finalmente, aquellas variables de proceso que: 1) están disponibles para su medición *en línea* (*on-line*) son clasificadas como *variables medibles*, de lo contrario, 2) son llamadas variables *no medibles*.

## 1.3.2. Conceptos de sistemas de control

### Configuraciones de sistemas de control

La responsabilidad de un sistema de control contempla las siguientes tres grandes tareas:

1. Monitorear las variables de salida mediante mediciones.

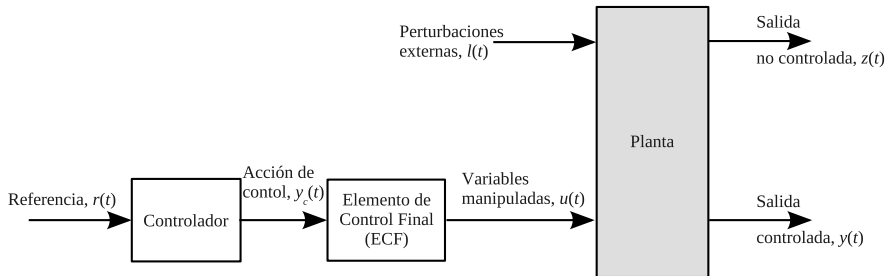


Figura 1.2: Sistema de control de lazo abierto (LA).

2. Tomar decisiones racionales observando que acción correctiva es necesaria sobre la base de la información del estado actual del proceso y el objetivo deseado.
3. Implementar efectivamente estas decisiones sobre el proceso.

Un sistema de control puede clasificarse como,

1. sistema de control manual esto es, cuando las tareas son llevadas a cabo manualmente por un operador humano, y por otro lado,
2. sistema de control automático o por computadora si estas tareas son llevadas a cabo automáticamente por una máquina o computadora.

Todo sistema de control se encuentra organizado de acuerdo con lo que se conoce como lazo de control.

**Definición 1.3.4 — Lazo de control [13].** Instrumentación dispuesta como una combinación de dos o más instrumentos o funciones dispuestas de modo que las señales pasen de una a otra con el fin de medir e indicar o controlar una variable de proceso.

Las configuraciones de sistemas de control más conocidas son las que se definen a continuación.

**Definición 1.3.5 — Sistema de control en lazo abierto.** Es un sistema de control en el que la salida controlada no tiene efecto sobre la acción de control.

En otras palabras, en un sistema de control de lazo abierto (Fig. 1.2) la salida controlada no es *realimentada* para su utilización.

**Definición 1.3.6 — Sistema de control feedforward.** Es un sistema de control a LA donde existe la posibilidad de la medición de una perturbación externa y de tomar una decisión correctiva al respecto.

Esta configuración de control se representa en la Fig. 1.3.

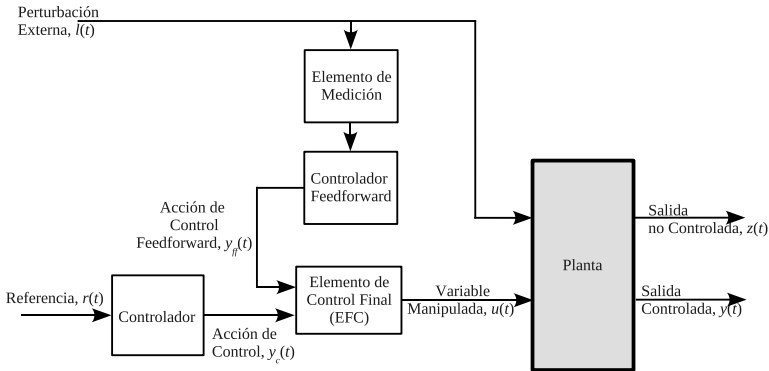


Figura 1.3: Sistema de control feedforward.

**Definición 1.3.7 — Sistema de control en lazo cerrado.** Es un sistema de control que tiende a mantener o llevar a la salida controlada al valor de referencia de entrada, comparando ambas y utilizando su diferencia en una ley de control preestablecida.

De acuerdo con las normas ANSI/ISA la referencia<sup>3</sup> se define como,

**Definición 1.3.8 — Referencia [13].** Una variable de entrada que establece el valor deseado de la variable controlada de forma manual, automática o mediante un programa en las mismas unidades que la variable controlada.

En este sistema de control la señal de salida tiene un efecto directo en la acción de control, como lo indica la Fig. 1.4.

Cabe aclarar que, un sistema de control en LC (Fig. 1.4) puede trabajar de dos modos diferentes a saber, como *sistema de control* (con referencia variable en ausencia de perturbaciones) y como *sistema de regulación* (con referencia fija en presencia de perturbaciones).

El uso de la realimentación permite una respuesta *relativamente* insensible a las perturbaciones internas o externas (que ingresan al sistema). En cambio, el sistema de control en lazo abierto (Fig. 1.2) no tiene capacidad de corregirlas una vez que éstas han ingresado, a menos que se trate de un sistema de control feedforward (Fig. 1.3) donde sólo se corrigen aquellas perturbaciones medibles. Así, en el control feedforward, si la corrección no es completa entonces un efecto residual de la perturbación de entrada puede visualizarse en la variable de control. Por tal motivo, existe una configuración de control que intenta corregir esta deficiencia del control feedforward que resulta de la combinación feedforward-feedback.

<sup>3</sup>También designada como consigna o *set point*.



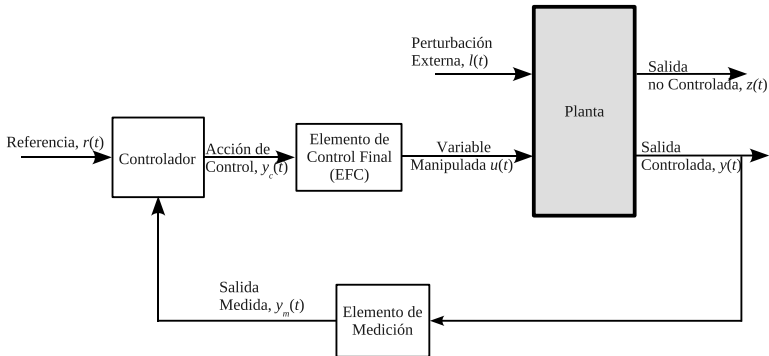


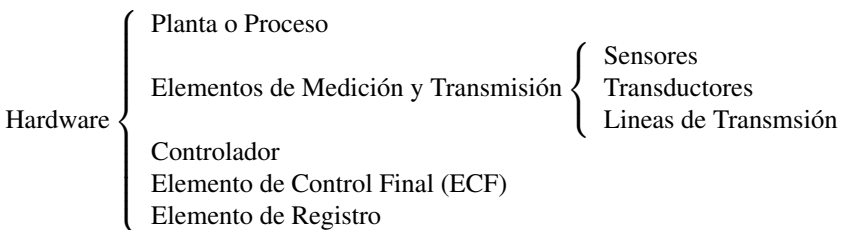
Figura 1.4: Sistema de control realimentado o en lazo cerrado (LC). Note que existen dos entradas (perturbaciones y referencia) para una misma salida controlada.

Por otro lado, desde el punto de vista de la *estabilidad*<sup>4</sup>, se puede decir que un sistema de control a lazo abierto será *estable* si los componentes individuales lo son. Mientras que, en los sistemas de control a lazo cerrado, la estabilidad constituye un *serio problema*, por la tendencia a sobre corregir errores que pueden producir oscilaciones de amplitud constante o variable con un continuo crecimiento.

**Elementos de hardware de un sistemas de control**

A continuación discutimos los distintos elementos físicos (hardware) que constituyen un sistema de control.

De acuerdo con los textos clásicos (Stephanopoulos ([84]), entre otros), en todas las configuraciones de control podemos distinguir los siguientes elementos de hardware:



A continuación se detalla cada uno de ellos.

1. *Planta o Proceso*. Representa todo el equipamiento físico junto con lo que allí ocurre.

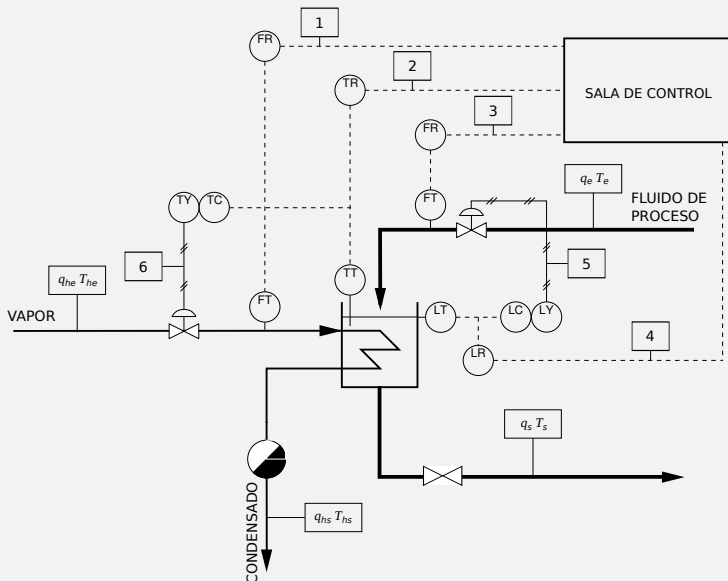
<sup>4</sup>El concepto de estabilidad se discute en profundidad más adelante.

2. *Elementos de Medición y Transmisión.* Está compuesto por, a) sensores, b) transductores y conversores y c) líneas de transmisión.
  - a) *Sensores.* Son aquellos elementos usados para la medición de las variables de entrada y salida de proceso. Estos pueden ser, termocuplas, rotámetros, celdas de presión diferencial, etc. Generalmente los más usados son aquellos que permiten una buena medición y el envío a distancia de la señal de medición. Por lo general, se busca que la naturaleza de la señal del sensor permita el envío a distancia de la información.
  - b) *Transductores y Conversores.* Son aquellos elementos encargados de acondicionar la señal enviada por el sensor para que puedan ser fácilmente transmitidas. Muchas mediciones no pueden ser usadas tal como son sensadas y estas deben ser acondicionadas a cantidades físicas que puedan ser transmitidas fácilmente (tales como un voltaje o corriente, o señal de presión standard). Usualmente, el sensor y el transductor forman parte de un único elemento de hardware.
  - c) *Líneas de transmisión.* Son usadas para llevar la señal medida desde el dispositivo de medición hasta el controlador y desde el controlador hasta el ECF. En la actualidad las líneas de transmisión constan de un cableado eléctrico que lleva una señal analógica a los controladores, los que actualmente operan con señal discreta. La conversión analógica-digital de entrada y digital-analógica de salida está a cargo de tarjetas conversoras (analógica-digital) que además acondicionan la señal de entrada al computador y la señal de salida del computador hacia el ECF. En el pasado estas líneas de transmisión eran neumáticas o bien hidráulicas. Estas pueden aún estar presentes en sectores de la planta donde deba moverse elementos de gran masa.
3. *Controlador.* Es el dispositivo que tiene a cargo aplicar las leyes de control escogidas por los expertos. Al controlador llegan dos señales: a) la señal de medición de la variable de control y b) la referencia que se desea mantener en esta variable controlada. Por otra parte, del controlador sale una única señal de control hacia el ECF.  
En la antigüedad los controladores analógicos operaban según leyes matemáticas simples sin embargo, actualmente los controladores digitales pueden incluir leyes sumamente complejas.
4. *Elemento de Control Final (ECF).* Son los elementos que implementan las decisiones que toman los controladores. El ECF más común en la industria de procesos suelen ser las válvulas de control, pero también pueden ser, relay o válvulas si-no (en control si-no), controladores de velocidad en bombas, entre otros ejemplos.
5. *Elementos de Registro.* Son dispositivos usados para almacenamiento y presentación de las variables registradas en un proceso. Usualmente las variables muestreadas en un proceso son almacenadas en dispositivos de memoria (discos duros) y presentadas en monitores en la sala de control,

permitiendo monitorear continuamente el comportamiento del proceso.

**Ejemplo 1.1** A modo de ejemplo considere el tanque de calentamiento de la Fig. 1.5, en el que se describe elementos de hardware del sistema de monitoreo y control adoptado.

En la Fig. 1.5 puede verse dos variables de control estas son, nivel de líquido y temperatura de la corriente de salida del tanque de calentamiento. Por el hecho de tener dos variables de control se tiene como consecuencia dos sensores y transductores (para temperatura y nivel de líquido), dos controladores y dos elementos de control final.



1	Registro de caudal de vapor (mA)	— / — / — Líneas de transmisión de información (psi)
2	Registro de temperatura (mA)	- - - - Líneas de transmisión de información (mA)
3	Registro de caudal de entrada (mA)	
4	Registro de nivel de tanque (mA)	
5	Salida controlador de caudal (psi)	
6	Salida controlador de temperatura (psi)	

Figura 1.5: Tanque de calentamiento con los elementos de hardware correspondientes para el control realimentado del nivel de líquido y la temperatura de la corriente de salida.

Además se incluye dos transductores y transmisores de flujo con el objeto de registrar las variaciones del caudal de alimentación  $q_e$  y el caudal de fluido calefactor  $q_{he}$ . Se trata de un sistema con múltiples entradas y salidas (MIMO) donde una representación en diagrama de bloques simple es la que se muestra

en la Fig. 1.6.

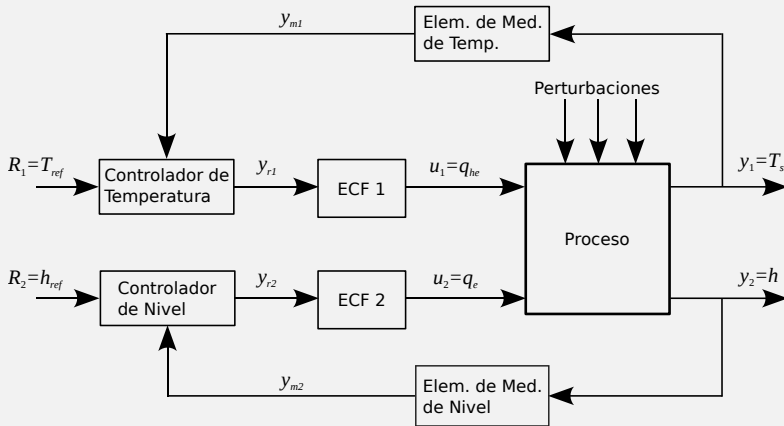


Figura 1.6: Representación en diagrama de bloques del sistema de control del tanque de calentamiento. Se entiende por elemento de medición 1 al sensor y transductor de temperatura (termocupla) y por elemento de medición 2 al sensor y transductor de nivel (CPD).

## 1.4. Aspectos Generales para el Diseño de Sistemas de Control

Las etapas que debemos tener en cuenta al momento de diseñar un sistema de control y poder satisfacer sus necesidades son: definir los objetivos de control, definir variables a medir, seleccionar variables manipuladas, seleccionar una posible configuración de control y diseñar un controlador.

A continuación se detalla cada una de estas etapas basadas en ideas expresadas en el trabajo de Stephanopoulos ([84]).

**Etapas 1. Definición de los Objetivos de Control.** La primera cuestión a resolver por un diseñador es:

*¿Cuáles son los objetivos operacionales que debe alcanzar un sistema de control?*

Los objetivos operacionales de control o de performance están relacionados a:

- Asegurar estabilidad del proceso,
- Eliminar la influencia de perturbaciones externas,
- Optimizar la performance o desempeño operativo y económico de una planta, o bien,
- Una combinación de las anteriores.

**Etapa 2. Definición de las Variables a Medir.** Cualquiera sean los objetivos de control fijados, necesitamos monitorear el comportamiento del proceso. Esto puede ser hecho midiendo variables de procesos estratégicamente seleccionadas. La cuestión inmediata es:

*¿Cuáles son las variables más indicativas que deberíamos medir a fin de monitorear el desempeño de la planta?*

Obviamente, deberíamos seleccionar aquellas variables que se encuentran más ligadas a nuestros objetivos de control. Hay dos tipos de mediciones posibles i) las mediciones primarias, que están relacionadas directamente a los objetivos de performance y ii) las mediciones secundarias que son aquellas mediciones escogidas cuando los objetivos de performance no están directamente relacionados a una cantidad medible.

**Ejemplo 1.2** Considere los dos posibles sistemas de monitoreo de la concentración de tope de una columna de destilación de la Fig. 1.7.

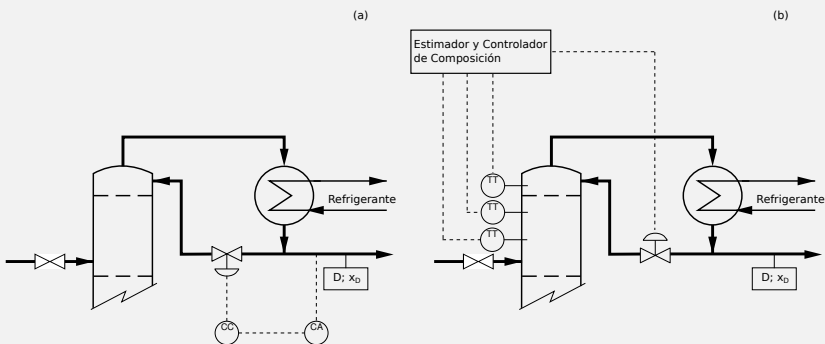


Figura 1.7: Representación esquemática de dos alternativas de monitoreo de la concentración de tope de una columna de destilación.

Claramente, se visualiza que la alternativa de la Fig. 1.7a es una medición primaria que está directamente relacionada con la variable de control mientras que, la alternativa de la Fig. 1.7b se trata de una medición secundaria en donde la composición de tope es estimada en base a una temperatura promedio calculada con la medición temperatura de los últimos tres platos. La segunda alternativa es una medición indirecta de la variable de control sin embargo, esta opción resulta ser más económica pudiendo a los fines prácticos ser la mejor opción, siempre y cuando no haya considerables cambios de presión en la columna. ■

**Etapa 3. Selección de Variables Manipuladas.** Una de las cuestiones a resolver está relacionada a como efectuar los cambios en el proceso. Esto es:

*¿Cuáles son las posibles variables manipuladas a ser usadas para controlar un procesos?*

Por lo general, todo proceso, independientemente de su complejidad, suele tener más de una variable manipulada a seleccionar con el fin de satisfacer los objetivos de performance. La selección de una u otra variable es de suma importancia en comportamiento dinámico del sistema de control. Un criterio usual para la selección de la variable manipulada, consiste en escoger aquella variable que actúa dinámicamente más rápida con la variable controlada.

**Ejemplo 1.3** Considere el intercambiador de calor de la Fig. 1.8 donde deseamos mantener la temperatura de la corriente 1 de salida.

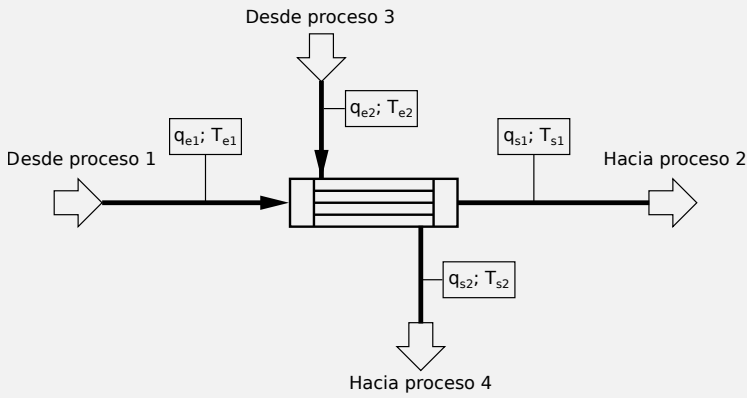


Figura 1.8: Representación de un intercambiador de calor. La corriente 1 ingresa con un caudal  $q_{e1}$  a la temperatura  $T_{e1}$  y sale con un caudal  $q_{s1}$  a la temperatura  $T_{s1}$ , mientras que la corriente 2 lo hace con un caudal  $q_{e2}$  a la temperatura  $T_{e2}$  y sale con un caudal  $q_{s2}$  a la temperatura  $T_{s2}$

El sistema tiene como variables independientes o de entrada en la corriente 1 al caudal ( $q_{e1}$ ) y su temperatura ( $T_{e1}$ ) mientras que en la corriente 2 al caudal ( $q_{e2}$ ) y su temperatura ( $T_{e2}$ ). Usualmente la temperatura no es una variable de proceso sencilla de manipular y menos aún en forma directa. Además, por lo general, un proceso reacciona dinámicamente más lento frente a cambio en la temperatura que frente a cambios en el caudal. Por tales razones las dos posibles variables manipuladas a escoger son  $q_{e1}$  y  $q_{e2}$ . Finalmente, si el caudal de la corriente 1 es el caudal de proceso, la decisión de manipular el caudal del fluido calefactor de la corriente 2 puede ser la mejor opción en este problema. ■

**Etapla 4. Selección de una Posible Configuración de Control.** Usualmente hay más de una posible configuración de control para un mismo proceso y para un mismo objetivo de performance. Así, la cuestión ahora a resolver es:

*¿Cuál es la mejor configuración de control para un dado proceso?*

Una metodología sistemática para ello podría ser la siguiente:

1. ¿Las perturbaciones son importantes? Debemos determinar como impactan las perturbaciones en nuestro proceso. Si su influencia es considerable entonces una estrategia de control en cascada podría ser la adecuada. También si alguna de ellas es medible entonces la combinación feedforward-feedback podría ser la mejor. Si su influencia no es lo suficientemente importante como para deteriorar la performance del sistema de control entonces, un control feedback podría ser suficiente.
2. ¿Las perturbaciones son muchas? Si son muchas entonces el control en cascada es tal vez el más adecuado y más aún si estas son importantes. De lo contrario, el control feedback puede que satisfaga nuestras expectativas. La idea de poner muchos sistemas de control feedforward en un mismo proceso puede ser costosa y muy poco práctica.
3. ¿Es importante el seguimiento de consignas? En determinados procesos tales como los sistemas batch, el seguimiento de consigna es más importante que la eliminación de perturbaciones. En estos casos, podría bastar con un buen ajuste de un control feedback o bien pasar a un control en cascada. También es posible aprovechar la repetitividad de la operación batch para dar lugar a la implementación de sistemas de control con aprendizaje.

También tiene importancia diferenciar si se trata de un sistema de control simple entrada y salida SISO o bien múltiple entrada y salida MIMO, ya que todo lo comentado anteriormente se complica considerablemente si se trata de un sistema MIMO.

**Etapa 5. Diseño de un Controlador.** El controlador es básicamente un elemento activo que está recibiendo permanentemente información de las variables medibles y enviando información a los elementos de control final. Así que la cuestión aquí es:

*¿Cómo usamos la información adquirida de las variables medidas para determinar los valores de las variables manipuladas?*

La forma en que se opera con las variables medidas y las referencias es conocida como *ley de control*. Esto es, dado un proceso, su configuración de control y sus objetivos de performance, debemos decidir entre varias posibles leyes de control, cual es la más adecuada para satisfacer nuestros objetivos de performance sujeto a la configuración de control escogida.

**Ejemplo 1.4** Considere el sistema hidráulico de la Fig. 1.9a donde ingresa un caudal de entrada  $q_e$  (m<sup>3</sup>/s) y se tiene un caudal de salida  $q_s$  (m<sup>3</sup>/s). El tanque tiene sección transversal constante  $A$  (m<sup>2</sup>) y se desea mantener el nivel de líquido  $h$  (m) en un valor constante deseado.

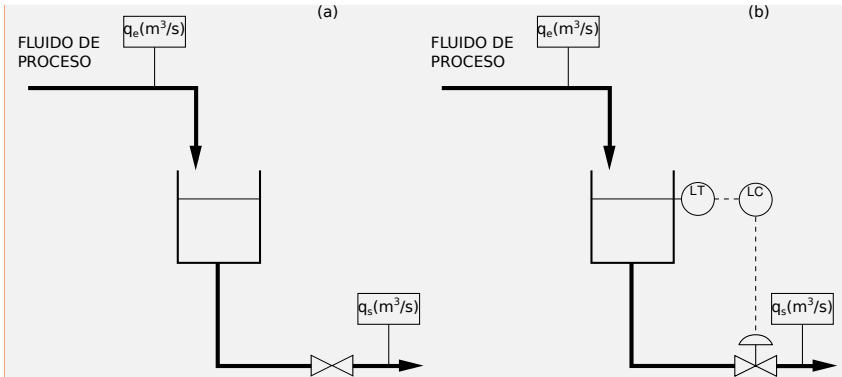


Figura 1.9: a) Sistema de almacenamiento de líquido a lazo abierto (LA). b) Sistema de almacenamiento de líquido a lazo cerrado (LC) con control de nivel.

*Variables del Proceso.* Las variables independientes y dependientes del proceso a lazo abierto son,

Variab. de entrada (independ.)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Manipulada: caudal de salida } (q_s) \\ \text{Perturbación: caudal de entrada } (q_e) \end{array} \right.$

Variab. de salida (depend.)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Controlada: nivel de líquido } (h) \\ \text{No controlada: ninguna para este proceso} \end{array} \right.$

*Modelo Matemático del Proceso.* El modelo matemático del proceso a lazo abierto de la Fig. 9a es bien conocido y puede ser rápidamente obtenido mediante el balance de materia global en el tanque de almacenamiento.

$$A \frac{dh}{dt} = q_e - q_s \quad (1.1)$$

En estado estacionario el caudal de entrada es igual al de salida y en consecuencia

$$0 = q_e^0 - q_s^0, \quad (1.2)$$

donde  $q_e^0$  y  $q_s^0$  son los caudales de estado estacionario en torno a la altura deseada  $h_0$ .

Restando las Ecs. (1.1) y (1.2) es posible obtener el modelo matemático en torno a un estado estacionario de referencia,



$$A \frac{d\hat{h}}{dt} = \hat{q}_e - \hat{q}_s \quad (1.3)$$

donde se definen las variables de desviación  $\hat{q}_e = q_e - q_e^0$  y  $\hat{q}_s = q_s - q_s^0$

*ETAPA 1. Definición de Objetivos de Control.* Además de asegurar la estabilidad del procesos, se propone eliminar las perturbaciones admitiendo una mínima desviación respecto al valor referencia.

*ETAPA 2. Definición de Variables a Medir.* La variable a medir para lograr el objetivo fijado en la etapa anterior es el nivel de líquido del tanque mediante algún sensor que permita transmitir a distancia la señal de la salida controlada.

*ETAPA 3. Selección de las Variables Manipuladas.* Teniendo en claro a través del modelo matemático las variables dependientes e independientes, es posible definir como variable manipulada al caudal de salida. Note que, bien podría haberse definido en este caso al caudal de entrada, si el proceso lo permite.

*ETAPA 4. Configuración de Control.* Una alternativa sencilla para controlar el proceso bien podría ser monitorear la altura de líquido y manipular el caudal de salida del tanque. Dicha configuración de control realimentado se representa en forma esquemática en la Fig. 1.9b.

*ETAPA 5. Diseño del Controlador (Ley de Control).* La ley de control más simple que surge de una actitud intuitiva natural de acción frente a un cambio en el proceso es la ley conocida como ley de control proporcional, y consiste simplemente en actuar proporcionalmente al error de entrada detectado, en este caso, el error entre la señal de referencia y la variable de control. Si se tiene un cambio importante en el caudal de entrada (perturbación), se actúa fuertemente en el caudal de salida para mantener el nivel y viseversa, perturbaciones pequeñas llevan a pequeñas acciones correctivas. De manera que, dicha ley puede ser escrita como,

$$\hat{q}_s = K\hat{h} \quad (1.4)$$

y donde se asume que el nivel de referencia permanece constante (cero en variables de desviación). El controlador que computa la acción de control *proporcional* a la magnitud de los cambios es conocido como controlador proporcional.

Sustituyendo la Ec. (1.4) en (1.3) y reordenando se tiene,

$$\frac{d\hat{h}}{dt} = \frac{1}{A}\hat{q}_e - \frac{1}{A}K\hat{h} \quad (1.5)$$

donde la última ecuación resulta en una ecuación diferencial ordinaria (ODE) lineal de primer orden cuya solución es bien conocida en los textos de matemática clásica de ingeniería. En este caso, asumiendo que  $\hat{q}_e$  cambia en una

amplitud constante  $k$  (típico cambio escalón,  $\hat{q}_e = k[\text{m}^3/\text{s}]$ ) es posible resolver analíticamente la Ec. (1.5) para obtener la variación de la altura de líquido en el tiempo del sistema en lazo cerrado con la ley de control proporcional, resultando ser,

$$\hat{h}(t) = \frac{k}{K} \left[ 1 - e^{-\frac{K}{A}t} \right] \quad (1.6)$$

La Fig. 1.10 compara la respuesta de lazo abierto del sistema hidráulico de la Fig. 1.9a con la del sistema en lazo cerrado de la Fig. 1.9b cuando la ley de control proporcional es implementada.

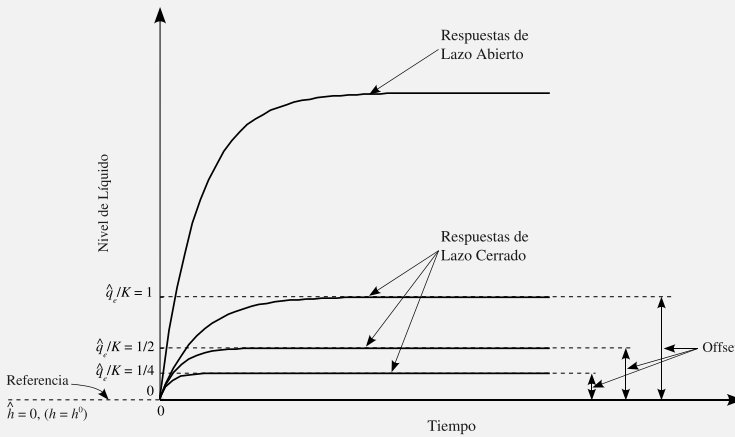


Figura 1.10: Respuestas dinámicas del sistema de almacenamiento de líquido a LA y a LC para cuando la relación  $\hat{q}_e/K$  toma valores 1,  $\frac{1}{2}$ , y  $\frac{1}{4}$ .

De acuerdo con la Fig. 1.10 puede verse que a medida que aumenta la ganancia  $K$  (en la ley de control), la respuesta estacionaria se acerca al valor deseado de referencia ( $h = h_0$ ) y en consecuencia, el error en régimen estacionario (offset) disminuye. También puede verse la notoria diferencia dinámica entre la respuesta de LA y de LC. Finalmente, la selección del valor de  $K$  depende de la tolerancia de error que se haya prefijado en la Etapa 1. ■

**Ejemplo 1.5** Considere el sistema realimentado expresado en el campo de Laplace representado en la Fig. 1.11<sup>a</sup>.

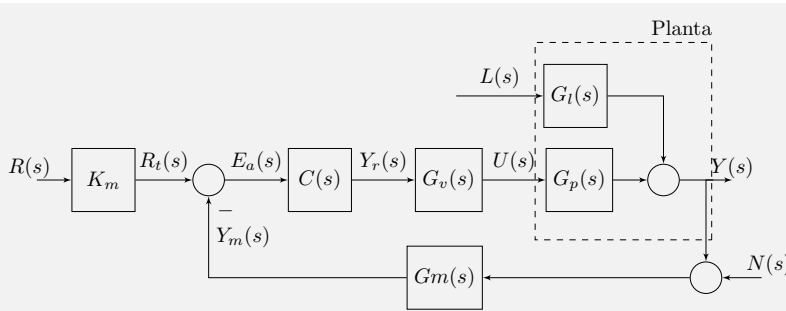


Figura 1.11: Sistema realimentado con tres entrada ( $R$ ,  $L$  y  $N$ ) y una sola variable de control ( $Y$ ). Por simplicidad y para este ejemplo se asume  $K_m = G_m$ .

Donde,  $G_p(s)$  es la función de transferencia entre la variable controlada ( $Y$ ) y la variable manipulada ( $U$ ),  $G_l(s)$  es la correspondiente entre la variable controlada y la variable de carga ( $L$ ),  $G_m(s)$  es la correspondiente al elemento de medición y  $G_v(s)$  es la función de transferencia del ECF que por simplicidad se asume que  $K_m = G_m$ . Bajo esta última suposición es fácil demostrar que,

$$\frac{Y}{L} = G_l \frac{1}{1 + G_p G_v C G_m} \quad (1.7)$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{K_m G_p G_v C}{1 + G_p G_v C G_m} \quad (1.8)$$

$$\frac{Y}{N} = -\frac{G_m G_p G_v C}{1 + G_p G_v C G_m} \quad (1.9)$$

Se define a la función sensibilidad nominal como

$$S = \frac{1}{1 + G_p G_v C G_m} \quad (1.10)$$

y la función sensibilidad complementaria como

$$T = \frac{G_m G_p G_v C}{1 + G_p G_v C G_m} \quad (1.11)$$

Así, sobre la base de ambas definiciones se observa que se cumple que  $S + T = 1$ .

Note que:

1. Como uno de los objetivos del problema de control es reducir el efecto de las perturbaciones exógenas sobre la variable de control (problema de regulación) luego, se debe elegir el controlador cuya ley de control permita que  $S \rightarrow 0$ . De esa manera,  $y(t) \rightarrow 0$  para todo  $t \geq 0$  y  $l(t) \neq 0$  y acotada<sup>b</sup>
2. Por otro lado, también es objetivo del sistema de control el seguimiento de consignas (problema de control) entonces, se debe elegir el controlador tal que  $T \rightarrow 1$ . Así,  $y(t) \rightarrow r(t)$  para todo  $t \geq 0$  y  $r(t) \neq 0$  y acotada.
3. Dado que el ruido es una señal de entrada indeseable entonces, para un  $N \neq 0$ , es también objetivo de un sistema de control eliminarlo, en otras palabras el controlador debe ser elegido tal que su ley de control permita que  $T \rightarrow 0$  y así  $y(t) \rightarrow 0$  para todo  $t \geq 0$  y  $n(t) \neq 0$ .

Claramente surge de estas tres observaciones que, si se pretende eliminar perturbaciones y seguir consignas se debe elegir un controlador tal que  $S \rightarrow 0$  y  $T \rightarrow 1$  simultáneamente, lo cual es posible ya que  $S + T = 1$ . Pero, si el problema de ruido está presente y es de considerable importancia, debemos reducir la sensibilidad complementaria y consecuentemente aumentar la sensibilidad nominal. O sea, se pierde calidad en el problema de seguimiento y de eliminación de perturbaciones. En otras palabras, se trata de alcanzar una solución de compromiso entre problemas de regulación, seguimiento y eliminación de ruido. De manera que se trata de un problema abierto que merece un tratamiento individual al momento de particularizar el problema. ■

<sup>a</sup>Para este ejemplo se asume que el lector ya está familiarizado con la transformada de Laplace (ver Apéndice B) y el álgebra de diagrama de bloques (ver Capítulo 2).

<sup>b</sup>Más adelante se discutirá sobre el concepto de señal o entrada acotada. Por el momento, basta con saber que se trata de una entrada cuya amplitud es finita en todo instante de tiempo ( $t \geq 0$ ).

## 1.5. Sistema de Control Digital en Control de Procesos

La primer pregunta que surge es, ¿qué ventajas trae implementar un sistema de instrumentación digital? Las razones bien podrían ser las siguientes:

1. Los sistemas digitales son *más precisos* dado que, al manipular señales discretas en lugar de señales analógicas, los ruidos provenientes de distintos sectores de la planta son eliminados. De otra manera, estos se sumarían a los ya existentes en el proceso en sí.
2. Los sistemas digitales son *más flexibles*, ya que los algoritmos de control pueden ser cambiados y las configuraciones del controlador pueden ser fácilmente modificadas. Además, es posible implementar algoritmos de control altamente sofisticados que buscan óptimos operativos sin saturación de manipuladas, variables de control y variables medidas.

3. Los datos digitales guardados en archivos son *fácilmente manipulables*, pudiendo imprimirse en papel, presentados en terminales gráficas a color, almacenados en discos rígidos, CD o DVD, memorias flash, etc., con un gasto de mantenimiento bajo.

Algunos autores (Seaborg et al. [75], entre otros) clasifican al manejo de los datos muestreados en planta de dos formas:

1. la *aplicación pasiva*, que consiste en el procesamiento *offline* por computadora de los datos de procesos para un posterior análisis de los mismos, ya sea para diagnosticar fallas, incorporar de alarmas, etc.
2. la *aplicación activa* que consiste en la manipulación *online* por computadora de los datos del proceso, para así lograr el control y la optimización del mismo.

El control digital asistido por computadora ha ido cambiando con el paso de tiempo como consecuencia de un incesante cambio en las tecnologías electrónicas y el abaratamiento de las mismas. En rasgos generales, se puede distinguir distintas filosofías aplicadas a los sistemas de control, las que se enumeran a continuación y que son una consecuencia de la evolución tecnológica.

1. Sistema de control de set-point y control centralizado.
2. Sistema de control distribuido.
3. Sistema de control jerárquico distribuido.

### 1.5.1. Sistema de control de set-point y control centralizado

A principios de los años 70 las computadoras habían alcanzado un grado de madurez tal que se hizo posible su aplicación en el control automático industrial.

Los sistemas neumáticos y el costo descendente de los controladores electrónicos habían mostrado un alto grado de confiabilidad, ya que las fallas en estos sistemas se limitaban a un elemento local (como por ejemplo, controlador, registrador o válvula de control), lo que en muchos casos se podía corregir sin detener el proceso.

Surge así dos tecnologías en paralelo que se llamaron, *control de set-point* o de valores deseados (SPC por su designación en Inglés) y el *control centralizado*.

En el SPC los controladores *analógicos* efectuaban el control de la planta en forma convencional siendo estos supervisados por una computadora y sus set-point ajustados en función de algoritmos de optimización. Además, una falla en la computadora no afectaba el control de la planta, ya que los controladores tenían los últimos valores de set-point calculados ([85]).

Casi en paralelo con el SPC surgió la idea de trasladar todo el procesamiento de control hacia una computadora teniendo como interfases, tarjetas de entrada-salida que se encargaban de la conversión de las señales analógicas a digital y viceversa. Esta forma de trabajo se designó *sistema de control centralizado*. Si bien dicho sistema mostró ser exitoso a pequeña escala (sistemas de control industrial chico o bien de laboratorio), mostró no ser seguro a escala industrial

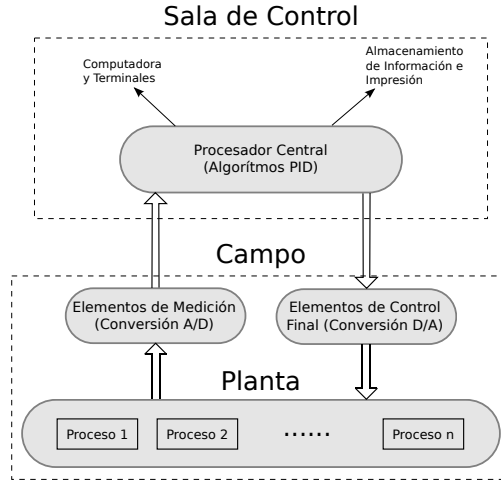


Figura 1.12: Sistema de control centralizado.

mediana o grande, ya que un inconveniente en la computadora central podía detener toda una planta de producción o peor aún llevarla a la inestabilidad. La solución a este problema era incorporar una *computadora redundante* que estaba a la espera de una falla y sólo en ese momento se transfería el mando de la computadora principal a la redundante. También se incorporaban paneles e indicadores convencionales los que podían ser utilizados al momento de la falla. Esta alternativa aumentaba el costo de instalación, ya que era necesario duplicar parte de la instrumentación y el cableado, para que una parte ella permaneciera sin uso durante largo tiempo, a la espera de una falla.

La Fig. 1.12 muestra un esquema sencillo de un sistema de control centralizado.

### 1.5.2. Sistemas de control distribuido

Los inconvenientes técnicos y de alto costo de inversión mencionados en la sección anterior junto con la aparición de los microprocesadores hizo que las tecnologías antes mencionadas dieran paso a sistemas más sofisticados conocidos como *sistema de control distribuidos* (DCS, por su sigla en Inglés). Así, los DCS se convirtieron en la alternativa tecnológica que, a principio de los 80, dieron paso a una migración y reconversión tecnológica de muchas plantas.

Básicamente en los DCS, las distintas unidades de procesamiento (independientes entre si) y sus correspondientes redundancias realizan las distintas tareas requeridas, lo que limita la consecuencia de una falla a una parte del proceso. La idea se podría interpretar como *bajar la inteligencia al campo*.

En términos generales se puede decir que un DCS se compone de las si-

guientes partes:

1. **Unidades de Interfase con los Operadores y Usuarios.** Básicamente consiste de terminales donde se presenta la información de la planta en tiempo real. Hay dos tipos de ubicación geográfica de estas interfases.
  - En *sala de control*. Usualmente esta información se presenta en gráficos elaborados mediante CAD que muestran los distintos sectores de la planta, con el estado de las variables y las alarmas, ya sea asociadas al estado del proceso o a algún tipo de falla.
  - En *display locales*. Generalmente se trata de estaciones con pantallas locales con información del estado *in situ* del proceso.
2. **Unidades de Procesamiento de Algoritmos de Control.** Estas unidades consisten en microprocesadores que permiten implementar más de 20 lazos PID individuales. La principal desventaja de esto es que se debe disponer de redundancia de este hardware para dar confiabilidad y seguridad al sistema frente a fallas. La reducción de costos y tamaños en los procesadores, junto con la flexibilidad de su programación, hizo que esta tecnología se imponga frente a la posibilidad de implementar una unidad de procesamiento por lazo, la que en principio se mostraba como una alternativa más confiable frente a posibles fallas.
3. **Unidades de Conversión y Adecuación de Señales.** Consiste de módulos de entrada-salida de señales donde se realiza la conversión de la señal de analógica de proceso a una digital. Dichos módulos tienen tarjetas de entrada-salida ubicados en racks. Estos últimos se encuentran en campo ubicados dentro de gabinetes protegidos. La comunicación entre los gabinetes y el resto del DCS se realiza mediante los buses de campo, lo que suelen ser redundantes y usualmente instalados por caminos diferentes dentro de la planta para evitar que un mismo accidente afecte a ambos buses.
4. **Bus de Datos.** Los procesadores y las unidades de conversión y adecuación de señales se comunican entre sí a través de cables llamados *buses*, los que permiten no sólo la distribución del procesamiento (y del consecuente riesgo), sino también la distribución geográfica de los módulos con las consecuentes reducciones de cableados y costos asociados.
5. **Unidades de Almacenamiento de la Información.** Usualmente son discos rígidos, CD y/o DVD en donde se guarda los registros históricos de las variables de proceso junto con otros datos y programas de control. La información histórica almacenada permitirá luego un análisis offline de la información a fin de tomar decisiones.
6. **Computadora con Propósito General.** Usualmente, un sistema de control sofisticado necesita de capacidades no consideradas en los sistemas de instrumentación. Estas podrían ser,
  - control supervisor,
  - estrategias de control avanzado como control predictivo, adaptivo, etc. y

- sistemas expertos, entre muchas otras alternativas.

Actualmente hay en disputa dos filosofías de Control Distribuido, claramente diferenciadas, denominadas Buses de Campo y Redes de Control Distribuido. Básicamente, las diferencias centran más en como se maneja la información adquirida y las tecnologías (hardware) asociadas a ellas, que en una topología o distribución geográfica de equipamiento de adquisición de datos y control.

### **Buses de campo**

Esencialmente consiste en convertir los Bus de Datos Paralelo en un Bus de Datos Serie permitiendo recorrer una cierta distancia (aproximadamente 100m) distribuyendo los datos en forma segura a través de la planta. Así toda señal analógica de campo será convertida a digital mediante módulos de conversión y transportada por el Bus de Campo a cualquier punto de la planta, incluyendo la sala de control.

Debido a la transmisión serie de los datos se logra reducir la cantidad de cables permitiendo además el uso de fibras ópticas, las que resultan útiles al momento de reducir la interferencia electromagnética.

Los datos digitales pueden ser analizados por una computadora o bien reconvertidos a señal analógica. Así esta tecnología maneja los datos en forma ascendente o descendente, pero tanto los buses de campo como sus módulos de adaptación de señal carecen de *inteligencia*, solamente se encargan de convertir y transportar la información.

Por tal razón, la principal desventaja en esta tecnología radica en la ausencia de inteligencia distribuida y para su funcionamiento obliga a disponer de un centro de control *on line* que se encargue de la conversión, captura, almacenamiento y control de las señales.

### **Redes de control distribuido**

Estas redes permiten la interconexión de múltiples dispositivos con al inteligencia suficiente como para soportar un protocolo de comunicaciones de red (Ethernet/TCP/IP o Industrial-Ethernet) permitiendo una comunicación interactiva entre los diferentes elementos y dispositivos de la red.

Las redes de control distribuidos tienen un grado de inteligencia tal que pueden conformar células autónomas de control con su propia capacidad de procesamiento y almacenamiento de la información y por tanto, pueden ser totalmente independientes de una computadora central. También, es posible desde la sala de control actuar sobre los distintos dispositivos de la red para modificar programas, transferir ficheros, requerir datos históricos almacenados, etc.

Es de destacar que la tendencia actual es el uso de Ethernet/TCP/IP dado que se dispone de un importante soporte proveniente de la ingeniería informática. Por tal razón, protocolos propietarios como PROFIBUS de Siemens están



siendo dejados de lados y transformando al protocolo Ethernet/TCP/IP como un estandar.

También, de las dos filosofías de DCS, la tecnológica actual parece inclinarse hacia las redes de control distribuido por sobre los buses de campo. Las principales razones de esto parece ser,

- la imposibilidad de incorporar inteligencia a los buses de campo y por otro lado,
- la posibilidad de incluir transductores y elementos de control final inteligentes.

La Fig. 1.13 muestra una representación esquemática general de un DCS, en donde no se hace distinción entre las filosofías de buses de campo y redes de control distribuido.

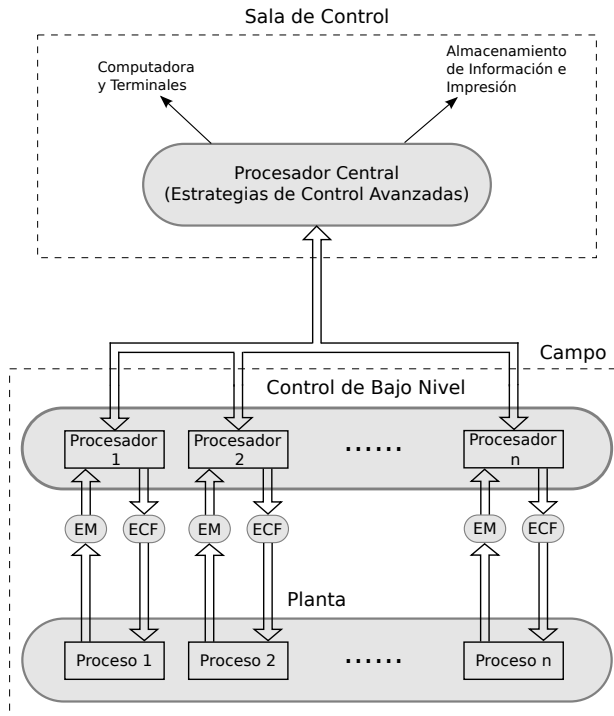


Figura 1.13: Sistema de control distribuido.

### 1.5.3. Sistemas de control jerárquico distribuido

Este concepto de sistema de control, busca integrar la posibilidad de incorporar decisiones políticas-empresariales asociadas a problemas de mercado de forma tal que las mismas impacten finalmente en el sistema de control de bajo nivel. Las políticas empresariales forman parte de un planeamiento económico

que mediante algoritmos computacionales son enviadas al procesador central. Dicho procesador puede incorporar

- algoritmos de optimización en tiempo real (RTO por su designación en Inglés) y
- estrategias de control avanzadas, como sistemas de control predictivos, entre otros.

La Fig. 1.14 muestra un sistema de control jerárquico distribuido.

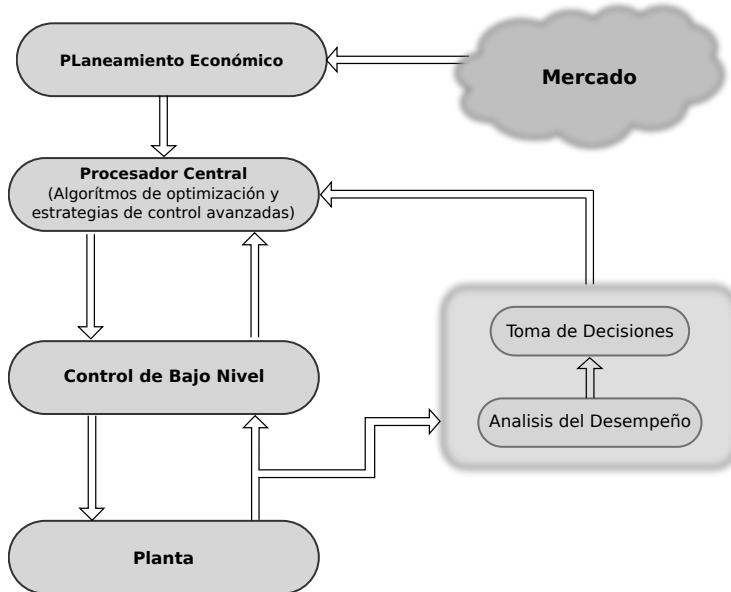


Figura 1.14: Sistema de control jerárquico distribuido.

## 1.6. Conclusiones

En este capítulo se presentó primeramente una breve reseña histórica de la teoría de control y sus aplicaciones con el objeto de mostrar al lector su importancia y su impacto en la actual vida cotidiana. Luego, se introdujo las definiciones y terminologías que se irán usando en esta obra, y que tratan de seguir a la jerga clásica del control tradicional. También se introdujeron las primeras configuraciones de control y sus aspectos generales para el diseño, las que son muy usadas en la industria de procesos, con ejemplos simple entrada-simple salida (SISO) y múltiple entrada-múltiple salida (MIMO).

## 1.7. Pensemos

1. Un sistema de control manual en comparación con el sistema de control realimentado tiene la ventaja de anticiparse al ingreso de perturbaciones no medibles.  **SI**  **NO**
2. Con un sistema de control realimentado es posible eliminar muchas perturbaciones mientras que con el control manual sólo es posible eliminar de una a la vez.  **SI**  **NO**



**Parte I**

**ANÁLISIS DE SISTEMAS A  
LAZO ABIERTO**



## Capítulo 2

# Modelado Matemático de Sistemas

Los modelos matemáticos rigurosos de sistemas planteados desde sus ecuaciones fundamentales resultan ser no lineales. De manera que a partir de ellos, es posible derivar modelos lineales válidos dentro de un intervalo de operación.

En este capítulo se presenta el modelado matemático de sistemas típicos de la industria de procesos con un orden creciente de complejidad. De esta forma, el lector se puede ir introduciendo en el tema, de una forma ordenada y sistemática, fundamentales.

### 2.1. Introducción

En diversos sistemas físicos el comportamiento no lineal (su no linealidad) es debido a comportamientos complejos y, frecuentemente, impredecibles o caóticos. Esta no linealidad frecuentemente aparece ligada a la autointeracción de variables, cambio de propiedades físico-químicas, alteración de los puntos de operación del sistema, que llevan a un comportamiento diferente de un sistema, dependiendo de zonas o ventanas de operación.

En las últimas décadas, la aparición de las computadoras digitales y consecuentemente, la simulación numérica, ha permitido a los científicos e ingenieros modelar de manera más rigurosa a los sistemas no lineales, permitiendo analizar mejor su comportamiento en el tiempo.

Más formalmente, un sistema físico descrito a través de sus ecuaciones fundamentales (ecuaciones de balance de fuerzas, cantidad de movimiento, materia, energía, entre otras) que representan su comportamiento son no lineales. Estas no linealidades puede deberse a diversos factores y pueden clasificarse como:

- *naturales o inherentes*: están naturalmente incluidas en el sistema, como las fuerzas centrípetas, fuerzas de fricción, etc. Usualmente tienen efectos

indeseables que los sistemas de control deben compensarlas;

- *discontinuas*: no pueden ser localmente aproximadas por funciones lineales, por ejemplo, la histéresis en movimiento de actuadores y válvulas de control, la fricción estática, etc;
- *continuas*: son aquellas cuyas representaciones matemáticas pueden ser localmente linealizadas;
- *estáticas*: representables por ecuaciones algebraicas (o por curvas que las describen);
- *dinámicas*: representables por ecuaciones diferenciales, o ecuaciones en diferencias;
- *artificiales o intencionales*: son introducidas intencionalmente por el diseñador, como las leyes de control adaptable.

Por tanto, un modelo matemático es una abstracción de un proceso real, que busca reproducir el comportamiento dinámico y estacionario del sistema mediante un conjunto de ecuaciones algebraicas y diferenciales (lineales o no lineales), y dicho comportamiento se aproximará a la realidad cuanto más riguroso sea el mismo.

Disponer de modelos matemáticos puede ser útil en el análisis y control de procesos por las siguientes razones:

1. Mejora el entendimiento del proceso.
2. Permite entrenar personal de operación de planta.
3. Diseñar estrategias de control.
4. Seleccionar puntos de operación para los controladores.
5. Optimizar condiciones de operación.

Los modelos pueden ser considerados en 3 diferentes *clases*, dependiendo de como son derivados,

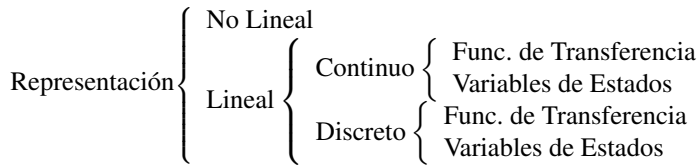
1. Modelos teóricos desarrollados a partir de leyes fundamentales de la física y de la química.
2. Modelos empíricos obtenidos a partir del análisis matemático desarrollados en base a datos de operación.
3. Modelos semiempíricos que son un compromiso entre 1 y 2.

Existen dos *tipos* de modelos:

1. **Modelos a parámetros concentrados**, lo que significa que las variables dependientes pueden ser asumidas sólo como una función del tiempo y no de la posición espacial. Por tanto, la representación matemática de dichos modelos es mediante ecuaciones diferenciales en variable de tiempo.
2. **Modelos a parámetros distribuidos**, lo que significa que las variables de salida son funciones del tiempo y la posición. Por esta razón, la representación matemática de dichos modelos es mediante ecuaciones diferenciales con derivadas parciales.

A continuación se detalla la *representación* matemática de modelos a parámetros concentrados.





## 2.2. Conceptos Elementales de Sistemas No Lineales

En principio tratemos de entender que es sistema no lineal en base a su comportamiento dinámico y estacionario.

En términos generales, se puede decir que los sistemas no lineales tienen un comportamiento que no es expresable como la suma de los comportamientos de sus descriptores. Dicho en otras palabras, el comportamiento de sistemas no lineales no está sujeto al principio de superposición, como lo es un sistema lineal.

**Definición 2.2.1 — Principio de Superposición.** Herramienta matemática que permite descomponer un problema o *sistema lineal* en varios subproblemas o subsistemas lineales más sencillos, de manera que el problema original se obtiene como superposición (o suma) de estos subproblemas más sencillos.

Para comprender mejor esto primeramente tratemos de entender que es un sistema lineal, definiendo en primera instancia una función lineal.

**Definición 2.2.2 — Función Lineal.** Una función lineal es aquella que satisface las siguientes propiedades:

- Aditividad:  $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- Proporcionalidad:  $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

**Definición 2.2.3 — Sistema Lineal.** Un sistema lineal es aquel que es descrito matemáticamente por una o más funciones lineales.

**Ejemplo 2.1** Considere la función  $y = mx$  con  $m$  y  $x \in \mathbb{R}$ .

Podemos verificar que dicha ecuación es lineal ya que cumple con las propiedades antes enunciadas.

- Aditividad. Sea  $x = x_1$  y  $x_2$  números reales luego,

$$y_1 = mx_1$$

$$y_2 = mx_2$$

se cumple que,

$$y = m(x_1 + x_2) = mx_1 + mx_2 = y_1 + y_2$$

- Proporcionalidad. Sea  $x_2 = \alpha x_1$  con  $\alpha$  y  $x_1$  números reales luego,

$$y_2 = mx_2 = \underbrace{m(\alpha x_1)}_{y(\alpha x_1)} = \underbrace{\alpha(m x_1)}_{\alpha y(x_1)} = \alpha y_1$$

Observe que el ejemplo anterior cumple con el principio de superposición.

Por tanto, ahora podemos introducir una primera definición de un sistema no lineal.

**Definición 2.2.4 — Sistema No Lineal.** Un sistema no lineal es aquél que no verifica el principio de superposición.

Siendo ahora un poco más específicos, podemos decir que muchos sistemas dinámicos no lineales pueden ser descritos por la ecuación diferencial vectorial de primer orden:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado y  $u \in \mathbb{R}^p$  es la entrada o ley de control (o simplemente control), y una ecuación de salida,

$$y = g(x, u) \quad (2.2)$$

donde  $y \in \mathbb{R}^m$  es un vector de variables de interés, por ejemplo variables físicamente medibles sobre las que deseamos un comportamiento determinado. Observe que los vectores  $u$ ,  $x$  e  $y$  pueden a su vez ser funciones del tiempo.

Muchas veces la entrada  $u$  no aparece explícitamente en (2.3), ya sea porque la entrada es cero o bien, porque fue especificada como una función del estado  $u = h(x)$  producto por ejemplo de una realimentación. Resultando la ecuación de estado para este caso

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.3)$$

Un concepto importante relacionado con la ecuación de estado (2.3) es el de puntos de equilibrio.

**Definición 2.2.5 — Puntos de Equilibrio.** Un punto  $x = x^*$  en el espacio de estado es considerado punto de equilibrio (PE) de (2.3) si tiene la propiedad de que cuando el estado inicial del sistema es  $x^*$ , dicho estado permanece en  $x^*$  en todo tiempo futuro.

Note que los PE de (2.3) son las raíces de la ecuación  $f(x) = 0$ , por lo que resulta que si el sistema alcanza el estado con raíces  $x = x^*$  de la Ec. (2.3), tendrá derivada nula y permanecerá allí indefinidamente.

Como las técnicas de análisis y control lineales son bien conocidas, siempre es conveniente, al analizar un sistema no lineal, comenzar linealizando el sistema alrededor de algún punto de operación y estudiar el sistema lineal resultante. Sin embargo esto puede no ser suficiente debido básicamente a dos razones:

1. la linealización en torno a puntos de operación, solo predice el comportamiento local, y consecuentemente no sirve para estudiar el comportamiento lejos del punto de operación;
2. un modelo no lineal es mucho más rico en información para predecir el comportamiento dinámico de un sistema, ya que un modelo lineal no puede predecir comportamientos debido a la presencia de fenómenos no lineales como: escape en tiempo finito, múltiples PE aislados, ciclos límites, oscilaciones sub-armónicas, armónicas o casi-periódicas, caos, etc., dado que éste último su validez solo se restringe a un pequeño espacio de operación.

### 2.2.1. Ejemplo ilustrativo. Sistema de almacenamiento de líquido

Considere el sistema de almacenamiento de líquido compuesto por un tanque que acumula un fluido de proceso y al mismo tiempo envía dicho fluido a otro sector de la planta de acuerdo con la Fig. 2.1.

Asumiendo que el tanque es cilindro con una sección transversal  $A$ , la ecuación de balance de materia que modela el comportamiento dinámico de dicho sistema resulta,

$$A \frac{dh}{dt} = q_e - K_{vl} \sqrt{h} \quad (2.4)$$

donde  $h$  es el nivel de líquido acumulado,  $q_e$  el caudal de entrada y la expresión  $K_{vl} \sqrt{h}$  modela el caudal de salida del tanque donde  $K_{vl}$  es el coeficiente de la válvula, que depende de la apertura de la misma y consecuentemente de la posición del vástago.

Para determinar el punto de equilibrio, este coincidirá cuando el sistema alcance el estado estacionario, que se alcanza cuando los caudales de entrada y salida son iguales. En otras palabras,  $dh/dt = 0$  y por tanto, de la Ec. (2.4),

$$h^* = \left( \frac{q_e}{K_{vl}} \right)^2 \quad (2.5)$$

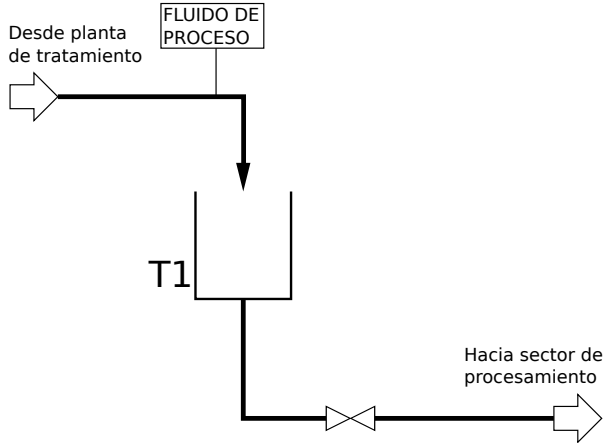


Figura 2.1: Sistema de almacenamiento de líquido.

La Fig. 2.2 muestra los puntos de equilibrio que se alcanzan en función del caudal de entrada, paramétrico con distintos coeficientes de válvula. Observe que a medida que se abre la válvula de salida de líquido, el coeficiente  $K_{vl}$  aumenta y el punto de equilibrio es cada vez menor, posicionando el nivel de líquido acumulado en un punto de operación mas bajo.

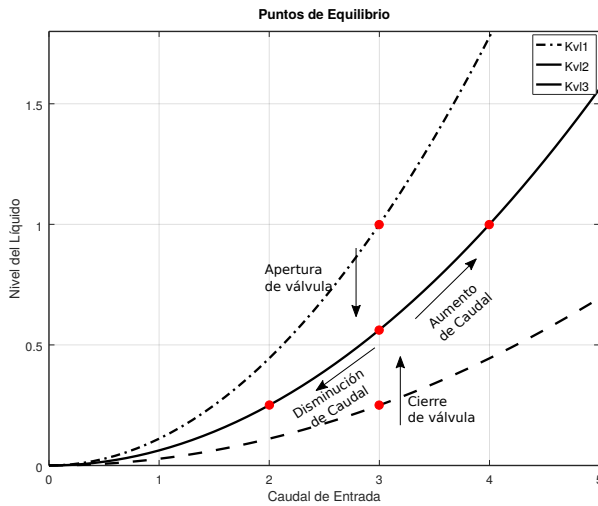


Figura 2.2: Nivel de líquido para distintos caudales de entrada, con  $K_{vl3} > K_{vl2} > K_{vl1}$ .

Por otro lado, si quiere posicionar al nivel de líquido en un estado estaciona-

rio más alto, sin actuar sobre la válvula de caudal de salida, entonces habrá que aumentar el caudal de entrada para alcanzar un punto de equilibrio más alto y viceversa, si se quiere posicionar al sistema en un punto más bajo.

## 2.3. Linealización de un Modelo Matemático No Lineal

La linealización es una técnica por la cual a partir de un modelo matemático no lineal se obtiene un modelo matemático lineal que aproxima al original.

### 2.3.1. Técnica de linealización en torno a estados estacionarios

La técnica más popular para obtener esta aproximación lineal se basa en la expansión en series de Taylor de los términos no lineales del modelo del proceso, en un entorno de un cierto estado estacionario o punto de operación elegido.

**Caso I.** Considere una función de una única variable  $y = f(x)$ . La representación mediante serie de potencia alrededor de un punto  $x = x^0$  de dicha función es,

$$y = f(x) = f(x^0) + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x^0} (x - x^0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)_{x=x^0} (x - x^0)^2 + \dots + \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right)_{x=x^0} (x - x^0)^k + \dots \quad (2.6)$$

$\forall 1 \leq k < \infty$  y  $\forall x \in X$ , siendo  $X$  el subespacio donde está definida la variable independiente  $x$ , por ejemplo, en la mayoría de los sistemas físicos  $x \in \mathbb{R}$ .

Si se asume que el modelo matemático lineal buscado tendrá validez en un entorno pequeño alrededor del punto de operación elegido entonces, para  $(x - x^0)$  tiendiendo a valores pequeños, sin mucho error se puede ignorar los términos de orden superior, con lo cual la Ec. (2.6) resulta,

$$y = f(x) \approx f(x^0) + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x^0} (x - x^0) \quad \forall (x - x^0) \rightarrow 0, \quad (2.7)$$

designando,

$$y^0 = f(x^0), \quad (2.8)$$

$$K = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x^0}, \quad (2.9)$$

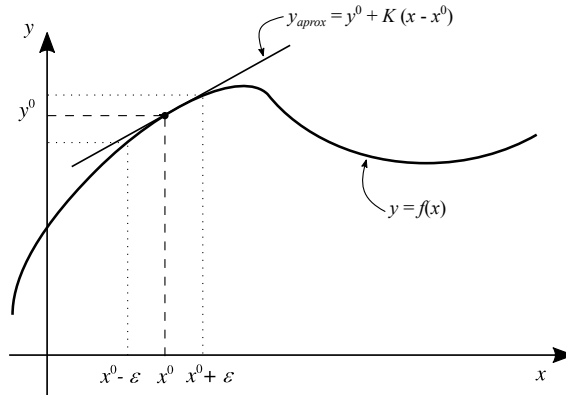


Figura 2.3: Interpretación gráfica de la técnica de linealización por serie de Taylor.

y reordenando (2.7),

$$y - y_0 \approx K(x - x_0), \quad (2.10)$$

o bien,

$$\hat{y} \approx K \hat{x}, \quad (2.11)$$

donde se define,  $\hat{y} = y - y^0$  y  $\hat{x} = x - x^0$ . Note que  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  son desviaciones de las variables  $x$  e  $y$  respecto del punto de operación elegido, esto es,  $(x^0, y^0)$ . Por tal razón,  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  son designadas en forma genérica como variables de desviación.

En la Fig. 2.3 se presenta una interpretación gráfica de la aproximación realizada al linealizar un modelo matemático no lineal por serie de Taylor en torno a un estado de operación  $x = x^0$ .

**Ejemplo 2.2 — Válvula de Control No Lineal.** Considere el sistema hidráulico de la Fig. 2.4a donde la funcionalidad entre el caudal de salida del tanque y el nivel de líquido está dada por,

$$q_s = C_V \sqrt{h}. \quad (2.12)$$

Obtenga una representación lineal para dicha válvula.

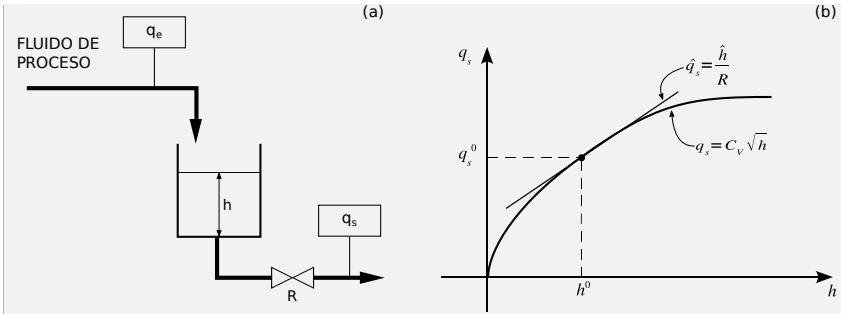


Figura 2.4: a) Sistema hidráulico. b) Curva característica de la válvula y su correspondiente aproximación lineal entorno al punto  $(h^0, q_s^0)$ .

Linealizando por serie de Taylor,

$$q_s = C_V \left( \frac{d\sqrt{h}}{dh} \right)_{h=h^0} (h - h^0), \quad (2.13)$$

despreciando los órdenes superiores y designando  $q_s^0 = q_s(h^0)$ ,

$$q_s = q_s^0 + \frac{C_V}{2\sqrt{h^0}}(h - h^0), \quad (2.14)$$

luego, definiendo  $R := 2\sqrt{h^0}/C_V$  se llega a,

$$\hat{q}_s = \frac{\hat{h}_s}{R}. \quad (2.15)$$

donde se define  $\hat{h} := h - h^0$  y  $\hat{q}_s := q_s - q_s^0$  y representan las desviaciones de la altura y del caudal respecto del punto de operación  $(h^0, q_s^0)$ . La Fig. 2.4b muestra la curva exacta del caudal de salida (Ec. (2.12)) y su correspondiente aproximación lineal (Ec. (2.15)) en torno al punto de operación. ■

**Caso II.** Resulta sencillo extender este análisis a una función de dos variables  $y = f(x_1, x_2)$ . La expansión en serie de Taylor debe hacerse en torno a un vector de operación  $x^0 = [x_1^0, x_2^0]^T$ , el cual puede representar un estado estacionario elegido. En este caso, el desarrollo en serie resulta,

$$\begin{aligned}
y = f(x_1, x_2) = & f(x_1^0, x_2^0) + \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right)_{x=x^0} (x_1 - x_1^0) \\
& + \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right)_{x=x^0} (x_2 - x_2^0) \\
& + \frac{1}{2!} \left[ \left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \right)_{x=x^0} (x_1 - x_1^0)^2 \right. \\
& + \left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 x_2} \right)_{x=x^0} (x_1 - x_1^0) (x_2 - x_2^0) \\
& \left. + \left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \right)_{x=x^0} (x_2 - x_2^0)^2 \right] + \text{Otros términos.}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Con similar hipótesis al caso anterior se pueden despreciar los términos de orden superior a uno, con lo que resulta,

$$y = f(x) = f(x_1^0, x_2^0) + \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right)_{x=x^0} (x_1 - x_1^0) + \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right)_{x=x^0} (x_2 - x_2^0), \tag{2.17}$$

designando,

$$y^0 = f(x_1^0, x_2^0), \tag{2.18}$$

$$K_1 = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right)_{x=x^0}, \tag{2.19}$$

$$K_2 = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right)_{x=x^0}, \tag{2.20}$$

y reordenando (8),

$$y - y^0 \approx K_1 (x_1 - x_1^0) + K_2 (x_2 - x_2^0), \tag{2.21}$$

o bien,

$$\hat{y} \approx K_1 \hat{x}_1 + K_2 \hat{x}_2, \tag{2.22}$$

donde se define,  $\hat{y} = y - y^0$ ,  $\hat{x}_1 = x_1 - x_1^0$  y  $\hat{x}_2 = x_2 - x_2^0$ .

**Caso III.** Considere un caso más general que el anterior, para cuando  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Por tanto, el desarrollo en serie de Taylor resulta,

$$\begin{aligned}
y = & f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right)_{x=x^0} (x_1 - x_1^0) \\
& + \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right)_{x=x^0} (x_2 - x_2^0) + \dots
\end{aligned} \tag{2.23}$$



Con similar procedimiento al anterior se tiene que,

$$y - y^0 \approx K_1 (x_1 - x_1^0) + K_2 (x_2 - x_2^0) + \cdots + K_n (x_n - x_n^0), \quad (2.24)$$

o bien,

$$\hat{y} \approx K_1 \hat{x}_1 + K_2 \hat{x}_2 + \cdots + K_n \hat{x}_n, \quad (2.25)$$

Note que la Ec. (2.25) representa al ecuación de un hiperplano apoyado sobre una hipersuperficie ambos en  $\mathbb{R}^n$ .

**Caso IV.** Considere un caso más general para  $y = f(x)$  dado por la siguiente ecuación:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

Linealizando por serie Taylor,

$$y = f(x) \approx f(x^0) + \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)_{x=x^0} (x - x^0) + \text{Otros Términos de Ord. Sup.}, \quad (2.27)$$

donde ahora  $x^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0]^T$  y

$$\left( \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)_{x=x^0} = J[f(x^0)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

donde  $J[f(x^0)]$  es el Jacobiano de  $f(x)$  evaluado en  $x = x^0$ . Luego, despreciando los términos de orden superior y designando  $y^0 = [y_1(x^0), y_2(x^0), \dots, y_n(x^0)]^T$  y  $K := J[f(x^0)]$  se tiene,

$$\hat{y} = K \hat{x}, \quad (2.29)$$

con  $\hat{y} := y - y^0$  y  $\hat{x} := x - x^0$ .

## Comandos de Octave relacionados al tema

Comando	
<code>syms var1 ... varN</code>	Define variables simbólicas <code>var1...varN</code> .
<code>diff(F, var, n)</code>	Realiza la derivada en $n$ -ésima forma simbólica de $F$ con respecto a la variable $F$ .
<code>jacobian(f, v)</code>	Computa la matriz Jacobiana de la función $f$ respecto a $v$ .
<code>subs(x, old, new)</code>	Retorna el valor de la variable $x$ reemplazando el viejo valor <code>old</code> por nuevo valor <code>new</code>
<code>double</code>	Arreglos de doble precisión. En el caso de variables simbólicas evalúa dichas variables numéricamente.

**Ejemplo 2.3** Linealice la función no lineal que define el caudal de salida a través de la válvula del tanque de almacenamiento de líquido del Ejem. 2.2 mediante los comandos de Octave. Asuma que  $K_{vl} = 0,5$  y la altura de estado estacionario es  $h = 2$ . Calcule además la resistencia hidráulica.

Los comandos de Octave para este ejemplo son los que se muestran a continuación.

**Algoritmo 2.1:** Código de Octave del Ejem. 2.3 para el cálculo simbólico y numérico de la resistencia hidráulica.

```

1 clear all , clc
2
3 pkg load symbolic
4
5 % defino variables simbolicas
6 syms h Kvl
7 % defino la funcion a derivar
8 system = [Kvl*sqrt(h)]
9
10 % Calcula la derivada
11 deri=diff(system,h)
12
13 % Calcula la resistencia hidraulica
14 capacidad=subs(deri,[Kvl,h],[0.5, 2])
15 R=1/capacidad
16
17 % valor numerico de R
18 Rnumeric=double(R)

```

En la ventana de comandos de Octave se presenta la siguiente respuesta:

```

OctSymPy: Communication established. SymPy
v1.1.1.
system = (sym) Kv1.  $\sqrt{h}$ 
deri = (sym)
Kv1
----
2.  $\sqrt{h}$ 

 $\sqrt{2}$ 
---
8
R = (sym) 4.  $\sqrt{2}$ 
Rnumeric = 5.6569

```

### 2.3.2. Metodología de trabajo

Basándose en lo detallado anteriormente a continuación se presenta un procedimiento de trabajo que busca dar orden a través de una secuencia de pasos que permita arivar a un modelo matemático lineal partiendo de ecuaciones de balance o fundamentales no lineales de un sistema real. Así la procedimiento sería el que se detalla a continuación.

#### Procedimiento 2.3.1

**Paso 1.** Plantee las ecuaciones de balance o fundamentales no lineales de un sistema real, escribiéndolas en el dominio del tiempo bajo la forma,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)), \\ y(t) &= g(x(t), u(t)). \end{aligned} \quad (2.30)$$

con  $y(t)$  el vector de variables de salida,  $u(t)$  el vector de variables manipuladas y  $x(t)$  el vector de variables de estado que definen al sistema.

**Paso 2** Linealice el sistema de ecuaciones mediante el desarrollo por serie de Taylor como se mostró en la Sección 4.2.1, obteniendo así la representación de estados en el dominio del tiempo de la forma,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned} \quad (2.31)$$

**Paso 3.** Aplique transformada de Laplace y obtenga la correspondiente representación de estados en el dominio de Laplace o bien la función

de transferencia salida entrada de la forma,

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad (2.32)$$

con  $Y(s)$  el vector de variables de salida y  $U(s)$  el vector de variables manipuladas en el dominio de Laplace y  $G(s)$  la matriz de funciones de transferencia.

**Paso 4.** Un paso alternativo, consiste en representar el sistema de ecuaciones mediante un diagrama de bloques, con el objeto de visualizar de manera gráfica la influencia de las variables de entrada sobre las de salida.

A continuación se detalla un ejemplo que busca presentar de manera sencilla el procedimiento antes detallado.

**Ejemplo 2.4** Considere el tanque cilíndrico de almacenamiento de líquido de la Fig. 2.1.

Determine el modelo matemático no lineal y lineal de dicho sistema junto con la función de transferencia que relaciona el nivel de líquido acumulado en función de los cambios de caudal.

**Paso 1.** Basándose en la ecuación de balance (2.4), en el estado estacionario se puede escribir,

$$0 = q_e^0 - K_{vl}\sqrt{h^0} \quad (2.33)$$

donde  $q_e^0$  es el caudal de estado estacionario y  $h^0$  el nivel de líquido en dicho estado.

Restando las Ecs. (2.4) y (2.33) se arriba al modelo matemático no lineal en variables de desviación,

$$A \frac{d\hat{h}(t)}{dt} = -\hat{q}_s(h, t) + \hat{q}_e(t) \quad (2.34)$$

donde  $\hat{h} = h - h^0$ ,  $\hat{q}_e = q_e - q_e^0$ ,  $\hat{q}_s = q_s - q_s^0$  y según la Ec. (2.12).

**Paso 2.** Luego, considerando (2.15) la ecuación de balance lineal en torno a  $h^0$  resulta,

$$\frac{d\hat{h}(t)}{dt} = -\frac{1}{AR}\hat{h}(t) + \frac{1}{A}\hat{q}_e \quad (2.35)$$

con  $R := 2\sqrt{h^0}/K_{vl}$ . Observe que ésta última ecuación tiene la forma de la Ec. (2.31).

**Paso 3.** Aplicando transformada de Laplace a la Ec. (2.35),

$$ARs\hat{H}(s) - \hat{h}(0) = -\hat{H}(s) + R\hat{Q}_e(s)$$

donde  $\hat{h}(0) = 0$ . Por tal razón, la ecuación anterior puede ser reescrita como,

$$ARs\hat{H}(s) = -\hat{H}(s) + R\hat{Q}_e(s) \quad (2.36)$$

Reordenando la ecuación anterior se llega a,

$$\frac{\hat{H}(s)}{\hat{Q}_e(s)} = \frac{R}{Ts + 1} \quad (2.37)$$

con  $T = AR$ .

**Paso 4.** Aplicando las reglas del álgebra de diagramas de bloques a la Ec. (2.36), se obtiene la representación de la Fig. 2.5(a), mientras que si Ec. (2.37) tiene como representación la Fig. 2.5(b).

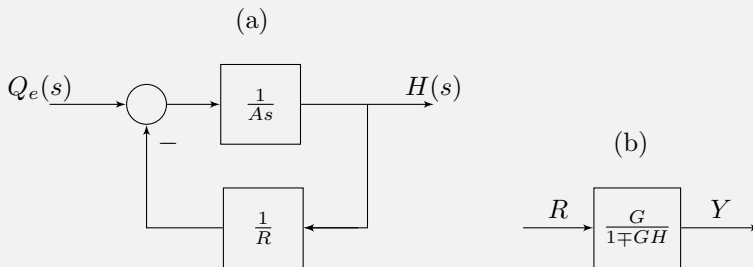


Figura 2.5: (a) Representación mediante DB la Ec. (2.36) y (b) la correspondiente a la Ec. (2.37).

Observe que si se aplica la Regla ?? al DB de la Fig. 2.5(a) se obtiene la Fig. 2.5(b). ■

## 2.4. Sistemas Hidráulicos

### 2.4.1. Sistema de tanques en cascada

Considere el sistema hidráulico representado en la Fig. 2.6.

Hipótesis:

1. Fluido incompresible (densidad ( $\rho$ ) constante) y propiedades físicas constantes.

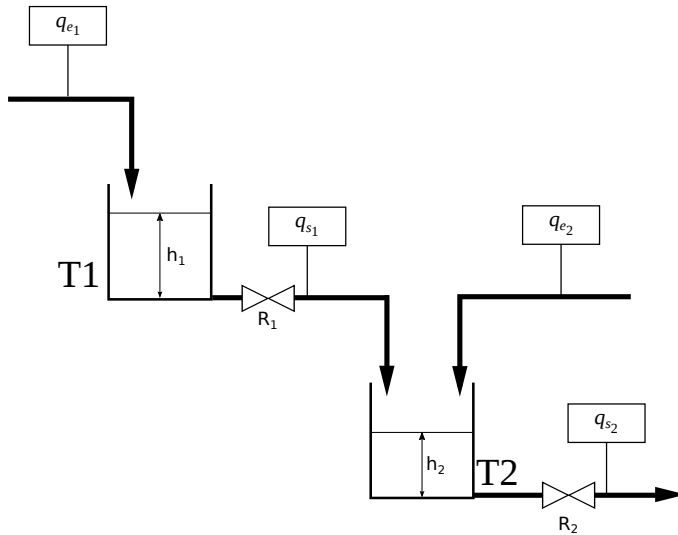


Figura 2.6: Representación del sistema de tanques en cascada sin interacción.

2. Todas las corrientes de líquido tienen la misma temperatura, la cual es considerada constante.
3. El caudal de salida a través de las válvulas en ambos tanques puede ser modelado adecuadamente como  $q_s = C_v \sqrt{h}$ . En consecuencia, las resistencias hidráulicas de los tanques son funciones de la raíz cuadrada del nivel de líquido en cada uno de ellos y puede ser considerada constante en un entorno pequeño del estado de operación del sistema ( $R_1 = \text{cte.} > 0$  y  $R_2 = \text{cte.} > 0$ ).
4. Las secciones transversales de los tanques ( $A_1$  y  $A_2$ ) son consideradas constantes en todo el rango de variabilidad de las alturas.

A continuación se plantean las ecuaciones de balance que conducen al modelo matemático no lineal del sistema de tanques en cascada.

#### *Balance de Materia*

La forma más simple de plantear el balance de materia es,

$$\left( \begin{array}{c} \text{Acumulación} \\ \text{de materia} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Materia} \\ \text{que ingresa} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Materia} \\ \text{que sale} \end{array} \right)$$

Para el tanque 1,

$$\frac{dV_1 \rho}{dt} = q_{e1} \rho - q_{s1} \rho, \quad (2.38)$$

Cuando la materia que ingresa en el tanque 1 es igual a la que sale de dicho tanque,

$$0 = q_{e1}^0 \rho - q_{s1}^0 \rho, \quad (2.39)$$

donde  $q_{s1}^0 = C_{V1} \sqrt{h_1^0}$  resulta ser el caudal de salida de estado estacionario.

Escribiendo como variables de desviación del estado estacionario,

$$A_1 \frac{d\hat{h}_1}{dt} = \hat{q}_{e1} - \hat{q}_{s1}, \quad (2.40)$$

donde  $V_1 = A_1 h_1$  y por hipótesis 2)  $A_1$  es constante.

Teniendo en cuenta la hipótesis 3), el caudal de salida del primer tanque puede ser expresado como  $q_{s1} = C_{V1} \sqrt{h_1}$ , y en consecuencia la Ec. (2.40) resulta,

$$A_1 \frac{d\hat{h}_1}{dt} = \hat{q}_{e1} - \left( C_{V1} \sqrt{h_1} - q_{s1}^0 \right). \quad (2.41)$$

Con similar razonamiento los balances de materia en estados transitorio y estacionario resultan,

$$\frac{dV_2 \rho}{dt} = q_{e2} \rho + q_{s1} \rho - q_{s2} \rho, \quad (2.42)$$

$$0 = q_{e2}^0 \rho + q_{s1}^0 \rho - q_{s2}^0 \rho, \quad (2.43)$$

reduce a,

$$A_2 \frac{d\hat{h}_2}{dt} = \hat{q}_{e2} + \hat{q}_{s1} - \left( C_{V2} \sqrt{h_2} - q_{s2}^0 \right), \quad (2.44)$$

donde  $q_{s2}^0 = C_{V2} \sqrt{h_2^0}$ . Finalmente, el modelo resulta matemático no lineal se resume a las Ecs. (2.41) y (2.44) reordenadas como sigue:

$$A_1 \frac{d\hat{h}_1}{dt} = - \left( C_{v1} \sqrt{h_1} - q_{s1}^0 \right) + \hat{q}_{e1}, \quad (2.45)$$

$$A_2 \frac{d\hat{h}_2}{dt} = \left( C_{V1} \sqrt{h_1} - q_{s1}^0 \right) - \left( C_{V2} \sqrt{h_2} - q_{s2}^0 \right) + \hat{q}_{e2}, \quad (2.46)$$

con condiciones iniciales  $h_1(t=0) = h_1^0$ ,  $h_2(t=0) = h_2^0$  o bien,  $\hat{h}_1 = 0$  y  $\hat{h}_2 = 0$ .

Con el objeto de obtener un modelo LTI del sistema hidráulico de la Fig. 2.6 se propone linealizar mediante un desarrollo en serie de Taylor

$$\begin{aligned} q_{si} &= C_{Vi} \sqrt{h_i} = C_{Vi} \sqrt{h_i^0} + \left( \frac{d(C_{Vi} \sqrt{h_i})}{dh_i} \right)_{h_i^0} (h_i - h_i^0) \\ &+ \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2(C_{Vi} \sqrt{h_i})}{dh_i^2} \right)_{h_i^0} (h_i - h_i^0)^2 + \text{Órdenes Superiores.} \end{aligned} \quad (2.47)$$

con  $i = 1, 2$ . Despreciando los términos de orden superior,

$$q_{si} - q_{si}^0 = \left( \frac{d(C_{Vi}\sqrt{h_i})}{dh_i} \right)_{h_i^0} (h_i - h_i^0) \quad (2.48)$$

$$= C_{Vi} 2\sqrt{h_i^0} (h_i - h_i^0),$$

donde  $q_{si}^0 = C_{Vi}\sqrt{h_i^0}$  con  $i = 1, 2$ .

Definiendo a la resistencia hidráulica de la válvula de salida de cada tanque como,  $R_i := 2\sqrt{h_i^0}/C_{Vi}$  con luego,

$$\hat{q}_{si} = C_{Vi}\sqrt{h_i} - q_{si}^0 \approx \hat{h}_i/R_i \quad (2.49)$$

con  $i = 1, 2$ .

Reemplazando (2.49) en (2.45) y (2.46) se tiene,

$$A_1 \frac{d\hat{h}_1}{dt} = -\frac{\hat{h}_1}{R_1} + \hat{q}_{e1}, \quad (2.50)$$

$$A_2 \frac{d\hat{h}_2}{dt} = \frac{\hat{h}_1}{R_1} - \frac{\hat{h}_2}{R_2} + \hat{q}_{e2}. \quad (2.51)$$

Estas dos últimas expresiones representan un modelo LTI del sistema hidráulico de dos tanques en cascada. Al aplicar transformada de Laplace a las Ecs. (2.50) y (2.51) se debe tener en cuenta que,

$$\mathcal{L} \left( \frac{d\hat{h}_i}{dt} \right) = s\hat{H}_i(s) - \hat{h}_i^0. \quad (2.52)$$

con  $i = 1, 2$  y donde en la ecuación anterior esta sujeta a las mismas condiciones iniciales que el modelo original (Ecs (2.45) y (2.46)) por tanto,  $\hat{h}_i = h_i^0 - h_i^0 = 0$ . En consecuencia las Ecs. (2.50) y (2.51) en el campo de transformado se reducen a,

$$A_1 s\hat{H}_1 = -\frac{\hat{H}_1}{R_1} + \hat{Q}_{e1}, \quad (2.53)$$

$$A_2 s\hat{H}_2 = \frac{\hat{H}_1}{R_1} - \frac{\hat{H}_2}{R_2} + \hat{Q}_{e2}, \quad (2.54)$$

Armando el diagrama de bloques del sistema LTI en base a las Ec. (2.53) y (2.54) se tiene,

Dicho diagrama puede ser reordenado como se muestra en Figs. 2.7 y 2.8,

## 2.4.2. Sistema de tanques con interacción

Considere el sistema hidráulico con interacción representado en la Fig. 2.9.

La idea en esta sección es encontrar un modelo matemático lineal del sistema de tanques con interacción. Las hipótesis para este modelo son similares a las de



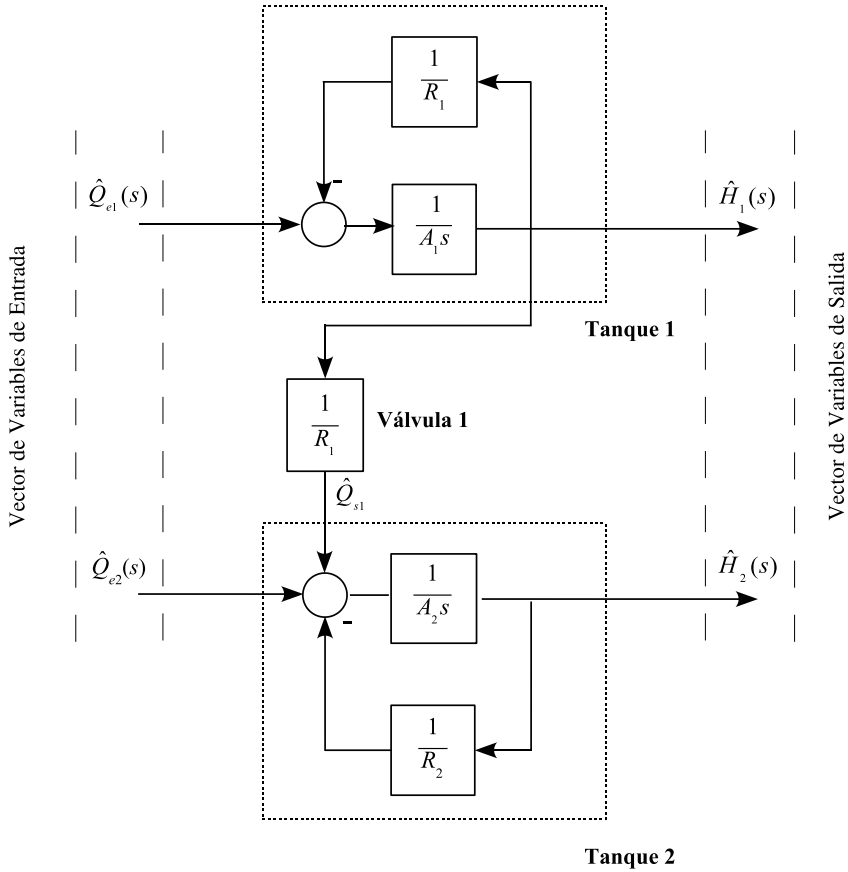


Figura 2.7: Diagrama de bloques del modelo matemático LTI del sistema hidráulico.

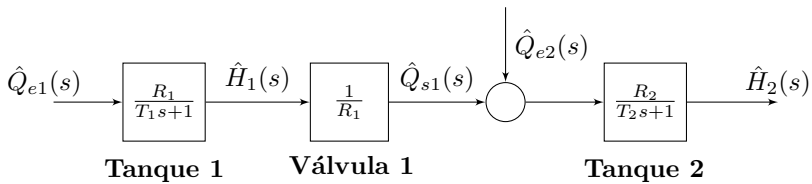


Figura 2.8: Reordenamiento del diagrama de bloques de la Fig. 2.7, donde se define  $T_i := A_i R_i$  con  $i = 1, 2$ .

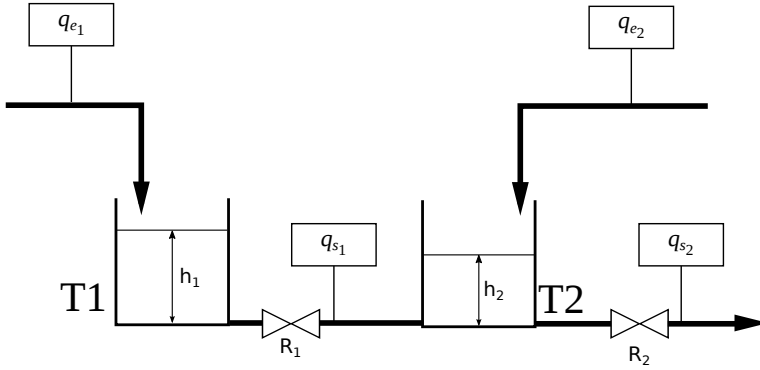


Figura 2.9: Sistema hidráulico de dos tanques que interactúan entre sí.

la sección anterior. Así, sólo se debe considerar la interacción entre los tanques y para ello agregamos la siguiente hipótesis al listado anterior:

- Se considera que no hay inversión de flujo, esto es  $h_1 > h_2$  en todo momento y por tanto el caudal de salida del tanque 1 es función de la diferencia de presión entre los tanques y es aceptablemente modelado considerando,  $q_{s1} = C_{V1}\sqrt{h_1 - h_2}$ .

Las ecuaciones de balance en este caso son similares a las planteadas en la Sección 3.1 por tanto el modelo matemático no lineal en variables de desviación se resume a,

$$A_1 \frac{d\hat{h}_1}{dt} = - \left( C_{V1}\sqrt{h_1 - h_2} - q_{s1}^0 \right) + \hat{q}_{e1}, \quad (2.55)$$

$$A_2 \frac{d\hat{h}_2}{dt} = \left( C_{V1}\sqrt{h_1 - h_2} - q_{s1}^0 \right) - \left( C_{V2}\sqrt{h_2} - q_{s2}^0 \right) + \hat{q}_{e2}, \quad (2.56)$$

con condiciones iniciales  $h_1(t = 0) = h_1^0$ ,  $h_2(t = 0) = h_2^0$  o bien,  $\hat{h}_1 = 0$  y  $\hat{h}_2 = 0$ .

Linealizando similarmente a lo hecho antes y reordenando las ecuaciones se tiene el modelo matemático lineal en el dominio del tiempo. Así resulta,

$$A_1 \frac{d\hat{h}_1}{dt} = -\frac{1}{R_1}\hat{h}_1 + \frac{1}{R_1}\hat{h}_2 + \hat{q}_{e1}, \quad (2.57)$$

$$A_2 \frac{d\hat{h}_2}{dt} = \frac{1}{R_1}\hat{h}_1 - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \hat{h}_2 + \hat{q}_{e2}, \quad (2.58)$$

y en el dominio de Laplace se arriba a,

$$A_1 s \hat{H}_1 = -\frac{1}{R_1}\hat{H}_1 - \frac{1}{R_1}\hat{H}_2 + \hat{Q}_{e1}, \quad (2.59)$$

$$A_2 s \hat{H}_2 = \frac{1}{R_1} \hat{H}_1 - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \hat{H}_2 + \hat{Q}_{e2}, \quad (2.60)$$

El diagrama de bloques de dicho sistema se representa en la Fig. 2.10,

Como se puede observar ahora existe una sutil diferencia entre el diagrama de bloques de la Fig. 2.7 y el de la Fig. 2.10, debido a la aparición de la interacción desde el tanque 2 hacia el tanque 1. A diferencia con el caso anterior, todo lo que ocurra con el nivel de líquido en tanque 2 tiene su impacto en el tanque 1.

## 2.5. Intercambiador de Calor

En la Fig. 2.11 se muestra un diagrama sencillo de un intercambiador de calor en donde se marcan las principales variables de entrada y salida.

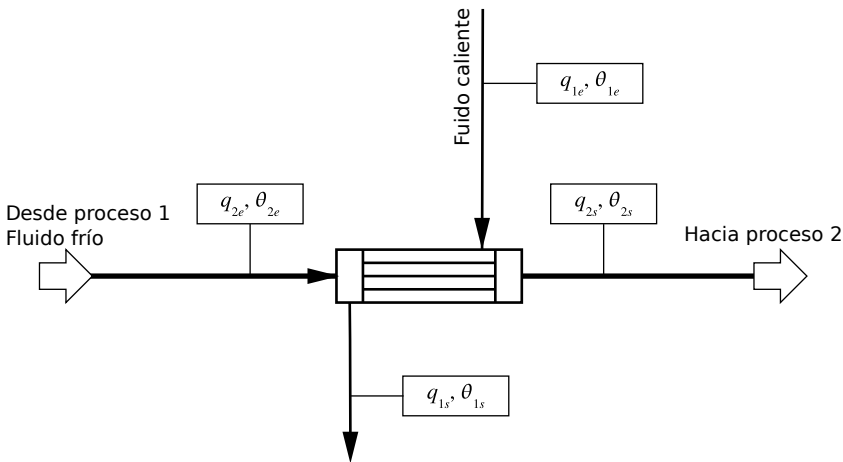


Figura 2.11: Diagrama de un intercambiador de calor.

El objetivo es obtener un modelo matemático no lineal y lineal a parámetros concentrados del sistema físico representado en la Fig. 2.11. Para tal fin, se propone interpretar el problema como un sistema dividido en dos compartimientos separados por una pared, y donde en cada compartimiento se asume mezcla perfecta. Dichas suposiciones se representan en un diagrama que sintetiza esta interpretación del intercambiador de calor que se muestra en la Fig. 2.12, permitiendo modelarlo a parámetros concentrados.

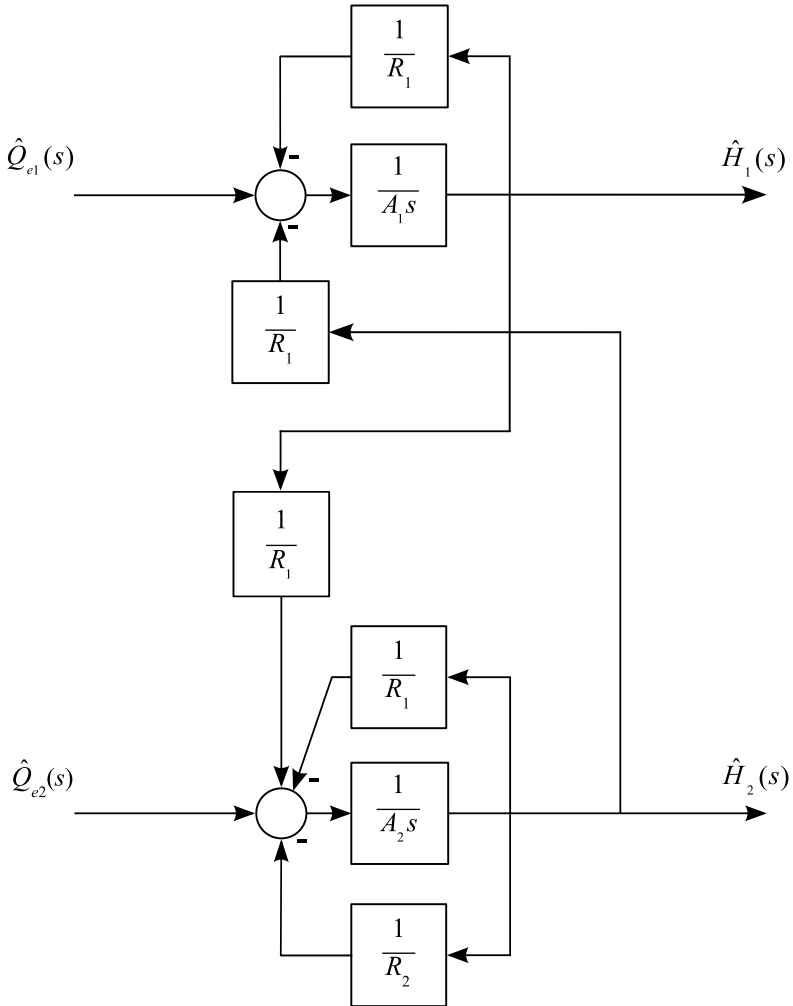


Figura 2.10: Diagrama de bloques del modelo matemático LTI del sistema de tanques con interacción.

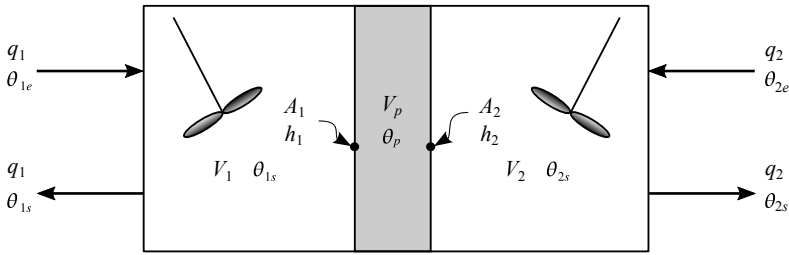


Figura 2.12: Diagrama simplificado de un intercambiador de calor.

A continuación se presentan las hipótesis del modelo:

1. Se asume que el sistema a parámetros concentrados de la Fig. 2.12 representa razonablemente bien la dinámica del sistema real a parámetros distribuidos de la Fig. 2.11.
2. De acuerdo al total de tubos existentes se asume que dicha masa puede acumular calor.
3. Las pérdidas de calor al exterior son despreciables.
4. Las propiedades físicas se consideran constantes y son evaluadas a una temperatura media entre la entrada y salida de cada corriente.
5. Fluido incompresible, consecuentemente no hay acumulación de materia en los tubos y no hay cambio de fase de los fluidos.
6. Sin pérdida de generalidad y con el objeto de establecer una dirección de flujo calórico se asume que  $\theta_{1s} > \theta_p > \theta_{2s}$ .
7. El perfil de temperatura en la pared de los tubos es despreciable. O sea, se asume que la pared de los tubos tiene un coeficiente de transferencia de calor ( $\lambda$ ) muy grande.
8. Se considera una única área de intercambio calórico promedio ( $A_1 = A_2 = A$ ).
9. No existe reacción química ( $r = 0$ ).
10. Los cambios de energía potencial son despreciables.

A continuación se plantean las ecuaciones de balance con el objeto de obtener el modelo matemático no lineal.

*Balance de Materia*

$$0 = \left( \begin{array}{c} \text{Materia} \\ \text{que ingresa} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Materia} \\ \text{que sale} \end{array} \right)$$

$$0 = q_{e1} - q_{s1}, \quad (2.61)$$

$$0 = q_{e2} - q_{s2}. \quad (2.62)$$

*Balance de Energía*

$$\begin{aligned} \text{(Acumulación)} \\ \text{de energía} &= \text{(Energía que ingresa)} - \text{(Energía que sale)} \\ &+ \text{(Energía que ingresa} \\ &\quad \text{al sistema desde sus contornos)} \end{aligned}$$

$$\rho_1 V_1 c p_1 \frac{d\theta_{1s}}{dt} = q_1 \rho_1 c p_1 \theta_{1e} - q_1 \rho_1 c p_1 \theta_{1s} - Ah_1(\theta_{1s} - \theta_p), \quad (2.63)$$

$$\rho_2 V_2 c p_2 \frac{d\theta_{2s}}{dt} = q_2 \rho_2 c p_2 \theta_{2e} - q_2 \rho_2 c p_2 \theta_{2s} + Ah_2(\theta_p - \theta_{2s}). \quad (2.64)$$

Sobre la base de la hipótesis 7 se puede asumir una única temperatura para la pared la cual representa un promedio entre las temperaturas a ambos lados del tubo y un balance de energía en la pared puede ser incluido,

$$\rho_p V_p c p_p \frac{d\theta_p}{dt} = Ah_1(\theta_{1s} - \theta_p) - Ah_2(\theta_p - \theta_{2s}). \quad (2.65)$$

Expresando el sistema de ecuaciones en función de la desviación de las variables respecto de un estado estacionario este resulta,

$$\rho_1 V_1 c p_1 \frac{d\hat{\theta}_{1s}}{dt} = \widehat{q_1 \rho_1 c p_1 \theta_{1e}} - \widehat{q_1 \rho_1 c p_1 \theta_{1s}} - Ah_1(\hat{\theta}_{1s} - \hat{\theta}_p), \quad (2.66)$$

$$\rho_2 V_2 c p_2 \frac{d\hat{\theta}_{2s}}{dt} = \widehat{q_2 \rho_2 c p_2 \theta_{2e}} - \widehat{q_2 \rho_2 c p_2 \theta_{2s}} + Ah_2(\hat{\theta}_p - \hat{\theta}_{2s}), \quad (2.67)$$

$$\rho_p V_p c p_p \frac{d\hat{\theta}_p}{dt} = Ah_1(\hat{\theta}_{1s} - \hat{\theta}_p) - Ah_2(\hat{\theta}_p - \hat{\theta}_{2s}). \quad (2.68)$$

con condiciones iniciales  $\hat{\theta}_{1s}(t=0) = 0$ ,  $\hat{\theta}_{2s}(t=0) = 0$  y  $\hat{\theta}_p(t=0) = 0$ .

Con el objeto de obtener un modelo LTI del intercambiador de calor, se realiza un desarrollo en serie de Taylor en torno al estado de operación del sistema. Así, simplificando los términos de orden superior, dicho desarrollo se reduce a,

$$\begin{aligned} \rho_1 c p_1 \widehat{q_1 \theta_{1e}} &= c p_1 \left( \frac{\partial \widehat{q_1 \theta_{1e}}}{\partial q_1} \right)_{q_1^0, \theta_{1e}^0} \hat{q}_1 + c p_1 \left( \frac{\partial \widehat{q_1 \theta_{1e}}}{\partial \theta_{1e}} \right)_{q_1^0, \theta_{1e}^0} \hat{\theta}_{1e} \\ &= \rho_1 c p_1 \theta_{1e}^0 \hat{q}_1 + \rho_1 c p_1 q_1^0 \hat{\theta}_{1e}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 c p_2 \widehat{q_2 \theta_{2e}} &= c p_2 \left( \frac{\partial \widehat{q_2 \theta_{2e}}}{\partial q_2} \right)_{q_2^0, \theta_{2e}^0} \hat{q}_2 + c p_2 \left( \frac{\partial \widehat{q_2 \theta_{2e}}}{\partial \theta_{2e}} \right)_{q_2^0, \theta_{2e}^0} \hat{\theta}_{2e} \\ &= \rho_2 c p_2 \theta_{2e}^0 \hat{q}_2 + \rho_2 c p_2 q_2^0 \hat{\theta}_{2e}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\rho_1 c p_1 \widehat{q_1 \theta_{1s}} = c p_1 \left( \frac{\partial \widehat{q_1 \theta_{1s}}}{\partial q_1} \right)_{q_1^0, \theta_{1s}^0} \hat{q}_1 + c p_1 \left( \frac{\partial \widehat{q_1 \theta_{1s}}}{\partial \theta_{1s}} \right)_{q_1^0, \theta_{1s}^0} \hat{\theta}_{1s} \quad (2.71)$$

$$= \rho_1 c p_1 \theta_{1s}^0 \hat{q}_1 + \rho_1 c p_1 q_1^0 \hat{\theta}_{1s},$$

$$\rho_2 c p_2 \widehat{q_2 \theta_{2s}} = c p_2 \left( \frac{\partial \widehat{q_2 \theta_{2s}}}{\partial q_2} \right)_{q_2^0, \theta_{2s}^0} \hat{q}_2 + c p_2 \left( \frac{\partial \widehat{q_2 \theta_{2s}}}{\partial \theta_{2s}} \right)_{q_2^0, \theta_{2s}^0} \hat{\theta}_{2s} \quad (2.72)$$

$$= \rho_2 c p_2 \theta_{2s}^0 \hat{q}_2 + \rho_2 c p_2 q_2^0 \hat{\theta}_{2s}.$$

Reemplazando y reordenando las expresiones anteriores se reduce a,

$$\begin{aligned} \rho_1 V_1 c p_1 \frac{d\hat{\theta}_{1s}}{dt} &= - (\rho_1 c p_1 q_1^0 + A h_1) \hat{\theta}_{1s} + A h_1 \hat{\theta}_p + \rho_1 c p_1 (\theta_{1e}^0 - \theta_{1s}^0) \hat{q}_1 \\ &\quad + \rho_1 c p_1 q_1^0 \hat{\theta}_{1e}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 V_2 c p_2 \frac{d\hat{\theta}_{2s}}{dt} &= - (\rho_2 c p_2 q_2^0 + A h_2) \hat{\theta}_{2s} + A h_2 \hat{\theta}_p + \rho_2 c p_2 (\theta_{2e}^0 - \theta_{2s}^0) \hat{q}_2 \\ &\quad + \rho_2 c p_2 q_2^0 \hat{\theta}_{2e}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\rho_p V_p c p_p \frac{d\hat{\theta}_p}{dt} = - (A h_1 + A h_2) \hat{\theta}_p + A h_1 \hat{\theta}_{1s} + A h_2 \hat{\theta}_{2s}. \quad (2.75)$$

Aplicando transformada de Laplace,

$$\begin{aligned} \rho_1 V_1 c p_1 s \hat{\Theta}_{1s}(s) &= - (\rho_1 c p_1 q_1^0 + A h_1) \hat{\Theta}_{1s}(s) + A h_1 \hat{\Theta}_p(s) \\ &\quad + \rho_1 c p_1 (\theta_{1e}^0 - \theta_{1s}^0) \hat{Q}_1(s) + \rho_1 c p_1 q_1^0 \hat{\Theta}_{1e}(s), \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \rho_2 V_2 c p_2 s \hat{\Theta}_{2s}(s) &= - (\rho_2 c p_2 q_2^0 + A h_2) \hat{\Theta}_{2s}(s) + A h_2 \hat{\Theta}_p(s) \\ &\quad + \rho_2 c p_2 (\theta_{2e}^0 - \theta_{2s}^0) \hat{Q}_2(s) + \rho_2 c p_2 q_2^0 \hat{\Theta}_{2e}(s), \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\rho_p V_p c p_p s \hat{\Theta}_p(s) = - (A h_1 + A h_2) \hat{\Theta}_p(s) + A h_1 \hat{\Theta}_{1s}(s) + A h_2 \hat{\Theta}_{2s}(s). \quad (2.78)$$

Operando y reordenando el sistema de ecuaciones se llega a,

$$(T_1 s + 1) \hat{\Theta}_{1s}(s) = K_3 \hat{\Theta}_p(s) + K_1 \hat{Q}_1(s) + K_2 \hat{\Theta}_{1e}(s), \quad (2.79)$$

$$(T_2 s + 1) \hat{\Theta}_{2s}(s) = K_6 \hat{\Theta}_p(s) + K_4 \hat{Q}_2(s) + K_5 \hat{\Theta}_{2e}(s), \quad (2.80)$$

$$(T_3 s + 1) \hat{\Theta}_p(s) = K_7 \hat{\Theta}_{1s}(s) + K_8 \hat{\Theta}_{2s}(s). \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \text{Donde. } T_1 &= \frac{\rho_1 V_1 c p_1}{\rho_1 c p_1 q_1^0 + A h_1}, T_2 = \frac{\rho_2 V_2 c p_2}{\rho_2 c p_2 q_2^0 + A h_2}, T_3 = \frac{\rho_p V_p c p_p}{A h_2 + A h_1}, \\ K_1 &= \frac{\rho_1 c p_1 (\theta_{1e}^0 - \theta_{1s}^0)}{\rho_1 c p_1 q_1^0 + A h_1}, K_2 = \frac{\rho_1 c p_1 q_1^0}{\rho_1 c p_1 q_1^0 + A h_1}, K_3 = \frac{-A h_1}{\rho_1 c p_1 q_1^0 + A h_1}, \end{aligned}$$

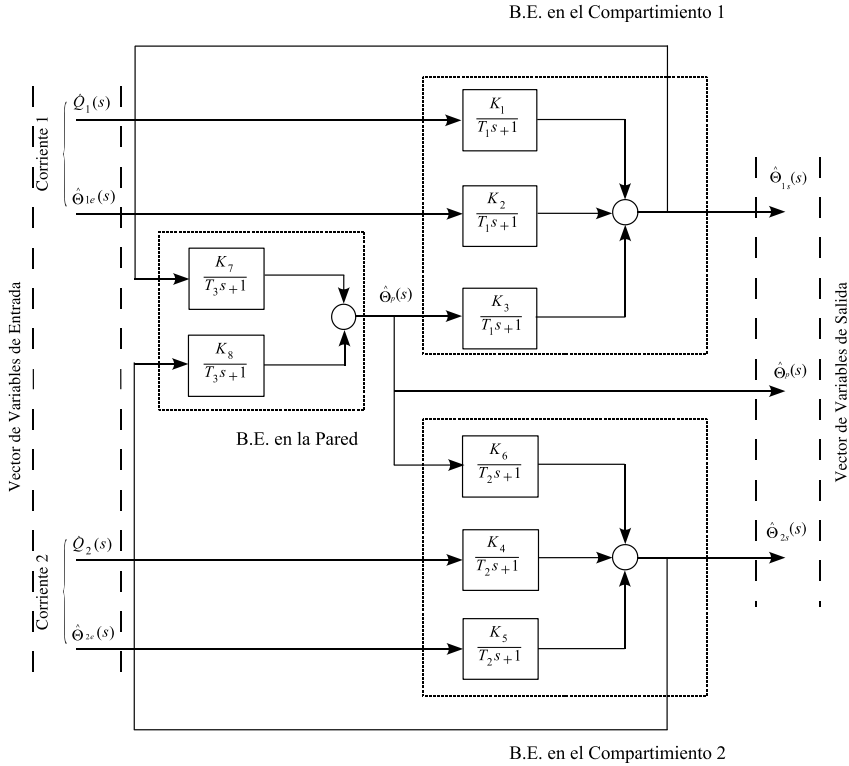


Figura 2.13: Diagrama de bloques del sistema de ecuaciones que representa el intercambiador de calor.

$$K_4 = \frac{\rho_2 c p_2 (\theta_{2e}^0 - \theta_{2s}^0)}{\rho_2 c p_2 q_2^0 + A h_2}, \quad K_5 = \frac{\rho_2 c p_2 q_2^0}{\rho_2 c p_2 q_2^0 + A h_2}, \quad K_6 = \frac{A h_2}{\rho_2 c p_2 q_2^0 + A h_2},$$

$$K_7 = \frac{A h_1}{A h_1 + A h_2} \text{ y } K_8 = \frac{A h_2}{A h_1 + A h_2}.$$

En la Fig. 2.13 se muestra la representación en diagrama de bloques del sistema de ecuaciones en el campo complejo.

## 2.6. Sistema de Mezcla en Fase Líquida

### 2.6.1. Sistema de mezcla a volumen constante

Considere el sistema de mezcla a volumen constante representado en la Fig. 2.14. Allí se indica en el caudal de salida que no hay resistencia hidráulica a la



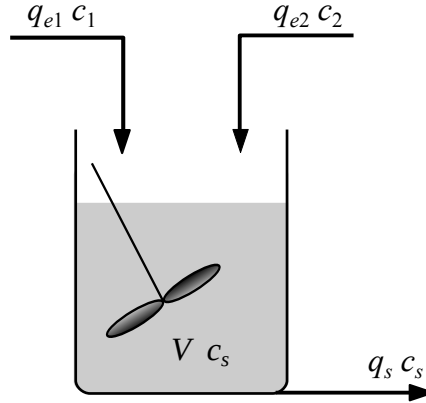


Figura 2.14: Sistema de mezcla de dos corrientes de fluido a volumen constante.

salida del líquido.

Hipótesis:

1. La resistencia al líquido a la salida del tanque es despreciable, el volumen del líquido en el tanque puede ser considerado constante a pesar de los cambios en los caudales de entradas ( $q_{e1}$  y  $q_{e2}$ ).
2. Se puede asumir mezcla perfecta en el tanque de mezclado.
3. La temperatura de todas las corrientes es la misma y es constante.
4. No existe reacción química entre los componentes.
5. Las densidades de los líquidos que se mezclan son aproximadamente iguales y constantes.

*Balance de Materia Total*

Teniendo en cuenta la hipótesis 1,

$$0 = q_{e1} + q_{e2} - q_s, \quad (2.82)$$

Por tanto, para los caudales de estado estacionario,

$$0 = q_{e1}^0 + q_{e2}^0 - q_s^0, \quad (2.83)$$

y en consecuencia en variables de desviación,

$$0 = \hat{q}_{e1} + \hat{q}_{e2} - \hat{q}_s, \quad (2.84)$$

o bien que,  $\hat{q}_s = \hat{q}_{e1} + \hat{q}_{e2}$ .

*Balance de Materia para el Componente*

Considerando las hipótesis anteriormente enunciadas, el balance de materia para el componente se puede escribir como,

$$V \frac{dc_s}{dt} = q_{e1}c_1 + q_{e2}c_2 - (q_{e1} + q_{e2})c_s, \quad (2.85)$$

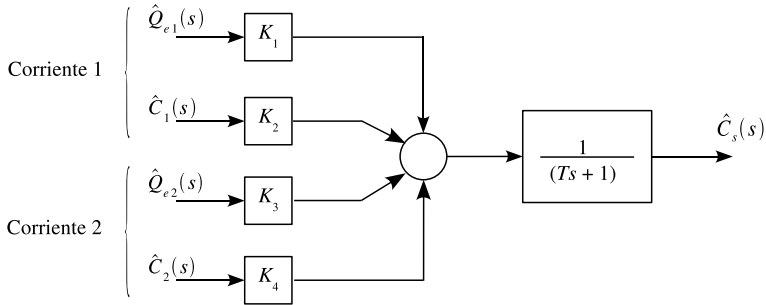


Figura 2.15: Diagrama de bloques del sistema de mezcla en fase líquida a volumen constante.

sujeto a la condición inicial  $c_s(0) = c_s^0$ .

Pasando a variables de desviación,

$$V \frac{d\hat{c}_s}{dt} = \widehat{q_{e1}c_1} + \widehat{q_{e2}c_2} - \widehat{(q_{e1} + q_{e2})c_s}, \quad (2.86)$$

donde la condición inicial ahora es  $\hat{c}_s(0) = 0$ . Linealizando los términos de la expresión anterior,

$$\widehat{q_{e1}c_1} = c_1^0 \hat{q}_{e1} + q_{e1}^0 \hat{c}_1, \quad (2.87)$$

$$\widehat{q_{e2}c_2} = c_2^0 \hat{q}_{e2} + q_{e2}^0 \hat{c}_2, \quad (2.88)$$

$$\widehat{(q_{e1} + q_{e2})c_s} = c_s^0 \hat{q}_{e1} + c_s^0 \hat{q}_{e2} + (q_{e1}^0 + q_{e2}^0) \hat{c}_s. \quad (2.89)$$

donde,  $q_{e1}^0 + q_{e2}^0 = q_s^0$ .

Reemplazando y reordenando,

$$V \frac{d\hat{c}_s}{dt} = -q_s^0 \hat{c}_s + (c_1^0 - c_s^0) \hat{q}_{e1} + q_{e1}^0 \hat{c}_1 + (c_2^0 - c_s^0) \hat{q}_{e2} + q_{e2}^0 \hat{c}_2. \quad (2.90)$$

Aplicando transformada de Laplace y reordenando resulta,

$$(Ts + 1)\hat{C}_s(s) = K_1 \hat{Q}_{e1}(s) + K_2 \hat{C}_1(s) + K_3 \hat{Q}_{e2}(s) + K_4 \hat{C}_2(s). \quad (2.91)$$

donde,  $K_1 := (c_1^0 - c_s^0)/q_s^0$ ,  $K_2 := q_{e1}^0/q_s^0$ ,  $K_3 := (c_2^0 - c_s^0)q_s^0$ ,  $K_4 := q_2^0/q_s^0$  y  $T := V/q_s^0$ .

Finalmente, el diagrama de bloques resultante del sistema de mezcla es el que se muestra en la Fig. 2.15,

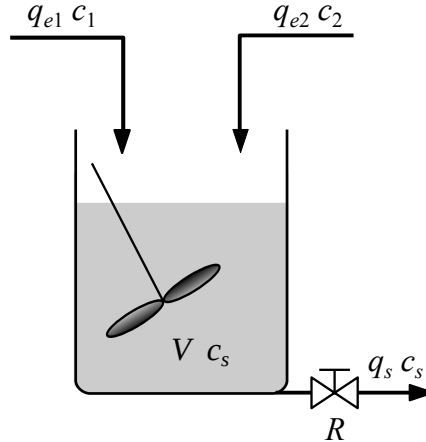


Figura 2.16: Sistema de mezcla de dos corrientes de fluido a volumen variable.

### 2.6.2. Sistema de mezcla a volumen variable

Considere el sistema de mezcla a volumen variable representado en la Fig. 2.16. Aquí, una resistencia hidráulica a la salida del líquido es considerada y representada en la figura con una válvula que regula manualmente el caudal de salida.

Hipótesis:

1. La resistencia al líquido a la salida del tanque no es despreciable, el volumen del líquido en el tanque no puede ser considerado constante frente a los cambios en los caudales de entradas ( $q_{e1}$  y  $q_{e2}$ ).
2. Se puede asumir una resistencia hidráulica de la válvula de salida del tanque constante.
3. Se puede asumir mezcla perfecta en el tanque de mezclado.
4. La temperatura de todas las corrientes es la misma y es constante.
5. No existe reacción química entre los componentes.
6. Las densidades de los líquidos que se mezclan son aproximadamente iguales y constantes.
7. La sección transversal ( $A$ ) del tanque de reacción es constante.

*Balance de Materia Total*

A diferencia con el ejemplo anterior el volumen de mezcla varía y por tanto existe acumulación de materia. Así, el balance de materia total resulta,

$$\frac{dV \rho_s}{dt} = q_{e1} \rho_1 + q_{e2} \rho_2 - q_s \rho_s. \quad (2.92)$$

dado que por hipótesis 5,  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_s$  y considerando la hipótesis 7, el balance anterior se resume a,

$$A \frac{dh}{dt} = q_{e1} + q_{e2} - q_s. \quad (2.93)$$

sujeto a la condición inicial  $h(0) = h^0$  y en variables de desviación a,

$$A \frac{d\hat{h}}{dt} = \hat{q}_{e1} + \hat{q}_{e2} - \hat{q}_s, \quad (2.94)$$

donde  $\hat{V} = A\hat{h}$  y de acuerdo con la hipótesis 2  $\hat{q}_s \approx \hat{h}/R$  por tanto la Ecuación (2.94) resulta,

$$A \frac{d\hat{h}}{dt} = -\frac{\hat{h}}{R} + \hat{q}_{e1} + \hat{q}_{e2}. \quad (2.95)$$

*Balance de Materia para el Componente*

$$\frac{dVc_s}{dt} = q_{e1}c_1 + q_{e2}c_2 - q_sc_s, \quad (2.96)$$

sujeto a la condición inicial  $c_s(0) = c_s^0$ . Las Ec. (2.93) y (2.95) representan el modelo matemático no lineal del sistema de mezcla a volumen variable en el dominio del tiempo.

El balance de materia para el componente en variable de desviación resulta,

$$A \frac{d\widehat{hc_s}}{dt} = \widehat{q_{e1}c_1} + \widehat{q_{e2}c_2} - \widehat{q_sc_s}. \quad (2.97)$$

Linealizando los términos de la expresión anterior,

$$\widehat{hc_s} = h^0\hat{c}_s + c_s^0\hat{h}, \quad (2.98)$$

$$\widehat{q_{e1}c_1} = c_1^0\hat{q}_{e1} + q_{e1}^0\hat{c}_1, \quad (2.99)$$

$$\widehat{q_{e2}c_2} = c_2^0\hat{q}_{e2} + q_{e2}^0\hat{c}_2, \quad (2.100)$$

$$\widehat{q_sc_s} = c_s^0\hat{q}_s + q_s^0\hat{c}_s = c_s^0\hat{h}/R + q_s^0\hat{c}_s. \quad (2.101)$$

Reemplazando,

$$V^0 \frac{d\hat{c}_s}{dt} + c_s^0 A \frac{d\hat{h}}{dt} = c_1^0\hat{q}_{e1} + q_{e1}^0\hat{c}_1 + c_2^0\hat{q}_{e2} + q_{e2}^0\hat{c}_2 - c_s^0\hat{h}/R - q_s^0\hat{c}_s. \quad (2.102)$$

Teniendo en cuenta el balance de materia total (2.95) y operando algebraicamente se tiene,

$$V^0 \frac{d\hat{c}_s}{dt} = -q_s^0\hat{c}_s + (c_1^0 - c_s^0)\hat{q}_{e1} + q_{e1}^0\hat{c}_1 + (c_2^0 - c_s^0)\hat{q}_{e2} + q_{e2}^0\hat{c}_2. \quad (2.103)$$

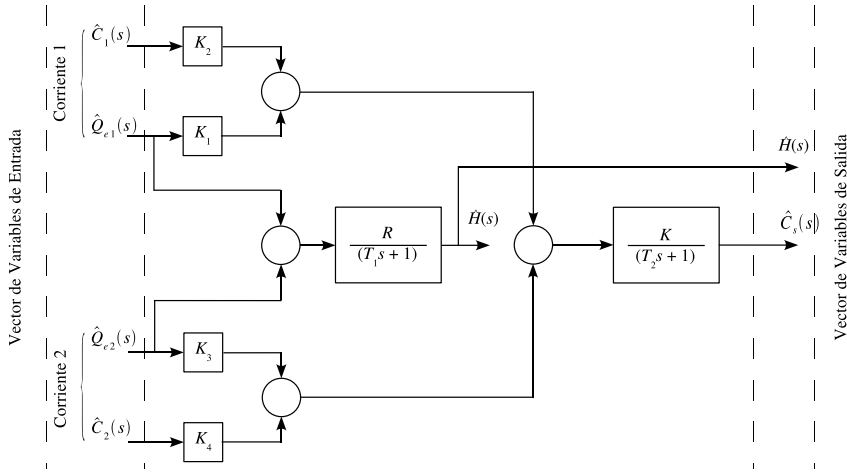


Figura 2.17: Diagrama de bloques del sistema de mezcla en fase líquida a volumen variable.

Las expresiones (2.95) y (2.103) representa el modelo matemático lineal del sistema de mezclado a volumen variable. Aplicando transformada de Laplace a estas expresiones se obtiene

$$(T_1s + 1)\hat{H}(s) = R\hat{Q}_{e1}(s) + R\hat{Q}_{e2}(s), \quad (2.104)$$

$$(T_2s + 1)\hat{C}_s(s) = K_1\hat{Q}_{e1}(s) + K_2\hat{C}_1(s) + K_3\hat{Q}_{e2}(s) + K_4\hat{C}_2(s), \quad (2.105)$$

donde,  $K_1 = (c_1^0 - c_s^0)/q_s^0$ ,  $K_2 = q_{e1}^0/q_s^0$ ,  $K_3 = (c_2^0 - c_s^0)/q_s^0$ ,  $K_4 = q_{e2}^0/q_s^0$ ,  $T_1 = AR$  y  $T_2 = V^0/q_s^0$ .

Las Ecs. (2.104) y (2.105) representan el modelo del sistema bajo estudio en el dominio de complejo. Finalmente, el diagrama de bloques resultante del sistema de ecuaciones es el que se muestra en la Fig. 2.17,

## 2.7. Reactores Tanques Continuos Agitados (CSTR)

En diferentes áreas de la ingeniería química los reactores químicos han sido estudiados de diferentes objetivos. En el área de control de procesos químicos resulta de suma importancia disponer de modelos matemáticos sencillos pero a la vez precisos de dichos sistemas. A continuación se presentan modelos matemáticos de reactores tanques continuos agitados (CSTR) en fase líquida que resultan ser un tipo de muchos casos posibles presentes en la ingeniería de las reacciones químicas.

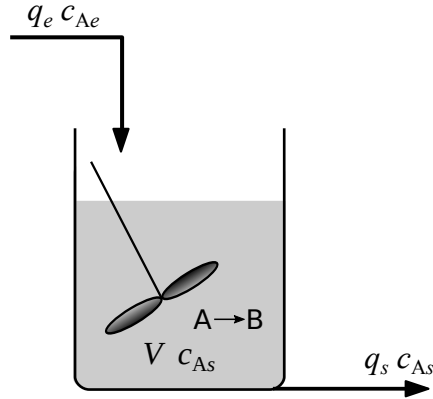


Figura 2.18: Diagrama esquemático de un reactor químico isotérmico a volumen constante.

## 2.7.1. CSTR Isotérmico

### CSTR isotérmico a volumen constante

Considere el reactor químico isotérmico a volumen constante representado en la Fig. 2.18.

Hipótesis:

1. La resistencia al líquido a la salida del tanque es despreciable por tanto, el volumen del líquido en el tanque puede ser considerado constante a pesar del cambio en el caudal de entrada ( $q_e$ ).
2. Se puede asumir mezcla perfecta en el reactor.
3. La temperatura de todas las corrientes es la misma y es constante.
4. Reacción química isotérmica.
5. Las propiedades físicas son constantes e independientes de la temperatura y concentración de reactivos y productos.

*Balance de Materia para el Reactivo*

$$V \frac{dc_{As}}{dt} = q_e c_{Ae} - q_s c_{As} - r_A V. \quad (2.106)$$

sujeto a la condición inicial  $c_A(0) = c_A^0$ . Así, el balance de materia para el componente en variable de desviación resulta,

$$V \frac{d\hat{c}_{As}}{dt} = \widehat{q_e c_{Ae}} - \widehat{q_s c_{As}} - V \hat{r}_A. \quad (2.107)$$

dicha ecuación de balance queda sujeta a la condición inicial  $\hat{c}_{As}(0) = 0$ .

Linealizando por serie de Taylor,

$$\widehat{q_e c_{Ae}} = c_{Ae}^0 \hat{q}_e + q_e^0 \hat{c}_{Ae}, \quad (2.108)$$

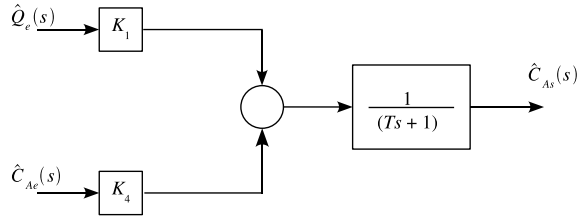


Figura 2.19: Diagrama de bloques del reactor químico isotérmico a volumen constante.

$$\widehat{q_s c_{As}} = c_{As}^0 \hat{q}_e + q_s^0 \hat{c}_{Ae}, \quad (2.109)$$

$$\hat{r}_A = \left( \frac{dr_A}{dc_{As}} \right)_{c_{As}^0} \hat{c}_{As}. \quad (2.110)$$

Note que se ha tenido en cuenta que,  $\hat{q}_e = \hat{q}_s$ . Reemplazando y reordenando resulta,

$$V \frac{d\hat{c}_{As}}{dt} = - \left[ q_e^0 + V \left( \frac{dr_A}{dc_{As}} \right)_{c_{As}^0} \right] \hat{c}_{As} + (c_A e^0 - c_A s^0) \hat{q}_e + q_e^0 \hat{c}_{Ae}. \quad (2.111)$$

Las expresión (2.111) representa el modelo matemático lineal en variables de desviación del reactor tanque agitado isotérmico a volumen constante. Aplicando transformada de Laplace a esta expresión se obtiene,

$$(Ts + 1) \hat{C}_{As}(s) = K_1 \hat{Q}_e(s) + K_2 \hat{C}_{Ae}(s), \quad (2.112)$$

$$\text{donde, } K_1 = \frac{(c_{Ae}^0 - c_{As}^0)}{q_e^0 + V \left( \frac{dr_A}{dc_{As}} \right)_{c_{As}^0}}, \quad K_2 = \frac{q_e^0}{q_e^0 + V \left( \frac{dr_A}{dc_{As}} \right)_{c_{As}^0}}$$

$$\text{y } T = \frac{V}{q_e^0 + V \left( \frac{dr_A}{dc_{As}} \right)_{c_{As}^0}}.$$

Finalmente el diagrama de bloques resultante del sistema de ecuaciones es el que se muestra en la Fig. 2.19.

### CSTR isotérmico a volumen variable

La Fig. 2.20 muestra en forma esquemática un reactor químico isotérmico a volumen variable aquí considerado.

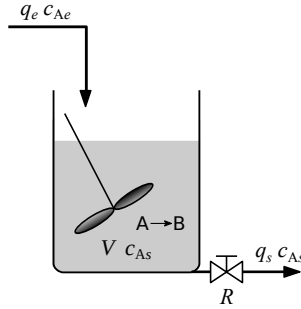


Figura 2.20: Diagrama esquemático de un reactor químico isotérmico a volumen variable.

Hipótesis:

1. La resistencia al líquido a la salida del tanque no es despreciable por tanto, el volumen del líquido en el reactor no puede ser considerado constante a pesar del cambio en el caudal de entrada ( $q_e$ ).
2. Se puede asumir mezcla perfecta en el reactor.
3. La temperatura de todas las corrientes es la misma y es constante.
4. Reacción química isotérmica.
5. Las propiedades físicas son constantes e independientes de la temperatura y concentración de reactivos y productos.
6. La sección transversal ( $A$ ) del tanque de reacción es constante y por tanto se puede asumir que  $V = Ah$ .

El lector podrá notar las hipótesis 2 a 5 son las mismas que el caso anterior, debido a que no hay razón alguna para cambiarlas.

*Balance de Materia Total*

$$\frac{dV\rho}{dt} = q_e\rho - q_s\rho. \quad (2.113)$$

Teniendo en cuenta la hipótesis 6 y expresando el balance anterior en variables de desviación,

$$A \frac{d\hat{h}}{dt} = -\frac{\hat{h}}{R} + \hat{q}_e. \quad (2.114)$$

*Balance de Materia para el Reactivo*

$$\frac{dVc_{As}}{dt} = q_e c_{Ae} - q_s c_{As} - r_A V, \quad (2.115)$$

pasando a variables de desviación,

$$A \frac{d\widehat{hc}_{As}}{dt} = \widehat{q_e c_{Ae}} - \widehat{q_s c_{As}} - r_A \widehat{V}. \quad (2.116)$$

Linealizando por serie de Taylor,



$$\widehat{hc_{As}} = h^0 \hat{c}_{As} + c_{As}^0 \hat{h}, \quad (2.117)$$

$$\widehat{q_e c_{Ae}} = c_{Ae}^0 \hat{q}_e + q_e^0 \hat{c}_{Ae}, \quad (2.118)$$

$$\widehat{q_s c_{As}} = c_{As}^0 \hat{q}_s + q_s^0 \hat{c}_{As} = c_{As}^0 \frac{\hat{h}}{R} + q_s^0 \hat{c}_{As}, \quad (2.119)$$

$$\widehat{r_A V} = V^0 \left( \frac{dr_A}{dc_{As}} \right)_{c_{As}^0} \hat{c}_{As} + r_A^0 A \hat{h}. \quad (2.120)$$

Reemplazando estas últimas expresiones en 2.116

$$Ah^0 \frac{d\hat{c}_{As}}{dt} + c_{As}^0 \frac{d\hat{h}}{dt} = - \left[ q_s^0 + V^0 \left( \frac{dr_A}{dc_{As}} \right)_{c_{As}^0} \right] \hat{c}_{As} - \left( \frac{c_{As}^0}{R} + r_A^0 A \right) \hat{h} + c_{Ae}^0 \hat{q}_e + q_e^0 \hat{c}_{Ae}. \quad (2.121)$$

Considerando el balance de materia total en el balance anterior se llega a lo siguiente,

$$V^0 \frac{d\hat{c}_{As}}{dt} = - \left[ q_s^0 + V^0 \left( \frac{dr_A}{dc_{As}} \right)_{c_{As}^0} \right] \hat{c}_{As} - r_A^0 A \hat{h} + (c_{Ae}^0 - c_{As}^0) \hat{q}_e + q_e^0 \hat{c}_{Ae}. \quad (2.122)$$

Las expresiones (2.114) y (2.122) representan el modelo matemático lineal en variables de desviación del reactor tanque agitado isotérmico a volumen variable en el dominio del tiempo. Aplicando transformada de Laplace a estas expresiones se obtiene,

$$(T_1 s + 1) \hat{H}(s) = R \hat{Q}_e(s), \quad (2.123)$$

$$(T_2 s + 1) \hat{C}_{As}(s) = -K_3 \hat{H}(s) + K_1 \hat{Q}_e(s) + K_2 \hat{C}_{Ae}(s). \quad (2.124)$$

$$\text{donde, } K_1: = \frac{(c_{Ae}^0 - c_{As}^0)}{q_s^0 + V^0 \left( \frac{dr_A}{dc_{As}} \right)_{c_{As}^0}}, \quad K_2: = \frac{q_e^0}{q_s^0 + V^0 \left( \frac{dr_A}{dc_{As}} \right)_{c_{As}^0}},$$

$$T_1: = AR \text{ y } T_2: = \frac{q_e^0 + V \left( \frac{dr_A}{dc_{As}} \right)_{c_{As}^0}}{q_e^0 + V \left( \frac{dr_A}{dc_{As}} \right)_{c_{As}^0}}.$$

Finalmente el diagrama de bloques del sistema de ecuaciones resulta ser como se muestra en la Fig. 2.21.

## 2.7.2. CSTR no isotérmico

### CSTR no isotérmico a volumen constante

Considere el CSTR no isotérmico a volumen constante de la Fig. 2.22.

Hipótesis:

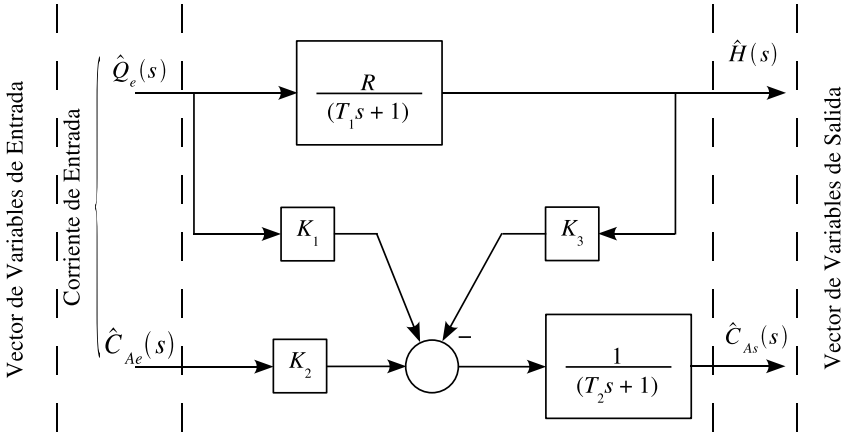


Figura 2.21: Diagrama de bloques del reactor químico isotérmico a volumen variable.

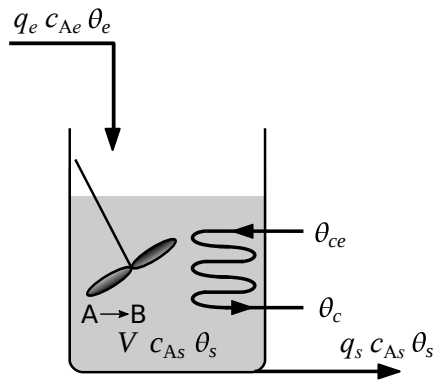


Figura 2.22: Diagrama esquemático de un CSTR no isotérmico a volumen constante.

1. La resistencia al líquido a la salida del tanque es despreciable por tanto, el volumen del líquido en el reactor puede ser considerado constante a pesar del cambio en el caudal de entrada ( $q_e$ ).
2. Se puede asumir mezcla perfecta en el reactor.
3. Reacción química no isotérmica.
4. Las propiedades físicas son constantes e independientes de la temperatura y concentración de reactivos y productos.
5. La sección transversal ( $A$ ) del tanque de reacción es constante y por tanto se puede asumir que  $V = Ah$ .

*Balance de Materia para el Reactivo*

$$V \frac{dc_{As}}{dt} = q_e c_{Ae} - q_s c_{As} - r_A V, \quad (2.125)$$

sujeto a la condición inicial  $c_A(0) = c_A^0$ . Note que en este caso la velocidad de reacción es función de la temperatura y concentración dentro del reactor.

El balance de materia para el componente en variable de desviación resulta,

$$V \frac{d\hat{c}_{As}}{dt} = \widehat{q_e c_{Ae}} - \widehat{q_s c_{As}} - V \hat{r}_A, \quad (2.126)$$

dicha ecuación de balance queda sujeta a la condición inicial  $\hat{c}_{As}(0) = 0$ .

Linealizando por serie de Taylor,

$$\widehat{q_e c_{Ae}} = c_{Ae}^0 \hat{q}_e + q_e^0 \hat{c}_{Ae}, \quad (2.127)$$

$$\widehat{q_s c_{As}} = c_{As}^0 \hat{q}_e + q_s^0 \hat{c}_{As}, \quad (2.128)$$

$$\hat{r}_A(c_{As}, \theta_s) = \left( \frac{\partial r_A}{\partial c_{As}} \right)_{c_{As}^0, \theta_s^0} \hat{c}_{As} + \left( \frac{\partial r_A}{\partial \theta_s} \right)_{c_{As}^0, \theta_s^0} \hat{\theta}_s. \quad (2.129)$$

Note que se ha tenido en cuenta que,  $\hat{q}_e = \hat{q}_s$ . Reemplazando y reordenando resulta,

$$V \frac{d\hat{c}_{As}}{dt} = - \left[ q_e^0 + V \left( \frac{\partial r_A}{\partial c_{As}} \right)_{c_{As}^0, \theta_s^0} \right] \hat{c}_{As} - V \left( \frac{\partial r_A}{\partial \theta_s} \right)_{c_{As}^0, \theta_s^0} \hat{\theta}_s + (c_{Ae}^0 - c_{As}^0) \hat{q}_e + q_e^0 \hat{c}_{Ae}. \quad (2.130)$$

*Balance de Energía*

$$V \rho c_p \frac{d\theta_s}{dt} = q_e \rho c_p \theta_e - q_s \rho c_p \theta_s - UA(\theta_s - \theta_c) - \Delta H_r r_A V. \quad (2.131)$$

Escribiendo dicho balance en variable de desviación,

$$V \rho c p \frac{d\hat{\theta}_s}{dt} = \rho c p \widehat{q_e \theta_e} - \rho c p \widehat{q_s \theta_s} - U A (\hat{\theta}_s - \hat{\theta}_c) - \Delta H_r V \hat{r}_A(c_{As}, \theta_s). \quad (2.132)$$

Linealizando términos por serie de Taylor,

$$\widehat{q_e \theta_e} = \theta_e^0 \hat{q}_e + q_e^0 \hat{\theta}_e, \quad (2.133)$$

$$\widehat{q_s \theta_s} = \theta_s^0 \hat{q}_e + q_e^0 \hat{\theta}_s. \quad (2.134)$$

y reemplazando,

$$\begin{aligned} V \rho c p \frac{d\hat{\theta}_s}{dt} = & - \left[ \rho c p q_e^0 + \Delta H_r V \left( \frac{\partial r_A}{\partial \theta_s} \right)_{c_{As}^0, \theta_s^0} + U A \right] \hat{\theta}_s \\ & - \Delta H_r V \left( \frac{\partial r_A}{\partial c_{As}} \right)_{c_{As}^0, \theta_s^0} \hat{c}_{As} \\ & + \rho c p (\theta_e^0 - \theta_s^0) \hat{q}_e + \rho c p q_e^0 \hat{\theta}_e + U A \hat{\theta}_c. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Las expresiones (2.130) y (2.135) representan el modelo matemático lineal en variables de desviación del reactor tanque agitado no isotérmico a volumen constante. Aplicando transformada de Laplace a estas expresiones se obtiene,

$$(T_1 s + 1) \hat{C}_{As}(s) = -K_3 \hat{\Theta}_s(s) + K_1 \hat{Q}_e(s) + K_2 \hat{C}_{Ae}(s), \quad (2.136)$$

$$(T_2 s + 1) \hat{\Theta}_s(s) = -K_4 \hat{C}_{As}(s) + K_5 \hat{Q}_e(s) + K_6 \hat{\Theta}_e(s) + K_7 \hat{\Theta}_c(s). \quad (2.137)$$

$$\text{donde, } K_1 := \frac{(c_{Ae}^0 - c_{As}^0)}{q_e^0 + V (\partial r_A / \partial c_{As})_{c_{As}^0, \theta_s^0}}, \quad K_2 := \frac{q_e^0}{q_e^0 + V (\partial r_A / \partial c_{As})_{c_{As}^0, \theta_s^0}},$$

$$K_3 := \frac{V (\partial r_A / \partial \theta_s)_{c_{As}^0, \theta_s^0}}{q_e^0 + V (\partial r_A / \partial c_{As})_{c_{As}^0, \theta_s^0}},$$

$$K_4 := \frac{\Delta H_r V (\partial r_A / \partial c_{As})_{c_{As}^0, \theta_s^0}}{\rho c p q_e^0 + \Delta H_r V (\partial r_A / \partial \theta_s)_{c_{As}^0, \theta_s^0} + U A},$$

$$K_5 := \frac{\rho c p (\theta_e^0 - \theta_s^0)}{\rho c p q_e^0 + \Delta H_r V (\partial r_A / \partial \theta_s)_{c_{As}^0, \theta_s^0} + U A},$$

$$K_6 := \frac{\rho c p q_e^0}{\rho c p q_e^0 + \Delta H_r V (\partial r_A / \partial \theta_s)_{c_{As}^0, \theta_s^0} + U A},$$

$$K_7 := \frac{U A}{\rho c p q_e^0 + \Delta H_r V (\partial r_A / \partial \theta_s)_{c_{As}^0, \theta_s^0} + U A},$$

$$T_1 := \frac{V^0}{q_e^0 + V (\partial r_A / \partial c_{As})_{c_{As}^0, \theta_s^0}} \text{ y}$$

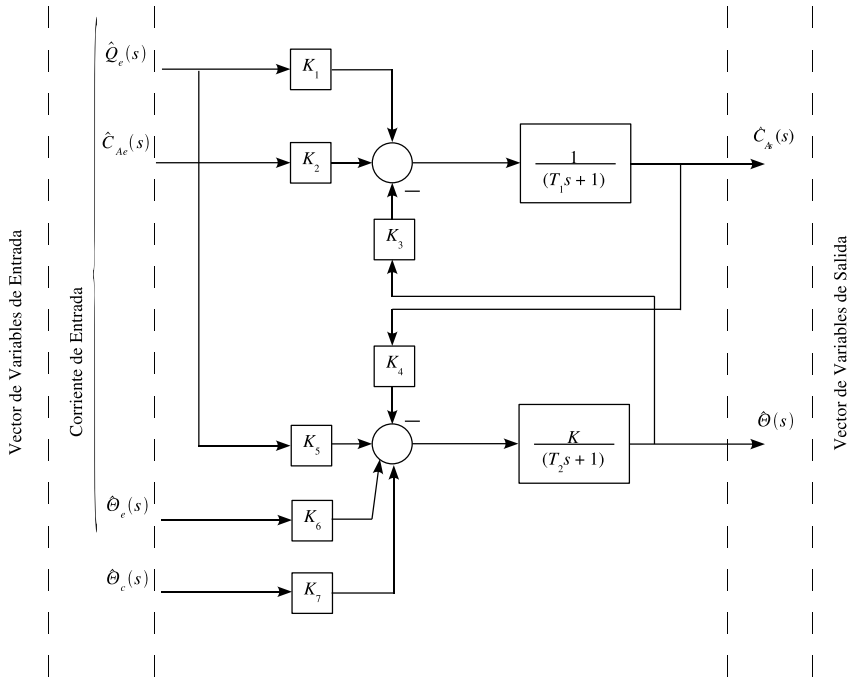


Figura 2.23: Diagrama de bloques del CSTR no isotérmico a volumen constante.

$$T_2 := \frac{V^0 \rho c_p}{\rho c_p q_e^0 + \Delta H_r V (\partial r_A / \partial \theta_s)_{c_{A_s}^0, \theta_s^0} + UA}$$

Finalmente el diagrama de bloques resultante del sistema de ecuaciones es el que se muestra en la Fig. 2.23.

**CSTR no isotérmico a volumen variable**

Considere el CSTR no isotérmico a volumen variable de la Fig. 2.24.

Hipótesis:

El lector podrá notar en base a lo expuesto anteriormente que este problema resulta muy similar al de la sección anterior, por tal motivo, las hipótesis son las mismas a excepción de la primera la que debe ser cambiada por:

1. La resistencia al líquido a la salida del tanque no es despreciable por tanto, el volumen del líquido en el reactor no puede ser considerado constante frene a cambios en el caudal de entrada ( $q_e$ ).

Dado que este problema resulta muy similar al anterior, solamente hay que incluir la ecuación de balance de materia total junto con las dos ecuaciones de balance ya planteadas para obtener el modelo matemático no lineal del sistema.

*Balance de Materia Total*

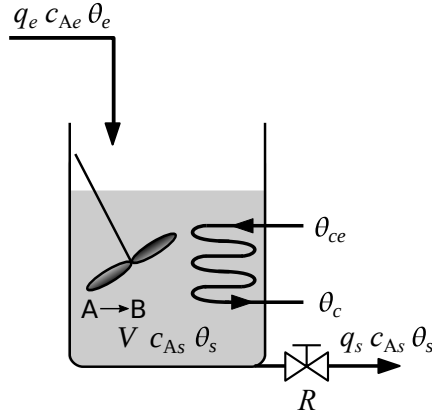


Figura 2.24: Diagrama esquemático de un CSTR no isotérmico a volumen variable.

$$\frac{dV\rho}{dt} = q_e\rho - q_s\rho. \quad (2.138)$$

Dado que se considera que el tanque tiene sección transversal constante el balance anterior en variables de desviación puede ser reescrito como,

$$A \frac{d\hat{h}}{dt} = -\frac{\hat{h}}{R} + \hat{q}_e. \quad (2.139)$$

*Balance de Materia para el Reactivo*

$$\frac{dVc_{As}}{dt} = q_e c_{Ae} + q_s c_{As} - r_A V. \quad (2.140)$$

sujo a la condición inicial  $V(0)c_A(0) = V^0 c_A^0$ . Note que ahora el volumen varía y por tanto esto debe ser tenido en cuenta en el término de acumulación. Así, el balance de materia para el componente en variable de desviación resulta,

$$\frac{d\widehat{Vc_{As}}}{dt} = \widehat{q_e c_{Ae}} - \widehat{q_s c_{As}} - \widehat{Vr_A}, \quad (2.141)$$

dicha ecuación de balance queda sujeta a la condición inicial  $\widehat{Vc_{As}}(0) = 0$ .

Linealizando por serie de Taylor,

$$\widehat{Vc_{As}} = c_{As}^0 \widehat{V} + V^0 \widehat{c_{As}}, \quad (2.142)$$

$$\widehat{q_e c_{Ae}} = c_{Ae}^0 \widehat{q_e} + q_e^0 \widehat{c_{Ae}}, \quad (2.143)$$

$$\widehat{q_s c_{As}} = c_{As}^0 \widehat{q_s} + q_s^0 \widehat{c_{As}}, \quad (2.144)$$

$$\widehat{Vr_A} = r_A^0 \widehat{V} + V^0 \widehat{r_{As}}, \quad (2.145)$$

$$\hat{r}_A(c_{As}, \theta_s) = \left( \frac{\partial r_A}{\partial c_{As}} \right)_{c_{As}^0, \theta_s^0} \hat{c}_{As} + \left( \frac{\partial r_A}{\partial \theta_s} \right)_{c_{As}^0, \theta_s^0} \hat{\theta}_s. \quad (2.146)$$

Reemplazando en (2.142) y reordenando resulta,

$$\begin{aligned} c_{As}^0 \frac{d\hat{V}}{dt} + V^0 \frac{d\hat{c}_{As}}{dt} = & -Ar_A^0 \hat{h} - \left[ q_s^0 + V^0 \left( \frac{\partial r_A}{\partial c_{As}} \right)_{c_{As}^0, \theta_s^0} \right] \hat{c}_{As} \\ & + V^0 \left( \frac{\partial r_A}{\partial \theta_s} \right)_{c_{As}^0, \theta_s^0} \hat{\theta}_s + c_{Ae}^0 \hat{q}_e \\ & + q_e^0 \hat{c}_{Ae} + c_{As}^0 \hat{q}_s. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Reemplazando el término por lo expresado en (2.139) y reordenando se tiene,

$$\begin{aligned} V^0 \frac{d\hat{c}_{As}}{dt} = & -Ar_A^0 \hat{h} - \left[ q_s^0 + V^0 \left( \frac{\partial r_A}{\partial c_{As}} \right)_{c_{As}^0, \theta_s^0} \right] \hat{c}_{As} + V^0 \left( \frac{\partial r_A}{\partial \theta_s} \right)_{c_{As}^0, \theta_s^0} \hat{\theta}_s \\ & + (c_{Ae}^0 - c_{As}^0) \hat{q}_e + q_e^0 \hat{c}_{Ae}. \end{aligned} \quad (2.148)$$

*Balace de Energía*

$$\rho c_p \frac{dV\theta_s}{dt} = q_e \rho c_p \theta_e - q_s \rho c_p \theta_s - UA(\theta_s - \theta_c) - \Delta H_r r_A V. \quad (2.149)$$

Escribiendo dicho balance en variable de desviación,

$$\rho c_p \frac{d\widehat{V\theta}_s}{dt} = \rho c_p \widehat{q_e \theta_e} - \rho c_p \widehat{q_s \theta_s} - UA(\widehat{\theta}_s - \widehat{\theta}_c) - \Delta H_r \widehat{V r_A}(c_{As}, \theta_s). \quad (2.150)$$

Linealizando términos por serie de Taylor,

$$\widehat{V\theta}_s = \theta_s^0 \widehat{V} + V^0 \widehat{\theta}_s, \quad (2.151)$$

$$\widehat{q_e \theta_e} = \theta_e^0 \widehat{q}_e + q_e^0 \widehat{\theta}_e, \quad (2.152)$$

$$\widehat{q_s \theta_s} = \theta_s^0 \widehat{q}_s + q_s^0 \widehat{\theta}_s. \quad (2.153)$$

y reemplazando,

$$\begin{aligned}
\theta_s^0 \rho c p \frac{d\hat{V}}{dt} + V^0 \rho c p \frac{d\hat{\theta}_s}{dt} = & \Delta H_r A r_A^0 \hat{h} - \left[ \rho c p q_s^0 + \Delta H_r V \left( \frac{\partial r_A}{\partial \theta_s} \right)_{c_{As}^0, \theta_s^0} + U A \right] \hat{\theta}_s \\
& - \Delta H_r V \left( \frac{\partial r_A}{\partial c_{As}} \right)_{c_{As}^0, \theta_s^0} \hat{c}_{As} + \rho c p \theta_e^0 \hat{q}_e + \rho c p q_e^0 \hat{\theta}_e \\
& + U A \hat{\theta}_c - \rho c p \theta_s^0 \hat{q}_s.
\end{aligned} \tag{2.154}$$

Reemplazando el término por lo expresado en (2.139) y reordenando se tiene,

$$\begin{aligned}
l V^0 \rho c p \frac{d\hat{\theta}_s}{dt} = & \Delta H_r A r_A^0 \hat{h} - \Delta H_r V \left( \frac{\partial r_A}{\partial c_{As}} \right)_{c_{As}^0, \theta_s^0} \hat{c}_{As} \\
& + \left[ \rho c p q_s^0 + \Delta H_r V \left( \frac{\partial r_A}{\partial \theta_s} \right)_{c_{As}^0, \theta_s^0} + U A \right] \hat{\theta}_s + \rho c p (\theta_e^0 - \theta_s^0) \hat{q}_e \\
& + \rho c p q_e^0 \hat{\theta}_e + U A \hat{\theta}_c.
\end{aligned} \tag{2.155}$$

Las expresiones (2.139), (2.148) y (2.155) representan el modelo matemático lineal en variables de desviación del reactor tanque agitado no isotérmico a volumen variable. Aplicando transformada de Laplace a estas expresiones se obtiene,

$$(T_1 s + 1) \hat{H}(s) = R \hat{Q}_e(s), \tag{2.156}$$

$$(T_2 s + 1) \hat{C}_{As}(s) = -K_3 \hat{H}(s) - K_4 \hat{\theta}_s(s) + K_1 \hat{Q}_e(s) + K_2 \hat{C}_{Ae}(s), \tag{2.157}$$

$$(T_3 s + 1) \hat{\theta}_s(s) = -K_5 \hat{H}(s) - K_6 \hat{C}_{As}(s) + K_7 \hat{Q}_e(s) + K_8 \hat{\theta}_e(s) + K_9 \hat{\theta}_c(s). \tag{2.158}$$

donde,  $K_1 := \frac{(c_{Ae}^0 - c_{As}^0)}{q_e^0 + V^0 (\partial r_A / \partial c_{As})_{c_{As}^0, \theta_s^0}}$ ,  $K_2 := \frac{q_e^0}{q_e^0 + V^0 (\partial r_A / \partial c_{As})_{c_{As}^0, \theta_s^0}}$ ,

$$K_3 := \frac{A r_A^0}{q_e^0 + V^0 (\partial r_A / \partial c_{As})_{c_{As}^0, \theta_s^0}}, K_4 := \frac{V^0 (\partial r_A / \partial \theta_s)_{c_{As}^0, \theta_s^0}}{q_e^0 + V^0 (\partial r_A / \partial c_{As})_{c_{As}^0, \theta_s^0}},$$

$$K_5 := \frac{\Delta H_r A r_A^0}{\rho c p q_e^0 + \Delta H_r V^0 (\partial r_A / \partial \theta_s)_{c_{As}^0, \theta_s^0} + U A},$$

$$K_6 := \frac{\Delta H_r V^0 (\partial r_A / \partial c_{As})_{c_{As}^0, \theta_s^0}}{\rho c p q_e^0 + \Delta H_r V^0 (\partial r_A / \partial \theta_s)_{c_{As}^0, \theta_s^0} + U A},$$

$$K_7 := \frac{\rho c p (\theta_e^0 - \theta_s^0)}{\rho c p q_e^0 + \Delta H_r V^0 (\partial r_A / \partial \theta_s)_{c_{As}^0, \theta_s^0} + U A},$$

$$K_8 := \frac{\rho c p q_e^0}{\rho c p q_e^0 + \Delta H_r V^0 (\partial r_A / \partial \theta_s)_{c_{As}^0, \theta_s^0} + U A},$$



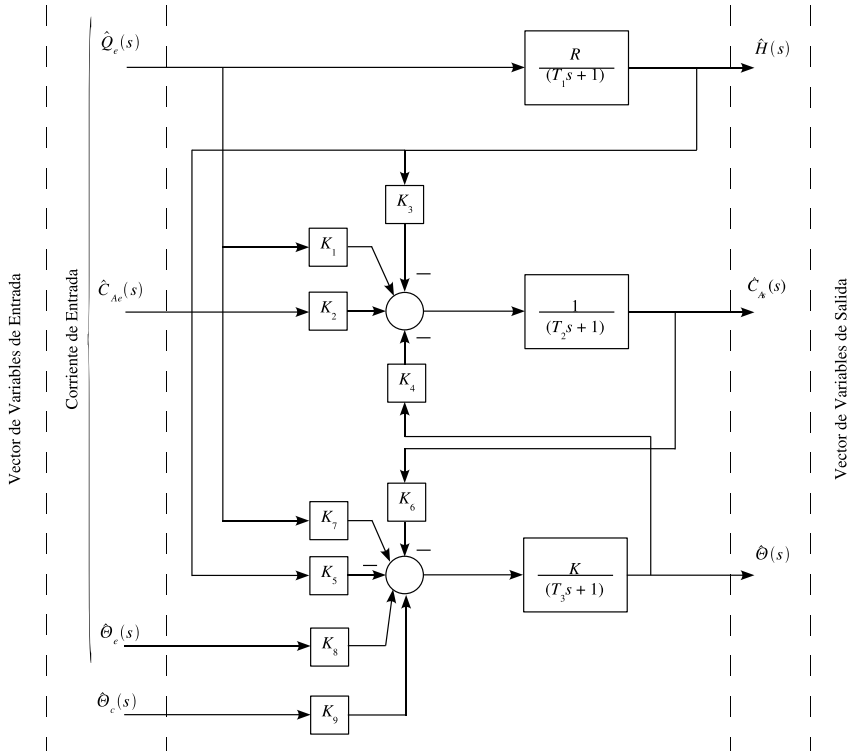


Figura 2.25: Diagrama de bloques del CSTR no isotérmico a volumen variable.

$$K_9 = \frac{UA}{\rho c p q_e^0 + \Delta H_r V^0 (\partial r_A / \partial \theta_s)_{c_{As}^0, \theta_s^0} + UA},$$

$$T_1 = AR, T_2 = \frac{V^0}{q_e^0 + V^0 (\partial r_A / \partial c_{As})_{c_{As}^0, \theta_s^0}}$$

$$\text{y } T_3 = \frac{V^0 \rho c p}{\rho c p q_e^0 + \Delta H_r V^0 (\partial r_A / \partial \theta_s)_{c_{As}^0, \theta_s^0} + UA}.$$

Finalmente el diagrama de bloques resultante del sistema de ecuaciones es el que se presenta en la Fig. 2.25.

## 2.8. Conclusiones

En este capítulo se presentó el modelado matemático de sistemas típicos de la ingeniería de procesos. Dichos modelos (a parámetros concentrados) fueron desarrollados a partir de las ecuaciones fundamentales, las que dieron lugar a ecuaciones diferenciales no lineales. Posteriormente, mediante la técnica de linealización por serie de Taylor, se obtuvieron los correspondientes modelos

matemáticos LTI, los que mediante la aplicación de la transformada de Laplace fueron llevados al dominio complejo. Se aspira que el lector siguiendo la metodología aquí empleada pueda aplicarla a otros sistemas físicos de la ingeniería.

## 2.9. Pensemos

1. Si se tiene en cuenta que un plato de una columna de destilación binaria es representado por una ecuación de diferencial de primero orden para el balance de materia total y otra para el balance de materia por componente y, si se desprecia los efectos dinámicos relacionados con la hidráulica en un plato, el modelo dinámico resultante será de,
  - primer orden.
  - segundo orden.
  - tercer orden.
  - ninguno de los anteriores.
2. Por lo general, un proceso químico puede ser descrito por una función de transferencia de orden  $n$  que resulta de una combinación de funciones más sencillas. ¿Cual de las siguientes funciones que forma parte de dicha combinación considera que es la más común para describirlo?
  - Tiempo muerto.
  - Segundo orden Tipo 0.
  - Primer orden Tipo 0.
  - Primero orden Tipo 1.
  - Ninguna de las anteriores.

Justifique su respuesta.
3. ¿La respuesta dinámica a lazo abierto los dos tanques en cascada puede llegar a ser oscilatoria?  SI  NO

## 2.10. Problemas

**Problema 2.1** ¿Cómo se define la resistencia hidráulica en una válvula a la salida de un tanque?

¿En base a qué hipótesis se puede considerar una variación lineal entre el nivel de líquido del tanque y el caudal de salida?

Considere régimen laminar y turbulento para su respuesta.

**Problema 2.2** La Fig. 2.26 muestra un tanque en cuya salida se ha instalado una bomba que extrae un caudal constante de un fluido de proceso.

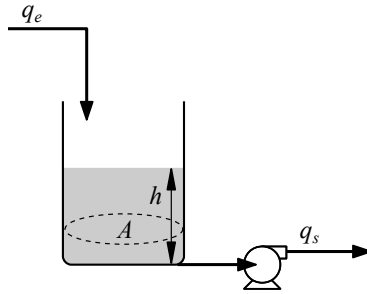


Figura 2.26

- Realice todas las hipótesis necesarias que permite modelar el sistema.
- Obtenga la ecuación diferencial que representa la variación de la altura del sistema en función del tiempo.
- Aplique transformada de laplace y obtenga el diagrama de bloques correspondiente.
- Determine la función de transferencia de la altura en función del caudal de entrada.
- Como sería la variación de la altura de líquido si de pronto el caudal  $q_e$  aumenta según un escalón.

**Problema 2.3** Considere el sistema hidráulico de la Fig. 2.27.

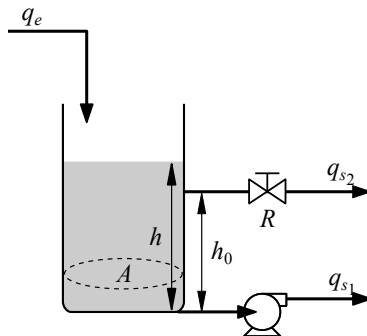


Figura 2.27

- Adopte las hipótesis necesarias y obtenga el modelo matemático del sistema.
- Obtenga el correspondiente modelo en el campo de Laplace y arme el diagrama de bloques.
- Obtenga las funciones de transferencia que representan el cambio de la altura del tanque en función del caudal de entrada  $q_e$ .

**Problema 2.4** Un fluido de densidad constante es alimentado al tanque de la Fig. 2.28. El caudal volumétrico de salida es proporcional a la raíz cuadrada del

nivel de líquido del tanque.

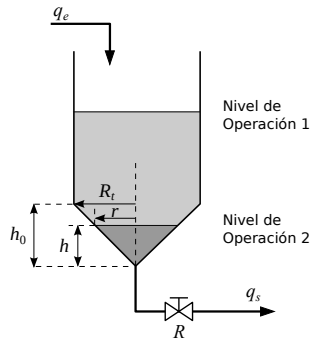


Figura 2.28

- Plantee claramente las hipótesis necesarias y obtenga las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico del nivel de líquido del tanque cuando el mismo se encuentra en el nivel de operación 1 y 2.
  - Establezca las ecuaciones de balance en el campo transformada y arme el diagrama de bloques correspondiente.
  - Obtenga la función de transferencia  $\hat{H}(s)/\hat{Q}_e(s)$  para ambos casos.
- Dato. Volumen del cono  $V = h\pi r^2/3$ , y  $h_0$  y  $R_t$  conocidos.

**Problema 2.5** Considere el sistema hidráulico de la Fig. 2.29

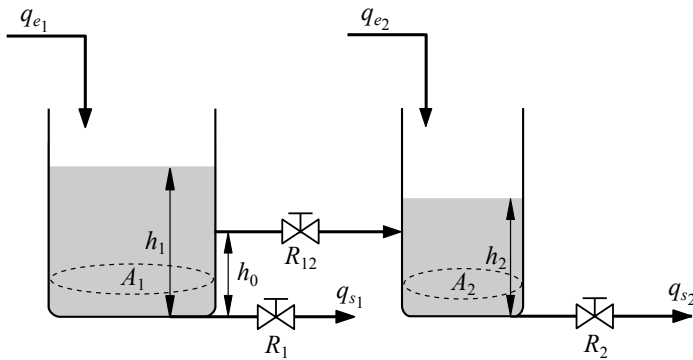


Figura 2.29

- Adopte las hipótesis que considere necesarias y establezca el modelo matemático del sistema.
- Obtenga el correspondiente modelo en el campo de Laplace y arme el diagrama de bloques.
- Obtenga las funciones de transferencias que modela el cambio de las alturas en función de los caudales de entrada.

**Problema 2.6** Considere el sistema hidráulico de la Fig. 2.30

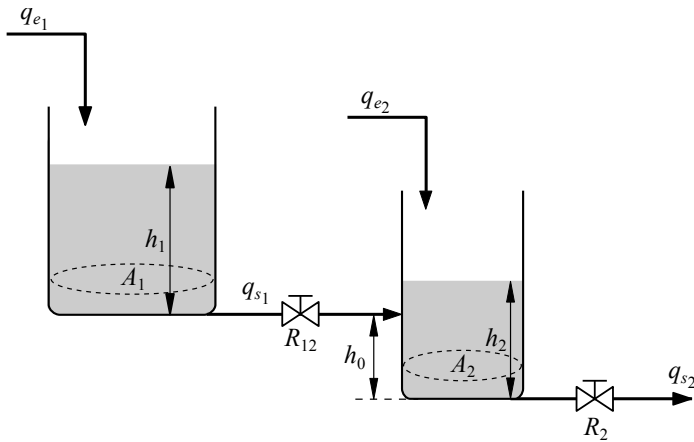


Figura 2.30

- Plantee las hipótesis necesarias y establezca las ecuaciones de balances a fin de obtener un modelo matemático del sistema, considerando condiciones iniciales no nulas.
- ¿Cuáles son los límites de validez del modelo planteado?
- Basándose en el modelo anterior obtenga el correspondiente modelo lineal en el campo de Laplace.

**Problema 2.7** Considere el sistema hidráulico de la Fig. 2.31.

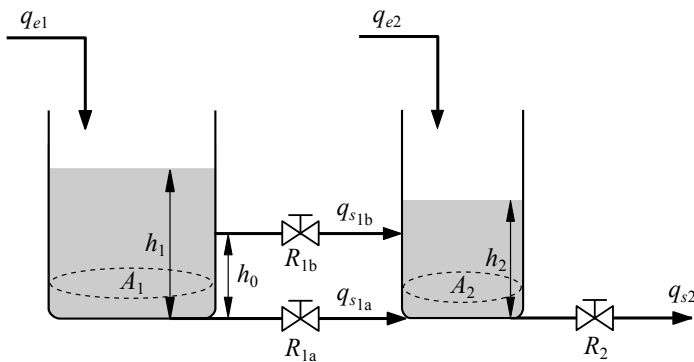


Figura 2.31

- Plantee las hipótesis necesarias y establezca las ecuaciones de balances a fin de obtener un modelo matemático del sistema, considerando condiciones iniciales no nulas.
- ¿Cuáles son los límites de validez del modelo planteado?

- (c) Basándose en el modelo anterior obtenga el correspondiente modelo lineal en el campo de Laplace.

**Problema 2.8** Para el esquema de la Fig. 2.32 se pide:

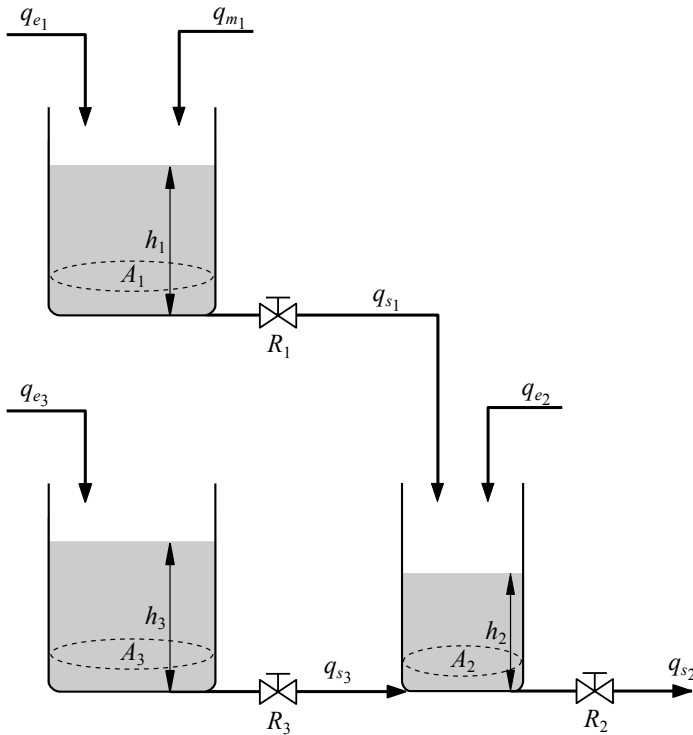


Figura 2.32

- Adopte todas las hipótesis necesarias que permite modelar el sistema.
- Obtenga las ecuaciones diferenciales que representan a las tres alturas del sistema en función del tiempo.
- Aplice transformada de Laplace y obtenga el diagrama de bloques correspondiente.
- Determine todas las funciones de transferencia posibles para las tres alturas en función de las entradas al sistema.

**Problema 2.9** En una planta se necesita agregar un reactivo catalizador en pequeñas proporciones a intervalos regulares de tiempo. En lugar utilizar una bomba dosificadora se propone emplear el siguiente esquema.

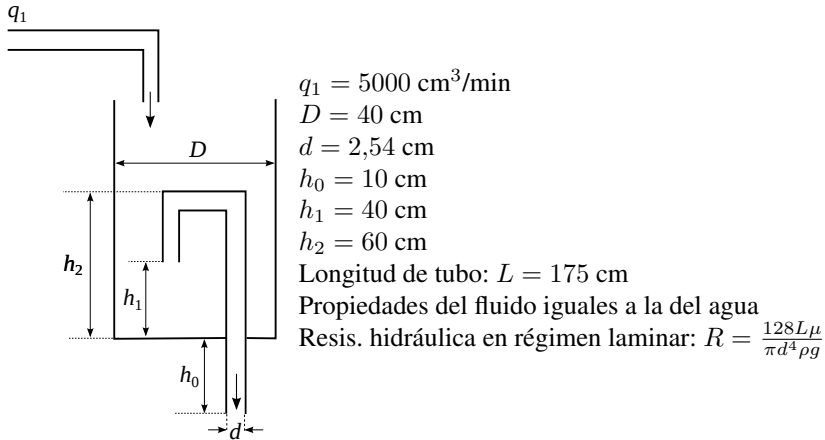


Figura 2.33

- (a) Adopte como hipótesis a fin de obtener un modelo matemático del sistema que i) el flujo es laminar en el tubo y ii) el área del tubo es despreciable frente al área del tanque.
- (b) Grafique la evolución de la altura en función del tiempo durante por lo menos 3 ciclos, partiendo de suponer que inicialmente el tanque esta vacío.

**Problema 2.10** Considere el sistema hidráulico de la Fig. 2.34, donde se representa en forma esquemática dos tanques cilíndricos en posición horizontal y vertical. Obtenga el correspondiente modelo matemático lineal que representa la variación de las alturas en ambos tanques en función del tiempo. Establezca claramente los límites de validez de su modelo.

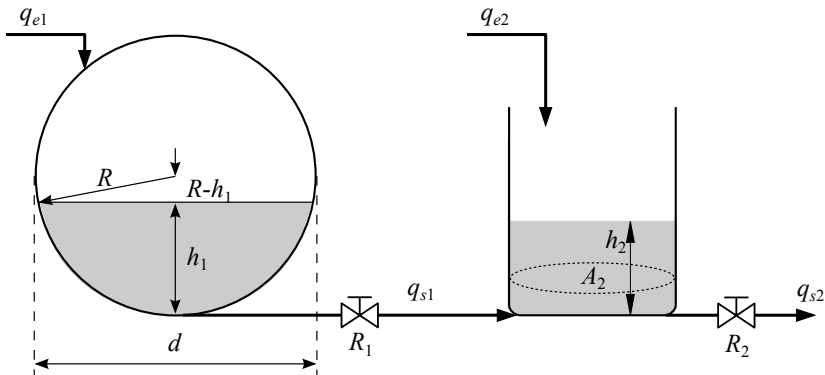


Figura 2.34

**Datos.** Para el tanque horizontal se acepta como válida la aproximación  $\frac{dV}{dt} \approx dL \frac{dh}{dt}$ , donde  $L$  es la longitud transversal del tanque y  $\frac{d}{2} = \sqrt{R^2 - (R - h_1)^2}$ .

**Problema 2.11** Considere el sistema de dilución de una sal en dos tanques que rebasan por la parte superior según la Fig. 2.35. Los tanques que se encuentran perfectamente agitados y donde  $q_{1e}$  y  $c_{1e}$  son los caudales y la concentración de entrada de la solución salina y  $q_{1w}$  y  $q_{2w}$  son los caudales de agua pura. Se sabe además que en dicho sistema no hay reacción química alguna.

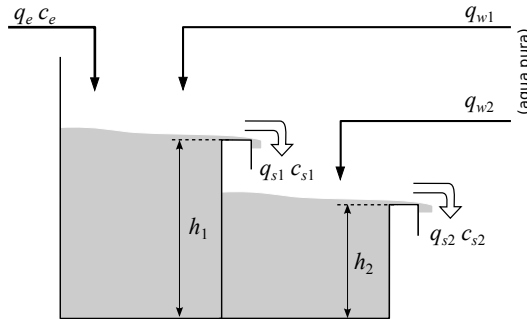


Figura 2.35

- Obtenga el modelo matemático lineal en el dominio del tiempo y de Laplace de dicho sistema de dilución.
- ¿A qué es igual la función de transferencia entre  $C_{2s}(s)$  y  $C_{1e}(s)$ ? Asuma que los caudales se mantienen constantes.
- Si un operario inyecta una gran cantidad de sal en la alimentación durante un corto período de tiempo como para que pueda ser considerada un impulso ideal. ¿Cómo es la respuesta  $c_{2s}(t)$  en este caso? Indicar a mano alzada.

**Problema 2.12** Considere el sistema de dilución de la Fig. 2.36.

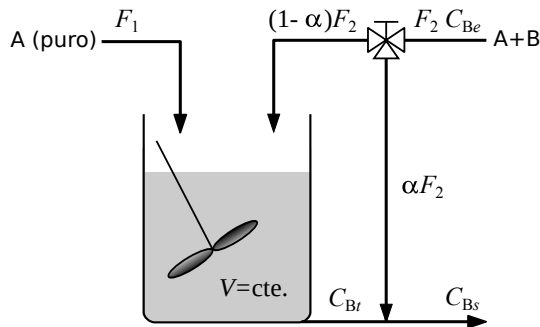


Figura 2.36



- Obtenga el modelo matemático no lineal del sistema. Para tal fin, plantee claramente las hipótesis necesarias asumiendo además que las densidades de todas las corrientes son constantes,  $\alpha$  puede variar tal que  $0 < \alpha < 1$ , el volumen de la mezcla es constante.
- En cambio el modelo matemático lineal del sistema si  $F_1 \gg F_2$ .
- Basándose en la hipótesis anterior, obtenga la función de transferencia que relaciona  $c_{Bs}$  con  $F_1$  y  $F_2$ .

**Problema 2.13** Considere el sistema de dilución de la Fig. 2.37.

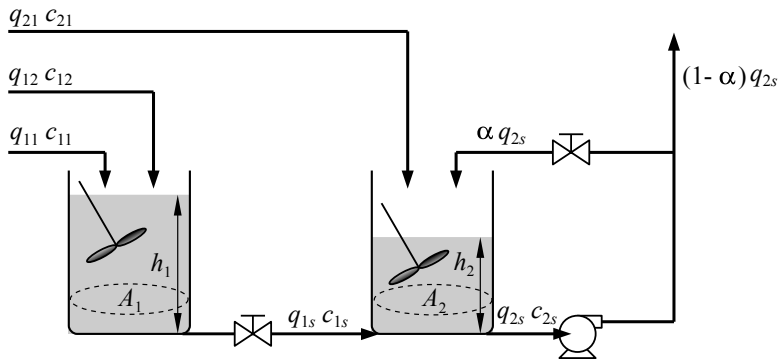


Figura 2.37

- Obtenga el modelo matemático no lineal del sistema. Para tal fin, plantee claramente las hipótesis necesarias asumiendo además que las densidades de todas las corrientes son constantes y  $\alpha$  puede variar tal que  $0 < \alpha < 1$ .
- Basándose en el modelo matemático anterior, obtenga el correspondiente modelo matemático lineal y las funciones de transferencia que relacionan la concentración de salida  $c_{2s}(t)$  con las diferentes entradas.

**Problema 2.14** Considere el sistema hidráulico térmico de la Fig. 2.38.

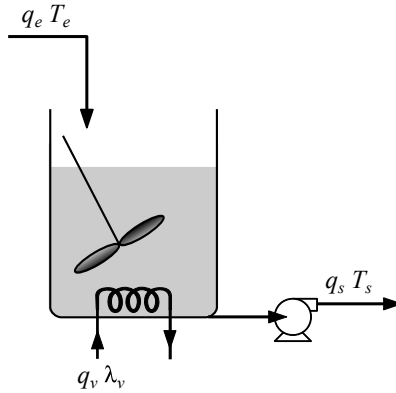


Figura 2.38

- Adopte las hipótesis que considere necesarias y obtenga el modelo matemático del sistema.
- Obtenga el correspondiente modelo en el campo de Laplace.
- Arme el diagrama de bloques de dicho sistema.
- Obtenga las funciones de transferencia que representan la variación de la altura con el caudal de entrada y la temperatura de salida con el caudal de entrada.

**Problema 2.15** Considere el sistema térmico hidráulico de la Fig. 2.39.

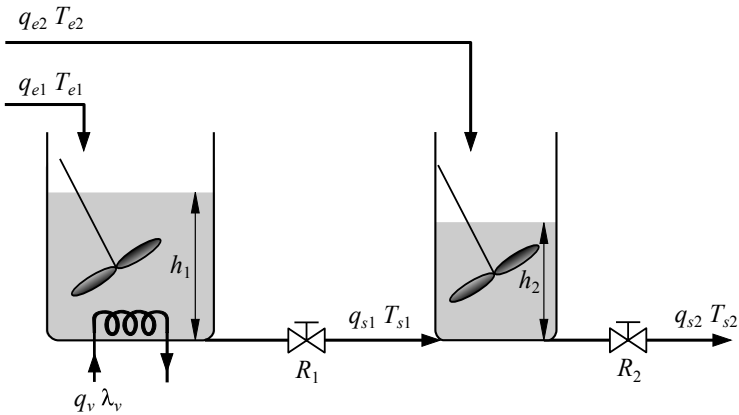


Figura 2.39

- Adopte las hipótesis que considere necesarias y obtenga el modelo matemático del sistema.
- Establezca las ecuaciones de balance en el campo transformado y arme el diagrama de bloques correspondiente.

- (c) Obtenga las funciones de transferencia que representan las variaciones de los niveles y la temperatura de ambos tanques en función de las variables de entrada.

**Problema 2.16** Considere el intercambiador de la calor de la Fig. 2.12.

- (a) Con el objeto de obtener un modelo matemático sencillo a parámetros concentrados del intercambiador de calor asuma que, (i) los caudales de entrada son constantes e iguales a los de salida en todo instante de tiempo, (ii) no hay cambio de fase en los fluidos que intercambian calor y (iii)  $\theta_{1s} > \theta_p > \theta_{2s}$  en todo instante de tiempo. Justifique todas las hipótesis que considere necesarias y escriba las ecuaciones de balance de dicho sistema.
- (b) Considere que,  $A_1 = A_2 = A$ ,  $h_1 = 0,7h_2$ ,  $h_1A/(\rho_1cp_1q_1V_1) = 0,2$ ,  $h_2A/(\rho_2cp_2q_2V_2) = 0,4$ ,  $\rho_pV_pcp_p/(Ah_2) = 0,1$ ,  $q_1/\rho_1V_1 = 2$ ,  $q_2/\rho_2V_2 = 1,5$ , donde  $q_1$  y  $q_2$  están expresados como caudales másicos. Luego, haciendo uso del álgebra de diagramas de bloques obtenga una representación del sistema y la función de transferencia que representa  $\hat{\theta}_{2s}/\hat{\theta}_{1e}$ .
- (c) Grafique a mano alzada la variación de temperatura del fluido frío en función del tiempo, para un cambio escalón en la temperatura del fluido caliente. Obtenga conclusiones respecto a la estabilidad.

**Problema 2.17** Se desea estudiar la dinámica de un reactor batch donde se lleva a cabo una reacción endotérmica de primer orden  $A \rightarrow B$ . El reactor tiene una camisa de calefacción por donde se hace circular un fluido como se indica en la Fig. 2.40. En el instante inicial el reactivo tiene una concentración  $c_{A0}$  y una temperatura  $\theta_0$ . Además, puede considerarse mezcla perfecta tanto para el reactor como para la camisa, y que la pared que separa el reactor de la camisa no acumula calor.

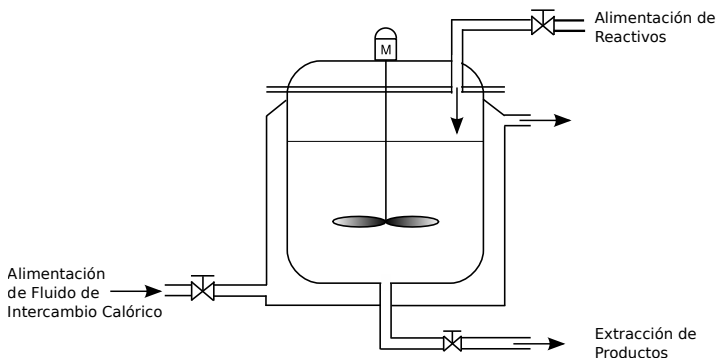


Figura 2.40

- (a) Plantee claramente las hipótesis necesarias y establezca los balances de materia y energía del sistema.

- (b) Especifique cuales son las variables dependientes e independientes.  
 (c) Establezca las ecuaciones de balance en el campo transformado y arme el diagrama de bloques correspondiente.

**Problema 2.18** Las siguientes ecuaciones representan a un modelo simple de un reactor tanque continuo agitado, donde se lleva a cabo par de reacciones paralelas exotérmicas ( $A \rightarrow B$  y  $A \rightarrow C$ ):

$$V \frac{dc_A}{dt} = q(c_{Af} - c_A) - k_1 V c_A^2 - k_2 V c_A,$$

$$V \frac{dc_B}{dt} = -q c_B + k_1 V c_A^2,$$

$$V c_p \rho \frac{dT}{dt} = -q c_p \rho (T_f - T) + (-\Delta H_1) k_1 V c_A^2 + (-\Delta H_2) k_2 V c_A - U A (T - T_c),$$

donde  $c_{Af}$  y  $c_A$  son las concentraciones de entrada y salida de reactivo respectivamente,  $c_B$  la concentración de producto B,  $q$  el caudal de entrada,  $T_f$  y  $T$  las temperaturas de las corrientes de entrada y salida respectivamente,  $T_c$  la temperatura del fluido de intercambio de calor,  $\Delta H_1 < 0$  y  $\Delta H_2 < 0$ ,  $k_1$  y  $k_2$  las constantes de reacción que se rigen según la ecuación de Arrhenius.

- (a) Liste las suposiciones asumidas basándose en las observación de la ecuaciones.  
 (b) Linealice el sistema de ecuaciones presentado y obtenga el modelo matemático lineal en el campo de Laplace.  
 (c) Arme el diagrama de bloques de dicho sistema y comente a cerca de la interacción de variables observada en dicho sistema.

**Problema 2.19** Considere el CSTR isotérmico de la Fig. 2.41.

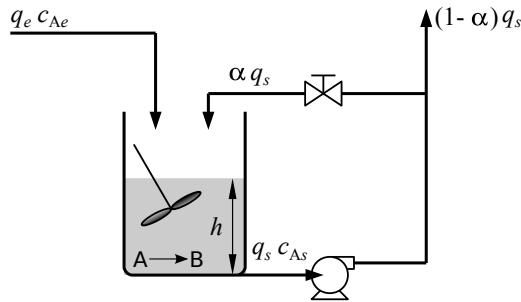


Figura 2.41: CSTR isotérmico con reciclo

Asuma que, i) el caudal ( $q_e$ ), la concentración de reactivo ( $c_{Ae}$ ) y la relación de reciclo ( $\alpha$ ) pueden variar, y ii) que el caudal de salida de la bomba es constante dentro de los límites de trabajo del reactor.

- (a) Plantee las ecuaciones de balance que permiten modelar dicho reactor.

- (b) Aplique transformada de Laplace y obtenga el diagrama de bloques correspondiente.
- (c) Obtenga la función de transferencia de la concentración de salida ( $C_{As}(s)$ ) en función del caudal de alimentación ( $Q_e(s)$ ) y de la composición de entrada ( $C_{As}(s)$ ).
- (d) Analice que ocurre con la variación de la relación de caudales ( $\alpha$ ) y la concentración de reactante en la salida.
- (e) Basándose en los items anteriores prediga el comportamiento del nivel de líquido en el reactor y de la concentración de salida ( $c_{As}$ ) para cambios escalones en las variables de entrada.

**Problema 2.20** Considere el sistema de la Fig. 2.42, donde se ha representado en forma esquemática un sistema experimental de destilación binaria de laboratorio.

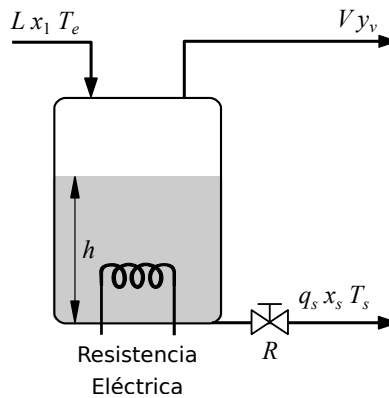


Figura 2.42: Sistema experimental de destilación binaria.  $L$ ,  $V$  y  $q_s$  son los caudales molares de las corrientes en moles/seg,  $x_1$ ,  $y_v$ , y  $x_s$  son las composiciones en fracciones molares, y  $T_s$  la temperatura en grados centígrados.

Asuma las siguientes hipótesis: i) dinámica de fase vapor despreciable, ii) el caudal y la temperatura de la corriente de entrada son constantes, iii) todas las propiedades físico-químicas son constantes, iv) todas las propiedades de líquidos de mezcla son aproximadamente iguales, v) en el rango de trabajo se cumple que  $y_v = \alpha x_s$ , vi) el calor entregado ( $Q$ ) por la resistencia eléctrica es constante, vii) el sistema en su conjunto puede ser considerado adiabático.

- (a) Escriba las ecuaciones de balance para el sistema de la figura.
- (b) Basándose en lo anterior, obtenga el modelo matemático lineal en el campo de complejo.
- (c) Arme el diagrama de bloques del sistema.

**Problema 2.21** Para el sistema eléctrico representado en cada caso de la Fig. 2.43, se pretende:

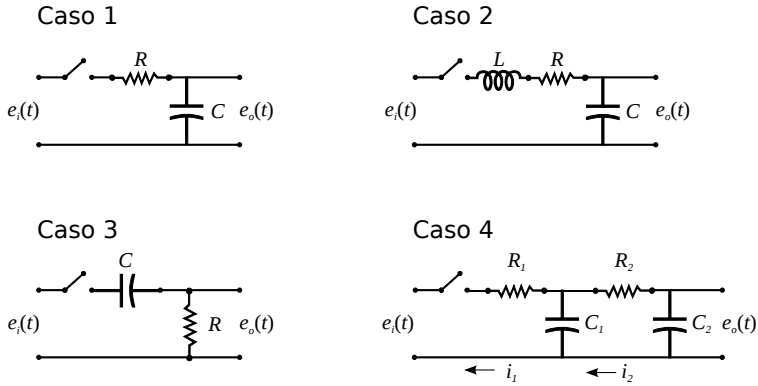


Figura 2.43

- (a) Obtener las ecuaciones diferenciales que modelan cada caso.  
 (b) Hallar la función de ecuación de transferencia  $E_o(s)/E_i(s)$ .

**Problema 2.22** Considere el sistema de la Fig. 2.44. Se pretende

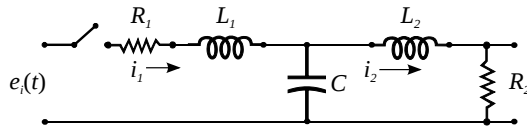


Figura 2.44

- (a) Obtener las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema eléctrico.  
 (b) Aplique transformada de laplace y obtenga el diagrama de bloques correspondiente.  
 (c) Obtenga las funciones de transferencia de  $I_1(s)/E_i(s)$  e  $I_2(s)/E_i(s)$  a partir de la resolución del diagrama de bloques.

**Problema 2.23** Considere el sistema de la Fig. 2.45. Se pretende:

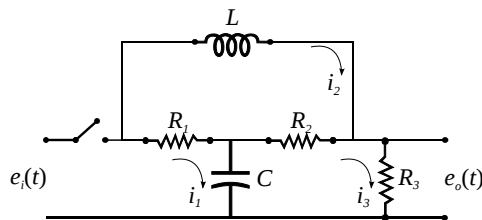


Figura 2.45

- (a) Obtener las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema eléctrico.

- (b) Aplique transformada de laplace y obtenga el diagrama de bloques correspondiente.
- (c) Obtenga las función de transferencia  $E_o(s)/E_i(s)$  a partir de la resolución del diagrama de bloques.

**Problema 2.24** Considere los siguientes sistemas mecánicos de traslación de la Fig. 2.46.

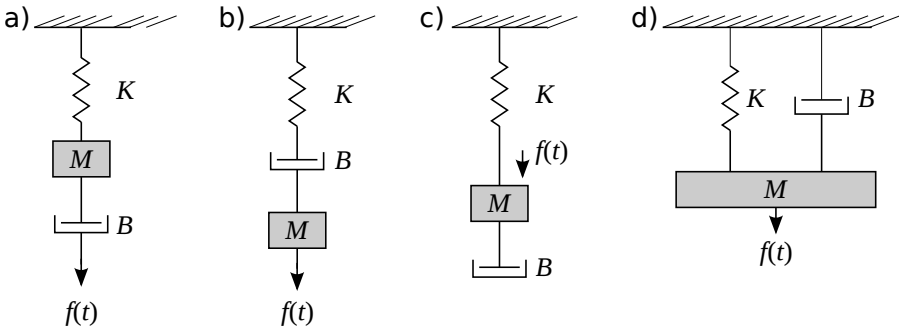


Figura 2.46

- a) Indique los distintos desplazamientos producidos por cada uno de los elementos.
- b) Empleando las analogías eléctrico-mecánicas dibuje los circuitos equivalentes de cada uno de los ejemplos.
- c) Obtenga las funciones de transferencia para cada uno de los ejemplos planteados.

**Problema 2.25** Considere el sistemas mecánico de traslación de la Fig. 2.47 determine la función de transferencia  $X(s)/F(s)$ .

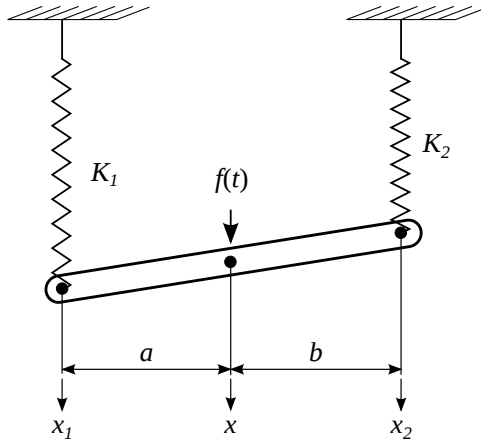


Figura 2.47

**Problema 2.26** Considere el sistema mecánico de traslación de la Fig. 2.48 determine la función de transferencia  $X(s)/F(s)$ .

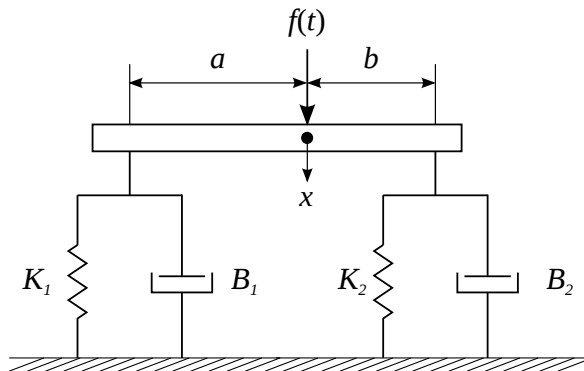


Figura 2.48

**Problema 2.27** La Fig. 2.49 muestra un diagrama esquemático que representa la suspensión de un automotor.  $K_n$  representa la elasticidad del neumático,  $K_a$  y  $B_a$  el amortiguador y,  $M_a$  y  $M_e$  las masas del automovil y los elásticos.



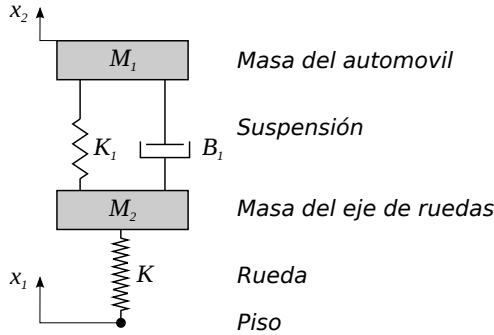


Figura 2.49

- (a) Obtenga la función transferencia de la posición del automóvil ( $X_2$ ) respecto al piso  $X_1$ .
- (b) Como responde la posición del automóvil si se considera que el suelo excita al sistema con una entrada senoidal.

**Problema 2.28** Considere el sistema hidráulico-mecánico de la Fig. 2.50, obtenga el modelo matemático que representa el desplazamiento  $Y$  en función del caudal  $Q$ .

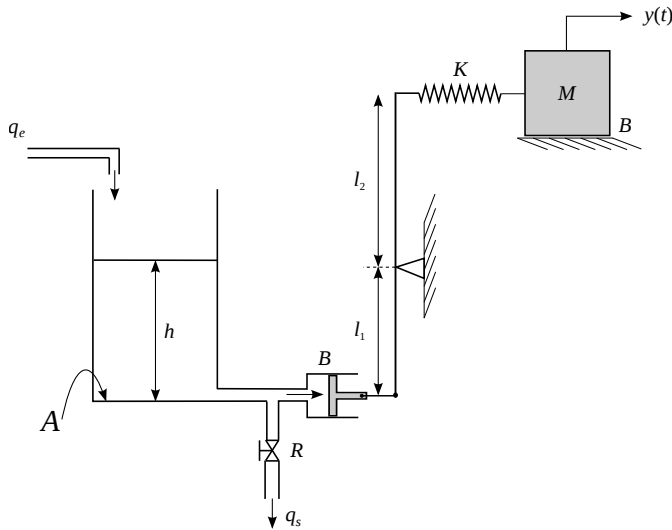


Figura 2.50: Diagrama esquemático de un sistema hidráulico-mecánico.

Considere despreciable el volumen de líquido acumulado por el pistón.

**Problema 2.29** La Fig. 2.51 representa a un sistema hidráulico y mecánico. Obtenga la función de transferencia que representa el desplazamiento  $Y(s)$  en función de los cambios de caudal  $Q(s)$ .

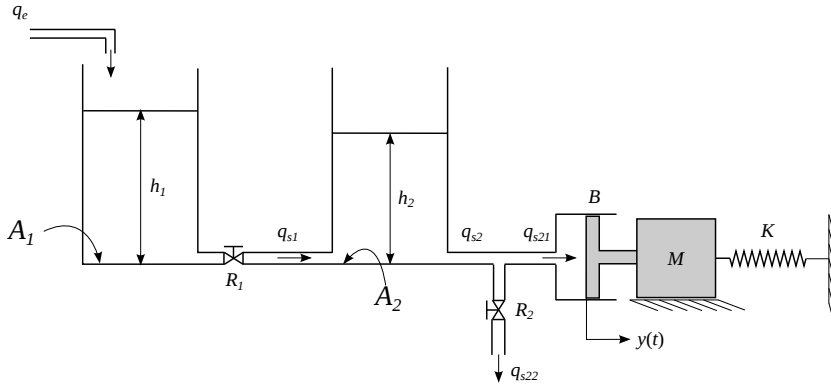
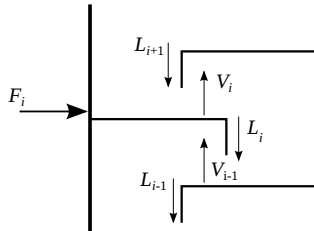


Figura 2.51

- En principio considere que el volumen de líquido acumulado dentro del pistón es despreciable.
- Plantee nuevamente el modelo del sistema considerando que el volumen de líquido dentro del pistón no es despreciable.

**Problema 2.30** Considere una columna de destilación binaria cuyo plato  $i$ -ésimo es representado en la Fig. 2.52.

Figura 2.52: Diagrama esquemático del plato  $i$ -ésimo de una columna de destilación binaria.

- Plantee las hipótesis que permite modelar el plato de la columna de destilación. Considere que en la fase vapor la pérdida de carga es despreciable, dinámica despreciable en la fase vapor ( $V_{i-1} = V_i$ ), relación de equilibrio  $y_i = \alpha x_i / [1 + (\alpha - 1)x_i]$  donde  $\alpha$  es la volatilidad relativa considerada constante, y la relación hidráulica  $L_i = K_h M_i$  donde  $M_i$  es la materia acumulada (*holdup*) en el plato  $i$ -ésimo y  $K_h$  una constante conocida e igual para todos los platos.
- Obtenga el modelo matemático lineal de dicho plato.
- Luego basándose en el resultado anterior, obtenga una representación en diagrama de bloques del sistema de ecuaciones y las funciones de transferencia del sistema.

- (d) ¿Si la columna tiene 20 platos y considerando el modelo matemático obtenido anteriormente, sin considerar el hervidor y el condensador, de que orden sería el sistema?



## Capítulo 3

# Respuestas Transitorias de Sistemas LTI

En este capítulo se estudiarán las respuestas temporales de sistemas lineales simples (cuyas funciones de transferencia son sencillas, como las de primero o segundo orden, entre otras) al ser sometidos a diversos tipos de excitación de entrada (impulso, escalón y rampa).

Para esto primeramente se presenta un planteo general del problema estudiando a través de los teoremas de valor inicial y final los puntos de partida y llegada de las respuestas dinámicas de sistemas lineales. Luego, se particulariza el estudio a sistemas de primero y segundo orden. De esta manera y siguiendo el razonamiento aquí presentado se aspira que el lector pueda extender dicho estudio a sistemas de orden superior.

### 3.1. Introducción

No es posible realizar el análisis, el diseño y la implementación de un sistema de control sin conocer las características dinámicas de un sistema o proceso a controlar. Cuanto más se conoce a cerca del comportamiento dinámico de un sistema, más chance se tendrá de lograr un mejor desempeño del sistema de control.

Para evidenciar el comportamiento dinámico de un sistema es necesario recurrir a señales de prueba, las que pueden ser seleccionadas en base a las formas de las señales a las cuales el sistema suele estar sometido. Las señales de prueba más usuales son el impulso, el escalón, la rampa y la senoide. En este capítulo se mostrará que ciertas propiedades, como tiempo de establecimiento, característica oscilatoria, etc., se sostienen independiente del tipo de señal de entrada al sistema.

También es importante remarcar que, los procesos químicos tienen la característica de cambiar su dinámica a medida que se desplazan a lo largo de una ventana de operación debido a las *no linealidades* que estos presentan. Por tal razón, es importante comprender el desempeño dinámico de los sistemas lineales sencillos para poder extrapolar y comprender el comportamiento dinámico de sistemas más complejos.

El análisis de respuesta transitoria realizado en este capítulo se basa en utilizar una representación con funciones de transferencia. El uso de este tipo de representación resulta más intuitivo para el ingeniero de procesos, ya que consiste en una simple representación entrada-salida, en donde si se tiene en cuenta que para su estudio la entrada ha sido fijada a priori, la salida surge inmediatamente de su análisis.

### 3.2. Clasificación de Sistemas Lineales

Una forma de clasificar a los sistemas lineales a lazo abierto es por la forma como siguen a sus entradas. Así, una función de transferencia general ( $G(s)$ ) de un sistema lineal puede ser escrita como,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m)}{s^N (s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n)} e^{-\theta s} \quad (3.1)$$

con  $N + n \geq m$ ,  $a_i$  y  $b_j$  constantes reales y,  $i = 1 \dots n$  y  $j = 1 \dots m$  y  $U(s)$  es la transformada de Laplace de la señal de entrada  $u(t)$  e  $Y(s)$  es la transformada de Laplace de la señal de salida  $y(t)$ . Dicha expresión puede ser factorizada como sigue,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K \prod_{j=1}^{j=O} (\tau_j s + 1) \prod_{q=1}^{q=Q} (\tau_q^2 s^2 + 2\zeta_q \tau_q s + 1)}{s^N \prod_{i=1}^{i=P} (T_i s + 1) \prod_{k=1}^{k=R} (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1)} e^{-\theta s} \quad (3.2)$$

donde,  $P + 2R = n$ ,  $O + 2Q = m$ ,  $0 \leq \zeta_q < 1$ ,  $T_i, T_k, \tau_j, \tau_q$  y  $\theta \in \mathbb{R}^+$ .

**Definición 3.2.1 — Polos.** Se define polos de una función de transferencia  $G(s)$  a los valores de  $s$  que hacen cero el denominador de dicha función.

**Definición 3.2.2 — Ceros.** Se define ceros de una función de transferencia  $G(s)$  a los valores de  $s$  que hacen cero el numerador de dicha función.

De acuerdo con las definiciones anteriores y con la Ec. (3.2)  $G(s)$  posee  $N$  polos en  $s = 0$ ,  $P$  polos reales ( $p_i = -1/T_i$  con  $i = 1, 2, \dots, P$ ),  $2R$  polos complejos conjugados ( $s_{k1-2} = -\zeta_k/T_k + j\sqrt{1-\zeta_k^2}/T_k$  con  $k = 1, 2, \dots, R$  y  $0 < \zeta_k < 1$ ),  $O$  ceros reales ( $z_j = -1/\tau_j$  con  $j = 1, 2, \dots, O$ ) y  $Q$  ceros

complejos conjugados ( $s_{q1-2} = -\zeta_q/\tau_q + j\sqrt{1 - \zeta_q^2}/\tau_q$  con  $k = 1, 2, \dots, Q$  y  $0 < \zeta_q < 1$ ).

Así, una posible clasificación está basada en la cantidad de polos integradores (polos en  $s = 0$ ) que posee la función de transferencia de lazo abierto (LA). Esto es, si  $N = 0$  se designa al sistema como tipo cero, si  $N = 1$  se lo designa tipo uno y así sucesivamente.

Note que:

1. a los sistemas *estables tipo cero*<sup>1</sup> se los suele llamar sistemas *no integradores* o *autoregulados*, debido a que tienen la propiedad de seguir a la entrada pasado el transitorio mientras que,
2. a los demás sistemas estables se los designa *sistemas integradores* o *no autoregulables* por que pasado el transitorio han integrado  $N$  veces a la entrada.

A continuación se enuncia una serie de definiciones que permite clasificar a los sistemas según ciertas propiedades matemáticas asociadas a su comportamiento a lazo abierto.

**Definición 3.2.3 — Sistemas Propios.** Un sistema  $G(s)$  es propio si  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$  es finito. Un sistema es estrictamente propio si  $\lim_{s \rightarrow \infty} |G(s)| = 0$  y semipropio si  $\lim_{s \rightarrow \infty} |G(s)| > 0$ .

Note en base a la Def. 3.2.1 que el sistema lineal (3.1) es propio si  $N + n \geq m$ . Es importante aclarar que aquellos sistemas cuyo orden del denominador es menor que el del numerador ( $N + n < m$ ) no tienen existencia física real.

**Definición 3.2.4 — Sistemas Impropios.** Todos los sistemas que no son propios son impropios.

**Definición 3.2.5 — Sistemas de No Mínima Fase.** Un sistema  $G(s)$  es de no mínima fase si su función de transferencia contiene ceros en  $\mathbb{C}^+$  o tiempo muerto ( $e^{-\theta s}$ ) o ambos. De otro modo se dice que es de mínima fase.

También en la literatura se suele hablar de *sistemas causales* y *no causales*.

**Definición 3.2.6 — Sistemas No Causales.** Un sistema lineal es no causal si incluye un término de predicción  $e^{+\theta s}$  en su función de transferencia. De lo contrario (si no incluye términos predictivos) se dice que el sistema es causal.

Debido al hecho que ningún sistema físico tienen la capacidad de predicción en su salida, el lector notará que los sistemas no causales *no tienen existencia*

<sup>1</sup>El concepto de estabilidad se verá más adelante, sin embargo, como primer idea de estabilidad aceptaremos que un sistema físico es estable a LA (sin lazo de control por realimentación), si su salida no crece indefinidamente cuando se encuentra sometido a una entrada o función fuerza acotada. Esto es, que simplemente se aleja del estado estacionario en forma finita (dependiendo de la amplitud de la entrada).

También, asociaremos esto con polos con parte real negativa.

*real*. En otras palabras, todo sistema físico real puede ser aproximado por un sistema lineal propio y causal.

El análisis temporal que se presenta a continuación se basa fundamentalmente en sistemas tipo cero sin tiempo muerto. Se aspira a que una vez comprendido el tema, el lector pueda extender sin inconvenientes los conceptos aquí vertidos a otros sistemas como ser integradores y/o de no mínima fase.

### 3.3. Planteo General

Considere un sistema lineal propio, tipo cero, autorregulable, sin tiempo muerto cuya función de transferencia genérica es

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) &= \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \\ &= \frac{K \prod_{j=1}^{j=O} (\tau_j s + 1) \prod_{q=1}^{q=Q} (\tau_q^2 s^2 + 2\zeta_q \tau_q s + 1)}{\prod_{i=1}^{i=P} (T_i s + 1) \prod_{k=1}^{k=R} (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

con  $P + 2R \geq O + 2Q$  (o bien,  $n \geq m$ )<sup>2</sup>. Luego de (3.3) se puede escribir,

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (3.4)$$

y donde conocidas las funciones  $G$  y  $U$  es posible determinar de la respuesta temporal  $y(t)$  del sistema a partir de la transformada inversa de  $Y(s)$ . Esto es,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)] \quad (3.5)$$

Es de remarcar que toda  $y(t)$  cuenta con dos partes, esto es,

$$y(t) = y_{trans}(t) + y_{estac}(t) \quad (3.6)$$

donde  $y_{trans}(t)$  es la porción de la respuesta que representa al régimen transitorio y cuya dinámica está asociada a los polos de  $G(s)$  e,  $y_{estac}(t)$  representa el régimen estacionario asociado a los polos de la entrada  $U(s)$ . Esto último resulta fácil de probar dado que  $G(s)U(s)$  puede ser expandida por descomposición en fracciones parciales como se muestra en el Apéndice A.

A continuación se estudiará la respuesta del sistema lineal genérico (3.3) frente a tres señales de entrada clásicas de la literatura de sistemas de control, *impulso*, *escalón* y *rampa*.

<sup>2</sup>Para todos los casos aquí estudiados se asume, para el sistema LTI (3.3), que  $b_m \neq 0$ .



### 3.3.1. Respuesta al impulso

También llamada respuesta impulsional o impulsiva, es la respuesta temporal de un sistema sometido a la señal de entrada igual a una función impulso unitario.

Así, siendo la expresión temporal de un impulso unitario  $u(t) = \delta(t)$ , su transformada de Laplace resulta  $U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$  entonces,  $Y(s) = G(s)$  y la respuesta temporal del sistema lineal resulta,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] . \quad (3.7)$$

En conclusión, *la respuesta al impulso unitario de un sistema lineal es igual a la transformada inversa de su función de transferencia de la planta.*

Así, la transformada inversa de la Ec. (3.3) resulta,

$$y(t) = \sum_{i=1}^P A_i e^{-t/T_i} + \sum_{k=1}^R B_k \left( \frac{1}{\omega_k} \right) e^{-\alpha_k t} \sin \omega_k t , \quad (3.8)$$

donde  $A_i$ ,  $A_k$  y  $B_k$  son coeficientes que resultan de la expansión en fracciones parciales;  $\omega_k = \pm \sqrt{1 - \zeta_k^2}/T_k$  y  $\alpha_k = \zeta_k/T_k$ .



■ **Remarca 3.1** El valor inicial (en  $t = 0^+$ ) de la respuesta impulsiva del sistema lineal propio autorregulable (3.3) con  $n > m$  es una magnitud finita.

**Demostración** De acuerdo con el TVI,

$$\begin{aligned} y(0^+) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s)U(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m)}{(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n)} U(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s^m (b_0 + b_1 s^{-1} + \dots + b_{m-1} s^{-m+1} + b_m s^{-m})}{s^n (1 + a_1 s^{-1} + \dots + a_{n-1} s^{-n+1} + a_n s^{-n})} U(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{s^{n-m}} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(b_0 + b_1 s^{-1} + \dots + b_{m-1} s^{-m+1} + b_m s^{-m})}{(1 + a_1 s^{-1} + \dots + a_{n-1} s^{-n+1} + a_n s^{-n})} U(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{s^{n-m}} \frac{b_0}{1} U(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_0}{s^{n-m-1}} U(s) . \end{aligned}$$

Dado que  $U(s) = 1$  luego, si se asume que  $n - m > 1$  con  $m \neq 0$ , entonces  $y(0^+) = 0$ ; o bien si  $n - m = 1$ ,  $y(0^+) = b_0$ . Con  $m = 0$  siguiendo el mismo procedimiento es fácil probar que si  $n > 1$ ,  $y(0^+) = 0$ ; o bien si  $n = 1$ ,  $y(0^+) = b_0$ . □

Note que, en todos los casos  $y(0^+)$  es finita a pesar de que su entrada es infinita en  $t = 0$ .

**R** ■ **Remarca 3.2** El valor final (en  $t \rightarrow \infty$ ) de la respuesta impulsiva de un sistema lineal propio autorregulable (3.3) con  $n \geq m$  es cero.

**Demostración** De acuerdo con el TVF,

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{b_m}{a_n} U(s) = 0 \frac{b_m}{a_n} 1 = 0 .$$

□

### 3.3.2. Respuesta al escalón

También llamada *respuesta indicial*, es la respuesta de un sistema al ser sometido a una señal escalón de amplitud  $k$ .

La expresión temporal del escalón es,  $u(t) = kH(t)$  donde,  $H(t)$  es la función de Heavyside y por tanto, la transformada de Laplace de  $u(t)$  es  $U(s) = k/s$ . En consecuencia, la respuesta temporal del sistema lineal resulta,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ G(s) \frac{k}{s} \right] . \quad (3.9)$$

Es decir que: *la respuesta al escalón de amplitud  $k$  de un sistema lineal es igual a la transformada inversa de su función de transferencia multiplicada por  $k/s$ .*

**R** ■ **Remarca 3.3** El valor inicial de la respuesta al escalón del sistema lineal propio autorregulable (3.3) es cero si  $n > m$  y distinto de cero si  $n = m$ .

**Demostración** De acuerdo con el TVI y apoyándose en expresiones anteriores, es fácil probar que,

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^{n-m-1}} b_0 \frac{k}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^{n-m}} k b_0 .$$

Por tanto, si

1)  $n = m$

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = k b_0 .$$

con  $k \neq 0$  y  $b_0 \neq 0$ .

2)  $n > m$

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = 0 \quad k b_0 = 0 .$$

□

**R** ■ **Remarca 3.4** El valor final de la respuesta al escalón del sistema lineal propio autorregulable (3.3) es igual a  $kK$ .

**Demostración** De acuerdo con el TVF y la expresión (3.3) es posible escribir,

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \frac{b_m}{a_n} \frac{k}{\cancel{s}} = k \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = kK$$

con  $b_m/a_n = K$ , la ganancia estática de la planta. □

### 3.3.3. Respuesta a la rampa

Consideremos ahora el sistema lineal (3.3) sometido a una señal de entrada tipo rampa de pendiente  $k$ . La expresión temporal de dicha rampa es  $u(t) = ktH(t)$  y en consecuencia su transformada de Laplace,  $U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[ktH(t)] = k/s^2$ . Por tanto, la respuesta temporal del sistema resulta

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ G(s) \frac{k}{s^2} \right], \quad (3.10)$$

En consecuencia es posible enunciar que: *la respuesta de un sistema lineal a una entrada en rampa de pendiente  $k$  es igual a la transformada inversa de su función de transferencia multiplicada por  $k/s^2$ .*

**R** ■ **Remarca 3.5** El valor inicial de la respuesta a la rampa de un sistema lineal propio autorregulable (3.3) es cero si  $n > m - 1$ .

**Demostración** De acuerdo con el TVI,

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \cancel{s} G(s) \frac{k}{\cancel{s^2}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^{n-m-1}} k b_0 .$$

Donde la última expresión resultará cero si  $n > m - 1$ . De otro modo, si  $n - m = 1$  el valor inicial es distinto de cero, esto es,  $y(0^+) = k b_0 \neq 0$  con  $k$  y  $b_0 \neq 0$ . □

**R** ■ **Remarca 3.6** La respuesta a la rampa de un sistema autorregulable (3.3) lineal propio estable pasado el transitorio es otra rampa con pendiente  $kK$ .

**Demostración** Basándose en (3.6) y (3.3) el término transitorio resulta,

$$y_{trans}(t) = \sum_{i=1}^P A_i e^{-t/T_i} + \sum_{k=1}^R B_k \left( \frac{1}{\omega_k} \right) e^{-\alpha_k t} \sin \omega_k t ,$$

mientras que el término estacionario resulta,

$$\begin{aligned} y_{estac}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{C_2}{s^2} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{C_1}{s^1} \right] , \\ &= C_2 t + C_1 , \end{aligned}$$

donde  $C_2$  resulta ser,

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \frac{k}{s^2} = kK ,$$

(ver Apéndice A).

Note que pasado el transitorio,

1.  $y_{trans}(t) \rightarrow 0$  ya que todos los términos tienden a cero y
2.  $y(t) = y_{estac}(t) = kKt + C_1$ , lo que demuestra esta remarca.

□

Note en la última expresión que  $y_{estac}(t)$  está asociada a la respuesta del sistema pasado el régimen transitorio. En este caso, resulta difícil asociar un régimen estacionario con una señal que crece indefinidamente.

La Rem. 3.6 nos indica que la respuesta a la rampa de un sistema lineal propio estable pasado el transitorio crece indefinidamente y lo hace siguiendo una asíntota cuya pendiente es  $kK$ .

Por tanto, y basado en las remarcas anteriores, es posible concluir que los sistemas estables siguen a su entrada pasado el transitorio.

### 3.4. Respuestas Dinámicas de Sistemas de Primer Orden

Comenzaremos con un sistema físico cuya función de transferencia es de primer orden frente a diferentes funciones de entrada conocidas. Luego, en la próxima sección, se incrementará la complejidad de la función de transferencia del sistema y se lo estudiará frente a las mismas funciones de entrada inicialmente consideradas.

Considere entonces un sistema tipo cero de primer orden tal que la relación salida-entrada sea escrita como,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{Ts + 1} . \quad (3.11)$$

Aplicando ahora las conclusiones vistas en el apartado anterior, podemos deducir parte del comportamiento temporal del sistema frente a distintas entradas.

### 3.4.1. Respuesta al impulso

La señal de salida en el campo complejo ( $Y(s)$ ) de un sistema de primer orden para una señal de entrada igual a una excitación impulso unitario ( $U(s) = 1$ ) resultará, a partir de (3.11),

$$Y(s) = \frac{K}{Ts + 1} . \quad (3.12)$$

En consecuencia, la correspondiente respuesta temporal la obtenemos directamente como la transformada inversa de Laplace de la expresión anterior resultando ser,

$$y(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T} , \quad (3.13)$$

Por interés didáctico, se determinará el valor inicial y final de la respuesta temporal al impulso de dos maneras diferentes: 1) por sustitución directa en la ecuación temporal y 2) por aplicación de los teoremas del valor inicial y final. Así, se tiene que,

- Para  $t = 0$  según (3.13),

$$y(0) = \frac{K}{T} e^{-0/T} = \frac{K}{T}$$

o bien, por el teorema del valor inicial (TVI)

$$y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{K}{(Ts + 1)} = \frac{K}{T} ,$$

coincidiendo ambos resultados entre sí y con el resultado general de la Rem. 3.1.

- Para  $t \rightarrow \infty$  (condición de régimen estacionario) según (3.13),

$$y(\infty) = \frac{K}{T} e^{-\infty/T} = 0 ,$$

o bien por el teorema del valor final (TVF)

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{(Ts + 1)} = 0 ,$$

coincidiendo ambos resultados entre sí y con el resultado general de la Rem. 3.2.

Por otro lado, es posible estudiar la ecuación de la tangente a la curva de la Fig. 3.1 basándose en la Ec. (3.13). Para ello, derivando respecto del tiempo (3.13) se tiene,

$$\frac{d[y(t)]}{dt} = \frac{K}{T} \frac{(-1)}{T} e^{-t/T} = \frac{-K}{T^2} e^{-t/T} . \quad (3.14)$$

Mientras que, para  $t = 0$ ,

$$\left( \frac{d[y(t)]}{dt} \right)_{t=0} = \frac{(-K/T)}{T} . \quad (3.15)$$

Gráficamente, la tangente a la curva de la Fig. 1 en  $t = 0$  será la de una recta que pasa por el punto con coordenada  $(0, K/T)$  y en consecuencia la pendiente de dicha recta tiene por ecuación

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{(-K/T)}{\Delta t} , \quad (3.16)$$

Luego, por comparación entre (3.15) y (3.16) se tiene que  $\Delta t = T$  y en consecuencia la tangente al origen de la curva 1 pasa por  $t = T$ .

Así, podemos concluir en la siguiente remarca para sistema lineales de primer orden frente a una delta:



■ **Remarca 3.7** La constante de tiempo ( $T$ ) de un sistema de primer orden es el tiempo que tardaría la salida en alcanzar el valor final, si mantuviera su velocidad de **decrecimiento** constante e igual a la del momento inicial de la respuesta al impulso.

**Demostración** La simple inspección de la Fig. 3.1 prueba esta remarca.  
□

Observe que el único polo que posee el denominador de la función de transferencia de primer orden, dada por la Ec. (3.12), tiene por valor  $s = -1/T$ . Por tanto, la constante de tiempo puede interpretarse, desde el dominio complejo, como la inversa de distancia al eje imaginario de la raíz real de dicho denominador.

La Fig. 3.1 muestra en forma esquemática los resultados hasta aquí encontrados.

Note que el valor final (estado estacionario) se alcanza, en teoría, tras un tiempo infinito. Lo que indica en términos estrictamente matemáticos que, un sistema lineal de primer orden se acerca asintóticamente al estado estacionario sin alcanzarlo jamás.

La expresión (3.13) puede ser normalizada definiendo  $y_0 := K/T$ ,  $y^*(t) := y(t)/y_0$  y  $t^* := t/T$  con lo cual resulta,

$$y^*(t) = e^{-t^*} . \quad (3.17)$$

Esta última expresión representa la clásica curva de extinción exponencial, mostrada en la Fig. 3.2 con la ordena y la absisa normalizadas mientras que, en la Tabla 3.1 se muestra los valores numéricos de salida normalizados para diversos tiempos, en especial múltiplos de  $T$ .

Note que, para  $t^* = 1$  o bien  $t = T$ , la salida ha descendido al 36,8%, es decir, una caída del 63,2% del valor inicial. También, a partir de la Tabla 3.1,

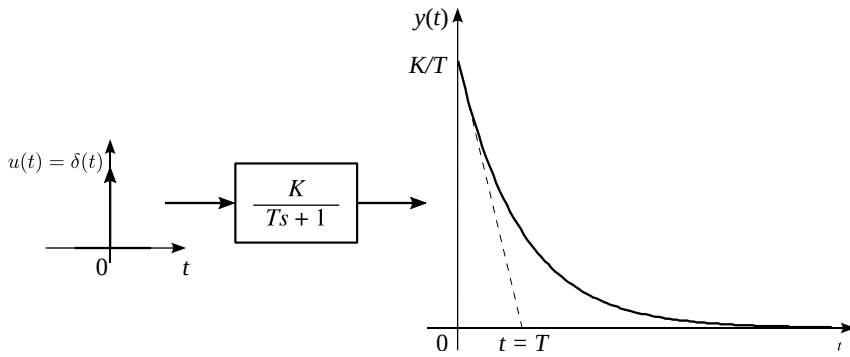


Figura 3.1: Respuesta al impulso de un sistema de primer orden.

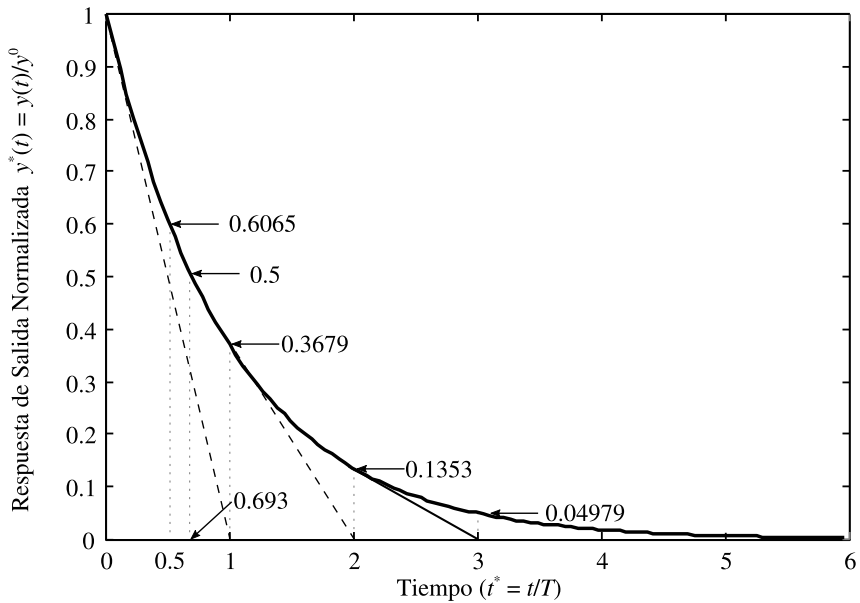


Figura 3.2: Respuesta al impulso normalizada de un sistema de primer orden. Curva válida para cualquier valor de la constante  $K$  y  $T$ .

Tabla 3.1: Tabla de valores de respuesta al impulso normalizada.

Tiempo Normalizado ( $t^* = t/T$ )	Valores de Salida Normalizado (%)
0.0000	100.0000
0.5000	60.6530
0.6900	50.0000
1.0000	36.7800
2.0000	13.5340
3.0000	4.9790
4.0000	1.8320
5.0000	0.6740
10.0000	0.0045

resulta sencillo constatar que para  $t^* = 4$  o bien  $t = 4T$ , la señal de salida del sistema ha disminuido en más de un 98 %.

Debemos recordar, como se mencionó anteriormente, que en términos estrictamente matemáticos un sistema lineal propio estable se *acerca asintóticamente* al estado estacionario sin alcanzarlo jamás. Por tal motivo se introduce las siguientes definiciones:

**Definición 3.4.1 — Tolerancia de Tiempo de Establecimiento ( $\gamma$ ).** Es una banda (o intervalo) que se define como un porcentaje de tolerancia por exceso y por defecto en torno al valor final, que permite aceptar desde un punto de vista práctico el abandono del sistema del régimen transitorio.

Dicho porcentaje de tolerancia en términos prácticos suele aceptarse entre  $\pm 1\%$  al  $\pm 2\%$  entorno al valor de estabilización según sea el caso.

**Definición 3.4.2 — Tiempo de Establecimiento ( $T_{est}$ ).** Es el tiempo necesario para que la respuesta del sistema a una dada entrada, ingrese y permanezca indefinidamente dentro de la tolerancia de error de estado estacionario  $\gamma$ , en ausencia de cualquier otro cambio o perturbación durante el régimen transitorio.

Como corolario de las Def. 3.4.1 y 3.4.2 podemos decir que el tiempo de establecimiento de un sistema de primer orden es  $4T$  o bien  $5T$  cuando el porcentaje de tolerancia de error es de  $\pm 2\%$  o  $\pm 1\%$  respectivamente. En control de procesos, dependiendo de los niveles de ruido, resulta razonable adoptar,

$$T_{est} \approx 4T = \frac{4}{|\sigma|}. \quad (3.18)$$

donde  $\sigma = -1/T$ , con  $T > 0$ , la raíz del denominador de la función de transferencia del sistema. Por tanto, como se indicó antes, siendo  $|\sigma|$  la distancia al eje



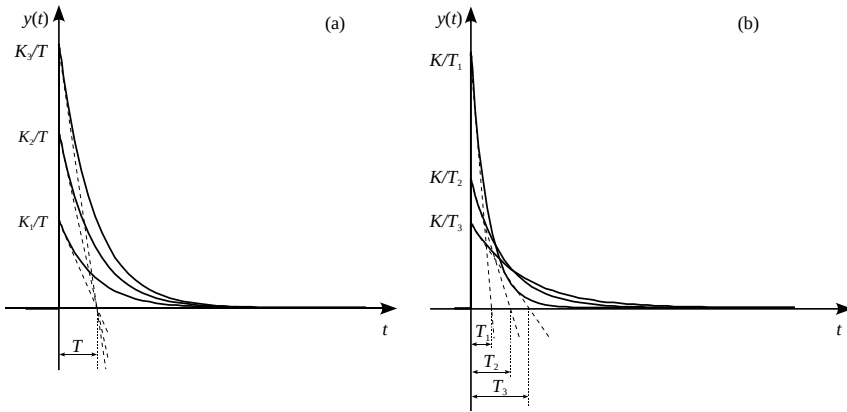


Figura 3.3: (a) Respuesta al impulso del sistema lineal (3.11) para distintas ganancias con igual constante de tiempo. Aquí,  $K_3 > K_2 > K_1$ . (b) Respuesta al impulso del sistema lineal (3.11) para distintas constantes de tiempo con igual ganancia. Aquí,  $T_3 > T_2 > T_1$ .

imaginario en el plano complejo, cuanto más alejado esté la raíz  $\sigma = -1/T$  con  $T > 0$  menor será el tiempo de establecimiento.

### Efecto de la variación de $K$ y $T$ en la respuesta temporal

Con el objeto de estudiar el impacto de  $K$  y  $T$  en la respuesta temporal, en la Fig. 3.3 se muestra la respuesta dinámica de un sistema de primer orden con diferentes valores de  $K$  y  $T$ . Puede verse que el aumento de  $K$  lleva a un incremento de los valores iniciales pero sin incrementar el tiempo de establecimiento, lo que es razonable. Mientras que el aumento de  $T$  aumenta el tiempo de establecimiento disminuyendo el valor inicial.

### 3.4.2. Respuesta al escalón

La señal de salida en el campo complejo ( $Y(s)$ ) del sistema lineal (3.11) frente a una señal de excitación escalón de amplitud  $k$  ( $U(s) = k/s$ ) será,

$$Y(s) = \frac{K}{Ts + 1} \frac{k}{s} . \quad (3.19)$$

La correspondiente respuesta dinámica la obtenemos a partir de la transformada inversa de Laplace de la Ec. (3.19) resultando,

$$y(t) = kK(1 - e^{-t/T}) . \quad (3.20)$$

Esta ecuación representa gráficamente la curva de crecimiento exponencial y sus valores iniciales y finales ( $t = 0$  y  $t \rightarrow \infty$ , respectivamente) se obtienen por

sustitución de los valores de  $t$  en la ecuación temporal (3.20) o bien, aplicando los TVI y TVF como en la sección anterior.

- Para  $t = 0$  y por sustitución en la ecuación temporal tenemos que

$$y(0^+) = kK(1 - e^{-0/T}) = kK(1 - 1) = 0 .$$

mientras que, por aplicación del TVI

$$y(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{K}{s(Ts + 1)} = 0 ,$$

coincidiendo ambos resultados.

- Para  $t \rightarrow \infty$  se tiene por sustitución en la función temporal

$$y(\infty) = kK(1 - e^{-\infty/T}) = kK(1 - 0) = kK$$

o bien,

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{kK}{s(Ts + 1)} = kK ,$$

coincidiendo ambos resultados.

Por otro lado, la tangente en cualquier punto a la curva de la Fig. 3.4 según la Ec. (3.20) resulta,

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\frac{kK}{T}(-e^{-t/T}) , \quad (3.21)$$

y para el caso particular de  $t = 0$ ,

$$\left( \frac{dy(t)}{dt} \right)_{t=0} = \frac{kK}{T} . \quad (3.22)$$

dicha tangente es representada en la Fig. 3.4. Gráficamente, la tangente al origen será

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{kK}{\Delta t} . \quad (3.23)$$

y por comparación  $\Delta t = T$ .

En base a lo anterior concluimos, con similar razonamiento al de la Rem. 3.7 que, para la respuesta al escalón de un sistema de primer orden:

- R
**■ Remarca 3.8** La constante de tiempo es el tiempo que tardara la salida en alcanzar el valor final, si mantuviera su velocidad de **crecimiento** constante e igual a la del momento inicial de la respuesta al escalón.

**Demostración** La simple inspección de la Fig. 3.4 prueba esta remarca.

□

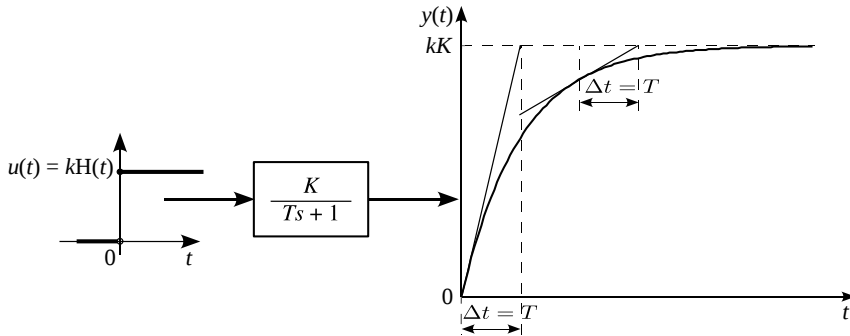


Figura 3.4: Respuesta al escalón del sistema de primer orden, su correspondiente tangente al origen y la tangente en un punto cualquiera.

Tabla 3.2: Tabla de valores de respuesta al escalón normalizada.

Tiempo Normalizado ( $t^* = t/T$ )	Valores de Salida Normalizado (%)
0.0000	0.0000
0.5000	39.3
0.6930	50.0000
1.0000	36.7800
2.0000	86.4660
3.0000	95.0210
4.0000	98.1680
5.0000	99.3260
10.0000	99.9950

La Fig. 3.4 muestra en forma esquemática los resultados hasta aquí encontrados.

Similarmente a lo hecho en la sección anterior, es posible normalizar la expresión (20) definiendo,  $y_\infty = kK$ ,  $y^*(t) = y(t)/y_\infty$  y  $t^* = t/T$ . Luego,

$$y^*(t) = 1 - e^{-t^*} . \quad (3.24)$$

La Fig. 3.5 muestra la curva de respuesta al escalón normalizada para un sistema lineal de primer orden mientras que, la Tabla 3.2 muestra los valores de salida normalizados para diversos tiempos, en especial múltiplos de la constante de tiempo  $T$ .

Note que, la respuesta de salida normalizada tiende asintóticamente al valor 1 (en realidad al valor  $kK$ ) y para un tiempo  $t = 4T$  ya ha alcanzado más del 98 % del valor final. Por tal motivo, el tiempo de establecimiento de un sistema de primer orden frente a una entrada escalón sigue siendo  $T_{est} = 4T$  si se acepta

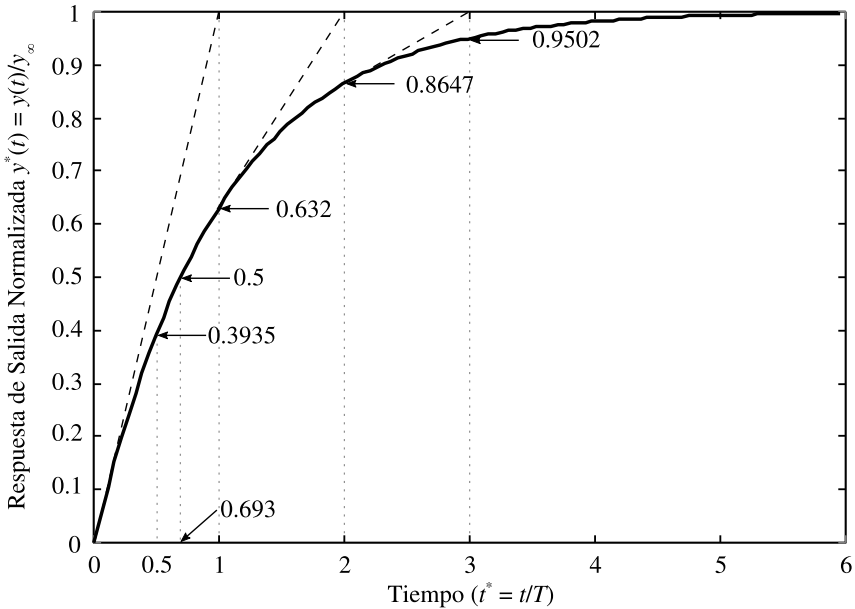


Figura 3.5: Respuesta al escalón normalizada de un sistema lineal de primer orden.

una tolerancia de error definida con una franja de  $\pm 2\%$ .

### Efecto de la variación de $K$ y $T$ en la respuesta al escalón

La Fig. 3.6 muestra como impacta la variación de  $K$  y  $T$  en la respuesta al escalón de un sistema de primer orden. Según Fig. 3.6a) el aumento de la ganancia posiciona al sistema en un valor final cada vez más alto mientras que, según Fig. 3.6b) el aumento de la constante de tiempo hace que el sistema alcance el valor estacionario cada vez más lento debido a un aumento del tiempo de establecimiento.

### 3.4.3. Respuesta a la rampa

La salida en el campo complejo de un sistema lineal (3.11) cuando es sometido a una señal de excitación rampa de pendiente  $k$  ( $x(t) = ktH(t)$ ) es,

$$Y(s) = \frac{K}{(Ts + 1)} \frac{k}{s^2} . \quad (3.25)$$

Aplicando transformada inversa de Laplace a la última expresión;

$$y(t) = kK(t - T + Te^{-t/T}) . \quad (3.26)$$

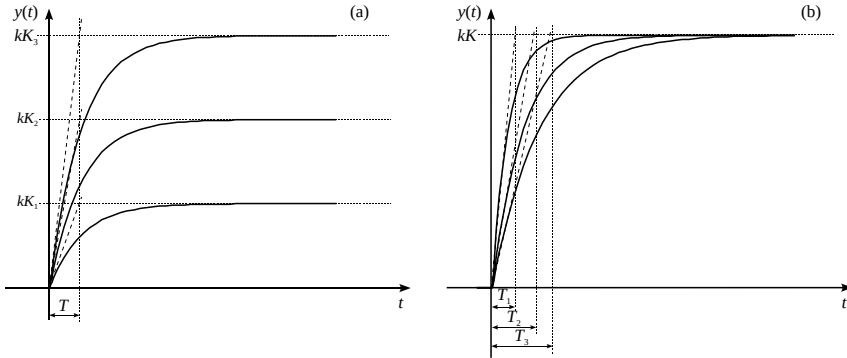


Figura 3.6: a) Respuesta al escalón del sistema lineal de primer orden (3.11) para distintas ganancias con igual constante de tiempo. Aquí,  $K_3 > K_2 > K_1$ . b) Respuesta al escalón del sistema lineal (3.11) para distintas constantes de tiempo con igual ganancia. Aquí,  $T_3 > T_2 > T_1$ .

Similarmente a las Secciones 3.4.1 y 3.4.2 a continuación calcularemos el valor inicial (para  $t = 0$ ) y final (para  $t \rightarrow \infty$ ) de la respuesta temporal.

1. Para  $t = 0$  por sustitución en la función temporal (3.26) tenemos que

$$y(0^+) = kK(0 - T + Te^{-0/T}) = 0 ,$$

mientras que, por aplicación del TVI

$$y(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{K}{s^2(Ts + 1)} = 0 ,$$

coincidiendo ambos resultados.

- Para  $t \rightarrow \infty$  por sustitución en la función temporal (3.26) tenemos que

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} kK(t - T + Te^{-t/T}) = \infty ,$$

o bien,

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{kK}{s^2(Ts + 1)} = \infty .$$

Note que la respuesta temporal tiende asintóticamente a una recta cuya ecuación es,

$$a(t) = kK(t - T) . \tag{3.27}$$

De acuerdo con (3.27)  $a(T) = 0$  esto es, la asíntota es una recta con pendiente  $kK$  desplazada  $T$  unidades de tiempo del origen.

La Fig. 3.7 muestra en forma esquemática los resultados hasta aquí encontrados.

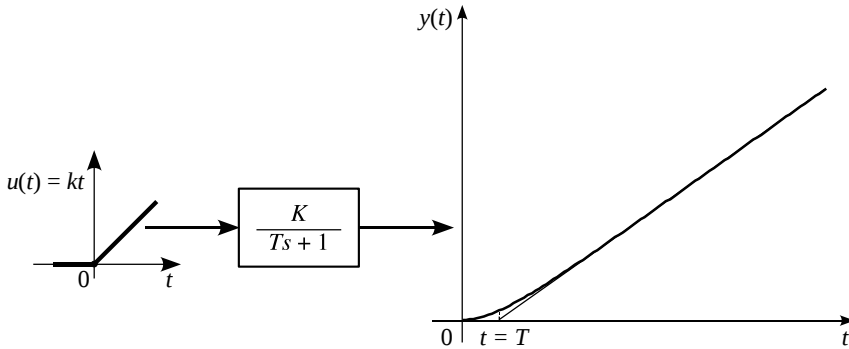


Figura 3.7: Respuesta a la rampa del sistema lineal de primer orden.

Atendiendo a las consideraciones expuestas en apartados anteriores, se propone normalizar la Ec. (3.26) para luego representar la curva normalizada, logrando así una representación válida para cualquier valor  $K$  y  $T$ . A tal efecto, la Ec. (3.27) puede ser reescrita como sigue:

$$y^*(t) = t^* - 1 + e^{-t^*} \quad (3.28)$$

donde se define  $y^*(t) := y(t)/kKT$  y  $t^* = t/T$ .

La representación gráfica de la Ec. (3.28) se muestra en la Fig. 3.8, donde se observa una curva de seguimiento a la rampa con acercamiento exponencial.

### Efecto de la variación de $K$ y $T$ en la respuesta temporal

La Fig. 3.9 muestra como impacta la variación de  $K$  y  $T$  en la respuesta a la rampa de un sistema de primer orden. Según Fig. 3.9a) a medida que  $K$  crece la pendiente de la respuesta de salida crece y de acuerdo con la Fig. 3.9b) a medida que  $T$  crece la intersección de la asíntota con el eje de tiempo crece dando como resultado una separación de las curvas con igual pendiente.

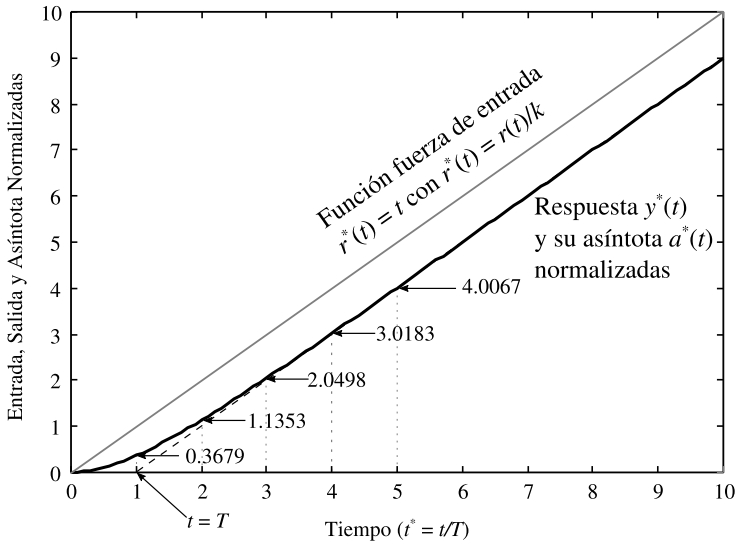


Figura 3.8: Respuesta a la rampa normalizada de un sistema lineal de primer orden. Aquí, la asíntota normalizada tiene por expresión  $a^*(t) = t^* - 1$  con  $a^*(t) = a(t)/kKT$ .

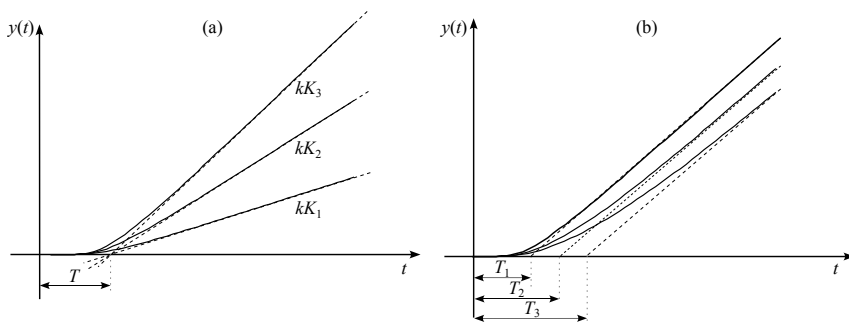


Figura 3.9: (a) Respuesta a la rampa del sistema lineal (3.11) para distintas ganancias con igual constante de tiempo. Aquí,  $K_3 > K_2 > K_1$ . (b) Respuesta a la rampa del sistema lineal (3.11) para distintas constantes de tiempo con igual ganancia. Aquí,  $T_3 > T_2 > T_1$ .

La Tabla 3.3 muestra un resumen de los resultados encontrados para sistemas de primer orden tipo 0 frente a las tres entradas aquí estudiadas.

Tabla 3.3: Respuestas dinámicas de un sistema de primer orden frente a entradas delta, escalón y rampa.

Función de Transferencia	Respuesta a la Entrada $U(s) = 1$	Respuesta a la Entrada $U(s) = 1/s$	Respuesta a la Entrada $U(s) = 1/s^2$
$\frac{K}{Ts+1}$	$y(t) = \frac{kK}{T} e^{-t/T}$	$y(t) = kK(1 - e^{-t/T})$	$y(t) = kK(t - T + T e^{-t/T})$



### 3.4.4. Ejemplos ilustrativos

A continuación se presenta tres ejemplos que muestran el uso de Octave para obtener las simulaciones dinámicas de sistemas LTI frente a entradas delta, escalón y rampa.

#### Comandos de Octave relacionados al tema

A continuación se lista las funciones básicas de Octave que permite determinar la respuesta a la rampa de un sistema LTI. Para más opciones de este comando se sugiere ver el manual del toolbox de control e Octave, por Reichlin [69].

Comando	
<code>SYS=tf(NUM, DEN, TSAM, ...)</code>	Determina la función de transferencia de un sistema. NUM vector fila con los coeficientes del numerador, DEN vector fila con los coeficientes del denominador, TSAM período de muestreo. Si es omitido se asume un modelo continuo, si se especifica responde con un modelo discreto.
<code>[Y, T, X]=impulse(SYS, TFINAL, DT)</code>	Determina la respuesta al impulso de un sistema LTI y donde, SYS es el modelo LTI, TFINAL el tiempo final de simulación, DT el intervalo de tiempo de integración, Y es la respuesta de salida del sistema dinámico, T el tiempo de simulación, X la trayectoria de los estados. Los parámetros TFINAL y DT pueden ser omitidos.
<code>[Y, T, X]=step(SYS, TFINAL, DT)</code>	Determina la respuesta al escalón de un sistema LTI y donde, las variables de entrada y salida se definen del mismo modo que en el comando <code>impulse</code> .
<code>[Y, T, X]=lsim(SYS, U, T, X0)</code>	Determina la respuesta de un sistema LTI a una entrada arbitraria $u(t)$ y donde, U el vector de entrada, X0 el vector condiciones iniciales, el resto de los parámetros de entrada y salida se definen igual que en el comando <code>impulse</code> .
<code>plot(x, y)</code>	Realiza un gráfico x-y.
<code>xlabel('texto')</code>	Escribe la palabra texto en el eje x. Similarmente con <code>ylabel</code> y <code>zlabel</code> .
<code>grid( ARG)</code>	Pone una grilla en un gráfico. ARG puede ser omitido.

En los comandos `step`, `impulse` y `lsim` si no se escribe el corchete de la derecha, Octave presenta una figura de la respuesta temporal correspondiente.

**Ejemplo 3.1** Considere tres sistemas LTI cuyas funciones de transferencia

son  $G_1(s) = 1/(s + 1)$ ,  $G_2(s) = 1/(2s + 1)$ , y  $G_3(s) = 1/(4s + 1)$ , sometidos a una entrada impulso. Obtenga y compare en un gráfico las respuestas dinámicas al impulso de los tres sistemas.

El programa de Octave para este ejemplo se muestra a continuación.

#### Algoritmo 3.1: Código de Octave del Ejem. 3.1.

```

1  % Modelos LTI
2  s=tf('s');
3  G1s=1/(s+1);
4  G2s=1/(2*s+1);
5  G3s=1/(4*s+1);
6
7  % Respuesta impulsional de cada sistema
8  [y1,t1]=impulse(G1s);
9  [y2,t2]=impulse(G2s);
10 [y3,t3]=impulse(G3s);
11
12 % Grafico las tres respuestas juntas para compararlas
13 plot(t1,y1,'-k',t2,y2,'.k',t3,y3,'.-k'); grid
14 xlabel('Tiempo'), ylabel('Salidas'), title('Respuestas
    impulsionales')
15 legend('Respuesta de G1(s)', 'Respuesta de G2(s)', 'Respuesta
    de G3(s)')
```

La gráfica de las respuestas dinámicas se muestra en la Fig. 3.10.

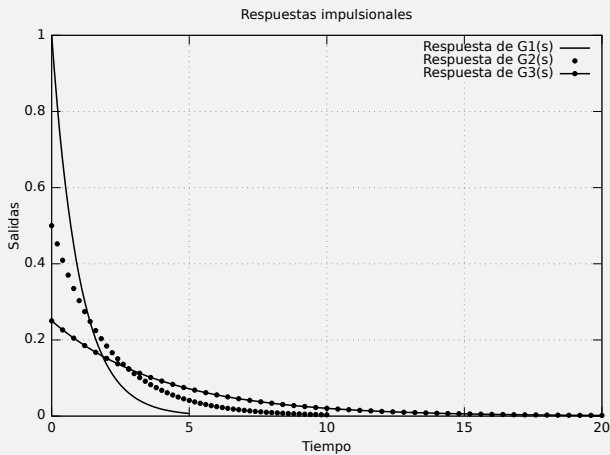


Figura 3.10: Respuestas impulsionales de los sistemas lineales del Ejem. 3.1.

**Ejemplo 3.2** Considere los tres sistemas LTI del Ejem. 3.1, sometidos a una entrada escalón. Obtenga y compare en un gráfico las respuestas dinámicas al escalón de los tres sistemas.

El programa de Octave para este ejemplo se muestra a continuación.

**Algoritmo 3.2:** Código de Octave del Ejem. 3.2.

```

1  % Modelos LTI
2  s=tf('s');
3  G1s=1/(s+1);
4  G2s=1/(2*s+1);
5  G3s=1/(4*s+1);
6  % Respuesta al escalón de cada sistema
7  [y1,t1]=step(G1s);
8  [y2,t2]=step(G2s);
9  [y3,t3]=step(G3s);
10 % Grafico las tres respuestas juntas para compararlas
11 plot(t1,y1,'-k',t2,y2,'.k',t3,y3,'-k'); grid
12 xlabel('Tiempo'), ylabel('Salidas'), title('Respuestas al
    escalon')
13 legend('Respuesta de G1(s)', 'Respuesta de G2(s)', 'Respuesta
    de G3(s)')

```

La gráfica de las respuestas dinámicas se muestra en la Fig. 3.11.

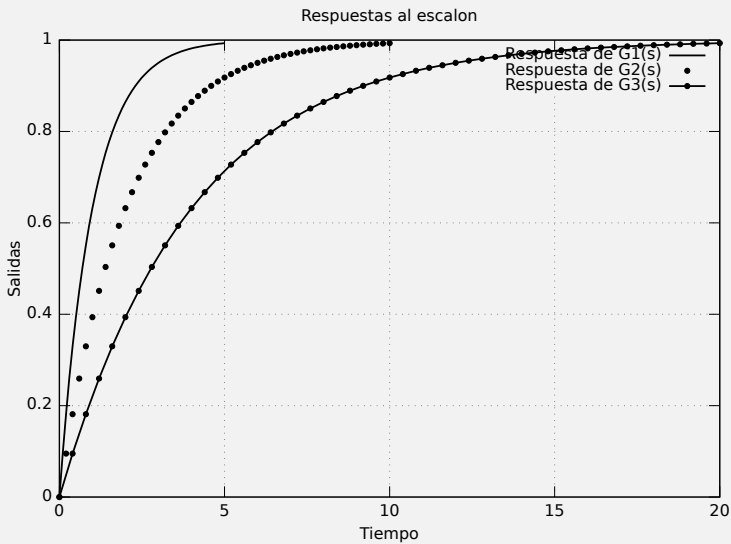


Figura 3.11: Respuestas al escalón de los sistemas lineales del Ejem. 3.1.

**Ejemplo 3.3** Considere los tres sistemas LTI del Ejem. 3.1, sometidos a una entrada rampa. Obtenga y compare en un gráfico las respuestas dinámicas a la rampa con pendiente unitaria de los tres sistemas.

El programa de Octave para este ejemplo se muestra a continuación.

**Algoritmo 3.3:** Código de Octave del Ejem. 3.3.

```

1  % Modelos LTI
2  s=tf('s');
3  G1s=1/(s+1);
4  G2s=1/(2*s+1);
5  G3s=1/(4*s+1);
6
7  % Genero la rampa de entrada
8  Rs=1/s^2;
9  [u,t]=impz(Rs);
10 % acomodo el tamaño de los vectores para tener lindas gráficas (para el libro)
11 t=t(1:20:length(t));
12 u=u(1:20:length(u));
13
14 % Respuesta a la rampa de cada sistema
15 [y1,t1]=lsim(G1s,u,t);
16 [y2,t2]=lsim(G2s,u,t);
17 [y3,t3]=lsim(G3s,u,t);
18
19 % Grafico las tres respuestas juntas para compararlas
20 plot(t1,y1,'-k',t2,y2,'.k',t3,y3,'.-k'); grid
21 xlabel('Tiempo'), ylabel('Salidas'), title('Respuestas a la
    rampa')
22 legend('Respuesta de G1(s)', 'Respuesta de G2(s)', ...
23        'Respuesta de G3(s)')

```

La gráfica de las respuestas dinámicas se muestra en la Fig. 3.12.

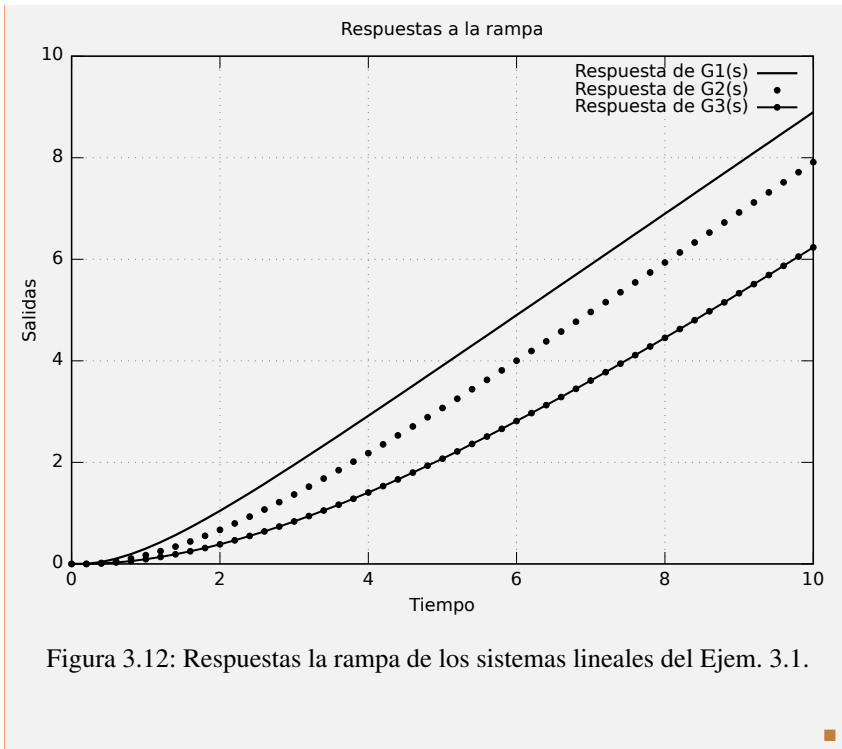


Figura 3.12: Respuestas la rampa de los sistemas lineales del Ejem. 3.1.

### 3.5. Respuestas Dinámicas de Sistemas de Segundo Orden

Considere ahora un sistema cuya función de transferencia es de segundo orden,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}, \quad (3.29)$$

donde el denominador de dicha función de transferencia es escrito bajo la forma canónica normalizada.

Note que la función de transferencia (3.29) para

1.  $\zeta = 0$  tiene dos raíces imaginarias,  $s_{1-2} = \pm j1/T$ ,
2.  $0 < \zeta < 1$  tiene dos raíces complejas conjugadas,  
 $s_{1-2} = -\zeta/T \pm j\sqrt{1 - \zeta^2}/T$
3.  $\zeta = 1$  tiene dos raíces reales iguales,  $s_{1-2} = -1/T$  y
4.  $\zeta > 1$  tiene dos raíces reales distintas,  $s_{1-2} = -\zeta/T \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}/T$ .

### 3.5.1. Respuesta al impulso

La salida en el dominio de Laplace de un sistema de segundo orden para una señal de excitación del tipo impulso unitario ( $U(s) = 1$ ) será

$$Y(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} . \quad (3.30)$$

Para mayor simplicidad asumiremos en todos los casos aquí analizados un impulso unitario, cualquier otro valor aparecerá multiplicando a la respuesta, de acuerdo con el teorema de la linealidad de la transformada de Laplace (ver Teo. B.2.1).

#### Caso oscilatorio puro ( $\zeta = 0$ )

En este caso la Ec. (3.30) para  $\zeta = 0$  se resume a,

$$Y(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1} . \quad (3.31)$$

y en consecuencia la transformada inversa resulta,

$$y(t) = \frac{K}{T} \sin\left(\frac{t}{T}\right) . \quad (3.32)$$

o bien,

$$y(t) = K\omega_n \sin(\omega_n t) . \quad (3.33)$$

en donde se define *frecuencia natural*,

$$\omega_n = 1/T \quad (3.34)$$

como la frecuencia a la que oscila un sistema de segundo orden cuando su factor de amortiguamiento es nulo.

Note que

1. la respuesta en el tiempo es un seno puro que en  $t = 0^+$  su valor es,  $y(0^+) = 0$ .
2. Las Rem. 3.1 y 3.2 no se pueden aplicar, ya que este caso no se trata de un sistema autorregulable.

#### Caso subamortiguado ( $0 < \zeta < 1$ )

En este caso la Ec. (3.30) para  $0 < \zeta < 1$  presenta dos raíces complejas conjugadas y la correspondiente respuesta al impulso unitario, resulta

$$y(t) = \frac{K}{T\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta t/T} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} t\right) . \quad (3.35)$$

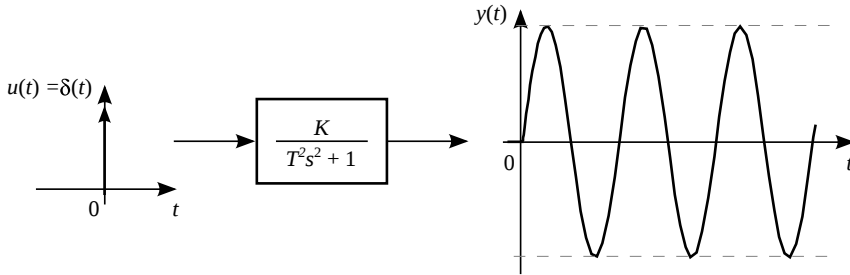


Figura 3.13: Respuesta al impulso de un sistema de segundo orden con  $\zeta = 0$ .

o bien,

$$y(t) = K \frac{\omega_n^2}{\omega_p} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_p t) . \quad (3.36)$$

en donde se define la *frecuencia o pulsación propia* como,

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} . \quad (3.37)$$

Observando (3.35) claramente surge que se trata de una función senoidal amortiguada, partiendo de cero en  $t = 0$  y se anula para tiempo infinito. Esto resulta sencillo de probarlo con el TVI y el TVF.

**R** ■ **Remarca 3.9** Sea un sistema lineal de segundo orden bajo la representación (3.29) con  $\zeta > 0$  frente a una señal de entrada delta unitaria. Los resultados del TVI y el TVF son independientes del factor de amortiguamiento.

**Demostración** Simplemente, aplicando los TVI y TVF es posible probar esta remarca.

- Para  $t = 0$

$$y(0+) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{K}{(T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1)} = 0 .$$

- Para  $t \rightarrow \infty$ , el valor estacionario alcanzado resulta,

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{(T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1)} = 0 .$$

□

Note que 1) se han excluido de la remarca anterior valores de  $\zeta \leq 0$  y 2) la Rem. 3.9 es coincidente con lo que se postula en las Rems. 3.1 y 3.2.

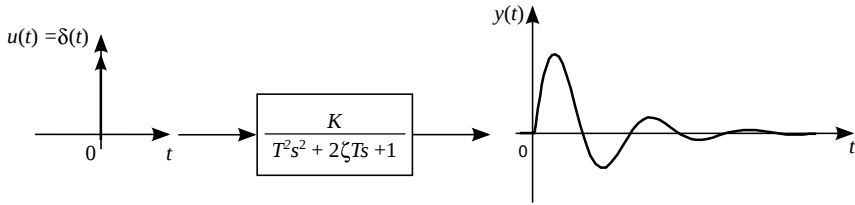


Figura 3.14: Respuesta al impulso de un sistema de segundo orden con  $0 < \zeta < 1$ .

### Caso críticamente amortiguado ( $\zeta = 1$ )

El denominador de la Ec. (3.30) para  $\zeta = 1$  puede ser reordenado como  $T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1 = (Ts + 1)^2$  y dicha ecuación se resume a

$$Y(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^2} . \quad (3.38)$$

Similarmente al producto de dos primer orden en serie con ambas constantes de tiempo iguales. La transformada inversa resulta

$$y(t) = \frac{K}{T^2} e^{-t/T} t . \quad (3.39)$$

Note que la Ec. (3.39) no contiene ningún termino oscilatorio además, se observa en la Fig. 3.15 que la respuesta parte de cero en  $t = 0$  y alcanza un valor nulo para  $t \rightarrow \infty$ . Estos resultados se pueden probar fácilmente aplicando los TVI y el TVF para este caso.

### Caso sobreamortiguado ( $\zeta > 1$ )

La Ec. (3.30) para  $\zeta > 1$  se resume a

$$Y(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} . \quad (3.40)$$

con  $T_1 = -1/s_1$ ,  $T_2 = -1/s_2$  y  $s_{1-2} = -\zeta/T \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}/T$ . Note que la factorización del denominador se resume en dos primer orden en serie, con las constantes de tiempo  $T_1$  y  $T_2$ . La respuesta en el tiempo al impulso puede expresarse como,

$$y(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left( e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2} \right) . \quad (3.41)$$

Puede observarse que en este tipo de respuesta no existe ningún término de característica oscilatorio, partiendo de cero en  $t = 0$  y alcanzando un valor final nulo para  $t \rightarrow \infty$ .



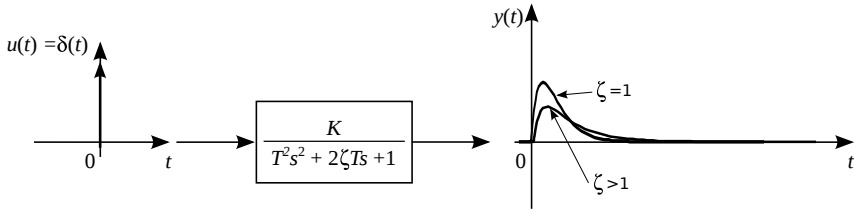


Figura 3.15: Respuesta al impulso de un sistema de segundo orden con  $\zeta \geq 1$ .

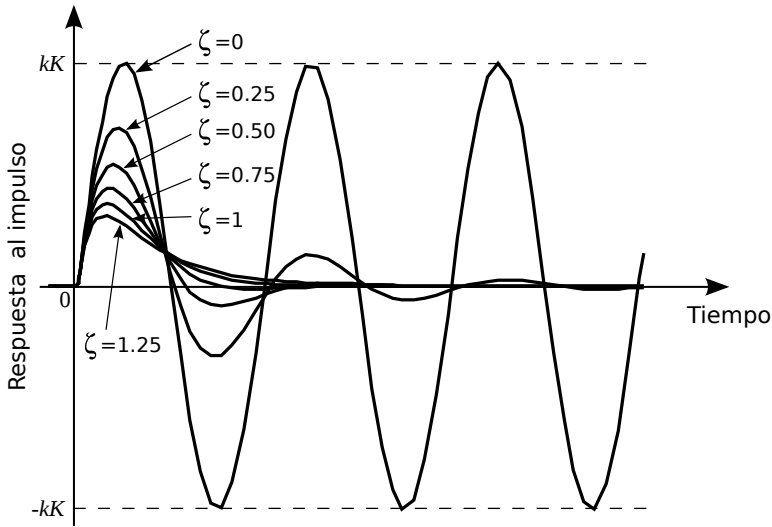


Figura 3.16: Respuesta impulsiva de un sistema de segundo orden para distintos valores del factor de amortiguación.

La Fig. 3.16 resume las diversas respuestas normalizadas de LA para distintos valores del factor de amortiguamiento. Como se observa, la respuesta puede ser o no oscilatoria, dependiendo exclusivamente del factor de amortiguamiento.

Mientras que la Tabla 3.4 distingue claramente los cuatro casos diferentes asociando el valor del factor de amortiguamiento con el tipo de raíz del denominador de la Ec. (3.30) y el tipo de respuesta al impulso en el dominio del tiempo.

**Ejemplo 3.4** Simular numéricamente la respuesta al impulso de un sistema segundo orden a lazo abierto cuya función de transferencia es de la forma (3.30), con  $K = 1$ ,  $T = 1$  y  $\zeta = 2, 1$  y  $0,45$ .

El programa de Octave para este ejemplo se muestra a continuación.

Tabla 3.4: Tipo de respuesta y raíces del denominador de la función de transferencia (3.30) en relación al coeficiente de amortiguamiento.

Factor de amortiguamiento	Tipo de raíces	Tipo de respuesta
$\zeta = 0$	Imaginarias puras $s_{1-2} = \pm j1/T$	Oscilatorio puro
$0 < \zeta < 1$	Complejas conjugadas $s_{1-2} = -\zeta/T \pm j\sqrt{1-\zeta^2}/T$	Subamortiguado
$\zeta = 1$	Reales iguales $s_{1-2} = -1/T$	Críticamente amortiguado
$\zeta > 1$	Reales distintas $s_{1-2} = -\zeta/T \pm \sqrt{\zeta^2-1}/T$	Sobreamortiguado

Algoritmo 3.4: Código de Octave del Ejem. 3.4.

```

1  % Datos de las plantas :
2  K=1; T=1; zeta1 = 2; zeta2=1; zeta3=0.45;
3  n=[K];
4  d1=[T^2 2*zeta1*T 1];
5  d2=[T^2 2*zeta2*T 1];
6  d3=[T^2 2*zeta3*T 1];
7
8  % Funciones de transferencias de la plantas
9  gs1=tf(n,d1); gs2=tf(n,d2); gs3=tf(n,d3);
10
11 % Respuestas al impulso
12 [y1,t1]=impulse(gs1,1,20,200);
13 [y2,t2]=impulse(gs2,1,20,200);
14 [y3,t3]=impulse(gs3,1,20,200);
15
16 % Grafico
17 figure(1), plot(t1,y1,'k',t2,y2,'-k',t3,y3,'.-k')
18 xlabel('Tiempo'), ylabel('salida')
```

La gráfica que presenta Octave se muestra en la Fig. 3.17.

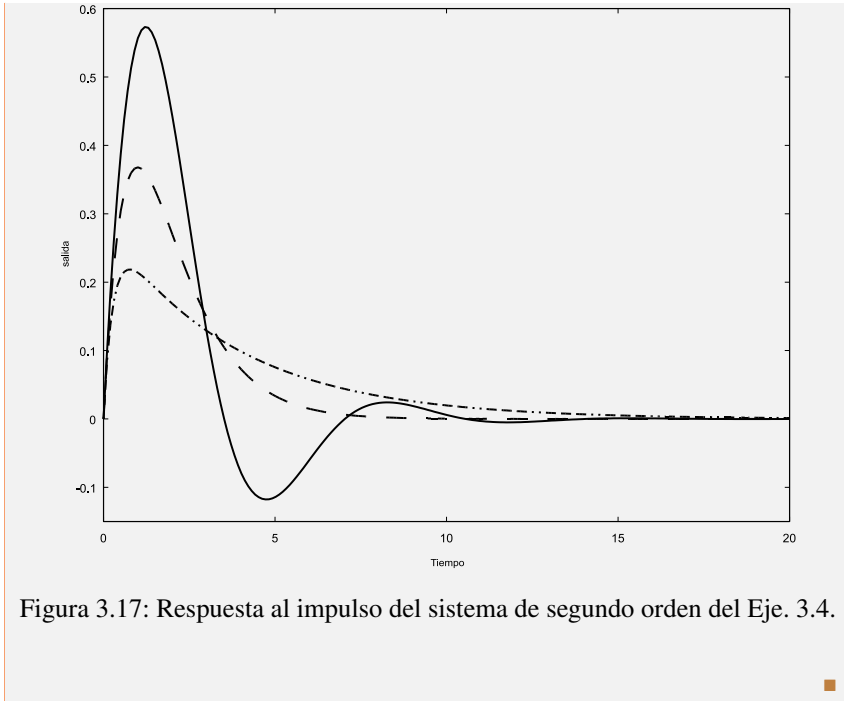


Figura 3.17: Respuesta al impulso del sistema de segundo orden del Eje. 3.4.

### 3.5.2. Respuesta al escalón

La señal de salida del sistema (3.29) frente a un escalón de amplitud  $k$  puede ser expresada en el dominio de Laplace como

$$Y(s) = \frac{kK}{s(T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1)} . \quad (3.42)$$

#### Caso oscilatorio puro ( $\zeta = 0$ )

La Ec. (3.42) para  $\zeta = 0$  se resume a

$$Y(s) = \frac{kK}{s(T^2s^2 + 1)} , \quad (3.43)$$

y en consecuencia la transformada inversa de (3.43) resulta

$$y(t) = kK[1 - \cos(\omega_n t)] . \quad (3.44)$$

Salta a la vista que se trata de una oscilación sostenida, al no contener ningún factor decreciente que extinga la función cosenoidal.

Queda claro que en el caso particular de la respuesta oscilatoria sostenida, cuando el factor de amortiguamiento es cero, la oscilación tiene las siguientes características:

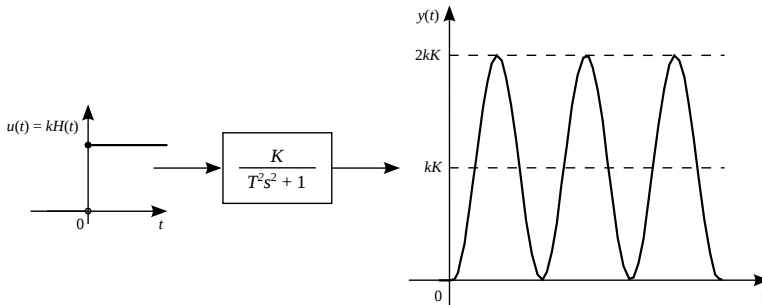


Figura 3.18: Respuesta al escalón de un sistema de segundo orden con  $\zeta = 0$ .

- Es una cosenoide de periodo igual a  $T$  (frecuencia natural  $\omega_n := 1/T$ ).
- El ángulo de desfase es nulo.
- La amplitud (valor de pico) es dos veces el valor del escalón de entrada.
- El valor medio de la oscilación coincide con la amplitud del escalón.

Estos resultados se resumen en la Fig. 3.18.

Note que las Rems. 3.3 y 3.4 no se pueden aplicar ya que en este caso, el sistema no es autorregulable a LA debido a que  $\zeta = 0$ .

### Caso subamortiguado ( $0 < \zeta < 1$ )

Bajo la hipótesis de que  $0 < \zeta < 1$ ) la correspondiente función temporal (transformada inversa de la Ec. (3.42)) resulta

$$y(t) = kK \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta t/T}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left[ \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} t + \arctan \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right] \right\}, \quad (3.45)$$

o bien, en forma compacta,

$$y(t) = kK \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta t/T}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_p t + \phi) \right], \quad (3.46)$$

donde se define  $\phi := \arctan \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$ .

A partir de la expresión temporal (3.46) vemos claramente que se trata de una función oscilatoria amortiguada por una función exponencial decreciente.

- R** ■ **Remarca 3.10** Sea un sistema lineal de segundo orden bajo la representación (3.29) con  $\zeta > 0$  frente a una señal de entrada escalón de amplitud  $k$ . Los resultados del TVI y el TVF son independientes del valor del factor de amortiguación.

**Demostración** Simplemente aplicando los TVI y TVF se prueban esta remarca.

- Para  $t = 0$  aplicando el TVI se tiene

$$y(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{kK}{s(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)} = 0$$

- Por otro lado el valor final alcanzado lo obtenemos fácilmente mediante el TVF

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{kK}{s(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)} = kK$$

□

Note que, el resultado de la Rem. 3.10 es coincidente con las Rems. 3.3 y 3.4.

Resulta interesante estudiar la pendiente geométrica de la curva en  $t = 0$  la que resultaría del valor de la derivada de la función temporal en dicho punto. Para ello considere que,

$$\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0^+). \quad (3.47)$$

donde  $y(0^+) = 0$  y en consecuencia aplicando el TVI

$$y'(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} y'(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} ssY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{kK}{s(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)} = 0.$$

Probando así que la curva parte en el origen con una pendiente nula. Es evidente que esta conclusión es válida para cualquier valor del factor de amortiguamiento.

Si bien, la curva de respuesta arranca con un valor nulo y con una pendiente nula, lo que significa que en los primeros instantes la respuesta aparenta no reaccionar ante la brusquedad del cambio presentado por el escalón de excitación, el sistema, finalmente pasado un instante comienza a moverse dado que la segunda derivada en  $t = (0^+)$  no es nula ( $y''(0^+) = 1/T^2$ ), lo que prueba que realmente la respuesta reacciona desde el primer momento que es aplicado el escalón.

Para  $t \rightarrow \infty$ , ya habíamos dicho que la respuesta tiende asintóticamente al valor del escalón. Aplicando ahora el teorema de valor final, confirmamos que su pendiente es nula y consecuentemente un valor estacionario es alcanzado,

$$y'(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} ssY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{kK}{s(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)} = 0.$$

Los resultados hasta aquí expresados se muestran en la Fig. 3.19.

Usualmente en la bibliografía clásica de control lineal se encuentra presente una serie de definiciones asociadas a las respuestas transitorias al escalón de los sistemas de segundo orden subamortiguados. A saber:

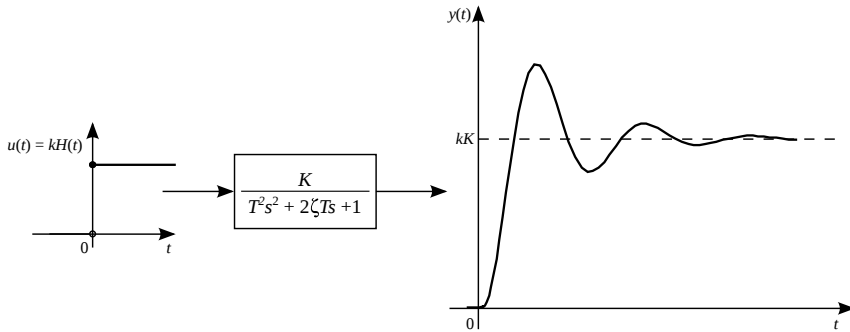


Figura 3.19: Respuesta al escalón de un sistema de segundo orden subamortiguado ( $0 < \zeta < 1$ ).

**Definición 3.5.1 — Tiempo de Alcance.** Es el tiempo que tarda la señal de salida en alcanzar por primera vez el valor de referencia.

**Definición 3.5.2 — Tiempo de Demora.** Es el tiempo que tarda la señal de salida en alcanzar por primera vez el 50 % valor de referencia.

**Definición 3.5.3 — Tiempo de Crecimiento.** Es el tiempo que tarda la señal de salida en pasar del 10 % al 90 % del valor de referencia<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Algunos textos suelen tomar el intervalo del 5 % al 95 %.

**Definición 3.5.4 — Pseudoperíodo.** Es el tiempo que tarda la señal de salida en alcanzar dos picos máximos (o bien mínimos) consecutivos. Así,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_p}. \quad (3.48)$$

**Definición 3.5.5 — Sobrevalores Relativos.** Es la distancia entre los picos máximos de la respuesta al escalón y el valor de estabilización. Así,

$$\frac{A_n}{kK} = e^{-n\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}, \text{ con } n = 1, 3, 5, \dots \quad (3.49)$$

También suele designarse como sobrevalor propiamente dicho (*overshoot*, por su designación en Inglés) al más grande de los sobrevalores relativos, esto es  $\frac{A_1}{kK} = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$ .

**Definición 3.5.6 — Bajovalores Relativos.** Es la distancia entre los picos mínimos de la respuesta al escalón y el valor de estabilización. Así,

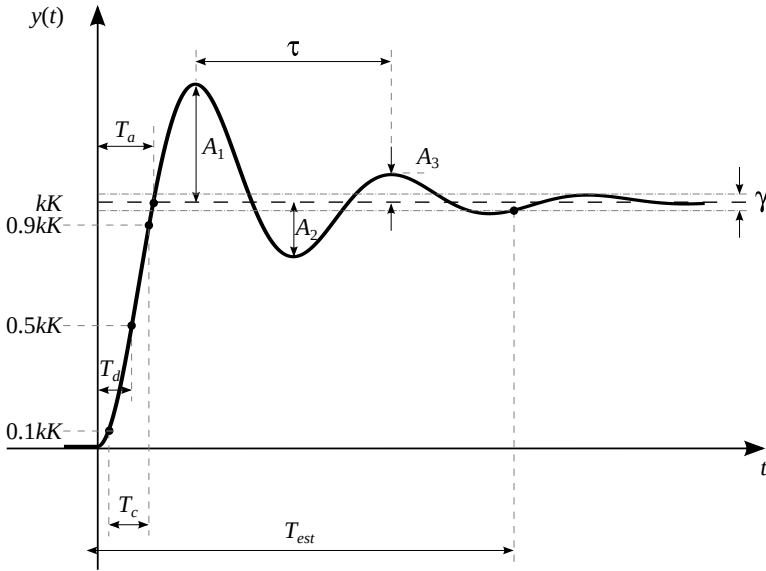


Figura 3.20: Respuesta al escalón de un sistema de segundo orden subamortiguado donde se indican los funcionales anteriormente definidos.

$$\frac{A_n}{kK} = e^{-n\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}, \text{ con } n = 2, 4, 6, \dots \quad (3.50)$$

Similarmente al sobrevalor también suele designarse como bajovalor (undershoot) propiamente dicho al más grande de los bajovalores relativos esto es  $A_3$ .

**Definición 3.5.7 — Relación de Decaimiento.** Es la relación entre dos sobrevalores relativos consecutivos. Así,

$$RD = \frac{A_{2k+3}}{A_{2k+1}} = e^{-2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}, \text{ con } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.51)$$

Usualmente por cuestiones de facilidad en su lectura gráfica se suele tomar como  $RD = A_3/A_1$ .

**Definición 3.5.8 — Tiempo de Primer Pico.** Es el tiempo necesario en alcanzar el primer pico. Así,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (3.52)$$

Estas definiciones se encuentran representadas en la Fig. 3.20.

En cuanto al tiempo de establecimiento sigue siendo válida la Def. 3.4.2 de la Sección 3.4. Aquí, la tolerancia de error de estado estacionario es usualmente definida para respuestas al escalón como  $\pm 1\%$  al  $\pm 5\%$  del valor de establecimiento. Para una  $\gamma$  de  $\pm 2\%$  la expresión usual del tiempo de estabilización es

$$T_{est} \approx \frac{4T}{\zeta} = \frac{4}{|\sigma|} = \frac{4}{\omega_n \zeta} \quad (3.53)$$

donde, de acuerdo con la Tabla 3.4,  $\sigma = -\zeta/T$  con  $\zeta > 0$ , la parte real de las raíces complejas conjugadas.

Se entiende que el tiempo de establecimiento depende de los criterios asumidos por distintos autores, por ejemplo, Goodwin y Sin [32] recomiendan  $T_{est} \approx \frac{4.6}{\omega_n \zeta}$  mientras que, Smith y Corripio  $T_{est} \approx \frac{5T}{\zeta}$  para  $\pm 1\%$  de  $\gamma$ .

### Caso críticamente amortiguado ( $\zeta = 1$ )

Considerando  $\zeta = 1$  la Ec. (3.42) se resume a

$$Y(s) = \frac{kK}{s(Ts + 1)^2}, \quad (3.54)$$

equivalente al caso de dos primer orden en serie con ambas constantes de tiempo iguales. Así, la transformada inversa de (3.54) resulta,

$$y(t) = kK \left[ 1 - e^{-t/T} \left( 1 + \frac{t}{T} \right) \right], \quad (3.55)$$

A los sistemas con  $\zeta = 1$  se los designa críticamente amortiguados porque una ligera disminución del factor de amortiguación ( $\zeta < 1$ ) producirá un sobreimpulso, rebasándose en algún momento el valor final correspondiente al estado estacionario.

### Caso sobreamortiguado ( $\zeta > 1$ )

El denominador de la Ec. (3.42) puede ser factorizado encontrando dos constantes de tiempo  $T_1$  y  $T_2$ , reales y distintas. Así, la expresión (3.42) puede ser reescrita como

$$Y(s) = \frac{kK}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}. \quad (3.56)$$

La ecuación de la respuesta puede expresarse, como

$$y(t) = kK \left\{ 1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left( T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2} \right) \right\}. \quad (3.57)$$

Puede observarse que en este tipo de respuesta no existe ningún término de característica oscilatoria. Se trata de una función que aproxima al valor final de



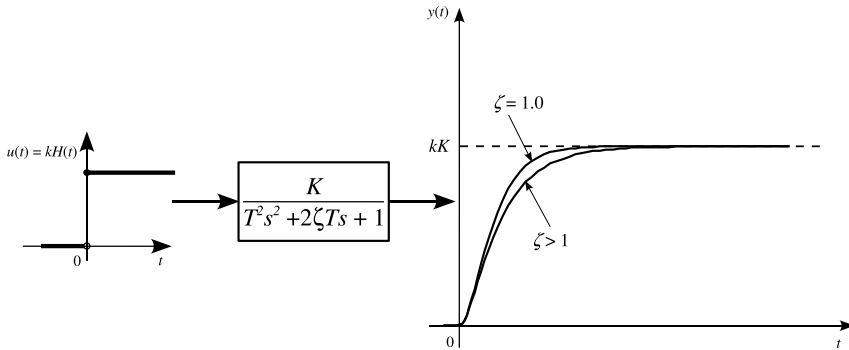


Figura 3.21: Respuestas al escalón de un sistema de segundo orden críticamente amortiguado y sobreamortiguado ( $\zeta = 1$  y  $\zeta > 1$  respectivamente).

manera asintótica, similarmente a la forma en que lo hace un sistema de primer orden. La respuesta temporal (3.57) es designada en la literatura como sigmoide o respuesta sigmoideal.

Note que si  $T_1 > T_2$ , ocurre que el término exponencial que contempla a  $T_2$ , se extingue mucho más rápidamente que el que contiene a  $T_1$ . Así, cuanto más grande es la diferencia entre  $T_1$  y  $T_2$  más se asemejará la respuesta temporal a la de un sistema de primer orden.

La Fig. 3.22 muestra como resumen de esta sección las diversas respuestas dinámicas normalizadas para diferentes valores del factor de amortiguación. Como se observa, la respuesta puede ser o no oscilatoria, dependiendo exclusivamente de dicho factor.

### 3.5.3. Respuesta a la rampa

La salida en el dominio de Laplace de un sistema de segundo orden frente a una señal de excitación del tipo rampa de pendiente  $k$  será

$$Y(s) = \frac{kK}{s^2(T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1)}. \quad (3.58)$$

#### Caso oscilatorio puro ( $\zeta = 0$ )

En este caso la Ec. (3.58) se resume a,

$$Y(s) = \frac{kK}{s^2(T^2s^2 + 1)}, \quad (3.59)$$

y en consecuencia la ecuación que define la respuesta en el tiempo resulta,

$$y(t) = kK[t - T \sin(t/T)] = kK[t - T \sin(\omega_n t)]. \quad (3.60)$$

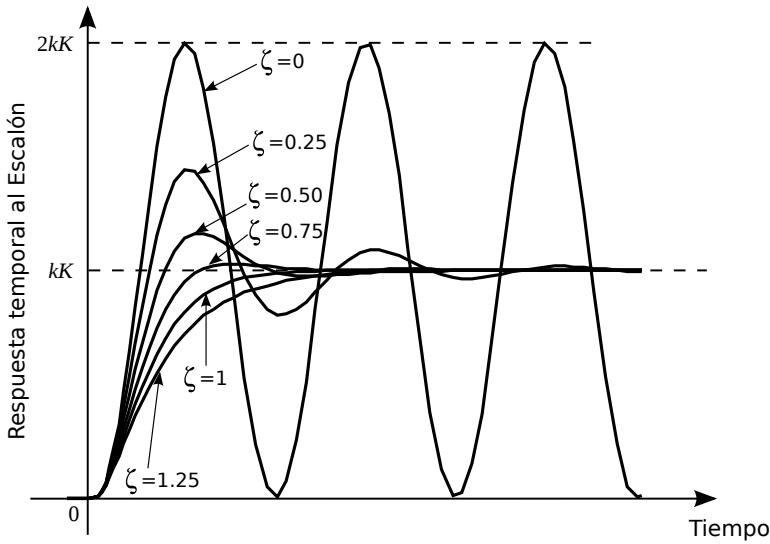


Figura 3.22: Respuestas al escalón de un sistema de segundo orden para los distintos casos aquí estudiados.

Vemos fácilmente que la respuesta consta de dos componentes. La primera es idéntica a la propia rampa y la segunda es una senoide de amplitud  $kK$  y periodo  $T$ . En consecuencia, se tiene una respuesta oscilatoria sobre la rampa como lo muestra la Fig. 3.23.

### Caso subamortiguado ( $0 < \zeta < 1$ )

Es posible probar que la transformada inversa de la ecuación (3.58) para  $0 < \zeta < 1$  resulta ser

$$y(t) = kK \left\{ t - 2\zeta T + T \frac{e^{-\zeta t/T}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left[ \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} t + 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right] \right\}, \quad (3.61)$$

o bien expresándola en una forma más compacta

$$y(t) = kK \left[ t - T' + \frac{e^{-\zeta t/T}}{\omega_p} \sin(\omega_p t + \phi) \right], \quad (3.62)$$

donde se define  $T' := 2\zeta T$  y  $\phi := 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$  con  $\omega_n$  y  $\omega_p$  definido igual que en tópicos anteriores (Ecs. 3.34 y 3.37). Observando la Ec. (3.61) vemos que esta formada por la suma algebraica de tres términos, lo que puede

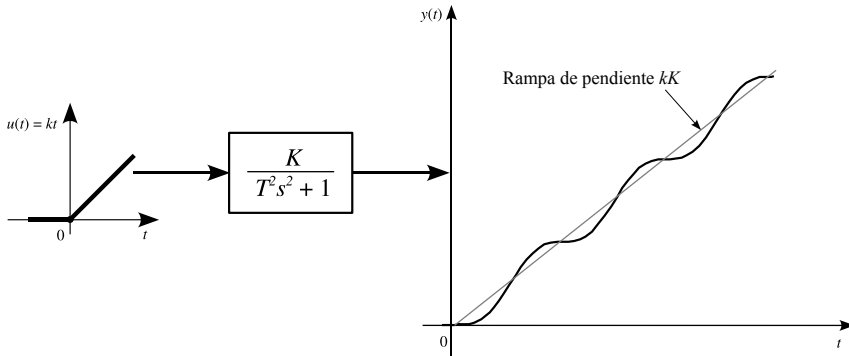


Figura 3.23: Respuestas a la rampa de un sistema de segundo orden con  $\zeta = 0$ .

traducirse gráficamente como la suma geométrica de las tres curvas representativas de cada término, a saber:

- El primero de ellos corresponde a la ecuación de una rampa dependiente de  $kK$  justificando el carácter de seguimiento asintótico a una recta paralela a la misma.
- El segundo, con signo negativo, sería la ecuación de una recta horizontal desplazada un valor  $t$  por debajo del eje de abscisas, lo que explica el error estacionario de una magnitud igual a dicho valor.
- El tercero corresponde claramente a una función senoidal extinguida. Puede comprobarse que para  $t = 0$ , el segundo y tercer término se compensan; de aquí que la respuesta arranque juntamente con la rampa.

Calcularemos el valor inicial (para  $t = 0$ ) de la función (3.61), así como la pendiente geométrica de la curva en los extremos,  $t = 0$  y  $t = \infty$ .

- Para  $t = 0$  por el TVI

$$y(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{kK}{s^2(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)} = 0.$$

La pendiente de la curva sería el valor de la derivada de la función temporal en donde, similarmente a lo hecho antes

$\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0^+)$  con  $y(0^+) = 0$  según el resultado anterior. Entonces

$$y'(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} y'(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s s Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{kK}{s^2(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)} = 0.$$

Es decir, que la curva parte en el origen con una pendiente nula. Es evidente que esta conclusión es válida cualquiera que sea el valor del factor de amortiguación.

- Para  $t \rightarrow \infty$  aplicando el TVF a la función transformada de la derivada se

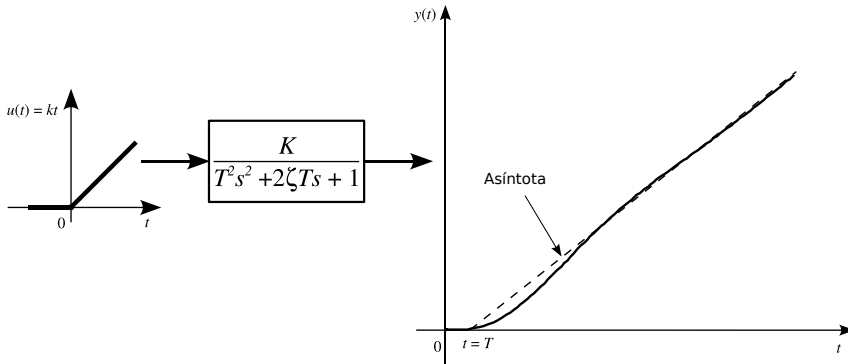


Figura 3.24: Respuestas a la rampa de un sistema de segundo orden subamortiguado ( $0 < \zeta < 1$ ).

tiene,

$$y'(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{kK}{s^2(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)} = kK.$$

Podemos afirmar, por tanto, que la curva de respuesta tiende asintóticamente a una rampa de salida cuya pendiente es  $kK$ . Recuerde que el término exponencial de (3.61) se extingue a medida que transcurre el tiempo.

Siendo la asíntota  $a(t) = kK(t - T')$ , entonces  $a(t) = kK(t - 2\zeta T)$  luego, note que sólo para  $K = 1$  el retraso con que la respuesta seguirá a la rampa puede ser calculado igualando los valores de cada función, (rampa y asíntota de la respuesta) para tiempos grandes así,

$$kt_1 = kt_2 + 2k\zeta T,$$

o bien, reordenando,

$$k(t_1 - t_2) = 2k\zeta T,$$

mostrando que  $\Delta t := (t_1 - t_2) = 2\zeta T$ . Por otro lado, a igual instante de tiempo la diferencia entre la rampa y la salida resulta  $2k\zeta T$  (ver Fig. 3.25).

Similarmente a lo hecho en apartados anteriores la respuesta normalizada resulta

$$y(t) = t^* - 2\zeta T + \frac{e^{-\zeta t^*}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin\left(\sqrt{1 - \zeta^2} t^* + \phi\right), \quad (3.63)$$

con  $y^* = y/(kKT)$ ,  $t^* = t/T$  y  $\omega_p T = \sqrt{1 - \zeta^2}$ .

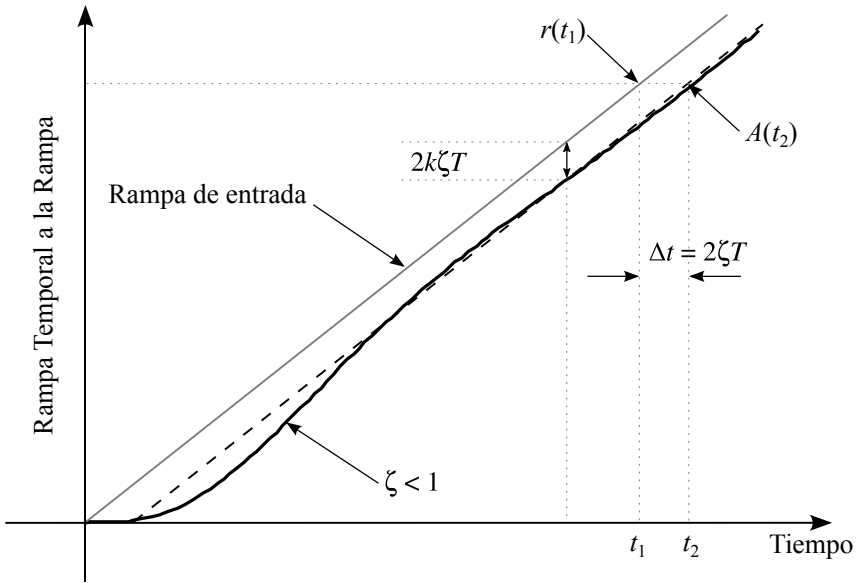


Figura 3.25: Respuestas a la rampa de un sistema de segundo orden subamortiguado donde se indican los resultados obtenidos anteriormente.

#### Caso críticamente amortiguado ( $\zeta = 1$ )

Aquí la Ec. (3.58) se resume a

$$Y(s) = \frac{kK}{s^2(Ts + 1)^2}, \quad (3.64)$$

y por tanto la respuesta a la rampa en el dominio del tiempo resulta

$$y(t) = t - 2T + 2Te^{-t/T}(1 + t/2T) \quad (3.65)$$

y la correspondiente expresión normalizada resulta,

$$y^*(t^*) = t^* - 2 + 2e^{-t^*}(1 + t^*/2), \quad (3.66)$$

con  $y^* = y/(kKT)$  y  $t^* = t/T$ .

#### Caso sobreamortiguado ( $\zeta > 1$ )

En este caso la Ec. (3.58) se resume a

$$Y(s) = \frac{kK}{s^2(T_1s + 1)(T_2s + 1)}, \quad (3.67)$$

resultando la respuesta en el tiempo

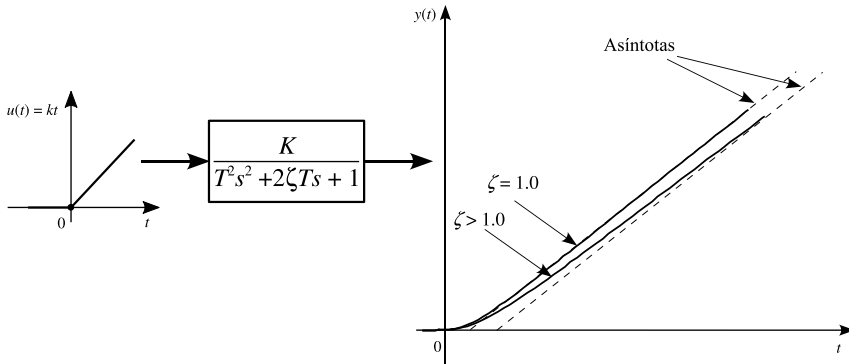


Figura 3.26: Respuestas a la rampa de un sistema de segundo orden críticamente amortiguado y sobreamortiguado ( $\zeta = 1$  y  $\zeta > 1$  respectivamente).

$$y(t) = kK \left\{ t - 2\zeta T + \frac{T}{2s\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[ (2\zeta s_1 - 1)e^{-s_2 t} - (2\zeta T s_2 - 1)e^{-s_1 t} \right] \right\}, \quad (3.68)$$

con  $s_{1-2}$  definidos como en secciones anteriores, esto es, con  $\zeta > 1$ .

La Fig. 3.27 muestra la respuesta a la rampa para distintos valores del coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$  y donde se observa la presencia de componentes oscilatorios en la respuesta temporal, pudiendo distinguirse los cuatro casos ya conocidos.

Note que la intersección entre la asíntota y el eje tiempo se va moviendo a medida que el coeficiente de amortiguamiento crece.

Para terminar la Tabla 3.5 muestra en forma resumida las distintas salidas obtenidas para sistemas de segundo orden de acuerdo con las diferentes entradas aquí estudiadas.

### 3.6. Respuesta Dinámica de Sistemas con Tiempo Muerto

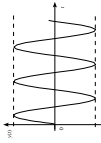
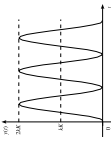
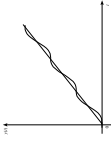

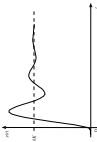
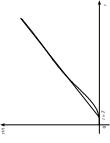

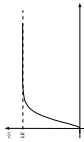
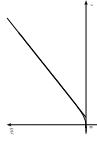

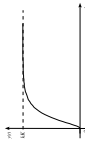
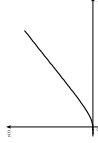
Considere un sistema LTI que posee tiempo muerto y cuya función de transferencia es

$$Y(s)/U(s) = G(s)e^{-\theta s}. \quad (3.69)$$

Por tanto, la respuesta a una señal de excitación de entrada será la transformada inversa de la ecuación anterior,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)e^{-\theta s}]. \quad (3.70)$$

Tabla 3.5: Respuestas dinámicas de sistemas de segundo orden frente a entradas delta, escalón y rampa.

Coefficiente de Amortiguamiento	Función de Transferencia	Respuesta a la Entrada $U(s) = 1$	Respuesta a la Entrada $U(s) = 1/s$	Respuesta a la Entrada $U(s) = 1/s^2$
$\zeta = 0$	$\frac{K}{T^2 s^2 + 1}$	$y(t) = kK \omega_n \sin(\omega_n t)$ 	$y(t) = kK [1 - \cos(\omega_n t)]$ 	$y(t) = kK [t - T \sin(\omega_n t)]$ 
$0 \leq \zeta \leq 1$	$\frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$	$y(t) = kK \frac{\omega_n}{\omega_p} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_p t)$ 	$y(t) = kK \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_p t + \phi) \right]$ 	$y(t) = kK \left[ t - T' \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\omega_p} \sin(\omega_p t + \phi) \right]$ 
$\zeta = 1$	$\frac{K}{(T s + 1)^2}$	$y(t) = \frac{kK}{T^2} e^{-t/T} t$ 	$y(t) = kK \left[ 1 - e^{-t/T} \left( 1 + \frac{t}{T} \right) \right]$ 	$y(t) = kK \left[ t - 2T + 2T e^{-t/T} \left( 1 + \frac{t}{2T} \right) \right]$ 
$\zeta > 1$	$\frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$y(t) = \frac{kK}{T_1 - T_2} \left( e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2} \right)$ 	$y(t) = kK \left[ 1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left( T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2} \right) \right]$ 	$y(t) = kK \left\{ t - 2\zeta T + \frac{T}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[ (2\zeta T s_1 - 1)e^{-s_2 t} - (2\zeta T s_2 - 1)e^{-s_1 t} \right] \right\}$ 

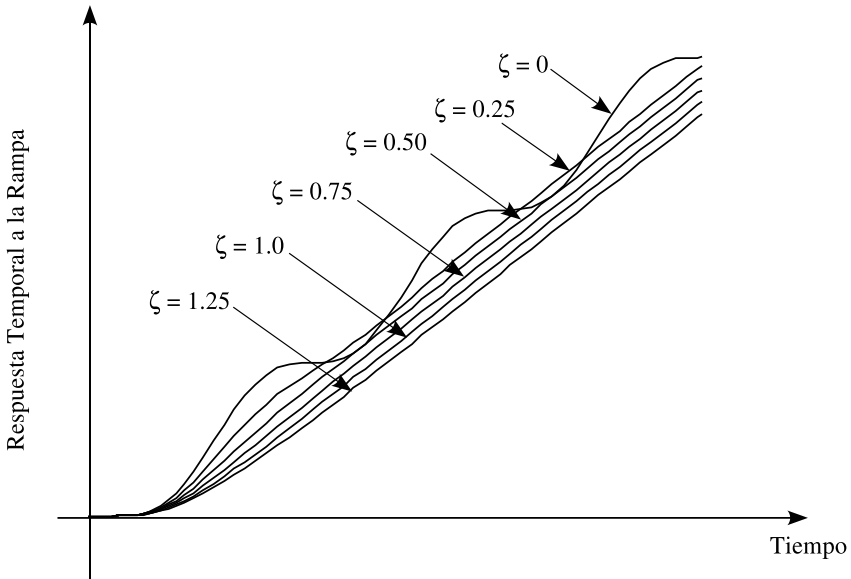


Figura 3.27: Respuesta a la rampa de un sistema de segundo orden para diferentes valores del factor de amortiguamiento.

y así podemos concluir fácilmente que:

**R** ■ **Remarca 3.11** La respuesta de salida de un sistema LTI con tiempo muerto es idéntica a la respuesta temporal del sin tiempo muerto desplazada en tantas unidades de tiempo como tiempo muerto tenga el sistema original.

**Demostración** La demostración es prácticamente trivial ya que se trata de trasladar la salida de un sistema lineal sin tiempo muerto en tantas unidades de tiempo como tiempo muerto tenga el sistema (ver Teo. B.2.3). □

A modo de ejemplo y por simplicidad, si se considera un sistema que no tiene dinámica y sólo posee tiempo muerto, las respuestas del sistema (3.69) a las señales de excitación que venimos considerando serán,

1. Respuesta al impulso ( $u(t) = \delta(t)$  o bien,  $U(s) = 1$ )

$$y(t) = u(t - \theta) = \delta(t - \theta).$$

2. Respuesta al escalón ( $u(t) = kH(t)$  o bien,  $U(s) = 1/s$ )

$$y(t) = u(t - \theta) = kH(t - \theta),$$



donde el término  $H(t-\theta)$  por definición es  $H(t-\theta) := 0$  para todo  $t < \theta$  y  $H(t-\theta) := 1$  para todo  $t \geq \theta$  (función escalón unitario desplazada en  $\theta$  unidades de tiempo).

3. Respuesta a la rampa ( $u(t) = tH(t)$  o bien,  $U(s) = 1/s^2$ )

$$y(t) = u(t-\theta) = (t-\theta)H(t-\theta),$$

para  $t \geq \theta$ . Esta última ecuación resulta ser una rampa desplazada en  $\theta$  unidades de tiempo.

### 3.6.1. Aproximaciones del tiempo muerto

En la literatura clásica se ha propuesto distintas aproximaciones para el tiempo muerto, con el objeto de utilizar aproximaciones finitas que permitan realizar un estudio aproximado pero con bastante precisión de los sistemas de control.

#### Aproximación con sistemas de alto orden

Una posibilidad es hacer una aproximación del tiempo muerto a un sistema de alto orden (Ogunnaike y Ray [67], entre otros). Basándose en la definición del número exponencial  $e$ ,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Luego, elevando miembro a miembro a  $-\theta$  la expresión anterior resulta,

$$e^{-d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-dn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{dn}}.$$

Si se define  $N := -dn$  es posible escribir,

$$e^{-d} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{N/d}\right)^{dN/d}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{d}{N}\right)^N}.$$

Ahora si se define  $d := \theta s$  con  $s$  la variable compleja de Laplace, es posible escribir

$$e^{-\theta s} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{\theta}{N}s + 1\right)^N}. \quad (3.71)$$



■ **Remarca 3.12 — Equivalencia del Tiempo Muerto.** Un tiempo muerto de magnitud  $\theta$  es equivalente a una secuencia infinita de primeros órdenes en serie con constante de tiempo  $T = \theta/N$ .

La Fig. 3.28 muestra un escalón retardado en una unidad de tiempo ( $\theta = 1$ ) y compara la respuesta al escalón de tres sistemas de orden 10, 20 y 40 de acuerdo con la Ec. (3.71) que intentan aproximarlos.

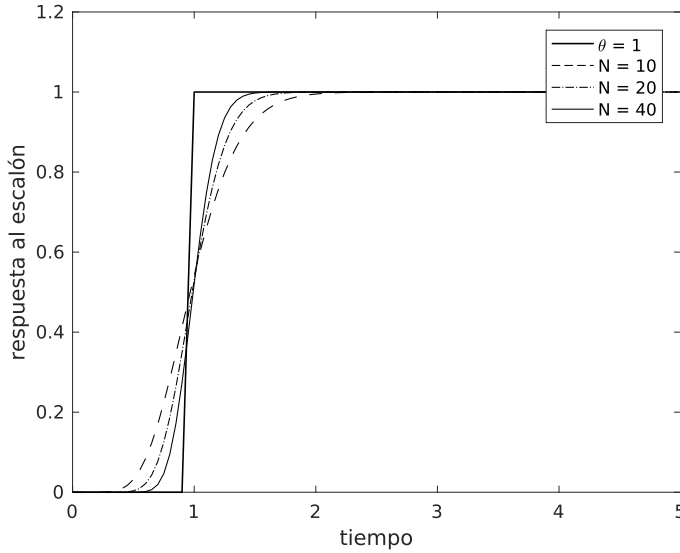


Figura 3.28: Escalón retardado y respuestas al escalón de sistemas de orden 10, 20 y 40 de acuerdo con la Ec. (3.71).

### Aproximaciones en serie del tiempo muerto

Una posibilidad para el estudio y tratamiento de sistemas con tiempo muerto es el uso de aproximaciones en serie.

Una primer aproximación en serie para el tiempo muerto es la serie de Taylor, si bien no es la más usada en sistemas de control. Así,

$$e^{-\theta s} = 1 - \theta s + \frac{\theta^2 s^2}{2!} - \frac{\theta^3 s^3}{3!} + \dots \quad (3.72)$$

También es posible aproximar el tiempo muerto como el cociente de dos series de Taylor como se muestra a continuación.

$$e^{-\theta s} = \frac{e^{-\frac{\theta}{2}s}}{e^{+\frac{\theta}{2}s}} = \frac{1 - \theta s + \frac{\theta^2 s^2}{2!} - \frac{\theta^3 s^3}{3!} + \dots}{1 + \theta s + \frac{\theta^2 s^2}{2!} + \frac{\theta^3 s^3}{3!} + \dots} \quad (3.73)$$

Sin embargo, la aproximación en serie de Padé es posiblemente la más usada y la más popular en el estudio de los sistemas de control. Una de las razones de esto se justifica en el Cap. 10 en la subsecc. 10.3.1. La expresión general de la aproximación de Padé es,

$$e^{-\theta s} \approx \frac{1 + \sum_{i=1}^n \frac{i!(-\theta s)^i}{(2i)!}}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{i!(\theta s)^i}{(2i)!}} \quad (3.74)$$

donde  $n$  es el orden de la aproximación. Así, una aproximación de Padé de primer orden resulta,

$$e^{-\theta s} \approx \frac{1 - \theta s/2}{1 + \theta s/2}, \quad (3.75)$$

mientras que una aproximación de Padé de segundo orden resulta,

$$e^{-\theta s} \approx \frac{1 - \theta s/2 + \theta^2 s^2/12}{1 + \theta s/2 + \theta^2 s^2/12}. \quad (3.76)$$

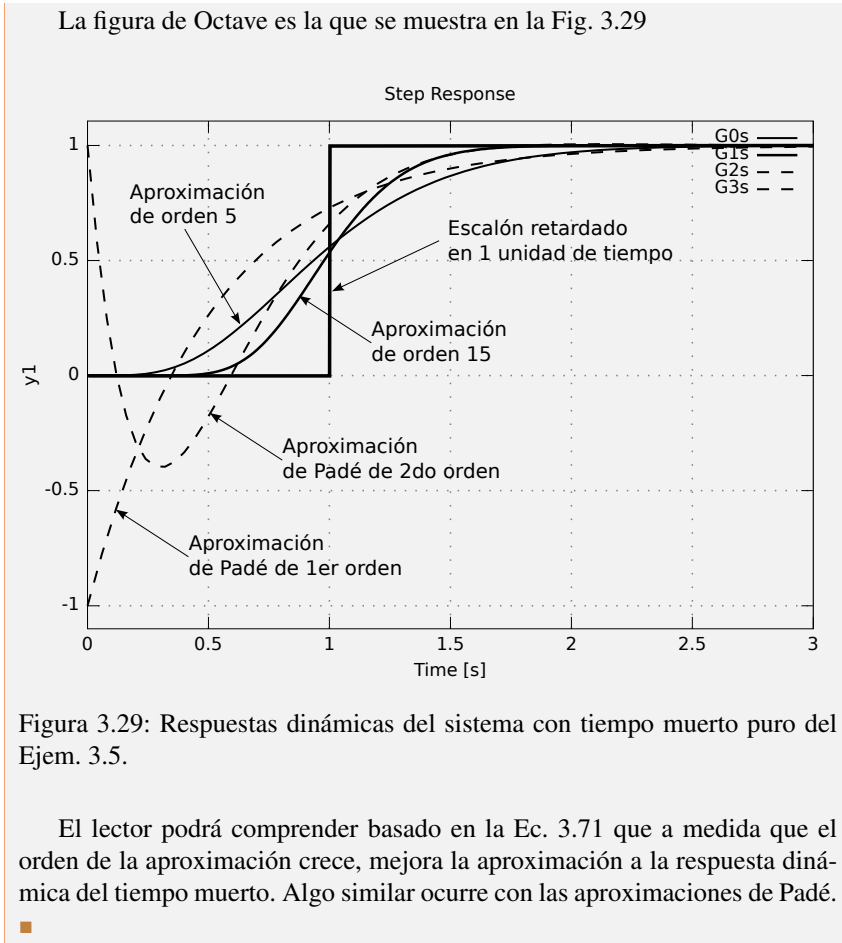
**Ejemplo 3.5** Asuma un sistema cuya  $G(s) = e^{-s}$  sometido a una entrada escalón unitario. Simule la respuesta dinámica del sistema, 1) utilizando una aproximación de orden  $N = 5$  y 15 dada por la Ec. 3.71, 2) utilizando aproximaciones de Padé de primer y segundo orden.

El código de Octave para esta simulación es el que se lista a continuación.

#### Algoritmo 3.5: Código de Octave del Ejem. 3.5.

```

1 % tiempo muerto
2 theta=1;
3
4 % escalon unitario con tiempo muerto
5 escalon=[zeros(11,1); ones(30,1)];
6 t=[0:0.1:4];
7
8 % defino la aproximacion de orden N=20
9 s=tf('s');
10 N0=5; N1=15;
11 G0s=1/(theta*s/N0+1)^(N0);
12 G1s=1/(theta*s/N1+1)^(N1);
13
14 % defino las aproximaciones de Pade
15 G2s=(1-theta*s/2)/(1+theta*s/2);
16 G3s=(1-theta*s/2+theta^2*s^2/12)/(1+theta*s/2+theta^2*s^2/12)
17 ;
18 step(G0s, '-k', G1s, '-k', G2s, '-k', G3s, '-k')
```



## 3.7. Ejemplos de Interés en Ingeniería de Procesos

### 3.7.1. Sistema con respuesta inversa

Consideremos un sistema sencillo representado por el diagrama de bloques de la Fig.3.30. Basándose en dicha la función de transferencia entre la salida y la entrada del sistema resulta,

$$G(s) = \frac{(K_1 T_2 - K_2 T_1)s + (K_2 - K_1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}. \quad (3.77)$$

La Fig. 3.31 muestra la respuesta al escalón de la amplitud  $k$  del sistema (3.77). Note que el valor final de la respuesta temporal está por encima de cero a pesar de haber partido en la dirección contraria.

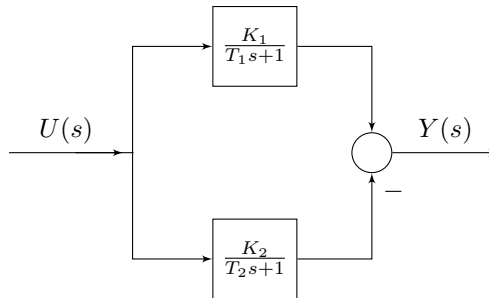


Figura 3.30: Diagrama de Bloques de un Sistema con Respuesta Inversa. Aquí, se considera que  $K_1, T_1, K_2$  y  $T_2 \in \mathbb{R}^+$ .

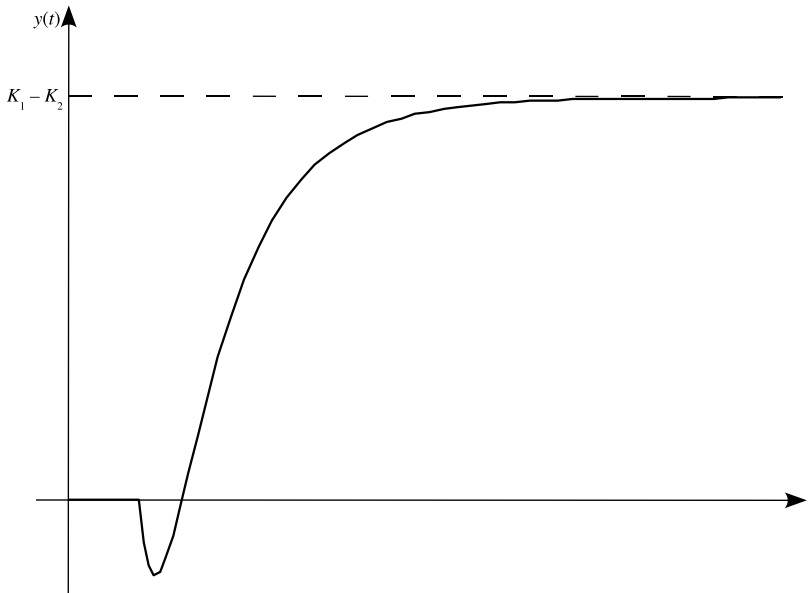


Figura 3.31: Respuesta al escalón del sistema con respuesta inversa de la Fig. 3.31.

Así, claramente surge que las condiciones que se deben cumplir para que el sistema presente una respuesta inversa son:

1. condición inicial:  $K_2/T_2 > K_1/T_1$
2. condición final:  $K_1 > K_2$ .

Note que cuando ambas condiciones se cumplen la función de transferencia (3.77) presenta un cero real en el semiplano complejo derecho esto es,

$$z = -\frac{K_1 - K_2}{K_1 T_2 - K_2 T_1} > 0 \quad (3.78)$$

en consecuencia,  $G(s)$  representa un sistema de no mínima fase.

Este tipo de respuesta es muy común en sistema de la ingeniería química, como por ejemplo, generadores de vapor y columnas de destilación, donde el balance de materia y energía compiten para mover las variables de salida en direcciones opuestas.

A continuación se muestra estos resultados mediante un ejemplo numérica el cual es simulado numéricamente mediante Octave.

**Ejemplo 3.6** Considere el sistema con respuesta inversa representado por la Fig. 3.30, donde  $G_1(s) = 1,5/(s + 1)$  y  $G_2(s) = 1/(0,5s + 1)$ . Utilizando los comandos de Octave, determine la respuesta al escalón de dicho sistema.

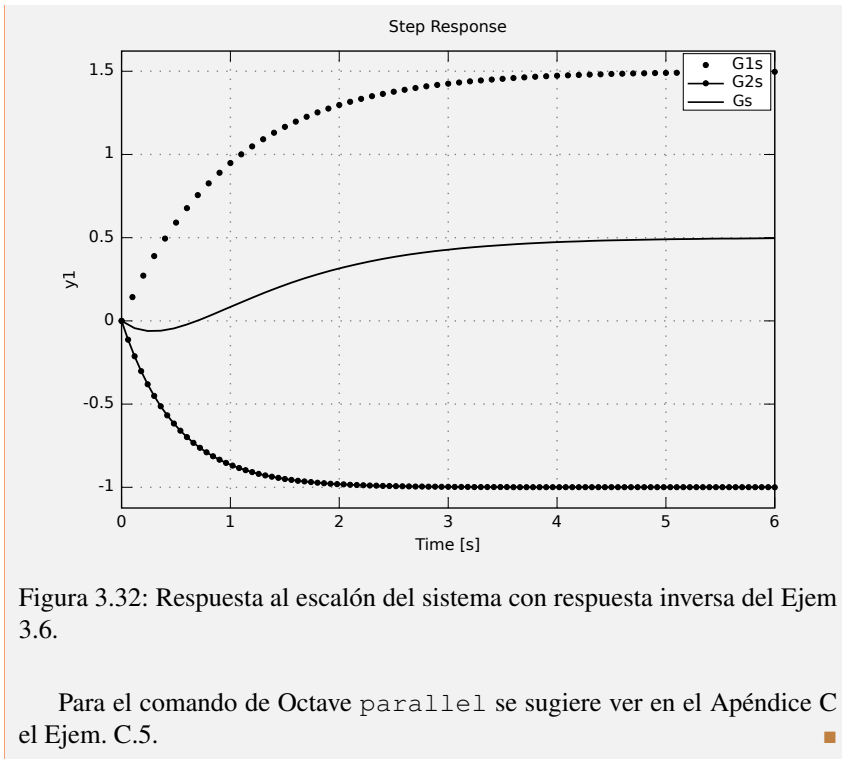
El programa de Octave para este ejemplo se muestra a continuación.

**Algoritmo 3.6:** Código de Octave del Ejem. 3.6.

```

1 clear all , clc
2 pkg load control
3
4 % Sistemas LTI
5 K1=1.5; T1=1;
6 K2=1; T2=0.5;
7 s=tf('s');
8 G1s=K1/(T1*s+1);
9 G2s=K2/(T2*s+1);
10 Gs=parallel(G1s,-G2s); %sumo los bloques en serie
11
12 % Respuesta al escalón
13 step(G1s, 'k',-G2s, '-k',Gs, 'k')
14 legend('G1s', 'G2s', 'Gs')
```

La gráfica que presenta Octave se muestra en la Fig. 3.32.



### 3.7.2. Sistema adelanto-atraso

Considere un bloque de adelanto-retardo que tiene por función de transferencia,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{K(T_1 s + 1)}{T_2 s + 1}, \quad (3.79)$$

donde  $T_1$  y  $T_2 \in \mathbb{R}^+$ .

El comportamiento dinámico como se demostrará más adelante depende de las relaciones entre las constantes reales  $T_1$  y  $T_2$ . Esto es,

- Caso adelanto:  $T_1 > T_2$
- Caso retardo:  $T_1 < T_2$

#### Respuesta al escalón

La salida o respuesta de un bloque adelanto-retardo para una señal de excitación del tipo escalón de amplitud  $k$  es

$$Y(s) = \frac{K(T_1 s + 1)}{T_2 s + 1} \frac{k}{s}, \quad (3.80)$$

cuya transformada inversa obtenida de las tablas es

$$y^*(t) = 1 + \left( \frac{T_1}{T_2} - 1 \right) e^{-t/T_2} = 1 + (a - 1)e^{-t/T_2}, \quad (3.81)$$

siendo  $y^*(t) = y(t)/Kk$  la salida normalizada y  $a = T_1/T_2$  la relación entre las constantes reales  $T_1$  y  $T_2$ .

Lo primero que observamos en la expresión anterior es que la respuesta en el tiempo se compone de dos términos. El primero es una magnitud constante igual a la unidad, y el segundo es una función extingible con el tiempo. En conclusión, para  $t \rightarrow \infty$ , es evidente:

- *La respuesta normalizada es asintóticamente estable tendiente a un valor final igual al del propio escalón.*

El valor inicial de la respuesta, para  $t = 0$

$$y^*(0^+) = 1 + \left( \frac{T_1}{T_2} - 1 \right) = \frac{T_1}{T_2} = a.$$

que nos conduce a la siguiente conclusión:

*El valor inicial de la respuesta (para  $t = 0^+$ ) es igual a la relación entre las constantes reales ( $a = T_1/T_2$ ). Sera, por tanto, superior al valor del escalón para el caso adelanto, e inferior para el caso retardo*

Note que este resultado es coincidente con la Rem. 3.3 para el caso en que  $n = m$ .

Analizando ahora el factor de escala ( $a - 1$ ) de la exponencial, el cual será positivo o negativo, según corresponda al caso adelanto o retardo, respectivamente. Por tanto, dos casos quedan claramente definidos

**Caso adelanto** ( $T_1 > T_2$ ;  $a > 1$ ): Es decir, que el factor de escala de la exponencial es positivo, lo que significa que el valor inicial de la respuesta  $y(0^+)$  está por encima del escalón en una magnitud igual a  $(a - 1)$ .

**Caso retardo** ( $T_1 < T_2$ ;  $a < 1$ ): Es decir, que este caso el factor de escala de la exponencial es negativo y menor que uno, lo que significa que el valor inicial de la respuesta  $y(0^+)$  queda por debajo del escalón, pero siempre por encima de cero.

### 3.7.3. Sistema anticipativo

Un bloque anticipativo tiene por función de transferencia<sup>3</sup>,

$$G(s) = \frac{Ks}{Ts + 1}. \quad (3.82)$$

<sup>3</sup>Note que (3.82) no cumple el requisito ( $b_m \neq 0$ ) con que fue definida la Ec. (3.3).



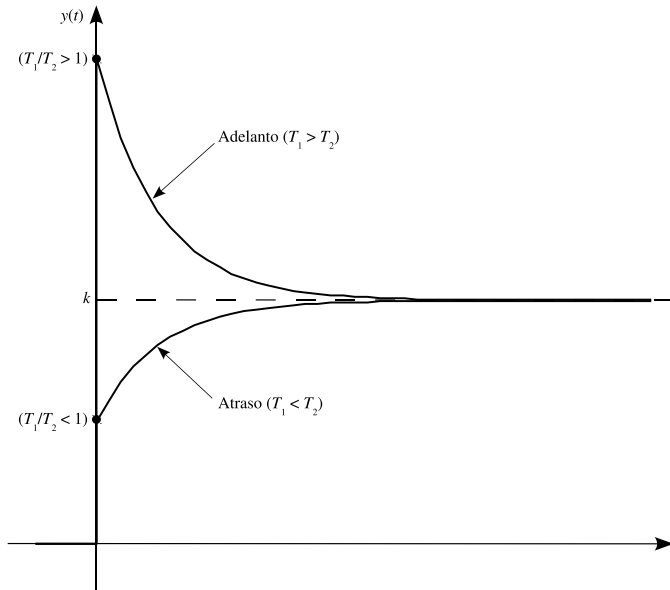


Figura 3.33: Respuesta al escalón de un bloque adelanto-retardo para dos relaciones distintas de  $a$ .

### Respuesta la rampa

La salida o respuesta de un bloque anticipativo par una señal de excitación del tipo rampa de amplitud  $k$  sera

$$Y(s) = \frac{kK \cancel{s}}{s^2(Ts + 1)} = \frac{kK}{s(Ts + 1)}. \quad (3.83)$$

Note que la expresión (3.82) es idéntica a la respuesta al escalón en el campo de Laplace de un sistema de primer orden (Ec. (3.19) y en consecuencia, la respuesta en el tiempo de dicho sistema ante la rampa de amplitud  $k$  resulta idéntica a la expresión (3.20). Por tanto, es de esperar entonces que dicha respuesta temporal sea la respuesta de la Fig. 3.4. Además, es evidente que el Ec. (3.83) puede descomponerse en tres partes como se indica a continuación.

$$G(s) = K(s) \left( \frac{1}{Ts + 1} \right). \quad (3.84)$$

El primero parte representa una ganancia de amplitud  $K$ , la segunda a una función derivativa pura, y la tercera a un primer orden. Una rápida interpretación es que la parte anticipativa deriva a la entrada y en consecuencia, si la entrada es una rampa de pendiente  $k$  su salida se corresponderá con la salida de un sistema de primer orden frente a un escalón de amplitud  $k$ .

### 3.8. Conclusiones

En este se presentó las respuestas dinámicas de sistemas lineales a distintas entradas. Los sistemas lineales estudiados son típicos de la ingeniería de procesos, sistemas de primero y segundo orden, además de los sistemas con respuesta inversa. También se introdujo al problema de los sistemas con tiempo muerto, algo que será analizado en distintos puntos de este libro ya que, los sistemas con tiempo muerto representan un serio desafío al momento de diseñar sistemas de control, y estos se encuentran muy presentes en la industria.

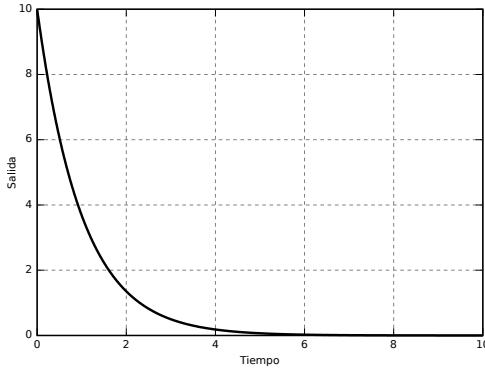
Se aspira a que el lector pueda extender en forma cualitativa o bien cuantitativa los resultados aquí presentados siguiendo la metodología empleada a sistemas de mayor complejidad.

### 3.9. Pensemos

1. Considere un sistema lineal de segundo orden subamortiguado cuya respuesta al escalón unitario tiene un sobrevalor absoluto del 1.1630. Si el escalón aumenta un 20 %, el sobrevalor absoluto será:
 

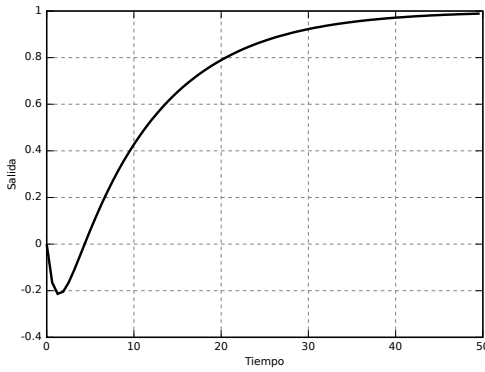
<input type="checkbox"/> 1.2793	<input type="checkbox"/> 1.3956
<input type="checkbox"/> 1.6282	<input type="checkbox"/> Ninguna de las respuesta anteriores.
2. En la respuesta a una entrada tipo escalón de amplitud 2 de un sistema de primer orden con ganancia y constante de tiempo distintas de uno, transcurrido un tiempo igual a 3 veces la constante de tiempo del sistema, el valor de la salida se encuentra al:
 

<input type="checkbox"/> 86.5 % de su valor final.	<input type="checkbox"/> 98.2 % de su valor final.
<input type="checkbox"/> 95.0 % de su valor final.	<input type="checkbox"/> 99.3 % de su valor final.
<input type="checkbox"/> Ninguna de las anteriores.	
3. Dado un sistema lineal de primer orden, cuya función de transferencia sea  $G(s) = 1/(s + a)$ , si se estimula el mismo con un escalón unitario a condiciones iniciales nulas, ¿el valor final de la respuesta depende de la magnitud del polo?  **SI**  **NO**
4. Un sistema de primer orden, a condiciones iniciales nulas, estimulado con una entrada tipo impulso presenta la respuesta dinámica de la Fig. 3.34. Los valores de ganancia del sistema ( $K$ ) y la constante de tiempo ( $T$ ) son:
5. Un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = \frac{\tau s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$  se comporta frente a una entrada escalón como se muestra en la Fig. 3.35. Para tener este comportamiento dinámico,



- $K = 1$  y  $T = 20$ .
- $K = 10$  y  $T = 1$ .
- $K = 1$  y  $T = 10$ .
- $K = 20$  y  $T = 1$ .
- Ninguna de las anteriores.

Figura 3.34



- $\tau = 0$ ,  $T_1$  y  $T_2 \in \mathbb{R}^+$
- $\tau > 0$ ,  $T_1$  y  $T_2 \in \mathbb{R}^+$
- $\tau < 0$ ,  $T_1$  y  $T_2 \in \mathbb{R}^+$
- $\tau < 0$ ,  $T_1 \in \mathbb{R}^-$  y  $T_2 \in \mathbb{R}^+$
- Ninguna de las anteriores.

Figura 3.35

6. Basándose en la respuesta al escalón unitario y el mapa de polos y ceros de la Fig. 3.36 escriba la función de transferencia del sistema a lazo abierto.

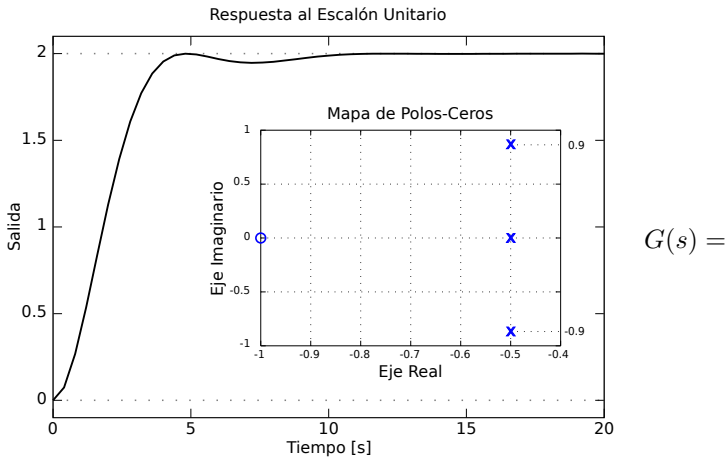


Figura 3.36

7. Considere el sistema lineal de la Fig. 3.37

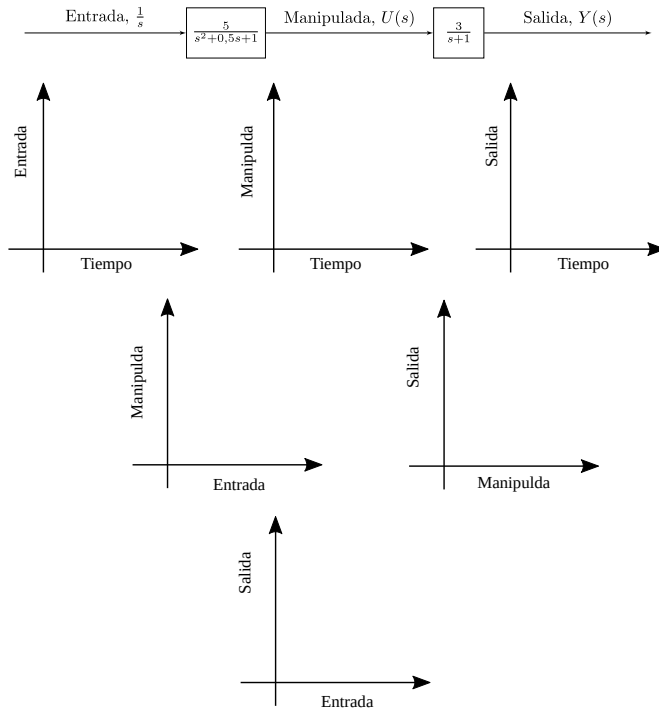


Figura 3.37

Represente a mano alzada las gráficas que se indican en dicha figura. Realice los cálculos que considere necesario para tal fin.

8. Considere un sistema de segundo orden subamortiguado (de fase mínima) sometido a una entrada escalón unitaria. Si las raíces del sistema cambian de forma tal que la parte imaginaria se mantenga constante significa que:
- El tiempo de establecimiento es el mismo.
  - El máximo sobre impulso es el mismo.
  - Las dos opciones anteriores son correctas
  - Ninguna de las anteriores es correcta.
9. Considere tres polos ubicados en el semiplano complejo izquierdo en una misma línea recta que pasa por el origen en el plano complejo (exceptuando a los ejes real e imaginario). ¿Qué tienen en común las tres respuestas dinámicas?
- el mismo tiempo de establecimiento.
  - el mismo coeficiente de amortiguamiento.
  - la misma frecuencia natural .
  - Ninguna de las anteriores.
10. El comportamiento dinámico de sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = \frac{10}{(s^2+1,4s+1)(s+10)}$  se aproxima al de un sistema cuya función de transferencia es,
- $\frac{1}{(s^2+1,4s+1)}$
  - $\frac{10}{(s^2+1,4s+1)}$
  - $\frac{1}{(s+10)}$
  - $\frac{10}{(s+1)}$
  - Ninguna es posible.
11. Considere un sistema lineal de segundo orden subamortiguado cuya respuesta al escalón unitario tiene un sobrevalor relativo del 45 %. Si el escalón aumenta un 20 %, ¿el sobrevalor relativo aumenta un 20 %?
- Si    No
12. Dado un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = \frac{160}{(s+2)(s+8)(s+10)}$ , se pretende aproximarla a la de un sistema de primer orden ( $G(s) \approx \frac{K}{(Ts+1)}$ ). ¿Qué valores de ganancia y constante de tiempo adoptaría?
- $K = 160$  y  $T = 160$ .
  - $K = 1$  y  $T = 1/160$ .
  - $K = 1$  y  $T = 0,125$ .
  - $K = 1$  y  $T = 0,5$ .
  - Ninguna es correcta.
13. Un sistema de segundo orden subamortiguado sufrió un cambio en la ubicación de sus polos. En la siguiente gráfica se muestran las respuestas al escalón unitario del sistema antes y después de que se produjera el cambio. De acuerdo con las características del sistema hay sólo dos casos posibles que se indican en la Fig. 3.38. Observando las respuestas dinámicas, indique cual de ellos es el correcto.

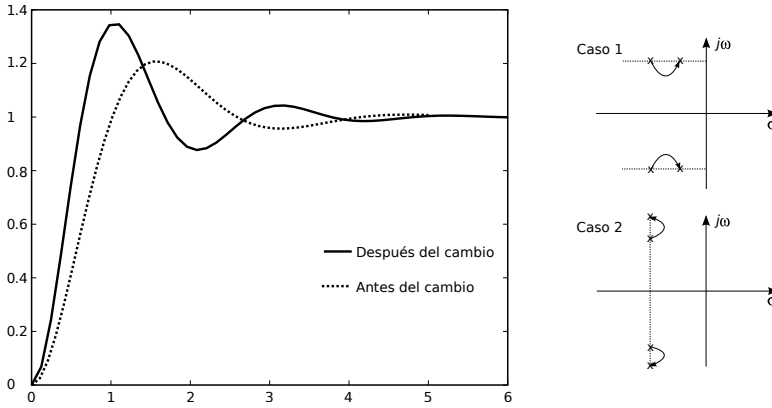


Figura 3.38

14. Un sistema de segundo orden subamortiguado sufrió un cambio en la ubicación de sus polos. En la Fig. 3.39 se muestran las respuestas al escalón unitario antes y después de que se produjera el cambio. Basándose en las respuestas dinámicas, ¿a cuál de los siguientes casos corresponde el cambio?

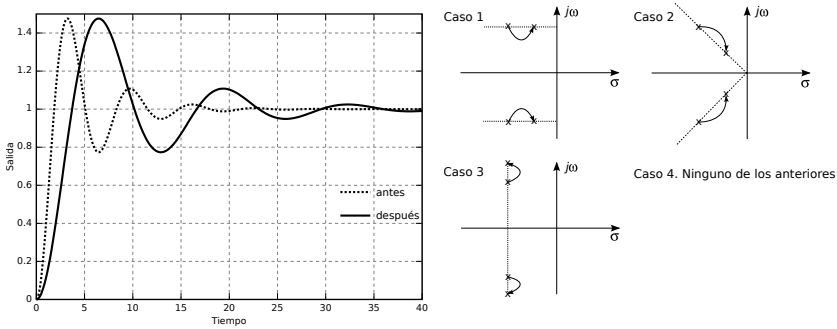


Figura 3.39

15. Considere un sistema a lazo abierto estable que posee un cero en  $\mathbb{C}^-$ . ¿La respuesta dinámica de dicho sistema sin control se ve influenciada por el cero?  SI  NO
16. Considere un sistema lineal de segundo orden subamortiguado es sometido a una entrada escalón de amplitud  $K$ . Si la amplitud del escalón de la entrada aumenta un 20% el tiempo de establecimiento aumenta un 20%.  SI  NO
17. Considere un sistema de cuarto orden cuyas raíces se indican abajo. Indique de cual o cuales de ellas dependerá más fuertemente el tiempo de

establecimiento.

- $s_1 = -5$       $s_{2-3} = -1 \pm j3$   
  $s_1 = -7$      Ninguna de las anteriores

### 3.10. Problemas

**Problema 3.1** Considere un sistema de primer orden es que excitado con una función rampa. Comente a que es igual el error de seguimiento de la rampa (diferencia entre la señal de salida y la señal de entrada pasado el transitorio) cuando la ganancia del sistema es,

- $K \neq 1$ .
  - $K = 1$
- (a) Realice en todos los casos gráficos a mano alzada que muestren como es dicho error.
- (b) Comente uno o más sistemas físicos en donde tendría sentido analizar dicho error de seguimiento.

**Problema 3.2** Obtenga la respuesta dinámica de un sistema de primer orden frente a una función de entrada senoidal.

**Problema 3.3** Considere un sistema de primer orden frente a una entrada  $u(t)$  como se muestra en la Fig. 3.40.

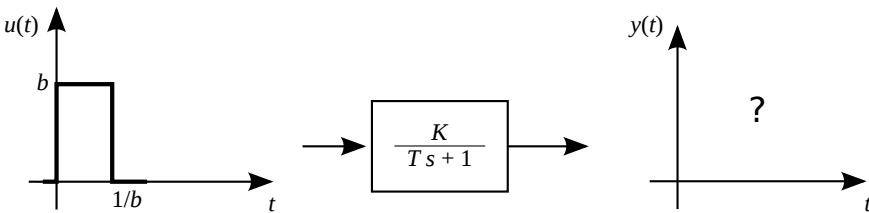


Figura 3.40

- (a) Determine la función de transferencia  $U(s)$ .
- (b) Basándose en la expresión de  $U(s)$  del inciso anterior determine expresión de la respuesta temporal  $y(t)$ .
- (c) Grafique cualitativamente la respuesta temporal.
- (d) Estudie cualitativamente que pasa cuando se reduce y se aumenta el parámetro  $b$ , y particularmente cuando  $b \rightarrow \infty$ .

**Problema 3.4** Considere el sistema eléctrico y la señal de entrada  $e(t)$  que se muestra en la Fig. 3.41.

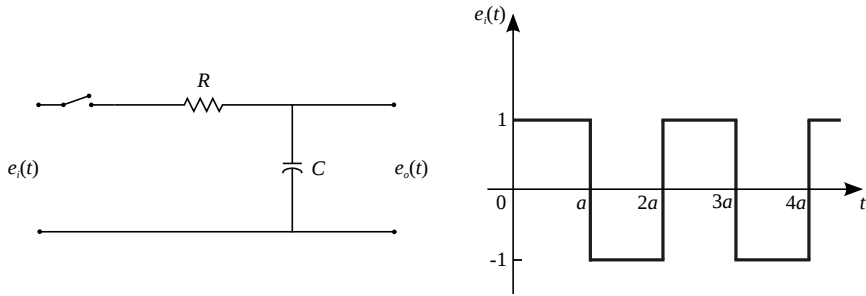


Figura 3.41

donde  $a$  es lo suficientemente grande ( $a \geq 4RC$ ) como para que el sistema alcance el estado estacionario, tanto en la carga como en la descarga. Considere que el tiempo de estabilización es  $4RC$ .

- ¿Cómo es la expresión de la respuesta temporal para los primeros dos periodos de carga y descarga.
- Grafique a mano alzada la respuesta temporal del sistema.

**Problema 3.5** Es sabido que el denominador de un sistema de segundo orden puede ser escrito bajo la forma canónica.

- Obtenga las distintas raíces que presenta dicho denominador en función de  $T$  y  $\zeta$ .
- Realice un gráfico a mano alzada que muestre la ubicación de las diferentes raíces en el plano complejo, y a su vez en otro gráfico la respuesta temporal correspondiente.

**Problema 3.6** ¿A qué es igual el tiempo de estabilización para un sistema de segundo orden cuando el factor de amortiguamiento ( $\zeta$ ) es mayor, menor, o igual a uno? Justifique su respuesta.

**Problema 3.7** Se desea que un sistema físico de segundo orden a lazo abierto cumpla con un comportamiento dinámico establecido por las siguientes especificaciones:

- ganancia ( $K$ ) unitaria,
  - un sobrevalor máximo comprendido entre los valores:  $5\% \leq A_1/kK \leq 20\%$ ,
  - un tiempo de establecimiento (al 98%) acotado entre los valores:  $1,6 \leq T_{est} \leq 4$  unidades de tiempo,
  - una pulsación propia ( $\omega_p$ ) máxima de 4.0.
- Representar en el plano complejo la región donde deberían estar ubicados los polos del sistema.
  - Determine en dicha área el conjunto de raíces que arrojan un tiempo de crecimiento al 90% bajos y altos. Luego, determine los tiempos de crecimientos mínimo y máximo ( $T_c = (\pi - \phi)/\omega_p$  con  $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ,  $\omega_n = 1/T$  y  $\phi = \arctan(\sqrt{1 - \zeta^2}/\zeta)$ ).



- (c) Qué parámetros deben tener ambas funciones de transferencias para que pertenezcan a la región especificada y que cumplan con tiempos de crecimiento mínimo y máximo pedidos en el inciso (b).
- (d) Verifique su respuesta mediante simulaciones numéricas.

**Problema 3.8** Considere un sistema de segundo orden cuya función de transferencia de lazo abierto es  $G_p(s) = K_p/(T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1)$  frente a un escalón de amplitud  $k$ .

- (a) Demuestre que los sobrevalores y bajovalores siguen la ecuación  $\frac{A_n}{kK} = e^{-n\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$ , con  $n = 1, 2, \dots$ .
- (b) ¿Cuánto debe valer  $\zeta$  para tener una relación de decaimiento  $RD = ?$
- (c) ¿Es válida la expresión anterior para sistemas subamortiguados con un orden mayor a 2?

**Problema 3.9** Demuestre que el decremento logarítmico, en sistemas de segundo orden es función de  $\zeta$  y tiene por ecuación  $d = 2\pi\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$ .

**Problema 3.10** Considere el circuito RLC en serie de la Fig 3.42.

- (a) Encuentre la función de transferencia del sistema
- (b) Expresé el denominador de la función de transferencia bajo la forma canónica y encuentre todas las constantes de tiempo del sistema si  $R = 100 \Omega$ ,  $L = 50 \text{ H}$  y  $C = 400 \mu\text{F}$ .
- (c) De acuerdo al valor de  $\zeta$ , ¿el sistema produce respuestas oscilatorias?.
- (d) Realice un gráfico a mano alzada de la respuesta temporal del sistema cuando a este se lo perturba con un escalón unitario en  $e(t)$ .

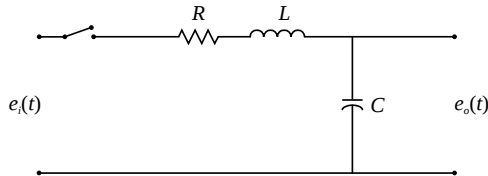


Figura 3.42

**Problema 3.11** Demuestre partiendo de la expresión de la respuesta temporal de un sistema de segundo orden subamortiguado, a que es igual la relación entre el máximo valor relativo de la respuesta de la respuesta al escalón respecto al estacionario, en función del factor de amortiguamiento  $\zeta$ .

**Problema 3.12** Demuestre que los distintos parámetros de las gráficas adjuntas en la Fig. 3.43 decrecen a medida que el coeficiente de amortiguamiento ( $\zeta$ ) crece. En dicha figura se indica como  $A_1$  el primer sobrevalor relativo,  $A_3$  el tercer sobrevalor relativo,  $\omega_p$  la pulsación propia,  $\omega_n$  la pulsación natural,  $T_{est}$  el tiempo de estabilización y  $T$  la inversa de  $\omega_n$ , correspondientes a un sistema de segundo orden subamortiguado.

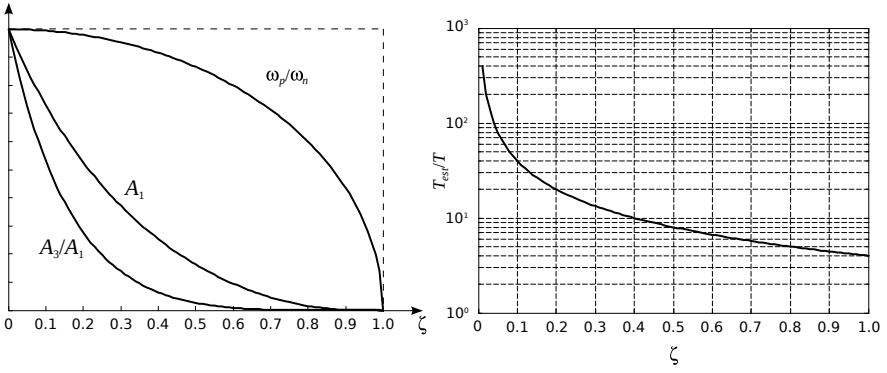


Figura 3.43

# Capítulo 4

## VARIABLES DE ESTADOS

En este capítulo primeramente se introduce los conceptos de la representación de sistemas mediante variables de estado. Luego se discute las soluciones de la ecuación de estados para casos homogéneos y no homogéneos. Por último, se introduce conceptos de representación mediante planos de fases, de controlabilidad y observabilidad. En todos los casos, se complementa con ejemplos para tal fin.

### 4.1. Conceptos Preliminares

En general, la dinámica de un proceso lineal puede representarse por el diagrama de bloques de entradas y salidas de la Fig. 4.1

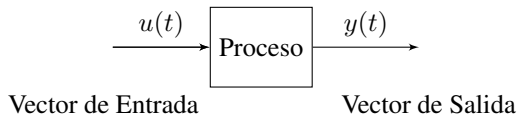


Figura 4.1: Vectores de entrada y de salida en un proceso.

Si bien desde el punto de vista ingenieril, la representación entrada-salida resulta muy clara, esa simplificación puede que, en algunos casos, pierda información. La ventaja del uso en representación en espacio estado es que ésta puede ser usada para representar sistemas tanto continuos como discretos, lineales o no lineales, variantes o invariantes en el tiempo, y bajo una notación matricial estricta equivalente para las representaciones antes mencionadas.

Previo a introducir la representación de estados de un sistema, a continuación se presenta una serie de definiciones.

**Definición 4.1.1 — Variables de Estados.** Es el conjunto mínimo de variables  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  tal que conociendo a estas en un instante  $t_0$  más la información de la excitación  $t \geq t_0$  es suficiente para determinar el estado dinámico futuro de un sistema en cualquier instante tiempo  $t \geq t_0$ .

Es importante aclarar que las variables de estado pueden o no ser medibles, y representar magnitudes físicas o bien solo matemáticas.

Estas variables de estado se representan en un vector denominado vector de estado, por lo tanto,

**Definición 4.1.2 — Vector de Estados.** Un vector de estado es aquel que determina de manera única el estado del sistema  $x(t)$  para cualquier tiempo  $t \geq t_0$ , una vez que se obtiene el estado en  $t = t_0$  y se especifica la entrada  $u(t)$  para  $t \geq t_0$ .

**Definición 4.1.3 — Espacio de Estados.** Es el espacio de  $n$ -dimensiones cuyos ejes coordenados están compuestos por cada uno de los estados que definen a un sistema dinámico.

Así, basandose en la definición anterior, cualquier estado queda representado por un punto en el espacio de estados.

## 4.2. Modelo Dinámico de un Sistema en Variables de Estados

A diferencia del control clásico tradicional que considera al sistema dinámico lineal bajo una representación de funciones de entrada-salida, aquí son tres tipos de variables las involucradas para definir al modelado dinámico del sistema: *las variables de entrada, las variables de salida y las variables de estado*.

El sistema dinámico debe incorporar elementos que memoricen los valores de la entrada para  $t \leq t^*$ . Dado que los elementos de almacenamiento<sup>1</sup> de un sistema de control en tiempo continuo funcionan como dispositivos de memoria, las salidas de tales elementos se consideran las variables que definen el estado interno del sistema dinámico. Por tanto, dichas las salidas son las variables de estado del sistema. Así,



■ **Remarca 4.1** La cantidad de variables de estado necesarias para definir completamente la dinámica futura de un sistema es igual a la cantidad de elementos de almacenamiento que contiene el sistema.

<sup>1</sup>Se entiende por elementos de almacenamiento a aquellas variables del sistema físico que almacenan materia o energía, o bien que deban ser integradas para poder conocer estado del sistema

Asuma un sistema de entradas y salidas múltiples con  $n$  integradores,  $r$  entradas  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  y  $m$  salidas  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ . Definiendo  $n$  salidas de los integradores como variables de estado:  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . Entonces el sistema se describe como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

y las salidas  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$  del sistema

$$\begin{aligned}y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t)\end{aligned}\tag{4.2}$$

Así, las Ecs. (4.1) y (4.2) se describen como

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t)\tag{4.3}$$

$$y(t) = g(x, u, t)\tag{4.4}$$

con  $x, y, u, f$  y  $g$ , vectores con las dimensiones apropiadas y donde, la Ec. (4.3) es la denominada ecuación de estado, y la (4.4) es la ecuación de salida.

Si las funciones vectoriales  $f$  y/o  $g$  involucran explícitamente el tiempo  $t$ , el sistema se denomina sistema variante en el tiempo.

Si se linealizan las Ecs. (4.3) y (4.4) alrededor del estado de operación tenemos las siguientes ecuaciones de estado y de salida:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}\tag{4.5}$$

en donde,  $A$  es la matriz de estado o del sistema,  $B$  la matriz de entrada,  $C$  es la matriz de salida y  $D$  la matriz de transmisión directa.

Si las funciones vectoriales  $f$  y  $g$  no involucran el tiempo  $t$  explícitamente, al linealizar el sistema de ecuaciones se tiene un sistema lineal al que se lo denomina sistema *lineal invariante con el tiempo* (LTI). En esta caso, las ecuaciones involucradas en (4.5) se simplifican a.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}\tag{4.6}$$

donde  $A, B, C$  y  $D$  son matrices reales *constantes e invariantes en el tiempo*.

El diagrama de bloques de la Fig. 4.2 es el que representa en forma gráfica lo dicho anteriormente.

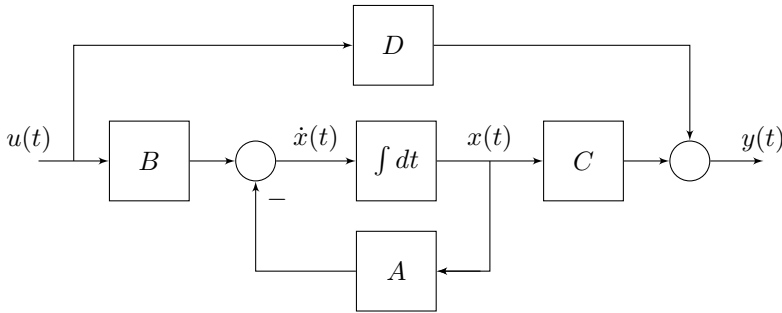


Figura 4.2: Representación en diagrama de bloques de la Ec. (4.5) en el dominio del tiempo.

### 4.2.1. Representación matricial de las ecuaciones de estado

Las Ecs. (4.5) y (4.6) se pueden representar matricialmente como se indica a continuación.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2r} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

### 4.2.2. Relación entre las ecuaciones de estado y la función de transferencia

Sea el sistema dinámico de la Ec. (4.6) donde  $x \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  es el vector de estado,  $u \in \mathbb{R}^{1 \times r}$  es la señal manipulada o señal de control,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es matriz de coeficientes constantes,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  es la matriz de coeficientes constantes,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de salida e  $y \in \mathbb{R}^{1 \times m}$  la señal de salida de la variable de control. Para encontrar una expresión de la función de transferencia del sistema a lazo abierto  $G_{ol}(s)$  en términos de las matrices aplicando transformada de Laplace a la ecuación de estado (4.6),

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}X(0).$$

Teniendo en cuenta la última ecuación, la ecuación de la salida resulta,

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + C(sI - A)^{-1}X(0) + DU(s),$$

si las condiciones iniciales son nulas  $X(0) = 0$ , entonces

$$G_{ol}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (4.9)$$

Una interpretación gráfica que muestra la relación entre la representación de estados y la función de transferencia de un sistema (Ec. (4.9)) se presentan en la Fig. 4.3.

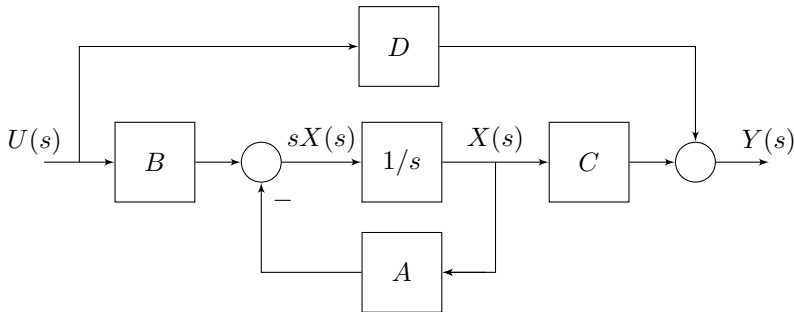


Figura 4.3: Interpretación gráfica mediante diagrama de bloques de la Ec. (4.9).

En el caso particular de un sistema SISO ( $r = 1$  y  $m = 1$ ) luego la función de transferencia de lazo abierto resulta,

$$G_{ol}(s) = \frac{\overbrace{C \operatorname{adj}(sI - A) B + D}^{N(s)} \det(sI - A)}{\underbrace{\det(sI - A)}_{D(s)}} \quad (4.10)$$

y por simple inspección deducimos que  $\det(sI - A)$  es la ecuación característica de lazo abierto.

**Ejemplo 4.1** Obtenga la función de transferencia a partir del modelo lineal del Ejem. 2.4. Luego, determine numericamente el valor de dicha función de transferencia, asumiendo que  $K_v = 0,5$ ,  $h^0 = 2$  y el área transversal del tanque  $Area = 1$ .

Teniendo en cuenta la Ec. (2.35),

$$\frac{d\hat{h}(t)}{dt} = -\frac{1}{Area R}\hat{h}(t) + \frac{1}{Area}\hat{q}_e$$

donde se escribe  $Area$  como sección transversal constante del tanque cilíndrico y  $R := 2\sqrt{h^0}/K_{vl}$ .

Ahora, considerando la Ec. (4.6) se puede concluir que, el sistema tiene un único estado  $x = h$  con una única salida  $y = h$  y consecuentemente,  $A = -1/(Area R) = -K_{vl}/Area 2\sqrt{h^0}$ ,  $B = 1/A$ ,  $C = 1$  y  $D = 0$ .

Por tanto, de acuerdo con la Ec. (4.10) se puede escribir que,

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{C \operatorname{adj}(sI - A) B}{\det(sI - A)} \\ &= 1 \left( \frac{1}{s 1 - \left(\frac{-1}{Area R}\right)} \right) \frac{1}{Area} \end{aligned}$$

Considerando la definición de la resistencia hidráulica  $R$  para este ejemplo, y reordenando la ecuación anterior se llega a,

$$G(s) = \frac{1/Area}{s + \frac{K_{vl}}{2 Area\sqrt{h^0}}} \quad (4.11)$$

Finalmente, basándose en los datos del ejemplo se tiene que,

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1/1}{s + \frac{0,5}{2 \cdot 1\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{s + \frac{\sqrt{2}}{8}} = \frac{1}{s + 0,17678} \end{aligned} \quad (4.12)$$

**Ejemplo 4.2** Obtenga la función de transferencia a partir del modelo lineal del Ejem. 2.4 en forma simbólica, aplicando los comandos de Octave. Luego, considerando los datos del Ejem. 4.1 determine numéricamente dicha función de transferencia mediante comandos de Octave.

A continuación se presenta el código de Octave que permite obtener la función de transferencia del sistema en forma simbólica y numérica.



**Algoritmo 4.1:** Código de Octave del Ejem. 4.2 para el cálculo simbólico y numérico de la función de transferencia del tanque del Ejem. 2.4.

```

1 clear all , clc
2
3 pkg load symbolic
4 pkg load control
5
6 % defino variables simbolicas
7 syms h qe Kvl s Area
8 % ecuacion del sistema
9 disp('')
10 disp('Modelo no lineal del tanque:')
11 disp('')
12 system = [-Kvl*sqrt(h)/Area + qe/Area]
13
14 % Representación de estados
15 states = [h]
16 inputs = [qe]
17 A = jacobian(system , states )
18 B = jacobian(system , inputs )
19
20 % Funcion de transferencia en forma simbolica
21 disp('')
22 disp('Funcion de transferencia basada en el modelo lineal
23     tanque:')
24 disp('')
25 Gs=1/(s-A)*B
26
27 % calculos:
28 disp('')
29 disp('Calculos:')
30 disp('')
31 A=subs(A,[Kvl,h,Area],[0.5, 2, 1]) %Kvl=0.5, h0=2, Area=1.
32 B=subs(B,[Area],[1])
33
34 % calculo en forma numerica A y B,
35 A=double(A) , B=double(B)
36
37 % función de transferencia
38 s=tf('s');
39 % calculo la función de transferencia en forma numerica
40 s=tf('s');
41 disp('')
42 disp('Funcion de transferencia en base a datos:')
43 disp('')
44 Gs=1/(s-A)*B

```

La salida de Octave en la ventana de comandos es la siguiente:

```

OctSymPy: Communication established. SymPy
v1.1.1.
Modelo no lineal del tanque:
system = (sym)
      Kvl.√h      qe
- - - - - + - - - -
   Area        Area

states = (sym) h
inputs = (sym) qe

A = (sym)

      -Kvl
      - - - - -
      2.Area.√h

B = (sym)

      1
      - - - - -
      Area

Funcion de transferencia basada en el modelo
lineal del tanque:

Gs = (sym)

      1
      - - - - -
      |      Kvl      |
Area.|s + - - - - -|
      |      2.Area.√h|

content...

Calculos:

A = (sym)

```

```

      -\sqrt{2}
      ---
      8

B = (sym) 1
A = -0.17678
B = 1

Funcion de transferencia en base a datos:

Transfer function 'Gs' from input 'u1' to output ...

      1
y1:  ----
     s + 0.1768

Continuous-time model.

Observe que los resultados que arroja Octave, tanto para la ecuación simbólica como para el cálculo numérico, son coincidentes con los obtenidos mediante el procedimiento teórico del Ejem. 4.1. ■

```

- R** ■ **Remarca 4.2** Dada una representación de estados  $(A, B, C)$  de un sistema, es posible calcular los polos de la función de transferencia  $G(s)$  correspondiente tomando,

$$\det(sI - A) = 0$$

**Demostración** Basta con la simple inspección de la ecuación de  $G_{ol}(s)$   
□

- R** ■ **Remarca 4.3** Los polos de la ecuación característica de una función de transferencia  $G(s)$  son iguales a los autovalores de la matriz  $A$  correspondiente a la representación de estados de  $G(s)$ .

**Demostración** Dado que los autovalores de una matriz son calculados a partir de la ecuación  $\det(\lambda I - A) = 0$  entonces los  $\lambda_i$  son las raíces de  $D(s)$  y consecuentemente los polos  $G(s)$ . □

Una propiedad interesante asociada a la matriz  $A$  es la que se detalla a continuación con el siguiente lema:

■ **Lema 4.1** La matriz  $A \succ 0$  sí y sólo si todos sus autovalores  $\lambda_i > 0$ .

**Demostración** Ver Rautenberg y D'Attellis [68]. □

Como consecuencia de este lema es posible demostrar que,

- $A \succeq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0$ .
- $A \prec 0 \Leftrightarrow \lambda_i < 0$ .
- $A \preceq 0 \Leftrightarrow \lambda_i \leq 0$ .

**Ejemplo 4.3** Considere la ecuación diferencial,  $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y = u(t)$  sujeta a las condiciones iniciales  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

- (a) Determine la función de transferencia  $Y(s)/U(s) = G(s)$ .
- (b) A partir de la ecuación diferencial obtenga la correspondiente ecuación diferencial bajo la representación de estados.
- (c) a partir de la representación de estados verifique obtenga la función de transferencia  $Y(s)/U(s) = G(s)$  y compárela con la obtenida en (a).

(a) Aplicando TL a la ecuación diferencial del problema y teniendo en cuenta sus condiciones iniciales se tiene,

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = U(s).$$

Reordenando,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

(b) Definiendo las siguientes variables de estados:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 3x_2 + u \end{aligned}$$

que bajo la representación matricial-vectorial resulta,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(c) Aplicando la Ec. (4.9) se tiene,

$$\begin{aligned}
 G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\
 &= [1 \ 0] \left( s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= [1 \ 0] \left( \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las reglas<sup>a</sup> para calcular una matriz inversa,

$$\begin{aligned}
 G(s) &= [1 \ 0] \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= [1 \ 0] \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} \\
 &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+3s+2} \\ \frac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+3s+2}
 \end{aligned}$$

Obteniéndose la misma respuesta que el inciso a). ■

<sup>a</sup>Siendo  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  con  $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  luego,  $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$ .

## Comandos de Octave relacionados al tema

Comando	
<code>[A, B, C, D]=tf2ss(num, den)</code>	donde num y den son el numerador y denominador que definen la función de transferencia de un sistema y A, B, C, y D son las matrices y vectores de la representación de estados.
<code>[num, den]=ss2tf[A, B, C, D]</code>	donde los parámetros de entrada y salida se definen del mismo modo que en el comando <code>tf2ss</code> .
<code>roots(D)</code>	calcula las raíces de una polinomial D.
<code>eig(A)</code>	calcula los autovalores de una matriz A.

**Ejemplo 4.4** Básandose en la ecuación diferencial del Ej. 4.3 aplique los comandos de Octave para encontrar las correspondientes matrices y vectores que componen su representación de estados.

Siendo  $G(s) = 1/(s^2 + 3s + 2)$  luego el siguiente programa de Octave se propone

### Algoritmo 4.2: Código Octave

```
1 | n = 1; d=[1 3 2];
```

```
2 | [A,B,C,D]=tf2ss(n,d)
```

La respuesta de Octave es

A =

```
0 1
-2 -3
```

B =

```
0
1
```

C =

```
1 0
```

D = 0

**Ejemplo 4.5** Básandose en el problema del Ej. 4.3 y utilizando los comandos de Octave determine,

- los polos de la función de transferencia  $G(s)$ .
- Calcule los autovalores de la matriz  $A$  computada en el mencionado ejemplo.

(a) Siendo  $D(s) = s^2 + 3s + 2$  luego, el código de Octave resulta

```
1 | d=[1 3 2];
2 | roots(d)
```

La respuesta de Octave es

ans =

```
-2
-1
```

(b) Por otro lado, siendo  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$  luego, el código de Octave resulta

```
1 | A=[0 1; -2 -3];
```

```

> eig(A)
y la respuesta de Octave es
ans =
    -1
    -2

```

### 4.3. Representaciones en el Espacio de Estados. Formas Canónicas

Por simplicidad consideremos un sistema SISO de orden  $n$  donde la terna  $(A, B, C)$  tiene las dimensiones apropiadas. La consecuente representación de estados resulta,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (4.13)$$

A continuación se presenta las representaciones en espacio de estados del sistema mediante la forma canónica controlable, en forma canónica observable y canónica diagonal (o de Jordan).

#### 4.3.1. Forma canónica controlable

Para cuando los coeficientes de las matrices  $A$  y  $B$  están dados bajo la forma de la Ec. (4.13) se conoce como forma canónica controlable.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y(t) &= [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \dots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.14)$$

Cuando se aplica la fórmula (4.9) con la terna definida según la Ec. (4.14) se obtiene,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}. \quad (4.15)$$

Consideremos ahora el caso en que la terna  $(A, B, C)$  de la Ec. (4.13) no está escrita bajo la forma canónica controlable, luego el siguiente teorema se enuncia.

**Teorema 4.3.1** Supóngase la ecuación de estado (4.13) del sistema LTI, donde  $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , y  $u(t)$  escalar. Si la matriz,

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B] \quad (4.16)$$

es no singular, entonces existe una transformación no singular  $T$  que transforma la Ec. (4.13) a la forma canónica controlable. Siendo  $\tilde{A} = TAT^{-1}$ ,  $\tilde{B} = QB$  escritas bajo la forma (4.14) y

$$T = \begin{bmatrix} Q \\ QA \\ \vdots \\ QA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

con

$$Q = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \mathcal{C}^{-1} \quad (4.18)$$

### 4.3.2. Forma canónica observable

La siguiente representación en el espacio de estados se denomina forma canónica observable:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Observe que la matriz de estado de  $n \times n$  de la ecuación de estado obtenida, es la transpuesta de la matriz de estado de la forma canónica controlable.



### 4.3.3. Forma canónica de Jordan

A continuación consideraremos el caso en el que los autovalores de la matriz  $A$  (raíces del polinomio del denominador) son múltiples, para el cual la forma canónica diagonal anterior debe modificarse a la forma canónica de Jordan. En este caso la forma factorizada nos queda

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{(s + p_1)^3 (s + p_2) + \dots + (s + p_n)}$$

La expansión en fracciones parciales nos queda

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_3}{(s + p_1)^3} + \frac{c_2}{(s + p_1)^2} + \frac{c_1}{(s + p_1)} + \dots + \frac{c_n}{(s + p_n)}$$

La forma matricial vectorial resulta,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 & | & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & | & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & -p_1 & | & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & | & -p_4 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & | & 0 & \dots & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_4 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

### 4.3.4. Diagonalización de la matriz de $n \times n$

Observe que, si una matriz  $A$  de  $n \times n$  con valores característicos distintos está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Usamos la transformación  $x = Pz$  donde la matriz  $P$  se define como

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

la condición de la matriz  $P$  es que sea no singular y tiene que ser invertible.

La derivada de la transformación  $x = Pz$  es,  $\dot{x} = P\dot{z}$  que reemplazando esta última expresión en la ecuación de estado y de salida resulta

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= P^{-1}APz(t) + P^{-1}Bu(t) \\ y(t) &= CPz(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Aplicando Transformada de Laplace a ambas ecuaciones y despejando formamos la función de transferencia, la cual queda

$$G(s) = \frac{Q(s)}{|sI - P^{-1}AP|}$$

donde  $Q(s)$  es un polinomio en  $s$ .

Donde los  $n$  valores característicos de la matriz  $A$  ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) transformarán la matriz  $P^{-1}AP$  en la matriz diagonal:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Una importante propiedad de la transformación lineal es que los elementos de la diagonal principal de la matriz  $P^{-1}AP$  son idénticos a los valores característicos de la matriz  $A$ . Con esto queremos decir que se mantiene la invariancia de los valores característicos bajo una transformación lineal.

Para el caso en que la matriz de estado  $A$  posea múltiples valores característicos la transformación anterior ya no es válida. En este caso se reemplaza la matriz  $P$  por una matriz  $S$  que para el caso particular de dos raíces reales múltiples y una distinta resulta,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

y por tanto

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Al igual que antes, los elementos de la diagonal principal de la matriz  $P^{-1}AP$  son idénticos a los valores característicos de la matriz  $A$ .

## 4.4. Solución de la Ecuación de Estados LTI

### 4.4.1. Caso homogéneo

Considere el sistema representado por las ecuaciones dinámicas (4.6) luego, aplicando Transformada de Laplace a dicha ecuación de estado y desarrollando se tiene,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (4.20)$$

sujeta a la condición inicial  $x(0)$  y donde dicha solución es,

$$x(t) = e^{At}x(0) \quad (4.21)$$

para  $t \geq 0$ .

Resulta sencillo demostrar que la Ec. (4.21) es la solución de la ecuación diferencial (4.20)<sup>2</sup>.

Por otro lado, aplicando Transformada de Laplace a la Ec. (4.20) se tiene que,

$$sX(s) - x(0) = AX(s)$$

y reordenando se tiene que,

$$X(s) = [(sI - A)^{-1}]x(0).$$

Luego,  $x(t)$  resulta ser la transformada inversa de la ecuación anterior

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}]x(0). \quad (4.22)$$

para  $t \geq 0$ .

Note que,

$$\mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots = e^{At} \quad (4.23)$$

y por tanto, reemplazando (4.23) en (4.22) se demuestra la Ec. (4.21).

---

<sup>2</sup> Note que derivando la Ec. (4.21),

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d[e^{At}x(0)]}{dt} = Ae^{At}x(0)$$

y de la misma Ec. (4.21) al reemplazarla en la ecuación anterior surge la Ec. (4.20).

**Ejemplo 4.6** Basándose en el Ej. 4.3 y en la Ec. (4.22), encuentre las expresiones temporales de los estados para cuando sus condiciones iniciales son  $x_0 = [2 \ 1]^T$ .

De acuerdo con el Ej. 4.3,

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}.$$

y siendo las condiciones iniciales  $x_0 = [2 \ 1]^T$ ,

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} 2s+7 \\ s-4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{2s+7}{s(s+3)+2} \\ \frac{s-4}{s(s+3)+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5e^{-t} - 3e^{-2t} \\ 6e^{-2t} - 5e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

**Ejemplo 4.7** Utilizando los comandos de Octave y teniendo en cuenta el resultado del Ej. 4.3 muestre las respuestas dinámicas para las condiciones iniciales asumidas.

Teniendo en cuenta las expresiones dinámicas del Ej. 4.6, se propone el siguiente programa en código de Octave.

**Algoritmo 4.3:** Código de Octave del Ejem. 4.7.

```

1  % Planta
2  A=[0 1; -2 -3];
3  B=[0; 1];
4  C=[1 0];
5  % Condiciones Iniciales
6  x0=[2; 1];
7
8  % Estado 1:
9  C1=[1 0];
10 [n1, d1]=ss2tf(A, x0, C1, 0);
11 g1=tf(n1, d1);
12 [x1, t1]=impulse(g1);
13
14 % Estado 2:
15 C2=[0 1];
16 [n2, d2]=ss2tf(A, x0, C2, 0);

```

```

17 g2=tf(n2,d2);
18 [x2,t2]=impulse(g2);
19
20 % Graficos
21 figure(1), subplot(2,1,1), plot(t1,x1),
22         xlabel("tiempo"), ylabel("x_1")
23         subplot(2,1,2), plot(t2,x2),
24         xlabel("tiempo"), ylabel("x_2")
25 figure(2), plot(x1,x2), grid,
26         xlabel("x1"), ylabel("x2")

```

Las figuras obtenidas son las que se muestran a continuación.

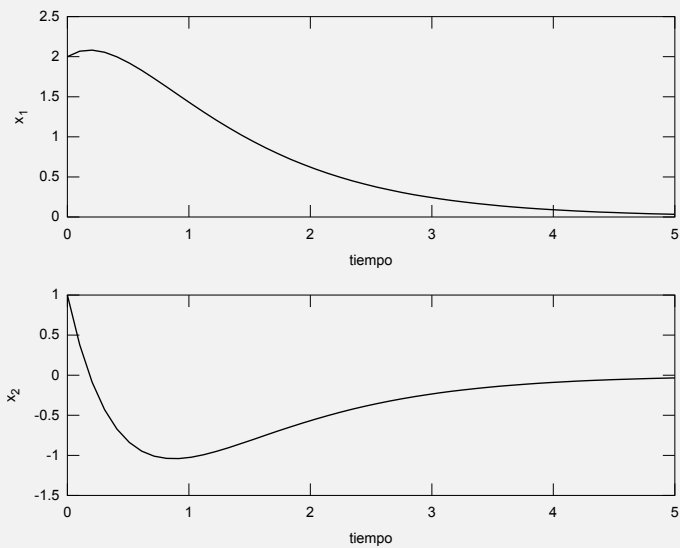
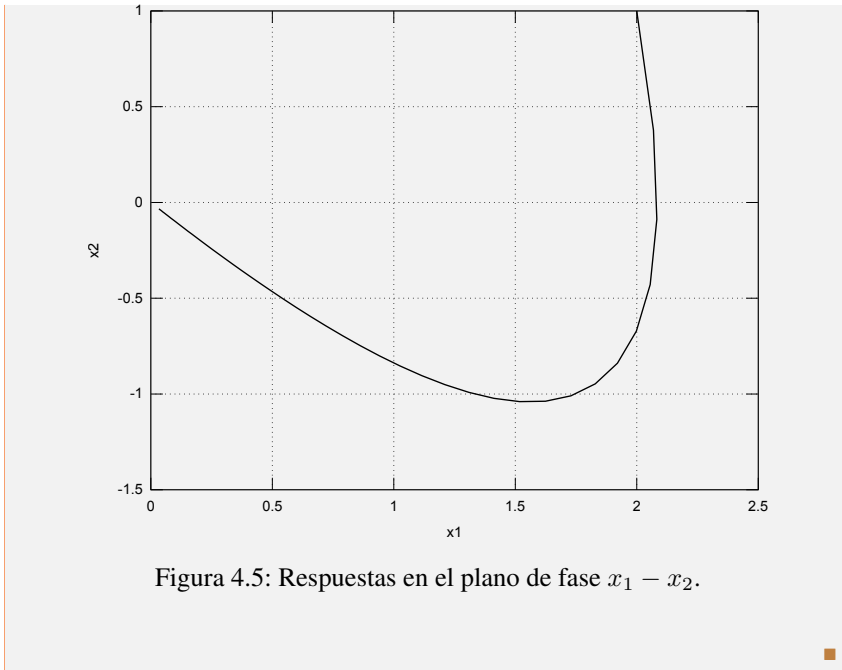


Figura 4.4: Respuestas temporales de los estados  $x_1$  y  $x_2$ .



### La ecuación de transición

Basándose en la expresiones anteriores se introduce la siguiente definición.

**Definición 4.4.1 — Matriz de Transición de Estados  $\Phi(t)$ .** Es la matriz que define la transición de los estados desde un instante  $t_0$  hasta un instante  $t$  y que en términos matemáticos se expresa como,

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = \mathcal{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] \quad (4.24)$$

### 4.4.2. Caso no homogéneo

Ahora consideramos la ecuación de estado no homogéneo descrita como,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

donde  $x$ ,  $A$  y  $B$  tienen las dimensiones apropiadas. Aplicando Transformada de Laplace,

$$sX(s) - x(0) = AsX(s) + BU(s) \quad (4.25)$$

operando algebraicamente se tiene

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x(0). \quad (4.26)$$

Su solución es (para  $t_0 = 0$ ),

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau.$$

donde  $\Phi(t)$  es la matriz de transición de estados.

En esta solución,  $x(t)$  es claramente la suma de un término formado por la transmisión de estados inicial y un término que surge del vector de entradas.

## 4.5. Propiedades y Definiciones

**Definición 4.5.1 — Valores Propios.** Se denomina valores propios de una matriz  $A$  de  $n \times n$  a las raíces de la ecuación característica  $|\lambda I - A| = 0$

Note que por una cuestión de nomenclatura usualmente se habla de *valores característicos* a las raíces de la ecuación característica  $|sI - A| = 0$ .

La ecuación característica de  $A$  no necesariamente es la ecuación escalar de grado mínimo que  $A$  satisface. Por tal razón se introduce la siguiente definición.

**Definición 4.5.2 — Polinomio Mínimo.** El polinomio de grado mínimo que tiene a los autovalores de  $A$  como raíz se denomina **polinomio mínimo** y se define como  $\phi(\lambda)$

$$\phi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (4.27)$$

El teorema de Cayley - Hamilton es muy útil para resolver problemas que involucran ecuaciones matriciales.

**Teorema 4.5.1 — Teorema de Cayley - Hamilton.** Considere una matriz  $A$  de  $n \times n$  y su ecuación característica  $|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ . Luego,  $A$  satisface su propia ecuación característica,

$$A + a_1A^{n-1} + \dots + a_nI = 0 \quad (4.28)$$

## 4.6. Diagramas en el Plano de Fase

Los planos de fase fueron usados al principio por los ingenieros para estudiar estabilidad de sistemas no lineales. Tienen sentido usarlos cuando se estudia sistemas de segundo orden ya que consiste en una representación gráfica de  $x_2$  vs.  $x_1$ . También, es posible una extensión a sistemas de tercer orden donde se puede graficar las trayectorias en el plano. De todos modos el concepto de plano de fase resulta de suma utilidad a la hora de estudiar y entender la estabilidad de los sistemas no lineales en general. Así, se introducen las siguientes definiciones con el simple objetivo de clarificar la nomenclatura.

**Definición 4.6.1 — Trayectoria de Fase.** Se define trayectoria de fase a la representación gráfica de  $\dot{x}(t)$  vs.  $x(t)$ .

**Definición 4.6.2 — Plano de Fase.** Se define plano de fase al sistema de coordenadas cuyos ejes son las variables de estado.

**Definición 4.6.3 — Diagrama de Fase.** Se define diagrama de fase a la representación gráfica paramétrica de las distintas trayectorias de fase.

**Ejemplo 4.8** Considere el sistema mecánico lineal de segundo orden,  $\ddot{x}(t) + 2k\dot{x}(t) + n^2x(t) = 0$ .

Adoptando,  $x_1 = x$  y  $x_2 = \dot{x}$  se obtiene la siguiente representación de estado lineal:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -n^2 & -2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

**Caso 1.** Adoptando  $n = 2$  y  $k = 0$ , la matriz  $A$  resulta,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

cuyos autovalores son,  $\lambda_{1-2} = \pm j2$ . El cociente,

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{-4x_1}{x_2}$$

lo que conduce a,  $4x_1^2 + x_2^2 = c$  con  $c$  una constante, lo que resulta en una ecuación de una elipse con centro en el origen.

La Fig. 4.6a) muestra las respuestas temporales de los estados para cuando la condición inicial es  $x_{10} = x_{20} = 3$  y la Fig. 4.6b) muestra el diagrama de fase correspondiente a las distintas trayectorias de fase originadas para distintas condiciones iniciales en el plano de fase  $x_2$  vs.  $x_1$ .



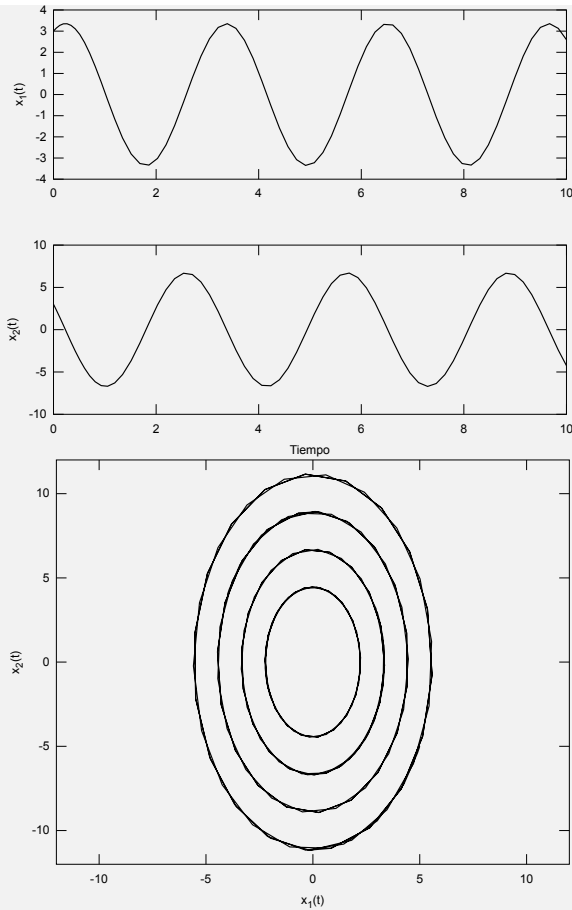


Figura 4.6: a) Respuestas temporales de los estados para  $n = 2$  y  $k = 0$ , con condición inicial  $x_0 = [3, 3]^T$ . b) Diagrama en el plano de fase para  $n = 2$  y  $k = 0$  cuando las condiciones iniciales son,  $[3, 3]^T$ ,  $[-4, 4]^T$ ,  $[-2, -2]^T$  y  $[5, -5]^T$ .

**Caso 2.** Adoptando  $n = 2$  y  $k = 1$ , la matriz  $A$  resulta,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

cuyos autovalores son,  $\lambda_{1-2} = -1 \pm j\sqrt{3}$

La Fig. 4.7a) muestra las respuestas temporales de los estados para cuando la condición inicial es  $x_{10} = x_{20} = 3$  y la Fig. 4.7b) muestra el diagrama

de fase correspondiente a las distintas trayectorias de fase originadas para distintas condiciones iniciales en el plano de fase  $x_2$  vs.  $x_1$ .

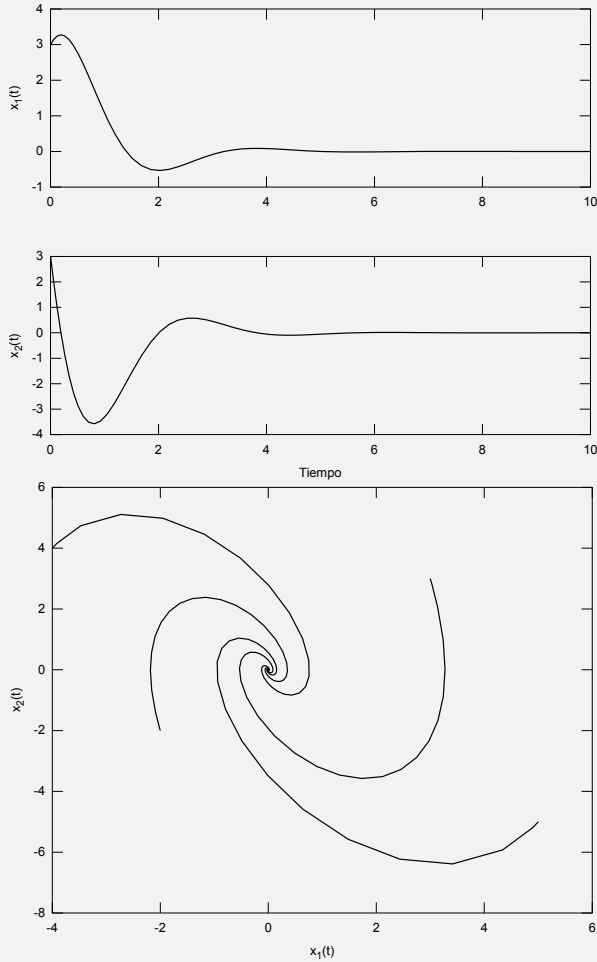


Figura 4.7: (a) Respuestas temporales de los estados para  $n = 2$  y  $k = 1$ , con  $x_0 = [3, 3]^T$ . (b) Diagrama en el plano de fase para  $n = 2$  y  $k = 1$  cuando las condiciones iniciales son,  $[3, 3]^T$ ,  $[-4, 4]^T$ ,  $[-2, -2]^T$  y  $[5, -5]^T$ .

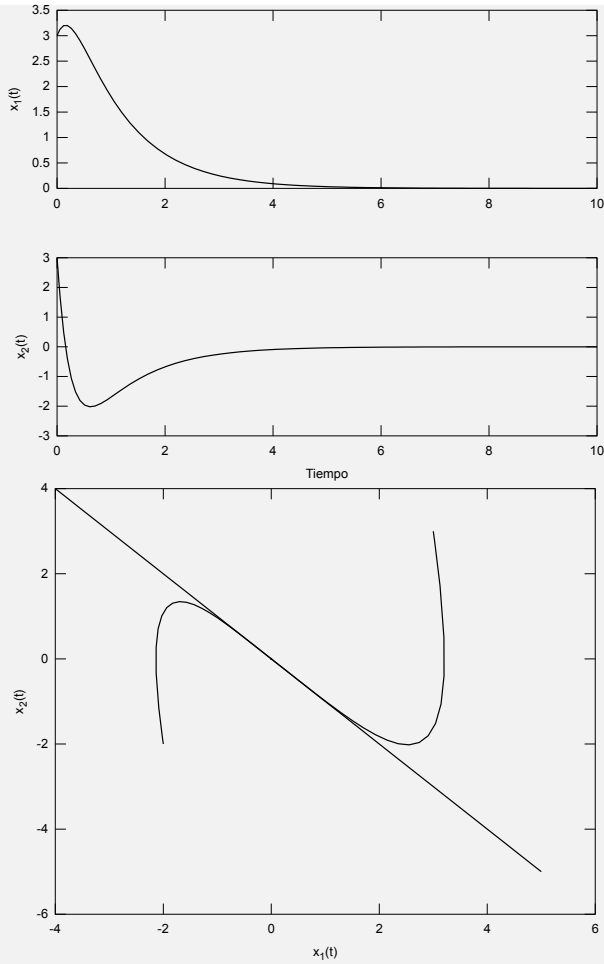


Figura 4.8: a) Respuestas temporales de los estados para  $n = 2$  y  $k = 2,5$ , con  $x_0 = [3, 3]^T$ . b) Diagrama en el plano de fase para  $n = 2$  y  $k = 1$  cuando las condiciones iniciales son,  $[3, 3]^T$ ,  $[-4, 4]^T$ ,  $[-2, -2]^T$  y  $[5, -5]^T$ .

**Caso 3.** Adoptando  $n = 2$  y  $k = 2,5$ , la matriz  $A$  resulta,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

cuyos autovalores son,  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = -4$ .

La Fig. 4.8a) muestra las respuestas temporales de los estados para cuando la condición inicial es  $x_{10} = x_{20} = 3$  y la Fig. 4.8b) muestra el diagrama

de fase correspondiente a las distintas trayectorias de fase originadas para distintas condiciones iniciales en el plano de fase  $x_2$  vs.  $x_1$ . ■

## 4.7. Controlabilidad de Estados

**Definición 4.7.1 — Controlabilidad de Estado.** Se dice que el sistema (4.6) es de estado controlable en  $t = t_0$ , si es posible construir una señal de control sin restricciones que transfiera un estado inicial  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  a cualquier estado final  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  en un intervalo de tiempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

**Definición 4.7.2 — Controlabilidad de Estado Completo.** Si todos los estados son controlables, entonces el sistema es completamente controlable.

**Teorema 4.7.1 — Test de Controlabilidad de Estado Completo.** El sistema LTI bajo la representación de la Ec.(4.6) es de estado completamente controlable si y sólo si la matriz de  $n \times n$

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (4.29)$$

es de rango  $n^3$ .

**Demostración** La demostración de este teorema se encuentra en los libros de sistemas control lineal clásicos de la literatura del tema. □

**R ■ Remarca 4.4 — Condición para la Contr. Completa de Estado en el Plano  $s$ .** La condición necesaria y suficiente para una controlabilidad completa del estado es que no ocurra una cancelación polocero en la función de transferencia o en la matriz de transferencia. Si ocurre una cancelación, el sistema no puede controlarse en la dirección del modo cancelado.

En el diseño practico de un sistema de control, tal vez pretendamos controlar la salida en lugar del estado del sistema. Una controlabilidad completa del estado no es necesaria ni suficiente para controlar la salida del sistema. Por esa razón, es conveniente definir una controlabilidad de la salida por separado.

**Definición 4.7.3 — Controlabilidad de Estado de Salida.** Se dice que el sistema LTI (4.6) es de estado de salida completamente controlable si es posible construir un vector de control  $u(t)$  sin restricciones que transfiera cualquier salida inicial determinada  $y(t_0)$  a cualquier salida final  $y(t_1)$  en un intervalo de tiempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

La condición para una controlabilidad de la salida es la siguiente:

<sup>3</sup>Note que este resultado se extiende al caso en el que el vector de control  $u$  es de dimensión  $r$ .

**Teorema 4.7.2 — Test de Controlabilidad de Salida.** El sistema LTI (4.6) es de salida completamente controlable si y sólo si la matriz de  $m \times (n + 1)r$

$$\mathcal{C}_s = [CB \quad CAB \quad CA^2B \quad \dots \quad CA^{n-1}B] \quad (4.30)$$

es de rango  $m$ .

**Demostración** La demostración de este teorema es una ligera variante de la demostración del teorema 4.7.1.  $\square$

En realidad, existen tres definiciones aceptadas para controlabilidad, asociadas con la posibilidad de

1. transferir cualquier estado a cualquier estado.
2. Transferir cualquier estado al origen, llamada usualmente *controlabilidad al origen*, y
3. transferir el estado desde el origen a cualquier estado, llamada *controlabilidad desde el origen*, o *alcanzabilidad*.

Las tres definiciones anteriores son equivalentes y consecuenemente los conceptos de controlabilidad y alcanzabilidad son equivalentes

- para sistemas LTI en tiempo continuo.
- Cuando la matriz  $A$  es invertible.
- Para sistemas LTI en tiempo discreto, si la matriz  $A$  es no singular, sin embargo, si  $A$  es singular, el sistema puede ser no controlable según 1 detallado arriba pero controlable según 2.

Para completar estos conceptos se introduce las siguiente definición.

**Definición 4.7.4 — Alcanzabilidad de Estados.** Se dice que el sistema (4.6) es de estado alcanzable en  $t = t_0$ , si es posible construir una señal de control sin restricciones tal que un estado arbitrario puede ser alcanzado a partir de cualquier estado inicial  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  en un tiempo finito.

## 4.8. Observabilidad de Estados

**Definición 4.8.1 — Observabilidad de Estado.** Se dice que el sistema (4.6) es completamente observable, si el estado  $x(t_0)$  se determina a partir de la observación de  $y(t)$  durante un intervalo de tiempo finito,  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Por tanto, el sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector de salida.

El concepto de observabilidad es muy importante porque, en la práctica, la dificultad que se encuentra con el control mediante la realimentación del estado es que algunas de las variables de estado no son accesibles para una medición directa, por lo que se hace necesario estimar las variables de estado no medibles para construir las señales de control. Tales estimaciones son posibles si y sólo si el sistema es completamente observable.

**Teorema 4.8.1 — Test Observabilidad de Estado Completo.** El sistema descrito mediante la Ec. (4.6) es completamente observable si y sólo si la matriz de  $n \times n$

$$\mathcal{O} = [C^* \quad A^*C^* \quad A^*(C^*)^2 \quad \dots \quad (A^*)^{n-1}C^*] \quad (4.31)$$

es de rango  $n$ .

**R** ■ **Remarca 4.5** Para caso particular cuando el sistema (4.6) tiene una sola salida ( $y \in \mathbb{R}^1$  y  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ) entonces la matriz  $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y el sistema (4.6) es completamente observable si y sólo  $\mathcal{O}$  es no singular.

**R** ■ **Remarca 4.6 — Condiciones para la Observ. Completa en el Plano  $s$ .** La condición necesaria y suficiente para una observabilidad completa es que no ocurra una cancelación polo-cero en la función de transferencia o en la matriz de transferencia. Si ocurre una cancelación, el modo cancelado no se puede observar a partir de la salida.

## 4.9. Conclusiones

En este capítulo se introdujeron conceptos básicos de la representación de estados, mostrando a través de la Ec. (4.9) una conexión entre esta representación y la representación con funciones de transferencia salida/entrada.

Asimismo, como se mostró en la Secciones 4.4 y 4.6 la representación de estados permite un entendimiento más profundo del sistema ya que es posible seguir el comportamiento dinámico de todos los estados que definen el sistema.

## 4.10. Problemas

**Problema 4.1** El siguiente sistema de ecuaciones representa una planta,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -5x_1(t) + x_2(t) \\ 2\dot{x}_2(t) &= x_2(t) + u(t) \\ 3\dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) - 4x_3(t) \\ y(t) &= x_1(t) - x_3(t) \end{aligned}$$

con condiciones iniciales nulas.

- (a) Identifique las variables dependientes e independientes del sistema y obtenga el diagrama de bloques del mismo.

- (b) Determine analíticamente la función de transferencia del sistema.
- (c) Encuentre la función de transferencia salida/entrada del sistema mediante álgebra de bloque. Compare su resultado con los del inciso (b).
- (d) Calcule los polos del sistema.

**Problema 4.2** Basandose en el sistema del Prob. 4.1, determine

- (a) Las matrices de estado  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ .
- (b) Luego en base a ellas, determine la función de transferencia del sistema y compare con el Prob. 4.1.
- (c) Calcule los autovalores y compare su resultado con los del Prob. 4.1.

**Problema 4.3** Considere el sistema Prob. 4.1 y determine mediante comandos de Octave,

- (a) Las matrices de estado  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  y compare con los resultados obtenidos en el Prob. 4.2.
- (b) Luego en base a ellas, determine la función de transferencia del sistema y compare con el Prob. 4.2.
- (c) Calcule los autovalores y compare su resultado con los del Prob. 4.2.

**Problema 4.4** Considere el sistema de mezcla a volumen variable desarrollado en el Cap. 2 Secc. 2.6.2. Luego, basándose en el modelo lineal determine,

- (a) Las matrices de estado  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ .
- (b) Luego en base a ellas, determine la función de transferencia del sistema.
- (c) Compare su resultado con el obtenido en dicha sección.

**Problema 4.5** Resuelva el Prob. 4.4 utilizando comandos de Octave y compare los resultados obtenidos.





## Capítulo 5

# Identificación de Sistemas

Como es sabido la gran mayoría de los sistemas y/o procesos industriales son claramente no lineales. Por tal motivo para poder hacer uso de la teoría de control lineal se hace necesario disponer de al menos un modelo lineal para la planta en cuestión que tenga un cierto rango de validez dentro del espacio de operación de dicha planta.

En este capítulo se presentan técnicas de identificación y estimación de parámetros de funciones de transferencia sencillas muy utilizadas en la industria por su simplicidad. Con estas técnicas es posible aproximar a procesos industriales complejos con funciones de transferencia simples, con una aceptable aproximación dentro de un rango o espacio de operación. Dependiendo de las características no lineales del sistema o proceso en cuestión, el espacio de operación en donde se válida la aproximación lineal puede aumentar o disminuir. Así, cuanto mayor es la no linealidad del procesos, menor es el rango de aplicabilidad de las aproximaciones lineales.

### 5.1. Introducción

Usualmente se apela a *modelos empíricos*, cuando los modelos teóricos son sumamente complejos, debido a que las leyes fundamentales que gobiernan la dinámica del proceso tienen una descripción físico-matemática rigurosa que los hace computacionalmente complejos y poco prácticos.

El proceso de identificación involucra la construcción de un modelo en base a datos experimentales. Así, dado un proceso real, la idea es obtener un modelo matemático empírico basándose en el estudio del sistema como una *caja negra*, donde simplemente se analiza la señal de salida en función de la entrada. Con esto, se busca que el modelo empírico reproduzca las características dinámicas más importantes *identificadas* a partir de la dinámica del sistema frente a una función fuerza *conocida*. Existen distintas técnicas que permiten identificar una

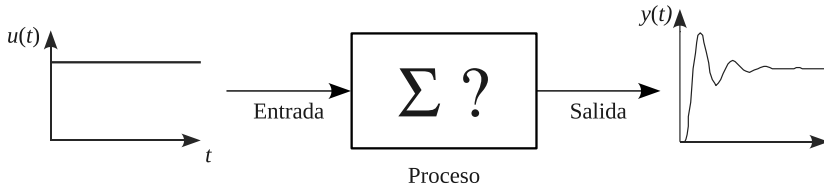


Figura 5.1: Ensayo de identificación frente a una función de entrada conocida.

función de transferencia *aplicable* a un sistema experimental. Estas técnicas se diferencian en la forma en que se manipulan los datos obtenidos a partir de ensayos experimentales. Así por ejemplo, si la respuesta en el tiempo de un sistema real frente a un cambio escalón es sobreamortiguada se podría aplicar diferentes técnicas que permiten obtener los parámetros de una función de transferencia, por ejemplo, de primer orden con retardo que aproxime a dicho sistema. La bondad de esta aproximación depende de cuanto se asemeja la aproximación lineal propuesta al sistema real bajo estudio. También, tiene mucha importancia en el proceso de identificación el tipo de perturbación de entrada escogida para realizar nuestro análisis. O sea, debemos registrar los datos de salida frente a entradas preestablecidas, rigurosamente modeladas y medidas como ser, escalón o delta, entre otras posibles, para luego analizar convenientemente los datos de salida. En principio, la operación de identificación puede ser llevada a cabo *fuera de línea*, lo que implica que se debe suspender momentáneamente la operación del proceso para llevar a cabo un experimento de identificación. A fin de evitar esto, puede practicarse una identificación *en línea* la cual es frecuente en control de procesos y cuando ésta se lleva a cabo, en muchos casos forma parte de un esquema de control más complejo como ser el control adaptivo. En este capítulo nos referiremos en principio a técnicas de identificación fuera de línea.

## 5.2. Metodología Básica

Considere un proceso desconocido <sup>1</sup> sujeto a una función fuerza conocida  $u(t)$  y su respuesta  $y(t)$  medible, como lo indica la Fig. 5.1. La idea básica es desarrollar un modelo matemático empírico que describa adecuadamente la dinámica de un dado proceso mediante una función de transferencia lineal, *válida* en un entorno del estado estacionario de operación de dicho sistema.

Es posible desarrollar un modelo de un sistema directamente correlacionado los datos de entrada-salida (E/S). Así, decimos que,

*La identificación de un proceso involucra construir un modelo matemático*

<sup>1</sup>Se entiende por sistema o proceso desconocido a aquel sistema que no se conoce la función de transferencia que lo aproxima, lo que no implica desconocer el comportamiento físico y dinámico del proceso bajo estudio.

*empírico de dicho proceso, estrictamente a partir de los datos E/S, sin recurrir a leyes que describan a la naturaleza y las propiedades fundamentales del sistema.*

El procedimiento de identificación de un sistema experimental incluye las siguientes etapas:

**Procedimiento 5.2.1 — Identificación de sistemas.**

**Paso 1.** Planeamiento de las experiencias.

**Paso 2.** Selección de la estructura del modelo.

**Paso 3.** Estimación de parámetros.

**Paso 4.** Validación.

### 5.2.1. Planeamiento de las experiencias

Una serie de aspectos básicos deben ser tenidos en cuenta al momento de planificar experiencias de identificación, estos se pueden resumir en las siguientes tres cuestiones:

1. ¿Cuánta información es necesaria?
2. ¿Que tipo de entrada será escogida?
3. ¿Cómo se llevará a cabo la experiencia?

En cuanto a la primer pregunta, es importante recoger tantos datos como sea necesario para identificar el proceso, en un rango de operación adecuado. Por ejemplo, si se desea determinar una ganancia de estado estacionario de un proceso frente a una entrada escalón, se debe al menos recoger datos hasta que el proceso alcance un nuevo estado estacionario, de lo contrario la información es insuficiente y la estimación puede resultar inexacta.

En cuanto a la segunda pregunta, el problema central aquí es la selección de la o las funciones de entrada a ser usadas en el proceso de identificación. Así, la elección del tipo de entrada debe ser hecha basándose en i) la practicidad de poder implementar una dada entrada y ii) que la salida deba proveer toda la información necesaria para poder identificar el proceso. Las funciones más comúnmente usadas en un proceso de identificación suelen ser, entradas escalón, impulso, pulso rectangular, senoides, ruidos blancos y secuencias binarias pseudo-random.

Por último, para responder la tercer pregunta, podemos decir que la gran mayoría de los ensayos experimentales son hechos en lazo abierto, sin embargo, es posible basar la identificación del sistema en datos obtenidos bajo condiciones de lazo cerrado. Esto esta asociado a la necesidad de hacer identificación en línea o fuera de ella y si el sistema a identificar es estable o no a lazo abierto.

### 5.2.2. Selección de la estructura del modelo

En esta etapa, el principal problema es postular o elegir un modelo con una dada estructura, usualmente sencilla (entre un conjunto de posibles candidatos)

Tabla 5.1: Modelos candidatos típicos. Usualmente el retardo puede o no formar parte en la estructura del modelo.

Modelo	Func. de Transf.
Primer orden con retardo	$Gp(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{(Ts+1)}$
Segundo orden con retardo	$Gp(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$
Segundo orden con retardo y cero	$Gp(s) = \frac{K(\tau_1s+1)e^{-\theta s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$
Segundo orden subamortiguado con retardo	$Gp(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$

tal que, reproduzca aceptablemente bien las características dinámicas de la respuesta del proceso, frente a una dada entrada. Así, la selección de la estructura del modelo (caracterización) está basada en el conocimiento a priori del proceso, sus características dinámicas y las perturbaciones a las que usualmente está sometido.

**Definición 5.2.1 — Caracterización.** Se entiende por caracterizar un sistema, a la determinación de la estructura de la función de transferencia de dicho sistema basándose en la respuesta dinámica del mismo frente a una dada entrada.

La tarea de caracterización puede ser hecha basándose en, i) la respuesta temporal del sistema o bien ii) el modelo matemático teórico del mismo.

En el primer caso, la tarea consiste en registrar la salida del sistema en el tiempo frente a una entrada conocida y visualizar las características generales de dicha respuesta. Esto es, ver si la salida se corresponde con la de un sistema de primer orden, segundo orden (sobreamortiguado o subamortiguado), etc. En el segundo caso, la caracterización se realiza basándose en el modelo matemático teórico lineal más o menos riguroso obtenido en base al planteo de las ecuaciones de balance y leyes fundamentales que describen el comportamiento físico del sistema y dan una idea a priori del comportamiento dinámico del sistema.

En este capítulo nos referiremos al primer caso. Así, podemos decir que la dinámica del proceso frente a determinadas entradas es la que provee las bases racionales para postular los posibles modelos candidatos. Usualmente, estos modelos suelen ser funciones de transferencia sencillas con pocos parámetros a estimar. En la Tabla 5.1 se resumen algunos de los modelos candidatos típicos más usados en la identificación de procesos.

### 5.2.3. Estimación de parámetros

Aquí la tarea es encontrar los parámetros de una función de transferencia propuesta que mejor simula la dinámica de la salida basándose en la mejor aproximación posible a la curva de salida. Así, podemos definir esta tarea como sigue:

**Definición 5.2.2 — Estimación.** Se entiende por estimación a la tarea de calcular los parámetros de una función de transferencia basada en un modelo postulado como candidato, que aproximan lo mejor posible al sistema real (en un rango de operación preestablecido) usando datos de E/S obtenidos mediante ensayos experimentales.

### 5.2.4. Validación

Una vez obtenido un modelo matemático a partir de datos experimentales, es necesario chequear dicho modelo para revelar su inexactitud. En tal sentido, un ensayo experimental distinto al realizado en la etapa de identificación puede ser llevado a cabo a fin de exponer la inexactitud del modelo identificado. Una posibilidad podría ser la de mover al sistema dentro de un espacio de operación con distintas entradas a fin de revelar sus no linealidades.

En síntesis, la esta metodología se puede resumir en el siguiente mediante cuatro etapas que se detallan a continuación.

**Procedimiento 5.2.2 — Metodología Sencilla de Validación.**

- Paso 1.** Registrar datos de E/S del proceso frente a una dada entrada, ya sea, en o fuera de línea.
- Paso 2.** Adoptar una estructura o clase de modelo (caracterización), por ejemplo, de acuerdo con la Tabla 5.1.
- Paso 3.** Calcular los parámetros de dicho modelo (estimación).
- Paso 4.** Aplicar un criterio que mida la bondad de la aproximación propuesta a los datos experimentales.
- Paso 5** Si el ajuste no es bueno entonces, vuelva al **Paso 2**, de lo contrario termine.

## 5.3. Técnicas de Identificación de Sistemas

Un gran número de métodos o técnicas de identificación se encuentran disponibles en la bibliografía clásica. Pero en líneas generales, estas se pueden dividir en dos grandes grupos. Esto es,

1. métodos clásicos simples y
2. métodos más rigurosos.

Se entiende por métodos clásicos simples o sencillos a aquellas técnicas de identificación que utilizan unos pocos datos del total registrado para calcular los parámetros de la función de transferencia propuesta. Generalmente, se trata de métodos gráficos muy simples y que pueden ser implementados computacionalmente con poco esfuerzo. Si bien la sencillez es una gran ventaja, también es una desventaja debido a que se trata de estimar los parámetros de una función de transferencia que reproduzca las características dinámicas de un proceso usando escasa información del mismo.

Por otro lado, se entiende por métodos más rigurosos a aquellos que utilizan la mayoría de datos registrados en el proceso de identificación. Así por ejemplo, métodos basados en cuadrados mínimos para la estimación de los parámetros usan un conjunto o subconjunto del total de datos registrados. Cuanto más información de estado estacionario y transitorio se use, mejor será la aproximación alcanzada.

### 5.3.1. Identificación basada en respuesta al escalón

Como se anticipó en el inciso 6.2.1, los métodos de identificación son dependientes del tipo de entrada. Así, en el planeamiento de las experiencias esto debe ser tenido en cuenta, dado que definirá luego el procedimiento de estimación de los parámetros del modelo.

#### Primer orden con tiempo muerto

En este inciso se asume que la caracterización indica que la función de transferencia que ajusta razonablemente bien al sistema de real es de primer orden con retardo. Así, la función de transferencia a identificar

$$Gp(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{(Ts + 1)}, \quad (5.1)$$

tiene tres parámetros a ser estimados, estos son, la ganancia del procesos  $K$ , la constante de tiempo  $T$  y el retardo  $\theta$ .

Bajo la hipótesis anterior nos despreocupamos momentáneamente de iterar con una validación del modelo y nos concentraremos en justificar la estimación de parámetros.

Métodos Simples. Entre los más conocidos se puede citar A) 63 % del valor de estabilización y B) tangente de la respuesta al escalón.

Previo a describir ambos métodos asumamos que el sistema real tiene un comportamiento dinámico similar a un sistema lineal de primer orden con retardo y que se ha registrado la variable de salida en función del tiempo frente a una entrada escalón de amplitud  $k$  como se indica en la Fig. 5.2.

A. 63.2 % del valor de estabilización. La salida  $y(t)$  expresada en variables de desviación tiene por expresión,

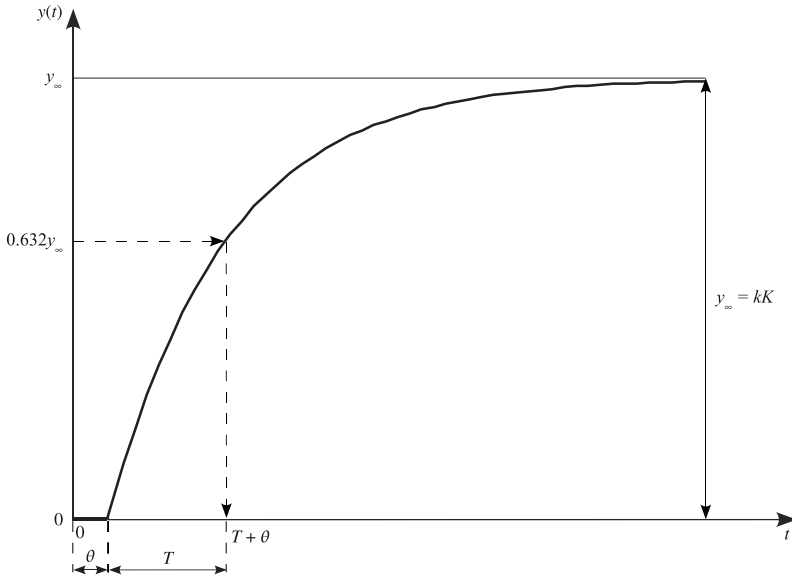


Figura 5.2: Salida de un sistema de primer orden con retardo frente a una entrada escalón de amplitud  $k$ .

$$y(t) = kK \left[ 1 - e^{-(t-\theta)/T} \right]. \quad (5.2)$$

para  $t \geq \theta$  e  $y(t) = 0$  para  $0 \leq t < \theta$ .

Note que,

1. para  $t \rightarrow \infty$  el valor de establecimiento resulta  $y(\infty) = y_\infty = kK$  y
2. para un tiempo  $t = T + \theta$  la Ec. (5.2) se reduce a  $y(T + \theta) = 0,632kK = 0,632y_\infty$ .

Estos dos comentarios son la base del método de identificación y el procedimiento sería el siguiente:

**Procedimiento 5.3.1 — Identificación Basada en el 63.2% del Estado Estacionario.**

**Paso 1.** Estime gráficamente el tiempo muerto  $\theta$ .

**Paso 2** Lea el valor de establecimiento  $y_\infty$  y estime la ganancia  $\hat{K}$  como  $\hat{K} = y_\infty/k$ .

**Paso 3** Determine el valor de  $0,632y_\infty$  y compute la constante de tiempo como se indica en la Fig. 5.2.

Note que si bien el método fue detallado en forma gráfica, el mismo puede ser aplicado computacionalmente en forma sencilla.

**B. Tangente de la respuesta temporal.** Primeramente, por razones de simplicidad se considera un cambio de escala en el tiempo definiendo  $t^* = t - \theta$ . Esto es posible dado que gráficamente se puede estimar inicialmente el tiempo muerto  $\theta$ . Así, la expresión de la salida con el tiempo resulta,  $y(t^*) = kK (1 - e^{-t^*/T})$ .

Como se indica en la Fig. 5.3a, la tangente en cualquier punto de la curva puede ser expresada como,

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{kK - y(t_1^*)}{t_2^* - t_1^*}. \quad (5.3)$$

Si se tiene en cuenta que  $y(t_1^*) = kK (1 - e^{-t_1^*/T})$  y se reemplaza en (5.3) se tiene

$$\tan(\alpha) = \frac{kK e^{-t_1^*/T}}{t_2^* - t_1^*}. \quad (5.4)$$

Por otro lado, la derivada de la respuesta en el tiempo evaluada en el instante  $t^* = t_1^*$  resulta,

$$\left( \frac{dy}{dt^*} \right)_{(t^*=t_1^*)} = \frac{kK e^{-t_1^*/T}}{T}. \quad (5.5)$$

Siendo  $\tan(\alpha) = dy(t_1^*)/dt$  al igualar (5.4) con (5.5) se prueba que  $\Delta t^* = \Delta t = T$ .

Note basándose en la Fig. 5.3b que, la derivada es más fácil de trazar y calcular en el origen. Además, si bien el método puede ser aplicado en cualquier punto, se comete menos error cuando la derivada es trazada en el origen. Dado que, a medida que nos acercamos al estado estacionario, la derivada tiende a cero y esta resulta de difícil trazado.

Así, la metodología con esta técnica se puede resumir como sigue:

**Procedimiento 5.3.2 — Identificación Mediante la Técnica de la Tangente.**

- Paso 1** Estime el retardo de tiempo  $\hat{\theta}$  y corra el eje de tiempo en  $\hat{\theta}$  unidades de tiempo.
- Paso 2** Lea el valor de establecimiento  $y_\infty$  y estime la ganancia  $\hat{K}$  como  $\hat{K} = y_\infty/k$ .
- Paso 3** Trace la tangente de la curva correspondiente a la salida registrada, preferentemente al origen.
- Paso 4** Mida la distancia  $\Delta t$  para calcular la constante de tiempo  $\hat{T}$  (según Fig. 5.3a o 5.3b).

**Ejemplo 5.1** Considere un sistema hidráulico experimental de un tanque de la Fig. 5.4, donde el caudal de entrada es perturbado con un escalón de ampli-



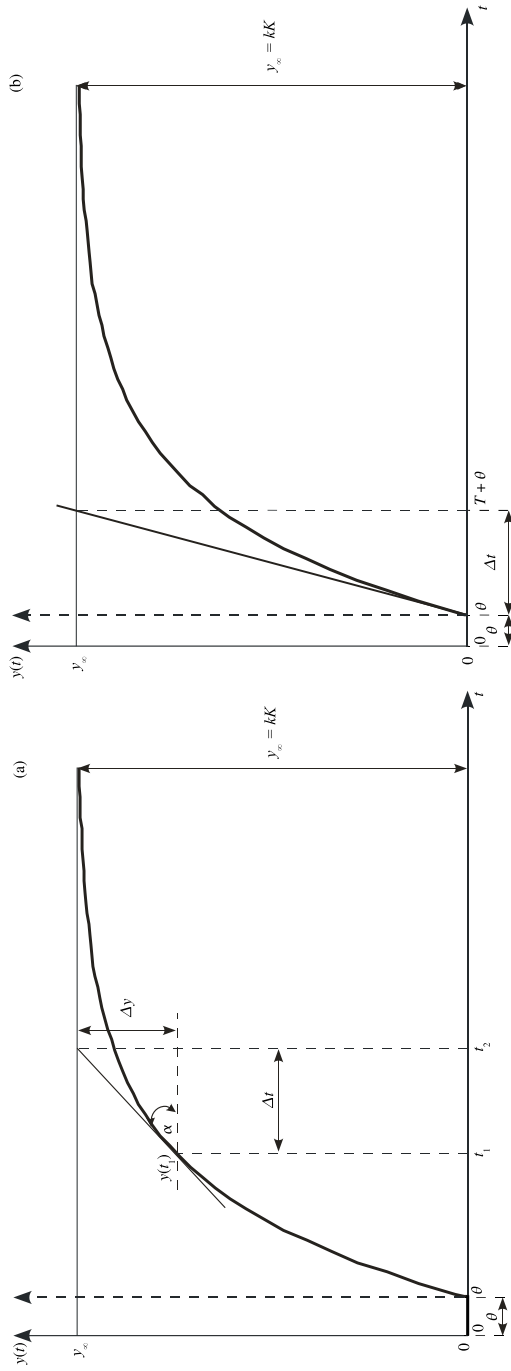


Figura 5.3: a) Tangente de la curva en cualquier punto. b) Tangente de la curva en el origen.

tud  $k = 6\text{L/h}$ , donde el registro de la variación de nivel de líquido se indica en la Tabla 5.2. Identifique los parámetros de una función de transferencia de primer orden con retardo que aproxima a dicho sistema experimental aplicando los dos métodos detallados anteriormente.

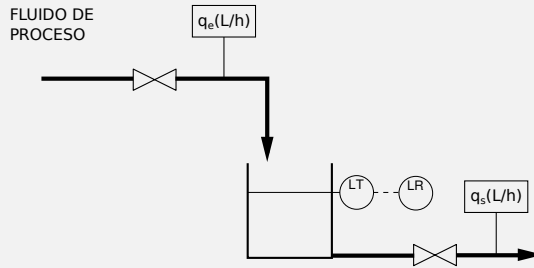


Figura 5.4: Diagrama esquemático del sistema hidráulico experimental.

Tabla 5.2: Registro del nivel de líquido del sistema hidráulico experimental. Aquí, el tiempo está en segundos y la altura en volts. El transductor de nivel tiene ganancia  $K_m = 0,0041\text{volts/cm}$  y considerada constante.

tiempo	altura	tiempo	altura	tiempo	altura	tiempo	altura
0.0000	0.0000	500.0000	0.0313	1000.0000	0.0323	1500.0000	0.0323
20.0000	0.0019	520.0000	0.0319	1020.0000	0.0320	1520.0000	0.0323
40.0000	0.0055	540.0000	0.0315	1040.0000	0.0319	1540.0000	0.0322
60.0000	0.0095	560.0000	0.0315	1060.0000	0.0322	1560.0000	0.0323
80.0000	0.0132	580.0000	0.0319	1080.0000	0.0322	1580.0000	0.0324
100.0000	0.0160	600.0000	0.0319	1100.0000	0.0323	1600.0000	0.0317
120.0000	0.0186	620.0000	0.0322	1120.0000	0.0322	1620.0000	0.0320
140.0000	0.0208	640.0000	0.0318	1140.0000	0.0324	1640.0000	0.0320
160.0000	0.0222	660.0000	0.0319	1160.0000	0.0318	1660.0000	0.0324
180.0000	0.0221	680.0000	0.0319	1180.0000	0.0323	1680.0000	0.0323
200.0000	0.0245	700.0000	0.0320	1200.0000	0.0322	1700.0000	0.0321
220.0000	0.0253	720.0000	0.0318	1220.0000	0.0325	1720.0000	0.0323
240.0000	0.0262	740.0000	0.0319	1240.0000	0.0327	1740.0000	0.0322
260.0000	0.0272	760.0000	0.0320	1260.0000	0.0325	1760.0000	0.0325
280.0000	0.0280	780.0000	0.0319	1280.0000	0.0325	1780.0000	0.0322
300.0000	0.0286	800.0000	0.0320	1300.0000	0.0323	1800.0000	0.0320
320.0000	0.0289	820.0000	0.0319	1320.0000	0.0326		
340.0000	0.0293	840.0000	0.0320	1340.0000	0.0324		
360.0000	0.0299	860.0000	0.0321	1360.0000	0.0325		
380.0000	0.0299	880.0000	0.0320	1380.0000	0.0321		
400.0000	0.0304	900.0000	0.0319	1400.0000	0.0321		
420.0000	0.0308	920.0000	0.0317	1420.0000	0.0322		
440.0000	0.0307	940.0000	0.0321	1440.0000	0.0321		
460.0000	0.0311	960.0000	0.0315	1460.0000	0.0327		
480.0000	0.0311	980.0000	0.0321	1480.0000	0.0327		

Se propone aproximar al sistema experimental a un sistema de primer orden con retardo.

Método del 63.2 % del valor de establecimiento. De acuerdo con Fig. 5.5a no es posible observar un retardo de tiempo de manera que para el Paso 1 de dicho método se adopta  $\hat{\theta} = 0$ . Luego, según el Paso 2 se estima que el valor de establecimiento es de  $\hat{y}_\infty = 0,0323$  volts con lo cual  $\hat{K} = \hat{y}_\infty/kK_m = 1,3167$  cm/l/h mientras que, según el Paso 3 la constante de tiempo estimada resulta  $\hat{T} = 140,000$ seg.

Método de la tangente. De acuerdo con Fig. 5.5a se puede optar por una derivada próxima al origen atribuyendo visualmente un retardo de tiempo  $\hat{\theta} = 0$  seg (Paso 1). Según Paso 2 de esta técnica, se estima  $\hat{y}_\infty = 0,0323$  volts con lo cual  $\hat{K} = \hat{y}_\infty/kK_m = 1,3167$  cm/l/h. Luego, se trazó la tangente a la curva y se estimó la constante de tiempo del sistema (Paso 3 y 4) como  $\hat{T} = 190,5683$  seg.

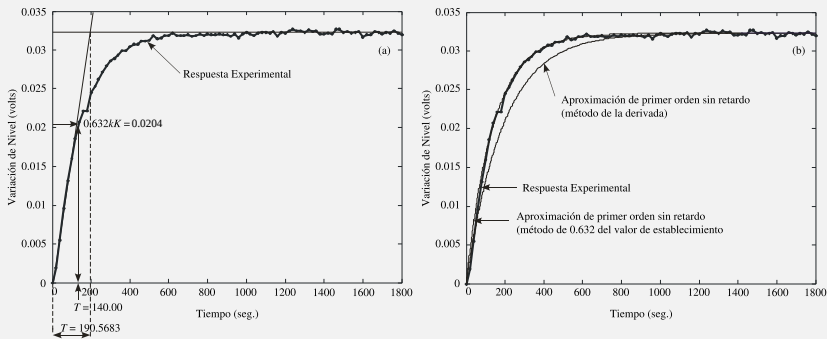


Figura 5.5: a) Métodos del 63.2 % del valor de establecimiento y de la tangente aplicados a la respuesta experimental del sistema hidráulico. b) Respuestas experimental y simulada del sistema hidráulico frente al escalón de 6 l/h.

La Fig. 5.5b muestra las respuestas en el dominio del tiempo experimental y simulada de los dos casos estudiados. Las ganancias de estado estacionario son la misma mientras que la constante de tiempo del método de la tangente a la curva es algo mayor que el método del 63.2 %. Esto último hace que la respuesta en el tiempo del segundo método estudiado sea más lenta. ■

**Ejemplo 5.2** Considere un sistema de primer orden sin retardo frente a una entrada rampa. Muestre como se puede utilizar la respuesta en el tiempo de dicho sistema para identificar sus parámetros.

La salida de un sistema lineal de primer orden frente a una entrada rampa de pendiente  $k$  resulta,

$$\hat{y}(t) = kK(t - T + Te^{-t/T}). \quad (5.6)$$

Note que dicha expresión tiene como asíntota  $A(t) = kK(t - T)$  con las siguientes propiedades:

1. para  $t = 0$ ,  $A(0) = -kKT$  y
2. para  $t = T$ ,  $A(T) = 0$ .

Estos resultados se resumen en la Fig. 5.6 y son la base de una técnica de identificación frente a entradas rampas de pendiente  $k$ .

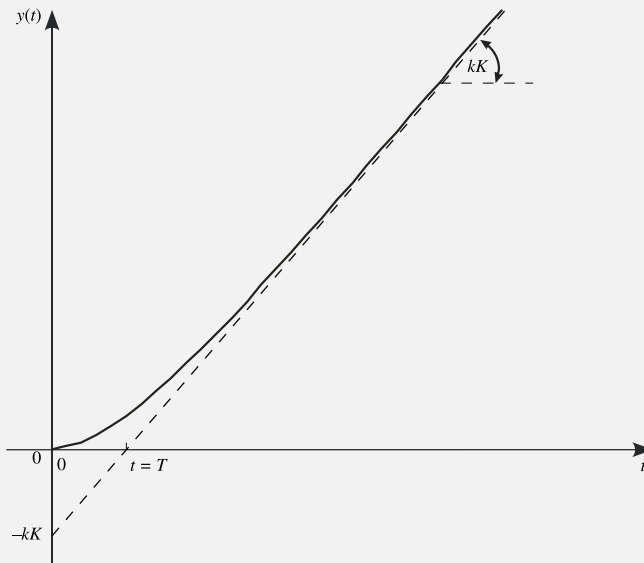


Figura 5.6: Respuesta de un sistema de primer orden frente a una rampa.

Así el procedimiento de identificación se resumiría como sigue:

- Paso 1. Trace la asíntota de la salida registrada del sistema frente a una rampa.
- Paso 2. Encuentre la intersección de la asíntota con eje del tiempo y determine  $T$  como indica la Fig. 5.6.
- Paso 3. Encuentre la intersección de la asíntota con la ordenada al origen y calcule la ganancia  $K$  como  $K = -A(0)/kT$ .

### Método de Cuadrados Mínimos (Linealización de la Curva Experimental).

La desventaja de los dos métodos sencillos detallados anteriormente consiste

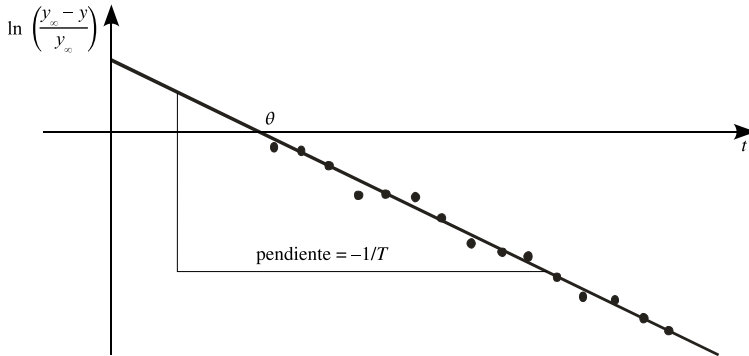


Figura 5.7: Estimación de la constante de tiempo y el retardo a partir de un conjunto de datos experimentales usando una curva semilogarítmica.

en que solo unos pocos puntos del total registrado se usan en el procedimiento de identificación. Una mejor identificación puede ser llevada a cabo si se usa la mayoría de los puntos registrados.

Considere que la salida de un sistema experimental frente a una entrada escalón de amplitud  $k$  conocida, puede ser caracterizada como de primer orden con retardo. La respuesta temporal de dicho sistema frente a la entrada escalón viene dada por la Ec. (5.2). Dicha ecuación puede ser tratada matemáticamente para dar

$$\ln(\Delta_1) = \frac{\theta}{T} - \frac{t}{T}. \quad (5.7)$$

con  $\Delta_1 := (y_\infty - y)/y_\infty$  e  $y_\infty := kK$ .

Note que,

1.  $y_\infty$  puede ser evaluado a partir del valor estacionario alcanzado por el sistema frente al escalón de entrada y
2. la Ec (5.7) representa una recta con pendiente  $-1/T$  y ordenada  $\theta/T$ .

Resulta sencillo determinar  $\theta$ , dado que la recta interceptará la abscisa en  $t = \theta$ . Estos resultados se resumen en la Fig. 5.7.

Luego, es posible obtener mediante la técnica de cuadrados mínimos la pendiente y la ordenada al origen de la recta que mejor aproxima al conjunto o subconjunto total de datos experimentales ahora representados en un diagrama semilogarítmico (Fig. 5.7).

Así una técnica sencilla puede ser aplicada como sigue:

#### Procedimiento 5.3.3 — Identificación Basada en Cuadrados Mínimos.

**Paso 1.** Determine a partir de la respuesta experimental al escalón el valor de  $y_\infty$ .

**Paso 2.** Aplique el método de cuadrados mínimos para computar  $\hat{\theta}$  y  $\hat{T}$  considerando coordenadas semilogarítmicas según Fig. 5.7.

**Ejemplo 5.3** Considere los datos experimentales del sistema hidráulico del Ejem. 5.1. Identifique los parámetros de una función de transferencia de primer orden con retardo que aproxima a dicho sistema experimental aplicando el método de la linealización de la curva experimental.

Se propone aproximar al sistema experimental a un sistema de primer orden con retardo. En otras palabras la estructura del modelo propuesto tiene la forma  $Gp(s) = Ke^{-\theta s}/(Ts+1)$ . De acuerdo con el Paso 1, se estimó como valor final  $y_\infty = kK K_m = 0,0323$  en consecuencia  $K = 1,3167$  cm/l/h. La Fig. 5.8a muestra la gráfica semilogarítmica obtenida basándose en los datos experimentales y la correspondiente recta que la aproxima, calculada por el método de cuadrados mínimos. Allí, el subconjunto de datos marcados como (\*) fueron descartados para la aproximación lineal. Note que, a medida que el sistema se acerca al estado estacionario la diferencia entre la salida experimental y el valor de  $y_\infty$  tiende a permanecer constante alrededor de dicho valor. Por tal razón, el  $\ln(\Delta_1)$  cambia su pendiente, tendiendo a una curva horizontal. Según el Paso 2 los resultados obtenidos por el método de cuadrados mínimos son,  $\hat{T} = 138,0877$  y  $\hat{\theta} = 5,8259$ .

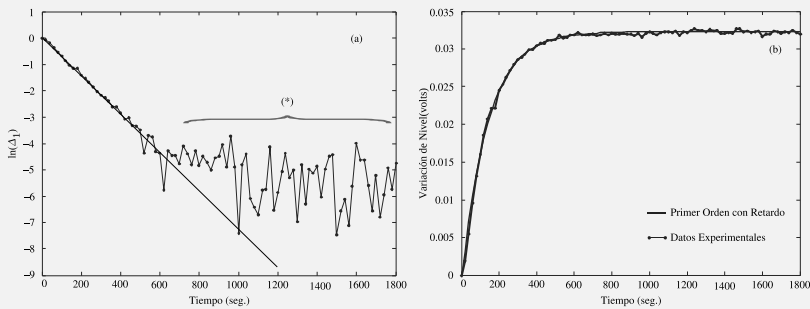


Figura 5.8: a) Representación semilogarítmica de los datos experimentales y la recta (5.7) con parámetros estimados por cuadrados mínimos. b) Respuesta en el tiempo experimental y simulada del sistema hidráulico frente al escalón de 6 l/h.

La Fig. 5.8b muestra la respuesta en el tiempo experimental y simulada, de acuerdo con los parámetros estimados para la función de transferencia adoptada. Puede verse que el tiempo muerto estimado por el método permite aproximar dinámicamente un gran número de puntos. ■

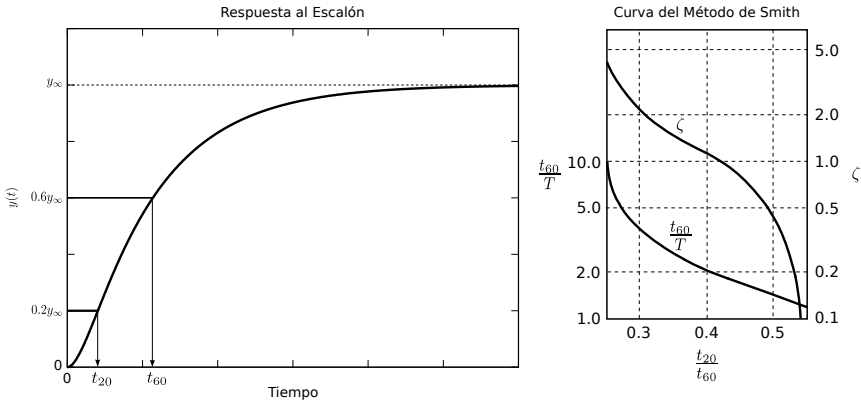


Figura 5.9: Respuesta al escalón del sistema a identificar y curva del método de Smith para la evaluación de  $T$  y  $\zeta$  a partir de la relación  $t_{20}/t_{60}$ .

## Segundo orden

Método Gráfico Sencillo. Smith ([80]) propone un método gráfico sencillo para identificar funciones de transferencias de segundo orden sobre y subamortiguado (Ec. 3.29) a partir de la respuesta al escalón. Así el método parte de asumir,

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} ,$$

donde las incógnitas son  $K$ ,  $T$  y  $\zeta$ .

El método consiste en estimar gráficamente los tiempos para los cuales la respuesta al escalón alcanzan el 20% y el 60% del valor final. A partir de la medición de esos tiempos y mediante una curva normalizada propuesta por Smith se determinan los valores de  $T$  y  $\zeta$ .

El procedimiento de identificación es el siguiente:

### Procedimiento 5.3.4 — Identificación Mediante el Método de Smith.

- Paso 1.** Determine a partir de la respuesta experimental al escalón el valor de  $y_\infty$  y luego determine la ganancia de la planta como  $\hat{K} = y_\infty/k$ , con  $k$  la amplitud del escalón de entrada.
- Paso 2.** Determine gráficamente los valores de  $t_{20}$  y  $t_{60}$  a partir de los valores de 20% y el 60% del valor final.
- Paso 3.** Determine a partir de la curva del método de Smith los valores de  $\hat{T}$  y  $\hat{\zeta}$ .

Adicionalmente, dado que se trata de un método gráfico, en algunos por simple inspección, un tiempo muerto podría ser estimado.

### Segundo orden subamortiguado

Método Gráfico Sencillo. Considere un sistema de segundo orden subamortiguado sin retardo de tiempo cuya función de transferencia tiene al denominador escrito bajo la forma canónica normalizada es

$$Gp(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1}. \quad (5.8)$$

con  $0 < \zeta < 1$  y  $K \in \mathbb{R}$  y  $T \in \mathbb{R}^+$  reales. La respuesta al escalón en el tiempo de un sistema subamortiguado según (5.8) viene dada por la Ec. (3.46),

$$y(t) = kK \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_p t + \phi) \right]. \quad (5.9)$$

donde  $\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$  es el ángulo de desfase,  $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$  es la pulsación propia y  $\omega_n = 1/T$  es la pulsación natural (ver Ecs.(3.34) y (3.37)).

Para el sistema (5.8) es posible demostrar que un sobrevalor relativo cualquiera tiene por expresión Ec. (3.49),

$$\frac{A_n}{kK} = e^{-n\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (5.10)$$

mientras que el pseudoperíodo  $\tau$  resulta ser (Ec. (3.48))

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_p}. \quad (5.11)$$

La Fig. 5.10 representa la respuesta en el tiempo al escalón de amplitud  $k$  de un sistema cualquiera según (5.8), donde se indican el primer y tercer sobrevalor relativo ( $A_1$  y  $A_3$  respectivamente) y el pseudoperíodo ( $\tau$ ). Note que el cociente

$$\frac{A_1}{A_3} = e^{2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (5.12)$$

donde  $A_1/A_3, A_2/A_4, \dots, A_n/A_{n+2}$  con  $n = 1, 2, \dots$  tienen la misma expresión. La inversa de (5.12) es conocida como relación de decaimiento ( $RD$ ) (Ec. 3.51). En la práctica, un valor usualmente aceptado como bueno para un sistema de control es  $RD = 1/4$ .

Puede definirse el decremento logarítmico  $d$  como,

$$d: = \ln(A_1/A_3) = -\ln(RD). \quad (5.13)$$

Tomando logaritmo a la expresión (5.12) y usando la definición (5.13) puede despejarse  $\zeta$  en función de la cantidad medible  $d$ .

$$\zeta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4\pi^2}}. \quad (5.14)$$



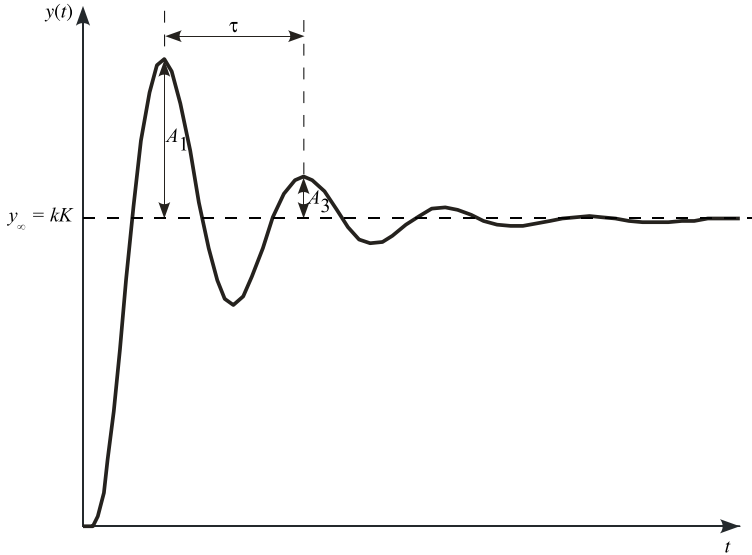


Figura 5.10: Respuesta temporal de un sistema subamortiguado de segundo orden según Ec. (5.8).

Basándose en lo hasta aquí expuesto se propone el siguiente procedimiento de identificación:

**Procedimiento 5.3.5 — Identificación Sencilla para Sistemas de Segundo Orden Subamortiguado.**

**Paso 1.** Compute la ganancia de estado estacionario como  $\hat{K} = y_\infty/k$  con  $y_\infty$  el valor de establecimiento del sistema una vez pasado el transitorio.

**Paso 2.** Determine gráficamente o bien computacionalmente (a partir del vector de datos experimentales) los sobrevalores relativos  $A_1$  y  $A_3$  y calcule  $d$  según (5.13).

**Paso 3.** Estime el coeficiente de amortiguamiento  $\hat{\zeta}$  según (5.14).

**Paso 4.** Determine gráficamente o bien computacionalmente el pseudoperíodo  $\tau$ . Luego, calcule la pulsación propia como  $\hat{\omega}_p = 2\pi/\hat{\tau}$  y estime  $\hat{T}$  como  $\hat{T} = \sqrt{1 - \hat{\zeta}^2}/\hat{\omega}_p$ .

El lector podrá entender que el procedimiento anterior puede ser extendido fácilmente a sistemas de segundo orden subamortiguado con retardo, estimando inicialmente el tiempo muerto ( $\theta$ ) para luego correr el eje de abscisas en  $\theta$  unidades de tiempo.

### Sistemas de orden $n$ Sobreamortiguados

#### Extensión del Método de Linealización de Curva Experimental.

Considere un sistema de orden  $n$  sobreamortiguado sin retardo de tiempo cuya función de transferencia es

$$Gp(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1) \cdots (T_ns + 1)}, \quad (5.15)$$

con  $T_1 \neq T_2 \neq \cdots \neq T_n$ . La correspondiente expresión en el dominio del tiempo frente a un cambio escalón de amplitud  $k$  es

$$y(t) = y_\infty \left( 1 - K_1 e^{-t/T_1} - K_2 e^{-t/T_2} - \cdots - K_n e^{-t/T_n} \right), \quad (5.16)$$

donde  $K_1, T_1, K_2, T_2, \cdots, K_n, T_n$  y  $K$  son los parámetros a estimar. Definiendo  $\Delta := (y_\infty - y)/y_\infty$  luego, la última expresión puede ser escrita como,

$$\Delta = K_1 e^{-t/T_1} + K_2 e^{-t/T_2} + \cdots + K_n e^{-t/T_n}. \quad (5.17)$$

Asumiendo sin pérdida de generalidad que  $T_1 > T_2 > \cdots > T_n$  para tiempos grandes se puede asumir sin mucho error que,

$$\Delta \approx \Delta_1 := K_1 e^{-t/T_1}, \quad (5.18)$$

tomando logaritmo a ambos miembros de la última expresión se tiene

$$\ln(\Delta_1) = -\frac{t}{T_1} + \ln(K_1). \quad (5.19)$$

Similarmente al método de linealización de la curva experimental es posible estimar los parámetros  $\hat{K}_1$  y  $\hat{T}_1$  que mejor aproximan a los datos experimentales, especialmente a tiempos grandes. Gráficamente esto puede ser interpretado de acuerdo con la Fig. 5.11.

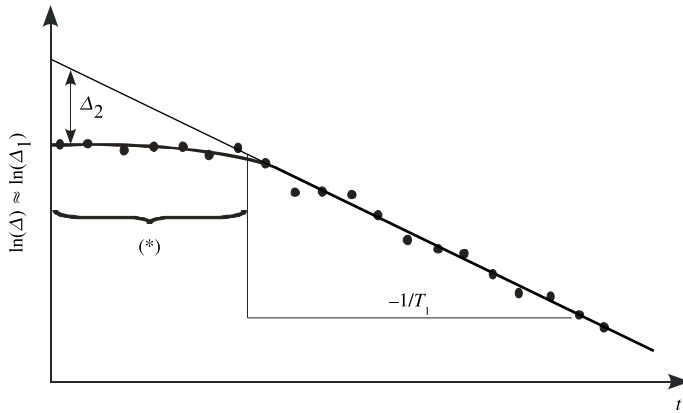


Figura 5.11: Gráfico  $\ln(\Delta)$  vs. tiempo basado en el conjunto completo de datos experimentales. Aquí,  $\ln(\Delta)_2$  y el conjunto de datos marcados como (\*) serán usados para la próxima estimación.

Luego, basándose en los valores estimados es posible computar  $\hat{\Delta}_1 = \hat{K}_1 e^{-t/\hat{T}_1}$ . Con esto último en (5.17) se tiene

$$\Delta - \hat{\Delta}_1 = K_2 e^{-t/T_2} + \dots + K_n e^{-t/T_n}. \quad (5.20)$$

Análogamente a lo expuesto antes es posible aproximar  $\Delta - \hat{\Delta}_1 \approx \Delta_2$  con  $\Delta_2 := K_2 e^{-t/T_2}$  dado que se tiene por hipótesis;  $T_1 > T_2 > \dots > T_n$ . Tomando logaritmo a ambos miembros de la definición de  $\Delta_2$  se tiene

$$\ln(\Delta_2) = -\frac{t}{T_2} + \ln(K_2). \quad (5.21)$$

Ahora, es posible estimar los parámetros  $\hat{K}_2$  y  $\hat{T}_2$  repitiendo nuevamente el método de linealización de la curva experimental basándose en la diferencia  $\Delta - \hat{\Delta}_1$  y el conjunto de datos que con la primer estimación no se aproximaron (indicados como (\*) en Fig. 5.11).

Este procedimiento se puede repetir  $n$  veces para así computar hasta  $\hat{T}_n$ . La única limitación es la cantidad de puntos que se dispone, debido a que la metodología adoptada lleva a descartar más y más puntos a medida que se aumenta la cantidad de constantes de tiempo que se estiman. Así, el procedimiento de identificación termina cuando solo se tiene unos pocos datos experimentales y resulta innecesario continuar agregando órdenes al sistema. Esto último se esquematiza en la Fig. 5.12).

Similarmente a los otros métodos la ganancia de estado estacionario puede ser estimada según el valor final alcanzado por el sistema a tiempos demasiado grandes.

El procedimiento de identificación se podría resumir como sigue:

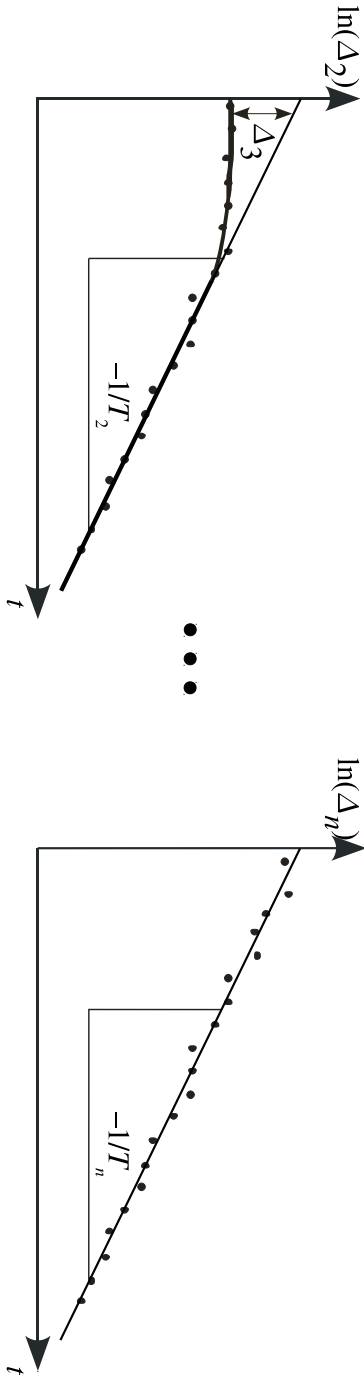


Figura 5.12: Representación esquemática de la metodología expuesta.

### Procedimiento 5.3.6 — Identificación Sencilla para Sistemas de Orden $n$ Subreamortiguado.

- Paso 1.** Estime la ganancia de estado estacionario como un valor medio de los valores finales alcanzados por el sistema.
- Paso 2** Adopte  $j = 1$ .
- Paso 3.** Fije una estructura o clase de modelo de grado  $j$  de acuerdo con (5.15).
- Paso 4** Estime  $\hat{T}_j$  según la metodología expuesta anteriormente.
- Paso 5.** Simule numéricamente la aproximación adoptada y compare con los resultados experimentales.
- Paso 6.** Si la bondad de la aproximación no es buena y aún dispone de datos experimentales al inicio de los registros, adopte  $j = j + 1$  y vuelva al **Paso 3** de lo contrario, termine.

**Ejemplo 5.4** Considere un sistema hidráulico experimental de dos tanques en cascada, de la Fig. 5.13, donde el caudal de entrada al primer tanque cambia según un escalón de amplitud  $k = 6 \text{ L/h}$ . El registro de los datos experimentales se resume en la Tabla 5.3. Identifique las posibles funciones de transferencia que lo aproximan aplicando el método de la linealización de la curva experimental para procesos de orden  $n$  sin retardo.

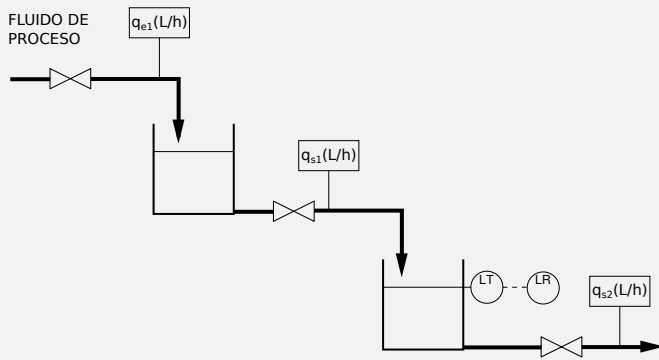


Figura 5.13: Diagrama esquemático del sistema hidráulico experimental de dos tanques en cascada.

Se estimó como valor final  $y_\infty = kKKm = 0,0203$  con lo cual la ganancia de estado estacionario estimada resulta  $\hat{K} = 0,8252 \text{ cm/l/h}$  (Paso 1) similarmente al Ejem. 5.1. De acuerdo con el algoritmo se adopta  $j = 1$  (Paso 2); según (5.15) queda fijada una función de transferencia de primer orden sin retardo (Paso 3). Luego, de acuerdo al Paso 4 se estima la constante  $\hat{T}_1 = 176,5247$  (ver Fig. 5.14a). Según Fig. 5.14c la aproximación de primer

orden sin retardo no es buena (Paso 5) por lo tanto se incrementa  $j$  (Paso 6) y se vuelve al Paso 3 quedando ahora adoptada una función de transferencia de segundo orden sin retardo. Luego, se estima otra constante de tiempo ( $\hat{T}_2 = 42,1152$ ) siguiendo el método de linealización de la curva experimental según se indica en la Fig. 5.14b.

Tabla 5.3: Registro de nivel de líquido del sistema hidráulico de la Fig. 5.13. Aquí, el tiempo está en segundos y la altura en volts. El transductor tiene ganancia  $K_m = 0,0041$  volts/cm y es considerada constante.

tiempo	altura	tiempo	altura	tiempo	altura	tiempo	altura
0.0000	0.0000	500.0000	0.0187	1000.000	0.0205	1500.000	0.0204
20.0000	-0.0005	520.0000	0.0188	1020.000	0.0203	1520.000	0.0203
40.0000	0.0002	540.0000	0.0190	1040.000	0.0205	1540.000	0.0204
60.0000	0.0010	560.0000	0.0187	1060.000	0.0196	1560.000	0.0206
80.0000	0.0024	580.0000	0.0191	1080.000	0.0202	1580.000	0.0206
100.0000	0.0027	600.0000	0.0195	1100.000	0.0205	1600.000	0.0207
120.0000	0.0045	620.0000	0.0193	1120.000	0.0203	1620.000	0.0207
140.0000	0.0063	640.0000	0.0191	1140.000	0.0204	1640.000	0.0206
160.0000	0.0079	660.0000	0.0197	1160.000	0.0199	1660.000	0.0204
180.0000	0.0090	680.0000	0.0195	1180.000	0.0202	1680.000	0.0207
200.0000	0.0101	700.0000	0.0198	1200.000	0.0204	1700.000	0.0206
220.0000	0.0114	720.0000	0.0198	1220.000	0.0200	1720.000	0.0199
240.0000	0.0122	740.0000	0.0193	1240.000	0.0197	1740.000	0.0201
260.0000	0.0132	760.0000	0.0199	1260.000	0.0202	1760.000	0.0201
280.0000	0.0138	780.0000	0.0198	1280.000	0.0200	1780.000	0.0202
300.0000	0.0148	800.0000	0.0183	1300.000	0.0204	1800.000	0.0204
320.0000	0.0152	820.0000	0.0198	1320.000	0.0203		
340.0000	0.0159	840.0000	0.0202	1340.000	0.0198		
360.0000	0.0165	860.0000	0.0202	1360.000	0.0203		
380.0000	0.0168	880.0000	0.0201	1380.000	0.0204		
400.0000	0.0172	900.0000	0.0200	1400.000	0.0197		
420.0000	0.0175	920.0000	0.0201	1420.000	0.0202		
440.0000	0.0181	940.0000	0.0203	1440.000	0.0201		
460.0000	0.0181	960.0000	0.0204	1460.000	0.0204		
480.0000	0.0185	980.0000	0.0202	1480.000	0.0204		

Según Fig. 5.14c la aproximación de segundo orden sin tiempo muerto mejora bastante a la primero sin llegar a ser una excelente aproximación. Finalmente, dado que la cantidad de puntos disponibles no permiten seguir estimando más constantes de tiempo, se culmina con el procedimiento.

Por último, se quiere hacer notar que se trata de un sistema hidráulico experimental de dos tanques en cascada por lo que resulta más lógico considerar una función de transferencia de segundo orden para dicho sistema que una de

primero.

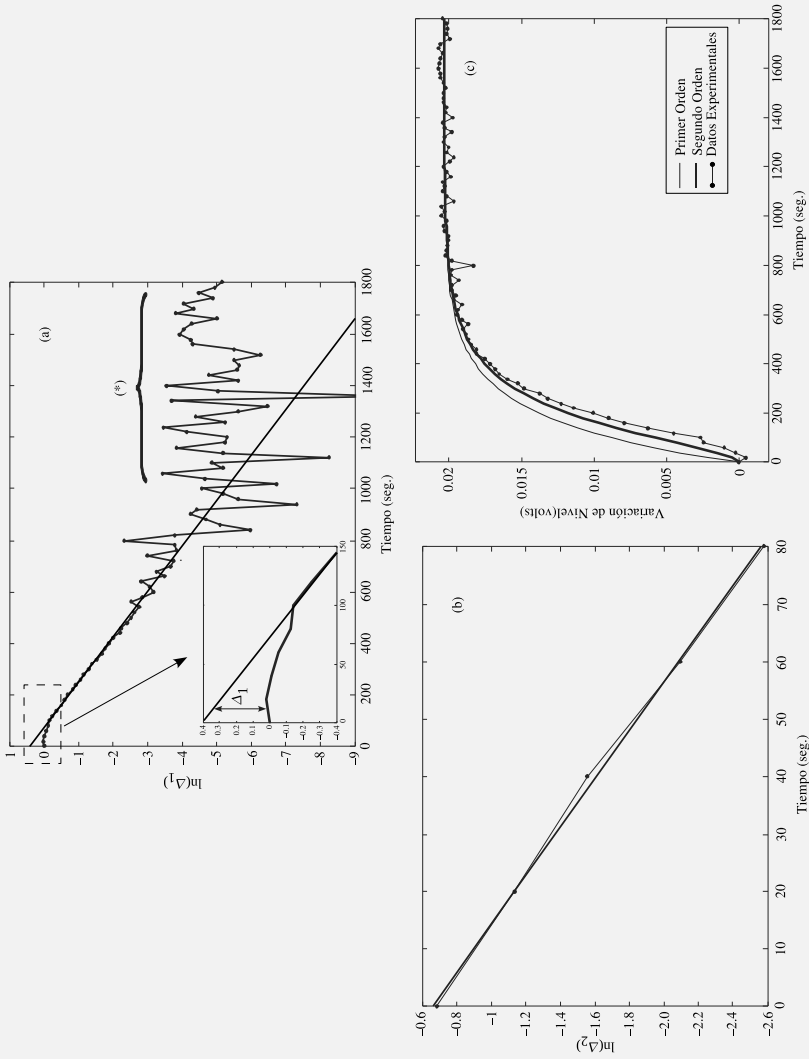


Figura 5.14: a) Primera aplicación del método de linealización de la curva experimental. b) Segunda aplicación del método de la linealización de la curva experimental. c) Respuestas en el tiempo del sistema hidráulico de dos tanques en cascada y de las aproximaciones de primero y segundo orden sin retardo frente al escalón de entrada de 6 l/h.

### 5.3.2. Identificación basada en respuesta al impulso

#### Primer orden con retardo

##### Métodos Simples

A. 37% del Valor Inicial. La salida  $y(t)$  de un sistema de primer orden con tiempo muerto expresada en variables de desviación frente a una entrada delta de Dirac tiene por expresión,

$$y(t) = \frac{K}{T} e^{-(t-\theta)/T}, \quad (5.22)$$

para  $t \geq \theta$  e  $y(t) = 0$  para  $0 \leq t \leq \theta$ .

Note que,

1. para  $t = \theta$ , el valor inicial  $y(\theta) = K/T$  y
2. para un tiempo  $t = T + \theta$  la expresión (5.22) se reduce a  
 $y(T + \theta) = e^{-1}K/T = 0,37y(\theta)$ .

Estos dos comentarios son la base del método de identificación cuando se tiene como entrada una función delta en un sistema a identificar. La metodología sería la siguiente:

#### Procedimiento 5.3.7 — Identificación Basada en 37% del Valor Inicial.

**Paso 1.** Estime el retardo de tiempo  $\hat{\theta}$ .

**Paso 2** Determine el valor de  $0,37y(\theta)$  y estime la constante  $\hat{T}$  basándose en la lectura de  $\hat{T} + \hat{\theta}$  según se indica en la Fig. 5.15 con estimado en el **Paso 1**

**Paso 3.** Conociendo el valor inicial  $y(\theta)$  compute la ganancia  $\hat{K}$  como  $\hat{K} = y(\theta)\hat{T}$  con  $\hat{T}$  estimado en el **Paso 2**

B. Tangente en el Origen de la respuesta temporal. Por razones de simplicidad, se propone una traslación del origen de coordenadas en  $t^* = t - \theta$ . Luego, la salida en el tiempo resulta,

$$y(t^*) = \frac{K}{T} e^{-t^*/T}, \quad (5.23)$$

con  $t^* \geq 0$ .

Basándose en esta última expresión la derivada en el tiempo resulta ser

$$\frac{dy(t)}{dt^*} = \frac{-(K/T)e^{-t^*/T}}{T}. \quad (5.24)$$

Dicha derivada al origen ( $t^* = 0$ ) resulta ser

$$\left( \frac{dy(t)}{dt^*} \right)_{t^*=0} = \frac{-(K/T)}{T}. \quad (5.25)$$

Siendo



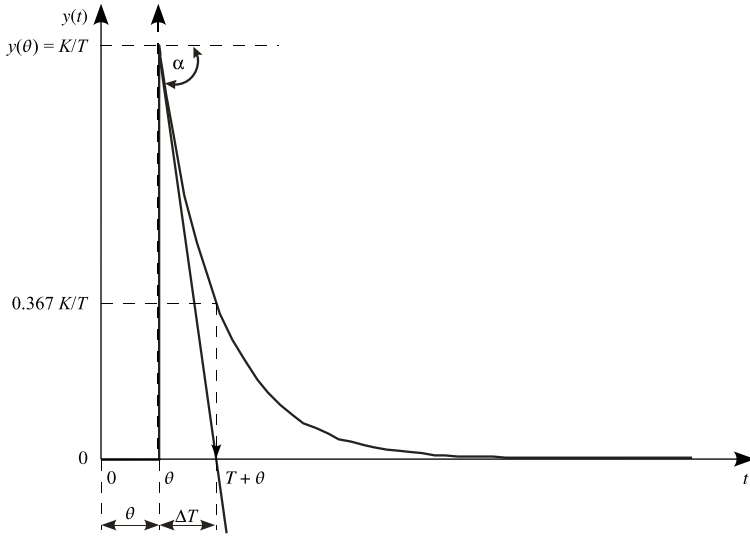


Figura 5.15: Técnicas de identificación basándose en el 37 % del valor inicial y tangente al origen para sistemas de primer orden frente a entrada Delta.

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{0 - y(0)}{\Delta t} = \frac{-K/T}{\Delta t}. \quad (5.26)$$

(ver Fig. 5.15) y dado que  $\tan(\alpha) = dy(0)/dt^*$ , al igualar (5.25) con (5.26) se prueba que  $\Delta t = T$ . Así, el procedimiento con esta técnica se puede resumir como sigue:

**Procedimiento 5.3.8 — Identificación Basada en la Tangente al Valor Inicial.**

- Paso 1.** Estime el retardo de tiempo  $\hat{\theta}$  y corra el eje de coordenadas  $\hat{t}$  unidades de tiempo.
- Paso 2** Trace la tangente al origen de la curva de la salida registrada según Fig. 5.15.
- Paso 3.** Mida la distancia  $t$  para estimar la constante de tiempo  $\hat{T}$  como indica la Fig. 5.15.
- Paso 4.** Lea el valor inicial  $y(\theta) = y(t^* = 0)$  y compute la ganancia  $\hat{K}$  como  $\hat{K} = y(\theta)\hat{T}$ .

Método de Cuadrados Mínimos.

El fundamento del método es muy similar a lo expuesto en la Sección anterior. Primeramente es posible estimar el retardo de tiempo basándose en la respuesta en el tiempo para luego trasladar el eje tiempo en  $t^* = t - \theta$ . Tomando

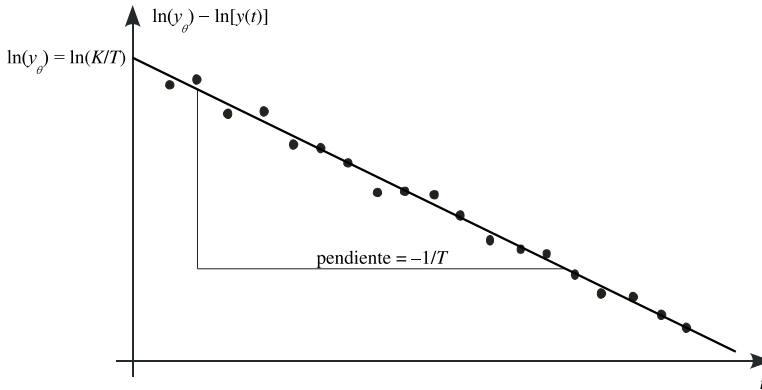


Figura 5.16: Representación semilogarítmica de la Ec. (5.27).

logaritmos a ambos miembros de la Ec. (5.23) se tiene,

$$\ln(y_\theta) - \ln[y(t^*)] = \frac{1}{T}t^*. \quad (5.27)$$

donde  $y_\theta = y(\theta) = K/T$ . La interpretación gráfica de la Ec. (5.27) es una recta cuya ordenada al origen es  $y_\theta$  y su pendiente es  $1/T$  (Fig. 13).

Basándose en lo hasta aquí expuesto se propone el siguiente procedimiento:

#### Procedimiento 5.3.9 — Identificación Basada en Cuadrados Mínimos.

**Paso 1.** Estime el retardo de tiempo  $\theta$ .

**Paso 2.** Estime por cuadrados mínimos la pendiente ( $m$ ) y la ordenada al origen  $y_\theta$  de la recta (5.27).

**Paso 3.** Luego, estime  $\hat{T}$  y  $\hat{K}$  como  $\hat{T} = 1/m$  y  $\hat{K} = y_\theta \hat{T}$ .

### 5.3.3. Identificación basada en cuadrados mínimos para cualquier tipo de entrada y $G(s)$ genérica

#### Formulación en base a funciones de transferencia

Sea  $G_p(s)$  la estructura de la función de transferencia genérica propuesta para un proceso. Luego, bajo hipótesis de comportamiento lineal la salida computada puede ser expresada mediante la integral de convolución entre la entrada genérica  $u(t)$  y la respuesta al impulso de la función de  $g_p(t)$  (transformada inversa de  $G_p(s)$ ). Esto es,

$$\hat{y}(t) = \int_0^t g_p(t - \lambda)u(\lambda)d\lambda. \quad (5.28)$$

Dicha integral puede ser aproximada a,

$$\hat{y}(NT_s) = \sum_{k=0}^N g_p(NT_s - kT_s)u(kT_s)T_s. \tag{5.29}$$

donde  $T_s$  es el período de muestreo considerado uniforme y  $N$  el número total de muestras. Note que  $g_p(t)$  tiene parámetros desconocidos esto es,  $g_p = g_p(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, t)$ . Luego, basándose en la idea de cuadrados mínimos, un problema de optimización multiparamétrico puede ser escrito como sigue

$$\min_{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n} \mathcal{J}(\pi) = \sum_{k=0}^N [y(kT_s) - \hat{y}(kT_s, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)]^2. \tag{5.30}$$

y un algoritmo de minimización multiparamétrico como el método de Levenberg-Marquardt puede ser usado en este caso. Note que aquí, la formulación es no lineal en cuanto a los parámetros a estimar. Por lo tanto, el problema de optimización (5.30) es cuasiconvexo y las condiciones del Teo. A.3.1 no están dadas, esto es, la solución puede no ser única (ver Apéndice A, Secc. A.3).

Note que, este procedimiento se puede usar tanto para sistemas a lazo abierto como cerrado. En el caso de tratarse de sistemas a lazo abierto con entrada  $U(s)$  conocida y correctamente modelada, puede usarse en (5.30) la transformada inversa de  $Gp(s)U(s)$ .

**Ejemplo 5.5** Considere un primero y segundo orden con retardo como posibles aproximaciones al sistema hidráulico de dos tanques en cascada del Ejem. 5.4 y aplique la formulación general de minimización multiparamétrica a los datos obtenidos experimentalmente.

La Tabla 5.4 resume las funciones de transferencia y las respuestas al escalón de las funciones propuestas de acuerdo al enunciado de este ejemplo.

Tabla 5.4: Funciones de transferencias propuestas y sus respuestas al escalón correspondiente.

	Primer Orden con Retardo	Segundo Orden con Retardo
Función de transferencia	$Gp(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{(Ts+1)}$	$Gp(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$
Respuesta al Escalón	$y_1(t) = kK[1 - e^{-(t-\theta)/T}]$	$y_2(t) = kK \left\{ 1 - \frac{1}{T_1 - T_2} [T_1 e^{-(t-\theta)/T_1} - T_2 e^{-(t-\theta)/T_2}] \right\}$ para $\zeta > 1$ $y_3(t) = kK[1 - e^{-(t-\theta)/T} (1 + \frac{\theta}{T}t)]$ para $\zeta = 1$

Así, el problema de optimización multiparamétrico a resolver en ambos casos puede escribirse como sigue:

$$\min_{\pi} \mathcal{J}(\pi) = \frac{1}{2} \min_{\pi} \sum_{k=0}^N [y(kT_s) - \hat{y}_i(kT_s, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)]^2. \quad (5.31)$$

con  $k = 1, 2, \dots$ ,

$$\hat{y}_1(kT_s, \pi_1, \pi_2, \pi_3) = k_i K \left[ 1 - e^{-(kT_s - \theta)/T} \right]. \quad (5.32)$$

con  $k_i$  la amplitud del escalón en caudal,  $T_s$  el período de muestreo,  $\pi_1 = K$ ,  $\pi_2 = T$  y  $\pi_3 = \theta$  e

$$\hat{y}_2(kT_s, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = k_s K \left[ 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-(kT_s - \theta)/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-(kT_s - \theta)/T_2} \right] \quad (5.33)$$

con  $\pi_1 = K$ ,  $\pi_2 = T_1$ ,  $\pi_3 = T_2$  y  $\pi_4 = \theta$  para el segundo orden con  $\zeta > 1$  o bien,

$$\hat{y}_3(kT_s, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = k_s K \left[ 1 - e^{-(t-\theta)/T} \left( 1 + \frac{t}{T} \right) \right]. \quad (5.34)$$

con  $\pi_1 = K$ ,  $\pi_2 = T$  y  $\pi_3 = \theta$  para el segundo orden con  $\zeta = 1$ .

Los resultados de la identificación vía resolución del problema (5.33) se resumen en la Tabla 5.5. Note que, según la Tabla 5.4 se usó directamente la respuesta al escalón para simplificar el computo.

Tabla 5.5: Resultados de la aplicación del procedimiento de identificación de cuadrados mínimos al sistema hidráulico experimental de dos tanques en cascada.

	<b>Primer Orden con Retardo</b>	<b>Segundo Orden con Retardo</b>
Parámetros Estimados	$\hat{y}_{\infty} = 0,020299$ volts	$\hat{y}_{\infty} = 0,020249$ volts
	$\hat{K} = 0,8252$ cm/l/h	$\hat{K} = 0,8231$ cm/l/h
	$\hat{T} = 181,4705$ seg	$\hat{T}_1 = 166,0726$ seg
	$\hat{\theta} = 69,0934$ seg	$\hat{T}_2 = 166,0726$ seg
		$\hat{\theta} = 32,1985$ seg

La Fig. 5.17 muestra las simulaciones numéricas obtenidas con las dos clases de modelos propuestas. Fácilmente se observa a favor de la aproximación de segundo orden con retardo una mejora considerable respecto a la de primer orden con retardo, existiendo una considerable superposición entre los datos experimentales y los simulados numéricamente.

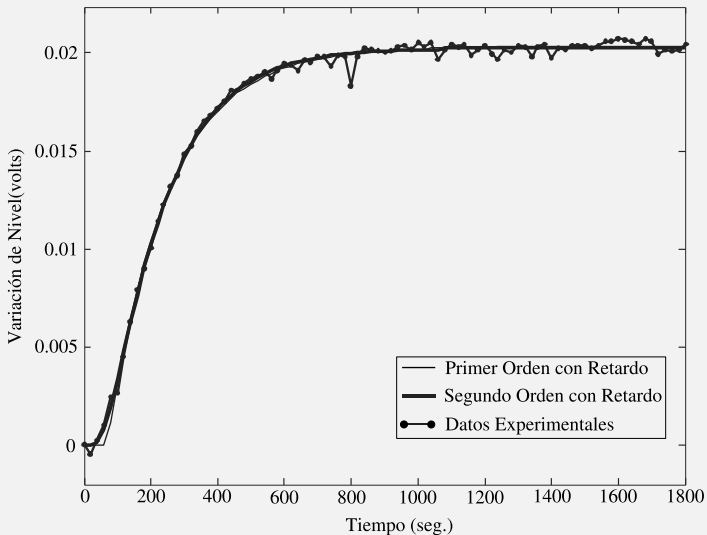


Figura 5.17: Respuesta en el tiempo experimental y simulada de los sistemas de primero y segundo orden con tiempo muerto frente al escalón de entrada de 6 l/h.

Por último, si bien ambas respuestas en el dominio del tiempo son excelentes, similarmente a lo expresado en el Ejem. 5.4, resulta más lógico considerar al sistema hidráulico con una función de transferencia de segundo orden con retardo que con una de primero con retardo. Debido a que la primera está más acorde con la física del sistema. ■

## 5.4. Conclusiones

En este capítulo se presentaron técnicas de identificación y estimación de parámetros de funciones de transferencia sencillas muy utilizadas en la industria por su simplicidad. Mediante las técnicas aquí expuestas es posible aproximar a procesos industriales complejos con funciones de transferencia simples, con una aceptable aproximación dentro de un rango o espacio de operación. Dependiendo de las características no lineales del sistema o proceso en cuestión, el espacio de operación en donde se valida la aproximación lineal puede aumentar o dismi-

nuir. En otras palabras, cuanto mayor es la no linealidad del procesos, menor es el rango de aplicabilidad de las aproximaciones lineales.

La bibliografía especializada ha hecho de este tema toda una disciplina en constante evolución dentro de la teoría de control, encontrándose disponible obras como las de Ljung( [52]), entre muchos otros, que son recomendables a la hora de ampliar los conceptos aquí vertidos.

## 5.5. Pensemos

1. ¿Cual de las siguientes técnicas de identificación le parece más precisa para determinar los parámetros de una función de transferencia de primer orden con tiempo muerto?
  - Método del 63.2 %.
  - Método de la tangente.
  - Método basado en cuadrados mínimos.
  - Ninguna de las anteriores.
2. Usualmente se asume que cuando un sistema es sometido a una perturbación persistente, es posible identificar mejor los parámetros de su función de transferencia, cuando se utiliza un método basado en cuadrados mínimos.
 

¿Es posible extender este concepto a los métodos simples detallados en este capítulo?  **SI**  **NO**
3. ¿Es posible aplicar un método de estimación de parámetros basado en cuadrados mínimos utilizando solamente una muestra de datos cercana al estado estacionario?  **SI**  **NO**

## 5.6. Problemas

**Problema 5.1** En un sistema se registra la salida frente a un escalón unitario de entrada, los datos obtenidos son presentados en la Tabla 5.6,

Tabla 5.6: Datos experimentales registrados.

Tiempo:	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Respuesta:	0	2.3	5.5	7.3	8.5	9.4	10.1	10.6	11.0	11.2	11.4

Un ingeniero propone aproximar dicho sistema a uno de primer orden.

- (a) Aplique los métodos que conoce para determinar la ganancia y la constante de tiempo de dicho sistema.
- (b) Basándose en los resultados obtenidos simule numéricamente mediante Octave©las respuestas dinámicas de los sistemas lineales y compara con los resultados experimentales. Obtenga conclusiones

**Problema 5.2** Determine los parámetros de la función de transferencia de un sistema que en su respuesta a un escalón unitario produce un sobrevalor relativo de 1.35, un pseudoperiodo de 13min y una ganancia de estado estacionario adimensional igual a 2.7.

**Problema 5.3** Un reactor químico exotérmico tiene una respuesta dinámica frente a una disminución de  $4^{\circ}\text{C}$  de temperatura del cuadal refrigerante de acuerdo con la Fig. 5.18.

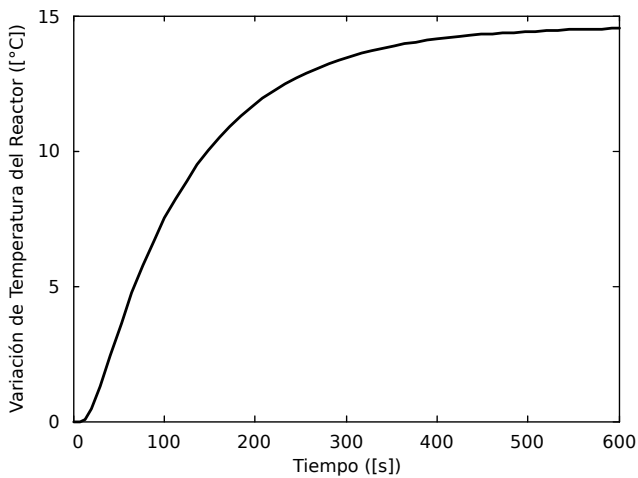


Figura 5.18: Respuesta dinámica del reactor químico.

- Aproxime el sistema con un sistema de primer orden con retardo puro.
- Compare la respuesta real del sistema con la que se obtiene con su aproximación.

**Problema 5.4** La figura muestra un sistema mecánico vibratorio, al que se le aplica una fuerza  $u(t)$  de 10N, la masa oscila como se indica en la Fig 5.19.

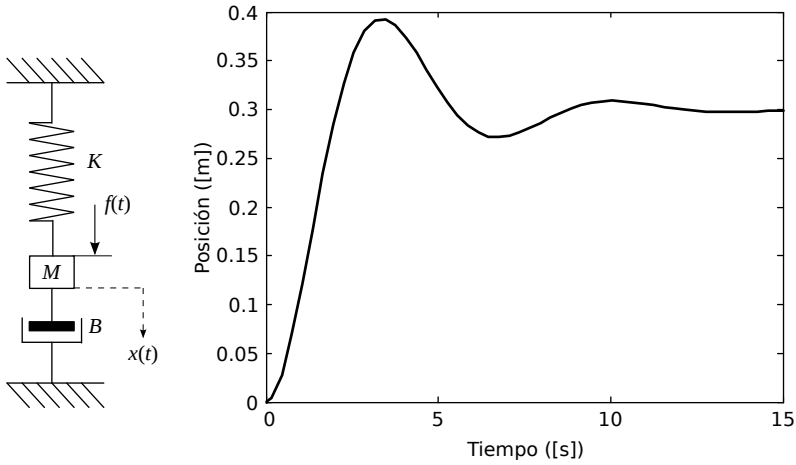


Figura 5.19: Respuesta dinámica del reactor químico.

Determine  $M$ ,  $B$ , y  $K$  a partir de la respuesta en el tiempo.

**Problema 5.5** Considere un compensador electrónico cuya función de transferencia es  $C(s) = K_r(\tau s + 1)/(Ts + 1)$ . Se sabe que el parámetro  $K_r$  es variable y los parámetros  $\tau$  y  $T$  son constantes.

Para identificar los valores de los parámetros antes mencionado se introduce un escalón unitario a lazo abierto y se registra la salida, que se muestra en la Fig. 5.20.

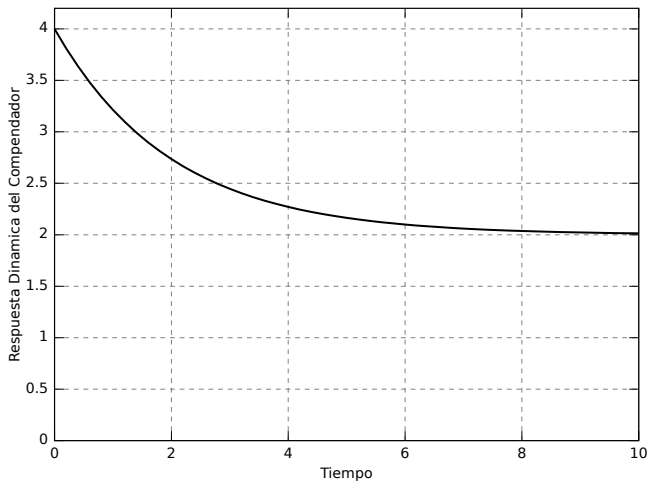


Figura 5.20: Respuesta dinámica del compensador electrónico.



- (a) Basándose en la respuesta dinámica de la Fig. 5.20, determine los valores de los parámetros de dicho compensador.
- (b) Simule numéricamente la función de transferencia identificada, compare resultados y obtenga conclusiones.

**Problema 5.6** Un proceso industrial incluye un intercambiador de calor al que se le pretende obtener una función de transferencia que lo represente; para eso se hace una experiencia partiendo de un estado estacionario inicial al que le corresponde una temperatura de la variable controlada de  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$  según la lectura que da una termorresistencia. La variable de entrada es un caudal de agua de refrigeración que en el estado estacionario es de  $25\text{ m}^3/\text{h}$ . Se hace una modificación manual en el caudal de agua de enfriamiento para lo cuál se lo lleva hasta  $27\text{ m}^3/\text{h}$  obteniendo la respuesta temporal de la Fig. 5.21.

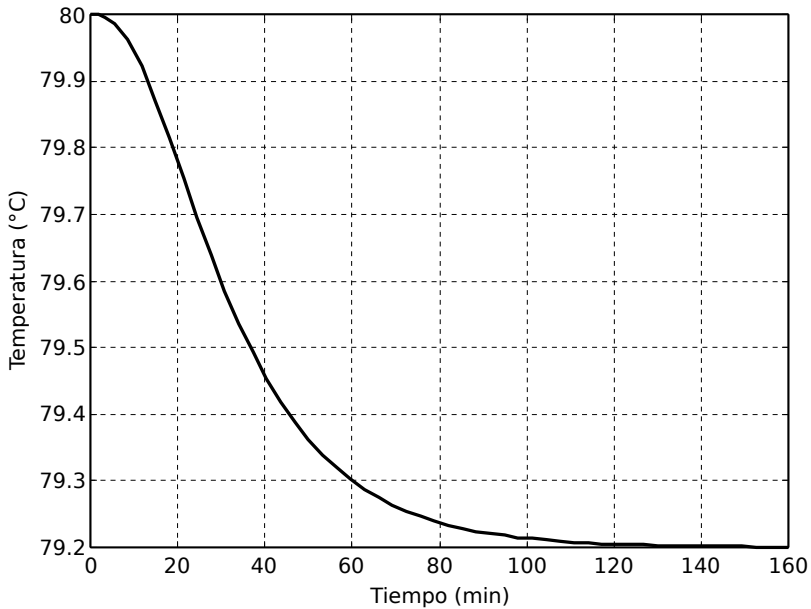


Figura 5.21: Respuesta dinámica del intercambiador de calor

- (a) Encuentre la función de transferencia del intercambiador (temperatura en relación al caudal de agua). Realice todos los cálculos numéricos y enuncie cómo verifica los resultados obtenidos.
- (b) Para el elemento de medición calcule su ganancia sabiendo que se encuentra calibrado para un rango de entrada es de  $0$  a  $250\text{ }^{\circ}\text{C}$  y el su salida es de  $0$  a  $10$  volts.

Considere que la termorresistencia tiene dinámica despreciable frente al intercambiador de calor.

**Problema 5.7** Considere el sistema de dos tanques idénticos en cascada de la Fig. 5.22.

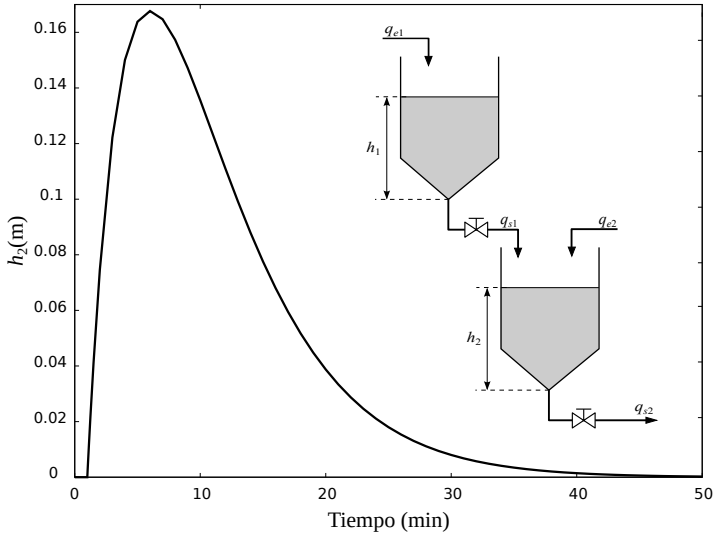


Figura 5.22

- Plantee el modelo matemático del sistema asumiendo las hipótesis que considere necesarias.
- Un ingeniero de control propone realizar un ensayo en planta para estimar los parámetros de la misma. Para ello sugiere agregar un gran volumen de líquido en un corto tiempo (que a los fines prácticos se puede considerar como una delta ideal) en el tanque 1 y registrar el nivel en el tanque 2. Según el ingeniero con los datos de la gráfica adjunta es posible estimar los parámetros de planta. ¿Está Ud. de acuerdo? Justifique.
- En caso de estar de acuerdo con el ingeniero, estime los parámetros de la función de transferencia de la planta y encuentre la expresión matemática que representa de la dinámica del sistema.
- En caso de no estar de acuerdo con el ingeniero, ¿cómo identificaría a la planta?

**Problema 5.8** Un horno posee un quemador de gas natural que consume  $25 \text{ m}^3/\text{h}$  en estado estacionario y le corresponde una temperatura de  $280 \text{ }^\circ\text{C}$ , dicha lectura se realiza con una termocupla J (Fe-Constantán). Se quiere conocer la función de transferencia horno-termocupla para lo cual se lleva el caudal de gas hasta  $30 \text{ m}^3/\text{h}$  obteniendo la respuesta dinámica adjunta.

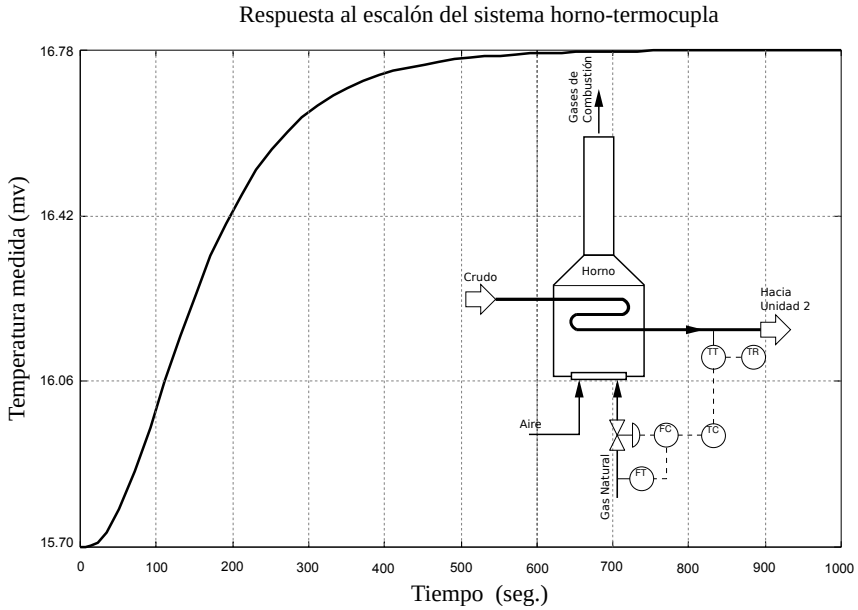


Figura 5.23

- Basándose en la curva adjunta, proponga una función de transferencia para el sistema horno-termocupla y encuentre sus parámetros utilizando algún método para tal fin.
- Determine la ganancia del elemento de medición, sabiendo que la termocupla tiene dinámica despreciable y está calibrada para medir en un rango de entrada de 0-750 °C con un rango de salida de 0-42 mv.
- Determine la función de transferencia del horno.



## **Parte II**

# **HARDWARE DE UN SISTEMA DE CONTROL DE PROCESOS**



# Capítulo 6

## Elementos de Medición

En este capítulo, primeramente se introduce la terminología y conceptos básicos asociados a los elementos de medición. Luego se analiza las características deseables de un transductor asociándolas con sus respuestas estacionarias y dinámicas. También se menciona consideraciones generales para la selección de un elemento de medición, conceptos básicos de fallas y fuentes de ruidos de medición.

Todos los conceptos vertidos en este capítulo se complementan con ejemplos que buscan clarificar el tema.

### 6.1. Introducción

En todo sistema de control automático de procesos, su éxito es dependiente de un buen sistema de medición de sus variables. La correcta medición en el tiempo (*monitoreo*) de las variables controladas permite un cálculo acertado de las leyes de control, posibilitando un adecuado manejo de las variables de entrada (manipuladas) que llevan al proceso a un punto de operación deseado. Esto hace del elemento de medición o transductor un elemento clave en el sistema de control.

La medición de una variable de control puede ser con lectura local o bien con envío de información a distancia para su lectura en la sala de control. Este último caso permite procesar la información *en línea* por el sistema de control y guardar información histórica para su posterior análisis *fuera de línea*.

Las variables más comúnmente monitoreadas en un proceso industrial y sus correspondientes transductores son: <sup>1</sup>:

- Temperatura: termocuplas, termorresistencias, termistores, etc.;
- Presión: diafragmas y membranas con strain gauges, etc.;

---

<sup>1</sup>En este punto se recomienda revisar las obras de Liptak y Venczel ([50, 51]), Liptak ([49]), Soloman ([82]), entre muchas otras.

- Caudal: bridas de orificio, tubos pitot, medidores térmicos de flujo másico, medidores por efecto de Coriolis, medidores de turbina, de vortex, de flujo electromagnético, sónicos, etc.;
- Nivel de líquido: celdas de presión diferencial, flotadores, etc.;
- composición: medidores con electrodos que miden el potencial químico de iones, conductímetros, cromatógrafos, etc.

A esta lista de variables debemos agregar, pH, densidad, turbidés, viscosidad, nivel de sólidos, humedad, espumas en suspensión, humos, niveles de ruidos e iluminación, etc.

Finalmente, es importante remarcar que la medición de una variable de control puede llevarse a cabo en forma *invasiva* o *no invasiva*. La mayoría de los transductores son invasivos, esto puede causar la inexactitud de la medición y exigir un mantenimiento constante del sensor (dependiendo del ambiente en donde se encuentra inmerso) debido problemas de ensuciamiento y/o corrosión. También se debe tener en cuenta que una medición invasiva implica una perturbación del sistema que se desea monitorear, de ahí la necesidad de perturbar lo menos posible a dicho sistema con las mediciones. Por ejemplo, medir un caudal con una brida de orificio provoca una caída de presión constante, que conlleva a un menor rendimiento y a un incremento del costo operativo, que con el tiempo puede tornarse importante, si bien el costo de inversión para la instrumentación puede ser bajo. De esto se desprende que es de suma importancia, la cuidadosa selección del elemento de medición y su localización, para lograr una medición representativa, con un mínimo de deterioro del mismo y lo menos invasivo posible.

## 6.2. Terminología y Definiciones

Es de remarcar que si bien en esta sección se vierten definiciones que resultan de un análisis lógico del tema, para propósitos de estandarizar un lenguaje, es importante tener en cuenta definiciones de las normas ANSI/ISA [13].

**Definición 6.2.1 — Instrumento [13].** Un dispositivo utilizado para la medición directa o indirecta, monitoreo y/o control de una variable, incluyendo elementos primarios, indicadores, controladores, elementos finales de control, dispositivos informáticos y dispositivos eléctricos tales como anunciadores, conmutadores y pulsadores <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Este término no se aplica a componentes internos de dispositivos o partes, tales como fuelles o resistencias de receptores.

Tradicionalmente, el término transductor ha sido aplicado a dispositivos, o combinaciones de dispositivos, que convierten señales de una naturaleza física a otra en forma proporcional, de manera que permita su lectura en línea.

Más específicamente, se entiende por transductor al dispositivo que provee una señal de salida utilizable, en respuesta a una señal de entrada medida. Esta



señal es la propiedad física que se desea medir, mientras que la señal de salida debe ser interpretable por el sistema de monitoreo para ser implementada en el sistema de control del proceso.

De lo hasta aquí expuesto podemos definir a un elemento de medición como sigue:

**Definición 6.2.2 — Elemento de Medición o Transductor.** Es un dispositivo que tiene la capacidad de detectar una magnitud física o química representativa de un proceso, llamada variable de instrumentación o de proceso, y convertirla en una señal de salida de otra naturaleza física para que puede ser enviada mediante las líneas de transmisión para su lectura o posterior procesamiento.

También, de acuerdo con normas ANSI/ISA,

**Definición 6.2.3 — Elemento de Medición o Transductor [13].** Un término general para un dispositivo, que puede ser un elemento primario, transmisor, relé, convertidor u otro dispositivo, que recibe información en forma de una o más magnitudes físicas, modifica la información o su forma, o ambas si es necesario, y produce una señal de salida resultante.

Si bien los transductores actuales suelen estar integrados en una sola pieza en general, para cumplir la función antes mencionada, se pueden distinguir tres etapas para la generación de la señal salida en respuesta a la magnitud física medida,

- un elemento de medición primario que básicamente consiste de un elemento sensible o sensor,
- un transmisor de la señal y
- ocasionalmente, se puede incorporar un convertidor o acondicionador de señal.

La Fig. 6.1 muestra un esquema sencillo de un transductor.

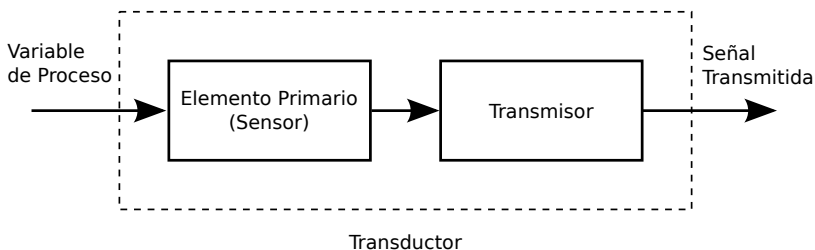


Figura 6.1: Diagrama esquemático de un transductor para señales de procesos.

De lo expuesto se desprende que,

**Definición 6.2.4 — Sensor, Elemento Primario o captador.** Es el primer elemento instalado en un transductor, capaz de utilizar o transformar la energía asociada a magnitudes físicas o químicas a medir, llamadas variables controladas o de instrumentación, en magnitudes representativas de dichas variables en tiempo real y generalmente de naturaleza eléctrica.

De acuerdo normas ANSI/ISA la definición de un elemento primario es,

**Definición 6.2.5 — Elemento Primario [13].** Un instrumento o elemento de sistema externo o interno que convierte cuantitativamente la variable medida en una forma adecuada para la medición; por ejemplo

- a) una placa de orificio es un elemento primario externo
- b) el sensor de un transmisor es un elemento primario interno.

Dependiendo de la variable a medir (o monitorear), este dispositivo puede o no estar en contacto directo con dicha variable.

**Definición 6.2.6 — Transmisor.** Tiene la función de convertir la señal de salida del elemento primario a una forma compatible con la naturaleza de las líneas de transmisión e interpretable por otros dispositivos.

En este punto es importante establecer la diferencia entre transmisor y medidor.

**Definición 6.2.7 — Medidor.** Dispositivo cuya entrada es la señal producida por un elemento primario y genera una salida equivalente en unidades interpretables por el operador humano.

**Definición 6.2.8 — Conversor, convertidor o acondicionador.** Es el dispositivo que se utiliza para acondicionar (lograr la compatibilidad) de la señal entre elemento que transmite y el que recibe.

Según normas ANSI/ISA,

**Definición 6.2.9 — Convertidor [13].** Un dispositivo que recibe información de una señal de instrumento con una dada forma y transmite una señal de salida con otra forma, tal como un convertidor de señal de corriente a neumática<sup>a</sup>.

<sup>a</sup> a) un instrumento que cambia la salida de un sensor a una señal estándar, está debidamente designado como transmisor, no como convertidor; típicamente, un elemento de temperatura [TE] se conecta a un transmisor [TT], no a un convertidor [TY].

b) un convertidor se denomina a veces un transductor, un término completamente general que no es recomendado para la conversión de la señal.

Usualmente, acondicionador de señal consiste en circuito eléctrico que procesa la señal medida por el transductor, fundamentalmente buscando que dicha señal sea lineal y estandarizada de los rango de trabajo.

Hay dos necesidades básicas que motivan el acondicionamiento de una señal:

1. compatibilizar la naturaleza de todas las señales dentro de un lazo de control y
2. la linealización de mediciones que por su propia naturaleza suelen ser no lineales.

Para comprender la primer cuestión debemos entender que los distintos dispositivos de un lazo de control suelen manejar señales de distintas naturalezas en sus entradas y salidas. Por ejemplo un controlador puede recibir una señal eléctrica entre 4-20 mA y una válvula de control, que recibe la señal del controlador, bien podría ser neumática y consecuentemente opera con un span de entrada de 3-15 psig. Consecuentemente, es necesario un conversor de señal que convierta la señal eléctrica de salida del controlador en una señal neumática interpretable por la válvula de control. Dicho elemento es conocido como una I/P o conversor de corriente en presión.

Con la segunda cuestión que debemos entender es que muchas variables a medir son originadas por respuestas no lineales de los elementos de medición y consecuentemente, la señal medida que representa a dicha variable es de naturaleza no lineal. Por ejemplo, si deseamos medir un caudal de líquido incorporando una brida de orificio dicho caudal será proporcional a la raíz cuadrada de la presión. Claramente, dicha medición es no lineal y una posibilidad es la incorporación de lo que se conoce como extractores de raíz cuadrada, que simplemente consiste en transformar la señal original en una señal proporcional a la medición; asegurando así mediciones lineales en todas las señales incorporadas en el lazo de control.

La amplitud y el rango o span de una señal debe estar comprendidos dentro de límites muy precisos para asegurar la compatibilidad con el resto de las señales del lazo de control. Estos rangos se determinan, generalmente, por el tipo de fenómeno que se está midiendo, y por el tipo de transductor que se utiliza.

Todas las señales dentro de un lazo de control deben estar normalizadas como señales de corriente (entre 4 y 20 mA) o de tensión (entre 0 y 5 V, 0 y +10 V, -5 y +5 V y -10 y +10 V). En este punto se remarca que, las señales de corriente son muy usadas en la industria ya que los lazos de corrientes, por su propia naturaleza, están exentos de ruidos. Esto no ocurre con los lazos de tensión.

De manera que con el acondicionamiento de una señal se busca,

- la amplificación de una medición de bajo nivel,
- la adaptación de la señal de salida a una señal de corriente o tensión en un rango standard,
- el filtrado y de ser posible la supresión de ruidos y, en algunos casos
- la conversión de las mismas de naturaleza analógica a digital, o viceversa.

## 6.3. Características de Elementos de Medición

Para la selección de un elemento de medición se debe tener en cuenta una serie de propiedades o características deseables, las que se pueden agrupar en dos grandes grupos,

- características estáticas y
- características dinámicas.

En términos generales las primeras están asociadas al error estacionario del transductor mientras que las segundas se asocian a la respuesta dinámica del mismo.

### 6.3.1. Características estáticas de un elemento de medición

Las características estáticas de un transductor describen el comportamiento del mismo en régimen permanente o estacionario. Por tal motivo, la mayoría de ellas se cuantifican en términos de error.

A continuación se lista una serie de términos comunes que a su vez son propiedades que caracterizan un elemento de medición y que deben ser tenidas en cuenta al momento de seleccionar un transductor.

**Rango de entrada (salida) de un instrumento:** Intervalo comprendido entre el mínimo y el máximo valor de la señal de entrada (salida).

**Alcance o span de entrada (salida) de un instrumento:** Diferencia entre el máximo y el mínimo valor de la señal de entrada (salida).

Para comprender la diferencia entre ambos términos considere el Ejem. 6.1.

**Ejemplo 6.1** Se tiene un instrumento que mide temperatura entre 0 y 100 °C y su señal de salida varía entre 4 y 20 mA; ¿a qué es igual el rango de entrada/salida y el span de entrada/salida?

De acuerdo con las definiciones anteriores se tiene que

- Rango de entrada: [0 100]°C.
- Rango de salida: [4 20] mA.
- Span de entrada: 100 °C.
- Span de salida: 16 mA.

**Exactitud:** Se refiere a la desviación de los valores medidos respecto al considerado como su verdadero valor.

**Precisión:** Se define los límites de los errores cometidos en torno a un mismo valor medido de entrada ocurrido repetidas veces.

La Fig. 6.2 muestra a través de conceptos de probabilidad la diferencia entre precisión y exactitud. En pocas palabras, la exactitud indica la distancia de la medición al valor verdadero<sup>2</sup>, mientras que la precisión lo hace con respecto al

<sup>2</sup>Es importante recordar que una alta exactitud implica una distancia corta entre el valor medido

valor más repetitivo.

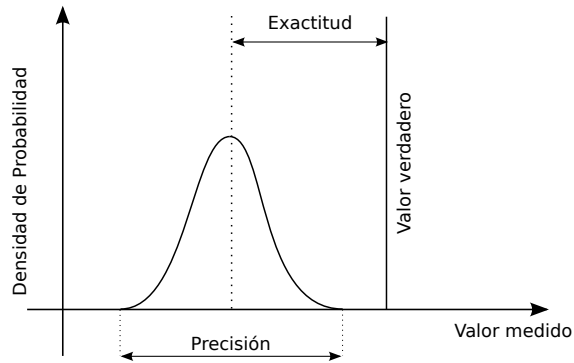


Figura 6.2: Diagrama esquemático que marca la diferencia entre precisión y exactitud.

**Resolución:** La resolución de un elemento de medición es el menor salto o cambio en la señal de entrada capaz de producir un cambio apreciable en la señal de salida<sup>3</sup>.

En otras palabras, es el incremento más pequeño que permite diferenciar una lectura de otra.

**Repetitividad:** Es el error esperado al repetir varias veces la misma medida. Usualmente la repetitividad es un valor menor o igual a la precisión.

La repetitividad suele ser un parámetro estático importante en la medición de variables de procesos ya que en la mayoría de los casos es preferible tener un mismo valor medido con un instrumento con poca precisión que tener una medición muy precisa que lleve a valores no repetitivos.

Usualmente, la precisión y la exactitud de un instrumento no se mantiene constante en el tiempo, pero es normal que los equipos se degraden paulatinamente y es por ello, que se emplea la tolerancia como una especificación límite global del instrumento de medición.

**Tolerancia de medida de un instrumento:** Se define tolerancia o margen de tolerancia de un instrumento al intervalo de valores en el que debe encontrarse una magnitud medida por el mismo, para que se acepte como válida, cuando se utiliza en condiciones normales de servicio, durante un cierto tiempo.

La tolerancia se suele expresar como un porcentaje del valor máximo del rango de entrada del instrumento, también designado este error porcentual a escala completa<sup>4</sup>.

y el verdadero, mientras que por el contrario una baja exactitud es una distancia grande entre ellos.

<sup>3</sup>Note que la resolución no asegura un error menor a la precisión del instrumento.

<sup>4</sup>Algunos fabricantes llaman a la tolerancia como *precisión a escala completa* o *precisión a full scale*, por su designación en Inglés (usando la sigla, f.s.)

En algunos casos la tolerancia puede ser *simétrica* (por ejemplo,  $100^{\circ}\text{C} \pm 0,1^{\circ}\text{C}$ ) o *asimétrica* (por ejemplo,  $100^{\circ}\text{C} +0,1^{\circ}\text{C}/-0,05^{\circ}\text{C}$ ).

Usualmente, se recomienda no utilizar un transductor para medidas por debajo del 10 % de valor máximo del rango.

**Ejemplo 6.2** Un fabricante de caudalímetros de turbina especifica que el rango de caudales de medición de su instrumento es de [0 10] l/min, con un rango de salida de [4 20] mA y que la lectura tiene una tolerancia de  $\pm 2\%$  y una precisión del  $\pm 1\%$ .

Analice para un caudal de 5 l/min,

- ¿qué desviación se espera tener en la lectura respecto al valor medido?
- ¿En que intervalo de valores se encontrará la lectura?
- Analice que ocurre con las mediciones cuando se pretende medir caudales cercanos a cero.

Primeramente se determina la ganancia del elemento de medición la que resulta,

$$K_m = \frac{16 \text{ mA}}{10 \text{ l/min}} = 1,6 \text{ mA/l/min}$$

Luego la señal medida exacta resulta,

$$y_m = yK_m + 4 \text{ mA.}$$

donde  $y$  es la variable monitoreada (en este caso el caudal), e  $y_m$  la señal medida en mA. De acuerdo con la ecuación anterior la señal medida exacta resulta  $y_m^{exact} = 12\text{mA}$ .

Si la precisión del instrumento es de  $\pm 1\%$  (o bien,  $\pm 0,12 \text{ mA}$ ), entonces la señal de salida se encontrará dentro de los límites [11.88 12.12] mA, lo que se corresponde con una lectura que estará dentro del intervalo [4.925 5.075] l/min.

Si la tolerancia del instrumento es de  $\pm 2\%$  por tanto el intervalo de valores en donde se espera encontrar las lecturas es,

$$\pm 0,02 \text{ 20 mA} = \pm 0,4 \text{ mA.}$$

Por tanto, la señal de salida se encontrará en el intervalo [11.6 12.4] mA, lo que se corresponde con una lectura que estará dentro del intervalo [4.75 5.25] l/min.

La Fig. 6.3 intenta clarificar esta diferencia en los intervalos.

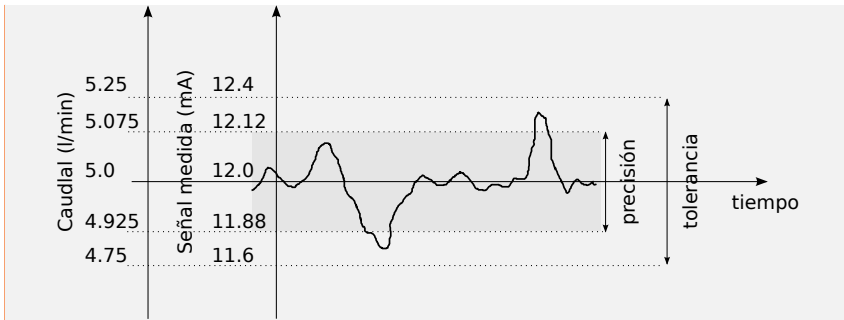


Figura 6.3: Diagrama de la medición de caudal del Ejem. 6.2.

Finalmente, note que con las mediciones a fondo de escala la exactitud puede resultar muy mala (alejándose mucho del valor verdadero) ya que el rango de tolerancia puede resultar de un orden cercano a la medición. ■

**Sensibilidad:** Es la pendiente de la curva calculada como el cociente entre el incremento de la señal de salida y el incremento más pequeño capaz de ser medido en la entrada de la propiedad física a medir. Se suele expresar como un porcentaje referido al alcance.

**Linealidad:** Linealidad es un término general usado para describir cuán cerca se encuentra la respuesta real con respecto a recta ideal del elemento de medición en su rango de operación. Es importante destacar este concepto, ya que busca expresar la no linealidad de salida del instrumento, que puede ser estudiada basándose en error entre la señal de salida real y la que tendría el instrumento si fuese lineal para un mismo valor de señal de entrada.

El error de linealidad puede ser expresado como,

$$\text{Error de Linealidad (\%)} = \frac{\text{máxima desviación}}{\text{alcance del instrumento}} 100$$

Es de remarcar que, algunos autores dividen por el valor a fondo de escala, en lugar del alcance del instrumento.

Note que el error de linealidad está midiendo *la pérdida de linealidad* que experimenta el elemento de medición respecto al funcionamiento lineal ideal.

Así una definición alternativa sería como se expresa a continuación.

*Es la máxima desviación de la curva de calibración de un instrumento respecto a la recta que pasa por el 0 % y el 100 % de la variable medida.*

Para comprender estos conceptos se propone el Ejem. 6.3

**Ejemplo 6.3** Se desea medir una temperatura de un fluido de proceso que varía entre 40 y 60 °C y para ello se propone dos elementos de medición diferentes, una termorresistencia Pt100 y un termistor que fueron calibrados para tener una salida de 0 a 5 V para una variación de temperatura de 0 a 100 °C. Las ecuaciones que modelan el cambio de la resistencia con la temperatura se listan en la Tabla 6.1.

Tabla 6.1: Ecuaciones características de una Pt100 y un termistor y sus parámetros correspondientes.

Transductor	Resistencia	Parámetros
Pt100	$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$	$R_0 = 100 \Omega$ $T_0 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ $\alpha = 0,00385 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
Termistor	$R = R_0 e^{\beta(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0})}$	$R_0 = 100 \Omega$ $T_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ $\beta = 5000 \Omega$

- Analice la sensibilidad de ambos instrumentos en los extremos del rango de temperatura del fluido de procesos.
- ¿A qué es igual la linealidad y la no linealidad de salida de los instrumentos?

Dado que la sensibilidad resulta ser la derivada evaluada en la función que representa la señal de salida con la temperatura medida a la temperatura del proceso entonces, de acuerdo con las ecuaciones de la Tabla 6.1 dicha variabilidad depende de la variación de la resistencia con la temperatura. Por tanto,

Para la PT 100,

$$\frac{dR}{dT} = R_0\alpha = 0,3850 \Omega \text{ }^\circ\text{C}^{-1},$$

de donde resulta independiente de la temperatura. De manera que la sensibilidad resultará constante en todo el rango de medición.

Para el termistor,

$$\frac{dR}{dT} = -R(T)\frac{\beta}{T^2}.$$

A diferencia de la Pt100, la resistencia del termistor varía con la temperatura y lo hace en forma considerable. Así, para cuando  $T = 40 \text{ }^\circ\text{C}$ , la  $\frac{dR}{dT}|_{(40)} = -2,2839 \Omega \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , mientras que para  $T = 60 \text{ }^\circ\text{C}$ , la  $\frac{dR}{dT}|_{(60)} =$



$-0,77304 \Omega \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , resultando en una reducción de casi 3 veces en la sensibilidad para un cambio de temperatura de  $20 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Estos resultados muestran que el termistor es muy sensible a las variaciones de temperatura cuando esta es baja y consecuentemente, pierde sensibilidad a medida que la temperatura aumenta.

Estos resultados se resumen en la Fig. 6.4. Note que la mayor sensibilidad permite que pequeños cambios en la temperatura produzca importantes cambios en el voltaje de salida del instrumento.

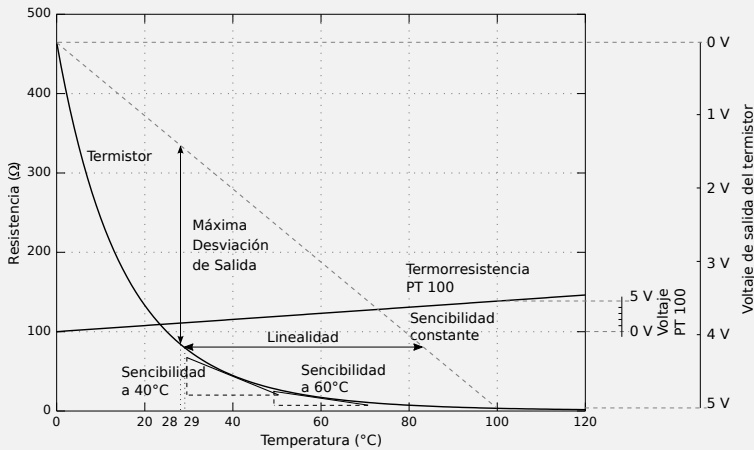


Figura 6.4: Comparación de las variaciones de resistencia con la temperatura para los transductores Pt100 y termistor, y sus señales de salida correspondiente.

En cuanto a la *linealidad* i) la termorresistencia Pt100 es prácticamente lineal en el rango de medición, mientras que el termistor presenta una pérdida de linealidad importante (aproximadamente a los  $29 \text{ } ^\circ\text{C}$ ) con una desviación máxima cercana a  $52.4 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

En cuanto a la *no linealidad de la resistencia*, vemos que i) la termorresistencia Pt100 no presenta no linealidad, mientras que ii) el termistor es fuertemente no lineal y presenta una máxima desviación de la resistencia respecto al valor lineal a la temperatura de  $T \approx 28 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Dicho valor se puede determinar como indica a continuación.

Siendo la variación lineal de la resistencia con la temperatura,

$$R_l(T) = m(T - 273) + R(273),$$

con  $R(373) = 3,4263 \Omega$  la temperatura a  $373 \text{ } ^\circ\text{K}$ ,  $m = [R(273) - R(373)]/100 = -4,6140 \Omega \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  con  $R(273) = 464,83 \Omega$  la temperatu-

ra a 273 °K y la resistencia no lineal del termistor de acuerdo con la Tabla 6.1 luego, tomando la diferencia entre ambas expresiones y derivando se llega a,

$$mT^2 + \beta R(T) = 0.$$

Resolviendo esta última ecuación no lineal se tiene que,  $T \approx 28$  °C y la no linealidad es de aproximadamente de 251,03Ω. Lo que da como resultado, una máxima desviación en la medición de la temperatura respecto de la línea recta, en el rango de calibración del instrumento. ■

**Errores:** Los errores debido a fallas de instrumentos<sup>5</sup> provocan la aparición *errores sistemáticos* en las lecturas. Estos errores se clasifican en,

1. Errores estáticos. Es el error resultante cuando el sistema se encuentra en estado estacionario.
2. Errores dinámicos. Es el error resultante cuando la señal a medir cambia en el tiempo.

**Histéresis:** En ocasiones, la gráfica de la señal de salida del transductor en función de la magnitud física a medir no sigue los caminos con el aumento de la señal de entrada que con la disminución de la misma.

Por tal motivo se suele definir a la histéresis como la máxima diferencia entre ambos caminos para una misma señal de entrada dividido el rango de entrada por 100. En otras palabras, se expresa la histéresis como un porcentaje del span de trabajo<sup>6</sup>.

**Offset:** Es la lectura de salida cuando la variable de entrada es nula. Si el rango de medida no tiene valores nulos se lo toma respecto a un punto de referencia y se lo puede expresar en variables de desviación respecto a dicho punto. Usualmente se expresa el offset como un porcentaje del rango o fondo de escala, y resulta en una componente crítica cuando se hacen mediciones en la parte baja del rango.

### 6.3.2. Características dinámicas de un elemento de medición

Las características dinámicas de un transductor describen el comportamiento del mismo en régimen transitorio.

Las características más comunes a ser tenidas en cuenta son las que se listan a continuación

**Velocidad de Respuesta:** Indica la capacidad de un transductor de seguir los cambios en el tiempo de una magnitud física mediante su señal de salida.

Dado que los elementos de medición tienen en su forma más simple funciones de transferencia de primero o segundo orden<sup>7</sup>, una forma de cuantificar

<sup>5</sup>No se incluye en este análisis a los errores humanos ni a los errores aleatorios.

<sup>6</sup>También algunos autores suelen definir a la histéresis de salida con similar criterio a la histéresis de entrada pero a igualdad de señal de salida

<sup>7</sup>Difícilmente un transductor conste de una ganancia estática o función de transferencia de orden

la velocidad de respuesta es mediante parámetros que caracterizan la respuesta transitoria de un sistema. Estos son,

- Constante de tiempo.
- Tiempo de crecimiento.
- Tiempo de Establecimiento.
- Sobrevalores.

**Respuesta en Frecuencia:** Busca medir la respuesta de un sensor ante entradas periódicas sinusoidales. Para esto hay dos parámetros típicos.

- Rango de frecuencia: es el intervalo de frecuencias en el que para entradas sinusoidales mantienen relación de amplitud (salida/entrada) constante.
- Desfase: define el retraso de fase (a una frecuencia dada) de la señal de salida respecto a una señal sinusoidal de entrada.

**Deriva:** Indica el cambio gradual en la lectura de un instrumento en un período de tiempo prolongado sin corresponderse con ningún cambio de entrada. Suele expresarse como un porcentaje del alcance o span de entrada por unidad de tiempo.

La desviación (o pérdida de estabilidad) de la lectura de salida del transductor puede deberse al variar ciertos parámetros exteriores distintos del que se pretende medir, tales como condiciones ambientales, alimentación, u otras perturbaciones.

**Deriva de Cero:** Describe el cambio de en la lectura del cero de un instrumento que pueda ocurrir a lo largo del tiempo.

**Error Dinámico:** Se define como la diferencia entre el valor exacto de la magnitud física y el indicado por el instrumento.

### 6.3.3. Características deseables de un elemento de medición

A continuación se lista una serie de propiedades que se aspira para un elemento de medición.

1. La exactitud y precisión de la medición deben ser tan altas como fuese posible.
2. El rango de funcionamiento debe ser amplio y debe tener buena exactitud y precisión en todo el rango.
3. La tolerancia debe ser baja para tener un intervalo de validez de las mediciones pequeño.
4. La sensibilidad debe ser alta para lograr una salida visible frente a pequeños cambios en la señal de entrada.
5. La no linealidad y la histéresis son una características no deseables y se pretende que ambas sean lo más baja posible.
6. El transductor debe ser resistente a las condiciones ambientales a las que estará sujeto.

La Tabla 6.2 resumen las características estáticas y dinámicas deseables para un transductor.

Tabla 6.2: Resumen de características estáticas y dinámicas deseables para un transductor.

<b>Características Estática</b>	<b>Pretendido</b>
Exactitud	alta
Precisión	alta
Tolerancia	baja
Sensibilidad	alta
No Linealidad	baja
Histéresis	baja
Offset	nulo
<b>Características Dinámicas</b>	<b>Pretendido</b>
Constante de Tiempo	baja
Tiempo de crecimiento	bajo
Tiempo de establecimiento	bajo
Sobrevalores	bajo
Estabilidad y Derivas	bajo
Error dinámico	bajo

## 6.4. Dinámica de Elementos de Medición

Todo elemento de medición por tratarse de un sistema físico tiene una dinámica relacionada al proceso natural de convertir una señal de una naturaleza a otra, ya que el mismo no puede ser instantáneo. Por tal motivo, la dinámica del transductor estará asociada la función de transferencia del mismo y particularmente a los polos de dicha función determinando así la característica de la respuesta.

Por lo general, lo que se pretende en un transductor es que su dinámica sea despreciable frente a la dinámica del sistema o proceso al que se desea monitorear. En otras palabras, la/s constantes de tiempo del elemento de medición debe/n ser mucho menor a la/s constante/s de tiempo del proceso.

Para medir la dinámica de un elemento de medición los fabricantes usualmente reportan una constante de tiempo obtenida experimentalmente a partir de la respuesta a un escalón de la señal de entrada.

### 6.4.1. Dinámica de un transductor de temperatura

#### Termocupla sin vaina

Considere el sistema de medición de temperatura de la Fig. 6.5 que representa una termocupla sin vaina protectora.

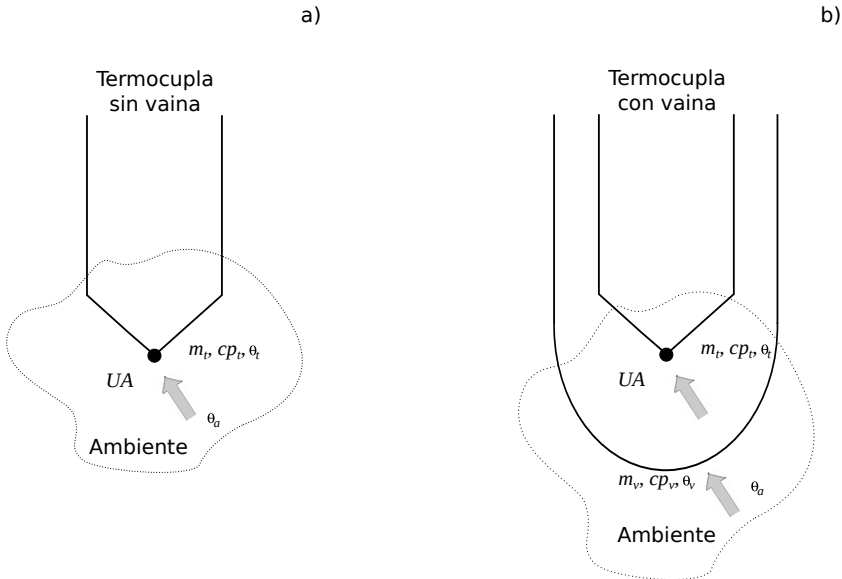


Figura 6.5: Diagrama esquemático de a) una termocupla sin vaina y b) con vaina.

#### Hipótesis

1. Toda la masa de la termocupla en contacto con el medio ambiente a medir su temperatura está concentrada en un punto.
2. Propiedades físicas constantes.
3. Todo el calor que ingresa a la termocupla es acumulado por ella.

Basándose en las hipótesis anteriores el balance de energía en estado transitorio resulta,

$$\left( \begin{array}{c} \text{Calor acumulado} \\ \text{en la termocupla} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Calor que ingresa desde} \\ \text{el medio ambiente a la termocupla} \end{array} \right)$$

$$\frac{d(m_t c_{p_t} \theta_t)}{dt} = UA(\theta_a - \theta_t)$$

sujeta a la condición inicial  $\theta_t(0) = \theta_t^0$  y donde,  $\theta_t$  es la temperatura de la termocupla,  $\theta_a$  es la temperatura ambiente a medir,  $m_t$  masa de la termocupla en contacto con el ambiente,  $c_{p_t}$  calor específico de la termocupla,  $UA$  coeficiente global de transferencia de calor por el área de intercambio calórico.

El mismo balance en estado estacionario resulta,

$$0 = UA(\theta_a^0 - \theta_t^0),$$

que pasando a variables de desviación se llega a,

$$m_t c_{p_t} \frac{d\hat{\theta}_t}{dt} = UA(\hat{\theta}_a - \hat{\theta}_t). \quad (6.1)$$

sujeta a la condición inicial  $\hat{\theta}_t^0 = 0$ .

Claramente, resulta una ecuación diferencial lineal a coeficientes constantes con condiciones nulas. Por tal motivo, es posible aplicar transformada de Laplace resultando,

$$m_t c_{p_t} \hat{\Theta}_t s = UA(\hat{\Theta}_a - \hat{\Theta}_t) \quad (6.2)$$

que despejando resulta,

$$\frac{\hat{\Theta}_t(s)}{\hat{\Theta}_a(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (6.3)$$

donde se define  $T := \frac{m_t c_{p_t}}{UA}$ .

De acuerdo con la Ec. 6.1 la función de transferencia resulta de primer orden donde la constante de tiempo es función de la propiedades físicas de la termocupla y del medio ambiente al que se quiere medir la temperatura.

### Termocupla con vaina

En algunos ambientes corrosivos donde es necesario medir la temperatura, algunas termocuplas incluyen una vaina protectora. Un esquema simplificado se muestra en la Fig. 6.5.

#### *Hipótesis*

1. Toda la masa de la termocupla en contacto está concentrada en un punto.
  2. Toda la masa de la vaina de la termocupla en contacto con el medio ambiente a medir su temperatura está concentrada en un punto. Esta hipótesis puede no ser buena en especial si el sistema termocupla-vaina es muy largo.
  3. Propiedades físicas constantes.
  4. Todo el calor que ingresa a la termocupla es acumulado por ella.
- Primeramente se plantea el balance de energía en la vaina y para ello,

$$\left( \begin{array}{c} \text{Calor acumulado} \\ \text{en la vaina} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Calor que ingresa desde el} \\ \text{medio ambiente a la vaina} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Calor que ingresa sale desde} \\ \text{la vaina hacia la termocupla} \end{array} \right)$$

$$\frac{d(m_v c_{p_v} \theta_v)}{dt} = U_1 A_1 (\theta_a - \theta_v) - U_2 A_2 (\theta_v - \theta_t)$$

sujeto a la condición inicial  $\theta_v(0) = \theta_v^0$  y donde  $\theta_v$  es la temperatura de la vaina.

En estado estacionario,

$$0 = U_1 A_1 (\theta_a^0 - \theta_v^0) - U_2 A_2 (\theta_v^0 - \theta_t^0).$$

Pasando a variables de desviación se llega a

$$m_v c_{p_v} \frac{d\hat{\theta}_v}{dt} = U_1 A_1 (\hat{\theta}_a - \hat{\theta}_v) - U_2 A_2 (\hat{\theta}_v - \hat{\theta}_t) \quad (6.4)$$

sujeta a la condición inicial  $\hat{\theta}_v^0 = 0$ . Dado que la Ec. 6.4 es una ecuación diferencial ordinaria a coeficientes constantes es posible aplicar transformada de Laplace llegando a,

$$m_v c_{p_v} \hat{\Theta}_v s = U_1 A_1 (\hat{\Theta}_a - \hat{\Theta}_v) - U_2 A_2 (\hat{\Theta}_v - \hat{\Theta}_t) \quad (6.5)$$

Ahora, de acuerdo con la Fig. el balance de energía que modela la transferencia de calor desde la vaina hacia la junta de medición resulta,

$$\frac{d(m_t c_{p_t} \theta_t)}{dt} = U_2 A_2 (\theta_v - \theta_t)$$

sujeta a la condición inicial  $\theta_t(0) = \theta_t^0$ . Dicho balance en estado estacionario resulta,

$$0 = U_2 A_2 (\theta_v^0 - \theta_t^0),$$

y variables de desviación,

$$m_t c_{p_t} \frac{d\hat{\theta}_t}{dt} = U_2 A_2 (\hat{\theta}_v - \hat{\theta}_t). \quad (6.6)$$

sujeta a la condición inicial  $\hat{\theta}_t^0 = 0$ . Aplicando transformada de Laplace a la última ecuación se tiene que,

$$m_t c_{p_t} \hat{\Theta}_t s = U_2 A_2 (\hat{\Theta}_v - \hat{\Theta}_t). \quad (6.7)$$

Combinando las Ecs. (6.5) y (6.7) se obtiene la función de transferencia entre la temperatura de la junta de medición y la temperatura ambiente que se desea medir,

$$\frac{\hat{\Theta}_t}{\hat{\Theta}_a} = \frac{1}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2 + T_i) s + 1}. \quad (6.8)$$

Comparando el denominador de la Ec. 6.8 con la forma canónica normalizada (3.29) se tiene que,

$$T = \sqrt{T_1 T_2}$$

$$\zeta = \frac{(T_1 + T_2 + T_i)}{2\sqrt{T_1 T_2}}$$

donde se define,

$$T_1 := \frac{m_v c_{p_v}}{U_1 A_1}$$

$$T_2 := \frac{m_t c_{p_t}}{U_2 A_2}$$

$$T_i := \frac{m_t c_{p_t}}{U_1 A_1}$$

Note que la expresión del coeficiente de amortiguamiento predice que  $\zeta > 1$  dado que  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_i$  son mayores a cero. Consecuentemente, las respuestas dinámicas del sistema termocupla con vaina resultarán sobreamortiguadas.

## 6.5. Seguridad Intrínseca

En determinadas industrias como las petroquímicas, plataformas petrolíferas, tuberías y gaseoductos, y cualquier entorno que almacene gases y polvillos explosivos están sujetas a serios riesgos de ignición y explosión. Por tal motivo, cualquier instrumento o equipo eléctrico instalado en este tipo de atmósferas presenta un serio riesgo que debe ser cuidadosamente contemplado en base a normas de seguridad.

Para que se produzca una ignición en una atmósfera potencialmente peligrosa, es necesario el aporte de un nivel mínimo de energía en presencia de un mínimo volumen o concentración de material, llamado *volumen crítico*. Este concepto se muestra en la Fig. 6.6.

Todo instrumento de medición o equipo que opera en este tipo de ambientes tiene diferentes potenciales fuentes de explosión como ser,

- electricidad estática, arcos eléctricos y chispas,
- superficies con altas temperaturas, por llamas, fricción mecánica, compresión,
- reacciones químicas no deseables, radiación electromagnética, energía acústica, radiación ionizante, etc.

**Definición 6.5.1 — Seguridad Intrínseca.** Se define como seguridad intrínseca al conjunto de medidas adoptadas en el circuito eléctrico y el cableado de un equipo o elemento de medición ubicado en zonas potencialmente peligrosas para que ninguna chispa o efecto térmico producido sea capaz de provocar la inflamación de una atmósfera explosiva.

En síntesis, estas medidas de seguridad se basan en limitar la energía, tanto eléctrica como térmica, para que no supere el límite de ignición de una mezcla atmosférica peligrosa.

En otras palabras, el cableado y los equipos intrínsecamente seguros, bajo condiciones normales y extremas, no deben emitir suficiente energía eléctrica



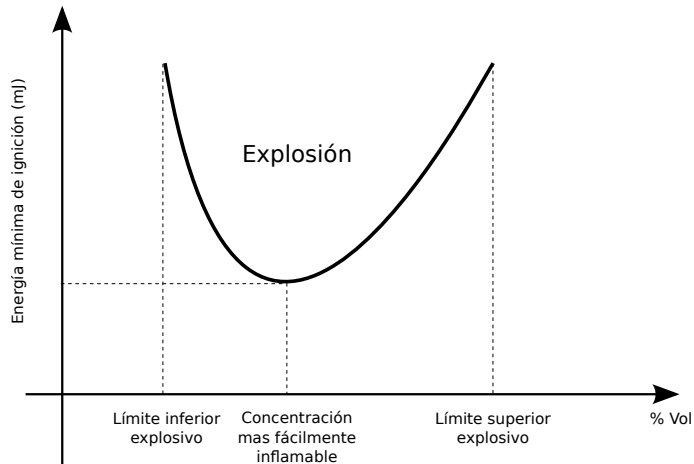


Figura 6.6: Diagrama esquemático que muestra el riesgo de explosión de un gas inflamable midiendo la energía mínima de ignición en función del %vol de gas explosivo.

ni térmica como para encender ni la más mínima concentración de una mezcla atmosférica combustible o inflamable.

Para la instalación de un elemento de medición en una atmósfera peligrosa se debe tener en cuenta tres consideraciones básicas de protección:

1. Confinar el área de una eventual explosión para así controlar sus efectos.
2. Separar la atmósfera explosiva del aporte energético.
3. Reducir la energía tratando de impedir acumulación de energía electrostática evitando así la formación de arcos, chispas o calentamientos.

Un ejemplo de esto es el uso de gabinetes presurizados.

En síntesis, en ambientes peligrosos, toda instrumentación industrial se divide en dos áreas,

- el área peligrosa: donde se encuentra instalada el elemento de medición intrínsecamente seguro y
- el área segura: donde se encuentra la interfase intrínsecamente segura, el cableado y el sistema de transmisión para el monitoreo de datos de entrada y salida del sistema de control.

Todas las medidas de seguridad a adoptar para considerar que la instalación de equipos y elementos de medición sean intrínsecamente seguros se rigen por diferentes *normas de seguridad*, algunas de ellas internacionalmente aceptadas. La evaluación y certificación de esto está a cargo de entidades independientes ajenas a las compañías. Las pruebas realizadas por estos organismos independientes garantizan que se cumple con todos los estándares obligatorios de seguridad intrínseca.

## 6.6. Criterios para la Selección de Elementos de Medición

La selección de un elemento de medición está condicionada a una serie de factores que deben ser tenidos en cuenta al momento determinar el elemento de medición más adecuado.

Si bien no existe una metodología a seguir, hay una serie de consideraciones generales que deben ser tenidas en cuenta. Por ejemplo:

- Características de la magnitud física a medir.
- Condiciones del lugar de instalación.
- Características estáticas y dinámicas de los transductores disponibles en el mercado.
- Costos.

### 6.6.1. Consideraciones generales

#### Características de la magnitud física a medirle

En la industria de procesos hay una serie de magnitudes físicas a medir con características diferentes, por tal razón se debe tener en cuenta una serie de factores como ser,

- *propiedades físicas* de la variable a medir como, peso específico, viscosidad, etc.,
- *agresividad*, esto es, acidez, características corrosivas, etc.,
- *presencia de sólidos en suspensión*,
- *rango de operación* de la variable de proceso. Por ejemplo, no es lo mismo medir a bajas presiones que altas presiones.

#### Condiciones del lugar de instalación

El lugar de instalación debe ser tenido en cuenta ya que puede en algunos casos puede ser determinante para su selección. Así, en términos generales puede mencionar:

- *Agresividad del medio ambiente*. En caso de medios ambientes agresivos, La protección contra la corrosión de líquidos o gases corrosivos puede llevar a la necesidad de incluir protecciones especiales como revestimientos y sellos químicos en la carcasa del elemento de medición. Si la instalación se encuentra en un lugar donde los vapores explosivos el transductor y la fuente de alimentación debe ser adecuada para estos entornos, cumpliendo requisitos de seguridad intrínseca.
- *Ubicación del elemento de medición*. Se deberá tener en cuenta, diámetros de cañerías, accesorios presentes, altitud, fijación y anclaje, y facilidad de montaje.

- *Disponibilidad local de fuente de alimentación.* Se debe considerar si la alimentación es eléctrica (o en algunos casos neumática), la disponibilidad de líneas cercanas con la capacidad necesaria.

### Características estáticas y dinámicas

Las características estáticas y dinámicas son un punto importante en la selección del transductor. En la Tabla 6.2 se resume las características deseables para su selección, las que no siempre pueden cumplirse en su totalidad, por diferentes razones como por ejemplo el costo del mismo, su presencia en el mercado local, etc.

### Costos

En este punto se debe considerar los siguientes costos,

- *adquisición,*
- *instalación,*
- *funcionamiento,*
- *mantenimiento y reparación,*
- *repuestos,*
- *vida útil.*

También puede incrementar los costos, la necesidad de materiales y acoples especiales, seguridad intrínseca, y la disponibilidad en el mercado local.

Por estas razones, considerar solamente el costo de adquisición del transductor puede resultar un grave error.

## 6.7. Localización de Sensores

La localización de sensores puede ser crítica en el éxito o en el fracaso de un sistema de control. Es importante que la localización seleccionada permita que la lectura sea sensible y tenga un bajo grado de interacción con otras variables, particularmente en sistemas multivariados.

Por ejemplo, Desphande ([26]) presenta el problema de la localización de un sensor de temperatura en una columna de destilación de etanol-agua. De acuerdo con el autor, en una columna de 50 platos hay *1225 posibles localizaciones* de dos sensores de temperatura que podrían ser elegidas. Observando el perfil de temperatura por plato resulta sencillo determinar que la zona de máxima sensibilidad se encuentra entre los platos 18 y 19. El autor completa este análisis mediante la técnica de análisis con valores singulares.

## 6.8. Fallas en Elementos de Medición

Para conocer el estado de un proceso y diagnosticar su desempeño hace falta monitorear las magnitudes físicas o químicas más representativas del mismo.

Sin embargo, en todo proceso industrial es inevitable la presencia de fallas asociadas al hardware de la planta, (elementos de medición, elementos de control final o actuadores, maquinarias, proceso, computadoras, etc.) e inclusive al software.

Esta vulnerabilidad a las fallas o eventos no previstos, pueden provocar que el sistema tenga bajo desempeño o bien, se comporte de manera no deseada. Todo esto redundará en un incremento de los costos operativos o peor aún en problemas ambientales graves.

Por tales motivos, es altamente recomendable tener en cuenta la detección y diagnóstico de fallas e incorporar esto en el diseño del proceso elementos redundantes, algoritmos de detección y diagnóstico, eviten futuras complicaciones.

Para comenzar a formalizar estos conceptos se introduce la siguiente definición:

**Definición 6.8.1 — Falla.** Es una desviación no esperada o no permitida en al menos una propiedad característica o parámetro del sistema de su condición normal, estándar o aceptable, no siendo dicha desviación producto de perturbaciones externas.

Por lo expuesto antes, la posibilidad de minimizar las paralizaciones en las plantas industriales mediante la correcta *detección e identificación* de fallas resulta imprescindible en toda planta industrial.

Para comprender mejor esto último se introduce más formalmente estos conceptos.

**Definición 6.8.2 — Detección de Fallas.** Es el procedimiento mediante el cual se determina de la presencia de fallas en un sistema de control.

**Definición 6.8.3 — Identificación de Fallas.** Determinación y localización del tamaño o comportamiento temporal de una falla.

La identificación de una falla es el paso siguiente a la detección de fallas.

Por lo aquí expuesto, y puntualmente en los elementos de medición resulta de suma importancia la detección y el diagnóstico de fallas.

Las principales fuentes de error y fallas en dichos elementos son,

1. Errores en la construcción y fallas en componentes de circuito.
2. Fallas en el suministro de potencia.
3. Problemas mecánicos debido a desperfectos en alguno de los componentes.
4. Problemas debidos a ruidos de medición.
5. Problemas por efectos ambientales.

Por estas razones, es que se suele implementar en planta sistemas redundantes de medición.

**Definición 6.8.4 — Redundancia de hardware.** Son múltiples e independientes canales de sensores, actuadores o procesadores, utilizados para mantener al sistema de control operativo frente a una falla.

Esto da lugar a una reestructuración del sistema de control, que es la habilidad que tiene un sistema de control de modificar su estructura de manera de considerar las fallas que fueron detectadas.

### 6.8.1. Ruidos de medición

El ruido eléctrico es toda señal extraña que dentro del equipo puede causar su incorrecta operación o bien provocar una lectura inadecuada de alguna variable de proceso.

Las señales de ruido pueden tener origen en

- las líneas de corriente alterna, en los campos magnéticos o eléctricos originados en equipos cercanos a los transductores
- interferencias debidas a señales de radio o televisión,
- componentes internos al transductor, ya sea componentes mecánicos defectuosos que ocasionen contactos deficientes o intermitentes, o componentes eléctricos.

Todo esto genera señales eléctricas que se suman a la propia medición de una magnitud física o química enmascarando su lectura.

Una solución a estos problemas es el filtrado de ruidos de medición que se discute brevemente con un ejemplo en el Cap. 10 en la Sec. 10.4.

## 6.9. Conclusiones

En este capítulo se presentó terminologías y definiciones comúnmente usadas en control de procesos. También se discute sobre las características estáticas y dinámicas deseables para un elemento de medición. Además, en este punto se incluye el modelo dinámico de una termocupla que busca mostrar las distintas funciones de transferencia para este sistema, y su consecuente cambio en la su respuesta dinámica, dependiendo si esta es expuesta con o sin vaina al medio ambiente que se desea medir su temperatura.

Finalmente se discuten aspectos relacionados a la seguridad intrínseca, criterios de selección de elementos de medición, las problemáticas de la localización y las fallas de los mismos.

### 6.10. Pensemos

1. Se tiene un transductor de posición angular con un rango de [0 10] vueltas con una tensión de salida entre  $[-12 + 12]$  V. La ganancia del mismo ( $K_m$ ) está dada por,
 

<input type="checkbox"/> $K_m = 0,0033$ V/grad.	<input type="checkbox"/> $K_m = 0,0067$ V/grad.
<input type="checkbox"/> $K_m = 0,0667$ V/grad.	<input type="checkbox"/> Ninguna de las anteriores.
<input type="checkbox"/> $K_m = 0,0333$ V/grad.	
2. Asuma que se está midiendo la temperatura ( $T$ ) de un fluido de proceso a lazo abierto con una termocupla con vaina cuya salida ( $T_m$ ) es voltaje. ¿Es posible obtener una respuesta subamortiguada de la termocupla al cambio escalón en la temperatura de fluido?  **SI**  **NO**
3. Durante la puesta en marcha a lazo abierto de un reactor batch se debe seguir una rampa de temperatura. Si el elemento de medición de temperatura no tiene ganancia unitaria, el error de seguimiento de la rampa (diferencia entre la temperatura del reactor y la señal medida pasado el transitorio, en iguales unidades) es
 

<input type="checkbox"/> constante.	<input type="checkbox"/> nula.
<input type="checkbox"/> creciente.	<input type="checkbox"/> Ninguna de las anteriores.
4. Considere un transductor que al seguir una señal de entrada rampa el error dinámico tiende a infinito. ¿Qué sugiere para corregir esto y evitar el reemplazo del transductor?
  - Incluir un polo al origen en la función de transferencia del elemento de medición.
  - Reajustar la ganancia.
  - incluir un lazo de realimentación en el transductor
  - Ninguna opción de las opciones anteriores.
5. Un fabricante de instrumentos de medición ofrece un transductor que permite incluir un amplificador de señal de salida en 30 dB. Esto quiere decir que la ganancia de la señal medida es amplificada:
 

<input type="checkbox"/> $K_A = 30$ veces	<input type="checkbox"/> $K_A = 3/2$ veces
<input type="checkbox"/> $K_A = (\sqrt{10})^3$ veces	<input type="checkbox"/> $K_A = 2/3$ veces
<input type="checkbox"/> $K_A = (\sqrt[3]{10})^2$ veces	<input type="checkbox"/> Ninguna de las opciones anteriores.
6. En el proceso de calibrado de 4 armas de precisión se obtiene los resultados que se indican en la Fig. 6.7. ¿Qué puede usted decir respecto a cada una de ellas? Marque la opción que le parezca correcta.

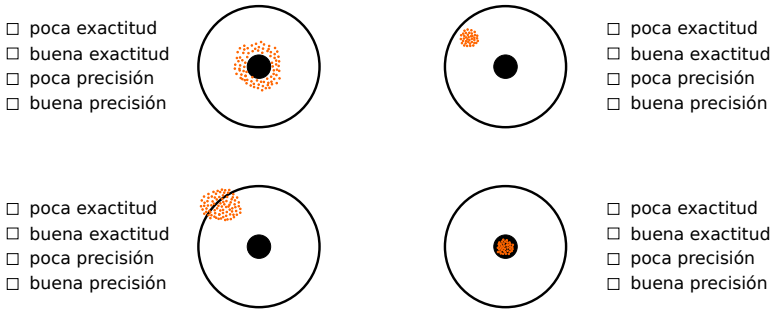


Figura 6.7

7. Se está monitoreando la temperatura de un caudal de fluido de procesos, y se sabe que su valor verdadero es  $59.85\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Dada la importancia de la variable monitoreada se piensa introducir un elemento de medición adicional constituyendo así una redundancia de hardware. Para ello se dispone de tres elementos de medición de temperatura que arrojan las mediciones en el tiempo que se muestran abajo. Marque su opinión respecto a cada elemento.

**Elemento A:**  $29.76\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $50.99\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $49.87\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $31.16\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

- poca exactitud  
 buena exactitud  
 poca precisión.  
 buena precisión.

**Elemento B:**  $23.84\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $23.90\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $23.09\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $22.99\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

- poca exactitud  
 buena exactitud  
 poca precisión.  
 buena precisión.

**Elemento C:**  $60.00\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $58.97\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $59.10\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $60.09\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

- poca exactitud  
 buena exactitud  
 poca precisión.  
 buena precisión.

¿Cual de los tres elementos de medición utilizaría?

- A  
 B  
 B .

## 6.11. Problemas

**Problema 6.1** Se está analizando la posibilidad de comprar sensores de presión diferencial y se dispone de información de dos transmisores con las características indicadas en la Tabla 6.3 de presión diferencial.

Tabla 6.3: Características de dos sensores de presión diferencial reportadas por dos fabricantes.

Marca	A	B
Alcance máximo	0 - 100 kPa	0 - 500 kPa
Salida	4 - 20 mA	3 - 15 Psig
Exactitud	0.5 % del Span	1.25 kPa
Deriva	0.25 % del Span en 6 meses	0.1 % FS en un año
Tiempo de respuesta (al escalón)	0.60 s para alcanzar 95 % del cambio máximo	0.50 s para alcanzar 90 % cambio máximo

Además para la marca B, el fabricante incluye un convertor P/I de presión en corriente opcional con característica lineal de salida entre [4 - 20]mA.

Basándose en las características estáticas y dinámicas suministradas por los proveedores, y asumiendo que el instrumento se utilizará se comporta de manera lineal dentro de un rango de entrada de [0 - 100]kPa, determine en cada caso:

- Ganancia y exactitud de los elementos de medición.
- ¿Cual de ellos tiene una lectura más estable durante los primeros 6 meses? ¿Cuál de ellos utilizaría si se desea utilizar el elemento de medición durante un año?
- ¿Cual de ellos es más rápido en su respuesta al escalón? ¿Qué instrumento aconsejaría utilizar en este caso?

**Problema 6.2** Se está analizando la posibilidad de comprar sensores de presión diferencial y se dispone de información de dos transmisores con las características indicadas en la Tabla 6.4 de presión diferencial.

Tabla 6.4: Características de dos sensores de presión diferencial reportadas por dos fabricantes.

Marca	A	B
Alcance máximo	0 - 200 kPa	0 - 400 kPa
Salida	4 - 20 mA	1 - 5 V
Exactitud	$\pm 0,4$ % del Span	$\pm 0,4$ % del Span
Tiempo de respuesta al escalón	1 s para alcanzar 80 % del cambio máximo	2 s para alcanzar 95 % del cambio máximo

Si se desea medir la presión entre 50 y 150 kPa, analice las siguientes propiedades para cada elemento de medición propuesto.

Basándose en las características estáticas y dinámicas suministradas por los proveedores, indique:

- ¿A qué es igual la ganancia de los elementos de medición?



- (b) ¿Cuál de ellos le parece es más exacto? Justifique.
- (c) ¿Cuál de ellos es más rápido en su respuesta?
- (d) ¿Cual de ellos adoptaría? Justifique.

**Problema 6.3** Una placa de orificio acusa diferencia de presión de 120 mm de columna de agua cuando circula 600 m<sup>3</sup>/h de un líquido. El transmisor de presión diferencial es electrónico con salida [4 – 20] mA y está ajustado con un rango [0 – 150] mm columna de agua.

De acuerdo con el fabricante la placa de orificio sigue la ley  $Q = \alpha\sqrt{\Delta P}$ , siendo  $Q$  el caudal en m<sup>3</sup>/h y  $\Delta P$  la presión diferencial expresada en mm de columna de agua.

- (a) Calcule el máximo caudal que se podrá medir con este dispositivo.
- (b) ¿A qué es igual la ganancia del sistema de medición (placa de orificio más transmisor) en función del caudal?
- (c) ¿A qué es igual la ganancia del sistema de medición en el punto de operación del proceso?

**Problema 6.4** Una celda de presión diferencial es usada para medir el nivel de agua en un tanque abierto a la atmósfera. La celda fue calibrada para medir en un rango de [0 – 2] m con uno de salida de [3 – 15] psi. Además se dispone de un convertor P/I convierte la presión de medida en una corriente con un rango de salida de [4 – 20] mA.

- (a) ¿Si la salida de la celda es de 6 psi a que es igual el nivel de líquido en el tanque? ¿Cuantos mA indica el convertor P/I?
- (b) ¿Si el nivel de líquido es de 1.5m a que es igual la presión a salida de la celda? ¿Cuantos mA indica el convertor P/I en este caso?
- (c) ¿A qué es igual la presión absoluta de columna de líquido en el diafragma sobre la celda para los casos (a) y (b)?
- (d) ¿A qué es igual la ganancia del elemento de medición (celda de presión diferencia más convertor PI)?

**Problema 6.5** Desarrolle el modelo matemático para un termómetro de bulbo expuesto a una temperatura ambiente  $\Theta_a(s)$ . Indique las hipótesis que considere necesarias.

Luego, aplique transformada de Laplace y considere que  $(m_t c_{pt}/UA) = 10s$  siendo  $m_t$  la masa del termómetro,  $c_{pt}$  el calor específico asignado al termómetro (considerado constante), y el producto  $UA$  el coeficiente global de transferencia de calor por el área de intercambio (también considerado constante).

- (a) Si se produce un cambio escalón en  $\Theta_a(s)$ , a partir de que tiempo se puede leer la temperatura para tener un error menor al 2%. ¿Porque?
- (b) Si la variación de temperatura  $\Theta_a(s)$  sigue una ley  $\Theta_a(s) = 2/s^2$ , ¿a qué es igual el error de seguimiento de la rampa (diferencia entre la temperatura ambiente y la señal medida pasado el transitorio, en iguales unidades)?
- (c) Obtenga la función de transferencia de la temperatura leída ( $\Theta_t(s)$ ) para la función excitación definida como

$$\Theta_a(s) = \begin{cases} 0 & \forall t \leq 0 \\ 4 & \forall 0 < t \leq 2 \\ 0 & \forall t > 2 \end{cases}$$

- (d) Dibuje a mano alzada la respuesta dinámica de la temperatura leída ( $\theta_t(t)$ ) para la entrada del inciso (c), y calcule su valor para  $t = 2$ s.

**Problema 6.6** Se está midiendo la temperatura de una corriente fluido de proceso a la salida de intercambiador de calor con una termorresistencia PT100. Se sabe que el span de entrada de la termoresistencia (asumida lineal) es de  $0^\circ\text{C}$  a  $400^\circ\text{C}$  y el de salida es de  $100\ \Omega$  -  $247\ \Omega$ , para una fuente fija de 10 mA.

Sabiendo además que el elemento de medición, tiene una función de transferencia de primer orden, se propone realizar una experiencia para identificar experimentalmente sus parámetros. Para ello se aplica un escalón de amplitud  $k$ , perturbando al elemento de medición de su estado estacionario, y se verifica que la temperatura de salida alcanza el 90 % de su valor final para un tiempo de 0.28 segundos.

- (a) Encuentre los parámetros de la función de transferencia del elemento de medición.
- (b) Un ingeniero de planta observó que el transductor de temperatura está colocado a la salida del intercambiador de calor a una distancia de medio metro de la misma. De acuerdo con el ingeniero, esto introduce un tiempo muerto en la medición de  $\theta = 0,1667$  s, si la velocidad de fluido de proceso es de 3 m/s. ¿Está usted de acuerdo? Justifique.

**Problema 6.7** Se necesita medir e indicar la temperatura de una reacción química cuya magnitud se estima que variará entre 20 y  $160^\circ\text{C}$ . Para ello, se utilizará una termoresistencia Pt-100 construido según normas DIN 43760 (con  $R_0 = 100\ \Omega$ ,  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  y  $\alpha = 0,00385^\circ\text{C}$ ) que asegura una exactitud de  $\pm 0.1\%$  del span. Para transmitir la señal al panel de control se utilizará un indicador/transmisor con salida para un lazo de corriente (de 4 a 20 mA).

- (a) Indique los tipos de señales de entrada y de salida del elemento primario.
- (b) Indique los tipos de señales de entrada y de salida del indicador/transmisor.
- (c) Si el transmisor se calibró para el rango de 0 a  $250^\circ\text{C}$ , indique el valor de las salidas del sensor y del transmisor cuando la temperatura es de  $120^\circ\text{C}$ .
- (d) Indique la función de transferencia del sistema medidor-transmisor si se sabe que el tiempo de respuesta es de 0.50 seg para alcanzar el 90 % del cambio máximo.

**Problema 6.8** Se está midiendo la temperatura de un reactor batch con una termorresistencia PT100 que de acuerdo con el fabricante alcanza el 98 % de su lectura a los 0.15 segundos. Además, el instrumento fue calibrado para medir en el rango de  $[50 - 150]^\circ\text{C}$  con una salida en el rango de  $[4 - 20]$  mA.

- (a) Proponga una función de transferencia para el elemento de medición. Determine la ganancia y la constante de tiempo del elemento de medición.

- (b) Basándose en la función de transferencia propuesta en el inciso (a) simule numéricamente con Octave o bien con Máxima la respuesta dinámica de la señal medida (en mA y °C) en función del tiempo para una entrada  $r(t) = 2t$ . Escriba los comandos relacionados al software utilizado.
- (c) Determine el error de seguimiento a la rampa medidos en °C.

**Problema 6.9** Considere un sistema físico al que se le desea medir la temperatura usando un elemento de medición basado en un termistor. La ley que expresa la variación de la resistencia de un termistor con la temperatura es  $R = R_0 e^{\beta(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0})}$  donde  $R_0 = 100 \Omega$  a la temperatura de referencia  $T_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ . Para este sistema en particular, la temperatura de operación es  $50 \text{ }^\circ\text{C}$  y el sistema opera con un rango de  $\pm 10 \text{ }^\circ\text{C}$  alrededor de dicho punto.

Un ingeniero de planta está construyendo un elemento de medición con una fuente de corriente de 5 mA para un rango de entrada de 0 a  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  y un rango de salida de 1 a 0 V. Para ello dispone de 4 posibles termistores de acuerdo con la gráfica de la Fig. 6.8.

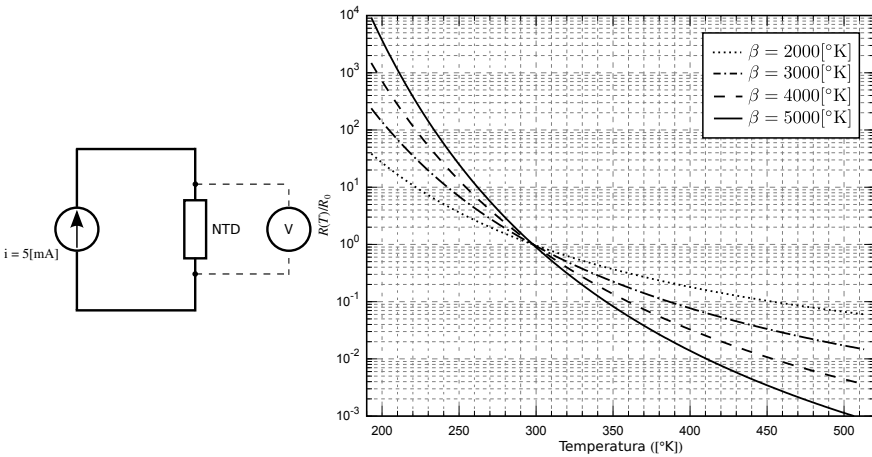


Figura 6.8

- (a) De todos los termistores posibles, adopte aquel que le da mayor sensibilidad en el rango de trabajo del instrumento. Justifique.
- (b) Para el termistor adoptado, determine una representación lineal en torno a la temperatura de operación del sistema. ¿Cuál es su ganancia?
- (c) Si se desea tener una salida lineal en todo el span de entrada-salida, ¿cuál es la magnitud en la corrección de la lectura que se debería introducir cuando la temperatura leída es de  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ ?
- (d) ¿Se puede aprovechar todo el span de entrada-salida de trabajo?
- (e) ¿Como determinaría analíticamente la no linealidad del instrumento? Comente en palabras como lo haría.



# Capítulo 7

## Elementos de Control Final

En este capítulo se presenta un breve resumen de las características inherentes e instaladas de las válvulas de control. Mediante ejemplos se aspira a dar una mejor comprensión del tema. También se analiza un modelo matemático sencillo que busca explicar el comportamiento dinámico de las válvulas de control y al mismo tiempo permite caracterizar las respuestas dinámicas en función de parámetros constructivos de las mismas.

### 7.1. Introducción

Tanto en un sistema de control a lazo abierto o cerrado (Figs. 1.2 y 1.4) la señal de salida de un controlador es enviada a un elemento de control final que actúa directamente como entrada a una planta o proceso.

Los elementos de control final pueden ser diferentes dependiendo del sistema a controlar. Así por ejemplo, i) si queremos controlar el nivel de líquido de un recipiente de almacenamiento se podría manipular el caudal de entrada o salida de dicho tanque; ii) si queremos controlar la posición de una antena de radar podríamos sobre el ángulo de giro manipulando la tensión entregada a un motor paso a paso; entre muchos otros ejemplos.

En la industria de procesos la variable a manipular por excelencia es el caudal de alimentación. Hay dos razones para esto. La primera es que, en procesos industriales (químicos, alimenticios, etc.), las respuestas dinámicas son más rápidas frente a cambios de caudal que frente a otras posibles entradas. La segunda razón, se debe a que es mucho más fácil manipular una variable como el caudal frente a otras posibles variables. Por ejemplo, si queremos cambiar la cantidad de calor entregado a un intercambiador de calor podríamos variar el caudal de entrada o bien la temperatura. Esta última solo se podría cambiar en forma indirecta.

Por otro lado, la selección y el mantenimiento adecuado de las válvulas de

control permiten aumentar la eficiencia, seguridad, y rentabilidad de los procesos. Así, una correcta selección de la misma evita problemas típicos del control de procesos, como la saturación de los caudales manipulados, haciendo que los objetivos de control pueden ser *alcanzables*.

Por lo arriba expuesto, en la ingeniería de control de procesos, las válvulas de control automático son toda una disciplina de investigación y desarrollo tanto en medios académicos como en la industria.

## 7.2. Definciones Preliminares

A continuación se introduce un conjunto de definiciones que son necesarias para clarificar el tema que se tratará luego, algunas de ellas están basadas en la norma ANSI/ISA-75.05.01-2000(R2005)<sup>1</sup> [12].

**Definición 7.2.1 — Válvula de control, ANSI/ISA-75.05.01-2000(R2005) [12].** Un dispositivo accionado por potencia que modifica la velocidad de flujo del fluido en un sistema de control de proceso. Consiste en una válvula conectada a un mecanismo actuador (que incluye todos los accesorios relacionados) y que es capaz de cambiar la posición de un miembro de cierre en la válvula en respuesta a una señal del sistema de control.

**Definición 7.2.2 — Actuador, ANSI/ISA-75.05.01-2000(R2005) [12].** Un dispositivo neumático, hidráulico o eléctrico que suministra fuerza y movimiento para posicionar el miembro de cierre de una válvula en o entre la posición abierta o cerrada.

**Definición 7.2.3 — Válvula normalmente abierta.** Se designa como válvula normalmente abierta a aquellas válvulas que sin energía en el vástago se encuentra abierta.

Consecuentemente, para poder cerrar una válvula de control normalmente abierta es necesario aplicar una cierta energía, que en el caso de las válvulas neumáticas, será necesario aumentar la presión en el diafragma que se encuentra en la cabeza de la válvula.

**Definición 7.2.4 — Válvula normalmente cerrada.** Se designa como válvula normalmente abierta a aquellas válvulas que sin energía en el vástago se encuentra cerrada.

Contrariamente a las válvulas normalmente abiertas, en las válvulas normalmente cerradas es necesario aplicar energía para abrirlas.

La Fig. 7.1 muestra estos dos conceptos para el caso de válvulas neumáticas.

---

<sup>1</sup>Dado la extensa cantidad de definiciones presentes en esta norma, sólo se presentan las aquí necesarias en este capítulo. Se sugiere al lector ampliar el tema recurriendo a la misma.

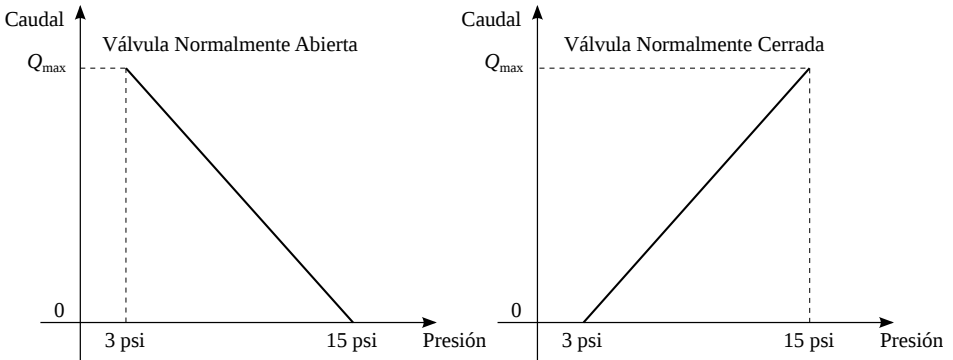


Figura 7.1: Curvas de válvulas neumáticas lineales, normalmente abierta (también designada como aire para cerrar) y normalmente cerrada (también designada como aire para abrir).

**Definición 7.2.5 — Fracción de Caudal.** Se define la fracción de caudal como el cociente entre el caudal actual a través de la válvula y el caudal máximo posible.

$$\phi := \frac{Q}{Q_{\text{máx}}} \quad (7.1)$$

donde  $Q$  es el caudal (correspondiente a una señal de control actual en la válvula) y  $Q_{\text{máx}}$  es el caudal de la válvula cuando se encuentra totalmente abierta<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Cuando se utilice en la definición anterior el subíndice  $i$ , se referirá a la característica de caudal inherente, mientras que cuando se utilice el subíndice  $s$ , se referirá a instalada.

**Definición 7.2.6 — Rangeabilidad de la Válvula.** Se define la rangeabilidad ( $R$ ) de la válvula al cociente entre el caudal máximo ( $Q_{\text{máx}}$ ) y el caudal mínimo ( $Q_{\text{mín}}$ ) de la misma. En términos matemáticos,

$$R := \frac{Q_{\text{máx}}}{Q_{\text{mín}}} \quad (7.2)$$

Siendo la fracción de caudal inherente con el caudal mínimo  $\phi_{s \text{ mín}} = Q_{\text{mín}}/Q_{\text{máx}}$  entonces también es posible determinar la rangeabilidad inherente como,  $R_i = 1/\phi_{i \text{ mín}}$ .

**Definición 7.2.7 — Rangeabilidad Instalada de la Válvula.** Se define la rangeabilidad instalada ( $R_s$ ) de la válvula al cociente entre el caudal máximo ( $Q_{\text{máx}}$ ) y el caudal mínimo ( $Q_{\text{mín}}$ ) una vez instalada la misma. En términos matemáticos,

$$R_s := \frac{Q_{\text{máx}}}{Q_{\text{mín}}}. \quad (7.3)$$

De acuerdo con Kallen ([41]), en toda válvula hay un cierto porcentaje del caudal total donde más allá de éste el control de caudal no es satisfactorio. Por esta razón se introduce la siguiente definición:

**Definición 7.2.8 — Relación de Cierre.** Se define la relación de cierre de la válvula como el cociente entre los caudales máximo y mínimo controlables.

Generalmente, para la mayoría de las válvulas de control, el caudal mínimo controlable es cercano al 2 % al 5 % del caudal máximo posible, mientras que el caudal máximo controlable es de alrededor del 70 % del caudal máximo (Kallen, [41]; Coulson y Richardson, [70]).

### 7.3. Características de Caudal Inherente

**Definición 7.3.1 — Características de Caudal.** Se define característica de caudal a la funcionalidad que se establece entre el caudal que pasa a través de la válvula y la correspondiente fracción de carrera del vástago junto con la presión diferencial a través de la misma.

Es sabido que el caudal que escurre a través de una válvula varía con la presión diferencial a través de la misma. En consecuencia, se definen dos tipos de características de caudal: (i) inherente y (ii) instalada.

**Definición 7.3.2 — Características de Caudal Inherente.** Se define la característica de caudal inherente como la relación existente entre el caudal a través de la válvula y la variación porcentual de la carrera del vástago, cuando se mantiene constante la presión diferencial a través de la válvula en todo su span de trabajo.

La norma ANSI/ISA da una definición similar a la anterior que se enuncia a continuación.

**Definición 7.3.3 — Características de Caudal Inherente, ANSI/ISA-75.05.01-2000(R2005) [12].** La relación entre el índice de flujo y el miembro de cierre que se desplaza a medida que se mueve desde la posición cerrada al recorrido nominal con una caída de presión constante a través de la válvula.

Las jaulas de las válvulas de control estándar son diseñadas para reproducir las tres características de caudal inherente más comunes existentes en el mercado, estas son, (i) lineal, (ii) igual porcentaje y (iii) apertura rápida (Fischer Control International, Inc, [31]). También se hace notar que existen otras menos frecuentes en su uso como, parabólica modificada, raíz cuadrada e hiperbólica. En la Fig. 7.2 se presenta un gráfico del caudal de cinco tipos de válvulas de



acuerdo con las características de caudal inherentes expresadas antes.

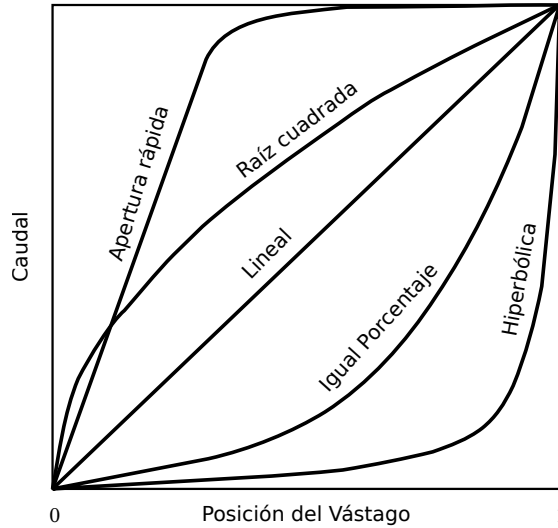


Figura 7.2: Características de caudal inherentes de diferentes válvulas de control.

La decisión de adoptar una válvula de control con una característica inherente determinada depende del tipo de proceso a controlar y las características del fluido. En este punto en particular se sugiere ver la obra de McMillan y Considine ([61]).

### 7.3.1. Tipo lineal

**Definición 7.3.4 — Carac. de Caudal Inherente Tipo Lineal.** Es la característica de caudal en la cual iguales incrementos de carrera determinan iguales variaciones de fracción caudal.

La expresión matemática que define el flujo de caudal en función de la carrera del vástago de la válvula es,

$$\phi_i := l \quad \forall \quad \Delta P_v = \text{const.} \quad (7.4)$$

donde  $\phi_i$  es la fracción de caudal según la Def. 7.2.5 y  $l$  es la carrera del vástago<sup>a</sup> con  $l \in [0 \ 1]$ .

<sup>a</sup>Usualmente, la carrera del vástago es definida en tanto por uno.

La definición que da la norma ANSI/ISA para la característica de caudal inherente tipo lineal es la siguiente:

**Definición 7.3.5 — Carac. de Caudal Inherente Tipo Lineal, ANSI/I-SA-75.05.01-2000(R2005) [12].** Una característica de flujo inherente puede representarse mediante una línea recta en una gráfica rectangular de coeficiente de flujo ( $C_v$  o  $K_v$ ) versus recorrido nominal. Por lo tanto, los incrementos de recorrido iguales proporcionan incrementos iguales del coeficiente de flujo ( $C_v$  o  $K_v$ )<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>En este punto se aclara que la capacidad de una válvula se expresa en términos de  $C_v$  o  $K_v$ . Para comprender mejor esto se sugiere ver las Def. 7.4.5 y 7.4.6.

Algunos autores suelen utilizar en lugar de la carrera del vástago, el cociente de variación de señales  $\Delta S/S_p$  donde,

- si la válvula es normalmente cerrada,  $\Delta S = S - S_c$  y representa la variación de señal entre la señal actual ( $S$ ) y la señal ( $S_c$ ) correspondiente a la posición de cierre de la válvula mientras que,
- si la válvula es normalmente abierta,  $\Delta S = S_c - S$ .

$S_p = S_o - S_c$ , representa el alcance o *span* de trabajo de la válvula de control; aquí se indica como  $S_o$  a la señal correspondiente a la posición de apertura total de la misma.

Note que el cociente  $\Delta S/S_p = l$ . Para probar esto consideremos una válvula normalmente cerrada en donde para  $S = S_o$ ,  $l = 1$  y para  $S = S_c$ ,  $l = 0$ . Luego, asumiendo variación lineal entre la señal de entrada a la válvula y la posición del vástago, se tiene que para una señal  $S \neq S_o, S_c$ ,

$$l = \frac{S}{S_p} - \frac{S_c}{S_p}$$

luego,  $S = lS_p + S_c$ . Ahora, teniendo en cuenta el cociente

$$\frac{\Delta S}{S_p} = \frac{S - S_c}{S_p} = \frac{lS_p + S_c - S_c}{S_p} = l.$$

Si la válvula es normalmente abierta, se puede verificar que este último resultado también se cumple.

### 7.3.2. Tipo igual porcentaje

**Definición 7.3.6 — Carac. de Caudal Inher. Tipo Igual Porcen.** Es la característica de caudal en la cual iguales incrementos de carrera del vástago, determinan variaciones de caudal manteniendo siempre el mismo porcentaje del caudal existente.

La expresión matemática que define el flujo de caudal en función de la carrera es,

$$\frac{dQ}{dl} := KQ_0 \quad \forall \quad \Delta P_v = \text{cte.} \quad (7.5)$$

donde  $K = \ln(R)$  y  $R$  representa la rangeability de la válvula y  $Q_0$  es el caudal en el instante actual de la válvula.

La definición de esta característica de caudal dada por norma ANSI/ISA es la siguiente:

**Definición 7.3.7 — Carac. de Caudal Inher. Tipo Igual Porcen., ANSI/ISA-75.05.01-2000(R2005) [12].** Una característica de flujo inherente que, para incrementos iguales de recorrido nominal, idealmente dará iguales cambios porcentuales del coeficiente de flujo ( $C_v$  o  $K_v$ ).

Si se integra la Ec. 7.5,

$$\int_{Q_{\min}}^Q \frac{dQ}{Q} = \int_0^l K dl$$

$$\ln \frac{Q}{Q_{\min}} = \ln(R)l$$

y por tanto,

$$Q = Q_{\min} R^l. \quad (7.6)$$

Mientras que si se integra la Ec. 7.5 entre los intervalos  $[[Q_{\max} \ Q]$  y  $[1 \ l]$ , se llega a,

$$Q = Q_{\max} R^{l-1} \quad (7.7)$$

o bien,  $\phi_i = R^{l-1}$ .

Note que,

1. para pequeños cambios en torno al caudal de operación la Ec. 7.4 se puede aproximar a,

$$\frac{\Delta Q}{\Delta l} = K Q_0,$$

lo que conduce a,

$$\frac{\Delta Q}{Q_0} = K \Delta l.$$

Lo que indica que un incremento  $\Delta l$  en la posición del vástago produce un incremento de caudal  $\Delta Q$  relativo al caudal actual del proceso ( $Q_0$ ), y dependiente de la rangeabilidad de la válvula.

2. Partiendo de la Ec. (7.6) o bien de (7.7) se puede probar que,

$$\frac{Q}{Q_0} = R^{\Delta l},$$

por tanto

$$\ln \left( \frac{Q}{Q_0} \right) = \Delta l \ln(R).$$

lo que indica que el logaritmo en la fracción caudal es directamente proporcional al cambio  $\Delta l$  en la carrera del vástago y a la rangeabilidad de

la válvula. Por lo aquí expuesto, algunos autores, designan a esta válvula como *semilogarítmica*, ya que su característica inherente sigue a dicha ley. La Fig. 7.3 muestra más claramente esta propiedad (ver Kallen, ([41])

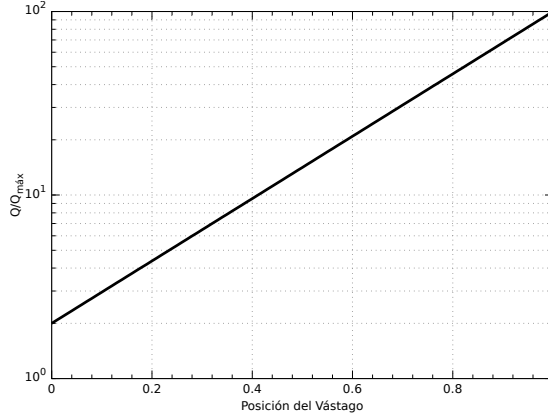


Figura 7.3: Gráfico semilogarítmico de la característica de caudal inherentes de una válvula de igual porcentaje con una rangeabilidad  $R = 50$ .

3. Si ahora se consideran dos posiciones de vástagos diferentes  $l_1^0$  y  $l_2^0$ , y se producen una salto en igual porcentaje alrededor de cada uno de ellos de magnitud  $x$  en tanto por uno, luego de la expresión anterior,

$$\ln\left(\frac{Q_1}{Q_{01}}\right) = \Delta l_1 \ln(R).$$

con  $\Delta l_1 = l_1 - l_1^0 = (1+x)l_1^0 - l_1^0 = xl_1^0$ . Similarmente para la segunda posición del vástago,

$$\ln\left(\frac{Q_2}{Q_{02}}\right) = \Delta l_2 \ln(R).$$

con  $\Delta l_2 = xl_2^0$ .

Haciendo el cociente de las últimas dos ecuaciones se tiene que,

$$\frac{\ln\left(\frac{Q_2}{Q_{02}}\right)}{\ln\left(\frac{Q_1}{Q_{01}}\right)} = \frac{l_2^0}{l_1^0}.$$

Lo que muestra más claramente que los cambios relativos de caudal son dependientes de las posiciones iniciales del vástago. Si el caudal actual ( $Q_0$ ) es pequeño, frente a un incremento en la posición del vástago ( $\Delta l$ ) se tiene un pequeño incremento de caudal; mientras que, si el  $Q_0$  es grande, con el mismo  $\Delta l$  se tiene un gran incremento en el caudal.

Para entender estas últimas observaciones consideremos el Ejem. 7.1.

**Ejemplo 7.1** Considere una válvula normalmente cerrada con característica de caudal tipo igual porcentaje y cuyo caudal máximo es  $Q_{\text{máx}} = 100\text{m}^3/\text{h}$  y su rangeabilidad  $R = 50$ . Si se produce un cambio en la posición del vástago de un 1 %, ¿qué valor de caudal se alcanza si, a) la posición inicial del vástago es  $l_1^0 = 0,4$  y b)  $l_2^0 = 0,8$  ?

Dado que la rangeabilidad  $R = 50$  y el  $Q_{\text{máx}} = 100\text{m}^3/\text{h}$  entonces,  $Q_{\text{mín}} = 2\text{m}^3/\text{h}$ . En la Tabla 7.1 se muestran los caudales finales para las dos posiciones del vástago enunciadas en el ejemplo.

Posición del vástago ( $l$ )	Caudal ( $Q$ )	$\ln(Q_i/Q_{i0})$	$\frac{\ln\left(\frac{Q_2}{Q_{02}}\right)}{\ln\left(\frac{Q_1}{Q_{01}}\right)}$	$l_2^0/l_1^0$
0.40	9.5635			
0.44	11.1830	0.15648		
0.80	45.7310			
0.88	62.5350	0.31296	2	2

La Fig. muestra la curva inherente de la válvula de este ejemplo. Se puede apreciar que los cambios de un 10% en cada caso, da como resultado diferentes incrementos de caudal, lo que se condice con los valores de la Tabla 7.1.

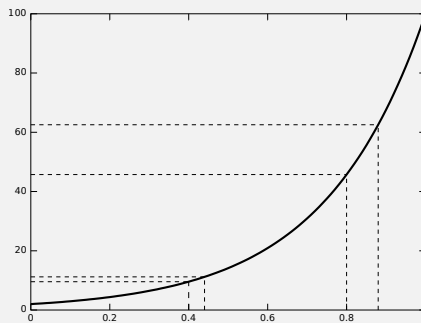


Figura 7.4: Curva inherente de la válvula de igual porcentaje del Ejem. 7.1.

Note que con una válvula con esta característica inherente, se tiene un estricto control del caudal de operación a bajos caudales y una fuerte acción correctiva a altos caudales. ■

### 7.3.3. Tipo apertura rápida

Se trata de una característica de caudal que produce una variación máxima del caudal a través de la válvula con un mínimo de carrera en el vástago. Así, la definición de la norma ANSI/ISA es la que se expresa a continuación.

**Definición 7.3.8 — Carac. de Caudal Inher. Tipo Apertura Rápida, ANSI/ISA-75.05.01-2000(R2005) [12].** Una característica de flujo inherente en la cual se logra un coeficiente de flujo máximo con un recorrido mínimo del miembro de cierre.

Este tipo de válvula posibilita el pasaje de casi la totalidad del caudal nominal con apenas un 25 % a 35 % de apertura de la carrera total.

No existen definiciones matemáticas exactas para este tipo de válvula y dicha definición puede depender de los datos prácticos que suministre el fabricante.

### 7.3.4. Tipo parabólica modificada

**Definición 7.3.9 — Carac. de Caudal Inher. Tipo Paraból. Mod., ANSI/ISA-75.05.01-2000(R2005) [12].** Una característica de flujo inherente que proporciona el mismo porcentaje de característica en el recorrido del miembro de cierre bajo y aproximadamente una característica lineal para las porciones superiores del recorrido del miembro de cierre.

Para este tipo de válvula resulta más simple definir la característica de caudal mediante su expresión matemática ya que dar una interpretación física de su comportamiento resulta algo compleja.

**Definición 7.3.10 — Carac. de Caudal Inher. Tipo Paraból. Mod..** Matemáticamente se la puede definir mediante la siguiente expresión:

$$\phi_i := \frac{l}{\sqrt{3 - 2l^2}} - 1 \quad \forall \quad \Delta P_v = \text{const.} \quad (7.8)$$

Esta característica de caudal es intermedia entre la lineal y la de igual porcentaje.

### 7.3.5. Tipo raíz cuadrada

El comportamiento de esta válvula obviamente está relacionado a una expresión matemática que involucre la raíz cuadrada de la posición del vástago.

**Definición 7.3.11 — Carac. de Caudal Inher. Tipo Raíz Cuad..** Es la característica de caudal en la cual la fracción de caudal varía como función de la raíz cuadrada de la carrera.

Matemáticamente se la puede definir mediante la siguiente expresión:

$$\phi_i := \sqrt{l} \quad \forall \quad \Delta P_v = \text{const.} \quad (7.9)$$

Tabla 7.1: Relaciones para Característica de Caudal Inherente de distintos tipos de válvulas.

Carac. de Caudal Inherente	Relación
Tipo Lineal	$\phi_i = l$
Tipo Igual Porcentaje	$\phi_i = (1 - \phi_{i \text{ mín}})l + \phi_{\text{mín}}$
Tipo Parabólica Modificada	$\phi_i = \frac{l}{\sqrt{3-2l^2}}$
Tipo Raíz Cuadrada	$\phi_i = \sqrt{l}$

Esta característica de caudal es intermedia entre la lineal y la de apertura rápida.

La Fig. 7.5 muestra las curvas inherentes de las válvulas de control presentadas anteriormente.

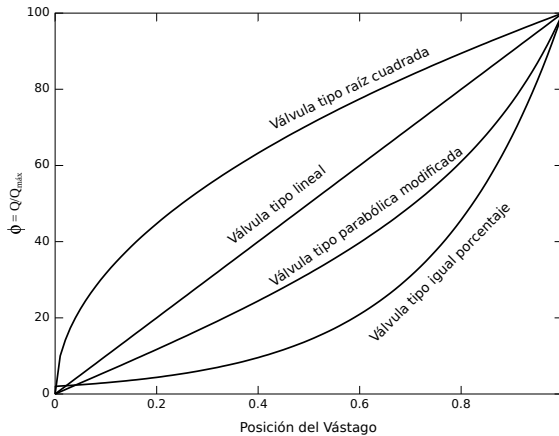


Figura 7.5: Curvas inherentes de las válvulas de control de acuerdo con las Ecs. (7.4), (7.7), (7.8), (7.9).

La Tabla 7.1 resume las características inherentes más comunes y sus ecuaciones asociadas. Note que la segunda ecuación escrita para una válvula tipo lineal (Federspiel y Seen en la obra de Levine [47], entre otros) contempla la posibilidad de tener una rangeabilidad inherente con valor finito  $R_i = 1/\phi_{i \text{ mín}}$ , mientras que la primera definición tiene una  $R_i = \infty$ .

## 7.4. Características de Caudal Instalada

Por lo general, cuando las válvulas operan en condiciones reales, la presión diferencial a través de ellas cambia a medida que varía la apertura de la misma. Como la variación de presión diferencial depende de la resistencia hidráulica en la cañerías (diámetro y tipo de cañerías), las características de las bombas, accesorios de cañerías, etc; es evidente que una misma válvula instalada en procesos diferentes presentará inevitablemente curvas características instaladas distintas.

Una primer definición de la característica de caudal instalada es la que se enuncia a continuación.

**Definición 7.4.1 — Características de Caudal Instalada.** Se define la característica de caudal instalada como la relación existente entre el caudal a través de la válvula y la variación porcentual de la carrera, bajo condiciones reales de operación, donde la presión diferencial no se mantiene constante.

La norma ANSI/ISA define a esta característica de caudal como sigue.

**Definición 7.4.2 — Características de Caudal Instalada, ANSI/ISA-75.05.01-2000(R2005) [12].** La relación entre el índice de flujo y el miembro de cierre que se desplaza a medida que se mueve desde la posición cerrada al recorrido nominal, a medida que la caída de presión a través de la válvula se ve influida por las condiciones variables del proceso.

Note que, en la característica de caudal inherente de la válvula de control, la presión diferencial permanece constante, mientras que en la instalada la presión diferencial varía de acuerdo a las condiciones de operación del sistema.

Los fabricantes suministran (en sus catálogos) las características de caudal inherentes, dado que la instalada depende del sistema físico donde será instalada la válvula de control.

Si se tiene en cuenta que la presión diferencial a través de la válvula nunca se mantiene constante, la característica de caudal inherente no representa al comportamiento real de la misma en el sistema. En consecuencia, una vez instalada la válvula de control en el proceso, su característica de caudal puede llegar a tener profundas alteraciones respecto de la característica de caudal inherente. El grado de alteración depende del proceso en sí, la instalación, resistencias relativas al fluido, etc.

De manera que, al proceder a la selección de una válvula de control, la alteración de característica de caudal es lo que más se debe tener presente.

### 7.4.1. Cálculo de la ganancia de la válvula

Primeramente introducimos la definición de la norma ANSI/ISA para empezar a comprender el tema.



**Definición 7.4.3 — Ganancia de Válvula ANSI/ISA-75.05.01-2000(R2005)**

[12]. El cambio en la tasa de flujo como una función del cambio en el recorrido de la válvula. Es la pendiente de la curva característica de flujo instalada.

Sin pérdida de generalidad, asumamos el caso particular de una válvula de control neumática. La Fig. 7.6 muestra una curva de *característica de caudal instalada* de dicha válvula. La ganancia  $K_v$  puede determinarse a partir de la ganancia  $K_l$  (indicada en la Fig. 7.6) mediante un simple cambio escala. Esto es,

$$\begin{aligned} K_l &= \frac{d\phi}{dl} = \frac{d\phi}{dl} \frac{Q_{\text{máx}}}{Q_{\text{máx}}} = \frac{dQ}{dl} \frac{1}{Q_{\text{máx}}} \\ &= \frac{dQ}{dl} \frac{1}{Q_{\text{máx}}} \frac{\mathcal{Y}_r}{\mathcal{Y}_r} = \frac{dQ}{dy_r} \frac{\mathcal{Y}_r}{Q_{\text{máx}}} \\ &= K_v \frac{\mathcal{Y}_r}{Q_{\text{máx}}} \end{aligned} \quad (7.10)$$

donde se define  $K_v := dQ/dy_r$ .<sup>2</sup> De la ecuación anterior se desprende que la relación buscada es,

$$K_v = K_l \frac{Q_{\text{máx}}}{\mathcal{Y}_r}. \quad (7.11)$$

Note que,

- existe una funcionalidad entre la posición del vástago y la señal de entrada a la válvula. Dicha funcionalidad es normalizada por el span de trabajo de la válvula ( $\mathcal{Y}_r$ ), esto es,

$$l(t) = \frac{1}{\mathcal{Y}_r} y_r(t). \quad (7.12)$$

La Ec. 7.12 indica que la relación existente entre la señal normalizada de entrada  $y_r(t)$  a la válvula de control y la posición del vástago  $l(t)$  puede tener una cierta dinámica, la que se expresa a través de una ecuación diferencial o bien con una función de transferencia en el dominio de Laplace, que dependerá de las características constructivas de la válvula.

- Note además que,  $\mathcal{Y}_r$  tiene un signo diferente si la válvula es normalmente abierta o cerrada. Para el caso particular de Fig. 7.6, si es normalmente cerrada,  $\mathcal{Y}_r = 12[\text{psi}]$  mientras que, si es normalmente abierta  $\mathcal{Y}_r = -12[\text{psi}]$

## 7.4.2. Caudal a través de una válvula de control

Ante todo, y para comprender el tema, vamos a considerar el caso típico de un líquido incompresible almacenado en un tanque, que sale por un orificio de una válvula de control. Basándose en la aplicación del teorema de Torricelli para el problema del vaciado de un tanque<sup>3</sup>, el caudal de líquido que pasa por un

<sup>2</sup>Observe que esta ecuación responde a la Def. 7.4.3. No confundir esta definición de  $K_v$  con la Def. 7.4.6

<sup>3</sup>Ecuación que puede demostrarse aplicando la ecuación de Bernoulli.

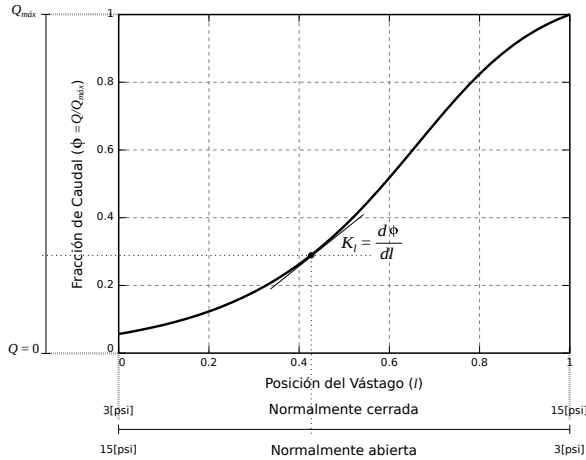


Figura 7.6: Diagrama esquemático de una válvula neumática.

orificio de descarga de la válvula resulta,  $Q = A_t \sqrt{2gh} = A_t \sqrt{\Delta P / \rho}$ , donde  $A_t$  es la sección transversal del orificio,  $h$  el nivel de líquido en el tanque y  $\Delta P = \rho gh$ .

Por similitud con este problema, el caudal que pasa por una válvula instalada en un proceso resulta,

$$Q = C_v \sqrt{\frac{\Delta P_v}{\rho}} \quad (7.13)$$

siendo  $C_v$  el coeficiente de dimensionamiento de la válvula, que se determina midiendo el caudal de que circula por ella a caída de presión constante a 15.6 °C, siendo  $\rho$  la gravedad específica (densidad relativa al agua) del fluido que circula, y que para el caso particular de agua a 15.6 °C,  $\rho = 1$ . Dicho coeficiente es empírico y se determina por un ensayo experimental de acuerdo con normas ISA.

Note que la proporcionalidad entre  $Q$  y  $\sqrt{\Delta P}$  puede ser justificada por la ecuación de Bernoulli, resultando más complicado la justificación rigurosa del  $C_v$ . La Ec. (7.13) es internacionalmente aceptada de acuerdo con las normas ANSI/ISA 75.02 para el procedimiento de ensayos de capacidad de válvulas de control.

En este capítulo, se acepta como definición del *coeficiente de válvula*  $C_v$  o  $K_v$  a la definición propuesta por las normas ISA, de acuerdo como se explicita a continuación.

**Definición 7.4.4 — Coeficiente de Válvula.** Se define el coeficiente de dimensionamiento de válvula ( $C_v$ ) como el caudal de agua evaluado al 100 %

de apertura de la válvula, a una caída de presión constante, para la característica de caudal inherente de dicha válvula.

En consecuencia, el  $C_v$  informado por los fabricantes es evaluado con el caudal máximo y a una caída de presión constante y usualmente, medido en galones por minutos norteamericanos (USgal/min) para una diferencia de presión de 1 psi. De este modo, el  $C_v$  se define como sigue

**Definición 7.4.5 — Coeficiente de Válvula ( $C_v$ ).** El  $C_v$  es el caudal de agua a 60 °F (15.6 °C) medido en USgal/min que pasa a través de la válvula con una presión diferencial de 1 psi (6.9 kPa).

Por tal motivo, una válvula con un  $C_v = 30$  significa que cuando la válvula esté totalmente abierta, fluirán 30 USgal/min de agua por ella, si la diferencia de presión es de 1 psi (6.9 kPa).

Una definición alternativa en unidades en unidades métricas es el coeficiente de válvula  $K_v$ .

**Definición 7.4.6 — Coeficiente de Válvula ( $K_v$ ).** El  $K_v$  es el caudal de agua medido en m<sup>3</sup>/h a 15.6 °C que fluye a través de una válvula completamente abierta cuando la presión diferencial es de 1 Kg/cm<sup>2</sup>.

La relación entre ambos coeficientes,  $C_v$  y  $K_v$ , está dada por  $C_v = 1,15622K_v$  o bien  $K_v = 0,86488C_v$  respetando las unidades en los que fueron definidos ambos coeficientes<sup>4</sup>.

Un intento de corregir la Ec. (7.13) y por analogía con lo anterior, resulta de expresar el caudal a través de la válvula como,

$$Q = C_{vl} \sqrt{\frac{\Delta P_v}{\rho}} \quad (7.14)$$

donde  $C_{vl}$  es un coeficiente de válvula puntual que se corresponde con, 1) una dada posición  $l$  del vástago, 2) la relación de caída de presiones  $\alpha$  en el sistema (ver Def. 7.4.7) y 3) la característica de caudal *instalada* de la válvula<sup>5</sup>.

La Tabla 7.2 muestra distintos valores de  $C_{vl}$  en función del porcentaje de apertura de la válvula para distintos diámetros de la cañería suministrado por fabricantes.



**Remarca 7.1 — Relación entre  $\phi_i$  y  $C_v$ .** Si  $\Delta P_v$  es constante entonces  $\phi_i = \frac{C_{vl}}{C_{v \text{ máx}}}$ .

<sup>4</sup>En esta obra, la notación  $K_v$  se usará para la ganancia de la válvula de control, por tal motivo se usará  $C_v$  para no generar confusión en el lector, entendiéndose que la relación entre ambos coeficientes de flujo de válvula es un simple cambio de unidades.

<sup>5</sup>Note que hay una importante diferencia conceptual entre  $C_{vl}$  y  $C_v$ .

En este texto se usará indistintamente la notación  $C_v$  o  $C_{v \text{ máx}}$  para indicar que dicho coeficiente es evaluado a caudal máximo, mientras que, si el coeficiente de dimensionamiento de la válvula es función de la posición del vástago se indicará como  $C_{vl}$ .

Tabla 7.2: Valores de  $C_{vl}$  en función del porcentaje de carrera del vástago para distintos diámetro de la cañería.

d[pulg.] \ % Apert.	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
1.5	25	19	14.6	10.3	7.2	4.8	3.1	1.9	0.7	0.1
2.0	90	70	53	37	26	17.3	11.2	6.8	2.6	0.5
2.5	145	112	85	60	42	28	16	10.9	4.2	0.7
3.0	245	190	145	101	71	47	30	18.4	7.1	1.2
4.0	360	279	210	150	104	69	45	27	10.4	1.8
5.0	550	425	325	230	150	105	68	41	16	2.8
6.0	1070	830	627	443	205	205	133	60	31	5.4

**Demostración** Dado que para cada posición del vástago se tiene un caudal distinto entonces,  $Q(l) = C_{vl} \sqrt{\Delta P / \rho}$  y  $Q(l = 1) = C_{v \text{ máx}} \sqrt{\Delta P / \rho}$ . Haciendo el cociente de estas expresiones y teniendo en cuenta que  $\Delta P_v$  es constante entonces se prueba la remarca.  $\square$

Basándose en la remarca anterior, la Ec. (7.14) puede escribirse como,

$$Q = \phi_i C_{v \text{ máx}} \sqrt{\frac{\Delta P_v}{\rho}} \quad (7.15)$$

donde  $\phi_i$  es la fracción de caudal evaluada sobre la base de la característica de caudal inherente.

Muchos autores reportan fórmulas para la relación  $C_{vl}/C_{v \text{ máx}}$  pero se debe tener en cuenta que las mismas son válidas para las condiciones en que se determina la característica inherente de la válvula de control o bien de una instalación particular.

Note que las Ecs. (7.14) y (7.15) asumen que  $C_{vl}$  es evaluada de acuerdo con tablas del fabricante similares a la Tabla 7.2, o bien con relaciones preestablecidas de acuerdo con la característica de caudal inherente y el tipo de válvula. En otras palabras, asumiendo  $\phi_i = C_{vl}/C_{v \text{ máx}} = f(l)$ .

Por todo lo expuesto, las Ecs. (7.14) y (7.15) permiten calcular el caudal a través de la válvula ya instalada en condiciones de operación, condicionadas a que  $\Delta P_v$  se mantenga constante en todo el span de trabajo de la válvula. Si esto último no se cumple difícilmente se pueda asumir estas ecuaciones como válidas.

### 7.4.3. Cambios en la característica de caudal instalada

En la Fig. 7.7 se muestra un sistema de caída de presión total variable utilizado por Lovett ([54]), en donde una bomba para impulsa el fluido de un reservorio al otro.

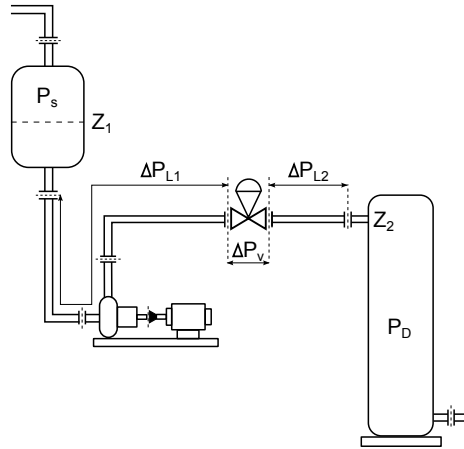


Figura 7.7: Sistema de bombeo de fluido líquido estudiado por Lovett ([54]).

En la Fig. 7.8 puede verse en forma esquemática las distribuciones de presión en el sistema de la Fig. 7.7. Note que, cuando la válvula está casi cerrada, la caída de presión en la misma es máxima y las pérdidas de presión por fricción son mínimas a raíz del escaso caudal que circula. Por el contrario, cuando la válvula está totalmente abierta, la caída de presión en la misma es mínima y las pérdidas por fricción son máximas.

La Fig. 7.9 muestra como se altera la característica de caudal inherente una vez instalada la válvula de control en función de la relación de presiones ( $\alpha$ ) que se define a continuación.

**Definición 7.4.7 — Relación de Pérdidas de Presiones o Authority,  $\alpha$ .** Se define como el cociente entre la caída de presión a través de la válvula y la caída de presión total del sistema.

$$\alpha := \frac{\Delta P_v}{\Delta P_T}. \quad (7.16)$$

Para el caso de la Fig. 7.8 el valor de  $P_R$  se puede escribir como,

$$\alpha := \frac{\Delta P_v}{\Delta P_v + \Delta P_{L1} + \Delta P_{L2}} \quad (7.17)$$

donde,  $\Delta P_v$  es la caída de presión en la válvula,  $\Delta P_{L1}$  y  $\Delta P_{L2}$  son la caída de presión en el sistema antes y después de la válvula respectivamente.

En la Fig. 7.9 puede verse como una válvula con característica de caudal inherente lineal cambia a una de apertura rápida conforme disminuye la relación  $\alpha$ . En otras palabras, si la caída de presión en la línea es más significativa que la de la válvula de control, la modificación en la característica de caudal puede ser drástica y contraproducente para el sistema de control y por tanto, esto debe

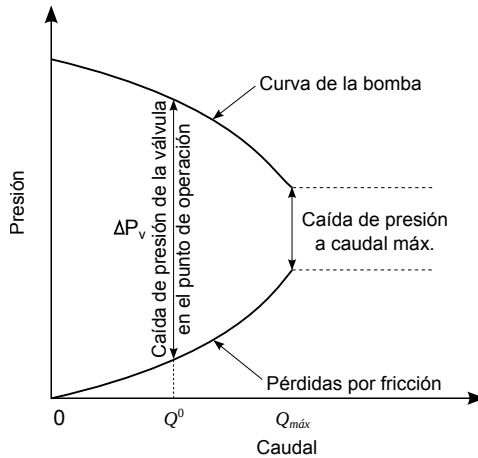


Figura 7.8: Distribución de las pérdidas de presión en el sistema de la Fig. 7.7, donde las pérdidas de presión estáticas fueron omitidas.

ser tenido en cuenta al momento de seleccionar la característica inherente de una válvula de control.

Similarmente al caso anterior, una válvula con característica de caudal inherente tipo igual porcentaje o bien parabólica tienden a una lineal a medida que disminuye la relación  $\alpha$ . Esto se muestra en ejemplos posteriores.

Estos resultados también fueron verificados por Lovett ([54]) para sistemas con caída de presión total constante. Así mismo, otros autores como Boger ([20]) y Lipták ([48]), entre otros, también llegaron a las mismas conclusiones.

Un punto es importante a remarcar es que, de acuerdo con Lovett ([54]), a medida que la relación de pérdida de presión o *authority* disminuye el grado de alteración de la característica de caudal inherente en comparación con la instalada se hace más notorio. Sin embargo, la situación inversa puede no ser cierta. En otras palabras, si  $\alpha \rightarrow 1$  no necesariamente la característica de caudal instalada tiende a coincidir con la inherente, si bien en la mayoría de los casos esto se puede llegar a cumplir.

Note que,

- si  $\alpha \rightarrow 1$  ( $\Delta P_v \gg \Delta P_{L_1} + \Delta P_{L_2}$ ) y
- no hay importantes variaciones en la caída de presión de la válvula en todo su span de trabajo, lo que implica que la caída *total* de presión del sistema debe ser prácticamente constante en todo el entorno de operación de la válvula,

entonces es posible aproximar la característica de caudal instalada con las Ecs. (7.14) o (7.15). Claramente, esta última condición no siempre se cumple.

Formalizando estos últimos comentarios:

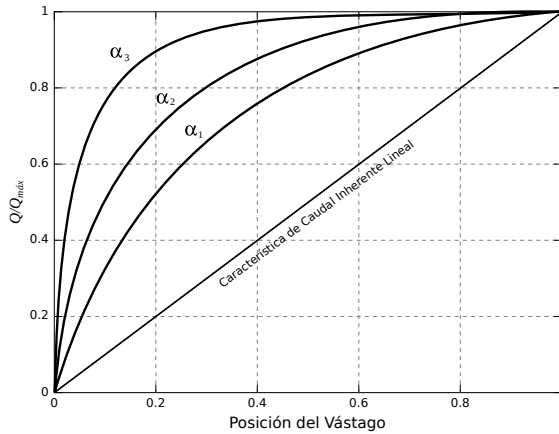


Figura 7.9: Características de caudal instalada cuando se utiliza una válvula con característica de caudal inherente lineal. Aquí,  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ .

**R** ■ **Remarca 7.2** Si  $\alpha \rightarrow 1$  y la caída de presión del sistema tiende a permanecer constante en todo el span de trabajo de la válvula entonces, la característica de caudal instalada tiende a la inherente.

Esto último se mostrará con los ejemplos que se detallan a continuación.

**Ejemplo 7.2** Una válvula normalmente cerrada manipula un caudal de agua, que en estado estacionario es  $Q^0 = 60 \text{ m}^3/\text{h}$ , la entrada al actuador es 4-20 mA y la salida 0-1 de la posición del vástago. Su característica inherente se corresponde con una válvula semilogarítmica cuya ecuación  $\phi = R^{l-1}$ , donde  $\phi = Q/Q_{\text{máx}}$ ,  $R = 50$  es la rangeabilidad de la válvula y  $l$  es la carrera del vástago. En el proceso se produce una caída de presión  $\Delta P_p = kQ^2$  siendo  $k = 0,00156$  con unidades compatibles. La válvula tiene un  $Cv_{\text{máx}} = 30$ , y el  $\Delta P_T = 40$  psig y se asume constante durante la operación. Asuma además que en todo el rango de operación de la válvula, la característica de caudal inherente es igual a la instalada.

- ¿A qué es igual la posición ( $l$ ) del vástago de la válvula y la ganancia de la misma en el punto de operación del sistema?
- ¿A qué es igual la rangeabilidad de la válvula instalada?
- ¿Cuáles son los valores de  $l$  y la ganancia media de la válvula para el rango de trabajo de 12-90  $\text{m}^3/\text{h}$ ? ¿A qué es igual la ganancia de la válvula en cada uno de los extremos de este rango?

- (d) ¿Está de acuerdo con la válvula adoptada si se pretende operar la misma posicionando el vástago en un rango de 30 % al 70 %? Justifique adecuadamente analizando todas elementos que considere necesario.

Primeramente vamos a determinar el caudal máximo que puede manipular la válvula de control. Para ello debemos tener en cuenta que,  $Q_{\text{máx}} = C_{v_{\text{máx}}} \sqrt{\Delta P_v}$  y  $\Delta P_p = 0,00156Q^2$ . Luego,

$$Q_{\text{máx}} = C_{v_{\text{máx}}} \sqrt{\Delta P_T - 0,00156Q_{\text{máx}}^2}.$$

Reordenando esta última ecuación y resolviendo se llega a,

$$Q_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{C_{v_{\text{máx}}}^2 \Delta P_T}{1 + 0,00156C_{v_{\text{máx}}}^2}} = 122,37 \text{ m}^3/\text{s}$$

Para determinar la apertura de la válvula en el caudal de operación se tiene que,

$$Q = C_{v_l} \sqrt{\Delta P_T - 0,00156Q^2}, \quad (7.18)$$

donde  $C_{v_l}$  es el coeficiente de la válvula a una posición dada del vástago.

Para una válvula semilogarítmica (o de igual porcentaje) como esta, se cumple que,  $C_{v_l} = C_{v_{\text{máx}}} R^{l-1}$  y por tanto resulta,

$$Q = \frac{C_{v_{\text{máx}}}}{R} R^l \sqrt{\Delta P_T - kQ^2}.$$

con  $k = 0,00156$ . Despejando la apertura se tiene,

$$l = \frac{\ln(QR/C_{v_{\text{máx}}} \sqrt{\Delta P_T - 0,00156Q^2})}{\ln R} \quad (7.19)$$

con  $R = 50$ . De esta última ecuación resulta que para  $Q = 60 \text{ m}^3/\text{h}$  se tiene que  $l = 0,72504$  y la relación  $Q^0/Q_{\text{máx}} = 0,49031$ .

En cuanto a la rangeabilidad de la válvula instalada, ésta será distinta de la inherente ( $R = 50$  para este ejemplo), y se puede calcular mediante la Ec. (7.2). Para ello, primeramente determinaremos el caudal mínimo partiendo de la Ec. (7.18) como,

$$Q = C_{v_{l_{\text{mín}}}} \sqrt{\Delta P_T - 0,00156Q^2},$$

donde  $C_{v_{l_{\text{mín}}}} = C_{v_{l_{\text{máx}}}} R^{l-1} = 0,60$ , con lo que resulta que  $Q_{\text{mín}} = 3,7937 \text{ m}^3/\text{h}$ . Finalmente, de la Ec. (7.2) resulta que,  $R_i = Q_{\text{máx}}^i/Q_{\text{mín}}^i = 32,257$ , donde  $Q_{\text{máx}}^i$  y  $Q_{\text{mín}}^i$  son los caudales máximos y mínimos de operación una



vez instalada la válvula de control. Teniendo en cuenta que la rangeabilidad inherente es  $R = 50$ , se puede concluir que el hecho de instalar la válvula produce una disminución de la rangeabilidad de aproximadamente el 35.5 %, debido a que se redujo el caudal máximo y aumentó el caudal mínimo. Esto nos está indicando que la hipótesis asumida para los cálculos podría ser errónea y las características de caudal instalada podría ser algo diferente al calculado.

En la Tabla 7.3 se reportan los valores de la posición de vástago  $l$  para los caudales extremos y de operación.

Tabla 7.3: Resumen de resultados para las preguntas a) y c) del Ejem. 7.2.

$Q$	$l$	$\tilde{K}_l$	$\tilde{K}_v$	$K_l$	$K_v$
12	0.29502			46.681	2.9175
90	0.85787	138.58	13.858	240.86	15.054
60	0.72504			201.77	12.610

En cuanto a la ganancia de la válvula, debemos tener en cuenta que,

1. la señal del actuador varía entre 0 y 1 para un rango de operación de 4-20 mA y
2. para la válvula instalada, de la Ec. (7.18) se tiene que,

$$Q = \sqrt{\frac{\Delta P_T}{(C_{v_l})^{-2} + k}} \quad (7.20)$$

Dado que  $Q = f(l)$  con  $f(l)$  una función no lineal de la apertura de acuerdo con la Ec. (7.20). Entonces debemos linealizar esta expresión en el punto de operación, lo que conduce a,

$$Q = Q^0 + \left( \frac{df(l)}{dl} \right)_{l=l^0} (l - l^0)$$

que expresado en variables de desviación resulta,  $\hat{Q} = K_l \hat{l}$  con  $K_l = \left( \frac{df(l)}{dl} \right)_{l=l^0}$  y

$$K_l = \frac{df(l)}{dl} = C_{v_l}^{-2} \ln(R) \sqrt{\frac{\Delta P_T}{(C_{v_l}^{-2} + k)^3}}$$

De acuerdo con esto último, la ganancia de la válvula resulta,  $K_v = \frac{K_l}{16}$  m<sup>3</sup>/h/mA, y en el punto de operación del sistema,  $K_l = 201,77$  m<sup>3</sup>/h, con lo que resulta  $K_v = 12,610$  m<sup>3</sup>/h/mA.

Para determinar la apertura de la válvula en los extremos del rango de trabajo, se la debe calcular a partir de la Ec. (7.19) para cada caudal requerido. Posteriormente se puede calcular la ganancia media como,  $\tilde{K}_l = \Delta Q / \Delta l$ . Mientras que, las ganancias en los extremos del rango de caudales se calcula a partir de la derivada en cada punto como se indicó anteriormente. Todos estos valores se muestran en la Tabla 7.3.

La Fig. 7.10 muestra las curvas asociadas a las características de caudal inherente e instalada indicando además, variación de las ganancias y la ganancia media como función de la carrera del vástago.

De la Tabla 7.3 y la Fig. 7.10 puede verse que no es aconsejable cubrir todo el rango de operación de la válvula con una ganancia media.

Finalmente, note que la rangeabilidad instalada es un 35.55 % menor que la inherente, si se tiene en cuenta que  $\alpha = \Delta P_v / \Delta P_T$ , para el caudal máximo se tiene que

$$\alpha = \frac{\Delta P_{v \text{ máx}}}{\Delta P_T} = \frac{\Delta P_T - kQ_{\text{máx}}^2}{\Delta P_T} = 0,58403$$

donde  $\Delta P_{v \text{ máx}} = 23,361$  es la caída de presión de la válvula asociada al caudal máximo.

Note que,

- la menor caída de presión se tiene al máximo caudal y consecuentemente el menor valor de  $\alpha$  por tanto,
- cuanto menor es el caudal, la relación de presiones  $\alpha$  crece tendiendo a uno.
- De acuerdo con las observaciones de Lovett [54], si  $\alpha$  se aleja del valor unitario, la característica de caudal inherente e instalada ya no coinciden. Por tanto, sólo a bajos caudales se podría asumir que la característica inherente e instalada son iguales. Esto resulta muy visible en la Fig. 7.10.

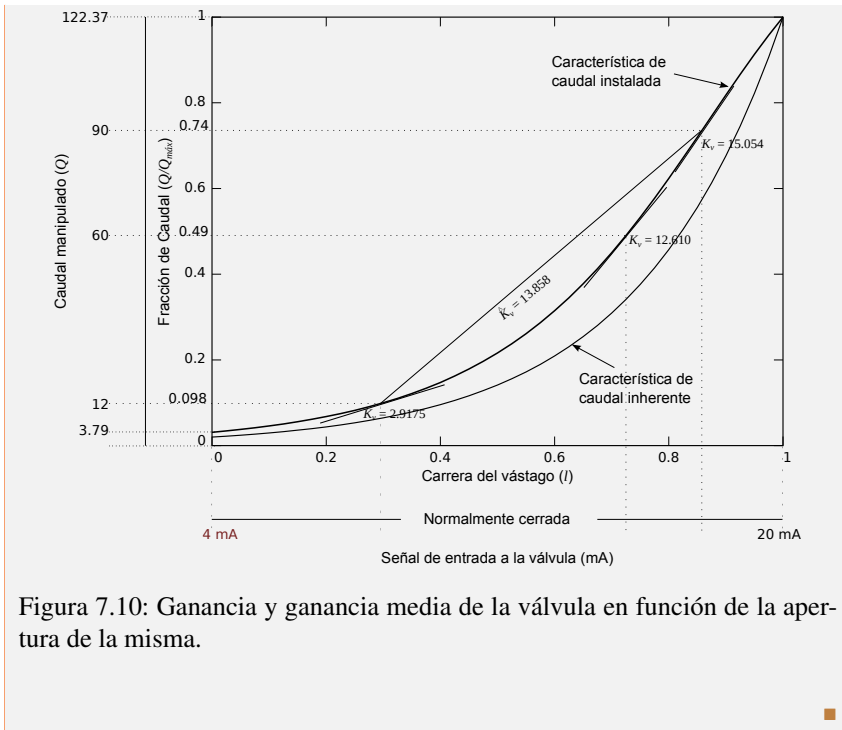


Figura 7.10: Ganancia y ganancia media de la válvula en función de la apertura de la misma.

**Ejemplo 7.3** Analice el problema del Ejem. 7.2 considerando que la presión en la línea puede cambiar de acuerdo con  $\Delta P_p = kQ^2$  con  $k = 0,00156n$  y  $n = 1, 2, 3$  y  $5$ . ¿Cómo son las características instaladas de la válvula y su correspondiente caída de presión en cada caso?

Asumiendo que la característica instalada coincide con la inherente, algo que puede no ser correcto, como se mostró en el ejemplo anterior, es posible repetir los cálculos anteriores para distintos valores de  $k$ .

La Fig. 7.11 muestra

1. un considerable cambio en la característica instalada a medida que aumenta la caída de presión en la línea, esto es con  $k$  creciente, aproximándose cada vez más a una característica de caudal lineal.
2. Obsérvese además, que el cambio en la rangeabilidad instalada es importante y
3. para lograr el caudal de operación pretendido, la apertura de la válvula debe ser cada vez mayor. Esto último también se visualiza en la Fig. 7.12.

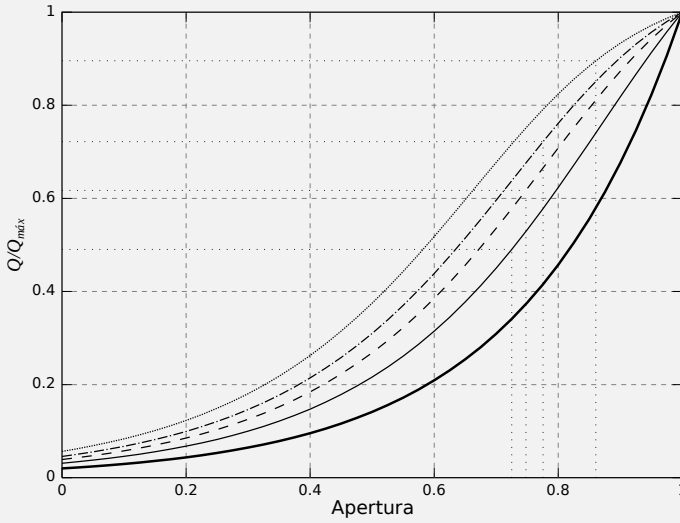


Figura 7.11: Características de caudal inherente e instaladas de la válvula de control del Ejem. 7.2 paramétrica con la relación  $\alpha = \Delta P_v / \Delta P_T$ .

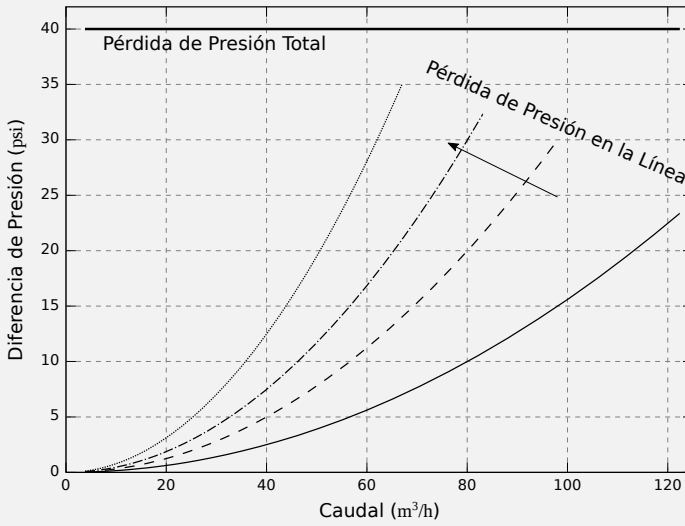


Figura 7.12: Caída de presión total y en la línea para el sistema del Ejem. 7.3 paramétrica con la relación  $\alpha = \Delta P_v / \Delta P_T$ .

Además, en la Fig. 7.12 muestra como se reduce el caudal máximo con el

aumento de la caída de presión en la línea. Note que si el caudal de operación fuese mayor a  $70 \text{ m}^3/\text{h}$  con  $k = 5$  el sistema no podría suministrar dicho caudal. ■

## 7.5. Procedimiento General para el Dimensionamiento de Válvulas de Control

Dimensionar una válvula de control significa determinar el diámetro del orificio de manera tal que cuando circule el caudal normal mínimo y máximo, las carreras del vástago se encuentren en un tramo intermedio (entre el 30 y el 70 %, para la gran mayoría de los casos<sup>6</sup>). Con estas condiciones de cálculo se busca una capacidad de regulación y rangeabilidad adecuadas.

De lo expuesto anteriormente, se propone el siguiente procedimiento para el dimensionamiento de una válvula de control.

### Procedimiento 7.5.1

- Paso 1.** Determinar la caída de presión de la línea lo que incluye pérdidas de cargas en cañerías y accesorios, y en el proceso en función del caudal.
- Paso 2.** Luego, en función de los caudales normales mínimos y máximos de operación y sus correspondientes caídas de presión determinar los  $C_{vl \text{ mín}}$  y  $C_{vl \text{ máx}}$
- Paso 3.** Finalmente, recurrir a tablas de fabricantes y determinar el diámetro de orificio de válvula que permite, para los  $C_{vl \text{ mín}}$  y  $C_{vl \text{ máx}}$ , una carrera del vástago en los extremos del intervalo deseado de operación propuestos.

**Ejemplo 7.4** Considere el sistema<sup>a</sup> de la Fig. 7.13 donde el caudal normal de operación es de  $200 \text{ gpm}$  y los caudales normal mínimo y máximo de operación son del 50 % al 120 % del caudal de operación. Dimensione la válvula de control que permite que dichos caudales se alcancen con un 30 % y 70 % de carrera de vástago.

<sup>6</sup>En este punto se remarca que no hay un criterio único y que mucho juega la experiencia de los ingenieros de procesos y de control para el sistema en particular bajo estudio.

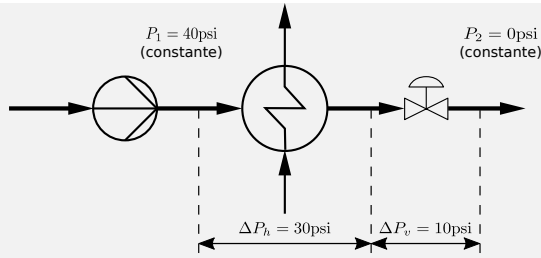


Figura 7.13: Válvula de control colocada a la salida del intercambiador de calor. Se considera que la presión de descarga de la bomba es constante

Primeramente determinamos los caudales normales mínimos y máximos lo que resulta,

$$Q_{\text{mín}} = 0,5 \text{ 200gpm} = 100\text{gpm}$$

$$Q_{\text{máx}} = 1,20 \text{ 200gpm} = 240\text{gpm}$$

Luego, siguiendo la metodología propuesta;

**Paso 1.** La caída de presión en la línea resulta igual a la caída de presión en el intercambiador  $\Delta P_h = kQ^2$ , de donde para el caudal de operación es posible calcular el valor de  $k$

$$k = \frac{30\text{psi}}{200^2\text{gpm}^2} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{psi/gpm}^2$$

Por tanto, la ley para el cambio de la caída de presión en el intercambiador resulta,

$$\Delta P_h = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{psi/gpm}^2 Q^2. \quad (7.21)$$

**Paso 2.** La caída de presión en la válvula resulta,

$$\Delta P_v = 40\text{psi} - 7,5 \cdot 10^{-4} \text{psi/gpm}^2 Q^2.$$

Teniendo en cuenta la Ec. (7.14) es posible calcular los valores de  $C_{vl \text{ mín}}$  y  $C_{vl \text{ máx}}$  como,

$$C_{vl \text{ mín}} = \frac{Q_{\text{mín}}}{\sqrt{\Delta P_{v \text{ mín}}}} = 15,339[\text{pm}/\text{psi}^{1/2}]$$

$$C_{vl \text{ máx}} = \frac{Q_{\text{máx}}}{\sqrt{\Delta P_{v \text{ máx}}}} = 92,036\text{gpm}/\text{psi}^{1/2}$$

Particularmente para el caudal de operación el valor del  $C_{vl}$  resulta,

$$C_{vl \text{ op}} = \frac{Q_0}{\sqrt{\Delta P_{v0}}} = 44,721\text{gpm}/\text{psi}^{1/2}$$

**Paso 3.** Note que, de acuerdo con la Tabla 7.2 para un diámetro de cañería de 3[pulg] se tiene para  $l = 30\%$  un  $C_{vl \text{ mín}} = 18,4$  mientras que para  $l = 70\%$  un  $C_{vl \text{ máx}} = 101$  resultando valores cercanos a los necesarios para este problema. Note además que para el caudal de operación de acuerdo con el fabricante la característica inherente tiene un valor de  $l = 50\%$ . ■

<sup>a</sup>Ejemplo basado en el trabajo original de Luyben [55] y los comentarios de Seaborg *et al.* [75].

**Ejemplo 7.5** Considere el sistema del Ejem. 7.4 para el diámetro de cañería adoptada.

- Determine el caudal a través de la válvula instalada en función de la apertura.
- Compare la característica de caudal inherente con la instalada.

De acuerdo con el fabricante, para el diámetro de cañería adoptado a un 100% de apertura el  $C_{\text{máx}} = 245$ , y en base a este dato es posible calcular el caudal máximo a partir de

$$Q_{\text{máx}} = C_{v_{\text{máx}}} \sqrt{\Delta P_T - kQ_{\text{máx}}^2}$$

Despejando, el caudal máximo se tiene que  $Q_{\text{máx}} = 255,38$ .

Con similar procedimiento es posible calcular los caudales para cada valor de  $l$  según  $Q = C_{vl} \sqrt{\Delta P_T - kQ^2}$  que despejando resulta,

$$Q = C_{vl} \sqrt{\frac{\Delta P_T}{1 + C_{vl}^2 k}}$$

con  $k = 7,5 \cdot 10^{-4}$  y  $C_{vl}$  según los datos de la Tabla 7.2. Estos resultados se resumen en la Fig. 7.14.

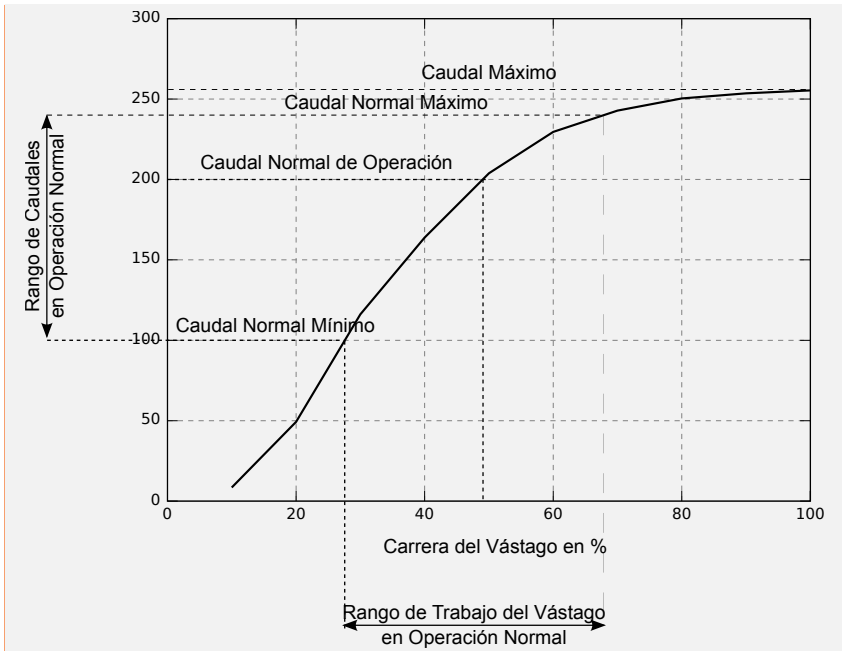


Figura 7.14: Caudales de operación de la válvula ya instalada.

Finalmente, es posible computar la fracción de caudal de acuerdo con la Def. 7.2.5 ( $\phi := Q/Q_{\text{máx}}$ ) y compararlo con lo informado por el fabricante para el diámetro de cañería adoptado ( $\phi_i = C_{vl}/C_{v \text{ máx}}$ ). Estos resultados de muestran en la Fig. 7.15.

De acuerdo con la Fig. 7.15 la característica de caudal inherente es similar a una válvula tipo igual porcentaje, sin embargo, una vez instalada la característica de caudal cambia considerablemente. En este caso particular la relación de pérdidas de presiones o *authority* evaluado a caudal máximo resulta

$$\alpha = \frac{\Delta P_{v \text{ mín}}}{\Delta P_T} = 0,86400$$

Recuerde que a caudal máximo la caída de presión es mínima, consecuentemente para caudales menores al máximo (como los caudales de operación) resulta en una relación de pérdidas de presión menor a la calculada antes. Note además que el valor de  $\alpha = 0,86400 < 1$  justifica el alejamiento de curva instalada de la inherente.



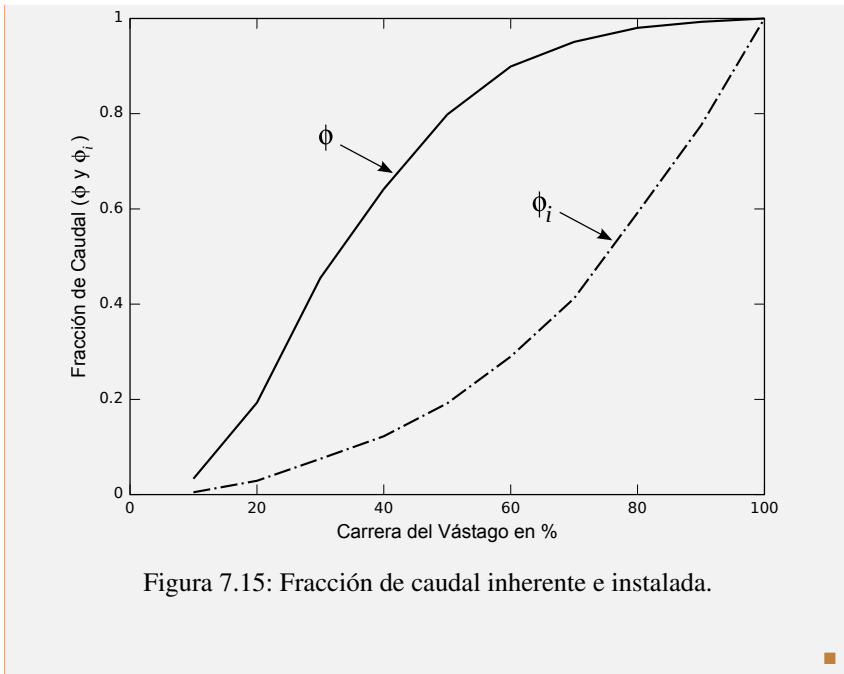


Figura 7.15: Fracción de caudal inherente e instalada.

## 7.6. Histéresis de Válvulas de Control

Al igual que un elemento de medición, las válvulas de control suelen presentar histéresis y esta se debe a problemas constructivos. La Fig. 7.16 muestra una curva experimental de una válvula de control neumática industrial de pequeño caudal normalmente abierta. Puede verse que para una misma señal de entrada se tiene dos caudales diferentes de paso a través de la válvula dependiendo si la misma está abriendo o cerrando.

Basándose en la definición de la histéresis de un elemento de medición (ver Secc. 6.3.1 en el Cap. 6), la histéresis de una válvula de control puede medirse como la máxima diferencia de caudal entre los caminos de apertura y cierre de la misma para una misma señal de entrada dividido el rango de entrada por 100.

La histéresis de una válvula de control constituye una no linealidad que en algunos casos puede ser importante y su presencia contribuye al detrimento del desempeño del lazo de control.

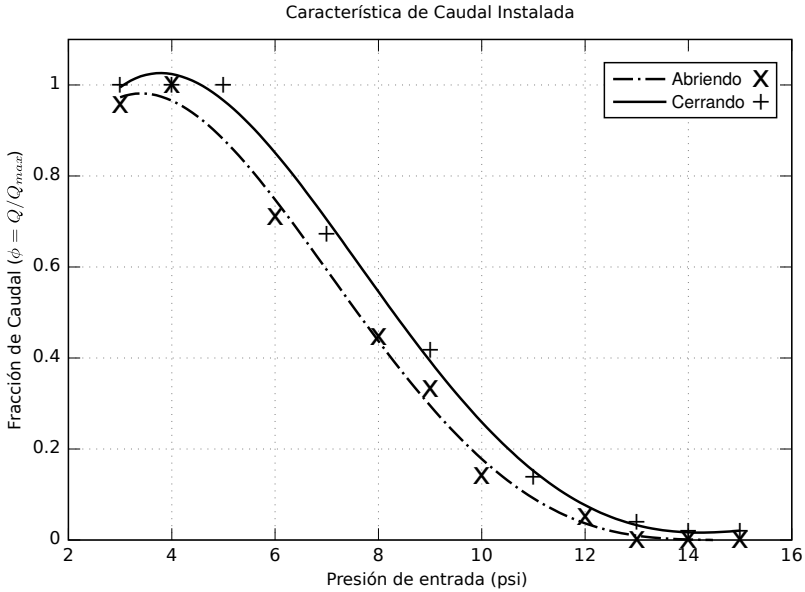


Figura 7.16: Datos experimentales y aproximación polinómica de una válvula de control neumática normalmente abierta que muestra la histéresis de dicha válvula. Las aproximaciones polinómicas fueron obtenidas usando el comando `polyfit` de Octave.

Note que, por ejemplo, un sistema realimentado con una válvula de control normalmente abierta con histéresis (similar a la curva de la Fig. ) que se está cerrando, si necesita incrementar el caudal entonces debe reducir su presión, pero dado que hay un rango de presiones que separa una curva de la otra, mientras el sistema no alcance la presión para cambiar de curva, el mismo se encuentra a lazo abierto ya que a pesar de existir un orden de cambio, la dinámica de la respuesta es la de lazo abierto por que el sistema no reacciona hasta alcanzar la curva de apertura.

## 7.7. Modelado Matemático de una Válvula de Control Neumática

En la industria de procesos, las válvulas de control de caudal son los elementos de control final más comunes. Particularmente, las válvulas neumáticas son más comunes entre las válvulas de control, si bien en los últimos años las válvulas con motores eléctricos para el movimiento del vástago han ido ganando lugar en el mercado. Sin embargo, las válvulas de grandes dimensiones y con vástagos de gran masa siguen siendo neumáticas.

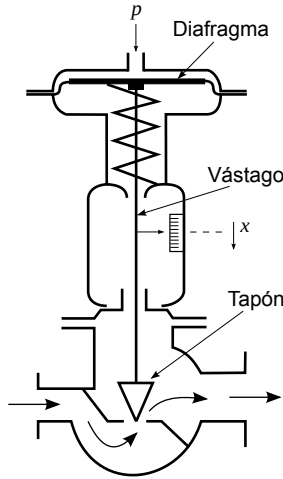


Figura 7.17: Diagrama esquemático de una válvula neumática.

Un diagrama esquemático de una válvula neumática se muestra en la Fig. 7.17. El aire comprimido de presión  $p$  es aplicado sobre el diafragma de área  $A$  generando una fuerza  $f_a = pA$  que mueve el vástago. El resorte unido al vástago ejerce una fuerza contraria  $f_{res} = -kx$ , siendo  $k$  la constante del resorte y  $x$  el desplazamiento del vástago. Adicionalmente, una fuerza de fricción proporcional a la velocidad con que se mueve el vástago y contraria al movimiento del mismo se suma al balance de fuerzas puesto en juego en el sistema.

Aplicando la ley de Newton,

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = pA - kx - B \frac{dx}{dt}. \quad (7.22)$$

Reordenando la Ec. (7.22),

$$\frac{M}{k} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{B}{k} \frac{dx}{dt} + x = \frac{A}{k} p.$$

sujeta a la condición inicial  $x = x^0$ .

Definiendo,  $T^2 := M/k$ ,  $2\zeta T := B/k$  y  $K := A/k$  y tomando variables de desviación respecto a un estado inicial de operación de la válvula ( $x = x^0$ ),

$$T^2 \frac{d^2\hat{x}}{dt^2} + 2\zeta T \frac{d\hat{x}}{dt} + \hat{x} = K\hat{p}. \quad (7.23)$$

sujeta a la condición inicial  $\hat{x} = 0$ .

### 7.7.1. Función de transferencia de una válvula de control

Aplicando transformada de Laplace a la Ec. (7.23) se obtiene que,

$$\frac{\hat{X}(s)}{\hat{P}(s)} = G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}. \quad (7.24)$$

En este punto, es importante recordar que la función de transferencia de la válvula es entre el caudal manipulado y la presión de entrada. Por tal motivo, se hace necesario relacionar la posición del vástago con la apertura de la válvula. Con el objeto de normalizar la posición del vástago  $l \in [0 \ 1]$  se define,  $l(t) := \frac{1}{K}x(t)$  con lo que resulta,

$$\frac{\hat{L}(s)}{\hat{P}(s)} = G_l(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}. \quad (7.25)$$

Así mismo, la presión de entrada debe estar normalizada dentro del span de trabajo,  $p(t) = \frac{1}{\mathcal{Y}_r}y_r(t)$  donde  $\mathcal{Y}_r \in [3 \ 15]$ psi para el caso particular de la válvula neumática con lo que resulta,

$$\frac{\hat{L}(s)}{\hat{Y}_r(s)} = \frac{G_l(s)}{\mathcal{Y}_r}. \quad (7.26)$$

Así, la función  $G_v(s)$  resulta,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{Q}(s)}{\hat{Y}_r(s)} &= \frac{\hat{L}(s)}{\hat{Y}_r(s)} \frac{\hat{Q}(s)}{\hat{L}(s)} \frac{Q_{\text{máx}}}{Q_{\text{máx}}} \\ &= \frac{G_l(s)}{\mathcal{Y}_r} \frac{\hat{\Phi}(s)}{\hat{L}(s)} Q_{\text{máx}} \end{aligned} \quad (7.27)$$

donde  $\hat{\Phi}(s)/\hat{L}(s) = K_l$  como se observa en la Fig. 7.6. Reemplazando en la ecuación anterior se tiene que,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{Q}(s)}{\hat{Y}_r(s)} = G_v(s) &= \frac{G_l(s)}{\mathcal{Y}_r} K_l Q_{\text{máx}} \\ &= \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \frac{K_l Q_{\text{máx}}}{\mathcal{Y}_r} \\ &= \frac{K_v}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \end{aligned} \quad (7.28)$$

con  $K_v = K_l Q_{\text{máx}}/\mathcal{Y}_r$  como se mostró anteriormente. Como se comentó en la Sección 7.4.1, la Fig. 7.6 muestra una curva de *característica de caudal instalada* de una válvula y como se determina la ganancia  $K_l$  para una posición particular del sistema. Puede verse que  $K_v$  puede determinarse directamente, sin necesidad de computar las ganancias  $K_l$ , simplemente a través de un cambio de escala.

## 7.8. Características Dinámicas de una Válvula

Basándose en las definiciones introducidas en la sección anterior se desprende que  $\zeta = B/2\sqrt{kM}$ . Note que dependiendo de los valores de  $k$ ,  $B$  y  $M$ , el coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$  puede tomar diferentes valores,  $0 < \zeta < 1$  o bien,  $\zeta \geq 1$ .

En consecuencia, para un cambio en la presión de entrada

- si  $0 < \zeta < 1$  la válvula de control tendrá una respuesta subamortiguada mientras que,
- si  $\zeta \geq 1$  la respuesta dinámica será críticamente amortiguada o sobre-amortiguada.
- Todas las respuestas seguirán al cambio en la entrada, ya que  $G(s)$  en la Ec. (7.24) o bien  $G_v(s)$  en la Ec. (7.28) son funciones de transferencias estables debido a que en todos los casos  $\zeta > 0$ .
- Si  $B \gg \sqrt{kM}$  la respuesta dinámica de la válvula de control se aproximará a la de un sistema de primer orden.

## 7.9. Conclusiones

En este capítulo se presenta la problemática de los elementos de control final (ECM), particularizando en las válvulas de control que son los ECM por excelencia en la industria de procesos.

Se discuten las diferentes características inherentes de las válvulas de control y su determinación mediante un ensayo bajo normas ISA. También se muestra como cambian estas características inherentes una vez instalada la válvula de control en el procesos.

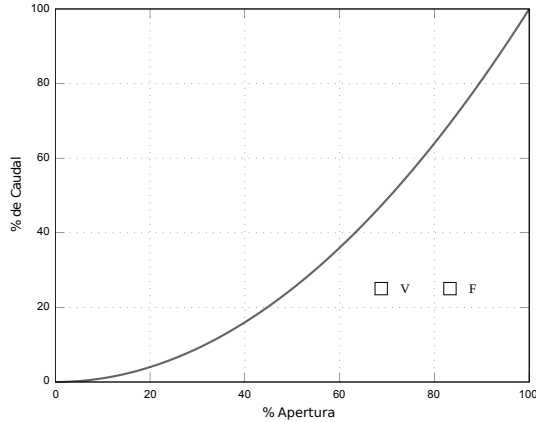
No menos importante a la hora de seleccionar una válvula de control resulta su dimensionamiento y por tal razón se presenta un procedimiento para tal fin.

Como todo elemento en un lazo de control es de esperar que éste tenga dinámica y para comprender esto se presenta brevemente un modelo de válvulas neumáticas que muestra que la función de transferencia de este sistema es de segundo orden donde el coeficiente de amortiguamiento puede resultar entre cero y uno y por tanto, tener respuestas dinámicas subamortiguadas.

## 7.10. Pensemos

1. ¿Una válvula de control que tiene un polo estable hace más estable el lazo de control?  V  F
2. ¿Qué es más conveniente desde el punto de vista de la rangebilidad de una válvula de control?
  - $R \rightarrow 1$   Ninguna de las anteriores.
  - $R \rightarrow$  valores grandes

3. ¿La siguiente gráfica representa la curva característica instalada de una válvula de control normalmente abierta, y donde para 0 % de apertura corresponde 3 psi de presión de entrada en la cabeza de la válvula?



4. Si la pérdida de carga en un proceso a controlar es pequeña, desde un punto de vista práctico, ¿se puede considerar que la característica inherente e instalada de la válvula de control son iguales?  SI  NO

## 7.11. Problemas

**Problema 7.1** (a) Determine a que es igual la ganancia de una válvula de control (con entrada en mA) de igual porcentaje asumiendo una pérdida de presión constante para el rango de operación de la misma entre 10 al 90 por ciento de escala completa.

- (b) Compare el resultado del inciso ((a)) con el que se obtiene si la válvula fuese lineal en todo el rango de operación, con el mismo rango de entrada y similar condición operativa. Obtenga conclusiones.

**Problema 7.2** Se ha seleccionado una válvula de control para manipular el caudal de proceso en un intercambiador de calor. La curva inherente de dicha válvula tiene por ecuación  $9l/(44 - 35l)$  con  $0 \leq l \leq 1$  y un  $C_{v \text{ máx}} = 45$ .

Se sabe además que el caudal de operación es 100 GPM, la densidad relativa del fluido de procesos es igual a 1, la caída de presión en el intercambiador de calor puede ser considerada constante  $\Delta P_s = 40$  psi y la caída de presión en cañería puede ser calculada como  $\Delta P_p = 0,0025Q^2$ .

- (a) Calcule el caudal máximo que puede manipular la válvula de control.  
 (b) ¿A qué es igual la posición del vástago ( $l$ ) de la válvula en el punto de operación del proceso?  
 (c) Determine la ganancia de la válvula en dicho punto.

**Problema 7.3** Una válvula normalmente cerrada manipula el agua de refrigeración de un proceso. El caudal de estado estacionario es 80 GPM, el rango de entrada al actuador es de 4-20 mA y el de salida 0-1 de posición de vástago, la curva inherente estada dada por la ecuación  $\phi = 55^l/55$  donde  $l$  es la carrera del vástago. En el proceso se produce una caída de presión que puede ser calculada mediante la ecuación  $\Delta P_p = 0,002Q^2$  psig en estado estacionario. La válvula tiene un  $Cv_{m\acute{a}x} = 32$  y la caída de presión total es  $\Delta P_T = 50$  psi y es considerada constante.

- Determine la posición del vástago de la válvula para los caudales de 80 y 82 gpm.
- ¿A qué es igual la ganancia de la válvula en los extremos del rango? ¿Desde un punto de vista práctico, la ganancia de la válvula puede ser considerada constante en dicho rango?
- ¿Está de acuerdo con la válvula adoptada? Justifique su respuesta.

**Problema 7.4** Considere el diagrama de bloques de la Fig. 7.18 adjunta que representa una válvula de control que posee un posicionador ya que se necesita coincidencia entre la señal del controlador y la apertura se usará un actuador.

La válvula puede ser considerada con una característica de caudal de igual porcentaje y cuya curva inherente esta dada por la ecuación  $\phi = 25^{l-1}$  donde  $\phi$  es la fracción de caudal,  $l$  es la posición del vástago en tanto por uno y  $Q_{m\acute{a}x} = 160$  m<sup>3</sup>/h. A los efectos prácticos puede considerarse que la curva instalada es muy similar a la inherente. Además se sabe que, i) con una presión de impulsión constante, en el estado estacionario se tiene una apertura de 70 %, ii) de acuerdo con el instrumentista  $G_p(s) = \frac{K_p}{s(2s+1)}$  con  $K_p = 0,05$  posición/mA y que iii) la válvula es normalmente abierta.

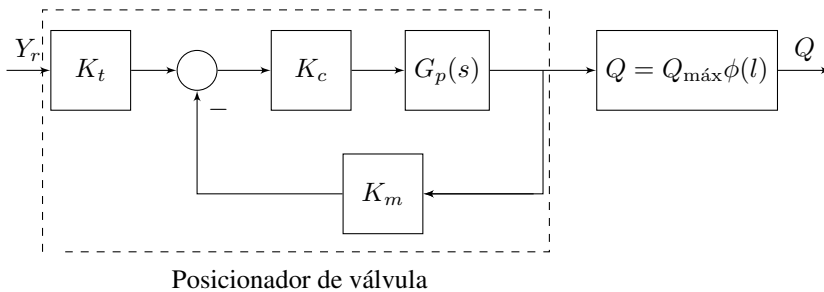


Figura 7.18: Diagrama de bloques de la válvula de control y su posicionador. Aquí,  $y_r$  es la señal esta escalada entre 0-1 de posición del posicionador que luego es reescalada en el rango 4-20 mA,  $K_m = 16$  mA/posición (ganancia del sensor de posición),  $K_c$  es la ganancia variable del actuador y  $G_p(s)$  la función de transferencia del actuador.

- ¿Qué ganancia de actuador utilizaría, si se pretende una dinámica con un

- coeficiente de amortiguamiento de 0.45? Justifique adecuadamente.
- (b) Encuentre la función de transferencia resultante de la válvula de control de acuerdo con la ganancia de actuador elegida.
  - (c) ¿Qué puede suceder si se desactiva el sensor de posición y el actuador recibe solamente la señal directa del controlador? Justifique.



# Capítulo 8

## Controladores PID

Este tema tiene por objetivos (1) comprender la estructura de diferentes tipos controladores lineales P, PI, PD y PID; (2) comprender cuáles son los parámetros modificables en sus algoritmos (3) analizar la influencia de estos parámetros sobre las respuestas temporales a lazo abierto (LA) de los distintos tipos de controlador y (4) comprender algunos desarrollos tecnológicos propuestos que mejoran el desempeño de los controladores PID. También se incluyen conceptos básicos de control si-no a fin de entender el funcionamiento básico de este tipo de controlador. Finalmente ejemplos de aplicación en la industria de procesos son presentados con el objeto de mostrar su amplio uso en la ingeniería química.

### 8.1. Introducción

Desde la década del 30 en adelante, los controladores PID (o controladores de tres modos) han sido ampliamente usados en la industria. Sus primeras versiones fueron neumáticas las cuales se usaron ampliamente hasta la década de los 60 y 70. Desde finales de los 50 y principio de los 60 empiezan a irrumpir los controladores digitales cuyo hardware fundamentalmente es una computadora y donde las rutinas de cálculo discretas tuvieron un fuerte impacto en la industria por más de 20 años. Posteriormente, con el avance de la electrónica, el control por computadora se vió fuertemente avaratado y en la actualidad es muy común encontrar control PID aplicados a procesos industriales con una PC dedicada al monitoreo y control del procesos.

Algunos autores [79, entre otros] estiman que los controladores PID forman más del 95 % de los lazos de control en la industria, y el resto, lo ocupa otro tipo de controlador con algoritmos más sofisticados como el control predictivo, el control no lineal, redes neuronales, etc.

La ventaja funamental entre el control PID y otros algoritmos de control más sofisticados se basa en que con el ajuste de unos pocos parámetros (a lo sumo

tres) un proceso áltamente complejo (MIMO inclusive) puede ser fácilmente controlado. Esta es una de las principales razones de la vigencia del control PID en la actualidad.

Para una sistemática exposición, este tema se organiza como se detalla a continuación. Primeramente, en la Sección 8.2 se presenta una introducción a reguladores o controladores PID, donde se discute su clasificación, ecuaciones y comportamiento temporal a LA. En la Sección 8.3 se presenta el controlador si-no junto con un ejemplo de aplicación sencillo. En la Sección 8.4 se presenta aplicaciones típicas de control PID en la ingeniería química y en la Sección 8.6 algunos problemas propuestos. Finalmente, en la Sección 8.5 se presentan las conclusiones.

## 8.2. Controladores o Reguladores PID

Básicamente la estructura de un controlador (ver Fig. 8.1) está compuesta por:

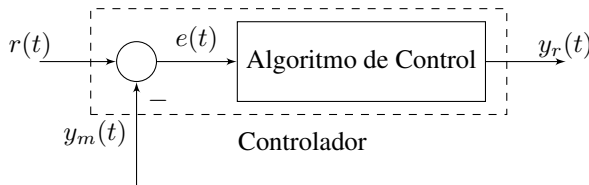


Figura 8.1: Esquema de bloques de un controlador a LA.

- Un generador de error donde se compara la señal de salida controlada medida  $y_m(t)$  con la señal de consigna  $r(t)$ .
- Un algoritmo de control que genera una señal de salida del controlador  $y_r(t)$  de acuerdo a los diferentes modos, funciones y/o algoritmos presentes en el controlador.

De acuerdo con las normas ANSI/ISA el controlador se lo define como sigue.

**Definición 8.2.1 — Controlador [13].** Dispositivo que posee una salida que varía para regular una variable controlada de una manera específica, que puede ser un instrumento autónomo analógico o digital, o puede ser el equivalente de un instrumento de este tipo en un sistema de control compartido.

### 8.2.1. Clasificación

Los reguladores o controladores pueden ser clasificados de distintas maneras, ya sea en base a, el tipo de señal (continua o discreta), la naturaleza de la

señal con que operan (eléctrica, neumática hidráulica, etc.), el tipo de algoritmo involucrado en el controlador (lineales o no lineales), etc.

Así, una primer clasificación para controladores lineales basada fundamentalmente en el tipo de señal involucrada bien podría ser,

$$\text{Controladores Lineales} \left\{ \begin{array}{l} \text{continuos} \left\{ \begin{array}{l} \text{proporcional (P)} \\ \text{proporcional Integral (PI)} \\ \text{proporcional Derivativo (PD)} \\ \text{proporcional Integral Derivativo (PID)} \end{array} \right. \\ \text{digital} \left\{ \begin{array}{l} \text{P, PI, PD, PID} \\ \text{otros algoritmos digitales, predicivos, etc.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Es sabido que los sistemas lineales continuos pueden ser adecuadamente tratados en el campo de Laplace mientras que los sistemas lineales digitales en el campo discreto.

Otra posibilidad de clasificar a los controladores sería en base a la naturaleza de la señal, esto es,

$$\text{controladores} \left\{ \begin{array}{l} \text{electrónicos} \\ \text{neumáticos} \\ \text{hidráulicos} \\ \text{híbridos} \end{array} \right.$$

### 8.2.2. Ecuaciones y comportamiento temporal de un PID

El controlador más popular en la industria es el controlador PID. Este resulta de la combinación lineal de tres modos, el modo proporcional (P), el modo integral (I) y el modo derivativo (D). Así,

- El modo proporcional multiplica la señal de error actual por un factor constante conocida como ganancia del modo proporcional ( $K_r$ ). El efecto corrector del modo proporcional resulta  $P = K_r e(t)$ .
- El modo integral, como su nombre lo indica, integra el error actual y dicha integral es afectada por una constante  $K_r/T_I$  donde  $T_I$  es conocida como tiempo de acción integral. Así, el efecto corrector del modo integral resulta  $I = \frac{K_r}{T_I} \int_0^t e(t) dt$ .
- El modo derivativo deriva la señal de error actual multiplicando dicho resultado por una constante  $K_r T_D$  donde  $T_D$  es conocida como tiempo de acción derivativo. Así, el efecto corrector del modo derivativo resulta  $D = K_r T_D de(t)/dt$ .

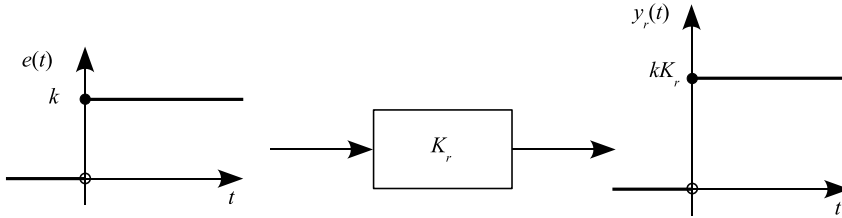


Figura 8.2: Respuesta al escalón de amplitud  $k$  del modo P.

### Controlador proporcional (P)

El controlador P es el controlador lineal más sencillo e intuitivo, consta de un sólo modo y resulta ser la relación entre la señal de salida del controlador  $y_r(t)$ <sup>1</sup> y la señal de error actual  $e(t)$ . Así,

$$y_r(t) = \pm K_r e(t). \quad (8.1)$$

La Ec. (8.1) no es más que una formulación en términos matemáticos de una forma intuitiva de trabajar. Esto es, si uno detecta un gran error luego, introduce una fuerte corrección mientras que, si el error es pequeño se introduce una pequeña corrección. En otras palabras se está corrigiendo proporcionalmente al error.

En el dominio de Laplace resulta,

$$Y_r(s) = \pm K_r E(s). \quad (8.2)$$

Así, la función de transferencia de un controlador P resulta ser

$$G_c(s) = \frac{Y_r(s)}{E(s)} = \pm K_r. \quad (8.3)$$

La Fig. 8.2 muestra la señal de salida de un controlador P frente a una señal de error escalón de amplitud  $k$ . Puede verse que la señal de salida resulta ser otro escalón de amplitud  $kK_r$ .

Usualmente en los controladores industriales se define la banda proporcional (BP).

**Definición 8.2.2 — Banda Proporcional.** Se define como banda proporcional (BP) a la relación entre la señal relativa de la entrada respecto a su alcance (span de entrada) y la señal de salida respecto a su alcance (span de salida). En términos matemáticos se puede escribir,

<sup>1</sup>Por simplicidad en la notación todas las son consideradas en variables de desviación.

$$BP = \frac{e(t)/\mathcal{E}}{y_r(t)/\mathcal{Y}_r} 100, \quad (8.4)$$

donde  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{Y}_r$  son los span o alcances de entrada y salida respectivamente.

Operando algebraicamente con la Ec. (8.4) y teniendo en cuenta la (8.1) se tiene,

$$BP = \frac{\mathcal{Y}_r}{\mathcal{E}} \frac{100}{K_r}, \quad (8.5)$$

Dado que usualmente la relación de span ( $\mathcal{Y}_r/\mathcal{E}$ ) es unitaria la (8.5) resulta,

$$BP = \frac{100}{K_r}. \quad (8.6)$$

La Fig. 8.3 da una explicación gráfica de la definición de la banda proporcional. Se observa claramente que una  $BP = 100\%$  significa que la variable controlada varía en un  $100\%$  dentro de su rango mientras que la salida del controlador varía un  $100\%$  de su rango. Una  $BP$  del  $50\%$  significa que la variable controlada sólo puede variar un  $50\%$  de su rango mientras que la variable de salida lo hace en un  $100\%$ . Una  $BP$  del  $200\%$  no moverá la salida en el  $100\%$  de span de trabajo.

### Acción directa e inversa y signo de un controlador

El primer concepto intuitivo respecto a la realimentación negativa puede ser enunciado mediante la siguiente regla de mano:

■ **Regla 8.2.1 — Realimentación Negativa.** Para que la realimentación sea negativa, el efecto de la señal de la cadena de lazo abierta ( $G(s)H(s)$ ) debe estar en oposición con la dirección de cambio de la señal de entrada al proceso, sea esta perturbación o referencia.

Lo que se quiere expresar con la regla de mano 8.2.1 es que el sistema de control tenderá a estabilizarse frente a una entrada cuando la señal medida  $y_m(t)$  tienda a reducirse con el paso del tiempo, y esto se logra si el error entre la referencia  $r(t)$  y dicha señal se reduce.

Para lograr esto último, el ingeniero de control debe seleccionar adecuadamente el tipo de acción (directa o inversa) para el controlador. El signo de la ganancia del controlador quedará fijado automáticamente al optar por un tipo de acción u otro. Ésto último, es algo *oscuro* de dilucidar en base a los catálogos de los fabricantes, ya que usualmente sólo informan como "switchear" la acción directa o inversa, pero no permiten cambiar el signo del controlador, porque

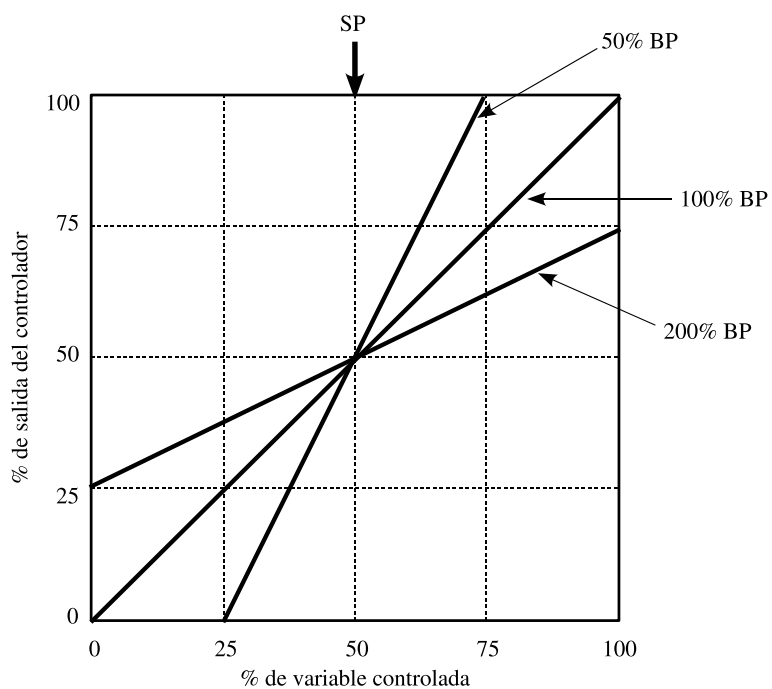


Figura 8.3: Distintas BP que muestran el porcentaje de salida del controlador en función del porcentaje de salida de la variable controlada.

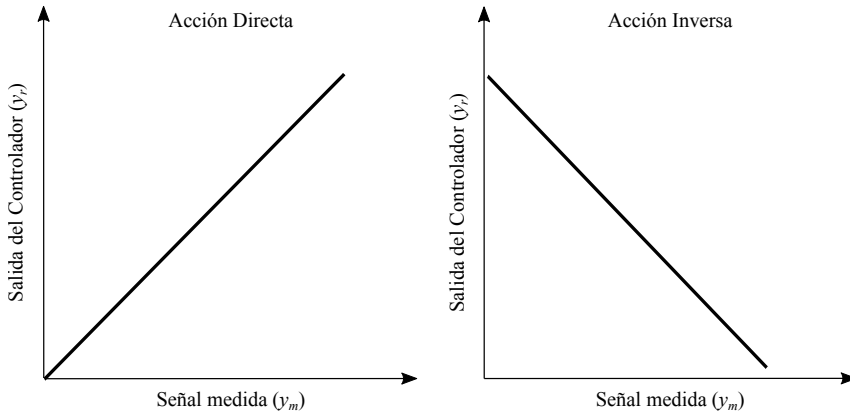


Figura 8.4: Acción directa o inversa de acuerdo con la Def. 8.2.3. Así, la acción directa puede ser asociada a una gráfica ( $y_r$  vs.  $y_m$ ) con pendiente positiva mientras que, la acción inversa con una pendiente negativa.

éste queda fijado por la forma en que está escrito el algoritmo computacional de control.

Para comprender mejor este punto, primeramente se introduce el concepto de la acción directa e inversa mediante la definición que se detalla a continuación.

**Definición 8.2.3 — Acción Directa o Inversa.** Se dice que un controlador tiene acción directa, cuando frente a un aumento de la señal medida ( $y_m(t)$ ) se tiene un aumento de la señal de salida del controlador ( $y_r(t)$ ). De otro modo, se dice que el controlador tiene acción inversa.

Una interpretación gráfica de este concepto se muestra en la Fig. 8.4.

Como se indicó antes, las acciones directa e inversa llevan implícitamente la definición de un signo para el controlador. Este es tal vez el punto más álgido de entender ya que, cualquiera sea la acción adoptada y la forma como se escribe la realimentación, se debe lograr que la misma sea negativa.

Por tal motivo, consideremos el sistema realimentado bajo la representación tradicional de la Fig. 8.5a donde el error se ha definido como,

$$e(t) := r(t) - y_m(t). \quad (8.7)$$

Note que, es posible multiplicar ambos miembros de la Ec. (8.7) por -1 resultando,

$$-e(t) = -r(t) + y_m(t) \quad (8.8)$$

y de esta manera, no se alterara el sistema de ecuaciones que define al error en el lazo de control. Como consecuencia de esto, el DB del sistema de control puede ser escrito en función de  $-e(t)^2$  como se indica en la Fig. 8.5b. Esta simple modificación, da lugar a un cambio conceptual que va impactar en la selección del signo del controlador a fin de no alterar la realimentación negativa.

Primeramente, asumiremos el sistema de control según el DB de la Fig. 8.5a. Para que la realimentación sea negativa se debe adoptar el signo adecuado del controlador, y una forma sencilla de hacerlo es pidiendo que el producto de todos los signos involucrados en la cadena de lazo abierto ( $G(s)H(s)$ ) sean positivos ya que el controlador tiene impuesto un signo negativo en el sumador, esto es,

$$\text{Sign(Contr.)} \times \text{Sign(ECF)} \times \text{Sign(Planta)} \times \text{Sign(Elem. de Medición)} > 0. \quad (8.9)$$

De esta manera, se asegura que la realimentación sea negativa. Obviamente, el signo del controlador es lo último que se adopta para asegurarse que dicha situación se cumpla.

Por otro lado, si se considera el DB de la Fig. 8.5b, para asegurarse que la realimentación sea negativa, se debe pedir que,

$$\text{Sign(Contr.)} \times \text{Sign(ECF)} \times \text{Sign(Planta)} \times \text{Sign(Elem. de Medición)} < 0. \quad (8.10)$$

Es de remarcar que, de acuerdo con Smith y Corripio ([79], p.228), la mayoría de los controladores industriales tienen por adopción una ganancia positiva (tanto para la acción directa como inversa), de manera que el computo del error es invertido al pasar de una acción a otra. En otras palabras, al invertir el tipo de acción se pasa del DB de la Fig. 8.5a a la Fig. 8.5b o viceversa. Ya sea que se altere el DB o bien que se invierta un signo para  $K_r$ , este cambio es hecho internamente, y el usuario no tiene acceso a esto, sólo puede fijar el tipo acción.

Para comenzar a entender mejor lo hasta aquí expuesto, consideremos el ejemplo que se detalla a continuación.

**Ejemplo 8.1** Considere un sistema realimentado donde el ECF es una válvula normalmente abierta, la planta es bien representada por un sistema de primer orden con retardo con una ganancia  $K_p > 0$ . Por simplicidad y sin pérdida de generalidad para el tema que se está tratando, asumamos que  $G_m(s) =$

<sup>2</sup>Note que el error podría ser computado como  $e(t) = y_m(t) - r(t)$ , pero es de remarcar que la Ec. (8.7) es la forma más tradicionalmente aceptada por la mayoría de los autores de textos clásicos de sistemas de control.



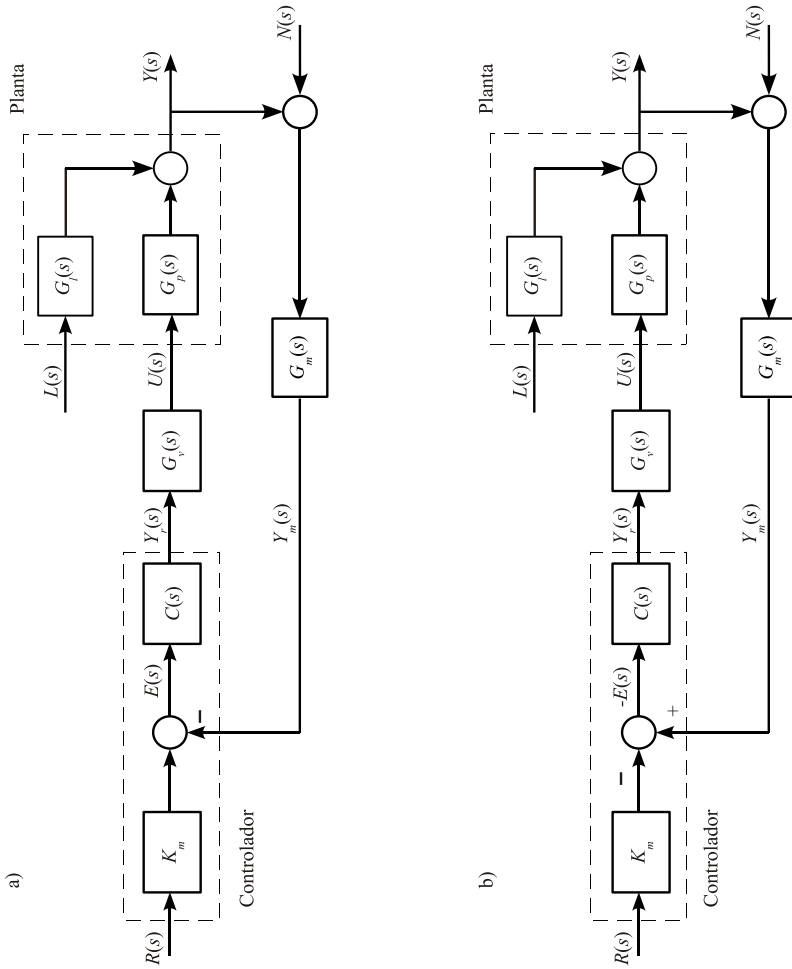


Figura 8.5: a) Sistema realimentado tradicional. b) Sistema realimentado con el signo definido según Ec. (8.8).

$K_m$  y  $K_m > 0$ , en otras palabras, el elemento de medición tiene dinámica despreciable y ganancia positiva. Adopte el tipo de acción y especifique el signo correspondiente para el controlador.

Primeramente, se considera el sistema de control de la Fig. 8.5a. Dado que la válvula de control es normalmente abierta luego, su ganancia es negativa ( $Kv < 0$ ). El elemento de medición tiene por adopción una ganancia positiva ( $Km > 0$ ), y la planta puede ser considerada con signo positivo dado que tiene por función de transferencia un primer orden con retardo y con ganancia positiva. Así, de acuerdo con (8.9) se tiene que el signo del controlador debe ser negativo (ver Fig. 8.6(a)).

De otro modo, si se considera el DB de la Fig. 8.5b, el signo del controlador debe ser positivo como se indica en la Fig. 8.6(b).

De acuerdo con estos resultados en principio los signos son opuestos. La pregunta ahora es, ¿para los dos casos considerados, están las acciones de control en igual dirección, o bien son opuestas?

Para responder esta pregunta, primeramente tendremos en cuenta un incremento en la consigna.

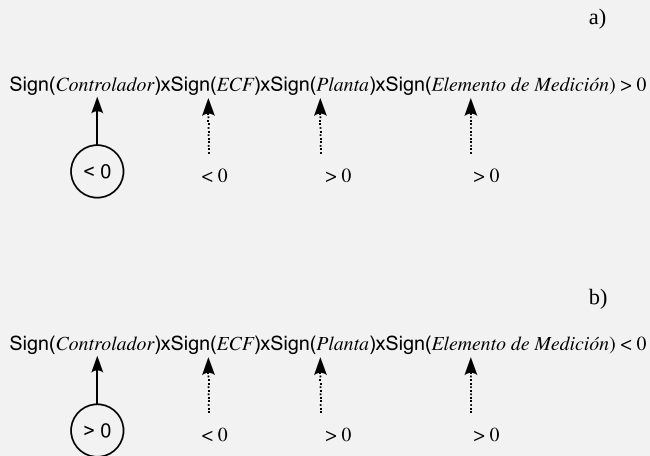


Figura 8.6: Adopción del signo del controlador para el Ejem. 8.1. a) Adopción para cuando se considera el caso de la Fig. 8.5a. b) Adopción para cuando se considera el caso de la Fig. 8.5b.

Si se considera el DB de la Fig. 8.5a, entonces se produce un aumento del error y esto provoca una disminución de la salida del controlador debido a que

$K_r < 0$ . Luego, la señal manipulada crece, por que  $K_v < 0$ , aumentando la salida controlada  $y(t)$ , probocando un incremento de  $y_m(t)$ . Note que el error se reduce ya que hay un signo negativo impuesto en el sumador y entonces  $y_r(t)$  crece. Consideremos ahora un aumento en la variable de carga  $l(t)$ . Como consecuencia de esto, las señales  $y(t)$  e  $y_m(t)$  aumentan. Luego, el doble cambio de signo del controlador genera un aumento de la salida  $y_r(t)$ . En conclusión, para ambos cambios se tiene un crecimiento de  $y_m(t)$  que trae aparejado un aumento de  $y_r(t)$ . Por lo tanto, el controlador es de acción directa.

Si ahora se considera el sistema realimentado según la Fig. 8.5b, con similar razonamiento al anterior, resulta sencillo concluir que para incrementos en consigna y carga, se tiene un incremento en  $y_m(t)$  e  $y_r(t)$  y por lo tanto el controlador también es de acción directa.

La Tabla 8.1 resume los datos y resultados para este ejemplo.

Tabla 8.1: Resumen de datos y resultados del Ejem. 8.1.

<b>Elemento</b>	
elemento de medición	$K_m > 0$
válvula de control (normalmente abierta)	$K_v < 0$
planta	$\text{Sign}(G_p) > 0$
controlador	Acción Directa $K_r < 0$ según Fig. 8.5a $K_r > 0$ según Fig. 8.5b

De manera que, idependientemente de la forma de escribir la realimentación, el tipo de acción resultante es directa, generando así una realimentación negativa. ■

**Ejemplo 8.2** Considere un sistema realimentado donde el ECF es una válvula normalmente abierta con un  $K_v = -10$ , la planta es bien representada por la función de transferencia  $G_p(s) = 2(s - 1)/(s + 2)(s + 4)$  y el elemento de medición es un sensor con ganancia  $K_m = 1$ . Adopte el tipo de acción y especifique el signo correspondiente para el controlador.

Dado que la válvula de control es normalmente abierta, su ganancia es negativa ( $K_v < 0$ ), y el elemento de medición tiene una ganancia positiva

$K_m > 0$ . En cuanto a la planta, esta resulta ser con signo negativo dado que de acuerdo con su función de transferencia para un cambio escalón positivo, la salida de la planta a lazo abierto se sitúa por debajo de cero en términos de variables de desviación. Así por ejemplo, por el teorema de valor final para un escalón unitario en la variable manipulada, la salida de la planta  $G_p(s)$  a LA es  $-1/4$ . Por tanto, si se implanta el sistema de control de acuerdo con la Fig. 8.5a, según la Ec. (8.9) se tiene que el signo del controlador deberá ser positivo y el controlador tendrá acción inversa. De otro modo, si se considera el DB de la Fig. 8.5b, según la Ec. 8.10,  $K_r < 0$  y el controlador también tendrá acción inversa.

Tabla 8.2: Resumen de datos y resultados del Ejem. 8.2.

<b>Elemento</b>	
elemento de medición	$K_m = 1 > 0$
válvula de control (normalmente abierta)	$K_v = -10 < 0$
planta	$\text{Sign}(G_p) < 0$
controlador	Acción Inversa $K_r > 0$ según Fig. 8.5a $K_r < 0$ según Fig. 8.5b

La Tabla 8.2 resume los datos y resultados para este ejemplo. ■

**Ejemplo 8.3** Considere el sistema de control de nivel de líquido de la Fig. 8.7 donde se pretende controlar el nivel con un control proporcional manipulando un caudal de entrada  $q_m$ .

Por simplicidad y sin pérdida de generalidad para el tema que se está tratando asumamos que  $G_m(s) = K_m$  y  $K_m > 0$ . El span de entrada del medidor de nivel es 0-5 m y el de salida 0-5 volts o sea, en este caso  $K_m = 1 \text{ volt/m}$ . El controlador proporcional tiene un span de entrada de 0-5 volts y el de salida de 3-15 psig. La válvula de control es lineal y normalmente abierta con un span de entrada de 3-15 psig para un caudal manipulado entre 0-2 L/s ( $K_v = -1/6 \text{ L/s/psig}$ ).

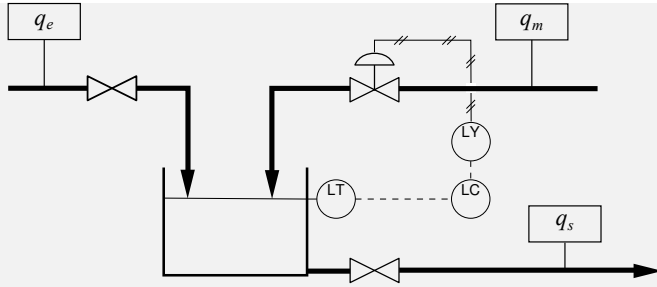


Figura 8.7: Sistema de control de nivel de líquido en un tanque.

Asumamos que en un principio el tanque está vacío ( $h(t = 0) = 0$ ), durante el período de tiempo  $0 \leq t < 10$ , el caudal de entrada  $q_e = 0$ , y que adoptamos un controlador de acción directa.

La Fig. 8.8 muestra las respuestas dinámicas al cambio escalón en consigna del nivel del líquido y los caudales de entrada y salida. Puede notarse que el sistema de control trata de llevar el nivel de líquido al valor deseado final, que en este caso se adoptó el valor de  $r = 1$  m. De acuerdo con la Fig. 8.8 el nivel de líquido comienza a aumentar y según Fig. 8.9 también aumenta la lectura del elemento de medición de nivel, en otras palabras, la señal medida ( $y_m$ ) aumenta. Dado que el controlador proporcional es de acción directa, si  $y_m$  aumenta entonces la salida del controlador ( $y_r$ ) crece.

Ya que la válvula es normalmente abierta, para cuando el tanque está vacío, la presión en la cabeza de dicha válvula es mínima (3 psig en este caso) y por tanto el caudal de salida es máximo (2 L/s en este caso). Luego, a medida que el nivel se acerca a la consigna, el error disminuye y el caudal de la válvula se reduce ya que el controlador tiene una salida proporcional al error. Así, la velocidad de crecimiento del nivel se va reduciendo y esto continúa hasta que se frena, cuando los caudales de entrada y salida son iguales (ver Fig. 8.8), en otras palabras cuando el balance de materia alcanza el estado estacionario.

Note que el nivel no alcanza el valor deseado, quedando un error final en el nivel conocido como “offset” asociado al cambio en consigna.

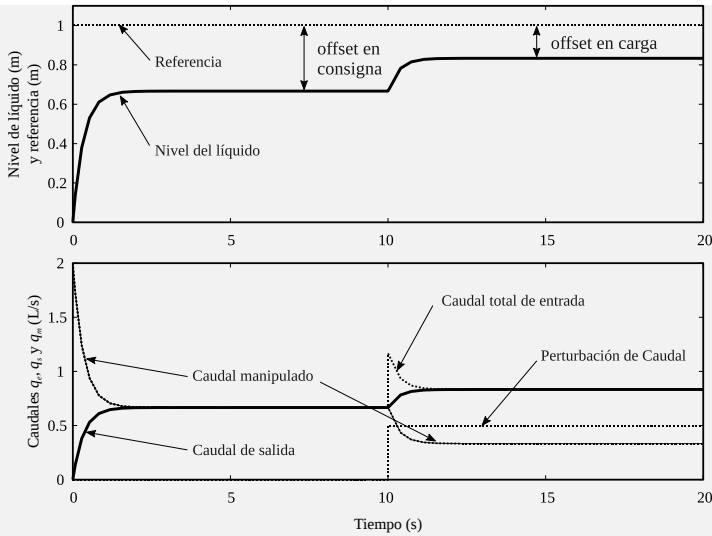


Figura 8.8: a) Respuestas dinámicas al cambio escalón en consigna y al cambio en el caudal de entrada. b) Respuestas dinámicas de los caudales manipulado, entrada y salida.

Para  $t = 10$  s se abre repentinamente la válvula de caudal de entrada extra  $q_e$ , y esto trae aparejado un aumento en el nivel de líquido del tanque, por lo tanto,  $y_m$  e  $y_r$  crecen. El controlador intenta compensar esta perturbación reduciendo el caudal manipulado. De todos modos, el crecimiento de nivel es inevitable y esto se refleja en las Figs. 8.8 y 8.9. Este crecimiento se detiene cuando los caudales de entrada y salida se igualan nuevamente, quedando ahora un offset asociado al cambio en carga.

La Tabla 8.3 representa un resumen de los resultados de este problema.

Tabla 8.3: Resumen de datos y resultados del Ejem. 8.3.

Elemento	
medidor de nivel	$K_m = 1 > 0$
válvula de control (normalmente abierta)	$K_v < 0$
tanque	$\text{Sign}(G_p) > 0$
controlador	Acción Directa
offset en consigna	no nulo
offset en carga	no nulo

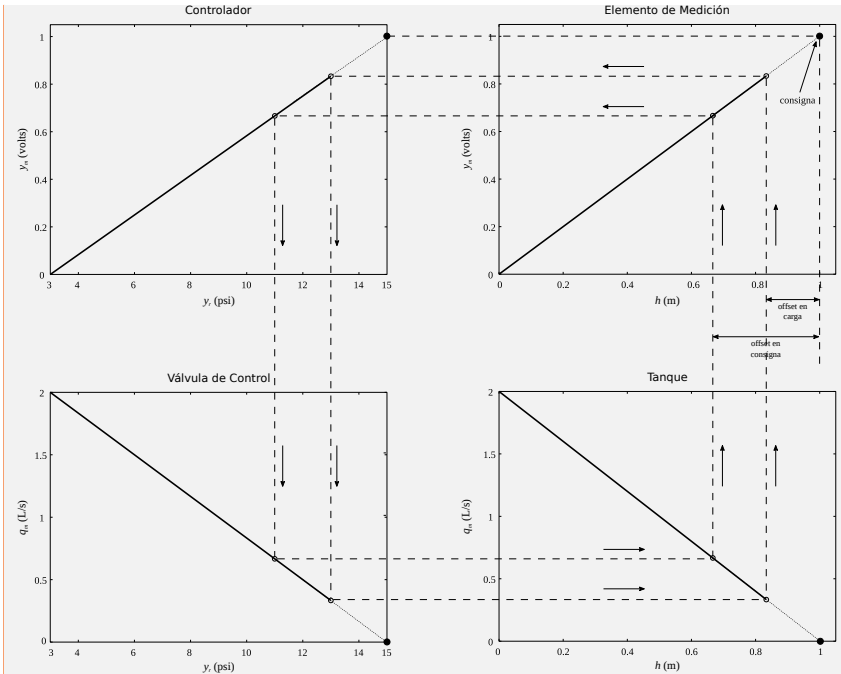


Figura 8.9: Gráficas de las señales en el tanque, elemento de medición, controlador y válvula de control. Por razones didácticas, las gráficas correspondientes al controlador y al tanque son representadas en forma invertida

Note que,

1. si se grafica la salida del controlador  $y_r$  en función de la señal medida  $y_m$ , dicha gráfica tiene pendiente positiva, y representa a la acción directa seleccionada para el controlador, mientras que, el producto de las otras ganancias involucradas en el lazo de control es negativa.
2. Si se escoge una acción inversa para el controlador proporcional, el sistema de control se inestabiliza producto de una realimentación positiva.

Basándose en lo hasta aquí expuesto, es posible enunciar las siguientes dos reglas de mano que facilitan la selección del tipo de acción para el controlador:

■ **Regla 8.2.2 — Selección de la Acción Directa o Inversa por el signo.** Para garantizar que el sistema de control tenga realimentación negativa, se

debe cumplir que,

$$\text{Sign}(Acc. Contr.) \times \text{Sign}(ECF) \times \text{Sign}(Planta) \times \text{Sign}(Elem. de Med.) < 0. \quad (8.11)$$

Aquí se designa como el signo de la acción del controlador al signo de la pendiente de la gráfica  $y_r$  vs.  $y_m$  (ver Fig. 8.4) por lo que, si el  $\text{Sign}(Acc. Contr.) > 0$  entonces la acción es directa, de otro modo es inversa. Por esta razón, y basándose en la Ec. 8.11 éste signo debe ser opuesto a la productoria de los demás signos de la cadena de lazo abierto del sistema de control.

■ **Regla 8.2.3 — Selección de la Acción Directa o Inversa.** Para garantizar que el sistema de control tenga realimentación negativa, si el producto de todas las ganancias de la cadena de lazo abierto, exceptuando al controlador, es negativa, entonces la acción escogida para dicho controlador debe ser directa. De otro modo, debe ser inversa.

La Tabla 8.4 muestra un resumen de resultados de lo hasta aquí expuesto.

Tabla 8.4: Resumen de datos y resultados del Ejem. 8.3.

	Acción Directa	Acción Inversa
pendiente de $y_r$ vs. $y_m$	$> 0$	$< 0$
Signo de $K_r$	$K_r < 0$ (ver Fig. 8.5a) $K_r > 0$ (ver Fig. 8.5b)	$K_r > 0$ (ver Fig. 8.5a) $K_r < 0$ (ver Fig. 8.5b)

Como se indicó antes, dado que la mayoría de los fabricantes toman por defecto que la ganancia  $K_r$  es siempre positiva entonces, si este es el caso, de acuerdo con la Tabla 8.4 la acción directa se corresponde con la Fig. 8.5b y la acción inversa con la Fig. 8.5a.

### **Recomendaciones Finales**

Como recomendaciones finales de esta sección se puede decir que,

1. para los cálculos y manejo de software tradicional de sistemas de control es aconsejable usar el DB de la Fig. 8.5a y la Ec. 8.9 para determinación del signo del controlador, asumiendo siempre el error definido según la Ec. (8.7).
2. Para la implementación práctica es aconsejable pensar en términos de ac-



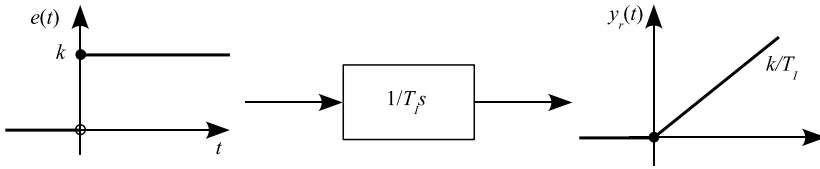


Figura 8.10: Salida del controlador integral a una entrada escalón de amplitud  $k$ .

ción directa e inversa, y usar las reglas de mano 8.2.2 y 8.2.3.

Finalmente es conveniente remarcar que, como se mostrará más adelante, *no alcanza* con asegurar que la realimentación sea negativa para garantizar la estabilidad del sistema de control.

### Controlador integral (I)

El controlador I es el controlador lineal sencillo que consta de un sólo modo donde la señal la señal de salida del controlador  $y_r(t)$  resulta de integrar la señal de error actual  $e(t)$ . Así,

$$y_r(t) = \pm \frac{K_r}{T_I} \int_0^t e(t) dt, \quad (8.12)$$

donde  $T_I$  es designado como tiempo de acción integral. En el campo de Laplace,

$$Y_r(s) = \pm \frac{K_r}{T_I s} E(s). \quad (8.13)$$

En consecuencia, la función de transferencia del controlador  $I$  resulta,

$$G_c(s) = \frac{Y_r(s)}{E(s)} = \pm \frac{K_r}{T_I s}. \quad (8.14)$$

La Fig. 8.10 muestra la señal de salida de un controlador  $I$  frente a una señal de error escalón de amplitud  $k$ . Puede verse que la señal de salida es una rampa que resulta ser la integral del escalón.

### Controlador proporcional-integral (PI)

El controlador PI resulta de la combinación lineal de los modos  $P$  e  $I$  y en consecuencia la relación entre la señal de salida del controlador  $y_r(t)$  y la señal de error actual  $e(t)$  resulta ser,

$$y_r(t) = \pm K_r \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt \right]. \quad (8.15)$$

En el campo de Laplace,

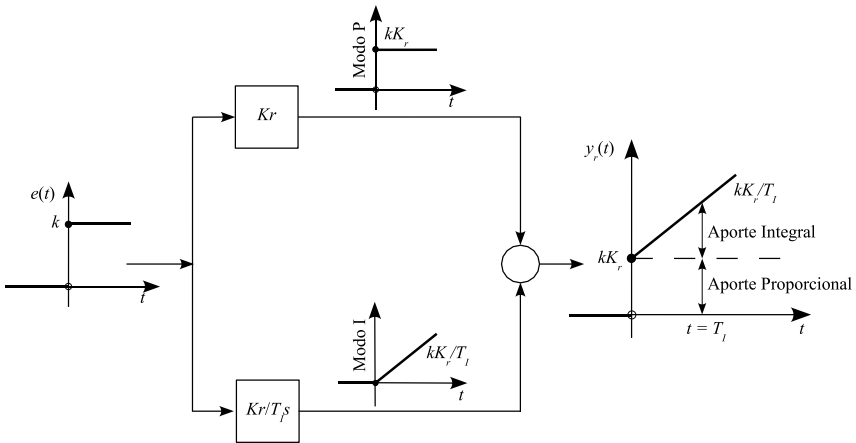


Figura 8.11: Salida del controlador PI a una entrada escalón de amplitud  $k$ .

$$Y_r(s) = \pm Kr \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right) E(s). \quad (8.16)$$

Así, la función de transferencia del controlador PI resulta,

$$G_c(s) = \frac{Y_r(s)}{E(s)} = \pm Kr \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right). \quad (8.17)$$

La Fig. 8.11 muestra la señal de salida de un controlador PI frente a una señal de error escalón de amplitud  $k$ . Puede verse que la señal de salida resulta ser la combinación de lineal de los modos P e I.

De la observación de la Fig. 8.11 surge una interesante interpretación gráfica para el tiempo de acción integral. Así, es posible definirlo como sigue.

**Definición 8.2.4 — Tiempo de Acción Integral.** Se define tiempo de acción integral al tiempo que tiene que transcurrir para que el efecto corrector del modo integral iguale al efecto corrector del modo proporcional cuando la señal de error actuante es un escalón.

La Fig. 8.12 muestra como cambia la salida cuando se varía  $K_r$  y  $T_I$  independientemente.

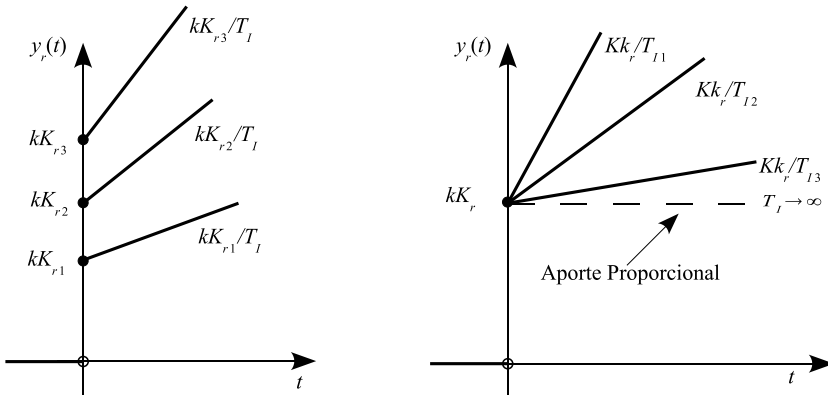


Figura 8.12: Respuesta al escalón de LA del controlador PI para diferentes valores de  $K_r$  y  $T_I$ . Puede verse que para  $T_I \rightarrow \infty$  se anula totalmente el modo integral quedando sólo el modo proporcional.

**Ejemplo 8.4** Considere un controlador PI con  $K_r = 1$  y  $T_I = 0,5$  sometido a una entrada según se indica en la Fig. 8.13. Encuentre la respuesta temporal de dicho controlador.

La Fig. 8.14a y 8.14b muestra las salidas de los modos P e I a la entrada de la Fig. 8.13. Note que la respuesta del modo P copia exactamente a la entrada dado que  $K_r = 1$  (Fig. 8 a)). Mientras que, la respuesta del modo I en el intervalo  $[0, 1]$  integra la rampa dando una salida tipo parabólico en dicho intervalo. Note además que el área bajo la curva de la entrada en el intervalo  $[0, 1]$  vale 0.5 que dividido por el valor de  $T_I$  da 1 que es el mismo valor final al que llega el modo I en dicho intervalo. En el intervalo  $[2, 3]$  la entrada es un escalón y en consecuencia la salida del modo I es una rampa como se ve en la Fig. 8.14b. El valor final alcanzado por dicho modo es 5 que resulta ser igual al área bajo la curva de la entrada dividido el valor de  $T_I$  más el valor inicial en el instante  $t = 1(2/0,5 + 1 = 5)$ . En el intervalo  $[3, 4]$  se tiene como entrada un escalón negativo de ahí la pendiente negativa de la rampa de salida del modo I, el área bajo la curva es 1 que dividido por  $T_I$  da 2 y en consecuencia el valor final de salida del modo I es 3, resultando ser este valor la constante de integración final.

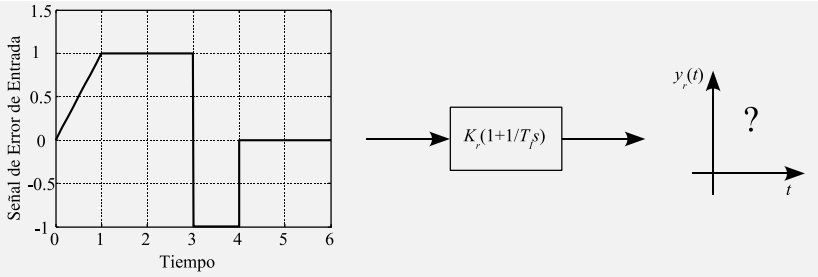


Figura 8.13: Señal de entrada al controlador PI correspondiente al Ejem. 8.4.

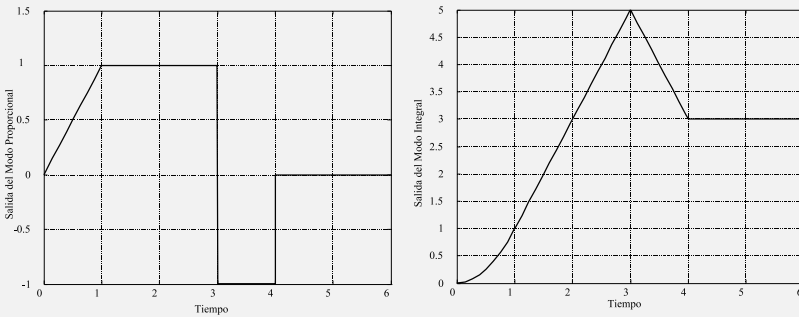
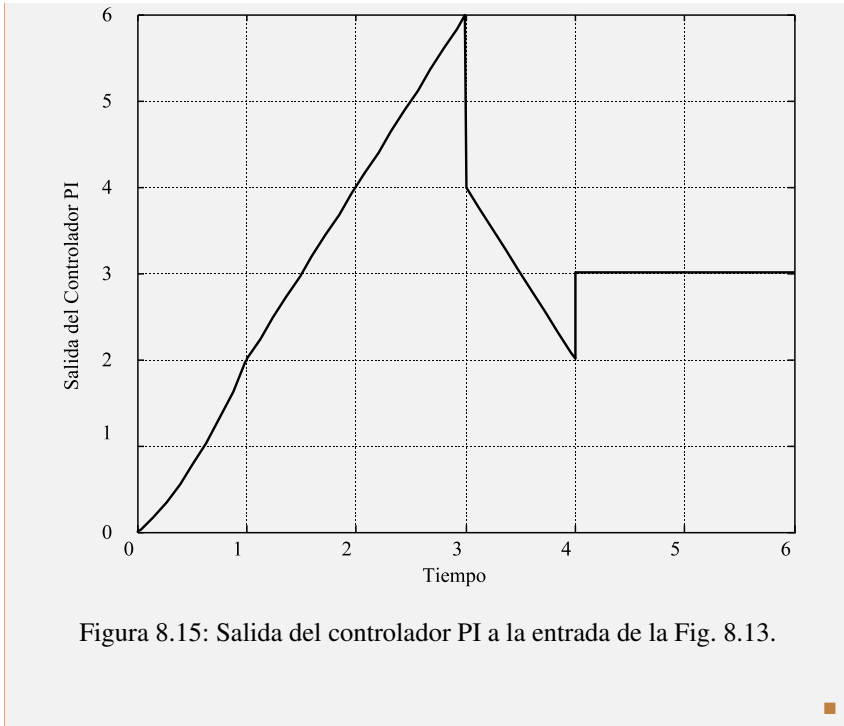


Figura 8.14: a) Respuesta del modo P a la entrada de la Fig. 8.13. b) Respuesta del modo I a la entrada de la Fig. 8.13.

La salida del controlador PI resulta de la combinación lineal de las salidas de los modos P e I y en consecuencia resulta de sumar algebraicamente las Figs. 8.14a y 8.14b. La Fig. 8.15 muestra este resultado.



### Controlador proporcional-derivativo (PD)

El controlador PD resulta de la combinación lineal de los modos  $P$  y  $D$  y en consecuencia la relación entre la señal de salida del controlador  $y_r(t)$  y la señal de error actual  $e(t)$  resulta ser,

$$y_r(t) = \pm K_r \left[ e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]. \quad (8.18)$$

donde  $T_D$  es designado como tiempo de acción derivativo. En el campo de Laplace,

$$Y_r(s) = \pm K_r (1 + T_D s) E(s). \quad (8.19)$$

Así, la función de transferencia del controlador PD resulta,

$$G_c(s) = \frac{Y_r(s)}{E(s)} = \pm K_r (1 + T_D s). \quad (8.20)$$

Note que la función de transferencia (8.20) no es propia y en consecuencia el controlador PD no es realizable. Por tal motivo, esta función es designada como la función de transferencia de un controlado PD ideal. La no realizabilidad del

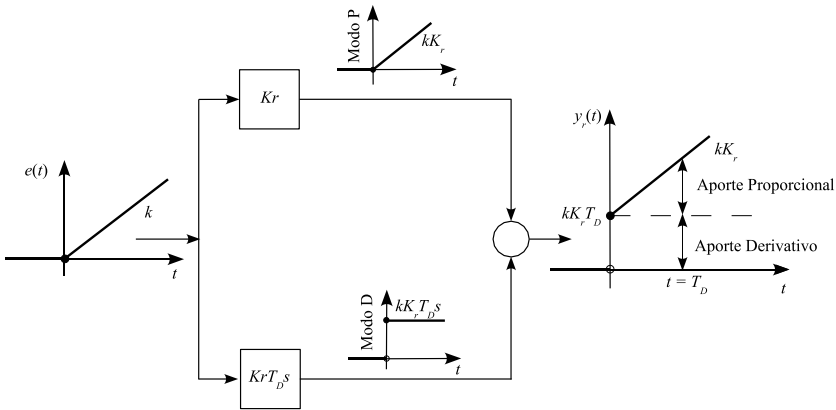


Figura 8.16: Respuesta a la rampa de pendiente  $k$  de los modos P y D y del controlador PD correspondiente a la combinación lineal de los modos.

controlador PD ideal da lugar a la definición de distintas alternativas realizables de un modo derivativo (D) como ser,

$$D(s) = \pm K_r \frac{T_D s}{1 + sT_D/N}. \quad (8.21)$$

donde  $N$  es definida con el objeto de reducir la amplitud de los ruidos de alta frecuencia.

La Fig. 8.16 muestra la señal de salida de un controlador PD ideal frente a una señal de error rampa con pendiente  $k$ . Puede verse que la señal de salida resulta ser la combinación de lineal de los modos P y D.

De la observación de la Fig. 8.16 surge una interesante interpretación gráfica para el tiempo de acción derivativa. Así, es posible definirlo como sigue.

**Definición 8.2.5 — Tiempo de Acción Derivativo.** Se define tiempo de acción derivativo al tiempo que tiene que transcurrir para que el efecto corrector del modo proporcional iguale al efecto corrector del modo derivativo cuando la señal de error actuante es una rampa.

La Fig. 8.17 muestra como cambia la salida cuando se varía  $K_r$  y  $T_D$  independientemente.

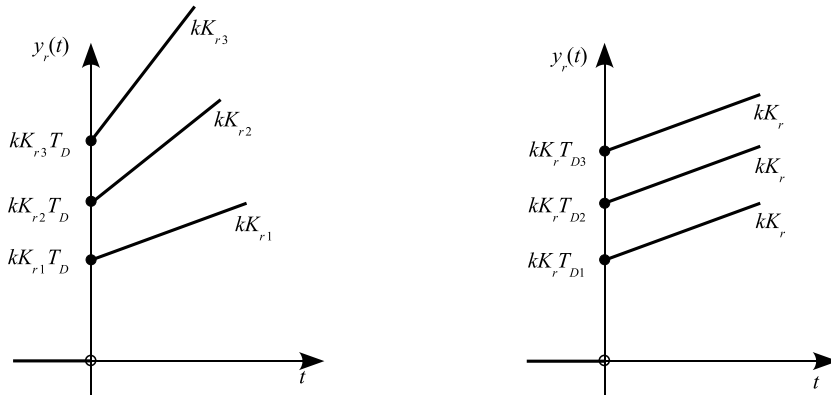


Figura 8.17: Respuesta a la rampa de LA de un controlador PD para diferentes valores de  $K_r$  y  $T_D$ .

### Controlador proporcional-integral-derivativo (PID)

El controlador PID resulta de la combinación lineal de los modos  $P$ ,  $I$  y  $D$  y en consecuencia la relación entre la señal de salida del controlador  $y_r(t)$  y la señal de error actual  $e(t)$  resulta ser,

$$y_r(t) = \pm K_r \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]. \quad (8.22)$$

En el campo de Laplace,

$$Y_r(s) = \pm K_r \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) E(s). \quad (8.23)$$

Así, la función de transferencia del controlador PID resulta,

$$G_c(s) = \frac{Y_r(s)}{E(s)} = \pm K_r \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right). \quad (8.24)$$

Note que la Ec. (8.24) representa una función de transferencia de un controlador no realizable. Por tal motivo, esta función es designada como la función de transferencia de un controlador PID ideal. La realizabilidad del controlador PID puede ser alcanzada mediante el uso de un modo derivativo como el definido en la Ec. (8.21).

La Fig. 8.18 muestra la señal de salida de un controlador PID frente a una señal de error escalón de amplitud  $k$ . Puede verse que la señal de salida resulta ser la combinación de lineal de los modos  $P$ ,  $I$  y  $D$ .

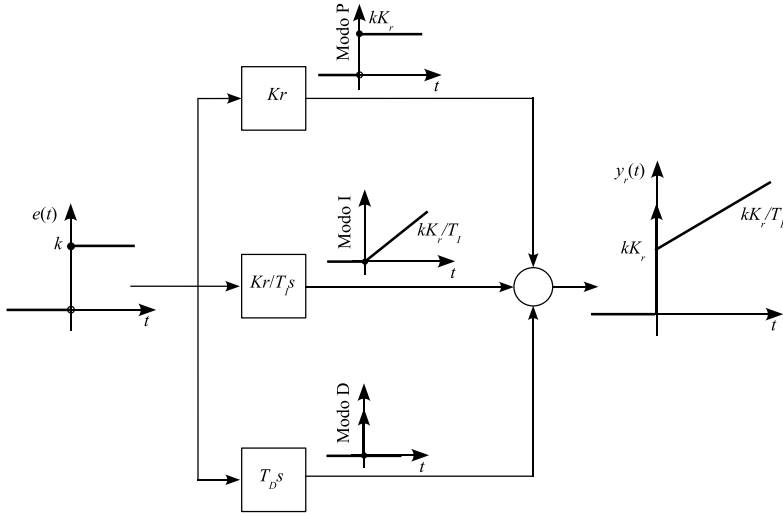


Figura 8.18: Respuesta al escalón de LA de un controlador PID.

**Ejemplo 8.5** Considere un controlador PID sometido a un pulso de entrada según se indica en la Fig. 8.19, encuentre la respuesta temporal de dicho controlador.

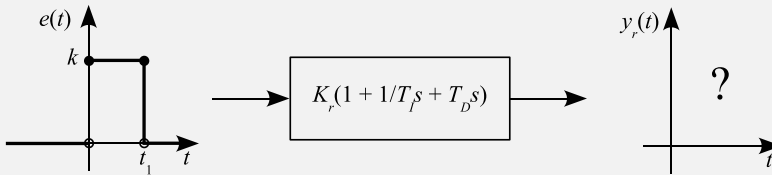


Figura 8.19: Pulso de entrada de amplitud  $k$  y duración  $t_1$  a un controlador PID ideal.

En la Fig. 8.20 se muestra la respuesta individual de cada modo y la respuesta del controlador PID la que resulta de la suma algebraica de los tres modos. Como se observa en la Fig. 8.20 la salida del modo P copia a la entrada cambiando su amplitud al valor de  $kK_r$ , la salida del modo I integra el escalón de entrada dando una rampa de salida la que se corta en  $t = t_1$  de manera que el valor final resulta  $kK_r t_1 / T_I$ , y finalmente la salida del modo D es la derivada de dos escalones en direcciones opuestas y en consecuencia son dos deltas de amplitudes opuestas.



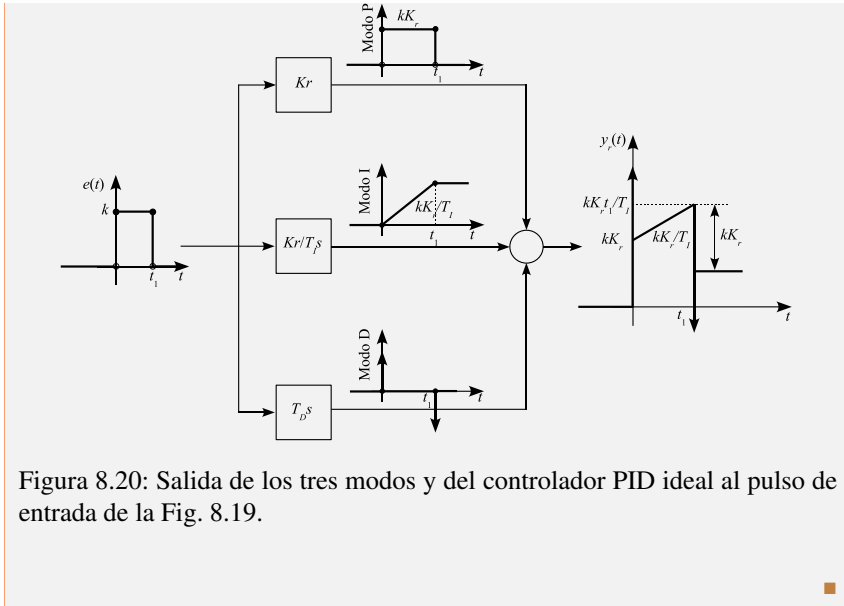


Figura 8.20: Salida de los tres modos y del controlador PID ideal al pulso de entrada de la Fig. 8.19.

### 8.2.3. Algunas características tecnológicas de los PID

En la industria de procesos actual en su mayoría los controladores son electrónicos donde los tres modos son fácilmente re-ajustables en la sala de control desde una consola o terminal de computadora.

La Fig. 8.21 muestra un diagrama esquemático de un controlador industrial que presenta un conjunto de botones para dar la posibilidad de ajuste de set-point, leer el valor de la variable controlada, transferir desde el modo manual al automático y viceversa, y leer la señal de salida desde el controlador.

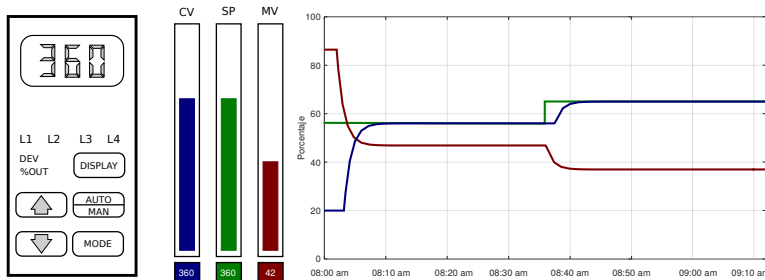


Figura 8.21: (a) Diagrama esquemático de un controlador industrial. (b) Gráficos porcentuales de presentación en terminal de las variables monitoreadas.

El botón manual/automático indica la operación del controlador. Cuando el

botón está en posición automático, el controlador empieza a tomar decisiones basado en el estado actual de señal de salida, afectando manipulada a fin de mantener la variable de control en el valor del set-point. De este modo, el sistema está operando en lazo cerrado. En posición manual, el controlador detiene la toma de decisiones y el sistema opera a lazo abierto. Así, los set-point sobre el sistema de control no tienen influencia sobre las salidas controladas.

## Windup

Cuando en un lazo de control se produce una saturación, el sistema comienza a operar en lazo abierto. Esto es, el lazo feedback se rompe a causa de que el actuador mantiene su salida en un límite máximo o mínimo independientemente de la salida de proceso. Como consecuencia de esto, la o las variables de control pueden evolucionar en forma independiente de la salida del controlador. Si un regulador con acción integral es usado, el error continúa siendo integrado (coloquialmente hablando, el windup). Este requiere que el error cambie de signo por un período de tiempo grande para que las cosas retornen a la normalidad.

La incorrecta adaptación del controlador en estas circunstancias suele dar lugar a comportamientos transitorios con grandes sobrevalores e importantes tiempos de establecimientos. Este fenómeno es conocido como reset windup.

Las alternativas para contemplar las restricciones del actuador en un lazo de control son

1. considerar desde un principio un problema de control no lineal o bien,
2. realizar un diseño con algoritmos que contemplen las restricciones y realicen correcciones adicionales (anti-reset windup, ARW) que operan únicamente cuando estas se manifiestan.

Una de las primeras técnicas de ARW fue propuesta por [30] y le siguieron muchas otras contribuciones como [18], [44], entre muchas otras.

Algoritmos lineales sencillos pueden ser usados para prevenir el windup como se presenta en [15] y han sido implementados en los controladores industriales desde hace algún tiempo.

La Fig. 8.22a muestra una forma de ARW incorporando un paso feedback adicional en el controlador proveyéndole la medida de la salida del actuador para formar la señal de error  $e_s$  calculada como la diferencia entre la salida del controlador  $y_r$  y la salida del actuador  $u$ . La señal  $e_s$  es alimentada a un integrador con ganancia  $1/T_i$ . Note que,  $e_s = 0$  si no existe saturación y en consecuencia el paso feedback adicional no opera. Así, dicho paso funciona si el actuador se satura.

Dado que usualmente la salida del actuador no puede ser medida, un esquema alternativo que incluye un modelo no lineal del actuador suele ser incluido como lo muestra la Fig. 8.22b.

Una incorporación adicional en los controladores es un juego de alarmas que indican que la salida del controlador se dirige a la saturación. Similares alarmas

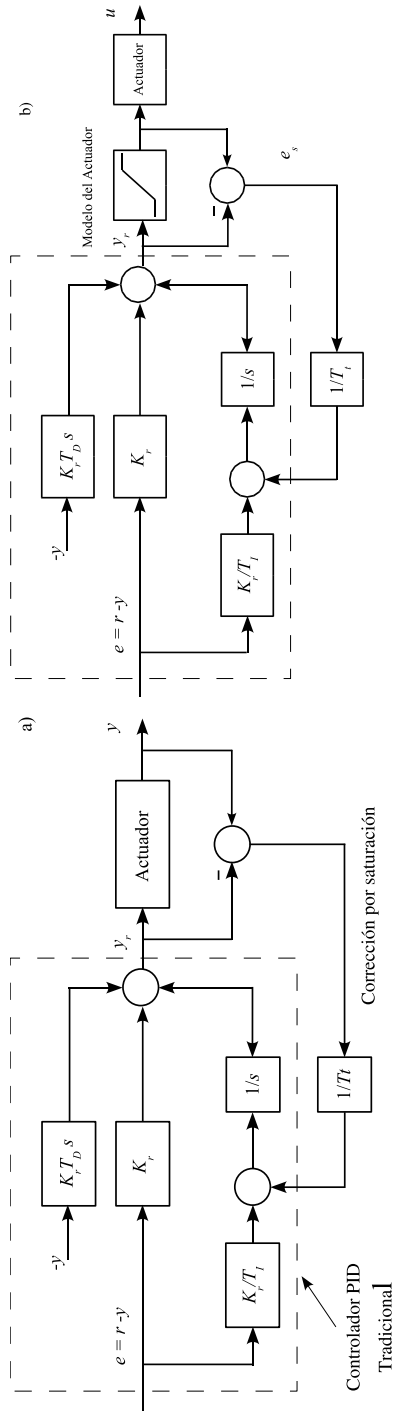


Figura 8.22: a) PID con corrección anti-windup basándose en la mediada de la salida del actuador. b) PID con corrección anti-windup basándose en un modelo no lineal del actuador ([15]).

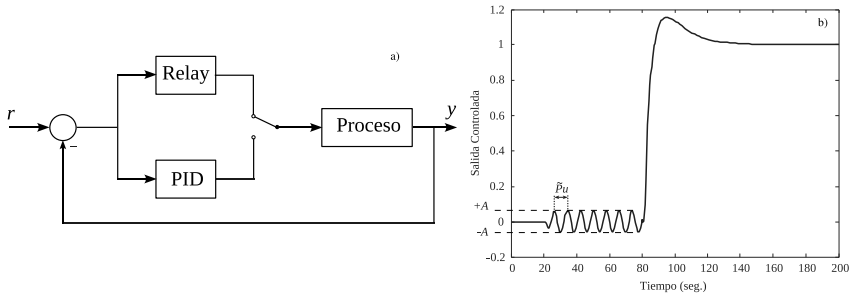


Figura 8.23: a) Diagrama de bloques de la técnica relay-feedback. El sistema opera con un relay en modo de ajuste y con un PID en el modo ordinario de control. b) Experimento de ajuste con relay feedback.

se incluyen en el lazo de control para indicar que también la variable manipulada se dirija a la saturación.

### Controladores auto-ajustables

Desde la década de los 80 en adelante los fabricantes de controladores lanzaron al mercado controladores que se auto-ajustan a si mismo. En realidad, incluyen técnicas y algoritmos de auto-ajuste muy conocidos en la literatura del control de procesos. Uno de ellos es la técnica de relay-feedback impulsada por Åström y Hägglund ([14]) quienes presentaron una técnica de autoajuste de controladores conocida como relay-feedback. La técnica identifica un punto *específico* de la curva de Nyquist a partir de un experimento con un simple relay (Fig. 8.23). Cuando el operador decide ajustar el controlador, cambia el sistema de control al modo con relay. Así, el sistema comienza a oscilar en forma sostenida con una frecuencia cercana a la frecuencia de cruce de fase ( $\omega_{-180}$ ) de la planta. La amplitud de dicha oscilación puede mantenerse aceptablemente baja, escogiendo un valor de salida del relay lo suficientemente pequeño.

Con este experimento se determina un punto en la curva de Nyquist de lazo abierto cercano al punto último (aquel que se obtiene con la ganancia última a la frecuencia de cruce de fase). Luego, el controlador PID puede ser ajustado a partir de la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones sostenidas correspondientes al ciclo límite siguiendo fórmulas de ajuste clásicas.

### 8.2.4. Forma digital del controlador PID

La Ec. (8.22) asume que el controlador PID tiene una entrada continua (o analógica) lo que resulta válido por ejemplo en los viejos controladores neumáticos. Con el advenimiento de la computación, el controlador PID pasó a ser un código de programa en una computadora convirtiéndose así en una versión di-

gital del PID (8.22) y consecuentemente las señales utilizadas no son continuas sino digitales.

Como se esquematizó en la Fig. 8.1 el controlador recibe desde el campo la señal sensada de la variable de control la cual usualmente es una señal continua y en consecuencia es convertida en una señal digital mediante un conversor analógico-digital (ADC). Como consecuencia de disponer de un algoritmo digital, la salida del controlador es una señal digital y en consecuencia un conversor digital-analógico (DAC) se encarga de convertir la señal digital en continua para que esta puede ser usada por elemento de control final.

La forma digital de la Ec. (8.22) resulta,

$$y_{r\ k} = y_{r\ 0} + K_r \left[ e_k + \frac{T_s}{T_I} \sum_{j=1}^k e_j + \frac{T_D}{T_s} (e_k - e_{k-1}) \right]. \quad (8.25)$$

donde la integral es escrita como una sumatoria y la derivada por un cociente incremental. En la Ec. (8.25)  $T_s$  representa el período de muestreo,  $k$  el instante  $k$ -ésimo,  $y_{r\ 0}$  el estado inicial,  $y_{r\ k}$  la salida del controlador en el instante  $k$ -ésimo,  $e_k$  y  $e_{k-1}$  los errores en los instantes  $k$  y  $k - 1$  respectivamente.

La Ec. (8.25) puede ser escrita como una diferencia entre la salida del controlador en los instantes  $k$  y  $k - 1$ , permitiendo computar bajo esta forma sólo el cambio incremental. Así, en el instante  $k - 1$  la salida digital del controlador PID resulta,

$$y_{r\ k-1} = y_{r\ 0} + K_r \left[ e_{k-1} + \frac{T_s}{T_I} \sum_{j=1}^{k-1} e_j + \frac{T_D}{T_s} (e_{k-1} - e_{k-2}) \right]. \quad (8.26)$$

Sustrayendo las Ec. (8.25) y (8.26) se tiene

$$\Delta y_{r\ k} = K_r \left[ (e_k - e_{k-1}) + \frac{T_s}{T_I} e_k + \frac{T_D}{T_s} (e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2}) \right]. \quad (8.27)$$

donde,  $\Delta y_r = y_{r\ k} - y_{r\ k-1}$ . La Ec. (8.27) es conocida como la forma velocidad del controlador PID, dicha forma es muy útil cuando el elemento de control final se mueve por incrementos en su señal de entrada como por ejemplo los motores paso a paso.

Note que si la forma de velocidad es implementada, al pasar de manual a automático no se requiere de un valor de inicialización para computar  $\Delta y_r$ , sólo se necesita  $e_k$ ,  $e_{k-1}$  y  $e_{k-2}$ . Además, la salida en el instante  $k$  puede ser fácilmente calculada a partir de  $\Delta y_r$  como

$$y_{r\ k} = y_{r\ k-1} + \Delta y_r. \quad (8.28)$$

donde  $\Delta y_r$  es calculado por la Ec. (8.27) e  $y_r k - 1$  es almacenado por el algoritmo computacional. El valor de  $y_r k - 1$  está asociado a una posición de válvula, la que probablemente sea una posición adecuada al momento de hacer el cambio de manual a automático.

### 8.2.5. ¿Cuándo usar control PID?

No siempre es necesario usar los tres modos, sino que en el diseño de un sistema de control se incorporan los modos de acuerdo a los requerimientos en la performance. Observaciones empíricas de la mayoría de los procesos industriales han mostrado que un 90 % de los controladores son PI logrando una aceptable performance en la variable de control sin necesidad de incluir el modo derivativo. Dado que cuanto más modos incorporamos más complejo resulta ser el diseño y no siempre logramos los objetivos deseados, a continuación se lista una serie de recomendaciones útiles, basadas en la obra de Åström y Hägglund ([15]), que pueden servir como punto de partida para la adopción de un controlador.

#### 1. Cuando es suficiente con el control P.

- El modo P por sí sólo en una gran mayoría de ejemplos aplicación puede dejar error en la variable de control pasado el régimen transitorio, esto se conoce como *offset*. En consecuencia cuando dicho error es tolerable, el modo P es aceptable.

Independientemente de dicho error, hay muchos de ejemplos de aplicación del control proporcional en la industria, como ser el control de nivel de líquidos.

#### 2. Cuando es suficiente con el control I.

- En la industria el control integral por sí sólo no es común sin embargo está presente en el control de caudal, con buenos resultados, o bien en esquemas de control algo más complejos como ser algoritmos predictivos (predicador de Smith y control predictivo basado en modelo lineal (MPC)).

#### 3. Cuando es suficiente con el control PI.

El modo D es el menos frecuentemente utilizado en la industria y como se anticipó anteriormente la gran mayoría de los procesos industriales usan el control PI. Así,

- el control PI ha mostrado ser adecuado para procesos donde la dinámica es esencialmente de primer orden, o bien de primer orden con retardo. Aquí tengamos en cuenta que muchos procesos en ingeniería pueden ser aceptablemente bien representados dentro de un espacio de operación con modelo de orden reducido como ser un modelo de primer orden con retardo.
- Cuando no se requiere demasiado en cuanto a la performance y basta con offset nulo y una adecuada respuesta transitoria, el control PI resulta adecuado.

## 4. Cuando es suficiente con el control PID.

Una crítica que se le hace al modo derivativo es la amplificación de ruidos y la deriva permanente de la variable de control debido a un exceso de movimiento de la variable manipulada. Por tal razón una tendencia de los ingenieros de control es no incluir el modo derivativo a menos que sea necesario. Así,

- para procesos con dinámica de segundo orden dominante y
- cuando la acción derivativa mejora la estabilidad del sistema de control (adicionando fase) el control PID resulta ser adecuado.

## 5. Cuando usar estrategias más sofisticadas que el control PID.

Una de las grandes ventajas que tiene el control PID es la simpleza de su algoritmo y la buena performance que puede ser alcanzada con él. Sin embargo, a veces no es suficiente en especial en procesos donde se requiere un estricto control de la o las variables de control. Así,

- cuando se tiene una fuerte influencia de las perturbaciones se puede recurrir al control feedforward.
- Sistemas con tiempos muertos importantes pueden ser controlados con mejor performance mediante el uso de predictores de Smith.
- Sistemas con respuesta inversa importante pueden mejorar mediante la inclusión de compensadores de respuestas inversas.

El tema que estudia estrategias de control avanzadas como las citadas anteriormente es sumamente amplio y abarca una gran cantidad de alternativas. Estos temas son tratados más adelante.

## 8.3. Controlador SI-NO

Los controladores si-no son ampliamente usados en aplicaciones tanto industriales como domésticas por ser simples y económicos. La industria los usa en sistemas cuya aplicación no sea crítica y la calidad de la variables controlada no sea demasiado importante, por ejemplo en el control de nivel de un tanque de almacenamiento, control de temperatura en cámaras de refrigeración, etc. Las aplicaciones domésticas son menos exigentes aún y lo podemos encontrar en el control de temperatura de heladeras y planchas, entre otras.

El controlador si-no es usualmente designado como controlador de dos posiciones y la idea principal consiste en dos señales de salidas distintas para dos posibles errores diferentes. Esto es,

$$y_r(t) = \begin{cases} y_{r \max} & \text{si } e(t) \geq 0 \\ y_{r \min} & \text{si } e(t) < 0 \end{cases} \quad (8.29)$$

donde  $y_{r \max}$  y  $y_{r \min}$  denota los valores de las señales de salida máxima y mínima (si - no respectivamente) del controlador. Para el caso de un controlador si-no eléctrico bien podría ser  $\pm 10$  volts o 0-5 volts dependiendo del fabricante.

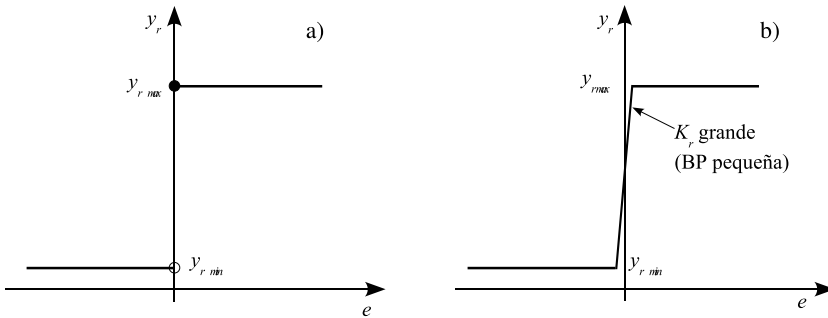


Figura 8.24: a) Representación gráfica de la Ec. (8.29). b) Salida de un controlador proporcional vs. el error de entrada para cuando  $K_r$  es muy grande (BP muy pequeña).

Note en base a la definición (8.29) que no es posible atribuir una función de transferencia al controlador si-no como en los controladores lineales vistos anteriormente.

La Fig. 8.24a muestra la salida del controlador si-no en función del error de acuerdo con (8.29). La Fig. 8.24b muestra la salida de un controlador proporcional con una ganancia muy alta o bien una BP baja. La similitud entre las Fig. 8.24a y 8.24b hace que el controlador P con alta ganancia pueda ser considerado como un caso especial de un controlador si-no.

En los controladores si-no se define un rango en el que la señal de error debe variar antes que se produzca la conmutación. Dicho rango se denomina brecha diferencial o zona muerta (ZM) del controlador (Fig. 8.25). La ZM hace que la salida del controlador se mantenga en su valor hasta que la señal de error haya superado ligeramente el valor de cero. Dicha ZM es incluida deliberadamente para impedir una acción excesivamente frecuente del actuador y elemento de control final.

La Fig. 8.26a muestra el control de nivel de un tanque de almacenamiento mediante un control si-no, la válvula solenoide allí incluida resulta ser mucho menos costosa que una válvula de control neumática, reduciendo significativamente los costos de instrumentación.

La Fig. 8.26b muestra las respuestas en el tiempo del nivel de líquido a lazo abierto y del nivel de líquido en lazo cerrado mediante el lazo si-no. De dicha figura se ve que la amplitud de salida se puede reducir disminuyendo la ZM a costo de aumentar la conmutación del elemento de control final y consecuentemente reduciendo la vida útil de la válvula solenoide. Por tal motivo, la brecha diferencial se determina en base a consideraciones de exactitud y duración de componentes.

Note que,

1. las respuestas en el tiempo de carga y descarga de nivel con el control



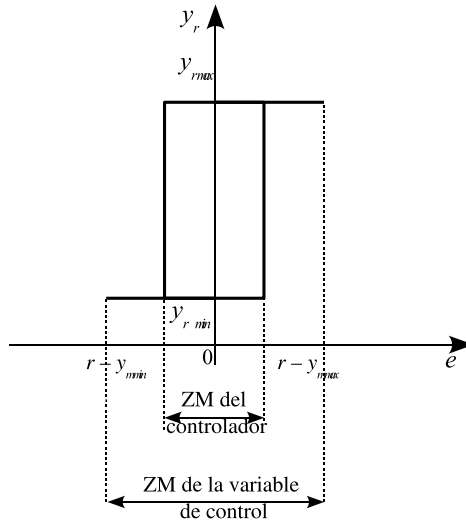


Figura 8.25: Salida del controlador si-no en función del error de entrada cuando se incluye una ZM.

si-no tienen la misma dinámica que las repuestas de lazo abierto. Esto se debe a que el control si-no opera a lazo abierto en uno y otro ciclo y sólo conmuta en los extremos de la brecha diferencial.

2. La ZM del controlador no coincide con la ZM de la variable de control. Si bien en principio ambas deberían ser iguales, por diferentes razones como por ejemplo la existencia de tiempo muerto en el sistema o en el ECF, o bien el orden del sistema es mayor a uno (cosa que en la mayoría de los casos prácticos así es), hacen que ambas ZM no sean iguales.
3. Es importante notar que la ZM de la variable de control es una consecuencia de haber definido la ZM en el controlador si-no.

Una de las principales desventajas del controlador si-no es la pobre calidad alcanzada en la variable controlada debido a que dicha variable oscila permanentemente en torno al valor de consigna sin alcanzar un estado estacionario. Por otro lado, si las exigencias en cuanto a la performance de la variable de control no son altas, un lazo de control si-no puede ser una alternativa muy económica dado que dicho controlador y el ECF no necesitan ser de muy alta tecnología.

## 8.4. Ejemplos de Aplicación

La industria de procesos muestra un sin número de aplicaciones del control PID a procesos químicos y alimenticios. Entre los más comunes se puede citar el control de temperatura de intercambiadores de calor, el control de composición

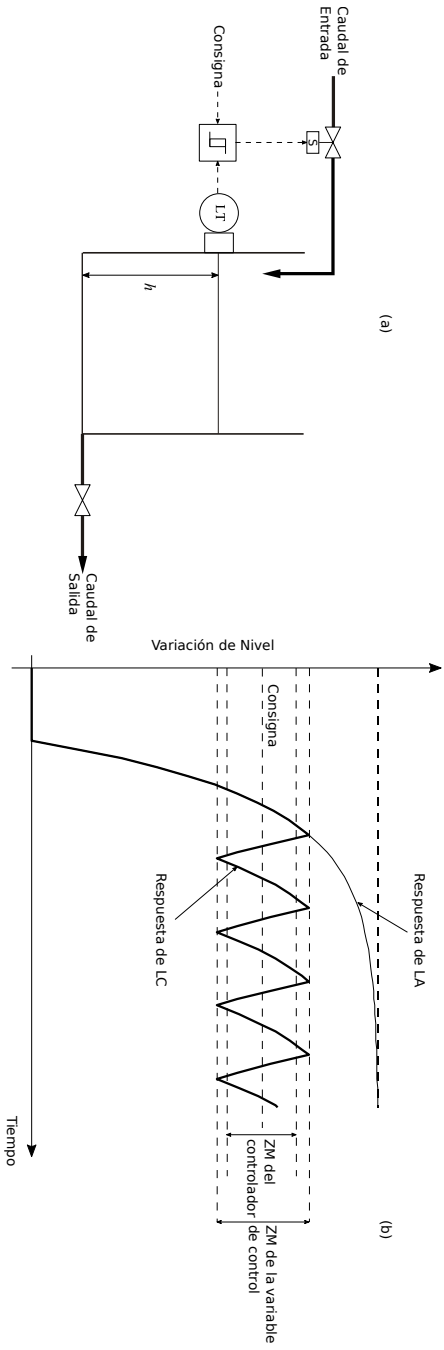


Figura 8.26: a) Control de nivel de líquido en un tanque de almacenamiento mediante un lazo si-no. b) Respuestas en el tiempo de LA y LC del nivel de líquido.

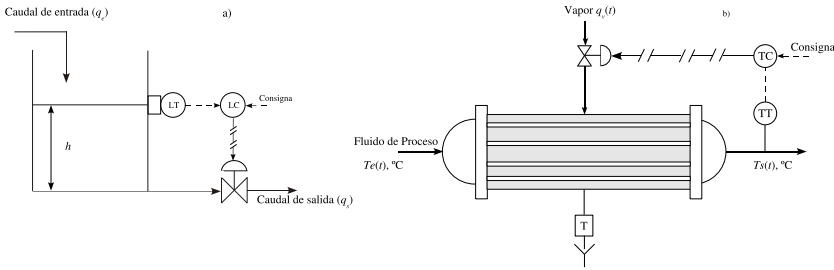


Figura 8.27: a) Control de nivel de líquido en un tanque de almacenamiento. b) Control de temperatura en un intercambiador de calor.

de columnas de destilación, control de calidad de vapor en grandes generadores de vapor, control de nivel de líquidos en tanques reservorios, entre muchísimos otros ejemplos.

La Fig. 8.27a muestra el control de nivel de líquido de un tanque reservorio, donde se indica como LT al sensor y transductor de nivel y LC al controlador de nivel que bien podría ser un controlador con P o PI según sean las exigencias en cuanto a la variable de control.

La Fig. 8.27b muestra el control de temperatura en un intercambiador de casco y tubo. Aquí la señal de temperatura de salida del intercambiador es sensada con un transductor y transmisor de temperatura indicado como TT y el controlador de temperatura TC compara la temperatura medida con la consigna para actuar sobre el caudal de vapor.

La Fig. 8.28 muestra un diagrama de un sistema de control típico de columnas de destilación. Para el caso del ejemplo se considera una columna de destilación binaria de benceno tolueno. También se adjuntan la respuestas en el tiempo de las composiciones (PV) y salida de los controladores de tope y fondo (CO). Las respuestas en el tiempo muestran un cambio en la composición de referencia de tope (SP) al tiempo  $t = 400$  seg. y un cambio en la composición de referencia de fondo al tiempo  $t = 1900$  seg. Se ve claramente como al introducir un cambio en el tope, éste impacta sobre las variables de fondo y viceversa.

## 8.5. Conclusiones

Se presentó una introducción la teoría de contradores lineales PID, poniendo énfasis en su forma tradicional para que el lector pueda entender con facilidad como actúan los diferentes modos mediante respuestas dinámicas de lazo abierto de ejemplos sencillos. Asimismo, se incluyó una breve introducción a los distintos desarrollos tecnológicos que actualmente están presentes en los algoritmos más sofisticados de contradores PID industriales, como ARW y el auto-ajuste.

El control si-no fue brevemente discutido, presentándolo como una alterna-

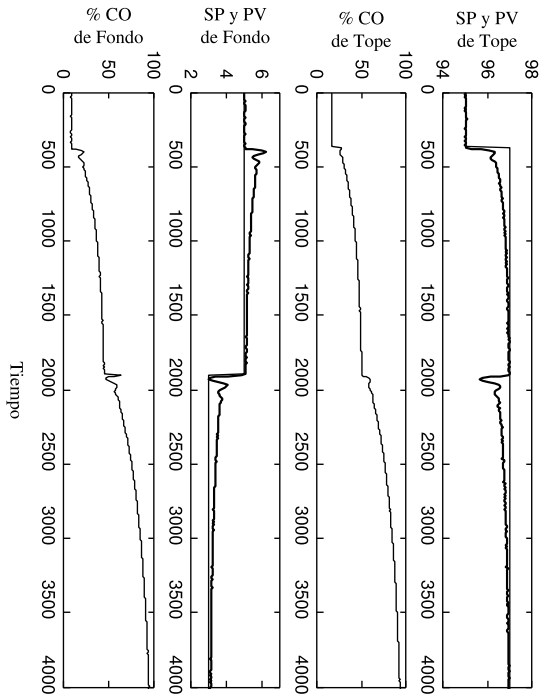
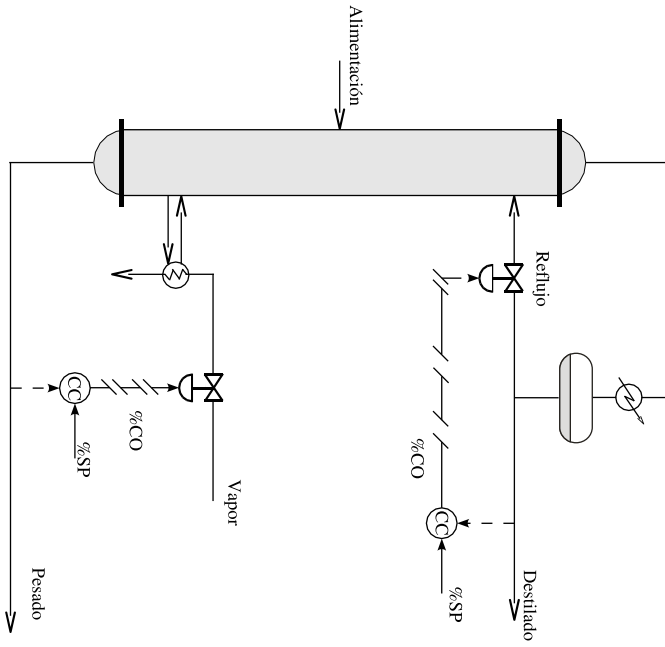


Figura 8.28: Diagrama de un sistema de control de una columna de destilación y respuesta en el tiempo de SP, composición y salida del controlador de tope y fondo.

tiva económica pero de pobre desempeño en la variable de control.

Finalmente, atractivos ejemplos de aplicación industrial complementan esta sección.

## 8.6. Pensemos

- Un controlador tipo PID tiene en su función de transferencia,
  - Un polo y un cero.
  - Dos polos y un cero.
  - Dos polos y dos ceros.
  - Ninguna de las anteriores es correcta.
- Considere un controlador PID cuya relación de span es unitaria. En la práctica muchos controladores industriales en lugar de indicar la constante del modo proporcional ( $K_r$ ) se indica la banda proporcional expresada en tanto por ciento. ¿Dicha  $BP\%$  se calcula como la inversa de la constante del modo proporcional multiplicada por 100?  **SI**  **NO**
- En términos prácticos, la banda proporcional ( $BP$ ) consiste en una definición alternativa al valor de la ganancia del modo proporcional ( $K_r$ ). ¿Es aplicable el uso de la  $BP$  a un controlador PI, PD o PID?  **SI**  **NO**
- Considere un controlador proporcional-integral (PI) sometido a una entrada escalón de ganancia unitaria. ¿Un aumento del valor de  $K_r$  producirá un aumento en la velocidad de la respuesta a lazo abierto del controlador? Justifique su respuesta.  **V**  **F**
- ¿Es posible asignar una función de transferencia a un controlador de dos posiciones?  **SI**  **NO**

## 8.7. Problemas

**Problema 8.1** Considere un controlador PI sometido a una entrada de acuerdo con la Fig. 8.29.

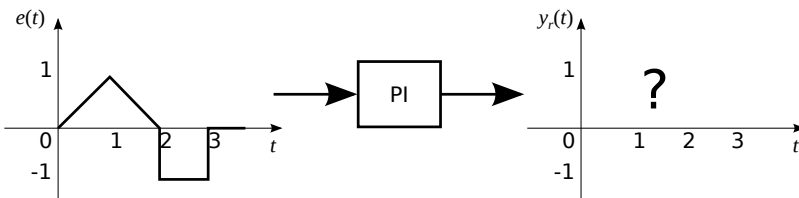


Figura 8.29

Determine a mano alzada la respuesta dinámica del controlador realizando los cálculos mínimos necesarios. Asuma  $K_r = 1$  y  $T_I = 2$ .

**Problema 8.2** Un controlador híbrido cuyo rango de entrada entre 0 y 10[volt] y el de salida de 3 a 15[psig]. En el instante  $t = 100$ [mim] se produce un cambio escalón en la entrada del controlador que varía de 4 a 5[volt].

Tiempo ( $t$ [mim]):	90	95	100	+100.00	105	110	115
	120	125	130	135	140		
Salida ( $y_r$ [psig]):	11.35	12.21	13.09	10.05	8.79	7.75	6.51
	5.40	4.40	3.01	3.00	3.00		

Determine:

- Tipo de Regulador. Justifique adecuadamente.
- Signo del mismo y el valor de sus acciones (ganancia, banda proporcional, tiempo de acción integral y tiempo derivativo).
- ¿Cuál es el valor de consigna?

Nota. Indique claramente las unidades en todos los cálculos que realiza. Recuerde que la señal de entrada al controlador está en volt.

**Problema 8.3** Considere la representación alternativa de un controlador PID bajo la forma

$$C_{PID}(s) = C_{PI}C_{PD} = K'_r \left( 1 + \frac{1}{T'_I s} \right) (1 + T'_D s)$$

y la representación tradicional bajo la forma de la Ec. (8.24). Demuestre que,

$$K_r = K'_r (T'_I + T'_D) / T'_I,$$

$$T_I = T'_I + T'_D$$

y

$$T_D = T'_I T'_D / (T'_I + T'_D).$$

**Problema 8.4** Demuestre que existe una relación biunívoca entre la forma alternativa del problema anterior y la Ec. (8.24) si  $T_I > 4T_D$ .

**Parte III**

**ANÁLISIS DE SISTEMAS A  
LAZO CERRADO**





# Capítulo 9

## Señales en Lazos de Control

En este capítulo se trata primeramente el acondicionamiento y escalamiento de señales en los sistemas de control. Posteriormente, se discute la diferencia entre realimentación unitaria y no unitaria, y su impacto en el de error estado estacionario. Asimismo, a lo largo del capítulo se introducen ejemplos y ejercicios que buscan clarificar los temas presentados.

### 9.1. Acondicionamiento y Escalamiento de Señales

Considere el diagrama de bloques de la Fig. 9.1. El acondicionamiento de una señal consiste en manipular una señal para enviarla a distancia o bien para que pueda ser interpretada por instrumentos y/o componentes de un lazo de control<sup>1</sup>.

A continuación, y para una mejor comprensión del tema, se indicará con  $\sim$  a las señales no escaladas y  $\tilde{\sim}$  las señales escaladas<sup>2</sup>. Puntualmente, en dominio del tiempo en el lazo de control se tiene un conjunto de señales como  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{l}$ ,  $\tilde{e}$ , entre otras, todas no escaladas. Consecuentemente la salida en el dominio de Laplace puede ser expresada como

$$\tilde{Y} = G\tilde{U} + G_l\tilde{L} \quad (9.1)$$

y donde además  $\tilde{E} = \tilde{R} - \tilde{Y}$ .

---

<sup>1</sup>Note que para poder armar un sistema de control, necesariamente las señales deben ser acondicionadas.

<sup>2</sup>Por razones de simplicidad, a lo largo de esta obra, esta notación será omitida.

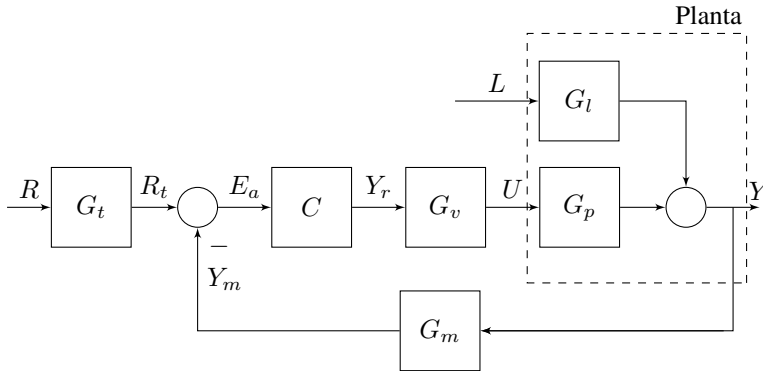


Figura 9.1: Esquema de un sistema de control realimentado.

Es posible escalar a las señales de un lazo de control dividiendo a cada señal por el valor más grande esperado o permitido para ella. Así, si

- $\tilde{l}_{\text{máx}}$ : es el cambio *esperado* más grande en la perturbación,
  - $\tilde{u}_{\text{máx}}$ : es el cambio *permitido* más grande en la entrada (de la planta),
- luego, las señales escaladas resultan

$$u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_{\text{máx}}} \quad \text{y} \quad l = \frac{\tilde{l}}{\tilde{l}_{\text{máx}}}. \quad (9.2)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que las señales  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{r}$  y  $\tilde{e}$  tienen las mismas unidades, es posible utilizar un mismo factor de escalado. Surge entonces dos posibilidades para ello, utilizar

- $\tilde{e}_{\text{máx}}$ : el error de control *permitido* más grande o bien,
- $\tilde{r}_{\text{máx}}$ : el cambio *esperado* más grande en el valor de referencia.

Asumiendo que se utiliza  $\tilde{r}_{\text{máx}}$  para escalar las señales, entonces

$$e = \frac{\tilde{e}}{\tilde{r}_{\text{máx}}}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{r}_{\text{máx}}} \quad \text{y} \quad r = \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}_{\text{máx}}}, \quad (9.3)$$

En base a todo esto, se pretende como objetivo de desempeño,

- mantener  $|y(t)| \leq 1$  (al menos en una gran mayoría de tiempo) para una perturbación  $|l(t)| \leq 1$  y para cualquier  $|\tilde{r}(t)| \leq 1$ , usando un entrada  $|u(t)| \leq 1$ .

Otras señales que deben ser escaladas y acondicionadas son i) la salida del elemento de medición  $G_m$  y ii) la salida de  $G_t$  que es entrada al controlador y por tanto debe que tener una señal de igual naturaleza que la señal de salida de  $G_m$  y por último, iii) la salida del controlador ya que la misma debe tener la misma naturaleza que la entrada al ECF. Para esto, se utiliza el alcance o span de salida del elemento de medición ( $\mathcal{Y}_m$ ) y el correspondiente a la salida del controlador ( $\mathcal{Y}_r$ ). Esto fue discutido en los Cap. 6, 7 y 8 donde se discute el

cálculo de  $K_m$ ,  $K_r$  y  $K_v$ . Además, se debe tener en cuenta que usualmente, estas señales junto con la señal de referencia suelen expresarse mediante software en la sala de control con porcentaje utilizando la siguiente nomenclatura:

- %CV o %TO: porcentaje de la variable controlada (CV, por su anacronismo en Inglés) y porcentaje de la salida del transmisor (TO, por su anacrónico en Inglés)
- %MV: porcentaje de la variable manipulada (MV, por su anacronismo en Inglés)
- %CO: porcentaje de la salida del controlador (CO, por su anacronismo en Inglés)

Así, las señales expresadas en porcentaje (%) pueden ser expresadas como,

$$\begin{aligned} \%CV &= K_m \% (\tilde{y}_m - \tilde{x}) \\ \%CO &= K_r \% (\tilde{e} - \tilde{x}) \\ \%MV &= K_v \% (\tilde{y}_r - \tilde{x}) \end{aligned} \quad (9.4)$$

donde  $\tilde{y}_m$ ,  $\tilde{e}_m$  e  $\tilde{y}_r$  son señales acondicionadas (pero no escaladas) a las unidades correspondientes del sistema de control, por ejemplo, mA, psi, entre otros, y  $\tilde{x}$  una corrección necesaria adicional para el escalado porcentual.

**Ejemplo 9.1** Considere una corriente de fluido de salida de un horno a la que se le desea determinar su temperatura mediante un transductor lineal de acuerdo con la Fig. 9.2. El rango de temperatura de salida es 160°C 320°C.

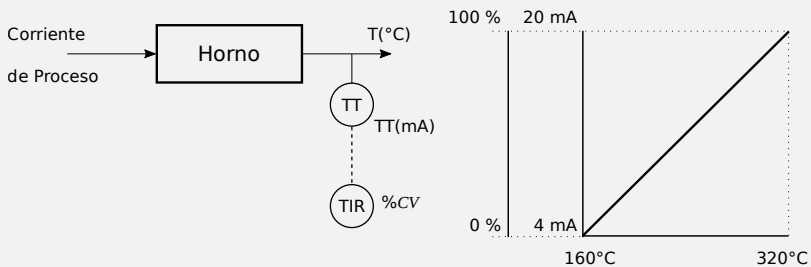


Figura 9.2: Sistema de medición de temperatura a la corriente de salida de un horno y rangos de entrada y salida del elemento de medición.

De acuerdo con la Fig. 9.2, la ganancia del elemento de medición de temperatura resulta,

$$K_m = \frac{16 \text{ mA}}{160 \text{ }^\circ\text{C}} = 0,1 \text{ mA/}^\circ\text{C}$$

que en valores porcentuales es,

$$K_m \% = \frac{100 \%}{16 \text{ mA}} = 6,25 \%/\text{mA}.$$

Consecuentemente, las lecturas de temperatura del elemento de medición resultan,

$$TT(\text{mA}) = K_m(T(^{\circ}\text{C}) - 120^{\circ}\text{C}) = 0,1\text{mA}/^{\circ}\text{C} (T(^{\circ}\text{C}) - 120^{\circ}\text{C})$$

mientras que en el registrador-indicador de temperatura su equivalente porcentual es calculado como,

$$\%CV = K_m \% (T(\text{mA}) - 4 \text{ mA}) = 6,25 \%/\text{mA} (T(\text{mA}) - 4 \text{ mA}).$$

Note que para temperaturas por debajo de  $160^{\circ}\text{C}$  y por encima de  $320^{\circ}\text{C}$ , la entrada y la salida del elemento de medición están saturadas en 4 mA o 20 mA respectivamente. ■

A continuación se presenta un ejercicio que pretende resumir los conceptos hasta aquí vertidos.

**Ejercicio 9.1** Considere el sistema de control de nivel de la Fig. 9.3 donde las variables fueron escaladas de acuerdo con los rangos indicados en la Tabla 9.1. El sistema de control incluye un controlador proporcional cuya  $BP = 100\%$  y las entradas y salidas del controlador están expresadas en mA. Luego, estas son convertidas a señal en presión para poder manipular el caudal de acuerdo con la Fig. 9.3. Además se considera una válvula de control lineal, normalmente cerrada y que el tanque de almacenamiento tiene una dinámica aceptablemente representada por una función de transferencia,

$$\frac{H(s)}{U(s)} = \frac{1}{s + 1} \quad (9.5)$$

con  $H(s)$  el nivel de líquido en metros y  $U(s)$  el caudal manipulado en l/min, por lo que  $K_p = 1\text{m/l/min}$  y la constante de tiempo del tanque es  $T = 1\text{min}$ .

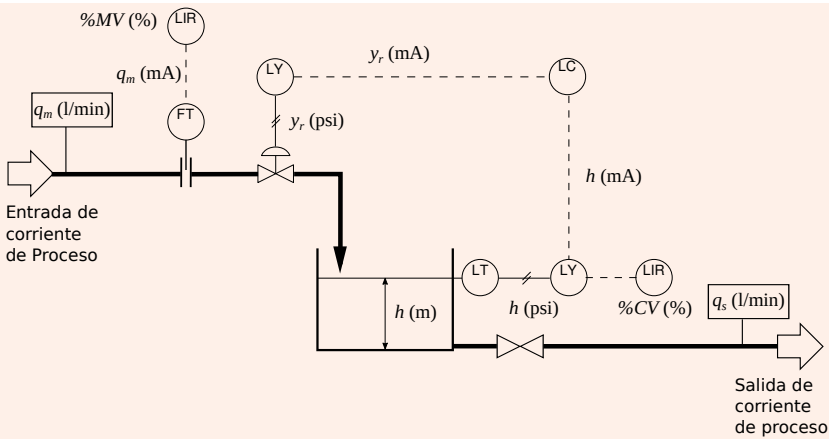


Figura 9.3: Control proporcional de nivel de líquido.

Tabla 9.1: Rango de señales en el sistema de control proporcional de nivel.

	<b>Rango</b>	<b>Span</b>
<b>Nivel</b>	[0 2]m	
<b>Referencia</b>	[0 2]m	
<i>Convertor de Señal</i>		
Entrada	[0 2]m	2m
Salida	[4 20]mA	16mA
<b>Elemento de Medición</b>		
Entrada	[0 2]m	2m
Salida	[3 15]psi	12psi
<i>Convertor de Señal</i>		
Entrada	[3 15]psi	12psi
Salida	[4 20]mA	16mA
<b>Controlador</b>		
Entrada	[4 20]mA	16mA
Salida	[4 20]mA	16mA
<i>Convertor de Señal</i>		
Entrada	[4 20]mA	12psi
Salida	[3 15]psi	16mA
<b>Válvula de Control</b>		
Entrada	[3 15]psi	12psi
Salida	[0 60]l/min	16mA

Simule numéricamente el sistema y grafique las señales involucradas en el lazo de control.

Resolución. ▷ La Fig. 9.4 muestra el DB del sistema realimentado para el control de nivel donde se indican la naturaleza de cada una de las señales involucradas.

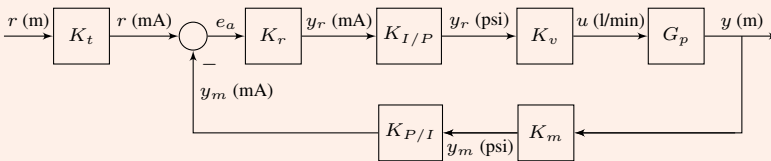


Figura 9.4: Diagrama de bloques del sistema de control proporcional de nivel. Aquí se indica como  $K_{I/P}$  a la ganancia del convertor de intensidad de corriente a presión y como  $K_{P/I}$  a la ganancia del convertor de presión a intensidad de corriente.

Para las simulaciones numéricas se va a realizar dos cambios, uno ellos consiste en un cambio escalón en consigna de amplitud 0.5 m en el instante  $t = 1$  y el otro, un escalón en consigna de amplitud 0.25 m en el instante  $t = 30$ .

La Fig. 9.5 muestra la respuesta dinámica del nivel de líquido para los cambios de referencia solicitados. Puede verse que el control proporcional de nivel no alcanza los valores de referencia pretendidos, dejando un error en el estado estacionario comúnmente designado como *offset*. Esto se explica con más detalle en la Secc. 9.3.

La Fig. 9.7 muestra la señal de nivel medida en unidades de presión, su conversión a unidades de corriente y su equivalente en porcentaje en función de la señal nivel medida en metros. También se muestra las señales de entrada y salida al elemento de medición en porcentaje.

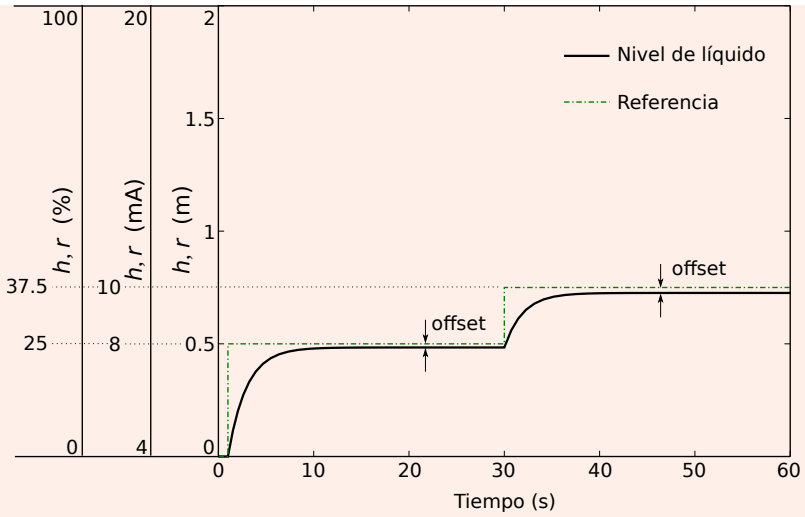


Figura 9.5: Variación de nivel de líquido en el tiempo.

La Fig. 9.6 muestra el caudal manipulado en función del tiempo.

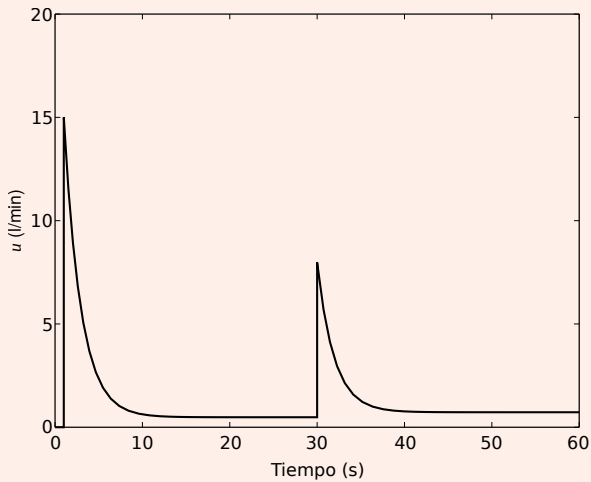


Figura 9.6: Variación de caudal manipulado en el tiempo.

La Fig. 9.8 muestra la señal de caudal en l/min y en porcentaje en función de la señal de salida del controlador en unidades de presión. Note que la simulación muestra que la apertura y cierre de la válvula está sobre la misma línea, lo que resulta consistente con el comportamiento lineal asumido.

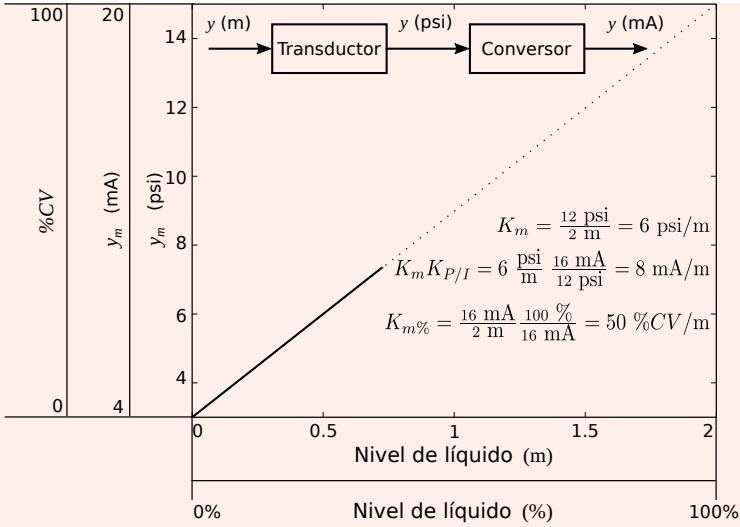


Figura 9.7: Señal de salida del elemento de medición en psi y del convertidor en mA en función de la señal de entrada (variable controlada).

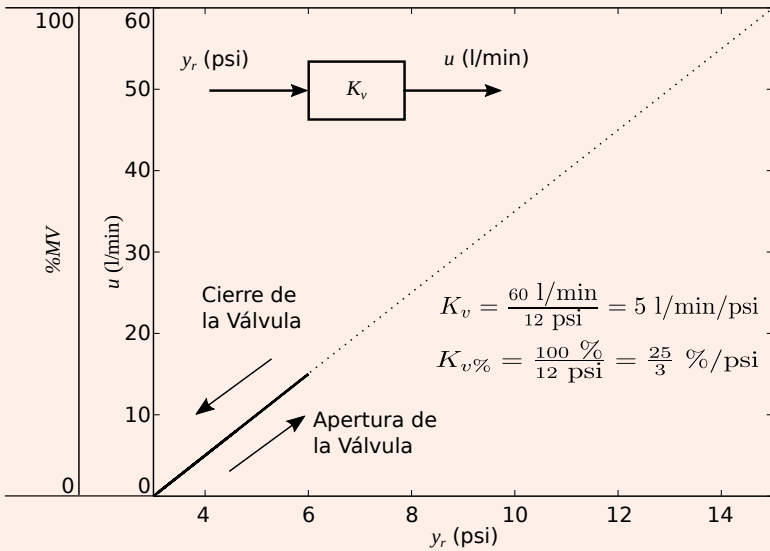


Figura 9.8: Caudal manipulado en función de la señal de salida del controlador.

Finalmente, la Fig. 9.9 muestra la señal de salida del controlador pro-



porcional en función de la señal medida. Puede verse claramente que esto se corresponde con una  $BP = 100\%$ . También puede verse el comportamiento lineal asumido para el controlador proporcional.

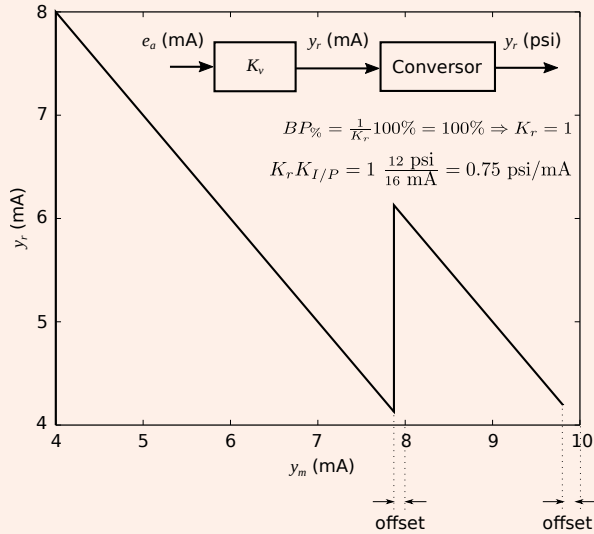


Figura 9.9: Señal de salida del controlador en función de la señal medida.

## 9.2. Realimentación Unitaria y No Unitaria

### 9.2.1. Realimentación Unitaria

Primeramente se va a considerar una realimentación unitaria con el objeto de establecer algunos conceptos que serán útiles posteriormente.

En principio asuma el sistema de control representado en el DB de la Fig. 9.10. Del mismo se desprende que la realimentación unitaria implementada compara directamente las señales  $Y$  con  $R$  y por tal razón se ha escrito  $E$  mientras que, el controlador  $C$  debe ser alimentado con una señal acondicionada de este error y por eso se escribe  $E_a$ .

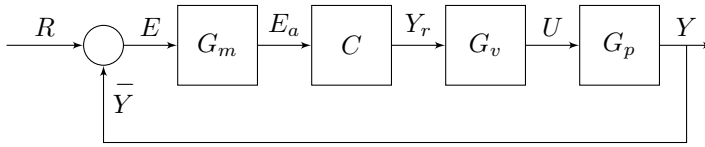


Figura 9.10: Esquema simplificado de una realimentación unitaria.

Note que la realimentación unitaria es un concepto teórico útil pero que en la práctica no se implanta. Tanto las señales de control y referencia son previamente acondicionadas para luego ser enviadas al controlador que es en donde realmente se realiza la diferencia entre ambas.

Por último, se destacan dos conceptos muy similares pero que al mismo tiempo son ligeramente diferentes<sup>3</sup>.

**Definición 9.2.1 — Error.** Definimos error como la diferencia entre la señal de referencia y la salida controlada que en términos matemáticos se expresa como,  $e(t) := r(t) - y(t)$ .

**Definición 9.2.2 — Señal de Error.** Definimos a la señal de error acondicionada ( $E_a$ ) por los elementos de medición,  $G_m$  y  $G_t$ , que en el dominio de Laplace se escribe como,  $E_a(s) := G_t(s)R(s) - G_m(s)Y(s)$  de acuerdo con el DB de la Fig. 9.1 o bien, cuando  $G_t = G_m$  entonces  $E_a(s) = G_m(s)[R(s) - Y(s)]$ .

También, en control de procesos, se suele hablar de *error de seguimiento* cuando el cambio es en consigna (asociado al problema de control) y *error debido a la carga* para cuando se tiene un cambio en ella (asociado al problema de regulación).

Assumiendo que  $r(t)$  y  $y(t)$  están escritos en variables de desviación se introduce las siguientes definiciones.

**Definición 9.2.3 — Error de Seguimiento.** Definimos error de seguimiento como la diferencia entre la señal de referencia y la salida controlada que en términos matemáticos se expresa como,  $e(t) := r(t) - y(t)$ , en ausencia de perturbaciones.

**Definición 9.2.4 — Error debido a la Carga.** Definimos error debido a la carga como la diferencia entre la señal de referencia y la salida controlada que en términos matemáticos se expresa como,  $e(t) := -y(t)$ , en ausencia de cambios de consigna<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Note que si no hay cambios en consigna,  $r(t) = 0 \forall t \geq 0$  ya que  $r(t)$  está escrito en variables de desviación

<sup>3</sup>Dado que la diferencia entre  $E$  y  $E_a$  es muy sutil, a lo largo de esta obra la misma será omitida, y sólo se remarcará cuando sea oportunamente necesario.

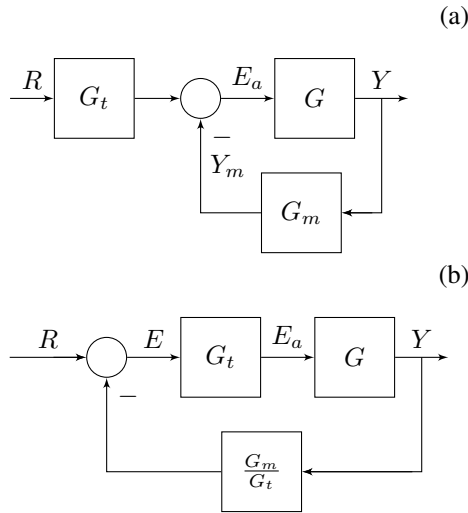


Figura 9.11: Formas equivalentes de una realimentación no unitaria.

## 9.2.2. Realimentación No Unitaria

Considere la realimentación no unitaria de la Fig. 9.11a donde por simplicidad, se escribe  $G = G_p G_v C$ . De acuerdo con el DB de dicha figura,

$$E_a = G_t R - G_m Y = G_t \left( R - \frac{G_m}{G_t} Y \right). \quad (9.6)$$

Observe que la representación en DB del lado derecho de la Ec (9.6) es la que se muestra en la Fig. 9.11(b).

Ahora, si se cumple que  $G_t = G_m$  el DB de la Fig. 9.11(b) se transforma en una forma equivalente a una realimentación unitaria, en donde la cadena de lazo abierto  $G(s)H(s) = G_p G_v C G_m$ .

Note que,

1. en el DB de la Fig. 9.11a se ha escrito  $E_a$  a la salida del sumador, que corresponde a la *señal de error acondicionada* con unidades diferentes a las que tienen la salida controlada ( $Y$ ) y la referencia ( $R$ ).
2. En el DB de la Fig. 9.11b se ha escrito  $E$  a la salida del sumador ya que, como se indicó en la sección anterior, la naturaleza de las señales que se comparan (sus unidades) son diferentes al DB de la Fig. 9.11a. Además si  $G_t = G_m$ , se compara  $Y$  con  $R$  como en la realimentación unitaria y los DBs de las Fig. 9.10 y 9.11 son equivalentes.
3. Por último, en el DB (Fig. 9.11b) la señal de salida de  $G_t$  acondiciona la señal de error para que ingrese al controlador.

Basándose en los resultados anteriores enunciamos la siguiente remarca.

Tabla 9.2: Señales de referencia y designación de los tipos de error de estado estacionario.

Referencia	Transf. de Laplace	Tipo Error de seguimiento
Escalón	$R(s) = \frac{k}{s}$	error de posición
Rampa	$R(s) = \frac{k}{s^2}$	error de velocidad
Parábola	$R(s) = \frac{k}{s^3}$	error de aceleración

**R** ■ **Remarca 9.1 — Condición para realimentación unitaria.** Si  $G_t(s) = G_m(s)$  luego, el sistema realimentado de la Fig. 9.11a se comporta como una realimentación unitaria.

**Demostración** La demostración de la remarca surge de los comentarios anteriores. □

### 9.3. Errores de Estado Estacionario

En función del tipo de entrada en sistemas de control suele hablarse de tres tipos de errores de seguimiento, los que se detallan en la Tabla 9.2.

Es de destacar que en control de procesos, el error de posición es designado usualmente como offset. Este punto se discutirá con más detalle en el Cap. 13.

Consideremos ahora el sistema realimentado de la Fig. 9.1. De acuerdo con la Def. 9.2.1 el error en el dominio de Laplace es escrito como,

$$E(s) = R(s) - Y(s). \quad (9.7)$$

y de acuerdo con el TVF,  $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$ .

Por otro lado, si se considera una realimentación no unitaria (Fig. 9.1)

$$E_a(s) = G_t R(s) - G_m Y(s). \quad (9.8)$$

Ahora, se considera una entrada  $R \neq 0$ , las respectivas funciones de transferencia de  $E$  y  $E_a$  con dicha entrada resultan

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + G_p(s)G_v(s)C(s)[G_m(s) - G_t(s)]}{1 + G_p(s)G_v(s)C(s)G_m(s)} \quad (9.9)$$

mientras que

$$\frac{E_a(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_p(s)G_v(s)C(s)G_m(s)} G_t(s). \quad (9.10)$$

Tabla 9.3: Funciones de transferencia de error y señal de error con las entradas de referencia y carga. Note que aquí se define  $G := G_p G_v C$ ,  $S := 1/(1+GG_m)$  y  $T := GG_m/(1+GG_m)$ .

Entradas	Realimentación No Unitaria		
	Salida	Error	Señal de Error
Referencia	$\frac{Y}{R} = S(1 + GG_t)$	$\frac{E}{R} = S[1 + G(G_m - G_t)]$	$\frac{E_a}{R} = SG_t$
Carga	$\frac{Y}{L} = SG_l$	$\frac{E}{L} = -SG_l$	$\frac{E_a}{L} = -SG_m G_l$
Entradas	Realimentación Unitaria		
	Salida	Error	Señal de Error
Referencia	$\frac{Y}{R} = T$	$\frac{E}{R} = S$	$\frac{E_a}{R} = SG_m$
Carga	$\frac{Y}{L} = SG_l$	$\frac{E}{L} = -SG_l$	$\frac{E_a}{L} = -SG_m G_l$

Con similar razonamiento se puede encontrar las funciones de transferencia entre  $E$  y  $E_a$  con  $L(s)$ . La Tabla 9.3 resume todas las funciones de transferencia posibles para realimentación unitaria y no unitaria escritas en términos de las funciones sensibilidad ( $S(s)$ ) y sensibilidad complementaria ( $T(s)$ ).

Con el objeto de determinar los errores en estado estacionario, primeramente si consideramos que las funciones de transferencia  $G_l$ ,  $G_m$  y  $G_t$  son funciones de transferencia asociadas a sistemas autorregulables (un requisito razonable) entonces, en estado estacionario por el TVF se tiene que  $G_l(0) = K_l$ ,  $G_m(0) = K_m$  y  $G_t(0) = K_t$ .

Ahora, si consideramos el caso de la realimentación no unitaria, aplicando el TVF a las funciones de transferencia anteriores, para el cambio en consigna resulta,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s) + (G_m - G_t)G(s)R(s)}{1 + G_m G(s)} \quad (9.11)$$

$$e_a(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_t R(s)}{1 + G_m G(s)} \quad (9.12)$$

mientras que para el cambio en carga resulta,

$$e_l(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-G_l L(s)}{1 + KG_m G(s)} \quad (9.13)$$

$$e_{al}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_m G_l L(s)}{1 + G_m G(s)} \quad (9.14)$$

donde se usa el subíndice  $l$  para indicar que se trata de un error relacionado a la eliminación de perturbaciones.

Si ahora se considera realimentación unitaria, con el mismo razonamiento para el cambio en consigna se tiene que,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + G_m G(s)} \quad (9.15)$$

$$e_a(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_m R(s)}{1 + G_m G(s)} \quad (9.16)$$

mientras que para el cambio en carga las ecuaciones de error de seguimiento y de la señal de error acondicionada resultan iguales a las Ecs. (9.13) y (9.14).

Lo que se observa es que en el denominador de todas ecuaciones de (9.11) a (9.16) está presente el mismo límite. Teniendo en cuenta que

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_m G(s) = K_m \tilde{G}(0) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^{N+n_c}} \quad (9.17)$$

donde  $G(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{s^{N+n_c}}$  con  $N$  la cantidad de integradores de  $G_p$  y  $n_c$  la cantidad de integradores del controlador; ya que  $G_v$  y  $G_m$  constructivamente no poseen integradores. Luego,  $\tilde{G}(0) = K_p K_v K_{cont}$  con  $K_{cont} = \lim_{s \rightarrow 0} s^{n_c} C(s)$  y donde particularmente  $K_{cont} = K_r$  si el controlador es P o PD y  $K_{cont} = K_r/T_I$  si el controlador es PI o PID.

Ahora, si definimos  $K^* := K_m K_p K_v K_{cont}$ , la productoria de todas las ganancias de la cadena de realimentación y consecuentemente,

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_m G(s) = K^* \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^{N+n_c}} \quad (9.18)$$

Particularmente, si ahora se considera la Ec. (9.11) donde  $R(s) = 1/s^{n_r}$  con  $n_r$  la cantidad de integradores de la entrada en consigna (1, 2 y 3 para escalón, rampa y aceleración respectivamente) se tiene que,

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{k}{s^{n_r}} + [G_m(s) - G_t(s)] \frac{\tilde{G}(s)}{s^{N+n_c}} \frac{k}{s^{n_r}}}{1 + G_m(s) \frac{\tilde{G}(s)}{s^{N+n_c}}} \\ &= \frac{\lim_{s \rightarrow 0} k s^{N+n_c+1-n_r} + \lim_{s \rightarrow 0} k s^{1-n_r} [G_m(s) - G_t(s)] \tilde{G}(s)}{\lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c} + \lim_{s \rightarrow 0} G_m(s) \tilde{G}(s)} \\ &= \frac{k \lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c+1-n_r} + k K_p K_v K_{cont} (K_m - K_t) \lim_{s \rightarrow 0} s^{1-n_r}}{\lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c} + K^*} \end{aligned} \quad (9.19)$$

Similarmente con la señal de error acondicionada,

$$\begin{aligned}
 e_a(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_t(s) \frac{k}{s^{n_r}}}{1 + G_m(s) \frac{\tilde{G}(s)}{s^{N+n_c}}} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} k s^{N+n_c+1} G_t(s) \frac{k}{s^{n_r}}}{\lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c} + \lim_{s \rightarrow 0} G_m(s) \tilde{G}(s)} \\
 &= \frac{k K_t \lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c+1-n_r}}{\lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c} + K^*}
 \end{aligned}
 \tag{9.20}$$

En la Tabla 9.4 se resumen las ecuaciones de los distintos tipos de errores para tres tipos de entrada distintas (escalón, rampa y aceleración) cuando se tiene una realimentación no unitaria; mientras que en la Tabla 9.5 se resume la misma información para realimentación unitaria.

**Ejemplo 9.2** Considere el sistema realimentado de la Fig. 9.12. Obtenga el error de seguimiento al escalón y la señal de error de seguimiento correspondiente para cuando  $K_t = 1$  y  $K_t = 0,5$ . Para ello aplique el siguiente procedimiento:

- Resuelva el diagrama de bloques y luego determine los valores de  $e(\infty)$  y  $e_a(\infty)$ .
- Verifique los resultados obtenidos en el inciso anterior aplicando los resultados de la Tablas 9.4 y 9.5.

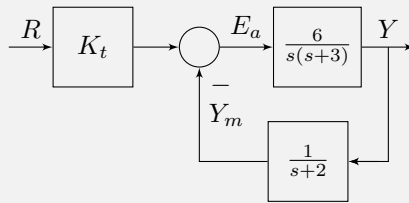


Figura 9.12: Sistema realimentado de est ejemplo.

Primeramente se determina las ganancias involucradas en el lazo de realimentación. Note que para  $G$  la ganancia resulta  $\tilde{G}(0) = 2$  y  $K_m = G_m(0) = 0,5$ .

Si  $K_t \neq K_m$  entonces se tiene una realimentación no unitaria mientras que, si  $K_t = K_m$  se tiene una realimentación unitaria.

Resolviendo el DB entre la salida controlada y la referencia se tiene que,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = K_t \frac{\frac{6}{s(s+3)}}{1 + \frac{6}{s(s+3)} \frac{1}{(s+2)}} = K_t \frac{6(s+2)}{s(s+3)(s+2) + 6}$$

Luego, asumiendo una entrada escalón en consigna de amplitud  $k$  y teniendo

Tabla 9.4: Distintos tipos de errores en función de cambios en consigna y carga para una realimentación no unitaria. Aquí,  $n_e$  es la cantidad de integradores de la entrada.

Tipo de Entrada	Realimentación No Unitaria	
Cambio en:	Referencia	Señal de Error
	Error de Seguimiento	Señal de Error
Escalón ( $n_r = 1$ )		
Rampa ( $n_r = 2$ )		
Aceleración ( $n_r = 3$ )		
Cambio en:	Carga	
	Error de Eliminación de Carga	Señal de Error
Escalón ( $n_l = 1$ )		
Rampa ( $n_l = 2$ )		
Aceleración ( $n_l = 3$ )		



Tabla 9.5: Distintos tipos de errores en función de cambios en consigna y carga para una realimentación unitaria. Aquí,  $n_e$  es la cantidad de integradores de la entrada.

Tipo de Entrada	Realimentación Unitaria		
Cambio en:	Error de Seguimiento	Referencia	Señal de Error
Escalón ( $n_r = 1$ ) Rampa ( $n_r = 2$ ) Aceleración ( $n_r = 3$ )	$e(\infty) = \frac{k \lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c+1-n_r}}{\lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c+K^*}}$	$e_a(\infty) = \frac{K_m k \lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c+1-n_r}}{\lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c+K^*}}$	
Cambio en:	Error de Seguimiento	Carga	
Escalón ( $n_l = 1$ ) Rampa ( $n_l = 2$ ) Aceleración ( $n_l = 3$ )	$e_l(\infty) = \frac{-K_l k \lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c+1-n_l}}{\lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c+K^*}}$	$e_{al}(\infty) = \frac{-K_l K_m k \lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c+1-n_l}}{\lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c+K^*}}$	

en cuenta el TVF se tiene que

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s K_t \frac{6(s+2)}{s(s+3)(s+2)+6} \frac{k}{s} = 2kK_t$$

y según la definición del error,

$$e(\infty) = r(\infty) - y(\infty) = k - 2kK_t = k(1 - 2K_t)$$

Por tanto, si se asume que  $K_t = 1$ ,

$$e(\infty) = -k$$

mientras que para  $K_t = 0,5$

$$e(\infty) = 0.$$

Resolviendo el DB para la señal de error acondicionada se tiene que,

$$\frac{E_a(s)}{R(s)} = K_t \frac{1}{1 + \frac{6}{s(s+3)} \frac{1}{(s+2)}} = K_t \frac{s(s+3)(s+2)}{s(s+3)(s+2)+6}$$

Aplicando el TVF para una entrada escalón en consigna de amplitud  $k$  se tiene que

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s K_t \frac{s(s+3)(s+2)}{s(s+3)(s+2)+6} \frac{k}{s} = 0$$

independientemente del valor de  $K_t$ .

Note en este ejemplo que para el caso de una realimentación no unitaria  $e_a(\infty) = 0$  y  $e(\infty) \neq 0$ . Sólo para cuando la realimentación es unitaria la señal de error acondicionada y el error de seguimiento son nulos simultáneamente.

Ahora, si utilizamos las ecuaciones de la Tabla 9.4 para realimentación no unitaria con  $n_r = 1$ ,

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \frac{k \lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c} + kK_p K_v K_r (K_m - K_t)}{\lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c} + K^*} \\ &= \frac{kK_p K_v K_r (K_m - K_t)}{K_p K_v K_r K_m} \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que  $K_m = 0,5$  resulta,

$$e(\infty) = \frac{k(0,5 - K_t)}{0,5}.$$

Ahora asumiendo  $K_t = 1$  entonces  $e(\infty) = -k$  mientras que para  $K_t = 0,5$ , se tiene que  $e(\infty) = 0$ , coincidiendo estos resultados con los obtenidos anteriormente.

Por otro lado, la señal de error acondicionada resulta para  $n_r = 1$ ,

$$e_a(\infty) = \frac{kK_t \lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c+1-1}}{\lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c} + K^*} = \frac{kK_t \lim_{s \rightarrow 0} s^1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^1 + K^*} = 0$$

que resulta independiente del valor de  $K_t$  y coincidente con el resultado anterior. ■

Particularmente si ahora se considera una entrada de referencia y se asume que el sistema tiene realimentación unitaria, para una entrada en consigna cualquiera resulta,

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_p G_v C G_m} R(s) = \frac{1}{1 + G(s)C(s)} R(s) \quad (9.21)$$

donde por simplicidad se escribe  $G(s) = G_m(s)G_p(s)G_v(s)$ . Asumamos también que, 1)  $n_r$  es la cantidad de integradores de la señal de consigna a seguir, 2) la función  $G$  es de tipo  $N$  y 3) el controlador tiene en su función de transferencia  $n_c$  integradores. Luego la siguiente remarca puede ser enunciada.

**R ■ Remarca 9.2 — Error de seguimiento estacionario.** El error de seguimiento a  $t \rightarrow \infty$  en un sistema con realimentación unitaria será nulo si  $N + n_c \geq n_r$ .

**Demostración** Aplicando el TVF a la expresión (9.21) se tiene que,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)C(s)} R(s) \quad (9.22)$$

Luego, designando  $G_{la}(s) = G(s)C(s) = \frac{\tilde{G}_{la}}{s^{N+n_c}}$  donde,  $\tilde{G}_{la}$  es la función de transferencia de lazo abierto sin los integradores y por tanto, tiene la propiedad de que  $\tilde{G}_{la}(0) \neq 0$  y finito por ser una función propia. Entonces,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{\tilde{G}_{la}}{s^{N+n_c}}} \frac{k}{s^{n_r}} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k s^{N+n_c-n_r}}{s^{N+n_c} + \tilde{G}_{la}(s)} \quad (9.23)$$

Note que la última expresión será cero si se cumple que,  $N + n_c - n_r \geq 0$  o bien si,  $N + n_c \geq n_r$ . □

Tabla 9.6: Resumen de resultados basados en la Rem. 9.2.

Tipo de Entrada	Sistema Tipo ( $N$ )	Integradores del Controlador ( $n_c$ )	$N + n_c = n_r$
Entrada Escalón ( $n_r = 1$ )	0	1	1
	1	0	1
Entrada Rampa ( $n_r = 2$ )	0	2	2
	1	1	2
	2	0	2

En otras palabras, de acuerdo con la Rem. 9.2 la cantidad de integradores del producto de todas las funciones de la cadena de lazo abierto debe ser mayor o igual a la cantidad de integradores que tiene la señal seguir para que de esta manera pasado el transitorio el error sea nulo.

Por tanto, si no queremos tener error de seguimiento en estado estacionario de una dada señal, y la planta no tiene los integradores necesarios, el controlador deberá aportar los integradores faltantes para satisfacer la Rem. 9.2.

La Tabla 9.6 muestra un resumen de lo aquí expuesto para cuando se tienen entradas escalón y rampa en consigna.

**Ejemplo 9.3** Considere el sistema de control de nivel del Ejerc. 9.1 donde ahora se adopta un controlador PI con  $K_r = 1$  y  $T_I = 1$ . Asuma además que se realiza un cambio escalón en consigna de 1 m.

¿A qué es igual el error de seguimiento y la señal de error en este caso?

La Fig. 9.13 muestra el DB del sistema de control PI de nivel de acuerdo con los parámetros obtenidos en el Ejerc. 9.1.

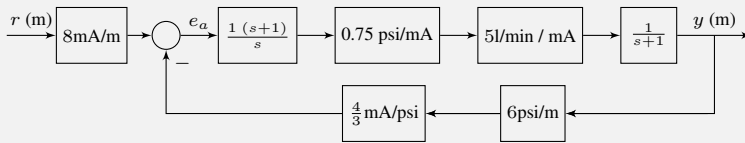


Figura 9.13: Diagrama de bloques del sistema de control proporcional de nivel.

De acuerdo con la Tabla 9.5 se tiene que,

$$e(\infty) = \frac{k \lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c+1-n_r}}{\lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c} + K^*} = \frac{1 \text{ m} \lim_{s \rightarrow 0} s^1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^1 + K^*} = 0 \text{ m} \quad (9.24)$$

ya que  $N = 0$ ,  $n_c = 1$ ,  $n_r = 1$ .

Observe que  $K^* \neq 0$  e incluye los conversores de señal para poder tener unidades consistentes.

Por otro lado, de acuerdo con al Tabla 9.5, la señal de error acondicionada resulta,

$$e_a(\infty) = \frac{K_m k \lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c+1-n_r}}{\lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c} + K^*} = \frac{8 \text{ mA/m } 1 \text{ m } \lim_{s \rightarrow 0} s^1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^1 + K^*} = 0 \text{ m}$$

Note que el resultado de la Ec. (9.24) es consistente con lo indicado en la Tabla 9.6, ya que la realimentación puede ser considerada unitaria y el cambio analizado es en consigna. Siendo esto último, dos requisitos necesarios para el cumplimiento de la Rem. 9.2 algo que no se podía lograr en el Ejerc. 9.1, ya que no disponía de los integradores suficientes. ■

Note que una de las condiciones que pide la Rem. 9.2 para su cumplimiento es que la realimentación sea unitaria. Para entender mejor esto se introduce el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 9.4** Considere el sistema de control de nivel del Ejerc. 9.1 con el controlador PI del ejemplo anterior. Asuma además que se realiza un cambio escalón en consigna de 1 m y que la señal de entrada en la referencia es escalada para un rango de salida de 4–20 mA con un rango de entrada de 0–1.5 m.

¿A qué es igual el error de seguimiento y la señal de error en este caso?

De acuerdo con el enunciado  $K_t = \frac{16 \text{ mA}}{1.5 \text{ m}} = 10.6 \widehat{\text{ mA/m}}$ , o bien en porcentaje  $K_t = \frac{100 \%}{1.5 \text{ m}} = 66.6 \widehat{\%}$ .

De acuerdo con la Tabla 9.4 se tiene que,

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \frac{k \lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c+1-n_r} + kK_p K_v K_r^{cont} (K_m - K_t) \lim_{s \rightarrow 0} s^{1-n_r}}{\lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c} + K^*} \\ &= \frac{k \lim_{s \rightarrow 0} s^1 + kK_p K_v K_r^{cont} (K_m - K_t) \lim_{s \rightarrow 0} s^0}{\lim_{s \rightarrow 0} s^1 + K^*} \\ &= \frac{kK_p K_v K_r^{cont} (K_m - K_t)}{K^*} = \frac{kK_p K_v K_r^{cont} (K_m - K_t)}{K_p K_v K_r^{cont} K_m} \\ &= \frac{1 \text{ m} (8 - 10.6 \widehat{\text{ mA/m}})}{8 \text{ mA/m}} = -\frac{1}{3} \text{ m} \end{aligned}$$

Note que si  $e(\infty) < 0$  entonces  $y(\infty) > r(\infty)$  esto es, en el estado estacionario, la salida controlada es mayor que la referencia a seguir.

Por otro lado, de acuerdo con al Tabla 9.5, la señal de error acondicionada

resulta,

$$e_a(\infty) = \frac{K_t k \lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c+1-n_r}}{\lim_{s \rightarrow 0} s^{N+n_c} + K^*} = \frac{10.6 \widehat{\text{mA/m}} 1 \text{ m} \lim_{s \rightarrow 0} s^1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^1 + K^*} = 0 \text{ m}$$

Resulta interesante observar que la señal de error acondicionada es cero a pesar de la inconsistencia en el escalamiento de la referencia y el nivel de líquido. Para comprender mejor esto observe que la referencia en mA resulta,

$$r(\infty) = 10.6 \widehat{\text{mA/m}} 1 \text{ m} = 10.6 \text{ mA}$$

y dado que  $e_a(\infty) = 0$  entonces  $y_m = r_m = 10.6 \text{ mA}$ , con lo que resulta que

$$y(\infty) = 10.6 \widehat{\text{mA}} \frac{2\text{m}}{16\text{mA}} = 1.3 \widehat{\text{m}}$$

resultando esto consistente con el valor de  $e(\infty)$  obtenido antes.

Por último, si se analiza en términos de porcentaje resulta que

$$r(\infty) = 66.6 \widehat{\%} 1 \text{ m} = 66.6 \widehat{\text{m}}$$

y dado que  $e_a(\infty) = 0$  entonces  $y_m = r_m = 66.6 \%$  con lo que resulta que,

$$y(\infty) = 66.6 \widehat{\%} \frac{2\text{m}}{100 \%} = 1.3 \widehat{\text{m}}$$

obteniendo el mismo resultado (un  $33.3 \widehat{\%}$  de error).

Finalmente note que el mal escalamiento de las señales es producto de no haber respetado lo que se pide en la Ec. (9.3) de la Secc. 9.1 y consecuentemente no se cumple la Rem. 9.2. ■

Por último y para terminar de comprender el tema, note que la Rem. 9.2 se enuncia y se demuestra para el seguimiento de una entrada en consigna y no para la eliminación de perturbaciones. Para entender mejor esto se introduce el siguiente ejercicio.

**Ejercicio 9.2** Considere el lazo de control de nivel de la Fig. 1.9 del Cap. 1. Basándose en el modelo matemático del sistema, arme el diagrama de bloques y muestre a que es igual el error en estado estacionario para cambios escalón en el nivel de líquido de consigna y en el caudal de entrada  $Q_e$ . Asuma para este ejemplo que se está utilizando una válvula normalmente abierta.

Resolución. ▷ Basándose en el diagrama tecnológico del sistema, las

ecuación de balance de materia en variables de desviación resulta,

$$A \frac{d\hat{h}}{dt} = \hat{q}_e - \hat{q}_m$$

Aplicando transformada de Laplace resulta,

$$As\hat{H} = \hat{Q}_e - \hat{Q}_m$$

donde  $\hat{h}(0) = 0$  por estar escrito en variables de desviación y el caudal manipulada es igual al caudal de salida.

El modelo matemático del sistema de control de nivel en el dominio de Laplace se completa con las ecuaciones en variables de desviación:

$$\begin{aligned}\hat{Q}_m &= K_v \hat{Y}_r \\ \hat{Y}_r &= K_r \hat{E} \\ \hat{E} &= K_m \hat{R} - \hat{Y}_m\end{aligned}$$

La Fig. 9.14 muestra el DB del sistema realimentado. Note que hay un cambio de signo y consecuentemente se debe escoger cuidadosamente el signo del controlador para asegurar la realimentación negativa de acuerdo con lo expresado en el Cap. 8 en la pág. 312. Ya que de acuerdo con el enunciado la válvula es normalmente abierta y como además hay dos signo negativos impuestos en el lazo de realimentación entonces  $K_r$  debe ser positivo. De aquí en adelante, por simplicidad en la notación se va a escribir  $1 + GH$  ya que  $-K_v > 0$ , dicho de otro modo,  $K^* > 0$  con  $K^* = 1K_v K_r K_m$ .

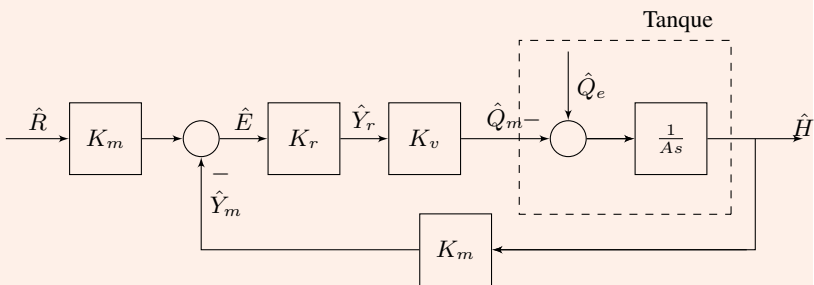


Figura 9.14: Diagrama de bloques del sistema de control de nivel del Ejerc. 9.2.

Resolviendo el DB para el error medido de líquido controlado en función

de la consigna se tiene que,

$$\frac{\hat{E}}{\hat{R}} = \frac{1}{1 + \frac{K^*}{As}} = \frac{As}{As + K^*}$$

Aplicando el TVF a la ecuación anterior para un cambio escalón en consigna de amplitud  $k$

$$\hat{e}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{As}{As + K^*} \frac{k}{s} = 0$$

verificando así el resultado de la Rem. 9.2.

Por otro lado, resolviendo el DB entre el error y el caudal de entrada se tiene que,

$$\frac{\hat{E}}{\hat{Q}_e} = \frac{\frac{-K_m}{As}}{1 + \frac{K^*}{As}} = \frac{-K_m}{As + K^*}$$

Aplicando el TVF a la ecuación anterior para un cambio escalón en el caudal de entrada de amplitud  $k$

$$\hat{e}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-K_m}{As + K^*} \frac{k}{s} = \frac{-K_m k}{K^*} \neq 0$$

mostrando así que el error no es igual a cero.

Note que,

1. si  $\hat{e}(\infty) < 0$  entonces  $\hat{h}(\infty) > \hat{r}(\infty) = 0$  ya que  $\hat{e}(t) = \hat{r}(t) - \hat{h}(t)$ . Esto se puede verificar en la Fig. 1.10 donde se muestra las distintas respuestas dinámicas del sistema para cambios escalón en el caudal de entrada.
2. Es de remarcar que como se comentó anteriormente, la Rem. 9.2 se prueba para cambios en consigna con realimentación unitaria ( $K_m = K_i$ ). Por tanto, no necesariamente se extiende este resultado para cambios en carga a pesar de tener realimentación unitaria.

◁

■

## 9.4. Conclusiones

En este capítulo se presentó las distintas señales de un sistema de control y se discutió la importancia del acondicionamiento y escalamiento de las mismas.

Posteriormente se incluyeron condiciones rigurosas que deben cumplirse para la eliminación de errores mediante la Rem. 9.2. También se muestra que a pesar de tener los modos integradores necesarios para eliminar el error de seguimiento, éste puede no hacerse cero si la condición de realimentación unitaria se rompe. Algo que puede ocurrir con un mal escalamiento de señales.



### 9.5. Pensemos

1. Considere un sistema tipo cero bajo una realimentación no unitaria que utiliza un controlador PI. ¿El incremento de la ganancia del modo proporcional ( $K_r$ ) disminuye el offset en consigna?  **Si**  **No**
2. Considere un sistema a lazo abierto de la Fig. 9.16 donde se indican las variables controlada ( $Y(s)$ ), la manipulada ( $U(s)$ ) y la carga ( $L(s)$ ). Se sabe además que el sistema realimentado tiene un controlador proporcional y los elementos de medición y de control final tienen dinámica despreciable y ganancia unitaria.

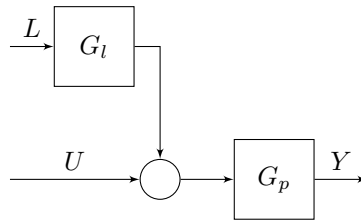


Figura 9.15

Complete la tabla indicando si el sistema de control proporcional deja o no offset y el tipo de salida que se tiene para un cambio en carga.

	tipo	Offset consigna		tipo	Offset carga	Salida tipo
$G_p$	0	Si/No	$G_l$	0	Si/No	0 / 1
				1	Si/No	0 / 1
$G_p$	1	Si/No	$G_l$	0	Si/No	0 / 1
				1	Si/No	0 / 1

3. Considere un sistema a lazo abierto de la Fig. 9.16 donde se indican las variables controlada ( $Y(s)$ ), la manipulada ( $U(s)$ ) y la carga ( $L(s)$ ). Se sabe además que el controlador adoptado es proporcional y que los elementos de medición y de control final tienen dinámica despreciable y ganancia unitaria.

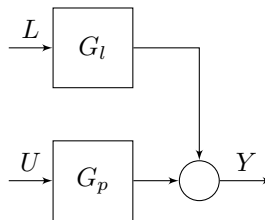


Figura 9.16

Complete la Tabla indicando si el sistema de control proporcional deja o

no offset y el tipo de salida que se tiene para un cambio en carga.

	tipo	Offset consigna		tipo	Offset carga	Tipo de salida
$G_p$	0	Si/No	$G_l$	0	Si/No	0 / 1
	1	Si/No		1	Si/No	0 / 1
				0	Si/No	0 / 1
				1	Si/No	0 / 1

4. Considere el sistema de control de la Fig. 9.1 donde un sistema tipo cero realimentado con un controlador PI y además los elementos de control final y de medición tienen dinámica despreciable.

Asumiendo que el sistema realimentado es estable y que se introduce un cambio escalón en consigna, indique

- a) si  $K_t = K_m$  entonces
- $e(\infty) = 0$  y  $e_a(\infty) = 0$
  - $e(\infty) \neq 0$  y  $e_a(\infty) = 0$
  - $e(\infty) = 0$  y  $e_a(\infty) \neq 0$
  - $e(\infty) \neq 0$  y  $e_a(\infty) \neq 0$
- b) si  $K_t \neq K_m$  entonces
- $e(\infty) = 0$  y  $e_a(\infty) = 0$
  - $e(\infty) \neq 0$  y  $e_a(\infty) = 0$
  - $e(\infty) = 0$  y  $e_a(\infty) \neq 0$
  - $e(\infty) \neq 0$  y  $e_a(\infty) \neq 0$

## 9.6. Problemas

**Problema 9.1** Considere un sistema batch con realimentación unitaria de la Fig. 9.17. Dicho sistema debe seguir dos tipos de entrada distintos; un escalón con un error de seguimiento menor al 1% y una rampa con un error menor al 2.5%.

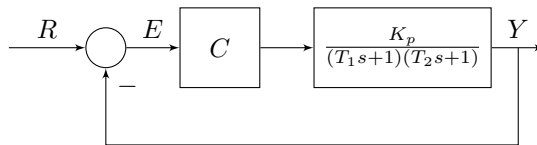


Figura 9.17: Esquema simplificado de una realimentación unitaria.

- (a) Se propone un controlador proporcional para seguir un escalón en consigna. Calcule la ganancia  $K_r$  para dicho caso de manera de satisfacer el error máximo pretendido.
- (b) ¿A qué es igual el error de seguimiento a la rampa para cuando se usa el controlador sintonizado en el inciso anterior?
- (c) Un ingeniero de control propone usar un controlador PI para seguir con mejor desempeño a la rampa. Para ello sugiere usar el valor de  $K_r$  calcu-

- lado en el inciso (a) y determinar el valor de  $T_I$  que satisfaga la condición pretendida para seguir esta señal. Si esto es posible, calcule el valor de  $T_I$ .
- (d) ¿A qué es igual el error de seguimiento al escalón con el controlador sintonizado en el inciso (c)?



# Capítulo 10

## Respuestas en Frecuencia de Sistemas LTI

En este capítulo se presenta las respuestas en frecuencia de sistemas LTI sencillos (primero y segundo orden, pasa alto y pasa bajo, etc.). Los diagramas de Bode y Nyquist aquí mostrados junto con la teoría básica de análisis en dominio de la frecuencia son de mucha utilidad para el análisis de estabilidad y ajuste de controladores como se verá en capítulos posteriores.

### 10.1. Introducción

Haciendo un poco de historia, se puede decir que a principios de 1930 surgen métodos rigurosos de análisis de estabilidad de sistemas lineales basados en respuestas en frecuencia, conocidos como análisis de estabilidad de Bode y Nyquist (los que se discutirán en el Capítulo 8). Luego fue posible extender estos métodos de análisis de estabilidad a ciertos sistemas no lineales.

Dado que las respuestas en frecuencia brinda una imagen cualitativa del comportamiento transitorio de los sistemas lineales, es posible usar estas respuestas para el ajuste de controladores con el fin de lograr ciertas características en la respuesta dinámica.

Así es que en los últimos años, el análisis en el dominio de la frecuencia ha sido de mucha utilidad al momento de estudiar la estabilidad de los sistemas lineales, la performance de un sistema realimentado y el ajuste de controladores. Un sin número de métodos de ajuste de controladores, tanto para sistemas SISO como MIMO, es presentado en la literatura ([59], [56], [62], [27], [78], entre muchos otros), basados en una planta nominal con el fin de alcanzar cierta condición de estabilidad y performance nominal. O más aún, aplicar estos métodos a familia de plantas logrando así controladores robustos que satisfacen condiciones preestablecidas para alcanzar estabilidad y performance robustas ([63],

entre otros). En pocas palabras, lograr mediante el ajuste de un dado controlador que una familia de plantas que representa a un proceso, cumpla con todas las condiciones preestablecidas.

## 10.2. Respuestas en Frecuencia de Sistemas LTI

Consideremos un sistema LTI estable que es sometido a una entrada senoidal de amplitud  $A$  y frecuencia  $\omega$ , en otras palabras  $u(t) = A \text{sen}(\omega t)$ . La pregunta que nos hacemos es, ¿cómo será la respuesta dinámica de dicho sistema una vez pasado el transitorio?

Antes de comenzar con el desarrollo del tema introducimos la siguiente definición:

**Definición 10.2.1 — Respuestas en Frecuencia.** Se entiende por respuesta en frecuencia de un sistema LTI estable a la respuesta dinámica pasado el transitorio ante una entrada senoidal de frecuencia  $\omega$ .

Ahora bien, considere un sistema LTI estable<sup>1</sup> cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (10.1)$$

donde  $N(s)$  y  $D(s)$  son polinomiales de orden  $m$  y  $n$  respectivamente, con  $m \leq n$ . Para una entrada senoidal  $u(t) = A \text{sen}(\omega t)$  donde  $\omega \in [0, \infty)$  es una frecuencia particular del espectro de frecuencia. La función de transferencia de dicha entrada resulta es  $U(s) = A\omega/(s^2 + \omega^2)$  y consecuentemente

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (10.2)$$

Expandiendo esta última ecuación en fracciones parciales,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} \frac{A\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \\ &= \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} \cdots \frac{C_n}{s - p_n} + \frac{a}{s + j\omega} + \frac{b}{s - j\omega}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

donde  $p_1, p_2, \dots, p_n$  son los polos reales y/o complejos de  $G(s)$ . Luego, si las partes reales de  $p_1, p_2, \dots, p_n$  son negativas, la transformada inversa de  $C_1/(s - p_1), C_2/(s - p_2), \dots, C_n/(s - p_n)$ , incluirá términos exponenciales decrecientes con la variable tiempo creciente. En consecuencia, estas exponenciales tienden a cero para  $t \rightarrow \infty$ . Así, una vez pasado el transitorio la salida resultante es,

<sup>1</sup>Note que se viene hablando de sistema LTI estable, este concepto se estudiará en el Capítulo 11, pero se sugiere para más claridad ver la Def. 11.2.1.

$$y_{estac}(t) = ae^{-j\omega t} + be^{j\omega t}. \quad (10.4)$$

donde es posible demostrar a partir de (10.3) que  $a = AG(-j\omega)/(-2j)$  y  $b = AG(j\omega)/(2j)$ . Luego, basándose en la notación polar de un número complejo,  $G(-j\omega) = |G(-j\omega)|e^{-j\phi} = |G(j\omega)|e^{-j\phi}$  y  $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$ . Reemplazando estas identidades en (10.4) se tiene,

$$y_{estac}(t) = -\frac{A|G(j\omega)|}{2j}e^{-j(\omega t + \phi)} + \frac{A|G(j\omega)|}{2j}e^{j(\omega t + \phi)}. \quad (10.5)$$

reordenando esta expresión se llega a,

$$y_{estac}(t) = A|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j}. \quad (10.6)$$

Recordando que  $\sin \theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta})/2j$  luego, basándose en esta identidad la expresión (10.6) puede ser escrita como,

$$y_{estac}(t) = A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi). \quad (10.7)$$

La expresión (10.7) prueba los siguientes resultados,

**R** ■ **Remarca 10.1** La respuesta estacionaria de salida de un sistema LTI estable sometido a una entrada sinusoidal  $u(t) = A \sin(\omega t)$  tiene las siguientes propiedades:

1. la salida es otra senoide con frecuencia  $\omega$  y un desfase en ángulo

$$\phi = \arg(G(j\omega)) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\Im[G(j\omega)]}{\Re[G(j\omega)]} \right\}. \quad (10.8)$$

2. su amplitud es  $A|G(j\omega)|$ , lo que conduce a una relación de amplitud entre la salida y la entrada igual a,

$$AR = |G(j\omega)|. \quad (10.9)$$

**Demostración** La prueba de esta remarca es está dada por la forma como se derivó la Ecuación (10.7). □

Basándose en lo anterior se introduce la siguiente definición.

**Definición 10.2.2 — Función de la Respuesta en Frecuencia.** Se define la función de la respuesta en frecuencia de un sistema a los valores de relación de amplitud (módulo)  $AR = |G(j\omega)|$  y de fase  $\phi = \arg(G(j\omega)) \forall 0 \leq \omega < \infty$ , calculados a partir de  $G(j\omega)$ .

Cuando la fase es negativa se lo denomina *retardo de fase*, de otro modo recibe el nombre de *adelanto de fase*.

La Fig. 10.1 muestra en forma resumida los resultados hasta aquí obtenidos.

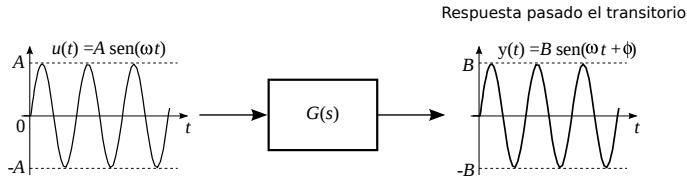


Figura 10.1: Respuesta en frecuencia del sistema LTI estable a la entrada senoidal  $u(t)$ . Note que la salida  $y(t)$  es otra senoide de amplitud  $B$  proporcional a la amplitud de entrada y frecuencia  $\omega$  con un desfase  $\phi$ .

**Ejemplo 10.1** Pruebe los resultados anteriores para cuando un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = K/(Ts + 1)$  es excitado con una función de entrada senoidal  $u(t) = A \text{sen}(\omega t)$ .

$$Y(s) = \frac{KA\omega}{(Ts+1)(s^2+\omega^2)} = \frac{C_1}{s+1/T_1} + \frac{a}{s+j\omega} + \frac{b}{s-j\omega}, \quad (10.10)$$

donde,  $C_1 = KA\omega T/(T^2\omega^2 + 1)$ ,  $a = AG(-j\omega)/(-2j)$  y  $b = AG(j\omega)/(2j)$ . Siendo, los números complejos  $G(-j\omega) = |G(j\omega)|e^{-j\phi}$  y  $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi}$  donde,  $|G(j\omega)| = K/\sqrt{T^2\omega^2 + 1}$  y  $\phi = \arg(G(j\omega))$ . Por lo tanto la Ecuación (10.10) resulta,

$$Y(s) = \frac{KA\omega T}{T^2\omega^2 + 1} \frac{1}{s + 1/T} + \frac{KAe^{-j\phi}}{(-2j)\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \frac{1}{s + j\omega} + \frac{KAe^{j\phi}}{(2j)\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \frac{1}{s - j\omega}, \quad (10.11)$$

realizando la transformada inversa,

$$y(t) = \frac{KA\omega T}{T^2\omega^2 + 1} e^{-t/T} + \frac{KA}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \frac{e^{j\omega t + \phi} - e^{-(j\omega t + \phi)}}{2j} = \frac{KA\omega T}{T^2\omega^2 + 1} e^{-t/T} + \frac{KA}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \text{sen}(\omega t + \phi), \quad (10.12)$$

Luego, pasado el transitorio

$$y_{estac}(t) = \frac{KA}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \text{sen}(\omega t + \phi), \quad (10.13) = A|G(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \phi),$$



La última expresión prueba que la respuesta estacionaria de un sistema de primer orden frente a una entrada senoidal de amplitud  $A$  y frecuencia  $\omega$  es,

1. otra senoide con frecuencia  $\omega$  y desfase  $\phi = \arg(G(j\omega))$
2. y su amplitud es  $A|G(j\omega)|$  o bien, su relación de amplitud es  $AR = |G(j\omega)|$ .

**R** ■ **Remarca 10.2** Las relaciones (10.8) y (10.9) que caracterizan a la respuesta en frecuencia de un sistema LTI estable pueden ser obtenidas reemplazando la variable  $s$  por  $j\omega$  en la función de transferencia del sistema, para luego computar su módulo y argumento.

**Demostración** Considere un sistema LTI cuya función de transferencia es  $G(s) = N(s)/D(s)$ . Luego, tomando  $s = j\omega$  se observa que se tiene como resultado un número complejo,

$$G(j\omega) = \Re[G(j\omega)] + j\Im[G(j\omega)], \quad (10.14)$$

cuyo módulo y argumento son,

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\{\Re[G(j\omega)]\}^2 + \{\Im[G(j\omega)]\}^2}, \quad (10.15)$$

$$\phi = \arg(G(j\omega)) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\Im[G(j\omega)]}{\Re[G(j\omega)]} \right\}. \quad (10.16)$$

Mediante la comparación por un lado (10.9) y (10.15), y por otro lado (10.8) y (10.16), se prueba esta remarca. □

**Ejemplo 10.2** Pruebe lo enunciado por la remarca 1 para el sistema del Ejemplo 10.1.

Siendo  $G(s) = K/(Ts + 1)$ , tomando  $s = j\omega$  se tiene,

$$G(j\omega) = \frac{K}{T^2\omega^2 + 1} - j \frac{KT\omega}{T^2\omega^2 + 1}. \quad (10.17)$$

De donde surge que,  $\Re[G(j\omega)] = K/(T^2\omega^2 + 1)$  y  $\Im[G(j\omega)] = -KT\omega/(T^2\omega^2 + 1)$  de manera que,

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} = AR, \quad (10.18)$$

$$\arg[G(j\omega)] = \tan^{-1}(-T\omega) = \phi, \quad (10.19)$$

donde (10.18) y (10.19) son la relación de amplitud y fase del Ejemplo 10.1.

### 10.2.1. Método rápido para encontrar la respuesta en frecuencia

Basándose en la Rem. 10.2 y por lo observado en el Ejem. 10.2, se enuncia el siguiente procedimiento para obtener la respuesta en frecuencia de un sistema LTI:

#### Procedimiento 10.2.1 — Método Rápido para Resp. en Frec..

**Paso 1.** Adopte  $s = j\omega$  y reemplace en  $G(s)$  a fin de obtener  $G(j\omega)$ .

**Paso 2** Expresé  $G(j\omega)$  como  $G(j\omega) = \Re[G(j\omega)] + j\Im[G(j\omega)]$ .

**Paso 3.** Calcule la relación de amplitud y el desfase a partir de las Ecs. (10.15) y (10.16) respectivamente.

### 10.2.2. Características de la respuesta en frecuencia de un sistema LTI más general

Suponga un caso más general donde  $G(s)$  puede ser expresado como,

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \dots G_n(s), \quad (10.20)$$

donde,  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$ ,  $\dots$ ,  $G_n(s)$  son funciones de transferencia en serie sin interacción entre ellas.



■ **Remarca 10.3** La respuesta en frecuencia del sistema compuesto está caracterizada por

$$AR = AR_{G_1} AR_{G_2} \dots AR_{G_n}, \quad (10.21)$$

$$\phi = \phi_{G_1} + \phi_{G_2} + \dots + \phi_{G_n}, \quad (10.22)$$

donde  $AR_{G_i}$  y  $\phi_{G_i}$  son la relación de amplitud y la fase del número complejo  $G_i(j\omega)$  con  $i = 1, \dots, n$ .

**Demostración** a simple aplicación de las propiedades de multiplicación de números complejos prueban esta remarca.  $\square$

Por tanto, como corolario de la Ecuación 10.21 la siguiente propiedad también se cumple:

$$\log(AR) = \log(AR_{G_1}) + \log(AR_{G_2}) + \dots + \log(AR_{G_n}). \quad (10.23)$$

En consecuencia, para un sistema compuesto por más de una función de transferencia en serie sin interacción,

1. el logaritmo de la relación de amplitud es igual a la sumatoria de los logaritmos de las relaciones de amplitud de las funciones de transferencia en serie y
2. la fase es igual a la sumatoria de las fases de las funciones de transferencia en serie.

### 10.3. Diagramas de Bode y Nyquist

Los diagramas de Bode consisten en dos gráficos separados donde en uno de ellos se representa el logaritmo de la relación de amplitud en función del logaritmo de la frecuencia, mientras que en el otro se gráfica la fase en función del logaritmo de la frecuencia. El diagrama de Nyquist consiste en gráfico de la  $\Im[G(j\omega)]$  en función de la  $\Re[G(j\omega)]$  en el plano complejo con la frecuencia  $\omega$  como parámetro implícito variando entre cero e infinito. Así, a una frecuencia particular  $\omega = \omega^*$  define un punto en el plano complejo, luego el gráfico se completa con todos aquellos puntos que se computan para  $0 \leq \omega < \infty$ .

#### 10.3.1. Diagramas de Bode y Nyquist de funciones básicas

A continuación se propone estudiar la respuesta en frecuencia de funciones sencillas por el método rápido para luego construir los diagramas de Bode y Nyquist para dichas funciones.

##### Caso 1 (ganancia)

Sea la función de transferencia de un sistema  $G(s) = K$  tomando  $s = j\omega$  se tiene un número complejo de la forma,

$$G(j\omega) = K + j0. \quad (10.24)$$

de donde resulta prácticamente trivial que,

$$AR = K \quad \forall 0 \leq \omega < \infty, \quad (10.25)$$

y

$$\phi = 0 \quad \forall 0 \leq \omega < \infty. \quad (10.26)$$

Los diagramas de Bode y Nyquist son los que se muestran en las Figuras 10.2 y 10.3 respectivamente.

##### Caso 2 (derivador e integrador)

a) *Derivador*: Sea la función de transferencia de un sistema  $G(s) = s$  tomando  $s = j\omega$  se tiene un número complejo de la forma,

$$G(j\omega) = 0 + j\omega, \quad (10.27)$$

las partes real e imaginaria resultan,  $\Re[G(j\omega)] = 0$  e  $\Im[G(j\omega)] = \omega$  respectivamente. En consecuencia, la relación de amplitud y la fase son

$$AR = \omega, \quad (10.28)$$

$$\phi = \tan^{-1}(\omega/0) = \pi/2. \quad (10.29)$$

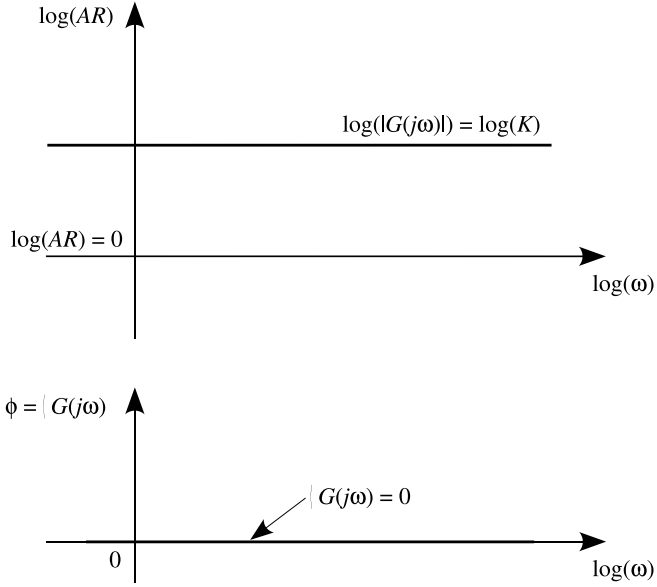


Figura 10.2: Diagramas de Bode para un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = K$ .

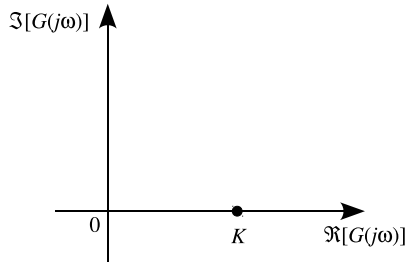


Figura 10.3: Diagrama de Nyquist para un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = K$ .

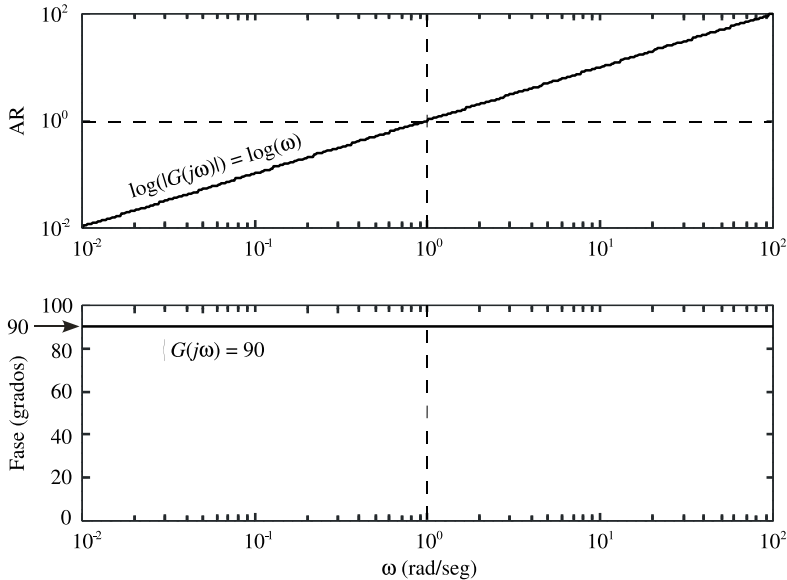


Figura 10.4: Diagramas de Bode para un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = s$ .

para toda frecuencia  $0 \leq \omega < \infty$ . Por lo tanto,  $\log(AR) = \log \omega$  o sea, una recta con pendiente +1 y ordenada al origen cero ( $\log(1) = 0$ ) en el diagrama de magnitud de Bode. Los diagramas de Bode y Nyquist son los que se muestran en las Figs. 10.4 y 10.5 respectivamente.

b) *Integrador*: Sea la función de transferencia de un sistema  $G(s) = 1/s$  tomando  $s = j\omega$  se tiene un número complejo de la forma,

$$G(j\omega) = -j\frac{1}{\omega}, \tag{10.30}$$

las partes real e imaginaria resultan,  $\Re[G(j\omega)] = 0$  e  $\Im[G(j\omega)] = -1/\omega$  respectivamente. En consecuencia, la relación de amplitud y la fase son

$$AR = 1/\omega, \tag{10.31}$$

$$\phi = \tan^{-1}(-\omega^{-1}/0) = -\pi/2, \tag{10.32}$$

para toda frecuencia  $0 \leq \omega < \infty$ . Por lo tanto,  $\log(AR) = -\log \omega$  o sea, una recta con pendiente -1 y ordenada al origen cero en el diagrama de Bode. Los diagramas de Bode y Nyquist son los que se muestran en las Figuras 10.6 y 10.7 respectivamente.

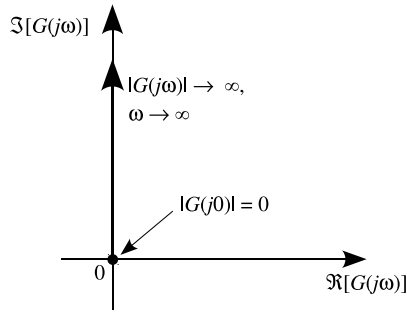


Figura 10.5: Diagrama de Nyquist para un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = s$ .

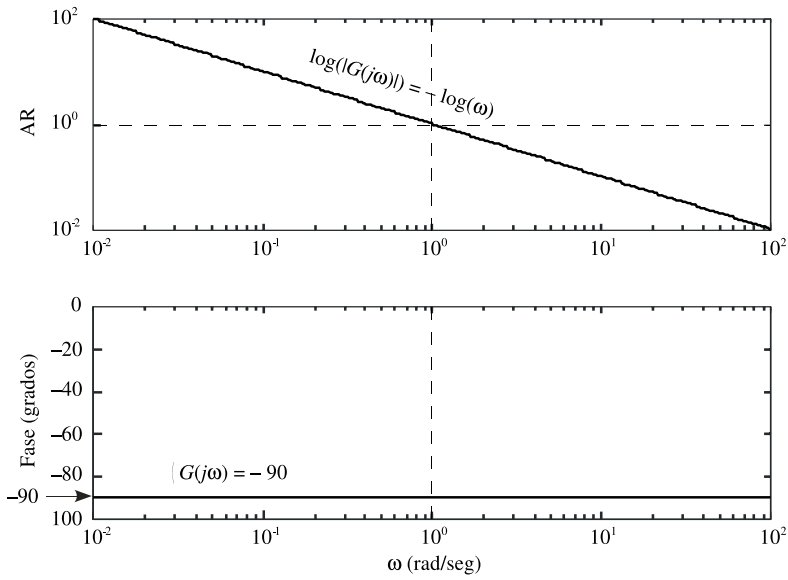


Figura 10.6: Diagramas de Bode para un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = 1/s$ .

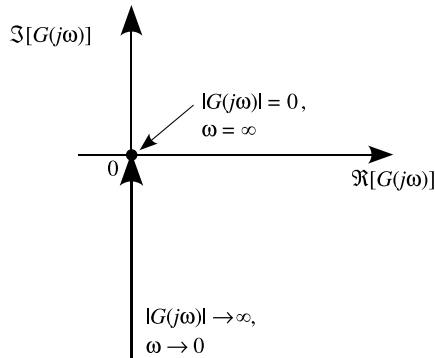


Figura 10.7: Diagrama de Nyquist para un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = 1/s$ .

### Caso 3 (funciones pasa alto y pasa bajo de primer orden).

a) *Función pasa alto de primer orden.* Sea la función de transferencia de un sistema  $G(s) = Ts + 1$  tomando  $s = j\omega$  se tiene un número complejo de la forma,

$$G(j\omega) = 1 + jT\omega, \quad (10.33)$$

las partes real e imaginaria resultan,  $\Re[G(j\omega)] = 1$  e  $\Im[G(j\omega)] = T\omega$  respectivamente. En consecuencia, la relación de amplitud y la fase son

$$AR = \sqrt{1 + T^2\omega^2}, \quad (10.34)$$

$$\phi = \tan^{-1}(T\omega). \quad (10.35)$$

Las asíntotas de las representaciones de amplitud y fase en los diagramas de Bode pueden ser computadas como sigue:

1. Para  $\omega \rightarrow 0$  de (10.34) y (10.35) se observa que  $AR \rightarrow 1$  y  $\phi \rightarrow 0$ .
2. Para  $\omega$  tendiendo a valores grandes la relación de amplitud y fase se las puede aproximar a  $AR \approx T\omega$  y  $\phi \approx \pi/2$ . En consecuencia, el diagrama logarítmico de relación amplitud puede ser aproximado a su asíntota, esto es  $\log(AR) \approx \log(T) + \log \omega$ .

Note que la asíntota corta al eje de las abscisas ( $\log \omega$ ) en una frecuencia  $\omega_c = 1/T$  designada como frecuencia de corte. Los diagramas de Bode y Nyquist son los que se muestran en las Figs. 10.8 y 10.9 respectivamente.

b) *Función pasa bajo de primer orden.* Sea la función de transferencia de un sistema  $G(s) = 1/(Ts + 1)$  tomando  $s = j\omega$  se tiene un número complejo de la forma,

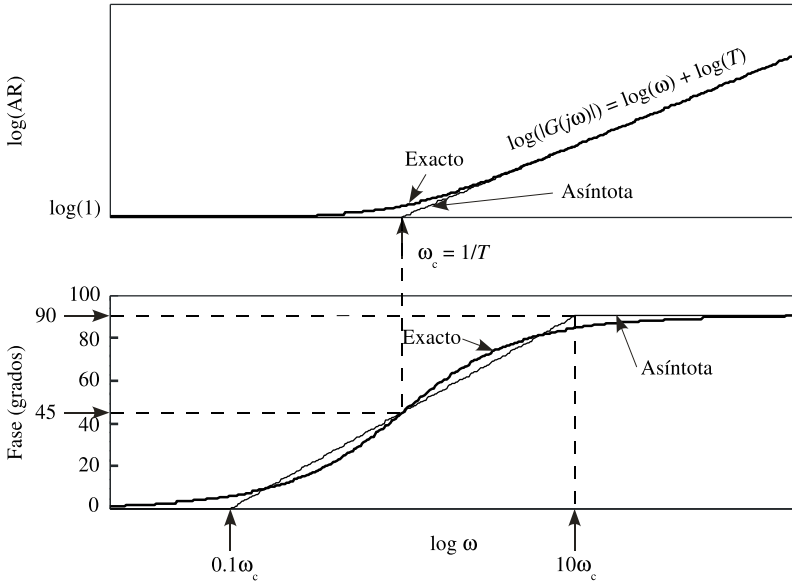


Figura 10.8: Diagramas de Bode exacto y asintótico de un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = (Ts + 1)$ .

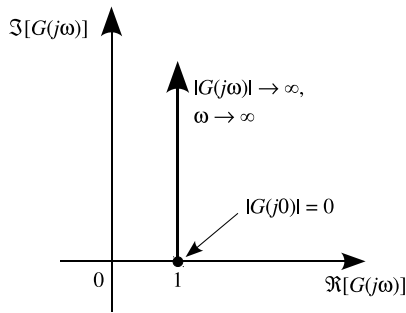


Figura 10.9: Diagrama de Nyquist para un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = (Ts + 1)$ .



$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2}, \quad (10.36)$$

las partes real e imaginaria resultan,

$\Re[G(j\omega)] = 1/(1 + T^2\omega^2)$  e  $\Im[G(j\omega)] = T\omega/(1 + T^2\omega^2)$  respectivamente. En consecuencia, la relación de amplitud y la fase son

$$AR = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}, \quad (10.37)$$

$$\phi = \tan^{-1}(-T\omega). \quad (10.38)$$

Las asíntotas de las representaciones de amplitud y fase en los diagramas de Bode pueden ser computadas como sigue:

1. Para  $\omega \rightarrow 0$  de (10.37) y (10.38) se observa que  $AR \rightarrow 1$  y  $\phi \rightarrow 0$ .
2. Para  $\omega$  tendiendo a valores grandes la relación de amplitud y fase se las puede aproximar a  $AR \rightarrow 1/T\omega$  y  $\phi \rightarrow -\pi/2$ . En consecuencia, el diagrama logarítmico de relación amplitud puede ser aproximado a su asíntota, esto es  $\log(AR) \approx -\log(T) - \log \omega$ .

Note que la asíntota corta al eje de las abscisas ( $\log \omega$ ) en una frecuencia  $\omega_c = 1/T$  designada como frecuencia de corte. Los diagramas de Bode y Nyquist son los que se muestran en las Figuras 10.10 y 10.11 respectivamente.

#### Caso 4 (función de segundo orden).

Sea la función de transferencia de un sistema  $G(s) = 1/(T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1)$  con  $T > 0$  y  $\zeta > 0$ , tomando  $s = j\omega$  se tiene un número complejo de la forma,

$$G(j\omega) = \frac{1 - T^2\omega^2}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2} - j \frac{2\zeta T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}. \quad (10.39)$$

las partes real e imaginaria resultan,

$$\Re[G(j\omega)] = (1 - T^2\omega^2) / \left[ (1 - T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2 \right] \text{ e}$$

$\Im[G(j\omega)] = 2\zeta T\omega / \left[ (1 - T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2 \right]$  respectivamente. En consecuencia, la relación de amplitud y la fase son

$$AR = \frac{1}{\sqrt{\left[ (1 - T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2 \right]}}, \quad (10.40)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{-2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2} \right). \quad (10.41)$$

Las asíntotas de las representaciones de amplitud y fase en los diagramas de Bode pueden ser computadas como sigue:

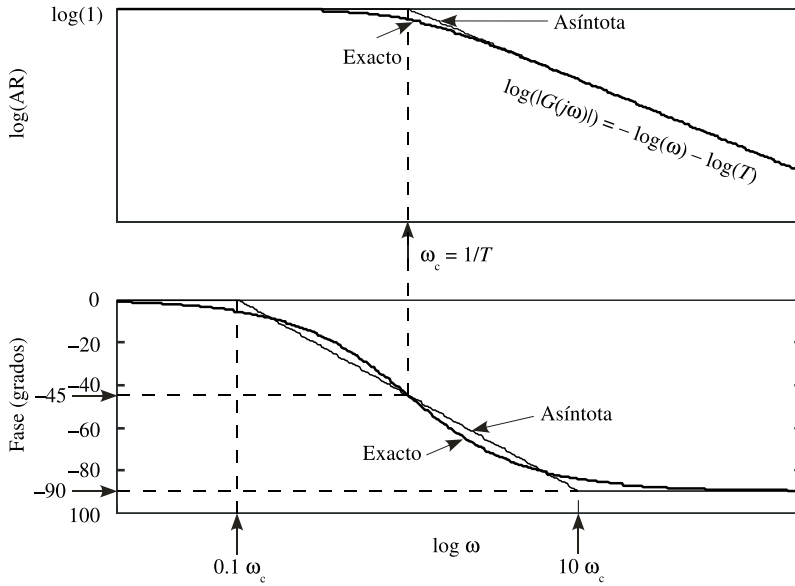


Figura 10.10: Diagramas de Bode exacto y asintótico de un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = 1/(Ts + 1)$ .

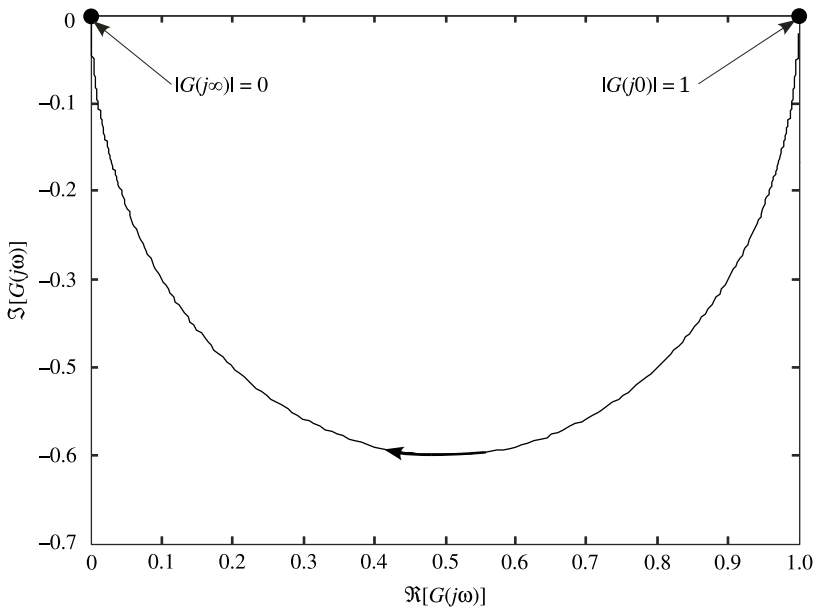


Figura 10.11: Diagrama de Nyquist para un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = 1/(Ts + 1)$ .

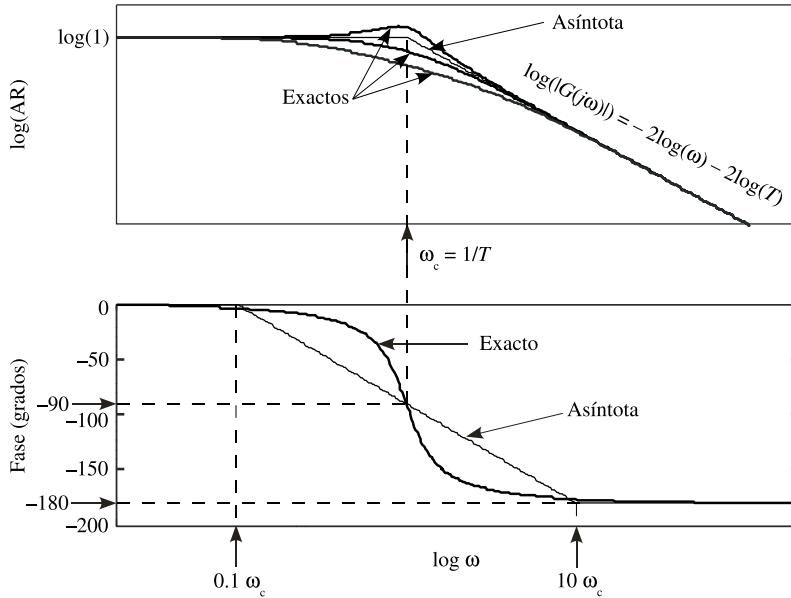


Figura 10.12: Diagramas de Bode exacto y asintótico de un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = 1/(T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1)$ .

1. Para  $\omega \rightarrow 0$  de (10.40) y (10.41) se observa que  $AR \rightarrow 1$  y  $\phi \rightarrow 0$ .
2. Similarmente, para  $\omega$  tendiendo a valores grandes la relación de amplitud y fase se las puede aproximar a  $AR \approx 1/T^2\omega^2$  y  $\phi \approx \tan^{-1}(1/T\omega)$ . En consecuencia, el diagrama logarítmico de relación amplitud puede ser aproximado a su asíntota esto es  $\log(AR) \approx -2\log(T) - 2\log\omega$ . Por lo tanto para  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $AR \rightarrow 0$  y  $\phi \rightarrow -\pi$ .

Note que la asíntota corta al eje de las abscisas ( $\log \omega$ ) en una frecuencia  $\omega_c = 1/T$  designada como frecuencia de corte. Los diagramas de Bode y Nyquist son los que se muestran en las Figuras 10.12 y 10.13 respectivamente.

Un comportamiento muy particular de los sistemas de segundo orden subamortiguados es el pico de resonancia que puede determinarse tomando  $dAR/d\omega = 0$  probando fácilmente que,

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \tag{10.42}$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{10.43}$$

Es interesante notar que si compara las Ecs. (3.37 y 10.42) se puede concluir que  $\omega_r < \omega_p$ .

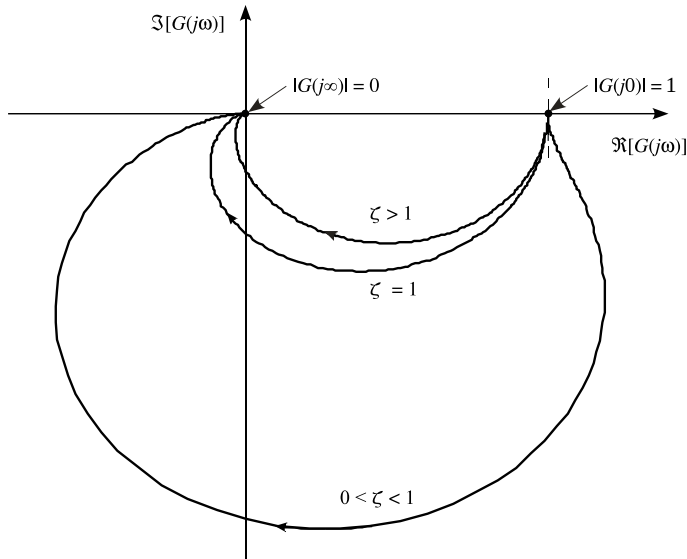


Figura 10.13: Diagrama de Nyquist para un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = 1/(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)$ .

### Caso 5 (función de tiempo muerto puro).

Sea la función de transferencia de un sistema  $G(s) = e^{-\theta s}$ , tomando  $s = j\omega$  y, considerando relaciones trigonométricas conocidas, se tiene un número complejo de la forma,

$$G(j\omega) = \cos(\theta\omega) - j \sin(\theta\omega), \quad (10.44)$$

de manera que las partes real e imaginaria resultan,  $\Re[G(j\omega)] = \cos(\theta\omega)$  e  $\Im[G(j\omega)] = -j \sin(\theta\omega)$  respectivamente. En consecuencia, la relación de amplitud y la fase son

$$AR = \sqrt{\cos^2(\theta\omega) + \sin^2(\theta\omega)} = 1, \quad (10.45)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{-\sin(\theta\omega)}{\cos(\theta\omega)} \right] = -\theta\omega. \quad (10.46)$$

Por lo tanto,

1. para todo  $0 \leq \omega < \infty$  la relación de amplitud  $AR = 1$ ,
2. para  $\omega \rightarrow 0$  se observa que  $\phi \rightarrow 0$  y
3. para  $\omega \rightarrow \infty$  la fase  $\phi \rightarrow -\infty$ .

Los diagramas de Bode y Nyquist son los que se muestran en las Figuras 10.14 y 10.15 respectivamente.

La Tabla 10.1 muestra un resumen de resultados de los casos aquí estudiados.

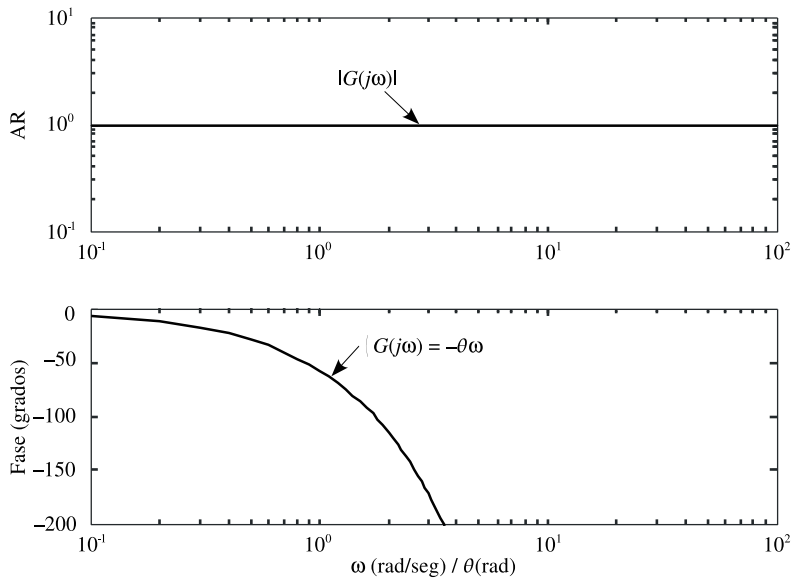


Figura 10.14: Diagramas de Bode exacto para un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = e^{-\theta s}$  donde se ha dimensionalizado el eje de frecuencia respecto a  $\theta$  tomando la relación  $\omega/\theta$ .

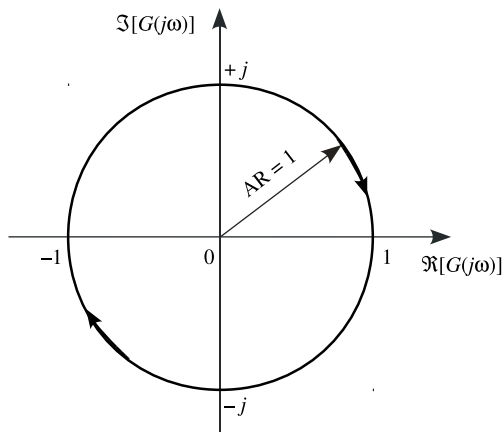


Figura 10.15: Diagrama de Nyquist para un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = e^{-\theta s}$ .

Tabla 10.1: Resumen de resultados de respuestas en frecuencia, para  $0 \leq \omega < \infty$ 

$G(s)$	$ G(j\omega) $	$\phi$
$K$	$K$	$0$
$s$	$\omega$	$\pi/2$
$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{\omega}$	$-\pi/2$
$Ts + 1$	$\sqrt{1 + T^2\omega^2}$	$\tan^{-1}(T\omega)$
$\frac{1}{Ts+1}$	$\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$	$\tan^{-1}(-T\omega)$
$\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$	$\frac{1}{\sqrt{[(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta T\omega)^2]}}$	$\tan^{-1}\left(\frac{-2\zeta T\omega}{1-T^2\omega^2}\right)$
$e^{-\theta s}$	$1$	$-\theta\omega$

**Ejemplo 10.3** Sea  $G(s) = e^{-\theta s}$  luego, utilizando la aproximación de Padé de primer orden obtenga la relación de amplitud y fase con dicha aproximación. Finalmente obtenga los diagramas de Bode exacto y asintótico y de Nyquist con dicha aproximación.

Es posible aproximar al retardo puro mediante la aproximación de Padé como se muestra en el Cap. 3 en la subsecc. 3.6.1. En el caso de una aproximación de primer orden,

$$G(s) \approx \frac{1 - (\theta/2)s}{1 + (\theta/2)s}. \quad (10.47)$$

Designando  $G_1(s) = 1 - (\theta/2)s$  y  $G_2(s) = 1/[1 + (\theta/2)s]$  luego, la relación de amplitud y fase pueden ser computadas como,

$$AR = AR_{G_1} AR_{G_2}, \quad (10.48)$$

$$\phi = \phi_{G_1} + \phi_{G_2}. \quad (10.49)$$

La Fig. 10.16 muestra los diagramas de Bode de este ejemplo mientras que, la Fig. 10.17 compara las respuestas en frecuencia de la fase del tiempo muerto y su aproximación de Padé de primer orden. Claramente, hay un espectro de frecuencia para el cual la aproximación de Padé es aceptable mientras que fuera de dicho rango ésta deja de serlo. Si el diseño de un sistema de control depende de las frecuencias en las que la aproximación de Padé de primer orden es deficiente entonces habrá que incrementar el orden de la aproximación o bien, usar la forma exacta.

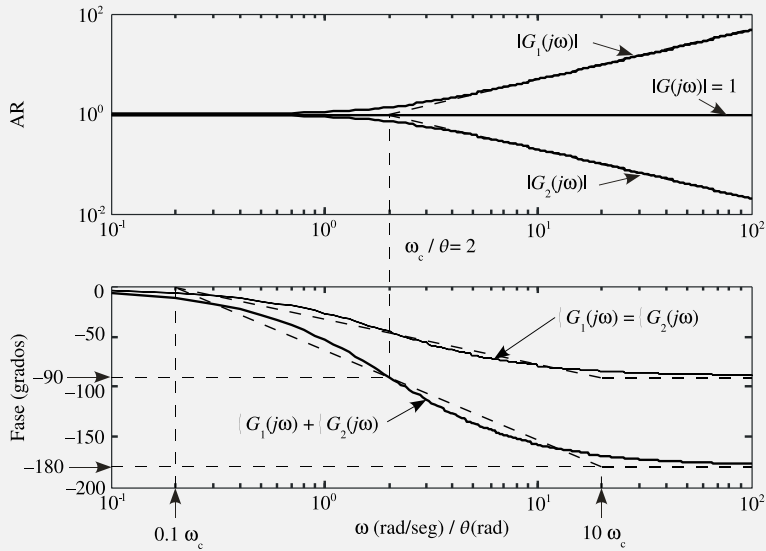


Figura 10.16: Diagramas de Bode exacto y asintótico para un sistema cuya función de transferencia es  $G(s)[1 - (\theta/2)s]/[1 + (\theta/2)s]$ .

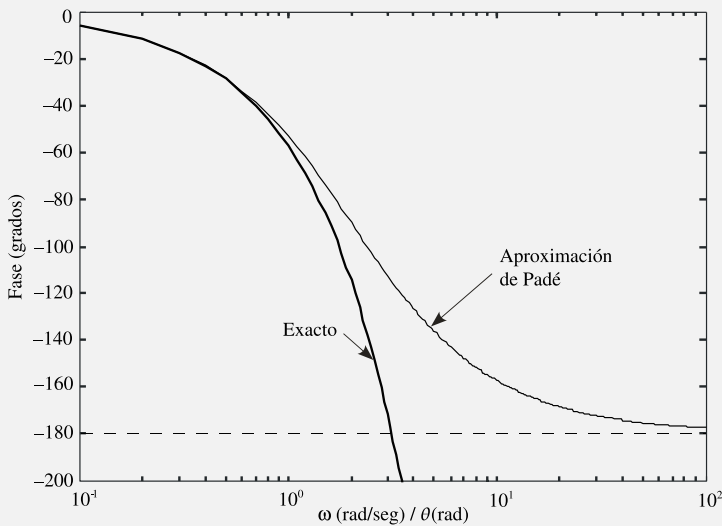


Figura 10.17: Comparación del aporte en fase de la función exacta de un retardo ( $G(s) = e^{-\theta s}$ ) y el aporte de una aproximación de Padé de primer orden.

Finalmente, la Fig. 10.18 muestra el diagrama de Nyquist del ejemplo.

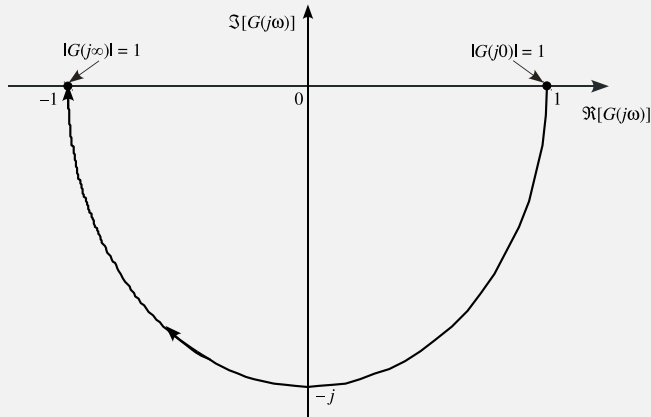


Figura 10.18: Diagrama de Nyquist para un sistema cuya función de transferencia es  $G(s)[1 - (\theta/2)s]/[1 + (\theta/2)s]$ .

Note en este problema las siguientes propiedades en el dominio de la frecuencia de la aproximación de Padé:

1. Para  $\omega \rightarrow 0$  se observa que  $\phi \rightarrow 0$ , similarmente al caso exacto.
2. Para  $\omega \rightarrow \infty$  la fase  $\phi \rightarrow -\pi$ , lo que muestra un importante error en comparación con el cálculo exacto.
3. Mientras que la relación de amplitud es igual a uno para todo  $0 \leq \omega < \infty$ , coincidente con el cálculo exacto.

**Ejemplo 10.4** Considere un sistema de control cuya función de transferencia de lazo abierto es,

$$G(s)H(s) = G_{ol}(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25}.$$

Construya los diagramas de Bode exacto y asintótico. Luego, en base a estos últimos obtenga el correspondiente diagrama de Nyquist.

Los diagramas de Bode y Nyquist son los que se muestran en las Figs. 10.19 y 10.20 respectivamente.



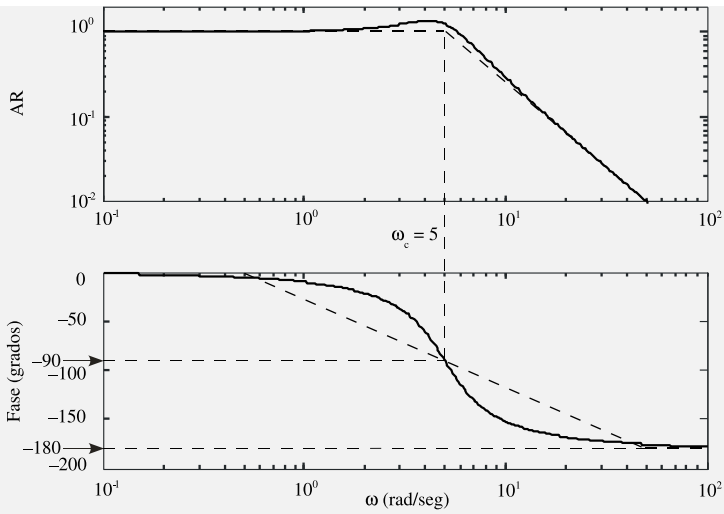


Figura 10.19: Diagramas de Bode para un sistema cuya función de transferencia es  $G(s)H(s) = 25/(s^2 + 4s + 25)$ .

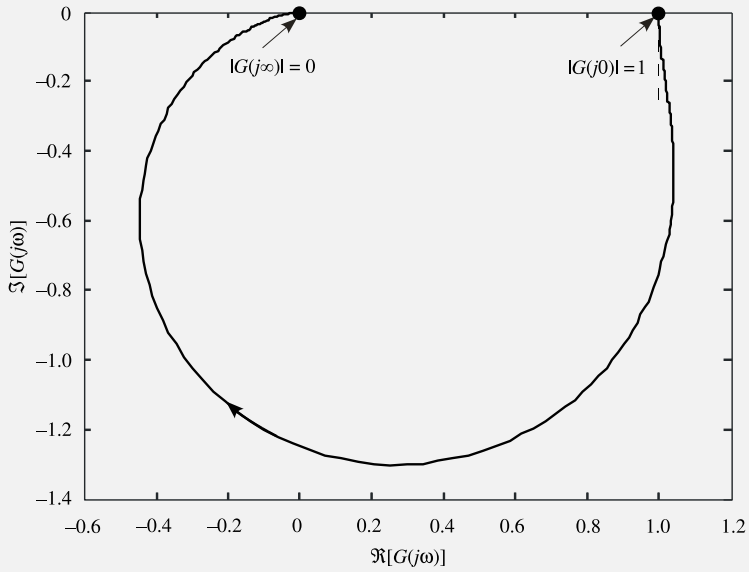


Figura 10.20: Diagrama de Nyquist para un sistema cuya función de transferencia es  $G(s)H(s) = 25/(s^2 + 4s + 25)$ .

### Comandos de Octave relacionados al tema

A continuación se lista las funciones básicas de Octave para la construcción de diagramas de Bode y Nyquist.

Comando	
<code>[MAG, PHASE, W]=bode (SYS, W)</code>	Determina relación de amplitud (MAG), fase (PHASE) y vector de frecuencias (W) de los diagramas de Bode. <i>SYS</i> es el modelo LTI, <i>W</i> como parámetro de entrada es opcional y representa el vector de frecuencias. Si no se indica ningún argumento de salida, el comando presenta directamente la gráfica de Bode.
<code>[REALP, IMAGP, W]=nyquist (SYS, W)</code>	Determina parte real (REALP) parte imaginaria (IMAGP) y vector de frecuencias (W) del diagrama de Nyquist. Si no se indica ningún argumento de salida, el comando presenta directamente la gráfica de Nyquist

**Ejemplo 10.5** Considere el sistema del Ejem. 10.4 luego, utilizando los comandos de Octave obtenga los diagramas de Bode y Nyquist para dicha función de transferencia.

El programa de Octave para este ejemplo se muestra a continuación.

**Algoritmo 10.1:** Código de Octave del Ejem. 10.5 para los diagramas de Bode.

```

1 % planta
2 num=[25];
3 den=[1 4 25];
4 GHs=tf(num,den);
5
6 % diagramas de Bode
7 bode(GHs)

```

Las gráficas de los diagramas de Bode que presenta Octave para este ejemplo son las que se muestran en la Fig. 10.21.

**Algoritmo 10.2:** Código de Octave del Ejem. 10.5 para los diagramas de Nyquist.

```

1 % planta
2 num=[25];
3 den=[1 4 25];
4 GHs=tf(num,den);
5
6 % diagrama de Nyquist
7 nyquist(GHs)

```

La gráfica del diagrama de Nyquist que presenta Octave para este ejemplo es la que se muestra en la Fig. 10.22.

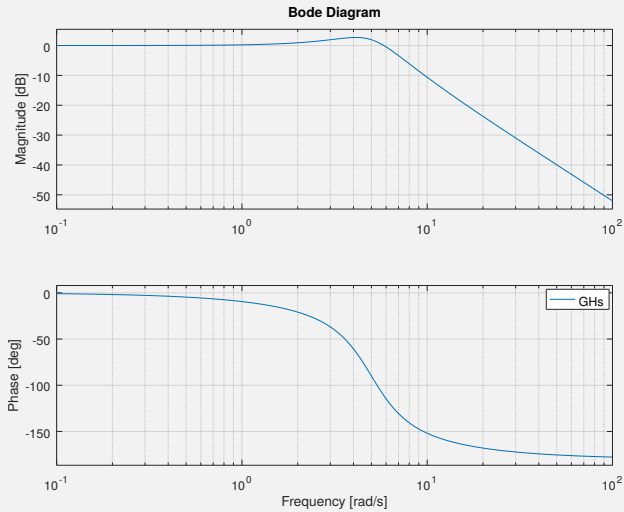


Figura 10.21: Diagramas de Bode para el sistema del Ejem. 10.4.

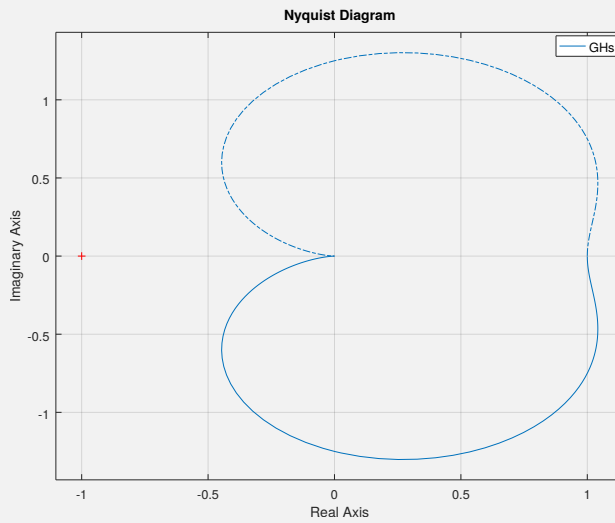


Figura 10.22: Diagrama de Nyquist para el sistema del Ejem. 10.4.



**Ejemplo 10.6** Considere un sistema de control cuya función de transferencia de lazo abierto es,

$$G(s)H(s) = G_{la}(s) = \frac{9(s^2 + 0,2s + 1)}{s(s^2 + 1,2s + 9)}$$

Obtenga los diagramas de Bode y Nyquist para esta función de transferencia en el intervalo de frecuencia  $0,1 \leq \omega \leq 10$ .

El programa de Octave para este ejemplo se muestra a continuación.

**Algoritmo 10.3:** Código de Octave del Ejem. 10.6 para los diagramas de Bode.

```

1 % planta
2 num=[9 1.8 9];
3 den=[1 1.2 9 0];
4 gs=tf(num,den);
5
6 % diagramas de Bode
7 w=logspace(-1,1,100);
8 bode(gs,w)

```

Las gráficas de los diagramas de Bode que presenta Octave para este ejemplo son las que se muestran en la Fig. 10.23.

**Algoritmo 10.4:** Código de Octave del Ejem. 10.6 para los diagramas de Nyquist.

```

1 % planta
2 num=[9 1.8 9];
3 den=[1 1.2 9 0];
4 gs=tf(num,den);
5
6 % diagrama de Nyquist
7 w=logspace(-1,1,100);

```

La gráfica del diagrama de Nyquist que presenta Octave para este ejemplo son las que se muestran en la Fig. 10.24.

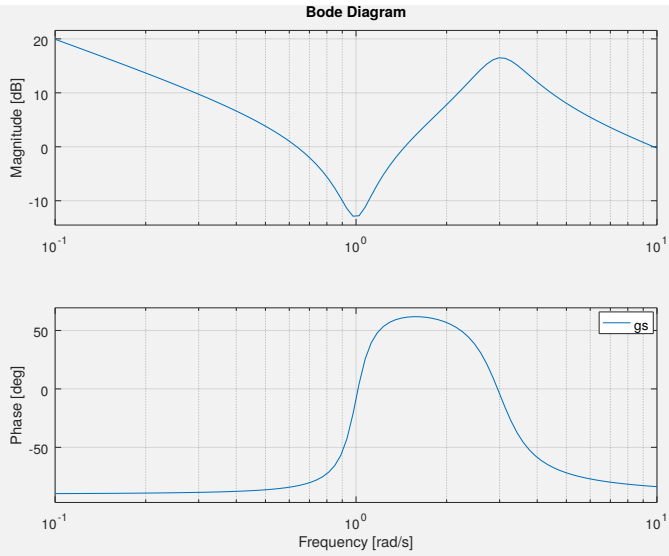


Figura 10.23: Diagramas de Bode para el sistema del Ejem. 10.6.

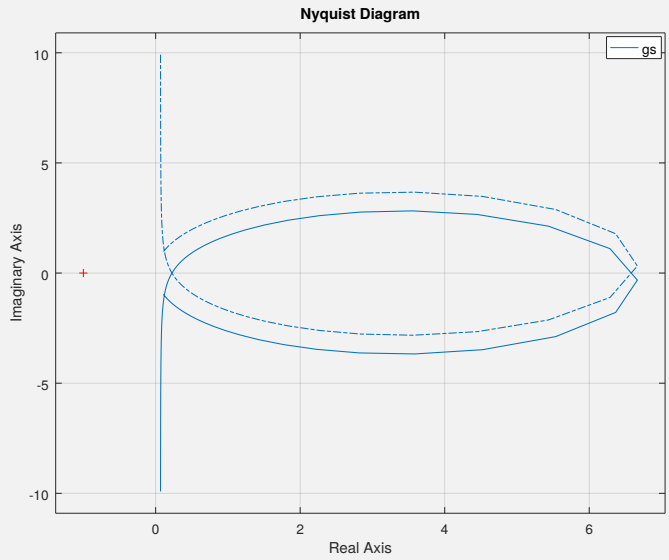


Figura 10.24: Diagrama de Nyquist para el sistema del Ejem. 10.6.



## 10.4. Filtrado de Señal de un Elemento de Medición de Temperatura

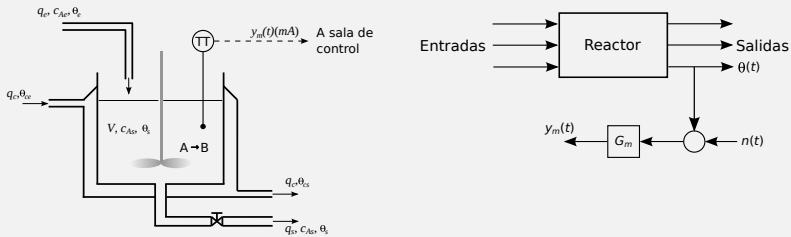
La idea de este ejemplo es,

- ayudar al estudiante a comprender mejor el análisis en el dominio de la frecuencia
- mostrar la utilidad de dicho análisis para la comprensión del efecto de ruidos de medición y como estos se pueden reducir mediante elementos de medición que incorporen una dinámica de primer orden o bien, mediante el agregado de filtros de ruidos de primer orden.
- Finalmente, con este ejemplo se pretende mostrar como es posible realizar un análisis del comportamiento dinámico y estacionario del elemento de medición de temperatura.

**Ejemplo 10.7** Considere una termorresistencia PT100 que se encuentra instalada en un reactor químico y cuya  $G_m(s) = K_m/(Ts + 1)$  con  $T = 1$ . La temperatura de inicial operación del reactor es  $\theta(0) = 480^\circ\text{C}$ , y a dicha señal medida se le suma un ruido de medición  $n(t)$  que en este caso particular puede ser modelado como,

$$n(t) = 0,5 \sin(t) + 0,5 \sin(5t) + 0,5 \sin(10t)$$

Rango de entrada del elemento de medición es  $[400 - 600]^\circ\text{C}$  y el de salida es  $[4 - 20]\text{mA}$ .



- (a) Determine la  $RA$  y fase de cada componente senoidal de la señal medida.
- (b) Determine la función de respuesta  $y_m(t)$  en estado estacionario.
- (c) Determine mediante simulación numérica la respuesta dinámica del elemento de medición de temperatura para los siguientes casos:
  - i. la señal medida en mA y
  - ii. la señal de temperatura en  $^\circ\text{C}$  leída en la sala de control.
- (d) Simule numéricamente la respuesta del elemento de medición frente a

un cambio abrupto en la temperatura del reactor, que puede ser considerado a los fines prácticos como un escalón de  $10^\circ\text{C}$ .

- (e) Compare las respuestas al escalón cuando se cambia la constante de tiempo del elemento de medición de acuerdo con los siguientes valores:  $T = 1, 3$  y  $5$ .

Para determinar la  $RA$  y fase de la señal de salida, primeramente se plantea el problema en base a las propiedades enunciadas antes que,

$$AR = AR_{G_1} AR_{G_2},$$

$$\phi = \phi_{G_1} + \phi_{G_2}$$

y donde se define  $G_1(s) := K_m$  y  $G_2(s) := 1/(Ts + 1)$ . Luego, basándose en las definiciones anteriores y teniendo en cuenta las Ecs. (10.25), (10.26), (10.37) y (10.38),  $AR_{G_1} = K_m$  con  $K_m = 16\text{mA}/200^\circ\text{C} = 0,08\text{mA}/^\circ\text{C}$ ,  $\phi_{G_1} = 0$ ,  $AR_{G_2} = 1/\sqrt{T^2\omega^2 + 1}$ , y  $\phi_{G_2} = \arctan(-T\omega)$ . Por tanto,

$$AR(\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}},$$

y

$$\phi(\omega) = \arctan(-T\omega)$$

Ahora bien como se trata de una señal de entrada que se compone de la suma de tres senos de entrada con distinta frecuencia por el teorema de superposición se tiene que la salida tendrá,  $AR_1(1) = 0,08/\sqrt{2}$ ,  $\phi_1(1) = \arctan(-1) = -\pi/4$ ,  $AR_1(5) = 0,08/\sqrt{26}$ ,  $\phi_1(5) = \arctan(-5) = -1,3734$ ,  $AR_1(10) = 0,08/\sqrt{101}$ , y  $\phi_1(10) = \arctan(-10) = -1,4711$ .

La Fig. 10.25 muestra los diagramas de Bode y Nyquist en los que se ve claramente que las tres relaciones de amplitud y fase calculadas son coincidentes con las obtenidas en el diagramas de Bode del elemento de medición de temperatura para cada seno de entrada <sup>a</sup>. Así mismo, estos resultados se extienden fácilmente al diagrama de Nyquist.

La respuesta de estado estacionario de la señal medida resulta,

$$y_m(t) = \frac{AK_m}{\sqrt{T^2\omega_1^2 + 1}} \text{sen}(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{AK_m}{\sqrt{T^2\omega_2^2 + 1}} \text{sen}(\omega_2 t + \phi_2) + \frac{AK_m}{\sqrt{T^2\omega_3^2 + 1}} \text{sen}(\omega_3 t + \phi_3).$$

donde  $A = 0,5$  y es la amplitud del seno de entrada. Ahora, si se tiene en cuenta las relaciones de amplitud y fase calculadas antes resulta,

$$y_m(t) = \frac{0,04}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}(t - \pi/4) + \frac{0,04}{\sqrt{26}} \operatorname{sen}(5t - 1,3734) \\ + \frac{0,04}{\sqrt{101}} \operatorname{sen}(10t - 1,4711).$$

La Fig. 10.26 muestra la respuesta dinámica simulada de la salida medida  $b$  mientras que la Fig 10.27 muestra compara la señal medida con la temperatura del reactor más el ruido de medición. Para este caso, la temperatura indicada en la sala de control es igual a la señal medida en mA pero dividida por la ganancia  $K_m$  para acondicionar las unidades.

Note que la temperatura leída en la sala de control tiene las siguientes características respecto a la temperatura real del reactor:

1. la amplitud de la señal es distinta producto de que la relación de amplitud las tres componentes senoidales es menor que uno y,
2. existe un defasaje que es propio de la función de transferencia de primer orden.

Ambas conclusiones, obtenidas de las simulaciones numéricas, son coincidentes con las expresiones analíticas presentadas arriba.

Para un cambio escalón de amplitud  $10^\circ\text{C}$  se tiene una respuesta dinámica al escalón típica de un sistema primer orden a la que se le suma la señal de ruido  $n(t)$ . La Fig. 10.28 muestra la simulación dinámica de la respuesta de la PT100.



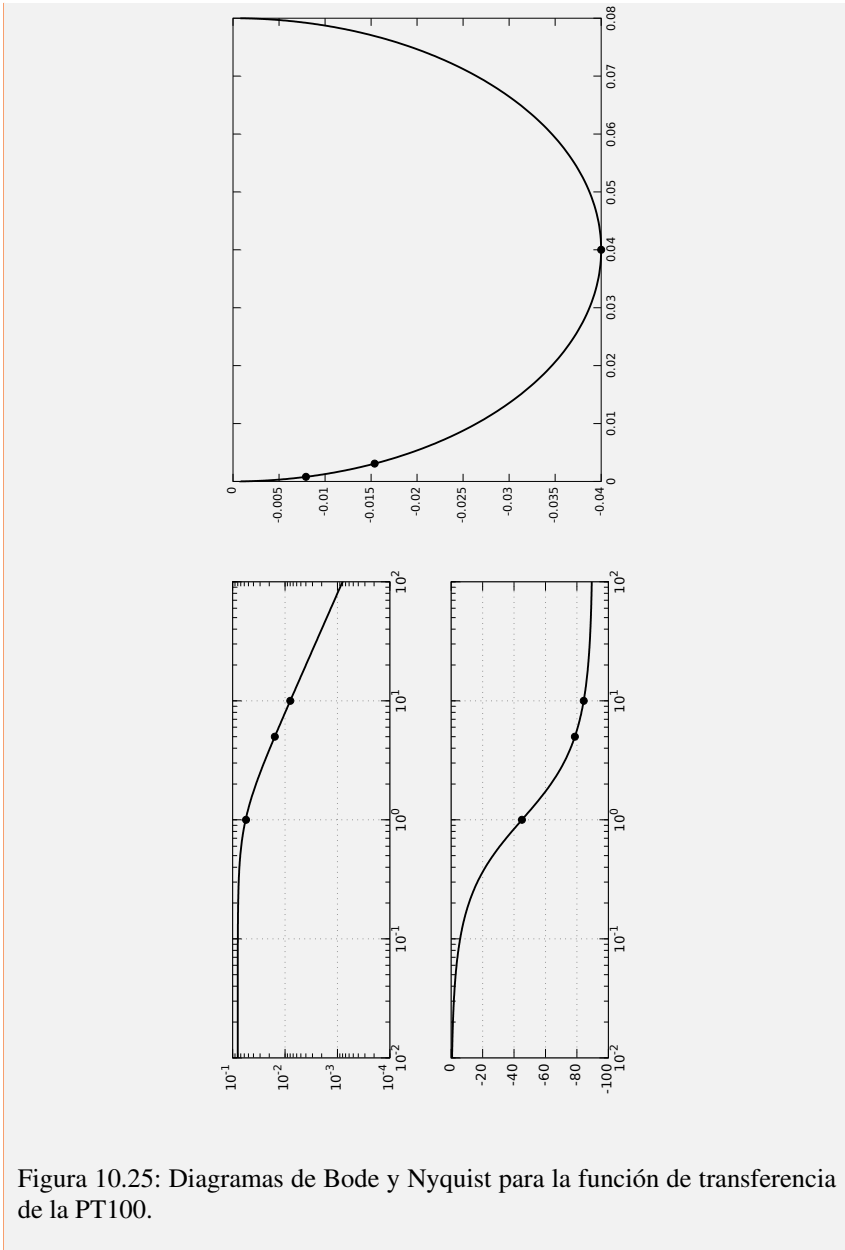


Figura 10.25: Diagramas de Bode y Nyquist para la función de transferencia de la PT100.

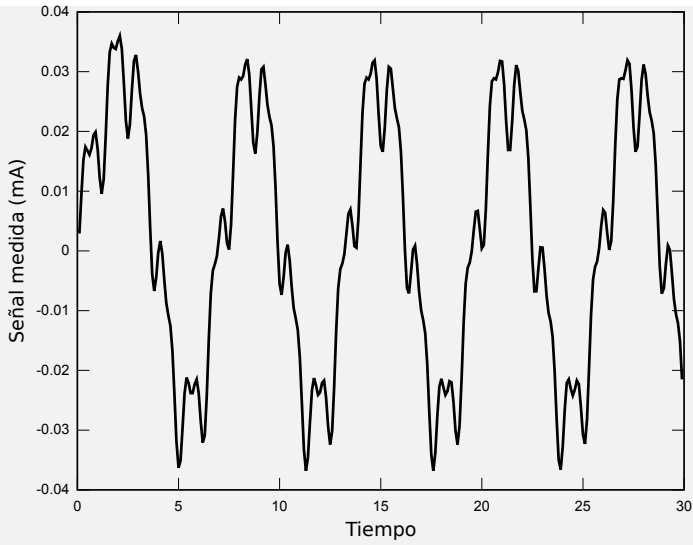


Figura 10.26: Temperatura del reactor medida por el sensor en mA.

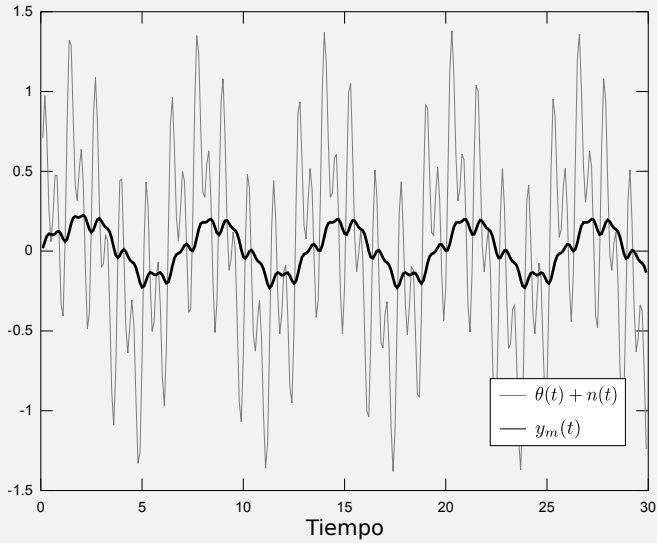


Figura 10.27: Comparación entre la temperatura del reactor más el ruido y la leída y filtrada por el sensor de temperatura en la sala de control durante un proceso de regulación (ambas en °C y representadas como variables de desviación).

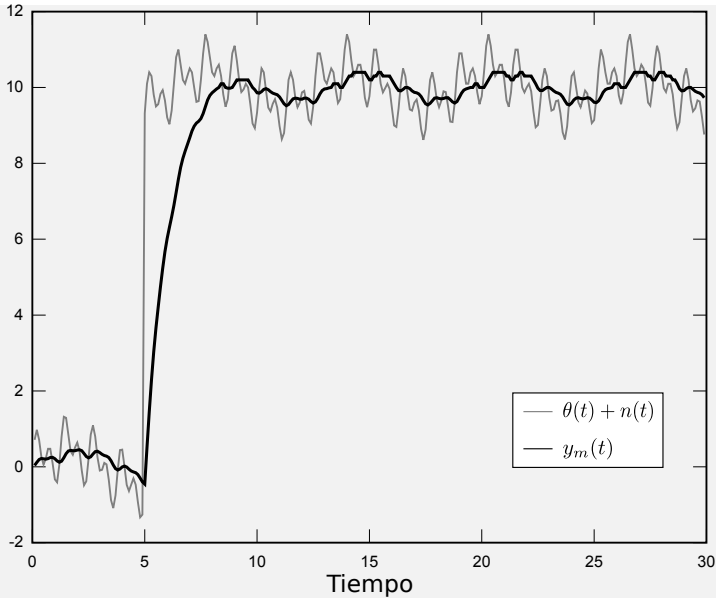


Figura 10.28: Comparación entre la temperatura del reactor más el ruido y la leída y filtrada por el sensor de temperatura en la sala de control (ambas en °C) para un cambio escalón en la temperatura del reactor como desviación de un estado estacionario.

Finalmente en la Fig. 10.29 se compara las respuestas dinámicas de tres elementos de medición cuando sus constantes de tiempo son  $T = 1, 3$  y  $5$ , con los mismos rangos de entrada y salida.

Note que,

- a medida que aumenta la constante de tiempo el efecto de filtrado se mejora sensiblemente, pero esto redundará en una respuesta dinámica más lenta que puede complicar la estabilidad del lazo de control.
- El efecto de filtrado mejora a medida que la relación de amplitud disminuye debido a que aumenta la constante de tiempo  $T$ .
- Finalmente, todas estas conclusiones son a ganancia  $K_m$  constante.

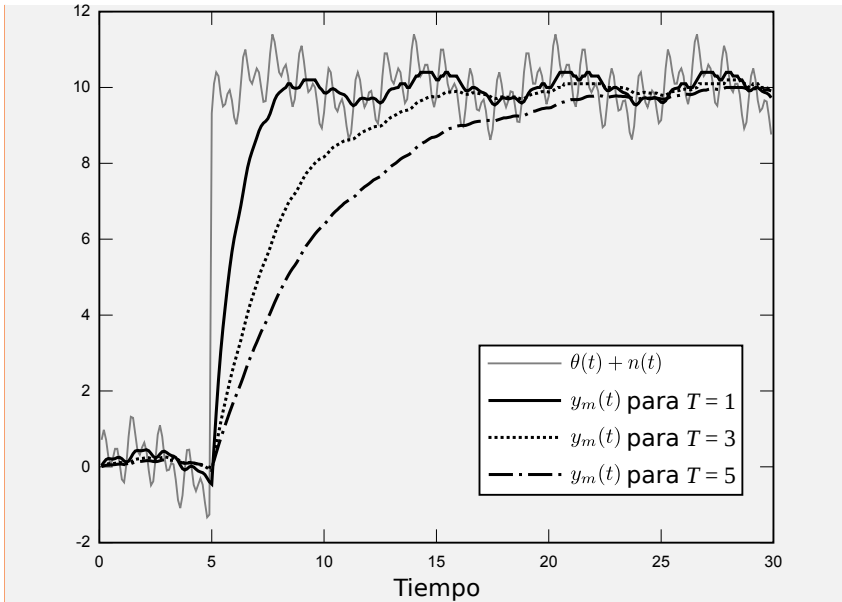


Figura 10.29: Comparación entre la temperatura del reactor más el ruido y la leída y filtrada por el sensor de temperatura en la sala de control (ambas en °C) para un cambio escalón en la temperatura del reactor y cuando se usa tres elementos de medición con distintas constantes de tiempo e igual ganancia.

<sup>a</sup>Los tres puntos de los diagramas de Bode se corresponden con las frecuencias de los senos de entrada que componen el ruido.

<sup>b</sup>Note que para esta figura las unidades de la señal medida están en mA.

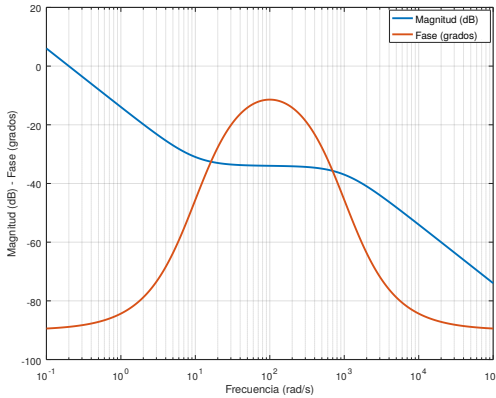
## 10.5. Conclusiones

En este capítulo se presentaron las respuestas en frecuencia de sistemas LTI poniendo especial énfasis en los diagramas de Bode y Nyquist. El uso adecuado de este tipo de respuestas permitirá más adelante establecer rigurosamente criterios de estabilidad y medidas del *márgen* de estabilidad que un sistema lineal posee en lazo cerrado.

Finalmente, se presentó con un ejemplo de la ingeniería de procesos, conceptos elementales de ruido y filtrado de una señal por un elemento de medición.

## 10.6. Pensemos

1. El diagrama de Bode de fase de un sistema de cuarto orden en su denominador con todos sus polos en el semiplano complejo izquierdo y un cero en el semiplano complejo derecho, tiene fase final:
  - $-180^\circ$
  - $+90^\circ$
  - $-90^\circ$
  - $-270^\circ$
  - $+180^\circ$
  - Ninguna de las anteriores.
2. ¿Cómo es el diagrama de Nyquist de un sistema de primer orden con una raíz estable comparado con uno de primer orden cuya raíz es inestable?
  - Igual módulo pero distinta fase.
  - Módulo y fase iguales.
  - Igual fase pero distinta módulo.
  - Ninguna de las anteriores.
3. Considere un sistema de lineal estable sometido a una entrada senoidal  $u(t) = A \sin(\omega t)$ .  
 ¿Una vez pasado el transitorio, la amplitud de salida de la respuesta dinámica es solo función de la ganancia del sistema y de la amplitud del seno de entrada? Justifique.  **SI**  **NO**
4. Considere los diagramas de Bode de magnitud y fase de la Fig. 10.30, la función más aproximada que lo representa es,



- $G(s) = \frac{20(s+10)}{s(s+1000)}$ .
- $G(s) = \frac{(0,1s+1)}{s(0,001s+1)}$
- $G(s) = \frac{10(s/10+1)}{(s/1000+1)}$
- Ninguna de las anteriores.

Figura 10.30

5. En el diagrama de Bode de fase del tiempo muerto se observa que éste aporta fase negativa debido a,
  - polos y ceros del tiempo muerto,
  - los polos por el desarrollo en serie.
  - un módulo mayor que uno.
  - Ninguna de las anteriores.

## 10.7. Problemas

**Problema 10.1** Trace los diagramas de Bode (asintótico y exacto) para las funciones de transferencia que se detallan a continuación. Determine si existen las frecuencias de cruce de fase y ganancia<sup>2</sup>, y pico de resonancia.

a.  $G(s) = \frac{1}{s+4}$

b.  $G(s) = \frac{25(s+1)}{s+10}$

c.  $G(s) = \frac{1}{s(s+3)}$

d.  $G(s) = \frac{5(s+2)}{(s^2+49)}$

e.  $G(s) = \frac{6(s+1)}{(s+0,01)(s+5)}$

f.  $G(s) = \frac{100}{(s+2)(s+4)(s+8)}$

g.  $G(s) = e^{-0,2s}$

h.  $G(s) = \frac{e^{-0,1s}}{s+100}$

**Problema 10.2** Partiendo de los diagramas de Bode de la Fig. 10.31 determine la función de transferencia del sistema.

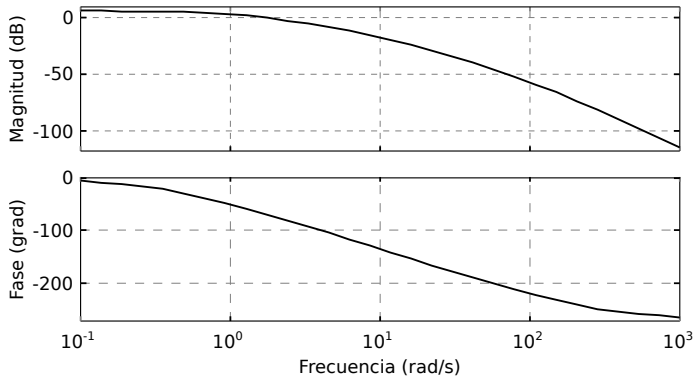


Figura 10.31

**Problema 10.3** Determine la función de transferencia de un sistema LTI cuya respuesta en frecuencia se muestra en los diagramas de Bode de la Fig. 10.32.

<sup>2</sup>Ver Defs. 11.4.1 y 11.4.2 para este problema.

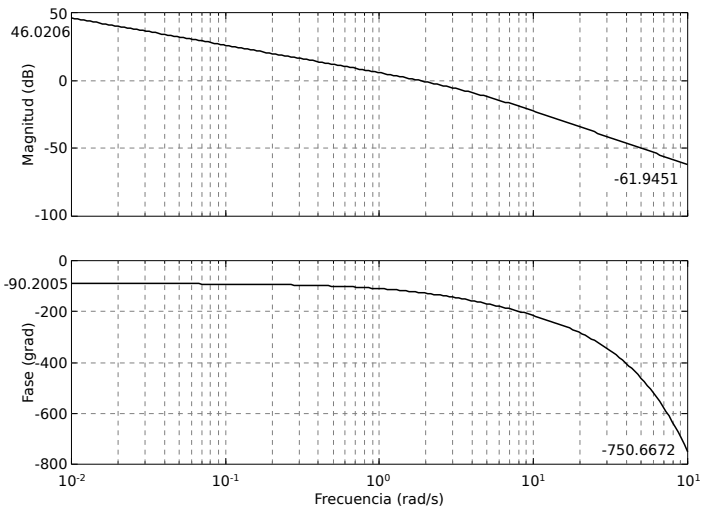


Figura 10.32





# Capítulo 11

## Estabilidad de Sistemas LTI

Como primer idea intuitiva diremos que un sistema será estable cuando frente a un cambio acotado su respuesta (acotada), alcanza un estado estacionario que no necesariamente será el estado inicial.

En este capítulo se estudiará la estabilidad de sistemas LTI haciendo uso de distintos criterios en el dominio complejo; como ser el criterio de estabilidad de Routh, o también basándose en respuestas en frecuencia, como los criterios de estabilidad de Bode y Nyquist; mostrando como cada uno de ellos hace un aporte conceptual a la problemática de la estabilidad.

### 11.1. Introducción

En términos generales, un sistema controlado es considerado estable si las respuestas en el tiempo frente a cambios acotados son acotadas y cuyas oscilaciones son amortiguadas, o bien no existen. Mientras que, es considerado inestable si dichas respuestas son crecientes indefinidamente. Un punto de transición entre la estabilidad e la inestabilidad es aquel en que se producen oscilaciones sostenidas, es decir, de amplitud constante frente a cambios acotados.

También diremos desde un punto de vista práctico, que un sistema será tanto más estable cuanto menos duración tenga la respuesta transitoria, y tendrá mejor desempeño cuanto menos oscilaciones (de menor amplitud y duración) tenga dicha respuesta.

Si bien se ha dicho que las oscilaciones aparecen como consecuencia de algún cambio; en un proceso inestable, comenzará a dar una respuesta creciente en amplitud sin aparente cambio alguno. Esto sucede porque, en la práctica, todo proceso real esta constantemente sometido, cuanto menos, a ruidos y a cambios de carga casi imperceptibles. Así, por ejemplo, una simple señal de entrada, podría contener algo de ruido, suficiente como para iniciar una respuesta del sistema. Para entender esto, imaginemos por ejemplo un sistema inestable sin

ningún tipo de cambios en consigna, carga y ruido. Dicho sistema, a pesar de ser inestable, no precisa efectuar ningún tipo de corrección, y por tanto podrá mantenerse indefinidamente en esa situación de aparente estabilidad; pero al menor cambio de cualquier tipo (externo o interno), se iniciará una respuesta creciente, cuyas oscilaciones (si las tiene) irán creciendo progresiva e indefinidamente en amplitud, hasta saturar algún componente del sistema del sistema. Por tanto, la aparente estabilidad en la que se encontraba este hipotético sistema, no era tal.

## 11.2. Conceptos Básicos de Estabilidad de Sistemas LTI

Siendo la función de transferencia,

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} \dots b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} \dots a_{n-1} s + a_n}, \quad (11.1)$$

donde el denominador del lado derecho de la Ec. (11.1) se lo designa como ecuación característica. La función de transferencia  $T(s)$  puede ser factorizada para dar,

$$G(s) = \frac{K \prod_{k=1}^m (s + z_k)}{\prod_{i=1}^P (s + \alpha_i) \prod_{j=1}^Q (s^2 + 2\sigma_j s + \sigma_j^2 + \omega_j^2)}, \quad (11.2)$$

La respuesta de salida para una función impulso en la entrada ( $U(s) = 1$ ) es la transformada inversa de la Ec. (11.2), conduce a,

$$y(t) = \sum_{i=1}^P A_i e^{-\alpha_i t} + \sum_{j=1}^Q B_j \left( \frac{1}{\omega_j} e^{-\sigma_j t} \sin(\omega_j t) \right), \quad (11.3)$$

Note basándose en la Ec. (11.3) que, para obtener una respuesta acotada a partir de una entrada acotada, todos los polos del sistema estar localizados en el semiplano complejo izquierdo (es decir  $\alpha_i > 0$  y  $\sigma_j > 0$ ).

**Definición 11.2.1 — Sistema Estable.** Se dice que un sistema es estable si para una entrada acotada se tiene una salida acotada.

Luego, el siguiente teorema es enunciado.

**Teorema 11.2.1 — Estabilidad Asintótica de Sistemas LTI.** La condición necesaria y suficiente de estabilidad *asintótica* de un sistema LTI de dimensión finita, es que todos los polos de la función de transferencia deberán tener parte real negativa.

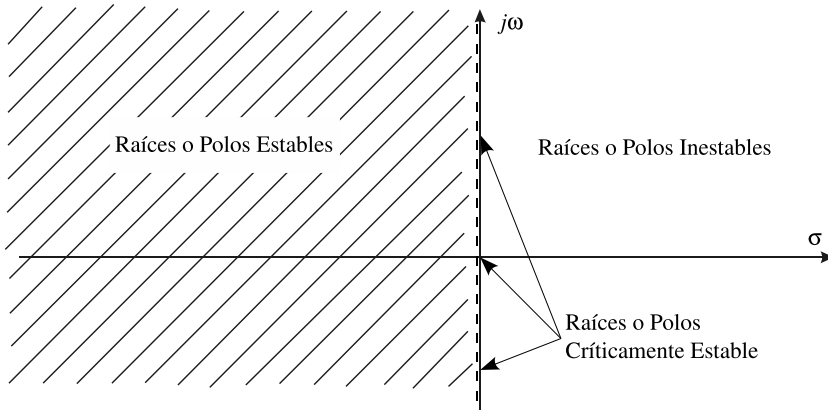


Figura 11.1: Regiones de Estabilidad e Inestabilidad en el Plano Complejo.

**Definición 11.2.2 — Sistema Inestable.** Si la ecuación característica del sistema tiene al menos un polo con parte real positiva, dicho sistema se llamará inestable.

La razón de la Def. 11.2.2 resulta más que obvia si se tiene en cuenta el Teor. 11.2.1, ya que si en el sistema existe al menos una raíz con parte real positiva, para cualquier entrada acotada se tiene una salida no acotada.<sup>1</sup>

**Definición 11.2.3 — Sistema Críticamente Estable.** Si el sistema LTI al menos tiene un par de raíces imaginarias simples con todas las demás raíces ubicadas en el semiplano complejo izquierdo, dicho sistema es designado como marginalmente o críticamente estable.

Note que, si un sistema que tiene todas sus raíces en el semiplano complejo izquierdo, incluyendo el eje imaginario, es estable. Por tanto, debe entenderse que la estabilidad crítica es el límite de la estabilidad de los sistemas lineales. Estos conceptos se vuelcan en la Fig. 11.1.

Además, si se cumple las condiciones de la Def. 11.2.3 luego, para una entrada acotada el sistema tendrá como respuesta una salida acotada. A menos que, la entrada sea un senoide (que es acotada) cuya frecuencia sea igual a la magnitud de las raíces sobre el eje  $j\omega$ . Para este caso, la salida se vuelve no-acotada. Ya que, sólo ciertas entradas acotadas causan salidas no acotadas en el sistema, es que al sistema se lo designa críticamente o marginalmente estable.

<sup>1</sup>Una parte real nula no es considerada en esta definición.

### 11.3. Criterio de Estabilidad de Routh

El criterio de estabilidad de Routh ([71], [24]) nos indica si existen raíces con parte real positiva en una ecuación polinómica sin llegar a resolverla. El procedimiento denominado prueba de Routh es el siguiente:

1. Escribir el polinomio en  $s$  del denominador de la función de transferencia que se desea investigar de la siguiente forma,

$$D(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n, \quad (11.4)$$

■ **Lema 11.1 — Condición Necesaria de Estabilidad.** La condición necesaria de estabilidad pero no suficiente es que todos los coeficientes de la Ec. (11.4) estén presentes y que todos tengan el mismo signo.

La utilidad del Lem. 11.1 se basa en que inmediatamente nos permite reconocer si un sistema es inestable, observando si el sistema no satisface la condición necesaria de estabilidad.

2. Construir el arreglo de Routh basándose en los coeficientes del denominador de la función de transferencia del sistema siguiendo el mecanismo que se muestra más abajo. Por ejemplo, para el caso en que la mayor potencia en  $s$  sea par, dicha matriz es organizada como sigue,

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & 1 & a_2 & a_4 & \dots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ s^0 & h_1 & h_2 & h_3 & \dots \end{array} \quad (11.5)$$

donde  $b_i, c_i, h_i$  con  $i = 1, 2, \dots$ , son los determinantes de Hurwith que tienen por expresión,

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1 a_2 - 1 a_3}{a_1} \\ b_2 &= \frac{a_1 a_4 - 1 a_5}{a_1} \\ c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (11.6)$$

Luego, se demostró ([35]) que,

■ **Lema 11.2** La cantidad de raíces a parte real positiva es igual al número de cambios de signo de los coeficientes en la primer columna del arreglo de Routh.

En consecuencia, el criterio de estabilidad requiere que no haya cambios de signo en la primer columna del arreglo. Basándose en esto se puede enunciar el

siguiente teorema.

**Teorema 11.3.1 — Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz.** La condición necesaria y suficiente de estabilidad es que todos los términos en la primera columna de la matriz de Routh tengan igual signo.

**Ejemplo 11.1** Considere el siguiente sistema realimentado de acuerdo con la Fig. 11.2. Se desea saber si dicho sistema realimentado es estable.

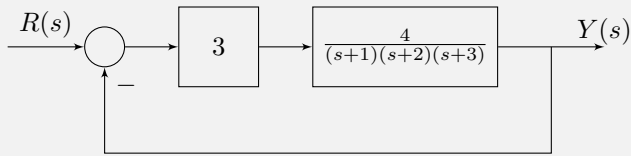


Figura 11.2: Diagrama de bloques del sistema realimentado.

Siendo,

$$G(s)H(s) = \frac{12}{(s+1)(s+2)(s+3)},$$

la ecuación característica de lazo cerrado resulta,

$$D(s) = 1 + G(s)H(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 18,$$

Aplicando la prueba de Routh,

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 6 & 18 \\ s^1 & 8 & 0 \\ s^0 & 18 & 0 \end{array}$$

Dado que no hay cambio de signo entonces la ecuación característica de lazo cerrado no tiene raíces con parte real positiva. Por tanto, y de acuerdo con el Teor. 11.3.1, el sistema realimentado es estable. ■

**Ejemplo 11.2** Considere un sistema realimentado con un controlador proporcional tal que,

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s^2 + 2s + 4)}.$$

Encuentre utilizando el criterio de Routh el rango de valores para el cual el sistema es estable.

La ecuación característica de lazo cerrado resulta,

$$D(s) = 1 + G(s)H(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K.$$

Teniendo en cuenta la condición necesaria del criterio de Routh, se pide que  $K > 0$ .

Aplicando la prueba de Routh,

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & K \\ s^1 & (8 - K)/2 & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array}$$

Para satisfacer el Teor. 11.2.1 se pide que todos los términos de la primer columna de la matriz de Routh sean positivos. Por tanto, será asintóticamente estable  $\forall 0 < K < 8$  ■

### 11.3.1. Casos especiales del criterio de Routh

Dependiendo de la ecuación característica se puede presentar dificultades en la prueba de Routh.

**Caso 1.** *El primer elemento de cualquier renglón de la tabla de Routh es cero, pero no los demás.*

Esta situación puede corregirse de dos maneras.

**Solución 1.** Multiplicando la ecuación característica por  $s + a$ , donde  $a$  es un número real arbitrario, para después proseguir con la tabulación.

**Ejemplo 11.3** Considere un sistema cuya ecuación característica de lazo cerrado es  $s^4 + s^3 + 3s^2 + 3s + 4$ . Aplique la prueba de Routh con el objeto de determinar la estabilidad del sistema.

Aplicando la prueba de Routh al polinomio de lazo cerrado se tiene,

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 4 \\ s^3 & 1 & 3 & 0 \\ s^2 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Siguiendo lo enunciado por la solución 1, al polinomio que representa la ecuación característica de lazo cerrado se la multiplica por  $s + 1$ . Así se tiene un polinomio auxiliar,

$$D_{aux}(s) = s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 7s + 4.$$

Luego, aplicando la prueba de Routh a este último polinomio se tiene,

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 4 & 7 \\ s^4 & 2 & 6 & 4 \\ s^3 & 1 & 5 & 0 \\ s^2 & -4 & 4 & 0 \\ s^1 & 4 & 0 & 0 \\ s^0 & 4 & 0 & 0 \end{array}$$

Dado que se tiene dos cambios de signo entonces la ecuación característica de lazo cerrado tiene dos raíces con parte real positiva. ■

**Solución 2.** Se propone reemplazar el elemento nulo por un valor pequeño y positivo  $\epsilon$  y proceder con la prueba de Routh<sup>2</sup>.

**Ejemplo 11.4** Para el sistema del Ejem. 11.3 aplique la solución 2 y pruebe la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Siguiendo con lo enunciado en la solución 2 se tiene que

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 4 \\ s^3 & 1 & 3 & 0 \\ s^2 & \epsilon > 0 & 4 & 0 \\ s^1 & (3\epsilon - 4)/\epsilon < 0 & 0 & 0 \\ s^0 & 4 & 0 & 0 \end{array}$$

Note que por definición  $\epsilon$  es un número arbitrario positivo pequeño entonces, el término  $(3\epsilon - 4)/\epsilon$  debe ser negativo. Por tanto, de acuerdo con el último cálculo, hay dos cambios de signo y entonces la ecuación característica de lazo cerrado tiene dos raíces con parte real positiva. ■

<sup>2</sup>El método de  $\epsilon$  puede producir resultados incorrectos cuando el polinomio característico tiene raíces imaginarias puras.

**Solución 3.** Realice el cambio de variables  $s = 1/x$  en el polinomio característico y proceda con la prueba de Routh.

Note que este método puede fallar cuando los coeficientes de los polinomios  $D(s)$  y  $D_{aux}(x)$  son idénticos.

**Ejemplo 11.5** Para el sistema del Ejem. 11.3 aplique la solución 3 y pruebe la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Realizando el cambio de variables sugerido por la solución 3 se tiene el siguiente polinomio auxiliar,

$$D_{aux}(x) = 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1.$$

Aplicando la prueba de Routh,

$$\begin{array}{c|ccc} x^4 & 4 & 3 & 1 \\ x^3 & 3 & 1 & 0 \\ x^2 & 5/3 & 1 & 0 \\ x^1 & -4/5 & 0 & 0 \\ x^0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

De acuerdo con el último cálculo, hay dos cambios de signo para el polinomio  $D_{aux}(x)$  y en consecuencia dicho polinomio tiene dos raíces con parte real positiva. Por tanto, la ecuación característica de lazo cerrado también tiene dos raíces con parte real positiva. ■

**Caso 2.** Los elementos de un renglón de la tabla de Routh son todos nulos.

Este caso se da cuando existe alguna de las siguientes condiciones: (i) pares de raíces reales con signos opuestos, (ii) pares de raíces imaginarias puras y (iii) pares de raíces complejas conjugadas simétricas con respecto al eje imaginario.

Por tanto, en el mejor de los casos se trata de un sistema críticamente estable.

**Solución.** El procedimiento para resolver este caso es el siguiente:

#### Procedimiento 11.3.1

**Paso 1.** Se define una ecuación auxiliar, la que se forma con el renglón que está justo por encima del renglón de ceros.

**Paso 2.** Luego, se toma la derivada de la ecuación auxiliar con respecto a  $s$ .

**Paso 3.** Se reemplaza el renglón de ceros con los coeficientes de la ecuación resultante obtenida al tomar la derivada de la ecuación auxiliar.



**Paso 4.** Se continúa con la prueba de Routh en forma usual con la nueva tabulación.

**Ejemplo 11.6** Considere un sistema cuya ecuación característica de lazo cerrado es  $D(s) = s^3 + s^2 + 2s + 2$ . Aplique la prueba de Routh con el objeto de determinar la estabilidad del sistema.

Siguiendo el procedimiento enunciado,

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 2 \\ s^1 & 0 & 0 \\ s^0 & \dots & \dots \end{array}$$

Luego la ecuación auxiliar resulta,  $A(s) = s^2 + 2$  y su derivada es,  $dA(s)/ds = 2s$ . Por tanto completando la matriz anterior con la derivada de la ecuación auxiliar se tiene que,

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 2 \\ s^1 & 2 & 0 \\ s^0 & 2 & 0 \end{array}$$

De acuerdo con el criterio de Routh todos los elementos de la primer columna de la matriz son del mismo signo y por tanto el sistema es estable. En realidad se trata de un sistema críticamente estable ya que las raíces del polinomio de este ejemplo son  $s_{1-2} = \pm j\sqrt{2}$  y  $s_3 = -1$ . ■

## 11.4. Análisis de Estabilidad en Base a Respuestas en Frecuencia

Las respuestas en frecuencias pueden ser usadas tanto para estudiar la estabilidad de los sistemas LTI como para realizar diseño de sistemas de control lineal en lazo cerrado.

En esta sección primeramente se presentará los criterios de estabilidad basados en los diagramas de Bode y Nyquist y posteriormente se presentará dos medidas de cuan cerca o cuan lejos un sistema lineal puede estar de la inestabilidad, conocidas como márgenes de ganancia y fase.

Antes de introducirnos en el tema se va a presentar una serie de definiciones que serán necesarias posteriormente.

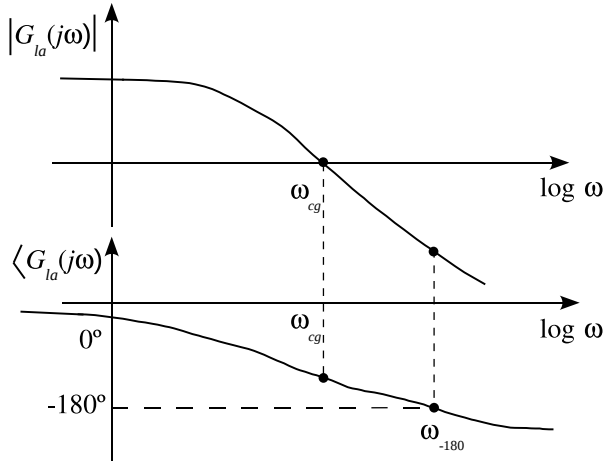


Figura 11.3: Diagramas de Bode de la función de transferencia de LA ( $G_{la}(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$ ).

**Definición 11.4.1 — Frecuencia de Cruce de Ganancia,  $\omega_{cg}$ .** Sea  $G_{la}(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$  la función de transferencia de lazo abierto (LA), luego, la frecuencia a la cual  $|G_{la}(j\omega)| = 1$  por primera vez es designada como frecuencia de cruce de ganancia ( $\omega_{cg}$ ).

Esto es, para  $\omega = \omega_c$  luego,  $|G_{la}(j\omega_{cg})| = 1$ .

**Definición 11.4.2 — Frecuencia de Cruce de Fase,  $\omega_{-180}$ .** Sea  $G_{la}(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$  la función de transferencia a LA. Luego, la frecuencia a la cual la fase  $\langle L(j\omega) \rangle$  cruza  $-180^\circ$  por primera vez es designada como frecuencia de cruce de fase ( $\omega_{-180}$ ).

En otras palabras para  $\omega = \omega_{-180}$  luego,  $\langle G_{la}(j\omega) \rangle = -180^\circ$ . Estos conceptos se resumen en la Fig. 11.3.

**Definición 11.4.3 — Frecuencia Última,  $\omega_u$ .** Se define la frecuencia última como la frecuencia a la cual se cumple que  $|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| = 1$  y  $\langle G(j\omega_u)H(j\omega_u) \rangle = -180^\circ$  cuando la planta  $G(s)$  realimentada con un controlador proporcional.

**Definición 11.4.4 — Ganancia Última,  $K_{ru}$ .** Se define la ganancia última como la ganancia del controlador proporcional a la cual se cumple que  $|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| = 1$  y  $\langle G(j\omega_u)H(j\omega_u) \rangle = -180^\circ$ .

**Definición 11.4.5 — Frecuencia de Crítica,  $\omega_{crit}$ .** Se define la frecuencia de cruce de ganancia como la frecuencia a la cual se cumple que  $|G(j\omega_{crit})H(j\omega_{crit})| = 1$  y  $\langle G(j\omega_{crit})H(j\omega_{crit}) \rangle = -180^\circ$  cuando la planta  $G(s)$  realimentada con un controlador lineal distinto al proporcional.

**Definición 11.4.6 — Ganancia Crítica,  $K_{crit}$ .** Se define la ganancia del controlador lineal a la cual se cumple que  $|G(j\omega_{crit})H(j\omega_{crit})| = 1$  y  $\langle G(j\omega_{crit})K(j\omega_{crit}) \rangle = -180^\circ$  cuando la planta  $G(s)$  realimentada con un controlador lineal distinto al proporcional.

Note que,

1.  $\omega_{crit} = \omega_u$  si el controlador es un proporcional,
2. si  $C(s)$  es un PI o PID por lo general  $\omega_{crit} < \omega_u$ , y esto se debe generalmente a la presencia del modo integral.

### 11.4.1. Criterio de estabilidad de Bode

Una forma de enunciar el criterio de estabilidad de Bode es la que se expresa a continuación.

**Teorema 11.4.1 — Condición de Estabilidad de Bode.** Un sistema en lazo cerrado es *estable* si la respuesta en frecuencia de la función de transferencia de lazo abierto  $G_{la}(s) = G(s)H(s)$  tiene una relación de amplitud menor o igual que uno a la frecuencia de cruce de fase ( $\omega_{-180^\circ}$ ). De otro modo, el sistema en lazo cerrado es *inestable*.

**Demostración** Considere el diagrama de Bode de la Fig. 11.4 donde se estudian tres posibles casos (enumerados con 1, 2 y 3) cuyas relaciones de amplitud son diferentes a pesar de tener igual fase.

Supongamos que los tres sistemas lineales aquí considerados se alimentan con un señal de entrada senoidal  $u(t) = A \sin(\omega^*t)$ , donde  $\omega^* = \omega_{-180}$ .

Basándose en lo expresado en el Capítulo 10, la respuesta estacionaria de lazo abierto de un sistema LTI viene dada por la Ec. (10.7) y donde a la frecuencia particular de  $\omega^* = \omega_{-180}$  la fase resulta ser  $\phi = -180^\circ$ . Por tanto se puede escribir que,

$$\begin{aligned} y_{estac}(t) &= A|G(j\omega_{-180})| \sin(\omega_{-180}t - 180^\circ). \\ &= -A|G(j\omega_{-180})| \sin(\omega_{-180}t) . \end{aligned}$$

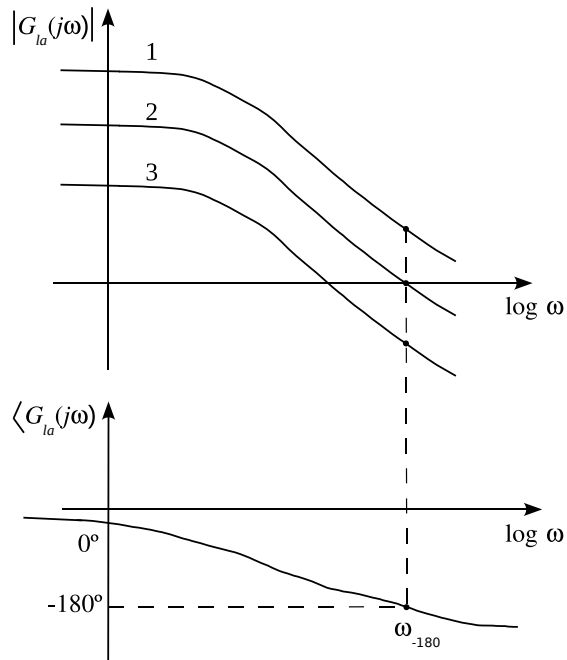


Figura 11.4: Diagramas de Bode para tres relaciones de amplitud diferentes e igual fase.

Ahora, tengamos en cuenta que para los tres casos considerados, la relación de amplitud ( $RA = |G(j\omega_{-180})|$ ) a la frecuencia particular de  $\omega_{-180}$ , puede ser mayor, igual o menor que uno. Si por tanto, la señal  $y_{estac}(t)$  comenzase a ser realimentada mediante un feedback unitario, y asumimos que no ingresa ninguna señal externa durante este proceso, se tienen tres posibles situaciones. A saber,

1. si  $RA = 1$  la señal de salida del sistema realimentado mantiene constante la amplitud de salida de la señal senoidal y por tanto el sistema en lazo cerrado será críticamente estable.
2. si  $RA > 1$  la señal de salida del sistema realimentado se irá incrementando con el paso del tiempo y por tanto el sistema en lazo cerrado será inestable.
3. si  $RA < 1$  la señal de salida del sistema realimentado se irá decreciendo con el transcurso del tiempo y por tanto el sistema en lazo cerrado será estable.

□

Un enunciado alternativo al Teorema 11.4.1 es hacerlo en términos de inestabilidad. Esto es:

**Teorema 11.4.2 — Condición de Inestabilidad de Bode.** Un sistema en lazo cerrado es *inestable* si la respuesta en frecuencia de la función de transferencia de lazo abierto  $G_{la}(s) = G(s)H(s)$  tiene una relación de amplitud mayor que uno a la frecuencia de cruce de fase ( $\omega_{-180^\circ}$ ).

**R** ■ **Remarca 11.1 — Condición de Estabilidad Asintótica de Bode.** Un sistema LTI es *estable* en LC  $\iff |G_{la}(j\omega)| < 1$  es menor que uno a la frecuencia de cruce de fase  $\omega_{-180}$ .

Por tanto, como consecuencia del análisis de la demostración del Teorema 11.4.1 y de los enunciados anteriores se puede expresar la siguiente definición.

**R** ■ **Remarca 11.2 — Condición de Estabilidad Crítica.** Un sistema LTI es *críticamente estable* en LC  $\iff |G_{la}(j\omega_{-180})| = 1$  a la frecuencia de cruce de fase.

**Ejemplo 11.7** Considere el sistema de control de temperatura de la corriente de salida de un intercambiador de calor según Fig. 11.5.

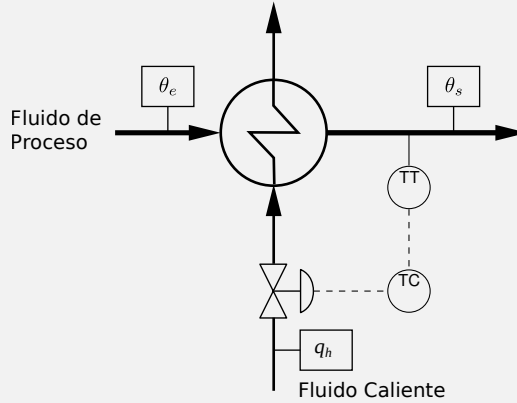


Figura 11.5

Un proceso de identificación arroja como resultado que la función de transferencia del intercambiador de calor es,

$$\frac{\theta_s}{Q_h} = G_p(s) = \frac{1}{(s+1)(2s+1)}$$

El controlador implementado es un PI cuyo valor de tiempo de acción integral  $T_I = 0,5$ . Además, se puede considerar que los elementos de control final y de medición tienen ganancia unitaria y dinámica despreciable.

Calcule analíticamente los  $\omega_{-180}$  y  $K_{r_{crit}}$ .

Teniendo en cuenta los datos del problema, el sistema de control se resume como se indica en la Fig. 11.6

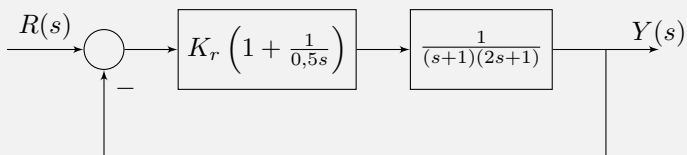


Figura 11.6: Sistema control del intercambiador de la Fig..

La función de transferencia de la cadena de lazo abierto ( $G_{la}(s) =$

$G_p(s)C(s)$  resulta,

$$G_p(s)C(s) = \frac{2K_r(0,5s + 1)}{s(s + 1)(2s + 1)}$$

Basándose en esta ecuación y teniendo en cuenta la Tabla 10.1 el módulo y la fase resultan,

$$|G_p(j\omega)C(j\omega)| = 2K_r \frac{1}{\omega} \sqrt{0,25\omega^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{4\omega^2 + 1}}$$

$$\langle G_p(j\omega)C(j\omega) \rangle = 0 - \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(0,5\omega) + \tan^{-1}(-\omega) + \tan^{-1}(-2\omega)$$

Teniendo en cuenta el Teorema 11.4.1 y en la Rem. 11.2, la condición de estabilidad crítica se alcanza para el cumplimiento simultáneo de  $|G_p(j\omega_{-180})C(j\omega_{-180})| = 1$  y  $\langle G_p(j\omega_{-180})C(j\omega_{-180}) \rangle = -\pi$  luego, basándose en la ecuación de la fase de  $G_p(j\omega)C(j\omega)$  se tiene que,

$$-\pi = -\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(0,5\omega_{-180}) + \tan^{-1}(-\omega_{-180}) + \tan^{-1}(-2\omega_{-180})$$

por lo que,

$$\pi - \frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(0,5\omega_{-180}) + \tan^{-1}(-\omega_{-180}) + \tan^{-1}(-2\omega_{-180}) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación se tiene que,  $\omega_{-180} = \sqrt{2}$ .

Por último, basándose en la ecuación de módulo para este valor de  $\omega_{-180}$  se puede escribir que,

$$\begin{aligned} |G_p(j\omega_{-180})C(j\omega_{-180})| &= \frac{2K_{r_{crit}}}{\omega_{-180}} \frac{\sqrt{0,25\omega_{-180}^2 + 1}}{\sqrt{\omega_{-180}^2 + 1} \sqrt{4\omega_{-180}^2 + 1}} \\ &= \frac{2K_{r_{crit}}}{\sqrt{2}} \sqrt{0,25 \cdot 2 + 1} \frac{1}{\sqrt{2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 2 + 1}} \\ &= \frac{2K_{r_{crit}}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{K_{r_{crit}}}{3} = 1 \end{aligned}$$

y por tanto,  $K_{r_{crit}} = 3$ . ■

## 11.4.2. Criterio de estabilidad de Nyquist

Primeramente consideremos un sistema cuya función de transferencia de lazo cerrado tiene un denominador o ecuación característica de la forma,

$$D(s) = 1 + G(s)H(s). \quad (11.7)$$

Los polos de lazo cerrado son aquellos valores de  $s$  tales que,

$$1 + G(s)H(s) = 0. \quad (11.8)$$

El criterio de estabilidad de Nyquist es un método gráfico para la determinación de la estabilidad de un sistema en lazo cerrado, que se basa en el estudio de las propiedades de los diagramas polares de  $G_{la}(s) = G(s)H(s)$ .

Antes de iniciar el estudio debemos notar que, i) los ceros de  $1 + G(s)H(s)$  son los polos de lazo cerrado y son las raíces de la ecuación característica y ii) los polos de  $1 + G(s)H(s)$  son los polos de  $G_{la}(s)$ .

En este punto también debemos tener muy presente el Teor. 11.2.1, esto es para que el sistema sea asintóticamente estable, las raíces de la ecuación característica deben situarse en el semiplano complejo izquierdo.

El teorema de estabilidad de Nyquist se basa en aplicar el principio del argumento o teorema de transformación a la función de transferencia de lazo abierto ( $G_{la}(s)$ ). Dicho principio en la teoría de variable compleja se enuncia heurísticamente como sigue,

*Sea  $D(s)$  una función racional univaluada, analítica en todas las partes de una región específica del plano  $s$ , excepto en un número finito de puntos. Por cada punto en el que  $D(s)$  es analítica en la región especificada del plano  $s$ , existe un punto correspondiente en el plano  $D$ .*

Así si definimos una trayectoria arbitraria continua cerrada  $\Gamma_s$  en el plano  $s$  como se muestra en la Fig. 11.7 y  $D(s)$  es analítica en todos los puntos de la región especificada por  $\Gamma_s$ , entonces la curva  $\Gamma_D$  correspondiente a  $D(s)$  en el plano  $D$  es también una curva cerrada como se muestra en la Fig. 11.7.

Notar que,

1. la dirección de  $\Gamma_s$  puede ser en sentido horario o antihorario ya que la misma es arbitraria,
2.  $\Gamma_D$  puede o no encerrar al origen y,
3. lo hecho hasta aquí es una simple transformación.

Ahora, habiendo comprendido esta introducción al principio del argumento, estamos en condiciones de enunciarlo más formalmente.

**Teorema 11.4.3 — Principio del Argumento.** Sea  $D(s)$  una función racional univaluada, que es analítica en una región específica del plano  $s$ , excepto en un número finito de puntos y sea  $\Gamma_s$  una trayectoria arbitraria continua



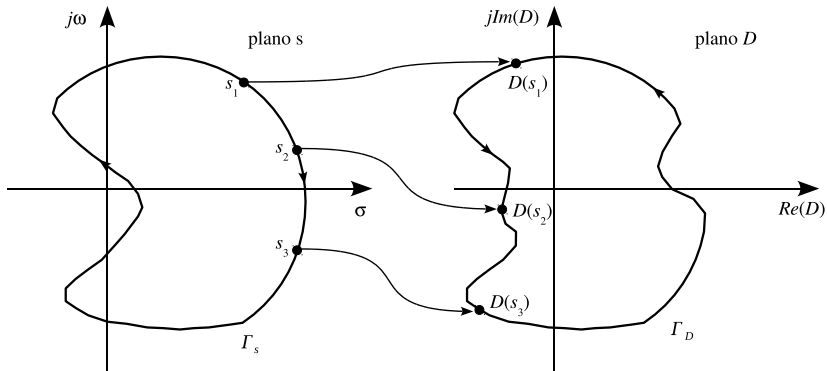


Figura 11.7: Trayectoria arbitraria cerrada  $\Gamma_s$  en el plano  $s$  y su correspondiente transformación al plano  $D$ .

cerrada de manera tal que  $D(s)$  es analítica en todos sus puntos. El lugar geométrico correspondiente a  $D(s)$  trazado en el plano  $D$  circundará al origen tantas veces como la diferencia entre el número de ceros y números de polos de  $D(s)$  estén circundados por el lugar geométrico de  $\Gamma_s$  en el plano  $s$ .

En una forma simplificada se puede decir que,

$$N = Z - P \quad (11.9)$$

siendo,

- $N$ : el número de vueltas alrededor del origen que da el lugar geométrico  $\Gamma_D$  en el plano  $D$ .
- $Z$ : el número de ceros de  $D(s)$  rodeados por el lugar geométrico  $\Gamma_D$  en el plano  $s$ .
- $P$ : el número de polos de  $D(s)$  rodeados por el lugar geométrico  $\Gamma_s$  en el plano  $s$ .

En general, cuando hay  $N = Z - P$  (ceros menos polos) circundados por el lugar geométrico  $\Gamma_s$  en el plano  $s$  en una dirección preestablecida, el ángulo neto recorrido por el lugar geométrico  $\Gamma_D$  en el plano  $D$  a medida que se recorre el lugar geométrico  $\Gamma_s$  en el plano  $s$  es igual a

$$2\pi(Z - P) = 2\pi N \quad (11.10)$$

Por tanto, de acuerdo con el signo de  $N$  se gira en favor o en contra de la dirección preestablecida.

Ahora nos enfrentamos al problema de determinar si la función  $D(s) =$

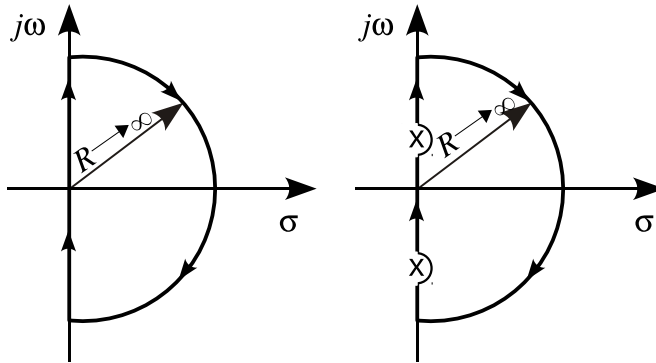


Figura 11.8: Trayectorias o Contornos  $\mathcal{D}$  de Nyquist

$1 + G(s)H(s)$  tiene o no ceros en el semiplano complejo derecho. Habiendo comprendido el principio del argumento entonces se hace necesario definir una trayectoria cerrada que nos posibilite dicho estudio.

Por tanto, dado que desde el punto de vista de la estabilidad no queremos ceros en el semiplano complejo derecho, resulta lógico escoger un contorno que incluya a todo el semiplano. Se introduce entonces la siguiente definición:

**Definición 11.4.7 — Trayectoria o Contorno  $\mathcal{D}$  de Nyquist.** El contorno  $\mathcal{D}$  de Nyquist es el lugar geométrico  $\Gamma_s$  escogido en el sentido horario de las agujas del reloj, que circunda a la totalidad del semiplano complejo derecho del plano  $s$ .

Es de aclarar que el sentido que se escoja a la trayectoria de Nyquist es totalmente arbitrario y depende de cada autor que estudia el tema ([46], [66], entre otros). La Fig. 11.8 muestra el contorno  $\mathcal{D}$  de Nyquist de acuerdo con el criterio aquí escogido. Note que si la ecuación característica  $D(s)$  presenta polos en el eje imaginario, dado que allí dicha función perdería analiticidad entonces, la trayectoria de Nyquist rodea a dichos puntos con un radio infinitesimal como se muestra en dicha figura.

En este punto ya es claro que el criterio de estabilidad de Nyquist es la aplicación directa del principio del argumento cuando la trayectoria cerrada escogida es el contorno  $\mathcal{D}$  de Nyquist. Ahora bien, resulta poco práctico aplicar el criterio de Nyquist a  $D(s)$  ya que implicaría calcular de antemano los polos y ceros de la ecuación característica y por tanto, ya sabríamos si el sistema es estable o no, lo que haría innecesario aplicar el criterio. Por tanto, dado que los datos que disponemos para nuestro estudio son los polos y ceros de  $G_{la}(s) = G(s)H(s)$  entonces, se propone estudiar el número de circundamientos alrededor del punto  $(-1; j0)$ .

Antes de presentar el criterio de estabilidad de Nyquist introducimos la siguiente definición.

**Definición 11.4.8 — Traza de Nyquist.** Se llama traza de Nyquist de  $G_{la}(s)$  al lugar geométrico de  $G_{la}(s) = G(s)H(s)$  cuando  $s$  toma valores a lo largo de la trayectoria de Nyquist.

Así, para que el sistema de lazo cerrado sea estable debemos pedir que  $Z = 0$  o bien,  $N = -P$  cuando la traza de Nyquist es construida con  $G_{la}(s)$  y se inspecciona el punto crítico  $(-1; j0)$ . De manera que, el criterio de estabilidad de Nyquist se puede enunciar como sigue:

**Teorema 11.4.4 — Criterio de Estabilidad de Nyquist.** Para que un sistema en lazo cerrado sea estable, la traza de Nyquist de  $G_{la}(s)$  debe circular al punto crítico  $(-1; j0)$  tantas veces como el número de polos de  $G_{la}(s)$  existan en el semiplano complejo derecho, y estas vueltas, si se presentan deben darse en sentido contrario al escogido para el contorno D de Nyquist.

Notar que,

1. Un gran número de sistemas en la ingeniería de procesos son *autorregulables* a lazo abierto (esto es, estables a lazo abierto), entonces de acuerdo con la Ec. 11.9  $P = 0$  y por tanto al inspeccionar el punto crítico  $(-1; j0)$  con  $G_{la}(s)$  debemos pedir que  $N = 0$ , ya que se debe cumplir que  $Z = 0$  para que el sistema en lazo cerrado sea estable. Por tanto, basándose en las condiciones pedidas para el Teor. 11.4.4 podemos enunciar el criterio de estabilidad de Nyquist para estos casos particulares.

■ **Corolario 11.1 — Crit. de Estab. de Nyquist para Sist. Autorreg..** Si la función de transferencia de lazo abierto no tiene polos inestables, para que el sistema en lazo cerrado sea estable, la traza de Nyquist de  $G_{la}(s)$  **no** debe circular al punto crítico  $(-1; j0)$ .

2.  $G_{la}(j\omega)$  presentará raíces complejas conjugadas para  $-\infty < \omega < \infty$ , entonces basta con recorrer el espectro de frecuencias desde  $0 \leq \omega < \infty$ , ya que la otra parte resulta simétrica respecto al eje real (ver Fig. 11.9).

Finalmente, en base a lo anterior se puede enunciar la siguiente regla de mano.

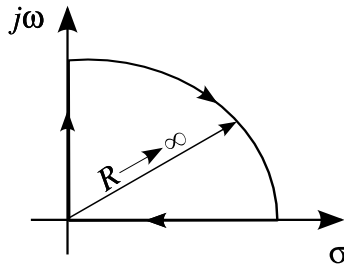


Figura 11.9: Trayectorias o contornos  $D$  simplificado de Nyquist.

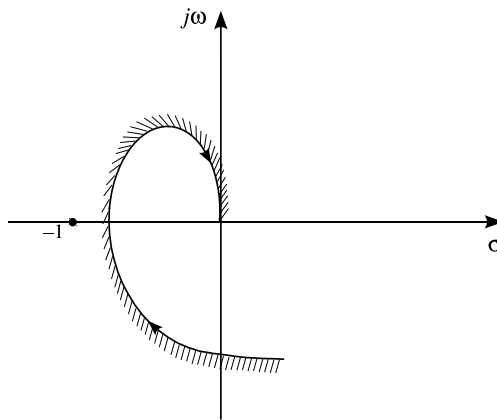


Figura 11.10: Regla práctica para el criterio de estabilidad de Nyquist para sistemas autorregulables.

■ **Regla 11.4.1 — Regla Práctica para Sistemas Autorregulables.** Si  $G_{la}(s)$  no tiene polos inestables, para que el sistema en lazo cerrado sea estable entonces la traza de Nyquist debe dejar al punto crítico  $(-1; j0)$  a la izquierda del camino recorrido cuando el contorno  $\mathcal{D}$  de Nyquist es recorrido en el sentido de las agujas del reloj. (ver Fig. 11.10)

### 11.4.3. Estabilidad relativa. Márgenes de ganancia y fase

Considere los diagramas de Bode y Nyquist de la Fig. 11.11. En este punto, la pregunta inmediata que surge es,

*¿Cuán lejos o cuán cerca el sistema realimentado se encuentra de la inestabilidad?*

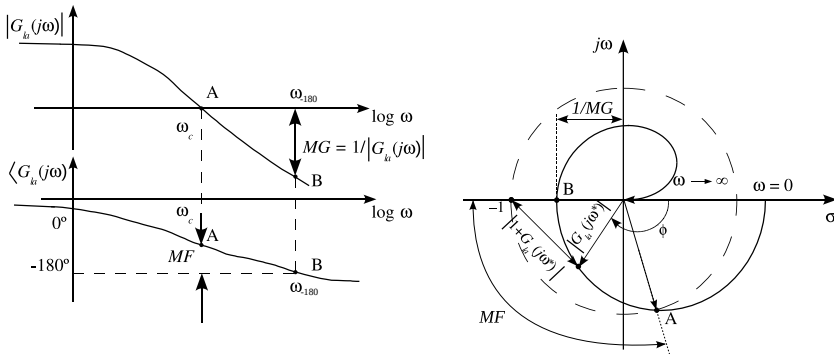


Figura 11.11: Ejemplo de los diagramas de Bode y Nyquist de un sistema lineal.

En otras palabras, necesitamos *medir* para tener una idea de la *distancia* del sistema a ese límite de estabilidad (que es la estabilidad crítica<sup>3</sup>).

Por lo tanto, al ajustar un controlador, no sólo nos interesa que este sea estable sino también que tenga una adecuada *estabilidad relativa*. Los diagramas de Bode y Nyquist nos brindan esa información que estamos necesitando. Para ello, supongamos que la representación de los diagramas de Bode y Nyquist son los que se muestran en la Fig. 11.11.

Se observa en el diagrama polar de Nyquist que la cercanía del diagrama de  $G_{la}(j\omega)$  al punto crítico  $(-1; j0)$  se puede utilizar como una medida del *margen de estabilidad*. Esto es, la cercanía de la gráfica de  $G_{la}(j\omega)$  al punto  $(-1; j0)$  indica que tan estable o inestable es un sistema realimentado, y dicha *proximidad* se la puede expresar en términos de ganancia o de fase.

**Margen de ganancia**

Como se indicó anteriormente una forma de medir la estabilidad relativa es el margen de ganancia (*MG*) que se define a continuación.

**Definición 11.4.9 — Margen de Ganancia.** El *MG* es el recíproco de la magnitud de  $|G_{la}(j\omega)|$  a la frecuencia de cruce de fase ( $\omega_{-180}$ ). Esto es,

$$MG: = \frac{1}{|G_{la}(j\omega_{-180})|} \cdot \tag{11.11}$$

Esta idea es fácilmente interpretable de la observación de los diagramas de Bode y Nyquist de la Fig. 11.11. Basándose en esto último es posible dar una

<sup>3</sup>En esta sección así como en distintos tramos de este libro se va a expresar la idea de *límite de estabilidad* haciendo referencia a la estabilidad crítica.

interpretación física al  $MG$  y redefinirlo cuidadosamente como se indica a continuación.

**Definición 11.4.10 — Margen de Ganancia.** El  $MG$  es la magnitud de la ganancia cuyo aumento puede utilizarse en el lazo de control sin que el sistema de lazo cerrado llegue a la inestabilidad. Por tanto,

$$MG := \frac{K_{r \text{ crit}}}{K_{r \text{ op}}} \quad (11.12)$$

y donde  $K_{r \text{ crit}}$  es la ganancia del modo proporcional necesaria para llevar el sistema a la estabilidad crítica y  $K_{r \text{ op}}$  es la ganancia de operación del modo proporcional.

Especial cuidado se debe tener con la Def. 11.4.10 cuando se aplica a los sistemas de no mínima fase, ya que los sistemas que tienen ceros a parte real positiva en algunos casos puede hacer fallar esta forma de medir la estabilidad relativa. Mientras que, los sistemas que tienen tiempos muertos y no tienen ceros a parte real positiva bien podrían cumplir con dicha definición, siempre y cuando las respuestas en frecuencia se construyan en forma exacta, en lugar de utilizar la aproximación de Padé.

### Margen de fase

La otra forma de medir la estabilidad relativa es el margen de fase ( $MF$ ) que se define a continuación.

**Definición 11.4.11 — Margen de Fase.** El  $MF$  es la cantidad de retraso de fase que se requiere añadir a la frecuencia de cruce de ganancia ( $\omega_c$ ) para llevar el sistema a la estabilidad crítica. Esto es,

$$MF = 180^\circ + \langle G_{la}(j\omega_c) \rangle . \quad (11.13)$$

La idea del  $MF$  es fácilmente interpretable de la observación de los diagramas de Bode y Nyquist de la Fig. 11.11.

Notar que, ni el  $MG$  ni el  $MF$  por sí sólo no son lo suficientemente indicativos de la estabilidad relativa. Usualmente para determinar la estabilidad relativa se deben estudiar ambas medidas juntas. Esto último resulta fácil de comprender con el ejemplo de la Fig. 11.12.

Claramente se observa que en el ejemplo de la Fig. 11.12a que el sistema en lazo cerrado tiene un buen  $MG$  a pesar de tener un muy mal  $MF$ , y por el contrario, el ejemplo de la Fig. 11.12b muestra un sistema de control en lazo

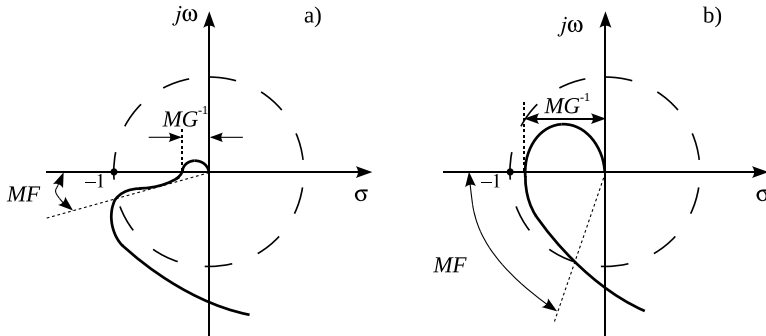


Figura 11.12: a) Diagrama de Nyquist de un sistema lineal con buen  $MG$  y mal  $MF$ . b) Diagrama de Nyquist de un sistema lineal con buen  $MF$  y mal  $MG$ .

cerrado tiene un buen  $MF$  pero un pobre  $MG$ .

A raíz de esta última observación, para la sintonización de un controlador, resulta conveniente definir rangos para los márgenes de ganancia y fase. En la práctica, para la sintonización de los parámetros de controladores lineales, como el P, PI, PD o PID, se acepta como buen diseño si se cumple que,

1.  $MG = 2$  o bien,
2.  $30^\circ \leq MF \leq 60^\circ$ , y
3. preferentemente es mejor si se satisfacen ambas exigencias simultáneamente.

Es de destacar que no hay una justificación teórica rigurosa de este pedido, sino que se trata de una regla heurística.

Note que,

- El  $MG$  da cierta robustez a la incertidumbre en ganancia en el diseño de los controladores. Esto es, por ejemplo un  $MG = 2$  implica que podemos variar en un 100 % la ganancia del modo proporcional antes de llevar el sistema a la estabilidad crítica. Por tanto, la incertidumbre o desconocimiento de ciertas ganancias del sistema podrían ser cubiertas con esta adopción.
- El  $MF$  da cierta robustez, en el diseño de controladores, a la incertidumbre en fase que puede aportar el desconocimiento de las constantes de tiempo y más precisamente el tiempo muerto.

**Ejemplo 11.8** Considere el sistema de control de temperatura del Ejem. 11.7; adopte el valor de  $K_r$  tal que el  $MG = 2$ . Luego calcule el  $MF$  alcanzado con dicho valor de  $K_{r_{op}}$ .

De acuerdo con la Ec. (11.12), la ganancia de operación del modo proporcional resulta,

$$K_{r_{op}} = \frac{K_{r_{crit}}}{MG} = \frac{3}{2}$$

Luego, basándose en las ecuaciones de módulo y fase del Ejem. 11.7, para el valor de  $K_r$  adoptado, las mismas resultan,

$$|G_p(j\omega)C(j\omega)| = 2 \frac{3}{2} \frac{1}{\omega} \sqrt{0,25\omega^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{4\omega^2 + 1}}$$

$$\langle G_p(j\omega)C(j\omega) \rangle = -\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(0,5\omega) + \tan^{-1}(-\omega) + \tan^{-1}(-2\omega)$$

### Cálculo del margen de fase

La condición para el cálculo del margen de fase es  $|G_p(j\omega_{cg})C(j\omega_{cg})| = 1$ . Así, basándose en la ecuación de módulo,

$$1 = \frac{3\sqrt{0,25\omega_{cg}^2 + 1}}{\omega_{cg}\sqrt{\omega_{cg}^2 + 1}\sqrt{4\omega_{cg}^2 + 1}}$$

Luego, elevando al cuadrado ambos miembros y despejando se llega a,

$$16\omega^6 + 20\omega^4 - 5\omega^2 - 36 = 0$$

Esta ecuación tiene como única solución real positiva a  $\omega_{cg} = 1,02835$ .

Ahora, basándose en la ecuación de la fase para el valor de  $\omega_{cg}$  calculado,

$$\begin{aligned} \langle G_p(j\omega_{cg})C(j\omega_{cg}) \rangle &= -\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(0,5\omega_{cg}) + \tan^{-1}(-\omega_{cg}) \\ &\quad + \tan^{-1}(-2\omega_{cg}) \\ &= -3,0135 \text{ rad/s} = -3,0135 \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad/s}} = -172^\circ,66 \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la Ec. (11.13),

$$MF = 180^\circ - 172^\circ,66 = 7^\circ,34$$

Observe que si bien el  $MG$  adoptado responde a las recomendaciones dadas, el  $MF$  resultante está lejos de ellas, por lo que se puede esperar una respuesta dinámica muy oscilatoria y con un importante tiempo de establecimiento. ■



### Comandos de Octave relacionados al tema

Las funciones de Octave relacionadas con este tema son las que se enumeran a continuación.

Comando	
<code>[GAMMA, PHI, W_GAMMA, W_PHI]=margin (SYS, TOL)</code>	<p>computa los márgenes de ganancia y fase de un sistema.            SYS el modelo LTI del sistema.            TOL tolerancia para el cálculo (puede ser omitida).            GAMMA el margen de ganancia en ganancia y no en dB.            PHI el margen de fase en grados.            W_GAMMA es la frecuencia de cruce de fase (<math>\omega_{-180}</math>).            W_PHI es la frecuencia de cruce de ganancia (<math>\omega_{cg}</math>).</p>

Asimismo, se sugiere revisar los comandos de Octave que se indican en el Cap. 10 pág. 394.

**Ejemplo 11.9** Resuelva el Ejem. 11.8 utilizando los comandos de Octave.  
 A continuación se lista el programa de Octave.

#### Algoritmo 11.1: Código de Octave del Ejem. 11.9.

```

1 % planta
2 s=tf('s');
3 Gps=1/((s+1)*(2*s+1));
4
5 % controlador
6 Kr=3/2; TI=0.5;
7 Cs=Kr*(1+1/(TI*s));
8
9 % margen de ganancia y fase
10 [MG,MF,w180,wcg]=margin(Gps*Cs)

```

Luego, Octave informa en la ventana de comandos,

```

>> ejemMGMF

MG = 2.0000
MF = 7.3402
w180 = 1.4142
wcg = 1.0283

```

donde `ejemMGMF` es el nombre del archivo `.m` que tiene los comandos escritos arriba.

Note que si en la ventana de comandos se escribe,

```

>> margin(Gps*Cs)

```

se obtiene la gráfica de la Fig. 11.13.

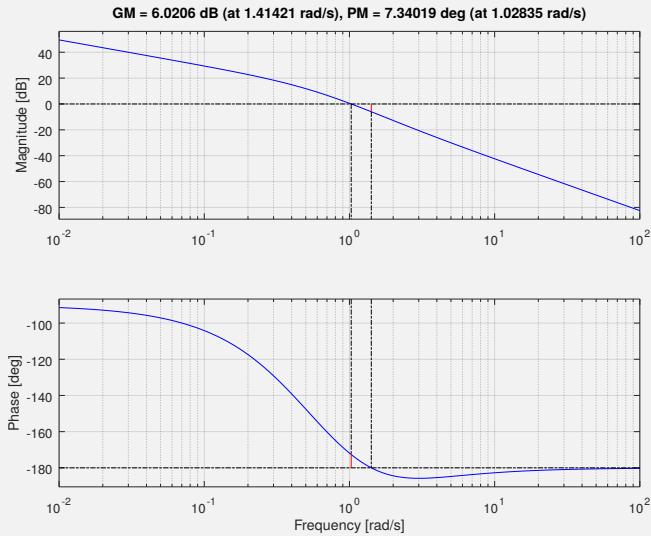


Figura 11.13: Figura de Octave con el comando `margin` para este ejemplo. Observe que tanto la relación de amplitud como el  $MG$  son informados en dB.

## 11.5. Conclusiones

En este capítulo se presentó un análisis de estabilidad de sistemas LTI y tres criterios que permiten estudiarla como son, los de Routh, Bode y Nyquist.

Mediante el uso de dichos criterios, el ingeniero se puede dar una idea de la estabilidad relativa a través de los márgenes de ganancia y fase. En este último aspecto se puede concluir que,

1. los  $MG$  y  $MF$  son una medida de la proximidad de un sistema realimentado a la estabilidad crítica basada en las respuestas en frecuencia.
2. Como se destacó antes, usualmente se suele pedir que el sistema de control cumpla con un  $MG = 2$  o bien  $30^\circ \leq MF \leq 60^\circ$ , y preferentemente es mejor si se satisfacen ambas exigencias simultáneamente.
3. Ni el  $MG$  ni el  $MF$  son aconsejables de utilizar como medidas aisladas de la estabilidad relativa.

## 11.6. Pensemos

1. Considere un sistema cuyas funciones de transferencia a lazo abierto para cambios en carga y consigna son asintóticamente estables.  
¿Si se sintoniza un controlador para que el sistema realimentado sea estable a cambios en consigna, resulta también estable para cambios en carga?  
 **SI**    **NO**
2. ¿Cómo es la estabilidad de un sistema que posee dos raíces complejas conjugadas con parte real negativa, otras dos reales negativas dominantes y una única con parte real positiva muy lejos del eje imaginario?  
 Estable.    Estable hasta una cierta frecuencia.  
 Inestable.    Ninguna de las anteriores.
3. ¿En un sistema realimentado con controlador proporcional la frecuencia de cruce de ganancia ( $\omega_{cg}$ ) y la frecuencia de cruce de fase ( $\omega_{-180}$ ) son iguales a la frecuencia última ( $\omega_u$ ) cuando  $K_r = K_{ru}$ ?    **SI**    **NO**
4. Un sistema dinámico es considerado BIBO estable, *si para toda entrada acotada produce una salida acotada, independientemente de su condición inicial.*  
¿Basándose en la definición anterior, un sistema con todos sus polos en el semiplano complejo izquierdo y que además tiene un polo al origen es BIBO estable?    **SI**    **NO**
5. El margen de ganancia constituye un margen de seguridad a la incertidumbre en  
 ganancia,  
 polos y ceros,  
 tiempo muerto,  
mientras que el margen de fase constituye un margen de seguridad a la incertidumbre en  
 ganancia,  
 polos y ceros,  
 tiempo muerto.
6. Considere un sistema realimentado cuya función de transferencia de la cadena de lazo abierto es  $G(s)H(s) = 0,2/(s^3 + s^2 + s)$  se encuentra operando con un lazo de control con un regulador proporcional con  $K_r = 0,2$ , realimentación unitaria y negativa. El transductor y el elemento de control final tienen ganancia unitaria y dinámica despreciable. El sistema de control posee un margen de ganancia de valor:  
  $MG = 2$ .     $MG = 10$ .  
  $MG = 5$ .    Ninguna de las anteriores.
7. Considere un sistema realimentado que utiliza un controlador proporcional y donde la función de transferencia de la cadena de lazo abierto es,  $G(s)H(s) = \frac{48K_r}{(s+2)(s+4)(s+6)}$ . El valor de la ganancia última es,  
  $K_{ru} = 1$     No posee  $K_{ru}$ .  
  $K_{ru} = 2$     Ninguna de las anteriores.  
  $K_{ru} = 10$

8. Cuando se dice que el tiempo muerto aporta inestabilidad al sistema, se refiere a que el mismo aporta,
- Polos y ceros.
  - Margen de fase negativo.
  - Margen de fase y ganancia.
  - Ninguna de las anteriores.
  - Fase negativa.
9. Si se tiene un sistema de tercer orden estable cuya ganancia estática  $K_p > 0$  y las tres constantes de tiempo  $T_1, T_2$  y  $T_3 \in \mathbb{R}^+$ . Dicho sistema realimentado con un controlador proporcional de ganancia  $K_r$ , alcanza un margen de ganancia 2 para  $K_r = [(T_1 + T_2 + T_3)(1/T_1 + 1/T_2 + 1/T_3) - 1] / (4K_p)$ .  **V**  **F**
10. Un sistema de primer orden de la forma  $G(s) = \frac{K}{(Ts+1)}$  (con  $K$  y  $T$  positivos) es realimentado con un controlador proporcional, el elemento de medición y el ECF son lineales y sin dinámica. Dependiendo de la relación entre  $K$  y  $T$  el sistema posee  $MF \in [90^\circ \ 180^\circ]$ .  **SI**  **NO**
11. El margen de ganancia de un sistema de segundo orden con todos sus polos en  $\mathbb{C}^-$  realimentado con un controlador proporcional es infinito, dado que las ramas del lugar de las raíces para  $K_r \geq 0$  no cruzan el eje imaginario.  **V**  **F**
12. Dado un sistema de control cuyo  $G(s)H(s) = \frac{K_r}{T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1}$  con  $T$  y  $\zeta > 0$  puede presentar un margen de ganancia (MG):
- $MG > 1$ .
  - $MG = \infty$ .
  - $MG < 1$ .
  - Ninguna de las anteriores.
13. ¿Una válvula de control que tiene un polo estable, dicho polo contribuye a la estabilidad del sistema de control?  Si  No
14. Considere dos sistemas de primero y segundo orden cuyos polos de lazo abierto se encuentran en el semiplano complejo izquierdo. En ambos casos, los sistemas son realimentado con un controlador proporcional y poseen elementos de control final y el elementos de medición ideales y con ganancia unitaria.
- Es posible mantener la estabilidad del sistema  $\forall K_r > 0$ .
  - Los márgenes de ganancia de dicho sistemas de control son infinito dado que los diagramas de Nyquist no encierran al punto crítico  $(-1 + j0) \forall K_r > 0$ .
  - Las trazas de Nyquist son asíntóticas a  $-90^\circ$  y  $-180^\circ$  respectivamente.
  - Ninguna de las anteriores.
15. Siempre que el modo derivativo esté bien adoptado, su inclusión en el controlador permite lograr en el sistema realimentado,
- una mejora en el MG.
  - Ninguna de las anteriores.
  - una mejora en el MF.
16. ¿La inclusión del modo integral en el controlador mejora la estabilidad del sistema realimentado?  Si  No
17. Los siguientes polinomios corresponden a las ecuaciones características de sistemas de control realimentado:

- (a)  $D(s) = 9s^3 + 2s + 2$        Estable     Inestable
- (b)  $D(s) = 9s^3 - 3s^2 - 2s - 2$        Estable     Inestable
- (c)  $D(s) = 9s^3 + 3s^2 + 2s + 2$        Estable     Inestable
- (d)  $D(s) = 9s^3 + 3s^2 + 8s + 2$        Estable     Inestable

Indique para cada uno de los casos si el lazo de control tienen un comportamiento estable o inestable.

18. Se desea calcular  $MG$ ,  $\omega_{cg}$ ,  $MF$ , y  $\omega_{-180}$  de un sistema de control cuyo  $G(s)H(s) = 8/(0,1s + 1)(2s + 1)(4s + 1)(20s + 1)$ . Según con uno de los ingenieros de control es posible despreciar un orden del sistema sin que altere demasiado el resultado. Indique cual de ellos despreciaría y justifique
  - $0,1s + 1$         $4s + 1$
  - $2s + 1$         $20s + 1$
  - No se debe despreciar ninguno
19. Considere un sistema autorregulable realimentado con un controlador proporcional. Si después de adoptar un valor de  $K_r$  se analiza la estabilidad mediante el criterio de Routh y se encuentra que uno de los elementos de la primer columna es cero, esto indica que,
  - el sistema realimentado es asintóticamente estable,
  - el sistema realimentado es inestable,
  - el sistema realimentado es críticamente estable,
  - ninguna de las opciones anteriores.

## 11.7. Problemas

**Problema 11.1** Considere el sistema de control de la Fig. 11.14.

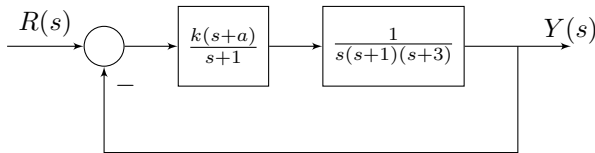


Figura 11.14

Determine el rango de valores de las constantes  $a$  y  $k$  del controlador para que el sistema sea estable. Se sugiere utilizar el método de Routh.

**Problema 11.2** Trace los diagramas de Bode (asintótico y exacto) para las funciones de transferencia que se detallan a continuación. A partir de dichos diagramas construya a mano alzada los correspondientes diagramas de Nyquist.

$$\begin{array}{ll} \text{a. } G(s) = \frac{1}{s+1} & \text{b. } G(s) = \frac{5}{(s+2)(s+6)} \\ \text{c. } G(s) = \frac{s+1}{s+10} & \text{d. } G(s) = \frac{1}{s(s+3)} \\ \text{e. } G(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+6)} & \text{f. } G(s) = \frac{(s+1)}{s(s+4)(s+8)} \\ \text{g. } G(s) = \frac{e^{-0,1s}}{s+5} & \text{h. } G(s) = \frac{e^{-0,2s}}{s(s+2)} \end{array}$$

Determine analíticamente en cada caso los márgenes de ganancia y de fase.

**Problema 11.3** Siendo el producto  $G(s)H(s) = \frac{K_p e^{-\theta s}}{s}$ , demuestre que  $MG = 2\theta^2/\pi K_p$  y  $MF = \pi/2 - K_p$ .

**Problema 11.4** Considere un sistema cuya función de transferencia de lazo abierto es

$$Gp(s) = \frac{K_p e^{-\theta s}}{Ts + 1} \quad (11.14)$$

realimentado con un controlador proporcional y elemento de medición y control final con ganancia unitaria y dinámica despreciable.

- Asuma una aproximación de Padé de primer orden y encuentre el intervalo de valores de  $K_r$  para el cual el sistema realimentado es asintóticamente estable.
- Repita el inciso anterior con una aproximación de Padé de segundo orden.
- Determine en forma exacta dicho intervalo.

**Problema 11.5** Considere el sistema de intercambio de calor representado en la Fig. 11.15.

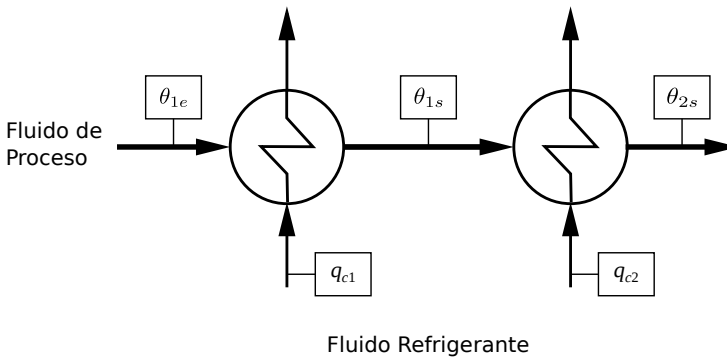


Figura 11.15

Se desea regular la temperatura  $\theta_{s2}$  en torno a un valor deseado con una respuesta dinámica rápida y para ello es posible manipular los caudales de enfriamiento  $q_{c1}$  y  $q_{c2}$ . Asuma las siguientes suposiciones:

- El caudal de fluido de proceso es constante.
- La temperatura de fluido de proceso ( $\theta_{1e}$ ) varía dentro de un rango de valores de  $\pm 10\%$ .

(III) Las funciones de transferencia aproximadas para este proceso son,

$$\Theta_{1s}(s) = \frac{1e^{-s}}{6s+1}\Theta_{1e}(s) + \frac{2e^{-s}}{8s+1}Q_{c1}(s)$$

$$\Theta_{2s}(s) = \frac{1e^{-0,5s}}{3s+1}\Theta_{1s}(s) + \frac{2e^{-0,5s}}{4s+1}Q_{c2}(s)$$

(IV) Los elementos de medición y de control final tienen dinámica despreciable y ganancia unitaria.

Dado que el control de la temperatura  $\Theta_{2s}$  no es muy estricto, se propone un control proporcional cuya banda proporcional varía entre 2% y 500%.

- Proponga un lazo de control de temperatura para  $\Theta_{2s}$  adoptando una variable manipulada. Justifique su adopción y dibuje bajo normas ISA dicho lazo.
- Para el lazo de control propuesto arme el diagrama de bloques del sistema y encuentre la función de transferencia entre  $\Theta_{2s}$  y  $\Theta_{1e}$ .
- Adopte el valor de  $K_r$  que permite un offset menor al 10% para los cambios indicados y garantice estabilidad del sistema realimentado.

**Problema 11.6** Considere la función transferencia de la cadena de lazo abierto,

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(T_b s + 1)}{s^2(T_a s + 1)}$$

con  $T_a$  y  $T_b > 0$ .

Estudie la estabilidad del sistema a lazo cerrado a través de los diagramas de Bode y Nyquist para la siguientes condiciones:

- $T_a > T_b$ .
  - $T_a = T_b$ .
  - $T_a < T_b$ .
- ¿Cómo influye en la estabilidad, el aumento de la ganancia del modo proporcional ( $K_r$ ) en cada caso?
  - ¿Cómo es en forma aproximada la respuesta al escalón en consigna para distintos valores de  $K_r$  en cada caso?

**Problema 11.7** Partiendo de los diagramas de Bode, trace a mano alzada el diagrama de Nyquist para el sistema de control cuya función de transferencia de lazo abierto es,

$$G(s)H(s) = \frac{(1-s)}{(s+1)}$$

Utilizando el criterio de estabilidad de Nyquist, determine la estabilidad del sistema de lazo cerrado.

**Problema 11.8** Sea,

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{(s^3 + 5s^2 + 12s + 8)}$$

- Ajuste  $K_r$  para lograr un margen de ganancia 2.

(b) ¿Cuál es el margen de fase alcanzado con el controlador calculado en (a)?

**Problema 11.9** Sea,

$$G(s)H(s) = \frac{K_r}{(s^3 + 2s^2 + 1,5s + 0,5)}$$

Determine el margen de fase para  $K_r = 1$ . Luego ajústelo para lograr un margen de fase de  $45^\circ$ . Calcule además el margen de ganancia en este último caso.

**Problema 11.10** Considere un sistema cuya función de transferencia es  $G_p = 1/(0,5s + 1)(2s + 1)(10s + 1)$  realimentado con controlador PI cuyo tiempo de acción integral es  $T_I = 5$ . Asuma que  $G_m = G_v = 1$ .

- Adopte el valor de ganancia necesario para tener un  $MF = 30^\circ$ .
- ¿Qué margen de ganancia tiene el sistema de control en este caso?
- Si hubiese adoptado un controlador proporcional, ¿qué margen de ganancia se alcanza para satisfacer la condición impuesta en el inciso (a)?
- ¿Qué margen de ganancia tiene el control P del sistema de control si hubiese adoptado el  $K_r$  calculado en (a)?

**Problema 11.11** Considere el sistema de control de la Fig. 11.16 realimentado con un controlador proporcional.

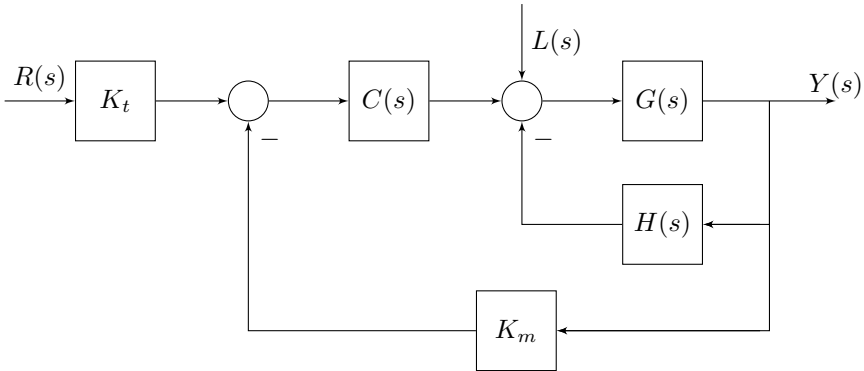


Figura 11.16

Asuma que,  $G(s) = \frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$  con  $T_1 = 1\text{h}$  y  $T_2 = 10\text{min}$ ,  $H(s) = \frac{1}{T_3s+1}$  con  $T_3 = 5\text{min}$ ,  $K_m = 5$  y  $K_t = K_m$ .

- Determine las funciones de transferencia  $Y(s)/R(s)$  e  $Y(s)/L(s)$ .
- Determine el valor de la  $BP\%$  de un controlador proporcional para lograr un  $MF = 30^\circ$ . Asuma que el controlador tiene un span de entrada de 4-20mA y un span de salida de 3-15psi.
- Calcule el coeficiente de amortiguamiento de la respuesta dinámica del sistema realimentado cuando se implementa el controlador del inciso a).



- (d) Calcule la relación de decaimiento de la respuesta al escalón del sistema de control.
- (e) Calcule el error a tiempo infinito que se obtiene con un cambio escalón en consigna para cuando  $K_t \neq K_m$  y  $K_t = K_m$ .

**Problema 11.12** Se desea controlar un sistema cuya función de transferencia es  $G_p(s) = 4e^{-0,5s}/(1,5s+1)(2s+1)$  con un controlador P usando un transductor y un actuador con ganancia unitaria y dinámica despreciable.

- (a) ¿Qué ganancia debe utilizarse en el controlador para que el sistema alcance un margen de fase de 30 grados?
- (b) ¿Cuál es el margen de ganancia alcanzado?
- (c) ¿Dicho sistema de control deja offset? Justifique.
- (d) Basándose en la ganancia adoptada, ¿con qué relación de decaimiento operará el sistema? Asuma para esto que la relación de decaimiento es  $RD = e^{-2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$  y una aproximación de Padé de primer orden para realizar los cálculos. Verifique este resultado mediante simulaciones numéricas.

**Problema 11.13** Considere el sistema realimentado de la Fig. 11.17.

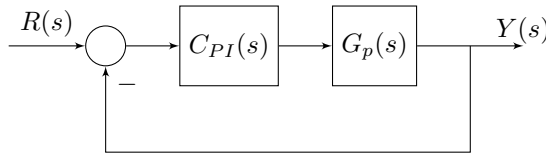


Figura 11.17

La respuesta en frecuencia de la planta es informada en la Tabla 11.1. Se sabe además que la función de transferencia  $G_p(s)$  tiene un tiempo muerto  $\theta = 1$  min.

Tabla 11.1: Datos experimentales.

<b>Frec(ciclos/min)</b>	0.0006	0.006	0.06	0.08	0.10	0.15	0.20	0.30	0.40	0.60	0.80
<b>RA (adim.)</b>	1.99	1.60	0.26	0.2	0.16	0.106	0.08	0.053	0.04	0.03	0.02
<b>Fase(grad.)</b>	-4	-39	-104	-113	-122	-142	-160	-197	-234	-307	

- (a) Encuentre los parámetros de la función de transferencia de la planta.
- (b) Determine el valor de  $K_r$  necesario para que le sistema realimentado alcance un  $MF = 30^\circ$  si se adopta  $T_I = 0,20$  min.
- (c) Analice como influye la variación de  $T_I$  en la estabilidad del sistema.

**Problema 11.14** Un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = 1/(10s+1)(2s+1)(0,5s+1)$  se encuentra realimentado con un controlador PI cuya acción integral es  $T_I = 5$ . Asuma además,  $G_m = G_v = 1$ .

- (a) Adopte el valor de ganancia que le permite alcanzar un margen de fase de 30 gados.

- (b) ¿Qué margen de ganancia se tiene con la ganancia adoptada en el inciso anterior?
- (c) ¿Cómo serían los márgenes de fase y ganancia (respecto al PI), si hubiese adoptado el mismo valor de ganancia pero utilizando un controlador proporcional?

**Problema 11.15** Un intercambiador de calor es calefaccionado con un vapor que circula por la carcasa. Para mantener controlada la temperatura de salida del fluido de proceso, se manipula la válvula de ingreso de vapor, mediante un lazo de control compuesto por un controlador proporcional, un transductor y una válvula como se indica en la Fig. 12.29. Las funciones de transferencia involucradas son,

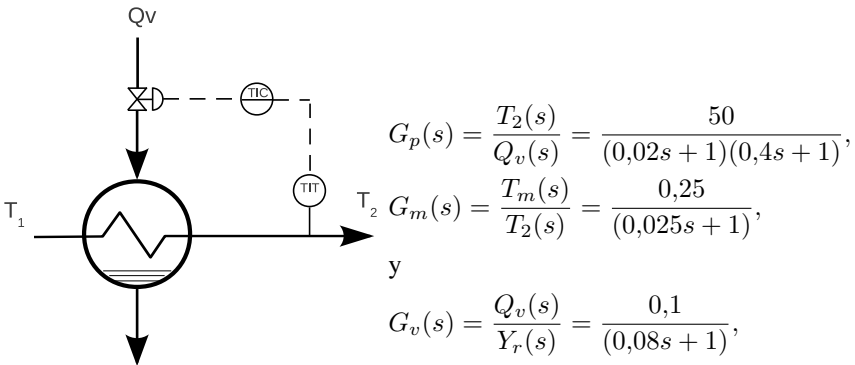
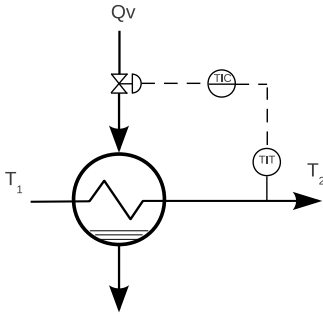


Figura 11.18

donde  $T_2$  es la temperatura controlada en  $^{\circ}\text{C}$ ,  $Q_v$  el caudal de vapor manipulado en  $\text{m}^3/\text{h}$ ,  $T_m$  la temperatura medida por el elemento de medición en mA, e  $Y_r$  la señal de salida del controlador hacia la válvula de control en mA.

- (a) ¿Qué ganancia debe utilizarse en el controlador para que el sistema de control alcance un  $MF = 30^{\circ}$ ? Calcule el MG para este caso.
- (b) Basándose en la ganancia calculada en inciso (a), determine las raíces del sistema realimentado.
- (c) ¿Con qué relación de decaimiento, tiempo de pico y tiempo de establecimiento operará el sistema? Asuma para estos cálculos que las Ecs. (3.51), (3.52) y (3.53) son válidas.
- (d) Prediga la respuesta dinámica del sistema realimentado para un cambio en consigna mediante un gráfico a mano alzada.
- (e) Verifique su predicción mediante una simulación numérica con Octave.

**Problema 11.16** Se desea controlar la temperatura de un intercambiador de calor según muestra:



Las funciones de transferencias son,

$$\frac{T_2(s)}{Q_v(s)} = \frac{2,5e^{-s}}{10s+1} \text{ y } \frac{T_2(s)}{T_1(s)} = \frac{0,9e^{-2s}}{5s+1}$$

Todas las constantes de tiempo están en segundos.

Se sabe además que la válvula de control sigue la ley,

$$q_v = 0,6\sqrt{y_r - 4} \text{ Kg vap./s}$$

donde,  $4 \leq y_r \leq 20$  mA y en operación normal  $y_r^0 = 13$  mA.

Los ingenieros de control solicitaron que el transductor de temperatura fuese calibrado para dar una respuesta lineal de 4 a 20 mA para un rango de temperatura de 120 a 160 °C, coincidente con el rango de operación del intercambiador de calor.

- Represente mediante diagrama de bloques el sistema de control, aclarando las unidades físicas que tiene cada señal.
- Encuentre las funciones de transferencia del transductor y la válvula.
- Adopte la ganancia de un controlador proporcional que permita alcanzar un  $MG = 2$  y muestre la respuesta la escalón en consigna.
- ¿Es posible eliminar el *offset*, tanto en carga como en consigna, con este sistema de control?
- Determine el  $MG$  si cambia el punto de operación del intercambiador con un valor de  $y_r^0 = 8$  mA. ¿Que desempeño espera tener alrededor de este punto en comparación con el que se obtiene en el item (c)? Justifique su respuesta.



# Capítulo 12

## Lugar Geométrico de las Raíces

En este capítulo se presenta la técnica del lugar geométrico de las raíces que resulta una poderosa herramienta al momento de analizar la estabilidad y el comportamiento dinámico de sistemas realimentados. Se incluyen reglas prácticas para la construcción del mismo y comandos de Octave que permiten computar dicho lugar. Complementa esta presentación ejemplos sencillos que buscan clarificar los conceptos aquí vertidos.

### 12.1. Introducción y Conceptos Preliminares

El lugar geométrico de las raíces, inicialmente desarrollado por Evans ([28] y [29]), fue convirtiéndose con el transcurso del tiempo, en una herramienta de suma importancia para el análisis de la estabilidad y el desempeño transitorio de los sistemas LTI. Adicionalmente, mediante un estudio cuidadoso del lugar de raíces (LR) es posible proceder al diseño de controladores PID y compensadores de adelanto-atraso, como se mostrará en capítulos posteriores.

A modo de ejemplo introductorio considere un sistema cuya función de transferencia tiene en su ecuación característica un denominador de segundo orden expresada bajo la forma canónica normalizada,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_{LC}(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}, \quad (12.1)$$

Basándose en la Ec. (12.1), las raíces de lazo cerrado son,

$$s_{1-2} = -\frac{\zeta}{T} \pm \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{T}, \quad (12.2)$$

Note en base a la Ec.(12.2) que, cuatro tipos de raíces diferentes pueden ser computadas. En el capítulo 3 se estudiaron las distintas respuestas temporales a cambios delta, escalón y rampa para los diferentes valores del coeficiente de amortiguamiento. La Tabla 3.4 resume las principales características de las respuestas temporales del sistema basándose en las cuatro tipos de raíces posibles.

Para ir compendiando mejor el tema consideremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 12.1** Considere un sistema realimentado tal que,

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)}, \quad (12.3)$$

1. Calcule las raíces de la ecuación característica de lazo cerrado, para  $0 \leq K \leq 10$  con incrementos de 0.5.
2. Luego, represente las raíces en el plano complejo.
3. Obtenga conclusiones.

De acuerdo con la Ec. (12.3) el denominador de lazo cerrado resulta,

$$D(s) = s(s+2) + K.$$

En base a la ecuación resolvente de un sistema de segundo orden, las raíces de lazo cerrado resultan ser,

1. para  $K < 1$ ,  $s_1$  y  $s_2 \in \mathbb{R}^-$  con  $s_1 \neq s_2$
2. para  $K = 1$ ,  $s_1 = s_2 = -1$ ,
3. para  $K > 1$ ,  $s_1$  y  $s_2 \in \mathbb{C}^-$ .

Estos resultados se resumen en la Tabla 12.1 y en la Fig. 12.1.

Tabla 12.1: Raíces de lazo cerrado para distintos valores de la ganancia  $K$  correspondiente al ejemplo 1.

$K$	$s_1$	$s_2$
0.0000	0.0000	-2.0000
0.5000	-0.2929	-1.7071
1.0000	-1.0000	-1.0000
1.5000	-1.0000 - j0.7071	-1.0000 + j0.7071
2.0000	-1.0000 - j1.0000	-1.0000 + j1.0000
2.5000	-1.0000 - j1.2247	-1.0000 + j1.2247
3.0000	-1.0000 - j1.4142	-1.0000 + j1.4142
2.5000	-1.0000 - j1.5811	-1.0000 + j1.5811
4.0000	-1.0000 - j1.7321	-1.0000 + j1.7321
4.5000	-1.0000 - j1.8708	-1.0000 + j1.8708
5.0000	-1.0000 - j2.0000	-1.0000 + j2.0000

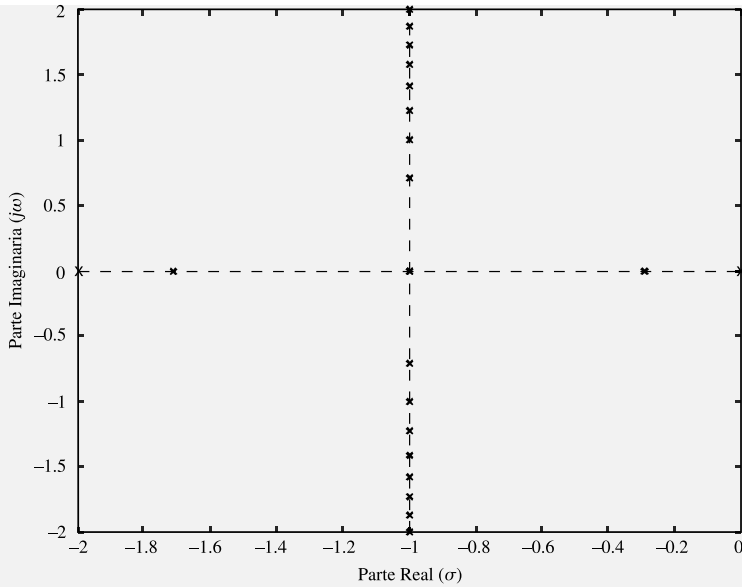


Figura 12.1: Raíces de lazo cerrado informadas en la Tabla 12.1 para el sistema realimentado del Ejem. 12.1.

**Ejemplo 12.2** Estudie los lugares geométricos en el plano complejo donde la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento de un sistema de segundo orden en lazo cerrado son constantes.

Ahora, considere el caso de raíces complejas conjugadas de un sistema de segundo orden, de acuerdo con el diagrama simplificado de la Fig. 12.2.

Según el denominador de la Ec. (12.1), la Tabla 3.4 y la Fig. 12.2 las raíces complejas  $s_1$  y  $s_2$  tienen parte real,

$$\sigma_1 = -\frac{\zeta}{T} = -\zeta\omega_n.$$

con  $\omega_n = 1/T$  y parte imaginaria,

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

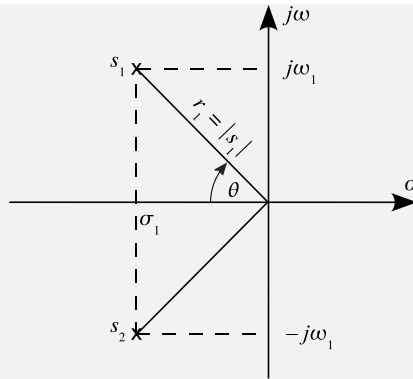


Figura 12.2: Representación en el plano complejo de las raíces complejas conjugadas de la Ec. (12.2).

El módulo del número complejo  $s = s_1$ , tiene las siguientes propiedades:

$$1. \quad r_1 = \sqrt{\sigma_1^2 + \omega_1^2} = \sqrt{\zeta^2 \omega_n^2 + (1 - \zeta^2) \omega_n} = \omega_n, \quad (12.4)$$

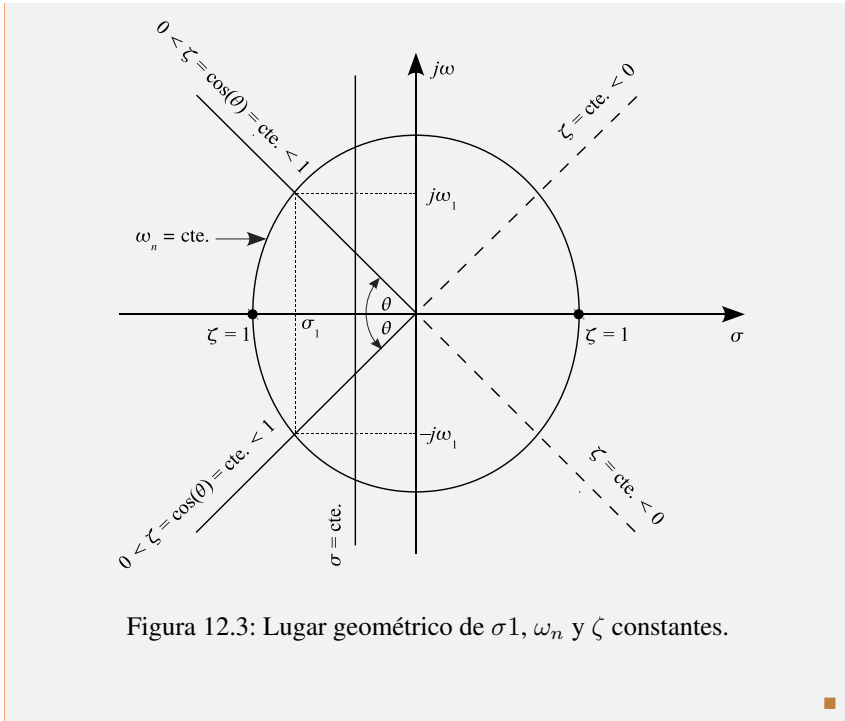
$$2. \quad \cos(\theta) = \frac{\sigma_1}{r_1} = \frac{\zeta \omega_n}{\omega_n} = \zeta, \quad (12.5)$$

En base a lo aquí estudiado podemos concluir que,

1. En sistemas de segundo orden, dos o más números complejos con igual módulo tienen la misma pulsación natural. Por lo tanto, un círculo con centro en el origen describe un lugar geométrico de  $\omega_n$  constante.
2. Dos o más números complejos ubicados sobre una misma línea recta que pasa por el origen del plano complejo, tienen igual valor de coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$ . Por lo tanto, una recta que pasa por el origen describe un lugar geométrico de  $\zeta$  constante.

Ambos lugares geométricos (de  $\omega_n$  y  $\zeta$  constantes) se representan en la Fig. 12.3.





## 12.2. Conceptos Teóricos Básicos

Un estudio importante en la teoría de sistemas de control lineal son las trayectorias de las raíces de la ecuación característica de lazo cerrado, en el plano complejo cuando se varía un cierto parámetro del sistema de control. Estas trayectorias forman lo que se conoce como lugar geométrico de las raíces.

Considere el sistema realimentado de la Fig. 12.4. Las raíces del sistema de lazo cerrado se computan como,

$$1 + G(s)H(s) = 0, \quad (12.6)$$

siempre es posible escribir,

$$G(s)H(s) = KG_1(s)H_1(s) = -1, \quad (12.7)$$

y en consecuencia,

$$|G(s)H(s)| = |KG_1(s)H_1(s)| = 1, \quad (12.8)$$

y

$$\angle G(s)H(s) = \angle KG_1(s)H_1(s). \quad (12.9)$$

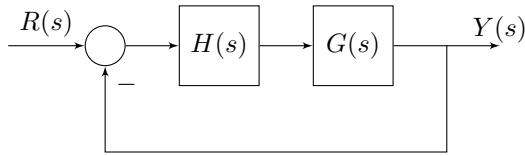


Figura 12.4: Sistema Realimentado.

Note que es posible encontrar valores de  $s$  tales que el módulo de la función de transferencia  $KG_1(s)H_1(s)$  sea siempre igual a uno cualquiera sea las funciones de transferencia de  $G_1(s)$  y  $H_1(s)$ , y para todo  $-\infty < K < \infty$ . Por el momento, Sólo pedimos que  $G_1(s)$  y  $H_1(s)$  sean de dimensión finita esto es, no tengan tiempo muerto ( $e^{-\theta s}$ ) en su expresión.

**Definición 12.2.1 — Lugar geométrico de las raíces.** Se define lugar geométrico de las raíces como la representación en el plano complejo de todas las raíces de la ecuación característica (12.6).

■ **Lema 12.1** Sea  $K$  un parámetro del sistema, tal que  $-\infty \leq K < \infty$ . Luego, todo valor de  $s = s^*$  se dice raíz de la Ec. (12.6) si y sólo si satisface en forma simultánea las condiciones de módulo y ángulo dada por,

$$\text{Condición de Módulo: } |G(s)H(s)| = 1, \quad (12.10)$$

$$\text{Condición de Ángulo: } \angle G(s)H(s) = \pm(2k+1)\pi, \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (12.11)$$

#### Demostración

1. Sea  $K$  un parámetro del sistema, tal que  $-\infty < K < \infty$ , y considerando la teoría elemental de números complejos,  $s^* \in \mathbb{F}$  con  $\mathbb{F}$  el conjunto de todos los números reales y complejos que son solución de la ecuación característica (12.6) luego, por la Ec. (12.7) para todo  $s = s^*$ ,  $KG_1(s^*)H_1(s^*) = -1 + j0$ , se tiene como resultado un vector en el plano complejo con módulo unitario y cuya fase resulta ser múltiplo de  $\pi$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots$  dado que  $\Re[G(s^*)H(s^*)] = -1$  y  $\Im[G(s^*)H(s^*)] = j0$ .
2. Por otra parte para todo valor de  $s = s^*$  que satisface la condición de módulo y ángulo expresada en (12.10) y (12.11), también cumple con (12.8) y (12.9) y en consecuencia, debe ser raíz de la ecuación característica (12.6).

□

■ **Corolario 12.1** El lugar geométrico de las raíces resulta ser la representación en el plano complejo de aquellos valores de  $s$  que cumplen con la condición de módulo y ángulo simultáneamente.

Expresando el producto de  $G(s)H(s)$  en forma más general,

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}. \quad (12.12)$$

con  $m \leq n$ , con  $p_i \in \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  e  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $z_j \in \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  e  $j = 1, 2, \dots, m$  y basándose en las propiedades de producto y cociente de números complejos (ver apéndice A), las condiciones de módulo y ángulo pueden ser reescritas como sigue,

1. condición de módulo,

$$|G_1(s)H_1(s)| = \frac{1}{|K|} = \frac{\prod_{j=1}^m (|(s+z_j)|)}{\prod_{i=1}^n (|(s+p_i)|)}, \quad (12.13)$$

2. condición de ángulo,

$$\langle G_1(s)H_1(s) \rangle = \sum_{j=1}^m \langle (s+z_j) \rangle - \sum_{i=1}^n \langle (s+p_i) \rangle = \pm(2k+1)\pi. \quad (12.14)$$

con  $k = 0, 1, 2, \dots$  y  $m \leq n$ .

**Ejemplo 12.3** Pruebe la condición de módulo y ángulo para alguna de las raíces encontradas en el Ejem. 12.1.

*Prueba de la condición de módulo.* Partiendo de la Ec. (12.3) y considerando la Ec. (12.13) se tiene que,

$$|G_1(s^*)H_1(s^*)| = \frac{1}{K} = \frac{1}{|s^*| |s^* + 2|}.$$

donde para una raíz cualquiera  $s^* = \sigma^* + j\omega^*$  se tiene

$$\frac{1}{|\sigma^* + j\omega^*| |\sigma^* + j\omega^* + 2|} = \frac{1}{K}.$$

Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, adoptando  $s^* = s_2^* = -1 + j\sqrt{2}$  se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} &= \frac{1}{|-1+j\sqrt{2}| |-1+j\sqrt{2}+2|} = \frac{1}{|-1+j\sqrt{2}| |1+j\sqrt{2}|} \\ &= \frac{1}{|\sqrt{3}| |\sqrt{3}|} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

con lo que resulta  $K = 3$ . De acuerdo con la Tabla 12.1, las raíces de lazo cerrado con valores de  $\sigma = -1$  y  $\omega = \pm j\sqrt{2}$  también se corresponden con  $K = 3$ , lo que prueba que la condición de módulo se cumple.

*Prueba de la condición de ángulo.* Considere la Fig. 12.5, donde por simplicidad y sin pérdida de generalidad se adopta la raíz  $s_2^* = -1 + j\sqrt{2}$

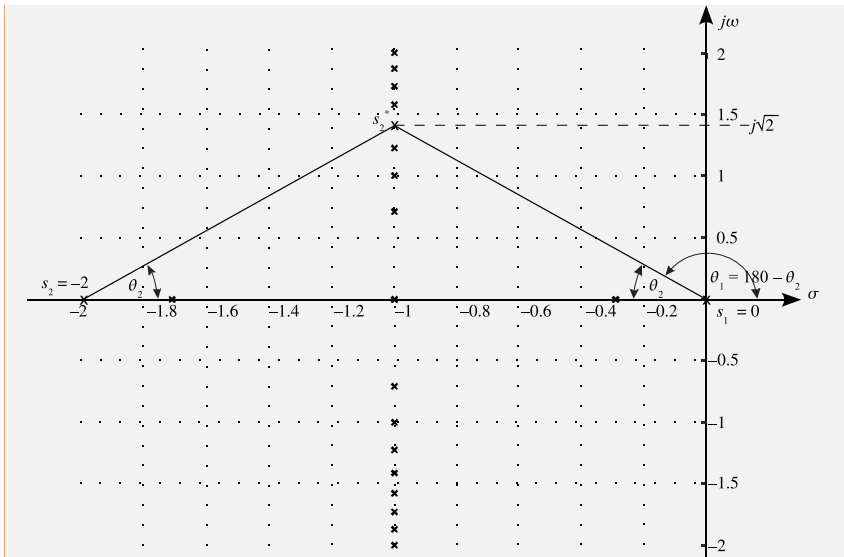


Figura 12.5: Aporte angular de los polos de la Ec. (12.5). El corresponde al aporte angular del polo de lazo abierto en  $s_1 = 0$  y el  $\langle s_2^* + 2 = \theta_2$  al polo en  $s_2 = -2$  con el punto arbitrariamente escogido  $s_2^*$  respectivamente.

De la Ec. (12.14) se tiene que,

$$\begin{aligned} \langle G_1(s_2^*)H_1(s_2^*) &= -(\langle s_2^* + \langle (s_2^* + 2)) \\ &= -(180 - \theta_2 + \theta_2) = -180. \end{aligned}$$

Con lo cual se satisface la condición se ángulo para  $k = 3$ . ■

### 12.3. Reglas para la Construcción del LR para $K \geq 0$

Considere el caso donde el producto de  $G(s)H(s)$  dado por la Ec. (12.12) tiene  $n$  polos y  $m$  ceros y  $0 \leq K < \infty$ . Es posible construir el lugar geométrico de las raíces siguiendo un conjunto de reglas, que se enuncian a continuación.

■ **Regla 12.3.1 — Número de Ramas del LR.** El número de ramas es igual al orden de la ecuación característica.

Por lo tanto, para el caso de un sistema de orden  $n$  como el de la Ec. 12.12 existiran  $n$  ramas.

■ **Regla 12.3.2 — Puntos Iniciales y Finales del LR.** Las ramas comienzan en los polos de lazo abierto ( $K = 0$ ) y terminan en los ceros de lazo abierto ( $K \rightarrow \infty$ ). Además,  $(n - m)$  ramas terminan en los ceros virtuales<sup>a</sup> (esto es,  $|s| \rightarrow \infty$ ), siguiendo a las asíntotas.

<sup>a</sup>El concepto de cero virtual se introduce dado que las ramas terminan en los ceros. Si  $m < n$  entonces habrá  $(n - m)$  ramas que se dirigen (siguiendo las asíntotas) a  $(n - m)$  ceros que no están presentes en la ecuación general 12.12

En el caso de polos de multiplicidad  $p$ , existirán  $p$  ramas que saldrán de él y en el caso de ceros de multiplicidad  $q$ , existirán  $q$  ramas que convergerán a él.

■ **Regla 12.3.3 — LR sobre el eje real.** Si el número total de polos y ceros sobre el eje real a la derecha del punto considerado es impar dicho punto pertenece al LR.

**Ejemplo 12.4** Considere el sistema realimentado del Ejem. 12.1 y aplicando la Regla 12.3.3 muestre el LR sobre el eje real.

Basándose en la expresión de  $G(s)H(s)$  vemos que a la derecha de  $s = 0$  no tenemos ningún polo ni cero, por tanto desde  $(+\infty, 0)$  no tenemos LR. Luego, entre  $(0, -2)$  mirando hacia la derecha habrá siempre un polo (en  $s = 0$ ) y luego en todo el intervalo  $(-2, -\infty)$  habrá dos polos hacia la derecha y consecuentemente ese intervalo no es LR.

Un resumen de estos resultados se muestra en la Fig. 12.6.

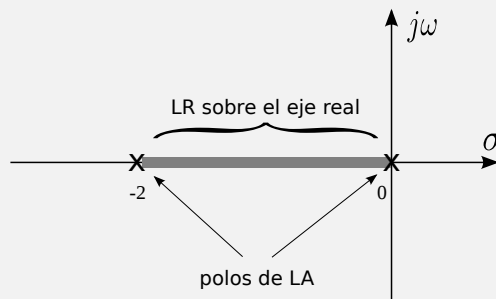


Figura 12.6: Lugar de raíces sobre el eje real para el Ejem. 12.4.

■ **Regla 12.3.4 — Asíntotas.** Las asíntotas se determinan como se indica a continuación.

1. El número de asíntotas es igual al número de ramas.
2. Las asíntóticas son líneas rectas con ángulo,

$$\gamma_k = \frac{(2k+1)180}{n-m} \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, (n-m-1) \text{ y } n > m. \quad (12.15)$$

3. La intersección de las asíntotas se produce siempre sobre el eje real del plano  $s$  y dicho punto está dado por,

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \Re p_i - \sum_{j=1}^m \Re z_j}{n-m} \quad \text{con } n > m. \quad (12.16)$$

**Ejemplo 12.5** Considere el sistema realimentado del Ejem. 12.1 y aplicando la Regla 12.3.4 determine el ángulo de asíntotas y su intersección con el eje real.

Teniendo en cuenta que  $G(s)H(s)$  tiene dos polos entonces por la Regla 12.3.1 el LR tendrá 2 ramas y consecuentemente por la Regla 12.3.4 habrá dos asíntotas cuyos ángulos con la Ec. 12.15,

$$\gamma_k = \frac{(2k+1)180}{2} \quad \forall k = 0, 1.$$

y por tanto,  $\gamma_0 = 90$  y  $\gamma_1 = 270$ .

El centro de gravedad de asíntotas de acuerdo con la Ec. 12.16 resultará,

$$\sigma_0 = \frac{0-2}{2} = -1.$$

■ **Regla 12.3.5 — Puntos de Dispersión y Confluencia.** Los puntos de dispersión y confluencia se conocen como puntos de ruptura y dichos puntos se calculan como se indica a continuación.

1. Si hay lugar de raíces entre dos polos adyacentes sobre el eje real, entonces existe al menos un punto de dispersión entre ambos.
2. Si hay lugar de raíces entre los dos ceros adyacentes sobre el eje real, entonces existe al menos un punto de confluencia entre ambos.
3.  $K$  es máximo entre polos y mínimo entre ceros.

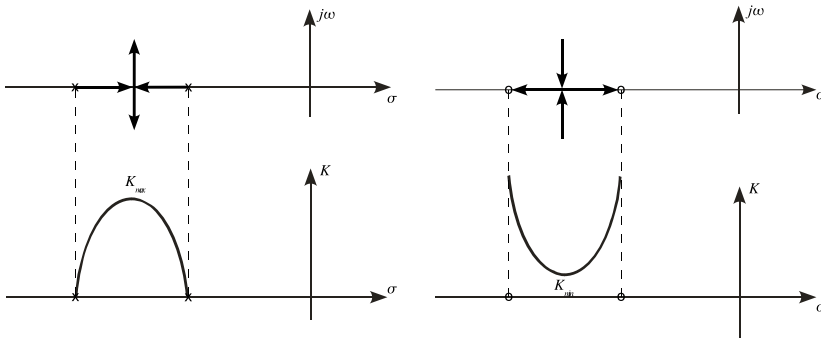


Figura 12.7: Gráfico cualitativo de la variación de  $K$  entre dos polos o entre dos ceros.

Estos resultados se resumen en la Fig. 12.7.

Por tanto, los puntos de ruptura se calculan como,

$$\frac{dK}{ds} = 0. \tag{12.17}$$

Sea,

$$1 + KG_1(s)H_1(s) = 0. \tag{12.18}$$

y  $G_1(s)H_1(s) = Q(s)/P(s)$  luego, reemplazando en (12.18) y operando se llega a,

$$K = -\frac{P(s)}{Q(s)}. \tag{12.19}$$

y derivando la expresión anterior se tiene,

$$\frac{dK}{ds} = \frac{P'(s)Q(s) - P(s)Q'(s)}{Q(s)^2} = 0. \tag{12.20}$$

Luego, los valores de  $s$  que satisfacen la Ec. (12.20) pueden ser puntos de ruptura<sup>1</sup> para  $0 \leq K < \infty$ .

**Ejemplo 12.6** Considere el sistema realimentado del Ejem. 12.1 y aplicando la Regla 12.3.5 determine el punto de dispersión de ramas del LR.

Observando el LR sobre el eje real que muestra el Ejem. 12.4, vemos que existe LR dentro del intervalo  $(0 - 2)$  determinado por dos polos. Por tanto,

<sup>1</sup>Recuerde que  $dK/ds = 0$  es condición necesaria pero no suficiente de extremo relativo.

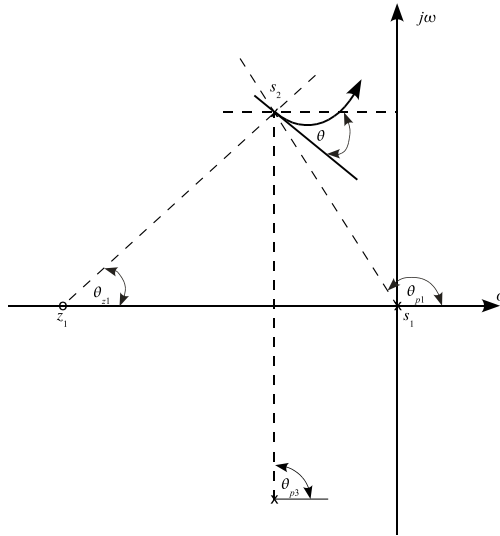


Figura 12.8: Aporte angular de los polos y el cero para el ejemplo de la Regla 6.

habrá un punto de dispersión que de acuerdo con la Ec. 12.19 resulta,

$$K = -s^2 - 2s.$$

y en consecuencia

$$\frac{dK}{ds} = -2s - 2 = 0$$

y entonces el punto de dispersión de ramas se encuentra en  $s = -1$ . ■

■ **Regla 12.3.6 — Ángulos de Salida y de Llegada.** El ángulo de salida del LR desde un polo o de llegada a un cero se determina como,

$$\theta = 180 - \left( \sum \theta_{p_i} - \sum \theta_{z_j} \right). \quad (12.21)$$

donde,  $\theta_{p_i}$  y  $\theta_{z_j}$  es la contribución angular de los polos y los ceros respectivamente.

Considere como ejemplo el caso de la Fig. 12.8. El ángulo de salida de la rama del polo  $s_2$  se calcula como  $\theta = 180 - (\theta_{p_1} + \theta_{p_3}) + \theta_{z_1}$ .



■ **Regla 12.3.7 — Cruces con el eje imaginario.** Las intersecciones del LR con el eje imaginario pueden computarse,

1. utilizando el criterio de Routh-Hurwitz o bien,
2. tomando  $s = j\omega$  en la ecuación característica, para luego igualar la parte real e imaginaria de la ecuación resultante a cero, y así computar la ganancia y la frecuencia a la cual se produce dicho cruce.

Para demostrar el inciso 2 de la regla anterior, considere la ecuación característica (12.6) luego, tomando  $s = j\omega$  se tiene,

$$D(j\omega) = 1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0. \quad (12.22)$$

que reordenado resulta,

$$\Re[D(j\omega)] + j\Im[D(j\omega)] = 0 + j0, \quad (12.23)$$

de lo que resulta,  $\Re[D(j\omega)] = 0$  y  $\Im[D(j\omega)] = 0$ .

Los valores de ganancia y frecuencia de cruce con el eje imaginario se los designa, ganancia última ( $K_u$ ) o crítica y frecuencia última ( $\omega_u$ ) o crítica según sea el caso.

**Ejemplo 12.7** Considere el sistema realimentado del Ejem. 11.2, determine la ganancia última mediante la aplicación de la Regla 12.3.7.

De acuerdo con el Ejem. 11.2, aplicando el criterio de Routh, el sistema es asintóticamente estable para  $\forall 0 < K < 8$ . Por tanto, la ganancia última resulta  $K_u = 8$ , ya que para  $k = 0$  el sistema está a lazo abierto.

Este resultado se puede verificar tomando  $s = j\omega$  en la ecuación característica. Esto es,

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 4(j\omega) + K \\ &= (-2\omega^2 + K) + j(-\omega^3 + 4\omega) = 0 + j0. \end{aligned}$$

Basándose en las dos ecuaciones anteriores se puede escribir que,

$$\begin{aligned} (-2\omega^2 + K) &= 0 \\ (-\omega^3 + 4\omega) &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto resulta,  $\omega = \pm\sqrt{2}$  y consecuentemente  $\omega_u = \sqrt{2}$  y  $K_u = 8$ . ■

■ **Regla 12.3.8 — Constancia de la suma de las Raíces.** Para  $n - m \geq 2$  se cumple que la sumatoria de las raíces de la ecuación características se

mantiene constante.

**Ejemplo 12.8** Considere el sistema de control en lazo cerrado de la Fig. 12.9.

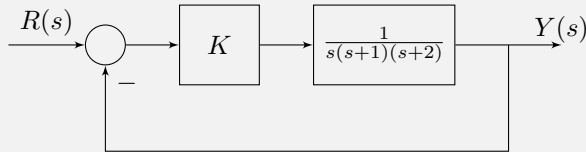


Figura 12.9: Diagrama de bloques del sistema realimentado.

1. Basándose en las reglas enunciadas, construya el lugar geométrico de las raíces para  $K \geq 0$ .
2. Analice la estabilidad del sistema en lazo cerrado y obtenga conclusiones.

De la Fig. 12.9 anterior se observa que,

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)},$$

entonces existen tres polos de lazo abierto en  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -1$  y  $p_3 = -2$ , y además no hay ningún cero de lazo abierto.

A partir de la expresión de  $G(s)H(s)$  la ecuación característica resulta,

$$D(s) = s(s+1)(s+2) + K = s^3 + 3s^2 + 2s + K,$$

A continuación para determinar el lugar geométrico de las raíces de lazo cerrado en el plano complejo se aplicarán las reglas enunciadas anteriormente.

Regla 12.3.1. El orden de la ecuación característica es 3 y por tanto el número de ramas es igual a 3.

Regla 12.3.2. Las tres ramas comienzan en  $K = 0$  sobre los polos de lazo abierto y terminan para  $K \rightarrow \infty$  en  $|s| \rightarrow \infty$  ya que  $m = 0$ .

Regla 12.3.3. De acuerdo con la Regla 12.3.3 las raíces sobre el eje real se encuentran según Fig. 12.10.

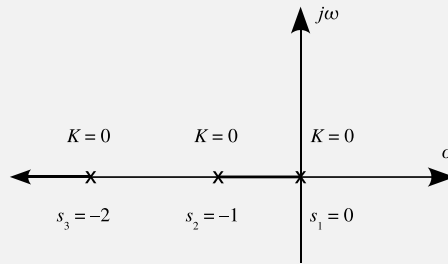


Figura 12.10: Lugar de raíces sobre el eje real.

Regla 12.3.4.

1. El número de asíntotas es igual a 3.
2. Los ángulos de las asíntotas resultan ser,

$$\gamma_k = \frac{(2k + 1)180}{3} \text{ con } k = 0, 1, 2.$$

Por tanto resulta,  $\gamma_0 = 60^\circ$ ,  $\gamma_1 = 180^\circ$  y  $\gamma_2 = 300^\circ$ .

3. La intersección de las tres asíntotas se da en,  $\sigma_0 = \frac{(0-1-2)}{3} = -1$ .

La inclusión de estos resultados en la figura anterior da paso a la Fig. 12.11.

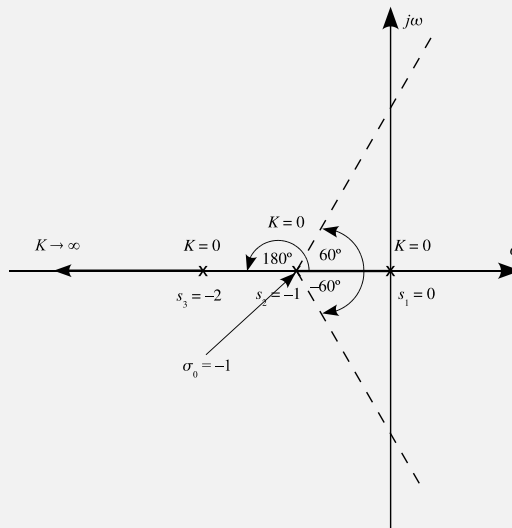


Figura 12.11: Lugar de raíces sobre el eje real, las asíntotas y su intersección sobre el eje real ( $\sigma_0$ ).

## Regla 12.3.5.

1. Como hay lugar de raíces entre dos polos entonces existe un punto de dispersión de ramas (ver Fig. 12.10 o 12.11).
2. Dado que no hay lugar de raíces entre dos ceros debido a que  $G(s)H(s)$  no los tiene, entonces no existe punto de confluencia de ramas.
3. El punto de dispersión se puede calcular a partir de la expresión (12.17) y teniendo en cuenta la ecuación característica de este problema en particular,

$$K = -s^3 - 3s^2 - 2s,$$

y por tanto,

$$\frac{dK}{ds} = -3s^2 - 6s - 2 = 0.$$

Con lo cual, resolviendo la expresión anterior se tiene dos posibilidades,  $s_1 = -1,57735$  y  $s_2 = -0,42265$ , donde la segunda representa el punto de dispersión de ramas buscado.

Regla 12.3.6. En este caso todas las ramas parten desde polos sobre el eje real y por tanto esta regla no arroja mayores resultados.

Regla 12.3.7. Los cruces con el eje imaginario se pueden calcular de dos maneras.

1. A partir del criterio de Routh, esto es,
  - a) de la ecuación característica  $D(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K$  y teniendo en cuenta la condición necesaria del criterio de Routh pedimos  $K > 0$ .
  - b) La matriz de Routh resulta,

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & (6-K)/3 & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array}$$

con lo cual el sistema será estable para  $0 < K < 6$  y la ganancia última resulta,  $K_u = 6$ . Así, la ecuación característica para  $K = 6$  resulta,

$$D(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 6 = 0,$$

que tendrá por raíces,  $s_1 = -3$ ,  $s_{2-3} = \pm j\sqrt{2}$ . Por tanto, el corte con el eje imaginario resulta en  $\pm j\sqrt{2}$  y en consecuencia la frecuencia última resulta,  $\omega_u = \sqrt{2}$ .

2. La otra forma de calcular los puntos de cruce con el eje imaginario es tomando  $s = j\omega$  en la ecuación característica. Así,

$$\begin{aligned} D(j\omega_u) &= (j\omega_u)^3 + 3(j\omega_u)^2 + 2(j\omega_u) + K_u = 0 \\ &= (-3\omega_u^2 + K_u) + j(-\omega_u^3 + 2\omega_u) = 0 + j0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} -3\omega_u^2 + K_u &= 0, \\ -\omega_u^3 + 2\omega_u &= 0 \end{aligned}$$

y por tanto de la última ecuación resulta que  $\omega_u = \pm\sqrt{2}$ , y en consecuencia  $\omega_u = \sqrt{2}$  y  $K_u = 6$ .

Regla 12.3.8. En este caso  $n - m = 3 > 2$  y por tanto es de esperar que se conserve la suma de las partes reales de las raíces.

Finalmente, la Fig. 12.12 resume los resultados aquí obtenidos representando el lugar geométrico de las raíces del problema aquí estudiado.

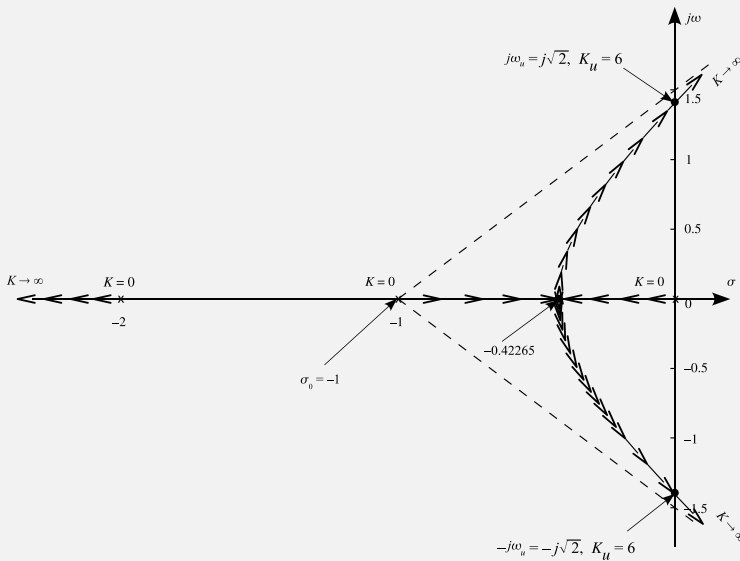


Figura 12.12: Diagrama cualitativo del lugar geométrico de las raíces del Ejem. 12.8.

### Comandos de Octave relacionados con el tema

Las funciones de Octave relacionadas con este tema son las que se enumeran a continuación.

**Comando**

<code>[RLDATA, K]=rlocus(SYS, INC, MIN_K, MAX_K)</code>	calcula el lugar de las raíces del sistema realimentado. SYS el modelo LTI del sistema, INC el incremento de la ganancia variable, MIN_K la ganancia mínima, MAX_K la ganancia máxima, RLDATA puntos presentados en gráfico: columna 1 valores, reales y columna 2 valores imaginarios de las raíces, K vector de ganancias.
---	---

**Ejemplo 12.9** Construya el LR utilizando los comandos de Octave para el sistema en lazo cerrado del Ejem. 12.8.

**Algoritmo 12.1:** Código de Octave del Ejem. 12.9 para construir el lugar de las raíces.

```

1 % Defino la planta
2 n=[1]; d=[1 3 2 0];
3
4 % Grafico el lugar de las raíces
5 rlocus(tf(n,d),0.005,0,20);
6 title('Lugar de Raices G(s)H(s) = K/s(s+1)(s+2)')
```

La figura de Octave es la que se muestra en la Fig. 12.13.

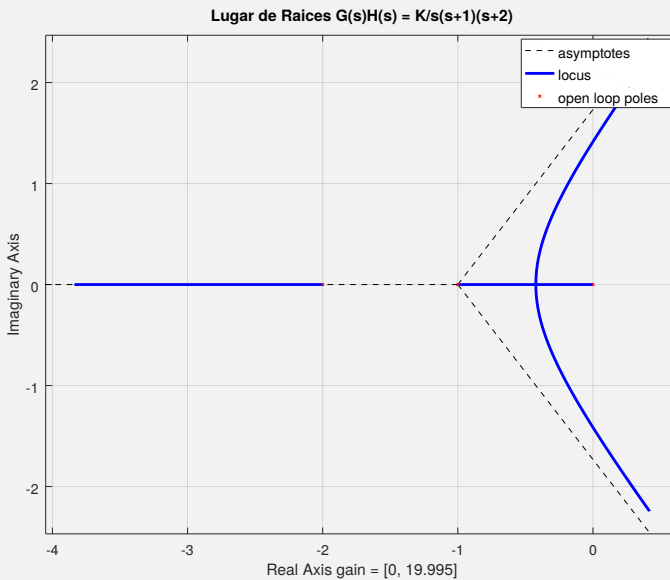


Figura 12.13: Lugar de raíces mostrado por Octave.

**Ejemplo 12.10** Considere un sistema en lazo cerrado cuyo  $G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+3.6)}$  y construya el LR utilizando los comandos de Octave rlocus y plot.

**Algoritmo 12.2:** Código de Octave del Ejem. 12.10.

```

1 % Defino la planta
2 n=[1 1]; d=[1 3.6 0 0];
3
4 [ro ,k_breaks ,lc_roots ,gains , x_breaks]=rlocus (tf (n,d)
   ,0.1 ,0 ,15);
5 r1_real=real (lc_roots (1 ,:)); r1_imag=imag (lc_roots (1 ,:));
6 r2_real=real (lc_roots (2 ,:)); r2_imag=imag (lc_roots (2 ,:));
7 r3_real=real (lc_roots (3 ,:)); r3_imag=imag (lc_roots (3 ,:));
8
9 % Grafico Resultados
10 plot (r1_real ,r1_imag ,r2_real ,r2_imag ,r3_real ,r3_imag , ...
11       0,0,"x",-1,0,"o",-3.6,0,"x"), grid
12 title ('Lugar de Raices de G(s)H(s)=K(s+1)/(s^2(s+3.6))')
13 xlabel('Eje Real'), ylabel('Eje Imaginario')

```

La figura de Octave es la que se muestra en la Fig. 12.14.

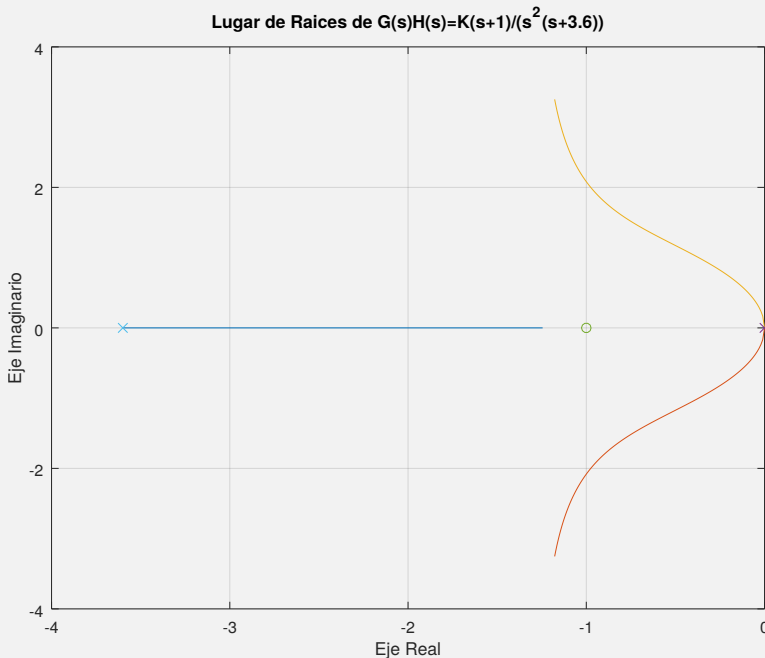


Figura 12.14: Lugar de raíces del Ejem. 12.10 mostrado por Octave.

## 12.4. Lugar de Raíces de Sistemas con Tiempo Muerto

Muchos sistemas en la industria de procesos presentan tiempo muerto en su función de transferencia. Así, la Ec. 12.12 al incluir un tiempo muerto resulta,

$$G(s)H(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} e^{-\theta s}. \quad (12.24)$$

Claramente el término  $e^{-\theta s}$  no presenta polos ni ceros lo que implica un tratamiento especial de la condición de módulo y ángulo para poder construir el LR.

Designando,  $G_1(s)H_1(s)$  al cociente entre la productoria de ceros y polos entonces resulta

$$G(s)H(s) = KG_1(s)H_1(s) e^{-\theta s}. \quad (12.25)$$

La ecuación característica del sistema realimentado resulta,

$$D(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + KG_1(s)H_1(s) e^{-\theta s} = 0. \quad (12.26)$$

La pregunta ahora es, ¿cuántos polos tiene un sistema realimentado con tiempo muerto?

Una aproximación en serie de Padé o de Taylor implicaría infinitos polos, siendo estas una de las razones por la que a estos sistemas se los llama sistemas de dimensión infinita. De manera que, construir un lugar de raíces implicaría tomar una aproximación y truncar la serie, lo que lleva a un análisis aproximado y consiguientemente los valores de la ganancia y frecuencia última son una aproximación a los valores reales, pudiendo resultar algo distintos a los que se podría calcular con el análisis en el dominio de la frecuencia usando las ecuaciones exactas sin aproximación alguna.

Una posibilidad para construir el LR en forma aproximada de estos sistemas es usar alguna aproximación polinómica. Una aproximación muy usual es la aproximación por series de Padé <sup>2</sup> presentada en el Cap. 3 en la subsec. 3.6.1 y que como se muestra en el Cap. 10 resulta en una buena aproximación para el análisis en el dominio de la frecuencia. Así, utilizando una aproximación finita de la serie de Padé es posible construir el LR considerando con el conjunto de reglas anteriores, pero con las consideraciones que se enuncian a continuación en las Reglas 12.3.3 y 12.3.4.

---

<sup>2</sup>La aproximación en serie de Padé es más común para este tipo de análisis que la aproximación por serie de Taylor.



■ **Regla 12.4.1 — LR sobre el eje real para sistemas con delay.** Si el número total de polos y ceros sobre el eje real a la derecha del punto considerado es par dicho punto pertenece al LR.

■ **Regla 12.4.2 — Asíntotas.** Las asíntotas se determinan como se indica a continuación.

1. El número de asíntotas es igual al número de ramas.
2. Las asíntóticas son líneas rectas con ángulo<sup>a</sup>,

$$\gamma_k = \frac{2k180}{n - m} \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, (n - m - 1) \text{ y } n > m. \quad (12.27)$$

3. La intersección de las asíntotas se produce siempre sobre el eje real del plano  $s$  y dicho punto está dado por,

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \Re p_i - \sum_{j=1}^m \Re z_j}{n - m} \quad \text{con } n > m. \quad (12.28)$$

<sup>a</sup>Note que, el ángulo de asíntotas es múltiplo de  $180^\circ$  y consecuentemente estas se encuentran siempre sobre el eje real.

El lector puede notar que una aproximación de Padé conduce a un cálculo de la ganancia última aproximada que puede resultar algo diferente al cálculo exacto que se puede realizar usando las ecuaciones en el dominio de la frecuencia.

**Ejemplo 12.11** Considere un sistema realimentado con un controlador proporcional y cuya función de transferencia de la cadena de lazo abierto es

$$G(s)H(s) = \frac{10K_r}{(s + 1)} e^{-0,1s}.$$

Aplique las reglas del LR y construya a mano alzada gráfica que muestra las ubicaciones de las raíces de lazo cerrado en el plano complejo.

Primeramente aproximando el tiempo muerto por una serie de Padé de primer orden la expresión de  $G(s)H(s)$  es reescrita como sigue:

$$G(s)H(s) = \frac{10K_r(1 - 0,05s)}{(s + 1)(1 + 0,05s)}.$$

Similarmente a lo hecho antes se aplica las reglas enunciadas anteriormente considerando las modificaciones enunciadas en las Reglas 12.27 y 12.28.

Regla 12.3.1. El orden de la ecuación característica es 2 y por tanto habrá dos ramas.

Regla 12.3.2. Las 2 ramas comienzan en  $K = 0$  sobre los polos de lazo abierto y una de ellas termina para  $K \rightarrow \infty$  en  $s = 20$  y la otra en  $s = \infty$  ya que  $m = 1$ .

Regla 12.4.1. De acuerdo con la Regla 12.4.1 las raíces sobre el eje real se encuentran según Fig. 12.15.

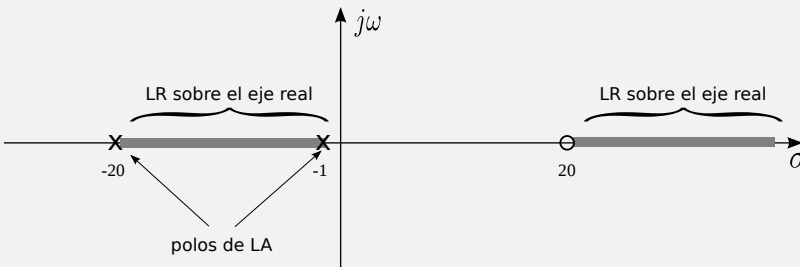


Figura 12.15: Lugar de raíces sobre el eje real del Ejem. 12.11.

Regla 12.4.2.

1. El número de asíntotas es igual a 2.
2. Los ángulos de las asíntotas resultan ser,

$$\gamma_k = \frac{2k180}{2-1} \text{ con } k = 0.$$

Por tanto resulta,  $\gamma_0 = 0^\circ$ .

3. La intersección de las tres asíntotas se da en,  $\sigma_0 = \frac{(-1-20)-(20)}{2-1} = -41$ .

Regla 12.3.5.

1. Como hay LR entre dos polos entonces existe un punto de dispersión de ramas
2. Como hay LR entre dos ceros existe un punto de confluencia de ramas.
3. El punto de dispersión se puede calcular a partir de la expresión (12.17) y teniendo en cuenta la ecuación característica de este problema en particular,

$$D(s) = 1 + G(s)H(s) = (s + 1)(1 + 0,05s) + 10K_r(1 - 0,05s) \\ = 0,05s^2 + (1,05 - 0,5K_r)s + (1 + 10K_r).$$

Luego despejando  $K_r$ ,

$$K_r = \frac{(s + 1)(0,05s + 1)}{10(-0,05s + 1)}.$$

Tomando derivada respecto de  $s$  a la ecuación anterior e igualando a cero se tiene que

$$-0,025s^2 + s + 11 = 0$$

Luego resolviendo dicha ecuación se tiene como solución  $s_1 = -8,9828$  y  $s_2 = 48,9828$ , la primera resulta ser el punto de dispersión y la segunda el punto de confluencia.

Regla 12.3.6. En este caso todas las ramas parten desde polos sobre el eje real y por tanto esta regla no arroja mayores resultados.

Regla 12.3.7. Los cruces con el eje imaginario se puede calcular tomando  $s = j\omega$  en la ecuación característica

$$D(j\omega) = 0,05(j\omega)^2 + (1,05 - 0,5K_r)j\omega + (1 + 10K_r) \\ = (1 + 10K_r + 0,05\omega^2) + j(1,05 - 0,5K_r)\omega = 0 + j0.$$

resultando,

$$1 + 10K_r + 0,05\omega^2 = 0 \\ 1,05 - 0,5K_r = 0.$$

y por tanto de las ecuaciones anteriores se arriba a  $K_{ru} = 2,1$  y  $\omega_u = 20,494$ .

El cálculo de los valores exactos  $K_{ru}$  y  $\omega_u$ . se realiza en el Ejm. 14.8 observándose una importante diferencia en sus valores.

En la Fig. 12.16 se muestra un gráfico a mano alzada que resume los resultados obtenidos.

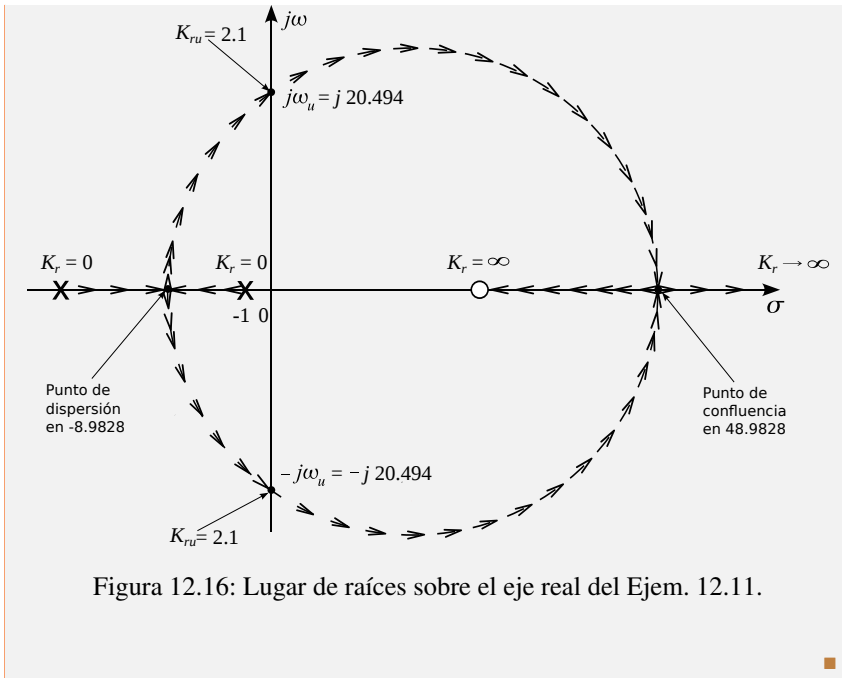


Figura 12.16: Lugar de raíces sobre el eje real del Ejem. 12.11.

**Ejemplo 12.12** Construya el LR utilizando los comandos de Octave para el sistema realimentado del Ejem. 12.11.

El código de Octave para este ejemplo son los que se listan a continuación.

**Algoritmo 12.3:** Código de Octave del Ejem. 12.12.

```

1  % Planta
2  ngh=[10]; % numerador de G(s) sin el delay
3  dgh=[1 1]; % denominador de G(s) sin el delay
4  theta=0.1; % tiempo muerto
5  n_pade=[-theta/2 1];
6  d_pade=[theta/2 1];
7  nGH=conv(ngh,n_pade); % numerador de G(s) con el delay
8  dGH=conv(dgh,d_pade); % denominador de G(s) con el delay
9  GHs=tf(nGH,dGH)
10
11 % Lugar de raíces
12 rlocus(GHs,0.1,0,15)

```

Octave mediante el comando `rlocus` muestra la Fig. 12.17.

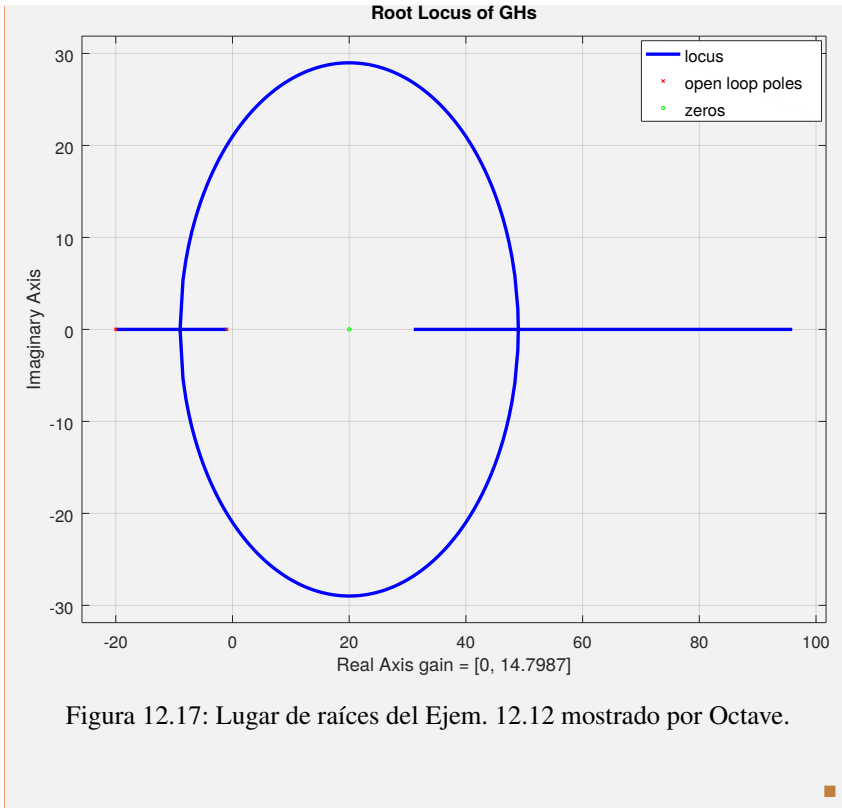


Figura 12.17: Lugar de raíces del Ejem. 12.12 mostrado por Octave.

## 12.5. Conclusiones

En base a lo presentado en el capítulo, podemos concluir que el LR es una herramienta de suma importancia para el análisis de la estabilidad y el desempeño transitorio de los sistemas LTI. Adicionalmente, mediante un estudio cuidadoso del lugar de raíces (LR) es posible proceder al diseño de controladores PID o bien compensadores de adelanto-atraso como se mostrará en capítulos posteriores.

Es de destacar, que a pesar del transcurso del tiempo, el LR sigue siendo una herramienta de análisis útil a la que el ingeniero de control puede recurrir para tener un bosquejo preliminar rápido de la situación a la que se encuentra.

Finalmente, en este capítulo muestra una serie de ejemplos a fin de ayudar a la comprensión del tema y así como los comandos de Octave que facilita la construcción de los diagramas en la computadora.

## 12.6. Pensemos

1. En un sistema realimentado para mejorar su tiempo de respuesta, ¿cómo deben estar ubicada sus raíces dominantes?
  - En  $\mathbb{C}^-$  cerca del eje imaginario.       Es indistinto.
  - En  $\mathbb{C}^-$  lejos del eje imaginario.       Ninguna de las anteriores.
2. Considere un sistema de primer orden con tiempo muerto controlado con un controlador proporcional con ganancia  $K_r$  con retroalimentación unitaria y negativa y, el elemento de control final también tiene ganancia unitaria y dinámica despreciable. Si se estudia el lugar de raíces utilizando una aproximación de Padé de primer orden para el tiempo muerto se puede concluir que:
  - El sistema es absolutamente estable  $\forall K_r \geq 0$ .
  - El sistema posee ganancia última.
  - Dependiendo del valor de  $K_r$ , se pueden obtener respuestas subamortiguadas.
  - Al aumentar  $K_r$  el polo de lazo cerrado se aleja del eje imaginario.
  - Ninguna de las anteriores.
3. En el estudio de la estabilidad de un sistema realimentado con un controlador proporcional y realimentación unitaria, se ha determinado que su ecuación característica de lazo abierto posee 3 raíces reales negativas. Dicho sistema de control será:
  - Estable  $\forall K_r > 0$ .       Estable en un intervalo de  $K_r > 0$ .
  - Inestable  $\forall K_r > 0$ .       Ninguna de las respuestas anteriores.
4. Un sistema de tercer orden cuyos polos de lazo abierto son  $p_1 = -3$  y  $p_{2-3} = -1 \pm j3$ , es realimentado con un controlador proporcional. Dicho sistema realimentado es estable  $\forall K_r \geq 0$ ?     **SI**     **NO**
5. En el lugar de las raíces se dice que el número de ramas es igual al número de polos de  $G(s)H(s)$ . Si se asume que  $G(s) = Gp(s)Gm(s)Gv(s)$  y  $H(s) = C(s)$  entonces,
  - (a) cuando el sistema es realimentado con un controlador proporcional, la cantidad de ramas es igual a la cantidad de polos de  $G(s)$ .
    - Si**     **No**
  - (b) ¿Es esto cierto si se realimenta al sistema con un controlador PD?
    - Si**     **No**
  - (c) ¿También es cierto con un PI o PID?     **Si**     **No**

## 12.7. Problemas

**Problema 12.1** Dadas las siguientes funciones de transferencia:

1.  $G(s) = 4/(s+2)(s+1)$ ,
2.  $G(s) = 1/(2s+1)(s+1)$ ,
3.  $G(s) = 6(s+3)/[(s+4)(s-2)]$ ,
4.  $G(s) = (s+1)/[(s+2)(s+4)]$ ,
5.  $G(s) = (s-1)/[(s+2)(s+4)]$ ,

6.  $G(s) = (-s + 1)/[(s + 2)(s + 4)]$ .
- Identifique el número de polos y ceros a lazo abierto.
  - Represéntelos en el plano complejo.
  - Marque el lugar de raíces solamente sobre el eje real para cuando  $K > 0$ , (realimentación negativa).

**Problema 12.2** Trace a mano alzada los diagramas de los lugares de las raíces para las configuraciones de polos y ceros de lazo abierto indicadas en las figuras (Fig. 12.18). Considere solamente realimentación negativa ( $K > 0$ ). Haga comentarios sobre la estabilidad de los diferentes casos.

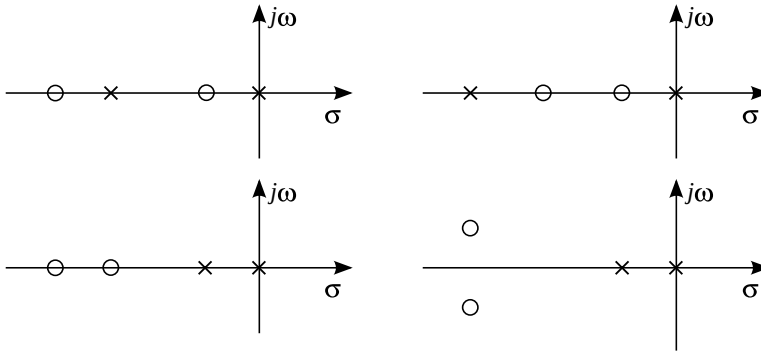


Figura 12.18

**Problema 12.3** Considere un sistema realimentado cuya función de transferencia de la cadena de lazo abierto  $G(s)H(s)$  es,

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(Ts + 1)}$$

- ¿Cuanto debe ser la variación de  $K^*$  para que el valor del coeficiente de amortiguamiento del sistema en lazo cerrado pase de valer 0.2 a valer 0.6?
- Calcular el valor del tiempo de establecimiento para cuando la banda de tolerancia de estado estacionario es del  $\pm 2\%$ , y explicar el efecto que tiene sobre el mismo la variación del parámetro  $K^*$ .

**Problema 12.4** (a) Dibujar a mano alzada el diagrama de lugar de raíces para el sistema de control que se presenta en la Fig. 12.19.

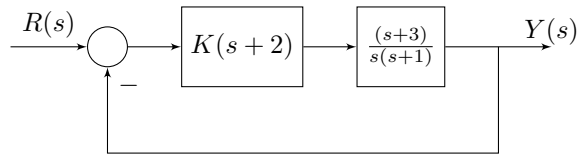


Figura 12.19

Calcule los puntos de dispersión y confluencia. Se supone a demás que la ganancia  $K$  es positiva.

- (b) Haga comentarios sobre la estabilidad del sistema en lazo cerrado.
- (c) Encuentre el o los valores de  $K$  para los cuales el sistema tiene dos raíces reales iguales. Si existe más de un valor. ¿Cuál escogería?.

**Problema 12.5** Considere el sistema de control que se muestre en la la Fig. 12.20,

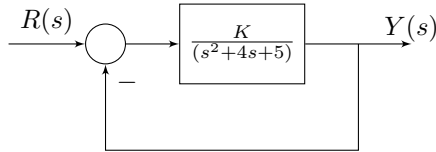


Figura 12.20

- (a) Trace el lugar de las raíces dicho sistema para  $K > 0$ .
- (b) ¿Es estable el sistema realimentado  $\forall K > 0$ ?
- (c) ¿Qué tipo de respuesta dinámica se obtienen con este sistema realimentado?.

**Problema 12.6** Trace el lugar de las raíces para el sistema de control de la Fig. 12.21.

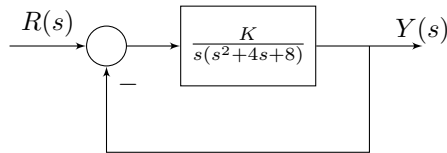


Figura 12.21

- (a) Trace el lugar de las raíces dicho sistema para  $K > 0$ .
- (b) ¿Es estable el sistema realimentado  $\forall K > 0$ ?
- (c) ¿Dónde están ubicados los polos de lazo cerrado si  $K = 2$ ?

**Problema 12.7** Considere el sistema de la Fig. 12.22,

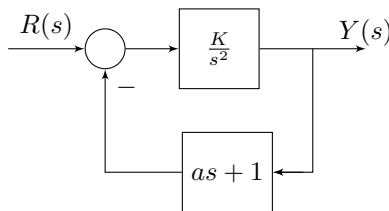


Figura 12.22



Determine los valores de la ganancia  $K$  y del coeficiente  $a$  de modo que los polos de lazo cerrado se ubiquen en  $s = -1 \pm j\sqrt{3}$ . Luego, utilizando el valor de  $a$  calculado, trace el lugar de las raíces  $\forall K > 0$ .

**Problema 12.8** Analice la estabilidad mediante el lugar de las raíces de un sistema de control cuya función de transferencia es

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(T_2s + 1)}{s^2(T_1s + 1)}$$

con  $K^* = K_p K_v K_r K_m$ , para los siguientes casos:

1.  $T_1 > T_2$ ,
2.  $T_1 = T_2$ ,
3.  $T_1 < T_2$ .

Indique además para cada caso analizado:

- (a) ¿Cómo influye en la estabilidad, el aumento de la ganancia del modo proporcional ( $K_r$ )?
- (b) ¿Cómo es en forma aproximada la respuesta al escalón en consigna para distintos valores de  $K_r$ ?

**Problema 12.9** Trace el diagrama del lugar de las raíces para el sistema de control que se muestra de la Fig. 12.23,

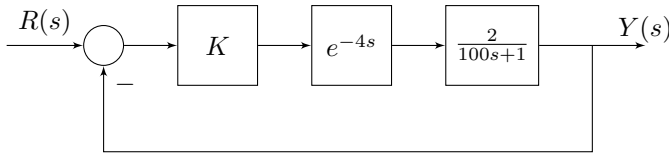


Figura 12.23

En cuanto al retardo considere una aproximación de Padé de primer orden.

Muestre que el sistema realimentado puede ser inestable para valores elevados de  $K$ .

**Problema 12.10** En la Fig. 12.24 se muestra el diagrama de bloques del piloto automático de vuelo del sistema de control de un proyectil.

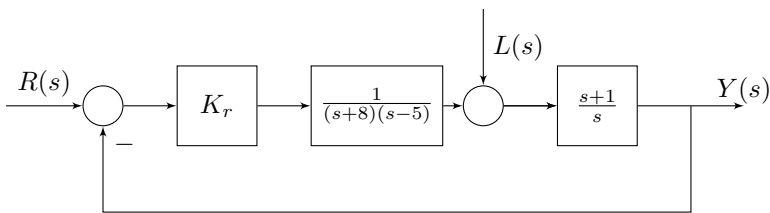


Figura 12.24

- Obtenga las funciones de transferencia de lazo cerrado que relacionan la salida controlada con la referencia y la carga.
- Determine el error de estado estacionario para cambios escalón en consigna y carga. Analice los resultados obtenidos.
- Trace el lugar geométrico de las raíces del sistema de control para  $K > 0$  y analice la estabilidad del sistema realimentado.

**Problema 12.11** Considere el sistema de control de la Fig. 12.25.

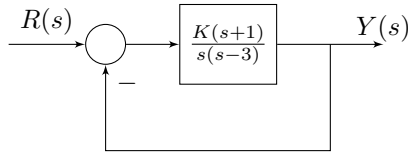


Figura 12.25

- Trace el diagrama del lugar de las raíces para  $K > 0$ .
- Adopte  $K = 10$  y determine los polos de lazo cerrado del sistema.
- Muestre que aunque los polos de lazo cerrado del inciso anterior, se ubican sobre el eje real en el semiplano complejo izquierdo, la curva de respuesta a un escalón unitario en consigna presenta un sobreimpulso, a pesar de que el sistema realimentado no es oscilatorio. ¿A qué atribuye este comportamiento? Simule numéricamente usando Octave.

**Problema 12.12** Considere el sistema de control de la Fig. 12.26.

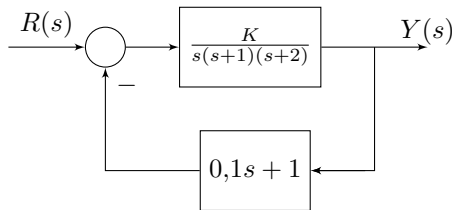


Figura 12.26

- Determine el valor de la ganancia  $K$  tal que los polos dominantes de lazo cerrado tengan una relación de amortiguamiento de  $\zeta = 0,5$ .
- Basándose en la ganancia calculada en el inciso anterior, ¿qué tipo se respuesta al escalón en consigna tiene el sistema realimentado? Simule numéricamente usando Octave.

**Problema 12.13** Considere el sistema de control de la Fig. 12.27.

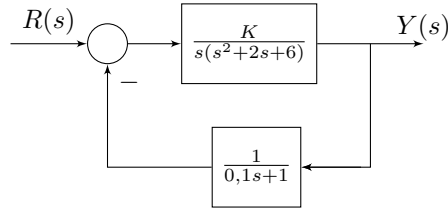


Figura 12.27

Trace el diagrama del lugar de las raíces. Calcule los polos de lazo cerrado para cuando  $K = 2$ .

**Problema 12.14** Para el sistema representado en la Fig. 12.28,

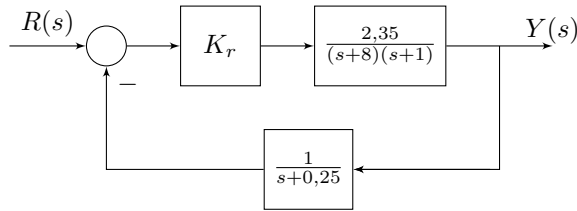


Figura 12.28

- (a) Realice el estudio de estabilidad por el lugar geométrico de las raíces.
- (b) Calcule el valor de la ganancia que debe tener un controlador proporcional para que el sistema responda sin sobre impulso y con un mínimo tiempo de establecimiento.
- (c) Encuentre el valor de  $K_r$  tal que el *offset*  $\leq 7\%$ . ¿Considera que el controlador adoptado en este inciso es adecuado? Justifique.
- (d) Calcule los márgenes de ganancia y de fase del sistema para el valor de  $K_r$  establecido en el inciso (b). ¿Es este un buen diseño? ¿Por qué?

**Problema 12.15** Considere un sistema cuya función de transferencia de lazo abierto es,

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 8s + 20)}$$

y suponga a demás realimentación unitaria ( $H(s) = 1$ ).

- (a) Encuentre la función de transferencia de lazo cerrado ( $Y(s)/R(s)$ ).
- (b) Trace el diagrama de lugar de raíces para  $K$  positivo.
- (c) Determine el valor de  $K$  que permite lograr un coeficiente de amortiguamiento  $\zeta = 0,5$  para las raíces dominantes.
- (d) Determine la ganancia última  $K_u$  y la frecuencia última  $\omega_u$ .

**Problema 12.16** Un servosistema con retorno unitario ( $H(s) = 1$ ) tiene una función de transferencia en lazo abierto,

$$G(s) = \frac{K}{s(0,01s + 1)(0,01s + 1)}$$

y suponga a demás realimentación unitaria ( $H(s) = 1$ ).

- Traza el diagrama del lugar de raíces del sistema para  $K > 0$ .
- Determine el valor de ganancia última  $K_u$ .
- Determine el valor de  $K$  necesario para que el sistema tenga un comportamiento críticamente amortiguado ( $\zeta = 1$ ).
- Determine el valor de  $K$  necesario para que el sistema tenga un comportamiento subamortiguado ( $\zeta = 0,23$ ).

**Problema 12.17** La función de transferencia en lazo abierto de un servosistema con realimentación unitaria ( $H(s) = 1$ ) es,

$$G(s) = \frac{K}{s^2(s + 2)(s + 5)}.$$

- Traza el diagrama del lugar de raíces del sistema. Indique los puntos de corte con el eje imaginario y los correspondientes valores de  $K_u$  y  $\omega_u$  en estos puntos (sólo para  $K > 0$ ).
- Si se cambia la función de transferencia de la cadena de retorno por  $H(s) = 2s + 1$ ; analice la estabilidad del sistema modificado en función de  $K$ . Estude el efecto producido en el diagrama del lugar de raíces por este cambio de  $H(s)$ .

**Problema 12.18** Un servosistema con retorno unitario tiene una función de transferencia en lazo abierto,

$$G(s) = \frac{K(0,025s + 1)(0,2s + 1)}{s^2(0,001s + 1)(0,005s + 1)}.$$

- Traza el diagrama del lugar de raíces  $\forall K > 0$ .
- Indique los puntos en los que el lugar corta el eje imaginario calculando los correspondientes valores de  $K_u$  y  $\omega_u$  en dichos puntos.

**Problema 12.19** La función de transferencia de lazo abierto de un servosistema con retorno unitario es,

$$G(s) = \frac{K(s + 3)}{s(s^2 + 2s + 2)(s + 5)(s + 6)}.$$

- Traza el diagrama del lugar de raíces en función de  $0 < K < \infty$ .
- Determine el valor de  $K$  para el cual el coeficiente de amortiguamiento de los polos complejos en lazo cerrado es  $\zeta = 0,4$ .
- Realice comentarios respecto a la estabilidad del sistema realimentado para distintos valores de  $K$ .
- Prediga las respuestas temporales del sistema frente a una entrada escalón en consigna para distintos valores de  $K$ .
- Verifique sus predicciones mediante simulaciones numéricas por computadora usando Octave.

**Problema 12.20** Se desea conocer la influencia que tiene sobre la estabilidad el valor de la constante de tiempo  $T$  incierta de un sistema de control realimentado negativamente donde,

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+1)(Ts+1)}$$

- Realice el lugar de raíces con  $T$  variable e indicar el rango de valores de  $T$  para el cual el sistema es estable.
- ¿Para qué valor de  $T$  el sistema tiene margen de ganancia  $MG = 2$ ?

**Problema 12.21** Después de aplicar un procedimiento de identificación, la función de transferencia de un intercambiador de calor entre la temperatura de salida y el caudal de fluido refrigerante resulta ser,

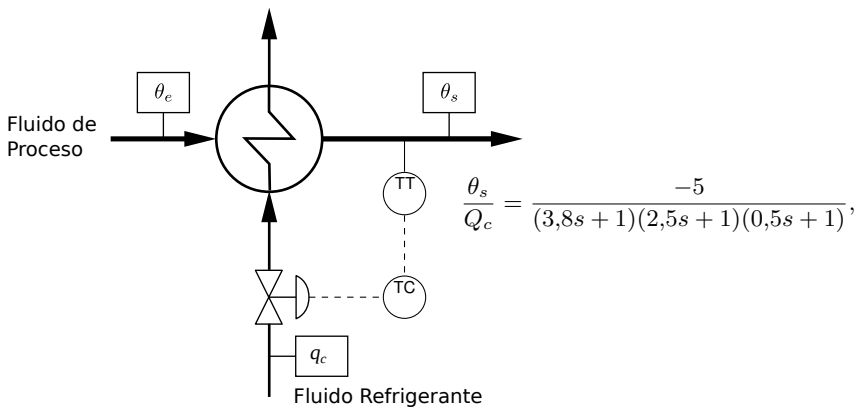


Figura 12.29

Asuma además que los elementos de medición y control final tienen ganancia unitaria y dinámica despreciable. Dado que el control de temperatura no es muy estricto, se propone un control proporcional.

- Adopte el signo del controlador y el tipo de acción para garantizar una realimentación negativa.
- Plantee el lugar geométrico de las raíces y analice la estabilidad del sistema realimentado.
- El procedimiento de identificación arroja que hay un  $\pm 10\%$  de incertidumbre en la ganancia de la función de transferencia del intercambiador. Asumiendo dicha incertidumbre paramétrica, determine el valor de la ganancia del modo proporcional que permite alcanzar un margen de ganancia igual a 2.

**Problema 12.22** Considere el sistema realimentado de la Fig. 12.30

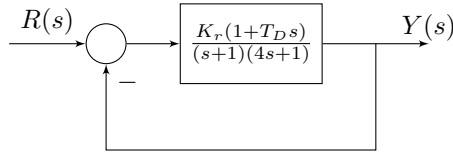


Figura 12.30

Se desea que el comportamiento dinámico a lazo cerrado cumpla con las siguientes especificaciones:

- un sobrevalor máximo comprendido entre los valores:  $5\% \leq A_1/kK \leq 20\%$ .
  - un tiempo de establecimiento (al 98%) acotado entre los valores:  $1,6 \leq T_{est} \leq 4$  unidades de tiempo.
  - una pulsación propia máxima de 4.
- (a) Representar en el plano complejo la región donde deberían estar ubicados los polos del sistema realimentado.
- (b) Adopte raíces para el sistema realimentado dentro de dicha región y determine los valores de  $K_r$  y  $T_D$  que permiten alcanzar dicho requerimiento.

**Problema 12.23** Una forma simplificada de la función de transferencia de lazo abierto de un avión con piloto automático en modo longitudinal es,

$$G(s) = \frac{K(s+a)}{s^2(s-b)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

con  $a > 0$  y  $b > 0$ .

Un sistema como este que involucra un polo de lazo abierto en el semiplano complejo derecho, lo que lleva a un sistema condicionalmente estable en lazo cerrado. Trazar el diagrama del lugar de raíces cuando  $a = b = 1$ ,  $\zeta = 0,5$  y  $\omega_n = 4$ . Determine el rango de ganancia  $K$  que asegura estabilidad.

## Capítulo 13

# Análisis de Sistemas LTI a Lazo Cerrado

En este capítulo se analiza el comportamiento dinámico y la estabilidad de los sistemas lineales cuando son realimentados con controladores, P, PI y PD. El análisis progresivo propuesto, crece en orden de dificultad a medida que aumenta el orden de la función de transferencia de la planta<sup>1</sup> y la complejidad del controlador. Por lo tanto, resulta sencillo extender el análisis aquí propuesto a sistemas de mayor orden. El desempeño de los sistemas de control y recomendaciones para el diseño de los controladores estudiados son incluidas a lo largo del capítulo.

### 13.1. Introducción

El desempeño en el régimen transitorio de los sistemas lineales realimentados puede ser fácilmente estudiado mediante la ubicación de las raíces de lazo cerrado en el plano complejo, y para ello la herramienta por excelencia es sin dudas el lugar de las raíces (LR). Como se anticipó en el Capítulo 12, el LR permite con un simple diagrama, que en algunos casos hasta puede ser trazado a mano alzada, realizar dicho estudio.

También como ya se ha detallado en capítulos anteriores la respuesta dinámica de un sistema, tanto a lazo abierto como cerrado, consta de dos partes, la primera de ellas -la respuesta transitoria- asociada fundamentalmente a los polos de la función de transferencia del sistema y, la segunda -la respuesta estacionaria- que consiste en el estado alcanzado pasado el régimen transitorio. Ambos tipos de respuestas serán estudiadas en este capítulo.

Por último, es de destacar que para los casos aquí estudiados, muchas de las conclusiones rápidamente obtenibles con el LR son posibles de demostrar

---

<sup>1</sup>Para todos los casos aquí estudiados se trata de plantas estables (autorregulables) a lazo abierto.

analíticamente en forma rigurosa, con un trabajo considerable arduo aún para los casos más simples; mostrando así, el inmenso potencial de la técnica del LR.

## 13.2. Control Proporcional de Sistemas LTI

Consideremos el sistema lineal realimentado que se muestra en la Fig. 1.11. Por simplicidad en el resto del capítulo se asumirá que, el elemento de control final y el sensor no tienen dinámica esto es,  $G_v(s) = K_v$  y  $G_m(s) = K_m$ . Dicha hipótesis surge de asumir que el comportamiento dinámico de la planta es el más importante y más limitante en comparación con el resto de los componentes del lazo de control. En realidad, esta suposición se fundamenta en que al momento de seleccionar el elemento de control final y el sensor, el diseñador busca en estos una dinámica despreciable frente a la planta, siendo esto una condición de diseño que resulta sumamente razonable.

### 13.2.1. Control P de sistemas de primer orden

Consideremos ahora el sistema de la Fig. 9.1 donde además para el análisis de esta sección se asume que la planta tiene una dinámica de primer orden tanto con la variable manipulada como con el ingreso de la perturbación, esto es,  $G_p(s) = K/(Ts + 1)$  y  $G_l(s) = K_l/(Ts + 1)$  respectivamente.

Las funciones de transferencia de lazo cerrado entre la salida controlada ( $Y(s)$ ) y la referencia ( $R(s)$ ), y la salida controlada y la perturbación ( $L(s)$ ) resultan,

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{R}(s)} = G_{lc}(s) = \frac{K^*}{Ts + 1 + K^*} = \frac{K^*/(1 + K^*)}{T^*s + 1} \quad (13.1)$$

e

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{L}(s)} = G_{lc}(s) = \frac{K_l}{Ts + 1 + K^*} = \frac{K_l/(1 + K^*)}{T^*s + 1}, \quad (13.2)$$

donde se define,

$$K^* := K_p K_m K_v K_r, \quad (13.3)$$

y

$$T^* := \frac{T}{(1 + K^*)}. \quad (13.4)$$

#### Estudio de la variación del offset con el aumento de $K_r$

Intuitivamente lo que se piensa es que, si el sistema está bajo control, cualquier perturbación de entrada puede ser *eliminada* y que todo cambio en consigna puede ser seguido sin problemas, alcanzándose siempre los estados estacionarios deseados. La cruda realidad es que esto no siempre es así.

En el lenguaje del control de procesos se suele hablar de offset, que en términos generales puede ser interpretado como un *error* entre la salida controlada



y la consigna una vez *pasado el transitorio*. Para ello, buscando más precisión en su definición e interpretación física, se introduce las siguientes definiciones.

**Definición 13.2.1 — Offset Absoluto para un Cambio en Consigna.** Es la diferencia en el estado estacionario entre la consigna y variable controlada, para cuando se tiene un cambio escalón en la consigna del sistema de control. Esto es,

$$\text{offset})_r = \hat{r}(\infty) - \hat{y}(\infty) . \quad (13.5)$$

Luego, mediante el TVF, el offset en carga puede ser calculado como,

$$\text{offset})_r = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{r}(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{R}(s) - \lim_{s \rightarrow 0} s\hat{Y}(s) . \quad (13.6)$$

Note que,

1. para el cálculo del offset en consigna se asume que mientras dure el cambio en consigna no se produce ningún ingreso de perturbación por la variable de carga, esto es lo que en el Capítulo 1 se designó como problema de control.
2. El offset en consigna es igual al error en estado estacionario definido en (9.22) para cuando  $R(s)$  es un escalón. Esto es,  $\text{offset})_r = \hat{e}(\infty)$ , es una expresión que surge de la resolución del diagrama de bloques de la Fig. 9.1 con  $K_m = K_t$ . De otro modo, el  $\text{offset})_r$  no es el error en estado estacionario.
3. Además, si resolvemos el diagrama de bloques de dicha figura teniendo como entrada  $R$  y salida  $E$  se tiene que,

$$\hat{E}(s) = K_m \frac{1}{1 + C(s)G_v(s)G_p(s)G_m(s)} \hat{R}(s) . \quad (13.7)$$

**Definición 13.2.2 — Offset Absoluto para un Cambio en Carga.** Es la diferencia en el estado estacionario entre la consigna y la variable controlada, para cuando se tiene un cambio escalón en la variable de carga del sistema de control. Esto es,

$$\text{offset})_l = \hat{r}(\infty) - \hat{y}(\infty) . \quad (13.8)$$

Note que, las Ecs. 13.5 y 13.8 son escritas en variables de desviación. En consecuencia, en el caso del offset en carga, por tratarse de un problema de regulación,  $\hat{r}(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$ , ya que no hay cambios en consigna. Para una mejor comprensión de esto se sugiere consultar el Capítulo 1, para entender la diferencia entre el problema de control y regulación).

En este punto es de destacar que de acuerdo con la definición del offset en carga (Def. 13.2.2), el  $offset)_l$  resultaría negativa, lo que deber ser interpretado como que el valor de  $y(\infty) > r(\infty)$ .

Mediante el TVF, el offset en carga puede ser calculado como,

$$offset)_l = - \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{y}(t) = - \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{Y}(s) . \quad (13.9)$$

Dado que para los ingenieros resulta mucho más gráfico hablar en términos porcentuales las definiciones anteriores puede ser reescritas para tal fin como se detalla a continuación.

**Definición 13.2.3 — Offset Relativo para un Cambio en Consigna.** Es la relación entre el offset absoluto para un cambio en consigna y al cambio escalón en la consigna. Esto es,

$$offset)_r \% = \frac{offset)_r}{k} 100 . \quad (13.10)$$

**Definición 13.2.4 — Offset Relativo para un Cambio en Carga.** Es la relación entre el offset absoluto para un cambio en carga y la magnitud del cambio escalón en la carga y a la ganancia de la función de transferencia de lazo abierto por donde ingresa dicho cambio. Esto es,

$$offset)_l \% = \frac{offset)_l}{kK_l} 100 . \quad (13.11)$$

Note que, de acuerdo con la Ec. 13.2 la ganancia de la función de transferencia de lazo abierto por donde ingresa la carga es  $K_l$ .

Volviendo ahora al problema original del control P de un sistema de primer orden, el offset absoluto en consigna puede ser evaluado a partir de la Ec. 13.6. Dado que se asume que se tiene un cambio escalón en consigna ( $R(s) = k/s$ ), y teniendo en cuenta la función de transferencia de lazo cerrado entre la variable de control y la consigna (13.1) se tiene que,

$$\begin{aligned} offset)_r &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s} - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K^*/(1+K^*) k}{T^*s + 1} \frac{1}{s} \\ &= k - \frac{kK^*}{1+K^*} = \frac{k}{1+K^*} . \end{aligned} \quad (13.12)$$

Por tanto, el offset relativo para cambio en consigna resulta,

$$offset)_r \% = \frac{1}{1+K^*} 100 . \quad (13.13)$$

Con similar razonamiento es posible determinar el offset absoluto y relativo para un cambio en carga. En este punto, se debe tener en cuenta que se asume considerar un cambio escalón en la carga ( $L(s) = k/s$ ), y por tanto se debe considerar la función de transferencia entre la salida controlada y la carga (13.2). Así,

$$\begin{aligned} \text{offset}_l &= - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_l / (1 + K^*) k}{(T^* s + 1) s} \\ &= - \frac{k K_l}{1 + K^*} . \end{aligned} \quad (13.14)$$

y entonces,

$$\text{offset}_l \% = - \frac{1}{1 + K^*} 100 . \quad (13.15)$$

Si bien los resultados de las Ecs. 13.13 y 13.15 son similares, los problemas físicos que se están tratando son considerablemente distintos. Esto se trata de clarificar con la Fig. 13.1.

En el problema de control, el offset en consigna representa la distancia que le falta a la variable de control para que alcance a la nueva consigna y por tanto alcanzar el nuevo punto de operación deseado. Mientras que, en el problema de regulación el offset en carga es la distancia que le falta a la variable de control para retornar a la consigna inicial y por tanto, hacer regresar el sistema al punto de operación original.

Lo más drástico de estos resultados, es que tanto el offset en consigna como en carga ambos son distintos de cero, de manera que, un cambio en consigna o en carga conducen a un error permanente que no puede ser eliminado. Esto último no habla bien del control proporcional al momento de evaluar la performance estacionaria de un sistema de control. Lo único que se tiene a favor de acuerdo con las Ecs. 13.13 y 13.15 (o bien, 13.12 y 13.14) es que el aumento de la ganancia del modo proporcional reduce el offset. Sólo lo podríamos eliminarlo si  $K_r = \infty$ , lo cual es físicamente imposible.

Finalmente, note que estos resultados se condicen con los obtenidos en la Rem. ???. Esto es, la función de transferencia de lazo abierto no tiene la cantidad de integradores necesarios como para eliminar el error pasado el transitorio.

### Constante de tiempo de lazo cerrado

La constante de tiempo de lazo cerrado viene dada por la definición 13.4 y es la misma tanto para un cambio en carga como en consigna, y por tanto resulta fácil concluir que,

1. si aumenta la ganancia del modo proporcional entonces la constante de tiempo de lazo cerrado disminuye.

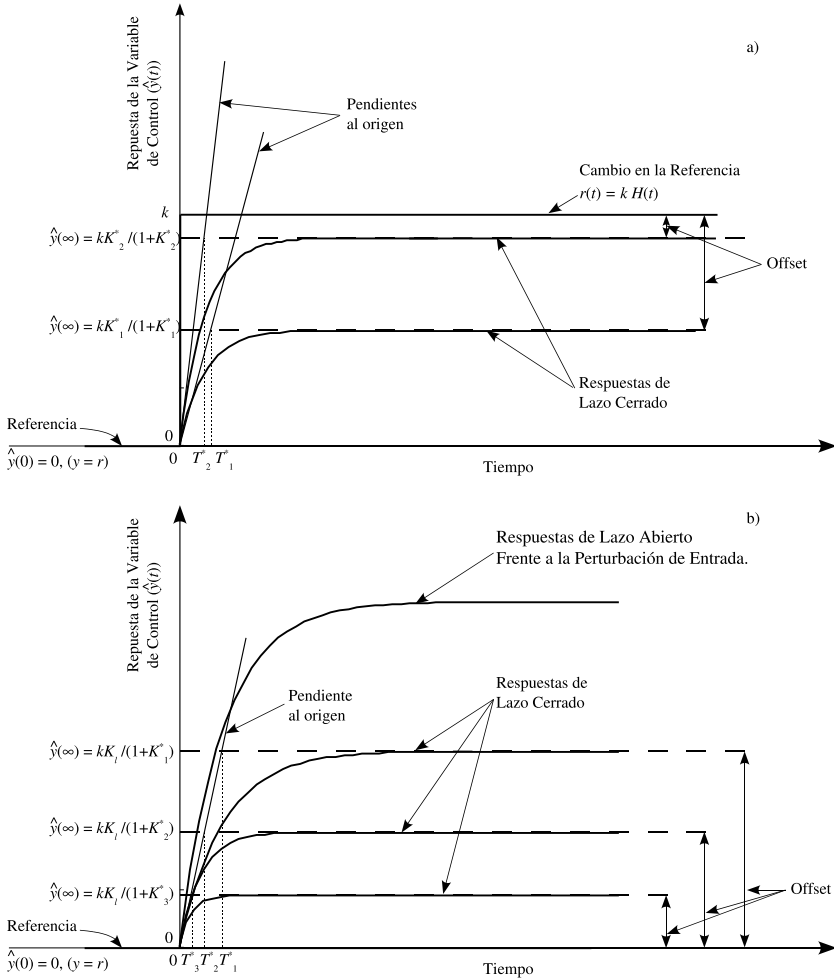


Figura 13.1: a) Respuestas en el tiempo del sistema de primer orden para un cambio escalón en consigna. Aquí,  $K_2^* > K_1^*$ . b) Respuestas en el tiempo del sistema de primer orden para un cambio escalón en carga. Aquí,  $K_3^* > K_2^* > K_1^*$ .

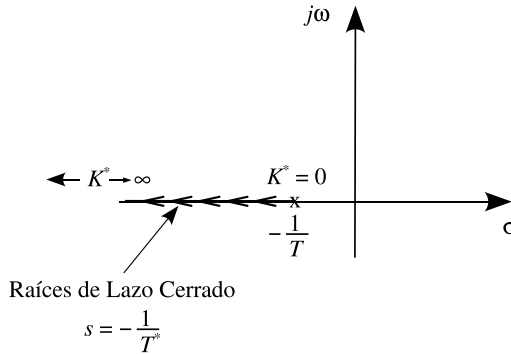


Figura 13.2: Lugar geométrico de las raíces para el sistema de primer orden con controlador P.

2. Ya que la función de transferencia de lazo cerrado es de primer orden y teniendo en cuenta lo expresado en el Capítulo 3, el tiempo de establecimiento del sistema operando a lazo cerrado resulta,  $T_{est} = 4T^*$ . Entonces, el aumento de la ganancia  $K_r$  implica una disminución del tiempo de establecimiento y por tanto el sistema de primer orden en lazo cerrado con controlador P responde cada vez más rápido tanto para los cambios en consigna como en carga.
3. Notar que el tiempo de establecimiento a lazo abierto es  $4T$  y  $T > T^*$ , de manera que el sistema en lazo cerrado responde más rápido que a lazo abierto.

### Raíces del denominador de lazo cerrado con el aumento de $K_r$

Siendo la ecuación característica de lazo cerrado,  $D(s) = T^*s + 1$  surge inmediatamente que las raíces de lazo cerrado a medida que cambia la ganancia del modo proporcional resultan ser,  $s = -1/T^*$ . Por tanto, dichas raíces se alejan del eje imaginario con el aumento de  $K_r$ , de manera que es de esperar que la exponencial de la respuesta temporal decrezca más rápidamente, siendo este un resultado que coincide con el anterior.

En consecuencia, el lugar de las raíces para este caso (el cual también puede ser construido a partir de la aplicación de las reglas del lugar de geométrico de las raíces enunciadas en el Capítulo 12), resulta ser el que se muestra en la Fig. 13.2.

De la observación del lugar de las raíces resulta fácil concluir que tanto para el cambio en consigna como en carga,

1. el sistema es absolutamente estable  $\forall K_r/0 \leq K_r < \infty$ .

2. El tiempo de estabilización disminuye, ya que las raíces de lazo cerrado crecen negativamente alejándose del eje imaginario y por tanto, las constantes de tiempo disminuyen.

Estos resultados se pueden verificar en las respuestas temporales de la Fig. 13.1.

### Pendiente de la respuesta en el tiempo

La respuesta en el tiempo del sistema en lazo cerrado resulta ser,

- para cambio en consigna:

$$\hat{y}(t) = \frac{kK^*}{1 + K^*} \left(1 - e^{-t/T^*}\right), \quad (13.16)$$

- para cambio en carga:

$$\hat{y}(t) = \frac{kK_l}{1 + K^*} \left(1 - e^{-t/T^*}\right). \quad (13.17)$$

Por tanto, resulta sencillo probar que las pendientes de ambas respuestas al escalón resultan ser,

- para cambio en consigna:

$$\frac{d\hat{y}(t)}{dt} = -\frac{kK^*}{1 + K^*} \left(-\frac{1}{T^*} e^{-t/T^*}\right), \quad (13.18)$$

- para cambio en carga:

$$\frac{d\hat{y}(t)}{dt} = -\frac{kK_l}{1 + K^*} \left(-\frac{1}{T^*} e^{-t/T^*}\right). \quad (13.19)$$

Así, la pendiente al origen en este caso particular resulta ser,

- para cambio en consigna:

$$\left(\frac{d\hat{y}(t)}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{kK^*}{1 + K^*} \left(-\frac{1}{T^*}\right) = \frac{kK^*}{T}, \quad (13.20)$$

- para cambio en carga:

$$\left(\frac{d\hat{y}(t)}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{kK_l}{1 + K^*} \left(-\frac{1}{T^*}\right) = \frac{kK_l}{T}. \quad (13.21)$$

Note que,

1. para un cambio en consigna la pendiente al origen crece a medida que aumenta la ganancia del modo proporcional mientras que,
2. para un cambio en carga la pendiente al origen permanece constante a medida que la ganancia del modo proporcional cambia.

Para una mejor comprensión de estos resultados se sugiere ver las respuestas temporales de la Fig. 13.1.

### 13.2.2. Control P de sistemas de segundo orden

Consideremos ahora el sistema de la Fig. 9.1 donde además para el análisis de esta sección se asume que la planta tiene una dinámica de segundo orden tanto con la variable manipulada como con el ingreso de la perturbación, esto es,  $G_p(s) = K/(T_1s + 1)(T_2s + 1)$  y  $G_l(s) = K_l/(T_1s + 1)(T_2s + 1)$ .

Las funciones de transferencia de lazo cerrado entre la salida controlada ( $Y(s)$ ) con la referencia ( $R(s)$ ) y la perturbación ( $L(s)$ ) resultan,

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{R}(s)} = G_{lc}(s) = \frac{K^*}{(T_1s + 1)(T_2s + 1) + K^*} = \frac{K^*}{T_1T_2s^2 + (T_1 + T_2)s + 1 + K^*} \quad (13.22)$$

y

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{L}(s)} = G_{lc}(s) = \frac{K_l}{(T_1s + 1)(T_2s + 1) + K^*} = \frac{K_l}{T_1T_2s^2 + (T_1 + T_2)s + 1 + K^*}, \quad (13.23)$$

donde  $K^*$  se define en forma similar que en la sección anterior. Las funciones de transferencia de lazo cerrado anteriores pueden ser reescritas con un denominador bajo la forma canónica normalizada, esto es,  $D(s) = T^{*2}s^2 + 2\zeta T^*s + 1$ . Así,

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{R}(s)} = \frac{K^*/(1 + k^*)}{\frac{T_1T_2}{1+K^*}s^2 + \frac{T_1+T_2}{1+K^*}s + 1}, \quad (13.24)$$

y

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{L}(s)} = \frac{K_l/(1 + k^*)}{\frac{T_1T_2}{1+K^*}s^2 + \frac{T_1+T_2}{1+K^*}s + 1}. \quad (13.25)$$

Notar que ambos denominadores son iguales y donde por comparación con el denominador escrito bajo la forma canónica normalizada surge que,

$$T^* = \sqrt{\frac{T_1T_2}{1 + K^*}}, \quad (13.26)$$

y

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1T_2}} \frac{1}{\sqrt{1 + K^*}}. \quad (13.27)$$

#### Estudio de la variación del offset con el aumento de $K_r$

Para el sistema de segundo orden realimentado con el controlador P, es posible determinar el offset absoluto en consigna basándose en la Def. 13.2.1 y la Ec. 13.6,

$$\begin{aligned}
 \text{offset})_r &= \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{R}(s) - \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{Y}(s) \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s} - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K^*}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1 + k^*} \frac{k}{s} \\
 &= k - \frac{k K^*}{1 + K^*} = \frac{k}{1 + K^*} .
 \end{aligned} \tag{13.28}$$

Similarmente, para el cálculo del offset absoluto en carga, basándose en la Def. 13.2.2 y en la Ec. 13.9 se tiene,

$$\begin{aligned}
 \text{offset})_l &= - \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{Y}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-K_l}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1 + k^*} \frac{k}{s} \\
 &= - \frac{K_l k}{1 + K^*} .
 \end{aligned} \tag{13.29}$$

Por tanto, basándose en las Def. 13.2.3 y 13.2.4, los correspondientes offset relativos resultan,

$$\text{offset})_r \% = | \text{offset})_l \% | = \frac{1}{1 + K^*} 100 . \tag{13.30}$$

Notar que,

1. la Ec. (13.28) arroja como resultado que el offset en consigna es distinto de cero lo que resulta coincidente con la Rem. ??, ya que la función de transferencia de lazo abierto ( $G_{la}(s) = G(s)H(s)$ ) no aporta la cantidad de integradores necesarios como para eliminar el error en estado estacionario,
2. todas las expresiones del offset son coincidentes con las obtenidas para un sistema de primer orden realimentado con controlador proporcional,
3. el incremento del orden del sistema no cambió cambió la expresión final del offset,
4. de manera que, en todos los casos el aumento de la ganancia del modo proporcional reduce el offset.

### Variación del coeficiente de amortiguamiento con el aumento de $K_r$

De acuerdo con la Ec. 13.27 resulta sencillo deducir que,

1. el coeficiente de amortiguamiento será siempre positivo ya que se asume que  $T_1$  y  $T_2$  son positivos,
2. el aumento de la ganancia del modo proporcional reduce el valor de  $\zeta$  y, sólo si  $K_r \rightarrow \infty$  entonces  $\zeta \rightarrow 0$ .
3. En consecuencia,  $\zeta$  nunca podrá tomar valores negativos y por tanto, el sistema será *estable*  $\forall 0 \leq K_r < \infty$ .



### Variación del pseudoperíodo con el aumento de $K_r$

Dado que el denominador de la función de transferencia de lazo cerrado es de segundo orden entonces, para cuando se tiene raíces de lazo cerrado complejas conjugadas, el sistema realimentado tendrá respuestas subamortiguadas. En dicho caso, recordando lo expresado en el Capítulo 3, teniendo la definición de la pulsación propia, el pseudoperíodo (Ec. 3.48) resulta,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi T^*}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (13.31)$$

Note que, con el aumento de  $K_r$ ,  $T^*$  y  $1/\sqrt{1 - \zeta^2}$  disminuyen en consecuencia el pseudoperíodo  $\tau$  disminuye y la pulsación propia  $\omega_p$  aumenta. Por tanto, es de esperar que cuando se tengan respuestas de lazo cerrado submortiguadas, el aumento de la ganancia del modo proporcional lleve a respuestas con un aumento de la frecuencia de oscilación.

### Variación del tiempo de establecimiento con el aumento de $K_r$

Para cuando las respuestas de lazo cerrado sean subamortiguadas, de acuerdo con lo expresado en el Capítulo 3, el tiempo de establecimiento (3.53) resulta ser,

$$\begin{aligned} T_{est} &= \frac{4T^*}{\zeta} = 4 \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{\sqrt{1 + K^*}} \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2}} \frac{1}{\sqrt{1 + K^*}}} \\ &= 8 \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \end{aligned} \quad (13.32)$$

Por tanto de acuerdo con la Ec. (13.32) es posible concluir que el aumento de la ganancia del modo proporcional no afecta el tiempo de establecimiento de las respuestas subamortiguadas de lazo cerrado.

Por otro lado, también es posible demostrar en forma algo más laboriosa que el aumento de  $K_r$  conduce a una disminución del tiempo de establecimiento para cuando se tiene respuestas sobreamortiguadas a lazo cerrado, existiendo un mínimo tiempo de establecimiento para las respuestas críticamente amortiguadas, coincidente con el tiempo de establecimiento de las respuestas subamortiguadas.

### Variación de las raíces del denominador de lazo cerrado con el aumento de $K_r$

Como se comentó en el Capítulo 3, las raíces de los sistemas de segundo orden son dependientes del coeficiente de amortiguamiento y siendo las raíces de lazo cerrado,

$$s_{1-2} = \frac{-\zeta}{T^*} \pm j \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T^*} \quad (13.33)$$

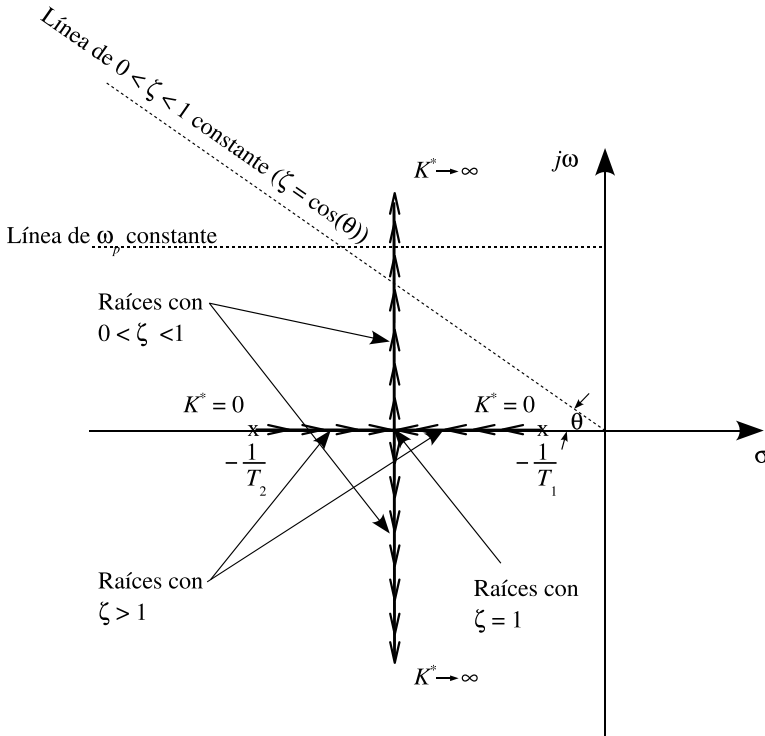


Figura 13.3: Lugar geométrico de las raíces para el sistema de segundo orden con controlador P.

Entonces dado que el aumento de  $K_r$  reduce el coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$  entonces, es de esperar que en principio (para valores de  $K_r$  chicos) se tendrá raíces reales distintas ( $\zeta > 1$ ) asociadas a respuestas sobreamortiguadas, luego al aumentar  $K_r$  se obtendrá dos raíces reales iguales ( $\zeta = 1$ ) asociadas a respuestas críticamente amortiguadas y finalmente, para valores de  $K_r$  más grandes se tendrá raíces complejas conjugadas ( $0 < \zeta < 1$ ) alcanzando respuestas subamortiguadas. Es de remarcar que en ningún caso se tendrá respuestas inestables asociadas con raíces a parte real positiva ( $\zeta < 0$ ).

$$G_{la}(s) = G(s)H(s) = \frac{K^*}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \tag{13.34}$$

Basado en esta última ecuación y mediante la aplicación de las reglas que rigen el lugar geométrico de las raíces se obtiene el lugar de las raíces para  $K^* > 0$  para el sistema de segundo orden realimentado con controlador proporcional, el que se muestra en la 13.3.

De la observación del lugar de las raíces resulta fácil concluir que tanto para el cambio en consigna como en carga,

1. el sistema es absolutamente estable  $\forall K_r/0 \leq K_r < \infty$  ya que no hay raíces de lazo cerrado en el semiplano complejo derecho.
2. En principio para cuando se tiene raíces reales distintas ( $\zeta > 1$ ) el tiempo de estabilización disminuye ya que la rama dominante del lugar de raíces se aleja del eje imaginario. Luego, para cuando se tiene raíces reales iguales ( $\zeta = 1$ ) se tiene el menor tiempo de establecimiento (asociado las raíces dominantes más alejadas del eje imaginario) y finalmente, para cuando se tiene raíces complejas conjugadas ( $0 < \zeta < 1$ ) el tiempo de establecimiento permanece constante.
3. Claramente, el coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$  disminuye con el aumento de la ganancia del modo proporcional.
4. La pulsación propia aumenta con el aumento de  $K_r$ , haciendo respuestas con pseudoperíodo cada vez más cortos.

Este ejemplo muestra claramente la importancia de manejar el lugar de las raíces, ya que con un simple diagrama cualitativo que puede ser construido a mano alzada, se tiene una información rápida y precisa del desempeño del sistema a lazo cerrado en el dominio del tiempo.

Finalmente, en la Fig 13.4 se muestra las respuestas en el dominio del tiempo tanto para cambio escalón en consigna como en carga. Note que las conclusiones obtenidas anteriormente son visibles en dichas repuestas.

### 13.2.3. Control P de sistemas de tercer orden

Consideremos ahora el sistema de la Fig. 9.1 donde además para el análisis de esta sección se asume que la planta tiene una dinámica de tercer orden tanto con la variable manipulada como con el ingreso de la perturbación, esto es,  $G_p(s) = K/(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)$  y  $G_l(s) = K_l/(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)$ .

Las funciones de transferencia de lazo cerrado entre la salida controlada ( $Y(s)$ ) con la referencia ( $R(s)$ ) y la perturbación ( $L(s)$ ) resultan,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{Y}(s)}{\hat{R}(s)} &= G_{lc}(s) = \frac{K^*}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1) + K^*} \\ &= \frac{K^*}{T_1T_2T_3s^3 + (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)s^2 + (T_1 + T_2 + T_3)s + 1 + K^*} \end{aligned} \quad (13.35)$$

y

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{L}(s)} = G_{lc}(s) = \frac{K_l}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1) + K^*}$$

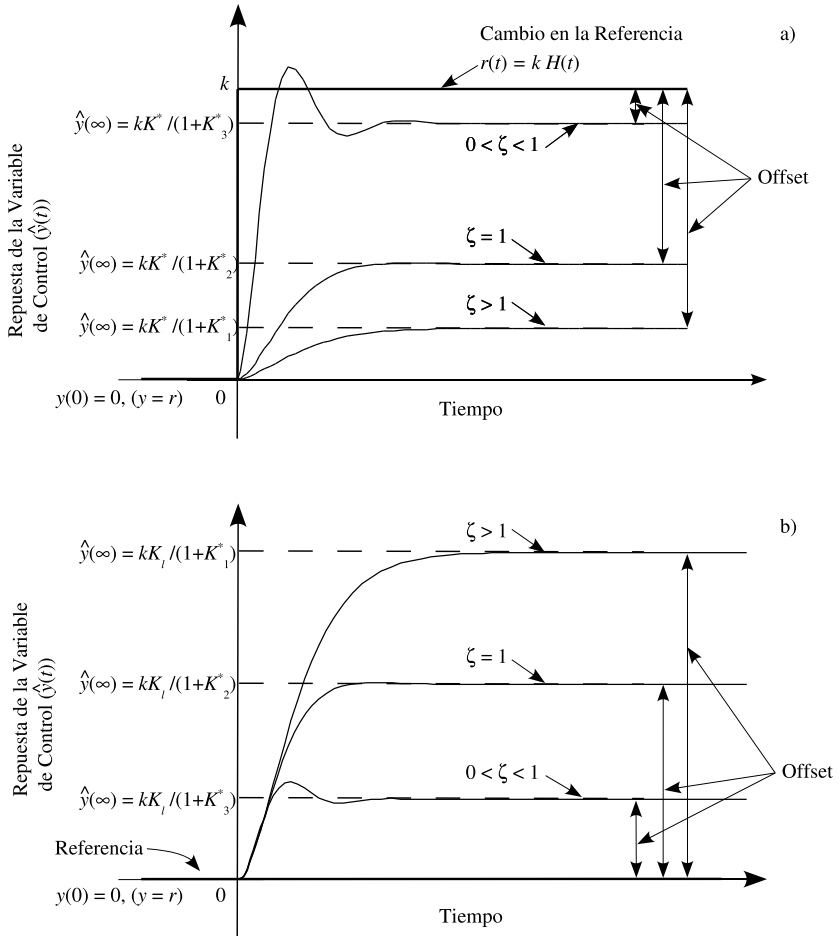


Figura 13.4: a) Respuestas en el tiempo del sistema de segundo orden para un cambio escalón en consigna. b) Respuestas en el tiempo del sistema de segundo orden para un cambio escalón en carga. Aquí, para ambos casos se asume que  $K_3^* > K_2^* > K_1^*$ .

$$= \frac{K_l}{T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + 1 + K^*} \cdot \quad (13.36)$$

Notar que los denominadores de ambas funciones de transferencia de lazo cerrado son iguales y de tercer orden. Por tanto la ecuación característica para ambos casos resulta,  $D(s) = T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + 1 + K^*$

### Estudio de la variación del offset con el aumento de $K_r$ .

Para el sistema de tercer orden realimentado con el controlador P, es posible determinar el offset absoluto en consigna basándose en la definición 13.5 y la Ec. 13.6,

$$\begin{aligned} \text{offset}_r &= \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{R}(s) - \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{Y}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s} \\ &\quad - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K^*}{T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + 1 + K^*} \frac{k}{s} \\ &= k - \frac{k K^*}{1 + K^*} = \frac{k}{1 + K^*} \cdot \end{aligned} \quad (13.37)$$

Similarmente, para el cálculo del offset absoluto en carga, basándose en la definición 13.8 y en la Ec. 13.9 se tiene,

$$\begin{aligned} \text{offset}_l &= - \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{Y}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-K_l}{T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + 1 + K^*} \frac{k}{s} \\ &= - \frac{K_l k}{1 + K^*} \cdot \end{aligned} \quad (13.38)$$

Por tanto, basándose en las definiciones 13.10 y 13.11, los correspondientes offset relativos resultan,

$$\text{offset}_r \% = | \text{offset}_l \% | = \frac{1}{1 + K^*} 100 \cdot \quad (13.39)$$

Notar que,

1. como se marcó anteriormente, el offset no puede ser eliminado por no disponer de los integradores necesarios en la función de transferencia de lazo abierto,  $G_{la}(s) = G(s)H(s)$  (ver Rem. 9.2),
2. todas las expresiones del offset son coincidentes con las obtenidas para un sistema de primero y segundo orden realimentado con controlador proporcional,

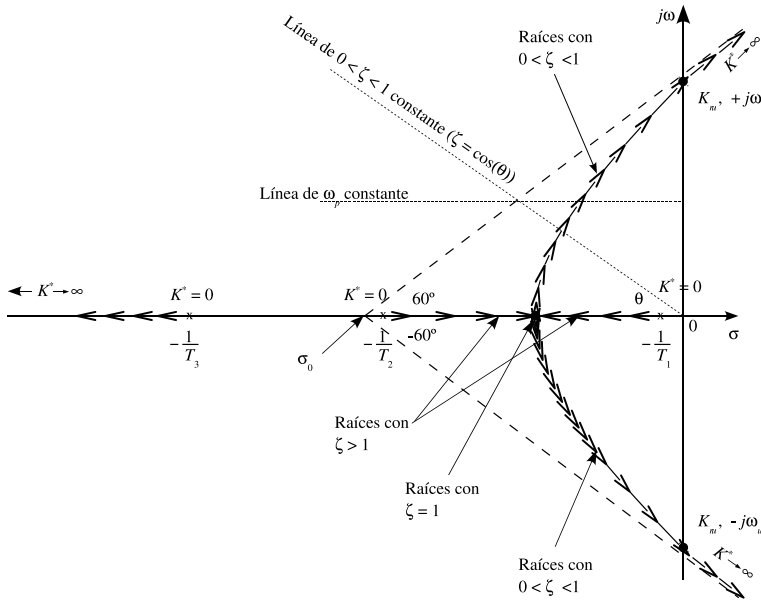


Figura 13.5: Lugar geométrico de la raíces para el sistema de segundo orden con controlador P.

3. el incremento del orden del sistema no cambió cambió la expresión final del offset,
4. de manera que, en todos los casos el aumento de la ganancia del modo proporcional reduce el offset.

**Estudio mediante el lugar geométrico de las raíces**

En este punto el lector habrá notado que muchas conclusiones respecto al comportamiento en el dominio del tiempo pueden ser obtenidas directamente del lugar geométrico de las raíces.

La función de transferencia de lazo abierto para la construcción del lugar de las raíces resulta,

$$G_{la}(s) = G(s)H(s) = \frac{K^*}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)} \tag{13.40}$$

Basado en esta última ecuación y mediante la aplicación de las reglas que rigen el lugar geométrico de las raíces, se obtiene el lugar de las raíces para  $K^* > 0$  para el sistema de tercer orden realimentado con controlador proporcional, el que se muestra en la Fig.13.5.

De la observación de la Fig. 13.5 se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. El coeficiente de amortiguamiento disminuye con el aumento de la ganancia del controlador desde valores positivos a negativos.
2. El sistema presenta estabilidad relativa, esto es, resulta asintóticamente estable para cuando ( $\zeta > 0$ ), críticamente estable para cuando ( $\zeta = 0$ ) e inestable para cuando ( $\zeta < 0$ ).
3. Para cuando se tiene respuestas subamortiguadas, el pseudoperíodo  $\tau$  disminuye con el aumento de  $K_r$  dando lugar a respuestas oscilatorias con un aumento de la frecuencia debido a un aumento de la frecuencia propia  $\omega_p$ .
4. El tiempo de establecimiento disminuye para cuando se tiene respuestas sobreamortiguadas ( $\zeta > 1$ ), alcanzando un mínimo tiempo de establecimiento para la respuesta críticamente amortiguada ( $\zeta = 1$ ). Finalmente, El tiempo de establecimiento crece para cuando se tiene respuestas subamortiguadas ( $0 < \zeta < 1$ )

Finalmente, en la Fig 13.6 se muestra las respuestas en el dominio del tiempo tanto para cambio escalón en consigna como en carga. Note que las conclusiones obtenidas anteriormente son visibles en dichas repuestas.

Es de remarcar que en este caso si el ingeniero de control con el afán de disminuir el offset puede optar por aumentar la ganancia del modo proporcional, poniendo cada vez más en riesgo la estabilidad del sistema, ya que es posible reducirlo pero a expensas de mover las raíces de lazo cerrado hacia el semiplano complejo derecho.

Por lo tanto, surge inmediatamente la pregunta, ¿ qué valor de  $K_r$  se debe adoptar?

Así, para esto, en la práctica se recurre a una regla heurística que busca una solución de compromiso entre entre el offset, los sobrevalores y el tiempo de establecimiento. Por lo general hay dos criterios tradicionalmente aceptados,

1. Adoptar un valor de  $K_r$  tal que  $0,23 \leq \zeta \leq 0,45$ . Este criterio busca una relación de decaimiento 1/4 y un pequeño tiempo de establecimiento, lo cual no es estrictamente cierto en sistemas de orden mayor o igual a 3.
2. Adoptar un valor de  $K_r$  tal que  $MG = 2$  y eventualmente, de ser posible, reajustarlo sacrificando margen de ganancia a fin de lograr que el  $30 \leq MF \leq 45$  intentando satisfacer ambos requerimientos simultáneamente. También es de remarcar que no siempre se logra satisfacer simultáneamente ambos requerimientos con un solo parámetro de ajuste.

### 13.3. Control Proporcional-Integral de Sistemas LTI

En esta sección se analizarán los sistemas lineales de primero y segundo orden estables a lazo abierto, cuando son realimentados con un controlador

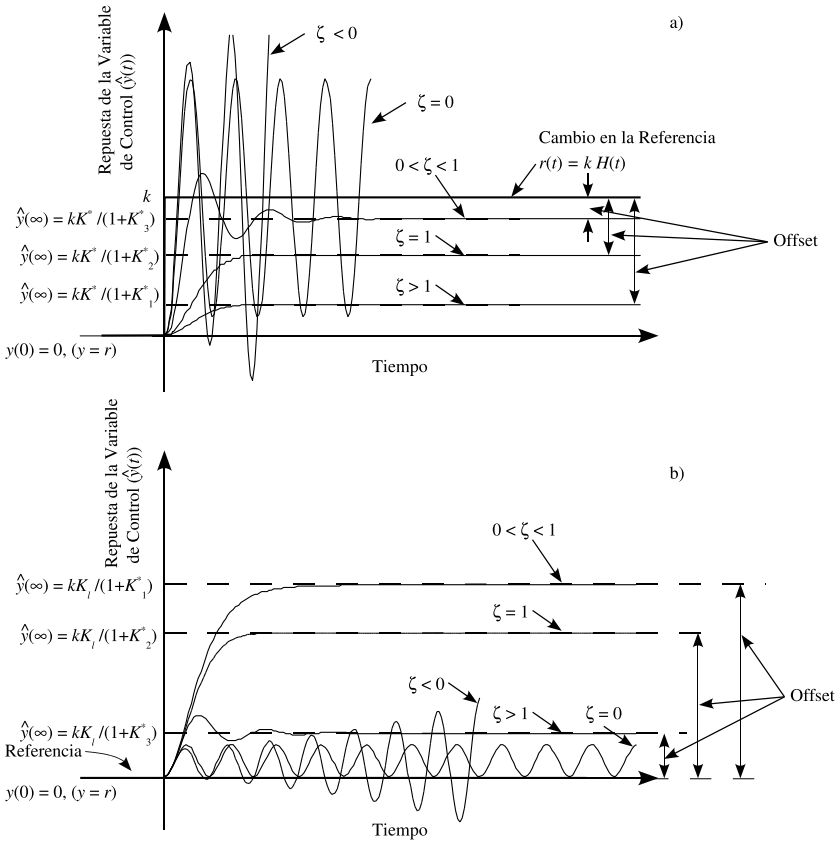


Figura 13.6: a) Respuestas en el tiempo del sistema de tercer orden para un cambio escalón en consigna. b) Respuestas en el tiempo del sistema de tercer orden para un cambio escalón en carga. Aquí, para ambos casos se asume que  $K_3^* > K_2^* > K_1^*$ .



proporcional-integral (PI). Se aspira que el lector en base a la metodología utilizada y a las conclusiones obtenidas, pueda extender fácilmente los resultados a problemas similares o bien más complejos.

### 13.3.1. Control PI de sistemas de primer orden

Consideremos ahora el sistema de la Fig. 9.1 donde además para el análisis de esta sección se asume que la planta tiene una dinámica de primer orden tanto con la variable manipulada como con el ingreso de la perturbación, esto es,  $G_p(s) = K/(Ts + 1)$  y  $G_l(s) = K_l/(Ts + 1)$ . Además, el sistema de control cuenta con un controlador PI cuya función de transferencia viene dada por la Ec. (13.15). También se asume que los elementos de control final y de medición tienen dinámica despreciable frente a la dinámica de la planta y por tanto, son aceptablemente bien modelados cada uno de ellos con una ganancia ( $G_v = K_v$  y  $G_m = K_m$  según Fig. 9.1).

Las funciones de transferencia de lazo cerrado entre la salida controlada ( $Y(s)$ ) y la referencia ( $R(s)$ ) y la salida controlada y la perturbación ( $L(s)$ ) resultan,

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{R}(s)} = G_{lc}(s) = \frac{K^*(T_I s + 1)}{T_I s(Ts + 1) + K^*(T_I s + 1)} \quad (13.41)$$

y

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{L}(s)} = G_{lc}(s) = \frac{K_l T_I s}{T_I s(Ts + 1) + K^*(T_I s + 1)} \quad (13.42)$$

donde  $K^*$  al igual que en secciones anteriores resulta ser la productoria de las ganancias de las funciones de transferencia de lazo abierto.

Notar que los denominadores de ambas funciones de transferencia de lazo cerrado son iguales y de segundo orden, por tanto la ecuación característica resulta,  $D(s) = T_I T s^2 + T_I (1 + K^*) s + K^*$ . Por comparación con el denominador escrito bajo la forma canónica normalizada surge que,

$$T^* = \sqrt{\frac{T_I T}{K^*}} \quad (13.43)$$

y

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{(1 + K^*)}{\sqrt{K^*}} \sqrt{\frac{T_I}{T}} \quad (13.44)$$

Note a partir de las Ecs. (13.41) y (13.42), y en comparación con el mismo problema estudiado en la Sección 13.2.1, que se tiene dos cosas para remarcar producto de la inclusión del modo integral. Esto es, i) el orden del denominador de lazo cerrado se incrementa en uno y ii) como es sabido, cuanto más polos tenga la ecuación característica, más riesgos de inestabilidad se tiene. Estos puntos se tratarán de dilucidar en las próximas secciones.

### Estudio de la variación del offset con el aumento de $K_r$ .

Para el sistema de primer orden realimentado con el controlador PI, es posible determinar el offset absoluto en consigna basándose en la Def. 13.2.1 y la Ec. 13.6,

$$\begin{aligned} \text{offset}_r &= \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{R}(s) - \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{Y}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \frac{k}{\cancel{s}} - \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \frac{T_I s + 1}{T^{*2} s^2 + 2\zeta T^* s + 1} \frac{k}{\cancel{s}} = k - k = 0 . \end{aligned} \quad (13.45)$$

Similarmente, para el cálculo del offset absoluto en carga, basándose en la Def. 13.2.2 y en la Ec. 13.9 se tiene,

$$\text{offset}_l = - \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{Y}(s) = - \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \frac{(K_I T_I / K^*) s}{T^{*2} s^2 + 2\zeta T^* s + 1} \frac{k}{\cancel{s}} = 0 . \quad (13.46)$$

Por tanto, basándose en las Def. 13.2.3 y 13.2.4, los correspondientes offset relativos también resultarán nulos.

Notar que,

1. la inclusión del modo integral es el responsable de la eliminación del offset ya que aporta el integrador necesario para lograr el seguimiento del escalón sin error pasado el transitorio (ver Rem. 9.2).
2. A partir de este resultado, es de esperar que, tanto para cambios escalón en consigna como en carga, pasado el transitorio el sistema no deje un error permanente cumpliendo un importante objetivo de performance. Esto es, alcanzar las nuevas consignas pedidas o bien, eliminar las perturbaciones.

### Variación del coeficiente de amortiguamiento con el aumento de $K_r$ .

De acuerdo con la Ec. 13.44 es posible deducir que,

1. para valores de  $K^*$  chicos la Ec. 13.44 se pueda aproximar a,

$$\zeta \approx \frac{1}{\sqrt{K^*}} \sqrt{\frac{T_I}{T}} ,$$

por lo que el aumento de  $K^*$  conduce a una disminución del coeficiente de amortiguamiento

2. Mientras que para valores de  $K^*$  grandes la Ec. 13.44 se pueda aproximar a,

$$\zeta \approx \sqrt{K^*} \sqrt{\frac{T_I}{T}} ,$$

por lo que el aumento de  $K^*$  conduce a un aumento del coeficiente de amortiguamiento.

3. De manera que, de acuerdo con el comportamiento deducido en los dos incisos anteriores debe existir un  $\zeta_{\min}$ .

Analíticamente es posible probar la existencia de dicho mínimo simplemente tomando,

$$\left( \frac{d\zeta}{dK^*} \right)_{T_I=\text{cte}} = 0 . \quad (13.47)$$

Así,

$$\left( \frac{d\zeta}{dK^*} \right)_{T_I=\text{cte}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_I}{T}} \frac{\sqrt{K^*} - (1 + K^*)^{\frac{1}{2}} (K^*)^{-1/2}}{K^*} = 0 ,$$

de lo que resulta,

$$2K^* - (1 + K^*) = 0$$

y por tanto el coeficiente de amortiguamiento alcanza su valor mínimo para cuando  $K^* = 1$  y dicho valor resulta,

$$\zeta_{\min} = \sqrt{\frac{T_I}{T}} . \quad (13.48)$$

La Fig. 13.7 muestra la variación del coeficiente de amortiguamiento con el aumento de la ganancia de lazo abierto  $K^*$  en forma paramétrica con los distintos valores de la relación  $T_I/T$ .

Claramente, dicha figura muestra,

1. las conclusiones obtenidas anteriormente respecto a la variabilidad del coeficiente de amortiguamiento con el aumento de  $K^*$  y además,
2. se observa que el aumento del tiempo de acción integral  $T_I$  puede llevar a tener respuestas de lazo cerrado sobreamortiguadas ( $\zeta > 1$ ) para todo  $K^* > 0$ . Mientras que para otros valores de  $T_I$  se puede tener  $0 < \zeta < 1$  y  $\zeta \geq 1$ .
3. El coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$  nunca puede ser negativo  $\forall K^* > 0$  y  $T_I > 0$ , por lo que el sistema tendrá la propiedad de ser asintóticamente estable.

### Variación del pseudoperíodo con el aumento de $K_r$

Es de aclarar en este punto que sólo para cuando se tiene respuesta subamortiguada ( $0 < \zeta < 1$ ) corresponde estudiar el pseudoperíodo y la pulsación propia. Basándose en las Ecs. (13.43) y (13.44), entonces para el sistema en lazo cerrado se tiene que  $\tau = \frac{2\pi}{\omega_p}$  y  $\omega_p = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T^*}$  y en este caso,  $T^*$  disminuye para cuando  $K^*$  crece y de acuerdo con la Fig. 13.7.

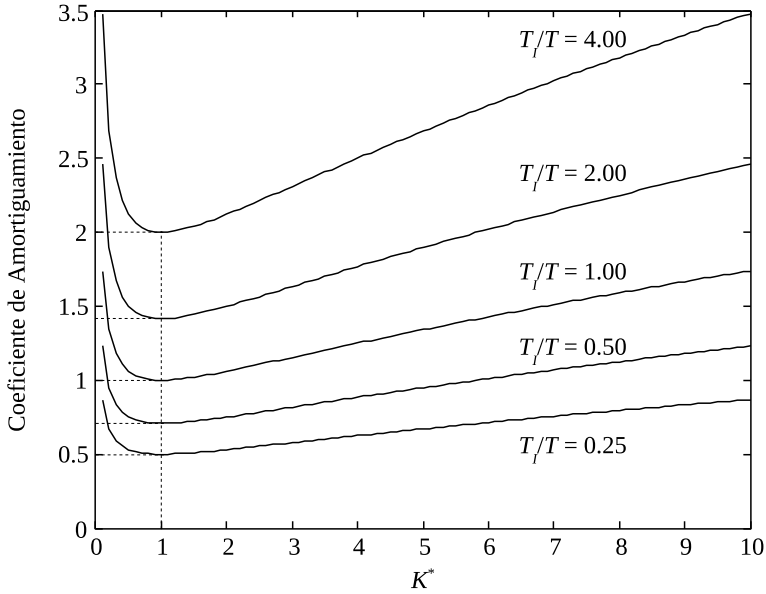


Figura 13.7: Variación del coeficiente de amortiguamiento en función de la ganancia  $K^*$ .

1. Si  $K^* < 1$  el coeficiente de amortiguamiento disminuye y por tanto la pulsación propia  $\omega_p$  crece. De manera que el pseudoperíodo  $\tau$  disminuye.
2. Por otro lado, si  $K^* \geq 1$  el coeficiente de amortiguamiento crece y por tanto la pulsación propia  $\omega_p$  disminuye a pesar de este comportamiento. De manera que el pseudoperíodo  $\tau$  crece.
3. Basándose en los dos ítems anteriores entonces, existe un  $\omega_p$  máximo y un  $\tau$  mínimo. De manera que en principio, las respuestas oscilatorias reducen la frecuencia de oscilación pero luego la aumentan.

### Variación del tiempo de establecimiento

Para cuando se tiene respuesta oscilatoria,

$$T_{est} = \frac{4T^*}{\zeta} = \frac{8T}{(1 + K^*)} \quad (13.49)$$

De manera que para cuando la ganancia del modo proporcional crece el tiempo de establecimiento disminuye.

Algo más laborioso resulta probar lo que ocurre con el tiempo de establecimiento para cuando  $\zeta > 1$ . Esto resulta mucho más sencillo de ver mediante el lugar geométrico de las raíces.

### Estudio mediante el lugar geométrico de las raíces

La función de transferencia de lazo abierto para este caso resulta,

$$G_{la}(s) = G(s)H(s) = \frac{K^*(T_I s + 1)}{T_I s(T s + 1)} \quad (13.50)$$

Dependiendo del valor de  $T_I$  es que hay tres posibles casos para la construcción del lugar geométrico de las raíces. Dichos casos se muestran en la Fig. 13.8.

En base a los tres diagramas se puede concluir que:

1. Variación del Coeficiente de amortiguamiento.
  - Caso I. Siempre  $\zeta > 1$  lo que es coincidente con la Fig. 13.7 para cuando se tiene una relación  $T_I/T > 1$ .
  - Caso II. Se puede tener  $0 < \zeta < 1$  o bien  $\zeta \geq 1$ , evidenciándose en dicha gráfica la existencia de un  $\zeta_{\min}$ .
  - Caso III. Hay cancelación polo-cero y por tanto el sistema en lazo cerrado tiene un comportamiento dinámico de primer orden. Por tanto, para este caso no se analiza el coeficiente de amortiguamiento.
2. Estabilidad del del sistema realimentado. Ya que para los tres casos no hay raíces de lazo cerrado en el semiplano complejo derecho e inclusive sobre el eje imaginario, entonces el sistema es asintóticamente estable  $\forall K^* > 0$ .
3. Variación de la pulsación propia y el pseudoperíodo.
  - Caso I. Como  $\zeta > 1 \quad \forall K^* \geq 0$  entonces no tiene sentido analizarlo.
  - Caso II. De la gráfica surge claramente que existe un  $\omega_p \text{ máx}$  y por tanto un  $\tau_{\min}$ .
  - Caso III. No tiene sentido su análisis por lo expuesto en el item anterior.
4. Tiempo de establecimiento.
  - Caso I. Siempre disminuye por que las raíces de lazo cerrado se alejan del eje imaginario. Note que, se logra para cuando  $K^* \rightarrow \infty$  ya que la raíz de lazo cerrado alcanza el valor  $-1/T_I$ . Además no se puede esperar buen desempeño dinámico ya que, para este caso, el tiempo de establecimiento es mayor que a lazo abierto.
  - Caso II. El tiempo de establecimiento disminuye hasta alcanzar un mínimo, para luego aumentar. En este caso, se pueden alcanzar tiempos de establecimientos menores que a lazo abierto.
  - Caso III. El tiempo de establecimiento siempre disminuye ya que la única raíz de lazo cerrado se aleja del eje imaginario.

La Fig. 13.9 muestra los cambios en carga y en consigna para los casos I y II aquí estudiados. Note que i) el offset es nulo en todos los casos tanto para cambio escalón en carga como en consigna y ii) para el caso I el coeficiente de amortiguamiento es siempre mayor que 1.

La Fig. 13.10 muestra los cambios en carga y en consigna para el caso III aquí estudiado. Note que en este caso, las repuestas son todas de primer orden

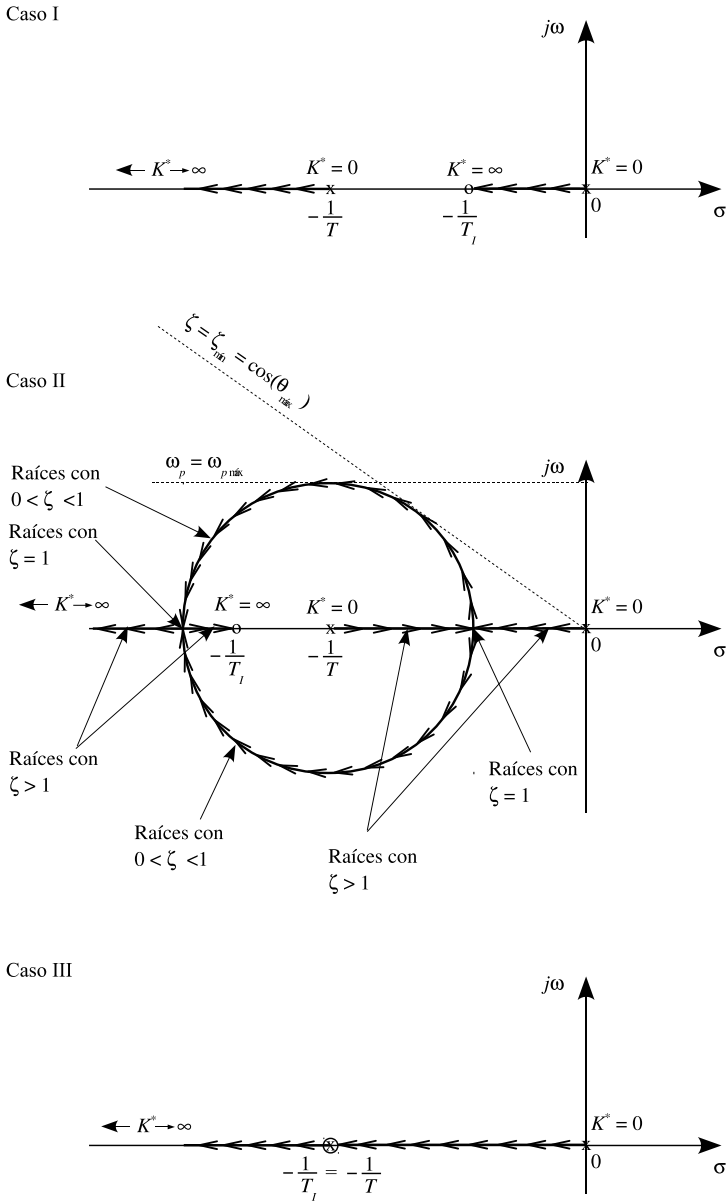


Figura 13.8: Lugares de raíces posibles para un sistema de primer orden realimentado con controlador PI.

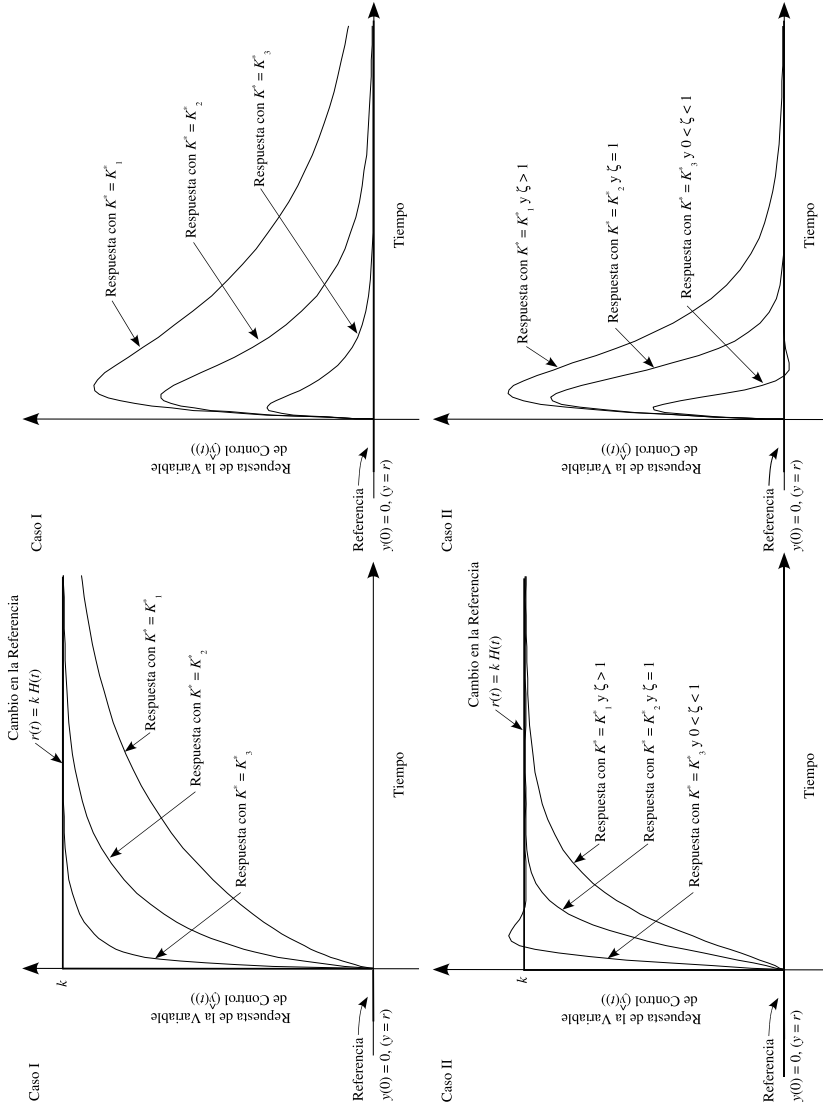


Figura 13.9: Respuestas dinámicas del control PI aplicado a sistemas de primer orden para los casos I y II para cambios en consigna y en carga. En todos los casos  $K_3^* > K_2^* > K_1^*$ .

similarmente a las ya estudiadas pero con la particularidad de que el offset es nulo tanto para el cambio en consigna como en carga.

**Ejercicio 13.1** Se desea controlar el nivel de líquido del tanque de mezcla que se muestra en la Fig. 13.11, de forma tal que el offset sea nulo tanto para un cambio escalón en carga como en consigna. A tal efecto se dispone de un controlador P, I y PI.

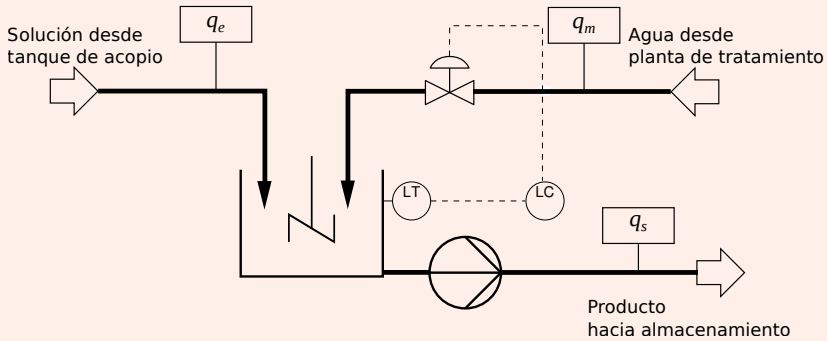


Figura 13.11

- ¿Cuál de ellos utilizaría y por qué? Justifique su respuesta.
- Prediga las posibles respuestas dinámicas para el caso elegido en función de los parámetros de ajuste del controlador, para cambios escalón en las variables de carga y consigna.
- Asuma los siguientes datos del problema: área del tanque  $A = 0,5 \text{ m}^2$ , los elementos de control final y de medición tienen dinámica despreciable y ganancia unitaria, la banda proporcional del controlador entre 2% y 500% y el tiempo de acción integral entre 0.2 y 50 min. Luego basándose en los datos, calcule el controlador que permite el mínimo tiempo de establecimiento.
- Simule mediante Octave el comportamiento dinámico de la variable de control cuando se implementa el controlador del inciso (c).

Primeramente es necesario determinar la función de transferencia del sistema de mezcla. Dado que se trata de un control de nivel, alcanza para ello con el balance de materia total. Por tanto,

$$A \frac{d\hat{h}}{dt} = \hat{q}_e + \hat{q}_m - \underbrace{\hat{q}_s}_{=0} \quad (13.51)$$

Observe que si se asume que la bomba extrae un caudal constante (en un



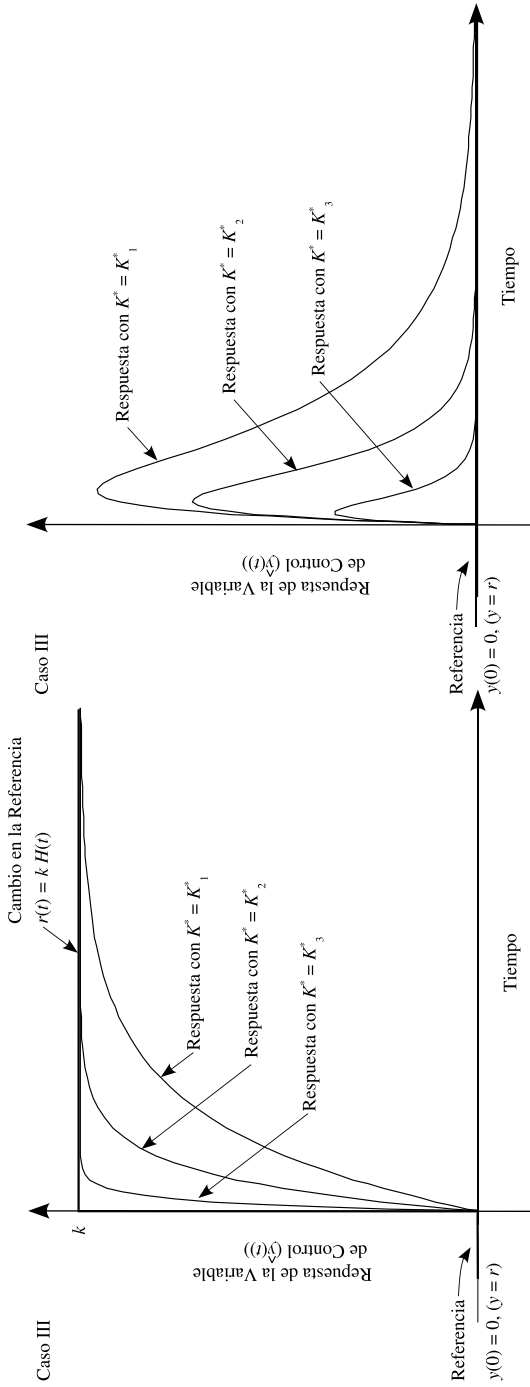


Figura 13.10: Respuestas dinámicas del control PI aplicado a sistemas de primer orden para el caso III para cambios en consigna y en carga. Aquí,  $K^*_3 > K^*_2 > K^*_1$ .

entorno del punto de operación) entonces el cuadal de salida de líquido es cero en variables de desviación.

Consecuentemente, la ecuación anterior en el dominio de Laplace resulta

$$AsH(s) = \hat{Q}_e(s) + \hat{Q}_m(s) \tag{13.52}$$

Basándose en la ecuación de balance anterior el DB del sistema de control resultante se muestra en la Fig. 13.12.

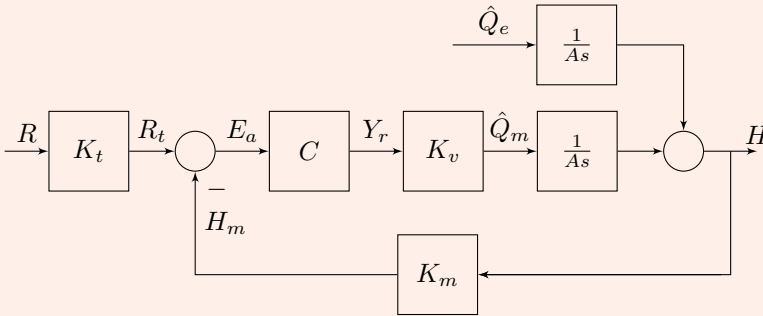


Figura 13.12: DB del sistema de control de nivel.

Observe que en este problema en particular se tiene tres posibles controladores para adoptar (P,I o PI) lo que redundará en funciones de transferencia de sistema realimentado diferentes. En la Tabla 13.1 se resume las 6 posibles funciones de transferencia del sistema realimentado.

Tabla 13.1: Funciones de transferencia para los sistemas realimentados para cambios en consigna y carga.

	P	I	PI
$\frac{\hat{H}(s)}{\hat{R}(s)} =$	$\frac{K^*}{As+K^*}$	$\frac{K^*}{T_I As^2+K^*}$	$\frac{K^*(T_I s+1)}{T_I As^2+K^*(T_I s+1)}$
$\frac{\hat{H}(s)}{\hat{Q}_e(s)} =$	$\frac{1}{As+K^*}$	$\frac{T_I s}{T_I As^2+K^*}$	$\frac{T_I s}{T_I As^2+K^*(T_I s+1)}$

Basándose en las Defs. (13.2.1) y (13.2.2) en la Tabla 13.2 se resumen los offsets calculados.

Tabla 13.2: Offsets para cambios en consigna y carga.

	P	I	PI
$offset)_r =$	0	0	0
$offset)_l =$	$\frac{-k}{k^*}$	0	0

Observe que para el cambio en consigna los tres controladores dan un offset nulo ya que se cumple la Rem. (9.2) debido a que  $G_{la}(s) = G(s)H(s)$  tiene los integradores necesarios y además, se tiene cumple la condición necesaria para garantizar una realimentación unitaria, esto es  $K_m = K_t$ . A pesar de esto, el controlador P deja offset para cambio en carga ya que la Rem. (9.2) garantiza offset nulo para el problema de seguimiento de consigna. Por tal motivo, se descarta este controlador por no cumplir uno de los requisitos pedidos.

Para discernir si se adopta el controlador I o PI, si se analiza la ecuación característica del sistema de control con el controlador I, se observa que,

$$D(s) = T_I A s^2 + K^*$$

lo que arroja como resultados respuestas oscilatorias sostenidas (senoidales) para cambios escalones y para cualquier valor de  $K_r/T_I$ . Por tal motivo, el único controlador que da respuestas asintóticamente estable para todo valor de  $K_r$  y  $T_I$  positivos es el controlador PI. Esto se observa muy claramente en los lugares de raíces que se presentan en la Fig. 13.13.

De acuerdo con el lugar de raíces de la Fig. 13.13(b), si se pretende un mínimo tiempo de establecimiento se puede pensar en adoptar el menor valor de  $T_I$  que tiene como resultado un mayor alejamiento de las ramas del eje imaginario. Por tanto, adoptando  $T_I = 0,2$  se propone calcular el valor de  $K_r$  que da como resultado un  $\zeta = 1$  que respresenta el mayor alejamiento posible de las raíces del sistema realimentado del eje imaginario.

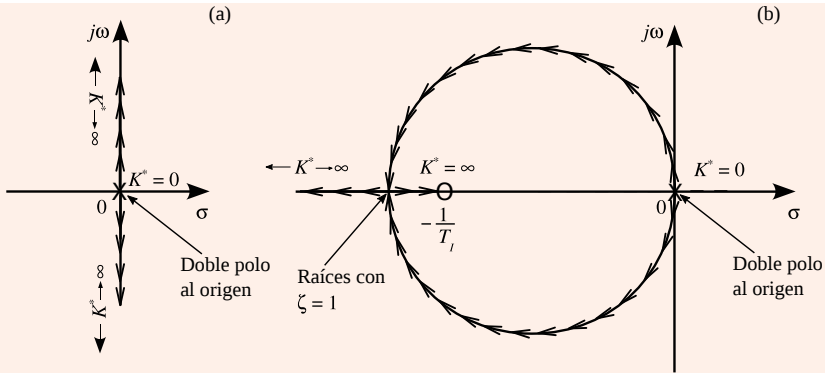


Figura 13.13: Lugares de raíces del sistema de control de nivel con (a) controlador I; (b) controlador PI.

Basándose en la ecuación característica de este sistema realimentado,

$$D(s) = \frac{T_I A}{K^*} s^2 + T_I s + 1$$

donde  $K^* = K_r K_v K_m 1 = K_r$  (ya que  $K_m = K_v = 1$ ).

Comparando esta última ecuación con la ecuación escrita en la forma canónica normalizada (Ec. (3.29)) resulta que,

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_I K_r}{A}}.$$

Adoptando  $T_I = 0,2$  resulta que  $K_r = 10$  un valor que se encuentra dentro del rango de banda proporcional de este problema.

Finalmente para las simulaciones numéricas, a continuación se adjunta los comandos de Octave y, en la Fig. 13.14 se muestra la respuesta realimentada del sistema realimentado para cambios en carga y consigna.

#### Algoritmo 13.1: Código de Octave del Ejem. 12.12.

```

1 % Datos
2 A=0.5; %m^2
3
4 % Funcion de transferencia de planta
5 s=tf('s'); Gps=1/(A*s)
6
7 % Controlador
8 Kr=10; TI=0.2;
9 Cs=Kr*(1+1/(TI*s))

```

```

10
11 % Funciones de transferencia de lazo cerrado
12 % 1. cambio en consigna
13 Glcsp=minreal ( feedback (Gps*Cs,1) )
14 % 2. cambio en carga
15 Glccarga=minreal (Gps*feedback (1,Gps*Cs) )
16
17 % Respuesta dinamica al escalon en consigna y carga
18 step (Glcsp , Glccarga)

```

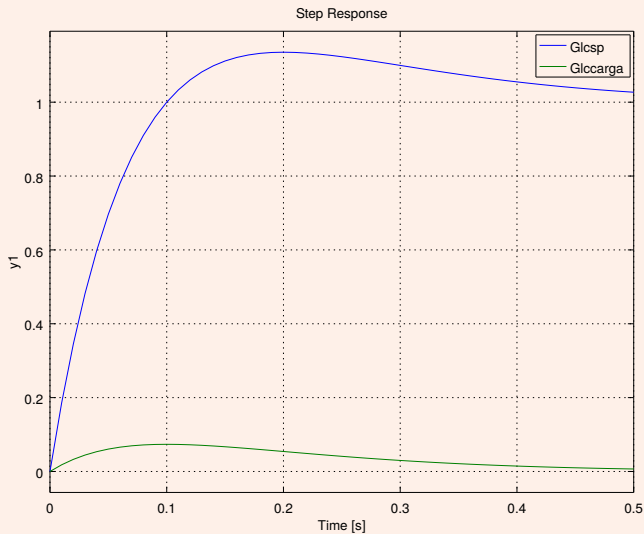


Figura 13.14: Respuesta dinámica del sistema de control de nivel con controlador PI para cambios en carga y consigna.

En dicha figura puede verse como el controlador PI anula los offset para cambios en carga y consigna. ■

### 13.3.2. Control PI de sistemas de segundo orden

Consideremos ahora el sistema de la Fig. 9.1 donde además para el análisis de esta sección se asume que la planta tiene una dinámica de segundo orden tanto con la variable manipulada como con el ingreso de la perturbación, esto es,  $G_p(s) = K/(T_1s + 1)(T_2s + 1)$  y  $G_l(s) = K_l/(T_1s + 1)(T_2s + 1)$ . Además, el sistema de control cuenta con un controlador PI cuya función de transferencia viene dada por la Ec. (8.17) y los elementos de control final y medición tienen por función de transferencia  $G_v = K_v$  y  $G_m = K_m$ .

Las funciones de transferencia de lazo cerrado entre la salida controlada ( $Y(s)$ ) con la referencia ( $R(s)$ ) y la perturbación ( $L(s)$ ) resultan,

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{R}(s)} = G_{lc}(s) = \frac{K^*(T_I s + 1)}{T_I s(T_I s + 1)(T_2 s + 1) + K^*(T_I s + 1)} \quad (13.53)$$

y

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{L}(s)} = G_{lc}(s) = \frac{K_I T_I s}{T_I s(T_I s + 1)(T_2 s + 1) + K^*(T_I s + 1)} \quad (13.54)$$

donde  $K^*$  al igual que en secciones anteriores resulta ser la productoria de las ganancias de las funciones de transferencia de lazo abierto.

Notar que los denominadores de ambas funciones de transferencia de lazo cerrado son iguales y de tercer orden.

De acuerdo con las Ecs. (13.53) y (13.54), y similarmente al problema estudiado en la Sección 10.2.1, que surge dos cosas para remarcar producto de la inclusión del modo integral. Esto es, i) el orden del denominador de lazo cerrado se incrementa en uno y ii) como es sabido, cuanto más polos tenga la ecuación característica, más riesgos de inestabilidad tiene.

### Estudio de la Variación del offset con el aumento de $K_r$

Para el sistema de primer orden realimentado con el controlador PI, es posible determinar el offset absoluto en consigna basándose en la definición 13.5 y la Ec. 13.6,

$$\begin{aligned} \text{offset}_r &= \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{R}(s) - \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{Y}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{\beta} - \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K^*(T_I s + 1)}{T_I s(T_I s + 1)(T_2 s + 1) + K^*(T_I s + 1)} \frac{k}{\beta} \\ &= k - k = 0 \end{aligned} \quad (13.55)$$

Similarmente, para el cálculo del offset absoluto en carga, basándose en la definición 13.8 y en la Ec. 13.9 se tiene,

$$\begin{aligned} \text{offset}_l &= - \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{Y}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-K_I T_I s}{T_I s(T_I s + 1)(T_2 s + 1) + K^*(T_I s + 1)} \frac{k}{\beta} = 0 \end{aligned} \quad (13.56)$$

Por tanto, basándose en las Def. 13.2.3 y 13.2.4, los correspondientes offset relativos también resultarán nulos.

De manera que, similarmente a las conclusiones obtenidas en la sección anterior se puede decir que,

1. similarmente al caso anteriormente estudiado, la inclusión del modo integral es el responsable de la eliminación del offset (ver Rem. ??).
2. A partir de este resultado, es de esperar que tanto para cambios escalón en consigna como en carga pasado el transitorio el sistema no deje un error permanente cumpliendo un importante objetivo de performance. Esto es, alcanzar las nuevas consignas pedidas o bien, eliminar las perturbaciones.

### Estudio mediante el lugar geométrico de las raíces

La función de transferencia de lazo abierto para este caso resulta,

$$G_{la}(s) = G(s)H(s) = \frac{K^*(T_I s + 1)}{T_I s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (13.57)$$

Dependiendo del valor de  $T_I$  es que hay cinco posibles casos, de los cuales dos consideran la cancelación polo-cero, para la construcción del lugar geométrico de las raíces. Los casos sin cancelación polo-cero se muestran en la Fig. 13.15 y los correspondientes con cancelación se muestran en la 13.16.

Basándose en el lugar de las raíces para cuando no hay cancelación cero-polo se puede concluir lo siguiente:

1. *Estabilidad.* Para los casos I y II el sistema es estable  $\forall K^* > 0$  mientras que en el caso III el sistema realimentado presentaría una estabilidad relativa sujeta a que  $0 < K^* \leq K_{crit}^*$ . Para este caso se puede pedir como condición límite de ajuste del tiempo de acción integral lo que indica la siguiente remarca.



■ **Remarca 13.1** Para cuando se ajusta el tiempo de acción integral con un valor menor que la menor constante de tiempo del sistema, esto es  $T_I < T_2 < T_1$  (caso III de la Fig. 13.15) el sistema realimentado con será absolutamente estable si,

$$\frac{1}{T_I} \leq \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \quad (13.58)$$

**Demostración** Para que el sistema realimentado sea absolutamente estable se pide que el centro de gravedad de asíntotas se ubique en el semiplano izquierdo, esto es,  $\sigma_0 \leq 0$ . Luego, teniendo en cuenta la Ec. (12.16),

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_I} \right) \leq 0 \quad .$$

De esta última ecuación se desprende claramente la Ec. (13.58).  $\square$

2. *Coficiente de amortiguamiento.* En todos los casos, disminuye con el aumento de la ganancia del modo proporcional y por tanto con el aumento de  $K^*$ . De manera que en principio se tendrá respuestas sobreamortiguadas,

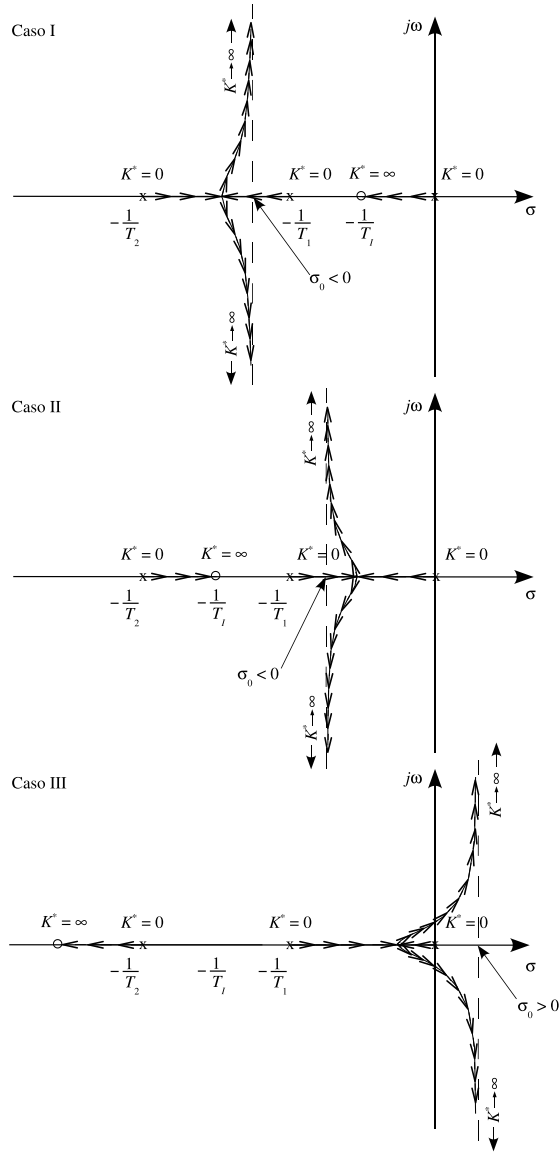


Figura 13.15: Lugares de raíces posibles para un sistema de segundo orden realimentado con controlador PI sin cancelación polo-cero.



luego críticamente amortiguadas y luego subamortiguadas. En el caso III, si no se cumple la Rem. 13.1, el coeficiente de amortiguamiento puede alcanzar el valor de cero y valores negativos lo que se puede asociar con una respuesta críticamente estable y con respuestas inestables del sistema realimentado respectivamente.

3. *Tiempo de Establecimiento*. Para los casos I y II el tiempo de establecimiento disminuye con el aumento de la ganancia del modo proporcional y por tanto con el aumento de  $K^*$ . Mientras que en el caso III al principio disminuye para luego aumentar.
4. *Pseudoperíodo y Pulsación Propia*. En todos los casos el aumento de  $K^*$  lleva a un aumento de la pulsación propia  $\omega_p$  y en consecuencia a una reducción del pseudoperíodo  $\tau$ . Por tanto, aquellas raíces de lazo cerrado complejas conjugadas ( $0 < \zeta < 1$ ) darán como resultado respuestas oscilatorias con un incremento de la frecuencia de oscilación.

Basándose en el lugar de las raíces para cuando hay cancelación cero-polo se puede concluir lo siguiente:

1. *Estabilidad*. Los casos IV y V son absolutamente estables  $\forall K^* > 0$ .
2. *Coficiente de amortiguamiento*. Para los casos IV y V, el valor de  $\zeta$  disminuye con el aumento de la ganancia del modo proporcional y por tanto con el aumento de  $K^*$ . De manera que en principio se tendrá respuestas sobreamortiguadas, luego críticamente amortiguadas y luego subamortiguadas.
3. *Tiempo de Establecimiento*. Para los casos IV y V, el tiempo de establecimiento disminuye con el aumento de la ganancia del modo proporcional y por tanto con el aumento de  $K^*$ .
4. *Pseudoperíodo y Pulsación Propia*. Para los casos IV y V, el aumento de  $K^*$  lleva a un aumento de la pulsación propia  $\omega_p$  y en consecuencia a una reducción del pseudoperíodo  $\tau$ . Por tanto, aquellas raíces de lazo cerrado complejas conjugadas ( $0 < \zeta < 1$ ) darán como resultado respuestas oscilatorias con un incremento de la frecuencia de oscilación.
5. Claramente surge de la observación del lugar de las raíces de la Fig. 13.16 que el mejor caso de cancelación polo-cero es aquel en donde se cancela al polo dominante esto es, de los dos el que tiene mayor constante de tiempo (en este caso,  $T_1$ ).

Las respuestas dinámicas de los casos I, II y III se muestran en la Fig. 13.17 en donde el lector puede verificar las conclusiones arribadas para dichos casos, mientras que en la Fig. 13.18 se muestran las respuestas dinámicas para los casos IV y V.

En base a las conclusiones anteriores, se hace notar que en cuanto a las características de las respuestas dinámicas de lazo cerrado de los casos IV y V no habrá mayores diferencias. Lo único para remarcar es que a iguales valores de  $K_r$  (o  $K^*$ ) y  $T_I$ , el caso V resultaría con respuestas dinámicas más lentas en comparación con el caso IV.

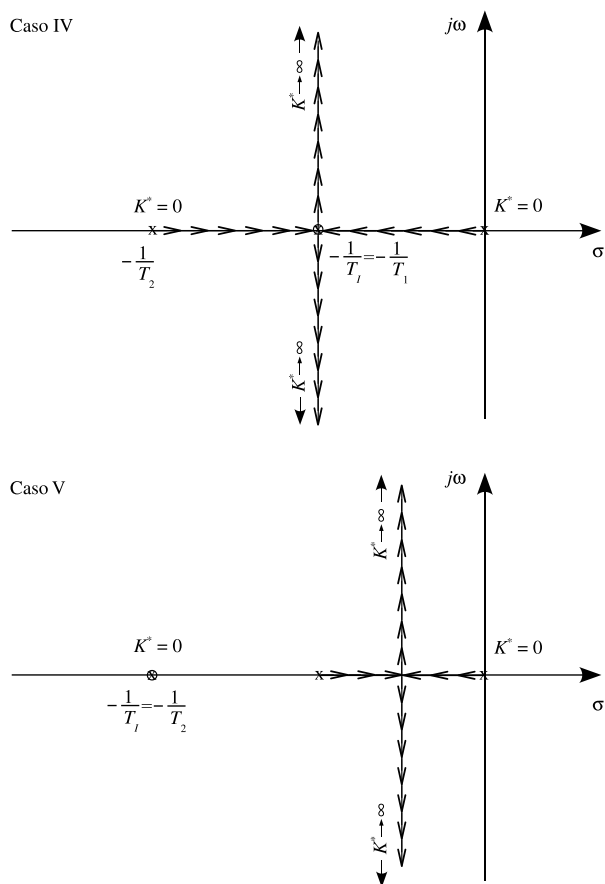
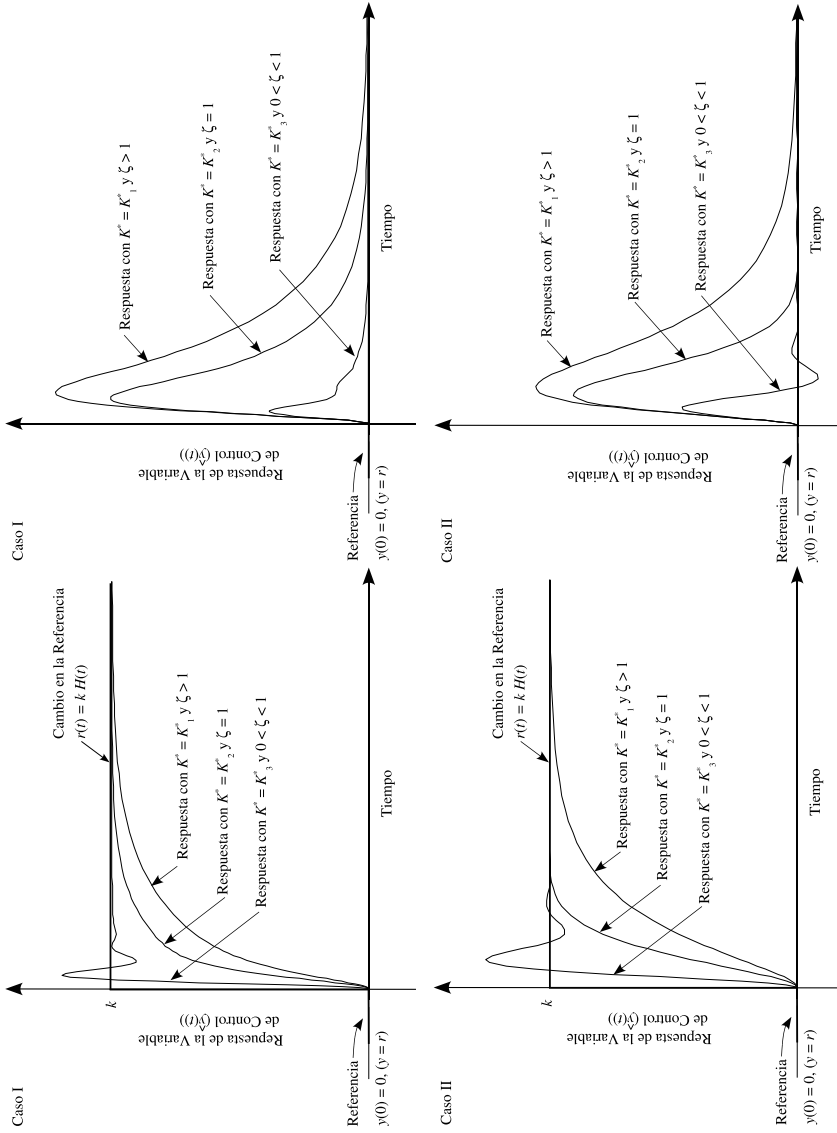


Figura 13.16: Lugares de raíces posibles para un sistema de segundo orden realimentado con controlador PI con cancelación polo-cero.



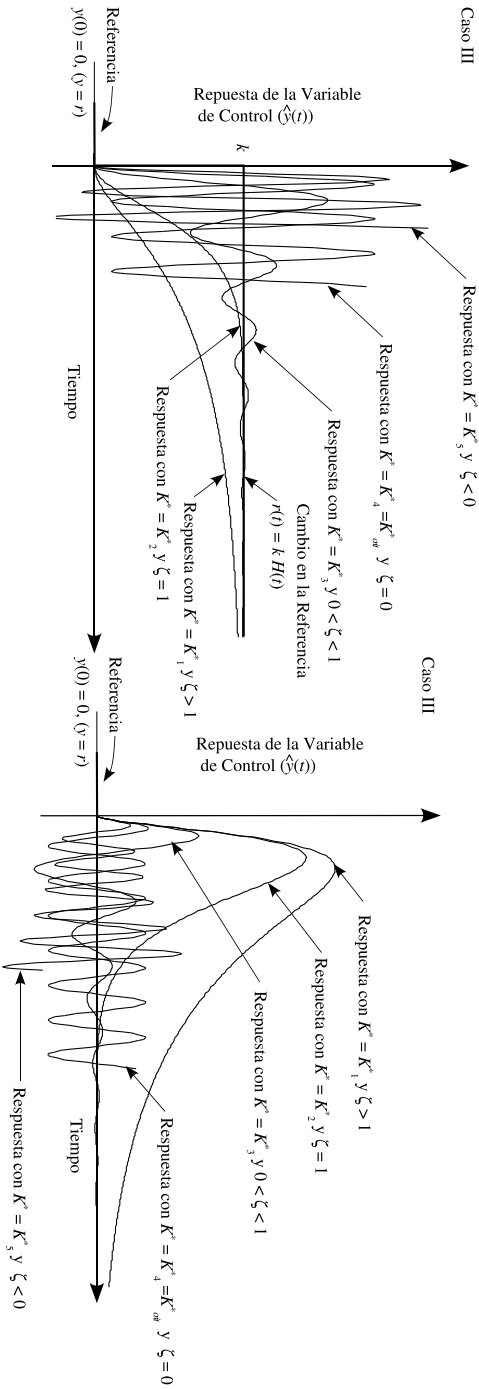


Figura 13.17: Respuestas dinámicas del control PI aplicado a sistemas de segundo orden para los casos I, II y III para cambios en  $K_1^* > K_2^* > K_3^* > K_{crit}^* > K_4^* > K_5^*$  y en el caso particular del caso III,  $K_4^* > K_3^* > K_2^* > K_1^*$ . Aquí, para los casos I y II  $K_3^* > K_2^* > K_1^*$  y en el caso particular del caso III,  $K_4^* > K_3^* > K_2^* > K_1^*$ .

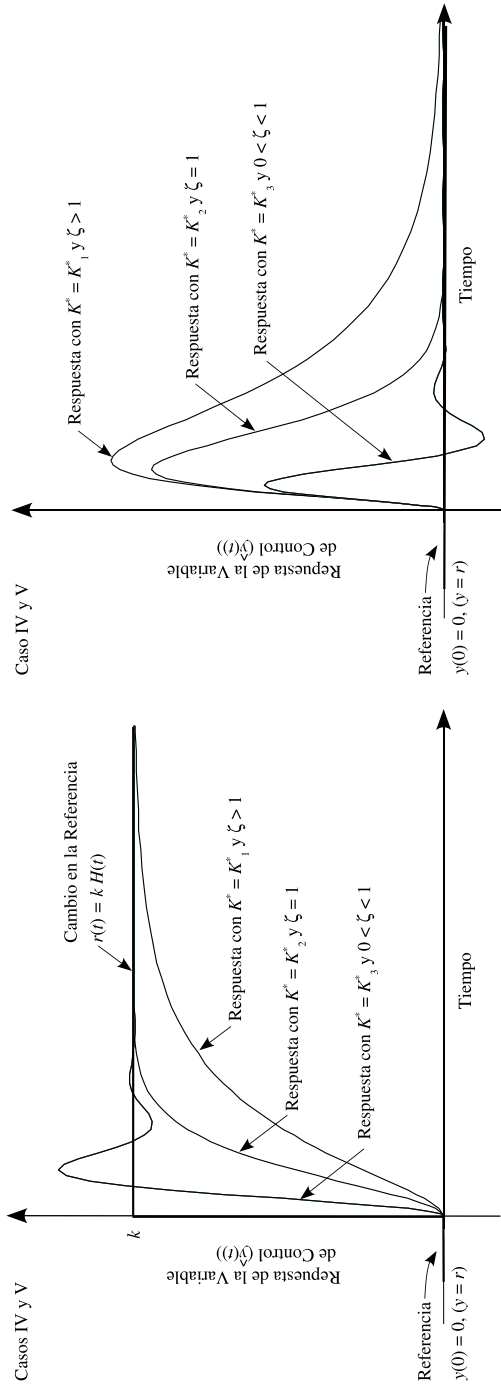


Figura 13.18: Respuestas dinámicas del control PI aplicado a sistemas de segundo orden para los casos IV y V para cambios en consigna y en carga. Aquí,  $K_3^* > K_2^* > K_1^*$ .

## 13.4. Control Proporcional-Derivativo de Sistemas LTI

En esta sección se analizarán los sistemas lineales de segundo y tercer orden realimentados con un controlador proporcional-derivativo (PD). Se aspira que el lector en base a la metodología utilizada y a las conclusiones obtenidas, pueda extender fácilmente los resultados a problemas más complejos.

### 13.4.1. Control PD de sistemas de segundo orden

Consideremos ahora el sistema de la Fig. 9.1 donde además para el análisis de esta sección se asume que la planta tiene una dinámica de segundo orden tanto con la variable manipulada como con el ingreso de la perturbación, esto es,  $G_p(s) = K/(T_1s + 1)(T_2s + 1)$  y  $G_l(s) = K_l/(T_1s + 1)(T_2s + 1)$ . Además, el sistema de control cuenta con un controlador PD cuya función de transferencia viene dada por la Ec. (8.20) y los elementos de control final y de medición tienen por función de transferencia  $G_v = K_v$  y  $G_m = K_m$ .

Las funciones de transferencia de lazo cerrado entre la salida controlada ( $Y(s)$ ) y la referencia ( $R(s)$ ) y la salida controlada y la perturbación ( $L(s)$ ) resultan,

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{R}(s)} = G_{lc}(s) = \frac{K^*(T_Ds + 1)}{(T_1s + 1)(T_2s + 1) + K^*(T_Ds + 1)} \quad (13.59)$$

y

$$\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{L}(s)} = G_{lc}(s) = \frac{K_l}{(T_1s + 1)(T_2s + 1) + K^*(T_Ds + 1)} \quad (13.60)$$

donde  $K^*$  al igual que en secciones anteriores resulta ser la productoria de las ganancias de las funciones de transferencia de lazo abierto.

Notar que los denominadores de ambas funciones de transferencia de lazo cerrado son iguales y de segundo orden, por tanto la ecuación característica resulta,  $D(s) = T_1T_2s^2 + (T_1 + T_2 + K^*T_D)s + K^*$ . Por comparación con el denominador escrito bajo la forma canónica normalizada surge que,

$$T^* = \sqrt{\frac{T_1T_2}{1 + K^*}} \quad (13.61)$$

y

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{(T_1 + T_2 + K^*T_D)}{\sqrt{T_1T_2}} \frac{1}{\sqrt{1 + K^*}} \quad (13.62)$$

Note que, i) el orden del denominador de lazo cerrado no se incrementa en uno como cuando se incorpora el modo integral y ii) por lo tanto la ecuación característica de lazo cerrado es de segundo orden similarmente a la de lazo abierto.

### Estudio de la variación del offset con el aumento de $K_r$

Para el sistema de segundo orden realimentado con el controlador PD, es posible determinar el offset absoluto en consigna basándose en la Def. 13.2.1 y la Ec. 13.6,

$$\begin{aligned} \text{offset}_r &= \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{R}(s) - \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{Y}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \frac{k}{\cancel{s}} - \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \frac{K^*(T_D s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K^*(T_D s + 1)} \frac{k}{\cancel{s}} \\ &= \frac{k}{1 + K^*} \neq 0 . \end{aligned} \quad (13.63)$$

Similarmente, para el cálculo del offset absoluto en carga, basándose en la Def. 13.2.2 y en la Ec. 13.9 se tiene,

$$\begin{aligned} \text{offset}_l &= - \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{Y}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \frac{-K_l}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K^*(T_D s + 1)} \frac{k}{\cancel{s}} = \frac{-kK_l}{1 + K^*} \neq 0 . \end{aligned} \quad (13.64)$$

Por tanto, basándose en las Def. 13.2.3 y 13.2.4, los correspondientes offset relativos también resultarán distintos de cero.

De manera que,

1. la inclusión del modo derivativo no permite la eliminación del offset ya que la función de transferencia de lazo abierto ( $G_{la}(s) = G(s)H(s)$ ) no tiene los modos integradores necesarios como para seguir el escalón en consigna sin error pasado el transitorio (ver Rem. 9.2).
2. A partir de este resultado, es de esperar que tanto para cambios escalón en consigna como en carga pasado el transitorio el sistema deje un error permanente y por tanto, no es posible alcanzar las nuevas consignas pedidas o bien, eliminar totalmente las perturbaciones de entrada.

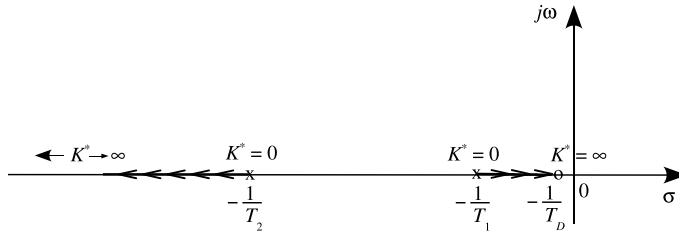
### Estudio mediante el lugar geométrico de las raíces

La función de transferencia de lazo abierto para este caso resulta,

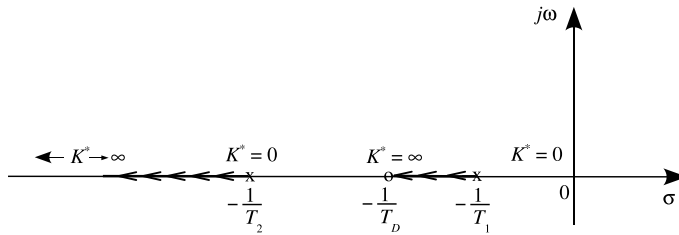
$$G_{la}(s) = G(s)H(s) = \frac{K^*(T_D s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} . \quad (13.65)$$

Dependiendo del valor de  $T_D$  es que hay cinco posibles casos, de los cuales dos consideran la cancelación polo-cero, para la construcción del lugar geométrico de las raíces. Los casos sin cancelación polo-cero se muestran en la Fig. 13.19 y los correspondientes con cancelación se muestran en la 13.20.

Caso I



Caso II



Caso III

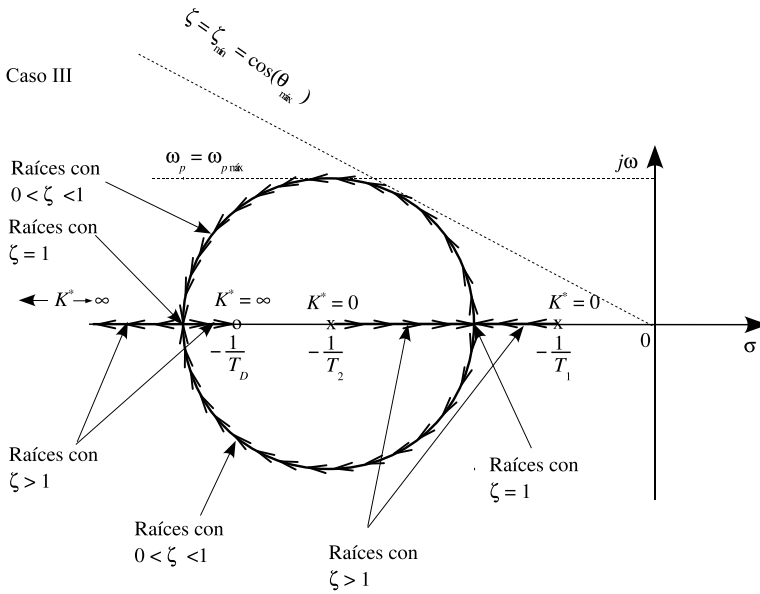


Figura 13.19: Lugares de raíces posibles para un sistema de segundo orden realimentado con controlador PD sin cancelación polo-cero.



Basándose en el lugar de las raíces para cuando no hay cancelación cero-polo se puede concluir lo siguiente:

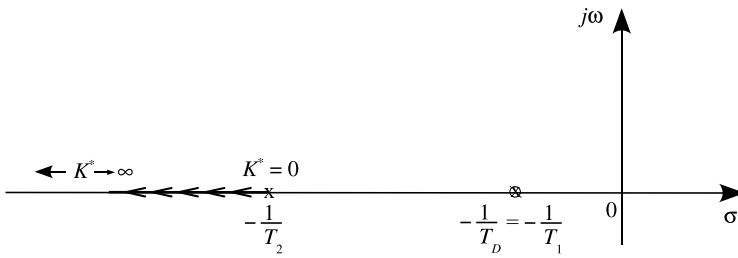
1. *Estabilidad.* Para los casos I, II y III el sistema es estable  $\forall K^* > 0$  ya que todas las ramas del lugar geométrico de las raíces pertenecen al semiplano complejo izquierdo.
2. *Coefficiente de amortiguamiento.* Para los casos I y II se cumple que  $\zeta > 1$  ya que se tiene raíces reales distintas  $\forall K^* > 0$ . De manera que en todos los casos se tendrá respuestas sobreamortiguadas. Por otro lado, para el caso III, en principio el coeficiente de amortiguamiento disminuye con el aumento de  $K^*$  para luego aumentar, evidenciándose un  $\zeta_{\text{mín}}$ . De manera que en principio se tendrá respuestas sobreamortiguadas, luego críticamente amortiguadas y subamortiguadas. Posteriormente cuando el coeficiente de amortiguamiento vuelve a crecer se volverá a tener respuestas críticamente amortiguadas y sobreamortiguadas.
3. *Tiempo de Establecimiento.* Para el caso I el tiempo de establecimiento crece ya que la rama dominante del lugar de las raíces se acerca al eje imaginario. Para el caso II el tiempo de establecimiento disminuye  $\forall K^* > 0$ . Mientras que para el caso III, el tiempo de establecimiento disminuye en principio disminuye para luego aumentar.
4. *Pseudoperíodo y Pulsación Propia.* El caso III evidencia un  $\omega_p \text{ máx}$  lo que se asocia con un pseudoperíodo mínimo. Por tanto las respuestas oscilatorias en principio aumentarán la frecuencia de oscilación con el aumento de la ganancia del modo proporcional para luego disminuir.

Basándose en el lugar de las raíces para cuando hay cancelación cero-polo se puede concluir lo siguiente:

1. *Estabilidad.* Los casos IV y V son absolutamente estables  $\forall K^* > 0$ .
2. *Raíz de lazo cerrado.* Para los casos IV y V, la cancelación polo-cero lleva a tener una única raíz de lazo cerrado que pertenece al semiplano complejo izquierdo y además dichas raíces se alejan del eje imaginario con el aumento de  $K^*$ . Por tanto, todas las respuestas dinámicas de lazo cerrado serán respuestas típicas de los sistemas de primer orden.
3. *Tiempo de Establecimiento.* Para los casos IV y V, el tiempo de establecimiento disminuye con el aumento de la ganancia del modo proporcional y por tanto con el aumento de  $K^*$  por lo enunciado en el punto anterior.
4. Claramente surge de la observación del lugar de las raíces de la Fig. 13.20 que el mejor caso de cancelación polo-cero es aquel en donde se cancela al polo dominante esto es, de los dos el que tiene mayor constante de tiempo (en este caso,  $T_1$ ). Si bien, por el tipo de lugar de raíces de este caso, para grandes valores de la ganancia del modo proporcional esto podría ser indistinto (ver Fig. 13.20).

Las respuestas dinámicas de los casos I, II y III se muestran en la Fig. 13.21 en donde el lector puede verificar las conclusiones arribadas para dichos casos, mientras que en la Fig. 13.22 se muestran las respuestas dinámicas para los casos

Caso IV



Caso V

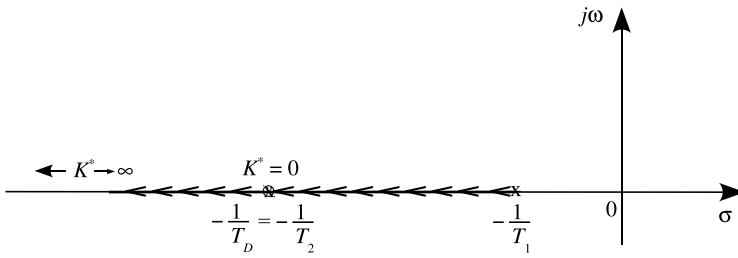


Figura 13.20: Lugares de raíces posibles para un sistema de segundo orden realimentado con controlador PD con cancelación polo-cero.

IV y V.

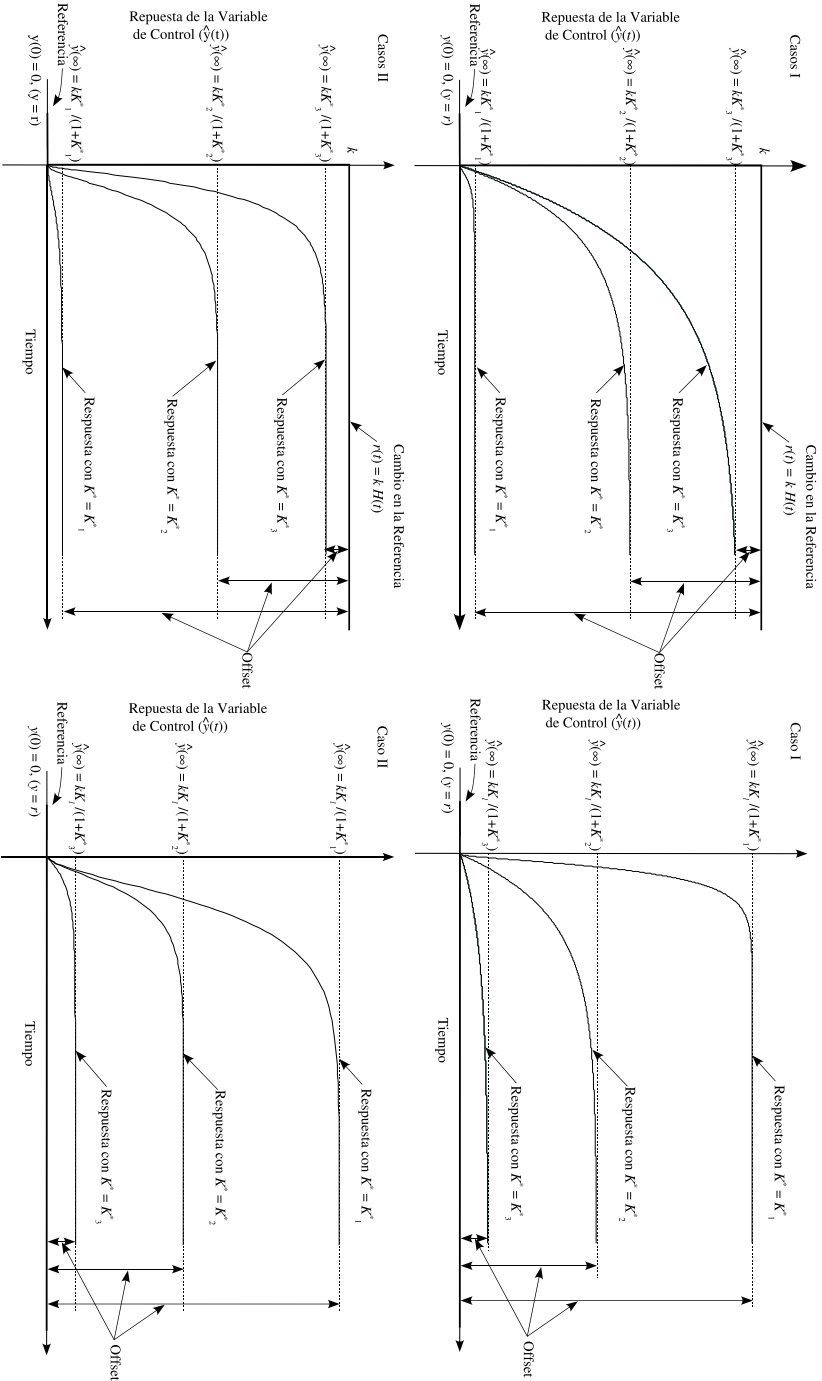
## 13.5. Conclusiones

En este capítulo se presentó un análisis de los sistemas lineales sencillos realimentados con controladores clásicos de la industria (P, PI, PD). En principio se realizó un análisis riguroso de los sistemas realimentados para luego mostrar que mediante el uso del lugar de geométrico de las raíces es posible obtener las mismas conclusiones. De ahí la importancia del uso del lugar de las raíces tanto para el ajuste de controladores lineales como para predecir el comportamiento dinámico del sistema realimentado.

Finalmente, se destaca que en todos los casos, los mejores desempeños del sistema realimentado se obtiene con la cancelación polo-cero, de ahí que en muchos textos a los controladores lineales ajustados bajo esta premisa se los llame controladores de cancelación. La principal desventaja de este caso radica en la imposibilidad práctica de su implementación ya que la mayoría de las plantas en la industria son no lineales y asumir una planta lineal puede tener cierta validez en un entorno de trabajo pero perderla en otro y consecuentemente la performance del sistema realimentado con el controlador de cancelación podría no ser la esperada.

## 13.6. Pensemos

1. Un sistema realimentado presenta una respuesta dinámica en la variable de control oscilatoria con un coeficiente de amortiguamiento  $\zeta = 0,5$ . ¿Las respuestas dinámicas de los distintos componentes del lazo de realimentación, presentarán una respuesta con la misma característica dinámica que la variable de control?  **SI**  **NO**
2. Si un sistema de primer orden con tiempo muerto es controlado con un controlador proporcional de ganancia  $K_r$  mediante una retroalimentación unitaria y negativa;
  - el sistema es estable  $\forall K_r > 0$ .
  - se pueden obtener respuestas subamortiguadas.
  - si es válida una aproximación de Padé de primer orden, siempre que se aumenta  $K_r$  el polo dominante del sistema realimentado se aleja del eje imaginario.
  - el sistema posee ganancia última.
  - ninguna de las anteriores.
3. Considere un sistema de segundo orden subamortiguado estable a lazo abierto que es realimentado con un controlador proporcional. Si se aumenta la ganancia del controlador se logra:



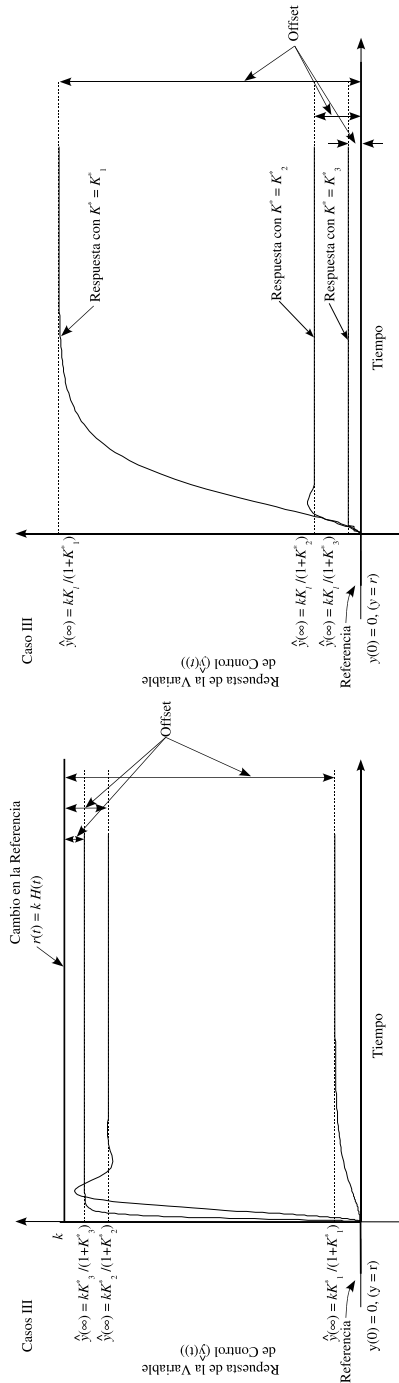


Figura 13.2.1: Respuestas dinámicas del control PD aplicado a sistemas de segundo orden para los casos I, II y III para cambios en consigna y en carga. Aquí,  $K_3^* > K_2^* > K_1^*$ .

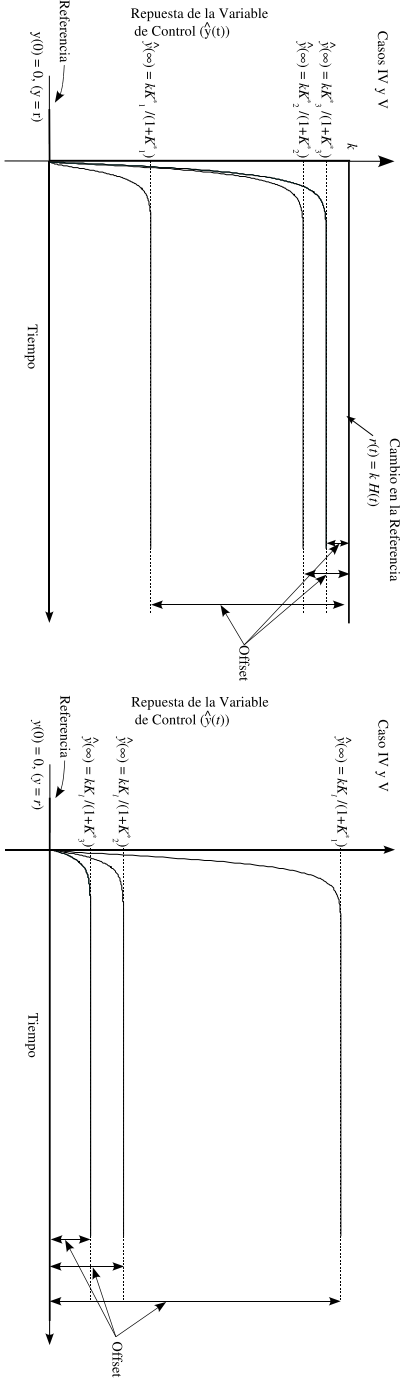
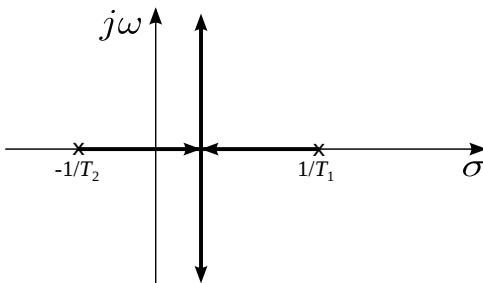


Figura 13.22: Respuestas dinámicas del control PD aplicado a sistemas de segundo orden para los casos IV y V para cambios en  $K_1^* < K_2^* < K_3^*$ . Aquí,  $K_3^* > K_2^* > K_1^*$ .

- mejorar el tiempo de establecimiento.       disminuir el máximo sobreimpulso.  
 disminuir el coef. de amortiguamiento.       aumentar el coef. de amortiguamiento.  
 inestabilizar el sistema.       ninguna es correcta.
4. Considere un control proporcional de un sistema electrónico al que se le desea controlar la temperatura y cuya función de transferencia es  $G_p(s) = K_p/(T_1s + 1)(T_2s + 1)$ . Si se utiliza una termocupla para medir dicha temperatura con una constante de tiempo mayor que la mayor constante de tiempo de  $G_p$ , el efecto que provoca dicho elemento de medición en el sistema realimentado es,
- Mejorar el tiempo de establecimiento.  
 Empeorar el tiempo de establecimiento.  
 Mejorar los  $MG$  y  $MF$  del lazo de control.  
 Empeorar los  $MG$  y  $MF$  del lazo de control.  
 Mejorar el coeficiente de amortiguamiento de la respuesta a lazo cerrado.  
 Ninguna de las anteriores.
5. Dado un sistema cuya función de transferencia a lazo abierto es  $G(s) = K/(Ts+1)$ . Si se cierra el lazo de control con un controlador proporcional con  $K_r = 1$ , un elemento de control final con dinámica despreciable y  $K_v = 1$  y un transductor de dinámica despreciable y  $K_t = K_m = 4$ . Si se produce un cambio escalón unitario en la consigna, el valor final alcanzado es,
- $\frac{K}{K+1}$         $\frac{4K}{K+1}$   
  $\frac{K}{4K+1}$        Ninguno de los anteriores.
6. Considere un sistema lineal realimentado con controlador proporcional cuyas funciones de transferencias entre la variable de control y la manipulada ( $G_p$ ) es integradora y, entre la variable de control y la carga ( $G_l$ ) es autorregulable. Considere además, elemento de control final y sensor con dinámica despreciable y realimentación unitaria.
- (a) Un cambio escalón en carga,
- deja offset.       no deja offset.
- (b) Un cambio escalón en consigna,
- deja offset.       no deja offset.
7. Dado un sistema de primer orden cuya función de transferencia es  $G(s) = K/(Ts + 1)$  realimentado con un controlador proporcional de ganancia unitaria. Si al sistema realimentado se lo perturba con una entrada escalón unitaria en consigna, entonces el valor en el que se estabiliza la salida es:
- $T/(K + 1)$         $K/(K + 1)$   
  $1/(K + 1)$        ninguna de las anteriores  
  $K/(T + 1)$
8. Considere un sistema cuya función de transferencia a lazo abierto es de primer orden ( $G(s) = K/(Ts + 1)$ ) realimentado con un controlador proporcional utilizando un transductor y elemento de control final de ganancia unitaria dinámica despreciable. Luego, con el aumento de la ganancia del modo proporcional, el sistema a lazo cerrado

- responderá más lentamente que a lazo abierto.
  - responderá más rápidamente que a lazo abierto.
  - a la misma velocidad.
  - Ninguna de las anteriores.
9. Al reemplazar un controlador PD por un PI en un sistema realimentado, en la gran mayoría de los casos, se logra mejorar su estabilidad.  
 **V**    **F**
10. ¿Es posible ajustar un controlador PI colocando su polo fuera del origen y su cero sobre el polo dominante de la planta?    **Si**    **No**
11. Cuando se dice que el tiempo muerto aporta inestabilidad al sistema, se refiere a que el mismo
- aporta polos y ceros.
  - aporta fase negativa.
  - reduce el margen de fase.
  - reduce el margen de ganancia.
  - aumenta el margen de ganancia.
  - ninguna de las anteriores.
  - aumenta la relación de amplitud.
12. ¿Un sistema de primer orden realimentado con un controlador PI con ECF y elemento de medición lineales y sin dinámica, presenta un  $\zeta_{\min} = \sqrt{\frac{T_I}{T}}$ , con  $T$  la constante de tiempo del sistema a lazo abierto y  $T_I$  el tiempo de acción integral?    **V**    **F**
13. Considere un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = 1/(s^2 + 1)$  realimentado con un compensador con función de transferencia,  $C(s) = K(s + z)/(s + p)$ , con  $z$  y  $p > 0$ . ¿Qué valor de  $z$  sugiere para el compensador?
- $z > p$
  - $z < p$
  - $z = p$
  - $z = 0$
  - Ninguno de los valores anteriores
14. El diagrama de la Fig. 13.23 corresponde al lugar de raíces de un sistema de control proporcional. Con el objeto de mejorar la estabilidad se propone agregar un modo derivativo y para sintonizarlo se proponen las opciones que se listan a continuación. Marque la/s opción u opciones que le parezca/n más adecuada/s.



- Cancelar el polo en  $\mathbb{C}^+$
- Cancelar el polo en  $\mathbb{C}^-$
- $-1/T_D < -1/T_2$
- $-1/T_2 < -1/T_D < 0$
- $0 < -1/T_D < 1/T_1$
- $1/T_1 < -1/T_D$
- No hacer nada

Figura 13.23



15. Considere la traza simplificada de Nyquist de las funciones de transferencias de la cadena de lazo abierto ( $G(s)H(s)$ ) de la Fig. 13.24 Marque cual/es de ellos permitiría/n obtener una respuesta libre de offset.

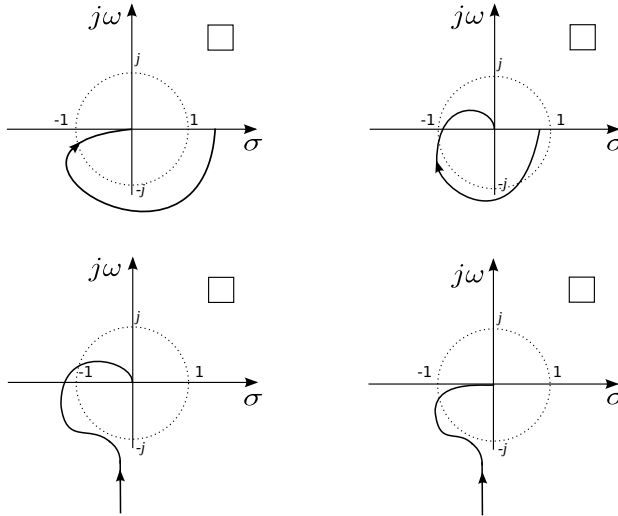


Figura 13.24

16. Considere un sistema tipo cero bajo una realimentación unitaria que utiliza un controlador proporcional. ¿Si la ganancia del modo proporcional aumenta un 10 %, el offset relativo en consigna disminuye un 10 %?  
 Si    No

## 13.7. Problemas

**Problema 13.1** Considere un sistema cuya función de transferencia es,

$$G(s) = \frac{1}{(10s + 1)(5s + 1)}$$

en un lazo con acción proporcional utilizando una válvula con función de transferencia  $G_v(s) = \frac{4}{2s+1}$  y un elemento de medición cuya ganancia  $K_m = K_T = 0,5$  y constante de tiempo despreciable.

Todas las constantes de tiempo están dadas en minutos.

- Realice el diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado.
- ¿Puede lograrse offset nulo con el controlador propuesto? Justifique.
- Determine la ganancia necesaria con el controlador proporcional para obtener un offset en consigna relativo a la entrada de un 5%. ¿Es estable el sistema para esta ganancia?

**Problema 13.2** Un sistema cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{1}{(0,05s + 1)(5s + 1)^2}$$

opera en lazo cerrado con un controlador proporcional al que se lo ajustó para tener margen de ganancia igual a 2. Se sabe además que el elemento de medición y el elemento de control final tienen ganancia unitaria y dinámica despreciable.

Alguien asegura que con este criterio, se tiene desde todo punto de vista una buena estabilidad relativa y un offset aceptable.

- ¿Está de acuerdo? Justifique su respuesta.
- Proponga una alternativa que le permita disminuir el offset, sin poner en riesgo la estabilidad.

**Problema 13.3** Considere una planta cuya función de transferencia de tercer orden es

$$G(s) = \frac{K_p}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$$

con  $T_1, T_2,$  y  $T_3 > 0$ . Se desea controlar dicho sistema con un lazo feedback clásico.

Ajuste, por medio del análisis del lugar geométrico de raíces, un controlador que permita obtener offset nulo para entrada escalón en la referencia y una respuesta sin sobreimpulso con mínimo tiempo de establecimiento.

Indique los rangos de valores de los modos adoptados con el controlador elegido.

**Problema 13.4** Considere el sistema de control de la Fig. 13.25.

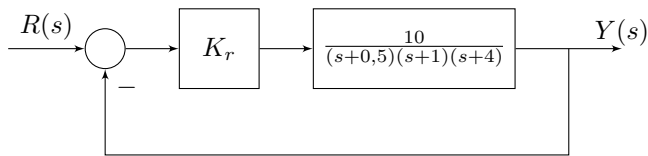


Figura 13.25

- Estudie la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante el diagrama del lugar de las raíces para  $K_r \geq 0$ .
- ¿Es posible alcanzar estabilidad para  $0 \leq K_r < \infty$  con el controlador proporcional? En caso contrario, sintonice un controlador P tal que el sistema tenga margen de ganancia igual a 2. ¿A qué es igual el offset en este caso?
- ¿Conoce algún otro controlador que permita que el sistema sea estable para todo  $K_r > 0$ ?

- (d) ¿Sintonice un controlador de cancelación más sencillo que permita que la respuesta a lazo cerrado frente a un escalón unitario en consigna tenga offset nulo? Justifique su respuesta.
- (e) ¿Conoce otro controlador de cancelación que permita cumplir con los requerimientos del inciso (d)? Si su respuesta es afirmativa, calcule los parámetros del mismo.

**Problema 13.5** El sistema representado en el siguiente diagrama de bloques, corresponde al control con modo integral de un sistema térmico de un horno sobre el cual se desea desarrollar una experiencia. Las constante de tiempo y el tiempo de acción integral se expresan en minutos.

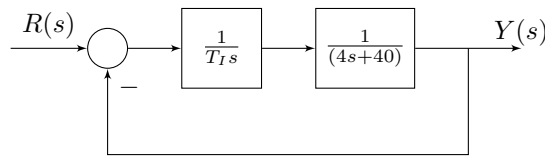


Figura 13.26

Se adopta  $T_I = 0,1\text{min}$ . En el instante inicial la consigna y la salida es de  $90^\circ\text{C}$ , se da un escalón en consigna de  $12^\circ\text{C}$ .

- (a) ¿Qué tipo de respuesta se obtiene a lazo cerrado? Justifique.
- (b) ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir desde la aplicación del escalón para que la temperatura alcance  $100^\circ\text{C}$ ?
- (c) Si en el instante en que alcanza los  $100^\circ\text{C}$  se corta el escalón, ¿cuánto tiempo se tardará el sistema en volver a alcanzar la temperatura inicial? Esquematice la respuesta dinámica completa.
- (d) ¿Qué cambios se obtienen en la respuesta dinámica si  $T_I = 5 \cdot 10^{-3}\text{min}$ ?
- (e) ¿Cómo es el lugar de raíces a medida que varía  $T_I$ ? Esquematice las posibles respuestas al escalón.

**Problema 13.6** Considere un sistema de segundo orden, cuya función de transferencia es  $G_p(s) = 7/(2s + 1)(5s + 1)$  controlado con un controlador PD. Asuma que, 1)  $2\% < BP < 500\%$ , 2)  $0,06\text{min} < T_D < 25\text{min}$  y 3) un cambio en consigna igual a una delta.

- (a) Explique las ventajas y desventajas de haber incluido la acción derivativa en un lazo de control en comparación con un controlador P.
- (b) ¿A qué es igual el valor final alcanzado en este caso para el cambio propuesto en el inciso (a)?
- (c) Adopte un valor de  $T_D$  y calcule el valor de  $K_r$  que permite alcanzar un mínimo tiempo de establecimiento.
- (d) Obtenga una expresión analítica para el tiempo de establecimiento mínimo en función del valor de  $T_D$ . Luego, basado en ella, calcule el valor del tiempo de establecimiento alcanzado para el valor de  $T_D$  adoptado en el inciso (c).

- (e) Indique a mano alzada las respuestas dinámicas del sistema realimentado para distintos valores de  $K_r$  y el valor  $T_D$  adoptado en (c).

**Problema 13.7** Considere el sistema realimentado de la Fig. 13.27.

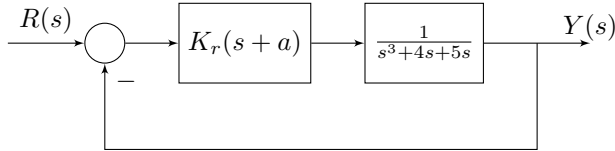


Figura 13.27

- (a) Encuentre, mediante un análisis con el lugar de las raíces, el intervalo de valores de  $a$  tal que el sistema sea siempre estable para cualquier valor de  $0 < K_r < \infty$ .
- (b) Tomando  $a = 1$  determine analíticamente el valor de  $K_r$  que para que el sistema tenga un coeficiente de amortiguamiento  $\zeta = 0,8$ .
- (c) Ajustando  $a = 6$  y  $K_r = 2$ , ¿qué coeficiente de amortiguamiento se alcanza?
- (d) Simule numéricamente las respuestas dinámicas del sistema realimentado con los controladores calculados en los incisos (b) y (c).

**Problema 13.8** Considere el sistema de regulación de la Fig. 13.28, donde  $K_m = K_t = 1$ :

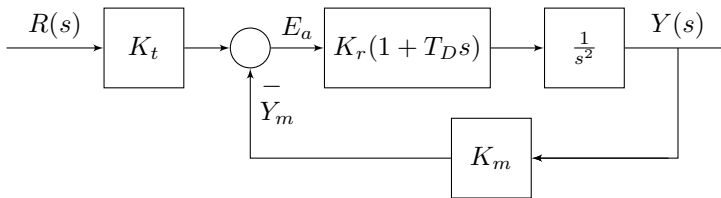


Figura 13.28

- (a) Si  $r(t) = H(t)$ , determine los valores de  $K_r$  y  $T_D$  para que la respuesta dinámica de  $y(t)$  cumpla con las siguientes especificaciones:
- Sobrevalor máximo 25 % en la respuesta de la variable controlada
  - Tiempo de pico  $T_p = 2s$ .

Asuma que es posible aproximar los sobrevalores relativos por la ecuación  $A_n/y(\infty) = e^{-n\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$  con  $n = 1, 3, 5 \dots$  y el tiempo de pico  $t_p = \pi T/\sqrt{1-\zeta^2}$ .

- (b) Calcule las raíces del sistema realimentado y represéntelas en un diagrama de lugar de raíces para el  $T_D$  adoptado y  $K_r \geq 0$ . Obtenga conclusiones.
- (c) Indique que ocurre si se adopta  $T_D = 0$ . Justifique su respuesta.

**Problema 13.9** Un sistema cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{2}{(2s + 1)(10s + 1)}$$

con las constantes de tiempo expresadas en minutos.

Se desea controlar dicho sistema con un controlador PD utilizando un elemento de control final y un transductor con ganancia unitaria y dinámica despreciable. Para esto se dispone en planta de un controlador cuya ganancia  $0,1 \leq K_r \leq 30$  y un tiempo de acción derivativa  $0,06 \leq T_D \leq 10$  min.

Se afirma que puede lograrse con este controlador una respuesta temporal para un cambio escalón unitario en consigna con las siguientes características:

- offset: 5 %
- Tiempo de estabilización: 7 min
- Sobrevalor relativo máximo: 30 %

¿Está de acuerdo con esta afirmación? Justifique su respuesta.

**Problema 13.10** Considere el sistema de control de posición angular de la Fig. 13.29

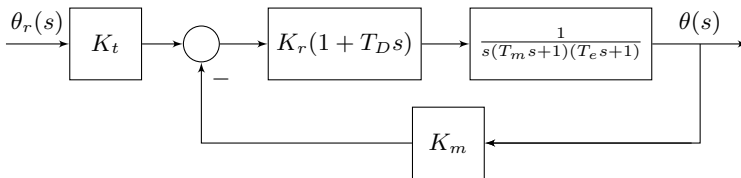


Figura 13.29: Sistema de control de posición angular de un motor de corriente continua.

- (a) ¿Cómo es el offset del sistema si  $K_m \neq K_t$  y si  $K_m = K_t$ ?
- (b) Asumiendo que  $K_m = K_t = 1$ ,  $T_m = 5$  y  $T_e$  es despreciable frente a  $T_m$ , plantee los posibles lugares de las raíces para diferentes valores de tiempo de acción derivativa, a medida que varía la ganancia  $K_r$  del controlador.
- (c) Se desea encontrar el rango de valores de  $T_D$  que permiten lograr respuestas rápidas en lazo cerrado. ¿Cuál es el mejor caso de los planteados en el inciso (b)?
- (d) Adopte un valor cualquiera de  $T_D$  dentro del rango propuesto en el inciso (c), y calcule el valor de la ganancia del modo proporcional del controlador, con el fin lograr una respuesta rápida y críticamente amortiguada.

**Problema 13.11** Después de aplicar un procedimiento de identificación, la función de transferencia de un intercambiador de calor entre la temperatura de salida ( $\Theta_s$ ) y el caudal de agua de enfriamiento ( $Q_c$ ) resulta ser,

$$\frac{\Theta_s(s)}{Q_c(s)} = \frac{-2}{(2s + 1)^3}$$

Asuma además que los elementos de medición y control final tienen ganancia unitaria y dinámica despreciable.

Los ingenieros de control sugieren no utilizar el control proporcional de temperatura ya que el sistema de control podría presentar inestabilidad. En lugar de ello, proponen usar un control de temperatura PD, asegurando que el mismo garantiza estabilidad para todo  $K_r \geq 0$ .

- Realice el diagrama bajo normas ISA del sistema de control.
- ¿Está usted de acuerdo con los ingenieros de control? Justifique su respuesta. Analice con lugar de raíces la estabilidad del sistema de control P y PD.
- De acuerdo con el fabricante del controlador, el modo derivativo real tiene por función de transferencia,

$$D = \frac{T_D s + 1}{0,1T_D s + 1}$$

Replantee los lugares de raíces asumiendo,  $T_D = 2$ ,  $T_D < 2$  y  $T_D > 2$

- Basándose en los lugares de raíces del inciso anterior, que valor de  $T_D$  sugiere que se adopte. Justifique su respuesta.

**Problema 13.12** Considere una planta con función de transferencia es

$$G_p(s) = \frac{K e^{-\theta s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

bajo una realimentación unitaria y con un elemento de control final de ganancia unitaria y dinámica despreciable.

Sintonice por medio del lugar geométrico de las raíces un controlador que permita obtener offset nulo para un cambio escalón en la referencia y mínimo tiempo de establecimiento sin sobrevalor.

Asuma como válida, una aproximación de Padé de primer orden para el tiempo muerto.

**Problema 13.13** Se desea controlar un sistema cuya función de transferencia es,

$$G_p(s) = \frac{5}{s(s-2)}$$

y donde las constantes de tiempo están en minutos. Para ello se estudia la posibilidad de utilizar un controlador P, PI o PD.

- ¿Qué controlador emplearía? Fundamente adecuadamente su respuesta.
- Encuentre un juego de valores que permita sintonizar los modos del controlador elegido en el inciso anterior de manera de alcanzar una relación de decaimiento 1/4 y un tiempo de establecimiento de 5 min. Se sabe que el rango de operación de cada modo del controlador disponible puede ser ajustado dentro de los siguientes valores:
  - Banda proporcional:  $2\% \leq BP \leq 400\%$ .
  - Tiempo de acción integral:  $0.01 \text{ min} \leq T_I \leq 50 \text{ min}$ .
  - Tiempo de acción derivativo:  $0.06 \text{ min} \leq T_D \leq 25 \text{ min}$ .

Incluya alguna condición, si lo considera necesario, para calcular alguno de los modos adoptados.

Considere además que la realimentación es unitaria, los elementos de control final y de medición tienen ganancia unitaria y dinámica despreciable.

**Problema 13.14** Considere el sistema de control de la Fig. 13.30.

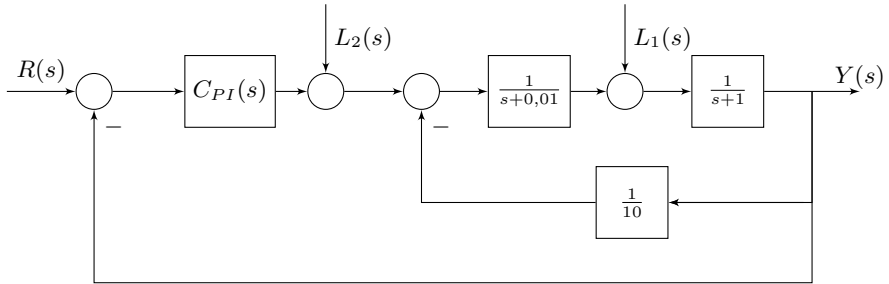


Figura 13.30

- Resuelva el diagrama de bloques y encuentre las funciones de transferencia entre la salida controlada  $Y(s)$  y las entradas  $R(s)$ ,  $L_1(s)$  y  $L_2(s)$ .
- Para que rango de valores de  $T_I$  el sistema de control es estable  $\forall K_r \geq 0$ .
- Adopte un par de valores de  $K_r$  y  $T_I$  que le parezca conveniente. Luego, determine la respuesta dinámica del sistema realimentado para un cambio escalón unitario en consigna. Justifique adecuadamente.

**Problema 13.15** Considere un sistema de tercer orden cuya ganancia es unitaria y las constantes de tiempo son 5, 10 y 12 minutos realimentado con controlador PD. Los elementos de medición y de control final tienen ganancia unitaria y dinámica despreciable.

- Hallar el rango de valores de  $T_D$  que permiten que el sistema a lazo cerrado sea estable  $\forall K_r > 0$ .
- Determinar qué rango de valores de  $T_D$  permiten minimizar el tiempo de estabilización.

**Problema 13.16** Se propone controlar un sistema cuya función de transferencia es  $G_p(s) = (-s + 5)/(s + 1)(2s + 1)$  mediante un controlador P o bien PD. Justifique cual de ellos recomienda mediante un análisis con lugar geométrico de las raíces

**Problema 13.17** Considere un sistema de segundo orden cuyas constantes de tiempo son de 5 min y 10 min y su ganancia es unitaria, realimentado con un controlador PI.

- Basándose en un análisis del lugar de las raíces, prediga las respuestas dinámicas del sistema realimentado para cambios en consigna paramétricas con  $K_r$ , si el tiempo de acción integral varía de acuerdo a los siguientes rangos: i)  $T_I > 20$ ,  $5 < T_I < 20$  y  $T_I > 5$ . Asuma  $G_m = G_v = 1$ .
- Para que rango de valores de  $T_I$  el sistema es estable  $\forall K_r \geq 0$ .

**Problema 13.18** Considere el tanque cilíndrico de la Fig. 13.31 donde se controla el nivel de líquido manipulando el caudal de salida del mismo. Asuma que,

1. el transductor de nivel tiene ganancia unitaria y dinámica despreciable y,
2. el tanque tiene área transversal constante  $A$ .

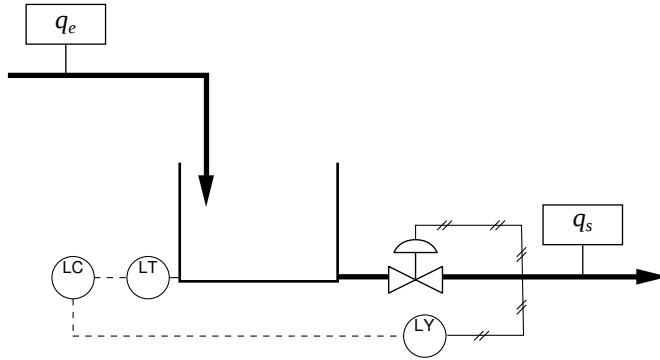


Figura 13.31

- (a) Determine las ecuaciones de balance de materia del sistema a lazo abierto.
- (b) Arme el diagrama de bloques del sistema a lazo abierto y cerrado.
- (c) Se sabe además que la válvula de control tiene una función de transferencia lineal ( $G_v = K_v/T_v s + 1$ ). Un ingeniero de control propone utilizar un controlador PI para eliminar offset en carga y consigna, mientras que otro propone simplemente un P. ¿Con quién está usted de acuerdo? Justifique.
- (d) ¿Hay otra alternativa para lograr el objetivo planteado en el inciso anterior? Justifique.
- (e) Adopte un rango de valores de  $T_I$  tal que el sistema realimentado sea asintóticamente estable  $\forall K_r > 0$ .
- (f) Sintonice el controlador propuesto en (c) tal que el sistema realimentado tenga un  $\zeta = 0,23$  y un  $T_{est} = 3$  Justifique adecuadamente. Para los cálculos asuma que,
  - $2\% \leq BP\% \leq 500\%$ ,
  - $0,1 \text{ min} < T_I < 50 \text{ min}$ ,
  - sección transversal del tanque  $0,5 \text{ m}^2$ ,
  - $K_v = 1$  y  $T_v = 0,2 \text{ min}$ .

**Problema 13.19** Se desea controlar a lazo cerrado una planta cuya función de transferencia es de la forma

$$G_p(s) = \frac{K(as + 1)}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

con  $T_1 > a > T_2$  con una realimentación unitaria y un elemento de control final de ganancia unitaria y dinámica despreciable.



Sintonize por medio del análisis del lugar geométrico de las raíces, un controlador P, I, PI, o bien PID, que permita alcanzar offset nulo para señal escalón en la entrada de referencia y mínimo tiempo de establecimiento.

**Problema 13.20** Se desea controlar una planta cuya función de transferencia es  $G_p(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$  con  $\omega_n = 1$ ;  $\zeta = 0,3$  y  $K = 5$  utilizando un sensor y una válvula con ganancia unitaria y dinámica despreciable. En principio se propone utilizar un controlador proporcional.

- Trazar el lugar geométrico de las raíces para dicho sistema de control.
- Sintonice un controlador que permita lograr que la respuesta de lazo cerrado sea no oscilatoria y un tiempo de estabilización menor o igual que la mitad del que posee el sistema a lazo abierto. Analice mediante el lugar de raíces.
- ¿Grafique a mano alzada la respuesta al escalón unitario en consigna del sistema de control del inciso (b)? Determine el offset. Luego, verifique su análisis mediante simulación numérica.
- Proponer un controlador que además de cumplir los requerimientos del punto (b) permita lograr offset nulo para entrada escalón en la señal de referencia. Justifique cualitativamente con el lugar de raíces.

**Problema 13.21** Considere una planta cuya función de transferencia es,

$$G_p(s) = \frac{K_p}{(s+a)(s-b)}$$

con  $K_p, a$  y  $b > 0$ .

Dicha planta es controlada con una realimentación unitaria y un elemento de control final de ganancia unitaria y dinámica despreciable.

- ¿Cómo debe ser la relación  $a/b$ , para que el sistema en lazo cerrado con un controlador proporcional presente al menos un rango de estabilidad?
- ¿En qué rango de valores de ganancia del controlador, el sistema es estable en lazo cerrado?
- Para el caso adoptado, ¿cuál es el valor de la ganancia crítica?

*Sugerencia.* Utilice el criterio de Routh y valide su respuesta mediante un análisis con el lugar geométrico de las raíces.

**Problema 13.22** Considere una planta cuya función de transferencia es,

$$G_p(s) = \frac{K_p}{(s+a)(s-3a)}$$

con  $K_p$  y  $a > 0$ .

Dicha planta es controlada con una realimentación unitaria y un elemento de control final de ganancia unitaria y dinámica despreciable.

Mediante el uso del lugar de las raíces proponga un controlador, que permita lograr que el sistema sea estable a lazo cerrado.

**Problema 13.23** Se propone controlar un sistema térmico cuya función de transferencia es  $G_p(s) = 1/(2s+1)(5s+1)$  con un controlador neumático PI cuyas

parámetros son  $K_r = 3,5$  y  $T_I = 0,5$ . La característica estática del elemento de medición es la que se presenta en la Fig. 13.32, y el elemento de acción final tiene ganancia unitaria y dinámica despreciable.

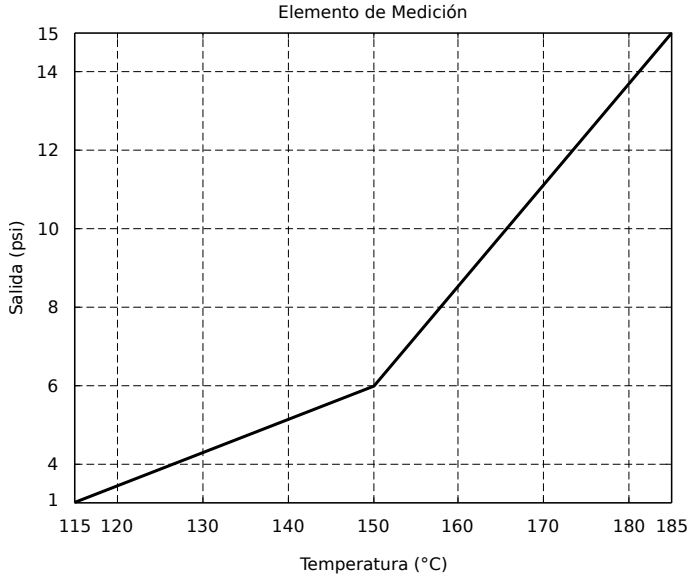


Figura 13.32

- (a) Analice que ocurre con la estabilidad del sistema si la temperatura varía entre 120°C y 145°C o bien, entre 165°C y 185°C.
- (b) Proponga un juego de valores de  $K_r$  y  $T_I$  que permita cubrir el intervalo de operación entre 115°C y 185°C. Justifique adecuadamente su propuesta.

**Problema 13.24** Para el sistema representado en la Fig. 13.33,

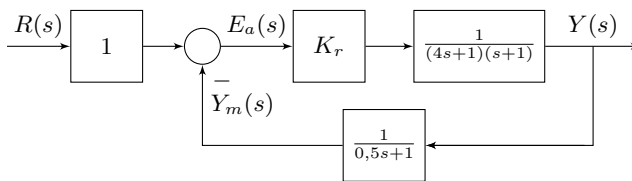


Figura 13.33

- (a) Encuentre el rango de valores de  $K_r$  tal que el  $offset \leq 7\%$ .
- (b) ¿A qué es igual el tiempo de establecimiento para cuando se alcanza un  $offset = 7\%$ ?
- (c) Calcule los márgenes de ganancia y de fase del sistema para el valor de  $K_r$  establecido en (a). ¿Es este un buen diseño del controlador? ¿Por qué?

- (d) ¿Considera que con un controlador PD podría cumplir la condición pretendida y mejorar el tiempo de establecimiento? Si su respuesta es NO, explique por qué; de lo contrario adopte los valores correspondientes de las acciones un controlador PD de cancelación. Se pretende que el  $T_{est} \leq 3$  unidades de tiempo.
- (e) Si la respuesta del inciso (d) fue afirmativa, analice nuevamente la estabilidad del sistema realimentado con el controlador calculado en dicho inciso. ¿A qué es igual el tiempo de establecimiento alcanzado en este caso?

**Problema 13.25** Considere el sistema de control de la Fig. 13.34.

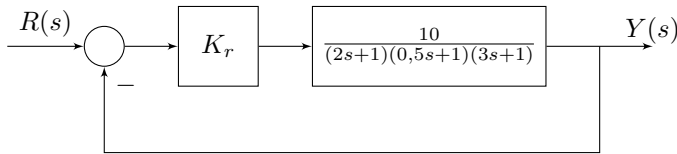


Figura 13.34

- (a) ¿Qué banda proporcional se debe sintonizar en el controlador a fin de alcanzar un  $MF = 45^\circ$ . Asuma una relación de span unitaria para el controlador?
- (b) Calcule el coeficiente de amortiguamiento para la banda proporcional adoptada.
- (c) Grafique las respuestas dinámicas al cambio escalón en consigna para el controlador adoptado.
- (d) Comente si es posible obtener mejoras en el sistema de control si se adopta un controlador PD.

**Problema 13.26** Dado un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = 2/(10s - 1)(5s + 1)$  se lo controla con un lazo de realimentación compuesto por, i) un controlador proporcional, ii) un elemento de control final cuya función de transferencia es  $G_p(s) = 1/(0,5s + 1)$  y iii) un elemento de medición cuya función de transferencia es  $G_m = 0,12$ .

- (a) ¿Cómo se comporta el sistema a lazo abierto?
- (b) Analice la estabilidad del lazo de control mediante el uso del lugar de las raíces
- (c) ¿Qué valor hay que darle a la ganancia del controlador para lograr simultáneamente un  $MG = 2$  y un offset pequeño?

**Problema 13.27** Dado el siguiente sistema

$$G_p(s) = \frac{4}{(10s - 1)(2s + 1)}$$

- (a) ¿Es estable el sistema en lazo abierto?
- (b) Se desea operar el mismo en lazo cerrado de manera que el tiempo de estabilización sea menor o igual a 4 unidades de tiempo y  $\zeta \geq 0,8$ , para

lo cual se dispone de, 1) controladores P, I, PI, PD y 2) transductores y elemento de control final con ganancia unitaria y dinámica despreciable.

(b1) Justifique adecuadamente el controlador a utilizar.

(b2) Calcule los parámetros del controlador adoptado.

(b3) ¿Cómo son las evoluciones temporales para un cambio escalón unitario no simultáneo en carga y en consigna? Asuma  $G_l = 1$ .

**Problema 13.28** En la Fig. 13.35 se muestra el diagrama de bloques del piloto automático de vuelo del sistema de control de un proyectil.

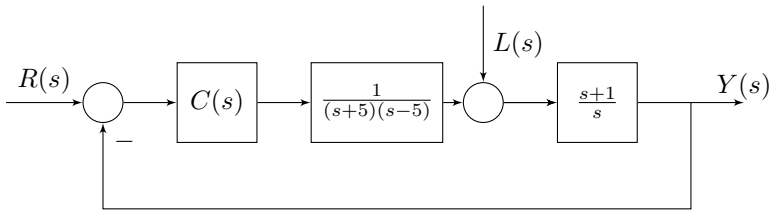


Figura 13.35

De acuerdo con un ingeniero de planta, el sistema realimentado puede ser estabilizado con un controlador PD y no con un P.

- Esta usted de acuerdo con la observación del ingeniero. Justifique mediante el lugar de las raíces.
- Obtenga las funciones de transferencia de lazo cerrado que relacionan la salida controlada con la referencia y la carga, para el controlador adoptado en el inciso (a).
- Analice el offset para cambios escalón en consigna y carga. Comente los resultados obtenidos.
- Obtenga una condición que permita sintonizar el modo derivativo para que se pueda alcanzar la estabilidad pretendida con  $K_r$  variable.
- Basándose en la respuesta del ítem (d) adopte un valor de  $T_D$  y sintonice  $K_r$  para lograr un  $MG = 2$ .
- Prediga el comportamiento dinámico del sistema realimentado para los cambios escalón en consigna y carga. Justifique adecuadamente y realice gráficos a mano alzada.
- Verifique sus predicciones mediante simulaciones numéricas.

**Problema 13.29** Considere un sistema de control cuya función de transferencia de lazo abierto es,

$$G_p(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+5)}$$

realimentado con un controlador proporcional, transductor y elemento de control final de ganancias unitarias y dinámica despreciable.

- ¿Este sistema realimentado presenta offset en consigna? Justifique

- (b) ¿Cuánto debe valer  $K_r$  para lograr un sobrevalor relativo máximo del 5 %.
- (c) ¿Es posible lograr con dicho controlador un tiempo de establecimiento de 1.5s? Justifique adecuadamente.
- (d) ¿Qué debería hacer para alcanzar el requerimiento del inciso anterior? Justifique mediante el lugar de las raíces y calcule los parámetros del controlador propuesto.
- (e) Proponga un controlador que permita alcanzar los requerimientos de los incisos (b) y (c) simultáneamente.

**Problema 13.30** Se necesita determinar la función de transferencia de un sistema experimental para luego aplicar un sistema de control proporcional. Para ello, se realiza una experiencia a lazo abierto aplicando una señal escalón de amplitud unitaria en  $t = 0$  en la variable manipulada. Los resultados de dicha experiencia se muestran en la Fig. 13.36.

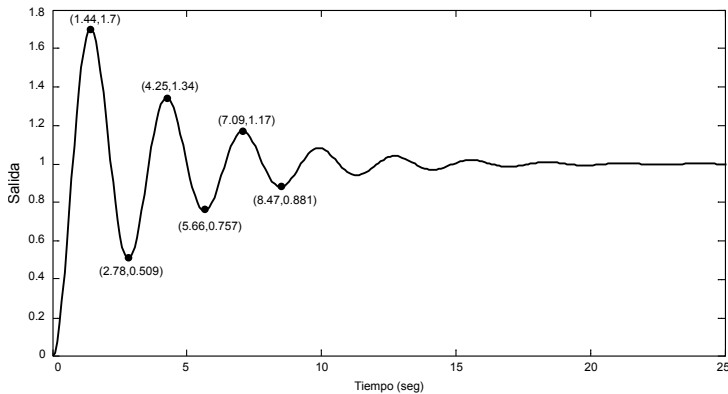


Figura 13.36: Experimento de identificación a lazo abierto.

- (a) Proponga una función de transferencia para la planta y estime sus parámetros asumiendo las hipótesis que considere necesarias.
- (b) Realice el estudio de estabilidad por el lugar geométrico de las raíces de dicho sistema de control cuando es realimentado con un controlador proporcional.
- (c) ¿Se obtienen mejoras utilizando un controlador proporcional derivativo? Justifique su respuesta.

**Problema 13.31** Se desea controlar el sistema que se muestra en la Fig. 13.37, de forma tal que el offset sea nulo tanto para un cambio escalón en carga como en consigna. A tal efecto se dispone de un controlador P y PI.

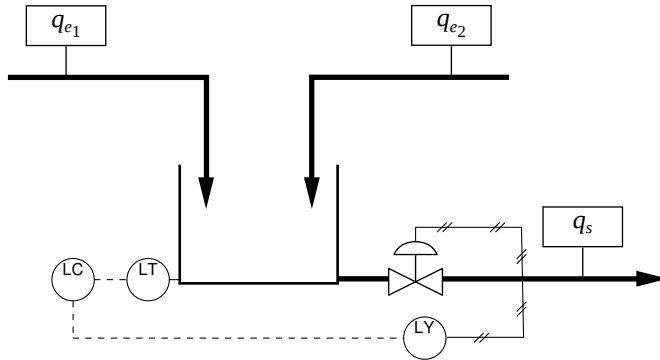


Figura 13.37: Los rangos de operación del elemento de medición, controlador y convertor se corresponden con el diagrama según normas ISA.

Considere que,

- los caudales de entrada en estado estacionario  $q_{e1}^0 = q_{e2}^0 = 10 \text{ l/min}$  y el área del tanque  $A = 0,5 \text{ m}^2$ ,
  - la válvula es lineal, con dinámica despreciable y tiempo muerto  $\theta = 0,1 \text{ min}$ , normalmente abierta, y su caudal  $0 \leq q_m \leq 30 \text{ l/min}$  (para una diferencia nivel de un metro de columna de agua),
  - el transductor de nivel tiene una ganancia  $K_m = 1,2$  y su dinámica despreciable.
  - la banda proporcional del controlador  $2\% \leq BP\% \leq 500\%$  y el tiempo de acción integral  $0,2 \leq T_I \leq 50 \text{ min}$ .
- (a) Obtenga las ecuaciones de balance de materia que representa la dinámica de lazo abierto del sistema y arme el diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado.
  - (b) Adopte el signo del controlador.
  - (c) Adopte el controlador que cumple con el requerimiento de offset nulo tanto en carga como en consigna.
  - (d) Analice el o los posibles lugares de las raíces del sistema realimentado con el controlador elegido. Asuma para este análisis que el tiempo muerto puede aproximarse razonablemente bien con la aproximación de Padé de primer orden.
  - (e) Recomiende rango de valores para el o los parámetros del controlador adoptado.
  - (f) Indique a mano alzada las posibles respuestas dinámicas (paramétricas con  $K_r$ ) para cuando se tiene un cambio escalón en la variable de carga con el controlador escogido en el inciso anterior.

**Problema 13.32** Se desea controlar un sistema que se puede modelar aceptablemente bien mediante un doble integrador y una ganancia unitaria. Asuma además que  $K_m = K_v = 1$ .

- (a) Al realimentar dicho sistema con un controlador proporcional de ganancia unitaria, se observa que la respuesta dinámica obtenida es oscilatoria. ¿A qué frecuencia lo hace? ¿Es posible mejorar este comportamiento variando la ganancia del controlador proporcional?
- (b) Un profesional propone que se reemplace el controlador proporcional por el compensador del Prob. 5.5.  
¿Está de acuerdo Ud. con el criterio del profesional? En caso afirmativo indique qué valores de  $\tau$  y  $T$  adopta, y como sería la respuesta dinámica ante un escalón unitario en consigna cuando se varía la ganancia  $K_r$ .
- (c) Proponga una solución para estabilizar al sistema realimentado con un controlador PI, PD o PID.

**Problema 13.33** Se necesita determinar la función de transferencia de un sistema experimental para luego sintonizar un controlador proporcional que controle dicho sistema. Para ello, se realiza una experiencia a lazo abierto aplicando al sistema una señal impulso unitario ideal en  $t = 0$ . Los resultados de dicha experiencia se muestran en la Fig. 13.38.

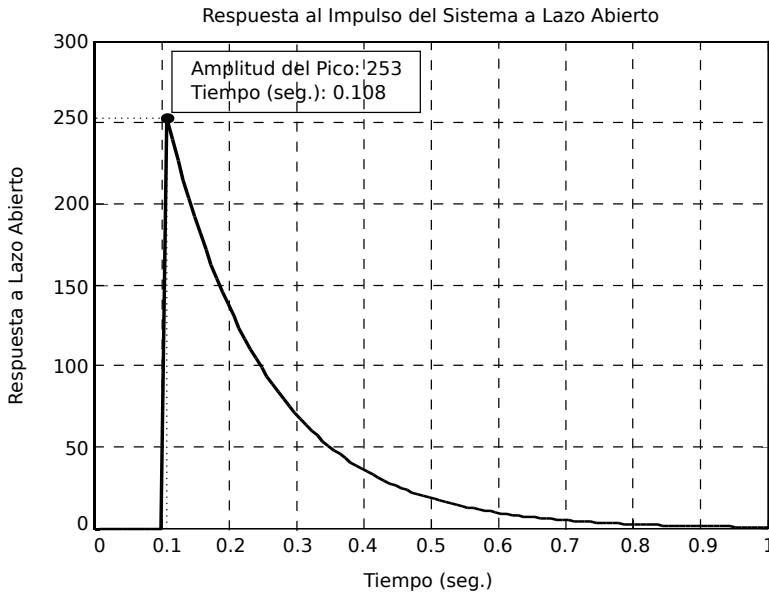


Figura 13.38

- (a) Encuentre la función de transferencia de la planta asumiendo las hipótesis que considere necesarias.
- (b) Analice el comportamiento dinámico del sistema en lazo cerrado con un controlador proporcional mediante el lugar de las raíces. ¿Cuánto vale  $K_r$  para lograr un margen de ganancia igual a 2?

- (c) Diseñe un controlador PI para alcanzar el mismo margen de ganancia que con el P.
- (d) ¿Se obtienen mejoras utilizando un PI? Justifique.

**Problema 13.34** Considere un sistema de primero orden con retardo realimentado con controlador proporcional. Asuma que  $G_m = G_v = 1$ .

- (a) Analice la estabilidad de dicho sistema de control, i) mediante los diagramas de Bode y ii) utilice la aproximación de Padé de primer orden y analice mediante el lugar geométrico de las raíces. ¿Son coincidentes ambos análisis? Explore ventajas y desventajas de cada uno.
- (b) ¿Si se utiliza un controlador PI se logra alguna mejora en cuanto a la estabilidad?
- (c) ¿Conoce alguna razón por la cual Ud. aconsejaría utilizar el controlador PI para este sistema? Justifique

**Problema 13.35** Considere un sistema de segundo orden realimentado con un controlador PI. Asuma que  $G_m = G_v = 1$ .

- (a) Analice la estabilidad del sistema realimentado mediante lugar de las raíces.
- (b) Luego, recomiende el valor de  $T_I$  que permite obtener un tiempo de establecimiento mínimo para el sistema realimentado.
- (c) Para este último caso, realice los diagramas de Bode (a mano alzada) y analice también la estabilidad del sistema realimentado.

**Problema 13.36** Considere un sistema de tercer orden con ganancia unitaria realimentado con un controlador PI.

- (a) Indique si existe un rango de valores de  $T_I$  para el cual el sistema de control es absolutamente estable.
- (b) Adopte un rango de valores de  $T_I$  y prediga las respuestas dinámicas al escalón en consigna paramétricas con  $K_r$ .
- (c) Analice el diagrama del lugar de raíces con  $K_r$  constante, modificando el valor de  $T_I$  desde infinito a cero.

**Problema 13.37** Considere un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+1)}$  el cual es realimentado mediante un feedback unitario utilizando un controlador PD cuyo tiempo de acción derivativo es  $T_D = 2$ . Se sabe además que el elemento de control final es de ganancia unitaria y dinámica despreciable.

- (a) Analice la estabilidad del sistema mediante el lugar de las raíces.
- (b) Determine el valor de  $K_r$  que permite lograr un valor de  $\zeta = 0,23$  y un bajo tiempo de establecimiento.
- (c) ¿Cómo determinaría el máximo coeficiente de amortiguamiento que se puede alcanzar en este problema en particular?

**Problema 13.38** Se desea identificar la función de transferencia de una planta y para ello se realiza un experimento que arroja los resultados que se presentan en la Tabla 13.3.



Tabla 13.3: Datos experimentales.

Frec.(rad/s)	Módulo(adim.)	Fase(rad.)	Frec.(rad/s)	Módulo(adim.)	Fase (rad.)
0.010000	4.9968770	-0.059990	0.379269	2.6329215	-1.896872
0.014384	4.9935423	-0.086276	0.545559	1.7481175	-2.421838
0.020691	4.9866565	-0.124056	0.784760	1.0311295	-2.983582
0.029764	4.9724691	-0.178307	1.128838	0.5577731	-3.589347
0.042813	4.9433681	-0.256068	1.623777	0.2860564	-4.282309
0.061585	4.8842228	-0.367110	2.335721	0.1424604	-5.138098
0.088587	4.7662284	-0.524484	3.359818	0.0698789	-6.264418
0.127427	4.5393221	-0.744236	4.832930	0.0340176	-7.809368
0.183298	4.1322702	-1.042677	6.951928	0.0164985	-9.978571
0.263665	3.4855460	-1.429244	10.000000	0.0079872	-13.061635

- (a) Caracterice la función de transferencia del sistema en base a la respuesta en frecuencia de la tabla adjunta. Luego, estime los parámetros de dicha función.
- (b) Diseñe un controlador PI que permita controlar dicho sistema. Justifique.

**Problema 13.39** Considere el sistema de la Fig. 13.39,

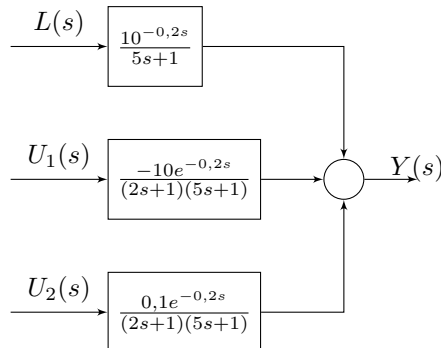


Figura 13.39

donde  $L(s)$  es una perturbación y  $U_1(s)$  y  $U_2(s)$  dos variables que potencialmente pueden ser manipulables.

Si se desea controlar la variable de salida  $Y(s)$ ,

- ¿qué variable elegiría como manipulada escogería? Justifique.
- Esquematice el diagrama de bloques del lazo de control de acuerdo con lo decidido en (a). Asuma que los elementos de medición y de control final tienen ganancia unitaria y dinámica despreciable.
- Indique que signo colocaría en el controlador.
- Si se desea obtener una respuesta temporal con offset nulo para una perturbación escalón en consigna. ¿Utilizaría un controlador P o PI?

- (e) Si además se desea obtener una respuesta temporal subamortiguada con un coeficiente de amortiguamiento  $\zeta = 0,23$ , para el controlador elegido en el inciso anterior, plantee el lugar de las raíces utilizando una aproximación de Padé de primer orden para el tiempo muerto. Luego, basándose en el análisis anterior, sintonice el controlador elegido con el fin de lograr el objetivo de performance pretendido.

**Problema 13.40** Considere el sistema de control a lazo abierto de la Fig. 13.40,

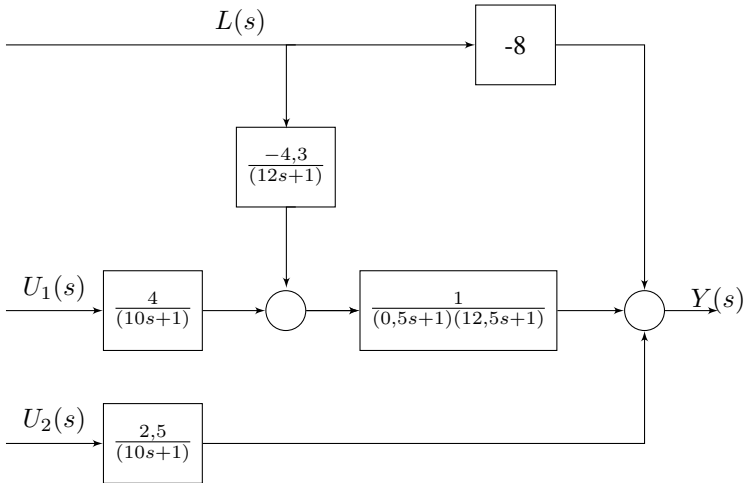


Figura 13.40

Se pretende colocar un lazo de control proporcional tal que la salida  $y(t)$  alcance un offset relativo al escalón de un  $\pm 10\%$ , para cuando se tiene una perturbación en entrada  $l(t)$ . Se sabe además que, tanto  $u_1(t)$  como  $u_2(t)$  pueden utilizarse como variables manipuladas.

- Considerando al transductor y elemento de control final (ECF) ideales con ganancia unitaria, esquematice mediante diagramas de bloques las dos posibles configuraciones de control y establezca si con ambas puede alcanzarse el offset pretendido. ¿Cuál de los dos sistemas de control escogería?
- Si el objetivo de performance hubiese sido un offset del  $40\%$ : ¿Cambiaría la configuración seleccionada? ¿Por qué?
- Determine los parámetros del controlador para el sistema de control escogido en el inciso (a).
- Simule numéricamente cambios en carga y consigna para mostrar el desempeño del sistema escogido.

# Capítulo 14

## Ajuste de Controladores PID

En este capítulo se discuten técnicas de sintonización de controladores PID típicos en la industria de procesos. Las técnicas aquí presentadas son las técnicas tradicionales basadas en modelos y basadas en ensayos experimentales. En todos los casos se complementa con ejemplos que buscan clarificar el tema.

### 14.1. Introducción

La mayoría de los problemas de control en la industria son resueltos mediante el uso de controladores PID. Hay varias razones que llevan a los ingenieros de control a adoptar esto. Primeramente, los controladores PID son sencillos tienen sólo tres parámetros de ajuste y su sintonización se puede llevar a cabo por prueba y error, logrando en algunos casos, aceptables resultados. A esto se le debe sumar la larga y exitosa experiencia del uso del controlador PID en la industria. Cuando el modo derivativo en algunos casos trae problemas con la amplificación de ruidos, los grandes tiempos muertos o bien, resulta complejo su ajuste, muchos ingenieros optan por no sintonizarlo (el vocabulario usual es *poner el modo en off*), resultando así un controlador PI que tiene tan sólo dos modos para ajustar y que en muchos casos permite lograr buenos resultados.

Es realmente mucho lo que se ha escrito en más de medio siglo de uso del controlador PID, desde sus *bondades* como controlador de sencilla sintonización hasta sus *limitaciones* al momento de buscar buenas performance, satisfacer restricciones en la variable manipulada, controlada etc. Uno de los primeros trabajos y más citados son los de Ziegler y Nichols ([88]) y, Cohen y Coon ([25]) así como muchos otros que surgieron posteriormente ([14], [15], [16], [17], [33], entre muchos otros).

Por tal motivo, un número de alternativas para el ajuste de controladores están disponibles en la literatura clásica, las que se podrían englobar en 2 grandes grupos.

1. Técnicas de ajuste basadas en modelos.
2. Técnicas de ajuste basadas en ensayos experimentales.

Las dos primeras hacen uso del conocimiento de la función de transferencia del proceso y de criterios teóricos bien establecidos para ajustar los parámetros del controlador, mientras que las últimas, utilizan algún criterio empírico o semiempírico que le permite al diseñador sintonizar los parámetros del controlador. Para esto último, se hace necesario realizar un ensayo experimental para poder ajustar los parámetros del controlador o bien, para identificar parámetros del sistema antes de ajustar el controlador.

## 14.2. Técnicas de Ajuste Basadas en Modelos

En esta sección se estudiarán tres técnicas clásicas,

1. el método de síntesis directa,
2. la técnica de parametrización de control con modelo Interno (IMC) y
3. las técnicas de ajuste basadas en criterios de conducta integral.

### 14.2.1. Método de síntesis directa

La idea es diseñar un controlador feedback con el objeto de lograr una función de transferencia de lazo cerrado deseada basándose en el modelo del proceso. La principal desventaja del método es que los controladores resultantes pueden no tener una estructura PID dando en muchos casos controladores irrealizables.

Considere el diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado representado en la Fig. 14.1.

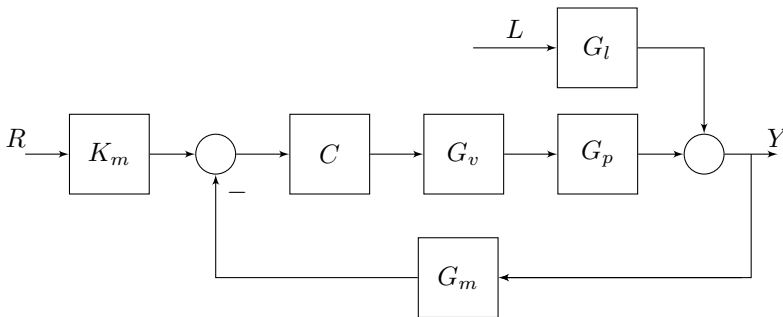


Figura 14.1: Representación de un sistema realimentado.

La función de transferencia entre la salida  $Y(s)$  y la referencia  $R(s)$  resulta,

$$\frac{Y}{R} = \frac{K_m C G_v G_p}{1 + C G_v G_p G_m}. \quad (14.1)$$

Definiendo  $G := G_v G_p G_m$  luego, la Ec. (14.1) se reduce a,

$$\frac{Y}{R} = \frac{CG}{1 + CG}. \quad (14.2)$$

La expresión (14.2) puede ser reordenada a fin de obtener la función de transferencia del controlador como sigue,

$$C = \frac{1}{G} \left( \frac{Y/R}{1 - Y/R} \right). \quad (14.3)$$

Note que, i) difícilmente se cuente con un modelo matemático lineal exacto de un proceso físico real y en consecuencia no se cuenta con la función de transferencia  $G(s)$  y ii) la función de transferencia de lazo cerrado  $Y/R$  es desconocida ya que aún no hemos diseñado el controlador  $C(s)$ . De cualquier modo un procedimiento de diseño puede ser obtenido a partir de dicha ecuación.

**Procedimiento 14.2.1 — Sintonización de Controladores por Síntesis Directa.**

**Paso 1.** Asumir una función de transferencia para el modelo del proceso

$$G_0 := G_{v0} G_{p0} G_{m0}.$$

**Paso 2** Reemplazar  $Y/R$  por una función de transferencia de lazo cerrado deseada  $(Y/R)_d = G_{lca}$ .

**Paso 3.** Calcular el controlador feedback como,

$$C = \frac{1}{G_0} \left( \frac{G_{lca}}{1 - G_{lca}} \right). \quad (14.4)$$

Note que, el controlador se calcula en base a la inversa del modelo del proceso ( $1/G_0$ ) que, en la gran mayoría de los casos, puede no ser realizable o bien, si  $G_0$  tiene ceros en el semiplano complejo derecho, su inversa resulta una función de transferencia inestable.

**Ejemplo 14.1** Considere un modelo de proceso  $G(s) = K_p/(Ts+1)$ . Diseñe el controlador feedback a fin de lograr una función de transferencia de lazo cerrado  $(Y/R)_d = 1/(\tau_c s + 1)$ , siendo  $\tau_c$  un parámetro de diseño.

A partir de la Ec. (14.4) se tiene,

$$C(s) = \frac{(Ts+1)}{K_p} \frac{1}{\tau_c s} = \frac{T}{K_r \tau_c} \left( 1 + \frac{1}{Ts} \right). \quad (14.5)$$

La Ec. (14.5) representa un controlador PI con una acción proporcional  $K_r = T/K_p \tau_c$  y un tiempo de acción integral  $TI = T$ . ■

**Ejemplo 14.2** Considere un sistema cuyo modelo de proceso es  $G(s) = K_p e^{-\theta s} / (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)$ . Diseñe el controlador feedback con el objeto de lograr una función de transferencia de lazo cerrado  $G_{l_c d} = e^{-\theta s} / (\tau_c s + 1)$ .

A partir de la Ec. (14.4) se tiene,

$$C(s) = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{K_p e^{-\theta s}} \frac{e^{-\theta s}}{\tau_c s + 1 - e^{-\theta s}}. \quad (14.6)$$

Adoptando  $e^{-\theta s} \approx 1 - \theta s$  luego, la ecuación anterior resulta,

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{K_p} \frac{1}{(\tau_c + \theta)s}, \\ &= \frac{1}{K_p(\tau_c + \theta)} \frac{(T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1)}{s}, \\ &= \frac{(T_1 + T_2)}{K_p(\tau_c + \theta)} \left[ \frac{T_1 T_2}{(T_1 + T_2)} s + 1 + \frac{1}{(T_1 + T_2)s} \right]. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Con lo que resulta la ecuación de un controlador PID cuyos parámetros son,  $K_r = (T_1 + T_2) / K_p(\tau_c + \theta)$ ,  $T_I = (T_1 + T_2)$  y  $T_D = T_1 T_2 / (T_1 + T_2)$ .

## 14.2.2. Control con modelo interno

A mediados de la década del 80 surge una nueva e importante estrategia de diseño de controladores conocida como Control con Modelo Interno (IMC, [63]). Similarmente al método DS la parametrización IMC está basada en asumir un modelo de proceso y las acciones del controlador resultan función de los parámetros del modelo nominal asumido. Esta parametrización tiene dos ventajas importantes, a) explícitamente tiene en cuenta un modelo incierto y, b) permite diseñar para una relación de compromiso entre performance y robustez del sistema de control para cambios en el proceso teniendo en cuenta los errores de modelado.

Considere un sistema de control cuyo diagrama de bloques es el de la Fig. 14.2a. Luego, para entender la relación entre el lazo de realimentación convencional y el lazo IMC, sumamos y restamos adecuadamente (dentro del DB) la función de transferencia del modelo de la planta designada como  $G_{p0}$ , también conocida como función de transferencia nominal de la planta. Así, el DB de la Fig. 14.2a puede ser redibujado como se indica en la Fig. 14.2b. Posteriormente, el DB puede ser reordenado moviendo uno de los sumadores incorporados en la Fig. 14.2b, resultando así el DB se muestra en la Fig. 14.2c.

Resolviendo el DB dentro de la línea de trazos de la Fig. 14.2c se obtiene la función de transferencia indicada como  $Q(s)$ (14.8).

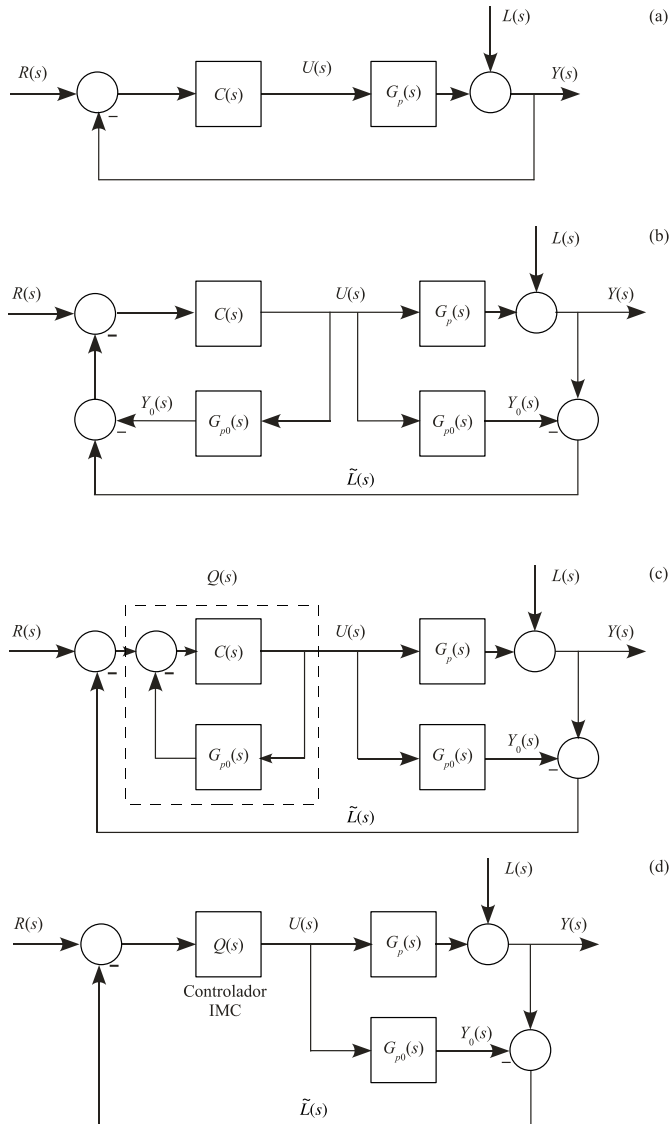


Figura 14.2: a) Sistema realimentado clásico. b) Sistema de control realimentado donde se suma y resta  $G_{p0}(s)$ . c) Fig. 14.2b redibujada. d) DB del Lazo IMC.

$$Q(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G_{p0}(s)}. \quad (14.8)$$

donde en el lenguaje tradicional de la teoría de control,  $Q(s)$  conocido como el controlador IMC. Finalmente, el DB de la Fig. 14.2c ahora resulta como se indica en la Fig. 14.2d.

Note que,

1. no se hizo ninguna simplificación para pasar del DB de la Fig 14.2a al de la Fig. 14.2d. Por tanto, ambos diagramas son equivalentes si se satisface la siguiente relación biunívoca,

$$Q(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G_{p0}(s)} \iff C(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)G_{p0}(s)}. \quad (14.9)$$

Esto conduce a que todo aquello que se pide al diseñar un lazo IMC a través de  $Q(s)$  se cumple luego en el lazo de realimentación clásico a través de  $C(s)$  y viceversa, siempre y cuando ninguna simplificación sea introducida al pasar de  $Q$  a  $C$  o viceversa.

2. La señal de realimentación es expresada en el dominio de Laplace como,

$$\tilde{L} = (G_p - G_{p0})U + L. \quad (14.10)$$

donde  $\delta_a = G_p - G_{p0}$  es definida como incertidumbre aditiva de la planta.

3. En ausencia de perturbaciones ( $L = 0$ ), si el modelo es exacto ( $G_p = G_{p0}$ ), la señal de realimentación  $\tilde{L} = 0$ . En otras palabras, el lazo de control IMC queda en LA.
4. Si  $L = 0$  y  $G_p \neq G_{p0}$  luego, la señal de realimentación resulta,  $\tilde{L} = (G_p - G_{p0})U$  y en consecuencia es proporcional a la incertidumbre aditiva del proceso.

En general, dado que el modelo del proceso es diferente a la planta real ( $G_p \neq G_{p0}$ ) se cumple que  $Y(s) \neq Y0(s)$ . En consecuencia, la función de transferencia de la salida controlada en función de los cambios en consigna ( $R(s)$ ) y en carga ( $L(s)$ ) resulta,

$$Y = \frac{QG_p}{1 + Q(G_p - G_{p0})}R + \frac{1 - QG_{p0}}{1 + Q(G_p - G_{p0})}L. \quad (14.11)$$

Luego, si se define,

- función sensibilidad:  $S = \frac{1 - QG_{p0}}{1 + Q(G_p - G_{p0})}$
- función sensibilidad complementaria:  $T = \frac{QG_p}{1 + Q(G_p - G_{p0})}$ ,

entonces note que,

1.  $Y = TR + SD$  donde  $T + S = 1$  y
2. para el caso especial de un modelo nominal perfecto ( $G_p = G_{p0}$ ) luego,  $S_0 = 1 - G_{p0}Q$ ,  $T_0 = G_{p0}Q$  y la Ec. (14.11) se reduce a,



$$Y = G_{p0}QR + (1 - G_{p0}Q)L. \quad (14.12)$$

**R** ■ **Remarca 14.1 — Control Perfecto.** Si  $G_p = G_{p0}$  es posible alcanzar el control perfecto adoptando,  $Q = G_{p0}^{-1}$ .

**Demostración** Note que con  $Q = G_{p0}^{-1}$  luego,  $S_0 = 0$  y  $T_0 = 1$  con lo que,

1. Problema de control:  $y(t) = r(t) \forall t \geq 0$  con,  $l(t) = 0$  y  $r(t) \neq 0$ .
2. Problema de Regulación:  $y(t) = 0 \forall t \geq 0$  con,  $l(t) \neq 0$  y  $r(t) = 0$ .

En otras palabras, tenemos error nulo  $e(t) = 0 \forall t \geq 0$ , con  $l(t)$  y  $r(t) \neq 0$ . □

Algo interesante de notar es que si  $l(t) = 0$  no necesito realimentar ya que puedo tener un perfecto seguimiento adoptando  $Q = G_{p0}^{-1}$ .

Ahora bien, surge inmediatamente una serie de inconvenientes a saber:

1. de acuerdo con la ecuación de diseño del controlador feedback,  $C = Q/(1 - G_{p0}Q) = \infty$ .
2. ¿Qué hacer si  $Q = 1/G_{p0}$  es no realizable?
3. Por otro lado, si  $G_p \neq G_{p0}$  por existir incertidumbre en el conocimiento de la planta, ¿qué hacer cuando esto sucede?

Ambos inconvenientes se dilucidarán en la próxima sección, pero si podemos anticipar que frente a estos inconvenientes el sistema de control podrá aproximarse lo más posible al control perfecto sin alcanzarlo jamás.

### Estabilidad Interna

En esta sección se pretende estudiar la estabilidad interna del lazo IMC y en consecuencia su relación con el lazo de realimentación tradicional.

**Teorema 14.2.1** Asumiendo que  $G_p = G_{p0}$ . Luego, el lazo IMC de la Fig. 14.2d es internamente estable  $\iff G_p$  y  $Q$  son estables.

**Demostración** Si  $G_p = G_{p0}$ , entonces el lazo de realimentación desaparece quedando un sistema a LA donde la estabilidad depende de  $G_p$  y  $Q$  □

Note lo siguiente:

1. ¿que ocurre si  $G_p = G_{p0}$  y  $G_p$  es inestable a LA? ¿La estructura IMC puede aplicarse en este caso?
2. Si  $G_p \neq G_{p0}$  y,  $G_p$  y  $G_{p0}$  son inestables. ¿Podemos confiar en realimentar una incertidumbre de modelo (inestable a LA) para estabilizar el lazo de control? En términos prácticos es inaceptable.

De cualquier manera estas dos cuestiones fueron estudiadas por los autores logrando un diseño IMC aplicable a plantas estables ([63]).

Ahora, considere nuevamente el sistema de la Fig. 14.1.

**Teorema 14.2.2** Asumiendo que  $G_p$  es estable y  $G_p = G_{p0}$ . Luego, el sistema realimentado con el controlador feedback  $C = Q/(1 - G_{p0}Q)$  es internamente estable  $\iff Q$  es estable.

**Demostración** Ver [63].  $\square$

Conclusión:

1. Existe una relación biunívoca de estabilidad entre el sistema de control IMC y el sistema de control realimentado tradicional, sujeto a que  $G_p = G_{p0}$  y que ninguna simplificación sea introducida al pasar de  $Q(s)$  a  $C(s)$  o viceversa.
2. Tenemos ahora una fórmula de diseño para  $C(s)$  en base a  $Q(s)$  que garantiza estabilidad del sistema realimentado y donde es más sencillo buscar un  $Q(s)$  estable que un  $C(s)$  que estabilice al sistema de control.
3. ¿Qué ocurre si  $G_p \neq G_{p0}$ ?

### Diseño IMC-SISO

Asumiremos por simplicidad, en el tratamiento del tema plantas estables a lazo abierto, pero es de destacar que Morari y colaboradores extienden el diseño IMC para plantas inestables.

#### a) Parametrización del Controlador - Diseño Óptimo

**Teorema 14.2.3** Si  $G_p = G_{p0}$  entonces el controlador IMC  $Q = G_{p0}^{-1}$  es  $\mathcal{H}_2$  óptimo.

**Demostración** Ver [63].  $\square$

Ahora,  $Q = G_{p0}^{-1}$  pasa a ser una condición de diseño del problema que usualmente eso no es posible alcanzar dado que  $G_{p0}$  suele tener 1) el orden del denominador mayor que el del numerador y 2) componentes de no mínima fase (tiempos muertos y ceros que pertenecen al semiplano complejo derecho(RHP)).

**Teorema 14.2.4** Asuma  $G_{p0}$  estable y que tiene una porción de mínima fase  $G_{p0}^-$  y otra pasa todo  $G_{p0}^+$  con tiempo muerto y ceros en RHP y  $|G_{p0}^+|$ .

Tabla 14.1: Controlador óptimo  $\mathcal{H}_2 Q_0$  para distintas  $V_0^-$ .

$V_0^-(s)$	$Q_0$
$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{G_{p0}^-}$
$\frac{1}{\tau s + 1}$	$\frac{1}{G_{p0}^-} \left( \frac{1}{G_{p0}^+(s)} \right)_{s=-1/\tau}$
$\frac{1}{s(\tau s + 1)}$	$\frac{1}{G_{p0}^-} \left\{ 1 + \left[ 1 - \left( \frac{1}{G_{p0}^+(s)} \right)_{s=-1/\tau} \right] \tau s \right\}$
$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{G_{p0}^-} \left[ 1 - s \left( \frac{dG_{p0}^+(s)}{ds} \right)_{s=0} \right]$

Por lo cual,  $G_{p0} = G_{p0}^+ G_{p0}^-$  donde  $G_{p0}^+$  puede ser escrita como  $G_{p0}^+ = e^{-\theta s} \prod_i \frac{-s+\xi}{s+\xi}$  con  $Re(\xi) > 0$ . y  $\theta > 0$ . Similarmente la entrada  $v$  tiene la expresión:  $V = V_0^+ V_0^-$ . Luego el controlador  $Q$  que minimiza la  $\| \cdot \|_2$  esta dado por:

$$Q_0 = (G_{p0}^{-1} V_0^-) \left\{ [G_{p0}^+]^{-1} V_0^- \right\}_*$$

donde  $\{ \}_*$  denota que después de expandir en fracciones parciales al operando, todos los términos que involucren a los polos inestables de  $G_{p0}^+$  son omitidos.

**Demostración** Ver [63].  $\square$

Note que  $Q_0$  queda función de  $V_0^-$ . La Tabla 14.1 resume expresiones de  $Q_0$  para distintas entradas típicas  $V_0^-$ .

**b) El Filtro IMC**

Observe que en la tabla 14.1, se considera que en todos los casos  $G_{p0}^{-1}$  es una función de transferencia realizable. Ahora, en caso de que dicha inversa no sea realizable, los autores proponen incluir un filtro para dar realizabilidad al controlador IMC. Entonces  $Q(s)$  resulta,

$$Q(s) = Q_0(s) f(s). \tag{14.13}$$

donde  $Q_0(s)$  es diseñado según la Tabla 14.1. que en todos los casos incluye  $G_{p0}^{-1}$  y  $f(s)$  conocido como el filtro IMC que en su forma más simple en principio se podría adoptar como,

$$f(s) = \frac{1}{(\lambda s + 1)^r}, \tag{14.14}$$

donde  $r \in \mathbb{N}^+$  y tal que  $Q(s)$  sea realizable. En otras palabras,  $r$  debe ser mayor

o igual al orden relativo de  $G_{p0}^{-1}$ .

Morari y Zafriou ([63]) dan fórmulas de diseño para  $f(s)$  requiriendo que el sistema no pierda propiedades asintóticas de tracking. Así, para seguir una señal tipo  $m$ , pedimos que,

$$f(0) = 1. \quad (14.15)$$

y

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^k}{ds^k} (1 - G_{p0} Q_0 f) = 0 \quad \forall 1 \leq k < m \quad (14.16)$$

o bien,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^k}{ds^k} (G_{p0}^+ f) = 0 \quad \forall 1 \leq k < m, \quad (14.17)$$

en el caso que  $Q_0 = G_{p0}^{-1}$ .

Una forma típica para alcanzar esta propiedad bien podría ser,

$$f(s) = (\beta_n s^{n-1} + \dots + \beta_1 s + 1) \frac{1}{(\lambda s + 1)^r}, \quad (14.18)$$

con  $\beta_i$  parámetros tales que permita satisfacer las Ecs. (14.16) y (14.17), y  $\lambda$  un único parámetro de diseño.

Ahora para seguir una señal tipo 1 (un escalón) alcanza con pedir que el filtro IMC tenga la forma de la Ec. (14.14) mientras que para seguir una señal tipo 2 (una rampa),

$$f(s) = \frac{r\lambda s + 1}{(\lambda s + 1)^r}, \quad (14.19)$$

### c) Propiedades del Sistema en Lazo Cerrado

Como ya se enunció antes, si  $G_p = G_{p0}$  luego,  $S_0 = 1 - G_{p0} Q$ ,  $T_0 = G_{p0} Q$  y  $Y = G_{p0} Q R + (1 - G_{p0} Q) L$ . Así, si consideramos que  $Q_0 = G_{p0}^{-1}$  y  $Q(s) = Q_0(s) f(s)$  se tiene que,

$$Y = G_{p0}^+ f R + (1 - G_{p0}^+ f) L, \quad (14.20)$$

Con lo que, la ecuación última da lugar a la siguiente remarca.

**R** ■ **Remarca 14.2** Sea  $G_p = G_{p0}$  una planta estable y que  $Q_0 = G_{p0}^{-1}$ , el sistema de control realimentado o bien el lazo IMC serán internamente estable si y sólo si  $\lambda > 0$  y la respuesta dinámica de lazo cerrado resulta ser igual a la dinámica del filtro IMC.

**Demostración** Por Teo. 14.2.2 el sistema es internamente estable si y sólo si  $\lambda > 0$ . Por otro lado, de acuerdo con la última ecuación, dado que  $G_{p0}^+$  no aporta polos por ser la parte de no mínima fase de  $G_{p0}$  entonces, la única constante de tiempo del sistema realimentado es la que aporta el filtro IMC.  $\square$

**d) Procedimiento de parametrización de controladores** A continuación se presenta a modo de resumen un procedimiento a seguir para parametrizar controladores basado en los conceptos teóricos hasta aquí presentados.

#### Procedimiento 14.2.2 — Parametrización IMC.

**Paso 1.** Escribir  $G_{p0} = G_{p0}^+ G_{p0}^-$  donde  $G_{p0}^+$  y  $G_{p0}^-$  son las porciones de no mínima fase y mínima fase de la planta respectivamente.

**Paso 2.** Adoptar  $Q_0(s)$  de acuerdo con el Teo. 14.2.4 en función de la señal a seguir (ver Tabla 14.1) si se pretende un diseño  $\mathcal{H}_2$  óptimo, y  $Q(s) = Q_0(s)f(s)$  con  $f(s)$  tal que garantice realizabilidad y propiedad asintótica de tracking. Esto es,

$$Q(s) = \frac{1}{G_{p0}^-(s)} f(s), \quad (14.21)$$

y  $f(s)$  según Ec. (14.14).

**Paso 3.** Si se pretende implementar un lazo IMC, vaya al Paso 4 de otro modo, determinar el controlador feedback  $C(s)$  como

$$C = \frac{Q}{1 - G_{p0}Q}, \quad (14.22)$$

**Paso 4** Computar  $\lambda$  con algún criterio, por ejemplo:

- alcanzar un tiempo de estabilización pretendido,
- satisfacer estabilidad nominal con un dado  $MG$  o  $MF$  pretendido
- satisfacer estabilidad robusta y/o performance robusta,

La selección de  $\lambda$  es clave para tener un buen desempeño del sistema de control. Por lo general un aumento de  $\lambda$  da como resultado un aumento de robustez del sistema de control. En la literatura se encuentra algunas recomendaciones prácticas como,

- Para sistemas de primer orden con retardo,  $T > \lambda > \theta$  (Chien y Fruehauf, [22]), con  $T$  la constante de tiempo del sistema y  $\theta$  el tiempo muerto del mismo.
- o bien, adoptar un valor  $\lambda$  grande para asegurarse una respuesta dinámica conservadora, como por ejemplo  $\lambda > 3\theta$  (dependiendo del tipo de problema que se trata) y acompañar esta adopción al menos con un estudio de estabilidad nominal.

La Tabla 14.2 muestra distintos controladores PID parametrizados via IMC considerando entrada escalón y distintas plantas nominales.

**Ejemplo 14.3** Aplique la técnica de diseño IMC para el caso del Ejem. 14.1.

Siendo,  $G_p(s) = K_p/(Ts + 1)$  luego:

**Paso 1.**  $G_p = G_{p0} = G_{p0}^-$ .

**Paso 2.**  $Q_0(s) = \frac{1}{G_{p0}^-(s)} = \frac{Ts+1}{K_p} \Rightarrow Q(s) = \frac{1}{K_p} \frac{Ts+1}{\lambda s+1}$ .

**Paso 3.**  $C(s) = \frac{Q}{1-G_{p0}Q} = \frac{\frac{1}{K_p} \frac{Ts+1}{\lambda s+1}}{1 - \left(\frac{K_p}{Ts+1}\right) \left(\frac{1}{K_p} \frac{Ts+1}{\lambda s+1}\right)} = \frac{1}{K_p} \frac{Ts+1}{\lambda s}$ , donde finalmente la expresión de  $C(s)$  puede ser reordenada como,

$$C(s) = \frac{T}{K_p \lambda} \left(1 + \frac{1}{Ts}\right). \quad (14.23)$$

La Ec. (14.23) representa un controlador PI con una acción proporcional  $K_r = T/\lambda K_p$  y una constante de tiempo integral  $T_I = T$ .

Finalmente, note que en este caso particular la parametrización IMC conduce al mismo resultado que el método de DS obteniéndose idénticas performance en la variable de control si los parámetros de ajuste  $\lambda$  y  $\tau_c$  son adoptados con el mismo valor. ■

**Ejemplo 14.4** Aplique la técnica de diseño IMC para un sistema cuya planta es,

$$G_p(s) = G_{p0}(s) = \frac{K_p e^{-\theta s}}{Ts + 1}.$$

Obtenga el controlador IMC y feedback tal que siga un escalón de entrada en consigna, y simule numéricamente ambos lazos de control.

**Paso 1.**  $G_p = G_{p0} = G_{p0}^- = \underbrace{\frac{K_p}{(Ts+1)}}_{G_{p0}^-} \underbrace{e^{-\theta s}}_{G_{p0}^+}$ .

**Paso 2.**  $Q_0(s) = \frac{1}{G_{p0}^-(s)} = \frac{Ts+1}{K_p} \Rightarrow Q(s) = \frac{1}{K_p} \frac{Ts+1}{\lambda s+1}$ .

**Paso 3.**  $C(s) = \frac{Q}{1-G_{p0}Q} = \frac{\frac{1}{K_p} \frac{Ts+1}{\lambda s+1}}{1 - \left(\frac{K_p e^{-\theta s}}{Ts+1}\right) \left(\frac{1}{K_p} \frac{Ts+1}{\lambda s+1}\right)} = \frac{1}{K_p} \frac{Ts+1}{\lambda s+1-e^{-\theta s}}$ .

Tabla 14.2: Controladores PID basados en parametrización IMC para modelos de plantas nominales simples considerando entrada escalón (Morari y Zafrioui (M-Z) [63] y Chien y Fruehauf (Ch-F) [22]).

	Modelo	$K_r, K_p$	Controlador PID	
			$T_I$	$T_D$
Sistemas Autorregulables	$\frac{K_p}{(Ts+1)}$	$\frac{T}{\lambda}$	$T$	—
	$\frac{K_p e^{-\theta s}}{(Ts+1)}$	$\frac{T}{\lambda+\theta}$	$T$	—
		$\frac{T+\theta/2}{\lambda+\theta/2}$	$T + \theta/2$	$\frac{T\theta}{2T+\theta}$
	$\frac{K_p}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$\frac{T_1+T_2}{\lambda}$	$T_1 + T_2$	$\frac{T_1 T_2}{T_1+T_2}$
	$\frac{K_p(\tau s+1)e^{-\theta s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$\frac{T_1}{\lambda+\theta}$	$T_1$	$T_2 - \tau$
		$\frac{T_1+T_2-\tau}{\lambda+\theta}$	$T_1 + T_2 - \tau$	$\frac{T_1 T_2 - (T_1+T_2-\tau)\tau}{T_1+T_2-\tau}$
	$\frac{K_p(-\tau s+1)e^{-\theta s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$	$\frac{T_1+T_2+\frac{\tau\theta}{\lambda+\tau+\theta}}{\lambda+\tau+\theta}$	$T_1 + T_2 + \frac{\tau\theta}{\lambda+\tau+\theta}$	$\frac{\tau\theta}{\lambda+\tau+\theta} + \frac{T_1 T_2}{T_1+T_2+\frac{\tau\theta}{\lambda+\tau+\theta}}$
	$\frac{K_p}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$	$\frac{2\zeta T}{\lambda}$	$2\zeta T$	$\frac{T}{2\zeta}$
	$\frac{K_p(\tau s+1)e^{-\theta s}}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}$	$\frac{2\zeta T-\tau}{\lambda+\theta}$	$2\zeta T - \tau$	$\frac{T^2-(2\zeta T-\tau)\tau}{2\zeta T-\tau}$
	$\frac{K_p(-\tau s+1)}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}, \tau > 0$	$\frac{2\zeta T}{\lambda+\tau}$	$2\zeta T$	$\frac{T}{2\zeta}$
$\frac{K_p(-\tau s+1)e^{-\theta s}}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}, \tau > 0$	$\frac{2\zeta T+\frac{\tau\theta}{\lambda+\tau+\theta}}{\lambda+\tau+\theta}$	$2\zeta T + \frac{\tau\theta}{\lambda+\tau+\theta}$	$\frac{T\theta}{\lambda+\tau+\theta} + \frac{T^2}{2\zeta T+\frac{\tau\theta}{\lambda+\tau+\theta}}$	
Sistemas Integradores	$\frac{K_p}{s}$	$\frac{1}{\lambda}$	—	—
	$\frac{K_p e^{-\theta s}}{s}$	$\frac{2\lambda+\theta}{(\lambda+\theta)^2}$	$2\lambda + \theta$	—
		$\frac{2\lambda+\theta}{(\lambda+\theta/2)^2}$	$2\lambda + \theta$	$\frac{\lambda\theta+\theta^2/4}{2\lambda+\theta}$
	$\frac{K_p}{s(Ts+1)}$	$\frac{1}{\lambda}$	—	$T$
	$\frac{K_p e^{-\theta s}}{s(Ts+1)}$	$\frac{2\lambda+\theta}{(\lambda+\theta)^2}$	$2\lambda + \theta$	$T$
	$\frac{2\lambda+T+\theta}{(\lambda+\theta)^2}$	$2\lambda + T + \theta$	$\frac{(2\lambda+\theta)T}{2\lambda+T+\theta}$	

Adoptando  $e^{-\theta s} \approx 1 - \theta s$  entonces,

$$C(s) = \frac{1}{K_p} \frac{T s + 1}{\lambda s + 1 - 1 + \theta s} = \frac{T}{K_p(\lambda + \theta)} \left[ 1 + \frac{1}{T s} \right] = K_r \left[ 1 + \frac{1}{T_I s} \right]$$

Por tanto, resulta un controlador PI con  $K_r = T/K_p(\lambda + \theta)$  y  $T_I = T$  y cuyo resultado es coincidente con el que expresa la Tabla 14.2. ■

**Ejemplo 14.5** Compare mediante simulaciones numéricas las respuestas dinámicas de los lazos IMC y feedback y explique las diferencias. Para esto utilice los resultados del Ejem. 14.4.

Adoptando  $K_p = \theta = T = 1$  y  $\lambda = 0,6$  se tiene como parámetros del controlador,  $K_r = 0,3846$  y  $T_I = 1$ . La Fig. 14.3 muestra la respuesta en el tiempo a un cambio escalón en consigna del lazo de realimentación tradicional y el IMC.

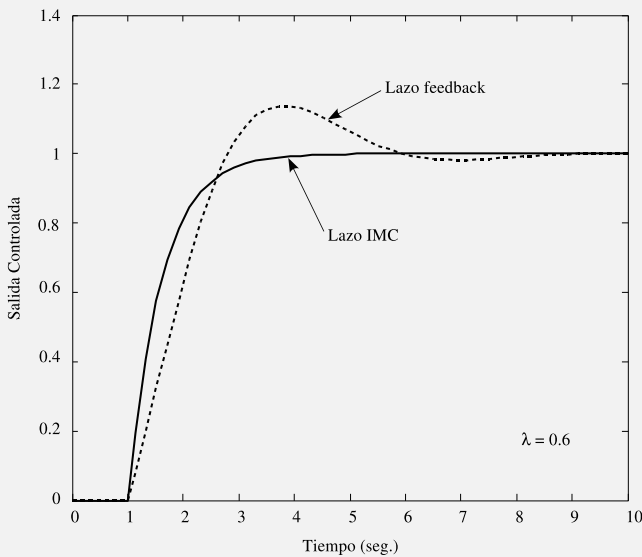


Figura 14.3: Respuestas dinámicas del lazo feedback y el lazo IMC para el ejemplo 4.

Note que la performance no son iguales debido a que se ha roto la relación biunívoca entre ambos lazos al introducir una aproximación para el tiempo muerto.



Por otro lado, la función de transferencia de la cadena de lazo abierta del sistema realimentado resulta,

$$G(s)H(s) = \frac{K_p}{(Ts + 1)} e^{-\theta s} \frac{K_r(T_I s + 1)}{T_I s}.$$

Siendo  $K_r = T/K_p(\lambda + \theta)$  y  $T_I = T$ , se observa que hay cancelación de cero-polo estable resultando,

$$G(s)H(s) = \frac{1}{(\lambda + \theta)} \frac{e^{-\theta s}}{s}.$$

Note además que este problema de inestabilidad no está presente con el lazo IMC, y aparece con el lazo feedback debido a la aproximación realizada con el tiempo muerto.

Por otro lado, el desempeño con el lazo IMC es superior ya que no introduce la aproximación alguna para el tiempo muerto en el controlador IMC. Además siendo,

$$Y = G_{p0}QR + (1 - G_{p0}Q)L$$

con  $Q = f(s)/G_{p0}^-$  se tiene que,

$$Y = G_{p0}^+(s)f(s)R + [1 - G_{p0}^+(s)f(s)]L(s)$$

donde el filtro  $f(s) = 1/(\lambda s + 1)$  y en consecuencia,

$$Y(s) = \frac{e^{-\theta s}}{(\lambda s + 1)} R(s) + \left[ 1 - \frac{e^{-\theta s}}{(\lambda s + 1)} \right] L(s)$$

En conclusión, el sistema tiene como respuesta dinámica de lazo cerrado, la dinámica asociada a la constante de tiempo del filtro IMC por lo que, en este ejemplo bajo la estructura IMC y en ausencia de incertidumbre ( $G_p = G_{p0}$ ) es posible alcanzar respuestas *tan rápidas como se desee*, mientras que, el sistema realimentado no lo permite dado que existe una ganancia última ( $K_u^*$ ) tal que el sistema con el feedback tradicional puede alcanzar la estabilidad crítica. ■

### 14.2.3. Técnicas de ajuste basadas en criterios de conducta integral

Los criterios de conducta integral o integrales de error son funcionales que buscan medir la performance del régimen transitorio, de allí que también se los designa como índice de performance. Las integrales de error más conocidas son,

1. *Integral del valor absoluto del error (IAE)*

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt. \quad (14.24)$$

donde le error es la diferencia entre la consigna y la variable medida esto es,  $e(t) = r(t) - y_m(t)$ .

2. *Integral del cuadrado del error (ISE)*

$$ISE = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt, \quad (14.25)$$

que penaliza los errores grandes.

3. *Integral del valor absoluto del error pesado en el tiempo (ITAE)*

$$ITAE = \int_0^{\infty} t|e(t)| dt, \quad (14.26)$$

que penaliza fuertemente los errores a tiempos grandes

4. *Integral del tiempo pesado por el error al cuadrado (ITSE)*

$$ITSE = \int_0^{\infty} te(t)^2 dt, \quad (14.27)$$

que penaliza más fuertemente los errores grandes a tiempos grandes.

Relaciones de diseño para controladores PID han sido desarrolladas para minimizar estos criterios de conducta integral para funciones de transferencia sencillas. En la Tabla 14.3 y 14.4 se muestran los parámetros de las relaciones de diseño propuestas por Lopez *et al.* [53], Rovira *et al.* [73] y Rovira [72], basadas en distintos índices de performance para un modelo de proceso de primer orden con retardo ( $G(s) = Ke^{-\theta s}/(Ts + 1)$ ). Dichas relaciones fueron desarrolladas para cambios en carga y consigna respectivamente. Puntualmente, es de remarcar que las relaciones de diseño propuestas por Lopez *et al.* [53] fueron desarrolladas para cambios en carga, mientras que las de Rovira *et al.* [73] y Rovira [72] se desarrollaron para seguimiento de consigna, considerando inaceptable fórmulas para un criterio de mínimo ISE por su naturaleza altamente oscilatoria para este problema.

Una importante colección de reglas y fórmulas de ajuste de controladores PI y PID puede ser consultada en la obra de O'Dwyer [65].

**Ejemplo 14.6** Considere un sistema de control de la Fig. 14.1 donde  $G_m = G_v = 1$ ,  $G_p(s) = 5e^{-s}/(2s + 1)$  y  $G_I(s) = 6e^{-1,1s}/(2,5s + 1)$ .

1. Sintonee un controlador PI a fin de seguir consignas y otro que elimine perturbaciones según el criterio de mínimo ITAE.
2. Compare mediante simulaciones numéricas el desempeño de los sistemas de control. Asuma un cambio escalón en consigna en  $t = 2$  y un cambio en carga en  $t = 20$ .

Con el objeto de diseñar el controlador PI para seguir consignas, de acuerdo con la Tabla 14.4,

$$\text{Modo P: } K_r = \frac{0,586}{K} (\theta/T)^{-0,916} = \frac{0,586}{5} (1/2)^{-0,916} = 0,2211$$

$$\text{Modo I: } T_I = \frac{T}{1,03+(-0,165)(\theta/T)} = \frac{2}{1,03-0,165(1/2)} = 2,1108$$

Luego, con el objeto de diseñar el controlador PI para eliminar perturbaciones, de acuerdo con la Tabla 14.3,

$$\text{Modo P: } K_r = \frac{0,859}{K} (\theta/T)^{-0,977} = \frac{0,859}{6} (1,1/2,5)^{-0,977} = 0,31929$$

$$\text{Modo I: } T_I = \frac{T}{0,674} (\theta/T)^{0,680} = \frac{2,5}{0,674} (1,1/2,5)^{0,680} = 2,1224$$

La Fig. 14.4 compara el desempeño obtenida mediante simulaciones numéricas del sistema de control cuando es perturbado con cambios en consigna y en carga. Puede verse que para cambios en consigna el controlador PI sintonizado en base a la propuesta de Rovira ([72]), de acuerdo con las relaciones de la Tabla 14.4, da mejores resultados que los que se obtienen con las relaciones propuesta por Lopez *et al.* ([53]), de la Tabla 14.3. Por otro lado, cuando ingresa una perturbación, el controlador PI sintonizado en base a la Tabla 14.3 da mejores resultados que el PI sintonizado de acuerdo con la Tabla 14.4. Si bien este es un resultado lógico y esperable, presente en este ejemplo en particular, no necesariamente siempre se logra esta diferencia de comportamiento.

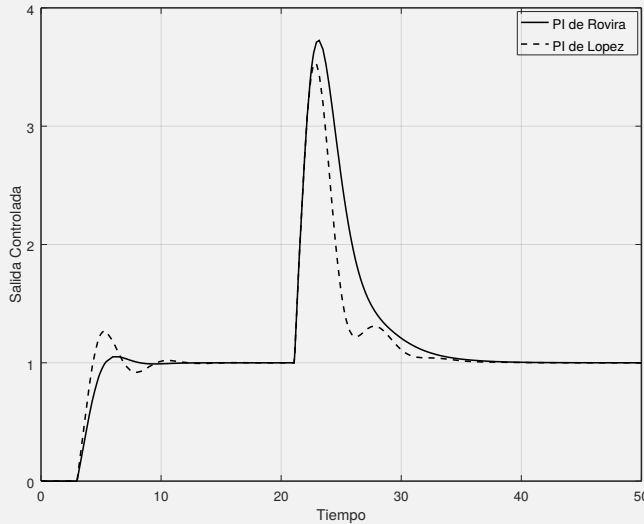


Figura 14.4: Respuestas dinámicas del sistema del Ejem. 14.6 en lazo cerrado para los dos controladores PI estudiados.

Tabla 14.3: Parámetros  $a$  y  $b$  para las relaciones de diseño propuestas por Lopez *et al.* ([53]) basadas en  $ISE$ ,  $IAE$  e  $ITAE$  para eliminar perturbaciones con controladores P, PI y PID. Relaciones válidas para modelo de proceso de primero orden con tiempo muerto.

Controlador P		$ISE$	$IAE$	$ITAE$
Modo P	$a =$	1.411	0.902	0.490
$K_r = \frac{a}{K} \left(\frac{\theta}{T}\right)^b$	$b =$	-0.917	-0.985	-1.084
Controlador PI		$ISE$	$IAE$	$ITAE$
Modo P	$a =$	1.305	0.984	0.859
$K_r = \frac{a}{K} \left(\frac{\theta}{T}\right)^b$	$b =$	-0.959	-0.986	-0.977
Modo I	$a =$	0.492	0.608	0.674
$T_I = \frac{T}{a} \left(\frac{\theta}{T}\right)^b$	$b =$	0.739	0.707	0.680
Controlador PID		$ISE$	$IAE$	$ITAE$
Modo P	$a =$	1.495	1.435	1.357
$K_r = \frac{a}{K} \left(\frac{\theta}{T}\right)^b$	$b =$	-0.945	-0.921	-0.947
Modo I	$a =$	1.101	0.878	0.842
$T_I = \frac{T}{a} \left(\frac{\theta}{T}\right)^b$	$b =$	0.771	0.749	0.738
Modo D	$a =$	0.560	0.482	0.381
$T_D = Ta \left(\frac{\theta}{T}\right)^b$	$b =$	1.006	1.137	0.995

**Ejemplo 14.7** Considere el sistema de control del Ejem. 14.6. Compare el desempeño logrado por el controlador PI de Rovira [72] con los que se obtiene con los controladores PI-IMC al variar la constante de tiempo del filtro IMC.

En la Tabla se presenta los controladores PIs propuestos para este ejemplo de acuerdo con las Tabla 14.4 y 14.2.

Tabla 14.4: Parámetros  $a$  y  $b$  para las relaciones de diseño propuesta por Rovira *et al.* ([73]) y Rovira [72] basadas en  $IAE$  e  $ITAE$  para seguimiento de consignas con controladores PI y PID. Relaciones válidas para modelo de proceso de primero orden con tiempo muerto.

Controlador PI		$IAE$	$ITAE$
Modo P	$a =$	0.758	0.586
$K_r = \frac{a}{K} \left(\frac{\theta}{T}\right)^b$	$b =$	-0.861	-0.916
Modo I	$a =$	1.02	1.03
$T_I = \frac{T}{a+b(\theta/T)}$	$b =$	-0.323	-0.165
Controlador PID		$IAE$	$ITAE$
Modo P	$a =$	1.086	0.965
$K_r = \frac{a}{K} \left(\frac{\theta}{T}\right)^b$	$b =$	-0.869	-0.855
Modo I	$a =$	0.740	0.796
$T_I = \frac{T}{a+b(\theta/T)}$	$b =$	-0.130	-0.147
Modo D	$a =$	0.348	0.308
$T_D = T a \left(\frac{\theta}{T}\right)^b$	$b =$	0.914	0.9292

Tabla 14.5: Parámetros calculados para los controladores PIs de este ejemplo.

Controladores PIs	$K_r$	$T_I$
Sintonización de Rovira [72]	0.2211	2.1108
Sintonización IMC	$K_r = T_p / K_p (\lambda + \theta_p)$	$T_I = T$
$\lambda = 1,5$	0.16000	2
$\lambda = 0,3$	0.30769	2

La Fig. 14.5 compara, mediante simulaciones numéricas, el desempeño obtenido por los sistemas de control cuando se implementa un cambio en consigna y en carga.

En dicha figura puede observarse que para cambios en consigna el controlador PI sintonizado en base a la propuesta de Rovira ([72]), de acuerdo con las relaciones de la Tabla 14.4, da buenos resultados. El tiempo de establecimiento es comparable y ligeramente mejor que los obtenidos por los controladores sintonizados por la técnica IMC. Sin embargo, el controlador PI-IMC con  $\lambda = 0,3$  tiene un mejor tiempo de alcance que el PI de Rovira.

También puede observarse que cuanto menor sea el valor de  $\lambda$  adoptado, mejor es el tiempo de alcance a costa de un movimiento fuerte la la manipulada, pero el tiempo de establecimiento empeora. <sup>a</sup>

Una observación interesante que se obtiene con este ejemplo en particular, puede visualizarse con el problema de regulación. Claramente, cuando se implementa el controlador PI de Rovira, el sistema de control tiene un pobre desempeño al momento de mitigar perturbaciones, lo que resulta consistente ya que se sintoniza para seguir consignas. Mientras que con los controlador PI-IMC se puede alcanzar mejores desempeños si se reduce la constante de tiempo del filtro IMC, lo que lleva a mover fuertemente la manipulada, manteniendo las características dinámicas para lo que fueron sintonizados.

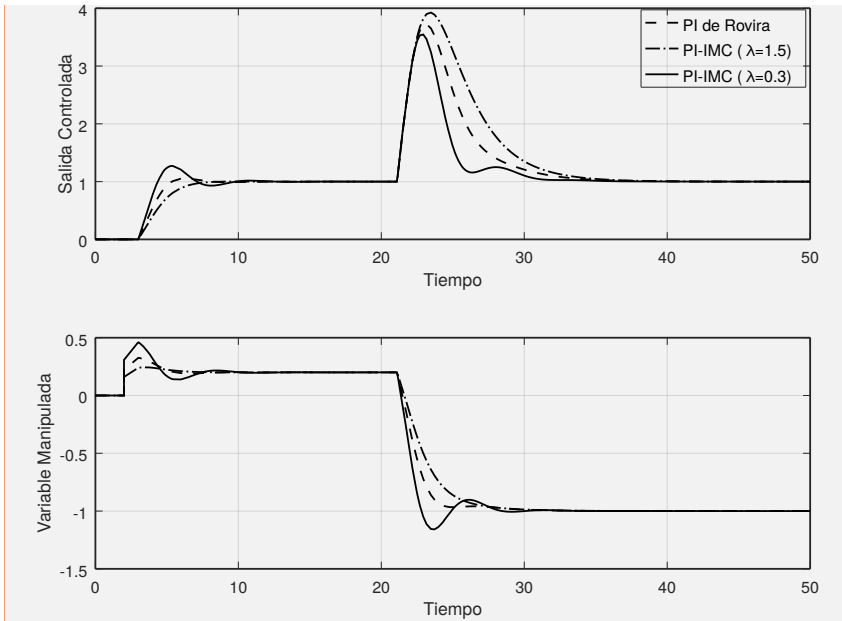


Figura 14.5: Respuestas dinámicas del sistema de control del Ejem. 14.7 en lazo cerrado para los controladores PI estudiados.

<sup>a</sup>Para entender esto último se debe tener en cuenta la simplificación hecha para obtener la fórmula sugerida en la Tabla 14.4. Para esto se sugiere ver los resultados de los Ejem. 14.4 y 14.5.

## 14.3. Técnicas de Ajuste Basadas en Ensayos Experimentales

### 14.3.1. Método de Ziegler y Nichols

Ziegler y Nichols (Z-N) [88] desarrollaron dos métodos de ajuste de controladores en-línea ampliamente difundidos estos son, el método de las oscilaciones sostenidas y el método de la curva de reacción.

#### Método de las oscilaciones sostenidas

El método consiste en una técnica de prueba y error en lazo cerrado mediante la cual se determina la ganancia última  $K_u$  y el período último  $P_u$  del sistema de control. El procedimiento de diseño y el computo de los parámetros

Tabla 14.6: Fórmulas de ajuste de controladores basadas en el método de Z-N de las oscilaciones sostenidas.

Controlador	$K_r$	$T_I$	$T_D$
P	$0,50K_u$	—	—
PI	$0,45K_u$	$P_u/1,2$	—
PID	$0,60K_u$	$P_u/2$	$P_u/8$

del controlador pueden resumirse como sigue:

**Procedimiento 14.3.1 — Método de Ziegler y Nichols de las Oscilaciones Sostenidas.**

**Paso 1** Elimine las acciones integral y derivativa, esto es  $T_D$  en su mínimo valor y  $T_I$  en su máximo.

**Paso 2** Adopte  $K_r$  en su valor más bajo y ponga el controlador en automático.

**Paso 3** Aumente progresivamente la ganancia del controlador mediante incrementos pequeños hasta obtener una respuesta dinámica con oscilaciones sostenidas producto de pequeños cambios introducidos en carga y en consigna.

**Paso 4** Una vez obtenida la  $K_u$  determine el período último  $P_u$ .

**Paso 5** Ajuste el controlador basándose en las relaciones de diseño de la Tabla 14.6.

Es de remarcar que estas relaciones de diseño fueron desarrolladas para proveer una relación de decaimiento 1/4.

Observaciones:

1. Al aplicar éste método, el sistema debe ser llevado al límite de la estabilidad a fin de determinar experimentalmente  $K_u$  y  $P_u$ . Lo cual por razones de seguridad no siempre se puede hacer.
2. Note lo siguiente en cuanto a la ganancia recomendada para los diferentes controladores:
  - a) el valor de  $K_r$  para un controlador PI es menor que el recomendado para el P. Esto es debido a que el modo integral hace al sistema *más sensitivo* (puede conducirlo a la inestabilidad) y en consecuencia necesita menores valores de ganancia para ser más conservador.
  - b) el valor de  $K_r$  para el controlador PID resulta mayor que los recomendados para los controladores P y PI, esto se debe al efecto estabilizante del modo derivativo.



**Ejemplo 14.8** Considere una planta de primer orden con tiempo muerto cuyos parámetros son,  $K = 10$ ,  $T = 1$  y  $\theta = 0,1$ . Diseñe un controlador PI por el método de Z-N de las oscilaciones sostenidas, asumiendo además que  $G_m = G_v = 1$ .

Dado que se dispone de la función de transferencia es posible calcular analíticamente la ganancia y frecuencia última. Para ello, siendo  $G(s) = Ke^{-\theta s}/(Ts + 1)$ , el producto  $G(s)H(s)$  resulta,

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{Ts + 1} e^{-\theta s}$$

donde  $K^* = KK_r$ . El módulo y la fase de dicha expresión a la frecuencia última resultan,

$$|G(j\omega_u)H(j\omega_u)| = \frac{K_u^*}{\sqrt{T^2\omega_u^2 + 1}} = 1,$$

$$\angle G(j\omega_u)H(j\omega_u) = \tan^{-1}(T\omega_u) - \theta\omega_u = -\pi.$$

Resolviendo estas dos ecuaciones se encuentra que,  $\omega_u = 16,3199$  rad/seg. ( $P_u = 0,3850$  seg.) y  $K_u^* = 16,351$  o bien,  $K_u = 1,6351^a$ . Estos resultados también podrían haberse obtenido en forma gráfica mediante los diagramas de Bode como se indica en la Fig. 14.6.

Así, los parámetros del controlador PI según Tabla 14.6 resultan,  $K_r = 0,7358$  y  $T_I = 0,3208$ .

Finalmente, la Fig. 14.7 muestra el desempeño del sistema de control mediante una simulación numérica para cambios escalón unitario en consigna ( $t = 0$ ) y en carga en la variable manipulada ( $t = 10$ ). Puede observarse una respuesta con un muy bajo sobrevalor relativo para el cambio en consigna y un importante sobrevalor para el cambio en carga.

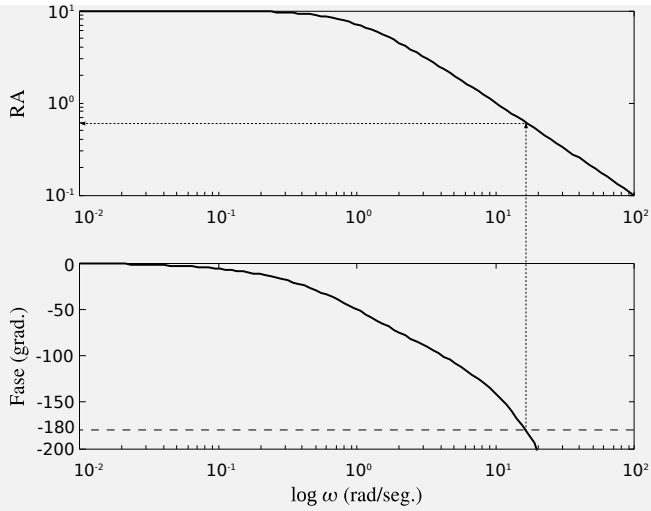


Figura 14.6: Diagramas de Bode del sistema de primer orden con retardo del Ejem. 14.8.

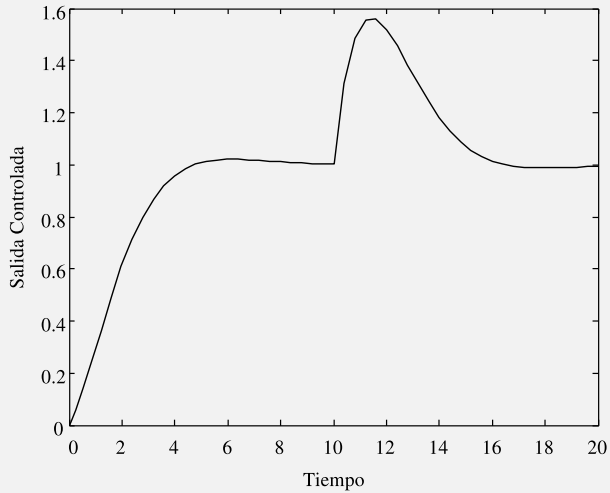


Figura 14.7: Respuesta dinámica de la variable controlada frente a cambios en consigna y carga.

<sup>a</sup>Note la diferencia de resultados entre usar las ecuaciones exactas como en este ejemplo y la aproximación de Padé como se usó en el Ejem. 12.11

Posteriormente, muchos otros investigadores han realizado su aporte con el objeto de mejorar la propuesta del método de las oscilaciones sostenidas de Ziegler y Nichols ([88]) para controladores PI y PID. La Tabla 14.7 resume las fórmulas de sintonización propuestas por Tyreus y Luyben ([86]) y Luyben ([58]), quienes estudiaron sistemas integradores con tiempo muerto, y Adam *et al.* ([8]) quienes estudiaron sistemas tipo uno de primer orden con tiempo muerto.

Tabla 14.7: Fórmulas de ajuste alternativas para controladores PID basadas en el método de Z-N de las oscilaciones sostenidas, propuestas por Tyreus y Luyben ([86]), Luyben ([58]) y Adam *et al.* ([8]).

Propuesta de	Controlador	$K_r$	$T_I$	$T_D$
Tyreus y Luyben ([86])	PI	$K_u/3,2$	$2,2P_u$	—
Luyben ([86])	PID	$K_u/2,2$	$2,2P_u$	$P_u/6,28$
Adam <i>et al.</i> ([8])	PID	$K_u/2,8$	$2,5P_u$	$P_u/3,8$

### Método de la curva de reacción de proceso (PRC)

Este método está basado en un ensayo experimental hecho con el controlador en modo manual (lazo abierto). Para esto considere el sistema de control de la Fig. 14.8

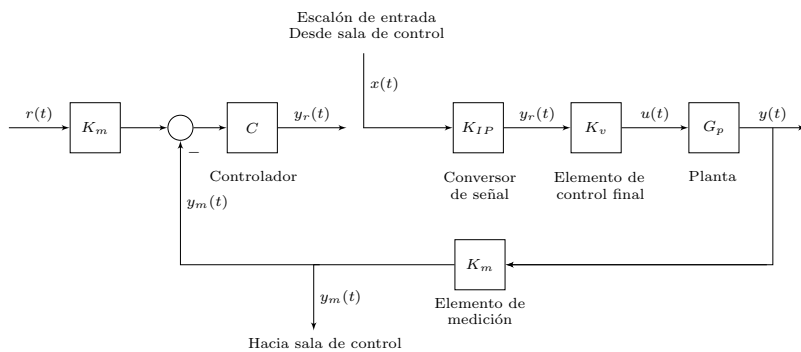


Figura 14.8: Controlador en modo manual (a lazo abierto) para la experiencia de Z-N de la curva de reacción.

La técnica consiste de las siguientes etapas:

### Procedimiento 14.3.2 — Método de Ziegler y Nichols de la Curva de Reacción.

**Paso 1.** Introduzca un cambio escalón  $X(s) = k/s$  desde el elemento de control final. En el caso de una válvula  $x(t)$  es la posición del vástago en función del tiempo.

**Paso 2.** Registre la salida  $y_m(t)$  con respecto al tiempo, dicha curva es designada como curva de reacción. Se pueden presentar dos tipos de respuestas. El primer caso (Fig. 14.9a) consiste en un sistema no autorregulable a lazo abierto, mientras que en el segundo (Fig. 14.9b) se trata de un sistema autorregulable el cual alcanza un valor de estabilización pasado el transitorio.

Note que entre la salida  $y_m(t)$  y la entrada  $x(t)$  se tiene la siguiente relación de funciones de transferencia,

$$\frac{Y_m(s)}{X(s)} = G_v(s)G_p(s)G_m(s), \quad (14.28)$$

La última expresión muestra que la curva de reacción del proceso está afectada por las dinámicas del proceso principal, del sensor y del elemento de control final.

**Paso 3.** Determine a partir de la curva de reacción los parámetros  $\theta$  y  $S$ .

Note que si el sistema es autorregulable a lazo abierto y la respuesta es del tipo sigmoide o sobre-amortiguada, un modelo de primer orden con retardo puede resultar una aceptable aproximación.

Si la respuesta del proceso a lazo abierto no es autorregulada,  $m$  resulta la pendiente de la asíntota (tangente a la curva pasado el transitorio) según Fig. 14.9a). Luego, se computa la pendiente normalizada  $S$  como  $S = m/k$ , siendo  $k$  la magnitud del cambio escalón introducido.

Por otra parte, si la respuesta del proceso a lazo abierto es autorregulada, el valor de la pendiente  $m$  se determina trazando la tangente al punto de inflexión. Luego, se calcula la pendiente normalizada  $S$  igual que en la caso de la respuesta no autorregulada (ver Fig. 14.9b)).

El valor de  $\theta$  se determina como el tiempo al cual la tangente intercepta al eje tiempo de acuerdo con la Fig. 14.9a) o b).

**Paso 4** Aplique las relaciones de diseño incluidas en la Tabla 14.8.

Estas relaciones de diseño fueron desarrolladas empíricamente por los autores para dar una relación de decaimiento  $1/4$  y pueden ser usadas tanto para procesos auto-regulables como no autorregulables.

Observaciones:

El método PRC ofrece varias ventajas:

1. Se necesita solamente un ensayo experimental.
2. No requiere búsquedas por prueba y error.

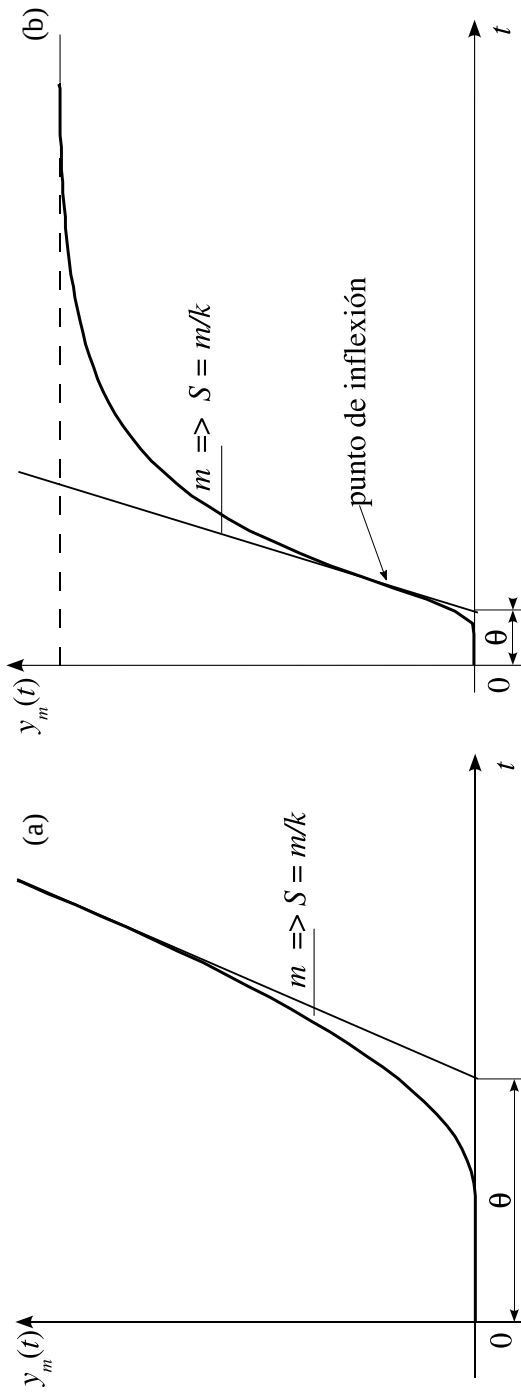


Figura 14.9: Determinación de parámetros del método de Ziegler y Nichols de la curva de reacción (a) para a una respuesta no autorregulada a lazo abierto, (b) para a una respuesta autorregulada a lazo abierto.

Tabla 14.8: Fórmulas de ajuste de controladores basadas en el método de Z-N de la curva de reacción.

Controlador	$K_r$	$T_I$	$T_D$
P	$1/\theta S$	—	—
PI	$0,9/\theta S$	$3,3\theta$	—
PID	$1,2/\theta S$	$2,0\theta$	$0,5\theta$

3. El ajuste del controlador es fácilmente calculado.

De cualquier modo, el método PRC ofrece varias desventajas:

1. El ensayo experimental debe ser realizado a lazo abierto. Esto implica que si un cambio significativo ingresa en carga en el momento del ensayo, ninguna acción correctiva puede ser aplicada.
2. Se debe alejar al sistema de su punto de operación durante la experiencia, lo cual no siempre es deseable. Por tal razón se aconseja cambios de entrada del 3 % al 5 % preferentemente.
3. Puede resultar difícil determinar la pendiente en el punto de inflexión si la curva tiene ruido o la carta de registro usada es pequeña.
4. El método es sensitivo a los errores de calibración del controlador.
5. Los valores recomendados tienden a dar respuestas subamortiguadas.
6. El método no es recomendado para procesos autorregulables oscilatorios a lazo abierto ya que fue desarrollado asumiendo un modelo de proceso de primer orden con retardo.

### 14.3.2. Método de Cohen y Coon

El método de diseño de Cohen y Coon (C-C) ([25]) y sus relaciones de ajuste fueron originalmente desarrollados como una alternativa al método de la curva de reacción propuesto por Z-N, para casos donde el proceso podría ser aceptablemente modelado por un sistema de autorregulado de primer orden con retardo de tiempo.

Considere el sistema de control de la Fig. 14.8, donde el controlador es desconectado (modo manual).

La técnica consiste en las siguientes etapas:

#### Procedimiento 14.3.3 — Método de Cohen y Coon.

**Paso 1.** Obtenga la curva de respuesta al escalón (PRC) similarmente a la técnica de Z-N en lazo abierto.

Cohen y Coon observaron que la respuesta de un gran número de los procesos frente a un cambio escalón es una respuesta sigmoidea

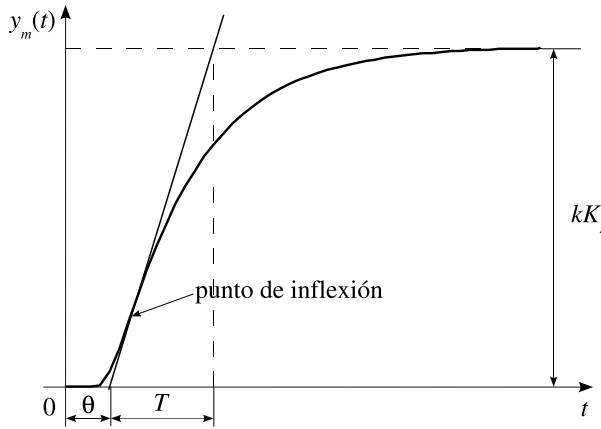


Figura 14.10: Determinación de parámetros del método de Cohen y Coon de la curva de reacción para a una respuesta autorregulada a lazo abierto.

(sobre-amortiguada), la cual puede ser aproximada por una respuesta de primer orden con retardo de tiempo. En consecuencia, limitan su método de ajuste a sistemas autorregulable y no lo extienden a sistemas integradores. Así, es posible aproximar,

$$\frac{Y_m(s)}{X(s)} \approx \frac{K_s e^{-\theta s}}{Ts + 1}, \quad (14.29)$$

**Paso 2.** Basándose en la curva de reacción se propone encontrar la función de transferencia de primer orden con retardo que la aproxime. Esto implica identificar los parámetro  $K_s$ ,  $T$  y  $\theta$  como se indica en la Fig. 14.9b) de acuerdo con la propuesta de los autores. Otras formas alternativas a esto es mediante una técnica de identificación de sistemas de primer orden a lazo abierto esto es, i) 63.2% del valor de estabilización, ii) tangente a la curva, iii) linealización, entre otras, que se muestran en el Cap. 5 en las Secc. 5.3.1.

**Paso 3.** Ajuste los parámetros del controlador basándose en la Tabla 14.9.

Cohen y Coon utilizan el modelo aproximado de la Ec. (14.29) y en base a este derivan expresiones heurísticas para ajustar el mejor controlador frente a cambios en carga y varios criterios de performance, tales como, relación de decaimiento 1/4, mínimo offset, e integral del error al cuadrado mínima (ISE).

Observaciones:

1. Las fórmulas de ajuste de Cohen y Coon darán una buena performance en la variable controlada siempre y cuando el sistema se aproxime aceptable-

Tabla 14.9: Fórmulas de ajuste de controladores basadas en el método de C-C ([25]) de la curva de reacción.

Controlador	$K_r$	$T_I$	$T_D$
P	$\frac{1}{K_s} \frac{T}{\theta} \left(1 + \frac{\theta}{3T}\right)$	—	—
PI	$\frac{1}{K_s} \frac{T}{\theta} \left(0,9 + \frac{\theta}{12T}\right)$	$\frac{30+3\theta/T}{9+20\theta/T} \theta$	—
PID	$\frac{1}{K_s} \frac{T}{\theta} \left(\frac{4}{3} + \frac{\theta}{4T}\right)$	$\frac{32+6\theta/T}{13+8\theta/T} \theta$	$\frac{4}{11+2\theta/T} \theta$

mente a un sistema de primer orden con retardo.

2. Cohen y Coon realizan similares recomendaciones que Z-N en cuanto a  $K_r$  al momento de incluir el modo integral y derivativo.

**Ejemplo 14.9** Considere un el sistema de primer orden con tiempo muerto del Ejem. 14.8 . Diseñe dos controladores PI basándose en las relaciones de ajuste de los métodos de la curva de reacción de Z-N y C-C. Luego, compare mediante simulaciones numéricas el desempeño de ambos sistemas de control y obtenga conclusiones.

Debido a que se dispone de la función de transferencia de lazo abierto entonces, no hace necesario realizar el experimento de la curva de reacción. Por tanto, a) disponemos del valor de  $\theta$  esto es,  $\theta = 0,1$  y b) es posible calcular la pendiente normalizada ya que la derivada al origen de un sistema de primer orden es,

$$y'(t = \theta) = m = \frac{kK}{T} \Rightarrow S = K/T = 10.$$

Así, aplicando las fórmulas de ajuste de Z-N (Tabla 14.8) de la curva de reacción se tiene que,  $K_r = 0,9$  y  $T_I = 0,33$ .

Por otro lado, para realizar el ajuste de C-C  $K_s = 10$  y según las fórmulas de la Tabla 14.9 los parámetros del PI resultan,  $K_r = 0,9038$  y  $T_I = 0,2755$ . Puede verse, que en este caso particular técnicas de ajuste recomiendan valores muy similares. La Fig. 9 compara las simulaciones numéricas para cambios escalón unitario en consigna ( $t = 0$ ) y en carga en la variable manipulada ( $t = 10$ ) cuando se implementan ambos controladores.



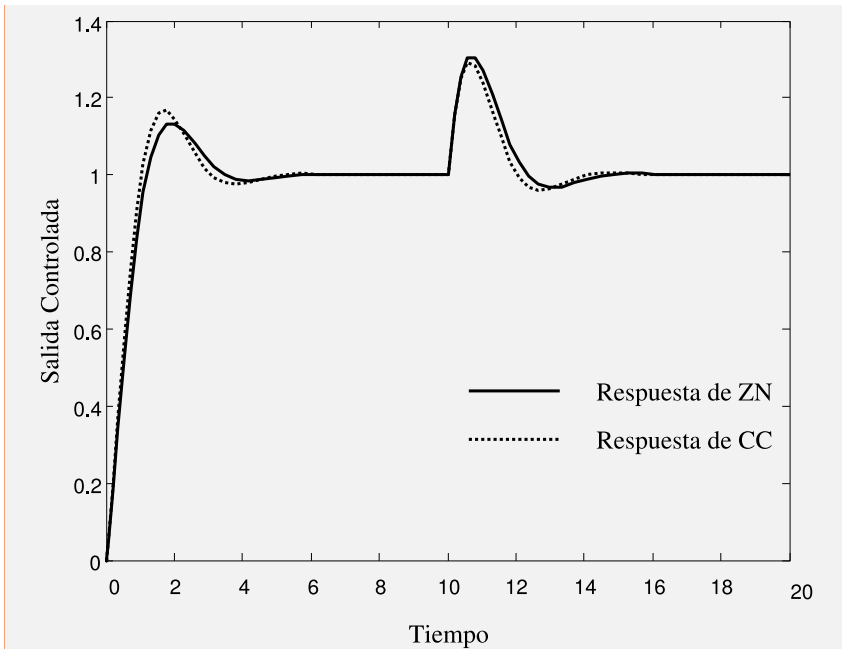


Figura 14.11: Respuestas dinámicas de la variable controlada del sistema de primer orden con tiempo muerto para cuando el controlador utiliza las fórmulas de ajuste de Z-N y C-C de la curva de reacción.

Como era de esperar ambas respuestas dinámicas con muy similares dado que los parámetros de ambos controladores difieren en muy poco. Resulta interesante comparar estas respuestas con las del Ejemplo 7. Note que para el caso particular de las respuestas dinámicas de la Fig. 14.11 los sobrevalores relativos al cambio en consigna son algo menores al 20 % pero bastante superiores al que muestra la Fig. 14.7 cuando se usa los parámetros de Z-N de las oscilaciones sostenidas. Sin embargo, con los parámetros recomendados por Z-N y C-C de la curva de reacción dan respuestas dinámicas bastantes más rápidas que Z-N de las oscilaciones sostenidas. En cuanto al cambio en carga, las respuestas dinámicas de la Fig. 14.11 evidencia menor sobrevalor inicial que el obtenido en la Fig. 14.7. ■

**Ejercicio 14.1** Considere el sistema de control de temperatura en un intercambiador de calor donde se propone sintonizar un controlador PI y para ello se realiza un ensayo a lazo abierto, siguiendo el procedimiento de la curva de reacción de Ziegler y Nichols [88], introduciendo un salto escalón del 50 % al 70 % para cambiar la presión de la cabeza de la válvula de control,

resgistrando la temperatura de salida del fluido de proceso según Fig 14.12.

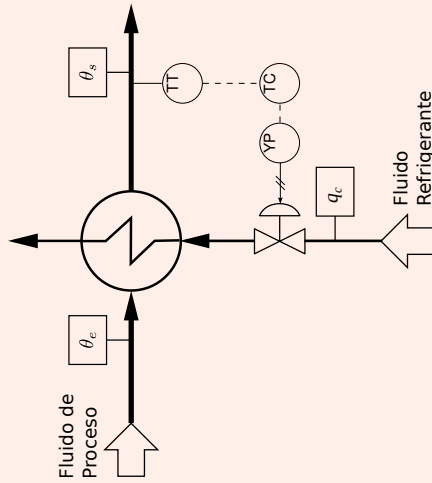
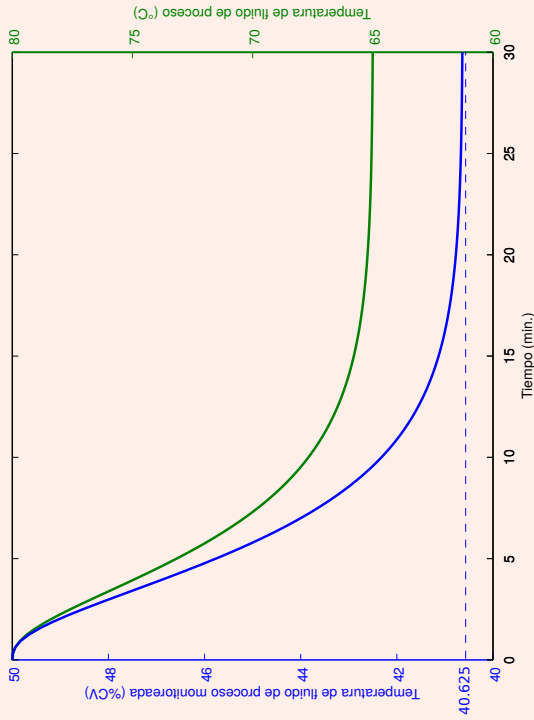


Figura 14.12

El elemento de medición de temperatura está calibrado con un rango de entrada entre 0°C y 160°C y un rango de salida entre 4mA y 20mA. Asuma que dicho elemento de medición y la válvula de control tienen dinámica despreciable. Además el lazo de control incluye un convertidor de corriente eléctrica a presión neumática.

- Arme el diagrama de bloques del sistema de control incluyendo información de las señales. Indique en dicho diagrama, como se realiza el experimento de la curva de reacción.
- Determine los parámetros de los modos proporcional e integral por el método de la curva de reacción con las fórmulas de sintonía de Ziegler y Nichols [88] y de Cohen y Coon [25].
- Basándose en la función de transferencia identificada por el método de Cohen y Coon, y asumiendo que el tiempo muerto puede ser aproximado razonablemente bien por una aproximación de Padé de primer orden, prediga el comportamiento dinámico del sistema realimentado en base a las raíces de la ecuación característica para los controladores calculados en (b).
- Verifique dicho comportamiento dinámico de ambos casos mediante simulación numérica.

Resolución. ▷ La Fig. 14.13 muestra el diagrama de bloques del sistema de control a lazo abierto para el experimento de la curva de reacción.

De acuerdo con el diagrama de bloques de la Fig. 14.13 las ganancias resultan,

$$K_x \% = \frac{(20 - 4)\text{mA}}{(100 - 0)\%x} = 0,16\text{mA}/\%x \quad (14.30)$$

$$K_m = \frac{(20 - 4)\text{mA}}{(160 - 0)^\circ\text{C}} = 0,1\text{mA}/^\circ\text{C} \quad (14.31)$$

$$K_m \% = \frac{(100 - 0)\% \theta_s}{(20 - 4)\text{mA}} = 6,25\% \theta_s/\text{mA} \quad (14.32)$$

De acuerdo con la Fig. 14.12,

$$K_s \frac{-9,375\% \theta_s}{20\%x} = -0,46875 \frac{\% \theta_s}{\%x} \quad (14.33)$$

En la Tabla 14.10 se listan los parámetros de los controladores calculados de acuerdo con los parámetros asociados a las técnicas de sintonización de Ziegler y Nichols y de Cohen y Coon, que fueron calculados a partir de la Fig. 14.12.

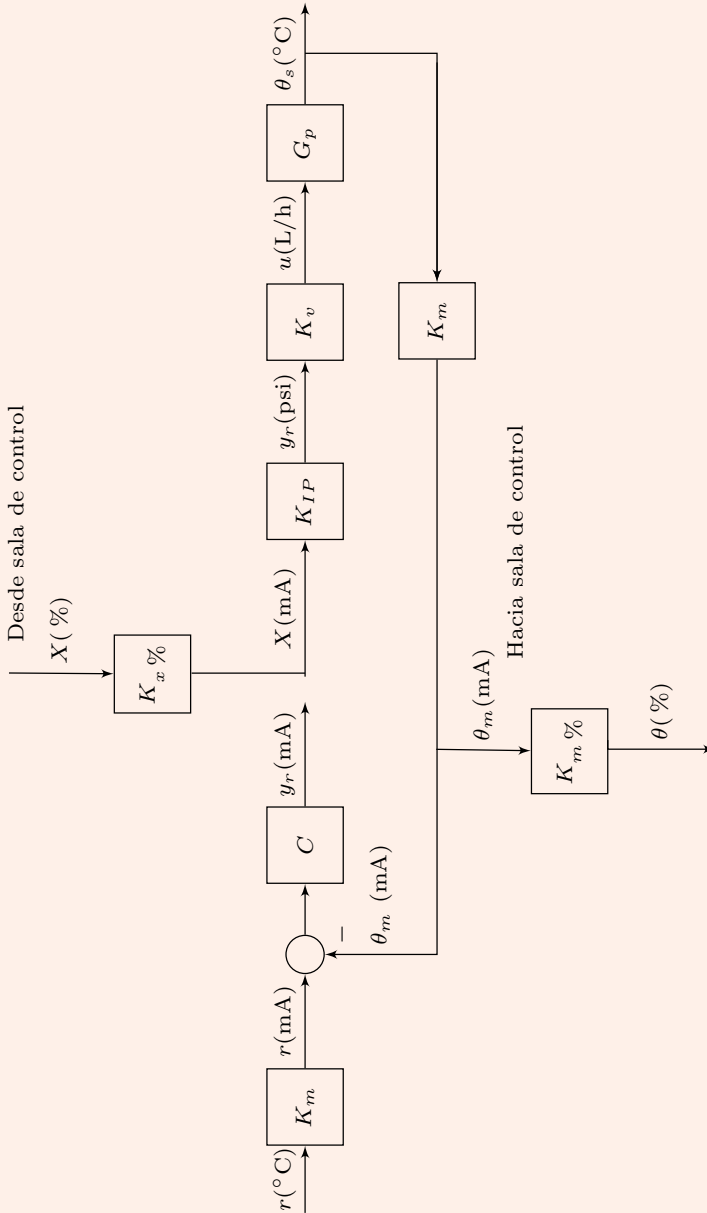


Figura 14.13: Diagrama de bloques del sistema de control se temperatura para el experimento de la curva de reacción.

Tabla 14.10: Resumen de parámetros experimentales y del controlador. Note que la productoria de las ganancias involucradas en el lazo de control es positiva, de acuerdo a lo que se indica en Cap. 8 Sec. 8.2.2.

Técnica de sintonización	Parámetros	Parámetros del Controlador
Ziegler y Nichols	$S = -0,056818 \text{ min}^{-1}$ $\theta = 1,25 \text{ min}$	$K_r = -12,672$ (adimensional) $T_I = 4,125 \text{ min}$ $T_D = 0 \text{ min}$
Cohen y Coon	$K_s = -0,46875$ (adimensional) $T = 8,25 \text{ min}$ $\theta = 1,25 \text{ min}$	$K_r = -12,85$ (adimensional) $T_I = 3,1644 \text{ min}$ $T_D = 0 \text{ min}$

En cuanto a predecir el comportamiento dinámico del sistema realimentado, primeramente debemos comprender como expresar el diagrama de bloques del sistema de control a lazo cerrado. La Fig. 14.14 muestra el sistema realimentado utilizado para la simulación numérica, que resulta consistente con el sistema físico estudiado.

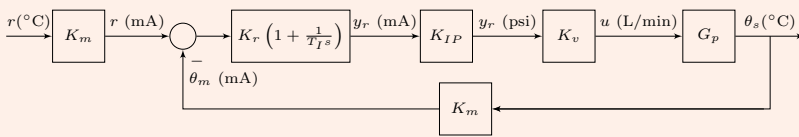


Figura 14.14: Diagrama de bloques del sistema de control PI de temperatura.

Note que la productoria de las ganancias

$$K_x \% K_{IP} K_v K_p k = -15^\circ\text{C} \tag{14.34}$$

por lo que  $K_{IP} K_v K_p$  resulta ser,

$$K_{IP} K_v K_p = \frac{-15^\circ\text{C}}{0,16 \frac{\text{mA}}{\%x} 20 \%x} = -4,6875^\circ\text{C}/\text{mA} \tag{14.35}$$

Resolviendo el diagrama de bloques de la Fig. 14.14, y considerando que  $G_p(s)$  se puede aproximar a un sistema de primer orden con tiempo muerto, según lo identificado en base al procedimiento de la curva de reacción de

Cohen y Coon,

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{K_m K_p K_{IP} K_v K_r (T_I s + 1) e^{-\theta s}}{T_I s (T s + 1) + K_m K_p K_{IP} K_v K_r (T_I s + 1) e^{-\theta s}} \quad (14.36)$$

Luego, introduciendo la aproximación de Padé de primer orden,

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{K^* (T_I s + 1) (1 - \theta/2s)}{T_I s (T s + 1) (1 + \theta/2s) + K^* (T_I s + 1) (1 - \theta/2s)} \quad (14.37)$$

donde se designa como  $K^* = K_m K_p K_{IP} K_v K_r$ .

La ecuación característica para el sistema realimentado de acuerdo con los distintos valores de  $K_r$  y  $T_I$  estimados por los métodos de Ziegler y Nichols y de Cohen y Coon, se informan en la Tabla

Tabla 14.11: Ecuaciones características y raíces del sistema realimentado de acuerdo con las dos técnicas de sintonización aplicadas.

Técnica de Sintonización	Ecuación Característica	Raíces de Lazo Cerrado
Ziegler y Nichols	$D(s) = 21,2695s^3 + 21,2953s^2 + 24,9150s + 5,9400$	$s_1 = -0,35597 + j0,91582$ $s_2 = -0,35597 - j0,91582$ $s_3 = -0,28927$
Cohen y Coon	$D(s) = 16,3162s^3 + 16,1712s^2 + 18,4598s + 6,0233$	$s_1 = -0,28874 + j0,89952$ $s_2 = -0,28874 - j0,89952$ $s_3 = -0,41362$

Basándose en los datos de la Tabla 14.11 se puede predecir que las respuestas de dinámicas de ambos sistemas de control serán subamortiguadas con tiempo de establecimiento bastante similar.

La Fig. 14.15 compara mediante simulaciones numéricas el comportamiento dinámico del sistema de control cuando se implementa los controladores calculados con las fórmulas de ajuste de Ziegler y Nichols y de Cohen y Coon.

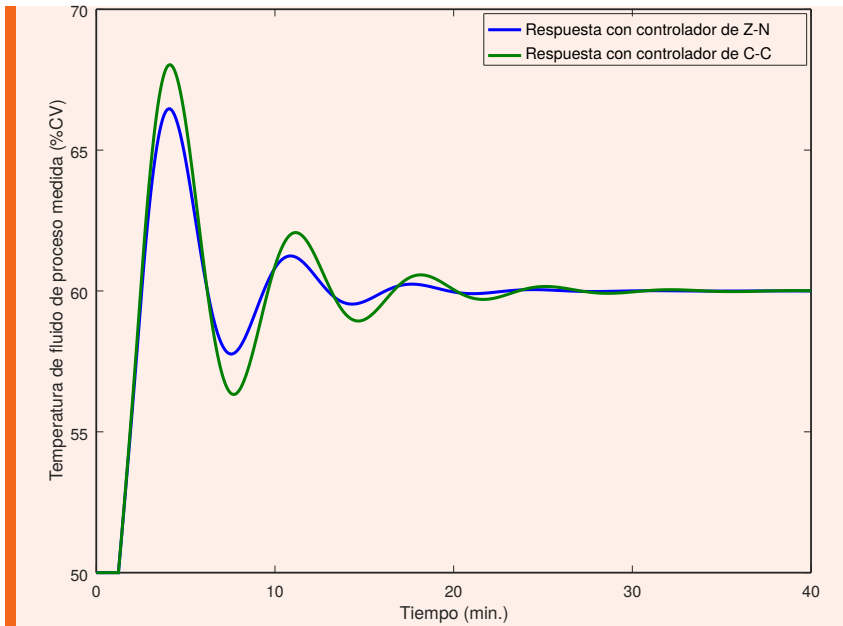


Figura 14.15

Observe que la respuesta dinámica del sistema realimentado con los parámetros de Ziegler y Nichols es ligeramente mejor que con los parámetros de Cohen y Coon. Esto puede deberse a que la respuesta dinámica de lazo abierto no se aproxima a un sistema de primer orden con tiempo muerto, como asume Cohen y Coon. ◁

## 14.4. Conclusiones

En este capítulo se presentaron técnicas de sintonización de controladores basadas en el conocimiento de la función de transferencia del proceso y otras basadas en ensayos experimentales.

Como es de esperar, cuanto mayor conocimiento del sistema se tenga mejor desempeño del sistema de control será posible alcanzar. Por tal motivo, en la mayoría de los casos, las técnicas de sintonización basadas en modelo arrojan mejores resultados que las técnicas basadas en ensayos experimentales. Como contra partida, estas últimas suelen lograr un ajuste demasiado conservador, en otras palabras exageradamente robusto, con un escaso conocimiento del sistema y un simple experimento en planta.

## 14.5. Pensemos

1. Considere un sistema realimentado al que se le desea mejorar su tiempo de establecimiento. ¿Dónde sería conveniente ubicar las raíces dominantes en el plano complejo?
  - En el semiplano complejo izquierdo y cerca del eje imaginario.
  - En el semiplano complejo izquierdo y lejos del eje imaginario.
  - Es indistinto.
  - Ninguna de las anteriores.
2. ¿El método de ajuste de controladores de Ziegler-Nichols de las oscilaciones sostenidas se aplica en sistemas cuya respuesta a lazo abierto al escalón unitario es de forma sigmoidea y donde además, uno de los parámetros que se mide es la ganancia crítica, que se obtiene de variar la ganancia hasta que el sistema se vuelve sobreamortiguado?  **V**  **F**
3. ¿Es posible aplicar el método de las oscilaciones sostenidas de Ziegler y Nichols a un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = \frac{K_p}{s(Ts+1)}$  con,
  - (a)  $-1/T > 0$ ?  **Si**  **No**
  - (b)  $-1/T < 0$ ?  **Si**  **No**
4. Si se considera que la ganancia del modo proporcional sugerido por el método de las oscilaciones sostenidas de Ziegler y Nichols para un controlador PI resulta ser  $K_r = 0,45K_{ru}$  luego, el margen de ganancia alcanzado resulta  $MG = 1/0,45 \approx 2,22$   **Si**  **No**
5. ¿El método de síntesis directa asume un modelo nominal de función de transferencia deseado para la planta a lazo abierto?  **V**  **F**
6. En el método de ajuste de controladores de Ziegler-Nichols de la curva de reacción se aplica en sistemas cuya respuesta al escalón es de forma sigmoidea y donde uno de los parámetros que se mide es la ganancia crítica, que se obtiene de variar la ganancia hasta que el sistema se vuelve sobreamortiguado.  **V**  **F**
7. Con el método de sintonización de controladores Ziegler y Nichols de las oscilaciones sostenidas se pretende obtener un  $\zeta$  de:
  - 0.4.  0.7.
  - 0.6.  Ninguna es correcta.
  - 0.5.
8. ¿El método de síntesis directa asume un modelo nominal de función de transferencia deseado para la planta a lazo abierto?  **V**  **F**
9. Si las dinámicas de un proceso o del elemento de medición o de la válvula de control no son bien conocidas, ¿cual de las siguientes técnicas de ajuste de controladores escogería?



- Síntesis directa.
- Métodos basados en la curva de reacción.
- Control con Modelo Interno.
- Ninguno de los anteriores.

## 14.6. Problemas

**Problema 14.1** De los diagramas de Bode de la cadena de lazo abierto de un sistema de control realimentado con un controlador proporcional se obtiene que, para una fase igual a  $-180^\circ$  la  $RA(\omega_{-180})/K_{ru} = 0,8$  y  $\omega_{-180} = 0,075$

- (a) ¿A qué es igual la ganancia última?
- (b) Si se pretende ajustar un controlador proporcional con un  $MG = 2$ , ¿a qué es igual el  $K_{rop}$ ?
- (c) ¿Con los datos que dispone, podría determinar los valores de las acciones de un controlador PID? Si la respuesta es afirmativa, calcule dichos valores.

**Problema 14.2** Considere la función de transferencia de la cadena de lazo abierto  $G(s)H(s) = 2e^{-2s}/(5s + 1)$ .

- (a) Adopte los parámetros de un controlador PI mediante el método de Ziegler y Nichols de las oscilaciones sostenidas.
- (b) Adopte los parámetros de un controlador PI mediante las recomendaciones de Cohen y Coon.
- (c) Compare los parámetros de los controladores ajustados en (a) y (b). ¿Qué tipo de respuesta dinámica se obtiene en cada caso para un cambio escalón en consigna? ¿Cuál de los dos le parece mejor? Justifique.

**Problema 14.3** Se propone controlar al sistema con función de transferencia  $G(s) = 1/(10s + 1)(2s + 1)(0,5s + 1)$  con un controlador proporcional integral. Asuma además que  $G_m = G_v = 1$ .

- (a) Sintonice dicho controlador mediante la técnica de Ziegler y Nichols de las oscilaciones sostenidas.
- (b) Calcule las raíces de lazo cerrado con el controlador sintonizado en (a). En base a esto, prediga la respuesta dinámica al escalón en consigna.
- (c) ¿Qué margen de ganancia se alcanza con el controlador adoptado?
- (d) Simule numéricamente y verifique su predicción.

**Problema 14.4** Se desea controlar un sistema cuya función de transferencia es  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-4s}}{10s + 1}$  utilizando un elemento de medición y un elemento de control final sin dinámica y ganancia unitaria.

- (a) Dibuje el diagrama de bloques del sistema realimentado y adopte el signo del controlador.
- (b) Se pretende utilizar un controlador proporcional considerando como buena una sintonización si se alcanza un offset menor o igual al 10%. ¿Es posible lograr dicho requerimiento? ¿Cuál es el margen de ganancia alcanzado?

- (c) Ahora sintonice el controlador proporcional con un  $MG = 2$ . ¿A que es igual el offset en este caso?
- (d) Un ingeniero de control propone utilizar un controlador PID ajustando sus parámetros por el método de Ziegler y Nichols de las oscilaciones sostenidas. Calcule dichos parámetros y obtenga conclusiones comparando con los controladores proporcionales de los incisos (b) y (c).

**Problema 14.5** Considere un sistema cuya función de transferencia de lazo abierto es,

$$G(s) = \frac{10e^{-0,1s}}{s + 1} \quad (14.38)$$

realimentado con un controlador proporcional. Los elementos de medición y control final tienen dinámica despreciable y ganancia unitaria.

- (a) Determine analíticamente la ganancia del modo proporcional por el método de Ziegler y Nichols de las oscilaciones sostenidas.
- (b) Si se tiene una incertidumbre de  $\pm 10\%$  en todos los parámetros de la función de transferencia, calcule el rango de valores de  $K_r$  que asegura estabilidad asintótica del sistema realimentado.

**Problema 14.6** Considere el motor de corriente continua modelado por Adam y Guestrin ([3]),

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = G_p(s) = \frac{2,6033e^{-0,1011s}}{s(0,2572s + 1)} \quad (14.39)$$

donde  $\Theta(s)$  es el ángulo girado y  $V(s)$  la tensión aplicada. Asuma que los elementos de medición y control final son ideales y con ganancia unitaria.

- (a) Sintonice el controlador más simple que permita obtener offset nulo frente a un cambio en consigna y alcance un margen de ganancia igual a 2.
- (b) Sintonice un controlador PI por el método de Tyrus y Luyben (1992).
- (c) Sintonice un controlador PID por los métodos de Luyben (1996) y Adam *et al.* (2002).

**Problema 14.7** La composición de salida en el tope de una columna de destilación binaria de Vinante y Luyben ([87]) en función del caudal de reciclo y del caudal de vapor en el fondo de la columna tiene por función de transferencia,

$$x_D(s) = \frac{-2,2e^{-s}}{7s + 1}R(s) + \frac{1,3e^{-0,3s}}{7s + 1}S(s)$$

donde  $R$  es el caudal de reciclo y  $S$  el caudal de vapor de fondo.

- (a) Si se escoge al caudal de reciclo como variable manipulada, realice el esquema de instrumentación de la columna bajo normas ISA del sistema de control de composición de destilado.
- (b) Arme del diagrama de bloques del sistema de control basándose en las funciones de transferencia antes presentadas.
- (c) Sintonice un controlador PI mediante la técnica de Ziegler y Nichols de las oscilaciones sostenidas, asumiendo que los elementos de control final y de medición tienen ganancia unitaria y dinámica despreciable.

- (d) Asuma una aproximación de Padé de primer orden para el tiempo muerto y prediga la respuesta dinámica del sistema realimentado para un cambio escalón en consigna y en carga cuando se utiliza el controlador calculado en (c).
- (e) Mediante simulaciones numéricas, verifique el comportamiento dinámico del sistemas de control de composición de tope con el predicho en el inciso (d).

**Problema 14.8** Considere un proceso de la Fig. 14.16 donde se indican las variables controlada ( $Y(s)$ ), la manipulada ( $U(s)$ ) y la carga ( $L(s)$ ). Se sabe además que ECF tiene una función de transferencia  $G_v = 4/(0,5s+1)$  y el elemento de medición tiene ganancia unitaria y dinámica despreciable.

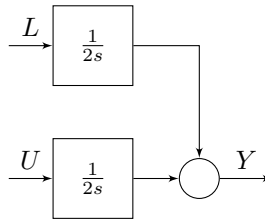


Figura 14.16

- (a) Proponga un controlador que elimine offset en carga y consigna. Justifique su respuesta.
- (b) Un ingeniero sostiene que se puede sintonizar el controlador elegido mediante la técnica de Ziegler y Nichols de las oscilaciones sostenidas, mientras que otro sostiene que se debe usar la técnica de Ziegler y Nichols de la curva de reacción. ¿Con cual de los dos Ud. está de acuerdo? Aplique el método elegido y justifique.
- (c) Analice la estabilidad del sistema realimentado con el controlador adoptado mediante el lugar de las raíces.
- (d) ¿Qué tipo de respuesta dinámica se obtendría con el controlador elegido en (b)? Justifique.
- (e) Grafique a mano alzada las respuestas al cambio en consigna y carga y luego verifique mediante simulaciones numéricas.

**Problema 14.9** Considere un proceso cuya función de transferencia de lazo abierto es,

$$Gp(s) = \frac{1 e^{-0,5s}}{(2s + 1)(4s + 1)}$$

- (a) Sintonice un controlador PID mediante la técnica de síntesis directa. Para ello asuma que se adoptó  $\tau_c = 2,5$ .
- (b) ¿Para qué valor de  $\tau_c$  el sistema de control alcanza la ganancia crítica ( $K_{cu}$ )? No Asuma para los cálculos ninguna aproximación en serie para el tiempo muerto.

- (c) ¿Para que rango de valores de  $\tau_c$  se puede garantizar la estabilidad del sistema de control si la ganancia del proceso tiene una incertidumbre de  $\pm 20\%$ ?

**Problema 14.10** Considere la función de transferencia entre la variable de salida y la manipulada de un sistema experimental,

$$G_p(s) = \frac{K_p e^{-\theta s}}{s(Ts + 1)},$$

donde  $K_p = 2,5$ ,  $T = 0,25$  y  $\theta = 0,1$ . Con el objeto de realizar cambios en la consigna del sistema, se propone controlar dicho sistema mediante los siguientes controladores: (i) un controlador proporcional o bien un (ii) un controlador PD. Las fórmulas de ajuste de ambos controladores se indican en la tabla.

Controlador	$K_r$	$T_D$
P	$0,5K_u$	
PD	$1/K_p(\lambda + \theta)$	$T$

Donde  $K_u$  es la ganancia última del sistema y  $\lambda = 0,35$  para el controlador PD.

- Basándose en la parametrización IMC, pruebe la Ec. de diseño del controlador PD.
- Calcule las acciones de ambos controladores.
- Realice un diagrama de lugar de las raíces para los dos casos posibles, con la ganancia del controlador como variable, asumiendo que el retardo puede ser aproximado aceptablemente por una serie de Padé de primer orden.
- Obtenga conclusiones comparando los tiempos de estabilización ( $T_{est}$ ) y los coeficientes de amortiguamiento ( $\zeta$ ) que obtendría con cada controlador.
- Resintonice el control PD ajustando la constante de tiempo del filtro IMC ( $\lambda$ ) con el objetivo de alcanzar un  $M_G = 2$ . No aproxime al tiempo muerto por Padé en este caso.

**Problema 14.11** Se desea controlar el nivel de un tanque de almacenamiento de líquido cuya función de transferencia es,

$$\frac{H(s)}{Q_m(s)} = \frac{R}{(Ts + 1)} \quad (14.40)$$

donde  $R = 5 \text{ m l}^{-1} \text{ min}$  y  $T = 0,5 \text{ min}$  y  $Q_m$  en  $\text{l min}^{-1}$  un caudal manipulado de entrada de fluido al tanque. Se sabe que se dispone de elemento de medición y válvula de control de ganancia unitaria y dinámica despreciable y sus unidades son consistentes con la función de transferencia indicada. El elemento de control final tiene salida en mA y la válvula de control entrada en mA.

- Realice el diagrama de bloques del sistema de control indicando las unidades de las distintas señales involucradas.
- Realice el diagrama del sistema de control nivel utilizando las normas ISA.
- Sintonice el controlador más sencillo mediante la técnica de parametrización IMC que cumpla con los siguientes requerimientos:
  - offset nulo y
  - el tiempo de establecimiento de lazo cerrado sea de 1 min,
- Analice la estabilidad del sistema realimentado con el controlador adoptado mediante el lugar de las raíces para distintos valores del parámetro de ajuste  $\lambda$ .
- Muestre a mano alzada como sería la respuesta dinámica del sistema de control con el controlador adoptado en (c) y compare su predicción mediante una simulación numérica con Octave©.

**Problema 14.12** Considere el sistema de control de nivel de líquido (Fig. 14.17) en un tanque de almacenamiento donde dos corrientes son mezcladas previo a su embotellamiento. Desde la sala de control se propone identificar la función de transferencia del sistema, y para ello se introduce un escalón de 20 % en el caudal a manipular con el controlador en posición manual, obteniendo la respuesta dinámica que se muestra en la Fig. 14.17. Considere además que las ganancias de los elementos de control final y de medición tienen dinámica despreciable y ganancia unitaria.

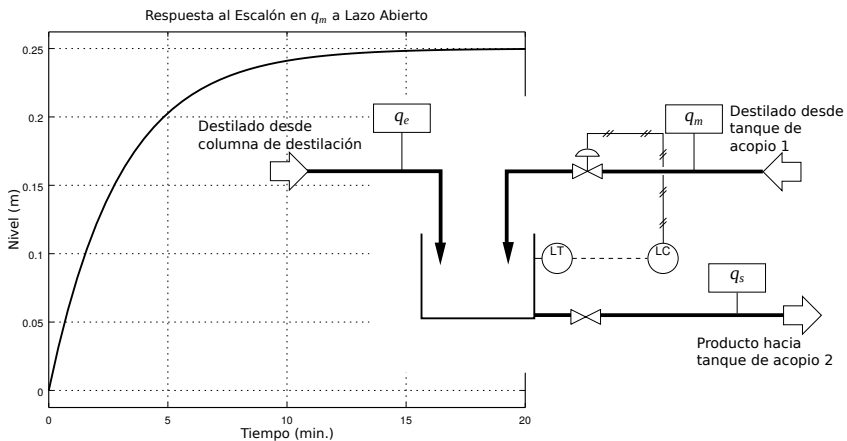


Figura 14.17

- Aplique un procedimiento de identificación para obtener la función de transferencia de la planta y luego realice un diagrama de bloques del sistema realimentado.
- Aplique la técnica de sintonización IMC y determine los parámetros que

perminten alcanzar un tiempo de establecimiento de 1 minuto en la respuesta dinámica de lazo cerrado.

- (c) ¿Que tipo de respuesta dinámica se obtiene con el controlador del inciso (b)? Analice mediante el lugar de las raíces y justifique adecuadamente.
- (d) ¿A qué es igual el offset en consigna y carga del sistema de control?

**Problema 14.13** Considere el sistema de calentamiento de la Fig. 14.18, donde mediante un experimento de identificación se determinó que la función de transferencia entre la temperatura del fluido en el interior de tanque y el caudal vapor resulta ser,  $\frac{\Theta_s(s)}{Q_v(s)} = \frac{2,8e^{-3s}}{(40s+1)(50s+1)}$ .

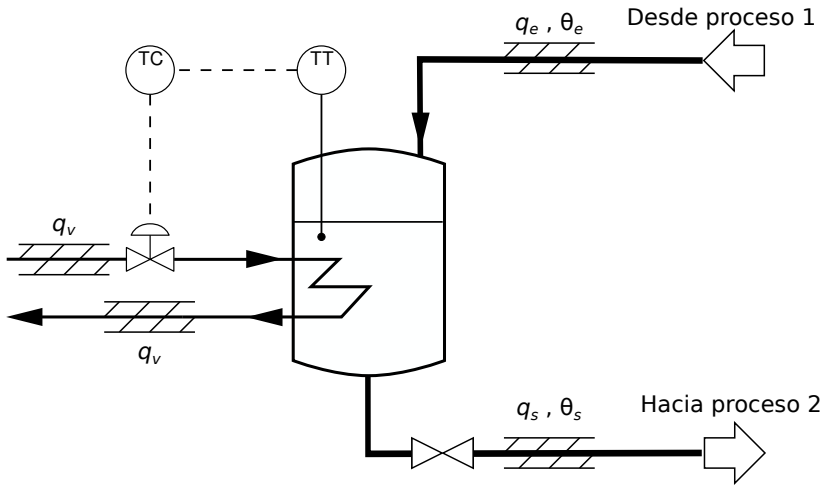


Figura 14.18

Se sabe además que,

- la válvula de control es normalmente cerrada, lineal con ganancia  $K_v(s) = 5$  con unidades de entrada y salida compatibles, y dinámica despreciable.
  - el elemento de medición de temperatura tiene dinámica despreciable y fue calibrado para un rango de entrada de 0 a 200 °C con salida de 4 a 20 mA.
- (a) Aplique el método de parametrización IMC y determine los parámetros de un controlador PID de temperatura. Adopte el valor de la constante de tiempo del filtro IMC para que cumpla con el criterio de  $MG = 2$ .
- (b) Aplique el método de las oscilaciones sostenidas de Ziegler y Nichols y determine los parámetros de un controlador PID.
- (c) Prediga las respuestas dinámicas de los sistemas realimentados de los incisos (a) y (b). Para esto asuma que el tiempo muerto se puede aproximar por una aproximación de Padé de primer orden.
- (d) Simule numéricamente y verifique su resultado.

**Problema 14.14** Se quiere controlar un sistema cuya función de transferencia es  $Gp(s) = 2e^{-s}/(3s + 1)$  con un controlador PI. Para ello se proponen dos técnicas de ajuste a saber:

- minimizando el ITAE para cambio en consigna, siendo las relaciones de ajuste propuestas por Rovira ([72])(ver Tabla 14.4).
  - mediante el método de Ziegler y Nichols de las oscilaciones sostenidas.
- (a) Calcule ambos controladores. ¿Son iguales? Justifique su respuesta.  
 (b) ¿Qué tipo de raíces de lazo cerrado presenta el sistema de control en cada caso? Asuma que puede utilizar una aproximación de Padé de primer orden.  
 (c) Basándose en la respuesta obtenida en (b) prediga las respuestas al escalón en consigna en cada caso. Analice junto al lugar de las raíces.  
 (d) Simule numéricamente cada caso y analice la respuesta dinámica obtenida con la predicha en el inciso anterior. Obtenga conclusiones.

**Problema 14.15** Un fluido de proceso es enfriado en un intercambiador de calor que tiene implementado un lazo de control de temperatura de acuerdo con la Fig. 14.19. Con el objeto de sintonizar un controlador PI, se realiza el ensayo de Ziegler y Nichols de la curva de reacción. Para ello se reduce el caudal de agua de enfriamiento del 50 % al 40 %, registrándose la respuesta dinámica que se indica en la Fig. 14.19.

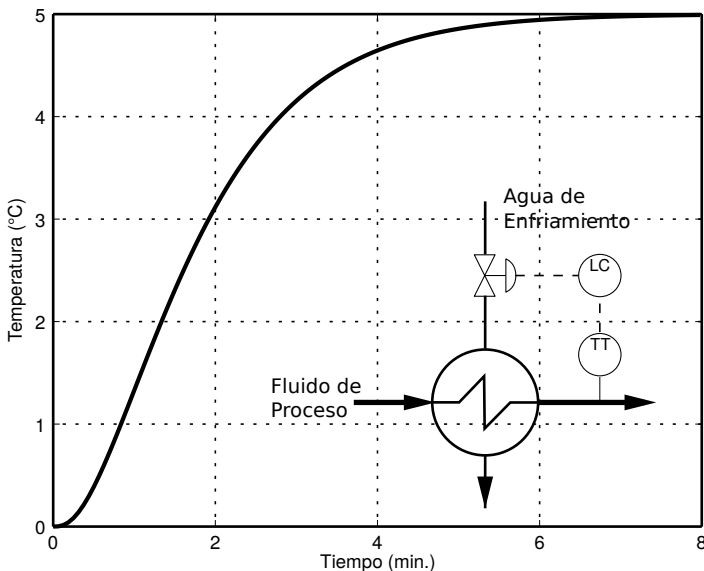


Figura 14.19

Se sabe además que,

- (I) el elemento de medición de temperatura está calibrado para una salida del

0-100 % para un rango de entrada de  $\pm 25^\circ\text{C}$  en torno al valor de estado estacionario,

- (II)  $K_T = K_m$  y
- (III) la válvula de control tiene un rango de entrada 0-100 % con un rango de salida de caudal de  $0-q_{\text{máx}}$  (l/min).
  - (a) Realice un diagrama de bloques indicando las variables y sus unidades.
  - (b) Aplique la técnica de Ziegler y Nichols de la curva de reacción y determine los parámetros de un controlador PI.
  - (c) Basándose en la respuesta dinámica a lazo abierto estime los parámetros de una función de transferencia de primer orden con tiempo muerto.
  - (d) Aplique las relaciones de diseño de Rovira para determinar los parámetros de un controlador PI para seguimiento de consigna y para minimizar ITAE.

**Problema 14.16** La presión de un sistema de almacenamiento de un cierto gas se regula manipulando una línea de salida mediante el sistema de control de la Fig. 14.20.

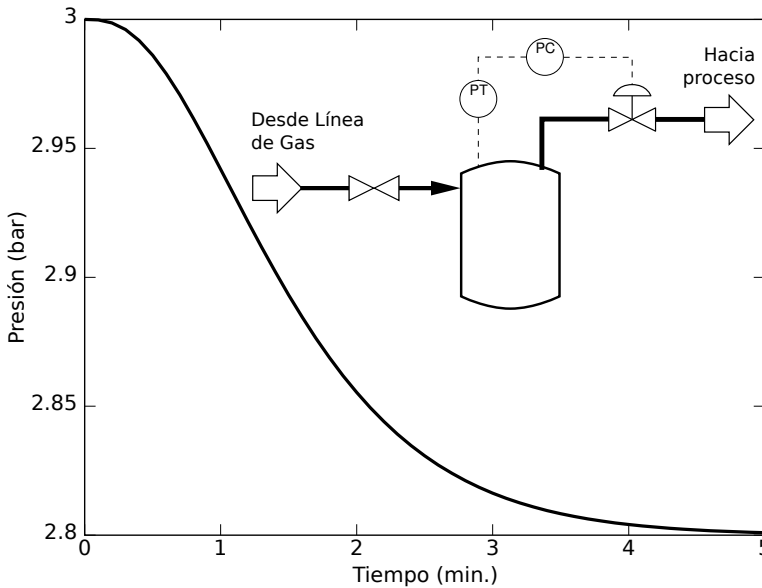


Figura 14.20: Sistema de control de presión y la correspondiente curva de reacción.

El sistema opera normalmente a una presión de 3 bar en el depósito de almacenamiento y con una señal a válvula del 30 %. El sistema a lazo abierto ante un cambio en la señal a la válvula del 30 % al 35 % genera la respuesta dinámica de la Fig. 14.20.



- Realice un diagrama de bloques del sistema realimentado indicando las unidades de cada señal de acuerdo con el sistema internacional. Adopte el signo de controlador.
- Sintonice el controlador con la función de transferencia más simple, que permita eliminar el error de estado estacionario frente a cambios escalón en la referencia. Realice el ajuste con alguno de los métodos basados en la curva de reacción. Justifique la elección del método de sintonización escogido.
- ¿Está de acuerdo con el tipo de válvula adoptada? Justifique.

**Problema 14.17** En un determinado proceso se realiza la siguiente experiencia con el fin de sintonizar, por el método de Ziegler-Nichols de la curva de reacción, un controlador lo más simple posible que garantice offset nulo para un cambio escalón en consigna:

- partiendo de un estado estacionario se coloca el controlador en posición manual y luego,
- se introduce una perturbación escalón desde el controlador en posición manual cambiando su salida de 2.8 a 3 volt.
- Se registra la salida del transmisor en función del tiempo obteniendo la respuesta dinámica de la Fig. 14.21.

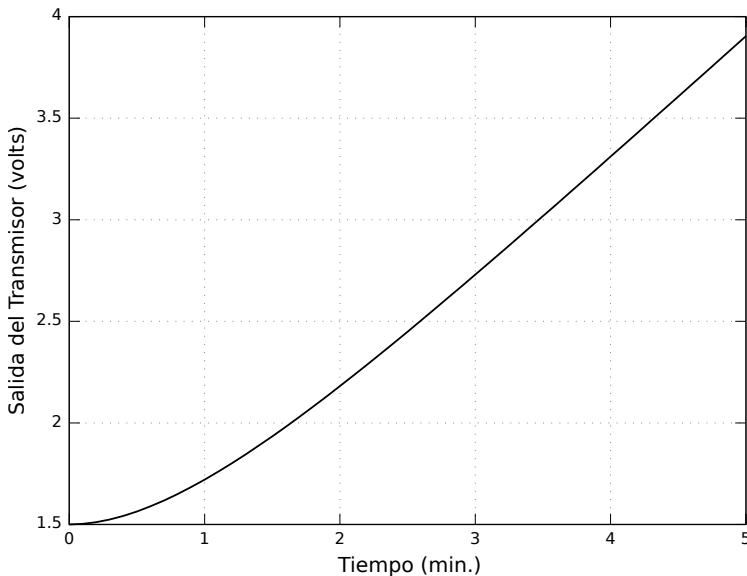


Figura 14.21

- Utilizando el método antes mencionado, encuentre los valores numéricos del controlador propuesto.

- (b) Obtenga los parámetros de la función de transferencia del sistema si es aproximada a la forma  $G_p(s)G_v(s)G_m(s) \approx K_p K_v K_m e^{-\theta s}/s$ . Asuma que la válvula de control y el transductor tienen ganancia unitaria y dinámica despreciable.
- (c) Basándose en la función de transferencia del inciso anterior, sintonice un controlador proporcional utilizando Ziegler-Nichols de las oscilaciones sostenidas.

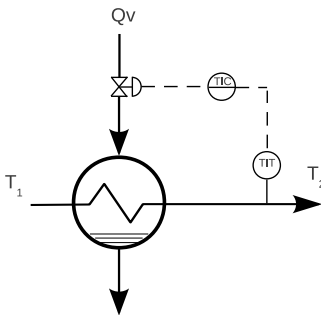
**Problema 14.18** (a) Para la planta del problema anterior, adopte:  $k = 1$ ,  $\theta = 0,5$ ,  $T_1 = 2$  y  $T_2 = 5$ . Luego, sintonice un controlador por el método de Ziegler-Nichols de oscilaciones sostenidas que permita obtener offset nulo para un cambio escalón en la referencia.

- (b) Compare mediante simulaciones numéricas la performance obtenida con este controlador con la obtenida con el controlador diseñado en el problema anterior.

**Problema 14.19** Considere el sistema del problema anterior y diseñe un controlador PI por el método de las oscilaciones sostenidas.

- (a) Compare mediante simulaciones numéricas el desempeño del sistema con el controlador sintonizado de acuerdo al problema anterior con el que obtiene con el controlador sintonizado en este problema.
- (b) ¿Hay diferencias en los desempeños de los sistemas de control? Justifique.

**Problema 14.20** Se desea controlar la temperatura de un intercambiador de calor según muestra:



Las funciones de transferencias son,

$$\frac{T_2(s)}{Q_v(s)} = \frac{4e^{-s}}{8s+1} \text{ y } \frac{T_2(s)}{T_1(s)} = \frac{1,2e^{-1,5s}}{3s+1}$$

Todas las constantes de tiempo están en segundos.

Se sabe además que la válvula de control sigue la ley,

$$q_v = 0,8\sqrt{y_r - 4} \text{ Kg vap./s}$$

donde,  $4 \leq y_r \leq 20$  mA y en operación normal  $y_r^0 = 13$  mA.

Los ingenieros de control solicitaron que el transductor de temperatura fuese calibrado para dar una respuesta lineal de 4 a 20 mA para un rango de temperatura de 120 a 160 °C, coincidente con el rango de operación del intercambiador de calor.

- (a) Represente mediante diagrama de bloques el sistema de control, aclarando las unidades físicas que tiene cada señal.

- (b) Encuentre las funciones de transferencia del transductor y la válvula.
- (c) Sintone un controlador proporcional por el método de las oscilaciones sostenidas de Ziegler y Nichols ([88]). ¿A qué es igual el margen de ganancia y de fase para el controlador adoptado?
- (d) Prediga las respuestas dinámicas del sistema realimentado para cambios escalón en carga y consigna. Asuma para esto una aproximación de Padé de primer orden.
- (e) ¿Si cambia el punto de operación del intercambiador de manera tal que el valor es  $y_r^0 = 8$  mA, el resto de los parámetros permanece igual? ¿Cambia la respuesta dinámica? Justifique su respuesta.

**Problema 14.21** Considere el sistema de control de temperatura del Prob. 14.20 en su punto de operación inicial.

- (a) Sintone un controlador PI mediante las relaciones de diseño de Lopez *et al.* ([53]) basadas en ITAE para eliminar perturbaciones.
- (b) Sintone un controlador PI mediante las relaciones de diseño de Rovira ([72]) basadas en ITAE para seguimiento de consignas.
- (c) Determine los márgenes de ganancias y fase alcanzados con los controladores PIs de los incisos .
- (d) ¿Basándose en los resultados del inciso , cual de las dos opciones presenta mejor estabilidad? Justifique.

**Problema 14.22** Dado un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = \frac{2}{(10s-1)(5s+1)}$ , se lo controla con un lazo de realimentación compuesto por, i) un controlador proporcional, ii) un elemento de control final cuya función de transferencia es  $G_v(s) = \frac{1}{(0,5s+1)}$  y iii) un transductor cuya función de transferencia es  $G_m(s) = 0,12$  y  $K_t = K_m$ .

- (a) ¿Cómo se comporta el sistema en lazo abierto?
- (b) Analice la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante el uso del lugar de las raíces.
- (c) ¿Qué valor o valores hay que darle a la ganancia del controlador con el objeto de lograr un margen de ganancia igual a 2?
- (d) De acuerdo con el o los valores de  $K_r$  adoptados en el inciso anterior, ¿cuál o cuales de ellos permite alcanzar un menor offset en consigna?
- (e) ¿Es posible eliminar el offset con este sistema de control? De no ser así, sintonice un controlador por el método de las oscilaciones sostenidas que permita alcanzar dicho requerimiento.

**Problema 14.23** Considere el sistema de control proporcional de nivel de líquido en un domo de un generador de vapor de la Fig. 14.22. Mediante un procedimiento de identificación se terminó que la función de transferencia entre el nivel de líquido en el domo y el caudal de agua de alimentación tiene por función de transferencia:

$$\frac{H(s)}{Q_e(s)} = \frac{-2,5(-0,5s + 0,1)}{s(s + 0,1)}$$

donde  $H[=]$ m es el nivel de líquido y  $Q_e[=]$ m<sup>3</sup>/s el caudal de agua manipulado.

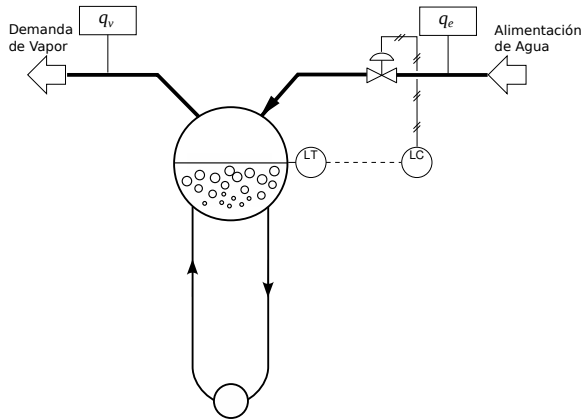


Figura 14.22

Asuma además que los elementos de control final y de medición tienen ganancia unitaria y dinámica despreciable.

- Determine el signo del controlador para que el sistema de control tenga realimentación negativa.
- Aplique el criterio de Routh y determine el rango de valores de la ganancia del modo proporcional que asegure estabilidad del sistema de control. Luego, adopte un valor de  $K_r$  tal que satisfaga el criterio de  $MG = 2$ .
- Aplique el método de Ziegler y Nichols de las oscilaciones sostenidas y determine los parámetros de un controlador PI para este ejemplo.
- Prediga con cual de los dos sistemas de control (P o PI) se alcanza un mejor desempeño. Para ello, compare en ambos casos, offsets, raíces de las ecuaciones características, tiempos de establecimiento, coeficientes de amortiguamiento y relaciones de decaimiento, entre otros índices de desempeño que considere adecuado para esto.
- Grafique a mano alzada el comportamiento dinámico de ambos casos y verifique su predicción mediante simulación numérica con Octave.

**Problema 14.24** Un sistema cuya función de transferencia es,

$$G(s) = \frac{2e^{-s}}{(0,1s + 1)(0,5s + 1)}$$

se lo controla con un lazo formado por un regulador proporcional, una válvula normalmente abierta cuyo  $K_v = 2$  y un transductor de ganancia unitaria. Tanto la válvula como el transductor tienen dinámica despreciable. Todas las ganancias tienen unidades consistentes.

- ¿Es estable el sistema para cualquier valor de ganancia?
- ¿Qué valor de  $K_r$  debe adoptarse para tener  $\zeta = 0,23$  en la respuesta dinámica del sistema realimentado? Asuma que puede aproximar aceptablemente bien el tiempo muerto mediante una serie de Padé de primer

orden.

- (c) En base al análisis anterior, realice gráficas cualitativas de las respuestas temporales, paramétricas en  $K_r$ , cuando se da un escalón unitario en consigna.

**Problema 14.25** Se desea controlar el nivel de líquido de fondo de un hervidor de una columna de destilación manipulando el caudal de vapor de entrada al mismo (Fig. 14.23). Se sabe que la función de transferencia del sistema es,

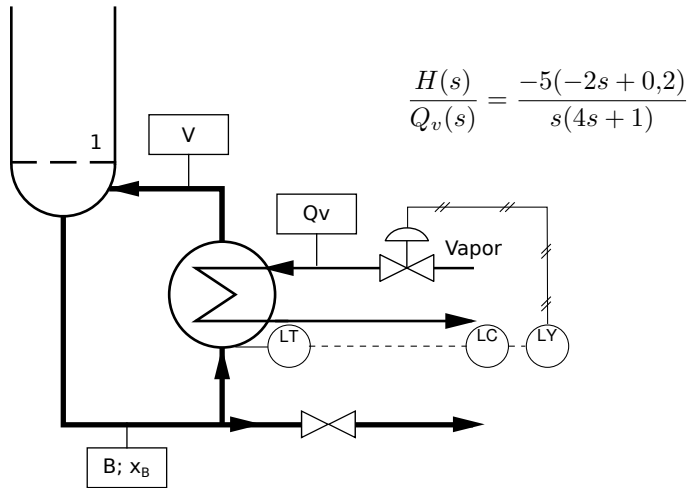


Figura 14.23

Asuma además que la ganancia del elemento de control final es  $K_v = -3 \text{ Kg m}^{-1}/\text{psi}$  y la ganancia del elemento de medición tienen ganancia es  $K_{LI} = 1,5 \text{ mA/m}$  y la ganancia del convertidor de señal es  $K_{IP} = 0,75 \text{ psi/mA}$ . Se sabe además que todos los elementos mencionados tienen dinámica despreciable.

- (a) Dibuje el diagrama de bloques del sistema, determine el tipo de acción y el signo del controlador para que el sistema realimentado tenga un rango de estabilidad.
- (b) Por solicitud de los ingenieros de procesos la respuesta dinámica de lazo cerrado debe tener las siguientes características:
- respuesta dinámica de segundo orden críticamente amortiguada,
  - tiempo de establecimiento 10 min y
  - no debe presentar offset.

Proponga una función de transferencia de lazo cerrado que permita alcanzar las características deseadas y luego aplique el método de síntesis directa. ¿Obtiene un controlador de la forma P, PI, PD o PID?

- (c) Por otro lado, los ingenieros de control proponen la siguiente función de

transferencia para el sistema realimentado:

$$G_{lc}(s) = \frac{(1 - 10s)}{2,5s + 1} \quad (14.41)$$

Basándose en la  $G_{lc}(s)$  propuesta aplique el método de síntesis directa y obtenga los parámetros del controlador resultante.

- (d) Mediante el cómputo de las raíces de la ecuación característica de lazo cerrado (para cuando se implementa el controlador calculado en el ítem (c)) prediga el comportamiento dinámico del sistema realimentado. ¿Es posible alcanzar el tiempo de establecimiento pretendido?
- (e) Realice un análisis mediante el lugar de las raíces del sistema realimentado con el controlador obtenido en el inciso (c).
- (f) Basándose en los resultados del inciso (d) grafique a mano alzada la respuesta al escalón en consigna y verifique su predicción mediante simulación numérica con Octave. Obtenga conclusiones.

**Problema 14.26** Para un sistema de control con realimentación unitaria se conoce el diagrama de bode de la función de transferencia de la cadena de lazo abierto, la cual se muestra en la Fig. 14.24. A partir esta información realice lo que se detalla a continuación.

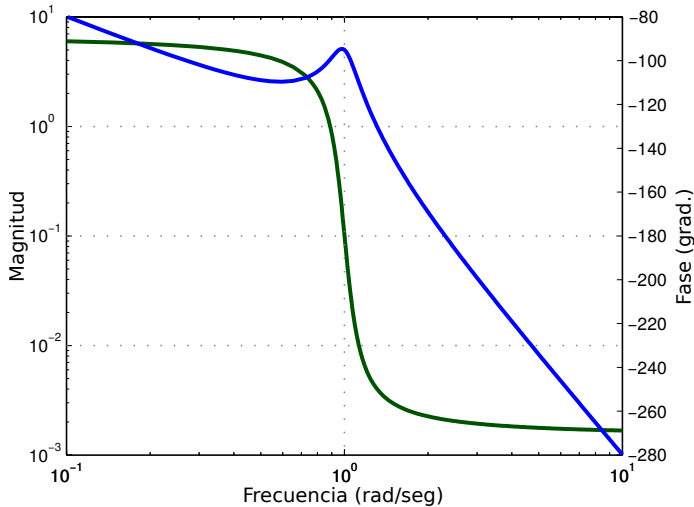


Figura 14.24

- (a) Identifique de la función de transferencia del proceso a lazo abierto.
- (b) ¿Es estable el sistema que identificó si se lo realimenta con un controlador proporcional de ganancia 0.1?
- (c) Calcule el error pasado el transitorio del sistema a lazo cerrado, ante el escalón y la rampa.

- (d) Indique si es posible lograr que el sistema a lazo cerrado alcance un margen de fase de  $45^\circ$ . ¿Qué debería hacer? Justifique y realice los cálculos necesarios.

Dato. Asuma para los cálculos las siguientes ecuaciones:  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta}$ ,  $\omega_n = 1/T$  y  $RA(\omega_r) = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ .

**Problema 14.27** Una planta presenta la respuesta en frecuencia que se muestra en los diagramas de Bode de la Fig. 14.25.

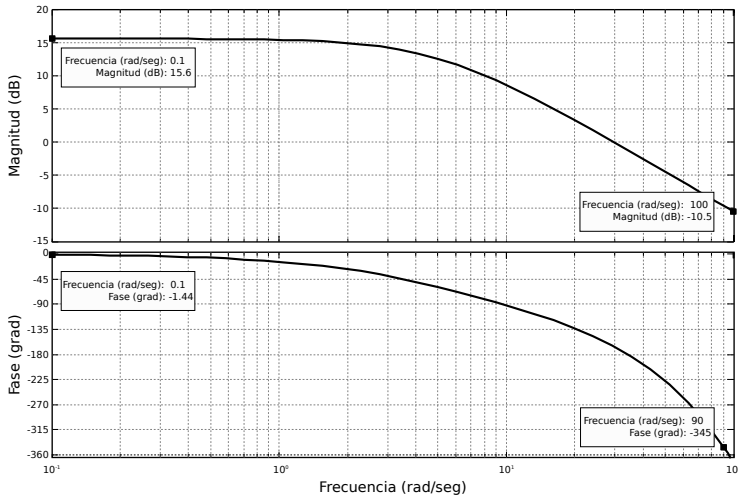


Figura 14.25

- Determine función de transferencia del sistema.
- Asumiendo que se incluye un controlador proporcional con ganancia unitaria. Calcule el margen de ganancia y fase del sistema realimentado del inciso anterior.
- Basándose en la función de transferencia obtenida en el inciso a), diseñe un controlador PI para este sistema mediante la técnica de Ziegler y Nichols de las oscilaciones sostenidas.
- ¿Qué  $MG$  y  $MF$  alcanza el sistema de control con el controlador calculado en (c)?





**Parte IV**

**CONTROL DE PROCESOS  
AVANZADO  
TRADICIONAL**



# Capítulo 15

## Estrategias de Control Avanzado Tradicional

En este capítulo particularmente se discuten las técnicas de control avanzadas tradicionales que están muy presentes en la industria, como el control feed-forward, predictor de Smith y control en cascada. También se incluyen ejemplos junto con simulaciones numéricas que buscan clarificar el tema.

### 15.1. Introducción

Cuando el control realimentado tradicional no es suficiente para alcanzar buen desempeño del mismo tanto para la eliminación de perturbaciones como para el seguimiento de consignas, se recurre a uso de técnicas de control avanzadas.

En este capítulo se considera como estrategias de control avanzadas tradicionales a las siguientes configuraciones de control:

1. Control Feedforward (FF).
2. Compensador de Tiempo Muerto o Predictor de Smith (SP).
3. Control en Cascada (CC).

También puede ser consideradas otras estrategias como el control adaptativo y el control predictivo, que no serán tratadas en este capítulo.

En principio podemos decir que las principales ventajas del control feedback (FB):

1. Ingresar una acción correctiva tan pronto como la variable de control se desvía del valor de consigna.
2. Requiere un mínimo de conocimiento acerca del proceso a ser controlado; en particular, el modelo matemático del proceso no es requerido, si bien es útil para un ajuste fino del sistema de control. Por ejemplo, si se aplica

el método Ziegler-Nichols de las oscilaciones sostenidas no se necesita conocer el modelo exacto de la planta.

3. El controlador PID por sí mismo es versátil y robusto, esto es, si las condiciones de proceso cambian, el reajuste del controlador usualmente conduce a resultados satisfactorios, y dicho ajuste se puede hacer con un mínimo conocimiento del sistema.

El controlador feedback también tiene ciertas desventajas:

1. Ninguna acción correctiva es tomada hasta después que ocurre una desviación de la variable controlada.
2. Por tanto, no provee acción predictiva para compensar los efectos de las perturbaciones conocidas o medibles.
3. El control puede no ser satisfactorio para procesos con constantes de tiempos grandes o tiempos muertos considerables.

Por estas razones es que las estrategias de control avanzadas juegan un papel importante a la hora de buscar buena performance en la variable de control tanto para el seguimiento de consignas como para la eliminación de perturbaciones. El principal inconveniente es que estas estrategias conducen a un incremento en el costo de la instrumentación, lo que se justifica cuando es necesario alcanzar una performance muy superior a aquella que se logra con control realimentado clásico.

## 15.2. Control Feedforward

La idea básica del control feedforward es medir las variables de carga importantes y tomar una acción correctiva en el mismo instante en que ellas perturban al proceso. En contraste, un controlador feedback no toma acción correctiva hasta después que se ha perturbado el proceso y se ha generado una señal de error de magnitud tal que permite su detección. En la Fig. 15.1 se muestra en forma esquemática ambas estrategias de control.

Desventajas del control feedforward:

1. Las perturbaciones en carga deben ser medibles en línea. Es de esta manera que en muchas aplicaciones no siempre es factible.
2. Para hacer efectivo el control FF debe estar disponible un modelo de proceso, al menos rudimentario. En particular, necesitamos conocer como responde la variable controlada a cambios en la variable de carga y manipulada. La calidad del control FF depende de la exactitud del modelo de proceso que se disponga.
3. Los controladores FF ideales son teóricamente capaces de alcanzar la eliminación perfecta de perturbaciones sin embargo, pueden no ser físicamente realizables. Afortunadamente, aplicaciones prácticas de estos controladores ideales a menudo proveen un control muy efectivo.

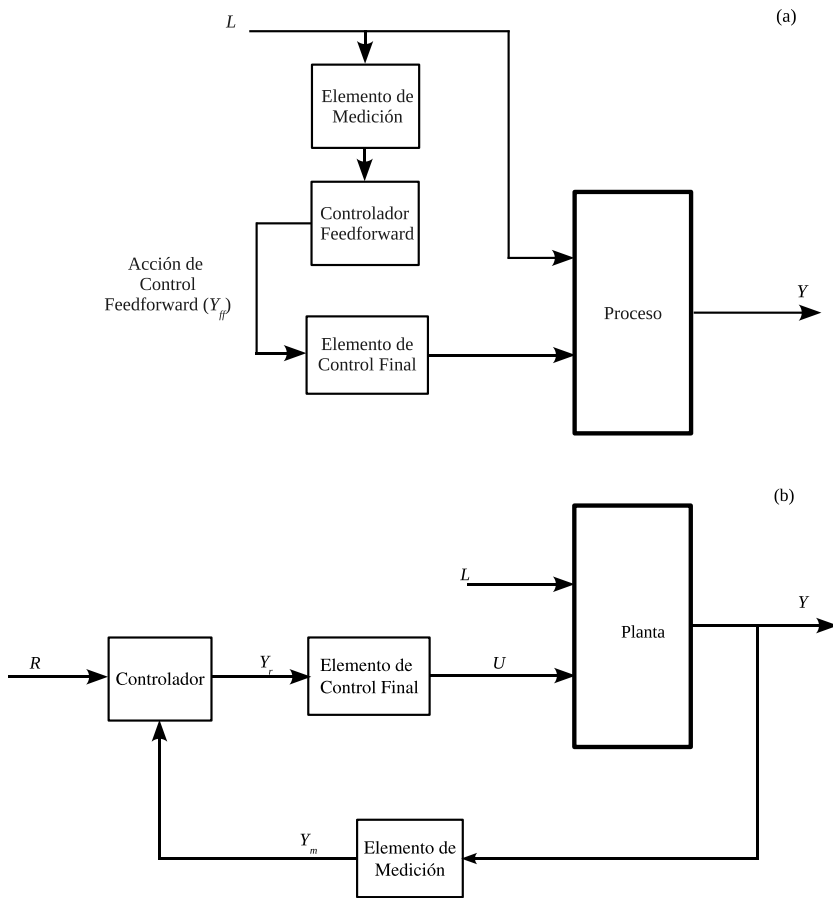


Figura 15.1: Diagramas en bloques de las estrategias de control; a) FF y b) FB. Donde se designa a  $Y$  como la variable controlada,  $L$  la carga,  $R$  la consigna y  $U$  la variable de entrada (manipulada) del proceso.

### 15.2.1. Diseño de controladores FF

Considere el diagrama de bloques de la Fig. 15.2. Se busca que la salida  $y(t)$  no sea afectada por el ingreso de una perturbación ( $l(t)$ ) considerada medible. En otras palabras, se busca la eliminación completa de la perturbación y dicha condición puede ser escrita en términos matemáticos como  $y(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$  y  $l(t) \neq 0$ . Así, esto último resulta ser la condición de diseño de un controlador FF. y en consecuencia, puede ser expresada en el dominio de Laplace como,

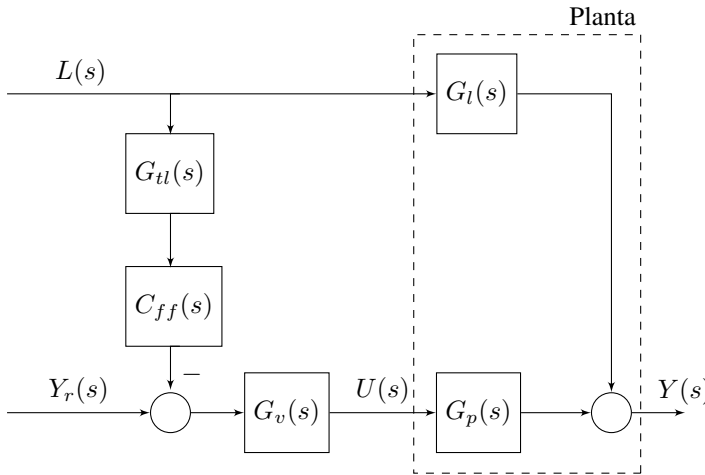


Figura 15.2: Diagrama en bloques de la estrategia de control FF.

$$\hat{Y}(s) = 0 = G_l(s)L(s) - G_{tl}(s)C_{ff}(s)G_v(s)G_p(s)L(s). \quad (15.1)$$

Despejando resulta,

$$C_{ff} = \frac{G_l}{G_{tl}G_vG_p}. \quad (15.2)$$

Note que,

1. para el caso particular en que  $G_t = G_v = 1$  el controlador FF resulta,  $C_{ff} = \frac{G_l}{G_p}$ ,
2. la condición (15.1) se cumple si la ecuación de diseño (15.2) para  $C_{ff}$  es realizable.

No siempre se logra la realizabilidad del controlador  $C_{ff}$  dado que se suele presentar los siguientes inconvenientes:

1. dado que el controlador FF resulta de un cociente de funciones de transferencia, puede resultar que el orden del numerador sea mayor al orden del denominador,

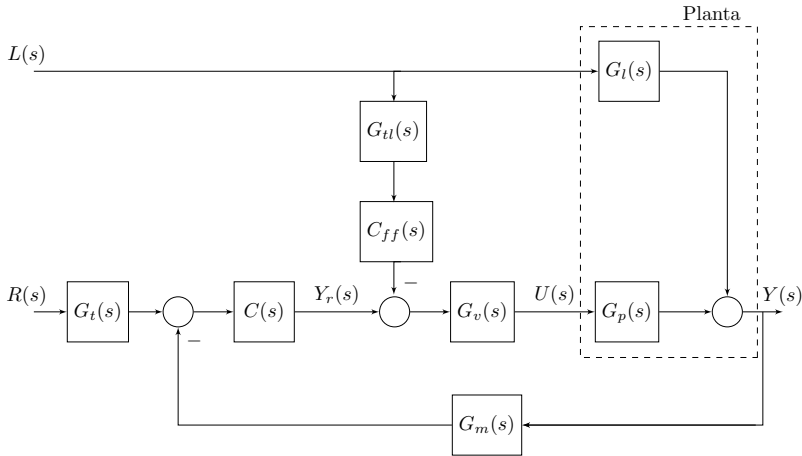


Figura 15.3: Diagrama en bloques de la estrategia de control FF-FB.

2. no siempre es posible la inversa de tiempos muertos,
3. si  $G_p(s)$  tiene ceros en el semiplano complejo derecho entonces, su inversa presentará polos inestables.

A esto debemos agregar que no siempre se conoce la función de transferencia exacta del proceso y sólo se dispone de una función de transferencia nominal que lo aproxima.

La solución a los problemas arriba planteados propuesta en la literatura clásica, consiste en diseñar el controlador FF basándose en las ganancias de cada función de transferencia conocido como controlador FF estático, esto es  $C_{ff}(s = 0)$ .

Independientemente de esto, para completar la acción correctiva del controlador FF se propone la combinación FF-FB, tal como se presenta en la Fig. 15.3. Una solución alternativa que permite incluir dinámica en al controlador FF permitiendo alcanzar una mejor performance que con el controlador FF estático es presentada por Adam y Marchetti ([5], [6], [7]). Los autores además consideraron la posibilidad de diseñar controladores FF dinámicos incorporando robustez al diseño del controlador FB, aprovechando la posibilidad de diseñar en forma desacoplada ambos controladores, una propiedad que se muestra a continuación.

Si se resuelve el diagrama de bloques de la Fig. 15.3 se llega a,

$$\frac{Y}{L} = \frac{G_l - G_{tl}C_fG_vG_p}{1 + G_pG_mG_vC}, \quad (15.3)$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{CG_vG_p}{1 + G_pG_mG_vC}G_t. \quad (15.4)$$

Notar que,

1. El controlador feedforward no forma parte del denominador de la función de transferencia de lazo cerrado, en consecuencia, no influye la estabilidad y en la dinámica del sistema realimentado. Sólo influye en la reducción de la magnitud de la perturbación de entrada.
2. El diseño del controlador feedback puede ser llevado a cabo mediante métodos clásicos, o bien alguna otra técnica avanzada.
3. La inclusión del lazo feedback no influye en el diseño del controlador feedforward.

**Ejemplo 15.1** Considere el sistema de la Fig. 15.3 donde las funciones de transferencias son;  $G_l(s) = K_l e^{-\theta_l s} / (T_l s + 1)$ ,  $G_p(s) = K_p e^{-\theta_p s} / (T_p s + 1)$ ,  $G_v = K_v$ ,  $G_{tl} = K_t$  y  $G_m = K_m$ . Diseñe el controlador feedforward para los casos en que  $\theta_l \geq \theta_p$  y  $\theta_l < \theta_p$ .

Basándose en los datos del problema, la ecuación de diseño del controlador feedforward (Ec. (15.2)) nos conduce a,

$$\begin{aligned} C_{ff}(s) &= \frac{K_l e^{-\theta_l s} / (T_l s + 1)}{K_t K_v K_p e^{-\theta_p s} / (T_p s + 1)}, \\ &= \frac{K_l}{K_t K_v K_p} \frac{(T_p s + 1)}{(T_l s + 1)} e^{-(\theta_l - \theta_p)s}. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Note lo siguiente:

1. Si  $\theta_l \geq \theta_p$  entonces el controlador feedforward es realizable.
2. Si  $\theta_l < \theta_p$  el controlador no es realizable y en consecuencia la eliminación perfecta de perturbaciones no es posible. La Ec. 15.5 puede ser aproximada a,

$$C_{ff}(s) = \frac{K_l}{K_t K_v K_p} \frac{(T_p s + 1)}{(T_l s + 1)}, \quad (15.6)$$

Otra alternativa posible para este caso, es el controlador feedforward estático, esto es  $C_{ff0} = C_{ff}(s = 0)$ , en consecuencia la anterior se reduce a,

$$C_{ff0} = \frac{K_l}{K_t K_v K_p}, \quad (15.7)$$

Note que en este ejemplo en particular, el controlador FF (15.6) tendrá un mejor efecto corrector que el (15.7) por haber incorporado características dinámicas del sistema de control.



**Ejemplo 15.2** Considere un reactor químico cuyo modelo dinámico está representado por las funciones de transferencia que se detallan a continuación.

$$T(s) = \underbrace{\frac{a_{21}b_1}{P(s)}}_{G_{21}} C_{Ae} - \underbrace{\frac{b_1(s+a_{11})}{P(s)}}_{G_{22}} T_e(s) - \underbrace{\frac{b_2(s+a_{11})}{P(s)}}_{G_{23}} T_c(s)$$

Se asume que

1. todos los elementos de medición tienen ganancia unitaria y dinámica despreciable y
2. como dato adicional, se sabe que la concentración de entrada de los reactivos es constante ( $\hat{c}_{Ae} = 0$ ).

Implemente un sistema de control feedforward para mitigar perturbaciones en la temperatura de entrada de los reactivos y simule numéricamente la respuesta dinámica del reactor.

La Fig. 15.4 muestra el esquema tecnológico bajo normas ISA/ISO del sistema de control feedforward de temperatura con el objetivo de mitigar las perturbaciones en  $T_e$ , mientras que la Fig. 15.5 muestra el diagrama de bloques correspondiente.

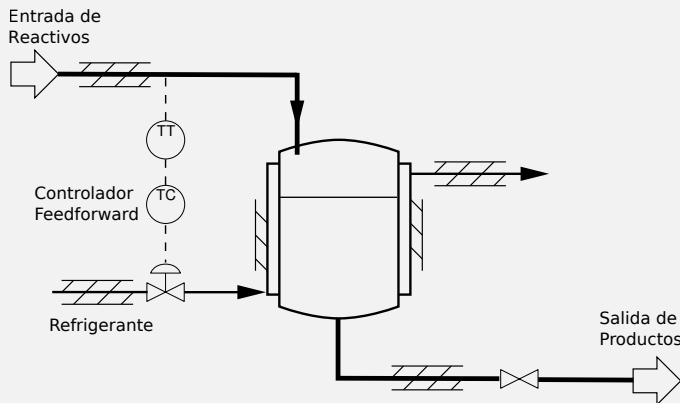


Figura 15.4: Diagrama bajo normas ISA/ISO del control feedforward de temperatura del CSTR.

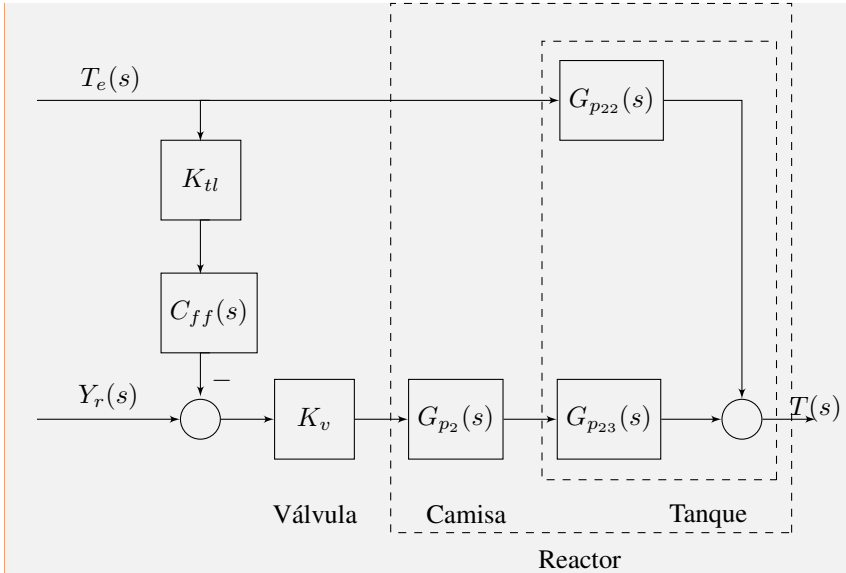


Figura 15.5: Control feedforward de la temperatura de alimentación de reactantes al CSTR.

Para este ejemplo se asume que, las funciones de transferencia del modelo del reactor son,

$$G_{p23} = \frac{3,2s + 16}{s^2 + 15s + 26}$$

$$G_{p22} = \frac{15s + 75}{s^2 + 15s + 26}$$

$$G_{p2} = \frac{-1}{9s + 30}$$

Luego, teniendo en cuenta la ecuación de diseño del controlador feedforward (Ec. (15.2)) se tiene que,

$$C_{ff} = \frac{\frac{15s+75}{s^2+15s+26}}{K_{tl}K_v \frac{(-1)}{9s+30} \frac{3,2s+16}{s^2+15s+26}}$$

donde particularmente para  $K_{tl} = 1$  y  $K_v = -1$  resulta,

$$C_{ff} = \frac{(15s + 75)(9s + 30)}{(3,2s + 16)}$$

resultando un controlador no realizable. Por tal motivo se adopta un controlador estático  $C_{ff0} = 140,62$ .

A continuación se muestra el código de Octave para la simulación dinámica que se presenta en la Fig. 15.6.

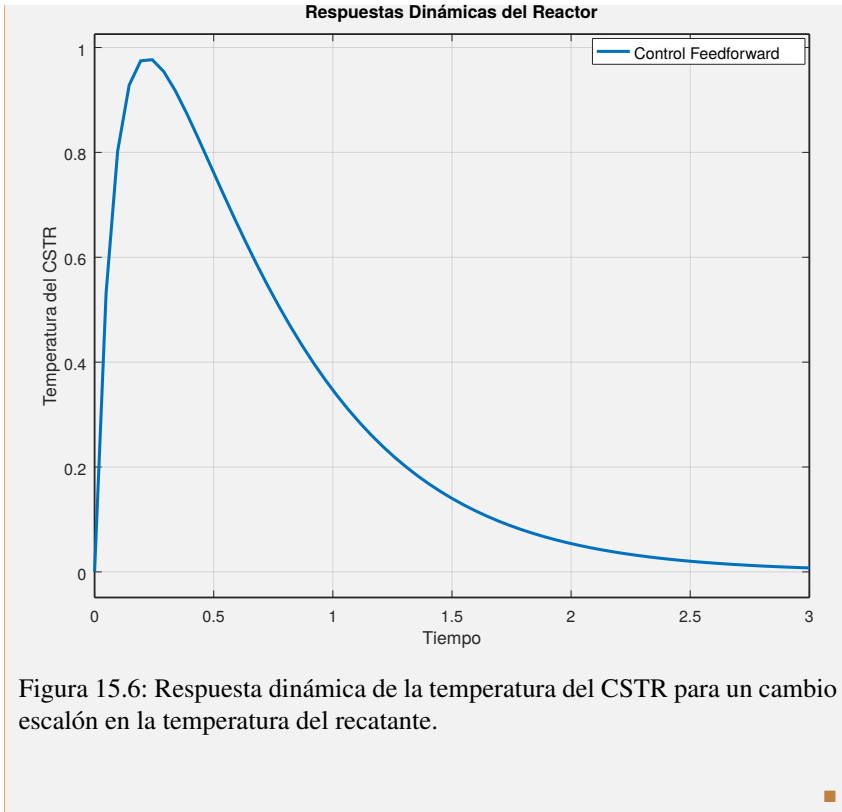
#### Algoritmo 15.1: Código de Octave del Ejem. 15.2.

```

1  clear all , clc
2  pkg load control
3
4  % Funciones de transferencia del reactor
5  s=tf('s');
6  Gp22=(15*s+75)/(s^2+15*s+26); % Func. de Transf. de la
   pertubacion
7  Gp23=(3.2*s+16)/(s^2+15*s+26); % Func. de Transf. del tanque
8  Gp2=-1/(9*s+30); % Func. de Transf. de la camisa
9  Gp=Gp23*Gp2;
10
11 % Controlador FF estatico
12 Cff0=75*30/16;
13
14 % Elemento de medicion y valvula de control
15 Ktl=1; Kv=-1;
16
17 % Funcion de transferencia de la temperatura del CSTR
18 % ante un cambio en la temperatura de entrada (carga)
19 Gol=minreal(Gp22-Ktl*Cff0*Kv*Gp);
20
21 % Respuesta dinamica al escalon en la temperatura del CSTR
22 step(Gol)
23 xlabel('Tiempo'), ylabel('Temperatura del CSTR')
24 title('Respuestas Dinámicas del Reactor')
25 legend('Control Feedforward')

```

La Fig. 15.6 muestra la respuesta dinámica del sistema de control feedforward frente a un cambio escalón en la temperatura de entrada del reactante, de acuerdo con el código de Octave de este ejemplo. Puede observarse como el sistema de control elimina completamente la perturbación pasado el transitorio.



**Ejemplo 15.3** Implemente un control realimentado que incluya el control feedforward del Ejem. 15.2.

Por simplicidad se adopta un control PI cuya función de transferencia resulta,

$$C(s) = 1 + \frac{1}{s}$$

Teniendo en cuenta las Ecs. (15.3) y (15.4) se implementa el siguiente código de Octave:

**Algoritmo 15.2:** Código de Octave del Ejem. 15.3.

```
1 clear all , clc
2 pkg load control
```

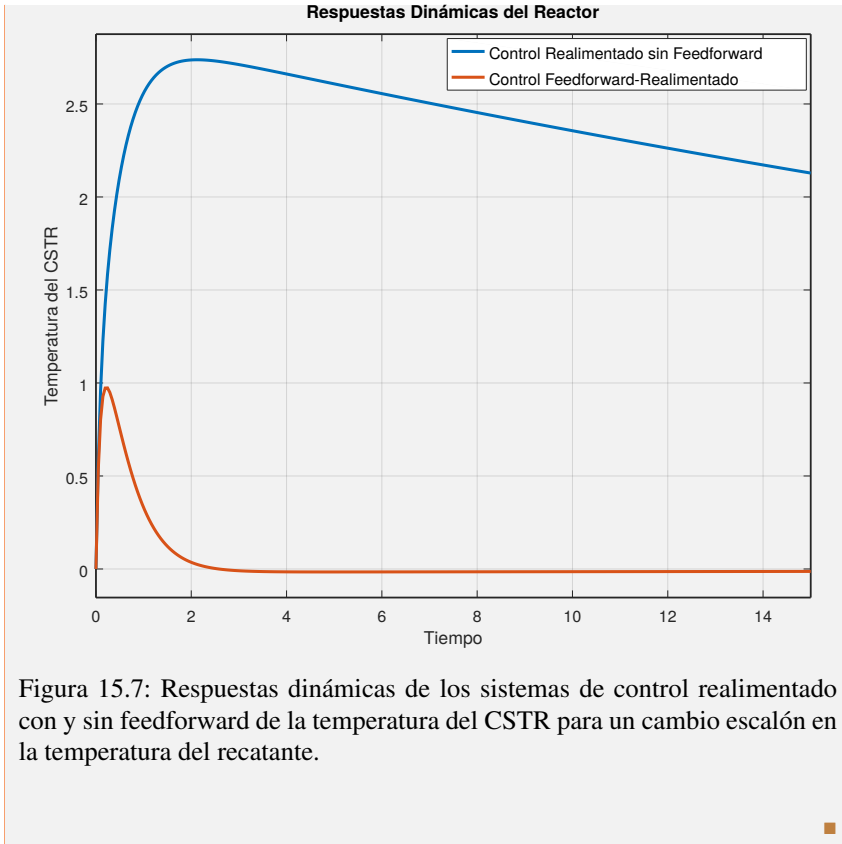
```

3
4 % Funciones de transferencia del reactor
5 s=tf('s');
6 Gp22=(15*s+75)/(s^2+15*s+26); %Func. de Transf. de la
   perturbacion
7 Gp23=(3.2*s+16)/(s^2+15*s+26); %Func. de Transf. del tanque
8 Gp2=-1/(9*s+30); %Func. de Transf. de la camisa
9 Gp=Gp23*Gp2;
10
11 % Controlador FF
12 Cff0=75*30/16;
13
14 % Controlador FB
15 C=1+1/s;
16
17 % Elemento de medicion y valvula de control
18 Ktl=1; Kv=-1; Km=1;
19
20 % Funcion de transferencia del sistema de control feedback
   sin feedforward
21 Gcl=minreal(Gp22/(1+Km*C*Kv*Gp));
22 % Funcion de transferencia del sistema realimentado para el
   control de la temperatura del CSTR ante un cambio en la
   temperatura de entrada (carga)
23 Gcl_ff=minreal((Gp22-Ktl*Cff0*Kv*Gp)/(1+Km*C*Kv*Gp));
24
25 % Respuesta dinamica al escalon en la temperatura del CSTR
26 Tsim=15; % tiempo de simulacion
27 step(Gcl,Gcl_ff,Tsim)
28 xlabel('Tiempo'), ylabel('Temperatura del CSTR')
29 title('Respuestas Dinámicas del Reactor')
30 legend('Control Realimentado sin Feedforward','Control
   Feedforward-Realimentado')

```

La Fig. 15.7 compara las respuestas dinámicas del sistema de control realimentado con y sin control feedforward frente a un cambio escalón en la temperatura de entrada del reactante, de acuerdo con el código de Octave de este ejemplo.

Puede observarse que el control combinado feedforward-feedback mitiga rápidamente la perturbación de entrada mientras que el control realimentado tradicional necesita demasiado tiempo para poder eliminar dicha perturbación.



### 15.3. Compensador de Tiempo Muerto

El tiempo muerto entre las variables de entrada y de salida de un proceso industrial constituye un serio problema al momento de ajustar los parámetros de un controlador. En la ingeniería química, la gran mayoría de los procesos químicos presentan retardo y en muchos casos su magnitud tiende a ser muy importante, mayor aún que las constantes de tiempo del sistema.

La presencia de tiempo muerto en el lazo de control tiene dos serias consecuencias: (i) complica el análisis y el diseño de los controladores feedback y (ii) hace mucho más difícil alcanzar una performance satisfactoria en las variables de control. Estos problemas motivan el uso de técnicas de compensación de tiempo muerto y uno de los primeros trabajos (sino el primero) que intenta resolver el problema arriba planteado surge con la publicación de Smith ([81]), cuando presentó el compensador de tiempo muerto también conocido popularmente como predictor de Smith (SP). El autor presentó un esquema de control para un sistema simple entrada simple salida (SISO) que introduce una mejora

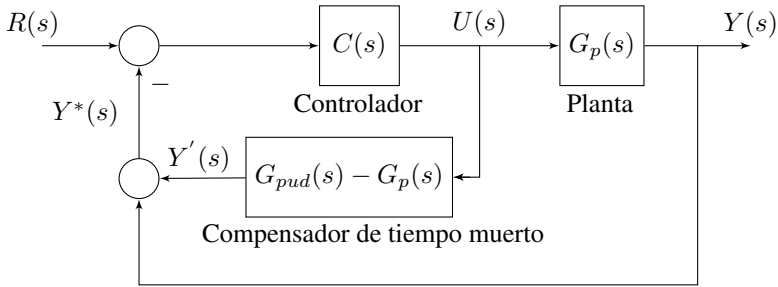


Figura 15.8: Lazo de control por realimentación que incluye al predictor de Smith para plantas con retardo. El compensador de tiempo muerto o predictor de Smith es denotado como SP.

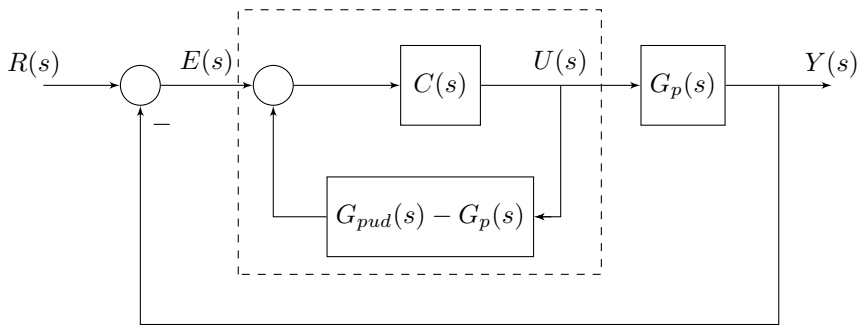


Figura 15.9: Reordenamiento del lazo de realimentación con el SP de la Fig. 15.8.

en el lazo de control con retardo.

Considere una planta estable  $G_p(s)$  de la forma

$$G_p(s) = G_{pud}(s)e^{-\theta s}, \tag{15.8}$$

donde la función de transferencia racional  $G_{pud}(s)$  representa la parte sin retardo de la planta y  $\theta$  representa el tiempo muerto de la misma.

La Fig. 15.8 muestra la configuración clásica del predictor de Smith y dicho diagrama de bloques puede ser reordenado como se muestra en la Fig. 15.9.

Resolviendo el lazo interno la función de transferencia que relaciona  $U(s)$  con  $E(s)$  resulta,

$$U(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)[G_{ud}(s) - G_p(s)]} E(s). \tag{15.9}$$

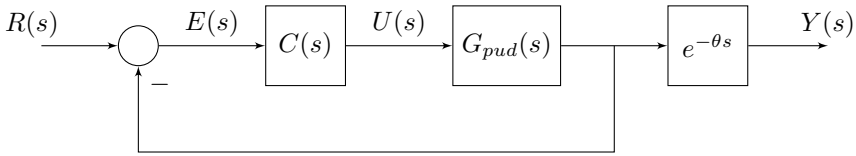


Figura 15.10: Efecto del predictor de Smith en el lazo de control.

La función de transferencia del sistema en lazo cerrado resulta,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_{LC}(s) = \frac{G_{ud}(s)C(s)}{1 + G_{ud}(s)C(s)} e^{-\theta s}. \quad (15.10)$$

La Ec. (15.10) puede ser interpretada mediante el álgebra de bloques como se muestra en la Fig. 15.10.

Basándose en el análisis anterior las siguientes conclusiones pueden ser obtenidas:

1. El diagrama de la Fig. 15.10 es sólo una representación esquemática de la interpretación del resultado obtenido cuando el SP es incluido en un lazo de control por realimentación. Pero se debe notar que la señal  $Y^*(s)$  no es una señal medible.
2. La compensación de tiempo muerto es efectiva si la planta es igual al modelo. De lo contrario, los errores de modelado van en detrimento del efecto de compensación y en consecuencia de la performance del lazo de control.
3. También se desprende de la Fig. 15.10 que, cuando la planta es igual al modelo, la inclusión del SP al lazo de realimentación tradicional, permite diseñar un controlador feedback como si el sistema en lazo cerrado no tuviese retardo. Esto se traduce en un mayor rango de estabilidad para el sistema de control.

## 15.4. Control en Cascada

La idea básica del control en cascada es introducir una doble acción correctiva mediante dos lazos de control por realimentación. Uno para que actúe corrigiendo rápidamente al momento del ingreso de una perturbación antes que esta sea observada en la variable de control y el otro para que actúe basándose en el cambio observado. En la Fig. 15.11 se presenta en forma esquemática mediante diagrama de bloques un lazo de control en cascada. En dicha figura se indica con línea de trazo el un lazo de control que usualmente es designado como lazo esclavo, secundario o simplemente interno; mientras que, el lazo de control marcado con línea continua es designado como lazo maestro, primario o simplemente externo.



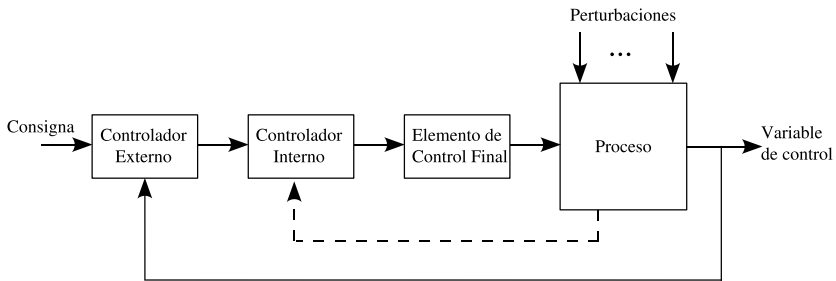


Figura 15.11: Representación en bloques del lazo de control en cascada.

El control en cascada es ampliamente usado en la industria y tiene dos aspectos bien marcados; i) están presentes dos lazos de control anidados, con el lazo de control secundario localizado en el interior del lazo de control primario o externo y ii) la señal de salida del controlador externo sirve como consigna del controlador interno.

Por lo general se considera la utilización del control en cascada cuando,

1. el proceso reacciona muy lentamente a cambios en la variable manipulada;
2. existen uno o más factores graves de perturbación;
3. se requiere que el proceso permanezca muy cerca de la consigna y que la siga rápidamente.

Las ventajas que ofrece el control en cascada se pueden enumerar como sigue.

1. Ofrece una rápida acción correctiva para aquellas perturbaciones que ingresan en el lazo de control interno.
2. Como consecuencia de lo anterior, la performance obtenida en estos casos suele ser muy superior en comparación con el feedback clásico. Si el lazo de control en cascada está bien implementado se obtienen importantes reducciones en los sobrevalores, en la integral del error y en el offset.
3. En el lazo interno se puede incluir alarmas para valores límites o extremos, que avisen cuando la variable controlada está en camino de su valor límite, así como para puestas en marcha y paradas.

Las desventajas de este tipo de esquema de control son las siguientes:

1. Para poder ser implementado es necesario la existencia de una variable intermedia medible. Esto es, se debe poder medir el ingreso de una perturbación mediante el registro de una variable intermedia de proceso y este cambio se debe manifestar antes que en la variable de control.
2. Los costos de instrumentación son mayores en comparación con el lazo de realimentación simple. Esto es debido a; i) el controlador esclavo actúa con consigna remota y en consecuencia al no ser un controlador clásico, este suele ser más costoso, ii) se debe incluir más transductores que en

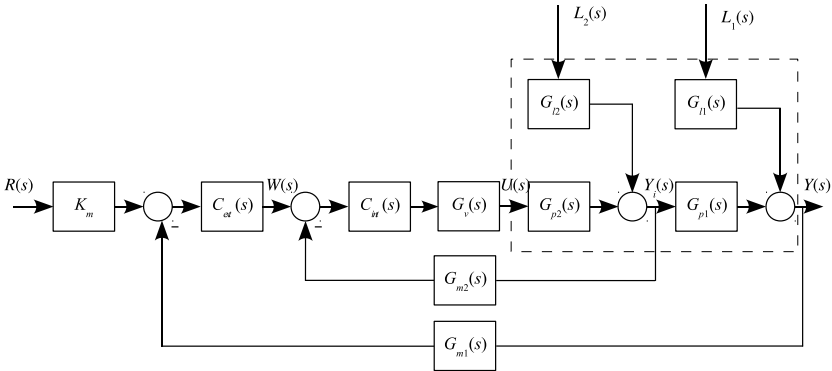


Figura 15.12: Representación en bloques del lazo de control en cascada.

el lazo de realimentación simple y, iii) se incluyen alarmas para algunas variables de proceso críticas. Esto último si bien tiene sus ventajas, incrementa el costo de la instrumentación.

En la Fig. 15.12 se muestra un diagrama de bloques más detallado de un lazo en cascada.

De acuerdo con la Fig. 15.12 se observa que,

1. para la implementación del lazo de control en cascada se hace necesario la existencia de una variable intermedia capaz de ser medida;
2. las perturbaciones que ingresan por  $L_2(s)$  serán corregidas tanto por el lazo interno como el externo;
3. las perturbaciones que ingresan por  $L_1(s)$  serán corregidas inicialmente por el lazo externo y afectarán rápidamente la variable controlada.

En base a esta última figura, la función de transferencia que relaciona la variable manipulada  $\hat{Y}_i$  con las entradas  $\hat{W}$  y  $\hat{L}_2$  resulta,

$$\hat{Y}_i = \frac{C_{int}G_vG_{p2}}{1 + G_{m2}C_{int}G_vG_{p2}}\hat{W} + \frac{G_{l2}}{1 + G_{m2}C_{int}G_vG_{p2}}\hat{L}_2 \quad (15.11)$$

o bien,

$$\hat{Y}_i = G_{int1}^*\hat{W} + G_{int2}^*\hat{L}_2, \quad (15.12)$$

donde en la ecuación anterior se designa como  $G_1^* = C_{int}G_vG_{p2}/(1 + G_{m2}C_{int}G_vG_{p2})$  y  $G_{int2}^* = G_{l2}/(1 + G_{m2}C_{int}G_vG_{p2})$ . Luego, el diagrama de bloques de la Fig. 15.12 puede ser reescrito basándose en las últimas relaciones como se indica en la Fig. 15.13.

Así, la función de transferencia entre la salida controlada  $\hat{Y}$  y las entradas  $\hat{R}$ ,  $\hat{L}_1$  y  $\hat{L}_2$  resulta,

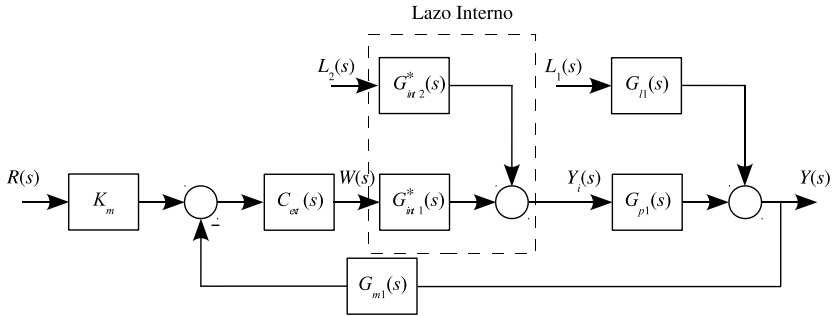


Figura 15.13: Representación en bloques de un lazo en cascada basándose en la Ec. 15.12.

$$\hat{Y} = \frac{C_{ext}G_{int1}^*G_{p1}K_m}{1 + G_{m1}C_{ext}G_{int1}^*G_{p1}}\hat{R} + \frac{G_{l1}}{1 + G_{m1}C_{ext}G_{int1}^*G_{p1}}\hat{L}_1 + \frac{G_{int2}^*G_{p1}}{1 + G_{m1}C_{ext}G_{int1}^*G_{p1}}\hat{L}_2. \quad (15.13)$$

Reordenando se arriba a,

$$\hat{Y} = \frac{C_{ext}C_{int}G_vG_{p2}G_{p1}K_m}{1 + G_{m2}C_{int}G_vG_{p2} + G_{m1}C_{ext}C_{int}G_vG_{p1}G_{p2}}\hat{R} + \frac{G_{l1}(1 + G_{m2}C_{int}G_vG_{p2})}{1 + G_{m2}C_{int}G_vG_{p2} + G_{m1}C_{ext}C_{int}G_vG_{p1}G_{p2}}\hat{L}_1 + \frac{G_{l2}G_{p1}}{1 + G_{m2}C_{int}G_vG_{p2} + G_{m1}C_{ext}C_{int}G_vG_{p1}G_{p2}}\hat{L}_2. \quad (15.14)$$

### 15.4.1. Consideraciones para el diseño del lazo de control en cascada

Dos cosas deben ser tenidas en cuenta al momento de diseñar el lazo de control en cascada a fin de aproximarse a un óptimo funcionamiento del mismo, esta son; i) una adecuada selección de la variable intermedia medible y ii) el correcto diseño de dos controladores.

#### Selección de la variable intermedia medible

La selección de la variable intermedia medible es clave para el buen funcionamiento del lazo de control en cascada. Por lo general y en base a la experiencia de ciertos autores se busca que,

1. la mayor cantidad de perturbaciones ingresen al lazo interno;

2. también la peor de las perturbaciones ingrese al lazo interno;
3. exista una relación lineal entre las variables medidas por el lazo interno y externo, con el objeto de garantizar correcciones de magnitudes similares en iguales zonas de trabajo;
4. el lazo interno sea más rápido que el principal, para lo cual se considera como criterio práctico (al momento de seleccionar la variable intermedia), que la relación entre las constantes tiempo del lazo externo e interno deba ser,  $5 \leq \frac{\sum T_{i, ext}}{\sum T_{i, int}} \leq 10$  y nunca menor que 3. Donde,  $\sum T_{i, ext}$  representa la sumatoria de las constantes de tiempo de lazo abierto del proceso involucradas en el lazo externo y,  $\sum T_{i, int}$  representa la sumatoria de las constantes de tiempo de lazo abierto del proceso involucradas en el lazo interno.

### Diseño de los controladores en cascada

Para el diseño los dos lazos de control se debe considerar dos ecuaciones características para ambos lazos, esto es,

1. para el lazo interno  $D_{int} = 1 + G_{m2}C_{int}G_vG_{p2}$  mientras que,
2. para el lazo externo  $D_{ext} = 1 + G_{m2}C_{int}G_vG_{p2} + G_{m1}C_{ext}C_{int}G_vG_{p1}G_{p2}$ , las que pueden ser resultas por separado.

También basándose en las Figs. 15.12 y 15.13 se puede definir como,

$$GH_{int} := G_{m2}C_{int}G_vG_{p2} \quad (15.15)$$

y

$$GH_{ext} := G_{m1}C_{ext}G_{int}^*G_{p1} \quad (15.16)$$

las que resultan de las productorias de las funciones de transferencia que intervienen en los lazos de realimentación internos y externos respectivamente. Luego, el ajuste de los controladores internos y externos se pueden hacer basándose en las ecuaciones características para cada lazo y en las productorias  $GH_{int}$  y  $GH_{ext}$  siguiendo, por ejemplo, criterios clásicos de sintonía y recomendaciones heurísticas para cada lazo. Algunas de las siguientes recomendaciones surgen de la experiencia y se encuentran en la literatura clásica:

1. El lazo interno se lo diseña ajustándolo *muy estrechamente* (es decir, con un valor de ganancia tan alto como sea posible) para dar una respuesta rápida en dicho lazo.
2. Luego, el lazo externo es ajustado con el lazo interno en operación o automático mediante algún método clásico de ajuste, (Ziegler y Nichols ([88]), Cohen y Coon ([25]), entre otros).
3. Usualmente se escoge para el lazo interno un controlador proporcional y para el lazo externo un controlador proporcional integral.

### Remarcas finales

La experiencia de algunos autores indica que si se cumple las consideraciones anteriores, tanto para la selección de la variable intermedia como para el diseño de los controladores, se puede alcanzar una notable mejora respecto al lazo de realimentación convencional, como ser:

1. para perturbaciones que ingresan en el lazo interno se observa que, a) los sobrevalores se reducen hasta una décima parte y b) la integral del error se reduce hasta 100 veces;
2. para perturbaciones que ingresan en el lazo externo se observa que, a) los sobrevalores se reducen hasta la mitad y b) la integral del error se reduce hasta 6 veces;
3. la variable de control alcanza más rápidamente el valor de consigna;
4. para cuando se utiliza controladores proporcionales tanto en el lazo interno como en el externo se obtiene una mejora de hasta 100 veces en el valor del offset.

**Ejemplo 15.4** Se pretende implementar un control en cascada para el reactor químico del Ejem. 15.2. El principal objetivo consiste en mejorar el desempeño del sistema de control realimentado tanto para el seguimiento de consigna como para el rechazo de perturbaciones.

Por simplicidad se adopta,

$$C_{int} = 75$$

$$C_{ext} = 1 + \frac{1}{s}$$

y se asume que todos los elementos de medición tienen ganancia unitaria y dinámica despreciable.

La Fig. 15.14 muestra un esquema tecnológico del sistema de control en cascada del control de temperatura del reactor. Mientras que en la Fig. 15.15 se muestra el diagrama de bloques del sistema de control en cascada implementado, donde se asume además que no hay cambios en la concentración de entrada al reactor.

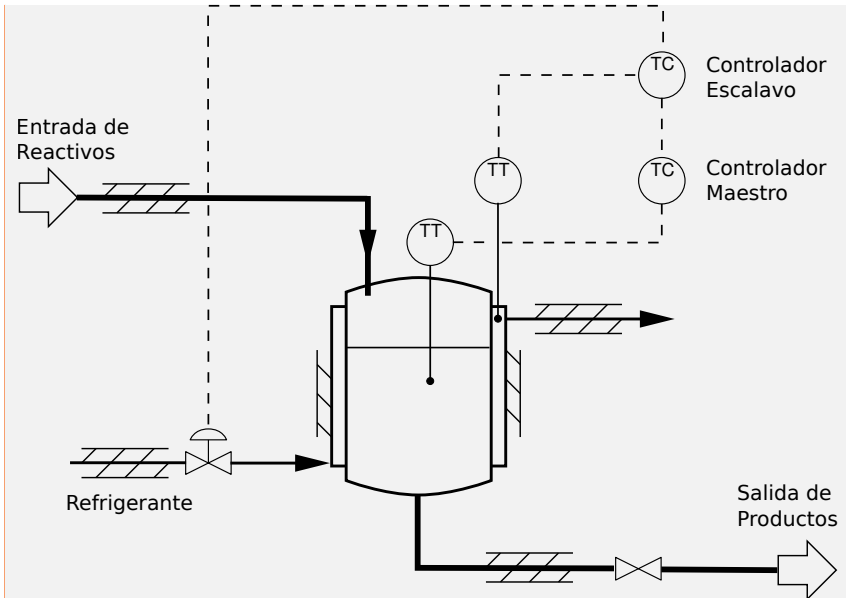


Figura 15.14: Representación en bloques del lazo de control en cascada de la temperatura del reactor.

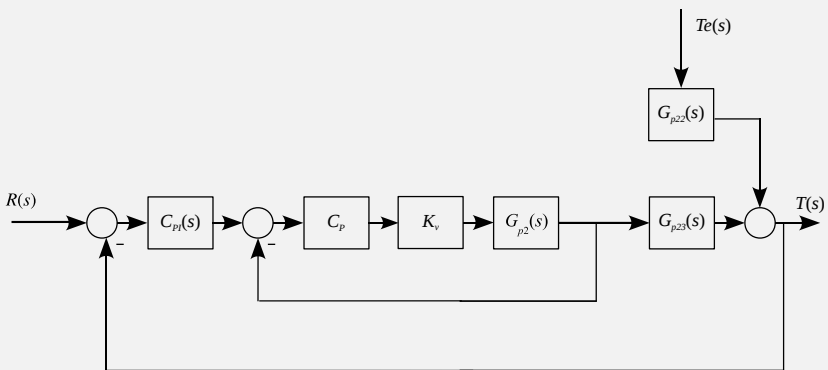


Figura 15.15: Representación en bloques del lazo de control en cascada de la temperatura del reactor.

A continuación se muestra el código de Octave implementado para este ejemplo.

## Algoritmo 15.3: Código de Octave del Ejem. 15.4.

```

1  clear all , clc
2  pkg load control
3
4  % Funciones de transferencia del reactor
5  s=tf('s');
6  Gp22=(15*s+75)/(s^2+15*s+26); % Func. de Transf. de la
   pertubacion
7  Gp23=(3.2*s+16)/(s^2+15*s+26); % Func. de Transf. del tanque
8  Gp2=-1/(9*s+30); % Func. de Transf. de la camisa
9  Gp=Gp23*Gp2;
10
11 % Controladores
12 Cfb=1+1/s;
13 Cint=75;
14 Cext=Cfb;
15
16 % Elemento de medicion y valvula de control
17 Kv=-1; Km=1;
18
19 % Funciones de transferencias del sistema de control feedback
   sin feedforward
20 Gcl_consig=minreal(Km*Cfb*Kv*Gp/(1+Km*Cfb*Kv*Gp));
21 Gcl_carga=minreal(Gp22/(1+Km*Cfb*Kv*Gp));
22 % Funciones de transferencias del sistema en cascada para el
   control de la temperatura del CSTR
23 Glazointerno=feedback(Gp2*Kv*Cint,1);
24 Gcl_consig_casc=minreal(Glazointerno*Gp23*Cext*Km/(1+
   Glazointerno*Gp23*Cext*Km));
25 Gcl_carga_casc=minreal(Gp22*1/(1+Glazointerno*Gp23*Cext*Km));
26
27 % Respuestas dinamicas al escalon en la temperatura del CSTR
28 time=0:0.1:35; R=ones(1,length(time)); L=[zeros(1,151), ones
   (1,length(time)-151)];
29 [yr_fb , t]=lsim(Gcl_consig ,R, time);
30 [yr_cc , t]=lsim(Gcl_consig_casc ,R, time);
31 [yl_fb , t]=lsim(Gcl_carga ,L, time);
32 [yl_cc , t]=lsim(Gcl_carga_casc ,L, time);
33 yfb=yr_fb+yl_fb;
34 ycc=yr_cc+yl_cc;
35
36 % Graficos de respuestas dinamicas
37 plot(t ,yfb ,t ,ycc) , grid
38 xlabel('Tiempo') , ylabel('Temperatura del CSTR')
39 title('Respuestas Dinámicas del Reactor')
40 legend('Control Realimentado','Control en Cascada')

```

La Fig. 15.16 compara mediante simulaciones numéricas el desempeño del sistema de control en cascada del reactor químico con el que se obtiene con el control realimentado tradicional. Para este último, se implanta un controlador feedback PI con la misma función de transferencia que el controlador externo. Puede observarse en dicha figura, que en el instante  $t = 1$  se produce

una entrada escalón en consigna, logrando una notoria mejora en el desempeño con el control en cascada en comparación con el control realimentado tradicional de temperatura. El mismo resultado se observa cuando se elimina la perturbación en la temperatura de entrada del reactante, que ingresa en el instante  $t = 15$ .

Observe que se puede adoptar una alta ganancia para el lazo interno ya que no se altera la estabilidad de dicho lazo, para este caso en particular, logrando así cambiar sensiblemente el comportamiento dinámico de lazo en cascada en comparación con el lazo realimentado tradicional.

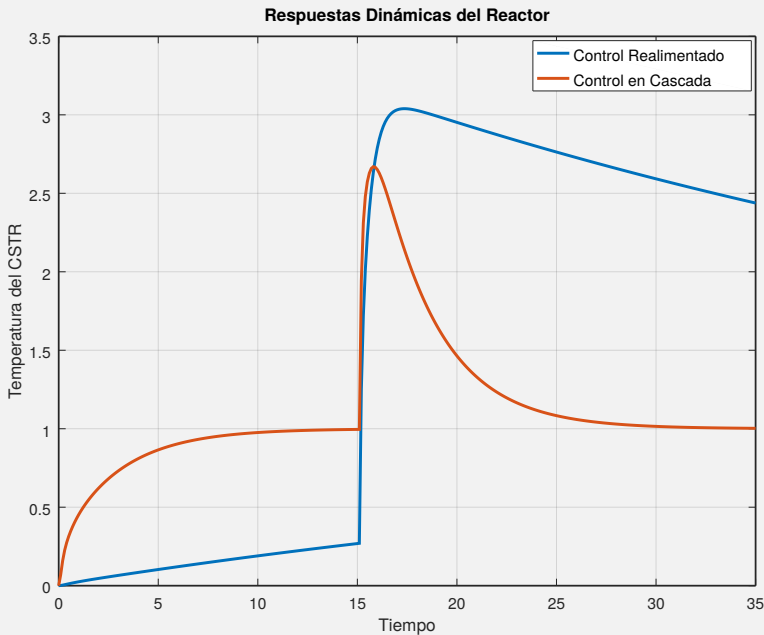


Figura 15.16: Respuestas dinámicas comparativas entre el control en cascada y el control realimentado de temperatura del reactor.

## 15.5. Conclusiones

En este capítulo se presentaron las estrategias de control avanzadas más típicas de la industria de procesos incluyendo algunos ejemplos atractivos que tratan de ayudar al lector en la comprensión del tema.

En cuanto al control feedforward, como se marcó antes, resulta muy utilizado en procesos donde las perturbaciones son críticas como es el caso de los



generadores de vapor en las plantas industriales, en el control de columnas de destilación y reactores químicos.

Por su parte, el predictor de Smith también ha sido ampliamente usado en la industria y estudiado por décadas en los medios académicos. Su importancia en la industria química es relevante, ya que los procesos de grandes dimensiones tienen tiempos muertos que en algunos casos superan en importancia a las constante de tiempo del proceso.

Por último, el control en cascada también tiene mucho uso en la industria de procesos por brindar la posibilidad de controlar con buena performance procesos que están sometidos a muchas perturbaciones externas, y muchas de ellas no medibles. De ahí que el control en cascada está presente en procesos como grandes generadores de vapor, columnas de destilación y reactores.

## 15.6. Pensemos

1. ¿La ecuación de diseño de un controlador feedforward es  $C_{ff} = \frac{G_p}{G_T G_v G_L}$ ?  SI  NO
2. La adición de un esquema de un control feedback a un sistema de control feedforward mejora el desempeño debido a:
  - una corrección anticipada al ingreso de perturbaciones.
  - una corrección producto de la desviación de la variable controlada.
  - se corrigen las debilidades del control feedforward.
  - ninguna de las anteriores.
3. ¿El predictor de Smith elimina el tiempo muerto del sistema de control?
  - V  F
4. En un sistema de control en cascada se pretende:
  - una rápida acción correctiva para aquellas perturbaciones de entrada que ingresan por el lazo interno.
  - mejorar la dinámica de la variable de control cuando el sistema es muy lento,
  - eliminar la mayor cantidad de perturbaciones de entrada mediante la implementación del lazo externo.
  - Ninguna de las anteriores.
5. Los sistemas de control en cascada poseen:
  - Un controlador esclavo y uno maestro que reciben consignas fijas.
  - Un controlador esclavo y uno maestro que recibe una única consigna fija.
  - Un controlador esclavo que envía señal a la variable manipulada por la consigna fija que recibe.
  - Un controlador maestro que envía señal a la variable manipulada por la consigna fija que recibe.
  - Ninguna de las anteriores es correcta.

6. La idea básica del control en cascada es introducir una doble acción correctiva mediante dos lazos de control. Uno para que actúe corrigiendo rápidamente al momento del ingreso de una o más perturbaciones y el otro para que actúe basándose en el cambio observado en la variable de salida controlada.  V  F

## 15.7. Problemas

**Problema 15.1** Considere el sistema a lazo abierto de la Fig. 15.17.

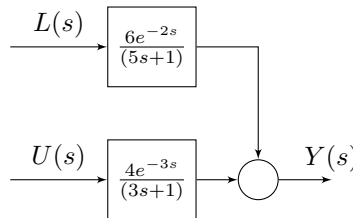


Figura 15.17

Asuma que  $G_m = G_t = G_{tl} = G_v = 1$ .

- Diseñe un controlador feedforward con el objeto de actuar anticipadamente al ingreso de perturbaciones. ¿Se logra la eliminación total de la perturbación  $l(t)$ ? Justifique.
- Sintonice un controlador PI para un lazo de realimentación basándose en el método de Ziegler y Nichols de las oscilaciones sostenidas.
- Con la inclusión del controlador PI, ¿se logra así el objetivo de eliminar totalmente el ingreso de la perturbación  $l(t)$ ? Justifique.
- Simule numéricamente el lazo de control por realimentación tradicional y el lazo combinado feedforward-feedback.

**Problema 15.2** Considere el sistema de control feedforward-feedback de la Fig. 15.3.

- Obtenga la función de transferencia entre la variable controlada  $Y(s)$  y las entradas  $R(s)$  y  $L(s)$ .
- Siendo,  $K_m = G_m(s) = G_t(s) = G_v(s) = 1$ ,  $G_l(s) = 2e^{-0,5s}/(3s+1)$  y  $G_p(s) = 2,5e^{-s}/(4s+1)$ . Diseñe un controlador feedforward para este sistema.
- Luego, diseñe el controlador feedback para este caso, con el objeto de lograr offset nulo. ¿Cómo influye el controlador feedforward en el diseño del controlador  $C(s)$ ?

**Problema 15.3** Considere el sistema de control feedforward de composición de tope de una columna de destilación de la Fig. 15.18.

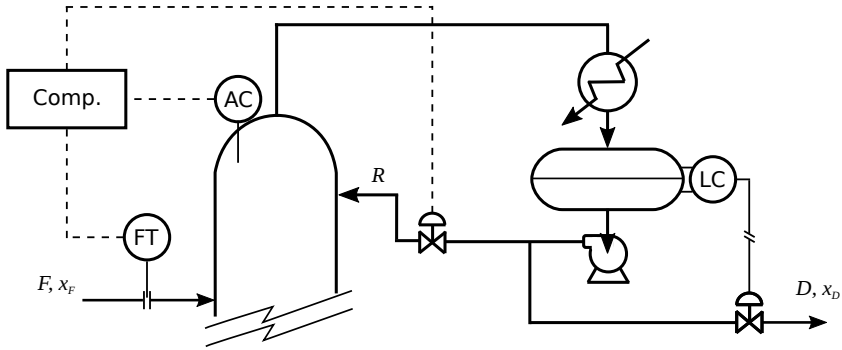


Figura 15.18

Las funciones de transferencia involucradas son,

$$\frac{x_D}{R} = \frac{4 e^{-10s}}{(45s + 1)} \quad \frac{x_D}{F} = \frac{1 e^{-15s}}{(30s + 1)}$$

Asuma que  $G_m = G_t = G_v = 1$ .

- Arme el DB del sistema de control FF-FB.
- Diseñe el controlador feedforward estático.
- Diseñe el controlador feedforward dinámico.
- Diseñe un controlador PI utilizando las fórmulas propuestas por Rovira para seguimiento de consigna para un criterio de mínimo ITAE.
- Considere dos sistemas de control FF-FB que utilizan el controlador feedback del inciso (d) y, uno de ellos con el controlador feedforward de inciso (b) y el otro con el del inciso (c) ¿Cual de ellos espera Ud. que alcance un mejor desempeño dinámico? Justifique.
- Simule numéricamente ambos sistemas de control y obtenga conclusiones.

**Problema 15.4** Un sistema con función de transferencia es  $G_p(s) = e^{-2s}/(10s + 1)$  se controla con un controlador PI, un transductor y una válvula de dinámica despreciable y ganancia unitaria. Asuma que  $0 < K_r \leq 50$  y  $0,1 \leq T_I \leq 50$ .

- Considere un controlador de cancelación y adopte los valores de  $K_r$  y  $T_I$  que permiten alcanzar un margen de ganancia igual 2, para el sistema realimentado tradicional.
- Si se agrega un compensador de Smith al sistema realimentado descrito antes y se asume que la planta real y el modelo son iguales, ¿qué valores de  $K_r$  y  $T_I$  les parece más adecuado? Justifique su respuesta.
- Obtenga las raíces de la ecuación característica del sistema realimentado con predictor de Smith, cuando se usa el controlador PI calculado en (a) y (b). Asuma para este inciso que puede utilizar una aproximación de Padé de primer orden.

- (d) Compare mediante simulaciones numéricas, las respuestas al escalón en consigna los sistemas de control de los incisos (a) y (b). Obtenga conclusiones.

**Problema 15.5** Considere un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = 2e^{-0,4s} / (s + 1)(2s + 1)$ . Asuma además que,  $G_m = G_v = 1$ .

- (a) Diseñe un controlador proporcional asumiendo margen de ganancia igual a 2.
- (b) Un ingeniero propone utilizar el mismo controlador, con la misma acción proporcional, pero incluyendo con un predictor de Smith. ¿A qué es igual la función de transferencia de dicho predictor?
- (c) Justifique teóricamente que mejoras espera alcanzar en este último caso con respecto al sistema de control del inciso (a).
- (d) Compute las raíces de lazo cerrado de los sistemas de control con y sin predictor de Smith, si el controlador proporcional tiene el mismo valor de  $K_r$  que en el inciso (a). Asuma para este inciso que puede utilizar una aproximación de Padé de primer orden.
- (e) Compare las respuesta dinámicas de ambos sistemas de control para cambio escalón en consigna. Obtenga conclusiones.

**Problema 15.6**

Considere el sistema de control en cascada de la Fig. 15.19.

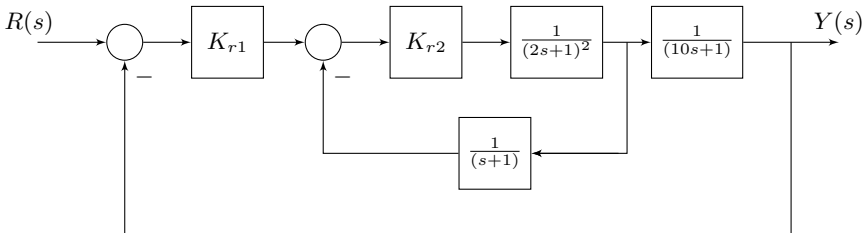


Figura 15.19

- (a) Determine los signos de  $K_{r1}$  y  $K_{r2}$  con el objeto de lograr una realimentación negativa.
- (b) Determine el valor de  $K_{r2}$  para que el lazo interno alcance un  $MG = 2$ .
- (c) ¿Qué valor de coeficiente de amortiguamiento se alcanza en el lazo cerrado interno con el  $K_{r2}$  adoptado en el inciso b)?
- (d) Adopte un valor  $K_{r1}$  mediante algún criterio que le parezca conveniente.
- (e) ¿Qué márgenes de ganancia y de fase alcanza el sistema de control en cascada con los controladores adoptados?

## Capítulo 16

# Análisis de Configuraciones de Control Alternativas para Sistemas MIMO

En este capítulo se presenta una metodología para el análisis de configuraciones de control alternativas para sistemas MIMO basada en dos procedimientos. Uno de ellos permite realizar un análisis cualitativo de lazos de control individuales mientras que el otro, permite analizar la interacción entre lazos de control de unidades de procesos múltiples.

### 16.1. Introducción

Hasta aquí hemos tratado los problemas conocidos como procesos de simple entrada - simple salida (SISO). Sin embargo, en muchos problemas prácticos, existe más de una variable a ser controlada con un número importante de variables que pueden ser manipuladas.

En particular, un esquema de control de  $n$  variables controladas y  $n$  manipuladas presenta  $n!$  configuraciones de control multilazo posibles. Así, si  $n = 5$  entonces existen 120 configuraciones posibles.

Por tal motivo, es necesario disponer de un procedimiento sistemático que permita proponer un número razonable de *configuraciones de control alternativas* para un dado proceso MIMO, y de este modo, ayude a tomar decisiones de cuál de ellas es la más adecuada para el sistema.

El esfuerzo de muchos investigadores ha llevado a proponer distintos criterios y procedimientos de síntesis que en algunos casos resultan muy similares. Por lo general, se habla de,

- *procedimientos cualitativos* basados en criterios prácticos, surgidos de la

experiencia en la industria de ingenieros y académicos, entre los que destaca la propuesta de Stephanopoulos [84], entre otros y,

- *procedimientos cuantitativos*, que buscan medir las interacciones entre las variables manipuladas y controladas, para así recomendar pares variables de entrada-salida (acoplamiento) que permitan establecer una configuración de control para una unidad de proceso. En este grupo se destaca entre los primeros trabajos las propuestas de Bristol [21] cuando introduce el concepto de arreglo de ganancias relativas (RGA<sup>1</sup>) y el de McAvoy [60].

Por último, es de remarcar que el problema se complica aún más cuando además de las interacciones entre las variables de un mismo proceso, éste se encuentra interaccionando con otros procesos, que además tienen sus propias interacciones entre las diferentes variables. Este punto en particular es el que nos ocupa en este capítulo.

## 16.2. Conceptos Preliminares

Como se mencionó antes, la mayoría de los procesos industriales tienen múltiples entradas y salidas, y para complicar aún más las cosas, sobre éstas variables controladas se establecen objetivos de control que en muchos casos son distintos y contrapuestos. Además, se destaca que, en el control de sistemas MIMO están presentes un conjunto de inconvenientes que no están presentes en sistemas SISO. Por ejemplo:

- interacción entre una o más variables de entrada con más de una salida controlada, conocido como acoplamiento de variables;
- efectos adversos por estos acoplamientos de variables sobre salidas a controlar;
- distintos apareamientos de variables de entrada-salida, que llevan a diferentes comportamientos dinámicos, comprometiendo la estabilidad del sistema de control de maneras diferentes;
- para un apareamiento de variables escogido, la estabilidad del sistema de control MIMO puede estar comprometida, más allá de que a priori se estime una situación de estabilidad en cada lazo de control individual.

### 16.2.1. Estudio de variables y grado de libertad de un proceso

Por los motivos anteriormente enunciados, se hace necesario un estudio de las diferentes variables independientes y dependientes del proceso y de su grado de libertad.

La dinámica de un proceso MIMO puede ser escrita como,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, l) \\ y &= g(x, u, l) \end{aligned} \tag{16.1}$$

---

<sup>1</sup>Por el anacronismo en idioma Inglés, *Relative Gain Array*

donde  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  son las variables de salida,  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  los estados del sistema,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  las posibles variables manipuladas,  $l \in \mathbb{R}^{n_l}$  las perturbaciones del sistema,  $f$  y  $g$  son funciones no lineales que representan las ecuaciones fundamentales y constitutivas del sistema MIMO<sup>2</sup>.

Como se comentó en el Cap. 1 resulta claro que en un sistema de control debemos,

1. *analizar objetivos de control* que impactan sobre la desición de las variables a controlar, imponiendo sobre ellas las consignas del sistema de control;
2. *seleccionar las variables más apropiadas a manipular*, teniendo en cuenta más de una alternativa posible, y recurriendo a manipular caudales como alternativa más adecuada desde el punto de vista dinámico de un proceso químico;
3. *analizar las posibles perturbaciones* que impactan en el proceso, y en caso de que una o más de ellas sean medibles o de suma importancia, recurrir a estrategias de control avandazas (como por ejemplo, control feedforward o cascada); mientras que sobre las no medibles no podemos hacer nada hasta que la variable controlada se desvíe de la consigna para comenzar a mitigarlas.

En un sistema MIMO con  $n_y$  salidas y  $n_u$  manipuladas, si queremos cumplir todos los objetivos de control propuestos, necesariamente  $n_y = n_u$ . De otro modo, algunos objetivos quedarán insatisfechos o bien, podremos ubicar a las salidas controladas dentro de determinadas regiones pero no en sus valores deseados.

Para comprender mejor este punto se hace necesario un análisis de los grados de libertad de un proceso en particular. Para ello, se introduce la siguiente definición:

**Definición 16.2.1 — Grado de Libertad ( $N_f$ ).** Son aquellas variables independientes que deben ser especificadas para determinar completamente un sistema. En términos matemáticos resulta,

$$N_f = N_v - N_e \quad (16.2)$$

donde  $N_v$  es el número de variables (dependientes e independientes) del proceso y  $N_e$  el número de ecuaciones.

Se desprende, de la definición anterior, que para que un proceso esté completamente determinado  $N_f = 0$ .

Note que el sistema por el momento está siendo analizado a lazo abierto y sin control sobre las variables de salida.

Analizando particularmente el sistema MIMO de la Ec. (16.1) como un *sistema entrada-salida* (representado en la Fig. 16.1), tenemos como variables in-

<sup>2</sup>Note que si el modelo del proceso se plantea en base a las ecuaciones de balance fundamental, se tiene  $n_x$  ecuaciones diferenciales con  $n_x$  estados.

dependientes  $n_u$  variables manipuladas más  $n_l$  perturbaciones, y como variables dependientes  $n_y$  salidas. Consecuentemente,

$$N_v = n_u + n_y + n_l. \quad (16.3)$$

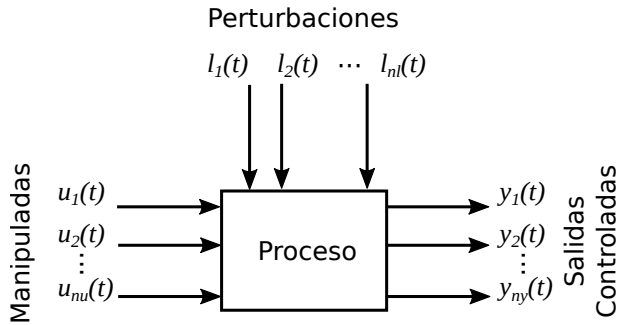


Figura 16.1: Sistema MIMO bajo representación entrada-salida.

**Ejemplo 16.1** Analice los grados de libertad en un tanque cilíndrico de sección transversal  $A$  constante que acumula líquido y que posee dos entradas de fluido de proceso.

La ecuación que modela dicho tanque, con las hipótesis simplificadoras pertinentes, es la ecuación de balance de materia total que resulta,

$$A \frac{dh}{dt} = q_{e1} + q_{e2} - q_s. \quad (16.4)$$

De acuerdo con el análisis anterior,  $N_v = 4$  ( $h$ ,  $q_{e1}$ ,  $q_{e2}$  y  $q_s$ ) y se tiene una única ecuación, por lo que se desprende que  $N_f = 3$ .

Por tanto, especificando  $q_{e1}$ ,  $q_{e2}$  y  $q_s$  el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas y el sistema queda determinado. ■

**Definición 16.2.2 — Grados de Libertad para Control.** Son aquellas variables independientes que deben ser especificadas para alcanzar los objetivos preestablecidos en un sistema de control. En términos matemáticos,

$$N_{fc} = N_f - n_l \quad (16.5)$$

Claramente, las  $n_l$  perturbaciones son variables de entrada independientes que quedan fijadas externamente por las circunstancias del proceso, y por tanto no pueden ser tenidas en cuenta como variables que puedan ser usadas para



controlar<sup>3</sup> el sistema.

Note que si  $N_{fc}^{la} = 0$  entonces no hay posibilidad de control a lazo abierto. Para comprender mejor éste concepto y las diferencias entre las Defs. 16.2.1 y 16.2.2 analizemos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 16.2** Considere el tanque de acumulación de líquido del Ejem. 16.1 donde se sabe además que el caudal de salida no puede ser manipulado y sigue la ley  $q_s = f(h)$ . Determine  $N_f$  y  $N_{fc}^{la}$

Con la restricción impuesta ahora se tiene que  $N_v = 4$  y  $N_e = 2$  por lo que  $N_f = 2$ . El sistema quedará completamente determinado especificando  $q_{e1}$  y  $q_{e2}$ .

Observe que si se escoge manipular manualmente una de las dos entradas entonces,  $n_u = 1$  y por tanto, el otro caudal queda como perturbación y consecuentemente  $n_l = 1$ . A raíz de esto, entonces  $N_{fc}^{la} = N_f - n_l = 1$ . De manera que, por ejemplo, especificando el valor de  $q_{e1}$  el nivel de líquido se posicionará en un valor deseado siempre y cuando  $q_{e2}$  no cambie, logrando así un control a lazo abierto. Ahora, si  $q_{e2}$  cambia, el sistema se perturba y podrá manipular  $q_{e1}$  para volver a posicionar el sistema en el nivel de referencia.

Por otro lado, si no es posible manipular ningún caudal de entrada entonces,  $n_u = 0$  y  $n_l = 2$  y por tanto,  $N_{fc}^{la} = N_f - n_l = 0$ . Consecuentemente, el sistema queda a lazo abierto pero sin posibilidad de control alguno. ■

Por último, es de recordar que en el control por realimentación tradicional, por cada variable controlada se selecciona una única variable manipulada, agregando una ley de control y por tanto, una ecuación adicional que incluye la diferencia entre la salida en cuestión y su referencia (cuyo valor es conocido).

**R** ■ **Remarca 16.1 — Condición para Controlabilidad Entrada-Salida.** Se podrá controlar a las  $n_y$  variables de salida en sus valores de consigna si se dispone de  $n_u$  entradas (con  $n_u \geq n_y$ ), y siempre y cuando no se excedan las restricciones operativas.

**Demostración** La demostración de esta remarca surge de los comentarios anteriores<sup>4</sup>. □

Para comprender este último punto se presenta el siguiente ejemplo.

<sup>3</sup>La Def. 16.2.2 puede ser usada tanto para control a lazo abierto como cerrado, consecuentemente utilizaremos la notación  $N_{fc}^{la}$  y  $N_{fc}^{lc}$  respectivamente para cada caso.

<sup>4</sup>Observe que se pide que el movimiento de las variables controladas no lleven a saturación de las variables manipuladas y de los elementos de medición, ya que en dicho caso, el sistema de control queda a lazo abierto.

**Ejemplo 16.3** Considere el sistema de acumulación de líquido del Ejem. 16.1, donde ahora se agrega una ley de control proporcional,

$$q_{e1} = K_r(h - h^{ref})$$

con  $h^{ref}$  el nivel de líquido de referencia conocido.

Determine  $N_f$  y  $N_{fc}^{lc}$ .

Ahora,  $N_e = 3$  y por tanto, por la Ec. 16.2,  $N_f = 4 - 3 = 1$ , por lo que se hace necesario especificar una variable para que el sistema quede completamente definido, en este caso  $q_{e2}$ . Así, teniendo en cuenta que  $n_l = 1$  ( $q_{e2}$  queda especificado externamente por ser perturbación de entrada) y habiendo agregado una ecuación para la ley de control entonces,  $N_{fc}^{lc} = N_f - n_l = 0$ . Consecuentemente, el sistema en lazo cerrado (con la ley de control incluida) no necesita definir nada más para el lazo de control, y éste podrá mitigar las perturbaciones que ingresen por  $q_{e2}$ . ■

### 16.3. Procedimiento Cualitativo para Generar Lazos de Control Alternativos en Unidades Individuales

Como se mencionó antes, en un proceso MIMO es posible tener más de una variable a manipular para una misma variable a controlar, esto nos lleva a más de una configuración de control posible. Muchos de estos lazos de control alternativos serán inviables o bien podrán tener un mal desempeño, pero uno o más de ellos podrán ser viables, y a priori puede resultar difícil de determinar cual será el mejor para nuestro proceso.

En la literatura se presenta diversas técnicas para determinar posibles apareamientos entrada-salida y cual de ellos puede resultar ser el mejor. Como se mencionó al principio de este capítulo, existen dos tipos de procedimientos de análisis distintos, los cualitativos y los cuantitativos.

Los procedimientos cualitativos se fundamentan en una serie de criterios ingenieriles prácticos que el ingeniero de control debe tener en cuenta. Algunos de estos criterios prácticos son sumamente racionales y han sido destacados por distintos autores en la literatura clásica (Stephanopoulos [84], entre otros). Así podemos mencionar a modo de ejemplo:

- Seleccionar aquella variable manipulada que tiene un efecto directo y con dinámica más rápida sobre la variable de salida a controlar.
- Seleccionar el par entrada-salida que tenga el menor tiempo muerto posible.
- Seleccionar el par entrada-salida que tenga la máxima interacción entre sí y la menor interacción posible con los otros lazos de control.

El procedimiento en cuestión, trata de un proceso de descarte de configuraciones de control alternativas, que lo podríamos resumir en los siguientes pasos:

**Procedimiento 16.3.1 — Para Unidades Individuales.**

**Paso 1.** Analice los grados de libertad del proceso y determine las variables manipuladas disponibles<sup>a</sup>.

**Paso 2** Arme una tabla con las  $n!$  (con  $n = n_u = n_y$ ) configuraciones de control alternativas.

**Paso 3** Seleccione una salida controlada a estudiar, preferentemente aquella sobre la que más información se dispone.

**Paso 4** Elija, para continuar el estudio, aquellos lazos de control en donde las variables manipuladas tienen un efecto directo sobre la salida de proceso bajo estudio, y descarte a los otros lazos alternativos. Note que más de un lazo de control puede cumplir con esto y en cuyo caso, no los descarte.

**Paso 5.** Si tiene suficiente información, de todas la configuraciones alternativas restantes, seleccione aquel par entrada-salida que tenga la dinámica más rápida, el menor tiempo muerto y la menor interacción con otras variables de salida. De otro modo, reserve este subconjunto de configuraciones alternativas y continúe con el paso siguiente.

**Paso 6** Vuelva al **Paso 3** para seleccionar otra variable de salida a controlar. Si no tiene más variables para seleccionar, finalice.

<sup>a</sup>Este paso podría omitirse si dichas variables se conocen de antemano.

Observe que con este procedimiento, se podría concluir que más de una configuración alternativa permite controlar el proceso. En cuyo caso, será necesario aplicar un procedimiento cuantitativo para llegar a un resultado único.

A continuación se presenta un ejemplo que intenta clarificar los criterios y el procedimiento aquí presentados.

**Ejemplo 16.4** Considere el reactor tanque continuo agitado de la Fig. 16.2, donde se lleva a cabo una reacción química exotérmica (**A** → **B**). Se sabe que el reactor opera con un volumen variable de líquido, y no es posible medir la concentración a la salida del mismo. Se asume además que, a los efectos prácticos, el área de intercambio de energía puede considerarse constante, ya que se asume que el reactor opera en todo instante de tiempo con un volumen de líquido muy elevado.

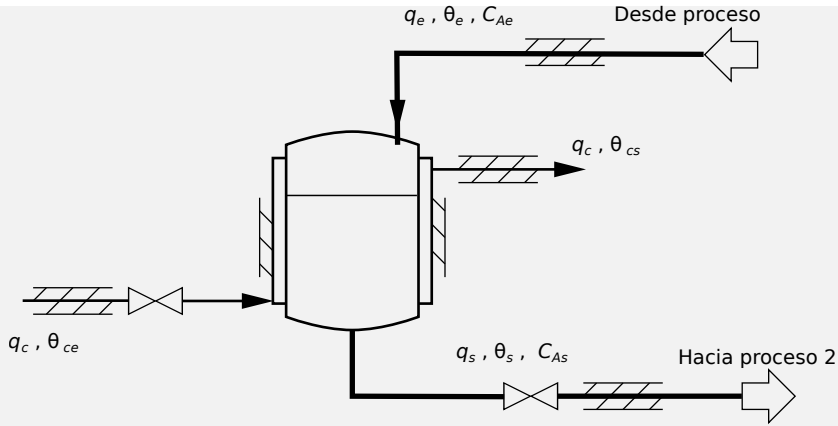


Figura 16.2: Reactor tanque continuo agitado a volumen variable.

Determine las configuraciones de control alternativas y sugiera una de ellas.

Basándose en el Procedimiento 16.3.1 enunciado en esta sección:

**Paso 1.** *Análisis de Grados de Libertad.*

Variables (independientes y dependientes):  $q_e, c_{Ae}, \theta_e, q_s, c_{As}, \theta_s, V$  (o bien  $h$ , siendo  $h$  el nivel de líquido, si se asume que la sección transversal del reactor es constante),  $q_c, \theta_{ce}$  y  $\theta_{cs}$ , entonces,  $N_v = 10$

Ecuaciones:

- Balance de materia total,
- Balance de materia para el componente,
- Balance de energía en el reactor y
- Balance de energía en la camisa.
- Ecuación constitutiva  $q_s = f(h)$

De lo que resulta,  $N_e = 5$ . De manera que, de la Ec. (16.2.1) resulta

$$N_f = N_v - N_e = 10 - 5 = 5$$

Variables controladas ( $n_y$ ): variables especificadas externamente,  $V$  (o  $h$ ),  $\theta_s$ .

Variables manipuladas ( $n_u$ ):  $q_e, q_s$  y  $q_c$ .

Perturbaciones ( $n_l$ ): variables independientes no especificadas:  $c_{Ae}, \theta_e$  y  $\theta_{ce}$ , resultando entonces  $n_l = 3$ .

De esto último y teniendo en cuenta la Ec (16.5) surge que,

$$N_{fc}^{lc} = N_f - n_l = 5 - 3 = 2.$$

**Paso 2.** *Configuraciones de control alternativas.*

Primeramente es de notar que  $n_u > n_y$  y por tanto, es posible controlar las variables  $V, \theta_s$  de acuerdo con la Rem. 16.1.

Observe que  $n_u = 3$  lo que dará lugar a  $3! = 6$  configuraciones de control posibles, y dado que  $n_y = 2$ , sólo 2 serán las configuraciones que se podrán adoptar. Teniendo en cuenta esto, en la Tabla 16.1 se presentan los apareamientos de variables alternativos.

Tabla 16.1: Configuraciones de control alternativas para el CSTR.

Configuración	Lazo $V$	Lazo $\theta$
1	$q_s$	$q_c$
2	$q_e$	$q_c$
3	$q_s$	$q_e$
4	$q_e$	$q_s$
5	$q_c$	$q_e$
6	$q_c$	$q_s$

**Paso 3.** *Selección de la variable  $V$ .***Paso 4.** *Análisis en base a cambios sobre la variable  $V$  debido cambios en las manipuladas.*

Se observa que las variables manipuladas de las configuraciones 1, 2, 3 y 4 tienen efecto sobre la salida controlada  $V$ .

Claramente, las configuraciones 5 y 6 deben ser descartadas ya que manipular  $q_c$  no cambia el volumen de líquido dentro del reactor. En otras palabras, se descartan dos configuraciones en las que la variable manipulada no tiene efecto sobre la salida controlada.

**Paso 5.** *Análisis en base a dinámicas.*

Dado que se están manipulando caudales que afectan directamente al volumen de líquido del reactor, las dinámicas serán rápidas y no podemos descartar ninguna de las configuraciones restantes.

**Paso 6.** *Vuelve al Paso 3 para estudiar la otra variable.***Paso 3.** *Selección de la Variable  $\theta_s$* **Paso 4.** *Análisis en base a cambios sobre la variable  $\theta_s$  debido cambios en las manipuladas.*

Se observa que manipular  $q_e$  o bien  $q_s$  para controlar  $\theta_s$  puede tener efectos no deseables sobre la concentración de salida. Además, desde

un punto de vista práctico, es conveniente para esto utilizar el caudal del refrigerante.

Por tal razón, se descartan las configuraciones de control alternativas 3 y 4.

**Paso 5.** *Análisis en base a dinámicas*

Quedan las configuraciones 1 y 2 y no se puede discernir cual de ellos es mejor desde este punto de vista.

**Paso 6.** No hay más variables para analizar, por lo tanto se da por finalizado el procedimiento.

Como resultado del procedimiento aplicado, quedan dos posibles configuraciones de control que no se pueden descartar hasta tanto se tenga más información.

Note que:

1. si se elige la configuración 1, se reemplaza la ecuación del caudal de salida en función de la altura por una ley de control  $q_s = f_1(h^{ref} - h)$  y se agrega otra ley de control  $q_c = f_2(\theta_{cs}^{ref} - \theta_{cs})$ , con lo que ahora  $N_e = 6$  y por tanto  $N_f = N_v - N_e = 10 - 6 = 4$ . Además,  $q_e$  queda como perturbación, sumándose a las tres ya existentes. Consecuentemente  $n_l = 4$ , con lo que resulta que  $N_{fc}^{lc} = N_f - N_l = 4 - 4 = 0$ ;
2. si se elige la configuración 2,  $q_s$  queda como variable dependiente ya que se tiene una ecuación que la define. Se agregan dos leyes de control  $q_e = f_1(h^{ref} - h)$  y  $q_c = f_2(\theta_{cs}^{ref} - \theta_{cs})$ , por lo que,  $N_f = N_v - N_e = 10 - 7 = 3$  y  $N_{fc}^{lc} = N_f - n_l = 3 - 3 = 0$ .

La Fig. 16.3 muestra las dos configuraciones de control alternativas resultantes.

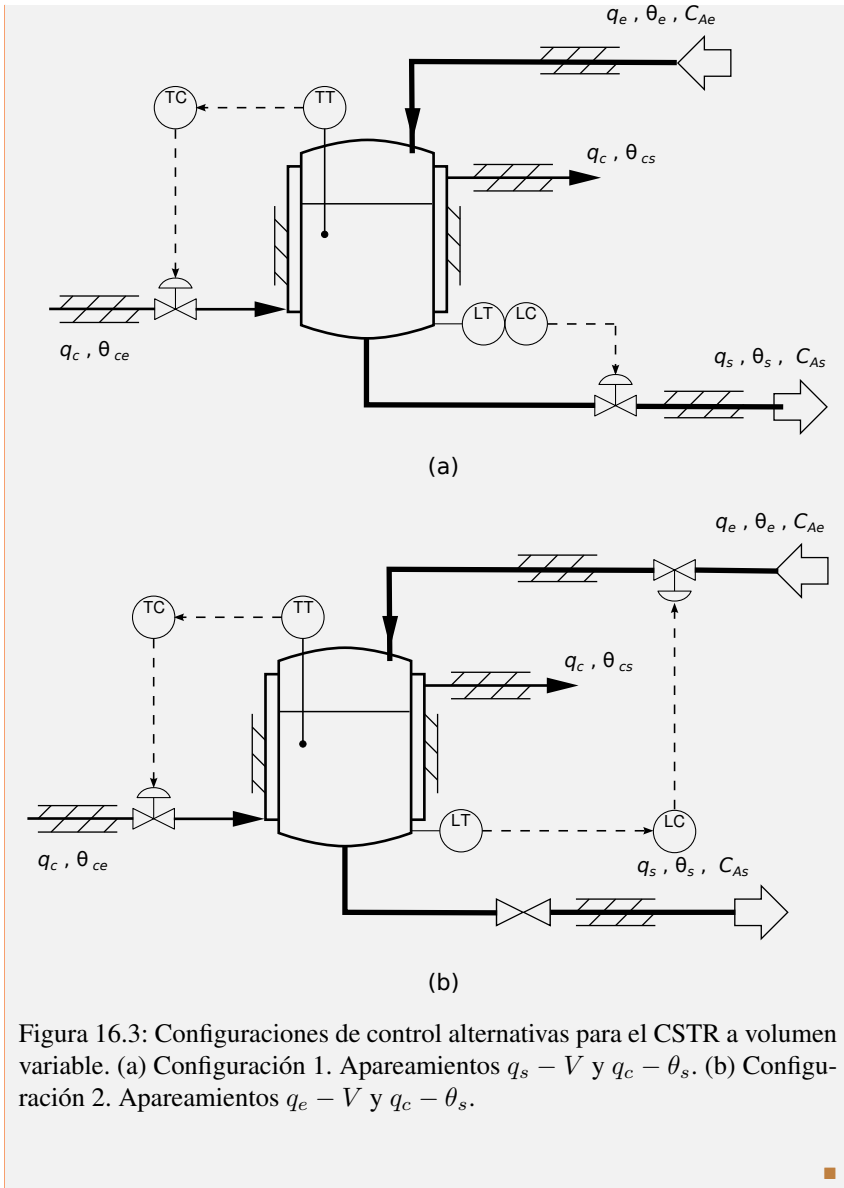


Figura 16.3: Configuraciones de control alternativas para el CSTR a volumen variable. (a) Configuración 1. Apareamientos  $q_s - V$  y  $q_c - \theta_s$ . (b) Configuración 2. Apareamientos  $q_e - V$  y  $q_c - \theta_s$ .

## 16.4. Procedimiento para Unidades Múltiples con Interacción

En esta sección se presenta un procedimiento cualitativo de análisis de configuraciones de control alternativas, aplicado a unidades de procesos que interactúan entre sí, basado fundamentalmente en la obra de Stephanopoulos ([84]), entre otros.

A continuación se detalla un procedimiento para unidades múltiples con interacción.

### Procedimiento 16.4.1 — Para Unidades Múltiples con Interacción.

- Paso 1.** Divida el proceso en unidades de procesos individuales. Cada unidad individual consiste de una o más operaciones unitarias con un objetivo común.
- Paso 2.** Aplique el Procedimiento 16.3.1 en cada unidad individual. Si hay más de una configuración posible, deberá aplicar un procedimiento cuantitativo para decidir cual es la mejor. De no ser posible esto último, no descarte ninguna de las configuraciones de control posibles.
- Paso 3.** Recombine las unidades de procesos individuales incluyendo la configuraciones de control adoptadas.
- Paso 4.** Elimine conflictos que podrían presentarse entre los lazos de control de unidades de proceso. Estos conflictos pueden presentarse porque en el **Paso 2**, cada unidad fue analizada separadamente, y al recombinarla se podría tener una sobreespecificación en las variables del proceso.

**Ejemplo 16.5** Considere que el reactor tanque continuo agitado del Ejem. 16.4 envía el producto B de la reacción química a una columna de destilación binaria, previo calentamiento de la corriente de salida del reactor, de acuerdo con la Fig. 16.4. La columna de destilación separa el reactivo A por tope del producto B por el fondo de la misma. Se sabe además que la corriente de alimentación al reactor no puede ser manipulada.

Determine las configuraciones de control alternativas y sugiera una de ellas.

A continuación se desarrolla el Procedimiento 16.4.1 enunciado en esta sección.

**Paso 1.** *Dividir el proceso en unidades individuales.* En la Fig. 16.5 se muestra las tres unidades de proceso individuales en las que el proceso en su conjunto fue dividido: reactor, precalentamiento de alimentación y



columna de destilación.

**Paso 2.** *Procedimiento 16.3.1 para cada unidad individual.*

*Unidad de Reacción.* Procedimiento 16.3.1. Esta unidad fue estudiada en el Ejem. 16.4. Dado que en este nuevo ejemplo, se considera que la corriente de alimentación al reactor no puede ser manipulada, se adopta la configuración de control de la Fig. 16.3(a).

*Unidad de Pre calentamiento de Alimentación a la Columna.*

*P16.3.1-Paso 1. Análisis de Grados de Libertad*

Variables:  $q_s, \theta_s, \theta_{s2}, q_h$ , consecuentemente  $N_v = 4$ .

Ecuaciones: Balance de energía en el intercambiador de calor,  $N_e = 1$ .

De la Ec. (16.2.1) resulta

$$N_f = N_v - N_e = 4 - 1 = 3$$

Perturbaciones: variables independientes no especificadas,  $q_s, \theta_s$ , por tanto  $n_l = 2$ .

Variables controladas: variables especificadas externamente,  $\theta_{s2}$ .

Variables manipuladas:  $q_h$ .

Teniendo en cuenta la Ec (16.5) surge que,

$$N_{fc}^{lc} = N_f - n_l = 3 - 2 = 1.$$

Note que al agregar la ecuación correspondiente a la ley de control  $N_f = 2$  y  $N_{fc}^{lc} = 0$ .

*P16.3.1-Paso 2. Configuraciones de control alternativas*

Dado que  $n_u = n_y = 1$  entonces hay  $1! = 1$  configuración de control, que resulta del apareamiento  $q_h$ - $\theta_{s2}$ .

*P16.3.1-Paso 3., 4 y 5,* no tienen sentido que se apliquen a una única ley de control.

*P16.3.1-Paso 6.* Fin del Procedimiento 16.3.1.

*Unidad de Destilación.*

*P16.3.1-Paso 1. Análisis de Grados de Libertad*

El recuento de el número de variables y ecuaciones para el este análisis se basa en el trabajo de Luyben [57].

Variables:

Alimentación: $(F_f, x_f)$	=	2
Platos: composiciones $(x_n$ e $y_n)$	=	$2 N_T$
Platos: caudales de líquido $(L_n)$	=	$N_T$
Platos: <i>holdups</i> de líquido $(M_n)$	=	$N_T$
Tanque de reflujo: composición $(x_D)$	=	1
Tanque de reflujo: caudales $(R$ y $D)$	=	2
Tanque de reflujo: <i>holdup</i> de líquido $(M_D)$	=	1
Fondo-reherbidor: composiciones $(x_B$ e $y_B)$	=	2
Fondo-reherbidor: caudales $(V$ y $B)$	=	2
Fondo-reherbidor: <i>holdup</i> de líquido $(M_B)$	=	1
Número de variables $(N_v)$		$\frac{4 N_T + 11}{}$

## Ecuaciones:

Platos: balance de materia total	=	$N_T$
Platos: balance de materia del comp. más volátil	=	$N_T$
Platos: equilibrio	=	$N_T$
Platos: hidráulica	=	$N_T$
Tanque de reflujo: balance de materia total	=	1
Tanque de reflujo: balance de materia comp. más volátil	=	1
Fondo-reherbidor: balance de materia total	=	1
Fondo-reherbidor: balance de materia comp. más volátil	=	1
Fondo-reherbidor: equilibrio	=	1
Número de ecuaciones $(N_e)$	=	$\frac{4 N_T + 5}{}$

De la Ec. (16.2.1) resulta

$$N_f = N_v - N_e = 6$$

Perturbaciones: variables independientes no especificadas,  $x_f = x_{As}$  (calculada a partir de  $c_{As}$ )<sup>a</sup>,  $R$ ,  $V^b$ , por tanto  $n_l = 3$ .

Variables controladas, variables especificadas externamente:  $F_f$ ,  $M_D$ ,  $M_B$  y consecuentemente  $n_y = 3$ .

Variables manipuladas:  $F_f^c$ ,  $D$ ,  $B$ , entonces  $n_u = 3$ .

De lo que resulta,

$$N_{fc}^{lc} = N_f - n_l = 6 - 3 = 3.$$

Al agregar tres leyes de control se tiene que  $N_f = 3$  y  $N_{fc}^{lc} = 0$ .

*P16.3.1-Paso 2.* Dado que  $n_u = n_y = 3$  dará lugar a  $3! = 6$  configuraciones de control posibles. Además, observe que al especificar  $F_f$  como variable manipulada y controlada se da la alternativa un control feedforward. Considerar otra posibilidad sin control feedforward implica un control muy deficiente con dinámicas sumamente lentas.

De manera que, esto reduce las configuraciones de control alter-

nativas a  $2! = 2$ . Teniendo en cuenta esto, en la Tabla 16.2 se presentan los apareamiento de variables alternativos.

Tabla 16.2: Configuraciones de control alternativas para la columna de destilación

Configuración	Lazo $F_f$	Lazo $M_D$	Lazo $M_B$
1	$F_f$	$D$	$B$
2	$F_f$	$B$	$D$

*P16.3.1-Paso 3. Selección de la variable  $M_D$*

*P16.3.1-Paso 4. Selección de la manipulada para  $M_D$*

Claramente, en la configuración 1 la variable manipulada  $D$  tiene un efecto directo sobre la variable controlada, mientras que la configuración 2 no lo tiene. Por tal motivo no es aconsejable esta última opción.

*P16.3.1-Paso 5.* Además la configuración 1 es la que posee menor dinámica y por tanto se descarta la configuración 2.

*P16.3.1-Paso 6.* Con lo expuesto, ya no tiene sentido analizar la variable  $M_B$ , y por tanto se da por finalizado el procedimiento.

**Paso 3.** Recombinando las unidades de procesos simples se obtiene una configuración de control para el proceso completo que se muestra en la Fig. 16.5.

**Paso 4.** Note que hay un conflicto entre los lazos de control, lo que lleva a eliminar el lazo de control feedforward, dejando el control de nivel del reactor para garantizar seguridad del mismo. La configuración de control resultante se muestra en la Fig. 16.6.

<sup>a</sup>Note que los estados,  $x_D, x_B, y_B, x_n, M_n$  con  $n = 1 \dots N_t$  no se incluyen ya que se recalculan internamente en el sistema de ecuaciones.

<sup>b</sup>las variables  $V$  y  $R$  quedan como perturbaciones, porque no se han especificado condiciones para los balances de energía de fondo y tope respectivamente.

<sup>c</sup>Se escoge el caudal de alimentación como variable manipulada y por tanto no perturba la columna.

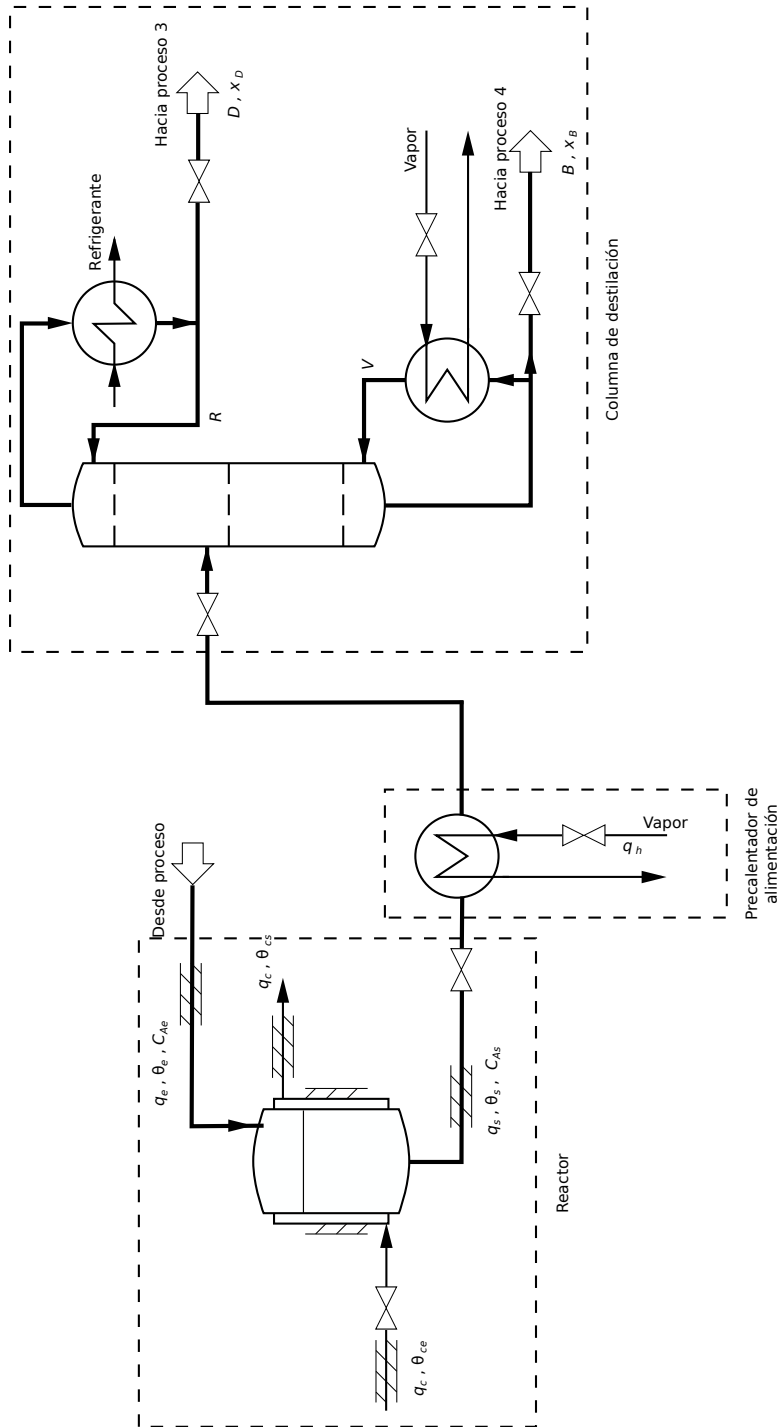


Figura 16.4: Proceso químico del Ejem. 16.5.

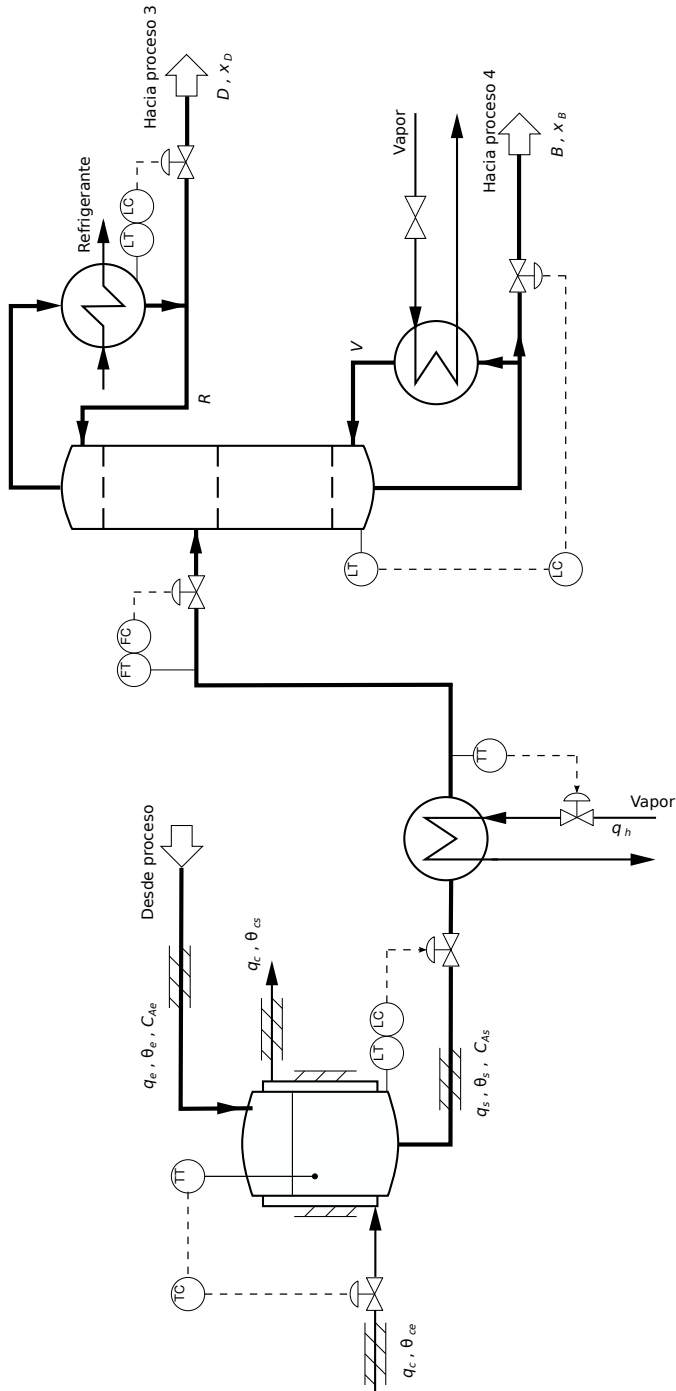


Figura 16.5: Lazos de control resultantes para proceso químico del Ejem. 16.5 sin eliminar el conflicto entre ellos (pasos 1 a 3 del Procedimiento 16.4.1).

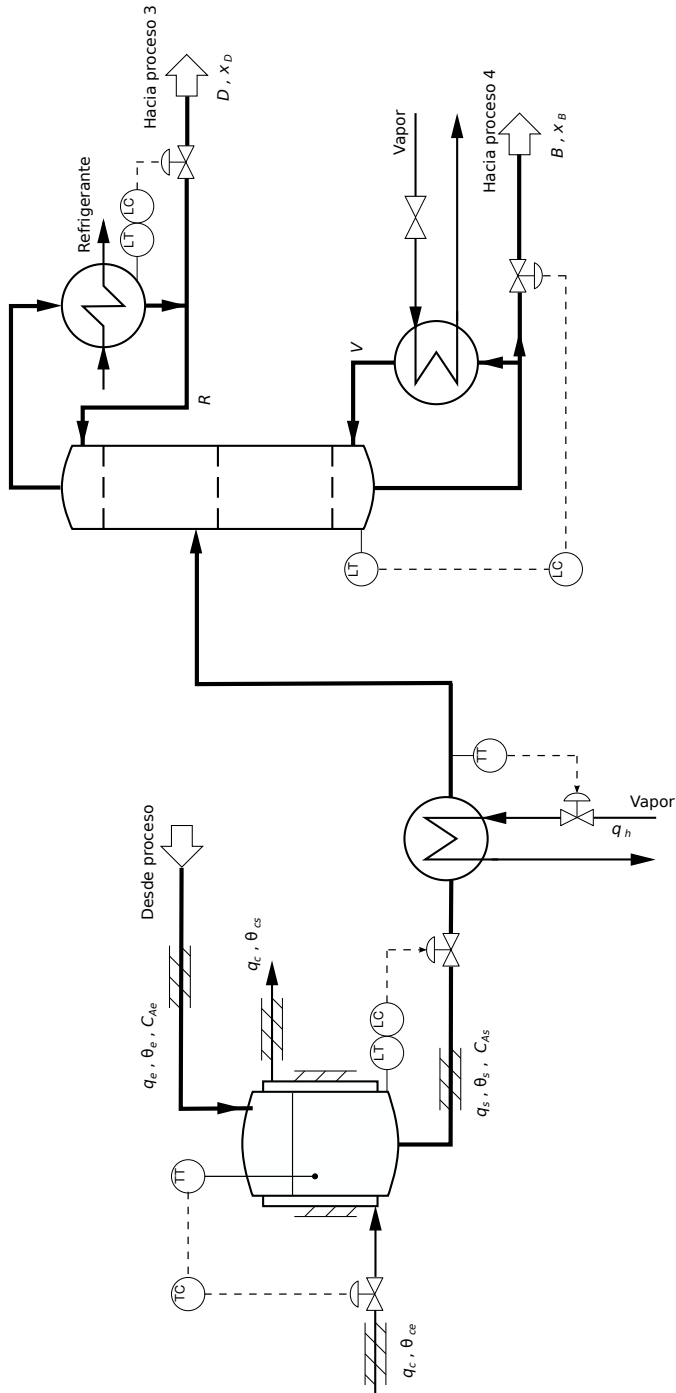


Figura 16.6: Lazos de control resultantes para proceso químico del Ejem. 16.5 después de resolver el conflicto entre ellos (pasos 4 del Procedimiento 16.4.1).

## 16.5. Conclusiones

En este capítulo, se presentaron dos procedimientos para el análisis cualitativo de configuraciones de control alternativas para sistemas MIMO. El primero es aplicable a unidades de procesos individuales, mientras que el segundo permite analizar unidades múltiples con interacción, facilitando la detección de conflictos entre lazos de control propuestos preliminarmente para las unidades simples.

Es de remarcar que los resultados obtenidos puede llevar a más de una solución, por lo que en dicho caso, para arribar a una solución única, se debe aplicar un procedimiento cuantitativo.

## 16.6. Problemas

**Problema 16.1** Considere el Ejem. 16.4 en donde se determinan las configuraciones de control alternativas para un reactor químico exotérmico.

- Indique como se debería replantear dicho ejemplo, para que surja como alternativa, el control en cascada de la temperatura de reacción. Incluya todas las hipótesis que considere necesarias. Luego, aplique el Procedimiento 16.3.1.
- Realice un diagrama bajo normas ISO/ISA del esquema de control en cascada al que arriba.

**Problema 16.2** Considere el sistema de tanques en cascada de la Fig. 2.6, donde se pretende controlar el nivel de líquido ( $h_2$ ) del tanque T2, manipulando algunos de los caudales de entrada o de salida al sistema.

- Adopte las hipótesis que considere necesarias y aplique el Procedimiento 16.3.1 con el objeto de obtener las posibles configuraciones de control para esta variable. Obtenga conclusiones de cada una de ellas.
- Asuma que es de mucha importancia tener un control estricto del nivel  $h_2$ , que necesita mitigar las posibles perturbaciones de entrada a dicho sistema y que todas las variables son medibles. Considerando estas premisas y aplicando el Procedimiento 16.3.1, ¿qué alternativa de control le parece mejor? Justifique su respuesta.

**Problema 16.3** Considere el reactor tanque isotérmico de la Fig. 16.7, donde se lleva a cabo la reacción  $A \rightarrow B$ . El producto de salida es diluido con agua, acondicionando su concentración antes de ser enviado a la sección de almacenamiento.

- Aplique los procedimientos que permiten determinar cualitativamente las posibles configuraciones de control para este problema. Incluya las hipótesis que considere necesarias.
- Presente un esquema de instrumentación que permita operar adecuadamente el sistema, de manera consistente con sus hipótesis.

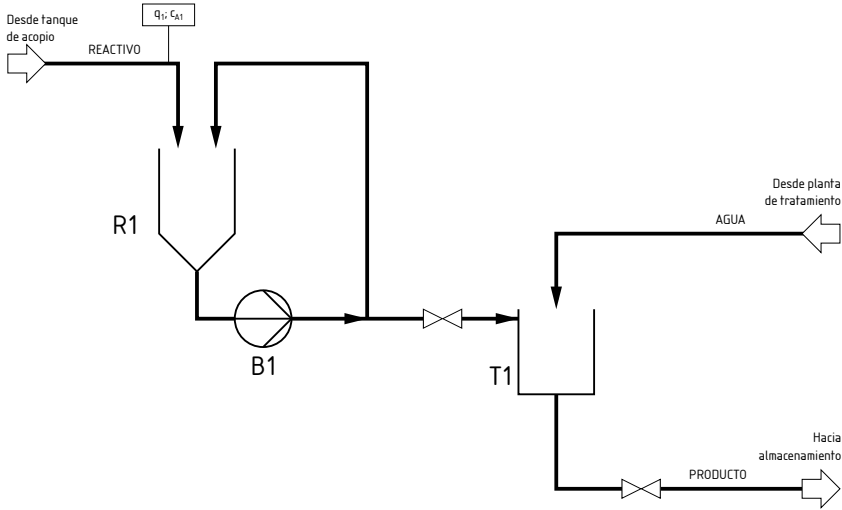


Figura 16.7: El sistema del Problema 16.3.

**Problema 16.4** Considere el reactor químico endotérmico de la Fig. 16.8 donde el agua de proceso utilizada para calefaccionar dicho reactor químico es bombeado desde una planta de tratamiento. Se sabe además que el fluido caliente utilizado para calentar el agua puede sufrir importantes variaciones en su temperatura.

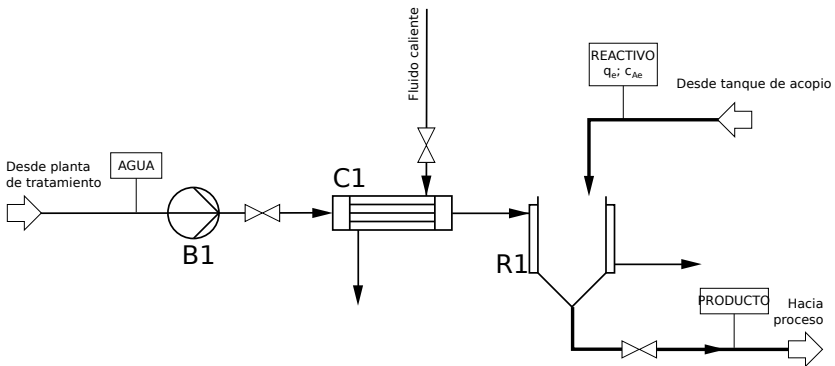


Figura 16.8: Diagrama esquemático del reactor químico endotérmico y el sistema de calentamiento de agua de proceso

(a) Aplique los procedimientos que permiten determinar cualitativamente las



posibles configuraciones de control para este problema. Incluya las hipótesis que considere necesarias.

- Presente un esquema de instrumentación que permita operar adecuadamente el sistema, de manera consistente con sus hipótesis.
- ¿Qué tipo de controladores propone para los controles de temperatura del agua de calefacción y del reactor?

**Problema 16.5** Considere el reactor tanque exotérmico de la Fig. 16.9 donde se lleva a cabo la reacción  $A \rightarrow B$ . El producto de salida de es diluido con agua y su temperatura es acondicionada antes de ser enviado a la sección de almacenamiento.

- Aplique los procedimientos que permiten determinar cualitativamente las posibles configuraciones de control para este problema. Incluya las hipótesis que considere necesarias.
- Presente un esquema de instrumentación que permita operar adecuadamente el sistema, de manera consistente con sus hipótesis.

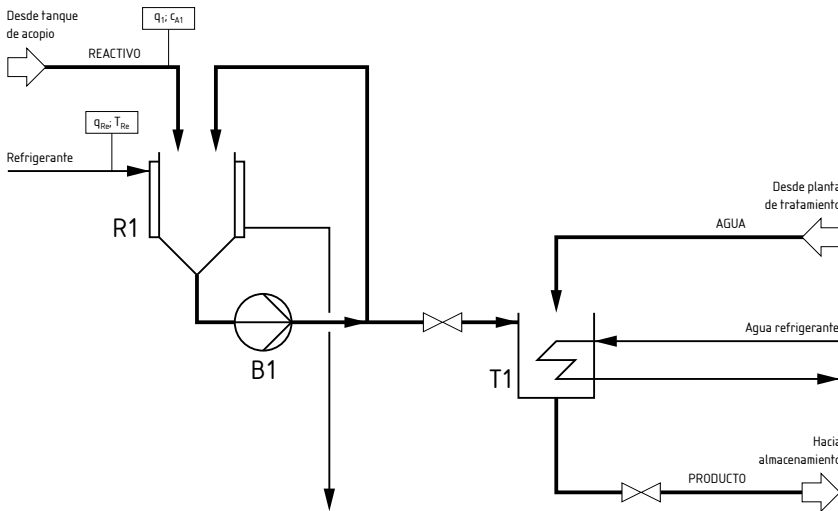


Figura 16.9: El sistema del Problema 16.5.

**Problema 16.6** Considere el sistema térmico de la Fig. 16.10 donde el vapor es condensado parcialmente y se separan los productos líquido y vapor por fondo y tope respectivamente.

- Aplique los procedimientos que permiten determinar cualitativamente las posibles configuraciones de control para este problema. Incluya las hipótesis que considere necesarias.
- Proponga un esquema de instrumentación con el objeto de lograr una pre-

sión de salida constante en el producto vapor y donde además el caudal de alimentación del vapor de calefacción sea lo más constante posible.

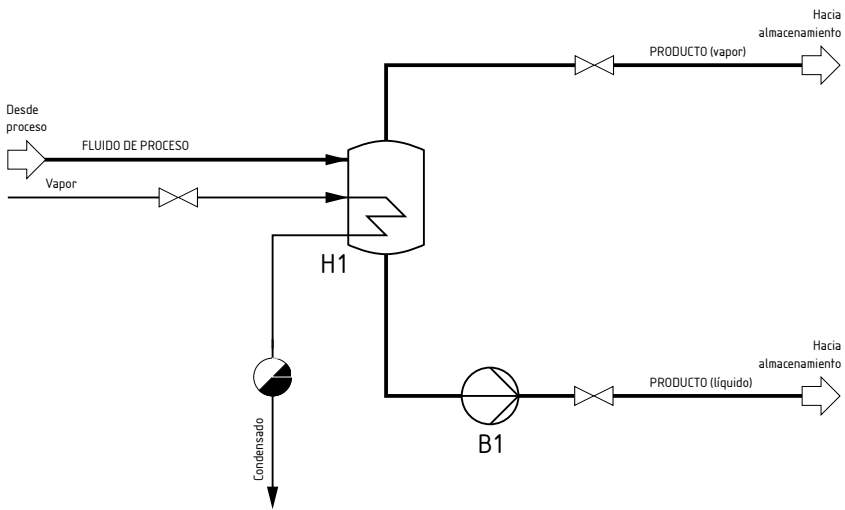


Figura 16.10: El sistema del Problema 16.6.

**Problema 16.7** Considere el intercambiador de casco y tubo de la Fig. 16.11, donde se calienta un líquido de proceso mediante un vapor saturado.

- Aplique los procedimientos que permiten determinar cualitativamente las posibles configuraciones de control para este problema. Incluya las hipótesis que considere necesarias.
- Presente un esquema de instrumentación para dicho sistema teniendo como principal objetivo una rápida respuesta para el control de temperatura del fluido de proceso.

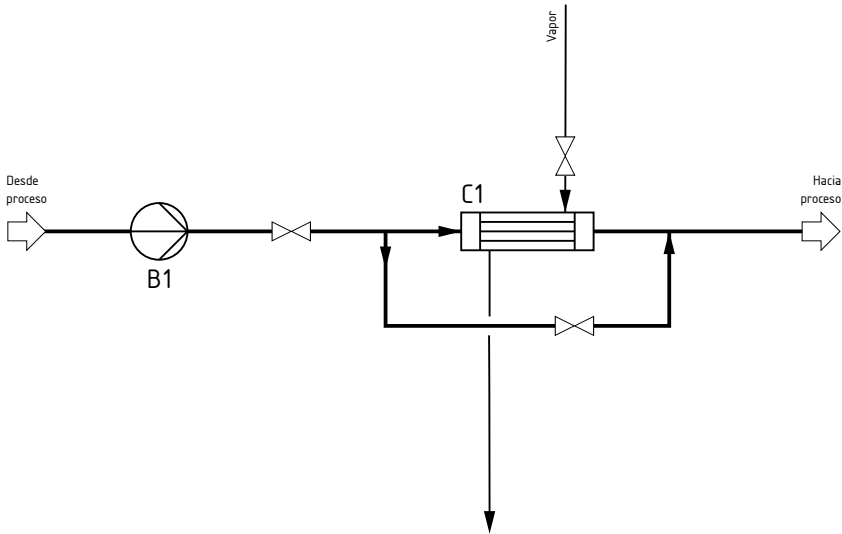


Figura 16.11: El sistema del Problema 16.7.

**Problema 16.8** Un fluido de proceso es almacenado en un tanque de depósito y alimentado a un intercambiador de calor (Fig. 16.12). Se sabe que el fluido de proceso no debe sobrepasar determinados límites de temperatura.

- Aplique los procedimientos que permiten determinar cualitativamente las posibles configuraciones de control para este problema. Incluya las hipótesis que considere necesarias.
- Proponga un esquema de instrumentación que permita lograr una rápida respuesta en el intercambiador de calor.

**Problema 16.9** Considere el sistema de purificación de un corte de petróleo de la Fig. 16.13.

- Aplique los procedimientos que permiten determinar cualitativamente las posibles configuraciones de control para este problema. Incluya las hipótesis que considere necesarias.
- Proponga un esquema de instrumentación con el objeto de lograr un control estricto de la composición de líquido a la salida del separador flash. Se sabe además que la alimentación del fluido de proceso sufre fuertes variaciones de caudal y temperatura.

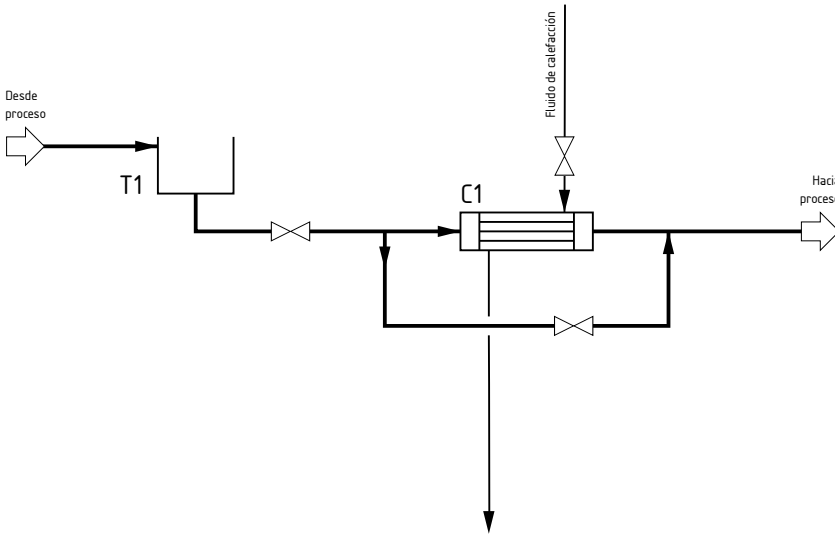


Figura 16.12: El sistema del Problema 16.8.

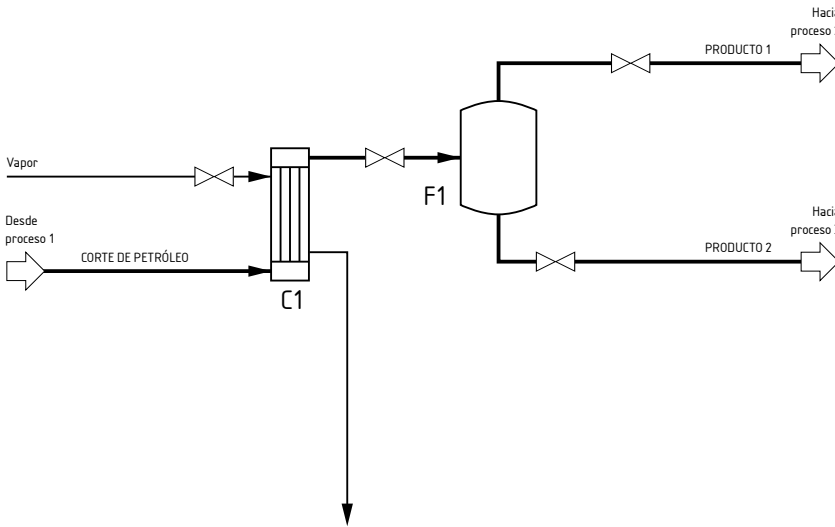


Figura 16.13: El sistema del Problema 16.9.

**Problema 16.10** Considere el proceso de la Fig. 16.14 donde corriente de proceso  $A$  experimenta cambios significativos en su caudal no manipulable ( $q_{e1}$ ) y

su temperatura  $\theta_{e1}$ .

En el intercambiador de calor se calienta el caudal de salida del tanque 1  $q_{s1}$  mediante un caudal de agua caliente ( $q_w$ ) a temperatura constante proveniente de otro sector de la planta. Se sabe además que su caudal  $q_w$  sufre variaciones de importancia. Parte de la corriente que ingresa al tanque 2 es reciclada al tanque 1 por medio de un sistema de bombeo que suministra un caudal constante.

Se desea mantener constante el caudal  $q_{s2}$  y temperatura  $\theta_{s2}$  de la corriente de proceso de salida del tanque 2 garantizando un nivel de líquido constante en ambos tanques.

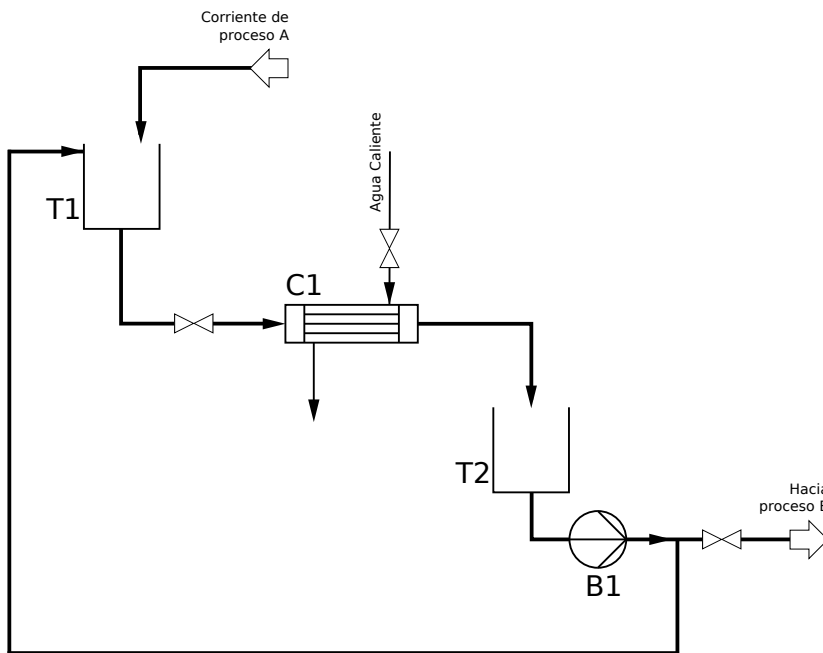


Figura 16.14

- Escoja la instrumentación y los lazos de control adecuados para satisfacer los requerimientos pedidos. Realice un diagrama del esquema de control propuesto según las normas ISA, justificando el mismo.
- ¿Qué tipo de válvulas de control sería conveniente utilizar?
- ¿Qué tipo de controladores propone para el sistema de control que usted sugiere?

**Problema 16.11** Al sistema de enriquecimiento de un corte de petróleo del Prob. 16.9 se le adiciona una columna de destilación para lograr un mayor rendimiento (figura 16.15). ¿Cómo resulta ahora el esquema de control?

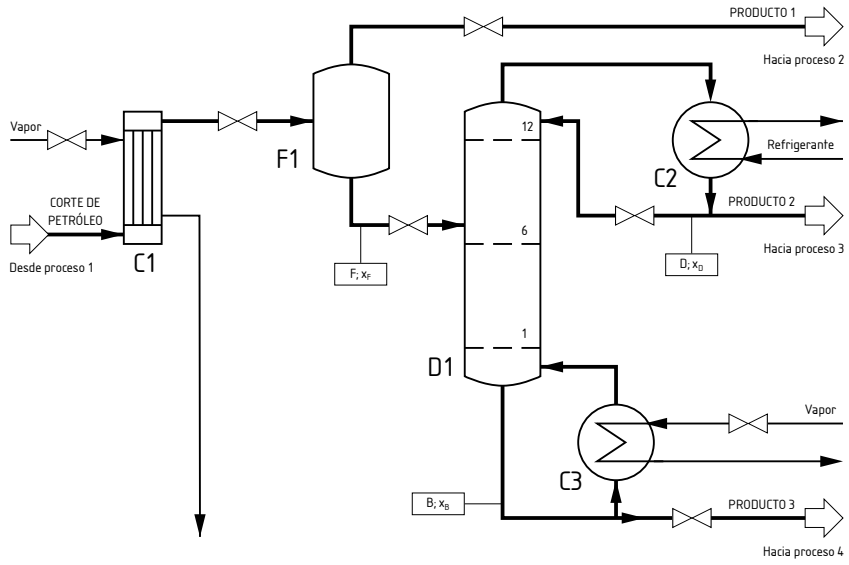


Figura 16.15: El sistema del Problema 16.11.

**Parte V**

**APLICACIONES  
INDUSTRIALES**





## Capítulo 17

# Control de Operaciones Unitarias

En este capítulo se presenta ejemplos de instrumentación y control de procesos industriales, como intercambiadores de calor, reactores, columnas de destilación y generadores de vapor, con el objeto de mostrar la complejidad e interacción de lazos de control de sistemas MIMO.

### 17.1. Introducción

La instrumentación y el control de procesos químicos resulta una tarea ardua, que abarca desde la selección de los sensores adecuados hasta la estrategia de control a aplicar, la que en muchos casos puede ser más de una, y las decisiones adecuadas pasan por la experiencia de los ingenieros de control. Como se verá en este capítulo y como se discutió en el Capítulo 16, hay más de una forma de controlar un proceso y cada una de ellas ofrece ventajas y desventajas. En este aspecto, es de remarcar que hay una gran cantidad de documentación en la bibliografía tradicional de control de procesos y muchas de ellas muy valiosa como la de Harriot [34], Lipták y Venczel [50] y [51], Shinskey [76] y [77], Sánchez [74], entre muchos otros.

En este capítulo se presenta un bosquejo de las distintas estrategias de control aplicables a las operaciones unitarias más conocidas, sugiriendo al lector profundizar en las obras anteriormente citadas.

### 17.2. Control de Intercambiadores de Calor

Consideraremos el caso de intercambiadores de casco y tubo donde se realiza el intercambio de energía entre dos líquidos o bien un líquido y un vapor.

Los intercambiadores de calor, son básicamente sistemas a parámetros distribuidos, lo que hace que las propiedades varían en función del tiempo y la posición. Por tanto, una representación matemática rigurosa debería plantearse mediante ecuaciones diferenciales a derivadas parciales.

Las respuestas dinámicas de lazo abierto frente a cambios en las variables de entradas son sobreamortiguadas y sus tiempos de establecimiento depende de las capacidades térmicas relativas de los medios. Usualmente, como todos los sistemas en la ingeniería de procesos, los intercambiadores de calor tienen una dinámica lenta y no lineal en comparación con los demás elementos del lazo de control.

Se debe tener cuidado de no medir la temperatura de salida del fluido calefaccionado demasiado lejos del intercambiador, esto podría aportar una demora en la medición, lo cual trae problemas con el diseño del sistema de control por la incorporación de un tiempo muerto en el lazo de control. Por lo general, el transductor de temperatura se lo coloca lo suficientemente alejado como para garantizar que la turbulencia logre un mezclado representativo, pero no tanto como para incluir demora en su lectura.

Para controlar la temperatura de salida, las variables manipuladas pueden ser; i) el caudal de uno de los fluidos, ii) la temperatura de entrada de uno de los fluidos, iii) el porcentaje de caudal a derivar y iv) el área de transferencia (en caso de poder alterar el porcentaje de inundación de los tubos).

Las perturbaciones más comunes son; i) las temperaturas y caudales de entradas y ii) en el caso de intercambiadores de calor calefaccionados con vapor, la presión y el título del vapor de calefacción. Además, en caso de existir trampas de vapor, funcionamiento de las mismas (sea bueno o malo) perturba el sistema, generando lo que se conoce como ciclos de oscilación.

### **17.2.1. Control de intercambiadores de calor líquido-líquido**

El propósito en esta sección y las siguientes es el de presentar alternativas de control de intercambiadores de calor sin entrar en los detalles de la selección del hardware.

#### **Control Feedback**

La Fig. 17.1 muestra un intercambiador de calor donde el fluido de proceso es enfriado mediante un fluido refrigerante. En este caso, un lazo de control feedback es propuesto para controlar la temperatura de proceso. Dicho lazo es el más simple e intuitivo, y consiste en registrar la temperatura a controlar para luego actuar sobre el caudal de refrigerante. La decisión de optar por manipular caudal se debe a cuestión práctica además de que los sistemas en general son dinámicamente más rápido cuando se manipula caudal en lugar de otra variable. La válvula de control puede ser montada en el intercambiador a la entrada o salida del fluido refrigerante. Desde el punto de vista de la calidad del control hay

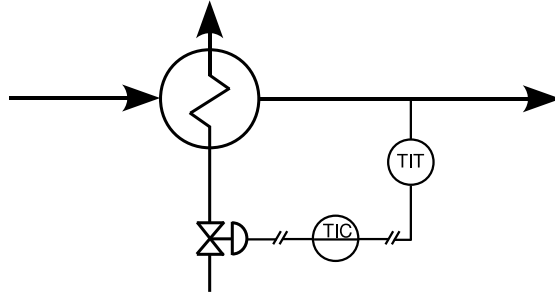


Figura 17.1: Control feedback mediante el caudal del líquido refrigerante.

poca diferencia entre colocar la válvula de control corriente arriba o corriente abajo del intercambiador.

La desventaja de esta estrategia es que dependiendo de las dimensiones del intercambiador, las constantes de tiempo del sistema pueden ser grandes, haciendo lenta la respuesta de lazo cerrado del proceso y en consecuencia se deteriora la performance de la variable de control. Para este caso, el uso de válvula de igual porcentaje suele ser recomendada.

En la gran mayoría de las instalaciones un controlador PID suele ser usado para controlar un intercambiador de calor donde el modo derivativo se vuelve esencial en sistemas con constante de tiempo grandes o cuando se tiene súbitos cambios en el rendimiento del intercambiador. Debido a la naturaleza relativamente lenta de estos lazos de control, el ajuste de la banda proporcional debe ser grande para mantener la estabilidad. El modo integral es requerido para corregir el offset en la temperatura controlada causada por los cambios en carga o consigna.

### Control feedback con bifurcación o by-pass

En muchas instalaciones, las constantes de tiempo de los intercambiadores de calor son demasiado grandes como para permitir un control efectivo durante cambios en carga. En tales casos, es posible *trucar* las características dinámicas del proceso bifurcando y mezclando corrientes de proceso fría y caliente (Lipták y Venczel, [51] y Shinsky [77]) y como se muestra en las Figs. 17.2a y b. Este propósito puede alcanzarse mediante el uso de una *válvula de tres vías* ya sea mediante una *válvula bifurcadora* o bien una *mezcladora*, como lo muestra los esquemas de control de las Fig. 17.2a y b. Como resultado de esta estrategia se tiene un incremento en la velocidad de respuesta conjuntamente con un ahorro de costos.

La elección de la localización relativa al intercambiador de la válvula de tres vías está normalmente basada en consideraciones de presión y temperatura. La localización corriente arriba (Fig. 17.2a) se debe usualmente por razones de uni-

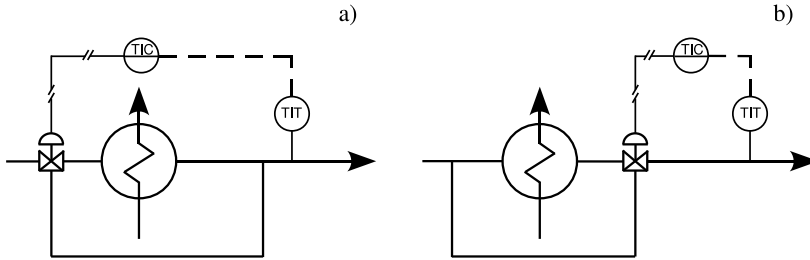


Figura 17.2: a) Control mediante bifurcación usando válvula bifurcadora. b) Control mediante bifurcación usando válvula mezcladora.

formidad de temperatura de la válvula, mientras que la localización corriente abajo se debe a la necesidad de operar el intercambiador a altas presiones. Recuerde que la válvula es instalada en condiciones de temperatura ambiente y a pesar de estar rígidamente montada, la expansión en línea producto de las altas temperaturas pueden distorsionar su instalación. Además, la mezcla de fluidos con temperaturas sustancialmente diferentes puede también provocar distorsiones. Por estas razones, el uso de válvulas de tres vías no es recomendado para fluidos que excedan los  $260\text{ }^{\circ}\text{C}$  o bien la diferencia entre ellos no exceda los  $170\text{ }^{\circ}\text{C}$  (Lipták y Venczel, [51]).

También se sugiere en el esquema de control con by pass incluir una válvula manual de dos vías en la bifurcación con el objeto de ajustar la resistencia al flujo tal que su pérdida de carga iguale a la resistencia del intercambiador (Lipták y Venczel, [51]).

En la Fig. 17.3 se muestra una modificación a los sistemas anteriores incluyendo un control adicional del caudal de líquido de enfriamiento. Este sistema tiende a maximizar la temperatura de salida del fluido frío, minimizando el flujo utilizado. Por otra parte, esta estrategia también es adecuada cuando el medio calefactor es un líquido (en lugar de un vapor), permitiendo prevenir el sobrecalentamiento del fluido en la camisa. Así, si la consigna de temperatura en el lazo del fluido calefactor se mantiene constante, cuando aumente el caudal de proceso, el fluido calefactor se enfriaría y en consecuencia la válvula se abrirá para aportar más calor al sistema y viceversa.

Cuando por razones de temperatura u otras consideraciones las válvulas de tres vías no pueden ser usadas, pero es necesario mejorar la velocidad de repuesta del sistema mediante un control con by pass del intercambiador, la instalación de dos válvulas de dos vías es la lógica solución. La Fig. 17.4 muestra este esquema de control, donde las dos válvulas deben estar en oposición. Así, cuando una se abre la otra debe cerrar. Con estas válvulas se logra el mismo control que con una válvula de tres vías. La razón por la cual no siempre se usa un esquema con válvula de tres vías se debe a una cuestión de costo.

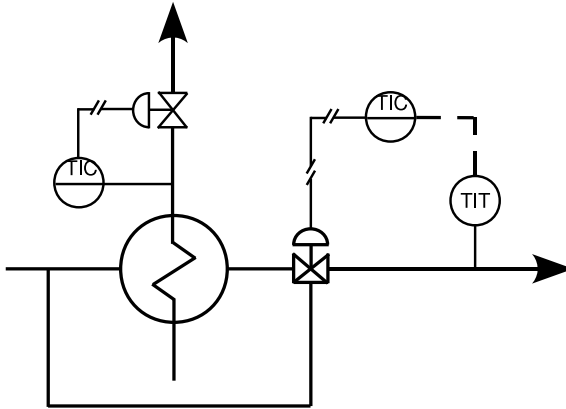


Figura 17.3: Estrategia con conservación de caudal de fluido refrigerante.

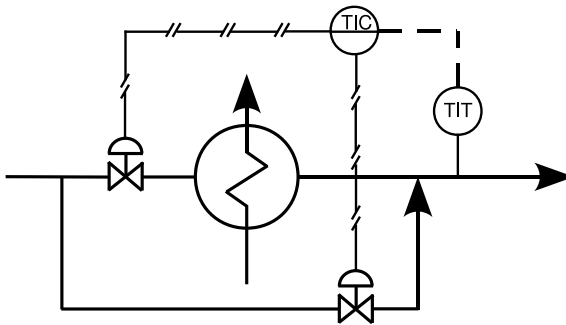


Figura 17.4: Control con by pass de un intercambiador usando válvulas de dos vías.

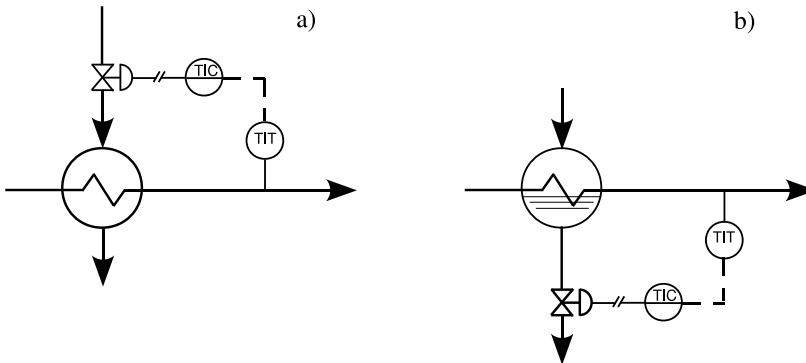


Figura 17.5: a) Control feedback de intercambiadores de calor manipulando caudal de vapor. b) Control feedback de intercambiadores de calor manipulando caudal de condensado.

## 17.2.2. Control de intercambiadores de calor líquido-vapor

### Control feedback

Las Fig. 17.5a y b muestran dos esquemas de control de intercambiadores de calor calefaccionados con vapor y que resultan de una idea intuitiva de aplicación del concepto de realimentación tradicional.

De acuerdo con Liptáck y Venzel [50], la alternativa de control de la Fig. 17.5a suele ser dinámicamente muy rápida aunque sensible a los cambios de presión de vapor en comparación con la alternativa de la Fig. 17.5b (dependiendo de las dimensiones del intercambiador). Además, en el caso de la alternativa de control de la Fig. 17.5a se hace necesario la incorporación de una trampa de vapor. El funcionamiento intermitente de la trampa de vapor puede afectar considerablemente a la variable de control, pudiéndose generar ciclos de oscilación con la descarga de vapor, que pueden sobrepasar la temperatura deseada de la salida controlada. Esto es corregido con la alternativa de control de la Fig. 17.5b inundando parte de los tubos de calefacción. Dicha alternativa suele aplicarse a precalentadores verticales, mientras que en caso de condensadores la distribución horizontal de tubos, dispuestos en una sección circular, trae aparejada una relación entre el nivel y el área de intercambio de calor altamente no lineal dificultando el control de temperatura.

#### *Controles de Nivel de Condensado*

Una variante a la alternativa de control de la Fig. 17.5a es la que se muestra en la Fig. 17.6. Por lo general, esta alternativa suele ser aconsejable cuando es necesario calefaccionar el fluido a temperaturas inferiores a su punto de ebullición.

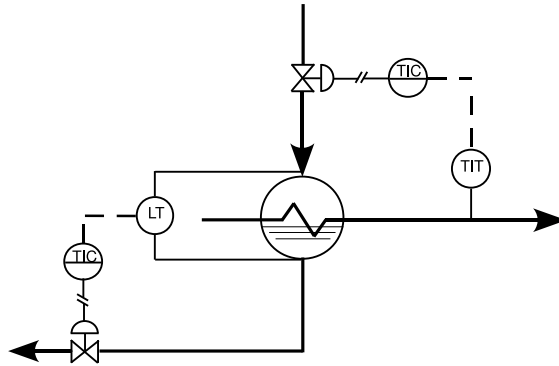


Figura 17.6: Esquema de control de temperatura de proceso que incluye un control de nivel de condensado.

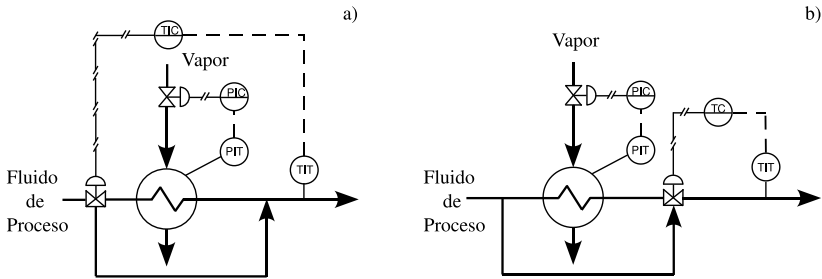


Figura 17.7: a) Esquema de control de temperatura de proceso utilizando control de una válvula bifurcadora e incluye un control de presión de vapor. b) Esquema de control de temperatura de proceso utilizando control de una válvula mezcladora e incluye un control de presión de vapor.

Otras alternativas son presentadas por Lipták y Venczel [50] en donde se discute la problemática del control de nivel de condensado.

### Control feedback con bifurcación o by-pass

Similarmente al control con bifurcación presentado en la Fig. 17.2a, la Fig. 17.7a muestra un esquema de control simple de bifurcación y mezcla de fluidos. En este caso, debido a que se está trabajando con vapor, se incluye un lazo de control para la presión de vapor.

Una alternativa al esquema de control anterior surge con la incorporación de una válvula de 3 vías tipo mezcladora a diferencia de la bifurcadora como se muestra en la Fig. 17.7b. Con la válvula de tres vías se pretende aumentar o disminuir la resistencia de cada camino manteniendo aproximadamente el flujo

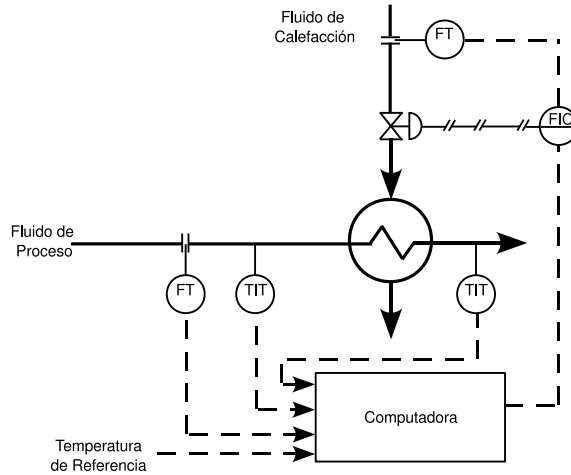


Figura 17.8: Control de temperatura de proceso utilizando un esquema combinado feedforward-feedback.

total constante.

Si las variaciones porcentuales de flujo sobre el intercambiador superan los valores indicados puede que el líquido se sobrecaliente y la presencia de componentes volátiles (si los hay) puede afectar el intercambio de calor. En tal caso, se recomienda incorporar un lazo de control de presión indicados en la Fig. 17.7a y b.

### Control feedforward-feedback

Los caudales de entrada y su temperatura pueden ser serias perturbaciones al momento de controlar la temperatura de salida de la corriente de proceso. Por tal motivo, medir dichas variables y corregir anticipadamente puede mejorar considerablemente la performance de la variable de controlada.

La Fig. 17.8 muestra un esquema de control feedforward-feedback (Lipták y Venczel, [51]; Shinskey, [77]; entre otros) donde se mide el estado de la corriente de proceso (caudal y temperatura) para así poder implementar el control feedforward mientras que, la medición del caudal de la corriente de vapor es usada para implementar el lazo de control feedback.

### Control en Cascada

Una alternativa a los esquemas de control presentados en las Figs. 17.5a y b es el control en cascada que se presenta en la Fig. 17.9. En este caso se pretende eliminar perturbaciones provenientes de la corriente de vapor



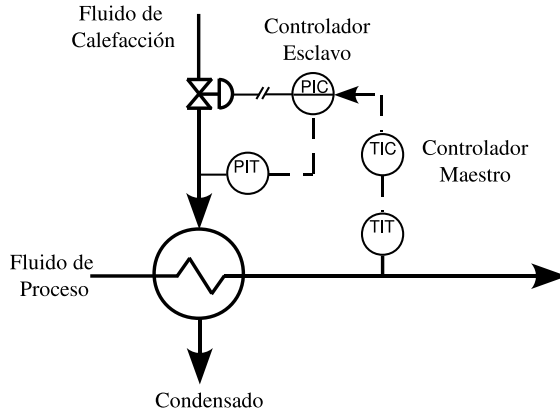


Figura 17.9: Control de temperatura de proceso utilizando un esquema combinado en cascada.

Para este caso el lazo interno se forma tomando información de la presión de entrada del fluido calefactor, así todos los cambios en la calidad del vapor son detectados en el lazo interno vía cambios en la presión de vapor, mientras que el lazo externo sólo toma información de la variable de control, en este caso la temperatura de proceso.

## 17.3. Control de Reactores

En las plantas químicas se suele encontrar reactores continuos, batch y/o semibatch. Los reactores continuos son diseñados para operar en forma ininterrumpidamente un caudal de alimentación, uno de extracción de productos y el suministro de calor. En el caso de los reactores batch, los reactivos son cargados en porciones discretas que reaccionan por un dado tiempo, bajo condiciones controladas preestablecidas. Los reactores semibatch son una variante de estos últimos en donde el proceso de reacción se inicia durante la carga del mismo.

A continuación se presenta esquemas de control de temperatura y presión de reactores sin diferenciar si se trata de un reactor continuo o batch, ya que estos esquemas son válidas esencialmente para ambos.

### 17.3.1. Control de temperatura

Para el control de reactores químicos, la temperatura de reacción es frecuentemente seleccionada como la variable de control por excelencia. Esta puede ser necesaria para controlar la velocidad de reacción, el lado de una reacción, la distribución de productos o el peso molecular de un polímero, ya que estos

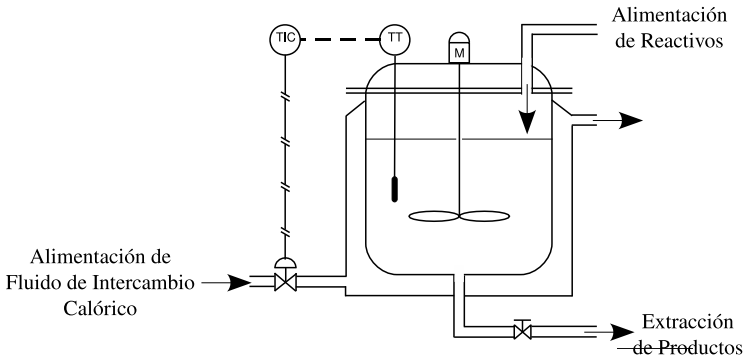


Figura 17.10: Control feedback de temperatura de un reactor.

son sensitivos a la temperatura y en algunos casos es necesario controlarla en un intervalo muy estrecho. Muchas reacciones son exotérmicas y con el objeto de controlar la temperatura, el calor liberado debe ser removido desde el sistema a medida que es liberado por los reactantes.

Un simple esquema de control de temperatura es el que se muestra en la Fig. 17.10 y que consiste simplemente en registrar la temperatura dentro del reactor y manipular el calor entregado a través del caudal de fluido de intercambio calórico. Dicho fluido puede intercambiar calor a través de una chaqueta (como en el caso de la figura) o bien de un serpentín, lo que es indistinto para la estrategia de control aquí presentada. En el caso de un gran número de instalaciones el esquema considerado puede ser insatisfactorio, el fluido o bien el caudal en el medio de transferencia de calor pueden ser inadecuado para mantener un buen coeficiente de transferencia de calor generando un gradiente de temperatura en la chaqueta. Esto puede resultar en diferencia de temperatura localizadas dentro del reactor (puntos calientes o fríos) que son no deseados o incontrolables.

La Fig. 17.11 muestra un esquema de control de temperatura en donde el líquido es recirculado en la camisa mediante un lazo de bombeo externo. La velocidad del fluido en la camisa del reactor es mantenido lo suficientemente alta como para lograr coeficientes de película satisfactorios para la transferencia de calor y en consecuencia, lograr una temperatura de pared uniforme en la camisa del reactor (Lipták y Venczel [51], Shinsky [77], entre otros).

Los sistemas de control de temperatura pueden ser deficientes cuando i) hay dinámicas muy lentas debido a una masa física considerablemente grande del reactor en si mismo y del sistema refrigerante<sup>1</sup>, responsable de reajustar la temperatura del reactor y por tanto, de extraer el calor generado por la masa reactante o bien, ii) retardos en la instrumentación del lazo de transferencia de calor.

Un mejor método para controlar la temperatura de un reactor es el lazo en

<sup>1</sup>se sugiere ver las ecuaciones dinámicas del Capítulo 4.

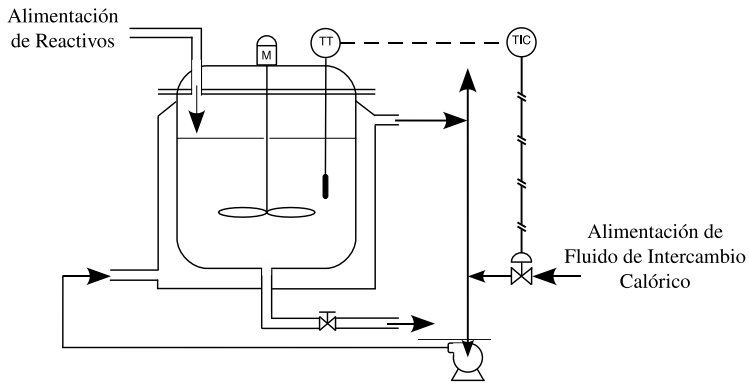


Figura 17.11: Control de temperatura de un reactor con recirculación.

cascada, que se muestra en la Fig. 17.12. Cuando la temperatura del reactor batch cambia en forma lenta, con la inclusión de un lazo secundario se puede lograr respuestas más rápidas.

Lo importante en el lazo de control en cascada es que el lazo secundario debería ser capaz de corregir las perturbaciones que se originan en el medio de transferencia de calor sin que su efecto llegue a ser observado por el controlador maestro.

En algunos casos, se suele especificar un límite superior de temperatura en la corriente recirculante para evitar problemas en caso que el producto sea sensitivo a la temperatura o si la reacción es adversamente afectada por la alta temperatura de pared del reactor (Lipták y Venczel [51]).

### 17.3.2. Control de presión

En muchos casos, la velocidad de reacción es función de la presión, como por ejemplo en reacciones en fase gaseosa o líquido-gas, en reacciones de polimerización de alta presión, en reacciones de oxidación e hidrogenación, y en ciertas reacciones químicas donde no sólo absorbe la alimentación de gas de proceso sino también generan gases como productos o subproductos. En consecuencia tanto la velocidad de reacción como la calidad de los productos finales son función de la presión en el interior del reactor.

Para estos tipos de reacciones químicas se requiere adicionar al control de temperatura alguna forma de control de presión.

La Fig. 17.13 representa una reacción batch en la cual el gas de proceso es absorbido en el curso de la reacción química.

En la Fig. 17.14 se ilustra un sistema de control de presión en el cual el control de flujo de la alimentación de gas de proceso al reactor y la presión del reactor se mantienen actuando sobre una línea de venteo de gas. Esta ilustración

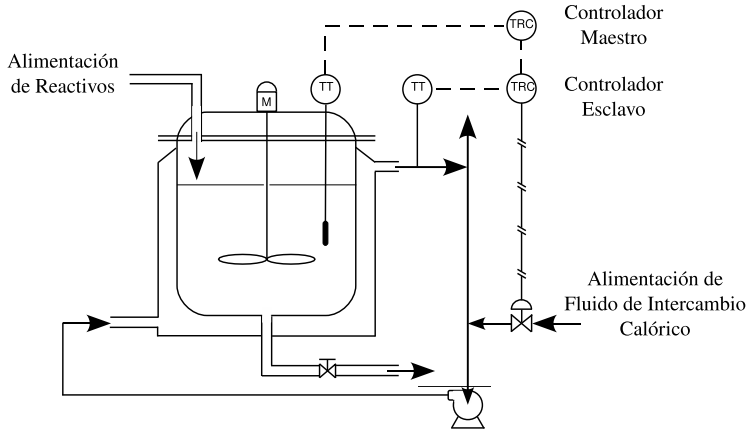


Figura 17.12: Control de temperatura en cascada de un reactor con recirculación.

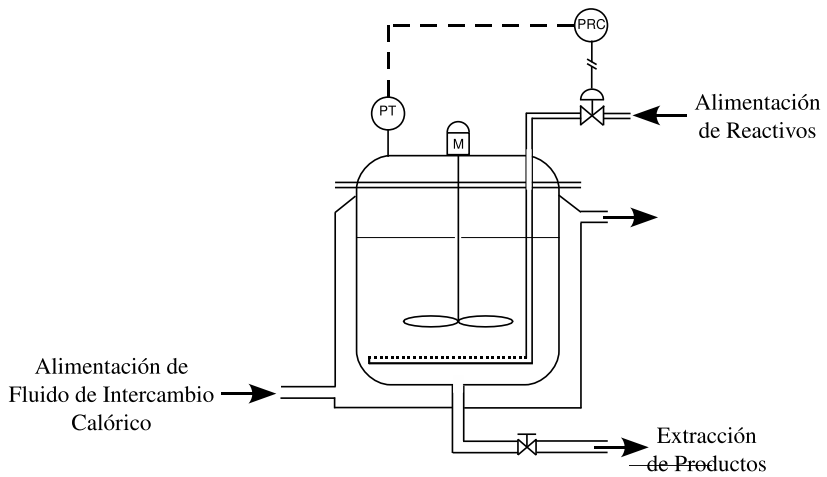


Figura 17.13: Control de presión modulando la entrada de gas.

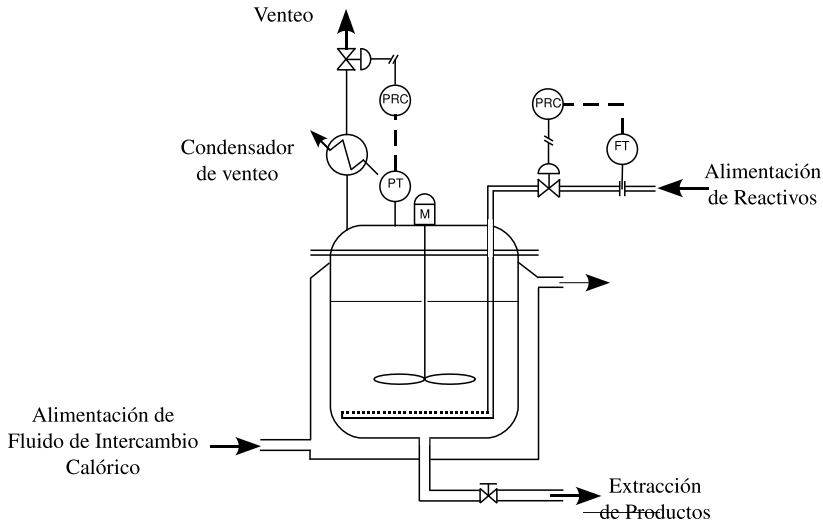


Figura 17.14: Control de presión del reactor actuando sobre el flujo de gas de venteo.

particular también muestra un condensador de venteo, el cual es usado para minimizar las pérdidas de los productos de reactor a través del venteo (Lipták y Venczel [51]).

En el caso de un reactor líquido-gas continuo, un esquema de control similar al de la Fig. 17.14 es implementado tanto para la alimentación de gas como de líquido (Lipták y Venczel [51]). La presión del reactor es sensada y similarmente al esquema anterior, el exceso de gases no reaccionados o gases de subproductos resultantes son eliminados del reactor a través de la misma línea de venteo para mantener la presión de operación deseada.

Para mayor descripción así como un mayor número de estrategias de control de reactores se sugiere consultar las obras de Shinsky [77] y Lipták y Venczel [51], entre muchos otros.

## 17.4. Control de Columnas de Destilación

En la literatura hay un sin número de artículos que abordan el problema del control de columnas de destilación. La razón de esto se debe a que es la operación unitaria de separación más utilizada en la industria y por tanto, el interés por mejorar la operatividad y la optimalidad de dicha operación difícilmente se detenga. Como dato atractivo, según algunos expertos, en la actualidad en la industria química de los Estados Unidos se encuentran en operación no menos de 40.000 columnas de destilación, las que representan (para algunos autores)

el 95 % de las operaciones de separación de la industria. Estas son cifras concluyentes acerca de la importancia de la destilación como operación unitaria de separación a nivel industrial.

Por otro lado, en pocas palabras se puede decir que el control de columnas de destilación está encaminado a hacer que los productos obtenidos de éstas tengan una composición constante evitando fallas de la operación, daños en los equipos, etc. Para muchos investigadores e ingenieros de control, la destilación es un desafío, debido a que se trata de un proceso no lineal, multivariable con acoplamiento (en algunos casos, de importancia), con fuerte influencia de las perturbaciones y con un comportamiento, desde el punto de vista práctico, no estacionario, en otras palabras, una columna de destilación se encuentra permanentemente en estado transitorio. La razón de esto es que se trata de equipos de dimensiones considerablemente grandes y en muchos casos se supera los 30 metros de altura.

En esta sección, se asume que el lector conoce el proceso de destilación y por tal motivo, muchas explicaciones y detalles del proceso, serán omitidos.

De forma sencilla, se puede decir que la destilación es la operación por la que se efectúa la separación de una mezcla líquida de dos o más componentes basándose en la diferencia de sus temperaturas de ebullición. Como es sabido, se trata de una operación unitaria de múltiples etapas con un gran número de variables independientes, dependientes y fijas (como ser para este último caso, el número de platos de la columna o el plato de la alimentación, etc.). Así, una operación de destilación continua tiene como variables,

1. composición de la alimentación ( $x_f$ ),
2. caudal de alimentación ( $F$ ),
3. calor aportado ( $Q_c$ ),
4. calor extraído ( $Q_r$ ),
5. presión ( $P$ ),
6. caudal de destilado ( $D$ ),
7. composición de destilado ( $x_d$ ),
8. caudal de reflujo ( $R$ ),
9. caudal de fondo ( $B$ ),
10. composición de fondo ( $x_b$ ).

Los sistemas de control automático alrededor de una columna de destilación continua tienen por objetivo leer y manipular variables a fin de obtener una separación con una determinada composición, ya sea de tope o de fondo. Uno de los principales problemas es que la composición no resulta sencilla de medir, y para peor, en muchos, esta no puede quedar subordinada a otros objetivos de control.

La bibliografía tradicional (Harriott, [34]; Shinskey, [77]; Liptak y Venczel, [51], entre muchos otros) presentan los esquemas de control de columnas de destilación según la siguiente clasificación:

1. esquemas de control por balance de materia,
2. esquemas de control para composición,
3. sistemas de control de presión.

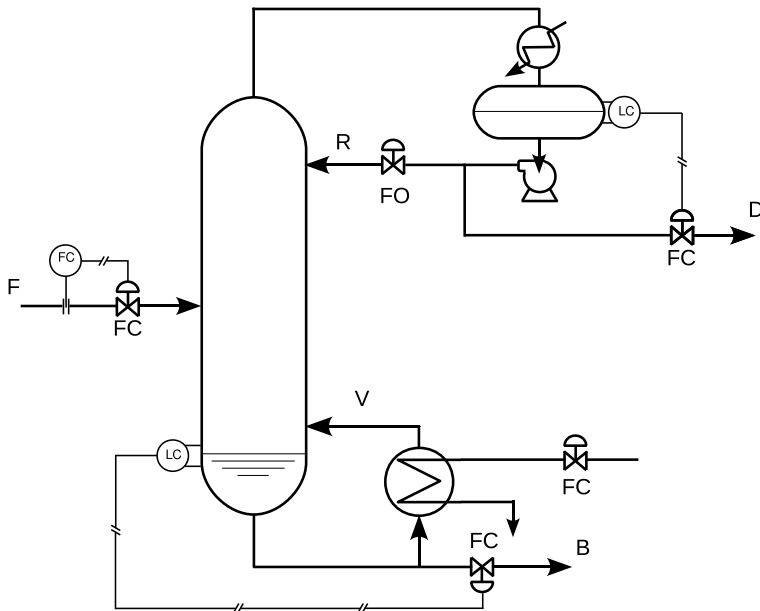


Figura 17.15: Esquema de control más simple para columnas de destilación.

Pero otra posible clasificación podría ser en función de la complejidad del esquema de control, esto es,

1. lazos feedback o simples y,
2. esquemas combinados (feedforward-feedback, cascada, etc.).

Con el fin de ir incrementando el orden de complejidad de los esquemas de control, en este capítulo se presenta el tema considerando ambas clasificaciones.

### 17.4.1. Lazos simples

#### Sistemas de control de balance de materia

Este esquema tiene por objetivo que en promedio se cumpla el balance de materia total ( $F = D + B$ ). En la Fig. 17.15 se muestra el esquema de control más simple para columnas de destilación. Este esquema presenta dos controles de nivel en el tope y fondo de la columna y dado que se permite fluctuar el nivel dentro de ciertos límites, los caudales de salida de productos de tope y fondo fluctuarán. En el caso del control de nivel de condensador, la fluctuación permitida debe ser tal que no afecte seriamente el caudal de reflujo, para no poner en riesgo la operación. En este esquema, el control del caudal de alimentación es deseable (no siempre posible) para la estabilidad operativa de la columna.

Si se ha prefijado el caudal de destilado entonces una alternativa es el esquema de control de la Fig. 17.16. En este caso las fluctuaciones del caudal de

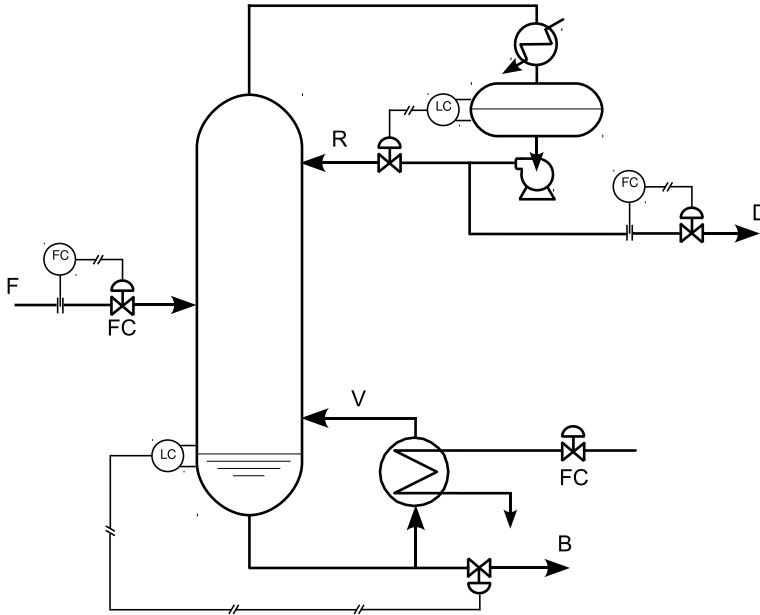


Figura 17.16: Esquema de control de columnas de destilación para cuando el caudal de destilado ha sido fijado con anterioridad (Harriott, [34]).

alimentación son absorbidas por el caudal de fondo. Con este esquema se aporta un caudal estable de destilado al equipo que le sucede, pero su composición podrá fluctuar apreciablemente. Note que este esquema funciona a caudal de alimentación fijo, de manera que los caudales de tope y fondo quedarán supeditados a los requerimientos de los equipos posteriores. Por lo tanto, así planteado el esquema de control no ajusta las composiciones de tope y fondo ( $x_B$  y  $x_D$ ) a valores predeterminados. Una variante a este esquema es presentada por Harriott [34] y Liptak y Venczel [51] en donde se propone un esquema combinado para el control del caudal de reflujo. En dicho esquema, además de medir el nivel de condensado se aprovecha la señal de caudal de destilado y reflujo para manipular el caudal de retorno a la columna.

La variante opuesta a la anterior es la que se muestra en la Fig. 17.17. Aquí el caudal de fondo queda fijo y las fluctuaciones en el caudal de alimentación son absorbidas por el caudal de destilado. Notar que las fluctuaciones de nivel de fondo de la columna son resueltas mediante el aporte de calor en el rehervidor, lo que puede resultar en dinámicas muy lentas en comparación con el esquema anterior.

Los esquemas de las Figs. 17.16 y 17.17 presentan mejor performance que



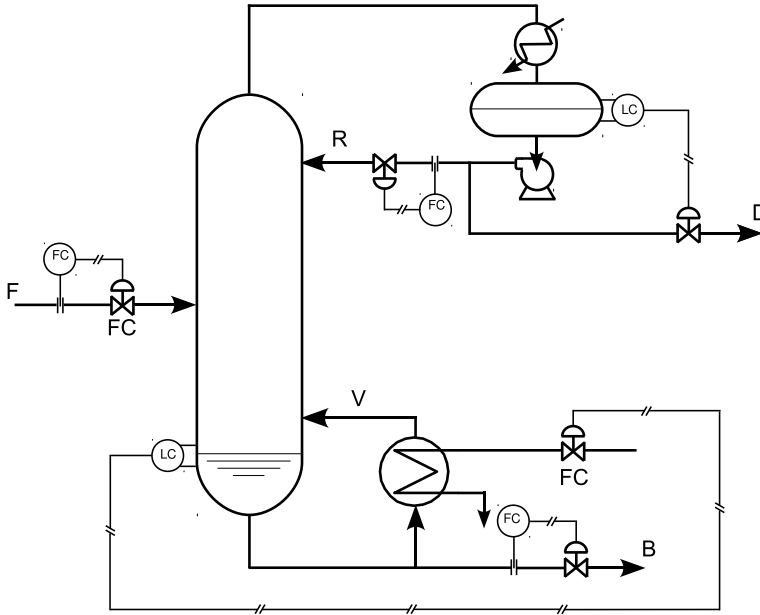


Figura 17.17: Esquema de control de columnas de destilación para cuando el caudal de fondo ha sido fijado con anterioridad (Harriott, [34]).

el de la Fig. 17.15 siempre y cuando las dinámicas incorporadas no afecten seriamente el desempeño de la operación. Note que los tres esquemas hasta aquí presentados necesitan fijar el caudal de alimentación para su correcto desempeño.

### 17.4.2. Sistemas de control de composición

El control de composición está directamente vinculado al gobierno del balance de energía.

A medida que aumenta la pureza de la separación, se hace necesario un mayor número de platos, por tanto, los saltos de temperatura entre cada plato se van haciendo hacia los extremos cada vez menores. De allí surge que la variación de temperatura tiene poca sensibilidad si se mide entre dos platos próximos, y se debe buscar otro plato más alejado del extremo. Por tanto, si se pretende asociar los cambios de temperatura con la composición de tope, la ubicación de uno o más sensores de temperatura resulta clave para el buen desempeño del sistema de control.

Stephanopoulos [84] comenta el uso de un promedio de temperaturas en varios platos próximos al tope de la columna para tener una idea de la composición de pentano en dicho caso (ver Capítulo 1).

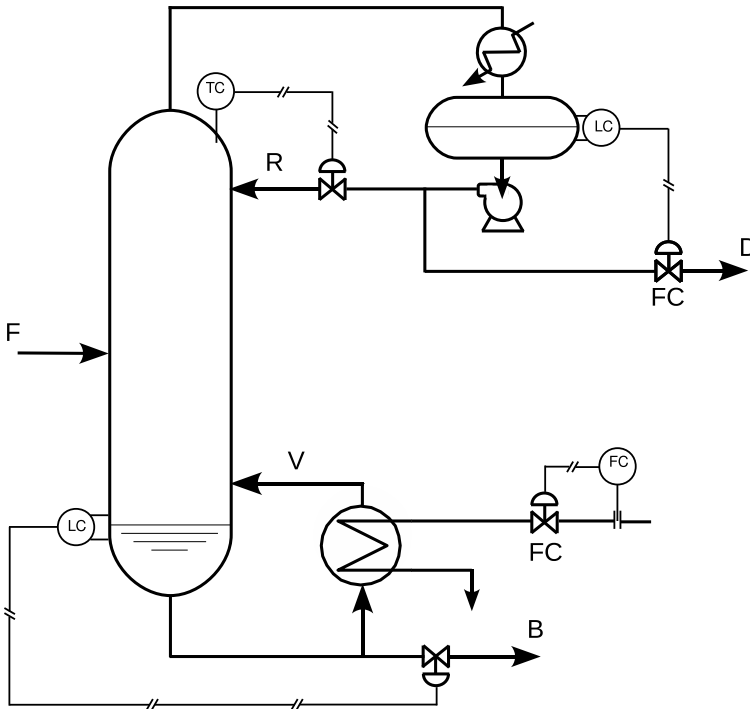


Figura 17.18: Esquema de control de destilado manipulando el caudal de reflujo y el nivel del condensador (Harriott, [34]).

### Control indirecto de la composición de destilado

Hay tres esquemas posibles que son los que se presentan en las Figs. 17.18, 17.19 y 17.20. Para los tres esquemas se está asumiendo que el producto destilado es el componente más importante de la operación de separación

Suponiendo que la presión es mantenida constante, mediante la medición de la composición (TC) se manipula directamente el caudal de reflujo y el nivel del condensador pasa a ser controlado manipulando  $D$ . El control del balance de materia se complementa como se indicó en la Fig. 17.15. Esta idea se expresa en la Fig. 17.18.

El tanque acumulador de condensado sirve para mantener un sello de líquido en las líneas de reflujo y producto, proporcionando además un espacio de separación para los gases incondensables. Los grandes acumuladores pueden amortiguar los cambios en los caudales proveyendo además de un reservorio de alta pureza.

Este esquema se vuelve muy sensitivo a los cambios en el caudal de vapor si se tiene una relación  $R/D$  muy grande. Si  $R \gg D$  y se tiene un incremento

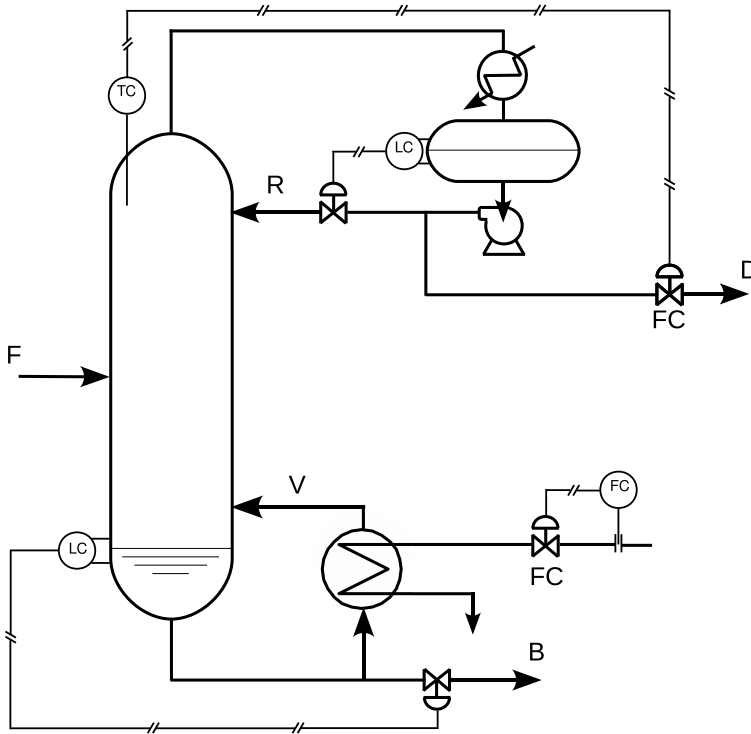


Figura 17.19: Esquema de control de destilado manipulando el caudal de destilado (Harriott, [34]).

en  $V$  luego, aumentará  $D$  en un gran porcentaje mientras que  $R$  crecerá poco. Esto puede llevar a un cambio muy lento en  $x_D$ , y en consecuencia el sensor de temperatura (a raíz de su sensibilidad) puede llegar a reflejar el cambio ocurrido pasado una considerable cantidad de tiempo. A pesar de esto, este esquema es muy popular y no presenta mayores ventajas que el que se muestra en la próxima figura.

El esquema de la Fig. 17.19 es intuitivamente más directo que el anterior ya que la simple observación de la ecuación de balance para el componente más volátil lleva a la idea de manipular el caudal de destilado. En dicho esquema, todo cambio detectado en TC se reflejará en el caudal de destilado impactando en el nivel del tanque acumulador y haciendo que el LC modifique el caudal de reflujo. Así la dinámica del acumulador se incorpora en el camino de la corrección del reflujo para poder ajustar la composición y por tanto, este esquema presenta una dinámica más lenta que el caso anterior.

Finalmente, la Fig. 17.20 muestra la posibilidad de controlar la composición de tope mediante un cambio en el caudal de vapor y en consecuencia en la canti-

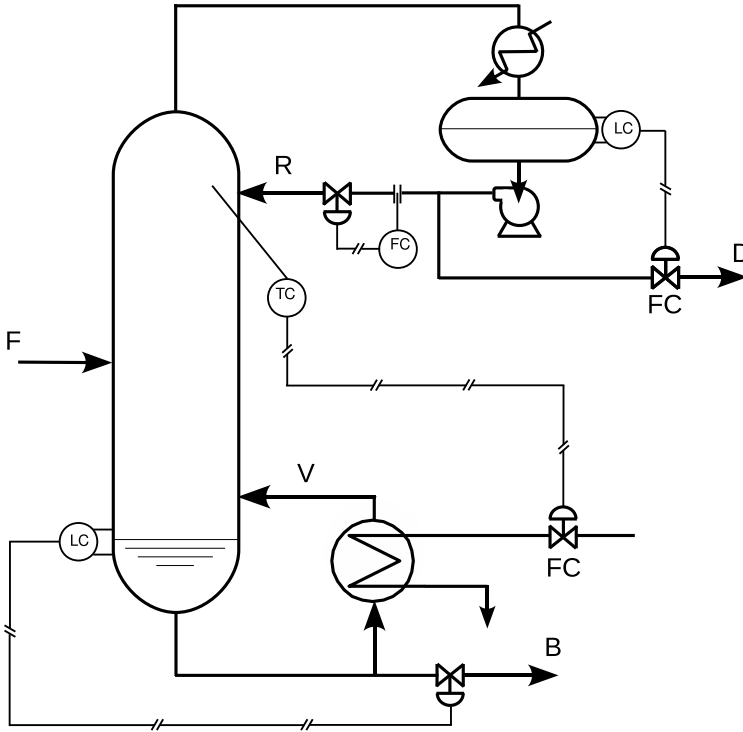


Figura 17.20: Control de composición de tope manipulando caudal de vapor. Usualmente designado como control de composición cruzado (Harriott, [34]).

dad de calor entregado en el hervidor de fondo. En este caso, el caudal de reflujo está fijo y el nivel del acumulador es controlado manipulando  $D$ . Como resulta obvio, la dinámica de toda la columna es incorporada en el control de la composición de tope y por tanto este esquema se torna poco práctico para columnas de gran tamaño. Harriot ([34]) comenta respecto a este esquema que si el elemento sensante está ubicado varios platos por debajo del tope puede, en ciertos casos, tener dinámica más rápida que en los otros dos esquemas anteriores.

Este último esquema es conocido en la literatura como control de composición cruzado.

Lo hasta aquí presentado, como se dijo antes, resulta válido para el control de la composición de tope. Es de destacar, que estas no son todas las estrategias de control de composición existentes. En la literatura de instrumentación y control de procesos (Harriott, [34]; Lipták y Venczel, [51]; Sánchez, [74], entre muchos otros) se encuentra presente otras estrategias como las destinadas al control de las dos composiciones.

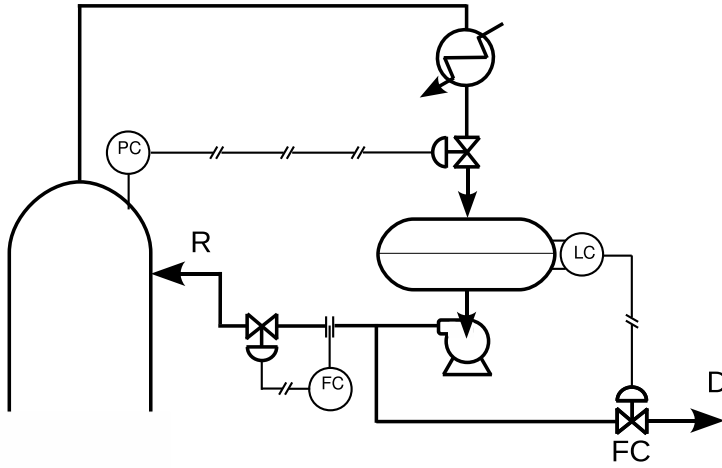


Figura 17.21: Control de presión de columnas de destilación manipulando caudal de condensado.

### Sistemas de control de presión

Como es sabido en toda mezcla líquida, la presión, la temperatura y la composición están íntimamente ligados. Por tanto, si se pretende alcanzar una determinada composición en el tope de una columna de destilación, no basta con mantener constante la temperatura de los platos superiores en un determinado valor si la presión de la columna fluctúa. Recordar que la curva de equilibrio entre temperatura y composición asume que la presión se mantiene constante.

Esto hace que el control de presión en una columna de destilación se torne en una condición sumamente necesaria. Para esto, algunas estrategias de control de presión hacen uso de los calores puestos en juego durante la condensación mediante el manejo del caudal de condensado o bien, del caudal de refrigerante. Sin duda, que existe una gran cantidad de esquemas de control de presión para las columnas de destilación (Chin [23]) y aquí sólo se detallará las más conocidas.

La Fig. 17.21 muestra un sistema de control de presión clásico para una columna de destilación que tiene condensación total. Dicho esquema resulta sumamente intuitivo, esto es, se mide la presión de tope de la columna de destilación y se actúa sobre el caudal de condensado. Un esquema similar para una columna de destilación con condensación parcial se muestra en la Fig. 17.22. En este último esquema se actúa sobre dos válvulas de forma tal que la válvula de venteo de gas es normalmente cerrada y sólo se abre cuando el sistema de condensación no tiene la capacidad de condensar todo el vapor que sale del tope de la columna.

La Fig. 17.23 muestra un esquema de control de presión que hace uso de

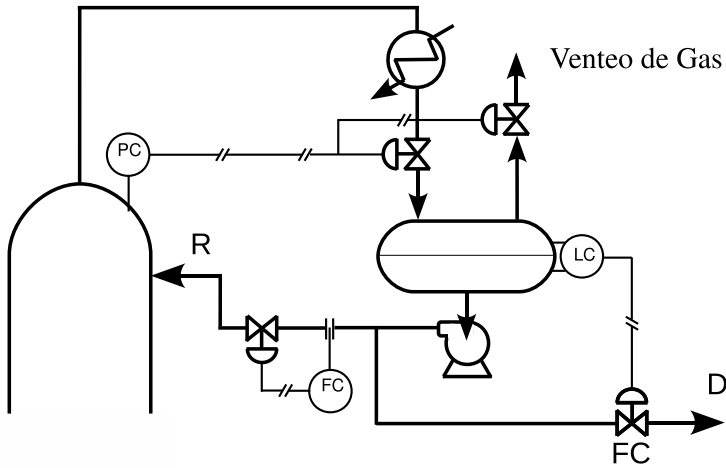


Figura 17.22: Control de presión de columnas de destilación manipulando caudal de condensado y de gas de venteo.

un bypass de la corriente de vapor de tope. Así, parte del vapor no ingresa al condensador lo que lleva a subenfriar el vapor que ingresa al mismo. De acuerdo con Harriot [34] hasta un 90 % del total de vapor se suele ingresar al condensador y hasta un 10 % del caudal total es redirigido al tanque de reflujo. Esto hace que el vapor condense en dicho tanque calentando el líquido subenfriado. A medida que la presión de la columna descende, el controlador envía más vapor a través de la línea de bypass, lo que hace crecer la presión en el tanque de reflujo, en el condensador y consecuentemente en la columna. Una posible desventaja de este esquema es que la temperatura del reflujo puede fluctuar a causa de una mezcla incompleta en el tanque de reflujo.

### 17.4.3. Esquemas combinados

#### Control feedforward-feedback

Como es sabido, las variaciones del caudal de alimentación afectan las composiciones de tope y fondo de una columna de destilación. Más aún, las respuestas dinámicas a los cambios en caudal y composición de alimentación son tanto más lentas cuanto más grande es la columna. Por tal motivo, una acción correctiva anticipada puede mejorar notoriamente el desempeño de dicho sistema de separación.

Una posibilidad que busca alcanzar una buena especificación de productos de tope y fondo es el que se muestra en la Fig. 17.24. En este caso, se trata de evitar que los cambios de caudal de alimentación impacten fuertemente en las composiciones de destilado y del producto de fondo. Controlar ambos extremos

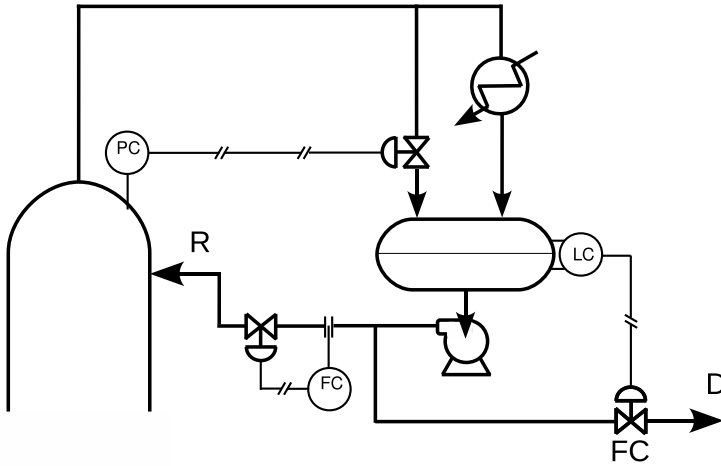


Figura 17.23: Control de presión de columnas de destilación utilizando bypass de vapor.

de la columna en forma simultánea es una tarea no sencilla de implementar y exige un fuerte conocimiento del proceso. Algunos expertos recomiendan un control P en el tope y un PI en el fondo.

Para lograr la implementación feedforward, el esquema de control de la Fig. 17.24 incluye la medición anticipada del caudal de alimentación y el uso de analizadores de composición (detallados en la figura de una manera simplificada) que por razones de costo puede incluir la medición de las temperaturas de la corriente vapor en el tope y la corriente de líquido en el fondo.

Otras alternativas a este esquema están presentes en la literatura de instrumentación y control (Harriott, [34]; Lipták y Venczel, [51]; Sánchez [74], entre otros).

### Control en cascada

Las razones para el uso del control en cascada pueden resumirse como sigue:

1. Dinámica lenta del sistema a controlar.
2. Disponibilidad de una variable intermedia medible.
3. Importancia de la variable que se desea controlar.
4. Tratar de no perturbar demasiado a otras etapas posteriores.
5. La calidad de la medición de los lazos de control es intermitente.

La Fig. 17.25 muestra un esquema de control en cascada que manipula la relación de reflujo a fin de controlar el balance de materia. Aquí la variable intermedia medible es el caudal de recirculación.

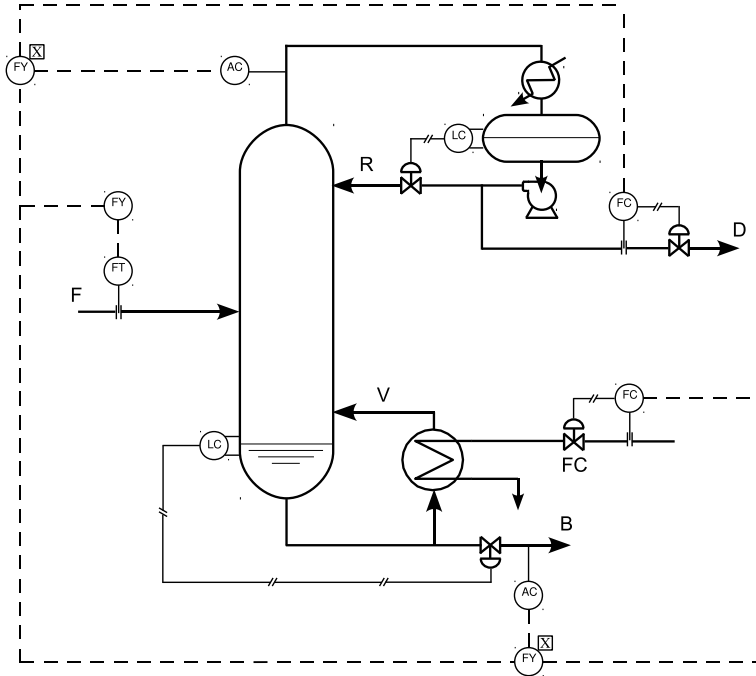


Figura 17.24: Control feedforward-feedback de composición de los dos productos.

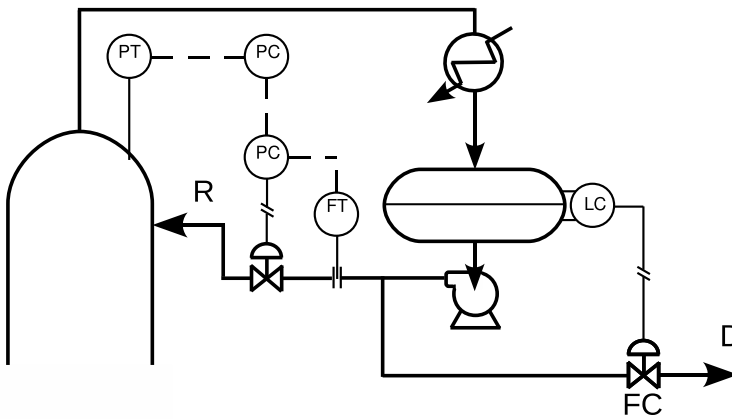


Figura 17.25: Control en cascada de presión de tope en columna de destilación (ver Lipták y Venczel, [51]).



## 17.5. Control de Calderas

La demanda de vapor y la presión de domo son las especificaciones básicas de un generador de vapor.

Los generadores de vapor deben ser diseñados para ser sometidos a amplios cambios en la demanda. Los sistemas de control deben ser aptos para operar adecuadamente entre un 15 a 100 % de la capacidad normal de producción de vapor, manteniendo a las variables dentro de los valores de especificación.

Por otro lado, el desbalance de energía demandada y la suministrada por la combustión se refleja en los cambios de presión. Así es que la presión de caldera es la variable clave en el control de estos equipos.

Los distintos esquemas de control se los puede clasificar como sigue:

1. Control de nivel de domo.
2. Control de balance de energía.
3. Control de agua de alimentación.
4. Control de hogar.
5. Control de presión de hogar.
6. Control de temperatura de aire de combustión.
7. Control de temperatura de sobrecalentamiento del vapor.

### 17.5.1. Control de nivel de domo

El control de nivel de domo consiste en medir el nivel de la mezcla líquido-vapor existente en el domo de la caldera y actuar sobre el caudal de agua de alimentación. Así, esto redundará en el control del balance de materia de la caldera.

El nivel de domo presenta una particularidad conocida como respuesta inversa. Para interpretar este fenómeno físico debe tener en cuenta que: i) el agua ingresa al domo de la caldera más fría que la mezcla líquido-vapor; ii) el nivel de la mezcla existente en el domo es producto de la densidad relativa de la mezcla líquido-vapor la cual tiene una cierta relación de volumen entre el líquido y el vapor. Por lo tanto, el fenómeno de respuesta inversa se puede producir básicamente por dos causas,

1. un incremento del caudal de agua de alimentación provoca una reducción del volumen de burbujas y en consecuencia, el nivel de líquido baja. Luego, si al sistema se lo dejara evolucionar libremente, el nivel de líquido aumentaría producto del aumento del caudal de alimentación.
2. Por otro lado, un incremento en el consumo de vapor lleva a una disminución de la presión en el interior del domo de la caldera y en consecuencia, las burbujas aumentarán de tamaño aumentando el volumen de la mezcla líquido-vapor.

Este fenómeno conocido como respuesta inversa trae ciertas complicaciones, ya que éste empieza a corregir en la dirección equivocada, producto de que

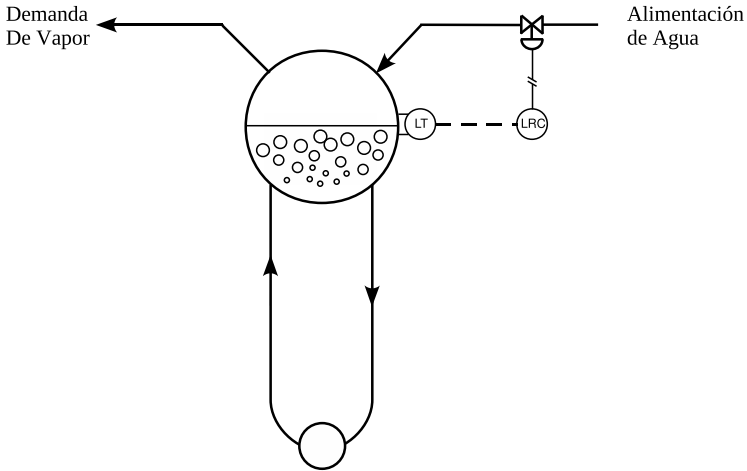


Figura 17.26: Control de un elemento (control feedback clásico) de nivel de domo.

las perturbaciones mueven en principio a la variable de control en una dirección opuesta a donde finalmente el sistema se va a dirigir.

El control de nivel de domo se suele dividir en tres tipos diferentes de acuerdo al nivel de complejidad del mismo, estos son

1. esquema de un elemento,
2. esquema de dos elementos y,
3. esquema de tres elementos.

### Control de un elemento (Control Feedback)

El control de un elemento es el esquema clásico de control de nivel de un sistema hidráulico. Consiste en medir el nivel de la mezcla líquido-vapor en el domo de la caldera para luego actuar sobre el caudal de agua de alimentación como lo muestra la Fig. 17.26.

Como se puede apreciar en la figura se trata de un control feedback clásico. El problema más grave de esta configuración de control se encuentra en lo difícil que puede resultar en ciertos casos el control de sistemas con respuesta inversa. Adam [1] y Adam y Marchetti [4] mostraron que un generador de vapor con recirculación natural tiene dos características que hacen difícil el control de nivel de domo, i) el sistema a lazo abierto es integrador y ii) como se indicó anteriormente, tiene respuesta inversa.

Ya que el modo integrador se encuentra en la función de transferencia entre el nivel y el agua de alimentación y por otro lado, la función de transferencia entre el nivel de domo y la demanda de vapor (perturbación) no tiene dicha propiedad integradora, para el control de nivel de domo no es suficiente con el

modo proporcional, debido a que los cambios en la demanda dejarían offset. Si este offset no es tolerable, se hace necesario incluir un modo integral.

Adam [1], presenta una comparación de las respuestas de un generador de vapor de una planta termoeléctrica bajo la configuración de control de un elemento cuando se usa un controlador PI robusto diseñado por la técnica IMC, con la que se obtiene por los métodos de Ziegler y Nichols [88] y Tyreus y Luyben [86] también para controladores PI. Para ello se simula numéricamente el comportamiento del generador de vapor con cada uno de los controladores ajustados de acuerdo a los métodos mencionados y para,

1. un incremento de un 10 % en el nivel del separador (problema de seguimiento) y,
2. un incremento de un 5 % en la demanda de vapor (problema de regulación).

Las condiciones operativas del generador de vapor, son las que se presentan en Adam [1] y Adam y Marchetti [4] y las respuestas dinámicas son las que se muestran en las Figs. 17.27 y 17.28<sup>2</sup>.

La Fig. 17.27 muestra una mejor performance y tiempo de respuesta a favor del controlador robusto diseñado por la técnica IMC. La respuesta usando el controlador PI ajustado por la técnica de Ziegler y Nichols [88] presenta una relación de decaimiento próxima a 1/4, mientras que el PI de Tyreus y Luyben [86] al igual que el controlador PID robusto penalizan fuertemente las oscilaciones.

Los resultados de la simulación del problema de regulación, que se presentan en la Fig. 17.28, indican que el controlador robusto diseñado por la técnica IMC, presenta la mejor performance de los tres controladores. El controlador de Tyreus y Luyben [86], como en el problema anterior, penaliza fuertemente la oscilación, y el de Zigler y Nichols muestra nuevamente para este caso, una relación de decaimiento de 1/4 en la respuesta.

Se hace notar además que ninguno de los 3 controladores puede evitar el efecto de la respuesta inversa que típicamente tiene lugar en el domo de los generadores de vapor.

Los autores interpretaron que, para el caso particular que ellos estudiaron, tanto en el problema de seguimiento de consigna como el de regulación, el tener una mejor respuesta con el controlador PID se debe no sólo a tener un mejor conocimiento de la incertidumbre del modelo sino al procedimiento de diseño. Este controlador logra mejorar notoriamente la performance del sistema frente a los cambios propuestos

### **Control de dos elementos (Control Feedforward-Feedback)**

Cuando el problema de la respuesta inversa es apreciable, se recurre a medir la perturbación (cambio en la demanda de vapor) y se actúa anticipadamente en

---

<sup>2</sup>Es de destacar en este punto que el simulador numérico desarrollado, tiene en cuenta solamente las no linealidades que surgen de los balances de materia y energía, mientras que otras no linealidades, de válvulas de control, límites de manipuladas etc., no fueron incluidas en el modelo.

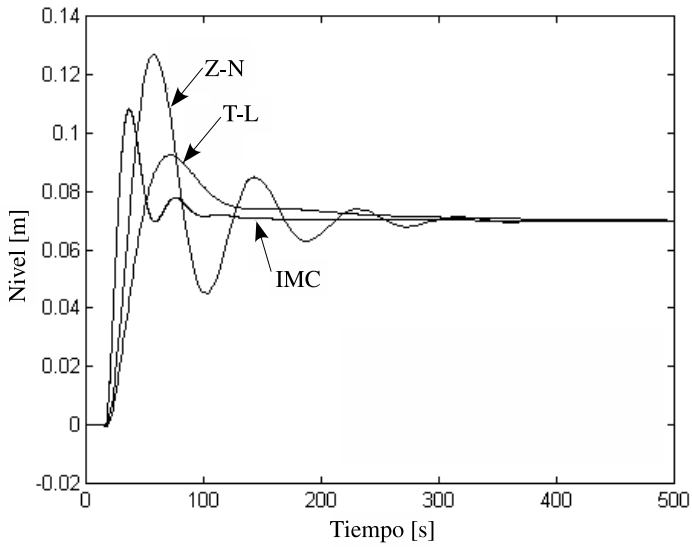


Figura 17.27: Variación del nivel del domo de la caldera para un cambio de un 10% (0.07 m) en el set point, para los tres controladores PID y PI estudiados en Adam [1]. Aquí se indica IMC a la respuesta dinámica obtenida con el controlador PID ajustado por la técnica IMC, Z-N a la obtenida con el controlador PI ajustado por la técnica de Ziegler y Nichols [88] y T-L a la obtenida con el controlador PI ajustado por la técnica de Tyreus y Luyben [86]

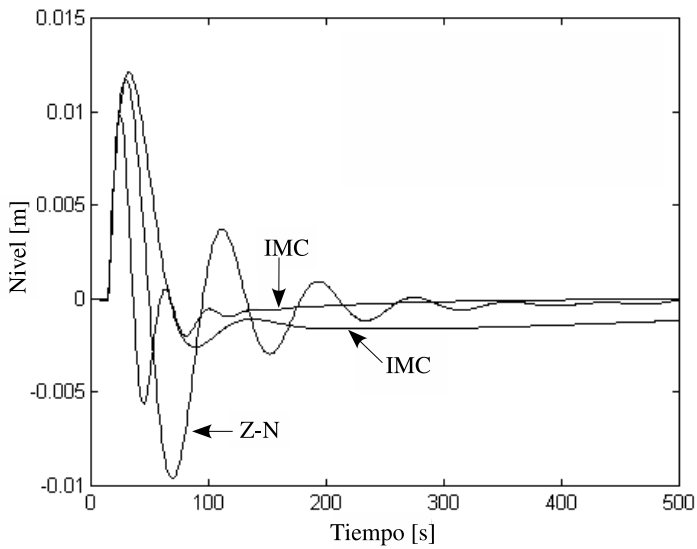


Figura 17.28: Variación de nivel en el domo de la caldera para un cambio escalón en la demanda, de acuerdo con los tres controladores PID y PI estudiados en Adam [1]. Aquí se indica IMC a la respuesta dinámica obtenida con el controlador PID ajustado por la técnica IMC, Z-N a la obtenida con el controlador PI ajustado por la técnica de Ziegler y Nichols [88] y T-L a la obtenida con el controlador PI ajustado por la técnica de Tyreus y Luyben [86]

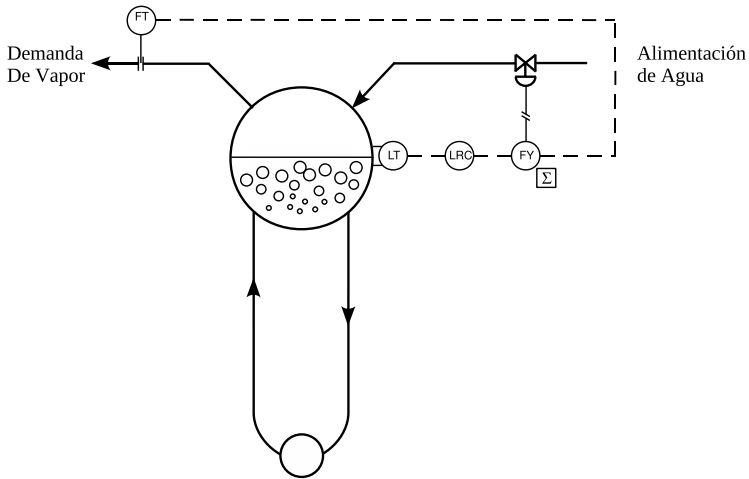


Figura 17.29: Control de dos elementos (control feedforward-feedback) de nivel de domo.

consecuencia. Esto está de acuerdo con la filosofía del control feedforward y de hecho que el control de nivel con dos elementos es un esquema de control combinado feedforward-feedback. El esquema de la instrumentación para este caso se muestra en la Fig. 17.29.

Adam [1] propuso para la configuración de control de nivel de dos elementos, estudiar el controlador feedforward con herramientas de control robusto, permitiendo una ampliación conceptual de la filosofía de diseño de ésta configuración de control. Dentro del marco de la teoría de control robusto, se pudo formular un método que permite lograr la realizabilidad del controlador feedforward ya que, como se sabe, en muchos casos la función de transferencia que se obtiene para dicho controlador, puede no ser realizable (ver Capítulo 15). El método propuesto no sólo logra subsanar este problema, sino que también incorporando al controlador feedforward características dinámicas (que de otro modo no sería posible) conduce al diseñador a visualizar los límites de la performance a alcanzar con una configuración de control feedforward - feedback. Quedando también establecido que estos límites están vinculados a la incertidumbre de modelado, la cual en este tratamiento siempre está asociada a una representación lineal de un sistema físico real, que por naturaleza es no lineal. Un detallado análisis de esta técnica fue presentada posteriormente por Adam y Marchetti [7].

La Fig. 17.30 las respuestas dinámicas obtenidas por Adam [1] con el simulador del generador de vapor cuando se implementa la estrategia de control dos elementos.

Como es de esperar, en la Fig. 17.30 se observa que la configuración feedforward - feedback, reduce el efecto de la respuesta inversa en el nivel del separador

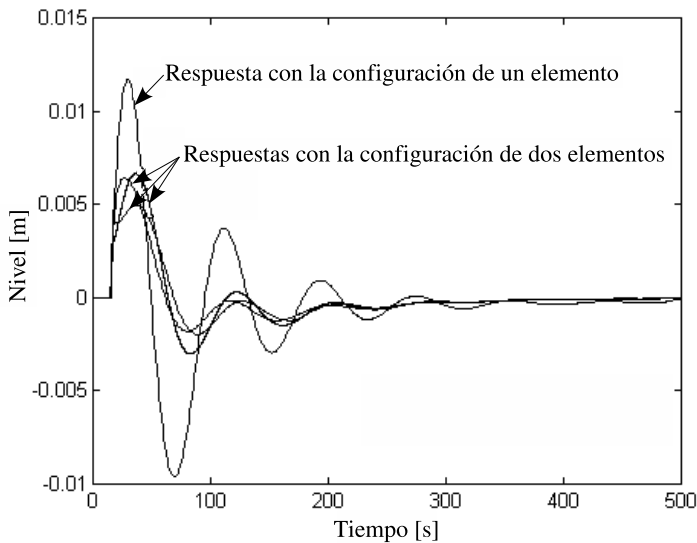


Figura 17.30: Control de dos elementos de nivel de domo utilizando el controlador feedforward dinámico diseñado según lo propone Adam [1] y Adam y Marchetti [7].

del generador, frente a un aumento en la demanda, si bien, en todos los casos, se observa que los tiempos de estabilización se mantienen respecto a la configuración feedback correspondiente. Esto se debe, como ya se indicó oportunamente en el Capítulo 15 (Ecs. (15.3) y (15.4)), a que el controlador feedforward no forma parte del denominador de la función de transferencia de lazo cerrado. De todos modos, hay una notable mejora con la implementación de la estrategia de dos elementos frente a la de un elemento.

### Control de tres elementos

La configuración de control de tres elementos, es una variante de la dos elementos con la incorporación de un control feedforward adicional que busca eliminar a anticipadamente los cambios en la alimentación de agua al generador de vapor. Aquí, el controlador de nivel busca corregir las variaciones del controlador feedforward asociado al cambio de caudal de agua de alimentación. El esquema de la instrumentación para este caso se muestra en la Fig. 17.31.

Un control feedforward alternativo recomendado por Shinskey [77] es la que se muestra en al Fig. 17.32.

Lipták y Venczel [51] presenta variantes a las alternativas aquí presentadas, tanto para el control de dos como el de tres elementos.

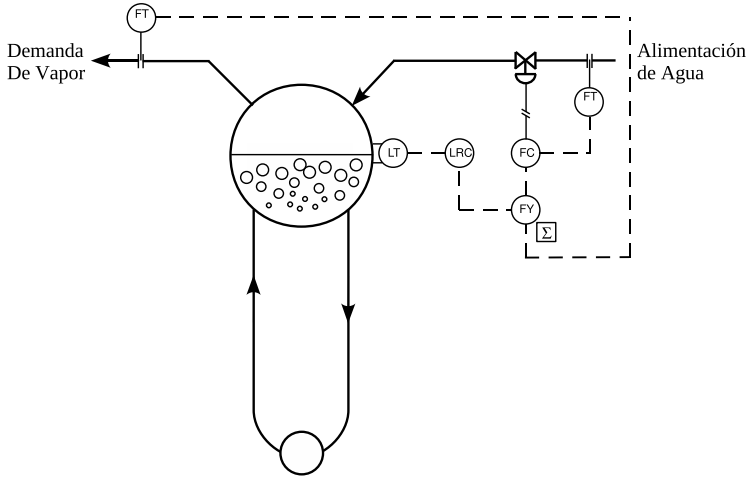


Figura 17.31: Control de tres elementos de nivel de domo.

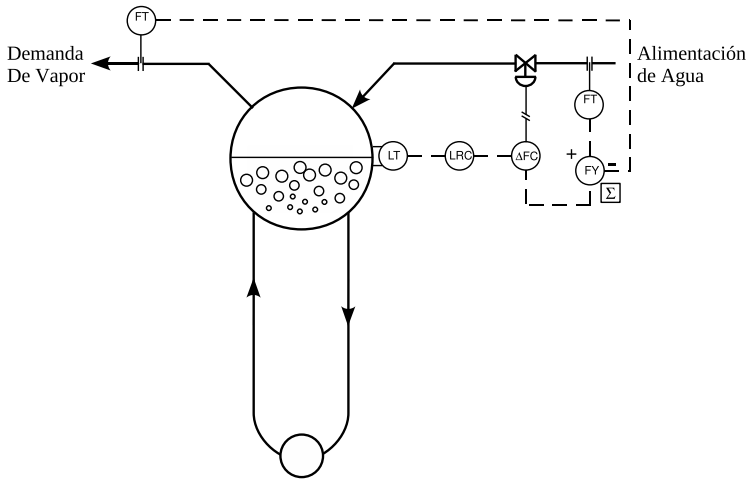


Figura 17.32: Control feedforward de tres elementos de nivel de domo recomendado por Shinsky [77].



### 17.5.2. Control de balance de energía

En todo generador de vapor lo que se trata es de i) cubrir una demanda de vapor y ii) que dicho suministro tenga una presión constante (calidad del vapor), de manera que no afecte a las operaciones unitarias sucesivas asociadas a esto.

La presión de vapor es la variable indicadora de que existe un desbalance del aporte o consumo de energía en la caldera, de ahí que su medición sea usada para el control de la energía aportada en el hogar.

Se debe tener en cuenta que, si por alguna razón,

1. la presión de vapor en el interior de la caldera desciende habrá que entregar más energía para restablecerla, mientras que,
2. un aumento en la demanda o consumo de vapor lleva a una caída en la presión de vapor en la caldera lo que obligará, en algún momento, a aumentar el consumo de combustible.

Lipták [51], comenta que la medición del caudal de vapor no necesariamente es un indicativo cierto de la demanda de vapor ya que, un aumento en dicho caudal, causado por un incremento de la energía entregada, lleva al sistema de control a interpretarlo como un aumento de la demanda de vapor y por lo dicho anteriormente, aumentará aún más el consumo de energía. Esto es interpretado por Lipták [51] como un lazo de realimentación positivo.

Además, en ambos casos, un cambio en la presión de vapor implica un cambio en el suministro de vapor lo que se reflejará, en un cambio en el nivel de domo, afectando así el balance de materia.

A continuación se discuten dos esquemas simples de control del balance de energía. En el primero (Fig. 17.33), tal vez el más intuitivo, y consiste en medir la presión del caudal de vapor de salida del domo y actuar sobre la válvula de control que maneja la relación entre el combustible y el comburente. Este esquema de control resulta ser un esquema de control feedforward, ya que busca corregir el cambio de la presión de vapor al momento en que es detectada.

La segunda alternativa se muestra en la Fig. 17.34 y consiste en medir simultáneamente la presión y el caudal de la demanda de vapor para corregir los problemas antes mencionados Lipták, [51].

## 17.6. Conclusiones

En este capítulo se presentó los esquemas de control más tradicionales asociados a sistemas típicos de la industria de procesos. Sin duda, en la literatura clásica, el lector podrá encontrar un sin número de alternativas a las aquí presentadas. Las estrategias de control estudiadas trataron de ser justificadas mediante la teoría tradicional de control lineal de procesos introducida en capítulos previos, y en algunos casos se complementó con simulaciones numéricas que buscan facilitar la comprensión del tema.

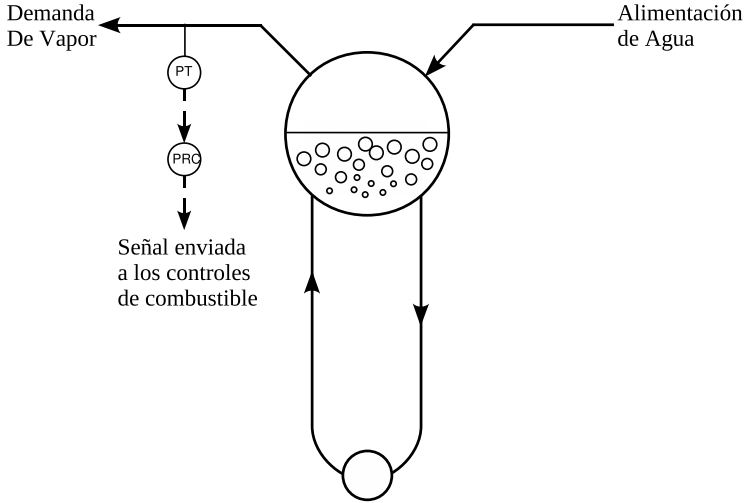


Figura 17.33: Control de Presión con un lazo simple.

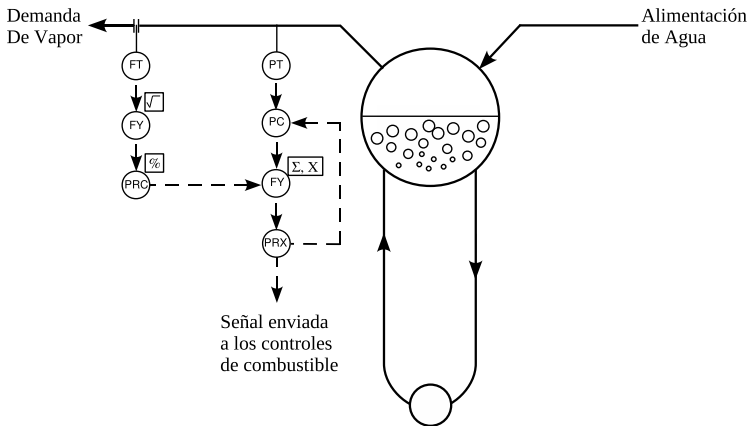


Figura 17.34: Control de Presión que combina la medición de presión y caudal.

## 17.7. Problemas

**Problema 17.1** El agua de proceso utilizada para calefaccionar un reactor químico endotérmico sufre importantes variaciones en su temperatura. Por tal motivo, se decide instalar un sistema que calienta dicha agua y para acondicionar su temperatura se propone instalar sistema de calentamiento con un controlador lineal de acuerdo con el esquema adjunto.

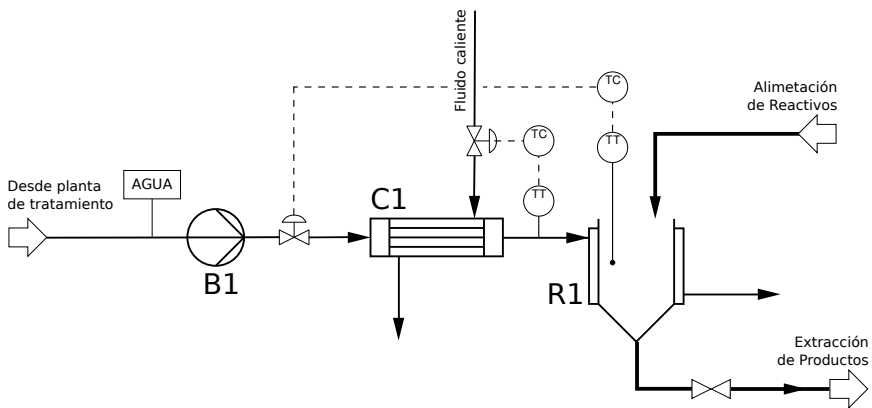


Figura 17.35: Diagrama esquemático del reactor químico endotérmico y el sistema de calentamiento de agua de proceso

- Asumiendo que es posible representar al intercambiador de calor y al reactor mediante funciones de transferencia lineales, sin necesidad de determinar dichas funciones, presente un diagrama de bloques del sistema a lazo abierto que muestre a las temperaturas de salida del intercambiador y del reactor en función de sus entradas.
- Basado en el diagrama del inciso anterior, indique mediante otro diagrama de bloques los lazos de control propuestos en la Fig. 17.35.
- ¿Qué tipo de controladores propone para los controles de temperatura indicados en la Fig. 17.35?

**Problema 17.2** La Fig. 17.36 representa un diagrama P&I correspondiente a un horno de una petroquímica. En esta unidad se calienta el pretroleo crudo aprovechando el calor liberado en la combustión de gas natural. El objetivo es calentar el crudo a una temperatura tal que no se produzca reacciones de craking.

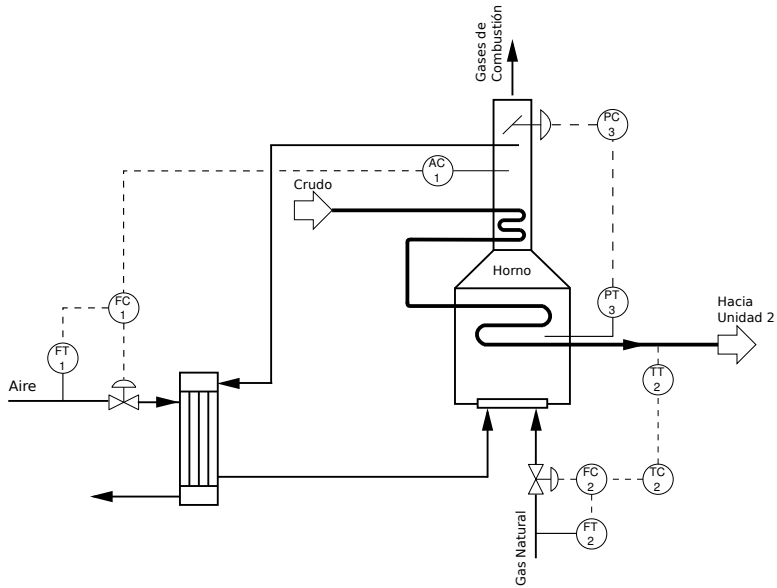


Figura 17.36: Diagrama de los sistemas de control de un horno.

Para cada lazo de control:

- Indicar qué variable se esta/n controlando y la/s estrategia/s de control empleadas.
- ¿Cuáles son perturbaciones que inciden en el sistema de control?
- ¿Qué tipo de acción utilizaría para cada controlador?

**Parte VI**

**APÉNDICES**



# Apéndice A

## Conceptos Básicos de Matemáticas

En este apéndice se presentan los conceptos básicos mínimos necesarios de matemáticas para lograr un desempeño ágil con la teoría de números complejos, álgebra y operaciones con números complejos, descomposición en fracciones parciales y transformada de Laplace; temas claves en la teoría de control lineal clásica. Se trata básicamente de una presentación de dichos conceptos que están disponibles en los libros de textos clásicos de matemáticas para ingenieros.

### A.1. Conceptos Elementales de Álgebra de Números Complejos

Un número complejo representado bajo la forma binómica,

$$z = a + jb \quad , \quad (\text{A.1})$$

con  $a$  y  $b \in \mathbb{R}$ , tiene una representación en el plano complejo de acuerdo con la Fig. A.1, donde el valor absoluto o módulo del número complejo  $z$  es definido como,

$$\begin{aligned} r := |z| &= \sqrt{[\Re(z)]^2 + [\Im(z)]^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

representa la distancia polar  $r$  desde el origen de coordenadas en el plano complejo desde  $(0, j0)$  al punto  $(a, jb)$ .

De la Fig. A.1 se desprende por relaciones trigonométricas que,

$$z = a + jb = r \cos(\theta) + jr \sin(\theta), \quad (\text{A.3})$$

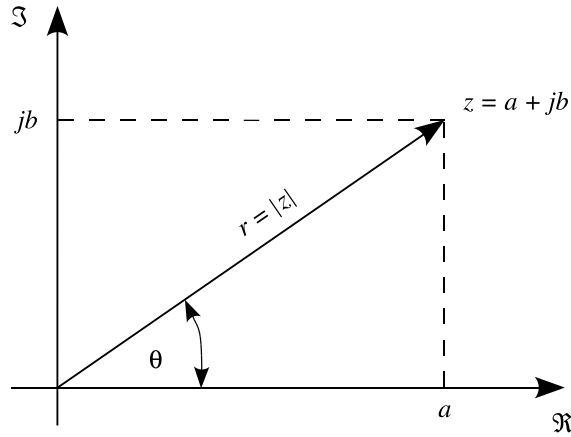


Figura A.1: Representación en el plano de un número complejo.

donde  $\theta$  es el argumento de  $z$ , y por definición el  $\arg(z)$  resulta,

$$-\pi < \arg(z) < \pi. \quad (\text{A.4})$$

y dicha fase puede ser computada como,

$$\begin{aligned} \theta = \arg(z) &= \frac{\Im(z)}{\Re(z)} \\ &= \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

El conjugado de un número complejo  $z$  se define como,

$$\bar{z} = a - jb, \quad (\text{A.6})$$

en consecuencia es fácil demostrar que,

$$\arg(\bar{z}) = \arg(z). \quad (\text{A.7})$$

### Comandos de Octave relacionados al tema

A continuación se presentan comandos de Octave para operaciones matemáticas básicas.



Comando	
<code>abs(z)</code>	Computa el módulo de un número complejo $z$ .
<code>angle(z)</code> o bien, <code>arg(z)</code>	Computa la fase de un número complejo.
<code>conj</code>	Computa el conjugado de un número complejo. transferencia en la cadena realimentación.
<code>[r,p,k,e]=residue(b,a)</code>	Computa la expansión en fracciones parciales de un cociente de polinomios. $b$ el vector de coeficientes de la polinomial del numerador, $a$ el vector de coeficientes de la polinomial del denominador, $r$ coeficientes del numerador de la expansión en fracciones parciales, $p$ raíces del denominador de la expansión en fracciones parciales, $k$ el vector de la polinomial de orden $N-1$ que representa la contribución directa, $e$ orden de multiplicidad de las raíces.

**Ejemplo A.1** Sea  $z_1 = 1 + j2$ , compute usando los comandos de Octave el módulo, la fase y el conjugado de  $z_1$ .

**Algoritmo A.1:** Código de Octave del Ejem. A.1.

```

1 % Defino el numero complejo
2 z1=1+j*2;
3
4 % Calculo , modulo , fase y el conjugado de z1
5 modz=abs(z1)
6 phaz=angle(z1)
7 conjz=conj(z1)

```

La respuesta de Octave es la siguiente:

```

>>>modz = 2.2361
>>>phaz = 1.1071
>>>conjz = 1 - 2i

```

Considerando la fórmula de Euler y teniendo en cuenta la forma polar de un número complejo,

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta) , \quad (\text{A.8})$$

un número complejo  $z$  dado según A.3 puede ser escrito como,

$$z = r e^{j\theta} = r \cos(\theta) + j \sin(\theta) , \quad (\text{A.9})$$

Ejecutando el siguiente código en la línea de comandos de Octave

```
>>> z=modz*cos(phaz)+j*modz*sin(phaz)
```

se obtiene como respuesta

```
>>> z = 1.0000 + 2.0000i
```

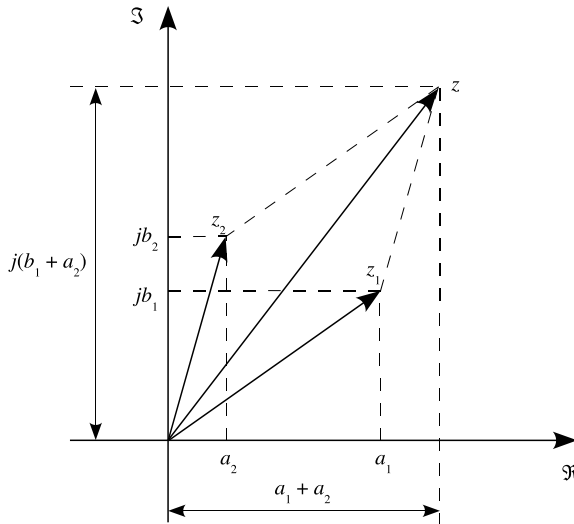


Figura A.2: Interpretación gráfica de la suma de dos números complejos.

## Operaciones con Números Complejos

### 1) Suma y Diferencia de Números Complejos

La suma de dos números complejos es otro número complejo, cuya parte real es igual a la suma de las partes reales y la parte imaginaria es igual a la suma de las partes imaginarias de los complejos dados.

Sea  $z_1 = a_1 + jb_1$  y  $z_2 = a_2 + jb_2$ , la suma de ambos números complejos resulta,

$$\begin{aligned} z &= z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \\ &= a + jb, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

donde,  $a = a_1 + a_2$  y  $b = b_1 + b_2$ .

La diferencia de dos números complejos puede ser interpretada como un caso particular de la suma y en cuanto a la interpretación gráfica es sumar un vector con igual dirección y sentido opuesto.

### 2) Producto de dos Números Complejos

El producto de dos números complejos es otro número complejo cuyo módulo es igual al producto de los módulos y su argumento es la suma de los argumentos de los números complejos dados.

Sea,  $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$  y  $z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$ . Luego, el producto de ambos números complejos resulta,

$$z = z_1 z_2 = (r_1 e^{j\theta_1}) (r_2 e^{j\theta_2}) = (r_1 r_2) e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

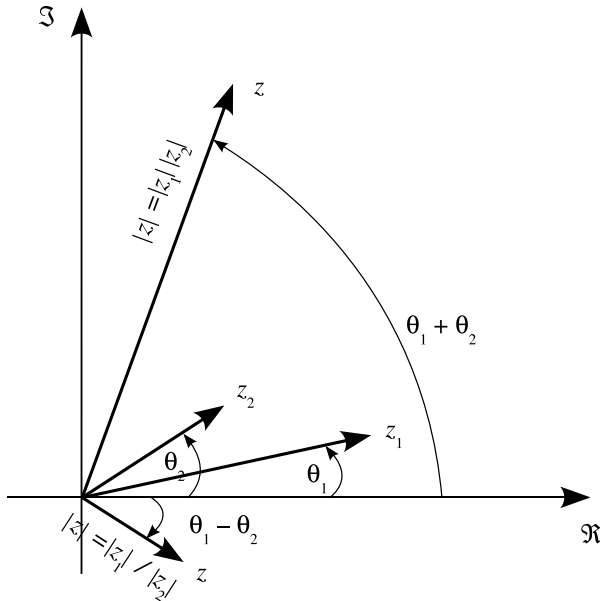


Figura A.3: Interpretación gráfica del producto y cociente de dos números complejos.

$$= r e^{j\theta} \quad , \quad (A.11)$$

donde,  $r = r_1 r_2$  y  $\theta = \theta_1 + \theta_2$ .

Un caso particular es el producto de un número complejo por el imaginario puro. Así se puede enunciar que,

*el producto de un número complejo por el número imaginario  $j$ , es otro número complejo de igual módulo y cuya fase es igual a  $\pi/2$  más la fase original.*

Sea,  $z_1 = a_1 + j b_1$ . Luego,

$$\begin{aligned} z &= j z_1 = j a_1 - b_1 \\ &= a + j b \quad , \end{aligned} \quad (A.12)$$

donde,  $a = -b_1$  y  $b = a_1$ .

Note que,

1.  $|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$  y  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{b_1^2 + a_1^2}$  en consecuencia  $|z| = |z_1|$  y,
2.  $\theta_1 = \tan^{-1}(b_1/a_1)$  y  $\bar{\theta}_1 = \tan^{-1}(a_1/b_1)$ . Considerando el triángulo  $(0, z, a)$ , por sumatoria de ángulos internos en dicho triángulo,  $\theta_1 + \bar{\theta} = \pi/2$  luego, la diferencia de angular entre los vectores complejos  $z$  y  $z_1$  debe ser  $\pi/2$ .

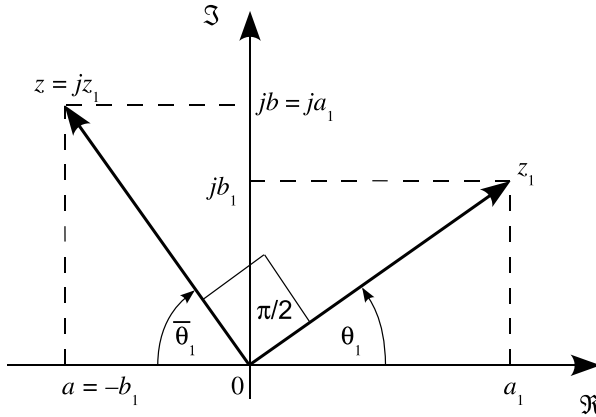


Figura A.4: Interpretación gráfica del producto de un número complejo por el imaginario puro.

### 3) Cociente de dos Números Complejos

El cociente de dos números complejos es otro número complejo cuyo módulo es igual al cociente de los módulos y el argumento es la diferencia de los argumentos.

Sea,  $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$  y  $z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$ . Luego,

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \\ &= r e^{j\theta} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

donde,  $r = r_1/r_2$  y  $\theta = \theta_1 - \theta_2$ .

### 4) Potencia de un Número Complejo

La potencia enésima de un número complejo es otro número complejo cuyo módulo es la potencia enésima del módulo del complejo dado y el argumento es  $n$  veces el argumento del complejo dado.

Sea,  $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ . Luego,

$$\begin{aligned} z &= (z_1)^n = (r_1)^n (e^{j\theta_1})^n = r_1^n e^{jn\theta_1} \\ &= r e^{j\theta} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

donde,  $r = r_1^n$  y  $\theta = n\theta_1$ .

### 5) Raíz enésima de un Número Complejo

Puede ser interpretado como un caso particular de la potencia de un número complejo. Sea,  $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ . Luego,

$$\begin{aligned}
 z &= \sqrt[n]{z_1} = \sqrt[n]{r_1 e^{j\theta_1}} = \sqrt[n]{r_1} (e^{j\theta_1})^{1/n} \\
 &= r e^{j\theta} \quad , \quad (A.15)
 \end{aligned}$$

donde,  $r = \sqrt[n]{r_1}$  y  $\theta = \theta_1/n$ .

## A.2. Descomposición en Fracciones Parciales

Considere la función de transferencia racional  $F(s) = N(s)/D(s)$  donde el grado de  $N(s)$  es menor que el de  $D(s)$ . Antes de aplicar la transformada inversa de Laplace para encontrar la  $f(t)$  se debe realizar una descomposición en fracciones parciales de  $F(s)$ , en términos de la factorización del denominador  $D(s)$  en factores lineales y factores cuadráticos irreducibles correspondientes a ceros reales y complejos de  $D(s)$  respectivamente. La descomposición en fracciones parciales puede ser resumida en tres reglas sencillas.

Sea  $F(s)$  un polinomio en  $s$  de grado  $n$  luego:

**Raíces Reales Simples.** La parte de una descomposición en fracciones parciales de  $F(s)$  correspondiente a raíces reales distintas  $\alpha_i$  con  $i = 1, 2, \dots, l$  es la suma de  $l$  fracciones parciales que tienen la forma

$$\frac{A_1}{(s + \alpha_1)} + \frac{A_2}{(s + \alpha_2)} + \dots + \frac{A_l}{(s + \alpha_l)} \quad , \quad (A.16)$$

con  $l \leq n$  y donde  $A_1, A_2, \dots, A_l$  son constantes reales.

**Raíces Reales Múltiples.** La parte de una descomposición en fracciones parciales de  $F(s)$  correspondiente al factor lineal  $(s + \alpha)$  de multiplicidad  $p$  (con  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) es la suma de  $n$  fracciones parciales que tienen la forma

$$\frac{A_1}{(s + \alpha)} + \frac{A_2}{(s + \alpha)^2} + \dots + \frac{A_p}{(s + \alpha)^p} \quad , \quad (A.17)$$

$p \leq n$  y donde  $A_1, A_2, \dots, A_p$  son constantes reales.

**Raíces Complejas Múltiples.** La parte de una descomposición en fracciones parciales de  $F(s)$  correspondiente al factor cuadrático irreducible  $(s + \sigma)^2 + \omega^2$  de multiplicidad  $q$  (con  $\sigma$  y  $\omega \in \mathbb{R}$ ) es la suma de  $q$  fracciones parciales que tienen la forma

$$\frac{M_1 s + N_1}{[(s + \sigma)^2 + \omega^2]} + \dots + \frac{M_q s + N_q}{[(s + \sigma)^2 + \omega^2]^q} \quad , \quad (A.18)$$

con  $q \leq n$  y en donde ;  $M_1, M_2, \dots, M_q, N_1, N_2, \dots, N_q$  son constantes reales.

En caso de haber un sólo par de raíces complejas conjugadas, la descomposición en fracciones parciales consiste solamente en el primer sumando de la última ecuación.

### A.2.1. Cálculo de los coeficientes

#### Función de transferencia con raíces reales simples.

Considere una  $F(s)$  tal que tiene raíces reales  $l$  distintas. Luego, la descomposición en fracciones parciales resulta como se indica en A.18. Los coeficientes  $A_1, A_2, \dots$  y  $A_l$  son calculados como,

$$A_i = \lim_{s \rightarrow -\alpha_i} [(s + \alpha_i)F(s)] , \quad (\text{A.19})$$

con  $i = 1, 2, \dots, l$

#### Función de transferencia con raíz real múltiples.

Considere una  $F(s)$  que tiene una raíz real ( $s = -\alpha$ ) de multiplicidad  $p$ . Luego, la descomposición en fracciones parciales resulta como se indica en A.19. Los coeficientes  $A_1, A_2, \dots$  y  $A_{p-1}$  son calculados como,

$$A_{p-k} = \frac{1}{k!} \lim_{s \rightarrow -\alpha} \frac{d^k}{ds^k} [(s + \alpha)^p F(s)] , \quad (\text{A.20})$$

para todo  $k = 1, 2, \dots, p-1, p \leq n$  y  $n > 0$  y el coeficiente  $A_p$

$$A_p = \lim_{s \rightarrow -\alpha} [(s + \alpha)^p F(s)] , \quad (\text{A.21})$$

**Ejemplo A.2** Considere la función  $G(s) = (s+4)/(s+1)(s+2)^2$ . Obtenga la expansión por fracciones parciales mediante comandos de Octave.

A continuación se muestran los comandos de Octave para este ejemplo.

#### Algoritmo A.2: Código de Octave del Ejem. A.2.

```

1 clear all , clc
2
3 % polinomiales del numerador y denominador
4 b = [1 4];
5 a = [1 5 8 4];
6
7 % computo la expansion en fracciones parciales
8 [r , p , k , e] = residue (b , a)

```

La ventana de comandos de Octave informa,

r =

3.0000  
-3.0000  
-2.0000

p =

-1.0000  
-2.0000  
-2.0000

k = [ ] (0x0)

e =

1  
1  
2

Lo que indica que  $G(s)$  tiene raíces -1 y -2 con esta última de multiplicidad 2 y por tanto, puede expandirse en fracciones parciales como sigue:

$$G(s) = \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{3}{s+1} - \frac{3}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2}$$

### A.2.2. Cálculo de la transformada inversa de funciones con raíces complejas simples

Sea,

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{[(s+\sigma)^2 + \omega^2]} = \frac{Ms + N}{[(s+\sigma)^2 + \omega^2]} + \dots \text{ otros términos,} \quad (\text{A.22})$$

la transformada inversa de Laplace del término correspondiente al par de raíces complejas conjugadas puede ser calculado como sigue,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{Ms + N}{(s+\sigma)^2 + \omega^2} \right] = \frac{e^{-\sigma t}}{\omega} K \sin(\omega t + \phi), \quad (\text{A.23})$$

siendo,

$$K = \sqrt{\Re^2 + \Im^2}, \quad (\text{A.24})$$

y

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\Im}{\Re} \right) , \quad (\text{A.25})$$

donde  $\Re$  e  $\Im$  son las partes reales e imaginarias de un número complejo calculadas como sigue:

$$\Re + j\Im = \lim_{s \rightarrow -\sigma + j\omega} F_1(s) , \quad (\text{A.26})$$

con  $F_1(s) = [(s + \sigma)^2 + \omega^2] F(s)$ .

### A.3. Conceptos Básicos de Cuadrados Mínimos

Cuando se formula un problema de identificación se introduce un criterio para tener una medida de cuan bien un modelo aproxima a datos experimentales. El método de cuadrados mínimos es simple, muy difundido en la literatura clásica y *adecuado* para este fin. Dicho método ha sido ampliamente utilizado y se basa en la minimización de la suma de los cuadrados del error entre la variable medida y estimada.

El método de cuadrados mínimos está restringido a estructuras de modelos que son lineales en los parámetros desconocidos. En general, el problema de cuadrados mínimos asume que la *variable computada*  $\hat{y}$  está dada por el modelo,

$$\hat{y} = \pi_1 \phi_1(x) + \pi_2 \phi_2(x) \cdots \pi_n \phi_n(x) , \quad (\text{A.27})$$

donde  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  son funciones conocidas y  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$  son los parámetros desconocidos.

Los pares de observaciones  $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N$  son obtenidos a partir de experimentos. El problema es determinar los parámetros de tal forma que las variables  $\hat{y}_i$  computadas con los valores experimentales  $x_i$  a partir del modelo (A.27) aproximen tan cerca como sea posible a la variable medida  $y_i$ . Asumiendo que todas las medidas tienen la misma precisión, de acuerdo con el principio de cuadrados mínimos, los parámetros deberían ser elegidos de forma tal que la función de costo

$$J(\pi) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 , \quad (\text{A.28})$$

sea mínima, donde

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \pi_1 \phi_1(x_i) - \cdots - \pi_n \phi_n(x_i) , \quad (\text{A.29})$$

Asumiendo por simplicidad la siguiente notación matricial-vectorial:

$$\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N]^T , \quad (\text{A.30})$$



$$\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N]^T, \quad (\text{A.31})$$

$$y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T, \quad (\text{A.32})$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N]^T, \quad (\text{A.33})$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \cdots & \phi_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_1(x_N) & \phi_2(x_N) & \cdots & \phi_N(x_N) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.34})$$

Bajo esta representación el problema puede ahora ser formulado como sigue,

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon, \quad (\text{A.35})$$

donde  $\varepsilon = y - \hat{y}$  e  $\hat{y} = \phi\pi$ .

**Teorema A.3.1** La función de costo (A.35) es mínima para el vector de parámetros  $\hat{\pi}$  tal que

$$\phi^T \phi \hat{\pi} = \phi^T y, \quad (\text{A.36})$$

Si la matriz  $\phi^T \phi$  es no singular, el mínimo es único y dado por

$$\hat{\pi} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T y. \quad (\text{A.37})$$

Una formulación útil en el dominio discreto es bajo representación de espacio de estados, no así cuando la formulación es hecha en base a funciones de transferencia.

## A.4. Problemas

1. Expanda en fracciones parciales a los siguientes polinomios y verifique su respuesta, analíticamente y mediante comandos de Octave.

a)  $G(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s(-s+2)(s+3)}$

b)  $G(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{s(-s+2)}$



# Apéndice B

## Transformada de Laplace

En este apéndice se presentan conceptos básicos de transformada y transformada inversa, presentando teoremas y propiedades más importantes del tema, junto con algunos ejemplos. También se muestra la resolución de ecuaciones diferenciales lineales mediante la técnica de la transformada de Laplace, que resulta de sumo interés en la teoría control lineal. Se sugiere profundizar el tema con textos clásicos de matemáticas para ingenierías como las obras de Kreysig [45], Kaplan [43], entre otros.

### B.1. Introducción

La transformada de Laplace fue desarrollada por Pierre Simon Laplace<sup>1</sup>, físico - astrónomo, considerado uno de los matemáticos más brillantes de todos los tiempos.

A manera de resumen se puede decir que la transformada de Laplace presenta las siguientes ventajas:

1. Puede reemplazar operaciones como la diferenciación o la integración con operaciones algebraicas en el plano complejo. Con el uso de la transformada de Laplace muchas funciones como las sinusoidales o exponenciales se pueden convertir en funciones algebraicas de una variable compleja  $s$ .
2. Permite resolver en forma rápida ecuaciones diferenciales lineales, obteniéndose las componentes del estado transitorio y estacionario simultáneamente. A diferencia de los métodos clásicos que dan una solución general con  $n$  constantes desconocidas, la técnica de la transformada de Laplace considera las condiciones iniciales al momento de pasar al campo transformado, de manera que la ardua tarea de tener que calcular las  $n$  constantes para un problema particular no se hace necesario.

---

<sup>1</sup>Pierre Simon Laplace (23/03/1749 - 05/03/1827)

3. Permite mediante técnicas gráficas en el plano complejo y teoremas básicos, predecir el comportamiento del sistema, tanto en regímenes transitorio como permanente o estacionario, sin tener que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales.

**Definición B.1.1 — Transformada de Laplace.** Sea  $f(t)$  una función de variable real tal que está definida para  $0 \leq t < \infty$ . Se define

1. una variable compleja  $s = \sigma + j\omega$  y,
2. el operador de Laplace  $\mathcal{L}$ , que indica que la cantidad que le sigue ha de ser transformada por la integral de Laplace  $\int_0^\infty e^{-st} dt$ .

Luego, la transformada de Laplace de  $f(t)$  queda definida por,

$$F(s) := \mathcal{L}[f(t)] := \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt, \quad (\text{B.1})$$

en todos los valores de  $s$  para los cuales la integral impropia converge.

Aquí, la función de variable compleja  $F(s)$  es designada como la función de transferencia o transformada de Laplace de la función  $f(t)$ .

Recuerde además que, una integral impropia sobre un intervalo infinito se define como,

$$\int_a^\infty g(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) dt, \quad (\text{B.2})$$

Si el límite (B.2) existe, decimos que la integral impropia converge de lo contrario diverge o no existe. Nótese que el integrando de la integral impropia (1) contiene el parámetro  $s$  además de la variable de integración  $t$ . En consecuencia, cuando la integral (B.1) converge, no lo hace a un número, sino a una función  $F$  de  $s$ .

Con el objeto de introducirnos al problema de la existencia o convergencia de la integral de Laplace, consideremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo B.1** Sea  $f(t) = 1$  para  $t \geq 0$ . Calcule la transformada de Laplace de dicha función.

De acuerdo con la Definición (B.1),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[1] &= \int_0^\infty e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=0}^\infty, \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-sb} + \frac{1}{s} \right], \end{aligned}$$

la última expresión resulta válida para todo  $s > 0$ , dado que para  $s < 0$ ,

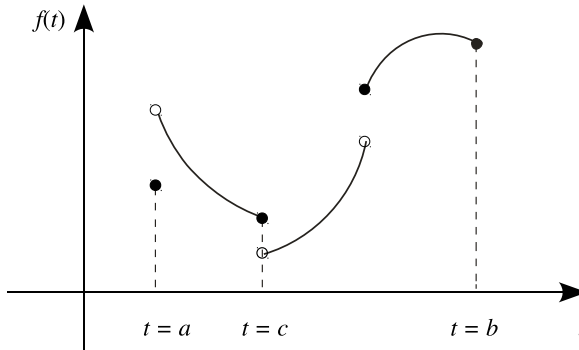


Figura B.1: Función continua por partes. Los puntos rellenos indican los valores de la función en los puntos de discontinuidad.

$(\frac{1}{s}) e^{-sb}$  no está acotado cuando  $b \rightarrow \infty$  y para  $s = 0$  el valor de  $1/s \rightarrow \infty$ .  
 Por lo tanto,

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \text{ para } s > 0 ,$$

quedando definida solo si  $s > 0$ . ■

Antes de introducir el teorema de la existencia de la transformada de Laplace introducimos las siguientes definiciones:

**Definición B.1.2 — Función Continua por Partes.** Se dice que una función  $f(t)$  es continua por partes en el intervalo  $a \leq t \leq b$  si  $[a, b]$  puede subdividirse en un número finito de subintervalos colineales de modo que:

1.  $f(t)$  sea continua en el interior de cada uno de esos subintervalos y
2.  $f(t)$  tenga límite lateral finito cuando  $t$  tienda a cada punto extremo de cada uno de dichos subintervalos desde el interior.

En los puntos de discontinuidad una función continua por partes experimenta saltos finitos a la izquierda y derecha de dicho punto como lo muestra la Fig. B.1. donde los límites laterales se computan como,

$$f(c^+) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(c + \epsilon) ,$$

$$f(c^-) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(c - \epsilon) ,$$

**Ejemplo B.2** Encuentre la transformada de Laplace de la función escalón unitaria desplazada en  $(t - a)$  esto es,

$$u(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < a \\ 1 & \text{para } t \geq a \end{cases} .$$

La función escalón desplazada toma valores 0 y 1 según se indica en la figura,

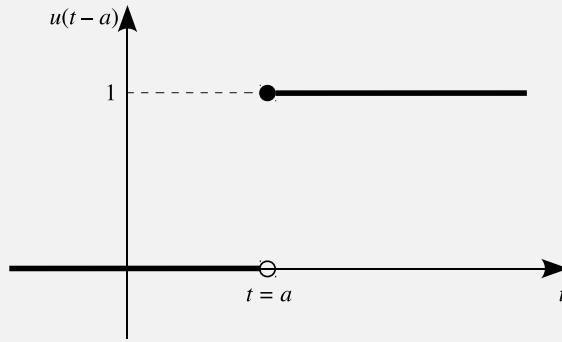


Figura B.2: Función escalón unitaria desplazada.

Luego,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t - a)] &= \int_0^{\infty} u(t - a)e^{-st} dt , \\ &= \int_a^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=a}^{\infty} , \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\mathcal{L}[u(t - a)] = \frac{e^{-sa}}{s} \quad \text{con } s > 0 \text{ y } a > 0 .$$

**Definición B.1.3 — Función de Orden Exponencial.** Se dice que una función  $f(t)$  es de orden exponencial cuando  $t \rightarrow \infty$  si existen constantes reales arbitrarias y positivas  $M$  y  $\alpha$  tales que

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t} . \quad (\text{B.3})$$

**Teorema B.1.1 — Existencia de la Transformada de Laplace.** Si la función  $f(t)$  es continua o seccionalmente continua en todo intervalo finito para  $t \geq 0$  y de orden exponencial cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces existe la transformada de Laplace  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ .

**Demostración** Siendo,

$$F(s) := \mathcal{L}[f(t)] := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt ,$$

y asumiendo sin pérdida de generalidad que  $f(t)$  es continua para  $t \geq 0$ . Luego, por teoremas estándar sobre integrales impropias (*la convergencia absoluta implica convergencia*) es suficiente para nosotros probar que  $\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt$  existe para un  $s > \alpha$ . De manera que,

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \leq \int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt ,$$

como se asume que  $f(t)$  es de orden exponencial,

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{M}{s-\alpha} \left[ 1 - \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(s-\alpha)b} \right] ,$$

biunívoca Note que,

1. si  $s = \alpha$  la integral divide por cero,
2. si  $s < \alpha$  luego,  $-(s-\alpha) > 0$  y el  $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(s-\alpha)b} \rightarrow \infty$  y
3. si  $s > \alpha$  el  $\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-(s-\alpha)b} \rightarrow 0$ .

En consecuencia,

$$|F(s)| \leq \int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt \leq \frac{M}{s-\alpha} \text{ si } s > \alpha .$$

□

**Definición B.1.4 — Absisa de Convergencia.** Dada  $f(t)$  arbitraria, existe una absisa de convergencia absoluta  $\alpha_c$  tal que la transformada de Laplace de  $f(t)$  es absolutamente convergente para  $s > \alpha_c$  (con  $s \in \mathbb{R}$ ) y la convergencia absoluta falla para  $s < \alpha_c$ .

Note que si  $\alpha_c = \infty$  entonces no hay convergencia absoluta mientras que si  $\alpha_c = -\infty$  la convergencia absoluta es para todo  $s$ .

*Conclusión:* La integral de Laplace converge únicamente si la parte real de  $s$  es mayor que la absisa de convergencia  $\alpha_c$  elegida. Con el objeto de obtener conclusiones a cerca del comportamiento de la  $f(t)$  desde el plano complejo, el valor de  $s$  debe ser elegido de manera que la integral converja. Por lo tanto, si

las condiciones enunciadas se cumplen decimos no solo que existe la transformada de  $f(t)$  sino que existe una relación *biunívoca* entre la función en el plano complejo y su correspondiente función en el dominio del tiempo. Esto quedará más claro con los teoremas de valor inicial y final que se enuncian en la próxima sección y con la introducción a la transformada inversa de Laplace presentada en la sección 6.

## B.2. Teoremas Útiles

**Teorema B.2.1 — Linealidad de la Transformada de Laplace.** Si  $a$  y  $b$  son constantes reales, entonces

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] . \quad (\text{B.4})$$

para todo  $s$  tal que las transformadas de Laplace de las funciones  $f$  y  $g$  existan a la vez.

**Demostración** La demostración sigue la linealidad de las operaciones de límite y de la integración. Siendo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[af(t) + bg(t)] &= \int_0^{\infty} [af(t) + bg(t)] e^{-st} dt . \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c [af(t) + bg(t)] e^{-st} dt . \\ &= a \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f(t) e^{-st} dt + b \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c g(t) e^{-st} dt . \\ &= a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] . \end{aligned}$$

□

**Teorema B.2.2 — Traslación del eje  $s$ .** Si  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  existe para  $s > \alpha$ , luego  $\mathcal{L}[e^{at}f(t)]$  existe para  $s > a + \alpha$ , y

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s - a) . \quad (\text{B.5})$$

**Teorema B.2.3 — Traslación sobre el eje  $t$ .** Si  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  existe para  $s > \alpha$ , luego

$$\mathcal{L}[f(t-d)H(t-d)] = [e^{-ds}F(s)] . \quad (\text{B.6})$$

con  $d > 0$ , para  $s > d + \alpha$ .



Esta última expresión establece que el desplazamiento en el tiempo en una magnitud  $d$  de la función  $f(t)$  se corresponde en el plano complejo a multiplicar la función  $F(s)$  por  $e^{-ds}$ . Una interpretación de  $f(t-d)$  es que dado un cambio en el sistema, éste no se ve reflejado hasta  $d$  unidades de tiempo después. Por tal razón,  $d$  es conocido como retardo de tiempo o tiempo muerto. Este teorema es de sumo interés en ingeniería dado que un gran número de sistemas físicos presentan tiempos muertos.

**Teorema B.2.4 — Teorema del valor final (TVF).** Si  $f(t)$  y  $f'(t)$  son transformables por Laplace, si  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  y si existe  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  entonces,

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) . \quad (\text{B.7})$$

Note que el teorema se enuncia pidiendo como condición que *exista*  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ , si ésta no se cumple entonces el TVF no se aplica porque la integral de Laplace no converge.

El TVF establece que el comportamiento de la función  $f(t)$  en el régimen permanente es igual a de la función  $sF(s)$  en la vecindad de  $s = 0$ . De este modo, se puede obtener el valor alcanzado por la función  $f(t)$  para  $t \rightarrow \infty$  directamente desde campo transformado a partir del conocimiento de la función  $sF(s)$ .

**Teorema B.2.5 — Teorema del valor inicial (TVI).** Si  $f(t)$  y  $f'(t)$  son transformables por Laplace y si  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  entonces,

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) . \quad (\text{B.8})$$

Note que, i) el valor de la variable  $s$  arbitraria es elegido tal que  $s \rightarrow \infty$  en consecuencia cualquier abscisa de convergencia finita es menos que infinito. Entonces existe la transformada de Laplace de la función  $f(t)$  para  $s \rightarrow \infty$  siempre y cuando esta sea continua o seccionalmente continua y de orden exponencial para  $t \geq 0$ . ii) Esto último no necesariamente ocurre con el TVF donde  $s \rightarrow 0$  y en consecuencia existen abscisas de convergencia mayores a cero. iii) El TVI y el TVF permiten predecir el comportamiento de un sistema en el dominio del tiempo sin necesidad de aplicar la transformada inversa.

La Tabla B.1 resume los teoremas más importantes presentados en esta sección.

## B.3. Propiedades de la Transformada de Laplace

■ **Propiedad B.1 — Transformada de la derivada.** Dada una  $f(t)$  y  $f'(t)$  continuas o seccionalmente continuas y ambas de orden exponencial para  $t \geq 0$

Tabla B.1: Teoremas Fundamentales de la Transformada de Laplace.

Teorema	Función	Transformada
Definición de TL	$f(t)$	$\int_0^\infty e^{-st}$
Linealidad de TL	$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
Traslación en $s$	$[e^{-at}f(t)]$	$F(s + a)$
Traslación en $t$	$[f(t - d)H(t - d)]$	$[e^{-ds}F(s)]$
TVF	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
TVI	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

luego,  $\mathcal{L}[f'(t)]$  existe para  $s > \alpha$ , y

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) , \quad (\text{B.9})$$

donde  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ .

**Demostración** Asumamos sin pérdida de generalidad que  $f(t)$  es continua para  $t \geq 0$ . Luego,

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t)e^{-st} dt$$

mediante un cambio de variables ( $u = e^{st}$  y  $dv = f'(t)dt$ ) e integrando por partes ( $uv - \int vdu$ )

$$\begin{aligned} [f'(t)] &= f(t)e^{-st} \Big|_0^\infty \\ &= 0 - f(t)|_{t=0} - (-s) \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$

Considerando la definición de la transformada de Laplace de  $f(t)$ , la última expresión resulta,

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) .$$

□

**Corolario (Transformada de la derivada enésima).** Dada una  $f(t)$  y sus  $n-1$  derivadas continuas o seccionalmente continuas y todas de orden exponencial para los mismos valores de  $M$  y  $\alpha$  según (B.3) y para  $t \geq 0$  luego,  $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]$  existe para  $s > \alpha$  y

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f^1(0+) - \dots - f^{n-1}(0+) , \quad (\text{B.10})$$

donde  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  y  $n \in \mathbb{R}^+$

**Demostración** Asumamos sin pérdida de generalidad que  $f(t)$  es continua para  $t \geq 0$ . Luego,

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt ,$$

mediante un cambio de variables ( $u = e - st$  y  $dv = f''(t)dt$ ) e integrando por partes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(t)] &= f'(t)e^{-st}|_0^\infty - \int_0^\infty f'(t) (-se^{-st}) dt , \\ &= 0 - f'(t)|_{t=0} - (-s) \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt , \\ &= -f'(0) + s\mathcal{L}[f(t)] , \end{aligned}$$

reemplazando (B.9) en la última expresión se tiene,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(t)] &= -f'(0) + s[sF(s) - f(0)] , \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) . \end{aligned}$$

Generalizando el procedimiento para derivadas sucesivas y aplicando una ley recursiva se demuestra que,

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f^1(0+) - \dots - f^{n-1}(0+) .$$

□

■ **Propiedad B.2 — Transformada de la integral.** Dada una  $f(t)$  y su integral continuas o seccionalmente continuas y ambas de orden exponencial para  $t \geq T$  luego,

$$\mathcal{L} \int_0^t f(\lambda) d\lambda = \frac{F(s)}{s} , \quad (\text{B.11})$$

para  $s > \alpha$  y donde  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ .

**Demostración** Dado que  $f(t)$  es continua o seccionalmente continua se puede afirmar que  $\int_0^t f(\lambda)d\lambda = g(t)$ . Luego por cálculo  $g'(t) = f(t)$  y  $g(0) = 0$  de modo que,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(0) .$$

Siendo  $g(0) = 0$  y reemplazando la expresión de  $g(t)$  en la última igualdad

$$\mathcal{L}[f(t)] = s\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\lambda)d\lambda\right] ,$$

en consecuencia,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\lambda)d\lambda\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)] ,$$

y teniendo en cuenta que por definición  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  la demostración queda completa.  $\square$

■ **Propiedad B.3 — Multiplicación por t.** Si  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  luego,

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds} . \quad (\text{B.12})$$

para  $s > \alpha$ .

**Demostración** Sea  $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$  luego,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}[F(s)] &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt , \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{ds} [f(t)e^{-st} dt] = \int_0^\infty [-tf(t)] e^{-st} dt , \end{aligned}$$

de modo que por definición de la transformada de Laplace de una función,

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds} .$$

$\square$

**Corolario (Multiplicación por  $t^n$ ).** Dada una  $f(t)$  continua o seccionalmente continuas y de orden exponencial para  $t \geq 0$  luego,

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} . \quad (\text{B.13})$$

con  $n \in \mathbb{R}^+$  y  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ .

**Demostración** Sea  $g(t) = t^n f(t)$  con  $g(t)$  continua o seccionalmente continua y de orden exponencial y  $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ . Luego,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [G(s)] &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} G(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} [g(t) e^{-st}] dt = \int_0^{\infty} [-tg(t)] e^{-st} dt . \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[tf(t)]$$

y teniendo en cuenta la Prop. B.3,

$$G(s) = -\frac{d}{ds} [F(s)] .$$

Luego,

$$\frac{d}{ds} [G(s)] = \frac{d}{ds} \left[ -\frac{d}{ds} F(s) \right] = -\int_0^{\infty} [t^2 f(t)] e^{-st} dt .$$

Teniendo en cuenta la definición de transformada de Laplace,

$$\frac{d^2}{ds^2} [F(s)] = (-1)^2 \mathcal{L}[t^2 f(t)] .$$

Continuando con el mismo procedimiento y aplicando una ley recursiva se demuestra que,

$$\frac{d^n}{ds^n} [F(s)] = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)] .$$

□

La Tabla B.2 resume las propiedades más importantes tratadas en esta sección.

## B.4. Transformada de Funciones de Uso Común

### B.4.1. Función exponencial

Sea la función exponencial,

$$f(t) \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ Ae^{-\alpha t} & \text{para } t \geq 0 \end{cases} . \quad (\text{B.14})$$

donde  $A$  y  $\alpha$  constantes reales.

La transformada de Laplace de la función  $f(t)$  puede obtenerse como sigue,

Tabla B.2: Propiedades más comunes de la Transformada de Laplace.

Propiedad	Función	Transformada
Cambio de Escala	$f(at)$	$\frac{1}{F(s/a)}$
Primera Derivada	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
Segunda Derivada	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
Enésima Derivada	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - \dots - f^{n-1}(0^+)$
Multiplicación por $t$	$[t^n f(t)]$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
División por $t$	$f(t)/t$	$\int_s^\infty F(s) ds$
Integral Indefinida	$\int f(t)$	$\frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{-1}(0)$
Integral Definida	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{1}{s} F(s)$
Integral de Convulsión	$f_1(t) * f_2(t)$ $= \int_0^t f_1(\lambda) f_2(t - \lambda) d\lambda$	$F_1(s) F_2(s)$ $F_1(s) F_2(s)$

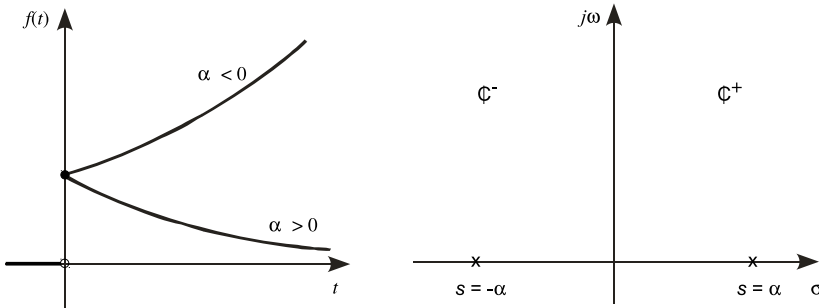


Figura B.3: a) Representación gráfica de la función  $f(t)$  en el tiempo. b) Ubicación del polo de la función de transferencia  $F(s)$  para  $\alpha < 0$  y  $\alpha > 0$ .

$$\mathcal{L} [Ae^{-\alpha t}] = \int_0^\infty Ae^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^\infty Ae^{-(\alpha+s)t} dt = \frac{A}{s + \alpha} \quad (\text{B.15})$$

con  $s > -\alpha$ . La Fig. B.3a muestra en forma esquemática la respuesta en el tiempo de  $f(t)$  para  $\alpha > 0$  y  $\alpha < 0$ . Como puede verse la transformada de esta función genera en el plano complejo un polo <sup>2</sup> en  $s = -\alpha$  con  $\alpha > 0$  en el semiplano  $\mathbb{C}^-$  mientras que se obtiene un polo en  $s = -\alpha$  con  $\alpha < 0$  que pertenece al semiplano  $\mathbb{C}^+$ .

Más adelante veremos como la estabilidad de los sistemas lineales está asociada a la ubicación de los polos en  $\mathbb{C}^-$  y  $\mathbb{C}^+$ .

Recordando el teorema de la existencia de la transformada de Laplace, pedimos que la parte real de  $s$  sea mayor que la abscisa de convergencia  $\alpha_c$ . Para este caso en particular note que, i) el TVI y el TVF se cumplen para  $\alpha > 0$  mientras que ii) el TVF no se cumple para  $\alpha < 0$ .

### B.4.2. Función escalón

Sea la función escalón <sup>3</sup> de amplitud  $A$ ,

$$f(t) \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ A & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

donde  $A \in \mathbb{R}$ , constante y distinta de cero. Suponiendo como caso particular y sin pérdida de generalidad que  $A > 0$  luego, dicha función tiene la representación gráfica de la Fig. B.4.

<sup>2</sup>En teoría de control lineal se designa como polos a las raíces del denominador de la función de transferencia.

<sup>3</sup>En la bibliografía se suele encontrar a la función escalón de altura  $A$  escrita como  $f(t) = AH(t)$ , donde  $H(t)$  es la función escalón unitaria, la que toma como valores extremos 0 y 1. La función  $H(t)$  es también conocida como función de Heaviside.

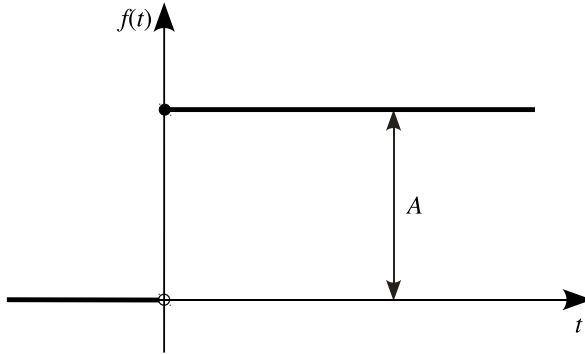


Figura B.4: Representación gráfica de la función escalón de amplitud  $A$ .

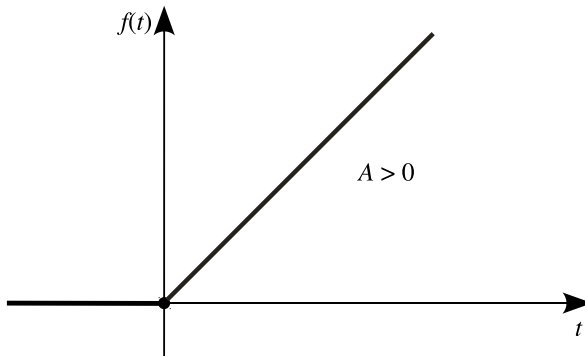


Figura B.5: Representación gráfica de la función rampa con pendiente  $A$ .

La transformada de Laplace de la función  $f(t)$  puede obtenerse como sigue,

$$\mathcal{L}[Ae^{-\alpha t}] = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = \frac{A}{s} \quad (\text{B.17})$$

donde dicha transformada existe para todo  $s > 0$  y  $s \in \mathbb{R}$ .

### B.4.3. Función rampa

Sea la función rampa con pendiente  $A$ ,

$$f(t) \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ At & \text{para } t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

donde  $A \in \mathbb{R}$ , constante y distinta de cero. Además, sin pérdida de generalidad para este ejemplo se asume  $A > 0$  como se indica en la Fig. B.5.



Luego, mediante un cambio de variables ( $u = At$  y  $dv = e^{-st} dt$ ) e integrando por partes,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[At] &= \int_0^{\infty} Ate^{-st} dt = At \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{Ae^{-st}}{-s} dt \\ &= \frac{A}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{A}{s^2}\end{aligned}$$

con  $s > 0$ .

Similarmente al caso anterior la transformada existe si  $s > 0$  y  $s \in \mathbb{R}$ .

#### B.4.4. Función sinusoidal

Sea la función sinusoidal,

$$f(t) \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ A \sin(\omega t) & \text{para } t \geq 0 \end{cases} . \quad (\text{B.19})$$

donde  $A$  y  $\omega$  constantes reales y sin pérdida de generalidad mayores a cero. Siendo  $\sin(\omega t) = (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) / 2j$  luego,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[A \sin(\omega t)] &= \frac{A}{2j} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt \\ &= \frac{A}{2j} \frac{1}{(s - j\omega)} - \frac{A}{2j} \frac{1}{(s + j\omega)} = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}.\end{aligned}$$

#### B.4.5. Función pulso

Sea la función pulso (Fig B.6),

$$f(t) \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \text{ y } t > t_0 \\ A/t_0 & \text{para } 0 \leq t \leq \infty \end{cases} . \quad (\text{B.20})$$

con  $A$  y  $t_0$  constantes reales.

La función pulso se puede considerar como una función construida con otras dos funciones escalón de acuerdo con la Fig. B.7.

$$f(t) = \frac{A}{t_0} H(t) - \frac{A}{t_0} H(t - t_0) . \quad (\text{B.21})$$

Luego, la transformada de Laplace de  $f(t)$  se calcula como sigue,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0} H(t)\right] - \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0} H(t - t_0)\right] .$$

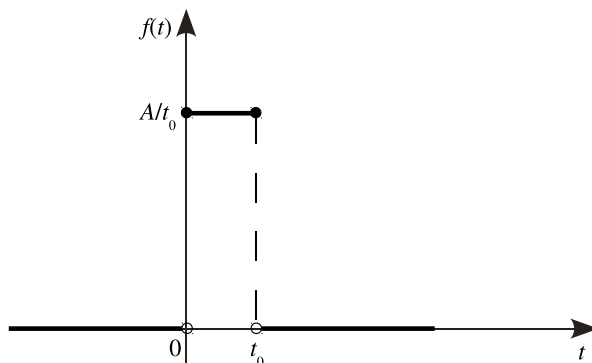


Figura B.6: Representación gráfica de un pulso de amplitud  $A/t_0$ .

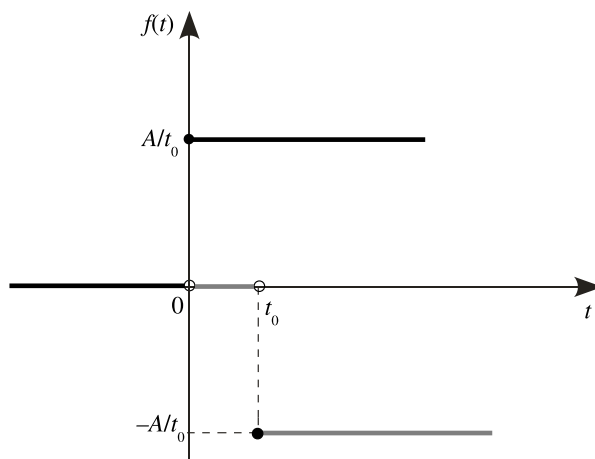


Figura B.7: Funciones escalón unitaria  $H(t)$  y escalón unitaria desplazada  $H(t-t_0)$ . Donde, la suma algebraica de ambas funciones escalón dan como resultado la función pulso representada en la Fig. B.6.

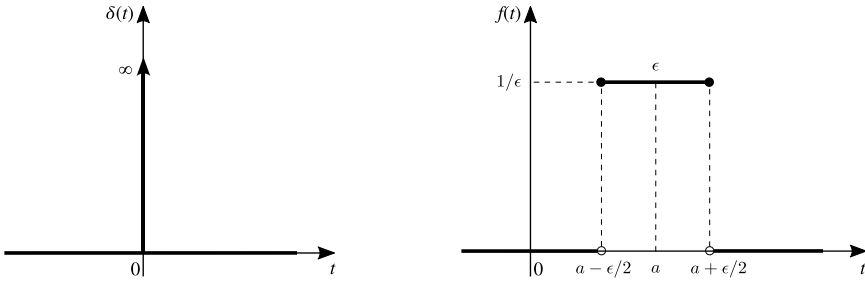


Figura B.8: Representación gráfica de la función delta de Dirac.

$$= \frac{A}{t_0s} - \frac{A}{t_0s} e^{-st_0} = \frac{A}{t_0s} (1 - e^{-st_0}) \quad . \quad (B.22)$$

donde para computar la transformada de Laplace del escalón unitario desplazado ( $H(t - t_0)$ ) se aplicó el teorema de traslación en  $t$ .

### B.4.6. Delta de Dirac

Primeramente se introduce una definición de la delta de Dirac<sup>4</sup> antes de proceder al cálculo de su transformada.

**Definición B.4.1 — Delta de Dirac.** La función delta de Dirac está definida como,

$$f(t) \begin{cases} 0 & \text{para } t \neq 0 \\ \infty & \text{para } t = 0 \end{cases} \quad . \quad (B.23)$$

de tal modo que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$ .

La Fig. B.8(a) representa en forma gráfica a la delta de Dirac.

Luego, en primer lugar para el cálculo de la transformada de Laplace de la función Delta de Dirac se va a considerar la función pulso desplazada en  $t = a$  de la Fig. B.8(b) donde se considera que  $\epsilon \rightarrow 0$ . Luego, de la definición de la transformada de Laplace,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [\delta(t - a)] &= \int_0^{\infty} \delta(t - a)e^{-st} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a-\epsilon/2}^{a+\epsilon/2} \frac{1}{\epsilon} e^{-st} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon s} \left( e^{-as+\epsilon s/2} - e^{-as-\epsilon s/2} \right) \quad . \end{aligned} \quad (B.24)$$

Ahora, considerando la diferencia de exponenciales de la ecuación anterior,

$$e^{-as+\epsilon s/2} - e^{-as-\epsilon s/2} = e^{-as} \left( e^{\epsilon s/2} - e^{-\epsilon s/2} \right) .$$

<sup>4</sup>Estrictamente, la Delta de Dirac es un función generalizada

Luego, desarrollando en serie de Taylor las exponenciales dentro del paréntesis de la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} e^{\epsilon s/2} - e^{-\epsilon s/2} &= 1 + \frac{\epsilon s}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\epsilon s}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\epsilon s}{2}\right)^3 + \dots \\ &\quad - 1 - \frac{(-\epsilon s)}{2} - \frac{1}{2!} \left(\frac{-\epsilon s}{2}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{-\epsilon s}{2}\right)^3 - \dots \\ &= \epsilon s + \frac{2}{3!} \left(\frac{\epsilon s}{2}\right)^3 + \dots \end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión (B.24) de la integral de Laplace de la delta de Dirac ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t-a)] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-as}}{\epsilon s} \left[ \epsilon s + \frac{2}{3!} \left(\frac{\epsilon s}{2}\right)^3 + \dots \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-as}}{\cancel{\epsilon s}} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-as}}{\cancel{\epsilon s}} \underbrace{\left[ \frac{2}{3!} \left(\frac{\epsilon s}{2}\right)^3 + \dots \right]}_{\rightarrow 0} \quad (\text{B.25}) \\ &= e^{-as} . \end{aligned}$$

Por último, a partir de la ecuación anterior y particularmente para  $a = 0$  la transformada de Laplace de la delta de Dirac resulta,

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 . \quad (\text{B.26})$$

La Tabla B.3 muestra la Transformada de Laplace de funciones más conocidas existiendo en la bibliografía clásica del tema tablas más completas que la aquí presentada (Spiegel [83], Kreyszig [45], entre muchos otros).

### Comandos de Octave relacionados al tema

A continuación se presentan comandos de Octave para computar la transformada y transformada inversa de Laplace.

Comando	
laplace(f)	Computa la transformada de Laplace de la función $f$
ilaplace(Gs)	Computa transformada inversa de Laplace de la función $G_s$

Tabla B.3: Propiedades más comunes de la Transformada de Laplace.

Func. $f(t)$	Transf. $F(s)$	Restric. en $s$	Func. $f(t)$	Transf. $F(s)$	Restric. en $s$
$\delta(t)$	1		$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$s > -a$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$	$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$s > a$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$		$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$s > -a$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$	$e^{-at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s+a)^2 - b^2}$	$s >  a $
$t^n, n \in \mathbb{N}^+$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$	$e^{-at} \cosh(bt)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 - b^2}$	$s >  a $
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$	$t \sin(\omega t)$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$s > 0$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$s > 0$	$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$s > 0$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2 - b^2}$	$s >  b $			
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2 - b^2}$	$s >  b $			
$te^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$s > a$			
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$s > -a$			
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$			

**Ejemplo B.3** Determine la transformada de Laplace de la función  $f(t) = be^{-at} \cos(3t)$  mediante tablas y comandos de Octave.

Aplicando transformada de Laplace a la función  $f(t)$  y teniendo en cuenta la Tabla B.3

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[be^{-at} \cos(3t)] \\
 &= b\mathcal{L}[e^{-at} \cos(3t)] = \frac{b(s+a)}{(s+a)^2 + 3^2} \\
 &= \frac{b(s+a)}{(s+a)^2 + 9}
 \end{aligned}$$

Los comandos de Octave para este ejemplo se indican a continuación.

**Algoritmo B.1:** Código de Octave del Ejem. B.3.

```

1 clear all, clc
2 pkg load symbolic
3
4 % defino variables simbolicas
5 syms a b t
6
    
```

```

7 % Defino la funcion temporal
8 f=b*exp(-a*t)*cos(3*t)
9
10 % Computo la transformada de Laplace
11 laplace(f)

```

En la ventana de comandos de Octave se presenta la siguiente respuesta:

```

OctSymPy: Communication established.  SymPy v1.1.1.

f = (sym)

      -a.t
b.e      .cos(3.t)

ans = (sym)

b.(a + s)
-----
      2
(a + s)  + 9

```

## B.5. Funciones Generalizadas

A partir de los '50 los matemáticos han desarrollado varias teorías rigurosas con objetos llamados funciones generalizadas (o distribuciones). Una de ellas es la conocida función delta de Dirac.

Las funciones generalizadas pueden sumarse, restarse y multiplicarse por constantes. También es posible, bajo condiciones adecuadas, multiplicar una función ordinaria por una función generalizada. Así,

$$\delta(t)f(t) = f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) .$$

$$\delta(t-c)f(t) = f(t)\delta(t-c) = f(c)\delta(t-c) .$$

siempre que  $f(t)$  sea continua en  $t = 0$  y en  $t = c$  respectivamente.

También, si  $a < 0 < b$ ,

$$\int_a^b g(t)\delta(t)dt = \int_a^b g(0)\delta(t)dt = g(0) \int_a^b \delta(t)dt = g(0) .$$

y en general, sea  $a < c < b$  luego,

$$\int_a^b g(t)\delta(t-c)dt = g(c) . \quad (\text{B.27})$$

**Ejemplo B.4** Calcular la  $\mathcal{L}[\delta(t-c)]$  y la  $\mathcal{L}[\delta(t)]$ .

Por definición de transformada de Laplace,

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \int_0^\infty \delta(t-c)e^{-st} dt .$$

considerando la Ec. (B.27) se puede escribir,

$$\mathcal{L}[\delta(t-c)] = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \delta(t-c)e^{-st} dt = e^{-sc} .$$

Así, para el caso particular donde  $c = 0$ ,

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \int_\epsilon^\infty \delta(t)e^{-st} dt = e^{-s0} = 1 .$$

■

## B.6. Transformada Inversa de Laplace

En la práctica resulta de importancia recuperar  $f(t)$  a partir de su transformada de Laplace  $F(s)$ . Para ello, introducimos el siguiente teorema:

**Teorema B.6.1 — Unicidad de la Transformada Inversa de Laplace.** Supóngase que las funciones  $f(t)$  y  $g(t)$  satisfacen la hipótesis del teorema 1.1, de modo que sus transformadas  $F(s)$  y  $G(s)$  existen. Si  $F(s) = G(s)$  para toda  $s > c$  (para alguna  $c$ ), entonces  $f(t) = g(t)$  siempre que  $f$  y  $g$  sean continuas.

Este resultado es válido para funciones continuas por tramos si cada punto de salto le asignamos como valor de la función el promedio de los límites izquierdo y derecho.

De acuerdo con el Teo. B.6.1, podemos hablar de transformada inversa de una función  $F(s)$  y la única  $f(t)$  tal que  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ . En consecuencia escribimos,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] . \quad (\text{B.28})$$

## B.7. Resolución de Ecuaciones Diferenciales

Considere la ecuación diferencial ordinaria (ODE) de un problema lineal invariante en el tiempo (LTI) genérica

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y^{(1)}(t) + a_n y(t) = b_0 u^{(m)}(t) + b_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + b_{m-1} u^{(1)}(t) + b_m u(t) , \quad (\text{B.29})$$

con  $a_n \neq 0$  y  $b_0 \neq 0$  y por simplicidad asuma condiciones iniciales nulas. Luego, aplicando transformada de Laplace y reordenando se obtiene una función de transferencia,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} , \quad (\text{B.30})$$

o bien,

$$Y(s) = G(s)U(s) . \quad (\text{B.31})$$

La función  $G(s)$  es designada función de transferencia del sistema y es igual a la salida  $Y(s)$  para cuando se tiene como entrada una función delta de Dirac.

Finalmente, la  $y(t)$  es encontrada como la transformada inversa de la expresión (B.31) para una dada  $U(s)$ . Esto es,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [G(s)U(s)] . \quad (\text{B.32})$$

El esquema de resolución de una ODE lineal de grado  $n$  puede ser resumido como se muestra en la Fig.B.9.

En cuanto a la transformada inversa, después del tratamiento algebraico de la ecuación en  $s$ , usualmente aparecen funciones que pueden expresarse como un cociente de polinomios, y que no siempre están en tablas. En ese caso, para poder encontrar la  $y(t)$ , se utiliza el método de descomposición en fracciones parciales, que permite obtener una expresión de  $Y(s)$  como una suma de funciones simples basadas en las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia original. Así, la solución de la ecuación diferencial estará compuesta por la combinación lineal de las transformadas inversas de funciones simples que se encuentran en las tablas elementales de TL.

En síntesis, la técnica para encontrar  $y(t)$  consiste en los pasos que se detallan en el siguiente procedimiento:



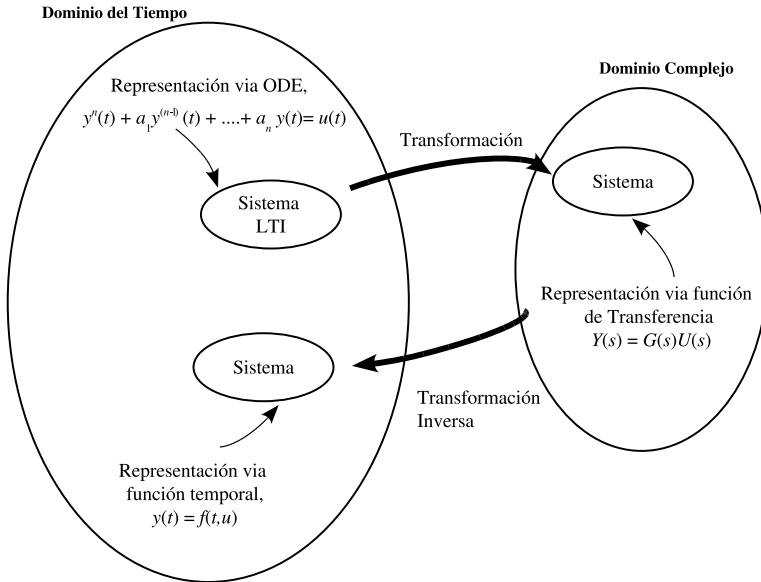


Figura B.9: Representación esquemática de la metodología de resolución de una ODE lineal de grado  $n$ .

**Procedimiento B.7.1**

- Paso 1** Dada una ODE y sus condiciones iniciales aplique la transformada de Laplace a dicha ecuación.
- Paso 2** Aplique el método de descomposición en fracciones parciales (ver Apéndice A) similarmente al aplicado en cálculo elemental.
- Paso 3** Determine transformada inversa de Laplace a cada uno de los términos basándose en las tablas adjuntas en este apéndice o las existentes en libros de matemáticas para ingenierías.

**Ejemplo B.5** Sea,  $y'(t) + \lambda y(t) = u(t)$  con  $y(0) = 0$  y  $u(t) = H(t)$ . a) Obtenga la  $y(t)$ . b) ¿Cómo es la evolución en el tiempo de  $y(t)$  para  $t \geq 0$ ?

Aplicando transformada de Laplace a la ODE se tiene,

$$\mathcal{L}[y'(t)] + \lambda \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[H(t)] .$$

Teniendo en cuenta, i) la Propiedad 1  $\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0)$  y ii)  $\mathcal{L}[H(t)] = 1/s$  luego, reemplazando se llega a,

$$sY(s) - y(0) + \lambda Y(s) = \frac{1}{s} .$$

Siendo  $y(0) = 0$  y reordenando se tiene,

$$Y(s) = \frac{1}{s(s + \lambda)} .$$

Aplicando las técnicas de expansión en fracciones parciales (ver apéndice A),

$$Y(s) = \frac{1}{s(s + \lambda)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \lambda}$$

donde,

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + \lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

y

$$B = \lim_{s \rightarrow -\lambda} (s + \lambda)Y(s) = \lim_{s \rightarrow -\lambda} \frac{1}{s} = -\frac{1}{\lambda} .$$

Reemplazando en la expresión de  $Y(s)$  se tiene,

$$Y(s) = \frac{1}{s(s + \lambda)} = \frac{1/\lambda}{s} - \frac{1/\lambda}{s + \lambda} .$$

Aplicando transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/\lambda}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/\lambda}{s + \lambda}\right] .$$

y según tabla de transformada,

$$y(t) = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) .$$

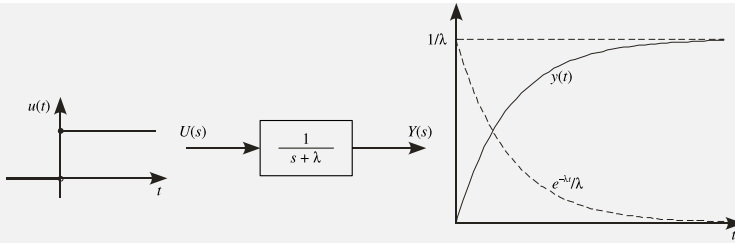


Figura B.10: Diagrama de bloques del sistema y las respuestas en el tiempo de la función de entrada  $u(t)$  y la salida  $y(t)$ .

Note que si se aplica los teoremas de valor inicial y final resulta,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{TVI:} \quad y(0^+) &= \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) = 0 \\
 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \cancel{s} \frac{1}{\cancel{s}(s + \lambda)} = 0
 \end{aligned}$$

(ambas ecuaciones verifican el mismo resultado).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{TVF:} \quad y(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) = \frac{1}{\lambda} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \frac{1}{\cancel{s}(s + \lambda)} = \frac{1}{\lambda}
 \end{aligned}$$

(ambas ecuaciones verifican el mismo resultado).

Los resultados alcanzados por los teoremas verifican las condiciones iniciales y finales presentadas en la Fig. B.10. ■

**Ejemplo B.6** Considere la función de transferencia del Ejem. A.2. Obtenga la transformada inversa de Laplace en forma analítica y verifique su resultado con comandos de Octave.

Teniendo en cuenta la expansión en fracciones parciales hecha en el Ejem. A.2 y aplicando transformada inversa de Laplace considerando al mismo

tiempo con la Tabla B.3,

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+2)^2}\right] \\ &= 3e^{-t} - 3e^{-2t} - 2te^{-2t} \end{aligned}$$

A continuación se muestran los comandos de Octave para este ejemplo.

#### Algoritmo B.2: Código de Octave del Ejem. B.6.

```

1 clear all, clc
2 pkg load symbolic
3
4 % defino variables simbolicas
5 syms s
6
7 Gs=(s+4)/((s+1)*(s+2)^2)
8
9 ilaplace(Gs)

```

La ventana de comandos de Octave informa lo siguiente:

```

OctSymPy: Communication established.  SymPy v1.1.1.
Gs = (sym)

      s + 4
-----
                2
      (s + 1) . (s + 2)

ans = (sym)

      t          -2.t
(-2.t + 3.e  - 3) . e

```

Coincidiendo los resultados con el cómputo analítico. ■

## B.8. Pensemos

- ¿Es correcta la siguiente expansión en fracciones parciales?  
 Si    No

$$\frac{K_r(s+z)}{(s+a)(s+b) + K_r} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b}$$

con  $z$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $A$  y  $B$  constantes reales.

2. ¿La transformada de Laplace de las siguiente función es correcta?  
 Si    No

$$\mathcal{L}[ke^{-\theta t} \text{sen}(\omega t)] = \frac{k}{(s + \theta)} \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)}$$

3. Un sistema cuya función de transferencia es  $G(s) = \frac{10}{(s^2 + 4s + 5)}$  es exitado con una entrada de forma  $u(t) = e^{-t} \text{sen}(2t)$ . El valor final alcanzado por la salida en estado estacionario es:  
 1.    infinito.  
 20/25.    ninguna es correcta.  
 25/20.

Nota. La transformada de Laplace de  $\mathcal{L}[e^{-bt} \text{sen}(at)] = \frac{a}{(s+b)^2 + a^2}$ .

4. La transformada inversa de Laplace de  $\mathcal{L}^{-1}[sY(s)] = y'(t) + y(0^+)$  con  $y(0^+) \neq 0$ .    Si    No

## B.9. Problemas

### Transformada de Laplace

**Problema B.1** Defina la Transformada de Laplace de una función  $f(t)$  cualquiera. ¿Qué debe cumplirse para que la Transformada de Laplace exista?

**Problema B.2** Demostrar que:  $\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

**Problema B.3** Determine la Transformada de Laplace de las siguientes funciones mediante el uso de la definición de la integral de Laplace:

- (a) Escalón:  $f(t) = kH(t)$   
 (b) Rampa:  $f(t) = ktH(t)$

Luego, obtenga la transformada de Laplace de las dos funciones anteriores multiplicadas por  $e^{-at}$ , mediante el primer teorema del corrimiento.

**Problema B.4** (a) Determine la transformada de Laplace de la función pulso representada en la Fig. B.6 mediante el uso de tablas de transformadas.

- (b) En base al anterior resultado determine la transformada de Laplace de la delta de Dirac.  
 (c) Luego, estudie a través del primer teorema del corrimiento, el efecto de multiplicar la función delta por  $e^{-at}$ .

**Problema B.5** Mediante el uso de tablas de transformada de Laplace, encuentre la transformada de las siguientes funciones:

- (a)  $f(t) = 2te^{-2t} + 6$   
 (b)  $f(t) = \frac{1}{4}(e^{-3t} - te^{-5t})$   
 (c)  $f(t) = (1 + te^{-t})^3$

**Problema B.6** Verifique los teoremas del valor inicial y final con las siguientes funciones.

- (a)  $f_1(t) = e^{-3t}$

$$(b) f_2(t) = 1 - e^{-t}$$

Para el cálculo de la Transformada de Laplace utilice las tablas y verifique el resultado aplicando la definición matemática.

**Problema B.7** Encuentre la transformada de Laplace de las siguientes funciones mediante el uso de los teoremas de desplazamiento:

$$1. f_1(t) = \begin{cases} e^{-(t-2)} & \forall t > 2 \\ 0 & \forall t \leq 2 \end{cases}$$

$$2. f_2(t) = e^{-2t} \cos(t)$$

**Problema B.8** (a) Calcule la transformada de Laplace de la función  $f(t) = e^{-2t} \text{sen}(4t)$ .

(b) Grafique dicha función en el dominio del tiempo.

(c) Verifique los teoremas del valor inicial y final.

**Problema B.9** Dada la función  $f(t)$  definida para  $t \geq 0$ ,

$$f(t) = 4e^{-5t} + 6t^3 - 3t \text{sen}(4t) + 2 \cos(2t).$$

(a) Encontrar la transformada de Laplace de dicha función.

(b) Graficar cualitativamente cada uno de los sumandos en el dominio del tiempo.

(c) Aplicar los teoremas del valor inicial y final. Extraiga conclusiones.

**Problema B.10** Encuentre las transformadas de Laplace de las siguientes funciones mediante el uso del teorema del desplazamiento:

$$(a) f(t) = \begin{cases} 5t & \forall 0 < t \leq 1 \\ 5 & \forall 1 < t \leq 2 \\ 0 & \forall t > 2 \end{cases}$$

$$(b) f(t) = \begin{cases} 0 & \forall 0 < t \leq 1 \\ t + 1 & \forall 1 < t \leq 3 \\ 4 & \forall 3 < t \leq 4 \\ 0 & \forall t > 4 \end{cases}$$

**Problema B.11** La Fig. B.11 muestra el perfil de temperatura que debe seguir un reactor batch durante los procesos de arranque, operación y parada del mismo.

Determine la transformada de Laplace de la función de temperatura de referencia para el reactor.

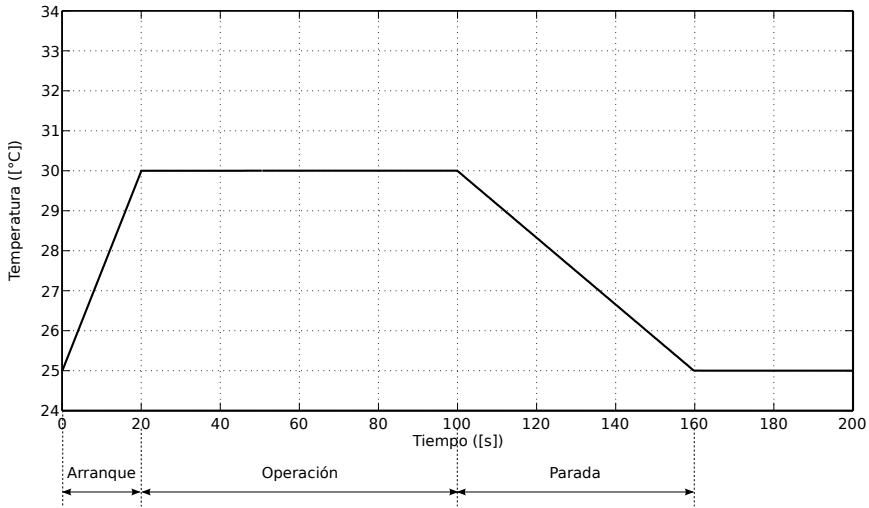


Figura B.11: Perfil de temperatura del reactor químico (para más detalles ver [2]).

## Transformada inversa de Laplace

**Problema B.12** Estudie a través del segundo teorema del corrimiento que ocurre en el dominio del tiempo si la transformada de Laplace de las funciones delta, escalón y rampa se las multiplica por  $e^{-as}$ .

**Problema B.13** Existe una correspondencia entre la ubicación de las raíces de denominador de una función de transferencia  $G(s)$  en el plano complejo y la respuesta temporal correspondiente a la transformada inversa de dicha función. Relacione y esquematice ambas para los casos en que  $G(s)$  tiene:

- una raíz real negativa,
- una raíz real positiva,
- una raíz simple en  $s = 0$ ,
- dos raíces múltiples en  $s = 0$ ,
- un par de raíces complejas conjugadas con; 1) parte real positiva, 2) parte real negativa y 3) parte real nula.

**Problema B.14** Encontrar las transformadas inversas de Laplace de las siguientes funciones:

- $G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$
- $G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$
- $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+4)}$
- $G(s) = \frac{(2s+3)}{(s+1)^2(s+4)^2}$

$$(e) G(s) = \frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

**Problema B.15** Obtenga la transformada inversa de la siguiente expresión:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 9s + 19}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

**Problema B.16** Encontrar la transformada inversa de las funciones  $G_1(s) = 1/(s^3 - 27)$  y  $G_2(s) = s/(s^3 - 27)$ . Luego, haciendo uso de algún teorema calcule la transformada inversa de  $G_2$  a partir de  $G_1$ .

### Resolución de ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes

**Problema B.17** Resuelva el Ejem. B.5 considerando  $u(t)$  igual a una función rampa con pendiente  $k$ .

**Problema B.18** Sea,  $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = u(t)$  con  $y(0) = y'(0) = 0$  y  $u(t) = H(t)$ .

- Obtenga la  $y(t)$ .
- ¿Cómo es la evolución en el tiempo de  $y(t)$  para  $t \geq 0$ ?
- Resuelva usando códigos de Octave y Maxima.

**Problema B.19** Considere el sistema masa-resorte de la Fig. B.12

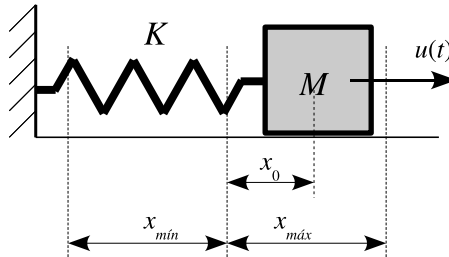


Figura B.12: Sistema masa-resorte.

que puede ser modelado aceptablemente bien por la ecuación diferencial,

$$Mx''(t) + Bx'(t) + kx(t) = u(t)$$

teniendo como condición inicial,  $x_0 = x(0) = x'(0) = 0$  y,  $M = 1[\text{Kg}]$ ,  $B = 0,1$ ,  $k = 1$ , y  $u(t) = H(t)$ .

- Mediante el uso de la transformada de Laplace resuelva la ecuación diferencial.
- Basándose en la función de transferencia, aplique los teoremas de valor inicial y final, asumiendo una entrada escalón de amplitud unitaria.



- (c) Prediga mediante un gráfico a mano alzada la respuesta dinámica del sistema frente a la entrada  $u(t)$  propuesta en el inciso (b).
- (d) Verifique la respuesta dinámica predicha mediante una simulación con Octave.

**Problema B.20** Resuelva las ecuaciones diferenciales definidas para  $t \geq 0$  que se detallan a continuación mediante transformación de Laplace.

- (a)  $y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = e^{-t}u(t)$ , sujeto a  $y'(0) = y(0) = 0$  y  $u(t)$  es un escalón unitario en  $t = 0$ .
- (b)  $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = e^{-t}$ , sujeto a  $y'(0) = y(0) = 0$ .
- (c)  $y'' + y' - 2y = 2t$ ; sujeta a las condiciones iniciales  $y'(t) = y(t) = 0$ .
- (d)  $y'' + 4y' + 3y = te^{-t}$  donde  $y := y(t)$  y sujeta a las condiciones iniciales  $y'(0) = y(0) = 1$ .

**Problema B.21** Para la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + y' + 4y = 3u' + 2u$$

sujeta a las condiciones iniciales  $y'(0) = y(0) = 0$ , donde  $y := y(t)$  y  $u := u(t) = e^{-3t}$  para  $t \geq 0$ :

- (a) Resuélvala utilizando transformada de Laplace.
- (b) Basándose en la expresión de  $y(t)$  analice el comportamiento de cada uno de los términos y su aporte al régimen transitorio y al estacionario.

**Problema B.22** Resuelva la siguiente ecuación diferencial mediante la transformación de Laplace:

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = u(t)$$

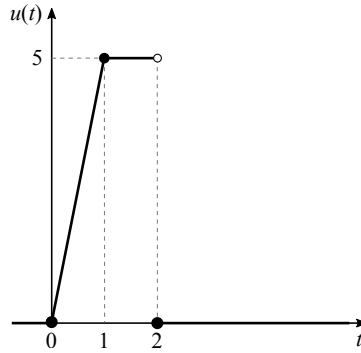
$$\text{donde } u(t) = \begin{cases} 5t & \forall 0 < t \leq 1 \\ 5 & \forall 1 < t \leq 2 \\ 0 & \forall t > 2 \end{cases} \text{ y las condiciones iniciales son}$$

$$y'(0) = y(0) = 0.$$

**Problema B.23** Resuelva la siguiente ecuación diferencial utilizando Transformada de Laplace:

$$y'' + 2y' + 5y = u$$

sujeta a las condiciones iniciales  $y'(t) = y(t) = 0$ , y  $u(t)$  de acuerdo con la Fig. B.13.

Figura B.13: Función fuerza  $u(t)$ 

- Problema B.24** (a) Encuentre la transformada de Laplace de  $y''(t) + 2\zeta\omega_n y'(t) + \omega_n^2 y(t) = u(t)$  con  $y(0) = a$  e  $y'(0) = b$ , siendo  $a$ ,  $b$ ,  $\zeta$  y  $\omega_n$  constantes reales y  $u(t) = H(t)$ .
- (b) Considere  $\zeta = 1$ ,  $\omega_n = 1$ ,  $a = 0$  y  $b = 0$  y resuelva la ecuación diferencial.
- (c) Considere  $\zeta = 0,5$ ,  $\omega_n = 1$ ,  $a = 0$  y  $b = 0$  y resuelva la ecuación diferencial.

**Problema B.25** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales mediante la transformación de Laplace:

$$x'(t) = 2x - 3y,$$

$$y'(t) = y - 2x,$$

con  $x(0) = 8$  e  $y(0) = 3$ .

## Apéndice C

# Álgebra de Diagrama de Bloques

En este capítulo se presenta el álgebra de diagrama de bloques y una serie de reglas aplicables a sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) tanto simple entrada-simple salida (SISO) como múltiple entrada-múltiple salida (MIMO). Se completa esta presentación con una serie de ejemplos sencillos.

### C.1. Introducción

Un sistema de control está formado por una cierta cantidad de componentes, donde cada uno de ellos cumple con una cierta función. Así, podemos mencionar como componentes de un sistema de control a la planta, el transductor y transmisor, el controlador y el elemento de control final. La ingeniería de control acostumbra a representar gráficamente mediante bloques a cada uno de los componentes. La representación gráfica de un conjunto de bloques que compone un sistema se la designa como diagramas de bloques (DB). Un DB es una forma convencional de representar gráficamente las interrelaciones entre las variables más significativas de un sistema, así como las características de los componentes que lo forman.

Los DB no solo son usados para representar gráficamente componentes y/o ecuaciones sino que también son extensamente usados en el análisis y el diseño de los sistemas de control.

En realidad, todo sistema físico expresado mediante ecuaciones diferenciales o algebraicas puede ser representado con idéntica rigurosidad mediante este tipo de diagramas. La diferencia fundamental reside en que, mientras un conjunto de leyes y principios físico-químicos son una representación puramente abstracta, un DB tiene la ventaja de indicar en forma más realista el flujo de señales del sistema real, posibilitando visualizar rápidamente la manera en que impactan

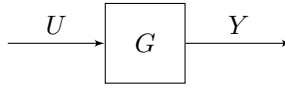


Figura C.1: Gráfico de un bloque funcional donde en términos matemáticos se representa la operación  $Y = GU$ . Note que, bajo esta representación,  $G$  puede ser una función lineal o no lineal.

cada una de las variables en el comportamiento de un sistema físico o bien en el desempeño de un sistema de control.

## C.2. Definiciones Básicas en Álgebra de Diagramas de Bloques

**Definición C.2.1 — Diagrama de Bloques.** Un diagrama de bloques de un sistema es una representación gráfica de las funciones realizadas por cada componente y del flujo de señales de una ecuación o sistema de ecuaciones.

En un DB, todas las variables del sistema están ligadas entre sí a través de bloques funcionales.

**Definición C.2.2 — Bloque Funcional.** El bloque funcional o simplemente bloque es una representación gráfica-simbólica (Fig. C.1) de una operación matemática, donde la salida es igual al producto de la entrada por la función incluida en el bloque.

La bibliografía clásica del tema suele hablar indistintamente de ganancia, función de transferencia o bien de tramitancia de un bloque, refiriéndose a la función incluida dentro de un bloque funcional. Debido a que la representación en DB puede ser aplicada tanto para sistemas lineales como no lineales, dichas funciones no necesariamente serán funciones en variable compleja  $s$ . Aquí, haremos referencia a funciones de transferencia debido a que estudiamos sistemas LTI, considerando a la ganancia como un caso particular de una función de transferencia en el campo de Laplace.

Los bloques funcionales están conectados entre sí por flechas que indican la dirección del flujo de señales. Así, resulta sencillo identificar como impactan ciertos componentes en el comportamiento del sistema, visualizando una o más propiedades particulares.

La otra operación matemática posible de representar gráficamente es la suma (o bien la sustracción o diferencia).

**Definición C.2.3 — Bloque Sumador.** El bloque sumador es una representación gráfica-simbólica (Fig. C.2) de la operación suma (o bien, sustracción) donde puede haber  $n$  señales de entrada pero solo una de salida.

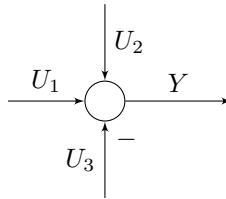


Figura C.2: Gráfico de un bloque sumador donde en términos matemáticos se representa la operación  $Y = U_1 + U_2 - U_3$ .

En la representación gráfica del sumador, usualmente, la operación suma no se indica en el diagrama con el signo + y sólo el signo - es usado para indicar la diferencia. Un ejemplo de dicha representación se muestra en la Fig. C.2.

**Definición C.2.4 — Toma de Señal o de información.** La toma de señal es una simple representación gráfica simbólica de un punto desde el cual la señal de entrada o bien salida de un bloque funcional es enviada hacia otros bloques o sumadores

Un ejemplo de toma de señal es representado en la Fig. C.3.

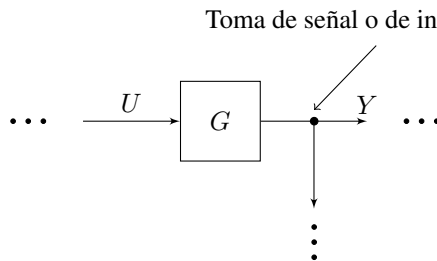


Figura C.3: Ejemplo de toma de señal de una porción de un DB.

Con estas tres últimas definiciones (producto, suma y toma de información) se construye lo que se conoce como álgebra de diagramas de bloques, la que se resume en un conjunto mínimo de reglas que se enuncian en la próxima sección.

### C.3. Reglas del Álgebra de Diagramas de Bloques

Dada la importancia de los diagramas de bloques en el estudio de sistemas de control a continuación estudiaremos las reglas que rigen la manipulación y transformación de estos diagramas. La validez de estas reglas está sujeta a la hipótesis de considerar elementos lineales y en principio serán enunciadas para

sistemas simple entrada - simple salida (SISO) y posteriormente se extenderán dichas reglas para sistemas de múltiples entradas y simple salida (MISO), de simple entrada y múltiple salida (SIMO) y de múltiples entradas - múltiples salida (MIMO).

Cabe destacar que para sistemas SISO, en todo momento podrán aplicarse las leyes conmutativas, asociativas y distributivas. Mientras que, las propiedades conmutativas del producto son sólo válidas para sistemas MISO, SIMO y MIMO (sección 3.3).

### C.3.1. Reglas básicas para sistemas SISO

Las propiedades básicas a aplicar se resumen en la Tabla C.1.

Tabla C.1: Propiedades básicas del álgebra lineal aplicables a sistemas SISO.

Propiedad	Operaciones
conmutativa de la suma	$G + F = F + G$
asociativa	$U_1 - U_2 = U_1 + (-U_2) = U_1 - (+U_2)$
conmutativa del producto	$GF = FG$
factor común	$GU_1 + GU_2 = G(U_1 + U_2)$
distributiva	$(G + F)U = GU + FU$

Las principales reglas del álgebra de DB son las que se enuncian a continuación.

■ **Regla C.3.1 — Bloques en serie.** Los bloques en serie se multiplican.

**Demostración** Considere la siguiente operación algebraica:

$$Y_1 = G_1U \quad , \quad (C.1)$$

$$Y = G_2Y_1 \quad . \quad (C.2)$$

La Fig. C.4a muestra la representación en diagrama de bloques de las operaciones (C.1) y (C.2). Resulta sencillo probar que  $Y = (G_2G_1)U$ , demostrando la regla enunciada. Este último resultado como se muestra en forma gráfica en la Fig. C.4b. □

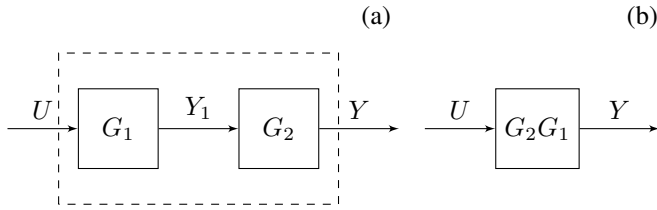


Figura C.4: (a) Representación de dos bloques en serie y (b) el correspondiente bloque con operación equivalente.

■ **Regla C.3.2 — Bloques en paralelo.** Los bloques en paralelo se suman <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Se entiende a la diferencia o resta como un caso particular de la suma.

**Demostración** Considere la siguiente operación algebraica:

$$Y_1 = \pm G_1 U \quad , \quad (C.3)$$

$$Y_2 = \pm G_2 U \quad , \quad (C.4)$$

$$Y = Y_1 + Y_2 \quad . \quad (C.5)$$

La Fig. C.5a muestra la representación en diagrama de bloques de las operaciones (C.3), (C.4) y (C.5).

Resulta sencillo probar que  $Y = (\pm G_1 \pm G_2)U$ , mostrando esta representación en la Fig. C.5b. □

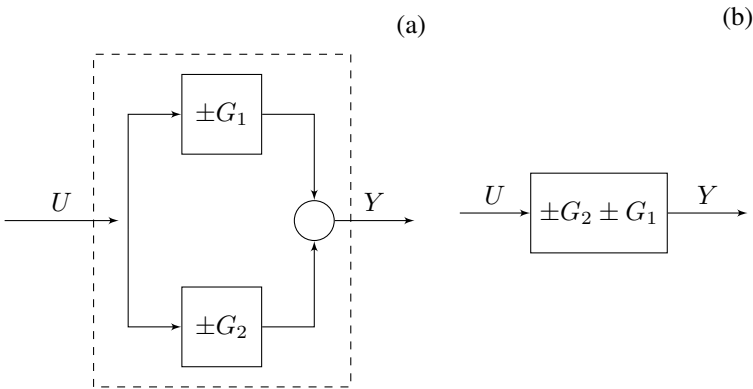


Figura C.5: (a) Representación de dos bloques en paralelo y (b) su correspondiente bloque con operación equivalente.

■ **Regla C.3.3 — Adelanto de toma de información.** El adelanto de toma de información implica multiplicar a la señal extraída de la nueva toma de información por el bloque se cruza.

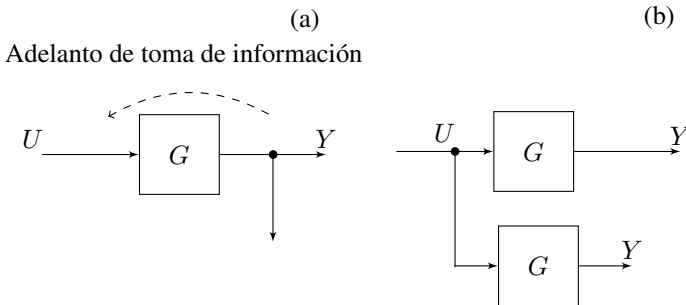


Figura C.6: (a) Representación de una toma de información en la señal de salida de un bloque  $G$  y (b) su correspondiente operación equivalente designada como adelanto de toma de información.

**Demostración** Considere el sistema de la Fig. C.6a donde se envía información de la señal  $Y$  a otra porción de un DB. Así, si toma información de  $U$  para no alterar la información y poder enviar  $Y$ , entonces se debe multiplicar por  $G$  (Fig. C.6b). □

■ **Regla C.3.4 — Atraso de toma de información.** El atraso de toma de información implica dividir a la señal extraída de la nueva toma de información por el bloque se cruza.

**Demostración** Considere el sistema de la Fig. C.7a donde se envía información de la señal  $U$  a otra porción de un DB. Para no alterar la información que se envía, dado que se debe enviar  $U$  y si toma información de  $Y$ , entonces se debe dividir por  $G$  (Fig. C.7b). □



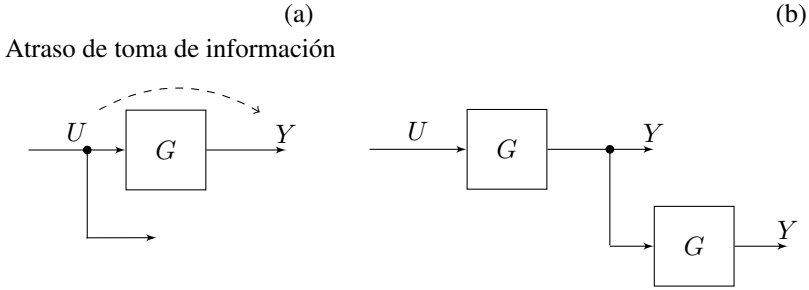


Figura C.7: (a) Representación de una toma de información en la señal de entrada a un bloque  $G$  y (b) su correspondiente operación equivalente designada como atraso de toma de información.

■ **Regla C.3.5 — Adelanto de sumador.** El adelanto de un sumador implica dividir por el bloque que se cruza.

**Demostración** Considere la siguiente operación algebraica:

$$Y_1 = \pm GU \quad , \quad (C.6)$$

$$Y = \pm Y_1 \pm X \quad . \quad (C.7)$$

La Fig. C.8a muestra la representación en diagrama de bloques de las operaciones (C.6) y (C.7).

Resulta sencillo probar que  $Y = \pm GU \pm X = G(\pm U \pm \frac{1}{G}X)$ , donde la correspondiente representación en DB se muestra en la Fig. C.8b. □

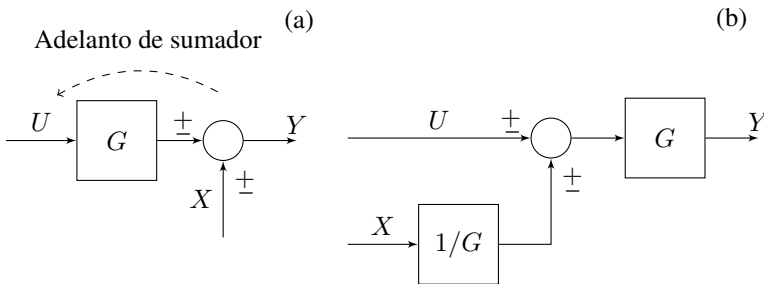


Figura C.8: (a) Representación de las operaciones (C.6) y (C.7) y (b) su correspondiente operación equivalente designada como adelanto de sumador.

■ **Regla C.3.6 — Atraso de sumador.** El atraso de un sumador implica multiplicar por el bloque que se cruza.

**Demostración** Considere la siguiente operación algebraica:

$$U_3 = \pm U_1 \pm U_2 , \quad (\text{C.8})$$

$$Y = GU_3 . \quad (\text{C.9})$$

La Fig. C.9a muestra la representación en diagrama de bloques de las operaciones (C.8) y (C.9).

Resulta sencillo probar que  $Y = G(\pm U_1 \pm U_2) = \pm GU_1 \pm GU_2$  mostrando este resultado en la Fig. C.9b. □

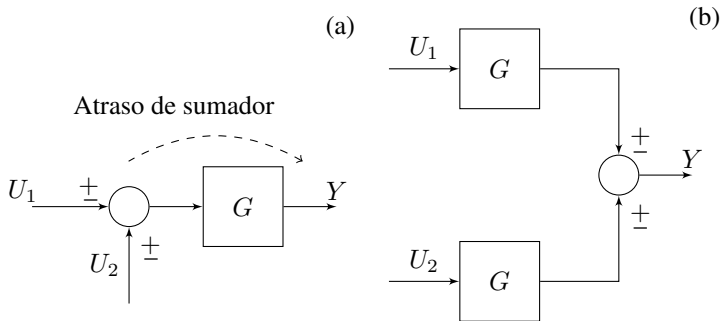


Figura C.9: (a) Representación de las operaciones (C.8) y (C.9) y (b) su correspondiente operación equivalente designada como atraso de sumador.

■ **Regla C.3.7 — Realimentación.** La relación salida-entrada en una realimentación es igual a la función de transferencia de la trayectoria directa sobre  $1 \mp$  el producto de las funciones de transferencia de la trayectoria directa por las de realimentación.

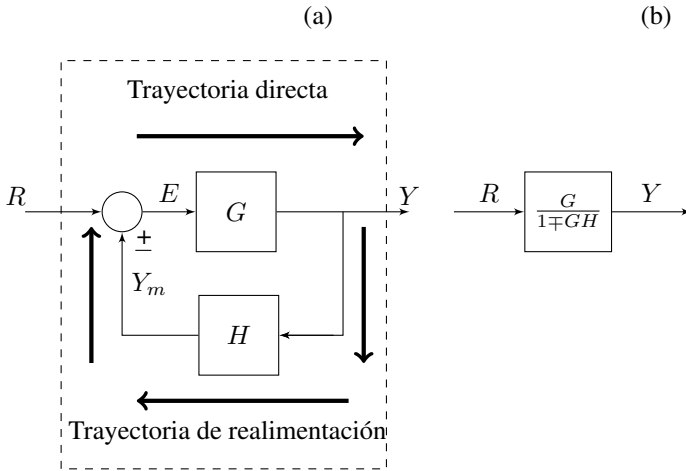


Figura C.10: (a) Representación de las operaciones relacionadas a la realimentación ((C.10), (C.11) y (C.12)) y (b) su correspondiente operación equivalente.

**Demostración** Considere la siguiente operación algebraica:

$$Y = GE \quad , \quad (C.10)$$

$$E = R \pm Y_m \quad , \quad (C.11)$$

$$Y_m = HY \quad . \quad (C.12)$$

La Fig. C.10a muestra la representación en diagrama de bloques de las operaciones (C.10), (C.11) y (C.12).

Resulta sencillo probar que  $Y = G(1 \mp GH)R$  mostrando este resultado en la Fig. C.10b.  $\square$

### C.3.2. Ejemplos ilustrativos

A continuación se presenta tres ejemplos ilustrativos que tienen por objeto familiarizar al lector con una metodología de trabajo a seguir con el fin de reducir un DB a una forma más sencilla.

**Ejemplo C.1** Considere el diagrama de bloques de la Fig. C.11. Determine la relación  $E/R$ .

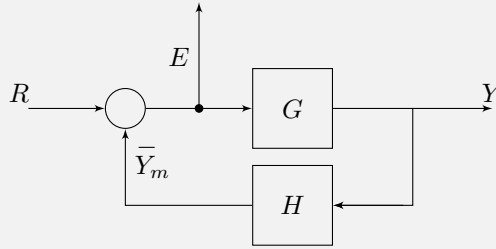


Figura C.11: Diagrama de bloques del Ejem. C.1.

Note que en el DB de la Fig. C.1 se puede asumir un bloque de ganancia unitaria en el camino directo entre la salida  $E$  y la entrada  $R$ . Por tal motivo, aplicando la regla de la realimentación,

$$\frac{E}{R} = \frac{1}{1 + GH}$$

Note además que la salida  $Y$  no se considera. ■

**Ejemplo C.2** Considere el sistema hidráulico de la Fig. C.12. Obtenga, basándose en las ecuaciones de balance, la representación en DB correspondiente de dicho sistema. Luego, reduzca dicho diagrama a un solo bloque entrada-salida siguiendo las reglas enunciadas.

El modelo matemático del sistema se obtiene mediante la ecuación de balance de materia total en estado transiente donde, por simplicidad en el ejemplo se asume las siguientes hipótesis:

1. la densidad del líquido ( $\rho$ ) no varía con el tiempo,
2. la sección transversal del tanque ( $A$ ) es constante, así el volumen de líquido acumulado es  $V = Ah$  donde solo varía  $h$ ,
3. por simplicidad se asume que las condiciones iniciales nulas son nulas,  $V(t = 0) = 0$  o bien  $h(t = 0) = h^0 = 0$  y
4. que el caudal volumétrico de salida es aceptablemente bien modelado mediante la ecuación  $q_s = h/R$ . El lector puede consultar el capítulo de modelado matemático de sistemas donde se justifica adecuadamente esta última relación entre el caudal de salida y el nivel de líquido.

Así, se puede escribir,

$$\frac{d\rho V}{dt} = \rho q_e - \rho q_s , \quad (\text{C.13})$$

donde  $q_e$  el caudal volumétrico de entrada y  $q_s$  el caudal volumétrico de salida.

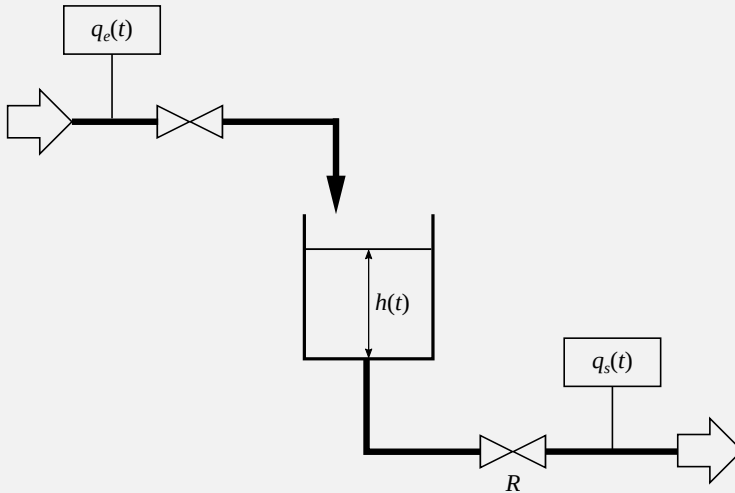


Figura C.12: Sistema Hidráulico. Aquí  $R$  representa la resistencia hidráulica de la válvula.

Según las hipótesis planteadas anteriormente la ecuación de balance de materia se resume a,

$$A \frac{d\rho V}{dt} = q_e - \frac{h}{R} , \quad (\text{C.14})$$

sujeta a la condición inicial  $h_0 = 0$ . Note que, la Ec. (C.14) es una ecuación diferencial lineal a coeficientes constantes con condición inicial nula.

Aplicando transformada de Laplace a la última ecuación se tiene,

$$AsH(s) = Q_e(s) - \frac{H(s)}{R} . \quad (\text{C.15})$$

Así, la representación en diagrama de bloques de la Ec. (C.15) resulta como se indica en la Fig. C.12.

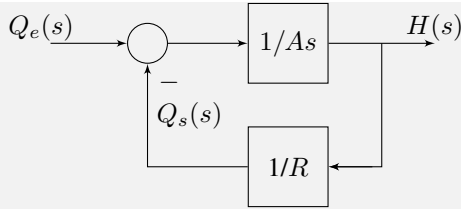


Figura C.13: Diagrama de bloques del sistema hidráulico de la Fig. C.12 basado en la ecuación diferencial (C.15) en el campo de Laplace.

Claramente se evidencia una realimentación la que es resuelta siguiendo la regla C.3.7.

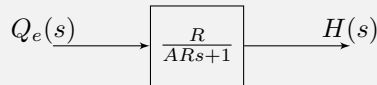


Figura C.14: Reducción del diagrama de bloques de la Fig. C.13.

De acuerdo con la Fig. C.14b se puede expresar,

$$H(s) = \frac{R}{ARs + 1} Q_e(s) . \quad (\text{C.16})$$

o bien,

$$\frac{H(s)}{Q_e(s)} = G(s) = \frac{R}{ARs + 1} . \quad (\text{C.17})$$

siendo  $G(s)$  la función de transferencia entre  $H$  y  $Q_e$ . Note que, si bien el mismo resultado se podría haber obtenido resolviendo directamente la Ec. (C.15), la representación en DB de la Fig. C.13 muestra gráficamente como impacta un cambio en el caudal de salida el nivel de líquido en el tanque. Hay una clara ventaja a favor del DB de la Fig. C.13 con respecto a la representación abstracta de la Ec. (C.15). ■

**Ejemplo C.3** Considere un sistema cuya representación en diagramas de bloques se indica en la Fig. C.15. Reduzca dicho diagrama a un solo bloque entrada-salida siguiendo las reglas enunciadas.

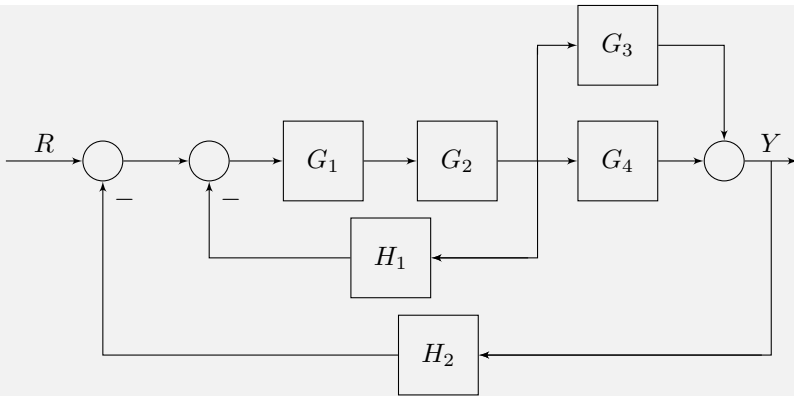
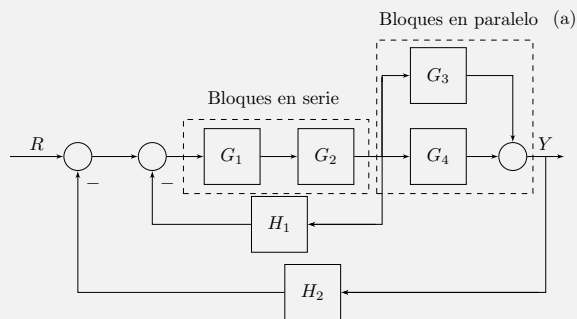


Figura C.15: Diagrama de bloques de un sistema de control.

Usualmente puede haber más de una secuencia a seguir para reducir un DB. La Fig. C.16 muestra la secuencia usada para resolver el DB de la Fig. C.15. Se observa (Fig. C.16a) es la presencia de dos bloques en serie ( $G_1$  y  $G_2$ ) y dos bloques en paralelo ( $G_3$  y  $G_4$ ). Estas dos situaciones son resueltas siguiendo las reglas C.3.1 y C.3.2 respectivamente y presentadas en la Fig. C.16b.



También en dicha figura se observa dos bloques que forman una realimentación y la reducción de estos bloques es resuelta siguiendo la regla C.3.7 lo que se muestra en la Fig. C.16c. Ahora, quedan dos bloques en serie, los que son escritos como un único bloque en la Fig. C.16d usando la regla C.3.1. Finalmente, en dicha figura queda una realimentación la que se reduce a un sólo bloque (Fig. C.16e) usando la regla C.3.7.

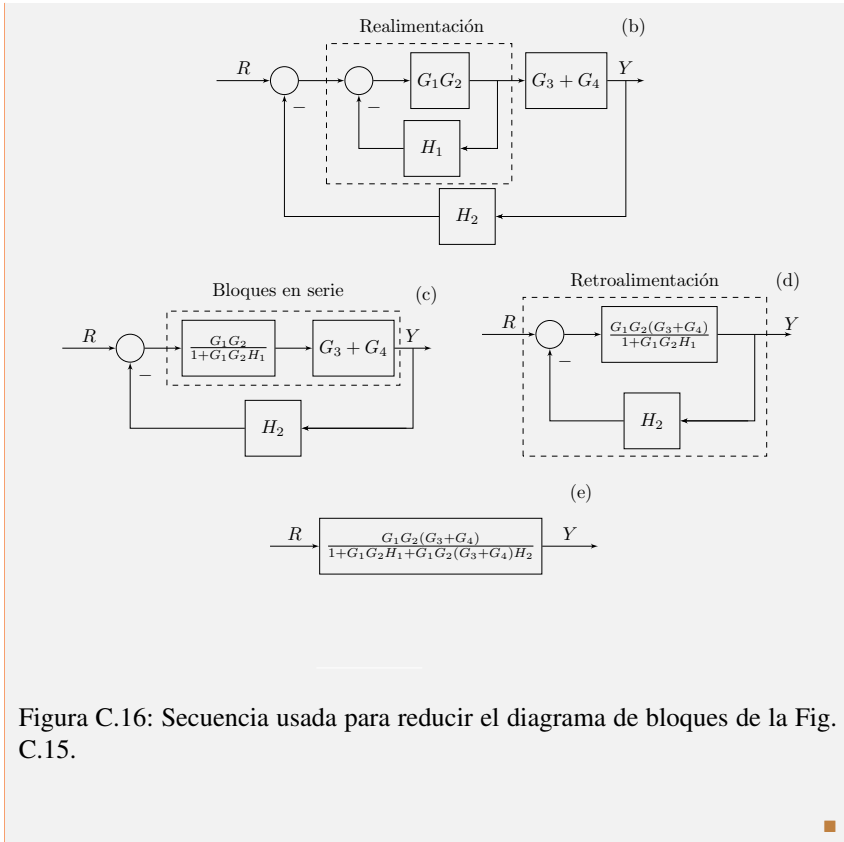


Figura C.16: Secuencia usada para reducir el diagrama de bloques de la Fig. C.15.

**Ejemplo C.4** Considere un sistema cuya representación en diagramas de bloques se indica en la Fig. C.17. Reduzca dicho diagrama a un solo bloque entrada-salida siguiendo las reglas enunciadas.

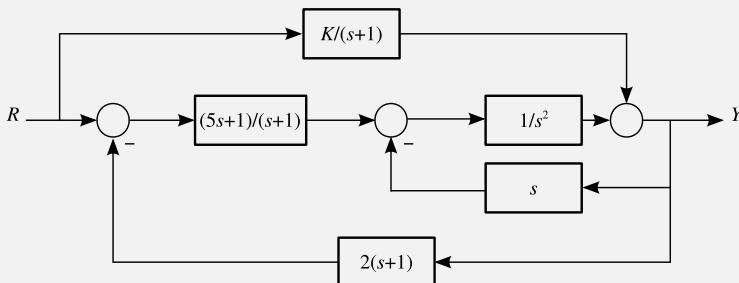


Figura C.17: Diagrama de bloques de un sistema de control.



La Fig. C.18 muestra la secuencia inicial adoptada para este ejemplo. Primeramente, se propone un adelanto del sumador (Fig. C.18a) debiendo entonces aplicar la regla C.3.5. Luego, considerando la propiedad asociativa de la suma, es posible rotar los sumadores para luego volver a adelantar el sumador (Fig. C.18b). En la Fig. C.18c se observa que nuevamente se pueden rotar sumadores y se visualiza una realimentación la que es resuelta aplicando la regla C.3.7.

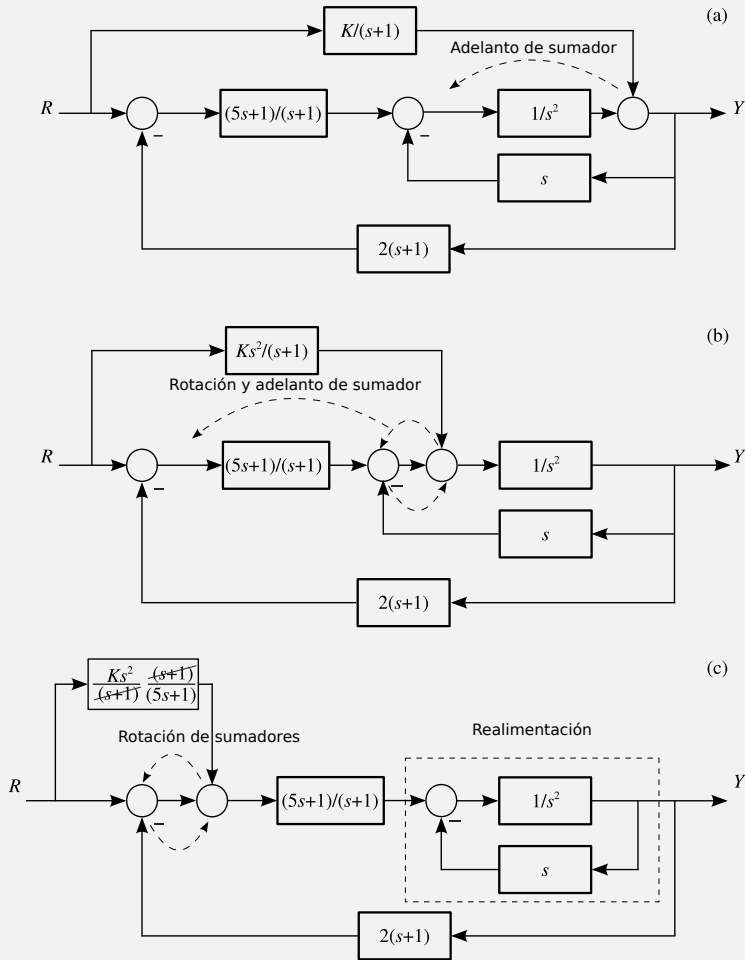


Figura C.18: Secuencia inicial utilizada para reducir el DB de la Fig. C.17.

En la Fig. C.19d se evidencia dos bloques en paralelo (uno de ellos unitario) y dos en serie. Ambas operaciones son resueltas aplicando las reglas

C.3.1 y C.3.2 respectivamente. Luego, en la Fig. C.19e se observa una realimentación la que se reduce aplicando la regla C.3.7, quedando dos bloques en serie (Fig. C.19f) los que se reducen aplicando la regla C.3.1. Finalmente, una cancelación de términos se aplica en la Fig. C.19g para mostrar el resultado final en la Fig. C.19h.

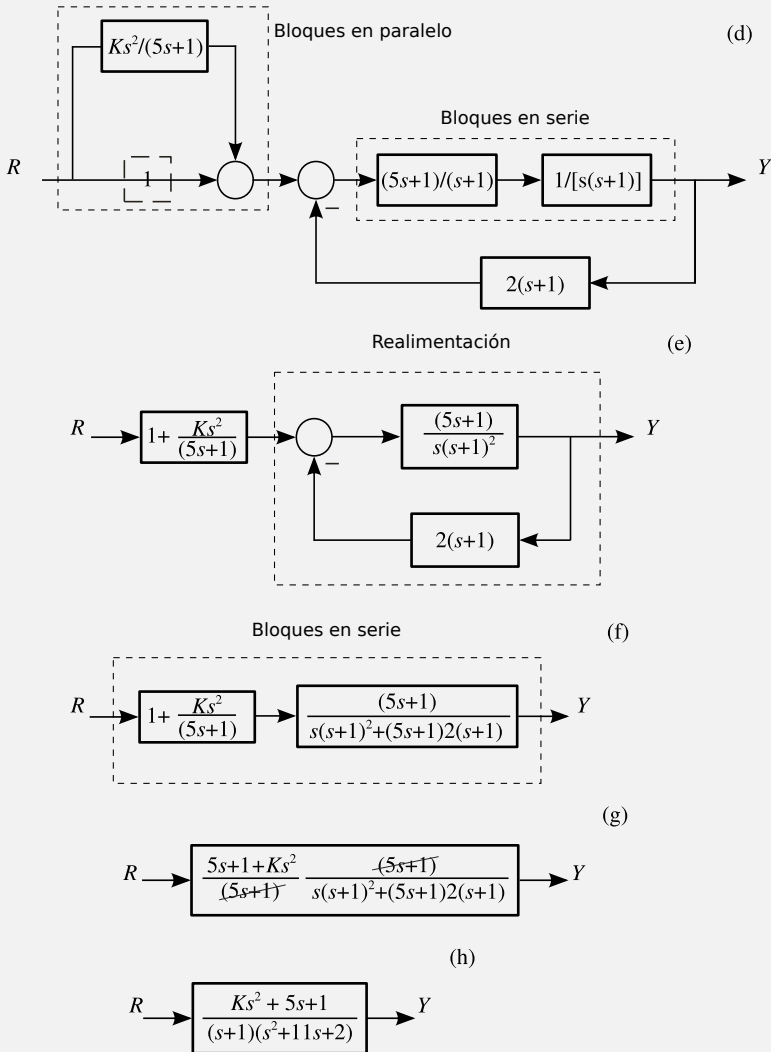


Figura C.19: Secuencia final utilizada para reducir el DB de la Fig. C.17.

### Comandos de Octave relacionados al tema

A continuación se lista las funciones básicas de Octave que permite realizar operaciones aritméticas con diagramas de bloques. Se sugiere, para más entendimiento del tema, se sugiere ver el manual del toolbox de control de Octave, por Reichlin [69].

Comando	
<code>Gs=parallel(sys1,sys2)</code>	Suma dos bloques en paralelo de modo que la salida es la suma de ambos.
<code>Gs=series(sys1,sys2)</code>	Multiplica dos bloques en serie de modo que la salida es el producto de ambos.
<code>Gs=feedback(sys1,sys2)</code>	Resuelve realimentación donde <code>sys1</code> es la función de transferencia en la cadena directa y <code>sys2</code> la función de transferencia en la cadena realimentación.

**Ejemplo C.5** Considere el sistema de la Fig. C.20 representado mediante diagrama de bloques, utilizando los comandos de Octave obtenga la función de transferencia  $Y(s)/U(s)$ .

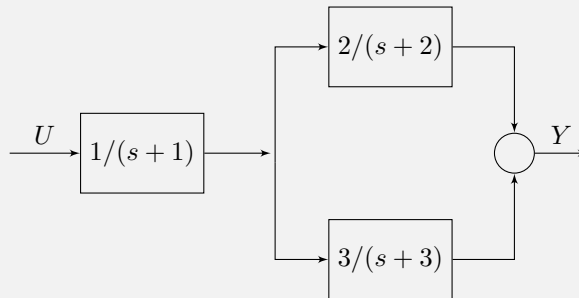


Figura C.20: DB del sistema SISO correspondiente al ejemplo .

El programa de Octave para este ejemplo se muestra a continuación.

#### Algoritmo C.1: Código de Octave del Ejem. C.5.

```

1 % define funciones de transferencia
2 g1s=tf([1],[1 1]);
3 g2s=tf([2],[1 2]);
4 g3s=tf([3],[1 3]);
5
6 % suma los bloques G1(s) + G2(s) y muestra resultados
7 gs_aux=parallel(g2s, g3s)

```

```

8
9 % multiplica los bloques en serie y muestra resultados
10 gs= series(gs_aux, g1s)

```

La ventana de comandos de Octave se muestra el siguiente resultado:

```
>>> gs_aux
```

Transfer function 'gs\_aux' from input 'u1' to output ...

$$y1: \frac{5s + 12}{s^2 + 5s + 6}$$

Continuous-time model.

```
>>> gs
```

Transfer function 'gs' from input 'u1' to output ...

$$y1: \frac{5s + 12}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Continuous-time model.

**Ejemplo C.6** Considere el sistema de la Fig. C.21. Asuma que  $G(s)$  es la función de transferencia obtenida en el ejemplo anterior y  $H(s) = 4/(s + 4)$ . Utilizando los comandos de Octave obtenga la función de transferencia  $Y(s)/R(s)$ .

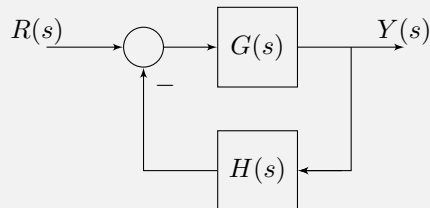


Figura C.21: DB del sistema SISO realimentado con  $G(s)$  según Ejem C.5 y  $H(s) = 4/(s + 4)$ .

El programa de Octave para este ejemplo se muestra a continuación.

#### Algoritmo C.2: Código de Octave del Ejem. C.6.

```

1 %funcion de transferencia Gs
2 ngs=[5 12]; dgs=[1 6 11 6];
3 gs=tf(ngs , dgs );
4
5 %funcion Hs
6 nhs=[4]; dhs=[1 4];
7 hs=tf(nhs , dhs );
8
9 %obtengo Gcl y presento los resultados en la ventana de
  comandos de Octave en forma simbólica
10 Gcl=feedback( gs , hs )

```

La ventana de comandos de Octave se muestra el siguiente resultado;

Transfer function 'Gcl' from input 'u1' to output ..

$$y1: \frac{5 s^2 + 32 s + 48}{s^4 + 10 s^3 + 35 s^2 + 70 s + 72}$$

Continuous-time model.

### C.3.3. Reglas básicas para sistemas SIMO, MISO y MIMO

Los sistemas con más de una entrada y / o una salida (SIMO, MISO o bien MIMO) deben ser resueltos con especial atención. Para ello se debe tener en cuenta dos cosas básicas; i) el teorema de superposición de sistemas lineales y ii) si el sistema y el DB se encuentran bajo una representación matricial vectorial.

El teorema de superposición puede ser enunciado en términos prácticos como sigue:

*Los sistemas LTI sometidos a más de una entrada simultánea, su salida es igual a la suma de cada una de las salidas que tendría el sistema considerando de a una entrada individual a la vez.*

Una presentación más rigurosa se puede consultar en el apéndice de transformada de Laplace.

**Ejemplo C.7** Considere el sistema LTI MIMO de la Fig. C.22. Obtenga las distintas funciones de transferencia para cada salida según cada entrada individual. Luego, obtenga las funciones de transferencia de cada una de las salidas considerando a las entradas en forma simultánea.

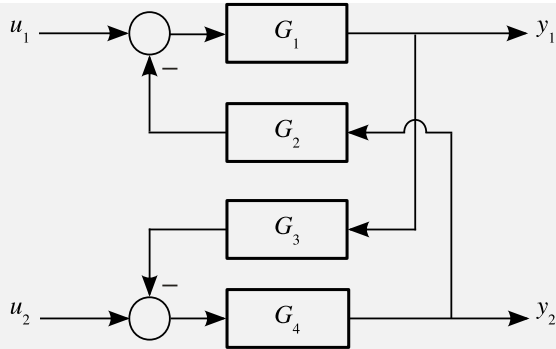


Figura C.22: Sistema LTI MIMO de dos entradas y dos salidas, usualmente denotado como  $2 \times 2$  o bien sistema TITO.

La Fig. C.23a muestra el diagrama de bloques resultante cuando se considera la salida  $y_1$  con la entrada  $u_1$ . Dicho DB puede ser reordenado para dar el DB de la Fig. C.23b. Resolviendo dicho diagrama de bloques se tiene el DB de la Fig. C.23c.

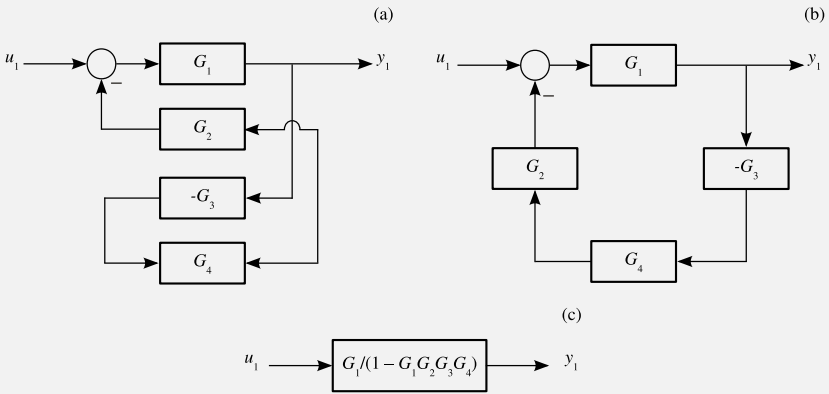


Figura C.23: Sistema LTI MIMO de dos entradas y dos salidas, usualmente denotado como  $2 \times 2$  o bien sistema TITO.

Así la función de transferencia entre la salida  $y_1$  y la entrada  $u_1$  resulta ser,

$$y_1 = \frac{G_1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} u_1 \quad (\text{C.18})$$

Similarmente al considerar  $y_1$  con  $u_2$  se puede probar que,

$$y_1 = \frac{-G_1 G_2 G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} u_2 \quad (\text{C.19})$$

Así, por el teorema de superposición sistemas lineales, la salida  $y_1$  debido a la aplicación simultanea de ambas entradas resulta ser,

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{G_1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} u_1 + \frac{(-G_1 G_2 G_4)}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} u_2 \\ &= \frac{G_1 u_1 - G_1 G_2 G_4 u_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} . \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Mientras que, basándose en los comentarios anteriores, la salida  $y_2$  en función de  $u_1$  y  $u_2$  resulta ser,

$$y_2 = \frac{-G_1 G_3 G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} u_1 \quad (\text{C.21})$$

$$y_2 = \frac{G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} u_2 . \quad (\text{C.22})$$

Así, la salida  $y_2$  debido a la acción simultanea de ambas entradas, por el teorema de superposición, resulta ser,

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{-G_1 G_3 G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} u_1 + \frac{G_4}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} u_2 \\ &= \frac{-G_1 G_3 G_4 u_1 + G_4 u_2}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4} . \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Una forma muy común de escribir sistemas con más de una entrada y / o salida es haciendo uso de la notación matricial-vectorial. Así por ejemplo, el sistema MIMO de la Fig. C.22 puede ser escrito como sigue:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.24})$$

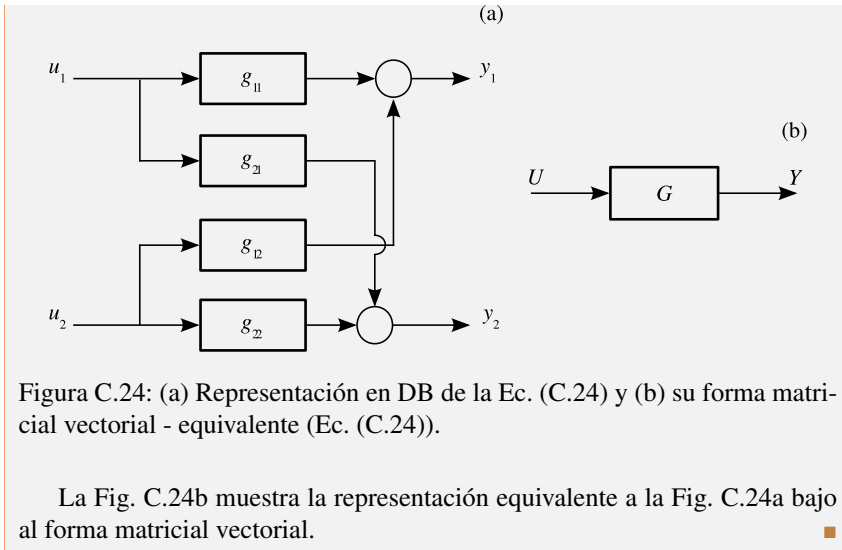
o bien,

$$Y = GU . \quad (\text{C.25})$$

donde,  $Y = [y_1 \ y_2]^T$ ,  $G = [g_{11} \ g_{12}; g_{21} \ g_{22}]$  y  $U = [u_1 \ u_2]^T$ .

Siendo,  $g_{11} = G_1 / (1 - G_1 G_2 G_3 G_4)$ ,  $g_{12} = -G_1 G_2 G_4 / (1 - G_1 G_2 G_3 G_4)$ ,  $g_{21} = -G_1 G_3 G_4 / (1 - G_1 G_2 G_3 G_4)$  y  $g_{22} = G_4 / (1 - G_1 G_2 G_3 G_4)$ .

Basándose en la Ec. (C.24) y las expresiones algebraicas que definen a  $G$ , el DB de la Fig. C.22 puede ser redibujado como se indica en la Fig. C.24.



Note que, la representación (C.24) puede ser generalizada fácilmente para sistemas con  $n$  entradas y  $m$  salidas ( $n \times m$ ) considerando,

$$u = [u_1 u_2 \cdots u_n]^T, \quad (C.26)$$

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \end{pmatrix} \quad (C.27)$$

$$y = [y_1 y_2 \cdots y_m]^T. \quad (C.28)$$

Ahora, las dimensiones del sistema matricial - vectorial resultan ser, para el vector de entradas  $u$  de  $n \times 1$ , para la matriz de funciones de transferencia de  $m \times n$  y para el vector de salida  $y$  de  $m \times 1$ . En lo que sigue del texto se asumirá sin entrar en detalles que las dimensiones de los vectores y matrices son compatibles, esto es, no entran en conflicto matemático al realizar el producto o bien las inversas correspondientes.

Basándose en estos últimos comentarios, el bloque funcional para sistemas MIMO puede ser redefinido como se lo muestra en la Fig. C.24b. Del mismo modo, el sumador para sistemas MIMO puede ser representado de igual forma considerando ahora que cada entrada y el vector de salida es un vector columna de dimensión  $n \times 1$ , donde simplemente se realiza una suma vectorial. Debido a que el producto matricial - vectorial no es conmutativo las reglas que se enuncian abajo deben ser tenidas en cuenta.



■ **Regla C.3.8 — Bloques en serie - MIMO.** Los bloques en serie se multiplican de derecha a izquierda.

**Demostración** Considere la siguiente operación algebraica:

$$Y_1 = G_1 U \quad (\text{C.29})$$

$$Y = G_2 Y_1 \quad (\text{C.30})$$

la que es representada en DB en la Fig. C.4 y donde  $Y$ ,  $Y_1$  y  $U$  son vectores y  $G_1$  y  $G_2$  son matrices de funciones de transferencia. Luego, como el producto matricial vectorial en general no es conmutativo al reemplazar (C.29) en (C.30) se tiene que,  $Y = G_2 G_1 U$ . Note que, en general,  $G_2 G_1 \neq G_1 G_2$ . □

El lector se dará cuenta fácilmente que las reglas C.3.2, C.3.3, y C.3.4 no se alteran al ser enunciadas para sistemas MIMO. Solo hay que cuidar la compatibilidad de la dimensión de los vectores involucrados.

■ **Regla C.3.9 — Realimentación - MIMO.** Considere un sistema realimentado MIMO luego, la relación salida-entrada en una realimentación MIMO es igual a  $(I \mp GH)^{-1}G$  o bien,  $G(I \mp HG)^{-1}$ .

**Demostración** Considere el sistema realimentado de la Fig. C.10. Luego,

$$Y = GE \quad (\text{C.31})$$

$$E = R \pm Y_m \quad (\text{C.32})$$

$$Y_m = HY \quad (\text{C.33})$$

Reemplazando (C.31) en (C.32) se tiene que  $E = R \mp HY$ . Luego, reemplazando esta última expresión en (C.33) es fácil demostrar que,

$$Y = (I \mp GH)^{-1}GR \quad (\text{C.34})$$

Similarmente, si se reemplaza (C.31) en (C.33) se tiene que  $Y_m = HGE$ . Luego, reemplazando esta última expresión en (C.32) es fácil demostrar que,

$$Y = G(I \mp HG)^{-1}R \quad (\text{C.35})$$

□

■ **Regla C.3.10 — Regla práctica de realimentación MIMO.**

$$G_1(I - G_2G_1)^{-1} = (I - G_1G_2)^{-1}G_1 \quad (\text{C.36})$$

**Demostración** Basándose en la demostración de la regla C.3.9, la prueba de la Ec. (C.36) resulta prácticamente trivial.  $\square$

Las tres reglas enunciadas para sistemas MIMO se puede resumir en la siguiente regla práctica general:

■ **Regla C.3.11 — Regla general para sistemas MIMO.**

1. Comenzar por la salida y escribir hacia atrás a medida que se encuentran los bloques.
2. Si hay una realimentación incluir  $(I \mp GH)^{-1}$  o  $(I \mp HG)^{-1}$ , según sea negativa o positiva, y cuidando si premultiplica o posmultiplica respectivamente.

**Ejemplo C.8** Considere el sistema MIMO de la Fig. C.25. Obtenga la función de transferencia que relaciona la salida  $Z$  con la entrada  $W$ .

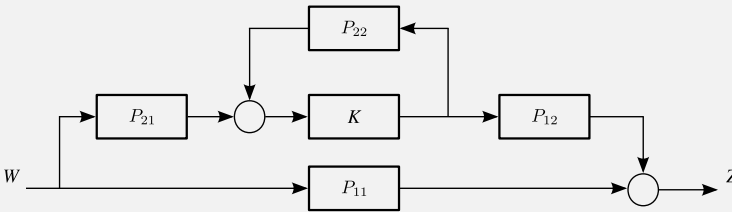


Figura C.25: DB de un sistema MIMO escrito bajo la forma matricial - vectorial.

Haciendo uso de la regla general de sistemas MIMO y por simple inspección de la figura se puede escribir,

$$Z = \left[ P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \right] W . \quad (C.37)$$

En la Tabla C.2 se resume las operaciones básicas del álgebra de diagrama de bloques para sistemas lineales SISO y MIMO.

Tabla 2.2: Reglas básicas del álgebra de DB para sistemas lineales SISO y MIMO.

Regla	DB original	DB equivalente
Bloques en Serie		
Bloques en Paralelo		
Adelanto de Toma de Información		
Atraso de Toma de Información		
Adelanto de Sumador		
Atraso de Sumador		
Realimentación		

## C.4. Conclusiones

En este capítulo se presentó el álgebra de diagrama de bloques aplicable a sistemas LTI. Se demostraron las principales reglas para sistemas SISO para luego ser extendidas a sistemas MIMO. Para un mejor entendimiento del tema, se presentaron ejemplos de aplicación en orden de complejidad creciente.

## C.5. Pensemos

1. Considere el sistema realimentado de la Fig. C.26. La función de transferencia del error  $E(s)$  respecto a la consigna  $R(s)$  es:

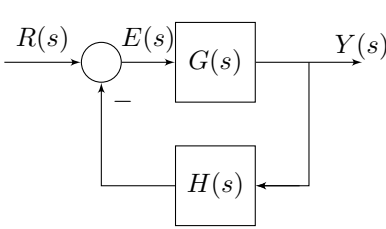


Figura C.26

$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$

$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}$

$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{H(s)}{1+G(s)H(s)}$

Ninguna de las anteriores.

2. Asumiendo que las funciones de transferencia que se indican abajo se corresponden con **sistemas físicos reales**. Indique cual o cuales de dichos sistemas podrían representarse como dos bloques en serie que tengan un sentido físico.

$G(s) = \frac{4}{s^2+8s+15}$

SI

NO

$G(s) = \frac{1}{s^2+2s+3}$

SI

NO

$G(s) = \frac{4}{s^2+4}$

SI

NO

$G(s) = \frac{4}{s^2+0,7s+0,1}$

SI

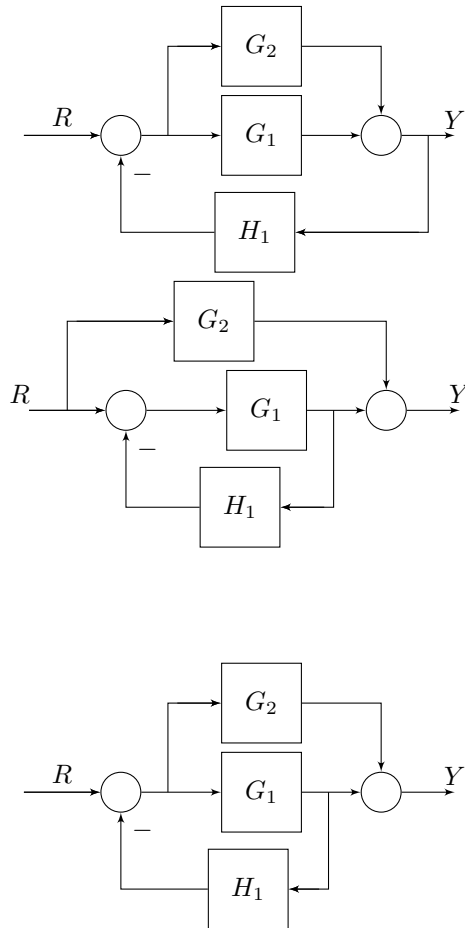
NO

## C.6. Problemas

**Problema C.1** Represente mediante el álgebra de bloques las siguientes operaciones algebraicas:

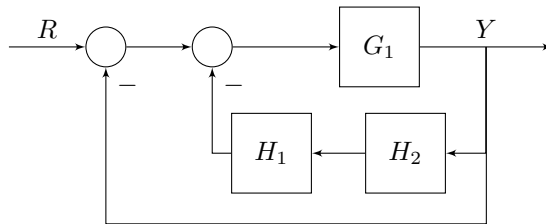
- (a)  $y = A - B + C$ , usando un sumador y dos sumadores.
- (b)  $y = AG_1G_2$ .
- (c)  $y = AG_1 + AG_2$ .
- (d)  $y = AG - B$ .

**Problema C.2** Resuelva mediante el álgebra de bloques siguientes los ejemplos de forma tal de obtener  $Y/R$ :

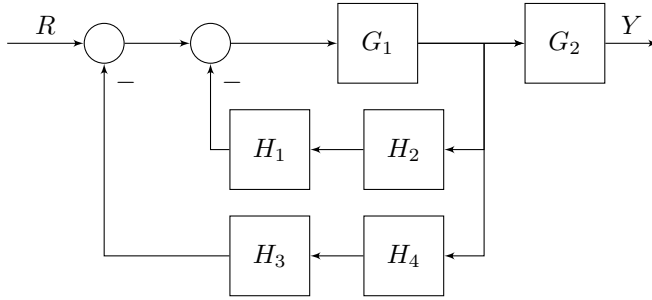


**Problema C.3** Resuelva mediante el álgebra de bloques los siguientes ejemplos de forma tal de obtener  $Y/R$ :

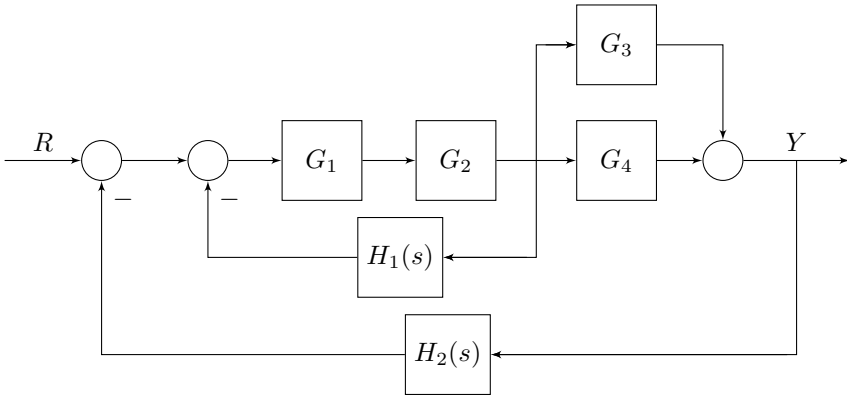
(a)



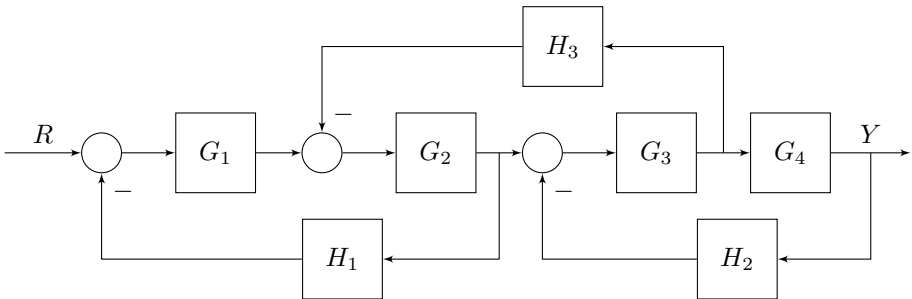
(b)



(c)



(d)



**Problema C.4** Basándose en el diagrama de bloques de la Fig. C.22 demuestre las ecuaciones C.21 y C.22.

**Problema C.5** Resolver los diagramas de bloques de la Fig. C.27 aplicando el principio de superposición de efectos:

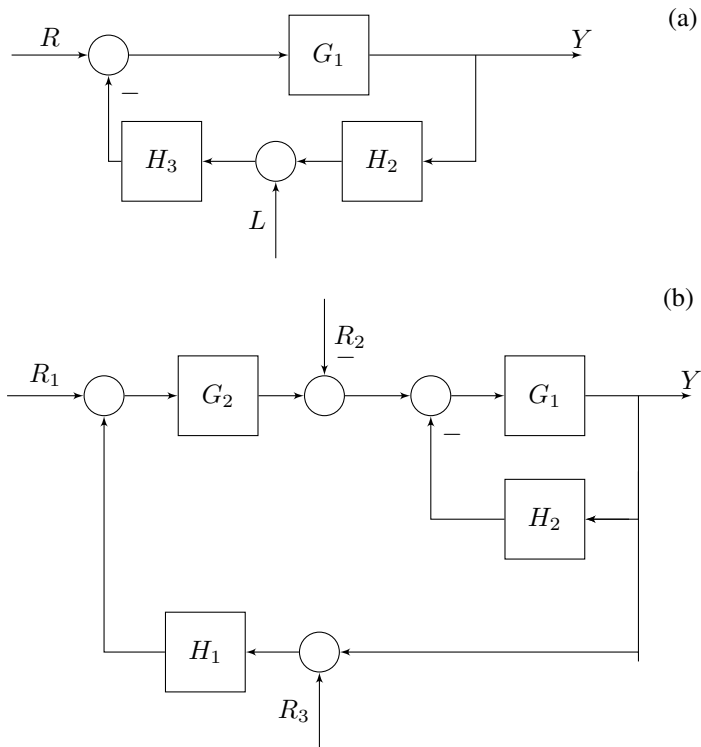
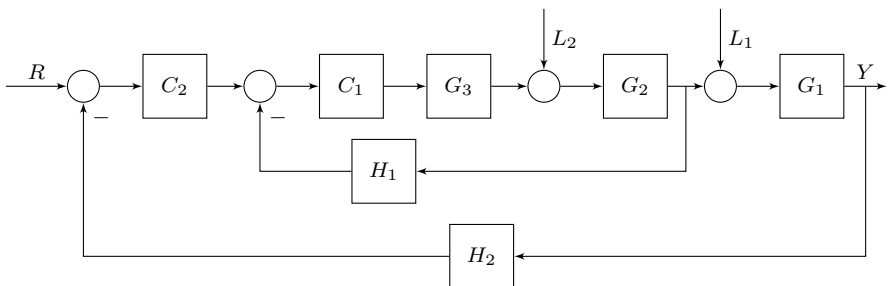


Figura C.27: Diagramas de bloques de sistemas de más de una entrada y una salida (MISO)

**Problema C.6** Encuentre las funciones que relacionan  $Y$  con  $R$ ,  $L_1$  y  $L_2$  del diagrama de bloques del sistema en cascada que se muestra a continuación.



**Problema C.7** Sea la siguiente ecuación diferencial,

$$y''' + 4y'' + 14y' + 20y = 1 - e^{-2t}$$

las condiciones iniciales son,  $y(0) = y'(0) = 0$  e  $y''(0) = 1$ . Para encontrar la solución se sugiere:

- Aplicar transformada de Laplace a la ecuación diferencial.
- Construya el diagrama de bloques correspondiente y encuentre la función de transferencia de  $Y(s)$ .
- Finalmente, aplique transformada inversa de Laplace

**Problema C.8** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) - 3x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

sujeto a  $x_1(0) = x_1^0$  y  $x_2(0) = x_2^0$ . Para ello se sugiere,

- aplicar transformada de Laplace,
- construir el diagrama de bloques para encontrar las funciones de transferencia  $X_1(s)$  y  $X_2(s)$  en función de las condiciones iniciales  $x_1^0$  y  $x_2^0$ .
- Aplicar transformada inversa de Laplace a las soluciones anteriores para encontrar  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  para el caso particular en que  $x_1(0) = 8$  y  $x_2(0) = 3$ .

**Problema C.9** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) - 3x_3(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -x_1(t) - 5x_2(t) - 3x_3(t) + u_2(t) \end{aligned}$$

con condiciones iniciales nulas. Para ello proceda de siguiente manera:

- Aplique transformada de Laplace.
- Encuentre todas las posibles funciones de transferencia, procediendo igual que en el ejercicio anterior considerando las entradas  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$ .



## Apéndice D

# Documentación de Instrumentación, Procesos y Sistemas de Control

En este capítulo se presenta primeramente conceptos básicos asociado a normas de instrumentación, las que son necesarias para facilitar la documentación, el estudio e interpretación de los sistemas de control en la industria.

### D.1. Introducción

En términos generales, se podría decir que una planta química es una serie de unidades de procesos en donde se puede encontrar, tanques de almacenamiento, intercambiadores o redes de intercambiadores de calor, sistemas de generación de vapor y energía eléctrica, reactores químicos, columnas de destilación etc. Todas estas operaciones unitarias pueden llegar a funcionar, en muchos casos, interconectadas entre si, lo que dificulta aún más satisfacer condiciones óptimas operativas y de seguridad. De ahí la importancia no sólo de la tarea de control sino también de una documentación adecuada y normalizada que permita un rápido entendimiento de los componentes que forman una unidad de proceso, y sus características más generales.

En este último aspecto, la norma internacionalmente aceptada que define los símbolos, gráficos y diagramas está descrito en las normas ISA [9], [38] [13], entre otras (designada así por sus siglas en Inglés *Instruments Society of America*).

## D.2. Definiciones Preliminares

En las normas ISA-S5.1 [9] y ISA-S75 [12], entre muchas otras, se encuentra una serie de definiciones que buscan estandarizar la amplia terminología existente en instrumentación y control de procesos. A continuación se lista un conjunto de definiciones que se utilizan en los diagramas de tuberías e instrumentos (conocidos como P&ID's, por su anacrónico en Inglés, *Piping & Instrument Drawings*) y que se encuentran presentes en las normas ISA-5.1 [9].

**Definición D.2.1 — Accesible.** Un término aplicado a un dispositivo o función que puede ser usado o ser visto por un operador con el propósito de ejecutar acciones de control, es decir, cambios de referencia, transferir de manual a automático, o acciones si-no.

**Definición D.2.2 — Alarma.** Dispositivo o función que señala la existencia de una condición anormal por medio de un cambio discreto visible o audible, o ambos, intentando atraer la atención.

En este punto es importante diferencia el dispositivo alarma definido antes del *switch alarma* que es usualmente quien inicia la función alarma.

**Definición D.2.3 — Binario.** Un término aplicado a una señal o dispositivo que tiene sólo dos estados o posiciones discretas.

**Definición D.2.4 — Burguja o Globo.** Un símbolo circular usado para representar o identificar el propósito de un instrumento o función. Este puede contener un número de etiqueta.

**Definición D.2.5 — Configurable.** Término aplicado a dispositivos o sistemas cuya característica funcional puede ser seleccionada por medio de un programa computacional u otro medio. Este concepto excluye el recableado o alteración de configuración.

**Definición D.2.6 — Controlador.** Un dispositivo que tiene una salida que varía con el objeto de regular una variable controlada en una manera especificada.

El controlador automático varía su salida automáticamente en respuesta a una entrada directa o indirecta de una variable de proceso medida. Un controlador manual es una estación de carga manual, y su salida no es dependiente de una variable de proceso medida pero puede ser variada sólo por un ajuste manual.

**Definición D.2.7 — Controlador Lógico Programable(PLC).** Un controlador, usualmente con múltiples entradas y salidas, que contiene un programa alterable.

**Definición D.2.8 — Dispositivo de Cómputo.** Un dispositivo que realiza uno o más cálculos u operaciones lógicas, o ambos, y transmite una o más señales de salida resultante. Un dispositivo de cómputo es a veces llamado relay de cómputo.

**Definición D.2.9 — Digital.** Un término utilizado para una señal o dispositivo que usa dígitos binarios para representar valores continuos o estados discretos.

**Definición D.2.10 — Identificación.** Una secuencia de de letras o dígitos, o ambos, usados para designar un instrumento o lazo individual.

**Definición D.2.11 — Instrumento.** Un dispositivo usado directa o indirectamente usado para medir y/o controlar una variable. El término incluye elementos primarios, elementos de control final, dispositivos de cómputos y dispositivos eléctricos tales como anunciadores, switches y pulsadores. El término no se aplica a partes que son componentes internos de un instrumento.

**Definición D.2.12 — Instrumentación.** Una colección de instrumentos o sus aplicaciones para el propósito de observación, medición control, o cualquier combinación de estas.

**Definición D.2.13 — Medición.** Determinación de la existencia o magnitud de una variable.

**Definición D.2.14 — Panel.** Una estructura que tiene un grupo de instrumentos montados sobre él, contiene una interface de operador-proceso, y es elegido para tener una única designación.

**Definición D.2.15 — Programa.** Una secuencia repetible de acciones que define el estado de la salida como una relación fijada a un conjunto de entradas.

**Definición D.2.16 — Relay.** Un dispositivo cuya función es pasar información en una forma no alterada o en alguna forma modificada.

El término relay es también aplicado específicamente a un switch eléctrico, neumático, o hidráulico que es actuado por una señal.

**Definición D.2.17 — Transmisor.** Un dispositivo que sensa una variable de proceso por un medio de un sensor y tiene una salida cuyo valor de estado estacionario varía sólo como una función predeterminada de la variable de proceso. El sensor puede o no estar intergrado con el transmisor.

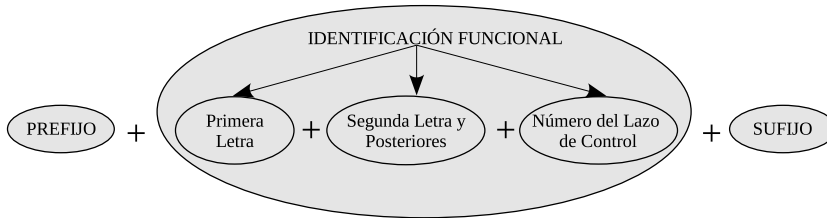


Figura D.1: Regla para la identificación de instrumentos en los sistemas de control según normas ISA.

### D.3. Normas ISA para Documentar Instrumentación

La documentación de sistemas de control se encuentra internacionalmente normalizada para facilitar el estudio e interpretación de los sistemas de control en la industria. Así, resulta sencillo para el ingeniero de control distinguir en un plano o una documentación el tipo y naturaleza de señales empleadas, la secuencia de componentes interconectados, el tipo de sensores y de elementos de control final existentes, los límites en las variables de entrada y salida (si es que existen), las alarmas existentes, los tipos de lazos control utilizados, sus funciones, etc.

#### D.3.1. Identificación

En la norma ISA, los distintos instrumentos presentes en planta son identificados con un código alfanumérico, el que básicamente se construye siguiendo la regla que se muestra en la Fig. D.1.

De acuerdo con la regla representada en la Fig. D.1 el código alfanumérico consta de tres partes, las que se detallan a continuación.

- *El Prefijo.* Es un número utilizado para aclarar la ubicación del instrumento dentro una unidad o zona del proceso.
- *La Identificación Funcional.* Las letras usadas en la identificación funcional sigue el estándar de las normas ISA que se muestra en la Tabla D.2.
- *El Sufijo.* Es una letra utilizada para distinguir los distintos elementos conectados con otro elemento o instrumento.

Es de destacar que los prefijos y sufijos no siempre es necesario utilizarlos.

Por ejemplo, el código alfanumérico 10FT219A expresado en la Tabla D.1 puede ser interpretado como un instrumento (10FT219A) que es un transmisor de flujo (por la sigla FT) ubicado en la unidad o zona de proceso número 10 (indicado en el prefijo), que forma parte del lazo de control que lleva el número 219, es identificado con el sufijo B y por tanto su información es enviada a un

Tabla D.1: Interpretación del código alfanumérico 10FT219A.

PREFIJO	IDENTIFICACIÓN FUNCIONAL			SUFIJO
	Primera Letra	Segunda Letra y Posteriores	Número del Lazo de Control	
10	F	T	219	A

elemento de registro que también recibe información de al menos otro instrumento que podría ser identificado con el sufijo A.

La Tabla D.2 resume el significado de las letras usadas en la documentación de sistemas de control según normas ISA.

A continuación se muestran algunos ejemplos que buscan clarificar lo expresado anteriormente.

PC10: Controlador de presión ubicado en el lazo número 10.

PY25: Convertidor a presión neumática ubicado en lazo número 25.

10FQ101: Tolizador de caudal ubicado en lazo 101 que se encuentra en la unidad o zona de proceso número 10.

LAHH205: Alarma de muy alto nivel ubicada en el lazo número 205.

### D.3.2. Símbolos

En ocasiones es necesario indicar ciertas funciones matemáticas que se realizan con las señales de un lazo de control. Estas funciones pueden ser sumas, promedios, raíz cuadrada o enésima, seleccionar un valor máximo o mínimo, entre otras. La Tabla D.3 resume los símbolos de las normas ISA y SAMA (designada así por su sigla en Inglés *Scientific Apparatus Manufactures Association*). Estos símbolos suelen indicarse dentro de un bloque dibujado como un cuadrado.

También se hace necesario indicar, en una dada representación gráfica, donde ciertos instrumentos o funciones están ubicados. Las normas ISA define tres posibles ubicaciones físicas para los instrumentos, estas son: i) Montados en campo, ii) accesible al operador y iii) Accesible al operador por panel auxiliar. También una cuarta opción derivada de la tercera es el caso de no accesible al operador. La Tabla D.4 resume los símbolos usados en los P&ID (designada así

















Tabla D.2: Significado de las letras usadas en la documentación de sistemas de control según normas ISA.

	Primera(s) Letra(s)		Segunda Letra y Posteriores		
	Variable	Modificador	Función Lectura de salida	Función de Salida	Modificador
A	Análisis		Alarma		
B	Quemador de llama				
C	A elección del Usuario		Controlador		
D	A elección del Usuario	Diferencial			
E	Voltaje		Elemento Primario		
F	Flujo (caudal)	Relación (fracción)			
G	A elección del Usuario		Elemento Visual de Vidrio		
H	Actuador Manual				Alto
I	Intensidad de Corriente		Indicador		
J	Potencia	Scan			
K	Tiempo			Estación de Control	
L	Nivel		Lampara o Luz indicadora		Bajo Medio
M	A elección del Usuario	Momentaneo			
N	A elección del Usuario				
O	A elección del Usuario		Orificio Restricción		
P	Presión		Punto de Prueba		
Q	Cantidad	Integrador, Totalizador			
R	Radiación, Radiactividad		Registro, Registrador		
S	Velocidad	Seguridad		Interruptor, Switch	
T	Temperatura			Transmisor	
U	Multivariable		Multifunción	Multifunción	Multifunción
V	Vibración			Válvula	
W	Fuerza, Peso		Pozo		
X	No clasificado	Eje X			
Y	Evento, estado o presencia	Eje Y	Relé, Calculador, Convertidor		
Z	Posición	Eje Z		Actuador, Elemento de Control Final	

Tabla D.3: Símbolos de las normas ISA y SAMA.

Símbolo	Designación	Función
$\Sigma$	Sumatoria	La salida es igual a la suma (con el signo que corresponde) de las entradas de las entradas.
$\Sigma/n$	Promedio	La salida es igual al promedio algebraico de las entradas.
$\Delta$	Diferencia	La salida es igual a la diferencia de dos entradas.
$\times$	Multiplicación	La salida es igual al producto de dos entradas.
$\div$	División	La salida es igual a la división de dos entradas.
$x^n$	Potencia n	La salida es igual a la potencia enésima de la entrada.
$\sqrt[n]{\phantom{x}}$	Raíz n	La salida es igual a la raíz enésima de la entrada.
K o P	Proporcional	La salida es proporcional a la entrada.
I o $\int$	Integral	La salida es igual a la integral de la entrada.
D o $du/dx$	Derivativo	La salida es igual a la derivada de la entrada.
f(x)	Función	La salida es una función no lineal de la entrada.
f(t)	Función de Tiempo	La salida es una función temporal de la entrada.
$>$	Selector de Máx.	La salida es igual a la mayor de las entradas.
$<$	Selector de Mín.	La salida es igual a la menor de las entradas.
$\nearrow$	Límite Máx.	La salida es igual a la entrada o bien al límite máximo fijado.
$\nwarrow$	Límite Mín.	La salida es igual a la entrada o bien al límite mínimo fijado.
$\forall$	Límite de Veloc.	La salida es igual a la entrada o bien al límite fijado como velocidad de cambio de la señal.

Tabla D.4: Resumen de símbolos gráficos para instrumentos.

	Accesible al Operador	No Accesible al Operador	Montado en Campo	Accesible en Panel Auxiliar
Instrumento Discreto / Analógico				
Control Distribuido				
Función de Cálculo				
Controlador Lógico Programable (PLC)				

por su sigla en Inglés *Piping and Instrument Drawings*) aceptados por normas ISA.

### D.3.3. Símbolos de Funciones, Instrumentos y Elementos

En todo P&IDs se suele representar líneas de distinta naturaleza que son utilizadas para describir un dado proceso y su sistema de control. La Fig. D.2 muestra como indicar en un P&ID, de acuerdo con las normas ANSI/ISA-5.1-2009 [13], las diferentes líneas de conexión que se presentan en un proceso, mediante símbolos que permiten determinar la naturaleza de la señal en cuestión.

Asimismo, los distintos elementos de medición, que están presentes en un sistema de control, tienen su propia representación bajo normas ANSI/ISA-5.1-2009 [13]. A modo de ejemplo, la Fig. D.3 muestra como indicar elementos primarios basados en placas de orificio para la medición de caudal.

También los elementos de control final tienen sus representaciones. La Fig. D.4, muestra algunos ejemplos de como indicar en un diagrama, las distintas válvulas de control de acuerdo con normas ANSI/ISA-5.1-2009 [13] según su posición final frente a una falla. En algunos casos, puede indicarse esta situación utilizando las siguientes siglas para indicar:

- FO: Normalmente abierta (derivado del idioma Inglés, *Fail Open*),
- FC: Normalmente abierta (derivado del idioma Inglés, *Fail Closed*),
- FL: Bloqueada a la falla (derivado del idioma Inglés, *Fail Locked*),
- FI: Bloqueada a falla indeterminada (derivado del idioma Inglés, *Fail Indetermined*).

Es de tener en cuenta, que toda válvula de control recibe una orden (local o a



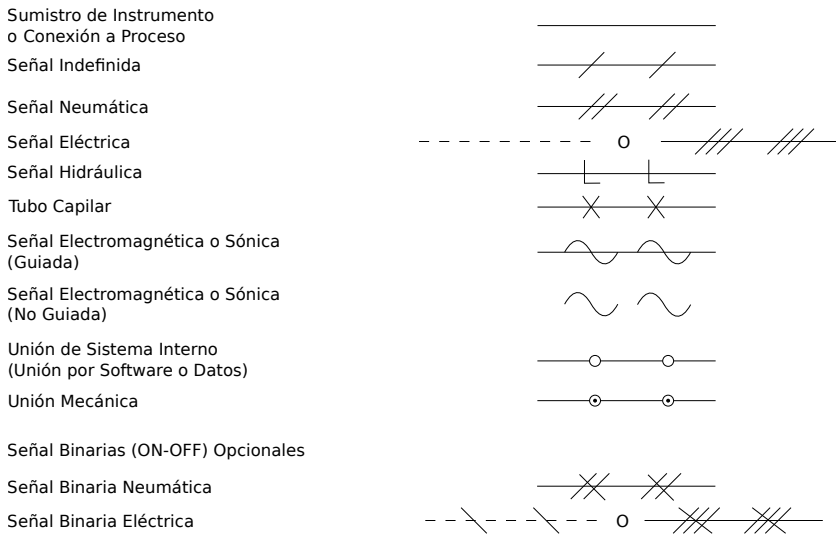


Figura D.2: Símbolos de líneas de interconexión entre instrumentos y procesos.

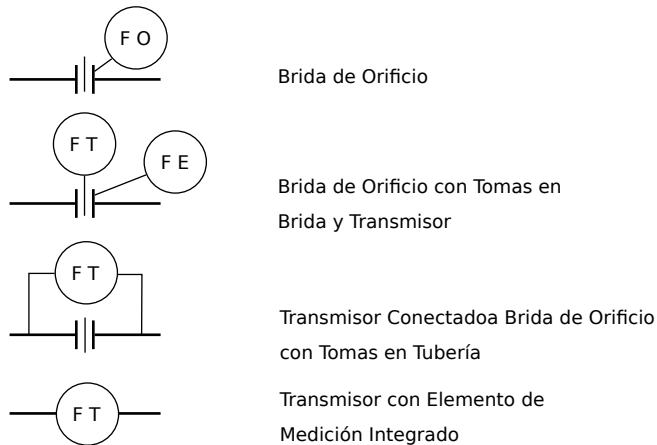


Figura D.3: Representación de elementos primarios basados en bridas de orificio según normas ANSI/ISA-5.1-2009 [13].

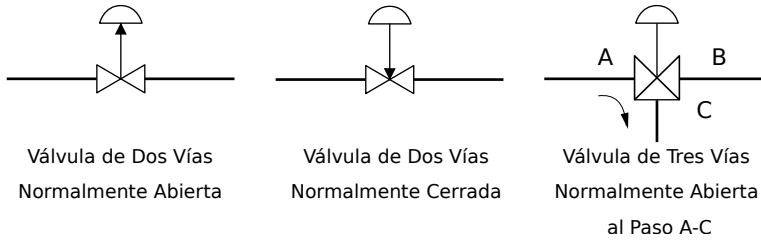


Figura D.4: Representación de diferentes válvulas de control según normas ANSI/ISA-5.1-2009 [13] frente a falla.

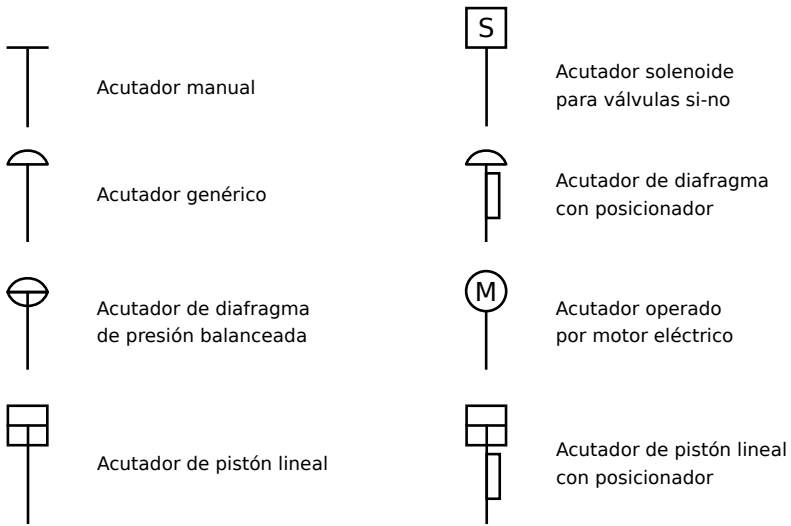


Figura D.5: Representación de diferentes actuadores según normas ANSI/ISA-5.1-2009 [13] frente a falla.

distancia) que es implementada mediante su actuador. Los diferentes actuadores, también tiene su representación bajo normas ANSI/ISA-5.1-2009 [13], los que se muestran en la Fig. D.5.

### D.4. Ejemplos de Aplicación

A continuación se presentan algunos ejemplos de aplicación que buscan mostrar y clarificar los conceptos relacionados a diagramas de instrumentación y P&IDs presentados anteriormente.

**Ejemplo D.1** Basado en las normas ISA y en la Fig. D.6 interpretar la instrumentación allí disponible para el intercambiador de calor.

LE101 representa un elemento de primario para medir nivel de condensado en el intercambiador de calor, allí LT101 es el transmisor de nivel cuya lectura no está disponible en campo pero su información es registrada por un registrador (LR101) que está en la sala de control y disponible para el usuario.

Con el número 102 se identifica un lazo de presión donde PIT102 es un transmisor e indicador de presión cuya lectura está disponible al usuario, PSH102 es un switch de alta presión que opera con una alarma de alta presión (PAH102) la que forma parte de un sistema de control distribuido. PIC102 es un controlador e indicador de presión que opera con un registrador de presión designado como PR102, ambos forman parte del sistema de control distribuido. Finalmente, el convertor PY102 se encarga de cambiar la señal eléctrica de presión a una señal neumática para accionar una válvula de control neumática normalmente cerrada designada como FV102.

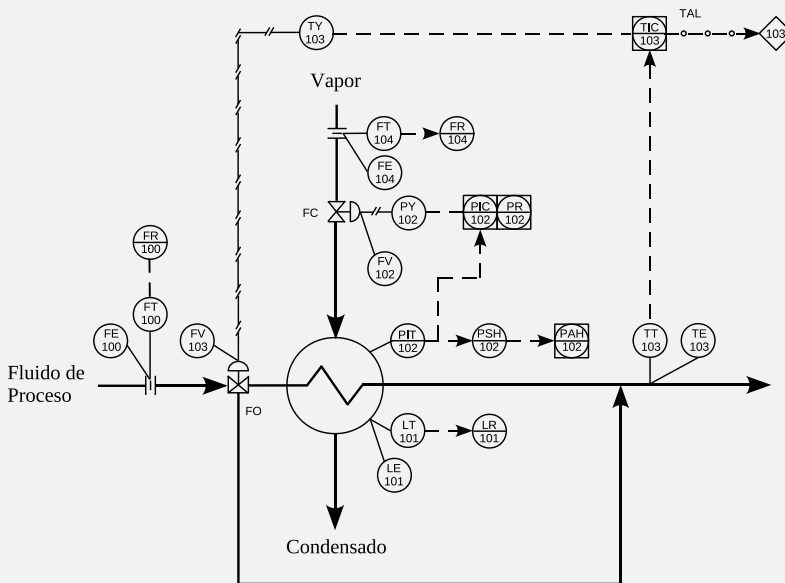


Figura D.6: Ejemplo de como usar simbología ISA para documentar la instrumentación de un intercambiador de calor.

FE104 es un elemento primario para medir caudal, en este caso una brida de orificio, y el transmisor de presión FT104 no tiene lectura local accesible al usuario en campo, sin embargo está conectado a un registrador (FR104) cuya

lectura del caudal de vapor está disponible al operador en la sala de control.

TE103 es un elemento primario para medir temperatura, TT103 es el transmisor de temperatura del lazo indicado con el número 103, que está equipado con un controlador e indicador de temperatura (TIC103) que tiene una alarma de baja temperatura (indicada como TAL) la que está localizada en el panel de control que forma parte de un enclavamiento que tiene entrada y salida lógica (digital). Además, TIC103 forma parte de un sistema de control distribuido. El conversor TY103 se encarga de cambiar la naturaleza de señal eléctrica de temperatura en presión para poder manipular una válvula de control neumática normalmente abierta indicada como FV103. Finalmente, se mide el caudal de fluido de proceso mediante una brida de orificio (FE100) y donde el transmisor de flujo FT100 no dispone de lectura local en campo pero está conectado a un registrador (FR100) que se encuentra en la sala de control y está accesible al operador. ■

## D.5. Conclusiones

En este capítulo se presentó de manera resumida normas de instrumentación basada en normas ISA necesarias para documentar adecuadamente elementos de medición y de control, líneas de transmisión de datos incluyendo la naturaleza de las señales, entre muchas otras cosas.

Se recomienda ampliar esta información recurriendo a las diferentes normas como las ISA [36], [37], [38], [11], [12], [13], o las normas ISO [39], [40], entre muchas otras.

## D.6. Pensemos

1. De acuerdo nomenclatura y simbología normalizada por las normas ISA, que instrumentos se representan las siguientes nomenclaturas:

TT :  
 PDR :  
 TIC :  
 LT :  
 LY :

2. De acuerdo nomenclatura y simbología normalizada por las normas ISA, determine las características de las válvulas de control que se indican en la Fig. D.7.

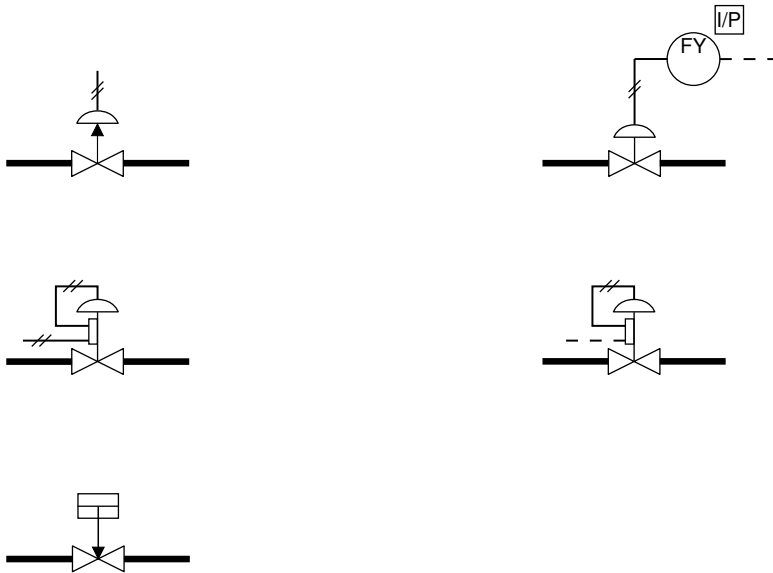


Figura D.7

## D.7. Problemas

1. Considere el ejemplo de instrumentación de un evaporador de película delgada de la Fig. D.8 según normas ISO ([40]) - ISA ([10]).

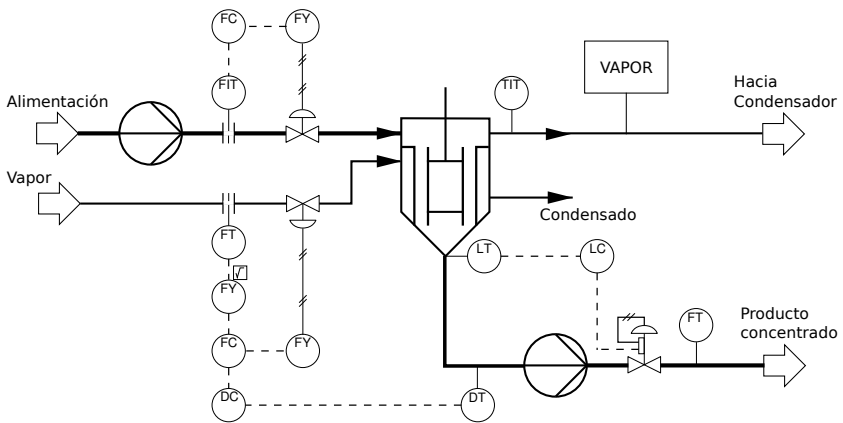


Figura D.8: Evaporador de película delgada y su sistema de control asociado.

- (a) Identifique cuales son las líneas de proceso y la naturaleza de las

- diferentes líneas de conexión de los distintos componentes.
- (b) Identifique los distintos componentes y describa brevemente los lazos de control presentes.
2. Considere el ejemplo de instrumentación de una columna de destilación para refinamiento de combustible de la Fig. D.9 según normas ISO ([40]) - ISA ([10]).

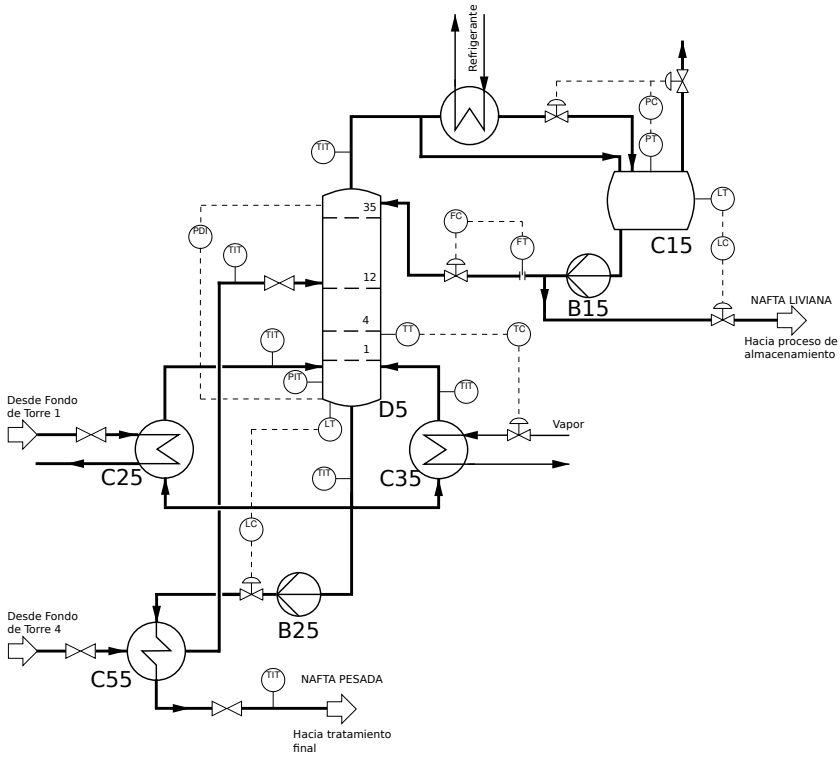


Figura D.9: Ejemplo de instrumentación de una columna de destilación.

- (a) Identifique cuales son las líneas de proceso y la naturaleza de las diferentes líneas de conexión de los distintos componentes.
- (b) Identifique los distintos componentes y describa brevemente los lazos de control presentes.

# Índice alfabético

- absisa de convergencia, 711
- accesible, 770
- acondicionador, 242
- adelanto
  - toma de información, 744
  - toma de sumador, 745
- alarma, 770
- atraso
  - toma de información, 744
  - toma de sumador, 746
- autoregulable, 111
- autovalores, 179, 181, 185, 191
  
- bajovalores relativos, 142
- banda proporcional, 308
- binario, 770
- bloque funcional, 740
- bloque sumador, 740
- bloques
  - en paralelo, 743
  - en serie, 742
  - en serie MIMO, 761
- Bode
  - criterio de estabilidad, 421
  - condición de estabilidad, 419
  - condición de estabilidad asintótica, 421
  - criterio de estabilidad, 419
- Bode, diagramas, 379, 417
  
- calderas, control de, 681–689
  - balance de energía, 689
  - dos elementos, 683
  - nivel de domo, 681
  - tres elementos, 687
  - un elemento, 682
- Cayley - Hamiltón
  - teorema de, 191
- ceros, 110
- clasificación
  - sistemas lineales, 110
- coeficiente de amortiguamiento, 217
- columnas de destilación, control de, 669–679
  - balance de materia, 671
  - lazos simples, 671
- columnas de destilación, control de composición, 673
  - indirecto, 674
  - presión, 677
- columnas de destilación, control en cascada de, 679
- columnas de destilación, control feedforward-feedback de, 678
- columnas de destilación, esquemas combinados de control de, 678
- compensador de tiempo muerto, 614–616
- computo
  - dispositivo de, 771
- condición de ángulo, 450, 451
- condición de módulo, 450, 451
- configurable, 770
- control
  - lazo, 23, 306
  - lazo abierto, 23
  - lazo cerrado, 24

- control avanzado tradicional, 603
- control basados en modelos, 548–561
- control con modelo interno, 550–561
- control de nivel, 339
- control de temperatura, 339
- control en cascada, 616–624
  - diseño, 619–624
  - variable intermedia medible, 619
- control feedforward, 23, 604–614
  - diseño, 606
- control P
  - sistemas de primer orden, 480–486
    - constante de tiempo de lazo cerrado, 483
    - pendiente de la respuesta en el tiempo, 486
    - raíces del denominador, 485
    - variación de offset, 480
  - sistemas de segundo orden, 487–491
    - coeficiente de amortiguamiento, 488
    - pseudoperíodo, 489
    - raíces del denominador, 489
    - tiempo de establecimiento, 489
    - variación del offset, 487
  - sistemas de tercer orden, 491–495
    - lugar de raíces, 494
    - variación del offset, 493
- control PD
  - sistemas de segundo orden, 518–523
    - lugar de raíces, 519
    - variación del offset, 519
- control PI, 334
  - sistemas de primer orden, 497–504
    - coeficiente de amortiguamiento, 498
    - lugar de raíces, 501
    - pseudoperíodo, 499
    - tiempo de establecimiento, 500
    - variación del offset, 498
  - sistemas de segundo orden, 509–513
    - lugar de raíces, 511
    - variación del offset, 510
- control PID, 305, 334, 335, 337
- control predictivo, 334
- controlabilidad
  - entrada-salida, 633
- controlador, 26, 770
  - Acción Directa, 309
  - Acción Inversa, 309
  - diseño óptimo, 554
  - integral, 321
  - proporcional, 308–321
  - proporcional-derivativo, 325–326
  - proporcional-integral, 321–325
  - proporcional-integral-derivativo, 327–329
  - signo, 309
- controlador FF estático, 607
- controlador I, 321
- controlador P, 308
- controlador PD, 325, 326
- controlador PI, 321, 322, 547
- controlador PID, 327, 547
  - ajuste, 547
- controlador SI-NO, 335–337
  - brecha diferencial, 336
  - zona muerta, 336
- controladores, 305
  - ajuste basado en criterios de conducta integral, 561–567
  - ajuste basado en ensayos experimentales, 548, 567–583
  - auto-ajustables, 332
  - clasificación, 306–307
  - forma digital, 332–334
  - modo D, 307
  - modo I, 307
  - modo P, 307
  - P, PI, PD y PID, 305
  - windup, 330–332
- controladores lineales, 305
- controladores PID, 305, 306



- características tecnológicas, 329–332
- ecuaciones y comportamiento, 307
- controladores si-no, 336
- convertor, 242
- CSTR, 77, 89
  - isotérmico, 78–81
    - a volumen constante, 78–79
    - a volumen variable, 79–81
  - no isotérmico, 81–89
    - a volumen constante, 81–85
    - a volumen variable, 85–89
- cuadrados mínimos, 704
- de primer orden,
  - con tiempo muerto, 206
- descomposición en fracciones parciales, 701–704, 728
- descomposición en fracciones parciales, 729
- diagonalización de matriz, 185–187
- diagrama de bloques, 739, 740
- diagramas de bloques, 740
  - reglas, 741
    - sistemas MIMO, 757–762
    - sistemas SISO, 742–747
- diagramas de bloques,
  - definiciones, 740
- diagramas de Bode y Nyquist, 379
  - derivador e integrador, 379–381
  - funciones pasa alto y bajo
    - primer orden, 383–385
  - ganancia, 379
  - segundo orden, 385–387
  - tiempo muerto, 388–393
- digital, 771
- ecuación característica, 410, 445, 493
- ecuaciones diferenciales, 728
- elemento
  - control final, 26
  - medición y transmisión, 26
  - registro, 26
  - elemento primario, 242
  - elementos de control final, 269
    - característica de caudal
      - inherente, 272–279
      - instalada, 280–293
  - elementos de medición, 239
    - características
      - dinámicas, 250–251
      - estáticas, 244–250
    - características, 244–252
    - fallas, 260
    - selección, 258–261
  - en línea, 202
  - error, 354
    - señal de, 354
  - error de seguimiento, 354
  - error de seguimiento estacionario, 363–364
  - error debido a carga, 354
  - error en régimen estacionario, 356–364, 368
  - estabilidad, 111, 445
    - en Base a Respuesta en Frecuencia, 417
    - sistemas LTI, 410–411
    - condición necesaria, 412
    - criterio de Routh-Hurwitz, 413
  - estabilidad crítica, 427
  - estabilidad interna, 553
  - estabilidad relativa, 426, 427, 434
  - estados
    - alcanzabilidad, 197
    - controlabilidad, 196
      - salida, 196
      - test, 196
    - ecuación, 187–191
      - caso homogéneo, 187
      - caso no homogéneo, 190
    - espacio de, 172
    - matriz de transición, 190
    - observabilidad, 197
      - completa, 198
      - test, 198
    - variables de, 172

- vector de, 172
- estrategias de control avanzadas tradicionales, 603
- factor de amortiguamiento, 135, 137, 139
- fase
  - diagrama de , 192
  - plano de , 191, 192
  - trayectoria de , 192
- filtrado
  - señal, 398–404
- forma canónica normalizada, 133, 445, 487
- forma canónica
  - controlable, 183
  - de Jordan, 185
  - observable, 184
- formas canónicas, 183–187
- frecuencia última, 418
- frecuencia crítica, 419
- frecuencia de cruce de fase, 418
- frecuencia de cruce de ganancia, 418
- fuera línea, 202
- función
  - continua por partes, 709
  - delta, 723, 728
  - escalón, 719
  - exponencial, 717
  - pulso, 721
  - rampa, 720
  - senoidal, 721
  - sensibilidad, 35
  - sensibilidad complementaria, 35
- función de orden exponencial, 710
- función de transferencia
  - de primer orden, 116
  - de segundo orden, 133
- función sensibilidad, 552
- función sensibilidad complementaria, 552
- funciones generalizadas, 726
- ganancia última, 419
- ganancia crítica, 419
- ganancia estática, 115
- globo, 770
- grados de libertad, 630–634
  - para control, 632
- IAE, 561
- identificación
  - basada en
    - respuesta al escalón, 206
    - respuesta al impulso, 224–226
  - basada en cuadrados mínimos, 226–229
  - estimación de parámetros, 203, 205
  - método
    - 37 % del valor inicial, 224
    - 63.2 % del valor de estabilización, 206–207
    - cuadrados mínimos, 225–226
    - tangente al origen, 224–225
    - tangente de la respuesta temporal, 208
  - métodos más rigurosos, 205
  - métodos simples, 205, 206, 224
  - metodología básica, 202–205
  - planeamiento de experiencias, 203
  - procedimiento, 203
  - selección de estructura de modelo, 203–204
  - sistemas de primer orden, 206–214
  - sistemas de segundo orden
    - subamortiguado, 215
  - técnicas de, 201
  - validación, 203
- identificación de sistemas, 201
- identificación, técnicas de, 205
- identificación, 771
- IMC
  - filtro, 555
  - parametrización
    - procedimiento de, 557–561

- IMC-SISO
  - diseño, 554–561
- instrumentación
  - normas ISA, 772–780
- instrumentación de calderas, 681–689
- instrumentación de columnas de destilación, 669–679
- instrumentación de intercambiadores de calor, 657–665
- instrumentación de reactores, 665–669
- instrumentación, 771
- instrumento, 771
- integradores, 111
- integral del cuadrado del error, 562
- integral del tiempo pesado por el error al cuadrado, 562
- integral del valor absoluto del error, 561
- integral del valor absoluto del error pesado en el tiempo, 562
- intercambiador de calor, 67–72
  - control de temperatura, 657–665
- intercambiador de calor líquido-líquido, 658–660
  - control con bifurcación o by-pass, 659
  - control feedback, 658
- intercambiador de calor líquido-vapor, 662–665
  - control con bifurcación o by-pass, 663
  - control en cascada, 664
  - control feedback, 662
  - control feedforward-feedback, 664
- ISE, 562
- ITAE, 562
- ITSE, 562
- Laplace,
  - transformada inversa
    - unicidad, 727
  - linealidad de la transformada, 712
  - propiedades de la transformada, 713–717
  - transformada de, 707, 708
  - transformada inversa, 727
- ley de control, 31
- lineal invariante en el tiempo
  - LTI, 728
- linealización, 53
- linealización técnica, 53–61
- lugar geométrico de las raíces, 445, 450
  - ángulos de salida y de llegada, 456
  - asíntotas, 454
  - constancia de la suma de las raíces, 457
  - cruces con el eje imaginario, 457
  - puntos de dispersión y confluencia, 454
  - reglas, 452–461
- márgenes de ganancia y fase, 426
- método de Cohen y Coon, 574–583
- método de síntesis directa, 548
- método de Ziegler y Nichols, 567–574
  - curva de reacción, 571–574
  - oscilaciones sostenidas, 567–571
- métodos
  - empíricos, 201
- margen de fase, 428, 434
- margen de ganancia, 427, 428, 434, 495
- medición, 771
- medidor, 242
- metodo de síntesis directa, 550
- MIMO, 757
- modelado matemáticos de sistemas, 47
- modelo no lineal
  - linealización de, 53
- modelos
  - a parámetros concentrados, 48
  - a parámetros distribuidos, 48
  - empíricos, 48
  - semiempíricos, 48

- teóricos, 48
- MPC, 334
- número complejo, 695–700
- normas ISA, 770
- Nyquist
  - contorno D, 424
  - criterio de estabilidad, 422–426
    - sistemas autorregulables, 425
  - regla práctica
    - sistemas autorregulables, 426
  - traza de, 425
- Nyquist, diagrama, 379, 417
- Octave, comandos de, 58, 129, 181, 394, 432, 461, 696, 724, 755
- ODE, 728
- offset absoluto en carga
  - control P
    - sistemas de primer orden, 481
- offset absoluto en consigna
  - control P
    - sistemas de primer orden, 481
- offset relativo en carga
  - control P
    - sistemas de primer orden, 482
- offset relativo en consigna
  - control P
    - sistemas de primer orden, 482
- panel, 771
- parámetros
  - estimación, 201
- perturbaciones, 22
- planta, 25
- PLC, 770
- polinomio mínimo, 191
- polos, 110
- predicción, 111
- predicador de Smith, 334
- primer orden,
  - respuesta a la rampa, 124
  - respuesta al escalón, 121
  - respuesta al impulso, 117
- primer orden, sistema de, 116–133
- principio del argumento, 423
- procedimiento cualitativo
  - unidades individuales, 634–639
  - unidades múltiples, 640–647
- programa, 771
- pseudoperíodo, 142, 216, 217
- pulsación propia, 216, 217
- régimen
  - estacionario, 112
  - transitorio, 112
- raíces
  - complejas conjugadas, 133
  - complejas múltiples, 701
  - complejas simples, 703
  - imaginarias, 133
  - reales distintas, 133
  - reales iguales, 133
  - reales múltiples, 701, 702
  - reales simples, 701, 702
- reactores tanques continuos agitados, 77
- reactores, control de, 665–669
  - presión, 667–669
  - temperatura, 665–667
- realimentación, 746
- realimentación
  - MIMO, 761
- realimentación no unitaria, 355–356
- realimentación unitaria, 353–354
  - condición, 355–356
- referencia, 24
- reguladores, 306
- relación de decaimiento, 143, 568
- relay, 771
- representación de estados, 59
- respuesta
  - a la rampa, 115
  - al escalón, 114
  - al impulso, 113
  - críticamente amortiguada, 138
  - impulsional o impulsiva, 113
  - indicial, 114
  - oscilatoria pura, 138

- sobreamortiguada, 138
- subamortiguada, 138
- transitoria
  - de sistemas LTI, 109
- respuesta en frecuencia, 374
  - características, 378
  - función de, 375
  - método rápido, 378
- respuestas dinámicas
  - de sistemas de primer orden, 116
  - de sistemas de segundo orden, 133
- respuestas en frecuencia, 373, 374
- Routh, casos especiales, 414
- Routh, casos especiales, 417
- Routh, criterio de, 412–417, 457
- símbolos
  - funciones, instrumentos, elementos, 776–778
- señal
  - acondicionamiento, 345–353
  - escalamiento, 345–353
- segundo orden
  - caso
    - críticamente amortiguado, 136, 144, 149
    - oscilatorio puro, 134, 139, 145
    - sobreamortiguado, 136, 144, 149
    - subamortiguado, 134, 140, 146
  - respuesta a la rampa, 145
  - respuesta al escalón, 139
  - subamortiguado, 215
- segundo orden,
  - respuesta al impulso, 134
- segundo orden, sistemas de, 133–150
- sensor, 242
- sensores, 26
  - localización, 259
- serie de Taylor, 53, 56, 59
- sistema, 21
  - críticamente estable, 411
  - de primer orden, 117, 224
  - de primer orden,
    - con tiempo muerto, 206
  - de segundo orden, 133
  - estable, 410
  - inestable, 411
  - mezcla en fase líquida, 72
    - volumen constante, 72–74
    - volumen variable, 75–77
  - tanques con interacción, 64–67
  - tanques en cascada, 61–64
- sistema adelanto-atraso, 159
  - respuesta al escalón, 159
- sistema anticipativo, 160
  - respuesta a la rampa, 161
- sistema autorregulable, 572
- sistema con respuesta inversa, 156
- sistema hidráulico, 61–67, 748
- sistema no autorregulable, 572
- sistemas
  - causal, 111
  - críticamente amortiguados, 144
  - de orden  $n$ , 218
  - de segundo orden, 215
  - impropios, 111
  - mínima fase, 111
  - no causales, 111
  - no mínima fase, 111
  - propios, 111
- sistemas LTI
  - a Lazo Cerrado, 479
  - control proporcional, 480–495
  - control proporcional-derivativo, 518–523
  - control proporcional-integral, 495–513
- sistemas MIMO, 27, 42, 373, 739
  - regla general, 762
- sistemas SISO, 42, 373, 739
- sistemas tiempo muerto, 150
- sobrevalor relativo, 216
- sobrevalores relativos, 142
- teorema de superposición, 757
- teorema de valor final, 713

- teorema de valor inicial, 713
- tiempo de
  - alcance, 142
  - crecimiento, 142
  - demora, 142
  - establecimiento, 120, 144
  - primer pico, 143
- tiempo muerto, 150
  - aproximaciones, 153
  - en serie, 154
- tolerancia de tiempo de establecimiento, 120
- toma de información, 741
- toma de señal, 741
- transformada
  - de la derivada enésima, 714
  - de la integral, 715
  - multiplicación por  $t^n$ , 716
  - multiplicación por  $t$ , 716
  - de la derivada, 713
- transformada de funciones, 717–723
- transformada de Laplace
  - existencia, 711
  - teoremas útiles, 712
- transmisor, 242, 771
- traslación
  - eje  $s$ , 712
  - eje  $t$ , 712
  
- válvula de control, 54
- válvula de control
  - coeficiente de válvula ( $C_v$ ), 282
  - coeficiente de válvula ( $K_v$ ), 283
  - dimensionamiento, 293–297
  - dinámica, 301
  - histéresis, 297
- válvula de control neumática
  - modelado, 298
- validación, 205
- valores característicos, 191
- valores propios, 191
- variables
  - controladas, 22
  - manipuladas, 22
  - no controladas, 22
- velocidad de crecimiento, 122
- velocidad de decrecimiento, 118

# Bibliografía

- [1] E. J. Adam. *Modelado, Simulación y Control de Generadores de Vapor*. Tesis Doctoral, Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral, 1996.
- [2] E. J. Adam. Adaptive iterative learning control applied to nonlinear batch reactor. In *XII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (RPIC 2007)*, ISBN: 978-987-1242-23-8, Río Gallegos, Santa Cruz, Argentina, (CD version), Oct. 16-18 2007.
- [3] E. J. Adam and E. D. Guestrin. Identification and robust control of an experimental servo motor. *ISA-Transactions*, ISSN 0019-0578, 41:225–234, 2002.
- [4] E. J. Adam and J. L. Marchetti. Dynamic simulation of large boilers with natural recirculation. *Comp. and Chem. Eng.*, 23:1031–1040, 1999.
- [5] E. J. Adam and J. L. Marchetti. Diseño de controladores feedforward basándose en propiedades de robustez. In *IX Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control - RPIC 2001*, volume 1, pages 258–263, Santa Fe, Santa Fe, Argentina, Sep. 12-14 2001.
- [6] E. J. Adam and J. L. Marchetti. Feedforward controller design based on hinf analysis. In *1st Mercosur Congress in Chemical Engineering and 3th Mercosur Congress on Process System Engineering - Enpromer*, pages 271–276, Santa Fe, Santa Fe, Argentina, Sep. 16-20 2001.
- [7] E. J. Adam and J. L. Marchetti. Designing and tuning robust feedforward controllers. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 28(9):1899–1911, 2004.
- [8] E. J. Adam, C. J. Valsecchi, and E. D. Guestrin. Ajuste de controladores pid para procesos integradores con retardo. In *XVIII Simposio Nacional de Control Automático, AADECA 2002*, Buenos Aires, Argentina. (versión en CD), Sep. 2-4 2002.
- [9] Standard ANSI/ISA-5.1-1984. *Instrumentation Symbols and Identification*. ISA, reaffirmed 13 July 1992.

- [10] Standard ANSI/ISA-5.1-1984. *Instrumentation Symbols and Identification*. ISA, reaffirmed 13 July 1992.
- [11] Standard ANSI/ISA-5.1-1992. *American National Standards Institute and International Society of Automation. ANSI/ISA- 5.1-2009, Binary Logic Diagrams for Process Operations*. ISA - The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 1992.
- [12] Standard ANSI/ISA-5.1-2005. *American National Standards Institute and International Society of Automation. ANSI/ISA- 5.1-2009, Control Valve Terminology*. ISA - The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2005.
- [13] Standard ANSI/ISA-5.1-2009. *American National Standards Institute and International Society of Automation. ANSI/ISA- 5.1-2009, Instrumentation Symbols and Identification*. ISA - The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2009.
- [14] K. J. Åström and T. Hägglund. Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins. *Automatica*, 20:645–651, 1984.
- [15] K. J. Astrom and T. Hagglund. *Automatic Tuning of PID Controllers*. Instrument Society of America, 1988.
- [16] K. J. Åström and T. Hägglund. *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. ISA - The Instrumentation, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, NC , second edition, 1995.
- [17] K. J. Åström and T. Hägglund. *Advanced PID Control*. ISA - The Instrumentation, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, NC 27709, 2005.
- [18] K. J. Åström and L. Rundqwist. Integrator windup and how to avoid it. In *Proc. Am. Control Conf., Pittsburgh*, pages 1693–1698, 1989.
- [19] H. Bode. *Network Analysis and Feedback Design*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1945.
- [20] H. W. Boger. Flow characteristics for control-valve installations. *ISA Journal*, (Nov.):50–54, 1966.
- [21] E. H. Bristol. On a new measure of interactions for multivariable process control. *IEEE Trans. on Auto. Control*, (AC-11):133–, 1966.
- [22] I. L. Chien and P. S. Fruehauf. Consider imc tuning to improve controller performance. *Chem. Eng. Prog.*, (10):33–41, 1990.



- [23] T. G. Chin. Guide to distillation pressure control methods. *Hydrocarbon Processing*, (10):145–153, 1979.
- [24] R. N. Clark. The routh-hurwitz stability criterion revisited. *IEEE Control Syst. Mag.*, 12(2):119–120, 1992.
- [25] G. H. Cohen and G. A. Coon. Theoretical consideration of retarded control. *Trans. ASME*, 75:827–834, 1953.
- [26] P. B. Deshpande. *Multivariables Proces Control*. ISA, 1989.
- [27] T. F. Edgar, R. C. Heeb, and J. O. Hougen. Computer-aided process control system design using iterative graphics. *Comp. Chem. Eng.*, 5(4):225–, 1982.
- [28] W. R. Evans. Graphical analysis of control system. *AIEE Trans Part II*, 67:547–551, 1948.
- [29] W. R. Evans. Control system synthesis by root locus method. *AIEE Trans Part II*, 69:66–69, 1950.
- [30] H. Fertik and C. Ross. Direct digital control with anti-windup feature. *ISA Trans.*, 6:317–328, 1967.
- [31] Fischer. *Control Valve Handbook*. Fisher Controls International LLC, 4th. edition, 2005.
- [32] G. C. Goodwin and K. s. Sin. *Adaptive Filtering, Prediction and Control*. Prentice Hall, 1984.
- [33] T. Hägglund. An industrial dead-time compensating pi controller. *Control Eng. Practice*, 4(6):749–756, 1996.
- [34] P. Harriott. *Process Control*. McGraw - Hill Book Company, 1964.
- [35] A. Hurwitz. On the conditions under which an equation has only roots with negative real parts. *Mathematische Annalen*, 46:273–284, 1895.
- [36] ISA-5.3-1983. *International Society of Automation. ISA- -5.3-1983, Graphic Symbols for Distributed Control/Shared Display Instrumentation, Logic and Computer Systems*. ISA – The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 1983.
- [37] ISA-5.3-1984. *International Society of Automation. ISA-5.3-1983, Graphic Symbols for Process Displays*. ISA – The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 1985.
- [38] ISA-5.4-1991. *International Society of Automation. ISA-5.4-1991, Instrument Loop Diagrams*. ISA - The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 1983.

- [39] ISO-10628-1. *Diagrams for the chemical and petrochemical industry - Part 1: Specification of diagrams*. ISO, 2014.
- [40] ISO-10628-2. *Diagrams for the chemical and petrochemical industry - Part 2: Graphical symbols*. ISO, 2012.
- [41] H. P. Kallen. *Handbook of Instrumentation and Control*. McGraw Hill, 1961.
- [42] R. E. Kalman. Contribution to the theory of optimal control. *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 5:102–119, 1960.
- [43] W. Kaplan. *Advanced Calculus*. Pearson, 5th edition, 2002.
- [44] M. Khotare, P. Campo, M. Morari, and K. Nett. A unified framework for the study of anti-windup design. *Automatica*, 30(12):1869–1833, 1994.
- [45] E. Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley, 10th edition, 2011.
- [46] B. C. Kuo. *Automatic Control Systems*. Prentice Hall, 1995.
- [47] W. S. Levine. *The Control Handbook*. CRC Press IEEE Press, 1996.
- [48] B. G. Lipták. Control valves in optimized systems. *Chemical Engineering*, 90(Sep.):104–110, 1983.
- [49] B. G. Lipták. *Process Measurement and Analysis*. CRC Press, 2003.
- [50] B. G. Lipták and K. Venczel. *Instrument Engineers' Handbook*, volume 1. Chilton Book Company, 2000.
- [51] B. G. Lipták and K. Venczel. *Instrument Engineers' Handbook*, volume 2. Chilton Book Company, 2000.
- [52] L. Ljung. *System Identification. Theory for User*. Prentice Hall, 2nd edition, 1998.
- [53] A. M. Lopez, P. W. Murrill, and C. L. Smith. Controller tuning relationships based on integral performance criteria. *Instrumentation Technology*, 57, 1967.
- [54] O. P. Lovett. Valve flow characteristics. *ISA Journal*, 11:65–67, 1964.
- [55] W. L. Luyben. *Process Modeling, Simulation and Control for Chemical Engineers*. Prentice Hall, 1973.
- [56] W. L. Luyben. Simple method for tuning siso controllers in multivariable systems. *Ind. Eng. Chem. Process Des.*, 25:654–660, 1986.

- [57] W. L. Luyben. *Process Modeling, Simulation, and Control for Chemical Engineers*. McGraw-Hill, 2nd edition, 1996.
- [58] W. L. Luyben. Tuning proportional-integral-derivative controllers for integrator/deadtime processes. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 35:3480–3483, 1996.
- [59] D. Q. Mayne. The design of linear multivariable systems. *Automatica*, 9:201–207, 1973.
- [60] T. J. McAvoy. Connection between relative gain and control loop stability and design. *AIChE J.*, 27:613–, 1981.
- [61] G. K. McMillan and D. M. Considine. *Process/Industrial Instrument and Control Handbook*. McGraw Hill, 5th. edition, 1999.
- [62] T. J. Monica, C. Yu, and W. L. Luyben. Improved multiloop single-input/single-output (siso) controllers for multivariable processes. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 27:969–973, 1988.
- [63] M. Morari and E. Zafiriou. *Robust Process Control*. Prentice Hall, 1989.
- [64] H. Nyquist. Regeneration theory. *Bell System Tech. J.*, 11:126–147, 1932.
- [65] A. O’Dwyer. *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules*. Imperial College Press, 3rd edition, 2009.
- [66] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, 5th edition, 2010.
- [67] B. A. Ogunnaike and W. H. Ray. *Process Dynamics, Modeling and Control*. Oxford University Press, 1994.
- [68] C. N. Rautenberg and C. E. D’Attellis. *Control Lineal Avanzado y Control Óptimo*. Asociación Argentina de Control Automático (AADECA), 2004.
- [69] L. F. Reichlin. *Control 2.6.2. Computer-Aided Control System Design (CACSD) Tools for GNU Octave*. 2014.
- [70] J. F. Richardson and D. G. Peacock. *Coulson and Richardson’s Chemical Engineering. Chemical and Biochemical Reaction Engineering, and Control*. Butterworth-Heinemann An imprint of Elsevier Science, 3rd. edition, 1994.
- [71] E. J. Routh. *Dynamic of a System of Rigid Bodies*. Process Dynamic and Control, 1892.
- [72] A. A. Rovira. *Control Algorithm Tuning, and Adaptive Gain Tuning in Process Control*. PhD Dissertation, Department of Chemical Engineering, Louisiana State University, Baton Rouge, 1981.

- [73] A. A. Rovira, P. W. Murrill, and C. L. Smith. Tuning controllers for setpoint changes. *Instruments and Control Systems*, 42:67–69, 1969.
- [74] J. Acedo Sánchez. *Instrumentación y Control Avanzado de Procesos*. Ediciones Díaz Santos, 2006.
- [75] D. E. Seborg, T. F. Edgar, and D. A. Mellichamp. *Process Dynamic and Control*. John Wiley & Sons, 1989.
- [76] F. D. Shinskey. *Process Control Systems. Application, Design Adjustment*. McGraw - Hill Book Company, 1967.
- [77] F. D. Shinskey. *Sistemas de Control de Procesos. Aplicación, Diseño y Sintonización*. McGraw - Hill Book Company, 1996.
- [78] S. Skogestad and J. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control*. NY: Wiley, 1996.
- [79] C. Smith and A. Corripio. *Principles and Practice of Automatic Process Control*. Wiley, 2004.
- [80] C. L. Smith. *Digital Computer Process Control*. Scranton, Pa., US, International Textbook Co., 1972.
- [81] O. J. M. Smith. Closer control of loops with dead time. *Chem. Eng. Prog.*, 53:217–, 1957.
- [82] S. Soloman. *Sensor Handbook*. McGraw-Hill, New York, 1999.
- [83] M. R. Spiegel. *Transformadas de Laplace*. McGraw Hill. Serie Schaum, 1971.
- [84] G. Stephanopoulos. *Chemical Process Control*. Prentice Hall, 1984.
- [85] S. Szklanny and C. Behrends. *Sistemas Digitales de Control de Procesos*. Editorial Control S.R.L., 2nd. edition, 1994.
- [86] B. D. Tyreus and W. L. Luyben. Tuning pi controllers for integrator/dead time processes. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 31:2625–2628, 1992.
- [87] C. D. Vinante and W.L. Luyben. Experimental studies of distillation decoupling. *Kem. Teollisuus*, 29(8):499–514, 1972.
- [88] J. G. Ziegler and N. B. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. *Trans. ASME*, 64(11):759–768, 1942.