UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de **Doctor en Matemática** en el campo del **Análisis Armónico**.

Funciones de Sobolev y Besov en espacios métricos

Unidad de Investigación donde se realizó:
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET - UNL)

Autor:
Miguel Andrés Marcos
IMAL (CONICET - UNL) - FIQ (UNL)

Directora de Tesis:
Eleonor Ofelia Harboure
IMAL (CONICET - UNL) - FIQ (UNL)

Codirector de Tesis:
Hugo Alejandro Antonio Aimar
IMAL (CONICET - UNL) - FIQ (UNL)

Jurados:

Gabriel Acosta Rodríguez
FCEyN (UBA) - IMAS (UBA - CONICET)

Silvia Inés Hartzstein
FIQ (UNL) - IMAL (UNL - CONICET)

Sheldy Javier Ombrosi
Depto. de Matemática (UNS) - INMABB (UNS - CONICET)

SANTA FE - ARGENTINA
2015

A papi y mami

(...) "I know everything about you. Or once I did. It is the way with all living things. There is always someone -a parent, a mentor, a friend- who knows you better than you know yourself. Then comes a time when you surpass that knowledge and know yourself best of all. That's the day when you have come of age. That is today."

They both were silent for a time. Multani felt a sudden tenderness toward this vessel, which he had nurtured from a single seed. In a sense, *Weatherlight* had been his ship that whole time. Today she would never be his again.

What is to become of me, then, Mentor Multani? What am I becoming?

He shrugged splintery shoulders. Knothole eyes glinted with resin. "I don't know. This is the day when I stop knowing you best. What becomes of you is what you make of yourself." (...)

- J. Robert King, *Apocalypse*

> "I said I *liked* being half-educated; you were so much more *surprised* at everything when you were ignorant."
>
> \- Gerald Durrell, *My Family and Other Animals*

Agradecimientos

Sin exagerar la importancia de un título, pero a su vez sin desmerecerlo, trataré de usar este espacio para agradecer a toda la gente que me acompañó en mi formación, que siempre consideraré inconclusa, como matemático y como persona.

A mis directorxs Pola y Hugo, por acompañarme y bancarme estos 5 años. Por guiarme y por su confianza en mí. No sólo son excelentes matemáticxs sino también excelentes personas, y lxs quiero un montón.

A mis jurados, por haber aceptado la responsabilidad de leer y evaluar esta tesis. En particular a Silvia, por sus muchas preguntas y correcciones por chat.

A mi familia, porque lxs quiero.

A mi pá, que nos abandonó hace ya un tiempo y dejó una herida enorme, pero estuvo a mi lado los primeros 26 años de mi vida. Que me quería biólogo pero terminé cambiando los cercopitecos, los insectos, las medusas y el conservacionismo por la matemática, aunque nunca lxs dejé del todo.

A mi má, que dedicó casi la mitad de su vida a criarnos a mis hermanos y a mí, así que mucho de lo que somos se puede decir que es su culpa. Citando nuevamente a Gerald Durrell en *Mi familia y otros animales*, "Como señala con razón mi hermano Larry, podemos estar orgullosos de cómo la hemos educado; ella es un reconocimiento a nosotros."

A bú y erni, por ser mis hermanos, mis amigos, porque estemos cerca o lejos nunca nada va a cambiar, y ninguno se va a poder deshacer de los otros.

Y no puedo dejar de agradecerle a la Tere, obviamente.

Gracias al CONICET por haber apoyado económicamente la realización de esta tesis mediante una beca doctoral. Gracias también al IMAL por brindarme un lugar de trabajo, la infraestructura necesaria y sobre todo calidez humana. Particularmente a Marce y Betty por su buena onda y predisposición ante mis numerosos traspiés para llenar papeles.

A todxs mis compañerxs de la LMA, del doctorado, y demás amigxs de la FIQ. Sobre todo a Estefi, por soportarme casi diariamente durante 9 años, a Gonzalo, por convertirse en un gran amigo y compañero de salidas, y a la Jesu, que pasó a ser familia. Además a Caro, Iso y Ale, compañerxs de otros pagos que se convirtieron en buenxs amigxs desde nuestro paso por Sevilla.

A todxs lxs profes de la licenciatura y el doctorado, por compartir sus conocimientos conmigo. En especial a Pedro y Goro, que lograron en poco tiempo que lo que iba a ser una carrera "secundaria" se convirtiera en una vocación.

También a Manuela, por arriesgarse a empezar casi de cero conmigo en esta nueva etapa.

Y por supuesto a Lili, que pasó de ser una profesora loca a una queridísima amiga y consejera.

A mis amigxs de otros lados. A Juan, mi mejor amigo de hace tanto tiempo y el factor común de casi todos mis grupos de amigxs, que siempre se las arregló para que lo quiera igual tanto cuando me da bola como cuando me ignora, acá o en España. A Meli y Joa, amigas entrañables desde el día 1 en la escuela, y al resto de la "pandilla" de la EIS: Yami, Vicky y Romi. A Bruno aparte, que además de un gran amigo fue casi un mentor en política, a pesar de "su pasado", su carácter y sus histeriqueos. A Agustín, por freak, magiquero, amigo, etc. etc. y sobre todo porque si no le dedico una oración a él solito se me va a ofender, e incluso debería tratar de hacerla más larga que las demás... Pero también al resto de ese grupo tan querible que se fue formando, el Mono, la Jona, el Gaby, la Pao, la Geo, Nacho y Mariano. A Germán y esa relación tan enfermiza que tenemos con todos esos brldas y lalalas y ungato y unagata y unpato.

A todxs mis compañerxs de la Siete Jefes y del resto del MNR, por todas las discusiones políticas y todos los momentos compartidos, en la facu y en las post-reuniones en Kusturika con pizza y porrón. A lxs que siguieron como amigxs después de haber terminado esa etapa, a Edu, Juanma y Marce. Al Grupo de Diversidad Sexual de la JS, en especial a Gera y Willow, de quienes aprendí muchísimo de la militancia por fuera de la universidad y sobre todo LGBT. A "Lxs desaliñadxs", ese grupo de gente tan copada que se formó en estos últimos tiempos, donde los proyectos comienzan a crecer y tomar forma.

También a las chicas de Biodiversidad, sobre todo a la querida Luli, que por tantos años me bancó y coincidió conmigo en mis quejas sobre la carrera.

Finalmente quiero agradecer a Estefi, Emi, Marce y Marilina por su ayuda, sus múltiples correcciones y consejos de LaTeX, imprescindibles para dar forma a esta tesis.

A todxs ustedes mi mayor reconocimiento y gratitud.

Miguel

Resumen

En el contexto abstracto de espacios métricos con medida varios autores han considerado espacios de funciones de regularidad tipo Lipschitz o Besov con orden de suavidad $\alpha < 1$. Para el extremo $\alpha = 1$ otros autores ya han introducido diferentes espacios de tipo Sobolev donde se define alguna noción de gradiente.

En este trabajo definiremos espacios de Sobolev de orden fraccionario α a través de un potencial que generaliza al de Bessel en el caso euclídeo. De forma análoga a su versión clásica, veremos que estos espacios aquí definidos cumplen, por ejemplo, teoremas de inmersión de Sobolev. Para valores pequeños de α probaremos que los espacios potenciales pueden caracterizarse mediante operadores de derivación fraccionaria apropiados, resultado que también generaliza al caso de $\mathbb{R}^n$.

Demostraremos además que los espacios que resultan de la interpolación entre estos espacios potenciales son los ya conocidos espacios de Besov. Esta caracterización de los espacios de Besov nos permitirá demostrar un teorema de trazas para este tipo de funciones: la restricción de una función con regularidad Besov a un subespacio cerrado de menor "dimensión" es de hecho una función de la misma clase aunque con menor grado de regularidad. Recíprocamente definiremos un operador de extensión que resulta acotado entre los correspondientes espacios de Besov.

En el caso del extremo de regularidad $\alpha = 1$ se introducen espacios de tipo Newton-Sobolev donde se reemplaza la noción de "longitud" de curva por otras medidas como por ejemplo la medida de Hausdorff s-dimensional.

A fin de lograr estos objetivos, se requerirán muchas de las técnicas ya clásicas en el Análisis Armónico en espacios de tipo homogéneo.

En la construcción del potencial de Bessel y de la derivación fraccionaria necesitaremos trabajar con aproximaciones a la identidad "suaves" y de soporte compacto, cuya existencia ya ha sido probada en este contexto. Por otro lado, para probar la inversibilidad de la composición entre estos operadores, de manera que los espacios potenciales puedan caracterizarse mediante la derivada fraccionaria, es imprescindible la teoría de integrales singulares de Calderón-Zygmund, y en particular el teorema $T1$, que utilizaremos de forma análoga a los trabajos de Gatto, Segovia y Vagi y de Hartzstein y Viviani.

Con el propósito de obtener un resultado de interpolación, siguiendo a Peetre, reque-

riremos de la teoría de interpolación entre espacios de Banach mediante los funcionales K y J. Para el uso del funcional J necesitaremos fórmulas de reproducción de tipo Calderón.

Finalmente, para probar un teorema de trazas entre espacios de Besov, seguiremos las ideas de Jonsson y Wallin: el teorema de extensión se basará esencialmente en un lema de cubrimiento tipo Whitney, mientras que el teorema de restricción utilizará propiedades de los espacios potenciales antes construidos, particularmente del teorema de interpolación recientemente mencionado.

Índice general

Introducción

"Begin at the beginning," the King said, very gravely,
"and go on till you come to the end: then stop."

- Lewis Carroll, *Alice's Adventures in Wonderland*

La formulación variacional de los problemas clásicos de ecuaciones en derivadas parciales tiene al menos dos consecuencias importantes en el desarrollo de la disciplina. Por una parte las formas débiles de resolver EDP dan flexibilidad teórica y más generalidad. Por otra, es la base de los nuevos métodos numéricos como los elementos finitos. En el centro de esta formulación está la identificación de espacios funcionales adecuados en los que sea posible hallar soluciones.

Las teorías de diferenciación han sido una búsqueda latente en las últimas décadas del análisis en espacios métricos. En estos espacios, al menos dos tipos de regularidad de funciones han sido considerados en la literatura: la regularidad Lipschitz (o Hölder) y la regularidad Besov (ver [MS1] y [HS]). Estas teorías permiten a lo sumo un cálculo diferencial fraccionario, no es esperable desarrollar una teoría de regularidad de orden superior a 1. El extremo de regularidad $\alpha = 1$ en contextos generales es considerado por [H1] y [Sh1], en los que se introducen normas de Sobolev de orden de derivación 1.

Las teorías de regularidad Lipschitz y Besov dan un ámbito propicio para derivaciones fraccionarias definidas a través de la métrica del espacio (ver [GSV], [HV]). Por otra parte, la teoría de integración fraccionaria tiene una historia aún más larga en espacios métricos con medida (ver [GSV]).

Las heurísticas asociadas a un transplante directo de resultados de $\mathbb{R}^n$ al contexto de espacios de Ahlfors, o en forma más general a espacios de tipo homogéneo, sirven más para plantear los problemas que para resolverlos. Generalmente el paso a contextos sin traslaciones requiere reformulaciones de los formatos clásicos que son en sí mismas más sencillas, elegantes y esenciales porque pueden prescindir de hipótesis en apariencia necesarias pero, finalmente, absolutamente superfluas.

La relación clásica entre derivación fraccionaria e integración fraccionaria del mismo orden no es tan precisa en espacios métricos como para garantizar que sean inversos una de la otra. En estos contextos su composición constituye un operador integral singular inversible (ver [GSV]).

No obstante, el problema de los espacios potenciales y los operadores de tipo Bessel que pueden definirlos ha sido escasamente considerado en la literatura. En el contexto euclídeo el operador de Bessel de orden α corresponde a la potencia fraccionaria negativa $(I+\Delta)^{-\alpha/2}$, con I la identidad, Δ el laplaciano y $\alpha > 0$. A diferencia de la integración fraccionaria (i.e. el operador asociado a $(-\Delta)^{-\alpha/2}$) el operador de Bessel tiene la ventaja de preservar los espacios L^p. De hecho, en $\mathbb{R}^n$ viene dado por la convolución con un núcleo de L^1, que localmente se comporta como el potencial de Riesz, pero con un decaimiento mayor en el infinito. Los espacios potenciales se definen entonces como la imagen de L^p por estos operadores. Como el operador de Bessel de orden α puede verse como una integración de ese orden, que además preserva L^p, es natural preguntarse si las funciones generadas tienen derivadas fraccionarias de orden α, en algún sentido.

Uno de los objetivos centrales de esta tesis es considerar estos operadores y estudiar las relaciones entre los espacios de tipo Sobolev (potenciales) generados por ellos y operadores de derivación fraccionaria. Para este fin se hace necesario investigar en qué sentido nuestros potenciales de Bessel resultan inversibles, y en esta búsqueda, como en [GSV] o [HV], la teoría de integrales singulares juega un papel central, en particular el teorema $T1$ (ver [DJS]).

El estudio de estos espacios potenciales tiene además del interés propio una consecuencia importante al momento de poder indentificar los espacios interpolados, que resultan ser espacios de Besov no homogéneos como los considerados por [GKS] en el contexto métrico. En esta instancia la fórmula de reproducción de Calderón juega un rol esencial para probar que funciones del adecuado espacio de Besov pueden obtenerse mediante la interpolación de los espacios potenciales de Sobolev.

Una herramienta importante en el estudio de regularidad de soluciones de ecuaciones diferenciales es conocer propiedades de la restricción de estas funciones a conjuntos de menor dimensión, como así también el problema inverso de extensión. En [JW] los autores desarrollan una teoría de trazas (esto es, de extensión - restricción) en la escala de los espacios de Besov. El resultado sobre restricción de funciones Besov de $\mathbb{R}^n$ a un cerrado de menor dimensión se obtiene viendo a los espacios de Besov como interpolados de espacios de Sobolev potenciales. Gracias al teorema de interpolación probado en el contexto de espacios métricos Ahlfors N-regulares se pueden desarrollar las técnicas de [JW] y así obtener un resultado sobre la restricción de funciones de Besov que dejan una "huella" con suavidad también Besov pero de menor orden. Por otra parte se obtiene un teorema de extensión inverso, pero en un contexto más general en el que el espacio ambiente es un espacio de tipo homogéneo no necesariamente Ahlfors.

Finalmente, se consideran los espacios de Sobolev asociados a medidas sobre curvas más generales que la longitud, extendiendo de esta manera la teoría de Shanmugalingam de espacios de tipo Newton-Sobolev. Al igual que en [Sh1], se obtienen teoremas de inmersión y relaciones entre estos espacios y espacios de Hajłasz-Sobolev.

La tesis se organiza de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se presenta toda la maquinaria de análisis en espacios métricos que será utilizada en los capítulos subsiguientes. Se dan las definiciones básicas de espacios de tipo homogéneo y Ahlfors regulares, junto con algunas de sus propiedades geométricas que nos serán de utilidad. También se exhiben herramientas más avanzadas, como integrales singulares y el teorema $T1$, que caracteriza a los operadores de tipo Calderón-Zygmund. Se cierra el capítulo dando una breve introducción a la teoría de interpolación entre espacios de Banach, mediante los funcionales K y J.

En el Capítulo 2, se describen los espacios de Besov en espacios métricos a partir del módulo de continuidad, y se menciona una caracterización alternativa por diferencias de aproximaciones a la identidad, y un resultado de interpolación de [GKS]. A su vez se presentan los espacios de Sobolev de Hajłasz, algunas de sus propiedades básicas y su relación con los espacios de Besov.

En el Capítulo 3 se construyen espacios potenciales a través de un operador tipo Bessel, y se prueba que satisfacen muchas de las mismas propiedades que cumplen en el caso clásico. Se demuestra que el operador mejora distintos tipos de regularidad de funciones y también se establecen diversos resultados de inmersión y densidad de los espacios potenciales.

En el Capítulo 4, basándose en [GSV] y [HV], se demuestra por medio del operador derivación fraccionaria que el operador composición Integración-Derivación es un operador de tipo Calderón-Zygmund y, para órdenes pequeños, se prueba inversibilidad. El capítulo finaliza con la utilización de esta inversibilidad para caracterizar los espacios potenciales y hacer una comparación con el caso euclídeo.

En el Capítulo 5 se prueba un teorema de interpolación entre espacios potenciales, utilizando las ideas de [P]. Se obtiene que este espacio interpolado está inmerso en espacios de Besov, y para órdenes pequeños de regularidad, se tiene la igualdad entre el interpolado y el Besov, empleando los resultados de los capítulos anteriores.

En el Capítulo 6, utilizando las ideas de [JW], se demuestra un teorema de trazas en el contexto métrico. Para el teorema de restricción se aplican los resultados obtenidos en el capítulo anterior, por lo que es necesario restringirse a órdenes pequeños de regularidad. Para el teorema de extensión, por otro lado, se requieren herramientas mucho más geométricas, y podemos considerar todo el rango $0 < \alpha < 1$.

En el Capítulo 7 se presentan los espacios de Newton-Sobolev, que generalizan los espacios de Shanmugalingam introducidos en [Sh1] a un ambiente en el cual la “longitud” de curvas no se calcula a través de la medida de Hausdorff unidimensional, sino a través de una medida arbitraria.

Capítulo 1

Preliminares

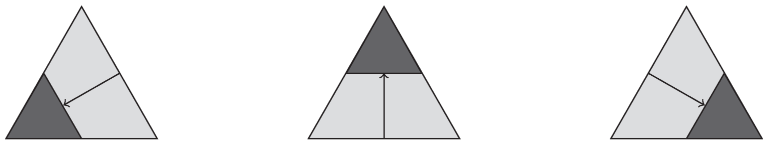
Cuando el análisis en espacios de tipo homogéneo se inició a principios de los años 70 desde los trabajos de Coifman y de Guzmán ([CG]), y luego el mucho más difundido libro de Coifman y Weiss ([CW]), el modelo subyacente en la generalización fue el de variedades homogéneas. La evolución simultánea de las geometrías fractales, de la teoría de los pesos de Muckenhoupt y del análisis en grupos localmente compactos ([R]), generaron ambientes mucho más diversos de aplicación de los resultados y de extensión de las técnicas a estructuras no algebraicas.

Los trabajos fundamentales de estructura de los espacios de tipo homogéneo son los de Roberto Macías y Carlos Segovia ([MS1], [MS2]). En el primero se prueba la existencia de casi métricas equivalentes a la original que son potencias de métricas, que los átomos son puntos aislados y que la normalidad (o el carácter Ahlfors) de un espacio (salvo por los átomos) es más una regla que una excepción. La dificultad que todavía impone al esquema de espacios Ahlfors puede, en muchos problemas, evitarse mediante adecuadas desatomizaciones ([ACT]). En [MS1] se prueba también la no trivialidad y densidad en clases de Lebesgue de los espacios de Lipschitz.

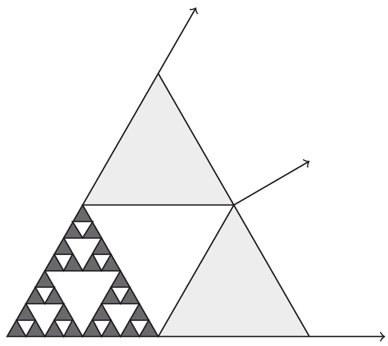
En [MS2] se estudian los espacios funcionales y de distribuciones de Schwartz sobre espacios de tipo homogéneo. También allí se hallan por primera vez particiones suaves de la unidad asociadas a cubrimientos de Whitney de abiertos. Si bien el paso de la generalidad a la normalidad impone un cambio de casi-métrica por otra no equivalente, en la nueva estructura, a falta de frecuencias, las escalas recuperan un papel central en el análisis armónico.

Por otra parte, como lo muestran los trabajos de Mosco ([Mo]) el carácter Ahlfors de un fractal autosimilar en el espacio euclídeo es una característica propia del proceso iterativo de las contracciones que lo definen. En estos casos la propiedad de duplicación es una consecuencia del carácter Ahlfors del espacio cuando se lo equipa con la métrica que hereda del espacio euclídeo y con la medida de Hausdorff con la dimensión correcta.

Muchas veces, cuando el lector se sienta limitado a la interpretación de nuestros teoremas en el contexto euclídeo, conviene tener a mano un fractal autosimilar. Por razones topológicas (conexidad) y dimensionales, un ejemplo interesante es el triángulo de Sierpiński que se obtiene por el teorema del punto fijo de Banach aplicado como lo hace Hutchinson ([Hu]) a partir de un triángulo inicial mediante las siguientes transformaciones afines de $\mathbb{R}^2$:



A partir de este triángulo de Sierpiński, construímos un espacio de diámetro infinito tomando dilataciones del mismo (potencias de 2), conservando muchas de las propiedades del triángulo original (por ejemplo la dimensión, y más aún el carácter Ahlfors).



En este capítulo presentamos toda la maquinaria de análisis en espacios métricos que será utilizada en los capítulos subsiguientes. Una primer sección contiene los conceptos básicos de espacios de tipo homogéneo y espacios Ahlfors regulares, y algunas de las propiedades geométricas que utilizaremos más adelante, como un lema de cubrimiento de Whitney; se incluyen también algunos ejemplos de estos espacios, que servirán posteriormente como casos particulares. Otra sección, ya en el caso de espacios Ahlfors, está destinada a la construcción de aproximaciones a la identidad "suaves", que nos permitirán trabajar con espacios potenciales y de Besov. A continuación se definen los conceptos de operadores de tipo integral singular y de Calderón-Zygmund, y se enuncia el teorema $T1$. Finalmente, en la última sección se mencionan los métodos de interpolación J y K entre espacios de Banach, que utilizaremos en el Capítulo 5.

1.1. Espacios de tipo homogéneo - regularidad Ahlfors

1.1.1. Espacios métricos - funciones Lipschitz

En este trabajo nos restringiremos siempre al caso de espacios métricos, aunque muchas de las propiedades que utilizaremos son válidas en el contexto más general de espacios casi métricos. Los principales resultados que enunciaremos en esta sección, pueden encontrarse en [He] para el caso métrico o, para el contexto casi-métrico, en [A].

Un **espacio métrico** es un par (X, d) con X un conjunto no vacío y $d : X \times X \to [0, \infty)$ una función que satisface

- $d(x, y)=0$ si y sólo si $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$;
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, x)$.

A d se la llama **distancia** o **métrica**.

Una **bola** de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ es el conjunto $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$. Si no importa especificar centro o radio diremos simplemente una bola B. Llamamos λB a la bola de mismo centro que B y radio multiplicado por λ.

Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se dice **Lipschitz-α**, para $\alpha > 0$, si existe una constante L tal que para todo par de puntos $x, y \in X$ vale

$$|f(x) - f(y)| \leq Ld(x, y)^\alpha,$$

y al ínfimo de todas esas constantes L (o equivalentemente a $\sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^\alpha}$) lo denotamos por $[f]_\alpha$. Las funciones Lipschitz son claramente (uniformemente) continuas.

Si $0 < \alpha \leq 1$, $\delta = d^\alpha$ define también una métrica en X, y las funciones Lipschitz-α en el espacio (X, d) son las funciones Lipschitz-1 en (X, δ) (de hecho para el caso $\alpha > 1$, $\delta = d^\alpha$ no es necesariamente una métrica pero sí una casi-métrica, y la misma observación vale).

Notar que para $x_0 \in X$, la función $f(x) = d(x_0, x)$ es Lipschitz-1 (con $[f]_1 \leq 1$), y lo mismo ocurre con la función $f(x) = d(x, A)$ para $A \subset X$ no vacío; además toda función constante es Lipschitz-α para todo $\alpha > 0$. En abiertos de $\mathbb{R}^n$ se puede ver que las únicas funciones Lipschitz-α para $\alpha > 1$ son las constantes. Esto no es cierto en espacios métricos generales: si $\beta < 1$ y definimos $\delta = d^\beta$, si $f : X \to \mathbb{R}$ era Lipschitz-1 en (X, d) en el espacio (X, δ) será Lipschitz-$\frac{1}{\beta}$, y $\frac{1}{\beta} > 1$.

El espacio de las funciones Lipschitz-α es un espacio vectorial, y $[\cdot]_\alpha$ es una seminorma allí (no es norma porque las constantes tienen $[c]_\alpha = 0$). Para obtener un espacio normado, nos restringimos a funciones acotadas:[1]

$$C^\alpha(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es Lipschitz-}\alpha \text{ y acotada}\}$$

[1]Esta notación se superpone con la notación C^k de $\mathbb{R}^n$ para funciones con derivadas continuas hasta orden k, si $k \in \mathbb{N}_0$. El espacio de funciones Lipschitz-1 acotadas no coincide con el espacio C^1, y para el primero muchas veces se utiliza la notación $C^{0,1}$ (o en general $C^{k,\alpha}$, para $0 \leq \alpha \leq 1$, que denota al espacio de funciones derivables hasta orden k, cuyas derivadas k-ésimas son funciones Lipschitz-α). Como no trabajaremos con funciones derivables (al menos en este sentido fuerte), C^α siempre se referirá a funciones Lipschitz-α y acotadas, aún cuando $\alpha \in \mathbb{N}_0$.

y lo equipamos con la norma

$$\|f\|_{C^\alpha} = \|f\|_\infty + [f]_\alpha.$$

Estos espacios satisfacen $C^\alpha \hookrightarrow C^\beta$ si $\alpha > \beta$. La notación $A \hookrightarrow B$, que se lee A **está continuamente contenido en** B ó A **está inmerso en** B, se referirá a lo largo de este trabajo a que $A \subset B$ y que la inclusión $i : A \to B$ dada por $i(a) = a$ para $a \in A$ es continua.

También consideramos el espacio C_c^α de funciones Lipschitz-α de soporte compacto. Aquí $[\cdot]_\beta$ es una norma (si X no es acotado), más aún, si $K = supp(f)$, $x \in K$, $y \in \partial K$,

$$|f(x)| = |f(x) - f(y)| \leq [f]_\alpha d(x,y)^\alpha \leq diam(K)^\alpha [f]_\alpha.$$

Las funciones Lipschitz-1 (y por lo tanto las Lipschitz-α, con $\alpha \leq 1$) tienen la bondad de poder extenderse de cualquier subespacio a todo el espacio, como muestra el siguiente teorema de McShane, que se puede encontrar en [He]:

Teorema 1.1.1. *Si $A \subset X$ y $f : A \to \mathbb{R}$ es Lipschitz-1, existe $F : X \to \mathbb{R}$ Lipschitz-1 con constante $[f]_1$ tal que $F(x) = f(x)$ para $x \in A$.*

Demostración. Definimos

$$F(x) = \inf\{f(a) + [f]_1 d(x,a) : a \in A\}.$$

Entonces dados $x, y \in X$, para todo $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que

$$F(y) \geq f(a) + [f]_1 d(y,a) - \epsilon$$

y por lo tanto, como para ese a también vale $F(x) \leq f(a) + [f]_1 d(x,a)$, tenemos que

$$F(x) - F(y) \leq [f]_1 (d(x,a) - d(y,a)) + \epsilon \leq [f]_1 d(x,y) + \epsilon$$

y esto vale para todo $\epsilon > 0$, luego haciendo lo mismo para $F(y) - F(x)$,

$$|F(x) - F(y)| \leq [f]_1 d(x,y).$$

Además, claramente vale $F(a) = f(a)$ para $a \in A$. □

Para un resultado de extensión, más restrictivo, que preserva también la norma $\|\cdot\|_\infty$, ver [A].

1.1.2. Espacios de tipo homogéneo

Denotaremos por $\mathcal{B}$ a la sigma álgebra de Borel, esto es $\mathcal{B} \subset P(X)$ es la menor sigma álgebra que contiene a todos los abiertos (y a todos los cerrados). Una medida de Borel $m : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ se dice no trivial si $0 < m(B) < \infty$ para toda bola B.

Una medida m de Borel se dice que **duplica** si existe una constante $A > 0$ tal que para toda bola B se satisface

$$m(2B) \leq Am(B).$$

Un **espacio de tipo homogéneo** es una terna (X, d, m) con (X, d) métrico y m una medida de Borel no trivial duplicante.

Se define la **maximal (no centrada) de Hardy-Littlewood** para una función f localmente integrable como

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{m(B)} \int_B |f| dm$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas a las que pertenece x.

A lo largo del trabajo utilizaremos la expresión $⨍_A f$ para referirnos al promedio $\frac{1}{m(A)} \int_A f$, o alternativamente la expresión f_A.

Llamaremos $L^p = L^p(X, m)$ al espacio de funciones f con norma $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}$ finita, para $1 \leq p < \infty$, y $L^\infty = L^\infty(X, m)$ al espacio de funciones f con norma $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$ finita. Identificamos a las funciones iguales en casi todo punto, y así los espacios L^p resultan de Banach.

Teorema 1.1.2. ***Acotación de la maximal.*** *En un espacio de tipo homogéneo, M satisface*

- ***tipo débil*** $(1, 1)$***:*** $m(\{x : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1$ *para todo* $\lambda > 0$*;*
- ***tipo fuerte*** (p, p)***:***$\|Mf\|_p \leq C\|f\|_p$ *si* $1 < p \leq \infty$*.*

Si m duplica entonces los conjuntos cerrados y acotados son compactos (ver [A]). Una consecuencia de esto es que las funciones continuas son densas en L^1 (de hecho las funciones Lipschitz-1 de soporte compacto son densas en L^p, $1 \leq p < \infty$). Al igual que en el caso euclídeo, con esta propiedad y por el teorema anterior se puede demostrar el siguiente resultado:

Corolario 1.1.3. ***Teorema de Diferenciación de Lebesgue.*** *En un espacio de tipo homogéneo, para toda* $f \in L^1_{loc}$*,*

$$⨍_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dm(y) \to 0$$

cuando $r \to 0$*, para casi todo* x*.*

En espacios de tipo homogéneo se define el espacio de **funciones de oscilación media acotada** BMO como aquellas funciones f para las que

$$\|f\|_{BMO} = \sup_B ⨍_B |f - f_B| dm < \infty,$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas B.

Observar que $\|\cdot\|_{BMO}$ es sólo una seminorma, pues $\|c\|_{BMO} = 0$ para funciones constantes c en casi todo punto. En este espacio se identifican dos funciones f y g cuando $f - g$ es constante en casi todo punto. A su vez, si $f \in L^\infty$, claramente $f \in BMO$, pues para toda bola B se satisface

$$⨍_B |f - f_B| dm \leq ⨍_B ⨍_B |f(x) - f(y)| dm(y) dm(x) \leq 2\|f\|_\infty.$$

Una herramienta esencial para obtener los resultados de la tesis en el contexto métrico es la validez de un lema de cubrimiento de tipo Whitney en este contexto. Debido a que se trata de un lema puramente geométrico, es posible obtenerlo bajo condiciones menos restrictivas, que involucren sólo propiedades de la métrica.

Diremos que X tiene la propiedad de **homogeneidad débil** si existe n tal que para todo $r > 0$, si $F \subset X$ satisface $d(x, y) \geq r/2$ para todo par $x, y \in F$ y $x_0 \in X$, entonces $\#(F \cap B(x_0, r)) \leq n$. Se puede ver fácilmente que todo espacio de tipo homogéneo cumple esta propiedad.

El siguiente lema está enunciado en la forma en que será utilizado, para una versión más general ver [A][2].

Lema 1.1.4. ***Cubrimiento tipo Whitney + partición de la unidad asociada.*** *X métrico con homogeneidad débil. $F \subset X$ cerrado, $\Omega = \{x \in X : 0 < d(x, F) < 1\}$. Existe una colección de bolas $B_i = B(x_i, r_i)$ que satisfacen*

- *las bolas $\{B_i\}$ son disjuntas 2 a 2;*
- *las bolas $\{3B_i\}$ cubren Ω;*
- *$6B_i \subset \Omega$ para todo i;*
- *$6r_i \leq d(x, F) \leq 18r_i$ para todo $x \in 6B_i$, para todo i;*
- *para todo i existe $t_i \in F$ con $d(x_i, t_i) < 18r_i$.*

Asociada a la colección existe una familia de funciones reales $(\varphi_i)_i$ con

- *$3B_i \subset supp\varphi_i \subset 6B_i$;*

[2] La adaptación consiste en tomar $\Omega \cup F$ como espacio métrico y Ω como abierto, luego $\partial\Omega = F$. En [A] se requiere Ω acotado, pero basta tomar los radios de las bolas acotados.

- $0 \leq \varphi_i \leq 1$;
- $\sum_i \varphi_i = \chi_\Omega$;
- φ_i *es Lipschitz-1 de constante* $\leq \frac{C}{r_i}$.

Lema 1.1.5. ***Solapamiento acotado.*** *Sea* (X, d) *un espacio métrico con homogeneidad débil y sean* $1 \leq a < b$. *Sea* $\{B_i\}$ *una colección de bolas disjuntas y sean* $\kappa > 1$, $r > 0$. *Entonces existe* $C(\kappa, a, b)$ *(pero que no depende del radio ni de la colección) tal que*

$$\sum_{ar \leq r_i \leq br} \chi_{\kappa B_i} \leq C.$$

Observación 1.1.6. Para el caso de las bolas $\{B_i\}$ del cubrimiento de Whitney, el lema anterior junto con las propiedades de $\{B_i\}$ permiten concluir que existe $C > 0$ dependiendo de κ tal que

$$\sum_i \chi_{\kappa B_i} \leq C.$$

1.1.3. Espacios Ahlfors N-regulares

Para una gran parte del desarrollo de este trabajo, se requerirán hipótesis adicionales sobre el espacio de tipo homogéneo.

Dado un espacio métrico de medida (X, d, m), decimos que es **Ahlfors N-regular** si existe una constante $C_N \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{C_N} r^N \leq m(B) \leq C_N r^N$$

para toda bola de radio r, con $0 < r < 2diam(X)$ (donde $diam(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y)$).

Como es usual en el Análisis Armónico, para la existencia de constantes c_1, c_2 tales que $c_1 b \leq a \leq c_2 a$ usaremos la notación $a \sim b$ (con c_1, c_2 independientes de a, b). De forma similar definimos $\lesssim$ y $\gtrsim$ en los casos que se tenga sólo una desigualdad. De esta forma la condición de Ahlfors se puede escribir como $m(B) \sim r^N$.

En particular los espacios Ahlfors regulares son de tipo homogéneo.

Una propiedad esencial que poseen estos espacios, y que usaremos frecuentemente, refiere a la integrabilidad de la función distancia:

Teorema 1.1.7. *Sea* X *Ahlfors* N*-regular, y sean* $x \in X, r > 0$. *Entonces tenemos que*

- $\int_{B(x,r)} d(x, y)^s dm(y) < \infty$ *si y sólo si* $-N < s < \infty$. *En este caso*

$$\int_{B(x,r)} d(x, y)^s dm(y) \sim r^{s+N}$$

- $\int_{X\setminus B(x,r)} d(x,y)^s dm(y) < \infty$ *si y sólo si* $-\infty < s < -N$. *En este caso*

$$\int_{X\setminus B(x,r)} d(x,y)^s dm(y) \sim r^{s+N}.$$

1.1.4. Algunos ejemplos ilustrativos

$\mathbb{R}^n$ es el ejemplo básico de espacio Ahlfors n-regular. Espacios fractales como el conjunto de Cantor o el triángulo de Sierpiński son ejemplos con orden de regularidad fraccionario. La extensión del triángulo de Sierpiński mencionada en la introducción del capítulo es un ejemplo de espacio Ahlfors N-regular con $N = \frac{\log 3}{\log 2}$ y con medida infinita.

Otro ejemplo interesante es $X = \mathbb{R}^2$ con la métrica parabólica

$$d((x,y),(x',y')) = \text{máx}\{|x-x'|, |y-y'|^{1/2}\},$$

de modo que la dimensión de Hausdorff de X es 3 y las curvas suaves no horizontales tienen dimensión 2. Con esta métrica, la medida de Hausdorff $m = \mathcal{H}^3$ satisface

$$m(B_d(x,r)) \sim r^3.$$

Si tomamos un espacio de tipo homogéneo (F, d, μ) y otro espacio (Y, δ, ν) Ahlfors γ-regular, entonces el espacio producto

$$X = F \times Y, \quad d_{prod}((x,y),(x',y')) = \text{máx}(d(x,x'), \delta(y,y')),$$

$$m(B_{d_{prod}}((x,y),r)) = \mu(B_d(x,r))\nu(B_\delta(y,r)),$$

resulta también duplicante, y además si identificamos F con $F \times \{y_0\}$ para algún $y_0 \in Y$, y consideramos μ como una medida soportada en $F \times \{y_0\}$, tenemos que se satisface

$$\frac{m(B_{d_{prod}}((x,y),r))}{\mu(B_{d_{prod}}((x,y),r))} \sim r^\gamma.$$

1.2. Aproximaciones a la identidad

En $\mathbb{R}^n$, la manera más usual de construir aproximaciones a la identidad es a partir de una función $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que si $\Phi(x) = \phi(|x|)$ para $x \in \mathbb{R}^n$, ésta satisface $\int \Phi = 1$. En este caso se definen para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$

$$\Phi_t(x) = \frac{1}{t^n}\phi\left(\frac{|x|}{t}\right)$$

y las aproximaciones a la identidad se definen como

$$S_t f(x) = f * \Phi_t(x) = \int f(y) \frac{1}{t^n} \phi\left(\frac{|x-y|}{t}\right) dy$$

Una propiedad esencial para obtener resultados del tipo $S_t f \to f$ es que

$$S_t 1(x) = \int \frac{1}{t^n} \phi\left(\frac{|x-y|}{t}\right) dy = 1.$$

En $\mathbb{R}^n$ esta construcción involucra la noción de dimensión, y la igualdad se basa en la invariancia por traslaciones y el comportamiento por dilataciones de la medida; esto último requiere el hecho que

$$m(B(x,r)) = \omega_n r^n.$$

Esto induce a pensar que se podría esperar una construcción de aproximaciones a la identidad bajo la condición de que el espacio sea Ahlfors N-regular. De hecho, esto es así y en lo que sigue presentamos una versión continua del resultado dado en [HS], tal como figura por ejemplo en [GSV].

Sea (X, d, m) un espacio métrico de medida Ahlfors N-regular, con $m(X) = \infty$. Dada una $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ no negativa decreciente y C^∞, $h \equiv 1$ en $[0, 1/2]$ y $h \equiv 0$ en $[2, \infty)$, para $t > 0$ y $f \in L^1_{loc}$ definimos:

- $T_t f(x) = \frac{1}{t^N} \int_X h\left(\frac{d(x,y)}{t}\right) f(y) dm(y)$;
- $M_t f(x) = \varphi(x,t) f(x)$, con $\varphi(x,t) = \frac{1}{T_t 1(x)}$;
- $V_t f(x) = \psi(x,t) f(x)$, con $\psi(x,t) = \frac{1}{T_t\left(\frac{1}{T_t 1}\right)(x)}$;
- $S_t f(x) = M_t T_t V_t T_t M_t f(x) = \int_X s(x,y,t) f(y) dm(y)$, con

$$s(x,y,t) = \frac{\varphi(x,t)\varphi(y,t)}{t^{2N}} \int_X h\left(\frac{d(x,z)}{t}\right) h\left(\frac{d(y,z)}{t}\right) \psi(z,t) dm(z).$$

Diremos que $(S_t)_{t>0}$ es una **aproximación a la identidad** con núcleo s.

Proposición 1.2.1. *Con la notación anterior, se satisfacen:*

1. $\varphi \sim 1$, $\psi \sim 1$;
2. $\varphi(\cdot, t)$ *es Lipschitz-1 con constante* $\lesssim 1/t$;
3. $S_t 1 \equiv 1$ *para todo* $t > 0$;

4. *$s(x,y,t)=s(y,x,t)$ para todo $x,y\in X$, $t>0$;*

5. *$s(x,y,t)\lesssim 1/t^N$ para todo $x,y\in X$, $t>0$;*

6. *$s(x,y,t)=0$ si $d(x,y)>4t$;*

7. *$s(x,y,t)\gtrsim 1/t^N$ para $d(x,y)<t/4$;*

8. *$s(\cdot,y,t)$ es Lipschitz-1 con constante $\lesssim \frac{1}{t^{N+1}}$.*

Demostración. 1. Como

$$\chi_{B(x,t/2)}(y)\le h\left(\frac{d(x,y)}{t}\right)\le \chi_{B(x,2t)}(y)$$

se tiene que

$$\frac{1}{C_N2^N}\le T_t1(x)\le C_N2^N$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{C_N2^N}\le \frac{1}{T_t1(x)}\le C_N2^N$$

y

$$\frac{1}{C_N^2 2^{2N}}\le \frac{1}{T_t\left(\frac{1}{T_t1(x)}\right)(x)}\le C_N^2 2^{2N}.$$

2. Si $d(x,y)<4t$,

$$|T_t1(x)-T_t1(y)|\le \frac{\|h'\|_\infty}{t^N}\frac{d(x,y)}{t}C_N6^Nt^N\le C\frac{1}{t}d(x,y)$$

y si $d(x,y)\ge 4t$,

$$|T_t1(x)-T_t1(y)|\le \frac{1}{t^N}(C_N2^Nt^N+C_N2^Nt^N)\le C\frac{1}{t}d(x,y);$$

luego como $T_t1(x)\ge c>0$, tenemos que $1/T_t(1)$ también es Lipschitz-1 con constante $\lesssim 1/t$.

3. Inmediato, por construcción.

4. Inmediato.

5. $s(x,y,t)\le \frac{C}{t^{2N}}\int_X h\left(\frac{d(x,z)}{t}\right)dm(z)\le \frac{C}{t^N}$.

6. Si $d(x,y)>4t$, $B(x,2t)\cap B(y,2t)=\emptyset$, y por lo tanto

$$0\le h\left(\frac{d(x,z)}{t}\right)h\left(\frac{d(y,z)}{t}\right)\le \chi_{B(x,2t)}(z)\chi_{B(y,2t)}(z)=0.$$

7. Si $d(x,y) < t/4$, $B(x,t/2) \cap B(y,t/2) \supset B(x,t/4)$, luego
$$h\left(\frac{d(x,z)}{t}\right) h\left(\frac{d(y,z)}{t}\right) \geq \chi_{B(x,t/2)}(z)\chi_{B(y,t/2)}(z) \geq \chi_{B(x,t/4)}(z).$$

8. Tenemos que
$$|s(x,y,t) - s(x',y,t)| \leq \frac{C}{t^{2N}} \int_{B(y,2t)} \left|\varphi(x,t)h\left(\frac{d(x,z)}{t}\right) - \varphi(x',t)h\left(\frac{d(x',z)}{t}\right)\right| dm(z),$$
luego
$$\begin{aligned}&\left|\varphi(x,t)h\left(\frac{d(x,z)}{t}\right) - \varphi(x',t)h\left(\frac{d(x',z)}{t}\right)\right| \leq \\ &\leq \varphi(x,t)\left|h\left(\frac{d(x,z)}{t}\right) - h\left(\frac{d(x',z)}{t}\right)\right| + h\left(\frac{d(x',z)}{t}\right)|\varphi(x,t) - \varphi(x',t)| \\ &\leq C\frac{d(x,x')}{t} + C\frac{d(x,x')}{t},\end{aligned}$$
que es lo que queríamos.

□

Las aproximaciones a la identidad así definidas satisfacen propiedades de acotación y convergencia similares a las del contexto euclídeo.

Lema 1.2.2. *Se satisfacen:*

1. $S_t : L^p \to L^p$ *con constante independiente de* $t > 0$*;*
2. $|S_t f(x) - f(x)| \leq C \fint_{B(x,4t)} |f(x) - f(y)| dm(y)$*;*
3. $S_t f \to f$ *cuando* $t \to 0$ *en casi todo punto, en* L^p *para* $p < \infty$ *y uniformemente si* f *es uniformemente continua;*
4. $S_t f \rightrightarrows 0$ *cuando* $t \to \infty$ *si* $f \in L^1$.

En diversos problemas del Análisis, surge la necesidad de considerar núcleos que resulten de derivar aproximaciones a la identidad respecto del parámetro t. Estos nuevos núcleos mantendrán muchas de las propiedades de las aproximaciones a la identidad, pero en lugar de integrar 1 su integral resultará 0.

En lo que sigue consideraremos este tipo de núcleos. Definimos
$$q(x,y,t) = -t\frac{d}{dt}s(x,y,t), \quad Q_t f(x) = \int_X q(x,y,t)f(y)dm(y),$$
y recordamos que
$$S_t f(x) = \int_X s(x,y,t)f(y)dm(y),$$

con lo que podemos derivar bajo la integral para obtener

$$\frac{d}{dt}S_t f(x) = -\frac{1}{t}Q_t f(x).$$

De esta manera se pueden transferir las propiedades de tamaño y suavidad de S_t a Q_t:

Lema 1.2.3. *Se satisfacen:*

1. $q(x,y,t) = q(y,x,t)$ *para todo* $x, y \in X$, $t > 0$;
2. $|q(x,y,t)| \lesssim 1/t^N$ *para todo* $x, y \in X$, $t > 0$;
3. $q(x,y,t) = 0$ *si* $d(x,y) > 4t$;
4. $q(\cdot, y, t)$ *es Lipschitz-1 con constante* $\lesssim 1/t^{N+1}$;
5. $Q_t 1 \equiv 0$ *para todo* $t > 0$.
6. $Q_t : L^p \to L^p$, *con constante independiente de* $t > 0$.

La propiedad 5 del lema anterior marca una diferencia esencial entre Q_t y S_t. Así, la familia $(Q_t)_{t>0}$ no satisface propiededes de aproximación como en el lema 1.2.2. Sin embargo posee propiedades de "descomposición" del operador identidad de tipo Calderón que nos serán de gran utilidad.

Proposición 1.2.4. ***Fórmulas de reproducción de Calderón:***

1. $\int_0^\infty Q_t f \frac{dt}{t} = f$ *uniformemente si* f *es continua de soporte compacto, y en* L^p *si* $1 < p < \infty$;
2. $\int_0^\infty \int_0^\infty Q_t Q_s f \frac{dt}{t}\frac{ds}{s} = f$ *uniformemente si* f *es continua de soporte compacto;*
3. $f = \int_0^\infty \tilde{Q}_s Q_s f \frac{ds}{s}$ *para* $\tilde{Q}_s g = \int_X \tilde{q}(x,y,t) g(y) dm(y)$ *satisfaciendo*
   - $|\tilde{q}(x,y,t)| \leq C \frac{t}{(t+d(x,y))^{N+1}}$;
   - $\int_X \tilde{q}(x,y,t) dm(y) = \int_X \tilde{q}(z,x,t) dm(z) = 0$ *para todo* x *y todo* $t > 0$;
   - *si* $d(x,x') < c_0(t + d(x,y))$, *entonces*

$$|\tilde{q}(x,y,t) - \tilde{q}(x',y,t)| \leq C \frac{t d(x,x')}{(t + d(x,y))^{N+2}}.$$

Como referencias en espacios métricos mencionamos [HS], [GSV] y [Hz].

1.3. Operadores de Calderón-Zygmund y el teorema $T1$

Para un recuento más detallado de operadores de Calderón-Zygmund en espacios de tipo homogéneo, ver por ejemplo [DH] o [CW] para espacios normales. Utilizamos la notación de [Ga] para espacios métricos con una medida N-dimensional no-duplicante: $m(B(x,r)) \leq C_N r^N$, pero trabajamos siempre en espacios Ahlfors N-regulares.

Nuevamente requerimos que $m(X) = \infty$.

Decimos que una función continua $K : X \times X \backslash \Delta \to \mathbb{R}$ (donde $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$) es un **núcleo estándar** si existen constantes $0 < \eta \leq 1$, $C > 0$ tales que

- $|K(x,y)| \leq Cd(x,y)^{-N}$;
- para $x \neq y$, $d(x,x') \leq cd(x,y)$ (con $c < 1$) vale
$$|K(x,y) - K(x',y)| \leq Cd(x,x')^{\eta} d(x,y)^{-(N+\eta)};$$
- para $x \neq y$, $d(y,y') \leq cd(x,y)$ (con $c < 1$) vale
$$|K(x,y) - K(x,y')| \leq Cd(y,y')^{\eta} d(x,y)^{-(N+\eta)}.$$

Un operador lineal y continuo $T : C_c^\gamma \to (C_c^\gamma)'$ es un **operador integral singular** si existe un núcleo estándar K tal que

$$\langle Tf, g\rangle = \iint K(x,y) f(y) g(x) dm(y) dm(x),$$

para $f, g \in C_c^\gamma$ con soportes disjuntos. Un operador integral singular acotado en L^2 se llama **Operador de Calderón-Zygmund** (CZO).

Todo CZO es acotado de L^p en L^p para $1 < p < \infty$, de tipo débil $(1,1)$, y además es acotado de L^∞ en BMO (recordar la definición en la sección 1.1.2).

Como una caracterización de los CZO tenemos el **teorema** $T1$. Decimos que un operador es **débilmente acotado** si

$$|\langle Tf, g\rangle| \leq Cm(B)^{1+2\gamma/N} [f]_\gamma [g]_\gamma,$$

para $f, g \in C^\gamma(B)$, para toda bola B.

Teorema 1.3.1. ***(T1)*** *Sea T un operador integral singular. Entonces T es un CZO si y sólo si $T1, T^*1 \in BMO$ y T es débilmente acotado.*

Para una demostración de este teorema ver por ejemplo [DH] o [DJS].

1.4. Métodos de Interpolación en espacios de Banach

Esta sección se basa en definiciones y resultados de [BS].

Dados dos espacios de Banach X, Y contenidos en el mismo espacio vectorial topológico, se definen en $X + Y$ y $X \cap Y$ las normas

$$\|f\|_{X+Y} = \operatorname*{ínf}_{f=g+h} \|g\|_X + \|h\|_Y,$$

$$\|f\|_{X\cap Y} = \text{máx}(\|f\|_X, \|f\|_Y)$$

respectivamente. Los **funcionales** K **y** J de Peetre para esos espacios X, Y se definen como

$$Kf(t) = \operatorname*{ínf}_{f=g+h} \|g\|_X + t\|h\|_Y, \quad f \in X + Y;$$

$$Jf(t) = \text{máx}(\|f\|_X, t\|f\|_Y), \quad f \in X \cap Y.$$

Ahora, para $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$, se define el **espacio interpolado** $(X, Y)_{\theta,q}$ (a partir del funcional K) como el espacio de todas las $f \in X + Y$ que tienen la siguiente norma finita:

$$\|f\|_{\theta,q,K} = \|t^{-\theta} Kf(t)\|_{L^q((0,\infty),\frac{dt}{t})}.$$

Este espacio satisface

$$X \cap Y \hookrightarrow (X, Y)_{\theta,q} \hookrightarrow X + Y,$$

y además si tenemos los pares X, Y y X', Y' como antes, y T es un operador lineal y acotado de X en X' y de Y en Y', entonces se satisface

$$T : (X, Y)_{\theta,q} \to (X', Y')_{\theta,q}$$

con

$$\|Tf\|_{\theta,q,K} \leq \|T\|^{1-\theta}_{X\to X'} \|T\|^{\theta}_{Y\to Y'} \|f\|_{\theta,q,K}.$$

Por otra parte, se puede definir el **espacio interpolado** $(X, Y)_{\theta,q,J}$, mediante el funcional J, como aquellas funciones $f \in X + Y$ que se pueden obtener a partir de una integral de Bochner

$$f = \int_0^\infty A_s f \frac{ds}{s},$$

con $A_s f \in X \cap Y$ para todo s, y que poseen la siguiente norma finita:

$$\|f\|_{\theta,q,J} = \operatorname*{ínf}_{A_s} \|s^{-\theta} J(A_s f)(s)\|_{L^q((0,\infty),\frac{ds}{s})},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las descomposiciones de f.

Se tiene el teorema de equivalencias (ver [BS]):

Teorema 1.4.1. *Para toda $f \in X+Y$ se verifica que $\|f\|_{\theta,q,K} \sim \|f\|_{\theta,q,J}$, y en particular*

$$(X,Y)_{\theta,q,J} = (X,Y)_{\theta,q}$$

con normas equivalentes.

Capítulo 2

Espacios de Besov y Sobolev

Es sabido que el módulo de continuidad en L^p de una función en un espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ tiende a cero cuando el incremento tiende a cero. La clasificación de las funciones de L^p por la velocidad de su convergencia a cero parece una "taxonomía" natural y es válido preguntarse por, o investigar las, funciones tales que esa convergencia asume una forma particular. En los años 60, Oleg Besov en la Unión Soviética y Mitch Taibleson en Estados Unidos estudian el comportamiento de las extensiones armónicas a $\mathbb{R}^{n+1}_+$ de funciones que hoy llamamos de Besov en $\mathbb{R}^n$. Logran caracterizar el carácter Besov de una función f en $\mathbb{R}^n$ a través de las propiedades de $P_y * f$, donde P_y es el núcleo de Poisson en $\mathbb{R}^n$. Notablemente, mucho después, las teorías de wavelets vienen a reestablecer los mismos resultados en un contexto del comportamiento de los coeficientes de wavelets ponderados por potenciales de las escalas.

Los espacios de Besov muestran propiedades de robustez, que superan a las de los espacios de Sobolev, en la medición de velocidades de convergencia de algoritmos no lineales (greedy) de aproximación en la teoría de wavelets. Además, son espacios de trazas de espacios de Sobolev en dimensiones superiores y son espacios de interpolación entre espacios de Sobolev.

Otra vez, como suele ocurrir en los problemas de transplante de teorías de análisis en el contexto de espacios de tipo homogéneo, la ausencia de transformada de Fourier, de traslaciones, de funciones armónicas, de wavelets suaves[1], parecen poner en riesgo la posibilidad de capturar la esencia métrica de los espacios de Besov. Sin embargo, como mostramos en la siguiente sección, el módulo de continuidad en $L^p(\mathbb{R}^n)$ puede formularse de una manera que olvida la estructura de espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. En [HS] había ya otra definición de espacios de Besov en términos de las frames dadas por diferencias de aproximaciones a la identidad en escalas consecutivas, en espacios normales, que mimetiza la caracterización con wavelets. Después de los trabajos de [KS] y [GKS] en relación con la definición abstracta de espacios de Sobolev, la alternativa de la obtención de espacios de Besov como interpolados entre espacios de Sobolev también se plantea.

[1]Recientemente en [AH] se definen cierto tipo de wavelets 'suaves', pero aún no han sido estudiadas en profundidad.

Para precisar la definición más sencilla de espacios de Besov, en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ se define el módulo de continuidad de una función f por

$$\omega_p f(t) = \sup_{|h|<t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

El espacio de Besov de índices $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ como el espacio de funciones con la siguiente norma finita:

$$\|f\|_{B^\alpha_{p,q}} = \|f\|_p + \left(\int_0^\infty t^{-\alpha q} \omega_p f(t)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

(con las modificaciones correspondientes para el caso $p = \infty$ ó $q = \infty$).

Para ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ llamados d-sets, la definición es similar. Un cerrado no vacío $F \subset \mathbb{R}^n$ se dice un d-set si existe una medida μ soportada en F para la que

$$\mu(B) \sim r^d$$

para toda bola centrada en F y de radio $r \leq diam(F)$.

En un d-set [JW] definen que una función f está en el espacio de Besov $B^\alpha_{p,q}(F)$ si existen una sucesión (f_k) en $L^p(\mu)$ y una sucesión (a_k) en l^q con

- $\|f - f_k\|_{p,\mu} \leq 2^{-k\alpha} a_k$,
- $\left(\int_F \fint_{B(s,2^{-k})} |f_k(s) - f_k(t)|^p d\mu(t) d\mu(s) \right)^{1/p} \leq 2^{-k\alpha} a_k$,

la norma de f será $\inf \|(a_k)\|_{l^q}$, donde el ínfimo se toma sobre todas las sucesiones (a_k).

Con estas definiciones, los espacios de Besov en $\mathbb{R}^n$ verifican los siguientes resultados:

- **(Interpolación de espacios de Sobolev)** $(L^p(\mathbb{R}^n), W^{1,p}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = B^\theta_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, donde $W^{1,p}$ es un espacio de Sobolev (ver por ejemplo [BS]);
- **(Interpolación de espacios Potenciales)** $\left(\mathcal{L}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n), \mathcal{L}^{\beta,p}(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,q} = B^\gamma_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, donde $\gamma = \alpha + \theta(\beta - \alpha)$, y $\mathcal{L}^{\alpha,p}$ y $\mathcal{L}^{\beta,p}$ son espacios potenciales (ver [P]);
- **(Trazas de espacios de Besov)** $B^\alpha_{p,q}(\mathbb{R}^n)|_F = B^{\alpha - \frac{n-d}{p}}_{p,q}(F)$ para F un d-set (ver [JW]).

Para espacios métricos, hay una forma de redefinir el módulo de continuidad prescindiendo de las traslaciones, de manera tal que estas definiciones coincidan. Con esta definición, en [GKS] los autores prueban un teorema de interpolación como el recién mencionado, para cierta clase de espacios de Sobolev. Más adelante en esta tesis retomaremos estos problemas, y probaremos un resultado de interpolación entre espacios de tipo potencial (en el Capítulo 5) y un resultado de trazas de espacios de Besov (en el Capítulo 6).

En la primera sección de este Capítulo, probaremos la equivalencia del módulo de continuidad clásico con el presentado en [GKS], para definir con éste espacios de Besov en el contexto métrico y probar algunas propiedades básicas. Adicionalmente enunciaremos el resultado de interpolación entre L^p y espacios de Sobolev de tipo Korevaar-Schoen presentado en [GKS], y probaremos un resultado de inmersión de un espacio interpolado entre espacios de Besov, más débil que lo anterior pero válido en un contexto más general, que nos será útil más adelante.

En la segunda sección, presentaremos un tipo de espacios de Sobolev, estrechamente relacionados con los espacios de Besov. Daremos un pantallazo a estos espacios de Sobolev definidos por Hajłasz en [H1]. Como se describe en [He], si f es una función suave definida en una bola B (o en todo $\mathbb{R}^n$), vale la desigualdad

$$|f(x) - f(y)| \leq C_n(\mathcal{I}_1(|\nabla f|)(x) + \mathcal{I}_1(|\nabla f|)(y))$$

para $x, y \in B$, donde $\mathcal{I}_1$ es el potencial de Riesz $(-\Delta)^{-1/2}$ (que del lado de Fourier corresponde al multiplicador $(2\pi|\xi|)^{-1}$). Esta desigualdad se puede ajustar integrando $|\nabla f|$ contra el núcleo de Riesz sólo en una bola de tamaño comparable a $|x - y|$, y se puede ver que $\mathcal{I}_1(|\nabla f|\chi_B)(x) \leq C_n|x - y|M(|\nabla f|)(x)$ y lo mismo para y, obteniéndose la desigualdad

$$|f(x) - f(y)| \leq C_n|x - y| \left(M(|\nabla f|)(x) + M(|\nabla f|)(y)\right)$$

para $x, y \in B$. Para $p > 1$ si f está en el espacio de Sobolev $W^{1,p}(B)$, tendremos que f satisface

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y| \left(g(x) + g(y)\right)$$

para una $g \geq 0$ en L^p.

De hecho se puede ver que si B es una bola o todo $\mathbb{R}^n$ y $1 < p < \infty$, $f \in W^{1,p}(B)$ si y sólo si $f \in L^p$ y existe $g \in L^p$ satisfaciendo la desigualdad anterior para casi todo par de puntos $x, y \in B$. Esta caracterización es la adaptada por Hajłasz al contexto métrico, y es la que describiremos en este capítulo.

2.1. Espacios de Besov

En esta sección daremos una definición de espacios de Besov en espacios métricos de medida que generaliza los casos mencionados en la introducción, a través de la definición de un *módulo de continuidad* (ver, por ejemplo, [GKS]). Una definición basada en diferencias de aproximaciones a la identidad puede encontrarse en [HS] para espacios normales. Para la equivalencia entre ambas definiciones en el caso de medida duplicante y reverse-doubling, ver [MY].

Para definir un módulo de continuidad E_p con el cual introducir las funciones de Besov en espacios métricos, veamos primero en $\mathbb{R}^n$ una forma equivalente al módulo de continuidad ω_p. Antes de ello, un lema:

Lema 2.1.1. *Existe C_n tal que para toda $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ subaditiva se tiene que*

$$\varphi(h) \leq C_n \fint_B \varphi$$

para toda $h \in B$ y toda bola $B = B(0, r)$.

Demostración. Sea $B = B(0, r)$ y sea $h \in B$, entonces por subaditividad

$$\begin{aligned}\varphi(h)|B| = \int_B \varphi(h)ds \leq \int_B \varphi(h-s) + \varphi(s)ds = \int_{B(h,r)} \varphi(s)ds + \int_B \varphi \\ \leq 2 \int_{2B} \varphi(s)ds \leq 4 \int_{2B} \varphi(s/2)ds = 2^{n+2} \int_B \varphi,\end{aligned}$$

pues

$$\int_{B(0,2r)} \varphi(s/2)ds = 2^n \int_{B(0,r)} \varphi.$$

□

Sea ahora $h \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función. Definimos $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$, luego el módulo de continuidad $\omega_p f$ tomará la forma

$$\omega_p f(t) = \sup_{|h|<t} \|\Delta_h f\|_p$$

y tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.1.2. *En $\mathbb{R}^n$ se verifica que para todo $1 \leq p < \infty$, $t > 0$ y toda $f \in L^p$,*

$$\left(\fint_{B(0,t)} \|\Delta_h f\|_p^p dh \right)^{1/p} \sim \omega_p f(t),$$

con constantes independientes de t.

Demostración. Es trivial que

$$\fint_{B(0,t)} \|\Delta_h f\|_p dh \leq \left(\fint_{B(0,t)} \|\Delta_h f\|_p^p dh \right)^{1/p} \leq \sup_{|h|<t} \|\Delta_h f\|_p,$$

y como $\varphi(h) = \|\Delta_h f\|_p$ es subaditiva y no negativa, por el lema anterior se tiene que, para $|h| < t$,

$$\|\Delta_h f\|_p \leq C_n \fint_{B(0,t)} \|\Delta_u f\|_p du,$$

con C_n independiente de f y t, y la equivalencia. □

Con esto, en [GKS] se ve que podemos ahora dar vuelta el orden de integración:

$$\begin{aligned}\fint_{B(0,t)} \|\Delta_h f\|_p^p dh &= \fint_{B(0,t)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h)-f(x)|^p dxdh \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \fint_{B(0,t)} |f(x+h)-f(x)|^p dhdx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \fint_{B(x,t)} |f(y)-f(x)|^p dydx.\end{aligned}$$

Esta observación, junto con el lema anterior, da una expresión equivalente a ω_p en la que no aparecen las traslaciones, y así podemos extender esta noción al caso de un espacio métrico de medida arbitrario.

Definición 2.1.3. Sea (X,d,m) un espacio métrico de medida, definimos para $1 \leq p < \infty$ y f medible su **módulo de continuidad**

$$E_p f(t) = \left(\int_X \fint_{B(x,t)} |f(x)-f(y)|^p dm(y) dm(x) \right)^{1/p}.$$

Definimos para $\alpha \geq 0$ y $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$ la **norma Besov** (no homogénea)

$$\|f\|_{B^\alpha_{p,q}} = \|f\|_p + \|t^{-\alpha} E_p f(t)\|_{L^q((0,\infty),\frac{dt}{t})}$$

y el **espacio de Besov** $B^\alpha_{p,q}(X)$ como el espacio de funciones con $\|f\|_{B^\alpha_{p,q}} < \infty$. Llamamos

$$[f]_{B^\alpha_{p,q}} = \|t^{-\alpha} E_p f(t)\|_{L^q((0,\infty),\frac{dt}{t})}.$$

Observación 2.1.4. Para $q=\infty$, tenemos que $B^0_{p,\infty} = L^p$ (siempre que la medida duplique) y que $B^1_{p,\infty} = \mathcal{KS}^{1,p}$, es el espacio de Sobolev de Korevaar-Schoen (ver [GKS], [KS]).

Observación 2.1.5. Para $p=\infty$, podemos definir E_p haciendo la obvia modificación

$$E_\infty f(t) = \operatorname*{sup\ ess}_{d(x,y)<t} |f(x)-f(y)|,$$

y entonces para $q=\infty$ tendríamos $B^\alpha_{\infty,\infty} = C^\alpha$.

El siguiente resultado proporciona una versión discreta de la seminorma $[f]_{B^\alpha_{p,q}}$, cuya demostración es inmediata.

Proposición 2.1.6. *Si m duplica,*

$$\|t^{-\alpha} E_p f(t)\|_{L^q((0,\infty),\frac{dt}{t})} \sim \left\| \left(2^{l\alpha} E_p f(2^{-l})\right)_{l\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q(\mathbb{Z})}.$$

Observación 2.1.7. Como $E_p f \leq C\|f\|_p$ y $\|t^{-\alpha}\|_{L^q((1,\infty),\frac{dt}{t})} < \infty$, podemos quedarnos sólo con $t \in (0,1)$ (o equivalentemente $l \in \mathbb{N}_0$). Es decir que

$$\|f\|_{B^\alpha_{p,q}} \sim \|f\|_p + \|t^{-\alpha} E_p f(t)\|_{L^q((0,1),\frac{dt}{t})}.$$

Observación 2.1.8. Como $\omega_p f \sim E_p f$, tenemos que para $\mathbb{R}^n$ la definición clásica de espacios de Besov coincide con la definición 2.1.3. Para el caso de d-sets también coincidirá pues μ duplica: si f es una función de Besov como en 2.1.3, la sucesión $f_k = f$ está en $L^p(F,\mu)$ y la sucesión $a_k = 2^{k\alpha}E_p f(2^{-k})$ estará en l^q, y se satisfacen las condiciones de [JW]. Recíprocamente, si $f, (f_k), (a_k)$ satisfacen las condiciones de [JW], entonces $f \in L^p$ y

$$\begin{aligned}2^{k\alpha}E_p f(2^{-k}) &\leq 2^{k\alpha}\left(\int_F \fint_{B(s,2^{-k})} |f(s)-f_k(s)|^p d\mu(t)d\mu(s)\right)^{1/p}\\ &\quad + 2^{k\alpha}E_p f_k(2^{-k}) + 2^{k\alpha}\left(\int_F \fint_{B(s,2^{-k})} |f_k(t)-f(t)|^p d\mu(t)d\mu(s)\right)^{1/p}\\ &\leq 2^{k\alpha}\|f-f_k\|_{p,\mu} + 2^{k\alpha}E_p f_k(2^{-k}) + C2^{k\alpha}\|f-f_k\|_{p,\mu} \leq Ca_k\end{aligned}$$

y por lo tanto está en l^q y ambas normas Besov resultan equivalentes.

El siguiente teorema se encuentra en [GKS], donde se ve otra equivalencia de normas para el caso $p=q$, que da una definición más conocida de espacios de Besov que la que utiliza E_p, que nos será útil más adelante.

Teorema 2.1.9. *Si m duplica, $\alpha > 0$ y $1 \leq p < \infty$, tenemos que*

$$\int_0^\infty t^{-\alpha p}E_p f(t)^p \frac{dt}{t} \sim \iint_{X\times X} d(x,y)^{-\alpha p}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{m(B(x,d(x,y)))}dm(y)dm(x)$$

Demostración. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{-\alpha p}E_p f(t)^p \frac{dt}{t} &= \int_0^\infty t^{-\alpha p} \iint\limits_{d(x,y)<t} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{m(B(x,t))}dm(y)dm(x)\frac{dt}{t}\\ &= \iint\limits_{X\times X} |f(x)-f(y)|^p \int_{d(x,y)}^\infty t^{-\alpha p}\frac{1}{m(B(x,t))}\frac{dt}{t} dm\times m(x,y)\end{aligned}$$

y para tener lo deseado basta entonces ver que

$$\int_{d(x,y)}^\infty \frac{t^{-\alpha p}}{m(B(x,t))}\frac{dt}{t} \sim \frac{d(x,y)^{-\alpha p}}{m(B(x,d(x,y)))}.$$

Esto es inmediato, pues

$$\int_{d(x,y)}^\infty \frac{t^{-\alpha p}}{m(B(x,t))}\frac{dt}{t} \leq \frac{1}{m(B(x,d(x,y)))}\int_{d(x,y)}^\infty t^{-\alpha p}\frac{dt}{t} = \left(\frac{1}{\alpha p}\right)\frac{d(x,y)^{-\alpha p}}{m(B(x,d(x,y)))};$$

y por otro lado

$$\int_{d(x,y)}^\infty \frac{t^{-\alpha p}}{m(B(x,t))}\frac{dt}{t} = \sum_{k=0}^\infty \int_{2^k d(x,y)}^{2^{k+1}d(x,y)} \frac{t^{-\alpha p}}{m(B(x,t))}\frac{dt}{t}$$

$$\geq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k d(x,y)}^{2^{k+1}d(x,y)} \frac{(2^{k+1}d(x,y))^{-\alpha p}}{m(B(x,2^{k+1}d(x,y)))} \frac{dt}{t}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \log 2 \frac{(2^{k+1}d(x,y))^{-\alpha p}}{m(B(x,2^{k+1}d(x,y)))}$$
$$\geq \left(\log 2 \sum_{j=1}^{\infty} (C2^{\alpha p})^{-j} \right) \frac{d(x,y)^{-\alpha p}}{m(B(x,d(x,y)))}.$$

□

Los **espacios de Sobolev de Korevaar-Schoen** (no homogéneos) se definen por

$$KS^{1,p}(X) = \left\{ f \in L^p : \limsup_{\epsilon \to 0^+} \frac{E_p f(\epsilon)}{\epsilon} < \infty \right\}, \|f\|_{KS^{1,p}} = \|f\|_p + \limsup_{\epsilon \to 0^+} \frac{E_p f(\epsilon)}{\epsilon}.$$

$$\mathcal{KS}^{1,p}(X) = \left\{ f \in L^p : \sup_{\epsilon > 0} \frac{E_p f(\epsilon)}{\epsilon} < \infty \right\}, \|f\|_{\mathcal{KS}^{1,p}} = \|f\|_p + \sup_{\epsilon > 0} \frac{E_p f(\epsilon)}{\epsilon}$$

(ver [GKS], [KS]).

Un teorema de interpolación entre espacios L^p y estos espacios de Sobolev es presentado en [GKS]. Lo enunciamos a continuación.

Teorema 2.1.10. *Si m duplica, se tiene que existen constantes c, C tales que para toda $f \in L^p$ y todo $t > 0$ valen las cotas*

$$c(\text{mín}(1,t)\|f\|_p + E_p f(t)) \leq K(f, t, L^p, \mathcal{KS}^{1,p})$$

$$K(f, t, L^p, KS^{1,p}) \leq C(\text{mín}(1,t)\|f\|_p + E_p f(t))$$

(donde K es el funcional de Peetre definido en 1.4).

En consecuencia se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.1.11. *Si m duplica y $KS^{1,p} = \mathcal{KS}^{1,p}$ (con normas equivalentes), entonces resulta que*

$$B^{\alpha}_{p,q} = (L^p, KS^{1,p})_{\alpha,q}.$$

Como corolario de este teorema tenemos que

Corolario 2.1.12. *Si m duplica y $KS^{1,p} = \mathcal{KS}^{1,p}$ (con normas equivalentes), entonces resulta que, para $\gamma = \alpha + \theta(\beta - \alpha)$,*

$$B^{\gamma}_{p,q} = (B^{\alpha}_{p,q_0}, B^{\beta}_{p,q_1})_{\theta,q}.$$

En general en espacios métricos vale $M^{1,p} \hookrightarrow \mathcal{KS}^{1,p} \hookrightarrow KS^{1,p} \hookrightarrow N^{1,p}$, donde $M^{1,p}$ es el espacio de Hajłasz-Sobolev y $N^{1,p}$ el de Newton-Sobolev, y todos estos espacios coinciden (en particular $KS^{1,p} = \mathcal{KS}^{1,p}$) cuando las funciones de Newton-Sobolev satisfacen una desigualdad de tipo Poincaré.

Aún en caso de que no valga la igualdad $KS^{1,p} = \mathcal{KS}^{1,p}$, siempre podemos demostrar el siguiente resultado, basado en [BL].

Proposición 2.1.13. *Para $\alpha \neq \beta > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $0 < \theta < 1$ y $\gamma = (1-\theta)\alpha + \theta\beta$,*

$$(B^{\alpha}_{p,\infty}, B^{\beta}_{p,\infty})_{\theta,q} \hookrightarrow B^{\gamma}_{p,q}.$$

Demostración. Veamos primero que

$$t^{-\gamma} E_p f(t) \leq C t^{-\theta(\beta-\alpha)} K f(t^{\beta-\alpha}).$$

En efecto, sea $A = \{s : t \leq s^{\beta-\alpha} < 2t\}$, luego allí se tiene que

$$t^{-\gamma} E_p f(t) \leq C t^{-\theta(\beta-\alpha)} s^{-\alpha(\beta-\alpha)} E_p f(s^{\beta-\alpha}),$$

y si $f = g + h$, como en A se tiene que $s^{-\alpha(\beta-\alpha)} \sim t^{\beta-\alpha} s^{-\beta(\beta-\alpha)}$,

$$t^{-\gamma} E_p f(t) \leq C t^{-\theta(\beta-\alpha)} \left(s^{-\alpha(\beta-\alpha)} E_p g(s^{\beta-\alpha}) + t^{\beta-\alpha} s^{-\beta(\beta-\alpha)} E_p h(s^{\beta-\alpha}) \right),$$

de donde

$$t^{-\gamma} E_p f(t) \leq C t^{-\theta(\beta-\alpha)} \left([g]_{B^{\alpha}_{p,\infty}} + t^{\beta-\alpha} [h]_{B^{\beta}_{p,\infty}} \right) \leq C t^{-\theta(\beta-\alpha)} \left(\|g\|_{B^{\alpha}_{p,\infty}} + t^{\beta-\alpha} \|h\|_{B^{\beta}_{p,\infty}} \right)$$

y tomando el ínfimo sobre todas las descomposiciones tenemos lo que queríamos.

Ahora, de lo anterior se deduce

$$[f]_{B^{\gamma}_{p,q}} \leq C \|f\|_{(B^{\alpha}_{p,\infty}, B^{\beta}_{p,\infty})_{\theta,q}},$$

y para ver que vale para la norma p, observamos que

$$\min(1,t) \|f\|_p \leq \|g\|_p + t\|h\|_p \leq \|g\|_{B^{\alpha}_{p,\infty}} + t\|h\|_{B^{\beta}_{p,\infty}}$$

y por lo tanto

$$\min(1,t)\|f\|_p \leq K f(t),$$

con lo que, para $1 \leq q < \infty$,

$$\int_0^\infty t^{-\theta q} K f(t)^q \frac{dt}{t} \geq \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} \min(1,t)^q \frac{dt}{t} \right) \|f\|_p^q = \left(\frac{1}{(1-\theta)q} + \frac{1}{\theta q} \right) \|f\|_p^q$$

y concluímos

$$\|f\|_p \leq C \|f\|_{(B^{\alpha}_{p,\infty}, B^{\beta}_{p,\infty})_{\theta,q}}.$$

El caso $q = \infty$ también se deduce de $\min(1,t)\|f\|_p \leq K f(t)$, pues

$$\sup_{t>0} t^{-\theta} K f(t) \geq \sup_{t>0} t^{-\theta} \min(1,t) \|f\|_p = \|f\|_p.$$

$\square$

2.2. Espacios de Hajłasz-Sobolev

Lo presentado en esta sección es una generalización inmediata de los espacios de Hajłasz-Sobolev presentados en [H1].

Sea (X, d, m) un espacio métrico de medida y sea $\beta > 0$. Dada $f : X \to \mathbb{R}$ Borel medible, decimos que $g : X \to [0, \infty]$ Borel medible es un **β-gradiente de Hajłasz** de f si

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)^\beta (g(x) + g(y)) \tag{2.2.1}$$

para $x, y \in X \backslash Z$ con $m(Z) = 0$. Redefiniendo g como ∞ en Z se puede lograr que 2.2.1 valga en todo punto.

Definimos para $1 \leq p \leq \infty$ el **espacio de Hajłasz-Sobolev** $M^{\beta,p}$ como el espacio de funciones $f \in L^p$ con un gradiente de Hajłasz $g \in L^p$. Lo equipamos de la norma

$$\|f\|_{M^{\beta,p}} = \|f\|_p + \inf_g \|g\|_p$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los gradientes de Hajłasz de f.

Observación 2.2.1. Para $\beta = 1$ y $X = B$ una bola de $\mathbb{R}^n$ o todo $\mathbb{R}^n$ con distancia y medida usuales, tenemos que $M^{1,p}(B) = W^{1,p}(B)$ si $1 < p < \infty$. Ver [H1] o [He].

Observación 2.2.2. Si $\beta < 1$, $\delta(x,y) = d(x,y)^\beta$ es también una métrica en X, y el espacio $M^{\beta,p}(X, d, m)$ coincidirá con el espacio $M^{1,p}(X, \delta, m)$ presentado en [H1]. Muchas de las propiedades aquí demostradas serán generalizaciones de las de $M^{1,p}$ debidas a esta relación.

Teorema 2.2.3. *$M^{\beta,p}$ es de Banach.*

Demostración. Es trivial que $\|\cdot\|_{M^{\beta,p}}$ es una norma. Para ver la completitud, sea (f_n) de Cauchy en $M^{\beta,p}$. Sabemos que $f_n \to f$ en L^p para alguna $f \in L^p$, veamos que también esta convergencia es en $M^{\beta,p}$. Pasando por una subsucesión podemos suponer

$$\|f_n - f_{n+1}\|_{\beta,p} < 2^{-n}$$

y $f_n \to f$ ctp. De esta forma, para cada n existe $g_n \in L^p$ con g_n gradiente de Hajłasz de $f_n - f_{n+1}$, y $\|g_n\|_p < 2^{-n}$. Se puede ver que

$$|(f_n - f_{n+k})(x) - (f_n - f_{n+k})(y)| \leq d(x,y)^\beta \left(\sum_{i=n}^{n+k-1} g_i(x) + g_i(y) \right)$$

y por lo tanto haciendo $k \to \infty$ tenemos que para casi todo par x, y vale

$$|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(y)| \leq d(x,y)^\beta \left(\sum_{i=n}^{\infty} g_i(x) + g_i(y) \right)$$

(la suma está bien definida ctp y $f_n \to f$ ctp) y de esta forma $G_n = \sum_n^\infty g_i$ es un gradiente de Hajłasz de $f_n - f$ que satisface $\|G_n\|_p < C2^{-n}$ y

$$\|f_n - f\|_{\beta,p} \leq \|f_n - f\|_p + \|G_n\|_p \to 0$$

y se concluye $f_n \to f$ en $M^{\beta,p}$, y también que $f \in M^{\beta,p}$ (un gradiente de Hajłasz en L^p de f es la suma de G_n y un gradiente en L^p de f_n, para cualquier n). $\square$

Definición 2.2.4. Sea $1 \leq p < \infty$. Decimos que el par (f,g) satisface una **desigualdad de Poincaré** $(1,p)$ de exponente $\beta > 0$ y constante $\lambda > 0$ si $f \in L^1_{loc}$ y para toda bola B vale

$$\fint_B |f - f_B| \leq C(diamB)^\beta \left(\fint_{\lambda B} g^p \right)^{1/p}.$$

Lema 2.2.5. *Si $f \in L^1_{loc}$ y g es un β-gradiente de Hajłasz de f, entonces el par (f,g) satisface Poincaré $(1,1)$ para $\lambda = 1, C = 2$ y exponente β.*

Demostración. Dada una bola B,

$$\fint_B \fint_B |f(x) - f(y)| \geq \fint_B |f - f_B|,$$

por lo que

$$\fint_B |f - f_B| \leq 2diam(B)^\beta \fint_B g.$$

$\square$

El siguiente resultado (como se lo encuentra en [KM2] para $\beta = 1$) muestra que, bajo ciertas hipótesis, la desigualdad de Poincaré caracteriza a los espacios $M^{1,p}$.

Teorema 2.2.6. *Supongamos que m duplica. Entonces si el par (f,g) satisface Poincaré $(1,q)$ para algún q, existe una constante C (independiente de f,g) tal que $C(Mg^q)^{1/q}$ es un β-gradiente de Hajłasz de f.*

Demostración. Sean x, y puntos de Lebesgue de f y sea $d = d(x,y)$. Llamamos para $n \in \mathbb{N}_0$,

$$B_n = B(x, 2^{-n}d), \quad B'_n = B(y, 2^{-n}d).$$

Por el teorema de diferenciación de Lebesgue (ver 1.1.3),

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_{B_n} - f_{B_{n+1}}| \right) + |f_{B_0} - f_{B'_0}| + \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_{B'_n} - f_{B'_{n+1}}| \right) \\ &= I + II + III. \end{aligned}$$

El primer y el tercer miembro se acotan de manera similar. Para I, usando Poincaré se obtiene

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} |f_{B_n} - f_{B_{n+1}}| \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \fint_{B_n} |f - f_{B_n}| dm$$

$$\leq Cd^\beta \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\beta} \left(\fint_{\lambda B_n} g^q \right)^{1/q} \leq Cd^\beta M g^q(x)^{1/q}.$$

Análogamente para III obtenemos

$$III \leq Cd^\beta M g^q(y)^{1/q}.$$

Finalmente, II es similar,

$$II = |f_{B_0} - f_{B_0'}| \leq C \fint_{2B_0} |f - f_{2B_0}| dm \leq Cd^\beta M g^q(x)^{1/q}.$$

□

Luego para el caso $p > 1$, como $(Mg^q)^{1/q} \in L^p$ cuando $g \in L^p$ y $q < p$, tenemos la siguiente caracterización:

Corolario 2.2.7. *Si m duplica y $1 < p < \infty$, dada $f \in L^p$ se tiene que $f \in M^{\beta,p}$ si y sólo si existe $g \in L^p$ tal que el par (f, g) satisface Poincaré $(1, q)$ para $1 \leq q < p$.*

A continuación veremos que, asumiendo $\beta \leq 1$, vale un resultado tipo Lusin para funciones de $M^{\beta,p}$. Esta demostración se encuentra en [H1].

Teorema 2.2.8. *Supongamos que $1 \leq p < \infty$ y $\beta \leq 1$. Dada $f \in M^{\beta,p}$ y $\epsilon > 0$, existe φ Lipschitz-β con $m(\{f \neq \varphi\}) < \epsilon$ y $\|f - \varphi\|_{\beta,p} < \epsilon$.*

Demostración. Fijamos un representante $f : X \to \mathbb{R}$ y g un gradiente de Hajłasz de f tal que 2.2.1 vale en todo punto. Definimos

$$E_\lambda = \{x : |f(x)| \leq \lambda, g(x) \leq \lambda\}.$$

Entonces por Tchebyschev vale $\lambda^p m(X \backslash E_\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$, y además f es Lipschitz-β de constante 2λ en E_λ, y por lo tanto puede extenderse a una función Lipschitz-β de constante 2λ en todo el espacio (ver Capítulo 6 de [He]), sea f_λ esta función. Si definimos $a_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $a_\lambda(t) = sgn(t) \min\{|t|, \lambda\}$, a_λ resulta Lipschitz-1 de constante 1, luego haciendo $h_\lambda = a_\lambda \circ f_\lambda$, h_λ resulta Lipschitz-β de constante 2λ, coincide con f en E_λ y además tiende a f en L^p cuando $\lambda \to \infty$. Consideremos la función

$$g_\lambda = (g + 3\lambda)\chi_{X \backslash E_\lambda},$$

que resulta un gradiente de Hajłasz de $h_\lambda - f$, pertenece a L^p (al menos para λ grande) y converge a 0 en L^p. De esta forma, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar λ grande tal que si definimos $\varphi = h_\lambda$, tenemos que φ es Lipschitz-β, $m(f \neq \varphi) \leq m(X \backslash E_\lambda) < \epsilon$ y $\|f - \varphi\|_{\beta,p} < \epsilon$. □

Corolario 2.2.9. *Si $\beta \leq 1$, las funciones Lipschitz-β son densas en $M^{1,p}$.*

Para finalizar este capítulo, tenemos la siguiente comparación entre espacios de Besov y Sobolev, como se la puede encontrar en [GKS][2]:

[2] En [GKS] este resultado pide la hipótesis adicional de X acotado, sin embargo ésta es innecesaria.

Teorema 2.2.10. *Supongamos que m duplica, $1 \leq p < \infty$.*

1. $B^{\alpha}_{p,p} \hookrightarrow M^{\alpha,p}$;
2. $M^{\alpha,p} \hookrightarrow B^{\alpha-\epsilon}_{p,p}$ *para todo* $0 < \epsilon < \alpha$.

Demostración. 1. Sea $f \in B^{\alpha}_{p,p}$. Debemos ver que existe $g \in L^p$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)^{\alpha}(g(x) + g(y)).$$

Sean entonces $x, y \in X$ y sea $d = d(x,y)$. Por duplicación tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{B(x,d)}| + |f(y) - f_{B(x,d)}| \\ &\leq \fint_{B(x,d)} |f(x) - f(z)| dm(z) + C \fint_{B(y,2d)} |f(y) - f(z)| dm(z) \\ &\leq C d^{\alpha} \left(\frac{1}{d^{\alpha}} \fint_{B(x,d)} |f(x) - f(z)| dm(z) + \frac{1}{(2d)^{\alpha}} \fint_{B(y,2d)} |f(y) - f(z)| dm(z) \right) \end{aligned}$$

y si definimos g por

$$g(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{\alpha}} \fint_{B(x,r)} |f(x) - f(z)| dm(z)$$

entonces basta con ver que $g \in L^p$. Ahora bien, dados $x \in X, r > 0$, tomando un entero k con $2^{k-1} < r \leq 2^k$ resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^{\alpha}} \fint_{B(x,r)} |f(x) - f(z)| dm(z) &\leq C 2^{-k\alpha} \fint_{B(x,r)} |f(x) - f(z)| dm(z) \\ &\leq C \left(2^{-kp\alpha} \fint_{B(x,2^k)} |f(x) - f(z)|^p dm(z) \right)^{1/p} \end{aligned}$$

y entonces

$$\|g\|_p^p \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-kp\alpha} \int_X \fint_{B(x,2^k)} |f(x) - f(z)|^p dm(x) dm(z) \leq C \|f\|^p_{B^{\alpha}_{p,p}}.$$

2. Separamos en dos partes: cerca de la diagonal, usando la duplicación de la medida, tenemos que

$$\begin{aligned} &\iint_{d(x,y)<1} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{(\alpha-\epsilon)p} m(B(x,d(x,y)))} dm(y) dm(x) \leq \\ &\qquad \leq \iint_{d(x,y)<1} d(x,y)^{\epsilon p} \frac{(g(x) + g(y))^p}{m(B(x,d(x,y)))} dm(y) dm(x) \\ &\qquad \leq C \int_X g(x)^p \int_{B(x,1)} \frac{d(x,y)^{\epsilon p}}{m(B(x,d(x,y)))} dm(y) dm(x) \\ &\qquad \leq C \|g\|_p^p, \end{aligned}$$

pues al ser $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{B(x,1)} \frac{d(x,y)^{\epsilon p}}{m(B(x,d(x,y)))} dm(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{-k})\setminus B(x,2^{-(k+1)})} \frac{d(x,y)^{\epsilon p}}{m(B(x,d(x,y)))} dm(y) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{-k})\setminus B(x,2^{-(k+1)})} \frac{2^{-k\epsilon p}}{m(B(x,2^{-(k+1)}))} dm(y) \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\epsilon p} < \infty.\end{aligned}$$

Por otra parte, lejos de la diagonal,

$$\begin{aligned}\iint_{d(x,y)\geq 1} & \frac{|f(x)-f(y)|^p}{d(x,y)^{(\alpha-\epsilon)p} m(B(x,d(x,y)))} dm(y)dm(x) \leq \\ &\leq C \int_X |f(x)|^p \int_{X\setminus B(x,1)} \frac{d(x,y)^{-(\alpha-\epsilon)p}}{m(B(x,d(x,y)))} dm(y)dm(x) \\ &\leq C\|f\|_p^p,\end{aligned}$$

pues al ser $\alpha - \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{X\setminus B(x,1)} \frac{d(x,y)^{-(\alpha-\epsilon)p}}{m(B(x,d(x,y)))} dm(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{k+1})\setminus B(x,2^{k})} \frac{d(x,y)^{-(\alpha-\epsilon)p}}{m(B(x,d(x,y)))} dm(y) \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{k+1})\setminus B(x,2^{k})} \frac{2^{-k(\alpha-\epsilon)p}}{m(B(x,2^{k}))} dm(y) \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(\alpha-\epsilon)p} < \infty.\end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Operadores de tipo Bessel y espacios potenciales

En espacios métricos de Ahlfors la singularidad central local y global (en el caso no acotado) del espacio está dada por el recíproco de la distancia elevado a la dimensión. Así harán falta núcleos con cancelaciones intrínsecas para que alguna extensión de la teoría de Calderón-Zygmund devuelva la esperanza de darle algún sentido a los operadores con esos núcleos. Las potencias de $\frac{1}{d(x,y)}$ menores que la dimensión producen integrales fraccionarias del tipo de las de Riesz, mientras que potencias mayores sólo pueden actuar sobre funciones regulares y de una manera precisamente definida y se pueden ver como derivaciones fraccionarias. En espacios no acotados (o de medida infinita, que es lo mismo en espacios de tipo homogéneo), las desigualdades de Sobolev son inmejorables y no hay modo de que una integral fraccionaria como la de Riesz preserve las clases de Lebesgue con el mismo índice de integrabilidad. La mirada frecuencial de $\mathbb{R}^n$ a través de la transformada de Fourier permite expresar de una manera unificada y compacta la acción esperada de un potencial que para frecuencias chicas luzca como la identidad y para frecuencias grandes como una integral fraccionaria de Riesz de orden α,

$$(1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{-\alpha/2}.$$

Esto da en el lado dual de la variable espacial x un comportamiento adecuado integrable globalmente y localmente singular como la integral fraccionaria de Riesz. Estas propiedades del núcleo lucen fáciles de imitar en espacios métricos, no obstante como pretendemos obtener un operador inversible, la construcción será mucho más cuidadosa y precisa. De algún modo seguirá el paradigma que instala la teoría de wavelets: las escalas son un adecuado sustituto de las fracuencias.

En espacios métricos, los espacios de Sobolev de tipo potencial han sido escasamente estudiados. En este capítulo presentaremos una forma de definir un operador de tipo Bessel en espacios Ahlfors regulares, para definir espacios de tipo potencial, y probaremos distintas propiedades que éstos cumplen, y sus relaciones con otros espacios de regularidad. Repasaremos brevemente la definición en el contexto euclídeo y las propiedades básicas del operador de Bessel, de su núcleo y de los espacios potenciales inducidos.

Los potencies de Riesz y Bessel de orden $\alpha > 0$ en $\mathbb{R}^n$ son los operadores $\mathcal{I}_\alpha = (-\Delta)^{-\alpha/2}$ y $\mathcal{J}_\alpha = (I-\Delta)^{-\alpha/2}$ respectivamente, donde Δ es el Laplaciano. La acción de estos operadores sobre funciones viene dada por la convolución contra ciertos núcleos, que mediante transformada de Fourier corresponden a los siguientes multiplicadores:

$$(\mathcal{I}_\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi|\xi|)^{-\alpha}\hat{f}(\xi) \qquad\qquad (\mathcal{J}_\alpha f)^\wedge(\xi) = (1+4\pi^2|\xi|^2)^{-\alpha/2}\hat{f}(\xi).$$

En el caso de Riesz, dicha convolución toma la forma:

$$\mathcal{I}_\alpha f(x) = c_{\alpha,n}\int \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy,$$

mientras que en el caso de Bessel el núcleo $G_\alpha(x) = ((1+4\pi^2|\xi|^2)^{-\alpha/2})^\vee(x)$ es

$$\begin{aligned} G_\alpha(x) &= \frac{1}{2^n\pi^{n/2}\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int_0^\infty e^{-t}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}t^{-\frac{(n-\alpha)}{2}}\frac{dt}{t} \\ &= |x|^{-(n-\alpha)}\frac{1}{2^\alpha\pi^{n/2}\Gamma(\frac{\alpha}{2})}\int_0^\infty e^{-s}e^{-\frac{|x|^2}{4s}}s^{\frac{n-\alpha}{2}}\frac{ds}{s} \end{aligned}$$

y satisface

1. $G_\alpha \geq 0$;
2. G_α es continua fuera del origen;
3. G_α es radial;
4. $G_\alpha(x) \approx |x|^{-(n-\alpha)}$ para $|x| < 2$;
5. $G_\alpha(x) \approx e^{-|x|/2}$ para $|x| \geq 2$;
6. $|G_\alpha(x) - G_\alpha(y)| \leq C|x-y|(|x|\wedge|y|)^{-(n-\alpha+1)}$;
7. $|G_\alpha(x) - G_\alpha(y)| \leq C|x-y|e^{-c(|x|\wedge|y|)}$ para $|x|, |y| \geq 2$;
8. $\int G_\alpha = 1$.

Observar que el núcleo del potencial de Riesz también satisface las propiedades 1-4 y 6, pero no las demás (de hecho no es un núcleo integrable).

El operador $\mathcal{J}_\alpha$ resulta acotado de L^p en L^p, y si definimos el espacio potencial $\mathcal{L}^{\alpha,p} = \mathcal{J}_\alpha(L^p)$ y lo equipamos con la norma $\|f\|_{\alpha,p} = \|\mathcal{J}_\alpha^{-1}f\|_p$, tenemos que $\mathcal{J}_\alpha$ es un isomorfismo entre L^p y $\mathcal{L}^{\alpha,p}$. Más generalmente, como $\mathcal{J}_\alpha$ aumenta la regularidad, se puede ver (por ejemplo en [S]) que es un isomorfismo entre $\mathcal{L}^{\beta,p}$ y $\mathcal{L}^{\alpha+\beta,p}$, y también entre espacios de Besov $B^\beta_{p,q}$ y $B^{\alpha+\beta}_{p,q}$.

También se tiene que, para $k \in \mathbb{N}$, estos espacios coinciden con los espacios de Sobolev clásicos $\mathcal{L}^{k,p} = W^{k,p}$ (con normas equivalentes).

En este capítulo construiremos un potencial de Bessel en espacios métricos, y trataremos de emular algunas de estas propiedades. En los capítulos 4,5 y 6 se verán otras características de $\mathcal{J}_\alpha$ y $\mathcal{L}^{\alpha,p}$ que valen para nuestras construcciones en el contexto métrico.

3.1. El potencial de Bessel J_α

En esta primera sección definiremos un núcleo $k_\alpha(x,y)$ con el que reemplazaremos al núcleo de convolución $G_\alpha(x-y)$, para definir un potencial de tipo Bessel J_α, que jugará el rol de $\mathcal{J}_\alpha$ en el caso métrico. Se probará que este núcleo posee propiedades similares a las descriptas anteriormente para G_α, y se probarán algunas propiedades básicas de J_α que tienen su equivalente en el caso euclídeo.

Consideremos (X,d,m) un espacio métrico Ahlfors N-regular con $m(X)=\infty$. Podemos construir un espacio potencial de la siguiente manera:

Para $\alpha > 0$ y $(S_t)_{t>0}$ aproximación suave a la identidad como fue presentada en 1.2, consideremos el núcleo

$$k_\alpha(x,y) = \alpha \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^2} s(x,y,t) \frac{dt}{t},$$

definido fuera de la diagonal de $X \times X$.

Observar que

$$\frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^2} \sim \begin{cases} t^\alpha & 0 < t < 1 \\ t^{-\alpha} & t \geq 1 \end{cases}.$$

Lema 3.1.1. *Para $\alpha > 0$, k_α satisface:*

1. $k_\alpha \geq 0$ *y* $k_\alpha \not\equiv 0$;
2. $k_\alpha(x,y) = k_\alpha(y,x)$
3. $k_\alpha(x,y) \lesssim d(x,y)^{-(N-\alpha)}$;
4. $k_\alpha(x,y) \lesssim d(x,y)^{-(N+\alpha)}$ *para* $d(x,y) \geq 4$;
5. $|k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)| \lesssim d(x,y)(d(x,z) \wedge d(y,z))^{-(N+1-\alpha)}$;
6. $|k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)| \lesssim d(x,y)(d(x,z) \wedge d(y,z))^{-(N+1+\alpha)}$ *para* $d(x,z), d(y,z) \geq 4$;
7. $\int_X k_\alpha(x,y)dm(y) = 1 \ \forall x$.

Demostración. 1 y 2 siguen inmediatamente de la definición de k_α.

3.
$$|k_\alpha(x,y)| \leq C \int_{d(x,y)/4}^{\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^2} \frac{1}{t^N} \frac{dt}{t} \leq C \int_{d(x,y)/4}^{\infty} \frac{1}{t^{N-\alpha}} \frac{dt}{t} = C \frac{1}{d(x,y)^{N-\alpha}}.$$

4. Si $d(x,y) \geq 4$, para que $s(x,y,t) > 0$ tiene que ser $4t \geq d(x,y) \geq 4$, luego $t \geq 1$ y allí $1 + t^\alpha \sim t^\alpha$
$$|k_\alpha(x,y)| \leq C \int_{d(x,y)/4}^{\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^2} \frac{1}{t^N} \frac{dt}{t} \leq C \int_{d(x,y)/4}^{\infty} \frac{t^\alpha}{t^{2\alpha}} \frac{1}{t^N} \frac{dt}{t} = C \frac{1}{d(x,y)^{N+\alpha}}.$$

5.
$$\begin{aligned} |k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)| &\leq C \int_{4t\geq d(x,z) \text{ ó } 4t \geq d(y,z)} \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^2} |s(x,z,t) - s(y,z,t)| \frac{dt}{t} \\ &\leq C d(x,y) \int_{(d(x,z)\wedge d(y,z))/4}^{\infty} t^\alpha \frac{1}{t^{N+1}} \frac{dt}{t} \\ &= C d(x,y) (d(x,z) \wedge d(y,z))^{-(N+1-\alpha)}. \end{aligned}$$

6. Si $d(x,z), d(y,z) \geq 4$, $t \geq 1$ donde el integrando es no nulo, luego
$$\begin{aligned} |k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)| &\leq C \int_{(d(x,z)\wedge d(y,z))/4}^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} |s(x,z,t) - s(y,z,t)| \frac{dt}{t} \\ &\leq C d(x,y) \int_{(d(x,z)\wedge d(y,z))/4}^{\infty} \frac{1}{t^{N+1+\alpha}} \frac{dt}{t} \\ &= C d(x,y) (d(x,z) \wedge d(y,z))^{-(N+1+\alpha)}. \end{aligned}$$

7. Como todo es positivo cambiamos el orden de integración (y usamos que $\int s = 1$):
$$\begin{aligned} \int_X k_\alpha(x,y) dm(y) &= \int_X \int_0^\infty \frac{\alpha t^\alpha}{(1+t^\alpha)^2} s(x,y,t) \frac{dt}{t} dm(y) \\ &= \int_0^\infty \frac{\alpha t^\alpha}{(1+t^\alpha)^2} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1+t^{-\alpha}} \right) dt = 1. \end{aligned}$$

□

Con ese núcleo definimos el **potencial de Bessel**
$$J_\alpha g(x) = \int_X g(z) k_\alpha(x,z) dm(z)$$
siempre que la integral sea convergente.

Lema 3.1.2. *J_α es lineal donde esté bien definido. Además, para $g \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, se tiene que $J_\alpha g(x)$ está bien definido para casi todo $x \in X$. Más aún para $1 \leq p \leq \infty$ el operador resulta acotado*

$$J_\alpha : L^p(X) \to L^p(X).$$

Demostración. Surge del hecho que $\int k_\alpha(x,y)dm(y) = \int k_\alpha(x,y)dm(x) = 1$. Si $1 < p < \infty$,

$$|J_\alpha g(x)| \leq \left(\int_X k_\alpha(x,y)|g(y)|^p dm(y) \right)^{1/p} \left(\int_X k_\alpha(x,y) dm(y) \right)^{1/p'}$$

luego

$$\int_X |J_\alpha g(x)|^p dm(x) \leq \int_X \int_X k_\alpha(x,y)|g(y)|^p dm(y) dm(x) \leq \int_X |g|^p dm.$$

Los casos $p = 1$ y $p = \infty$ son más directos. □

Un operador relacionado a J_α es el **operador integral fraccionaria** I_α, que se puede definir para $\alpha > 0$ (ver [GSV]) mediante el núcleo

$$k'(x,y) = \int_0^\infty \alpha t^\alpha s(x,y,t) \frac{dt}{t} \sim \frac{1}{d(x,y)^{N-\alpha}},$$

como

$$I_\alpha f(x) = \int_X f(y) k'(x,y) dm(y)$$

(siempre que esta integral tenga sentido). La relación entre un operador y el otro es la siguiente:

Lema 3.1.3. *Para $\alpha > 0$, $|J_\alpha g(x)| \leq C I_\alpha |g|(x)$ siempre que el término de la izquierda esté bien definido.*

Demostración. Por la propiedad 3 del lema 3.1.1, tenemos que

$$|J_\alpha g(x)| \leq C \int_X k_\alpha(x,y)|g(y)| dm(y) \leq C \int_X \frac{|g(y)|}{d(x,y)^{N-\alpha}} dm(y) \leq C I_\alpha |g|(x).$$

□

3.2. Propiedades de J_α: mejora de regularidad

En esta sección veremos ahora cómo se comporta el operador J_α frente a diferentes tipos de regularidad de funciones. Específicamente veremos que J_α mejora la regularidad en α dentro de las escalas de espacios de Lipschitz, Besov y Sobolev.

Demostraremos primero un lema general que utilizaremos en más de una ocasión:

Lema 3.2.1. *Sean $t > 0$, $\beta > 0$, $x \in X$ y $g \geq 0$ medible. Entonces*

1. $\int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{d(x,y)^{N-\beta}} dm(y) \leq Ct^{\beta} Mg(x)$;

2. $\int_{X \setminus B(x,t)} \frac{g(y)}{d(x,y)^{N+\beta}} dm(y) \leq Ct^{-\beta} Mg(x)$.

Demostración. 1. Abriendo la integral en coronas,

$$\int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{d(x,y)^{N-\beta}} dm(y) \leq \sum_{k\geq 0} C \int_{B(x,2^{-k}t)\setminus B(x,2^{-(k+1)}t)} \frac{g(y)}{(2^{-k}t)^{N-\beta}} dm(y)$$
$$\leq Ct^{\beta} \sum_{k\geq 0} 2^{-k\beta} \fint_{B(x,2^{-k}t)} g \leq Ct^{\beta} Mg(x).$$

2. De manera similar,

$$\int_{X\setminus B(x,t)} \frac{g(y)}{d(x,y)^{N+\beta}} dm(y) \leq \sum_{k\geq 0} C \int_{B(x,2^{k+1}t)\setminus B(x,2^{(k)}t)} \frac{g(y)}{(2^{k}t)^{N+\beta}} dm(y)$$
$$\leq Ct^{-\beta} \sum_{k\geq 0} 2^{-k\beta} \fint_{B(x,2^{k+1}t)} g \leq Ct^{-\beta} Mg(x).$$

□

Como corolario tenemos la siguiente acotación para J_α:

Proposición 3.2.2. *Si $\alpha > 0$, $|J_\alpha g(x)| \leq CMg(x)$ siempre que el término de la izquierda esté bien definido.*

Demostración. Por las propiedades 3 y 4 de 3.1.1, es consecuencia inmediata del lema anterior. □

A continuación veremos cómo J_α mejora la regularidad de β a $\beta + \alpha$ para las escalas Lipschitz, Besov y Hajłasz-Sobolev. Comenzaremos por el caso Lipschitz.

Teorema 3.2.3. *Si $f = J_\alpha g$ y $\alpha + \beta < 1$ para $\alpha, \beta > 0$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq C[g]_\beta d(x,y)^{\alpha+\beta},$$

recordar que $[g]_\beta = \sup_{x\neq y} \frac{|g(x)-g(y)|}{d(x,y)^\beta}$.

Demostración. Como $\int k_\alpha = 1$, tenemos que

$$f(x) - f(y) = \int_X g(z)\left(k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)\right) dm(z)$$

$$= \int_X (g(z) - g(x)) \left(k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)\right) dm(z),$$

luego llamando $d = d(x,y)$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq C \int_{B(x,2d)} \frac{|g(x) - g(z)|}{d(x,z)^{N-\alpha}} dm(z) + C \int_{B(y,3d)} \frac{|g(x) - g(z)|}{d(y,z)^{N-\alpha}} dm(z) \\ &\quad + C \int_{B(x,2d)^c} |g(z) - g(x)| \, |k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)| \, dm(z) \\ &= I + II + III. \end{aligned}$$

Ahora, por definición de $[g]_\beta$ y porque $\alpha, \beta > 0$, tenemos que

$$I \leq C[g]_\beta \int_{B(x,2d)} \frac{d(x,z)^\beta}{d(x,z)^{N-\alpha}} dm(z) \leq C[g]_\beta d^{\alpha+\beta},$$

$$II \leq C[g]_\beta d^\beta \int_{B(y,3d)} \frac{1}{d(y,z)^{N-\alpha}} dm(z) \leq C[g]_\beta d^\beta d^\alpha,$$

y por la condición de tipo Lipschitz de k_α (item 5 de 3.1.1), pues $d(x,z) \sim d(y,z)$ para $z \in B(x,2d)^c$, y porque $\alpha + \beta < 1$, tenemos que

$$III \leq C[g]_\beta d \int_{B(x,2d)^c} d(x,z)^\beta d(x,z)^{-(N+1-\alpha)} dm(z) \leq C[g]_\beta d d^{\alpha+\beta-1}.$$

□

Tenemos entonces que J_α aumenta la regularidad Lipschitz de la siguiente manera:

Corolario 3.2.4. *Si $\alpha, \beta > 0$ y $\alpha + \beta < 1$,*

$$J_\alpha : C^\beta \to C^{\alpha+\beta}.$$

Demostración. Surge del teorema anterior y de que $J_\alpha : L^\infty \to L^\infty$. □

Ahora para la regularidad Besov, necesitamos primero el siguiente lema:

Lema 3.2.5. *Si $q > 0$, para todo $x, y \in X$ vale*

- *si $q(N - \alpha) < N$,*

$$\int_{d(x,z)<2d(x,y)} |k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)|^q dm(z) \leq C d(x,y)^{N-q(N-\alpha)};$$

- *si $N < q(N - \alpha + 1)$,*

$$\int_{d(x,z)\geq 2d(x,y)} |k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)|^q dm(z) \leq C d(x,y)^{N-q(N-\alpha)}.$$

Demostración. Tenemos los dos casos:

- $B = \{z : d(x,z) < 2d(x,y)\}$, entonces $B \subset B(y, 3d(x,y))$ y

$$\begin{aligned}
&\int_B |k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)|^q dm(z) \leq \\
&\qquad \leq C \int_B d(x,z)^{-q(N-\alpha)} dm(z) + C \int_B d(y,z)^{-q(N-\alpha)} dm(z) \\
&\qquad \leq Cd(x,y)^{N-q(N-\alpha)} + C \int_{B(y,3d(x,y))} d(y,z)^{-q(N-\alpha)} dm(z) \\
&\qquad \leq Cd(x,y)^{N-q(N-\alpha)}.
\end{aligned}$$

- $B^c = \{z : d(x,z) \geq 2d(x,y)\}$, aquí $d(x,z) \sim d(y,z)$ y

$$\begin{aligned}
\int_{B^c} |k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)|^q dm(z) &\leq Cd(x,y)^q \int_{B^c} d(x,z)^{-q(N-\alpha+1)} dm(z) \\
&\leq Cd(x,y)^{q+N-q(N-\alpha+1)} \\
&= Cd(x,y)^{N-q(N-\alpha)}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.6. *Si $f = J_\alpha g$, $1 \leq p < \infty$ y $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$,*

$$\iint_{X\times X} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{N+(\alpha+\beta)p}} dm(y)dm(x) \leq C \iint_{X\times X} \frac{|g(x) - g(z)|^p}{d(x,z)^{N+\beta p}} dm(z)dm(x)$$

Demostración. Supongamos $p > 1$, el caso $p = 1$ es similar, con las modificaciones adecuadas para $p' = \infty$. Usando que $\int k_\alpha = 1$, por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
&|f(x) - f(y)|^p \leq \\
&\qquad \leq C \left(\int_{B(x,2d(x,y))} |g(x) - g(z)|^p |k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)| dm(z) \right) \\
&\qquad\qquad \times \left(\int_{B(x,2d(x,y))} |k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)| dm(z) \right)^{p/p'} \\
&\qquad + C \left(\int_{B(x,2d(x,y))^c} |g(x) - g(z)|^p |k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)|^{\theta p} dm(z) \right) \\
&\qquad\qquad \times \left(\int_{B(x,2d(x,y))^c} |k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)|^{(1-\theta)p'} dm(z) \right)^{p/p'}.
\end{aligned}$$

Luego por el lema anterior, si existe $0 \leq \theta \leq 1$ para el que$N < (1-\theta)p'(N - \alpha + 1)$, entonces tendremos que

$$|f(x) - f(y)|^p \leq$$

$$\leq Cd(x,y)^{p\alpha-\alpha}\int_{B(x,2d(x,y))}|g(x)-g(z)|^p|k_\alpha(x,z)-k_\alpha(y,z)|dm(z)$$
$$+Cd(x,y)^{-N+p\alpha+\theta p(N-\alpha)}\int_{B(x,2d(x,y))^c}|g(x)-g(z)|^p|k_\alpha(x,z)-k_\alpha(y,z)|^{\theta p}dm(z).$$

Con esto, para concluir el teorema será suficiente probar que

$$\int_{d(x,z)<2d(x,y)}\frac{|k_\alpha(x,z)-k_\alpha(y,z)|}{d(x,y)^{N+\beta p+\alpha}}dm(y)\leq C\frac{1}{d(x,z)^{N+\beta p}}.$$

y también para el otro sumando:

$$\int_{d(x,z)\geq 2d(x,y)}\frac{|k_\alpha(x,z)-k_\alpha(y,z)|^{\theta p}}{d(x,y)^{2N+\beta p-\theta p(N-\alpha)}}dm(y)\leq C\frac{1}{d(x,z)^{N+\beta p}}.$$

Probemos entonces estas desigualdades:

- Si $d(x,z)<2d(x,y)$, también $d(y,z)<3d(x,y)$ y utilizando acotación para k_α

$$\int_{d(x,z)<2d(x,y)}\frac{|k_\alpha(x,z)-k_\alpha(y,z)|}{d(x,y)^{N+\beta p+\alpha}}dm(y)\leq$$
$$\leq C\int_{d(x,z)<2d(x,y)}\frac{1}{d(x,y)^{N+\beta p+\alpha}}\left(\frac{1}{d(x,z)^{N-\alpha}}+\frac{1}{d(y,z)^{N-\alpha}}\right)dm(y)$$

luego separamos en dos casos:

  - si $d(y,z)<\frac{3}{2}d(x,z)<3d(x,y)$, entonces

$$\int_{d(y,z)<\frac{3}{2}d(x,z)<3d(x,y)}\frac{1}{d(x,y)^{N+\beta p+\alpha}}\left(\frac{1}{d(x,z)^{N-\alpha}}+\frac{1}{d(y,z)^{N-\alpha}}\right)dm(y)\leq$$
$$\leq C\frac{1}{d(x,z)^{N+\beta p+\alpha}}\int_{d(y,z)<\frac{3}{2}d(x,z)}\frac{1}{d(y,z)^{N-\alpha}}dm(y)$$
$$\leq C\frac{1}{d(x,z)^{N+\beta p}};$$

  - si $\frac{3}{2}d(x,z)\leq d(y,z)<3d(x,y)$,

$$\int_{\frac{3}{2}d(x,z)\leq d(y,z)<3d(x,y)}\frac{1}{d(x,y)^{N+\beta p+\alpha}}\left(\frac{1}{d(x,z)^{N-\alpha}}+\frac{1}{d(y,z)^{N-\alpha}}\right)dm(y)\leq$$
$$\leq C\frac{1}{d(x,z)^{N-\alpha}}\int_{d(x,y)>d(x,z)/2}\frac{1}{d(x,y)^{N+\beta p+\alpha}}dm(y)$$
$$\leq C\frac{1}{d(x,z)^{N+\beta p}}.$$

- Finalmente si $d(x,z) \geq 2d(x,y)$, entonces $d(x,z) \sim d(y,z)$ y podemos utilizar la acotación para diferencias de k_α:

$$\begin{aligned}\int_{d(x,z)\geq 2d(x,y)} &\frac{|k_\alpha(x,z)-k_\alpha(y,z)|^{\theta p}}{d(x,y)^{2N+\beta p-\theta p(N-\alpha)}}dm(y) \leq \\ &\leq C\frac{1}{d(x,z)^{\theta p(N-\alpha+1)}}\int_{d(x,z)\geq 2d(x,y)}\frac{d(x,y)^{\theta p}}{d(x,y)^{2N+\beta p-\theta p(N-\alpha)}}dm(y)\\ &\leq C\frac{1}{d(x,z)^{N+\beta p}}\end{aligned}$$

  siempre que $N+\beta p < \theta p(N-\alpha+1)$.

Las dos condiciones sobre θ son equivalentes a

$$N+\beta p < \theta p(N-\alpha+1) < N+(1-\alpha)p,$$

y siempre hay un valor de θ que verifica ambas desigualdades, pues $\beta < 1-\alpha$. □

Corolario 3.2.7. *Si $\alpha, \beta > 0$ y $\alpha+\beta < 1$,*

$$J_\alpha : B^{\beta}_{p,p} \to B^{\alpha+\beta}_{p,p}.$$

Finalmente, tenemos el siguiente resultado de aumento de regularidad de tipo Sobolev, que generaliza en cierto sentido el caso Lipschitz.

Teorema 3.2.8. *Sean f, g que satisfacen*

$$|f(x)-f(y)| \leq d(x,y)^\beta(g(x)+g(y)),$$

con $g \geq 0$, $\beta > 0$, entonces si $\alpha > 0$ y $\alpha+\beta < 1$,

$$|J_\alpha f(x) - J_\alpha f(y)| \leq Cd(x,y)^{\alpha+\beta}(Mg(x)+Mg(y)).$$

Demostración. Nuevamente utilizando que $\int k_\alpha = 1$, y separando la integral como en el caso Lipschitz,

$$\begin{aligned}|J_\alpha f(x)-J_\alpha f(y)| &\leq \int_X |f(x)-f(z)||k_\alpha(x,z)-k_\alpha(y,z)|dm(z)\\ &\leq C\int_{B(x,2d(x,y))} d(x,z)^\beta(g(x)+g(z))\left(\frac{1}{d(x,z)^{N-\alpha}}+\frac{1}{d(y,z)^{N-\alpha}}\right)dm(z)\\ &\quad + C\int_{B(x,2d(x,y))^c} d(x,z)^\beta(g(x)+g(z))\frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N-\alpha+1}}dm(z).\end{aligned}$$

Ahora, para los términos con $g(x)$ se procede como en el caso Lipschitz, para acotar por $Cd(x,y)^{\alpha+\beta}g(x)$, mientras que para los términos con $g(z)$ se utiliza el lema 3.2.1 y se acota por $Cd(x,y)^{\alpha+\beta}Mg(x)$ o $Cd(x,y)^{\alpha+\beta}Mg(y)$. La acotación resulta, término a término:

$$|J_\alpha f(x)-J_\alpha f(y)| \leq Cg(x)d(x,y)^{\alpha+\beta} + Cd(x,y)^{\alpha+\beta}Mg(x)$$

$$
\begin{aligned}
&+ Cd(x,y)^{\beta} g(x) d(x,y)^{\alpha} + Cd(x,y)^{\beta} Mg(y) d(x,y)^{\alpha} \\
&+ Cd(x,y) g(x) \frac{1}{d(x,y)^{1-(\alpha+\beta)}} + Cd(x,y) \frac{1}{d(x,y)^{1-(\alpha+\beta)}} Mg(x) \\
\leq\ & Cd(x,y)^{\alpha+\beta}(Mg(x) + Mg(y)).
\end{aligned}
$$

□

Corolario 3.2.9. *Si $\alpha + \beta < 1$ y $p > 1$,*

$$J_\alpha : M^{\beta,p} \to M^{\alpha+\beta,p}.$$

3.3. El espacio potencial $L^{\alpha,p}$

En esta última sección del capítulo, definimos los espacios potenciales $L^{\alpha,p}$. Vemos que estos espacios son de Banach, que están inmersos en espacios de Hajłasz-Sobolev y que funciones Lipschitz son densas allí. También probamos teoremas de inmersión tipo Sobolev y también inmersión en espacios de Besov.

Definición 3.3.1. Definimos el **espacio potencial**

$$L^{\alpha,p}(X) = \{f \in L^p : \exists g \in L^p, f = J_\alpha g\} = J_\alpha(L^p)$$

y lo equipamos de la norma

$$\|f\|_{\alpha,p} = \|f\|_p + \inf_{g \in J_\alpha^{-1}(\{f\})} \|g\|_p.$$

Teorema 3.3.2. *$L^{\alpha,p}$ es de Banach.*

Demostración. Es claro que es un espacio vectorial normado. Para ver la completitud, veamos que toda serie absolutamente convergente converge: sea (f_n) una sucesión en $L^{\alpha,p}$ tal que $\sum_n \|f_n\|_{\alpha,p} < \infty$. En particular $\sum_n \|f_n\|_p < \infty$ y entonces la serie converge a una $f \in L^p$, falta ver que está en $L^{\alpha,p}$. Para cada n, podemos elegir $f_n = J_\alpha g_n$ con

$$\|g_n\|_p \leq \|f_n\|_{\alpha,p} + 2^{-n},$$

luego $\sum_n \|g_n\|_p < \infty$ y convergerá a una $g \in L^p$. Finalmente, la continuidad de J_α nos dice que

$$f = \sum_n f_n = \sum_n J_\alpha g_n = J_\alpha \left(\sum_n g_n \right) = J_\alpha g.$$

□

Observación 3.3.3. $\|J_\alpha g\|_{\alpha,p} \leq 2\|g\|_p$, luego es continuo de L^p en $L^{\alpha,p}$ y sobre $L^{\alpha,p}$. En particular como $L^\infty \cap L^p$ es denso en L^p para $1 \leq p \leq \infty$, tenemos que $J_\alpha(L^\infty \cap L^p)$ es denso en $L^{\alpha,p}$. De la misma forma como $C^\beta \cap L^p$ es denso en L^p para $1 \leq p < \infty, 0 < \beta \leq 1$, $J_\alpha(C^\beta \cap L^p)$ también es denso en $L^{\alpha,p}$.

Como consecuencia del aumento de la regularidad Lipschitz y Besov de J_α (corolarios 3.2.4 y 3.2.7) tenemos que

Proposición 3.3.4. *Sean $0 < \alpha < 1$ y $1 \leq p < \infty$. Luego para todo $\epsilon > 0$ tal que $\alpha + \epsilon < 1$ se tiene que $C^{\alpha+\epsilon} \cap L^{\alpha,p}$ y $B^{\alpha+\epsilon}_{p,p} \cap L^{\alpha,p}$ son densos en $L^{\alpha,p}$.*

Demostración. $J_\alpha : L^p \to L^{\alpha,p}$, $J_\alpha : C^\epsilon \to C^{\alpha+\epsilon}$ y $J_\alpha : B^\epsilon_{p,p} \to B^{\alpha+\epsilon}_{p,p}$, y como $C^\beta \cap L^p$ y $B^\epsilon_{p,p}$ son densos en L^p (pues las funciones Lipschitz-1 de soporte compacto están en ambos), tenemos lo deseado. $\square$

Ahora, tenemos el siguiente resultado de inmersión en espacios de Sobolev:

Teorema 3.3.5. *Si $f = J_\alpha g$ es finita c.t.p. y $0 < \alpha < 1$, tenemos que*

$$|f(x) - f(y)| \leq Cd(x, y)^\alpha (Mg(x) + Mg(y)).$$

Demostración. Llamamos $d = d(x, y)$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_X |g(z)||k_\alpha(x, z) - k_\alpha(y, z)|dm(z) = \int_{B(x,2d)} + \int_{B(x,2d)^c} = I + II.$$

En I, acotamos por la suma:

$$\begin{aligned} I &\leq C \int_{B(x,2d)} |g(z)| \frac{1}{d(x, z)^{N-\alpha}} dm(z) + C \int_{B(y,3d)} |g(z)| \frac{1}{d(y, z)^{N-\alpha}} dm(z) \\ &\leq Cd^\alpha (Mg(x) + Mg(y)) \end{aligned}$$

por el lema 3.2.1 (pues $\alpha > 0$), y para II, usamos que aquí $d(x, z) \sim d(y, z)$ y entonces por el item 5 de 3.1.1 tenemos que

$$II \leq Cd \int_{B(x,2d)^c} |g(z)|d(x, z)^{-(N+1-\alpha)} dm(z) \leq Cdd^{-(1-\alpha)} Mg(x) = Cd^\alpha Mg(x)$$

nuevamente por el lema 3.2.1, siempre que $\alpha < 1$. $\square$

Corolario 3.3.6. *Si $1 < p < \infty$ y $\alpha < 1$, $L^{\alpha,p} \hookrightarrow M^{\alpha,p}$.*

Corolario 3.3.7. *En el caso $p = \infty$ y $\alpha < 1$, tenemos que $L^{\alpha,\infty} \hookrightarrow C^\alpha$. En particular tenemos que las funciones de $L^{\alpha,\infty}$ son continuas (iguales c.t.p. a una función continua).*

Por la densidad de L^∞ en L^p tenemos también el siguiente resultado de densidad:

Corolario 3.3.8. *Las funciones C^α son densas en $L^{\alpha,p}$ para $\alpha < 1$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Como otro corolario del teorema, al ser Mg un gradiente de Hajłasz de f, tenemos la siguiente desigualdad de Poincaré:

Corolario 3.3.9. *Si $\alpha < 1$ y $f = J_\alpha g$, para toda bola B tenemos que*

$$⨍_B |f - f_B| \leq Cdiam(B)^\alpha ⨍_B Mg.$$

Para el caso $\alpha \geq 1$, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.3.10. *Si $f = J_\alpha g$ y $\alpha \geq 1$, tenemos que, para todo $\beta < 1$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq Cd(x,y)^\beta (Mg(x) + Mg(y)).$$

Demostración. La demostración es similar al caso $\alpha < 1$. Si $d(x,y) < 1$, se tiene que $d(x,y)^\alpha \leq d(x,y)^\beta$, luego

$$\int_{d(x,z)<2d(x,y)} |g(z)| \frac{1}{d(x,z)^{N-\alpha}} dm(z) \leq Cd(x,y)^\alpha Mg(x) \leq Cd(x,y)^\beta Mg(x),$$

de la misma forma

$$\int_{d(y,z)<3d(x,y)} |g(z)| \frac{1}{d(y,z)^{N-\alpha}} dm(z) \leq Cd(x,y)^\beta Mg(y).$$

Ahora, fuera de la bola, dividimos en dos casos:

$$\begin{aligned}\int_{2d(x,y)\leq d(x,z)<5} |g(z)| \frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N-\alpha+1}} dm(z) \leq \\ &\leq \int_{2d(x,y)\leq d(x,z)<5} |g(z)| \frac{d(x,y)^\beta}{d(x,z)^{N-(\alpha-\beta)}} dm(z) \\ &\leq Cd(x,y)^\beta Mg(x);\end{aligned}$$

y por otro lado si $d(x,z) \geq 5$, se tiene que $d(y,z) \geq 4$ y por lo tanto usamos la otra cota para diferencias de k_α:

$$\int_{d(x,z)\geq 5} |g(z)| \frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+\alpha+1}} dm(z) \leq Cd(x,y)Mg(x) \leq Cd(x,y)^\beta Mg(x).$$

Por otra parte, si $d(x,y) \geq 1$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C(Mg(x) + Mg(y)) \leq Cd(x,y)^\beta (Mg(x) + Mg(y)).$$

□

Por lo tanto tenemos los siguientes corolarios:

Corolario 3.3.11. *Si $1 < p < \infty$ y $\alpha \geq 1$, $L^{\alpha,p} \hookrightarrow M^{\beta,p}$ para todo $\beta < 1$.*

Corolario 3.3.12. *En el caso $p = \infty$ y $\alpha \geq 1$, tenemos que $L^{\alpha,\infty} \hookrightarrow C^\beta$ para todo $\beta < 1$. En particular se tiene que para todo $\alpha > 0$, las funciones de $L^{\alpha,\infty}$ son continuas.*

Corolario 3.3.13. *Si $\alpha \geq 1$, las funciones C^β son densas en $L^{\alpha,p}$ para todo $\beta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$. En particular se tiene que para todo $\alpha > 0$ las funciones C^β son densas en $L^{\alpha,p}$ para todo $\beta \leq \alpha$ si $\alpha < 1$, y para todo $\beta < 1$ si $\alpha \geq 1$.*

Veremos ahora un teorema de inmersión de Sobolev, pero primero un lema:

Lema 3.3.14. *Si $\alpha > 0$ y $q(N-\alpha) < N < q(N+\alpha)$, entonces existe $C > 0$ tal que, para todo $x \in X$,*

$$\int_X k_\alpha(x,y)^q dm(y) \leq C < \infty.$$

Demostración. Nuevamente del lema 3.1.1 tenemos que

$$k_\alpha(x,y)^q \leq C\frac{\chi_{B(x,4)}(y)}{d(x,y)^{q(N-\alpha)}} + C\frac{\chi_{X\setminus B(x,4)}(y)}{d(x,y)^{q(N+\alpha)}},$$

luego las restricciones sobre q garantizan integrabilidad. □

Teorema 3.3.15. *Sea $1 < p < \infty$. Entonces*

a. *Si $p < \frac{N}{\alpha}$,*

$$L^{\alpha,p} \hookrightarrow L^q$$

para $p \leq q \leq p^*$ con $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{N}$.

b. *Si $p = \frac{N}{\alpha}$, entonces para todo $p \leq q < \infty$ se tiene que*

$$L^{\alpha,p} \hookrightarrow L^q.$$

Además si $\alpha < 1$,

$$L^{\alpha,p} \hookrightarrow BMO.$$

c. *Si $p > \frac{N}{\alpha}$, entonces para todo $p \leq q \leq \infty$ se tiene que*

$$L^{\alpha,p} \hookrightarrow L^q.$$

Además si $\alpha < 1 + N/p$,

$$L^{\alpha,p} \hookrightarrow C^{\alpha - N/p}.$$

Demostración. **a.** Ya vimos que $L^{\alpha,p} \hookrightarrow L^p$ (pues $\|f\|_p \leq \|f\|_{\alpha,p}$), luego si vemos que $L^{\alpha,p} \hookrightarrow L^{p*}$, por interpolación entre espacios L^p tendremos lo deseado. Este resultado surge de que $|J_\alpha f| \leq CI_\alpha|f|$, luego para todo $t > 0$ tenemos que, como $(N-\alpha)p' > N$ (pues $N/p' = N - N/p < N - \alpha$),

$$\begin{aligned}|J_\alpha f(x)| &\leq C\int_{B(x,t)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{N-\alpha}} dm(y) + C\int_{X\setminus B(x,t)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{N-\alpha}} dm(y)\\ &\leq Ct^\alpha Mf(x) + Ct^{(N-(N-\alpha)p')/p'}\|f\|_p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= Ct^{\alpha}Mf(x) + Ct^{\alpha-N/p}\|f\|_p\\&= Ct^{\alpha}Mf(x) + Ct^{-N/p^*}\|f\|_p.\end{aligned}$$

Ahora, esta última expresión se puede minimizar para $t = CMf(x)^{-p/N}\|f\|_p^{p/N}$, y en ese caso tendremos

$$|J_\alpha f(x)| \leq CMf(x)^{p/p^*}\|f\|_p^{1-p/p^*},$$

con lo que, por acotación de la maximal para $p > 1$,

$$\int_X |J_\alpha f|^{p^*} dm \leq C\|f\|_p^{p^*-p} \int_X (Mf)^p dm \leq C\|f\|_p^{p^*}.$$

b. Sea $N/\alpha = p < q < \infty$. Existe $t > 1$ tal que

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{N} + \frac{1}{t}.$$

Como en particular esto implica que $t(N-\alpha) < N$ (y $N < t(N+\alpha)$ es trivial pues $t > 1$), tenemos que existe C independiente de x para la que

$$\int_X k_\alpha(x,y)^t dm(y) \leq C < \infty.$$

Si ahora $f = J_\alpha g$ con $g \in L^p$, como $\frac{1}{q'} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{t'}$ por Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leq \int_X k_\alpha(x,y)^{t/q+t/p'}|g(y)|^{p/q+p/t'}dm(y)\\&\leq \left(\int_X k_\alpha(x,y)^t|g(y)|^p dm(y)\right)^{1/q}\left(\int_X |g(y)|^p dm(y)\right)^{1/t'}\left(\int_X k_\alpha(x,y)^t dm(y)\right)^{1/p'}\\&\leq C\|g\|_p^{p/t'}\left(\int_X k_\alpha(x,y)^t|g(y)|^p dm(y)\right)^{1/q}\end{aligned}$$

(aquí usamos que $t/q + t/p' = 1$ y $p/q + p/t' = 1$) y entonces

$$\begin{aligned}\int_X |f(x)|^q dm(x) &\leq C\|g\|_p^{qp/t'}\int_X\int_X k_\alpha(x,y)^t|g(y)|^p dm(y)dm(x)\\&\leq C\|g\|_p^{p(q/t'+1)} = C\|g\|_p^q.\end{aligned}$$

Por otro lado, si $\alpha < 1$, por Poincaré se tiene que para toda bola B,

$$\begin{aligned}\fint_B |f - f_B| &\leq C diam(B)^\alpha \fint_B Mg \leq Cm(B)^{\alpha/N}\left(\fint_B (Mg)^{N/\alpha}\right)^{\alpha/N}\\&\leq C\left(\int_B (Mg)^{N/\alpha}\right)^{\alpha/N} \leq C\|g\|_{N/\alpha}\end{aligned}$$

y concluimos

$$\|f\|_{BMO} \leq C\|f\|_{\alpha,N/\alpha}.$$

c. Para la primer parte basta con ver que si $L^{\alpha,p} \hookrightarrow L^\infty$ y el resultado sale por interpolación. Ahora, si $f = J_\alpha g$ con $g \in L^p$,

$$\begin{aligned}|f(x)| = |J_\alpha g(x)| &\leq \int_X k_\alpha(x,y)|g(y)|dm(y) \leq \|g\|_p \left(\int_X k_\alpha(x,y)^{p'}dm(y)\right)^{1/p'}\\ &\leq C\|g\|_p \leq C\|f\|_{\alpha,p}\end{aligned}$$

siempre que $p'(N-\alpha) < N < p'(N+\alpha)$. La segunda desigualdad es trivial pues $p' \geq 1$, y la primera es equivalente a $p\alpha > N$.

Supongamos ahora que $\alpha < 1 + N/p$. Entonces

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq \int_X |k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)||g(z)|dm(z)\\ &\leq \|g\|_p \left(\int_X |k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)|^{p'}dm(z)\right)^{1/p'}\\ &\leq C\|g\|_p d(x,y)^{\frac{N-p'(N-\alpha)}{p'}} = C\|g\|_p d(x,y)^{\alpha - N/p}\end{aligned}$$

siempre que $p'(N-\alpha) < N < p'(N-\alpha+1)$. La primera desigualdad es equivalente a $p > N/\alpha$, y la segunda a $\alpha < 1 + N/p$, y por lo tanto se concluye el teorema.

□

A continuación veremos que las funciones de $L^{\alpha,p}$ presentan cierta regularidad de tipo Besov. Primero un lema.

Lema 3.3.16. *Si $0 < \alpha < 1$ y $q > 0$ satisface $q(N-\alpha) < N < q(N+q-\alpha)$, tenemos que existe $C > 0$ tal que para $z \in X$ y $t > 0$ vale*

$$\int_X ⨍_{B(x,t)} |k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)|^q dm(y)dm(x) \leq Ct^{N-q(N-\alpha)}.$$

Demostración. Abrimos la integral en dos:

$$A_1 = \{(x,y) : d(x,y) < t, d(x,z) < 2t\};$$

$$A_2 = \{(x,y) : d(x,y) < t, 2t \leq d(x,z)\}.$$

Sobre A_1 separamos la suma y tenemos que

$$\begin{aligned}\iint_{A_1} \frac{1}{t^N}|k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)|^q dm(y)dm(x) &\leq C\int_{B(z,3t)} |k_\alpha(x,z)|^q dm(x)\\ &\leq C\int_{B(z,3t)} \frac{1}{d(x,z)^{q(N-\alpha)}}dm(x)\\ &\leq Ct^{N-q(N-\alpha)},\end{aligned}$$

donde la última desigualdad vale por ser $N > q(N-\alpha)$.

Sobre A_2 tenemos que $d(x,z) \sim d(y,z)$, y por lo tanto tenemos que, como $d(x,y) < t$,

$$\begin{aligned}\iint_{A_2} \frac{1}{t^N}|k_\alpha(x,z)-k_\alpha(y,z)|^q dm(y)dm(x) &\leq Ct^q \iint_{A_2} \frac{1}{t^N}\frac{1}{d(x,z)^{q(N+1-\alpha)}}dm(y)dm(x)\\ &\leq Ct^q \int_{X\setminus B(z,2t)} \frac{1}{d(x,z)^{q(N+1-\alpha)}}dm(x)\\ &\leq Ct^q t^{N-q(N+1-\alpha)} \leq Ct^{N-q(N-\alpha)},\end{aligned}$$

por ser $N < q(N+1-\alpha)$. □

Teorema 3.3.17. *Si $f = J_\alpha g$ con $g \in L^p$, $0<\alpha<1$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces*

$$E_p f(t) \leq Ct^\alpha \|g\|_p$$

Demostración. Si $p < \infty$,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|^p &\leq \left(\int_X |k_\alpha(x,z)-k_\alpha(y,z)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}}|g(z)|dm(z)\right)^p\\ &\leq \left(\int_X |k_\alpha(x,z)-k_\alpha(y,z)||g(z)|^p dm(z)\right)\left(\int_X |k_\alpha(x,z)-k_\alpha(y,z)|dm(z)\right)^{p/p'}.\end{aligned}$$

Luego por el lema 3.2.5 (tomando $q=1$) tenemos que (pues $d(x,y)<t$)

$$\int_X |k_\alpha(x,z)-k_\alpha(y,z)|dm(z) \leq Ct^\alpha$$

y entonces

$$\begin{aligned}&\int_X \fint_{B(x,t)} |f(x)-f(y)|^p dm(y)dm(x) \leq\\ &\qquad \leq Ct^{\alpha p/p'} \int_X \left(\int_X \fint_{B(x,t)} |k_\alpha(x,z)-k_\alpha(y,z)|dm(y)dm(x)\right)|g(z)|^p dm(z)\end{aligned}$$

y del lema 3.3.16 (también tomando $q=1$) concluimos que

$$\int_X \fint_{B(x,t)} |f(x)-f(y)|^p dm(y)dm(x) \leq Ct^{\alpha p/p'} t^\alpha \|g\|_p^p = Ct^{\alpha p}\|g\|_p^p.$$

Para $p=\infty$,

$$E_\infty f(t) = \sup_{d(x,y)<t} |f(x)-f(y)| \leq C \sup_{d(x,y)<t} d(x,y)^\alpha (Mg(x)+Mg(y)) \leq Ct^\alpha \|g\|_\infty.$$

□

Concluimos entonces con las siguientes inclusiones en espacios de Besov:

Corolario 3.3.18. *Si $1 \le p \le \infty$, $0 < \alpha < 1$, $1 \le q < \infty$, entonces $L^{\alpha,p} \hookrightarrow B^{\alpha-\epsilon}_{p,q}$ para todo $\epsilon < \alpha$. Además para $q = \infty$ vale $L^{\alpha,p} \hookrightarrow B^{\alpha}_{p,\infty} = \mathcal{KS}^{\alpha,p}$.*

Demostración. Sea $f = J_\alpha g$. Usando el teorema anterior tenemos que, si $q = \infty$,

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p,\infty}} = \|f\|_p + \sup_{t>0} t^{-\alpha} E_p f(t) \le C\|f\|_{\alpha,p}.$$

Y si $q < \infty$, como $E_p f \le \|f\|_p$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{B^{\alpha-\epsilon}_{p,q}} &\le C\|f\|_p + C\left(\int_0^1 t^{-(\alpha-\epsilon)q} E_p f(t)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\ &\le C\|f\|_p + C\|g\|_p \left(\int_0^1 t^{\epsilon q} \frac{dt}{t}\right) \le \frac{C}{\epsilon^{1/q}}\|f\|_{\alpha,p}. \end{aligned}$$

□

Observación 3.3.19. Como tenemos que $L^{\alpha,p} \hookrightarrow M^{\alpha,p}$ para $0 < \alpha < 1$, la inmersión del teorema anterior para el caso $p = q < \infty$ es también un corolario del teorema 2.2.10.

Capítulo 4

La inversa de J_α: derivación fraccionaria

Este capítulo contiene los aspectos más técnicos de la tesis. Es importante observar que los precusores de estas técnicas son [GSV] y [Hz], en los que los resultados están relacionados con la integración fraccionaria de tipo Riesz.

En el caso de $\mathbb{R}^n$, para $\alpha > 0$, los operadores de integración y derivación fraccionaria $\mathcal{I}_\alpha = (-\Delta)^{-\alpha/2}$ y $\mathscr{D}_\alpha = (-\Delta)^{\alpha/2}$ son claramente inversos uno del otro.

Los operadores potenciales de Bessel dan funciones con mejores propiedades de regularidad e integrabilidad que los operadores de integración fraccionaria. Recordemos que del lado de Fourier el multiplicador del operador de Bessel $\mathcal{J}_\alpha = (I - \Delta)^{-\alpha/2}$ es $(1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{-\alpha/2}$ y el del operador $\mathscr{D}_\alpha$ es $(2\pi|\xi|)^\alpha$, y allí la composición $(I + \mathscr{D}_\alpha)\mathcal{J}_\alpha$ satisface, para $0 < \alpha \leq 2$,

$$1 \leq \frac{1 + (2\pi|\xi|)^\alpha}{(1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{\alpha/2}} \leq 2^{1-\alpha/2},$$

con lo que en este caso el operador $(I + \mathscr{D}_\alpha)\mathcal{J}_\alpha$ será inversible en L^2. De hecho en [S] se puede ver que, para $1 < p < \infty$ y $0 < \alpha < 2$

$$f \in \mathcal{L}^{\alpha,p} \Leftrightarrow f, \mathscr{D}_\alpha f \in L^p,$$

y mediante integración fraccionaria lo anterior se puede escribir como

$$f \in \mathcal{L}^{\alpha,p} \Leftrightarrow f \in L^p \text{ y existe } \gamma \in L^p \text{ con } f = \mathcal{I}_\alpha \gamma.$$

En los trabajos [GSV] y [HV] se definen los operadores derivación e integración fraccionaria I_α y D_α para espacios de tipo homogéneo normales, y allí se demuestra, y se observa la suficiencia de probar, que integración y derivación son inversas una de otra en un sentido amplio: son inversibles “módulo una integral singular inversible”, al menos para órdenes de regularidad pequeños (en el caso de [GSV] el resultado se prueba en

L^p, mientras que en [HV] se hace para espacios de Besov y Triebel-Lizorkin definidos a partir de aproximaciones a la identidad). Con nuestra definición de espacios potenciales presentada en el capítulo anterior, nos proponemos obtener un resultado similar al de I_α y D_α.

En espacios Ahlfors, con el operador potencial tipo Bessel J_α que hemos construído, probaremos que la composición $T_\alpha = (I + D_\alpha)J_\alpha$ es un operador de Calderón Zygmund, acotado de L^p en L^p, para D_α el operador derivación fraccionaria de [GSV]. A su vez, para valores pequeños de α, probaremos que se trata de un operador biyectivo de L^p en L^p, y obtendremos en estos casos una caracterización del espacio potencial obtenido con J_α mediante el operador derivación fraccionaria, en el sentido que las operaciones son "inversas":

$$J_\alpha^{-1} = T_\alpha^{-1}(I + D_\alpha).$$

Esto nos servirá a su vez para, en los capítulos siguientes, poder concluir un teorema de interpolación entre espacios potenciales y un teorema de trazas para espacios de Besov en espacios métricos Ahlfors regulares, en el caso de órdenes de regularidad "pequeños".

El capítulo finaliza analizando el caso de $\mathbb{R}^n$. Comparamos allí el operador $\mathscr{D}_\alpha$ con el aquí construido D_α, para luego poder comparar (en el caso de valores de α pequeños) los espacios $\mathcal{L}^{\alpha,p}$ y $L^{\alpha,p}$.

4.1. El operador derivación fraccionaria

Al igual que en el capítulo anterior, trabajaremos con un espacio métrico de medida (X, d, m) Ahlfors N-regular. En esta primera sección construimos un operador derivación fraccionaria D_α a partir de la aproximación a la identidad $(S_t)_{t>0}$ como fue construida en 1.2 y utilizada en el capítulo anterior para la construcción de J_α. Veremos también cómo este operador, al revés que J_α, disminuye la regularidad cuando es aplicado a funciones de Lipschitz, Besov y Sobolev.

Consideremos el núcleo

$$n_\alpha(x, y) = \int_0^\infty \alpha t^{-\alpha} s(x, y, t) \frac{dt}{t}.$$

Mediante las propiedades de la aproximación a la identidad (S_t) en 1.2.1, es inmediato ver que este núcleo satisface

$$n_\alpha(x, y) \sim \frac{1}{d(x, y)^{N+\alpha}}$$

y

$$|n_\alpha(x, y) - n_\alpha(x', y)| \leq C d(x, x')(d(x, y) \wedge d(x', y))^{-(N+1+\alpha)}.$$

Definimos también el **operador derivación fraccionaria**

$$D_\alpha f(x) = \int_X n_\alpha(x,y)(f(x) - f(y))dm(y)$$

(siempre que esta integral tenga sentido).

Veremos en el resto de esta sección que este operador está bien definido para funciones regulares y, al contrario del operador J_α, disminuye esta regularidad. Comenzamos estudiando su acción sobre las funciones Lipschitz.

Teorema 4.1.1. *Si $0 < \beta < 1$ y $f \in C^{\alpha+\beta}$, entonces $D_\alpha f$ está bien definido, más aún*

$$|D_\alpha f(x)| \leq C\|f\|_{C^{\alpha+\beta}}$$

y

$$|D_\alpha f(x) - D_\alpha f(y)| \leq C[f]_{\alpha+\beta} d(x,y)^\beta.$$

Demostración.

$$|D_\alpha f(x)| \leq \int_X n_\alpha(x,y)|f(y) - f(x)|dm(y) \leq \int_{B(x,1)} + \int_{X\setminus B(x,1)} = I + II,$$

donde usando el tamaño de n_α y la acotación y cota Lipschitz de f,

$$I \leq C[f]_{\alpha+\beta} \int_{B(x,1)} \frac{1}{d(x,y)^{N+\alpha}} d(x,y)^{\alpha+\beta} dm(y) \leq C[f]_{\alpha+\beta},$$

$$II \leq C\|f\|_\infty \int_{X\setminus B(x,1)} \frac{1}{d(x,y)^{N+\alpha}} dm(y) \leq C\|f\|_\infty.$$

De esto obtenemos la buena definición y la acotación. Ahora, dados $x, y \in X$, dividimos el espacio en $B = B(x, 2d(x,y))$ y B^c:

$$\begin{aligned}|D_\alpha f(x) - D_\alpha f(y)| \leq{}& C\int_B \frac{|f(x) - f(z)|}{d(x,z)^{N+\alpha}} dm(z) + C\int_B \frac{|f(y) - f(z)|}{d(y,z)^{N+\alpha}} dm(z)\\ &+ \int_{B^c} |n_\alpha(x,z)(f(z) - f(x)) - n_\alpha(y,z)(f(z) - f(y))|\, dm(z).\end{aligned}$$

Las dos primeras integrales se acotan por por $C[f]_{\alpha+\beta} d(x,y)^\beta$. Luego, sumando y restando $f(y)n_\alpha(x,z)$ en la tercera integral y utilizando que en B^c vale $d(x,z) \sim d(y,z)$,

$$\begin{aligned}|D_\alpha f(x) - D_\alpha f(y)| \leq{}& C[f]_{\alpha+\beta} d(x,y)^\beta + C|f(x) - f(y)| \int_{B^c} \frac{dm(z)}{d(x,z)^{N+\alpha}}\\ &+ \int_{B^c} |f(y) - f(z)|\, |n_\alpha(x,z) - n_\alpha(y,z)|\, dm(z)\\ \leq{}& C[f]_{\alpha+\beta} d(x,y)^\beta + C[f]_{\alpha+\beta} d(x,y) \int_{B^c} d(y,z)^{\alpha+\beta} \frac{1}{d(y,z)^{N+1+\alpha}} dm(z)\\ \leq{}& C[f]_{\alpha+\beta} d(x,y)^\beta\end{aligned}$$

(donde la última integral está acotada pues $\beta < 1$). $\square$

Corolario 4.1.2. *Si* $0 < \beta < 1$, *entonces*

$$D_\alpha : C^{\alpha+\beta} \to C^\beta.$$

Ahora, para funciones Besov tenemos el siguiente resultado sobre el comportamiento de D_α.

Teorema 4.1.3. *Si* $0 < \beta < 1$ *y* $f \in B_{p,p}^{\alpha+\beta}$, *entonces* $D_\alpha f$ *está bien definido, más aún,*

$$\|D_\alpha f\|_p \leq C\|f\|_{B_{p,p}^{\alpha+\beta}},$$

y

$$\iint_{X\times X} \frac{|D_\alpha f(x) - D_\alpha f(y)|^p}{d(x,y)^{N+\beta p}} dm(y)dm(x) \leq C \iint_{X\times X} \frac{|f(x) - f(z)|^p}{d(x,z)^{N+(\alpha+\beta)p}} dm(z)dm(x).$$

Demostración. Primero veamos que si $f \in B_{p,p}^{\alpha+\beta}$, entonces $D_\alpha f \in L^p$. Observemos que, de forma similar al caso Lipschitz, partiendo la integral en $B(x,1)$ y su complemento, y acotando en esta última por la suma de f,

$$|D_\alpha f(x)|^p \leq C \left(\int_{B(x,1)} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^{N+\alpha}} dm(y) \right)^p + C|f(x)|^p + C \int_{B(x,1)^c} \frac{|f(y)|^p}{d(x,y)^{N+\alpha}} dm(y).$$

Al integrar con respecto a x el segundo y el tercer sumando claramente quedan acotados por $C\|f\|_p^p$. Acotemos entonces el primer término: por la desigualdad de Hölder, para $0 < a < 1$ se tiene

$$\left(\int_{B(x,1)} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^{N+\alpha}} dm(y) \right)^p \leq$$

$$\leq \left(\int_{B(x,1)} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{ap(N+\alpha)}} dm(y) \right) \left(\int_{B(x,1)} \frac{1}{d(x,y)^{(1-a)p'(N+\alpha)}} dm(y) \right)^{p/p'},$$

luego si $ap(N+\alpha) = N + (\alpha+\beta)p$ será $(1-a)p'(N+\alpha) = N - \beta p'$ y por lo tanto, como el segundo término del producto es finito,

$$\left(\int_{B(x,1)} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^{N+\alpha}} dm(y) \right)^p \leq C \int_{B(x,1)} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{N+(\alpha+\beta)p}} dm(y)$$

y concluimos

$$\int_X |D_\alpha f(x)|^p dm(x) \leq C \int_X |f|^p + \iint_{d(x,y)<1} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x,y)^{N+(\alpha+\beta)p}} dm(y)dm(x).$$

Esto concluye la buena definición y la acotación en L^p. Veamos ahora la acotación de la seminorma Besov. Procederemos como en el caso Lipschitz, partiendo la integral y utilizando el tamaño y la suavidad de n_α para llegar a

$$|D_\alpha f(x) - D_\alpha f(y)| \leq C \int_{d(x,z)<2d(x,y)} \frac{|f(z) - f(x)|}{d(x,z)^{N+\alpha}} dm(z)$$

$$
\begin{aligned}
&+C\int_{d(y,z)<3d(x,y)}\frac{|f(z)-f(y)|}{d(y,z)^{N+\alpha}}dm(z)\\
&+Cd(x,y)\int_{d(x,z)\geq 2d(x,y)}\frac{|f(x)-f(z)|}{d(x,z)^{N+\alpha+1}}dm(z)\\
&+C\frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^{\alpha}}\\
=&\ I+II+III+IV
\end{aligned}
$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Hölder en cada una de las integrales se tiene:

- eligiendo a tal que $(1-a)p'(N+\alpha)<N$,

$$
\begin{aligned}
I &\leq \left(\int_{d(x,z)<2d(x,y)}\frac{|f(z)-f(x)|^p}{d(x,z)^{ap(N+\alpha)}}dm(z)\right)\left(\int_{d(x,z)<2d(x,y)}\frac{1}{d(x,z)^{(1-a)p'(N+\alpha)}}dm(z)\right)^{p/p'}\\
&\leq Cd(x,y)^{N(p-1)-(1-a)p(N+\alpha)}\left(\int_{d(x,z)<2d(x,y)}\frac{|f(z)-f(x)|^p}{d(x,z)^{ap(N+\alpha)}}dm(z)\right)\\
&= Cd(x,y)^{-(N+p\alpha-ap(N+\alpha))}\left(\int_{d(x,z)<2d(x,y)}\frac{|f(z)-f(x)|^p}{d(x,z)^{ap(N+\alpha)}}dm(z)\right);
\end{aligned}
$$

- para ese mismo a,

$$
II\leq Cd(x,y)^{-(N+p\alpha-ap(N+\alpha))}\left(\int_{d(y,z)<3d(x,y)}\frac{|f(z)-f(y)|^p}{d(y,z)^{ap(N+\alpha)}}dm(z)\right);
$$

- eligiendo b tal que $(1-b)p'(N+\alpha+1)>N$,

$$
\begin{aligned}
III &\leq d(x,y)^p\left(\int_{d(x,z)\geq 2d(x,y)}\frac{|f(x)-f(z)|^p}{d(x,z)^{bp(N+\alpha+1)}}dm(z)\right)\\
&\quad\times\left(\int_{d(x,z)\geq 2d(x,y)}\frac{1}{d(x,z)^{(1-b)p'(N+\alpha+1)}}dm(z)\right)^{p/p'}\\
&\leq Cd(x,y)^{-(N+p\alpha-bp(N+\alpha+1))}\left(\int_{d(x,z)\geq 2d(x,y)}\frac{|f(x)-f(z)|^p}{d(x,z)^{bp(N+\alpha+1)}}dm(z)\right).
\end{aligned}
$$

Para el último término se tiene directamente

$$
IV\leq\frac{|f(x)-f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha p}}.
$$

Con lo anterior, podemos acotar la seminorma Besov de $D_\alpha f$, cambiando los órdenes de integración convenientemente:

$$
\iint_{X\times X}\frac{|D_\alpha f(x)-D_\alpha f(y)|^p}{d(x,y)^{N+\beta p}}dm(y)dm(x)\leq
$$

$$\leq C \iint_{X\times X} \frac{|f(z)-f(x)|^p}{d(x,z)^{ap(N+\alpha)}} \int_{d(x,z)<2d(x,y)} \frac{d(x,y)^{-(N+p\alpha-ap(N+\alpha))}}{d(x,y)^{N+\beta p}} dm(y)dm(z)dm(x)$$
$$+ C \iint_{X\times X} \frac{|f(z)-f(y)|^p}{d(y,z)^{ap(N+\alpha)}} \int_{d(y,z)<3d(x,y)} \frac{d(x,y)^{-(N+p\alpha-ap(N+\alpha))}}{d(x,y)^{N+\beta p}} dm(x)dm(z)dm(y)$$
$$+ C \iint_{X\times X} \frac{|f(x)-f(z)|^p}{d(x,z)^{bp(N+\alpha+1)}} \int_{d(x,z)\geq 2d(x,y)} \frac{d(x,y)^{-(N+p\alpha-bp(N+\alpha+1))}}{d(x,y)^{N+\beta p}} dm(y)dm(z)dm(x)$$
$$+ \iint_{X\times X} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha p}} \frac{1}{d(x,y)^{N+\beta p}} dm(y)dm(x)$$
$$\leq C \iint_{X\times X} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{d(x,y)^{\alpha p}} d(x,y)^{-(N+\beta p)} dm(y)dm(x),$$

siempre que podamos encontrar a, b entre 0 y 1 que satisfagan también $ap(N+\alpha) < N+(\alpha+\beta)p$, $N+(\alpha+\beta)p < bp(N+\alpha+1)$. Estas cuatro condiciones sobre a, b se pueden reescribir como

$$N + \alpha p < ap(N+\alpha) < N + (\alpha+\beta)p,$$

$$N + (\alpha+\beta)p < bp(N+\alpha+1) < N + (\alpha+1)p,$$

que tienen solución siempre que $0 < \beta < 1$. □

Como una consecuencia inmediata tenemos

Corolario 4.1.4. *Si $0 < \beta < 1$,*

$$D_\alpha : B^{\alpha+\beta}_{p,p} \to B^{\beta}_{p,p}.$$

Finalmente, comprobaremos que D_α también disminuye la regularidad en α cuando actúa sobre funciones de Hajłasz-Sobolev.

Teorema 4.1.5. *Sean f, g que satisfacen*

$$|f(x)-f(y)| \leq d(x,y)^{\alpha+\beta}(g(x)+g(y)),$$

con $g \geq 0$ y $0 < \beta < 1$, entonces si $D_\alpha f$ está bien definida,

$$|D_\alpha f(x) - D_\alpha f(y)| \leq C d(x,y)^\beta (Mg(x) + Mg(y)).$$

Más aún, si $f, g \in L^p$, se tiene que $D_\alpha f$ está bien definida y

$$\|D_\alpha f\|_p \leq C(\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Demostración. Veamos primero que si $f, g \in L^p$, entonces $D_\alpha f \in L^p$ (y en particular está bien definida ctp).

$$|D_\alpha f(x)|^p \leq$$

$$\leq C \left(\int_{B(x,1)} \frac{|f(y)-f(x)|}{d(x,y)^{N+\alpha}} dm(y) \right)^p + C \left(\int_{B(x,1)^c} \frac{|f(x)|^p + |f(y)|^p}{d(x,y)^{N+\alpha}} dm(y) \right)$$
$$\leq C \int_{B(x,1)} \frac{g(x)^p + g(y)^p}{d(x,y)^{N-\beta}} dm(y) + C \int_{B(x,1)^c} \frac{|f(x)|^p + |f(y)|^p}{d(x,y)^{N+\alpha}} dm(y),$$

luego integrando con respecto a x (cambiando el orden de integración donde sea necesario), obtenemos

$$\|D_\alpha f\|_p \leq C(\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Para la otra parte, acotamos puntualmente la diferencia como para el caso de regularidad Besov (teorema 4.1.3)

$$\begin{aligned}
|D_\alpha f(x) - D_\alpha f(y)| \leq C & \int_{d(x,z)<2d(x,y)} \frac{|f(z)-f(x)|}{d(x,z)^{N+\alpha}} dm(z) \\
& + C \int_{d(y,z)<3d(x,y)} \frac{|f(z)-f(y)|}{d(y,z)^{N+\alpha}} dm(z) \\
& + C d(x,y) \int_{d(x,z)\geq 2d(x,y)} \frac{|f(x)-f(z)|}{d(x,z)^{N+\alpha+1}} dm(z) \\
& + C \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^\alpha} \\
= {} & I + II + III + IV
\end{aligned}$$

Luego por hipótesis

$$\begin{aligned}
I &\leq C \int_{d(x,z)<2d(x,y)} \frac{g(z)+g(x)}{d(x,z)^{N-\beta}} dm(z) \leq C d(x,y)^\beta (Mg(x) + g(x)); \\
II &\leq C \int_{d(y,z)<3d(x,y)} \frac{g(z)+g(y)}{d(y,z)^{N-\beta}} dm(z) \leq C d(x,y)^\beta (Mg(y) + g(y)); \\
III &\leq C d(x,y) \int_{d(x,z)\geq 2d(x,y)} \frac{g(x)+g(z)}{d(x,z)^{N+(1-\beta)}} dm(z) \\
&\leq C d(x,y) \left(\frac{g(x)}{d(x,y)^{1-\beta}} + \frac{Mg(x)}{d(x,y)^{1-\beta}} \right) = C d(x,y)^\beta (g(x) + Mg(x)); \\
IV &\leq C d(x,y)^\beta (g(x) + g(y)),
\end{aligned}$$

donde las acotaciones de las integrales por la maximal se obtienen, como en el caso de aumento de regularidad Sobolev de J_α del capítulo anterior, partiendo la integral en coronas, como en el lema 3.2.1. □

Con este resultado, y utilizando la acotación de la maximal para $p > 1$, obtenemos:

Corolario 4.1.6. *Si $\beta < 1$ y $p > 1$,*

$$D_\alpha : M^{\alpha+\beta,p} \to M^{\beta,p}.$$

4.2. Los operadores T_α y S_α

En esta sección definiremos los operadores $(I + D_\alpha)J_\alpha$ y $J_\alpha(I + D_\alpha)$ para funciones Lipschitz C^β, para un cierto β, y veremos que se trata de operadores integrales singulares que satisfacen el teorema $T1$, y por lo tanto podrán extenderse a operadores de L^p en L^p, para $1 < p < \infty$.

Consideremos un $0 < \beta < 1$ y definamos para $\alpha > 0$ el operador $\Delta_\alpha = I + D_\alpha$, que de acuerdo al corolario 4.1.2 y a la inmersión $C^{\alpha+\beta} \hookrightarrow C^\beta$, satisface

$$\Delta_\alpha : C^{\alpha+\beta} \to C^\beta.$$

Como tenemos además que, si adicionalmente $\alpha + \beta < 1$,

$$J_\alpha : C^\beta \to C^{\beta+\alpha},$$

entonces $T_\alpha = \Delta_\alpha J_\alpha$ está bien definido y satisface

$$T_\alpha : C^\beta \to C^\beta.$$

De la misma forma, si $0 < \alpha < \beta < 1$, $S_\alpha = J_\alpha \Delta_\alpha$[1] manda

$$S_\alpha : C^\beta \to C^\beta.$$

Veremos que se trata de operadores de Calderón-Zygmund. Necesitaremos primero de un lema que nos garantice que podamos encontrar el núcleo para escribir T_α como integral singular.

Lema 4.2.1. *Sean $x \neq y$ y sea*

$$\mathcal{K}(x, y) = k_\alpha(x, y) + \int_X n_\alpha(x, z)|k_\alpha(y, z) - k_\alpha(x, y)|dm(z).$$

Entonces

$$\mathcal{K}(x, y) \leq C \frac{1}{d(x, y)^N}.$$

Demostración. Primero, por los items 3 y 4 de 3.1.1, si $d(x, y) < 4$,

$$k_\alpha(x, y) \leq C d(x, y)^{-(N-\alpha)} \leq C d(x, y)^{-N},$$

y si $d(x, y) \geq 4$,

$$k_\alpha(x, y) \leq C d(x, y)^{-(N+\alpha)} \leq C d(x, y)^{-N}.$$

[1]Dado que los operadores se construyen con la aproximación a la identidad (S_t), la elección de S_α como nombre para un operador no es muy afortunada. De todas formas los diferentes subíndices evitarán toda posible confusión.

Observar que k_α no es un núcleo singular, sino uno mucho mejor, tanto en tamaño como en suavidad. Para el segundo sumando, sean

$$\begin{aligned} A_1 &= B\left(x, \frac{d(x,y)}{2}\right), \\ A_2 &= B(y, 2d(x,y))\backslash A_1, \\ A_3 &= X\backslash(A_1 \cup A_2) = X\backslash B(y, 2d(x,y)) \end{aligned}$$

y hacemos

$$\int_X n_\alpha(x,z)|k_\alpha(y,z) - k_\alpha(x,y)|dm(z) = \int_{A_1} + \int_{A_2} + \int_{A_3} = I + II + III$$

Entonces, para z en A_1 tenemos que $d(y,z) \sim d(y,x)$ y por lo tanto utilizando la suavidad de k_α (por la propiedad 5 del lema 3.1.1) y el tamaño de n_α, podemos acotar

$$I \leq C \int_{A_1} \frac{1}{d(x,z)^{N+\alpha}} d(x,z) d(x,y)^{-(N+1-\alpha)} dm(z) \leq C d(x,y)^{-N}.$$

puesto que $0 < \alpha < 1$. Para III, abrimos el valor absoluto como suma y como para $z \in A_3$ se satisface $d(y,z) \geq 2d(x,y)$, se pueden acotar ambos sumandos por $Cd(x,y)^{-(N-\alpha)}$, y entonces

$$III \leq C \frac{1}{d(x,y)^{N-\alpha}} \int_{A_3} \frac{1}{d(x,z)^{N+\alpha}} \leq C d(x,y)^{-N}.$$

Finalmente en A_2 tenemos que $d(x,z) \geq \frac{1}{2} d(x,y)$ y por lo tanto acotamos por

$$II \leq C \frac{1}{d(x,y)^{N+\alpha}} \left(\int_{A_2} \frac{1}{d(y,z)^{N-\alpha}} dm(z) + \frac{1}{d(x,y)^{N-\alpha}} m(A_2) \right) \leq C d(x,y)^{-N}$$

dado que $A_2 \subset B(y, 2d(x,y))$. □

Con esta estimación vamos a poder hallar el núcleo de T_α. Sean $f, g \in C_c^\beta$ con soportes disjuntos y sea $x \in \; supp(g)$. Entonces

$$\begin{aligned} T_\alpha f(x) = \Delta_\alpha J_\alpha f(x) &= J_\alpha f(x) + \int_X n_\alpha(x,z)(J_\alpha f(x) - J_\alpha f(z)) dm(z) \\ &= \int_X k_\alpha(x,y) f(y) dm(y) + \int_X n_\alpha(x,z) \left(\int_X (k_\alpha(x,y) - k_\alpha(y,z)) f(y) dm(y) \right) dm(z) \end{aligned}$$

y como por el lema anterior la integral converge absolutamente (pues $y \in supp(f)$ y por lo tanto $d(x,y) \geq \delta > 0$) podemos cambiar el orden de integración para tener

$$\langle T_\alpha f, g \rangle = \int_X \int_X K_\alpha(x,y) f(y) g(x) dm(y) dm(x),$$

con

$$K_\alpha(x,y) = k_\alpha(x,y) + \int_X n_\alpha(x,z)(k_\alpha(x,y) - k_\alpha(y,z)) dm(z).$$

Teorema 4.2.2. *T_α es un operador integral singular. Es decir, para $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$, el operador $T_\alpha : C_c^\beta \to (C_c^\beta)'$ satisface*

$$\langle T_\alpha f, g\rangle = \int_X \int_X K_\alpha(x,y) f(y) g(x) dm(y) dm(x)$$

para $f, g \in C_c^\beta$ con soportes disjuntos, donde K_α es un núcleo estándar:

- *$K_\alpha : X \times X \backslash \Delta \to \mathbb{R}$ es continua (con Δ la diagonal);*
- *$|K_\alpha(x,y)| \lesssim d(x,y)^{-N}$;*
- *existe $C > 1$ tal que si $Cd(x,y) < d(x,z)$ entonces*

  $$|K_\alpha(x,z) - K_\alpha(y,z)| \lesssim \frac{d(x,y)^\eta}{d(x,z)^{N+\eta}}$$

  y

  $$|K_\alpha(z,x) - K_\alpha(z,y)| \lesssim \frac{d(x,y)^{\eta'}}{d(x,z)^{N+\eta'}},$$

  donde en nuestro caso $\eta = 1 - \alpha$ y $\eta' = \text{mín}\{\alpha, 1-\alpha\}$.

Demostración. Por el lema anterior, sólo nos faltan ver las condiciones de suavidad.

- Sean x, y, z satisfaciendo $3d(x,y) < d(x,z)$ (de modo que $d(x,z) \sim d(y,z)$), luego

  $$\begin{aligned}|K_\alpha(x,z) - K_\alpha(y,z)| &\leq |k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)| \\ &+ \int_X |n_\alpha(x,w)(k_\alpha(w,z) - k_\alpha(x,z)) - n_\alpha(y,w)(k_\alpha(w,z) - k_\alpha(y,z))|\, dm(w).\end{aligned}$$

  Para la primera parte, si $d(x,y) < 2$, entonces por 3.1.1, item 5,

  $$\begin{aligned}|k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)| &\leq Cd(x,y) d(x,z)^{-(N+1-\alpha)} \\ &\leq Cd(x,y)^\alpha \frac{d(x,y)^{1-\alpha}}{d(x,z)^{N+1-\alpha}} \leq C\frac{d(x,y)^{1-\alpha}}{d(x,z)^{N+1-\alpha}}\end{aligned}$$

  y si $d(x,y) \geq 2$, entonces de $3d(x,y) < d(x,z)$ se deduce $d(x,z), d(y,z) \geq 4$ y por lo tanto, por 3.1.1, item 6,

  $$\begin{aligned}|k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)| &\leq Cd(x,y) d(x,z)^{-(N+1+\alpha)} \\ &\leq C\left(\frac{d(x,y)}{d(x,z)}\right)^\alpha \frac{d(x,y)^{1-\alpha}}{d(x,z)^{N+1-\alpha}} \leq C\frac{d(x,y)^{1-\alpha}}{d(x,z)^{N+1-\alpha}}.\end{aligned}$$

  Para la otra parte, definimos

  $$A_1 = B\left(x, \frac{3}{2}d(x,y)\right);$$

$$A_2 = B\left(x, \frac{1}{2}d(x,z)\right) \backslash A_1;$$
$$A_3 = X \backslash (A_1 \cup A_2) = X \backslash B\left(x, \frac{1}{2}d(x,z)\right)$$

y abrimos la integral en tres:

$$\int_X |n_\alpha(x,w)(k_\alpha(w,z) - k_\alpha(x,z)) - n_\alpha(y,w)(k_\alpha(w,z) - k_\alpha(y,z))|\, dm(w) =$$
$$= \int_{A1} + \int_{A2} + \int_{A3} = I + II + III.$$

Acotamos primero I. Ponemos el valor absoluto adentro y usamos el hecho que en A_1 se tiene que $d(x,z) \sim d(y,z) \sim d(w,z)$, por lo que, usando el tamaño de n_α y suavidad de k_α, la integral resulta acotada por

$$\begin{aligned} I &\le \int_{A_1} \frac{|k_\alpha(w,z) - k_\alpha(x,z)|}{d(x,w)^{N+\alpha}} dm(w) + \int_{A_1} \frac{|k_\alpha(w,z) - k_\alpha(y,z)|}{d(y,w)^{N+\alpha}} dm(w) \\ &\le C \int_{A_1} \frac{d(x,w)d(x,z)^{-(N+1-\alpha)}}{d(x,w)^{N+\alpha}} dm(w) + C \int_{A_1} \frac{d(y,w)d(x,z)^{-(N+1-\alpha)}}{d(y,w)^{N+\alpha}} dm(w) \\ &\le C \frac{d(x,z)^{-(N+1-\alpha)}}{d(x,y)^{-(1-\alpha)}} = C \frac{d(x,y)^{1-\alpha}}{d(x,z)^{N+1-\alpha}} \end{aligned}$$

(en el primer caso es inmediato, para el segundo agrandamos la bola a una centrada en y y radio comparable).

Ahora para II, sumamos y restamos $k_\alpha(x,z)n_\alpha(y,w)$ y acotamos por

$$\begin{aligned} II \le &\int_{A_2} |n_\alpha(x,w) - n_\alpha(y,w)||k_\alpha(w,z) - k_\alpha(x,z)| dm(w) \\ &+ C \int_{A_2} \frac{|k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)|}{d(y,w)^{N+\alpha}} dm(w), \end{aligned}$$

ahora, como $d(x,z) \sim d(y,z)$ y en A_2 además tenemos que $d(x,w) \sim d(y,w)$ y $d(x,z) \sim d(w,z)$, luego

$$\begin{aligned} II &\le C \int_{A_2} d(x,y)d(x,w)^{-(N+1+\alpha)} d(x,w)d(x,z)^{-(N+1-\alpha)} dm(w) \\ &\quad + C \int_{A_2} \frac{d(x,y)d(x,z)^{-(N+1-\alpha)}}{d(y,w)^{N+\alpha}} dm(w) \\ &\le C \frac{d(x,y)^{1-\alpha}}{d(x,z)^{N+1-\alpha}}, \end{aligned}$$

ya que A_2 se encuentra fuera de $B(x, \frac{3}{2}d(x,y))$.

Finalmente para III, sumamos y restamos $k_\alpha(x,z)n_\alpha(y,w)$ como en A_2 y abrimos la integral en tres:

$$III \le \int_{A_3} |n_\alpha(x,w) - n_\alpha(y,w)| k_\alpha(w,z) dm(w)$$

$$+ C|k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)| \int_{A_3} \frac{1}{d(y,w)^{N+\alpha}} dm(w)$$
$$+ k_\alpha(x,z) \int_{A_3} |n_\alpha(x,w) - n_\alpha(y,w)| dm(w).$$

Para la segunda integral, usamos que $d(x,z) \sim d(y,z)$ para la suavidad de k_α, y además como en A_3 vale $d(x,w) \sim d(y,w)$, resulta

$$\begin{aligned}|k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)| \int_{A_3} \frac{1}{d(y,w)^{N+\alpha}} dm(w) &\leq C \frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+1-\alpha}} \int_{A_3} \frac{1}{d(y,w)^{N+\alpha}} dm(w) \\ &\leq C \frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+1-\alpha}} \int_{A_3} \frac{1}{d(x,w)^{N+\alpha}} dm(w) \\ &\leq C \frac{d(x,y)^{1-\alpha}}{d(x,z)^{N+1-\alpha}},\end{aligned}$$

pues los $w \in A_3$ satisfacen $d(x,w) \geq \frac{3}{2} d(x,y)$.

Para la tercera integral, usando nuevamente que $d(x,w) \sim d(y,w)$, y ahora el tamaño de k_α y suavidad de n_α,

$$\begin{aligned}k_\alpha(x,z) \int_{A_3} |n_\alpha(x,w) - n_\alpha(y,w)| dm(w) &\leq C \frac{1}{d(x,z)^{N-\alpha}} \int_{A_3} \frac{d(x,y)}{d(x,w)^{N+1+\alpha}} dm(w) \\ &\leq C \frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+1}} \leq C \frac{d(x,y)^{1-\alpha}}{d(x,z)^{N+1-\alpha}},\end{aligned}$$

pues A_3 está fuera de $B(x, d(x,z)/2)$ y además $\frac{d(x,y)}{d(x,z)} \leq C \left(\frac{d(x,y)}{d(x,z)} \right)^{1-\alpha}$.

Finalmente para la primera integral, utilizando que $d(x,w) \sim d(y,w)$ y con ello la suavidad de n_α,

$$\int_{A_3} |n_\alpha(x,w) - n_\alpha(y,w)| k_\alpha(w,z) dm(w) \leq C \int_{A_3} \frac{d(x,y)}{d(x,w)^{N+1+\alpha}} \frac{1}{d(w,z)^{N-\alpha}} dm(w);$$

luego separamos A_3 en

$$A_{31} = B\left(x, \frac{3}{2} d(x,z)\right) \backslash B\left(x, \frac{1}{2} d(x,z)\right); \quad A_{32} = A_3 \backslash A_{31};$$

en A_{31} tenemos que $d(x,w) \sim d(x,z)$, por lo que

$$\begin{aligned}\int_{A_{31}} |n_\alpha(x,w) - n_\alpha(y,w)| k_\alpha(w,z) dm(w) &\leq C \frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+1+\alpha}} \int_{A_{31}} \frac{1}{d(w,z)^{N-\alpha}} dm(w) \\ &\leq C \frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+1+\alpha}} d(x,z)^\alpha \\ &\leq C \frac{d(x,y)^{1-\alpha}}{d(x,z)^{N+1-\alpha}},\end{aligned}$$

pues en A_{31} se tiene que $d(w,z) < \frac{5}{2}d(x,z)$; terminamos con la integral en A_{32} como $d(x,w) \sim d(w,z)$, concluimos

$$\int_{A_{32}} |n_\alpha(x,w) - n_\alpha(y,w)|k_\alpha(w,z)dm(w) \leq Cd(x,y)\int_{A_{32}} \frac{1}{d(x,w)^{2N+1}}dm(w)$$
$$\leq C\frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+1}} \leq C\frac{d(x,y)^{1-\alpha}}{d(x,z)^{N+1-\alpha}}.$$

- Para probar la otra estimación de suavidad, sean x, y, z satisfaciendo $3d(x,y) < d(x,z)$ (nuevamente se tiene que $d(x,z) \sim d(y,z)$), luego

$$|K_\alpha(z,x) - K_\alpha(z,y)| \leq |k_\alpha(z,x) - k_\alpha(z,y)|$$
$$+ \int_X n_\alpha(z,w)|k_\alpha(x,w) - k_\alpha(z,x) - k_\alpha(y,w) + k_\alpha(z,y)|dm(w).$$

Para la primer parte, por simetría usamos lo anterior:

$$|k_\alpha(z,x) - k_\alpha(z,y)| = |k_\alpha(x,z) - k_\alpha(y,z)| \leq C\frac{d(x,y)^{1-\alpha}}{d(x,z)^{N+1-\alpha}} \leq C\frac{d(x,y)^{\eta'}}{d(x,z)^{N+\eta'}}.$$

Observar que para estas acotaciones, como $\eta' = \min\{\alpha, 1-\alpha\}$ y $\frac{d(x,y)}{d(x,z)} < C$, tendremos que

$$\frac{d(x,y)^{1-\alpha}}{d(x,z)^{1-\alpha}} \leq C\frac{d(x,y)^{\eta'}}{d(x,z)^{\eta'}}, \qquad \text{y también vale} \qquad \frac{d(x,y)^{\alpha}}{d(x,z)^{\alpha}} \leq C\frac{d(x,y)^{\eta'}}{d(x,z)^{\eta'}}.$$

Para la otra parte, como en el caso anterior dividimos X en tres regiones:

$$A_1 = B\left(z, \frac{1}{2}d(x,z)\right), \quad A_2 = B(z, 2d(x,z))\backslash A_1, \quad A_3 = X\backslash B(z, 2d(x,z))$$

y dividimos la integral con ellas:

$$\int_X n_\alpha(z,w)|k_\alpha(x,w) - k_\alpha(z,x) - k_\alpha(y,w) + k_\alpha(z,y)|dm(w) =$$
$$= \int_{A_1} + \int_{A_2} + \int_{A_3} = I + II + III.$$

Integramos primero en A_1. Aquí $d(x,w) \sim d(x,z) \sim d(y,w) \sim d(y,z)$. Abrimos en $A_{11} = B(z, d(x,y))$ y $A_{12} = A_1 \backslash A_{11}$ (recordar que $d(x,y) < \frac{1}{3}d(x,z)$). En A_{11} acotamos por

$$\int_{A_{11}} n_\alpha(z,w)|k_\alpha(x,w) - k_\alpha(z,x) - k_\alpha(y,w) + k_\alpha(z,y)|dm(w) \leq$$
$$\leq C\int_{A_{11}} \frac{|k_\alpha(w,x) - k_\alpha(z,x)|}{d(z,w)^{N+\alpha}}dm(w) + C\int_{A_{11}} \frac{|k_\alpha(w,y) - k_\alpha(z,y)|}{d(z,w)^{N+\alpha}}dm(w)$$

$$\leq C\frac{1}{d(z,x)^{N+1-\alpha}}\int_{A_{11}}\frac{dm(w)}{d(z,w)^{N-(1-\alpha)}}\leq C\frac{d(x,y)^{1-\alpha}}{d(x,z)^{N+1-\alpha}}\leq C\frac{d(x,y)^{\eta'}}{d(x,z)^{N+\eta'}}.$$

En A_{12} agrupamos primer y tercer término por un lado y segundo y cuarto por el otro y usamos que $d(x,w)\sim d(x,z)$ y nos queda

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{11}} n_\alpha(z,w)|k_\alpha(x,w)-k_\alpha(z,x)-k_\alpha(y,w)+k_\alpha(z,y)|dm(w)\leq\\
&\qquad\leq C\int_{A_{12}}\frac{|k_\alpha(w,x)-k_\alpha(w,y)|}{d(z,w)^{N+\alpha}}dm(w)\\
&\qquad\quad+C|k_\alpha(z,x)-k_\alpha(z,y)|\int_{A_{12}}\frac{1}{d(z,w)^{N+\alpha}}dm(w)\\
&\qquad\leq Cd(x,y)\int_{A_{12}}\frac{1}{d(x,w)^{N+1-\alpha}}\frac{1}{d(z,w)^{N+\alpha}}dm(w)\\
&\qquad\quad+C\frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+1-\alpha}}\int_{A_{12}}\frac{1}{d(z,w)^{N+\alpha}}dm(w)\\
&\qquad\leq C\frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+1-\alpha}}\int_{A_{12}}\frac{1}{d(z,w)^{N+\alpha}}dm(w)\\
&\qquad\leq C\frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+1-\alpha}}\frac{1}{d(x,y)^{\alpha}}\leq C\frac{d(x,y)^{\eta'}}{d(x,z)^{N+\eta'}}
\end{aligned}$$

(dado que $d(x,y)<d(x,z)/3$ y que $\eta'\leq 1-\alpha$).

Para II, agrupamos como en A_{12} y acotamos de igual manera por

$$II\leq C\int_{A_2}\frac{|k_\alpha(z,x)-k_\alpha(z,y)|}{d(z,w)^{N+\alpha}}dm(w)+C\int_{A_2}\frac{|k_\alpha(w,x)-k_\alpha(w,y)|}{d(z,w)^{N+\alpha}}dm(w);$$

para el primer término usamos que $d(x,z)\sim d(y,z)$

$$\begin{aligned}
\int_{A_2}\frac{|k_\alpha(z,x)-k_\alpha(z,y)|}{d(z,w)^{N+\alpha}}dm(w)&\leq C\frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+1-\alpha}}\int_{A_2}\frac{dm(w)}{d(z,w)^{N+\alpha}}\\
&\leq C\frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+1-\alpha}}d(x,z)^{-\alpha}\leq C\frac{d(x,y)^{\eta'}}{d(x,z)^{N+\eta'}};
\end{aligned}$$

y para el segundo dividimos en dos regiones: $A_{21}=A_2\cap B(x,2d(x,y))$ y $A_{22}=A_2\setminus A_{21}$. En A_2 tenemos que $d(z,w)\sim d(z,x)$, luego para A_{21}, abriendo la diferencia como una suma, nos queda

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{21}}\frac{|k_\alpha(w,x)-k_\alpha(w,y)|}{d(z,w)^{N+\alpha}}dm(w)\leq\\
&\qquad\qquad\leq C\frac{1}{d(x,z)^{N+\alpha}}\left(\int_{C_1}\frac{dm(w)}{d(x,w)^{N-\alpha}}+\int_{C_1}\frac{dm(w)}{d(y,w)^{N-\alpha}}\right)\\
&\qquad\qquad\leq C\frac{1}{d(x,z)^{N+\alpha}}d(x,y)^{\alpha}\leq C\frac{d(x,y)^{\eta'}}{d(x,z)^{N+\eta'}};
\end{aligned}$$

ya que $A_{21} \subset B(x, 2d(x,y)) \subset B(y, 3d(x,y))$. Para A_{22} usamos que también vale que $d(w,x) \sim d(w,y)$ y entonces se acota como

$$\begin{aligned}\int_{A_{22}} \frac{|k_\alpha(w,x) - k_\alpha(w,y)|}{d(z,w)^{N+\alpha}} dm(w) &\leq C \frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+\alpha}} \int_{A_{22}} \frac{1}{d(x,w)^{N+1-\alpha}} dm(w) \\ &\leq C \frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+\alpha}} \frac{1}{d(x,y)^{1-\alpha}} \leq C \frac{d(x,y)^{\eta'}}{d(x,z)^{N+\eta'}},\end{aligned}$$

ya que $A_{22} \subset B(x, 2d(x,y))^c \subset B(y, d(x,y))^c$.

Finalmente para III, como en A_3 tenemos que $d(w,x) \sim d(w,y)$, y como también tenemos que vale $d(z,x) \sim d(z,y)$, abrimos la integral

$$\begin{aligned}III &\leq C \int_{A_3} \frac{|k_\alpha(w,x) - k_\alpha(w,y)|}{d(z,w)^{N+\alpha}} dm(w) + C \int_{A_3} \frac{|k_\alpha(z,x) - k_\alpha(z,y)|}{d(z,w)^{N+\alpha}} dm(w) \\ &\leq C d(x,y) \int_{A_3} \frac{1}{d(w,x)^{N+1-\alpha}} \frac{1}{d(z,w)^{N+\alpha}} dm(w) \\ &\quad + C \frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+1-\alpha}} \int_{A_3} \frac{dm(w)}{d(z,w)^{N+\alpha}} \\ &\leq C \frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+1-\alpha}} \int_{A_3} \frac{dm(w)}{d(z,w)^{N+\alpha}} \\ &\leq C \frac{d(x,y)}{d(x,z)^{N+1-\alpha}} d(x,z)^{-\alpha} \leq C \frac{d(x,y)^{\eta'}}{d(x,z)^{N+\eta'}}\end{aligned}$$

donde hemos usado que para $w \in A_3$ vale $d(w,x) \geq d(x,z)$.

□

Hasta aquí hemos probado que T_α tiene asociado un núcleo integral singular. Nos preguntamos ahora si esto también será así para la composición $S_\alpha = J_\alpha \Delta_\alpha$. La respuesta viene dada por el próximo lema.

Lema 4.2.3. $T_\alpha^* = S_\alpha$.

Demostración. Sean $f, g \in C_c^\beta$ con soportes disjuntos, $\beta > \alpha$, luego como J_α es autoadjunto (ya que su núcleo es simétrico), se tiene

$$\langle f, S_\alpha g \rangle = \langle f, J_\alpha \Delta_\alpha g \rangle = \langle J_\alpha f, \Delta_\alpha g \rangle = \langle J_\alpha f, g \rangle + \langle J_\alpha f, D_\alpha g \rangle.$$

Y basta ver que D_α también se puede intercambiar, para concluir $\langle f, S_\alpha g \rangle = \langle T_\alpha f, g \rangle$. Veremos entonces que si $\gamma > \alpha$ y $f \in C^\gamma$, $g \in C_c^\beta$, entonces

$$\langle D_\alpha f, g \rangle = \langle f, D_\alpha g \rangle.$$

En efecto, la integral doble

$$\langle D_\alpha f, g \rangle = \iint_{X \times X} n_\alpha(x,y)(f(x) - f(y)) g(x) dm(y) dm(x)$$

converge absolutamente, luego podemos reescribirla como

$$\begin{aligned}\langle D_\alpha f, g\rangle = &\iint (f(x)g(y) - f(y)g(x))n_\alpha(x,y)dm(y)dm(x)\\ &+ \iint f(x)(g(x) - g(y))n_\alpha(x,y)dm(y)dm(x).\end{aligned}$$

La segunda integral converge absolutamente y es igual a $\langle f, D_\alpha g\rangle$; luego la primer integral también converge absolutamente y es cero porque el integrando es 'antisimétrico'. □

Finalmente enunciamos y demostramos el resultado que concluye esta sección.

Teorema 4.2.4. *T_α y S_α son operadores de Calderón-Zygmund, y por lo tanto si $1 < p < \infty$,*

$$T_\alpha : L^p \to L^p, \quad S_\alpha : L^p \to L^p.$$

Demostración. Veremos que T_α es un CZO, y por el lema anterior S_α también será un CZO. Para ello usaremos el teorema $T1$.

Para comprobar la propiedad de acotación débil, sean $f, g \in C_c^\beta(B)$,

$$\begin{aligned}|\langle T_\alpha f, g\rangle| &\le \int_B |T_\alpha f(x)||g(x)|dm(x) \le \|T_\alpha f\|_\infty \|g\|_\infty m(B) \le C[f]_\beta m(B)^{\beta/N}\|g\|_\infty m(B)\\ &\le C[f]_\beta m(B)^{\beta/N}[g]_\beta diam(B)^\beta m(B) \le Cm(B)^{1+\frac{2\beta}{N}}[f]_\beta[g]_\beta,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $\|g\|_\infty \le C[g]_\beta diam(B)^\beta$ (pues g es Lipschitz de soporte compacto) y que $\|T_\alpha f\|_\infty \le C[f]_\beta m(B)^{\beta/N}$, pues para $f \in C_c^\beta$ claramente J_α satiface $\|J_\alpha f\|_\infty \le \|f\|_\infty \le C[f]_\beta diam(B)^\beta$, y además

$$|J_\alpha f(x)| \le C\int_B \frac{f(y)}{d(x,y)^{N-\alpha}}dm(y) \le C\|f\|_\infty diam(B)^\alpha \le C[f]_\beta diam(B)^{\alpha+\beta}.$$

Luego

$$\begin{aligned}|T_\alpha f(x)| &\le |J_\alpha f(x)| + C\int_X \frac{|J_\alpha f(x) - J_\alpha f(y)|}{d(x,y)^{N+\alpha}}dm(y)\\ &\le C[f]_\beta diam(B)^\beta + C\int_{d(x,y)<diam(B)} \frac{|J_\alpha f(x) - J_\alpha f(y)|}{d(x,y)^{N+\alpha}}dm(y)\\ &\quad + C\int_{d(x,y)\ge diam(B)} \frac{\|J_\alpha f\|_\infty}{d(x,y)^{N+\alpha}}dm(y)\\ &\le C[f]_\beta diam(B)^\beta,\end{aligned}$$

por lo anterior y porque J_α aumenta la regularidad Lipschitz en α.

Además, $T_\alpha 1 = \Delta_\alpha J_\alpha 1 = \Delta_\alpha 1 = 1$ y $S_\alpha 1 = J_\alpha \Delta_\alpha 1 = 1$, que coinciden ambas con la función 0 en BMO, por lo que concluimos que T_α es un CZO. □

4.3. Inversibilidad de T_α: el operador Q_t

En esta sección probaremos un resultado que será clave para los desarrollos subsiguientes. Nos interesa encontrar condiciones para las que T_α sea inversible en L^p: esto nos permitirá encontrar una "inversa" del potencial de Bessel, pues

$$J_\alpha^{-1} = T_\alpha^{-1}\Delta_\alpha,$$

con lo que en norma tendríamos

$$\|f\|_{\alpha,p} = \|J_\alpha^{-1}f\|_p \leq C\|\Delta_\alpha f\|_p.$$

Para ello, seguimos a [GSV] y [HV] apuntaremos a probar que T_α, mirándolo como un operador acotado en L^p para $1 < p < \infty$, está en un entorno de la identidad de radio menor a 1, es decir

$$\|I - T_\alpha\|_{L^p \to L^p} < 1$$

(que es suficiente para que T_α tenga inversa). Como veremos, para lograr esto tendremos que restringir los valores de α.

De acuerdo a las fórmulas de reproducción de Calderón dadas en el lema 1.2.4, el operador identidad se puede escribir en términos de $Q_t = -t\frac{d}{dt}S_t$. El primer paso será entonces escribir T_α también en esa forma, y así poder compararlo más fácilmente.

Veamos primero cómo se escriben J_α y Δ_α con Q_t, para $f \in C_c^\beta$:

$$\begin{aligned}
J_\alpha f(x) &= \int_X k_\alpha(x,y)f(y)dm(y) = \int_X\int_0^\infty \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^2}s(x,y,t)f(y)dtdm(y) \\
&= \int_0^\infty \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{(1+t^\alpha)^2}S_tf(x)dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+t^{-\alpha}}\right)S_tf(x)dt \\
&= \frac{S_tf(x)}{1+t^{-\alpha}}\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{1+t^{-\alpha}}\left(-t\frac{d}{dt}S_tf(x)\right)\frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{1+t^{-\alpha}}Q_tf(x)\frac{dt}{t},
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $S_tf(x) \to 0$ cuando $t \to \infty$ y $S_tf(x) \to f(x)$ cuando $t \to 0$ para $f \in C_c^\beta$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
D_\alpha f(x) &= \int_X n_\alpha(x,y)(f(x)-f(y))dm(y) \\
&= \int_X\int_0^\infty \alpha t^{-\alpha-1}s(x,y,t)(f(x)-f(y))dtdm(y) \\
&= \int_0^\infty \alpha t^{-\alpha-1}(f(x)-S_tf(x))dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(t^{-\alpha}\right)(S_tf(x)-f(x))dt
\end{aligned}$$

$$= \left.\frac{(S_t f(x) - f(x))}{t^\alpha}\right|_0^\infty + \int_0^\infty t^{-\alpha}\left(-t\frac{d}{dt}S_t f(x)\right)\frac{dt}{t}$$
$$= \int_0^\infty t^{-\alpha} Q_t f(x)\frac{dt}{t};$$

y como a su vez vimos en 1.2.4 que para $f \in C_c^\beta$ vale

$$f(x) = -\int_0^\infty \frac{d}{dt}S_t f(x)dt = \int_0^\infty Q_t f(x)\frac{dt}{t},$$

tenemos que

$$\Delta_\alpha f(x) = (I + D_\alpha)f(x) = \int_0^\infty (1 + t^{-\alpha})Q_t f(x)\frac{dt}{t}.$$

De esta forma,

$$T_\alpha f = \Delta_\alpha J_\alpha f = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1 + s^{-\alpha}}{1 + t^{-\alpha}} Q_s Q_t f \frac{dt}{t}\frac{ds}{s},$$

y como también, nuevamente por 1.2.4,

$$f = \int_0^\infty \int_0^\infty Q_s Q_t f \frac{dt}{t}\frac{ds}{s},$$

tenemos que

$$(I - T_\alpha)f = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(1 - \frac{1 + s^{-\alpha}}{1 + t^{-\alpha}}\right) Q_s Q_t f \frac{dt}{t}\frac{ds}{s}$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{t^{-\alpha} - s^{-\alpha}}{1 + t^{-\alpha}} Q_s Q_t f \frac{dt}{t}\frac{ds}{s}$$
$$= \int_0^\infty (1 - v^\alpha)\left(\int_0^\infty \frac{1}{1 + (uv)^\alpha} Q_u Q_{uv} f \frac{du}{u}\right)\frac{dv}{v}.$$

Definimos entonces para cada $v > 0$ el operador

$$T_{\alpha,v} f = \int_0^\infty \frac{1}{1 + (uv)^\alpha} Q_u Q_{uv} f \frac{du}{u},$$

y, siguiendo a [Hz], si logramos ver que

$$\|T_{\alpha,v} f\|_p \le C(\alpha, v)\|f\|_p,$$

con

$$\int_0^\infty |1 - v^\alpha| C(\alpha, v)\frac{dv}{v} < 1$$

para α lo suficientemente pequeño, entonces tendremos que

$$\|(I - T_\alpha)f\|_p \leq \int_0^\infty |1 - v^\alpha| \|T_{v,\alpha} f\|_p \frac{dv}{v} < \|f\|_p$$

y T_α será inversible para esos valores de α.

Como primer paso debemos escribir a $T_{\alpha,v}$ como un operador integral singular. Para ello necesitaremos de un lema que nos garantice que podamos encontrar su núcleo.

Lema 4.3.1. *Para todo $u, v > 0$, $x, z \in X$,*

$$\left| \int_X q(x,y,u) q(y,z,uv) dm(y) \right| \leq C \left(v \wedge \frac{1}{v^{N+1}} \right) \frac{1}{u^N} \chi_{\left(\frac{d(x,z)}{4(v+1)}, \infty \right)}(u).$$

Luego se tiene que si $x \neq z$,

$$\left| \int_0^\infty \frac{1}{1 + (uv)^\alpha} \int_X q(x,y,u) q(y,z,uv) dm(y) \frac{du}{u} \right| \leq C \left(v \wedge \frac{1}{v} \right) \frac{1}{d(x,z)^N} < \infty.$$

Demostración. La segunda acotación es una consecuencia de la primera, pues

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty \frac{1}{1 + (uv)^\alpha} \int_X q(x,y,u) q(y,z,uv) dm(y) \frac{du}{u} \right| &\leq C \left(v \wedge \frac{1}{v^{N+1}} \right) \int_{\frac{d(x,z)}{4(v+1)}}^\infty \frac{1}{u^N} \frac{du}{u} \\ &\leq C \left(v \wedge \frac{1}{v^{N+1}} \right) \frac{(v+1)^N}{d(x,z)^N} \\ &\leq C \left(v \wedge \frac{1}{v} \right) \frac{1}{d(x,z)^N}. \end{aligned}$$

Para la primera estimación, por el lema 1.2.3 se tiene que

$$q(x,y,u) = 0 \text{ si } d(x,y) \geq 4u; \quad q(y,z,uv) = 0 \text{ si } d(y,z) \geq 4uv,$$

luego se debe cumplir $d(x,z) < 4u(v+1)$, y allí, si $v \geq 1$, como tenemos que vale $\int_X q(x,y,u) q(x,z,uv) dm(y) = 0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_X q(x,y,u) q(y,z,uv) dm(y) \right| &= \left| \int_X q(x,y,u) (q(y,z,uv) - q(x,z,uv)) dm(y) \right| \\ &\leq C \int_{B(x,4u)} \frac{1}{u^N} \frac{d(x,y)}{(uv)^{N+1}} dm(y) \leq C \frac{1}{u^N} \frac{1}{v^{N+1}}; \end{aligned}$$

y si $v < 1$, como $\int_X q(x,z,u) q(y,z,uv) dm(y) = 0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_X q(x,y,u) q(y,z,uv) dm(y) \right| &= \left| \int_X (q(x,y,u) - q(x,z,u)) q(y,z,uv) dm(y) \right| \\ &\leq C \int_{B(z,4uv)} \frac{d(y,z)}{u^{N+1}} \frac{1}{(uv)^N} dm(y) \leq C \frac{1}{u^N} v. \end{aligned}$$

Como todo lo anterior vale si $u > \frac{d(x,z)}{4(v+1)}$, tenemos lo deseado. □

Sean ahora $f, g \in C_c^\beta$ con soportes disjuntos y sea $x \in supp(g)$. Entonces

$$\begin{aligned} T_{\alpha,v}f(x) &= \int_0^\infty \frac{1}{1+(uv)^\alpha} Q_u Q_{uv} f \frac{du}{u} \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+(uv)^\alpha} \left(\int_X q(x,y,u) \left(\int_X q(y,z,uv) f(z) dm(z) \right) dm(y) \right) \frac{du}{u} \end{aligned}$$

y como $x \notin supp(f)$ la integral converge absolutamente y podemos cambiar el orden de integración y obtener

$$\langle T_{\alpha,v} f, g \rangle = \int_X \int_X N_{\alpha,v}(x,z) f(z) g(x) dm(z) dm(x),$$

con

$$N_{\alpha,v}(x,z) = \int_0^\infty \frac{1}{1+(uv)^\alpha} \int_X q(x,y,u) q(y,z,uv) dm(y) \frac{du}{u}.$$

Del lema anterior tenemos que $N_{\alpha,v}(x,z) \leq C \left(v \wedge \frac{1}{v}\right) \frac{1}{d(x,z)^N}$. Para ver que $T_{\alpha,v}$ es un operador integral singular nos faltan ver las condiciones de suavidad. Para ello necesitamos el siguiente lema:

Lema 4.3.2. *Para todo $u, v > 0$, $x, x', z \in X$, y $0 < \delta < 1$, se tiene que*

$$\begin{aligned} &\left| \int_X (q(x,y,u) - q(x',y,u)) q(y,z,uv) dm(y) \right| \leq \\ &\qquad \leq C \left(\frac{d(x,x')}{u} \right)^{1-\delta} \left(v^\delta \wedge \frac{1}{v^{N+1}} \right) \frac{1}{u^N} \chi_{\left(\frac{d(x,z) \wedge d(x',z)}{4(v+1)}, \infty \right)}(u). \end{aligned}$$

Luego se tiene que

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\infty \frac{1}{1+(uv)^\alpha} \int_X (q(x,y,u) - q(x',y,u)) q(y,z,uv) dm(y) \frac{du}{u} \right| \leq \\ &\qquad \leq C \frac{d(x,x')^{1-\delta}}{(d(x,z) \wedge d(x',z))^{N+1-\delta}} \left(v \wedge \frac{1}{v} \right)^\delta. \end{aligned}$$

Demostración. Igual que en el lema anterior, la segunda sale de la primera. Ahora, para ésta, separamos en casos: si $v \geq 1$ y $d(x,x') \geq u$, usamos el lema anterior y acotamos por

$$\begin{aligned} &\left| \int_X (q(x,y,u) - q(x',y,u)) q(y,z,uv) dm(y) \right| \leq \\ &\qquad \leq C \frac{1}{v^{N+1}} \frac{1}{u^N} \left(\chi_{\left(\frac{d(x,z)}{4(v+1)}, \infty \right)}(u) + \chi_{\left(\frac{d(x',z)}{4(v+1)}, \infty \right)}(u) \right) \\ &\qquad \leq C \frac{1}{v^{N+1}} \frac{1}{u^N} \chi_{\left(\frac{d(x,z) \wedge d(x',z)}{4(v+1)}, \infty \right)}(u) \\ &\qquad \leq C \frac{1}{v^{N+1}} \frac{1}{u^N} \chi_{\left(\frac{d(x,z) \wedge d(x',z)}{4(v+1)}, \infty \right)}(u) \left(\frac{d(x,x')}{u} \right)^{1-\delta}. \end{aligned}$$

Y si $d(x,x') < u$, el integrando será no nulo sólo si $d(x,z) < 4u(v+1)$ ó $d(x',z) < 4u(v+1)$

$$\begin{aligned}
\left|\int_X (q(x,y,u) - q(x',y,u))q(y,z,uv)dm(y)\right| &= \\
&= \left|\int_X (q(x,y,u) - q(x',y,u))(q(y,z,uv) - q(x,z,uv))dm(y)\right| \\
&\leq Cd(x,x')\frac{1}{u^{N+1}}\frac{1}{(uv)^{N+1}}\int_{B(x,4u)\cup B(x',4u)} d(x,y)dm(y) \\
&\leq C\frac{1}{v^{N+1}}\frac{1}{u^N}\chi_{\left(\frac{d(x,z)\wedge d(x',z)}{4(v+1)},\infty\right)}(u)\left(\frac{d(x,x')}{u}\right) \\
&\leq C\frac{1}{v^{N+1}}\frac{1}{u^N}\chi_{\left(\frac{d(x,z)\wedge d(x',z)}{4(v+1)},\infty\right)}(u)\left(\frac{d(x,x')}{u}\right)^{1-\delta}.
\end{aligned}$$

Para el caso $v < 1$, por un lado usamos el lema anterior (4.3.1) para obtener

$$\left|\int_X (q(x,y,u) - q(x',y,u))q(y,z,uv)dm(y)\right| \leq Cv\frac{1}{u^N}\chi_{\left(\frac{d(x,z)\wedge d(x',z)}{4(v+1)},\infty\right)}(u),$$

y por otro, acotamos directamente por

$$\left|\int_X (q(x,y,u) - q(x',y,u))q(y,z,uv)dm(y)\right| \leq C\frac{d(x,x')}{u}\frac{1}{u^N}\chi_{\left(\frac{d(x,z)\wedge d(x',z)}{4(v+1)},\infty\right)}(u),$$

y elevamos la primer desigualdad a la δ y la segunda a la $1-\delta$ y multiplicamos para obtener

$$\left|\int_X (q(x,y,u) - q(x',y,u))q(y,z,uv)dm(y)\right| \leq v^\delta\left(\frac{d(x,x')}{u}\right)^{1-\delta}\frac{1}{u^N}\chi_{\left(\frac{d(x,z)\wedge d(x',z)}{4(v+1)},\infty\right)}(u).$$

□

Fijamos ahora un $0 < \delta < 1$ como en el lema anterior y tenemos

Teorema 4.3.3. *$T_{\alpha,v}$ es un operador integral singular. Su núcleo $N_{\alpha,v}$ satisface*

$$|N_{\alpha,v}(x,z)| \leq C\left(v \wedge \frac{1}{v}\right)^\delta \frac{1}{d(x,z)^N};$$

y si $3d(x,x') < d(x,z)$,

$$|N_{\alpha,v}(x,z) - N_{\alpha,v}(x',z)| \leq C\left(v \wedge \frac{1}{v}\right)^\delta \frac{d(x,x')^{1-\delta}}{d(x,z)^{N+1-\delta}}$$

y

$$|N_{\alpha,v}(z,x) - N_{\alpha,v}(z,x')| \leq C\left(v \wedge \frac{1}{v}\right)^\delta \frac{d(x,x')^{1-\delta}}{d(x,z)^{N+1-\delta}}.$$

Demostración. Las acotaciones surgen de los lemas anteriores y de la simetría de q. $\square$

Veremos ahora que se trata de operadores de Calderón-Zygmund a través del teorema $T1$. Demostramos las condiciones faltantes en el siguiente lema.

Lema 4.3.4. *$T_{\alpha,v}$ satisface*

$$T_{\alpha,v}1 = 0,$$

$$T^*_{\alpha,v}1 = 0,$$

y para $f, g \in C^\beta_c$ con soporte en una misma bola B,

$$|\langle T_{\alpha,v}f, g\rangle| \leq C\left(v \wedge \frac{1}{v}\right)^\delta m(B)^{1+\frac{2\beta}{N}}[f]_\beta[g]_\beta.$$

Demostración. La primera es trivial, y la segunda surge de que, como q es simétrico,

$$\begin{aligned}
\langle T_{\alpha,v}f, g\rangle &= \int_X \left(\int_X N_{\alpha,v}(x,z)f(z)dm(z)\right) g(x)dm(x)\\
&= \int_X \int_X \int_0^\infty \int_X \frac{1}{1+(uv)^\alpha} q(x,y,u)q(y,z,uv)dm(y)\frac{du}{u} f(z)dm(z)g(x)dm(x)\\
&= \int_X \int_X \int_0^\infty \int_X \frac{1}{1+(uv)^\alpha} q(z,y,uv)q(y,x,u)dm(y)\frac{du}{u} g(x)dm(x)f(z)dm(z)\\
&= \int_X f(z)\left(\int_X N^*_{\alpha,v}(z,x)g(x)dm(x)\right) dm(z) = \langle f, T^*_{\alpha,v}g\rangle
\end{aligned}$$

y claramente $T^*_{\alpha,v}1 = 0$.

Para la tercera, escribimos

$$\langle T_{\alpha,v}f, g\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{1+(uv)^\alpha} \int_X \int_X \int_X q(x,y,u)q(y,z,uv)f(z)g(x)dm(y)dm(z)dm(x)\frac{du}{u}$$

y observamos que

- Por el lema 4.3.1,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_X \int_X \int_X q(x,y,u)q(y,z,uv)f(z)g(x)dm(y)dm(z)dm(x)\right| \leq\\
&\qquad \leq C\|f\|_\infty\|g\|_\infty \left(v \wedge \frac{1}{v^{N+1}}\right)\frac{1}{u^N}\int_B\int_B \chi_{B(x,4u(v+1))}(z)dm(z)dm(x)\\
&\qquad \leq C[f]_\beta[g]_\beta m(B)^{2\beta/N}\left(v \wedge \frac{1}{v^{N+1}}\right) m(B)(v+1)^N\\
&\qquad \leq C\left(v \wedge \frac{1}{v}\right)[f]_\beta[g]_\beta m(B)^{1+2\beta/N}.
\end{aligned}$$

- Pero también, utilizando que $\int_X q(x,y,u)q(y,z,uv)f(y)g(x)dm(z)=0$,

$$\left|\int_X\int_X\int_X q(x,y,u)q(y,z,uv)f(z)g(x)dm(y)dm(z)dm(x)\right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\int_X\int_X\int_X q(x,y,u)q(y,z,uv)(f(z)-f(y))g(x)dm(z)dm(y)dm(x)\right| \\
&\leq C[f]_\beta\|g\|_\infty \int_B \fint_{B(x,4u)} \fint_{B(y,4uv)} d(z,y)^\beta dm(z)dm(y)dm(x) \\
&\leq C[f]_\beta[g]_\beta m(B)^{1+\beta/N}(uv)^\beta \\
&\leq C\left(\frac{uv}{m(B)^{1/N}}\right)^\beta [f]_\beta[g]_\beta m(B)^{1+2\beta/N}.
\end{aligned}$$

- Y por último también se tiene

$$\left|\int_X\int_X\int_X q(x,y,u)q(y,z,uv)f(z)g(x)dm(y)dm(z)dm(x)\right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\|f\|_\infty\|g\|_\infty\frac{m(B)^2}{(uv)^N} \\
&\leq C\left(\frac{uv}{m(B)^{1/N}}\right)^{-N} [f]_\beta[g]_\beta m(B)^{1+2\beta/N}.
\end{aligned}$$

Nuevamente tomando combinaciones convexas en los exponentes tenemos que

$$\left|\int_X\int_X\int_X q(x,y,u)q(y,z,uv)f(z)g(x)dm(y)dm(z)dm(x)\right| \leq$$

$$\leq C\left(v\wedge\frac{1}{v}\right)^\delta \left(\left(\frac{uv}{m(B)^{1/N}}\right)^\beta \wedge \left(\frac{m(B)^{1/N}}{uv}\right)^N\right)^{1-\delta} [f]_\beta[g]_\beta m(B)^{1+2\beta/N},$$

y concluimos

$$|\langle T_{\alpha,v}f,g\rangle| \leq C\left(v\wedge\frac{1}{v}\right)^\delta [f]_\beta[g]_\beta m(B)^{1+2\beta/N}.$$

□

Entonces, como consecuencia del teorema 4.3.3 y del lema 4.3.4, concluimos que cada $T_{\alpha,v}$ es un operador de Calderón-Zygmund y por lo tanto tendremos

Teorema 4.3.5. *Para $1<p<\infty$ y $0<\delta<1$ se tiene que*

$$\|T_{\alpha,v}f\|_p \leq C_{p,\alpha,v}\|f\|_p,$$

con $C_{p,\alpha,v}\leq C_p\left(v\wedge\frac{1}{v}\right)^\delta$.

Luego por la observación que realizamos al comienzo de la sección

Teorema 4.3.6. *Existe* α_0 *tal que si* $\alpha < \alpha_0$,

$$\|(I - T_\alpha)\|_{L^p \to L^p} < 1,$$

y por lo tanto T_α *es inversible y*

$$T_\alpha^{-1} : L^p \to L^p.$$

Observación 4.3.7. Observar que del teorema 4.3.5 surge también que $\|(I - T_\alpha)f\|_p < \infty$ para todo $0 < \alpha < 1$, y por lo tanto en ese caso se tiene que $T_\alpha : L^p \to L^p$ sin ver que es un operador de Calderón-Zygmund.

4.4. Una caracterización de $L^{\alpha,p}$

De las secciones anteriores podemos concluir el siguiente teorema de caracterización:

Teorema 4.4.1. *Sean* $1 < p < \infty$, *y* $0 < \alpha < 1$. *Consideremos los siguientes enunciados:*

1. $f \in L^{\alpha,p}$
2. $f, D_\alpha f \in L^p$.

Entonces $(1) \Rightarrow (2)$. *Además, si* $\alpha < \alpha_0$, *se tiene que* $(2) \Rightarrow (1)$.

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ Como T_α es integral singular, $\|T_\alpha g\|_p \leq C\|g\|_p$, y si $g \in C_c^\beta$ para $\alpha + \beta < 1$,

$$T_\alpha g = \Delta_\alpha J_\alpha g = \Delta_\alpha f = f + D_\alpha f,$$

luego como $f, T_\alpha g \in L^p$, será $D_\alpha f \in L^p$, y además

$$\|D_\alpha f\|_p \leq \|f\|_p + \|T_\alpha g\|_p \leq \|f\|_p + C\|g\|_p \leq C\|f\|_{\alpha,p}.$$

Como C_c^β es denso en L^p, $J_\alpha(C_c^\beta)$ será denso en $L^{\alpha,p}$, y tenemos lo deseado.

Más aún, $\|\Delta_\alpha f\|_p \leq C\|f\|_{\alpha,p}$, y como $\Delta_\alpha J_\alpha = T_\alpha$ en un denso de L^p, coinciden en todo L^p y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} L^p \arrow[r, "J_\alpha"] \arrow[dr, "T_\alpha"'] & L^{\alpha,p} \arrow[d, "\Delta_\alpha"] \\ & L^p \end{tikzcd}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) En este caso, $T_\alpha : L^p \to L^p$ es biyectiva, y como $T_\alpha = \Delta_\alpha J_\alpha$, resulta que

$$T_\alpha^{-1} T_\alpha = (T_\alpha^{-1}\Delta_\alpha) J_\alpha = Id_{L^p},$$

con lo que $J_\alpha : L^p \to L^{\alpha,p}$ es biyectiva (pues de lo anterior se desprende inyectividad, y además es sobre), luego Δ_α también es biyectiva y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} L^p \arrow[r, "J_\alpha"] & L^{\alpha,p} \\ & L^p \arrow[u, "\Delta_\alpha^{-1}"'] \arrow[ul, "T_\alpha^{-1}"] \end{tikzcd}$$

(por el teorema de la aplicación abierta, las inversas son continuas).

Por lo tanto si definimos $g = T_\alpha^{-1}\Delta_\alpha f \in L^p$, tendremos que

$$J_\alpha g = (J_\alpha T_\alpha^{-1})\Delta_\alpha f = \Delta_\alpha^{-1}\Delta_\alpha f = f.$$

$\square$

Observación 4.4.2. En el teorema se ha probado que $T_\alpha = \Delta_\alpha J_\alpha$ vale en L^p (para $0 < \alpha < 1$ y $1 < p < \infty$) y que Δ_α y J_α son inversibles para $\alpha < \alpha_0$, y en particular $J_\alpha^{-1} : L^{\alpha,p} \to L^p$ se escribe como $J_\alpha^{-1} = T_\alpha^{-1}\Delta_\alpha$. Más aún, se ha visto que para $0 < \alpha < 1$

$$\|D_\alpha f\|_p \leq C\|f\|_{\alpha,p}$$

y si $\alpha < \alpha_0$,

$$\|(I + D_\alpha)f\|_p \sim \|f\|_{\alpha,p}.$$

Como corolario de esta caracterización, junto con 3.3.6 y 4.1.6, tenemos la siguiente relación entre $L^{\alpha,p}$ y espacios de Hajłasz-Sobolev:

Corolario 4.4.3. *Si $0 < \alpha < \alpha_0$ y $\epsilon > 0$ satisface $0 < \alpha + \epsilon < 1$, para $1 < p < \infty$ tenemos que*

$$M^{\alpha+\epsilon,p} \hookrightarrow L^{\alpha,p} \hookrightarrow M^{\alpha,p}.$$

Demostración. La segunda relación vale para $\alpha < 1$; para la primera, como

$$D_\alpha : M^{\alpha+\epsilon,p} \to M^{\epsilon,p},$$

en particular $f, D_\alpha f \in L^p$ y $\|D_\alpha f\|_p \leq C\|f\|_{M^{\alpha+\epsilon,p}}$, luego por el teorema como $\alpha < \alpha_0$ llegamos al resultado que queríamos. $\square$

A su vez, utilizando este resultado junto con el teorema 2.2.10 que relaciona espacios de Sobolev y Besov,

Corolario 4.4.4. *Si* $0 < \alpha < \alpha_0$ *y* $0 < \epsilon < \alpha$ *satisface* $0 < \alpha + \epsilon < 1$*, para* $1 < p < \infty$ *tenemos que*

$$B^{\alpha+\epsilon}_{p,p} \hookrightarrow L^{\alpha,p} \hookrightarrow B^{\alpha-\epsilon}_{p,p}.$$

Más aún por 3.3.4 la inclusión $B^{\alpha+\epsilon}_{p,p} \hookrightarrow L^{\alpha,p}$ es densa. Obtenemos también la siguiente relación entre espacios potenciales:

Corolario 4.4.5. *Si* $0 < \alpha < \beta < 1$ *y además* $\alpha < \alpha_0$*, entonces para* $1 < p < \infty$

$$L^{\beta,p} \hookrightarrow L^{\alpha,p}.$$

Demostración. Como $\alpha < \beta = \alpha + (\beta - \alpha) < 1$ y $\alpha < \alpha_0$, por 3.3.6 y por lo anterior

$$L^{\beta,p} \hookrightarrow M^{\beta,p} \hookrightarrow L^{\alpha,p}.$$

$\square$

Como último corolario del teorema 4.4.1 de esta sección, veremos una caracterización de $L^{\alpha,p}$ en términos del potencial de Riesz I_α, como lo definimos para 3.1.3. En [GSV] se prueba que existe $0 < \tilde{\alpha}_0 < 1$ tal que, si $\alpha < \tilde{\alpha}_0$, entonces el operador composición $\tilde{T}_\alpha = D_\alpha I_\alpha$ es inversible en L^p, para $1 < p < \infty$. Luego tenemos:

Corolario 4.4.6. *Para* $\alpha > 0$ *satisfaciendo* $\alpha < \alpha_0 \wedge \tilde{\alpha}_0$ *y* $1 < p < \infty$*, se tiene que* $f \in L^{\alpha,p}$ *si y sólo si* $f \in L^p$ *y existe* $\gamma \in L^p$ *tal que* $f = I_\alpha \gamma$*.*

Demostración. Como $\alpha < \alpha_0$ por 4.4.1 bastará probar que, dada $f \in L^p$, existirá $\gamma \in L^p$ con $f = I_\alpha \gamma$ si y sólo si $D_\alpha f \in L^p$. Una implicación vale en realidad para $0 < \alpha < 1$, pues en [GSV] se prueba que $\tilde{T}_\alpha$ es un operador de Calderón-Zygmund, y por lo tanto acotado de L^p en L^p, luego si $f = I_\alpha \gamma$ con $\gamma \in L^p$, $D_\alpha f = D_\alpha I_\alpha \gamma = \tilde{T}_\alpha \gamma \in L^p$. Para la otra implicación, para $\alpha < \tilde{\alpha}_0$ tenemos que $\tilde{T}_\alpha$ es inversible, luego si definimos $\gamma = \tilde{T}_\alpha^{-1} D_\alpha f$, se tiene que $\gamma \in L^p$ (pues estamos suponiendo $D_\alpha f \in L^p$) y además, como al igual que en el teorema se tienen I_α, D_α inversibles (tomando $I_\alpha : L^p \to I_\alpha(L^p)$ y $D_\alpha : I_\alpha(L^p) \to L^p$),

$$I_\alpha \gamma = I_\alpha \tilde{T}_\alpha^{-1} D_\alpha f = I_\alpha (I_\alpha^{-1} D_\alpha^{-1}) D_\alpha f = f.$$

$\square$

4.5. El caso de $\mathbb{R}^n$

Como comentario final de este capítulo, veremos cómo se relaciona el espacio potencial $L^{\alpha,p}$ aquí definido en el contexto de $\mathbb{R}^n$ con el clásico $\mathcal{L}^{\alpha,p}$. Daremos una descripción en base al operador D_α, por lo que deberemos restringirnos al caso $\alpha < \alpha_0$, donde tenemos la caracterización del teorema 4.4.1.

En $\mathbb{R}^n$ tenemos definidos los operadores $\mathscr{J}_\alpha = (I-\Delta)^{-\alpha/2}$ y $\mathscr{D}_\alpha = (-\Delta)^{-\alpha/2}$, como fueron mencionados en los capítulos 3 y 4. Recordemos que el operador $\mathscr{D}_\alpha$ toma la forma, para $\alpha < 2$,

$$\mathscr{D}_\alpha f(x) = \text{v.p. } c_{\alpha,n} \int \frac{f(y)-f(x)}{|x-y|^{n+\alpha}} dy$$

(y para el caso $\alpha = 2$, $\mathscr{D}_\alpha = -\Delta$).

Como se puede ver en 6.10 del Capítulo V de [S], el espacio potencial $\mathcal{L}^{\alpha,p} = \mathscr{J}_\alpha(L^p)$ satisface, para $0 < \alpha < 2$,

$$f \in \mathcal{L}^{\alpha,p} \text{ si y sólo si } f, \mathscr{D}_\alpha f \in L^p.$$

Observar que este resultado es análogo al obtenido en el teorema 4.4.1 (excepto claro en el rango, mucho menos restrictivo, que puede tomar α).Veremos cómo se comparan $\mathscr{D}_\alpha$ y D_α, para luego obtener una comparación entre $\mathcal{L}^{\alpha,p}$ y $L^{\alpha,p}$.

En nuestro caso, las definiciones de J_α y D_α dependen, en principio, de la aproximación a la identidad $(S_t)_{t>0}$ que se elija.

Consideremos una aproximación a la identidad de la forma $S_t f(x) = \int s(x,y,t) f(y) dy$ con núcleo

$$s(x,y,t) = \varphi_t(x-y) = \frac{1}{t^n} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right)$$

con φ radial.

En este caso, para el operador D_α obtenido de esta forma, al que llamaremos D_α^φ para resaltar su dependencia de φ, tenemos que se satisface

$$\begin{aligned} n_\alpha^\varphi(x,y) &= \int_0^\infty \alpha t^{-\alpha} s(x,y,t) \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \alpha t^{-\alpha} \frac{1}{t^n} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{|x-y|^{n+\alpha}} \int_0^\infty \alpha u^{n+\alpha} \varphi(ue_1) \frac{du}{u} = \frac{c_{n,\alpha,\varphi}}{|x-y|^{n+\alpha}} \end{aligned}$$

(haciendo la sustitución $u = |x-y|/t$ y utilizando que φ es radial), siempre que la última integral sea convergente. Recordar que

$$D_\alpha^\varphi f(x) = \int n_\alpha^\varphi(x,y)(f(x)-f(y)) dy,$$

siempre que la integral sea convergente.

Por lo tanto, en este caso tendremos que

$$D_\alpha^\varphi f = C_{n,\alpha,\varphi} \mathscr{D}_\alpha f,$$

para toda elección de φ que cumpla lo anterior (una integral será convergente si y sólo si la otra lo es).

Por lo tanto para aproximaciones a la identidad de esta forma tendremos que

$$f \in \mathcal{L}^{\alpha,p} \Leftrightarrow f, D^{\varphi}_{\alpha} f \in L^p.$$

Consideremos ahora nuestro caso particular de aproximaciones a la identidad $(S_t)_{t>0}$ como fueron construidas en 1.2. Sea $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ C^∞, decreciente, con $h(t) = 1$ para $t \leq 1/2$ y $h(t) = 0$ para $t \geq 2$, como en la sección 1.2. Sea $H(x) = h(|x|)$, y para $t > 0$ construimos S_t de la siguiente manera:

- $T_t f(x) = \frac{1}{t^n} \int h\left(\frac{|x-y|}{t}\right) f(y)dy = \int H_t(x-y)f(y)dy = H_t * f(x)$;
- $T_t 1 \equiv \int H_t = \int H = c_H$ para todo $t > 0$ y x, luego $\varphi \equiv \frac{1}{c_H}$ y $\psi \equiv 1$.
- $S_t f = \frac{1}{c_H^2} H_t * H_t * f = \int \left(\frac{1}{c_H^2} H_t * H_t\right)(x-y)f(y)dy$.

Por lo tanto en nuestro caso

$$s(x,y,t) = \left(\frac{1}{c_H^2} H_t * H_t\right)(x-y),$$

y en consecuencia si vemos que

$$\frac{1}{c_H^2} H_t * H_t = \varphi_t$$

con φ radial, estaremos en el caso anterior.

Observemos que

$$\begin{aligned} H_t * H_t(x) &= \frac{1}{t^{2n}} \int H\left(\frac{x-y}{t}\right) H\left(\frac{y}{t}\right) dy = \frac{1}{t^n} \int H\left(\frac{x}{t} - z\right) H(z)dz \\ &= \frac{1}{t^n}(H * H)(x/t) = (H * H)_t\,(x). \end{aligned}$$

Además, si ρ es una rotación, como H es radial se tiene que

$$\begin{aligned} H * H(\rho x) &= \int H(\rho x - y)H(y)dy = \int H(\rho(x - \rho^{-1}y))H(\rho\rho^{-1}y)dy \\ &= \int H(x - \rho^{-1}y)H(\rho^{-1}y)dy = H * H(x). \end{aligned}$$

De esta forma, si $\varphi = \frac{1}{c_H^2} H * H$, tendremos que

$$\frac{1}{c_H^2} H_t * H_t = \varphi_t.$$

Como además φ es de soporte compacto (por ser convolución de funciones de soporte compacto), la integral $\int_0^\infty \alpha u^{n+\alpha}\varphi(ue_1)\frac{du}{u}$ será convergente y tendremos que para toda elección de H los operadores D_α diferirán sólo en el producto por una constante, y más aún para $0 < \alpha < 2$

$$f \in \mathcal{L}^{\alpha,p} \Leftrightarrow f, D_\alpha f \in L^p.$$

Finalmente, para el caso $\alpha < \alpha_0$, por el teorema de caracterización 4.4.1 tendremos que los espacios $L^{\alpha,p}$ no dependerán de la elección de H en la aproximación a la identidad (S_t), y más aún coincidirán con el espacio clásico

$$L^{\alpha,p} = \mathcal{L}^{\alpha,p}.$$

Capítulo 5

Interpolación

En este capítulo nos proponemos caracterizar al espacio interpolado $\left(L^{\alpha,p}, L^{\beta,p}\right)_{\theta,q}$. Recordemos que (ver sección 1.4), mediante el uso del K-funcional, este espacio consiste en las funciones $f \in L^{\alpha,p} + L^{\beta,p}$ que tienen la siguiente norma finita

$$\|f\|_{\theta,q,K} = \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} Kf(t)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q},$$

con $Kf(t) = \inf_{f_1+f_2=f} \|f_1\|_{\alpha,p} + t\|f_2\|_{\beta,p}$, donde el ínfimo se toma sobre todas las descomposiciones $f = f_1 + f_2$ de f con $f_1 \in L^{\alpha,p}$, $f_2 \in L^{\beta,p}$.

Por otra parte, mediante el uso del J-funcional, se puede caracterizar como aquellas funciones $f \in L^{\alpha,p} + L^{\beta,p}$ para las que existe al menos una descomposición $f \mapsto (A_s f)_{s>0}$ de funciones en $L^{\alpha,p} \cap L^{\beta,p}$ con

$$f = \int_0^\infty A_s f \frac{ds}{s} = Af + \int_0^1 A_s f \frac{ds}{s}$$

como integral de Bochner, para la que

$$J(Af)(1) + \left(\int_0^1 s^{-\theta q} J(A_s f)(s)^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q} < \infty,$$

donde $J(g)(t) = \max(\|g\|_{\alpha,p}, t\|g\|_{\beta,p})$. Luego la norma $\|f\|_{\theta,q,J}$ será el ínfimo de esta cantidad, para todas las descomposiciones $Af, A_s f$ de f.

Nos proponemos, como en [P] para el caso de $\mathbb{R}^n$, probar esta caracterización en dos partes: primero ver que

$$\left(L^{\alpha,p}, L^{\beta,p}\right)_{\theta,q} \hookrightarrow B^\gamma_{p,q},$$

donde $B^\gamma_{p,q}$ es un espacio de Besov, para $\gamma = \alpha + \theta(\beta - \alpha)$, $0 < \alpha, \beta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$, viendo que existe $C > 0$ independiente de f para la que

$$\|f\|_{B^\gamma_{p,q}} \leq C\|f\|_{\theta,q,K}.$$

A continuación, para ver la otra inclusión

$$B^{\gamma}_{p,q} \hookrightarrow \left(L^{\alpha,p}, L^{\beta,p}\right)_{\theta,q},$$

al igual que en [P] (pero para el caso continuo) queremos ver que

$$\|f\|_{\theta,q,J} \leq C\|f\|_{B^{\gamma}_{p,q}}$$

encontrando una descomposición adecuada de f. Sin embargo para esta acotación se necesita estimar las normas en $L^{\alpha,p}$ y $L^{\beta,p}$ de cada parte de la descomposición de esa f, lo cual en el caso clásico se basa en que J_α es inversible y se tiene la relación $J_\alpha^{-1} \approx I + D_\alpha$ (y lo mismo para β). De acuerdo a los resultados del capítulo precedente, deberemos restringirnos a $0 < \alpha, \beta < \alpha_0$ y $1 < p < \infty$.

Finalizamos el capítulo probando un resultado similar para el caso límite $\alpha = 0$, es decir $\left(L^p, L^{\beta,p}\right)_{\theta,q}$.

5.1. Una primera aproximación

En esta sección demostraremos la inclusión $\left(L^{\alpha,p}, L^{\beta,p}\right)_{\theta,q} \hookrightarrow B^{\gamma}_{p,q}$ utilizando el funcional K en un contexto general. Por otra parte, suponiendo la existencia de una descomposición adecuada de funciones de $B^{\gamma}_{p,q}$, probaremos, mediante el uso del funcional J,la otra inclusión continua $B^{\gamma}_{p,q} \hookrightarrow \left(L^{\alpha,p}, L^{\beta,p}\right)_{\theta,q}$. Este resultado se obtiene para todo el rango de α, β, pero para obtener la descomposición de funciones de $B^{\gamma}_{p,q}$, en la siguiente sección nos restringiremos al caso $\alpha, \beta < \alpha_0$.

La inclusión $\left(L^{\alpha,p}, L^{\beta,p}\right)_{\theta,q} \hookrightarrow B^{\gamma}_{p,q}$ es casi inmediata a partir del teorema 3.3.17.

Lema 5.1.1. *Si $f \in L^{\alpha,p} + L^{\beta,p}$ con $0 < \alpha, \beta < 1$ y $1 \leq p \leq \infty$, entonces para $t > 0$, $0 < \theta < 1$ y $\gamma = \alpha + \theta(\beta - \alpha)$ se tiene que*

$$t^{-\gamma} E_p f(t) \leq C t^{-\theta(\beta-\alpha)} K f(t^{\beta-\alpha})$$

donde Kf es el K-funcional para f.

Demostración. Si $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in L^{\alpha,p}$ y $f_2 \in L^{\beta,p}$, entonces

$$E_p f(t) \leq E_p f_1(t) + E_p f_2(t) \leq C t^{\alpha}\|f_1\|_{\alpha,p} + C t^{\beta}\|f_2\|_{\beta,p} \leq C t^{\alpha}(\|f_1\|_{\alpha,p} + t^{\beta-\alpha}\|f_2\|_{\beta,p}).$$

Tomando ínfimo sobre todas las descomposiciones se obtiene lo que queríamos. □

Teorema 5.1.2. *Si $0 < \alpha, \beta < 1$ y $1 \leq p \leq \infty$, entonces para $0 < \theta < 1$, $1 \leq q < \infty$ y $\gamma = \alpha + \theta(\beta - \alpha)$ se tiene que*

$$\left(L^{\alpha,p}, L^{\beta,p}\right)_{\theta,q} \hookrightarrow B^{\gamma}_{p,q}.$$

Demostración. Del lema anterior y del hecho que $\|f\|_p \leq C\|f\|_{\theta,q,K}$ (pues $(1 \wedge t)\|f\|_p \leq Kf(t)$) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B^\gamma_{p,q}} &= \|f\|_p + \left(\int_0^\infty t^{-\gamma q} E_p f(t)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq C\|f\|_{\theta,q,K} + C\left(\int_0^\infty t^{-\theta(\beta-\alpha)q} Kf(t^{\beta-\alpha})^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq C\|f\|_{\theta,q,K}
\end{aligned}$$

(en este último paso hacemos la sustitución $s = t^{\beta-\alpha}$). □

Observación 5.1.3. El resultado anterior también surge de la proposición 2.1.13, pues por 3.3.18 tenemos que $L^{\alpha,p} \hookrightarrow B^\alpha_{p,\infty}$ y lo mismo para β, luego

$$\left(L^{\alpha,p}, L^{\beta,p}\right)_{\theta,q} \hookrightarrow \left(B^\alpha_{p,\infty}, B^\beta_{p,\infty}\right)_{\theta,q} \hookrightarrow B^\gamma_{p,q}.$$

Tenemos así una inclusión. Ahora, si existe una descomposición de f que satisface ciertas hipótesis, siguiendo a [P], podremos concluir la otra inclusión.

Teorema 5.1.4. *Sean $0 < \alpha, \beta, \theta < 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Supongamos que existe una descomposición para funciones en $B^\gamma_{p,q}$ en términos de funciones en $L^{\alpha,p} \cap L^{\beta,p}$ de la forma $f \mapsto (A_s f)_{s>0}$ con*

$$f = \int_0^\infty A_s(f)\frac{ds}{s} = Af + \int_0^1 A_s f \frac{ds}{s}$$

como integral de Bochner, que adicionalmente satisface

$$\|A_s(f)\|_{\alpha,p} \leq Cs^{-\alpha} E_p f(s), \quad 0 < s < 1;$$

$$\|Af\|_{\alpha,p} \leq C\|f\|_p$$

y lo mismo para β.

Entonces si $\gamma = \alpha + \theta(\beta - \alpha)$, para $f \in B^\gamma_{p,q}$ se tiene que

$$s^{-\theta(\beta-\alpha)} J(A_s(f))(s^{\beta-\alpha}) \leq Cs^{-\gamma} E_p f(s), \quad 0 < s < 1;$$

$$J(Af)(1) \leq C\|f\|_p$$

y por lo tanto

$$B^\gamma_{p,q} \hookrightarrow \left(L^{\alpha,p}, L^{\beta,p}\right)_{\theta,q}.$$

Demostración. La primera conclusión es inmediata por definición:

$$J(A_s(f))(t) = \text{máx}(\|A_s(f)\|_{\alpha,p}, t\|A_s(f)\|_{\beta,p}),$$

luego por hipótesis

$$J(A_s(f))(s^{\beta-\alpha}) \leq C \,\text{máx}\left(s^{-\alpha}E_pf(s), s^{\beta-\alpha}s^{-\beta}E_pf(s)\right) = Cs^{-\alpha}E_pf(s).$$

También la segunda es inmediata, pues

$$J(Af)(1) = \text{máx}(\|Af\|_{\alpha,p}, \|Af\|_{\beta,p}) \leq C\|f\|_p.$$

Finalmente, supongamos $\alpha < \beta$ y observemos que

$$f = Af + \int_0^1 \frac{1}{\beta-\alpha} A_{s^{1/(\beta-\alpha)}}(f)\frac{ds}{s} = Af + \int_0^1 \tilde{A}_s(f)\frac{ds}{s}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\theta,q,J} &\leq J(Af)(1) + \left(\int_0^1 s^{-\theta(\beta-\alpha)q} J(\tilde{A}_{s^{\beta-\alpha}}(f))(s^{\beta-\alpha})^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q} \\
&\leq J(Af)(1) + C\left(\int_0^\infty s^{-\theta(\beta-\alpha)q} J(A_s(f))(s^{\beta-\alpha})^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q} \\
&\leq C\|f\|_p + C\left(\int_0^\infty s^{-\gamma q} E_pf(s)^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q} \leq C\|f\|_{B^\gamma_{p,q}}.
\end{aligned}$$

□

5.2. El caso $0 < \alpha, \beta < \alpha_0$

En el teorema 5.1.4 vimos que vale la inclusión que falta bajo ciertas hipótesis sobre una descomposición de las funciones. En esta sección nos dedicaremos a probar que la siguiente fórmula de Calderón, a la cual hemos hecho referencia en 1.2.4,

$$f = \int_0^\infty \tilde{Q}_t Q_t f \frac{dt}{t} = \mathbf{Q}f + \int_0^1 \tilde{Q}_t Q_t f \frac{dt}{t}$$

será la que satisfaga lo requerido. Recordemos que $\tilde{Q}_s g(x) = \int_X \tilde{q}(x,y,t)g(y)dm(y)$ posee un núcleo que, a diferencia del de Q_s, no tiene soporte compacto, pero que aún satisface las siguientes propiedades:

- $|\tilde{q}(x,y,t)| \leq C\frac{t}{(t+d(x,y))^{N+1}}$;
- $\int_X \tilde{q}(x,y,t)dm(y) = \int_X \tilde{q}(z,x,t)dm(z) = 0$ para todo x y todo $t > 0$;

- si $d(x,x') < c_0(t + d(x,y))$, entonces

$$|\tilde{q}(x,y,t) - \tilde{q}(x',y,t)| \leq C \frac{td(x,x')}{(t + d(x,y))^{N+2}}.$$

Veremos primero una serie de lemas que nos permitirán obtener las estimaciones deseadas.

Lema 5.2.1. *Si* $1 \leq p \leq \infty$ *y* $t > 0$*,*

$$\|Q_t f\|_p \leq CE_p f(4t).$$

Demostración. Como $\int_X q(x,y,t)f(x)dm(y) = 0$,

$$|Q_t f(x)| = \left| \int_X q(x,y,t)f(y)dm(y) \right| = \left| \int_X q(x,y,t)(f(y) - f(x))dm(y) \right|,$$

luego si $1 < p < \infty$, por las propiedades de tamaño y soporte compacto de q (ver 1.2.3)

$$\begin{aligned} |Q_t f(x)|^p &\leq \left(\int_X |q(x,y,t)||f(y) - f(x)|^p dm(y) \right) \left(\int_X |q(x,y,t)|dm(y) \right)^{p/p'} \\ &\leq \frac{C}{t^N} \int_{B(x,4t)} |f(y) - f(x)|^p dm(y). \end{aligned}$$

Entonces

$$\|Q_t f\|_p^p \leq C \int_X \fint_{B(x,4t)} |f(y) - f(x)|^p dm(y)dm(x) \leq CE_p f(4t)^p.$$

El caso $p = 1$ es más sencillo, siguiendo casi la misma cuenta, y para el caso $p = \infty$,

$$|Q_t f(x)| \leq C \sup_{y \in B(x,4t)} |f(y) - f(x)|,$$

y entonces

$$\|Q_t f\|_\infty \leq C \sup_{d(x,y) < 4t} |f(y) - f(x)| = CE_\infty f(4t).$$

□

Lema 5.2.2. *Si* $0 < \alpha < 1$ *y* $s > 0$*,*

$$\|D_\alpha \tilde{Q}_s Q_s f\|_p \leq Cs^{-\alpha} \|Q_s f\|_p.$$

Demostración. De acuerdo a la fórmula de la sección 4.3 para D_α en términos de Q_t,

$$D_\alpha \tilde{Q}_s Q_s f(x) = \int_0^\infty t^{-\alpha} Q_t \tilde{Q}_s Q_s f(x) \frac{dt}{t}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_X \int_X t^{-\alpha} q(x,y,t)\tilde{q}(y,z,s) Q_s f(z) dm(z) dm(y) \frac{dt}{t} \\
&= \int_X r_\alpha(x,z,s) Q_s f(z) dm(z),
\end{aligned}
$$

para

$$
\begin{aligned}
r_\alpha(x,z,s) &= \int_0^\infty \int_X t^{-\alpha} q(x,y,t)\tilde{q}(y,z,s) dm(y) \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^{cs} \int_X t^{-\alpha} q(x,y,t)(\tilde{q}(y,z,s) - \tilde{q}(x,z,s)) dm(y) \frac{dt}{t} \\
&\quad + \int_{cs}^\infty \int_X t^{-\alpha} q(x,y,t)\tilde{q}(y,z,s) dm(y) \frac{dt}{t} \\
&= I + II
\end{aligned}
$$

Para la primera parte, como el integrando es no nulo sólo si $d(x,y) < ct < cs < C(s + d(y,z))$, podemos acotar por

$$
I \leq Cs \int_0^{cs} \int_X t^{-\alpha} q(x,y,t) \frac{d(x,y)}{(s+d(y,z))^{N+2}} dm(y) \frac{dt}{t},
$$

y para la segunda por

$$
II \leq Cs \int_{cs}^\infty \int_X t^{-\alpha} q(x,y,t) \frac{1}{(s+d(y,z))^{N+1}} dm(y) \frac{dt}{t},
$$

luego acotamos las integrales

- $$
\begin{aligned}
&\int_X |r_\alpha(x,z,s)| dm(z) \leq \\
&\qquad \leq Cs \left(\int_0^{cs} \int_X t^{-\alpha} q(x,y,t) d(x,y) \frac{1}{s^2} dm(y) \frac{dt}{t} \right. \\
&\qquad\quad \left. + \int_{cs}^\infty \int_X t^{-\alpha} q(x,y,t) \frac{1}{s} dm(y) \frac{dt}{t} \right) \\
&\qquad \leq Cs \left(\int_0^{cs} t^{-\alpha} t \frac{1}{s^2} \frac{dt}{t} + \int_{cs}^\infty t^{-\alpha} \frac{1}{s} \frac{dt}{t} \right) = Cs^{-\alpha}.
\end{aligned}
$$

  Observar que $\int_X \frac{1}{(s+d(y,z))^{N+2}} dm(z) \leq C\frac{1}{s^2}$ y que $\int_X \frac{1}{(s+d(y,z))^{N+1}} dm(z) \leq C\frac{1}{s}$. Además, $\int_X q(x,y,t) d(x,y) dm(y) \leq Ct$ y $\int_X q(x,y,t) dm(y) \leq C$.

- $$
\int_X |r_\alpha(x,z,s)| dm(x) \leq
$$

$$\begin{aligned}
&\leq Cs\left(\int_0^{cs}\int_X t^{-\alpha}t\frac{1}{(s+d(y,z))^{N+2}}dm(y)\frac{dt}{t}\right.\\
&\qquad\left.+\int_{cs}^{\infty}\int_X t^{-\alpha}\frac{1}{(s+d(y,z))^{N+1}}dm(y)\frac{dt}{t}\right)\\
&\leq Cs\left(\int_0^{cs} t^{-\alpha}t\frac{1}{s^2}\frac{dt}{t}+\int_{cs}^{\infty}t^{-\alpha}\frac{1}{s}\frac{dt}{t}\right)=Cs^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
|D_\alpha\tilde{Q}_sQ_sf(x)| &\leq \left(\int_X |r_\alpha(x,z,s)|dm(z)\right)^{1/p'}\left(\int_X |r_\alpha(x,z,s)||Q_sf(z)|^p dm(z)\right)^{1/p}\\
&\leq Cs^{-\alpha/p'}\left(\int_X |r_\alpha(x,z,s)||Q_sf(z)|^p dm(z)\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_X |D_\alpha\tilde{Q}_sQ_sf(x)|^p dm(x) &\leq Cs^{-\alpha(p/p')}\int_X\int_X |r_\alpha(x,z,s)||Q_sf(z)|^p dm(z)dm(x)\\
&\leq Cs^{-\alpha(p/p')}s^{-\alpha}\int_X |Q_sf(z)|^p dm(z)\\
&= Cs^{-\alpha p}\|Q_sf\|_p^p.
\end{aligned}$$

□

Recordemos que definimos $\mathbf{Q}f = \int_1^\infty \tilde{Q}_tQ_tf(x)\frac{dt}{t}$. Para este operador tenemos primero la siguiente acotación.

Lema 5.2.3. *Si* $1 < p < \infty$,

$$\|\mathbf{Q}f\|_p \leq C\|f\|_p.$$

Demostración. En efecto,

$$\int_1^\infty \tilde{Q}_tQ_tf(x)\frac{dt}{t} = \int_X\left(\int_1^\infty\int_X \tilde{q}(x,y,t)q(y,z,t)dm(y)\frac{dt}{t}\right)f(z)dm(z),$$

luego si el núcleo

$$\mathbf{Q}(x,z) = \int_1^\infty\int_X \tilde{q}(x,y,t)q(y,z,t)dm(y)\frac{dt}{t}$$

es un núcleo estándar y vale el teorema T1, tendremos lo deseado.

- Tamaño: usando que $\int q = 0$, condiciones de soporte y tamaño de q, y regularidad de $\tilde{q}$ pues $d(y,z) < ct < c(t+d(x,z))$ donde $q(y,z,t) \neq 0$ reescribimos

$$|\mathbf{Q}(x,z)| \leq \left|\int_1^\infty\int_X (\tilde{q}(x,y,t)-\tilde{q}(x,z,t))q(y,z,t)dm(y)\frac{dt}{t}\right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\int_1^\infty \int_{d(y,z)<ct} \frac{td(y,z)}{(t+d(x,z))^{N+2}} \frac{1}{t^N} dm(y)\frac{dt}{t}\\
&\leq C\int_1^\infty \frac{t^2}{(t+d(x,z))^{N+2}}\frac{dt}{t} \leq \int_1^{d(x,z)} + \int_{d(x,z)}^\infty\\
&\leq C\frac{1}{d(x,z)^{N+2}}\int_1^{d(x,z)} t^2\frac{dt}{t} + C\int_{d(x,z)}^\infty \frac{1}{t^N}\frac{dt}{t}\\
&\leq C\frac{1}{d(x,z)^N}.
\end{aligned}$$

- Regularidad (1): si $d(x,x') \leq \frac{c_0}{4}d(x,z)$, entonces, como tenemos que $d(x,x') \leq \frac{c_0}{4}d(x,z) \leq \frac{c_0}{4}(d(x,y)+d(y,z)) \leq c_0(t+d(x,y))$,

$$\begin{aligned}
|\mathbf{Q}(x,z)-\mathbf{Q}(x',z)| &\leq \int_1^\infty \int_{d(y,z)<4t} |\tilde{q}(x,y,t)-\tilde{q}(x',y,t)|\frac{1}{t^N}dm(y)\frac{dt}{t}\\
&\leq Cd(x,x')\int_1^\infty \frac{1}{t^{N-1}}\int_{d(y,z)<4t}\frac{1}{(t+d(x,y))^{N+2}}dm(y)\frac{dt}{t}\\
&\leq \int_0^{d(x,z)/5} + \int_{d(x,z)/5}^\infty = I + II.
\end{aligned}$$

Para I, como $d(x,z) > 5t > 4t > d(y,z)$, tenemos que $d(x,z) > \frac{5}{4}d(y,z)$ y por lo tanto $d(x,y) \geq d(x,z)-d(y,z) > \frac{1}{5}d(x,z)$, luego acotamos por

$$I \leq C\frac{d(x,x')}{d(x,z)^{N+2}}\int_0^{d(x,z)/5}\frac{1}{t^{N-1}}t^N\frac{dt}{t} \leq C\frac{d(x,x')}{d(x,z)^{N+1}};$$

y para II directamente acotamos por

$$II \leq Cd(x,x')\int_{d(x,z)/5}^\infty \frac{1}{t^{N-1}}\frac{t^N}{t^{N+2}}\frac{dt}{t} \leq C\frac{d(x,x')}{d(x,z)^{N+1}}.$$

- Regularidad (2): si $d(z,z') \leq Cd(x,z)$, entonces

$$\begin{aligned}
|\mathbf{Q}(x,z)-\mathbf{Q}(x,z')| &= \left|\int_1^\infty \int_X \tilde{q}(x,y,t)(q(y,z,t)-q(y,z',t))dm(y)\frac{dt}{t}\right|\\
&\leq \int_{d(z,z')/C}^\infty \left|\int_X (\tilde{q}(x,y,t)-\tilde{q}(x,z,t))(q(y,z,t)-q(y,z',t))dm(y)\right|\frac{dt}{t}\\
&\quad + \int_0^{d(z,z')/C}\left|\int_X(\tilde{q}(x,y,t)-\tilde{q}(x,z,t))q(y,z,t)dm(y)\right|\frac{dt}{t}\\
&\quad + \int_0^{d(z,z')/C}\left|\int_X(\tilde{q}(x,y,t)-\tilde{q}(x,z',t))q(y,z',t)dm(y)\right|\frac{dt}{t}\\
&= I + II + III.
\end{aligned}$$

Para I, como $(q(\cdot,z,t)-q(\cdot,z',t))$ tiene soporte en $B(z,4t)\cup B(z,4t)$ y $d(z,z')<t$, tenemos que $d(y,z) \leq C(t+d(x,z))$ y por lo tanto

$$I \leq C\int_{d(z,z')/C}^\infty \int_{B(z,5t)} \frac{td(y,z)}{(t+d(x,z))^{N+2}}\frac{d(z,z')}{t^{N+1}}dm(y)\frac{dt}{t}$$

$$\leq Cd(z,z')\int_{d(z,z')/C}^{\infty}\frac{t}{(t+d(x,z))^{N+2}}\frac{dt}{t}$$

a su vez, como $d(z,z')/C \leq d(x,z)$, podemos separar esta integral en $0 < t \leq d(x,z)$ y $t > d(x,z)$:

$$I \leq Cd(z,z')\left(\frac{1}{d(x,z)^{N+2}}\int_0^{d(x,z)} t\frac{dt}{t} + \int_{d(x,z)}^{\infty}\frac{1}{t^{N+1}}\frac{dt}{t}\right) \leq C\frac{d(z,z')}{d(x,z)^{N+1}}.$$

Acotamos ahora II y III será análogo reemplazando z por z': como $d(y,z) < 4t$, tenemos $d(y,z) \leq C(t + d(x,z))$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} II &\leq C\int_0^{d(z,z')/C}\int_{B(z,4t)}\frac{td(y,z)}{(t+d(x,z))^{N+2}}\frac{1}{t^N}dm(y)\frac{dt}{t} \\ &\leq C\frac{1}{d(x,z)^{N+2}}\int_0^{d(z,z')/C} t^2\frac{dt}{t} \\ &\leq C\frac{d(z,z')^2}{d(x,z)^{N+2}} \leq C\frac{d(z,z')}{d(x,z)^{N+1}}. \end{aligned}$$

- $\mathbf{Q}1 = \mathbf{Q}^*1 = 0$. En efecto, cambiando el orden de integración,

$$\mathbf{Q}1 = \int_X\int_1^{\infty}\int_X \tilde{q}(x,y,t)q(y,z,t)dm(y)\frac{dt}{t}dm(z) = 0.$$

Por otro lado, si llamamos $\mathbf{Q}^*(z,x) = \mathbf{Q}(x,z)$, cambiando el orden de integración

$$\begin{aligned} < \mathbf{Q}f, g > &= \int_X\left(\int_X \mathbf{Q}(x,z)f(z)dm(z)\right)g(x)dm(x) \\ &= \int_X\left(\int_X \mathbf{Q}^*(z,x)g(x)dm(x)\right)f(z)dm(z) =< f, \mathbf{Q}^*g > \end{aligned}$$

y luego podemos concluir que $\mathbf{Q}^*1 = 0$.

- Acotación débil: sean $f, g \in C_c^{\gamma}(B)$, para algún $\gamma > 0$ y B bola. Luego

$$\begin{aligned} < \mathbf{Q}f, g > &= \int_X\int_X\int_1^{\infty}\int_X \tilde{q}(x,y,t)q(y,z,t)f(z)g(x)dm(y)\frac{dt}{t}dm(z)dm(x) \\ &= \int_1^{Cdiam(B)}\int_X\int_X\int_X \tilde{q}(x,y,t)q(y,z,t)f(z)(g(x)-g(y))dm(y)dm(z)dm(x)\frac{dt}{t} \\ &\quad + \int_{Cdiam(B)}^{\infty}\int_X\int_X\int_X \tilde{q}(x,y,t)q(y,z,t)f(z)g(x)dm(y)dm(z)dm(x)\frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Ahora, para $t < Cdiam(B)$, $d(x,y) < ct$ y

$$\left|\int_X\int_X\int_X \tilde{q}(x,y,t)q(y,z,t)f(z)(g(x)-g(y))dm(y)dm(z)dm(x)\right| \leq$$

$$\leq C\|f\|_\infty [g]_\gamma \int_X \int_B \int_{B(z,4t)} \frac{t}{(t+d(x,y))^{N+1}} \frac{1}{t^N} d(x,y)^\gamma dm(y)dm(z)dm(x)$$
$$\leq C\|f\|_\infty [g]_\gamma m(B) t^N \frac{1}{t^{1-\gamma}} \frac{1}{t^{N-1}} \leq C[f]_\gamma [g]_\gamma diam(B)^{N+\gamma} t^\gamma.$$

Y para $t \geq Cdiam(B)$,

$$\left| \int_X \int_X \int_X \tilde{q}(x,y,t) q(y,z,t) f(z) g(x) dm(y)dm(z)dm(x) \right| \leq$$
$$\leq C\|f\|_\infty \|g\|_\infty \int_B \int_B \int_{B(z,4t)} \frac{t}{(t+d(x,y))^{N+1}} \frac{1}{t^N} dm(y)dm(z)dm(x)$$
$$\leq C\|f\|_\infty \|g\|_\infty \frac{1}{t^N} m(B)^2 \leq C[f]_\gamma [g]_\gamma diam(B)^{2N+2\gamma} t^{-N},$$

y concluimos que

$$\begin{aligned} |<\mathbf{Q}f, g>| &\leq C[f]_\gamma [g]_\gamma diam(B)^{N+\gamma} \int_0^{Cdiam(B)} t^\gamma \frac{dt}{t} \\ &\quad + C[f]_\gamma [g]_\gamma diam(B)^{2N+2\gamma} \int_{Cdiam(B)}^\infty t^{-N} \frac{dt}{t} \\ &\leq C[f]_\gamma [g]_\gamma diam(B)^{N+2\gamma}. \end{aligned}$$

□

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 5.2.4. *Para $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, si $t < 1$ tenemos que*

$$\|(I + D_\alpha)\tilde{Q}_t Q_t f\|_p \leq Ct^{-\alpha} \|Q_t f\|_p; \quad \|(I + D_\alpha)\mathbf{Q}f\|_p \leq C\|f\|_p.$$

Demostración. La primera es inmediata del lema 5.2.2 y del hecho que $\tilde{Q}_t : L^p \to L^p$ (luego $\|\tilde{Q}_t Q_t f\|_p \leq C\|Q_t f\|_p \leq Ct^{-\alpha}\|Q_t f\|_p$). Para la segunda, usamos el lema anterior y la desigualdad de Minkowski integral para tener que

$$\|D_\alpha \mathbf{Q} f\|_p \leq \int_1^\infty \|D_\alpha \tilde{Q}_t Q_t f\|_p \frac{dt}{t} \leq C\|f\|_p \int_1^\infty t^{-\alpha} \frac{dt}{t} \leq C\|f\|_p,$$

usando nuevamente 5.2.2. □

Corolario 5.2.5. *Para $1 < p, q < \infty$, $0 < \alpha, \beta < \alpha_0$, $0 < \theta < 1$ y $\gamma = \alpha + \theta(\beta - \alpha)$, tendremos que*

$$B^\gamma_{p,q} \hookrightarrow (L^{\alpha,p}, L^{\beta,p})_{\theta,q}.$$

Demostración. De acuerdo al teorema 5.1.4, bastará probar que la descomposición $f = \mathbf{Q}f + \int_0^1 \tilde{Q}_t Q_t f \frac{dt}{t}$ cumple las estimaciones allí enunciadas. Como $\alpha, \beta < \alpha_0$, del teorema de caracterización 4.4.1 tenemos que $\|f\|_{\alpha,p} \leq C\|(I + D_\alpha)f\|_p$ (y de igual forma para β), luego por el teorema anterior tenemos que

$$\|\mathbf{Q}f\|_{\alpha,p} \leq C\|(I + D_\alpha)\mathbf{Q}f\|_p \leq C\|f\|_p$$

y para $0 < t < 1$, nuevamente por el teorema anterior y por 5.2.1

$$\|\tilde{Q}_t Q_t f\|_{\alpha,p} \leq Ct^{-\alpha}\|Q_t f\|_p \leq Ct^{-\alpha} E_p f(ct)$$

y lo mismo para β. Tenemos entonces lo deseado. $\square$

Como una consecuencia del teorema 5.1.2 y del corolario 5.2.5 obtenemos el resultado que buscábamos en el capítulo:

Teorema 5.2.6. *Para* $1 < p, q < \infty$, $0 < \alpha, \beta < \alpha_0$, $0 < \theta < 1$ *y* $\gamma = \alpha + \theta(\beta - \alpha)$, *tendremos que*

$$B^\gamma_{p,q} = (L^{\alpha,p}, L^{\beta,p})_{\theta,q}.$$

5.3. El caso $\alpha = 0$

En esta última sección, probaremos el resultado análogo al teorema 5.2.6 para el caso $\alpha = 0$, si consideramos $L^{0,p} = L^p$. Al igual que en el caso anterior, veremos primero que

$$(L^p, L^{\beta,p})_{\theta,q} \hookrightarrow B^{\theta\beta}_{p,q}$$

mediante el K funcional, y luego para el caso $0 < \beta < \alpha_0$ probaremos la otra inclusión

$$B^{\theta\beta}_{p,q} \hookrightarrow (L^p, L^{\beta,p})_{\theta,q}.$$

Primero el análogo al teorema 5.1.2:

Teorema 5.3.1. *Si* $0 < \beta < 1$ *y* $1 \leq p \leq \infty$, *entonces para* $0 < \theta < 1$, $1 \leq q < \infty$ *se tiene que*

$$\left(L^p, L^{\beta,p}\right)_{\theta,q} \hookrightarrow B^{\theta\beta}_{p,q}.$$

Demostración. Primero, si $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in L^p$ y $f_2 \in L^{\beta,p}$, nuevamente por 3.3.17 obtenemos

$$E_p f(t) \leq E_p f_1(t) + E_p f_2(t) \leq C\|f_1\|_p + Ct^\beta \|f_2\|_{\beta,p}$$

y por lo tanto tomando ínfimo sobre todas las descomposiciones,

$$E_p f(t) \leq CKf(t^\beta).$$

Ahora, nuevamente como $(1 \wedge t)\|f\|_p \leq Kf(t)$, vale $\|f\|_p \leq C\|f\|_{\theta,q,K}$ y tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B^{\theta\beta}_{p,q}} &= \|f\|_p + \left(\int_0^\infty t^{-\theta\beta q} E_p f(t)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq C\|f\|_{\theta,q,K} + C\left(\int_0^\infty (t^\beta)^{-\theta q} Kf(t^\beta)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq C\|f\|_{\theta,q,K}.
\end{aligned}$$

□

Ahora, para la otra inclusión, tenemos primero un lema análogo al corolario 5.2.5:

Teorema 5.3.2. *Para* $1 < p, q < \infty$*,* $0 < \beta < \alpha_0$*,* $0 < \theta < 1$*, tendremos que*

$$B^{\theta\beta}_{p,q} \hookrightarrow (L^p, L^{\beta,p})_{\theta,q}.$$

Demostración. Observemos que, por los resultados de la sección anterior, sabemos que valen, para $0 < t < 1$:

- $\|\tilde{Q}_t Q_t f\|_{\beta,p} \leq Ct^{-\beta} E_p f(ct)$;
- $\|\mathbf{Q}f\|_{\beta,p} \leq C\|f\|_p$;
- $\|\tilde{Q}_t Q_t f\|_p \leq CE_p f(ct)$;
- $\|\mathbf{Q}f\|_p \leq C\|f\|_p$.

Luego tendremos que

$$\begin{aligned}
J(\tilde{Q}_t Q_t f)(t^\beta) &= \text{máx}\left(\|\tilde{Q}_t Q_t f\|_p, t^\beta \|\tilde{Q}_t Q_t f\|_{\beta,p}\right) \\
&\leq C\,\text{máx}\left(E_p f(ct), t^\beta t^{-\beta} E_p f(ct)\right) = CE_p f(ct)
\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{Q}f)(1) &= \text{máx}(\|\mathbf{Q}f\|_p, \|\mathbf{Q}f\|_{\beta,p}) \\
&\leq C\|f\|_p.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\theta,q,J} &\leq CJ(\mathbf{Q}f)(1) + C\left(\int_0^\infty (t^\beta)^{-\theta q} J(\tilde{Q}_t Q_t f)(t^\beta)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq C\|f\|_p + C\left(\int_0^\infty t^{-\theta\beta q} E_p f(ct)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&\leq C\|f\|_{B^{\theta\beta}_{p,q}}.
\end{aligned}$$

□

De estos dos resultados concluimos el análogo a 5.2.6

Teorema 5.3.3. *Para* $1 < p, q < \infty$, $0 < \beta < \alpha_0$, $0 < \theta < 1$, *tendremos que*

$$B^{\theta\beta}_{p,q} = (L^p, L^{\beta,p})_{\theta,q}.$$

Capítulo 6

Un teorema de trazas para espacios de Besov

En el contexto de espacios de Sobolev H^k, estas funciones se pueden 'restringir' a subespacios de menor dimensión mediante un operador de traza acotado. Por ejemplo, existe un operador acotado $Tr : H^k(\mathbb{R}^{n+1}) \to H^{k-1/2}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$ (con $H^k = W^{k,2}$) de manera que $Tr(f) = f|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}$ para f continua. Estos teoremas de trazas para espacios de Sobolev se pueden ver de manera más general considerando el mismo tipo de teoremas para espacios de Besov.

En [JW], A. Jonsson y H. Wallin describen un resultado de este tipo entre espacios de Besov de $\mathbb{R}^n$, a los que llaman $\Lambda_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n)$, y espacios de Besov $B_\beta^{p,q}(F)$ para F un d-set de $\mathbb{R}^n$, bajo la relación $\beta = \alpha - (n-d)/p > 0$, $d \leq n$. El resultado, al que denotan

$$\Lambda_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n)|_F = B_\beta^{p,q}(F),$$

consiste en dos partes: un teorema de restricción, el cual afirma la existencia de un operador "traza" $Tr : \Lambda_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n) \to B_\beta^{p,q}(F)$ lineal y acotado, que satisface $Trf = f|_F$ para f continua; y un teorema de extensión, donde se obtiene un operador "extensión" $\mathcal{E} : B_\beta^{p,q}(F) \to \Lambda_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ que satisface $(\mathcal{E}g)|_F = g$. De estas dos partes se concluye que $B_\beta^{p,q}(F)$ es efectivamente *la traza* que dejan las funciones de $\Lambda_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ en F, ya que la restricción de estas funciones cae en ese espacio, y todas las funciones de $B_\beta^{p,q}(F)$ son traza de alguna función de $\Lambda_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

La estrategia utilizada por Jonsson y Wallin para probar el teorema de restricción es utilizar propiedades de acotación del núcleo G_α del potencial de Bessel $\mathcal{J}_\alpha$ para garantizar la existencia de un operador traza entre el espacio potencial $\mathcal{L}^{\alpha,p}$ y un espacio símil-Besov discreto $l_\infty^\beta(A)$ con $A = L^p(|x-y|^{-d}, d\mu(x)d\mu(y))$, y concluir el resultado mediante un argumento de interpolación

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{L}^{\alpha_1,p}, \mathcal{L}^{\alpha_2,p})_{\theta,q} & \xrightarrow{Tr} & \left(l_\infty^{\beta_1}(A), l_\infty^{\beta_2}(A)\right)_{\theta,q} \\
\| & & \| \\
\Lambda_\alpha^{p,q}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{Tr} & l_q^\beta(A)
\end{array}$$

con $l_q^\beta(A) \cong B_\beta^{p,q}(F)$.

Para el teorema de extensión, por otro lado, el punto fundamental es el lema de Whitney: cubrir el complemento de F por cubos cerrados (Q_i) de interiores disjuntos dos a dos, tales que $diamQ_i \sim d(Q_i, F)$. Asocian a estos cubos una partición de la unidad, con la que se construye el operador extensión y se prueba, mediante propiedades como el solapamiento acotado que poseen las dilataciones de estos cubos, que efectivamente se trata del operador buscado.

Sean ahora (X, d, m) un espacio métrico de medida y $F \subset X$ cerrado, con $m(F) = 0$ y sea μ una medida soportada en F. En este capítulo veremos condiciones para tener un teorema de trazas que relacione un espacio de Besov $B_{p,q}^\alpha(X, m)$ con otro $B_{p,q}^\beta(F, \mu)$, basándonos en lo recién mencionado.

Comenzaremos probando el teorema de extensión en un contexto general. Requerimos que (X, d, m) y (F, d, μ) sean espacios de tipo homogéneo, pero en vez de pedir que posean "dimensión", pediremos que valga la siguiente relación para el cociente de las medidas

$$\frac{m(B)}{\mu(B)} \sim r^\gamma,$$

con γ ocupando el lugar de $n-d$. Pedimos además que $0 < \alpha < 1$ y que $0 < \beta = \alpha - \gamma/p$. Al igual que en [JW], el resultado se basa en un lema de Whitney, descripto en 1.1.4.

Para el teorema de restricción, el contexto será menos general. Debido a la necesidad de trabajar con espacios potenciales, requeriremos que (X, d, m) y (F, d, μ) sean espacios Ahlfors N y d-regulares, con $N > d$. Probaremos acotaciones para nuestro núcleo k_α correspondiente al operador J_α, y concluiremos la existencia de un operador

$$Tr : L^{\alpha,p}(X, m) \to B_{p,\infty}^\beta(F, \mu).$$

Para concluir el teorema utilizando interpolación, nnecesitaremos, como en el capítulo anterior, que la regularidad para los espacios potenciales sea menor a α_0.

Bajo estas condiciones, podremos concluir

$$B_{p,q}^\alpha(X, m)|_F = B_{p,q}^\beta(F, \mu).$$

6.1. El teorema de extensión

Enunciamos el teorema que queremos probar en esta sección. La demostración sigue las ideas de [JW] para el contexto euclídeo.

Teorema 6.1.1. *Sea (X, d, m) un espacio métrico de medida con m duplicante, y sea $F \subset X$ un cerrado con $m(F) = 0$ y con una medida μ soportada en F, que duplica para bolas centradas en F, y tal que existe $\gamma > 0$ con*

$$\frac{m(B)}{\mu(B)} \sim r^\gamma \tag{6.1.1}$$

para bolas B centradas en F y de radio $r < 2diam(F)$.

Entonces existe un operador lineal de extensión $\mathcal{E}$ para funciones $f \in L^1_{loc}(F,\mu)$ tal que, para $1 \leq p < \infty$, $0 < \beta < 1 - \gamma/p$ y $1 \leq q \leq \infty$ resulta acotado

$$\mathcal{E} : B^{\beta}_{p,q}(F,\mu) \to B^{\alpha}_{p,q}(X,m)$$

para $\alpha = \beta + \gamma/p$.

Este resultado incluye como caso particular el resultado clásico como se lo puede encontrar en el Teorema 1 del Capítulo VI de [JW], en el caso $0 < \alpha < 1$.

Las hipótesis del teorema son válidas, por ejemplo, si X y F son espacios Ahlfors N y d-regulares, respectivamente, con $0 < d < N$, tomando $\gamma = N - d$.

Otro caso en el que son válidas es el ya presentado en el último ejemplo de 1.1.4: consideremos (F, d, μ) un espacio de medida duplicante, Y un espacio Ahlfors γ-regular y $X = F \times Y$ con la métrica y medida producto. En este caso si identificamos F con $F \times \{y_0\}$ para algún $y_0 \in Y$, es claro que X y F son espacios duplicantes y el cociente de las medidas satisface 6.1.1.

Para probar el teorema, necesitaremos el siguiente lema:

Lema 6.1.2. ***Desigualdad de Hardy.*** *Si (b_n) es una sucesión de términos no negativos, $\nu > 0$ y $a > 0$, entonces existe C tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-na} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k \right)^{\nu} \leq C \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-na} b_n^{\nu}.$$

Demostración. Si $\nu \leq 1$ es trivial. Para $\nu > 1$ ver [L]. □

Demostración del Teorema 6.1.1. Antes de definir el operador de extensión, debemos realizar algunas observaciones. Sean $\{B_i = B(x_i, r_i)\}_{i \in I}$ una familia (a lo más numerable) de bolas como en el Lema de Whitney (lema 1.1.4) para $\Omega = \{x \in X : 0 < d(x, F) < 1\}$ y $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ la partición de la unidad asociada, de modo que se cumplen las siguientes propiedades:

- las bolas $\{B_i\}$ son disjuntas dos a dos;
- las bolas $\{3B_i\}$ cubren Ω;
- $6B_i \subset \Omega$ para todo i;
- $6r_i \leq d(x, F) \leq 18r_i$ para todo $x \in 6B_i$, para todo i;
- para todo i existe $t_i \in F$ con $d(x_i, t_i) < 18r_i$;
- $3B_i \subset supp\varphi_i \subset 6B_i$;

- $0 \leq \varphi_i \leq 1$;
- $\sum_i \varphi_i = \chi_\Omega$;
- φ_i es Lipschitz-1 con constante $\leq \frac{C}{r_i}$ (con C independiente de i).

De estas propiedades se desprende que si $x \in 6B_i \cap 6B_j$, entonces

$$\frac{1}{3} r_j \leq r_i \leq 3 r_j,$$

y en particular esto vale si $\varphi_i(x) \neq 0$ y $\varphi_j(x) \neq 0$. También como consecuencia de esto y por el lema de solapamiento acotado 1.1.5, si $x \in 6B_j$,

$$\sum_i \varphi_i(x) \leq \sum_i \chi_{6B_i}(x) \leq \sum_{i: \frac{1}{3} r_j \leq r_i \leq 3r_j} \chi_{6B_i}(x) \leq C.$$

Observemos que, más aún, la desigualdad anterior vale para todo $x \in X$ (pues $\Omega = \cup_i 6B_i$, y si $x \notin \Omega$, $\varphi_i(x) = \chi_{6B_i}(x) = 0$ para todo i).

Por otro lado, notemos que para todo i existe $t_i \in F$ tal que $d(x_i, t_i) < 18 r_i$ y por lo tanto tenemos que

$$B(t_i, r_i) \subset 19B_i \subset B(t_i, 37 r_i),$$

es decir que no sólo $\mu(19B_i) > 0$, sino que el cociente de medidas satisface, por 6.1.1,

$$\frac{m(19B_i)}{\mu(19B_i)} \sim r_i^\gamma.$$

Esta consecuencia de la relación entre las medidas será la que utilizaremos frecuentemente en los argumentos que siguen.

Estamos ahora en condiciones de definir el operador $\mathcal{E}$ y ver que cumple lo deseado. Para una $f \in L^1_{loc}(F, \mu)$ y para $x \in X \backslash F$ definimos la extensión

$$\mathcal{E} f(x) = \sum_i \varphi_i(x) \fint_{19B_i} f d\mu$$

(observar que, por lo recién visto, $\mu(19B_i) > 0$ para todo i, y que $\mathcal{E} f = 0$ fuera de Ω; además para cada $x \in \Omega$ la suma resulta finita debido al solapamiento acotado).

Probaremos el teorema en tres partes: primero veremos que se trata de un operador de extensión para $f \in L^1_{loc}$. A continuación veremos que $\mathcal{E} : L^p(F, \mu) \to L^p(X, m)$ y finalizaremos probando que $\mathcal{E} : B^\beta_{p,q}(F, \mu) \to B^\alpha_{p,q}(X, m)$ para α, β, p, q como en el enunciado del teorema.

$\mathcal{E}$ es un operador de extensión.

Primero debemos probar que $\mathcal{E}f$ extiende f, es decir que $\mathcal{E}f|_F = f$. Veremos que, para μ-casi todo $t_0 \in F$ vale

$$\fint_{B(t_0,r)} |\mathcal{E}f(x) - f(t_0)|dm(x) \to 0$$

cuando $r \to 0$. Luego μ-casi todo punto de F es un m-punto de Lebesgue de $\mathcal{E}f$, y para esos puntos $\mathcal{E}f(x) = f(x)$.

Sean $t_0 \in F$ y $0 < r < 1$. Como para $x \in \Omega$ vale $\sum_i \varphi_i(x) = 1$,

$$\mathcal{E}f(x) - f(t_0) = \sum_i \varphi_i(x) \fint_{19B_i} (f(t) - f(t_0))d\mu(t),$$

tenemos que

$$|\mathcal{E}f(x) - f(t_0)| \leq \sum_i \chi_{6B_i}(x) \fint_{19B_i} |f(t) - f(t_0)|d\mu(t).$$

Queremos integrar lo anterior para $x \in B(t_0, r)$. Para cada x allí, si $x \notin F$ existirá k tal que $2^{-k} < cr$ y $d(x, F) \sim 2^{-k}$, pues $t_0 \in F$, y en ese caso

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}f(x) - f(t_0)| &\leq \int_F |f(t) - f(t_0)| \left(\sum_{r_i \sim 2^{-k}} \chi_{19B_i}(t) \frac{\chi_{6B_i}(x)}{\mu(19B_i)} \right) d\mu(t) \\
&\leq \int_{B(t_0, r + c2^{-k})} |f(t) - f(t_0)| \left(\sum_{r_i \sim 2^{-k}} \chi_{19B_i}(t) \frac{\chi_{19B_i}(x)}{\mu(19B_i)} \right) d\mu(t) \\
&\leq \int_{B(t_0, cr)} |f(t) - f(t_0)| \left(\sum_{r_i \sim 2^{-k}} \chi_{19B_i}(t) \frac{\chi_{19B_i}(x)}{\mu(19B_i)} \right) d\mu(t);
\end{aligned}$$

luego integrando sobre la bola, como $m(B(t_0, r) \cap F) = 0$, y utilizando que el solapamiento es acotado y la relación entre las medidas,

$$\begin{aligned}
\int_{B(t_0,r)} |\mathcal{E}f(x) - f(t_0)|dm(x) &\leq \sum_{2^{-k} \leq cr} \int_{x \in B(t_0,r), d(x,F) \sim 2^{-k}} |\mathcal{E}f(x) - f(t_0)|dm(x) \\
&\leq \sum_{2^{-k} \leq cr} \int_{B(t_0,cr)} |f(t) - f(t_0)| \left(\sum_{r_i \sim 2^{-k}} \chi_{19B_i}(t) \frac{m(19B_i)}{\mu(19B_i)} \right) d\mu(t) \\
&\leq C \left(\sum_{2^{-k} \leq cr} 2^{-k\gamma} \right) \int_{B(t_0,cr)} |f(t) - f(t_0)|d\mu(t) \\
&\leq Cr^\gamma \int_{B(t_0,cr)} |f(t) - f(t_0)|d\mu(t) \\
&\leq C \frac{m(B(t_0, cr))}{\mu(B(t_0, cr))} \int_{B(t_0,cr)} |f(t) - f(t_0)|d\mu(t).
\end{aligned}$$

En otras palabras,

$$\fint_{B(t_0,r)} |\mathcal{E}f(x) - f(t_0)| dm(x) \leq C \fint_{B(t_0,cr)} |f(t) - f(t_0)| d\mu(t),$$

y como el lado derecho tiende a cero cuando $r \to 0$ para μ-casi todo $t_0 \in F$ (pues μ duplica y $f \in L^1_{loc}(F)$, con lo que vale el teorema de diferenciación de Lebesgue), también lo hace el lado izquierdo y por lo tanto $\mathcal{E}f(t_0) = f(t_0)$ para μ-casi todo $t_0 \in F$.

Acotación L^p.

Tenemos que probar que existe $C > 0$ tal que $\|\mathcal{E}f\|_{p,m} \leq C\|f\|_{p,\mu}$ para cada $f \in L^p(F, \mu)$.

Vemos que

$$|\mathcal{E}f(x)| = \left| \sum_i \varphi_i(x) \fint_{19B_i} f d\mu \right| \leq \sum_i \chi_{6B_i}(x) \left(\fint_{19B_i} |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

luego por la desigualdad de Hölder sobre la suma, como $(\sum_i \chi_{6B_i}(x))^{p/p'} \leq C$,

$$|\mathcal{E}f(x)|^p \leq C \sum_i \chi_{6B_i}(x) \fint_{19B_i} |f|^p d\mu \leq C \int_F |f(t)|^p \left(\sum_i \chi_{19B_i}(t) \frac{\chi_{19B_i}(x)}{\mu(19B_i)} \right) d\mu(t).$$

Una vez más por la propiedad de solapamiento acotado,

$$\begin{aligned}
\int_X |\mathcal{E}f(x)|^p dm(x) &\leq C \int_F |f(t)|^p \left(\sum_i \chi_{19B_i}(t) \frac{m(19B_i)}{\mu(19B_i)} \right) d\mu(t) \\
&\leq C \int_F |f(t)|^p \left(\sum_k \sum_{r_i \sim 2^{-k}} \chi_{19B_i}(t) \frac{m(19B_i)}{\mu(19B_i)} \right) d\mu(t) \\
&\leq C \int_F |f(t)|^p \left(\sum_k 2^{-k\gamma} \right) d\mu(t) \leq C\|f\|^p_{p,\mu}.
\end{aligned}$$

Acotación Besov.

Para esta última parte, veremos que existe $C > 0$ tal que $[\mathcal{E}f]_{B^\alpha_{p,q}(X,m)} \leq C\|f\|_{B^\beta_{p,q}(F,\mu)}$ para cada $f \in B^\beta_{p,q}(F, \mu)$. Bastará probar que, si $q < \infty$,

$$\sum_{l \geq 1} 2^{l\alpha q} E_p \mathcal{E}f(2^{-l})^q \leq C\|f\|^q_{B^\beta_{p,q}(F,\mu)}$$

y

$$\sup_{l \geq 1} 2^{l\alpha} E_p \mathcal{E}f(2^{-l}) \leq C\|f\|_{B^\beta_{p,\infty}(F,\mu)}$$

para el caso $q = \infty$ (ver observación 2.1.7).

Primero probaremos que, para $l \geq 1$,

$$E_p\mathcal{E}f(2^{-l})^p \leq C2^{-lp}\sum_{k\leq l} 2^{k(p-\gamma)}E_pf(c2^{-k})^p + C2^{-lp}\|f\|_{p,\mu}^p + C2^{-l\gamma}E_pf(c2^{-l})^p.$$

Para esto, partimos $E_p\mathcal{E}f(2^{-l})^p$ en cuatro partes:

$$\begin{aligned}
E_p\mathcal{E}f(2^{-l})^p \leq & \int_{0<d(x,F)<2^{-l}} \fint_{B(x,2^{-l})} |\mathcal{E}f(x) - \mathcal{E}f(y)|^p dm(y)dm(x) \\
& + \int_{2^{-l}\leq d(x,F)<1} \int_{B(x,2^{-l})\cap\Omega} \frac{|\mathcal{E}f(x) - \mathcal{E}f(y)|^p}{\mu(B(x,2^{-l}))} dm(y)dm(x) \\
& + \int_{\frac{1}{2}\leq d(x,F)<1} \int_{B(x,2^{-l})\setminus\Omega} \frac{|\mathcal{E}f(x) - \mathcal{E}f(y)|^p}{\mu(B(x,2^{-l}))} dm(y)dm(x) \\
& + \int_{1\leq d(x,F)<\frac{3}{2}} \int_{B(x,2^{-l})\cap\Omega} \frac{|\mathcal{E}f(x) - \mathcal{E}f(y)|^p}{\mu(B(x,2^{-l}))} dm(y)dm(x) \\
= & \, I + II + III + IV
\end{aligned}$$

(notar que si $d(x,F) \geq 1$ será $\mathcal{E}f(x) = 0$, y lo mismo para y, luego como $d(x,y) < 2^{-l} \leq 1/2$, los términos I y II corresponden a los casos $d(x,F), d(y,F) < 1$, mientras que en III vale $d(y,F) \geq 1$ y en IV vale $d(x,F) \geq 1$).

Comenzamos acotando III, y IV se acotará de forma similar. Aquí tenemos que $\varphi_i(y) = 0$ para todo i, luego

$$\mathcal{E}f(x) - \mathcal{E}f(y) = \mathcal{E}f(x) = \sum_{i:x\in 6B_i} \varphi_i(x) \fint_{19B_i} f d\mu = \sum_{i:x\in 6B_i} (\varphi_i(x) - \varphi_i(y)) \fint_{19B_i} f d\mu.$$

Por lo tanto, utilizando la condición Lipschitz de cada φ_i, y que $d(x,y) < 2^{-l}$ y $\frac{1}{2} \leq d(x,F) < 1$ (y entonces $\frac{1}{36} < r_i < \frac{1}{6}$),

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}f(x) - \mathcal{E}f(y)|^p &\leq C \sum_{i:x\in 6B_i} \frac{d(x,y)^p}{r_i^p} \fint_{19B_i} |f|^p d\mu \\
&\leq C2^{-lp} \int_F |f(t)|^p \sum_i \frac{\chi_{6B_i}(x)\chi_{19B_i}(t)}{\mu(19B_i)} d\mu(t),
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
III &\leq C2^{-lp} \int_F |f(t)|^p \sum_i \left(\int_{\frac{1}{2}\leq d(x,F)<1} \chi_{6B_i}(x) dm(x) \right) \frac{\chi_{19B_i}(t)}{\mu(19B_i)} d\mu(t) \\
&\leq C2^{-lp} \int_F |f(t)|^p \left(\sum_{\frac{1}{36}<r_i<\frac{1}{6}} \chi_{19B_i}(t) \frac{m(6B_i)}{\mu(19B_i)} \right) d\mu(t)
\end{aligned}$$

$$\leq C2^{-lp}\|f\|^p_{p,\mu}$$

(observar que para las bolas $19B_i$ también vale el lema de solapamiento acotado 1.1.5).

Para II, $d(x,F)\sim 2^{-k}$ para algún $k\leq l$, y podemos escribir, utilizando que $\sum_i \varphi_i(x)-\varphi_i(y)=0$ (pues $x,y\in\Omega$),

$$\mathcal{E}f(x)-\mathcal{E}f(y)=\sum_i(\varphi_i(x)-\varphi_i(y))\fint_{19B_i}\fint_{B(x,2^{-k})}f(s)-f(t)d\mu(t)d\mu(s),$$

y para $x\in 3B_j$, $r_j\sim 2^{-k}$,

$$\int_{3B_j}\fint_{B(x,2^{-l})}|\mathcal{E}f(x)-\mathcal{E}f(y)|^p dm(y)dm(x)\leq$$
$$\leq C\int_{3B_j}\fint_{B(x,2^{-l})}\sum_i|\varphi_i(x)-\varphi_i(y)|^p\fint_{19B_i}\fint_{B(x,2^{-k})}|f(s)-f(t)|^p d\mu(t)d\mu(s)dm(y)dm(x)$$
$$\leq C\int_{3B_j}\fint_{B(x,2^{-l})}\sum_{i:x\vee y\in supp\varphi_i}d(x,y)^p r_i^{-p}\fint_{cB_j}\fint_{B(s,c2^{-k})}|f(s)-f(t)|^p d\mu(t)d\mu(s)dm(y)dm(x)$$
$$\leq C2^{kp}2^{-lp}\frac{m(3B_j)}{\mu(cB_j)}\int_{cB_j}\fint_{B(s,c2^{-k})}|f(s)-f(t)|^p d\mu(t)d\mu(s)$$
$$\leq C2^{kp}2^{-lp}2^{-k\gamma}\int_{cB_j}\fint_{B(s,c2^{-k})}|f(s)-f(t)|^p d\mu(t)d\mu(s),$$

donde hemos usado que $cB_j\subset 19B_i\subset CB_j$ (en efecto, si $x\in 6B_i$ es inmediato pues $r_i\sim r_j$, y si $y\in 6B_i$, como $d(x,y)<2^{-l}<2^{-k}$, se tiene que $x\in CB_i$ y que $r_i\sim d(y,F)\sim 2^{-k}$). Ahora sumando en $j: r_j\sim 2^{-k}$ y $k\leq l$, obtenemos

$$II\leq\sum_{k\leq l}\sum_{r_j\sim 2^{-k}}\int_{3B_j}\fint_{B(x,2^{-l})}|\mathcal{E}f(x)-\mathcal{E}f(y)|^p dm(y)dm(x)$$
$$\leq C2^{-lp}\sum_{k\leq l}2^{kp}2^{-k\gamma}\int_F\left(\sum_{r_j\sim 2^{-k}}\chi_{cB_j}(s)\right)\fint_{B(s,c2^{-k})}|f(s)-f(t)|^p d\mu(t)d\mu(s)$$
$$\leq C2^{-lp}\sum_{k\leq l}2^{kp}2^{-k\gamma}E_pf(c2^{-k})^p.$$

Ahora para I, como $d(x,F)\lesssim 2^{-l}$ y $d(x,y)<2^{-l}$, tenemos que $d(y,F)\lesssim 2^{-l}$ y existen $k,m\geq l$ tales que $d(x,F)\sim 2^{-k}, d(y,F)\sim 2^{-m}$ y, como $\sum_i\varphi_i(x)=\sum_j\varphi_j(y)=1$ podemos escribir

$$\mathcal{E}f(x)-\mathcal{E}f(y)=\sum_i\sum_j\varphi_i(x)\varphi_j(y)\fint_{19B_i}\fint_{19B_j}f(s)-f(t)d\mu(t)d\mu(s),$$

luego para $d(x,F)\sim 2^{-k}, d(y,F)\sim 2^{-m}$ tenemos que, utilizando que si $x\in 6B_i$ vale $B(x,c'2^{-k})\subset B_i\subset B(x,c2^{-k})$ y de forma similar para y,

$$|\mathcal{E}f(x)-\mathcal{E}f(y)|^p\leq$$

$$\leq C \sum_{r_i\sim 2^{-k}} \sum_{r_j\sim 2^{-m}} \chi_{6B_i}(x)\chi_{6B_j}(y) \fint_{B(x,c2^{-k})} \fint_{B(y,c2^{-m})} |f(s)-f(t)|^p d\mu(t)d\mu(s)$$
$$\leq C \fint_{B(x,c2^{-k})} \fint_{B(y,c2^{-m})} |f(s)-f(t)|^p d\mu(t)d\mu(s).$$

Integrando primero con respecto a y,

$$\int_{y\in B(x,2^{-l}),d(y,F)\sim 2^{-m}} |\mathcal{E}f(x)-\mathcal{E}f(y)|^p dm(y) \leq$$
$$\leq C \fint_{B(x,c2^{-k})} \int_{y\in B(x,2^{-l}),d(y,F)\sim 2^{-m}} \fint_{B(y,c2^{-m})} |f(s)-f(t)|^p d\mu(t)dm(y)d\mu(s),$$

pero

$$\int_{y\in B(x,2^{-l}),d(y,F)\sim 2^{-m}} \fint_{B(y,c2^{-m})} |f(s)-f(t)|^p d\mu(t)dm(y) \leq$$
$$\leq \sum_{r_h\sim 2^{-m}} \int_{B(x,2^{-l})\cap cB_h} \fint_{B(y,c2^{-m})} |f(s)-f(t)|^p d\mu(t)dm(y)$$
$$\leq C \int_{B(x,2^{-l}+c2^{-m})} |f(s)-f(t)|^p \int_{B(t,c2^{-m})} \frac{\left(\sum_{r_j\sim 2^{-m}} \chi_{aB_j}(y)\right)}{\mu(B(y,c2^{-m}))} dm(y)d\mu(t)$$
$$\leq C2^{-m\gamma} \int_{B(x,c2^{-l})} |f(s)-f(t)|^p d\mu(t),$$

entonces tenemos que

$$\int_{y\in B(x,2^{-l}),d(y,F)\sim 2^{-m}} |\mathcal{E}f(x)-\mathcal{E}f(y)|^p dm(y) \leq$$
$$\leq C2^{-m\gamma} \fint_{B(x,c2^{-k})} \int_{B(x,c2^{-l})} |f(s)-f(t)|^p d\mu(t)d\mu(s);$$

y ahora integrando respecto a x (sobre la banda $d(x,F)\sim 2^{-k}$),

$$\sum_{r_i\sim 2^{-k}} \int_{3B_i} \frac{1}{m(B(x,2^{-l}))} \int_{y\in B(x,2^{-l}),d(y,F)\sim 2^{-m}} |\mathcal{E}f(x)-\mathcal{E}f(y)|^p dm(y)dm(x) \leq$$
$$\leq C2^{-m\gamma} \sum_{r_i\sim 2^{-k}} \int_{3B_i} \frac{2^{l\gamma}}{\mu(B(x,c2^{-l}))} \fint_{B(x,c2^{-k})} \int_{B(x,c2^{-l})} |f(s)-f(t)|^p d\mu(t)d\mu(s)dm(x)$$
$$\leq C2^{-m\gamma}2^{l\gamma} \int_F \fint_{B(s,c2^{-l})} \frac{|f(s)-f(t)|^p}{\mu(B(s,c2^{-k}))} \int_{B(s,c2^{-k})} \left(\sum_{r_i\sim 2^{-k}} \chi_{3B_i}(x)\right) dm(x)d\mu(t)\mu(s)$$
$$\leq C2^{-m\gamma}2^{l\gamma}2^{-k\gamma} \int_F \fint_{B(s,c2^{-l})} |f(s)-f(t)|^p d\mu(t)\mu(s) = C2^{-m\gamma}2^{l\gamma}2^{-k\gamma} E_pf(c2^{-l})^p.$$

Finalmente, sumando en k y en m,

$$\begin{aligned} I &\leq \sum_{k\geq l} \int_{d(x,F)\sim 2^{-k}} \fint_{B(x,2^{-l})} |\mathcal{E}f(x)-\mathcal{E}f(y)|^p dm(y)dm(x) \\ &\leq C2^{l\gamma} E_pf(2^{-l})^p \sum_{k\geq l}\sum_{m\geq l} 2^{-m\gamma}2^{-k\gamma} \leq C2^{-l\gamma}E_pf(c2^{-l})^p. \end{aligned}$$

Probamos entonces que

$$E_p\mathcal{E}f(2^{-l}) \leq C2^{-l}\left(\sum_{k\leq l} 2^{k(p-\gamma)}E_pf(c2^{-k})^p\right)^{1/p} + C2^{-l}\|f\|_{p,\mu} + C2^{-l\gamma/p}E_pf(c2^{-l}).$$

Ahora tenemos que considerar cada caso por separado. Para $q<\infty$ y $\alpha=\beta+\gamma/p$, por la desigualdad de Hardy ($\nu=q/p$, aplicada al primer término de la suma) tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\sum_l 2^{l\alpha q}E_p\mathcal{E}f(2^{-l})^q\right)^{1/q} &\leq C\left(\sum_l 2^{l\beta q}2^{l\gamma q/p}2^{-lq}\left(\sum_{k\leq l}2^{k(p-\gamma)}E_pf(c2^{-k})^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \\ &\quad + C\left(\sum_l 2^{-l(1-\alpha)q}\|f\|_{p,\mu}^q\right)^{1/q} \\ &\quad + C\left(\sum_l 2^{l\beta q}2^{l\gamma q/p}2^{-l\gamma q/p}E_pf(c2^{-l})^q\right)^{1/q} \\ &\leq C\left(\sum_l 2^{l\beta q}2^{l\gamma q/p}2^{-lq}2^{l(q-\gamma q/p)}E_pf(c2^{-l})^q\right)^{1/q} \\ &\quad + C\|f\|_{p,\mu} \\ &\quad + C\left(\sum_l 2^{l\beta q}2^{l\gamma q/p}2^{-l\gamma q/p}E_pf(c2^{-l})^q\right)^{1/q} \\ &\leq C\|f\|_{p,\mu} + C\left(\sum_l 2^{l\beta q}E_pf(c2^{-l})^q\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Y por otro lado para $q=\infty$ y $\alpha=\beta+p/q<1$,

$$\begin{aligned} 2^{-l}\left(\sum_{k\leq l}2^{kp}2^{-k\gamma}E_pf(c2^{-k})^p\right)^{1/p} &\leq 2^{-l}\left(\sup_k 2^{k\beta p}E_pf(c2^{-k})^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k\leq l}2^{kp}2^{-k\gamma}2^{-k\beta p}\right)^{1/p} \\ &\leq C2^{-l}2^{l(1-\alpha)}\left(\sup_k 2^{k\beta}E_pf(c2^{-k})\right) \end{aligned}$$

$$= C2^{-l\alpha}\left(\sup_{k\le l} 2^{k\beta} E_p f(c2^{-k})\right),$$

entonces para todo $l \geq 1$,

$$2^{l\alpha p} E_p \mathcal{E} f(2^{-l})^p \leq C \sup_{k\le l} 2^{k\beta} E_p f(c2^{-k}) + C\|f\|_{p,\mu} + C[f]_{B^{\beta}_{p,\infty}}.$$

□

6.2. El teorema de restricción

Para ver el tema de restricciones, deberemos requerir más condiciones sobre los espacios a considerar. Sea (X, d, m) un espacio Ahlfors N-regular con $m(X) = \infty$, como en capítulos anteriores. Sean $F \subset X$ cerrado y μ una medida de Borel soportada en F tal que (F, d, μ) es Ahlfors d-regular, $0 < d < N$.

De forma análoga a [JW], para demostrar el teorema de restricción utilizaremos los espacios potenciales $L^{\alpha,p}$ y probaremos que las funciones en estos espacios dejan una traza en F que pertenece a un cierto espacio de Besov. Procederemos luego por interpolación utilizando resultados del capítulo anterior.

Consideremos entonces el núcleo k_α definido en el Capítulo 3 y el operador J_α asociado, definidos en el espacio (X, d, m) como antes. Recordemos que los resultados clave que utilizamos para demostrar que una función de $L^{\alpha,p}$ tiene cierta regularidad Besov (corolario 3.3.18) son estimaciones de tamaño y suavidad de k_α, obtenidas en los lemas 3.3.14, 3.2.5 y 3.3.16. Por esta razón, para probar que la restricción a F de una función $f = J_\alpha g$ pertenece a un espacio de Besov en F, comenzaremos por demostrar que el núcleo k_α también satisface propiedades análogas a las allí enunciadas, integrando en F con respecto a la medida μ, con cotas también uniformes para todo $z \in X$. Este es el resultado siguiente.

Lema 6.2.1. *Si $0 < \alpha < 1$ y $q > 0$ entonces:*

1. *Si $q(N - \alpha) < d < q(N + \alpha)$, existe $C > 0$ tal que para todo $z \in X$ vale*

$$\int_F k_\alpha(s, z)^q d\mu(s) \leq C < \infty.$$

2. *Si $q(N - \alpha) < d < q(N - \alpha + 1)$ y $0 < r < Cdiam(F)$, existe $C > 0$ tal que para todo $z \in X$ vale*

$$\int_F \fint_{B(s,r)} |k_\alpha(s, z) - k_\alpha(t, z)|^q d\mu(t) d\mu(s) \leq Cr^{d-q(N-\alpha)}.$$

Demostración. Si $z \in F$, este lema sigue exactamente los mismos pasos que los lemas 3.3.14 y 3.3.16. Si $z \notin F$ (es decir $d(z,F) > 0$), consideremos $s_0 \in F$ tal que

$$d(z,F) \leq d(z,s_0) < 2d(z,F).$$

En particular $d(z,s_0) < 2d(s,z)$ para todo $s \in F$ y luego vale $d(s,s_0) < 3d(s,z)$ para todo $s \in F$.

Ahora, la primera parte es inmediata si separamos la integral en $F \cap B(z, 2d(z,s_0))$ y $F \backslash B(z, 2d(z,s_0))$, pues podemos agrandar esos conjuntos por $F \cap B(s_0, 3d(z,s_0))$ y $F \backslash B(s_0, d(z,s_0))$ y allí usar el tamaño del núcleo y la propiedad Ahlfors de F. Para la segunda, separamos como en el lema 3.3.16: en la parte local, $d(s,z) < 2r$ y utilizamos la misma estrategia que para la primera parte, mientras que en el infinito tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{d(s,z)\geq 2r} \frac{r^q}{d(s,z)^{q(N+1-\alpha)}} d\mu(s) \leq \\
&\qquad \leq \int_{d(s,z)\geq 2r, d(s,s_0)<r} \frac{r^q}{d(s,z)^{q(N+1-\alpha)}} d\mu(s) + \int_{d(s,z)\geq 2r, d(s,s_0)\geq r} \frac{r^q}{d(s,z)^{q(N+1-\alpha)}} d\mu(s) \\
&\qquad \leq C \int_{d(s,s_0)<r} \frac{1}{d(s,z)^{q(N-\alpha)}} d\mu(s) + r^q \int_{d(s,s_0)\geq r} \frac{1}{d(s,z)^{q(N+1-\alpha)}} d\mu(s) \\
&\qquad \leq C \int_{d(s,s_0)<r} \frac{1}{d(s,s_0)^{q(N-\alpha)}} d\mu(s) + Cr^q \int_{d(s,s_0)\geq r} \frac{1}{d(s,s_0)^{q(N+1-\alpha)}} d\mu(s) \\
&\qquad \leq Cr^{d-q(N-\alpha)} + Cr^q r^{d-q(N+1-\alpha)} = Cr^{d-q(N-\alpha)}
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $q(N-\alpha) < d < q(N+q-\alpha)$. □

Finalmente el resultado clave para probar el teorema de restricción:

Teorema 6.2.2. *Sean $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \infty$ satisfaciendo $0 < \beta = \alpha - \frac{N-d}{p} < 1$ y sea $0 < r < Cdiam(F)$. Luego para $f = J_\alpha g$ continua con $g \in L^p(X)$, se tiene que*

1.

$$\int_F |f(s)|^p d\mu(s) \leq C\|g\|_p^p.$$

2.

$$\int_F \fint_{B(s,r)} |f(s) - f(t)|^p d\mu(t) d\mu(s) \leq Cr^{\beta p}\|g\|_p^p.$$

Demostración. Como f es continua, las integrales del lado izquierdo están bien definidas.

1. Tenemos que, si tomamos $0 < a < 1$,

$$\int_F |f(s)|^p d\mu(s) \leq \int_F \left(\int_X k_\alpha(s,y)^{ap}|g(y)|^p dm(y)\right)\left(\int_X k_\alpha(s,y)^{(1-a)p'} dm(y)\right)^{p/p'} d\mu(s)$$

$$\leq C \int_X \left(\int_F k_\alpha(s,y)^{ap} d\mu(s) \right) |g(y)|^p dm(y)$$
$$\leq C \|g\|_p^p.$$

Esto es cierto por los lemas 3.3.14 y 6.2.1 (parte 1) siempre que exista un $0 < a < 1$ con $(1-a)p'(N-\alpha) < N < (1-a)p'(N+\alpha)$ y $ap(N-\alpha) < d < ap(N+\alpha)$, lo que es equivalente a pedir

$$\frac{d}{p(N+\alpha)} < a < \frac{d}{p(N-\alpha)}$$

y

$$\frac{N-\alpha p}{p(N-\alpha)} < a < \frac{N+\alpha p}{p(N+\alpha)},$$

que siempre existe pues $d < N + \alpha p$ y $N - \alpha p < d$, y además en este caso se tiene que $0 < \frac{d}{p(N+\alpha)} < a < \frac{N+\alpha p}{p(N+\alpha)}$.

2. Tomemos nuevamente $0 < a < 1$. Dadas $s, t \in F$,

$$|f(s) - f(t)|^p \leq \left(\int_X |k_\alpha(x,s) - k_\alpha(x,t)||g(x)| dm(x) \right)^p$$
$$\leq \left(\int_X |k_\alpha(x,s) - k_\alpha(x,t)|^{ap} |g(x)|^p dm(x) \right) \left(\int_X |k_\alpha(x,s) - k_\alpha(x,t)|^{(1-a)p'} dm(x) \right)^{p/p'}.$$

Luego si $d(s,t) < r$ por el lema 3.2.5 se tiene que

$$\int_X |k_\alpha(x,s) - k_\alpha(x,t)|^{(1-a)p'} dm(x) \leq C r^{N-(1-a)p'(N-\alpha)}$$

si $0 < a < 1$ satisface $(1-a)p'(N-\alpha) < N < (1-a)p'(N-\alpha+1)$. Ahora,

$$\int_F \fint_{B(s,r)} |f(s) - f(t)|^p d\mu(t) d\mu(s) \leq$$
$$\leq C r^{N\frac{p}{p'}-(1-a)p(N-\alpha)} \int_X \left(\int_F \fint_{B(s,r)} |k_\alpha(x,s) - k_\alpha(x,t)|^{ap} d\mu(t) d\mu(s) \right) |g(x)|^p dm(x)$$

y vale

$$\int_F \fint_{B(s,r)} |k_\alpha(x,s) - k_\alpha(x,t)|^{ap} d\mu(t) d\mu(s) \leq C r^{d-ap(N-\alpha)}$$

por el lema 6.2.1 siempre que a satisfaga $ap(N-\alpha) < d < ap(N-\alpha+1)$ y se concluye

$$\int_F \fint_{B(s,r)} |f(s) - f(t)|^p d\mu(t) d\mu(s) \leq C r^{N\frac{p}{p'}-(1-a)p(N-\alpha)} r^{d-ap(N-\alpha)} \|g\|_p^p = C r^{p\beta} \|g\|_p^p.$$

Para la existencia de ese a, nuevamente vemos que es equivalente a que

$$\frac{d}{p(N+1-\alpha)} < a < \frac{d}{p(N-\alpha)}$$

y

$$\frac{N-\alpha p}{p(N-\alpha)} < a < \frac{N+p-\alpha p}{p(N+1-\alpha)},$$

que nuevamente es cierto porque $N-\alpha p < d$, $d < N+(1-\alpha)p$ y

$$\begin{aligned}(N-\alpha p)(N+1-\alpha) &= N^2 - N\alpha p + N - \alpha p - N\alpha + \alpha^2 p\\ &< N^2 - N\alpha + Np - \alpha p - N\alpha p + \alpha^2 p\\ &= (N-\alpha)(N+p-\alpha p)\end{aligned}$$

(que es cierto pues $p > 1$).

□

Corolario 6.2.3. *Bajo las condiciones anteriores, existe un operador lineal y continuo*

$$Tr : L^{\alpha,p} \to B^{\beta}_{p,\infty}(F,d,\mu)$$

que satisface $Trf = f|_F$ para toda $f \in L^{\alpha,p}$ continua.

Demostración. El teorema anterior nos garantiza la acotación del operador restricción en la norma de $B^{\beta}_{p,\infty}(F,d,\mu)$ para f continuas. Como las continuas son densas en $L^{\alpha,p}$ y $B^{\beta}_{p,\infty}(F,d,\mu)$ es de Banach, el operador se puede extender a todo $L^{\alpha,p}$ lineal y con la misma cota. □

Entonces tenemos el siguiente resultado, cercano a lo que deseamos:

Corolario 6.2.4. *Si tenemos $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$, entonces el operador traza está bien definido y es continuo*

$$Tr : (L^{\alpha_1,p}, L^{\alpha_2,p})_{\theta,q} \to B^{\beta}_{p,q}(F,d,\mu),$$

con $\beta = (1-\theta)\alpha_1 + \theta\alpha_2 - \frac{N-d}{p}$.

Demostración. Es usar el corolario anterior para α_1, α_2 y sus correspondientes β_1, β_2, usando que $\left(B^{\beta_1}_{p,\infty}, B^{\beta_2}_{p,\infty}\right)_{\theta,q} \hookrightarrow B^{\beta}_{p,q}$. □

Ahora, no tenemos una caracterización general de $(L^{\alpha_1,p}, L^{\alpha_2,p})_{\theta,q}$, pero sí para α_1, α_2 pequeños, por lo que nuestro teorema de restricción tomará la forma:

Teorema 6.2.5. *Si* $\alpha < \alpha_0$, $1 < p < \infty$ *y* $\beta = \alpha - \frac{N-d}{p} > 0$, *entonces para* $1 \leq q < \infty$ *existe un operador lineal y continuo*

$$Tr : B^{\alpha}_{p,q}(X) \to B^{\beta}_{p,q}(F)$$

tal que para f *continua vale*

$$Trf = f|_F.$$

Demostración. Si $\alpha < \alpha_0$, podemos tomar $\alpha_1, \alpha_2 < \alpha_0$ tales que $\alpha = \alpha_1 + \theta(\alpha_2 - \alpha_1)$, y por el teorema 5.2.6 concluimos lo deseado. $\square$

Capítulo 7

Una generalización de espacios de Newton-Sobolev

En este capítulo presentamos una generalización de un tipo de espacios de Sobolev introducido por N. Shanmugalingam en [Sh1].

Si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y f es una función suave definida en Ω, el Teorema Fundamental del Cálculo sobre curvas nos garantiza que para toda curva γ de Ω, suave a trozos y que une x con y vale

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_\gamma |\nabla f| d|s|.$$

Las funciones no negativas que satisfacen esta desigualdad en el lugar de $|\nabla f|$ se llaman *gradientes superiores* (ver por ejemplo [HeK]). En [Sh1], Shanmugalingam describe una forma de caracterizar los espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ mediante gradientes superiores: la existencia de un gradiente superior en L^p para una función f es condición necesaria y suficiente para existencia de ∇f y su pertenencia a L^p.

Esta definición se puede extender al contexto métrico. Los espacios obtenidos de esta manera, llamados de Newton-Sobolev, presentan una forma interesante de definir funciones de Sobolev en espacios métricos en los que hay "suficientes" curvas rectificables, pero si el total de curvas rectificables es despreciable, en un sentido a precisar en este capítulo, el espacio de Sobolev será todo L^p.

Siguiendo a Fuglede en [Fu], en [Sh1] se adapta la noción de módulo de un sistema de medidas a conjuntos de curvas rectificables, que resulta una medida exterior. Luego se dice que una propiedad se satisface para *casi toda curva* si el conjunto de curvas para el que no se satisface tiene módulo cero.

Un gradiente superior débil para una función f será una función no negativa g que cumpla la desigualdad de gradientes superiores para casi toda curva. El espacio de Newton-Sobolev $N^{1,p}$ se define a continuación como el formado por las funciones $f \in L^p$

con al menos un gradiente superior débil en L^p.

En el mismo trabajo se prueba que el espacio resultante es de Banach y se establece la comparación $M^{1,p} \hookrightarrow N^{1,p}$, con $M^{1,p}$ el espacio de Hajłasz-Sobolev descripto en el capítulo 2. Más aún se puede ver que

$$M^{1,p} \hookrightarrow \mathcal{KS}^{1,p} \hookrightarrow KS^{1,p} \hookrightarrow N^{1,p}.$$

Bajo la condición que las funciones de Newton-Sobolev satisfagan una desigualdad de tipo Poincaré, se prueba que todos estos espacios coinciden. Más aún, se prueba que vale un resultado de densidad de funciones Lipschitz-1 tipo Lusin, y bajo ciertas condiciones adicionales sobre el espacio, se prueban resultados de inmersión de Sobolev.

Debido a que la presencia de una cantidad suficiente de curvas rectificables es esencial para que la teoría no sea trivial, es natural preguntarse si espacios métricos generales las poseen. Se pueden construir ejemplos sencillos en los que esto no ocurre. Por ejemplo si consideramos $\mathbb{R}$ con la distancia $d(x, y) = |x - y|^{1/2}$, entonces todas las curvas son 0-dimensionales (si son puntos) o 2-dimensionales (si son intervalos). En este contexto la teoría de Shanmugalingam no tendría sentido, pues sólo las curvas triviales serían rectificables, pero considerar aquellas curvas con medida de Hausdorff 2-dimensional finita y positiva recuperaría los espacios de Sobolev clásicos, si cambiamos la forma de medir la "longitud" de estas curvas.

Un ejemplo más interesante consiste en tomar $\mathbb{R}^2$ con una métrica parabólica como la descripta en el capítulo 1,

$$d((x, y), (x', y')) = \text{máx}\{|x - x'|, |y - y'|^{1/2}\}.$$

En este caso, las curvas horizontales son las únicas rectificables, mientras que las curvas suaves no horizontales tienen dimensión 2. Nuevamente la medida de Hausdorff 2-dimensional se presenta como una alternativa a la medida 1-dimensional (es decir la longitud), pero este ejemplo es no trivial, pues esta medida $\mathcal{H}^2$ "parabólica" no recupera la medida $\mathcal{H}^1$ "euclídea".

Por esta razón nos proponemos generalizar algunos de estos resultados a espacios en los que la "longitud" de curvas se mide de otra forma, más específicamente con una medida μ.

En las secciones 1 y 2 generalizamos la maquinaria necesaria para construir nuestra versión de espacios de Newton-Sobolev, para luego definirlos y probar su completitud en la sección 3. Finalmente en la sección 4 vemos propiedades adicionales que se piden al espacio, por ejemplo una versión de la desigualdad de Poincaré, para garantizar resultados como la densidad de funciones Lipschitz o teoremas de inmersión de Sobolev. Adicionalmente compararemos estos espacios con los de Hajłasz-Sobolev $M^{\beta,p}$.

7.1. μ-medida de arco y gradientes superiores

Dado un espacio métrico (X, d), una **curva (compacta)** es una función continua $\gamma : [a, b] \to X$. Su longitud se define por

$$l(\gamma) = \sup_{\mathbf{t} \in \pi[a,b]} \sum d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones de $[a, b]$.

Si $l(\gamma) < \infty$, decimos que γ es rectificable. Si γ es además inyectiva, diremos que es una **curva de Jordan**.

Utilizaremos la notación $|\gamma| = Im(\gamma)$. Decimos que $\tilde{\gamma}$ es una sub-curva de γ si es la restricción de γ a un subintervalo de $[a, b]$.

El concepto de longitud de una curva es similar, pero no igual, al de la medida de Hausdorff 1-dimensional de la imagen de la curva (la longitud puede ser mucho mayor si por ejemplo la curva se recorre muchas veces), pero sí coinciden para curvas de Jordan (ver por ejemplo [Fa]). Para toda curva de Jordan y toda funcion Borel medible no negativa g, vale la igualdad

$$\int_\gamma g = \int_{|\gamma|} g d\mathcal{H}^1.$$

Cambiaremos la medida $d\mathcal{H}^1$ por otra medida de Borel en el espacio, como por ejemplo otra medida de Hausdorff $d\mathcal{H}^s$ o estas medidas con un peso $\omega d\mathcal{H}^s$.

Definición 7.1.1. Para μ una medida de Borel en X, definimos Γ^μ como el conjunto de curvas no triviales e inyectivas $\gamma : [a, b] \to X$ que satisfacen que la imagen de toda subcurva no trivial de γ mide positivo y finito con la medida μ.

Sea ahora μ fija y sin átomos (es decir $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$). Llamamos $h(\gamma) = \mu(|\gamma|)$ y definimos

$$\int_\gamma g = \int_{|\gamma|} g d\mu.$$

Definición 7.1.2. Para $\gamma : [a, b] \to X$ en Γ^μ definimos su **μ-medida de arco** $\nu_\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$\nu_\gamma(x) = h(\gamma|_{[a,x]})$$

para todo $x \in [a, b]$.

Lema 7.1.3. *Para $\gamma : [a,b] \to X$ en Γ^μ, ν_γ es estrictamente creciente, continua, sobre $[0, h(\gamma)]$ y además*

$$h(\gamma) = h(\gamma|_{[a,x]}) + h(\gamma|_{[x,b]}).$$

Demostración. ν_γ **es creciente.** Si $a \leq x < y \leq b$, $\gamma([a,x]) \subset \gamma([a,y])$, luego

$$\mu(\gamma([a,x])) \leq \mu(\gamma([a,y])).$$

ν_γ **es continua.** Si $x_n \nearrow x$, tenemos que $\gamma([a,x_n]) \nearrow \gamma([a,x))$, luego como

$$\mu(\gamma([a,x])) = \mu(\gamma([a,x))) + \mu(\gamma(\{x\})) = \mu(\gamma([a,x)))$$

(pues μ no tiene átomos) tenemos que ν_γ resulta continua a izquierda. De manera similar, si $x_n \searrow x$, $\gamma([a,x_n]) \searrow \gamma([a,x])$ y obtenemos la continuidad a derecha..

ν_γ **es sobre** $[0, h(\gamma)]$**.** Como ν_γ es continua y $\nu_\gamma(a) = 0 < h(\gamma) = \nu_\gamma(b)$, toma todos los valores intermedios. Como es creciente, no toma otros valores.

$h(\gamma) = h(\gamma|_{[a,x]}) + h(\gamma|_{[x,b]})$**.** Por ser γ inyectiva,

$$\mu(\gamma([a,b])) = \mu(\gamma([a,x])) + \mu(\gamma((x,b])),$$

y como $\mu(\gamma(\{x\})) = 0$, tenemos la igualdad que queríamos.

ν_γ **es estrictamente creciente.** Sean $a \leq x < y \leq b$. Debemos ver que existen $z \in (x,y), \epsilon > 0$ tales que $B(\gamma(z), \epsilon) \cap |\gamma| \subset Im(\gamma|_{[\gamma(x),\gamma(y)]})$, luego como por hipótesis esa medida debe ser positiva, tendremos lo deseado. Pero esto es inmediato, pues si $x < z < y$, $Im(\gamma([a,x])) \cup Im(\gamma([y,b]))$ es un compacto no vacío disjunto de $\{\gamma(z)\}$ (por inyectividad), por lo que su distancia es positiva y existirá ese $\epsilon > 0$. □

Teorema 7.1.4. *Para $\gamma : [a,b] \to X$ en Γ^μ, existe una única $\gamma_h : [0, h(\gamma)] \to X$ tal que*

$$\gamma = \gamma_h \circ \nu_\gamma,$$

*$|\gamma| = |\gamma_h|$, $\nu_{(\gamma_h)}(t) = t$ en $[0, h(\gamma)]$ (y por lo tanto $\gamma_h = \gamma_h \circ \nu_{\gamma_h}$). A esa parametrización la llamamos el **parámetro de μ-medida de arco** de γ.*

Demostración. Como $\nu_\gamma : [a,b] \to [0, h(\gamma)]$ es estrictamente creciente y sobre, es biyectiva y podemos definir

$$\gamma_h = \gamma \circ \nu_\gamma^{-1}.$$

Es inmediato que γ y γ_h tienen la misma imagen, y además

$$\nu_{(\gamma_h)}(t) = \mu(\gamma_h([0,t])) = \mu(\gamma(\nu_\gamma^{-1}([0,t]))) = \mu(\gamma([a, \nu_\gamma^{-1}(t)])) = \nu_\gamma(\nu_\gamma^{-1}(t)) = t.$$

□

Corolario 7.1.5. *Si $\gamma : [0,h] \to X$ es una curva de Γ^μ parametrizada por su μ-medida de arco, para todo boreliano B de $[0,h]$ se tiene que*

$$\mu(\gamma(B)) = l(B),$$

donde $l(B)$ es la longitud de B. Más aún, si $g : X \to \mathbb{R}$ es no negativa y Borel medible, para toda subcurva $\tilde{\gamma} = \gamma|_{[a,b]}$ se tiene que

$$\int_{\tilde{\gamma}} g = \int_a^b g \circ \tilde{\gamma}.$$

Con estos resultados, obtenemos que al igual que para el caso de curvas rectificables vale lo siguiente:

Teorema 7.1.6. *Dadas $f : X \to \mathbb{R}$ una función y $\gamma : [0,h] \to X$ una curva en Γ^μ parametrizada por su μ-medida de arco, si existe $\rho : X \to \mathbb{R}$ medible Borel y no negativa con*

$$|f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| \leq \int_{\gamma|_{[s,t]}} \rho < \infty$$

para todo par de puntos $0 \leq s < t \leq h$, entonces $f \circ \gamma : [0,h] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como $\rho \in L^1(|\gamma|, d\mu)$, por absoluta continuidad de la integral existe $\delta > 0$ tal que si $E \subset |\gamma|$ tiene $\mu(E) < \delta$, entonces $\int_E \rho d\mu < \epsilon$. Entonces si $0 \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n \leq h$ satisfacen $\sum_i |b_i - a_i| < \delta$, tenemos que

$$\mu(\cup_i \gamma([a_i, b_i])) = \sum_i \nu_\gamma(b_i) - \nu_\gamma(a_i) = \sum_i b_i - a_i < \delta$$

y por lo tanto

$$\sum_i |f \circ \gamma(b_i) - f \circ \gamma(a_i)| \leq \sum_i \int_{\gamma|_{[a_i,b_i]}} \rho = \int_{\cup_i \gamma([a_i,b_i])} \rho d\mu < \epsilon.$$

□

Si ρ es una función Borel medible no negativa que satisface

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_\gamma \rho$$

para toda $\gamma \in \Gamma^\mu$ de extremos x, y, para todo par de puntos $x, y \in X$ con $f(x), f(y)$ finitos, decimos que ρ es un **μ-gradiente superior** para f.

7.2. p-Módulo de una familia de curvas y gradientes superiores p-débiles

Sea ahora m una medida de Borel sobre X. Como en el caso de [Sh1], adaptaremos la definición de módulo de familias de medidas como se lo encuentra en [Fu] al caso de familias de curvas.

Para cada $\Gamma \subset \Gamma^{\mu}$ y $0 < p < \infty$ definimos su **p-módulo** como

$$Mod_p(\Gamma) = \text{ínf} \int_X g^p dm$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las g no negativas Borel medibles que satisfacen

$$\int_\gamma g \geq 1$$

para toda $\gamma \in \Gamma$.

Teorema 7.2.1. *Mod_p es una medida exterior sobre Γ^{μ}*

Demostración. La monotonía es trivial (si $\Gamma \subset \Gamma'$, toda función que compite por el ínfimo para Γ' lo hace para Γ). Para la σ-subaditividad, si $\Gamma = \cup_i \Gamma_i$, dado $\epsilon > 0$ para cada i tomamos g_i que compite por el ínfimo en $Mod_p(\Gamma_i)$ y que

$$\int_X g_i^p dm \leq Mod_p(\Gamma_i) + 2^{-i}\epsilon.$$

Ahora, si $g = \sup_i g_i$, g competirá por el ínfimo en $Mod_p(\Gamma)$ y además

$$Mod_p(\Gamma) \leq \int_X g^p dm \leq \sum_i \int_X g_i^p dm \leq \sum_i Mod_p(\Gamma_i) + \epsilon.$$

□

Veremos algunas propiedades de las familias de curvas de módulo p cero.

Lema 7.2.2. *$Mod_p(\Gamma) = 0$ si y sólo si existe $g \geq 0$ Borel medible con $\int g^p dm < \infty$ y*

$$\int_\gamma g = \infty$$

para toda $\gamma \in \Gamma$.

Demostración. Si existe una tal g entonces $g_n = \frac{1}{n} g$ satisface ser Borel medible, $g_n \geq 0$ y $\int_\gamma g_n = \infty \geq 1$ para todo n, luego

$$Mod_p(\Gamma) \leq \int_X g_n^p dm = \frac{1}{n^p} \int_X g^p dm \to 0.$$

Por otro lado, si $Mod_p(\Gamma) = 0$, para cada n podemos seleccionar g_n que compita por el ínfimo y $\int_X g_n^p dm < 4^{-n}$. Luego si definimos $g = (\sum_n 2^n g_n^p)^{1/p}$, se tiene que g es Borel medible, no negativa, $\int_X g^p dm = \sum_n 2^n \int_X g_n^p dm \leq 1 < \infty$, y además

$$\int_\gamma g \geq \int_\gamma 2^{n/p} g_n \geq 2^{n/p}$$

para todo n, con lo que $\int_\gamma g = \infty$ para toda $\gamma \in \Gamma$. □

Una proposición sobre curvas se dice que vale para p-casi toda curva si el conjunto Γ de curvas en las que falla satisface $Mod_p(\Gamma) = 0$.

Necesitaremos también el siguiente resultado:

Lema 7.2.3. *Si $\int_X |g_n - g|^p dm \to 0$, existe una subsucesión $(g_{n_k})_k$ tal que $\int_\gamma |g_{n_k} - g| \to 0$ para p-casi toda $\gamma \in \Gamma^\mu$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad asumimos $g_n \geq 0$ e $\int_X g_n^p dm \to 0$, y debemos probar que $\int_\gamma g_{n_k} \to 0$ para alguna subsucesión (g_{n_k}) y p-casi toda γ. Tomamos una subsucesión que satisfaga

$$\int_X g_{n_k}^p dm < 2^{-k(p+1)}.$$

Sean ahora $\Gamma_k = \{\gamma : \int_\gamma g_{n_k} \geq 2^{-k}\}$ y $\Gamma = \limsup_k \Gamma_k$. Es claro que $\int_\gamma 2^k g_{n_k} \geq 1$ para $\gamma \in \Gamma_k$, y por lo tanto

$$Mod_p(\Gamma_k) \leq \int_X (2^k g_{n_k})^p dm < 2^{-k},$$

con lo que para cada j

$$Mod_p(\Gamma) \leq Mod_p(\cup_{k>j}\Gamma_k) \leq \sum_{k>j} Mod_p(\Gamma_k) < 2^{-j}$$

y por lo tanto $Mod_p(\Gamma) = 0$. Finalmente, si $\mu \notin \Gamma$ existe j tal que para todo $k > j$ se tiene que $\int_\gamma g_{n_k} < 2^{-k}$ y tenemos lo deseado. □

Dado un conjunto $E \subset X$, definimos

$$\Gamma_E = \{\gamma \in \Gamma^\mu : |\gamma| \cap E \neq \emptyset\}$$

$$\Gamma_E^+ = \{\gamma \in \Gamma^\mu : \mu(|\gamma| \cap E) > 0\}$$

y tenemos el siguiente lema.

Lema 7.2.4. *Si $m(E) = 0$, entonces $Mod_p(\Gamma_E^+) = 0$.*

Demostración. Trivial, pues $g = \infty\chi_E$ satisface $g = 0$ en m-casi todo punto, pero $\int_\gamma g = \infty$ para cada $\gamma \in \Gamma_E^+$. □

En la sección anterior introdujimos la noción de gradiente superior. Con la ayuda de la medida exterior Mod_p definida sobre conjuntos de curvas, debilitaremos este concepto.

Una función Borel medible y no negativa ρ que satisface

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_\gamma \rho$$

para p-casi toda curva se llama un **gradiente superior p-débil** para f. Al igual que en el caso de Shanmugalingam, trabajar con gradientes débiles en lugar de gradientes resulta más práctico y no constituye una gran pérdida:

Proposición 7.2.5. *Si ρ es un gradiente superior p-débil para f y $\epsilon > 0$, existe ρ_ϵ gradiente superior de f tal que $\rho_\epsilon \geq \rho$ y además $\|\rho - \rho_\epsilon\|_p < \epsilon$.*

Demostración. Sea Γ el conjunto de curvas para las que ρ no satisface la desigualdad ($Mod_p(\Gamma) = 0$). Entonces existe $g \geq 0$ Borel medible con $\int_X g^p dm < \infty$ pero $\int_\gamma g = \infty$ para toda $\gamma \in \Gamma$. Definimos

$$\rho_\epsilon = \rho + \frac{\epsilon}{1 + \|g\|_p} g$$

y es claro que $\rho_\epsilon \geq \rho$ e $\int_\gamma \rho_\epsilon \geq 1$ para toda γ, por lo que ρ_ϵ es un gradiente superior de f, y finalmente

$$\|\rho_\epsilon - \rho\|_p = \epsilon \frac{\|g\|_p}{1 + \|g\|_p} < \epsilon.$$

□

En el teorema 7.1.6 vimos que las funciones con un gradiente superior integrables sobre toda curva resultan absolutamente continuas sobre curvas. Decimos que una función f es **absolutamente continua sobre p-casi toda curva**, o que f es ACC_p, si $f \circ \gamma_h : [0, h(\gamma)] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua para p-casi toda γ (recordemos que γ_h es la reparametrización de γ por su μ-medida de arco). Con esta definición, tendremos el resultado análogo a 7.1.6 para gradientes superiores p-débiles.

Teorema 7.2.6. *Si f tiene un gradiente superior p-débil ρ en L^p, entonces es ACC_p.*

Demostración. Sea Γ_0 el conjunto de todas las γ de Γ_μ para las que $|f(x) - f(y)| > \int_\gamma \rho$ y sea Γ_1 el conjunto de todas las curvas de Γ^μ con alguna subcurva en Γ_0. Como ρ es gradiente superior p-débil, $Mod_p(\Gamma_0) = 0$, pero si $g \geq 0$ satisface $\int_\gamma g \geq 1$ para toda $\gamma \in \Gamma_0$, también se tiene que $\int_{\tilde{\gamma}} g \geq 1$ para toda $\tilde{\gamma} \in \Gamma_1$, y por lo tanto

$$Mod_p(\Gamma_1) \leq Mod_p(\Gamma_0) = 0.$$

Sea ahora Γ_2 el conjunto de curvas γ con $\int_\gamma \rho = \infty$. Como $\rho \in L^p$, $Mod_p(\Gamma_2) = 0$ por 7.2.2. Finalmente, si $\gamma \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, usamos 7.1.6 y concluimos el teorema. □

Para terminar la sección, probaremos un lema que será necesario más adelante.

Lema 7.2.7. *Si f es ACC_p y $f = 0$ m-ctp, entonces la familia*

$$\Gamma = \{\gamma \in \Gamma^* : f \circ \gamma \not\equiv 0\}$$

tiene p-módulo cero.

Demostración. Sea $E = \{x : f(x) \neq 0\}$, entonces $m(E) = 0$ y $\Gamma = \Gamma_E$. Como Γ_E^+ tiene módulo cero (pues $m(E) = 0$, utilizando el lema 7.2.4), sólo nos falta ver que $\Gamma_E \backslash \Gamma_E^+$ también tiene módulo cero. Pero si $\gamma \in \Gamma_E \backslash \Gamma_E^+$, entonces $|\gamma| \cap E \neq \emptyset$ y $\mu(|\gamma| \cap E) = 0$, con lo que $\gamma_h^{-1}(E)$ tiene longitud 0 en $\mathbb{R}$ y por lo tanto $f \circ \gamma_h \neq 0$ en un conjunto de longitud cero. Luego si $E \neq \emptyset$ este conjunto es no vacío y $f \circ \gamma_h$ no puede ser absolutamente continua. por lo tanto $Mod_p(\Gamma_E \backslash \Gamma_E^+) = 0$. $\square$

7.3. Espacios de Newton-Sobolev Generalizados $N^{1,p}$

Definimos $\tilde{N}^{1,p}(X)$ como el espacio de las funciones con norma p finita que tengan un gradiente superior p-débil con norma p finita. Lo equipamos con la 'norma'

$$\|f\|_{N^{1,p}} = \|f\|_p + \operatorname{ínf} \|\rho\|_p$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los gradientes superiores p-débiles de f (o equivalentemente sobre todos los gradientes superiores de f, por una proposición anterior).

De la definición es inmediato que $(\tilde{N}^{1,p}(X), \|\cdot\|_{N^{1,p}})$ es un espacio vectorial seminormado. Más aún, si $f, g \in \tilde{N}^{1,p}$, entonces $|f|, \operatorname{mín}\{f, g\}, \operatorname{máx}\{f, g\} \in \tilde{N}^{1,p}$. Por el teorema 7.2.6, toda función de $\tilde{N}^{1,p}$ es ACC_p.

$\tilde{N}^{1,p}$ no es un espacio normado, pues dos funciones distintas pueden ser iguales en m-casi todo punto (esto se solucionaría al igual que en L^p, tomando el cociente entre funciones iguales en casi todo punto), pero además podría darse que $f \in \tilde{N}^{1,p}$ y $g = f$ m-ctp y sin embargo $g \notin \tilde{N}^{1,p}$, sin embargo por 7.2.7 sí tenemos que

Corolario 7.3.1. *Si $f, g \in \tilde{N}^{1,p}$ y $f = g$ m-ctp, entonces $\|f - g\|_{N^{1,p}} = 0$.*

Entonces sí podemos definir la equivalencia $f \sim g$ para $f, g \in \tilde{N}^{1,p}$ sii $f = g$ en m-ctp y definir el espacio cociente $N^{1,p} = \tilde{N}^{1,p}/\sim$, al que llamaremos **espacio de Newton-Sobolev generalizado**. El espacio así definido sí resulta normado con $\|\cdot\|_{N^{1,p}}$. Concluiremos la sección viendo que este espacio es de Banach, pero para ello necesitamos el siguiente lema:

Lema 7.3.2. *Sea $F \subset X$ tal que*

$$\operatorname{ínf} \left\{ \|f\|_{N^{1,p}} : f \in \tilde{N}^{1,p}(X) \wedge f|_F \geq 1 \right\} = 0.$$

Entonces $Mod_p(\Gamma_F) = 0$.

Demostración. Para cada n tomamos $v_n \in \tilde{N}^{1,p}(X)$ con $v_n|_F \geq 1$ y $\|v_n\|_{N^{1,p}} < 2^{-n}$, y tomamos gradientes superiores ρ_n de v_n con $\|\rho_n\|_p < 2^{-n}$. Hacemos $u_n = \sum_1^n |v_k|$, $g_n = \sum_1^n \rho_k$ (cada g_n será gradiente superior de u_n) y $u = \sum |v_n|$ (observar que $u|_F = \infty$),$g = \sum \rho_n$.

Resulta que cada u_n está en $\tilde{N}^{1,p}$ y que $(u_n), (g_n)$ son de Cauchy en L^p, de forma que convergen en L^p a funciones $\tilde{u}, \tilde{g}$ respectivamente. Debe ser $u = \tilde{u}, g = \tilde{g}$ ctp y se tiene que $\int |u|^p < \infty$.

Sea $E = \{x \in X : u(x) = \infty\}$, luego debe ser $\mu(E) = 0$ (por ser $\int |u|^p < \infty$) y $F \subset E$.

Si tomamos

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in \Gamma^\mu : \int_\gamma g = \infty \vee \int_\gamma g_n \not\to \int_\gamma g \right\}$$

usando 7.2.2 y 7.2.3 resulta $Mod_p(\Gamma) = 0$.

Ahora, si γ no está en Γ ni en Γ_E^+ (que tiene módulo-p cero en vista del lema 7.2.4), existirá $y \in |\gamma| - E$, y si $x \in |\gamma|$,

$$|u_n(x)| \leq |u_n(y)| + \int_\gamma g_n \leq |u(y)| + \int_\gamma g < \infty$$

con lo que $|u(x)| < \infty$ y por lo tanto $\gamma \notin \Gamma_E$ con lo que $\Gamma_E \subset \Gamma \cup \Gamma_E^+$ y

$$Mod_p(\Gamma_F) \leq Mod_p(\Gamma_E) \leq Mod_p(\Gamma \cup \Gamma_E^+) = 0.$$

□

Teorema 7.3.3. *$N^{1,p}(X)$ es de Banach.*

Demostración. Sea (u_n) una sucesión de Cauchy en $N^{1,p}$. Pasando por subsucesiones podemos asumir

$$\|u_n - u_{n+1}\|_{N^{1,p}} < 2^{-n\frac{p+1}{p}}$$

y tomar gradientes superiores g_n de $u_n - u_{n+1}$ con

$$\|g_n\|_p < 2^{-n}.$$

Definimos

$$E_n = \{x \in X : |u_n(x) - u_{n+1}(x)| \geq 2^{-n}\}, E = \limsup E_n.$$

Si $x \notin E$, existirá n_x tal que $|u_n(x) - u_{n+1}(x)| < 2^{-n}$ para $n \geq n_x$ y por lo tanto fuera de E está bien definido

$$u(x) = \lim u_n(x).$$

Por Tchebyschev será $\mu(E_n) \leq 2^{np}\|u_n - u_{n+1}\|_p^p \leq 2^{-n}$, con lo que

$$\mu(E) \leq \sum_n^\infty \mu(E_k) \leq 2^{-n} \cdot 2,$$

para todo n, concluyendo que $\mu(E) = 0$; por otra parte

$$\begin{aligned} \text{ínf}\left\{\|f\|_{N^{1,p}} : f \in \tilde{N}^{1,p}(X) \wedge f|_E \geq 1\right\} &\leq \sum_n^\infty \text{ínf}\left\{\|f\|_{N^{1,p}} : f \in \tilde{N}^{1,p}(X) \wedge f|_{E_n} \geq 1\right\} \\ &\leq \sum_n^\infty 2^{np}\|u_n - u_{n+1}\|_{N^{1,p}}^p \leq 2^{-n} \cdot 2 \end{aligned}$$

para todo n.

Por el lema anterior, $Mod_p(\Gamma_E) = 0$, y si definimos $u|_E \equiv 0$, como (u_n) es de Cauchy en L^p y $u_n \to u$ ctp, tendremos $\int |u|^p < \infty$. Luego para toda $\gamma \notin \Gamma_E$ de extremos x, y tendremos

$$|(u - u_n)(x) - (u - u_n)(y)| \leq \sum_n^\infty |(u_{k+1} - u_k)(x) - (u_{k+1} - u_k)(y)| \leq \sum_n^\infty \int_\gamma g_k,$$

de donde $\sum_n^\infty g_k$ es un gradiente superior p-débil de $u - u_n$ (que tiende a 0 en L^p), con lo que $u \in N^{1,p}$, y además

$$\|u - u_n\|_{N^{1,p}} \leq \|u - u_n\|_p + \|\sum_n^\infty g_k\|_p \to 0.$$

□

7.4. La desigualdad de Poincaré

Sin conexión entre la medida del espacio m y la medida sobre curvas μ, difícilmente se puedan probar resultados interesantes sobre $N^{1,p}$. La forma estándar de pedir esta conexión es mediante una desigualdad de tipo Poincaré.

Decimos que el espacio X admite una **desigualdad de Poincaré** $(1, p)$ de exponente $\beta > 0$ si existen $C > 0, \lambda \geq 1$ tales que para toda bola B y todo par f, ρ de funciones definidas en B con f integrable en B y ρ gradiente superior de f, se tiene que

$$\fint_B |f - f_B| dm \leq C diam(B)^\beta \left(\fint_{\lambda B} \rho^p dm\right)^{1/p}.$$

Observación 7.4.1. En general para simplificar la notación consideraremos $\lambda = 1$, para el caso general las demostraciones serán análogas.

En el caso de Shanmugalingam, esta propiedad (con $\beta = 1$) es suficiente para probar que las funciones Lipschitz son densas en $N^{1,p}$. Un paso crucial en la demostración es el hecho que la longitud de una curva es siempre mayor o igual que la distancia entre cualquier par de puntos sobre la curva, pero con una medida distinta a $\mathcal{H}^1$ esto no tiene por qué ocurrir. Supondremos que la familia Γ^μ satisface la siguiente propiedad, a la que llamaremos **μ-arco-cuerda** con exponente β: existe $C > 0$ tal que para toda curva $\gamma \in \Gamma^\mu$ se satisface

$$diam(|\tilde{\gamma}|)^\beta \leq C\mu(|\tilde{\gamma}|).$$

A continuación demostraremos una serie de lemas que nos servirán para dar condiciones suficientes de densidad de funciones Lipschitz-β en $N^{1,p}$.

Lema 7.4.2. *Supongamos que f es ACC_p y $f|_F = 0$ m-ctp con F un cerrado de X. Si ρ es un gradiente superior de f, $\rho\chi_{X\setminus F}$ es un gradiente superior p-débil de f.*

Demostración. Sea Γ_0 el conjunto de curvas γ para las que $f \circ \gamma_h$ no es absolutamente continua y sea $E = \{x \in F : f(x) \neq 0\}$. Entonces $Mod_p(\Gamma_0 \cup \Gamma_E^+) = 0$. Ahora, si $\gamma \notin \Gamma_0 \cup \Gamma_E^+$ une los puntos $x, y \in X$, consideremos los siguientes casos:

- Si $|\gamma| \subset (X\setminus F) \cup E$, entonces $|f(x) - f(y)| \leq \int_\gamma \rho = \int_\gamma \rho\chi_{X\setminus F}$ pues $\mu(|\gamma| \cap E) = 0$.

- Si x e y no están en $(X\setminus F) \cup E$, entonces $f(x) = f(y) = 0$ y vale $|f(x) - f(y)| \leq \int_\gamma \rho\chi_{F^c}$.

- Si $x \in (X\setminus F)\cup E$ pero $|\gamma|$ no está completamente en $(X\setminus F)\cup E$, como $(f\circ\gamma_h)^{-1}(\{0\})$ es un cerrado de $[0, h(\gamma)]$ (por ser $f \circ \gamma_h$ absolutamente continua) y por lo tanto tiene mínimo a y máximo b (con $f \circ \gamma_h(a) = f \circ \gamma_h(b) = 0$). Entonces:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(\gamma_h(a))| + |f(\gamma_h(a)) - f(\gamma_h(b))| + |f(\gamma_h(b)) - f(y)| \\ &\leq \int_{\gamma_h|_{[0,a]}} \rho + \int_{\gamma_h|_{[b,h(\gamma)]}} \rho \leq \int_\gamma \rho\chi_{X\setminus F}\end{aligned}$$

  dado que $\gamma_h([0, a])$ y $\gamma_h([b, h(\gamma)])$ intersecan a F a lo sumo en $E \cup \{\gamma_h(a)\} \cup \{\gamma_h(b)\}$, que tiene μ medida cero (pues $\mu(|\gamma| \cap E) = 0$).

$\square$

Lema 7.4.3. *Si Γ^μ tiene la propiedad de μ-arco-cuerda para algún $\beta > 0$, las funciones Lipschitz-β son absolutamente continuas sobre toda curva de Γ^μ.*

Demostración. Sean $\gamma : [0, h] \to X$ una curva de Γ^μ parametrizada por su μ-medida de arco, $f : X \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz-β de constante L y $\epsilon > 0$. Si $0 \le a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n \le h$ satisface $\sum_i |b_i - a_i| < \frac{\epsilon}{LC}$, para C la constante de la propiedad de μ-arco-cuerda, entonces

$$\begin{aligned}\sum_i |f(\gamma(b_i)) - f(\gamma(a_i))| &\le L \sum_i d^\beta(\gamma(b_i), \gamma(a_i)) \le L \sum_i diam^\beta(\gamma([a_i, b_i])) \\ &\le LC \sum_i \mu(\gamma([a_i, b_i])) = LC \sum_i |b_i - a_i| < \epsilon.\end{aligned}$$

□

Lema 7.4.4. *Si Γ^μ tiene la propiedad de μ-arco cuerda para algún $\beta > 0$ y constante C, y $f : X \to \mathbb{R}$ es Lipschitz-β de constante L, entonces $CL\chi_{supp(f)}$ es un gradiente superior de f. En particular si $supp(f)$ es compacto se tiene que $f \in \tilde{N}^{1,p}$ para $1 \le p \le \infty$.*

Demostración. Sea $\gamma : [a, b] \to X$ una curva de Γ^μ que une $x = \gamma(a)$ con $y = \gamma(b)$. Consideremos los siguientes casos:

- $|\gamma| \subset supp(f)$. Entonces $|f(x) - f(y)| \le Ld(x, y)^\beta \le CL\mu(|\gamma|) = \int_\gamma LC = \int_\gamma CL\chi_{supp(f)}$.
- $|\gamma| \cap supp(f) = \emptyset$. Entonces $|f(x) - f(y)| = 0 = \int_\gamma CL\chi_{supp(f)}$.
- $x \in supp(f)$ pero $|\gamma| \not\subset supp(f)$. Entonces como $(f \circ \gamma)^{-1}(\{0\})$ es un cerrado de $[a, b]$ y por lo tanto tiene un mínimo $a_0 > a$ y un máximo $b_0 \le b$. Luego, como $\gamma([a, a_0])$ y $\gamma([b_0, b])$ están contenidos en $supp(f)$ y $f(\gamma(a_0)) = f(\gamma(b_0)) = 0$,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f(\gamma(a_0))| + |f(\gamma(a_0)) - f(\gamma(b_0))| + |f(\gamma(b_0)) - f(y)| \\ &\le Ld(x, \gamma(a_0))^\beta + Ld(\gamma(b_0), y)^\beta \\ &\le LC\mu(\gamma([a, a_0])) + LC\mu(\gamma([b_0, b]) \le \int_\gamma LC\chi_{supp(f)}.\end{aligned}$$

Finalmente si $supp(f)$ es compacto, $f, CL\chi_{supp(f)} \in L^p$ para todo p. □

Con estos resultados tenemos lo siguiente:

Teorema 7.4.5. *Si m duplica, X admite una desigualdad de Poincaré $(1, p)$ de exponente β, $0 < \beta \le 1$, $\lambda \ge 1$ y Γ^μ satisface la propiedad de μ-arco-cuerda, entonces las funciones Lipschitz-β son densas en $N^{1,p}$.*

Demostración. Sea $f \in \tilde{N}^{1,p}$ y sea g un gradiente superior p-integrable. Asumimos f acotada (pues las funciones acotadas son densas en $N^{1,p}$). Definimos

$$E_k = \{x \in X : Mg^p(x) > k^p\},$$

donde M es la maximal no centrada de Hardy-Littlewood. Como m duplica, M es de tipo débil $(1,1)$, luego

$$m(E_k) \leq \frac{C}{k^p} \int_X g^p \to 0 \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Sea $F_k = X \backslash E_k$ (es cerrado pues E_k es abierto). Si $x \in F_k$, $r > 0$ y $B = B(x,r)$, por la desigualdad de Poincaré

$$\fint_B |f - f_B| \leq Cr^\beta (\fint_B g^p)^{1/p} \leq Cr^\beta (Mg^p(x))^{1/p} \leq Cr^\beta k.$$

Luego si definimos $f_n(x) = f_{B(x,2^{-n}r)}$, tenemos que

$$\begin{aligned} |f_{n+j}(x) - f_n(x)| &\leq \sum_{i=1}^{j} |f_{n+i+1}(x) - f_{n+i}(x)| \leq \sum_{i=1}^{j} \fint_{B(x,2^{-(n+i+1)}r)} |f - f_{B(x,2^{-(n+i)}r)}| \\ &\leq C \sum_{i=1}^{j} \fint_{B(x,2^{-(n+i)}r)} |f - f_{B(x,2^{-(n+i)}r)}| \leq Ckr^\beta (2^\beta)^{-n} \sum_{i=1}^{j} 2^{-i} \\ &\leq Ckr^\beta 2^{-n\beta}, \end{aligned}$$

y por lo tanto $f_n(x)$ es de Cauchy para cada $x \in F_k$. Definimos, para $x \in F_k$,

$$f^k(x) = \lim f_n(x).$$

Observamos que para x punto de Lebesgue de f se tiene que $f^k(x) = f(x)$. Veamos que f^k es Lipschitz-β en F_k.

Dados $x, y \in F_k$, hacemos $r = d(x,y)$ y llamamos $B_n = B(x, 2^{-n}r)$, $B'_n = B(y, 2^{-n}r)$, tenemos que

$$\begin{aligned} |f^k(x) - f^k(y)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x) - f_{n+1}(x)| + |f_0(x) - f_0(y)| + \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(y) - f_{n+1}(y)| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} C \fint_{B_n} |f - f_{B_n}| + C \fint_{2B_0} |f - f_{2B_0}| + \sum_{n=0}^{\infty} C \fint_{B'_n} |f - f_{B'_n}| \\ &\leq Ckr^\beta \sum_{n=0}^{\infty} (2^\beta)^{-n} + C2r^\beta Ck \leq Ckr^\beta = Ckd^\beta(x,y). \end{aligned}$$

De esta forma f^k resulta Lipschitz-β en F_k, luego se puede extender con el mismo β a todo X (pues $\beta \leq 1$, ver 1.1.1 ó [A]) y podemos asumirla acotada por Ck. Ahora,

$$\int_X |f - f^k|^p = \int_{E_k} |f - f^k|^p \leq C \int_{E_k} |f|^p + Ck^p m(E_k) \to 0$$

cuando $k \to \infty$, pues $m(E_k) \to 0$ y además, nuevamente por el tipo débil de la maximal,

$$k^p m(E_k) = k^p m(M(g^p) > k^p) \leq k^p m\left(\left\{x : M\left(g^p \chi_{\{g^p > k^p/2\}}\right)(x) > k^p/2\right\}\right)$$

$$\leq C \int_{\{g^p > k^p/2\}} g^p \to 0.$$

Entonces f^k converge a f en L^p, como f y f^k son ACC_p por 7.2.6, $(g + \tilde{C}k)\chi_{E_k}$ es un gradiente superior p-débil de $f - f^k$ (lema 7.4.2), y como está en L^p y tiende a 0 cuando $k \to \infty$, $f - f^k \in N^{1,p}$ para todo k y $\|f - f^k\|_{N^{1,p}} \to 0$. $\square$

Si (X, m) duplica y admite una desigualdad de Poincaré $(1, q)$ para $1 \leq q < p$, por el corolario 2.2.7, se tiene que toda función de $N^{1,p}$ tiene un gradiente de Hajłasz-β en L^p, más aún $N^{1,p} \hookrightarrow M^{\beta,p}$. La inversión recíproca vale siempre en el caso de Shanmugalingam, y para nuestro caso necesitamos la propiedad de μ-arco-cuerda.

Lema 7.4.6. *Supongamos que vale la propiedad de μ-arco-cuerda. Entonces si f es una función continua y $g \geq 0$ es medible y satisfacen*

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)^\beta (g(x) + g(y))$$

para todo par de puntos $x, y \in X$, entonces existe $C > 0$ tal que Cg es un gradiente superior de f.

Demostración. Sea $\gamma : [0, h] \to X$ una curva en Γ^μ parametriada por μ-medida de arco, con extremos x, y. Si $\int_\gamma g = \infty$ no hay nada que probar. En otro caso, para cada n tomamos $\gamma_i = \gamma|_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]}$, $0 \leq i \leq n-1$, como γ está parametrizada por μ-medida de arco tenemos que $\mu(|\gamma_i|) = \mu(|\gamma|)/n = h/n$. Para cada i, existirá $x_i \in |\gamma_i|$ con $g(x_i) \leq \fint_{\gamma_i} g$, y la propiedad de μ-arco-cuerda implica que $d(x_i, x_{i+1})^\beta \leq C\mu(|\gamma_i|)$, entonces

$$\begin{aligned}|f(x_1) - f(x_{n-1})| &\leq \sum_i |f(x_i) - f(x_{i+1})| \leq \sum_i d(x_i, x_{i+1})^\beta (g(x_i) + g(x_{i+1})) \\ &\leq C \sum_i \left(\int_{\gamma_i} g + \int_{\gamma_{i+1}} g \right) \leq C \int_\gamma g.\end{aligned}$$

Tomando $n \to \infty$, resulta $x_0 \to x, x_{n-1} \to y$ y siendo f continua llegamos a

$$|f(x) - f(y)| \leq C \int_\gamma g$$

y tenemos lo deseado. $\square$

Como una consecuencia inmediata del lema se obtiene la siguiente relación:

Corolario 7.4.7. *Si vale la propiedad de μ-arco-cuerda y las funciones continuas son densas en $M^{1,p}$, tenemos que*

$$M^{1,p} \hookrightarrow N^{1,p}.$$

Combinando este corolario con el corolario 2.2.7 podemos concluir

Teorema 7.4.8. *Supongamos que (X, m) duplica y admite una desigualdad de Poincaré $(1, q)$ con $q > 1$ y exponente $0 < \beta \leq 1$, y que vale la propiedad de μ-arco-cuerda. Entonces para todo $p > q$ se tiene que $N^{1,p} = M^{1,p}$, con normas equivalentes.*

Por último, siguiendo a [Sh1], tenemos las siguientes versiones de los teoremas de inmersión de Sobolev:

Teorema 7.4.9. *Si m duplica, existen $C_D, N > 0$ tales que $C_D r^N \leq m(B(x, r))$ para todo $x \in X, 0 < r < 2diam(X)$ y X admite una desigualdad de Poincaré $(1, p)$ de exponente β con $\beta \leq 1$, entonces para $p > N/\beta$, toda $f \in N^{1,p}$ tiene un representante Lipschitz-α con $\alpha = \beta - N/p$.*

Demostración. Sea g un gradiente superior p-integrable de $f \in \tilde{N}^{1,p}$. Para x, y puntos de Lebesgue de f, hacemos $r = d(x, y)$ y B_n, B'_n, f_n como en el caso de la demostración del teorema 7.4.5 y tenemos, utilizando nuevamente Poincaré,

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x) - f_{n+1}(x)| + |f_0(x) - f_0(y)| + \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(y) - f_{n+1}(y)| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} C \fint_{B_n} |f - f_{B_n}| + C \fint_{2B_0} |f - f_{2B_0}| + \sum_{n=0}^{\infty} C \fint_{B'_n} |f - f_{B'_n}| \\
&\leq C \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n} r)^{\beta} \left(\fint_{B_n} g^p \right)^{1/p} + C(2r)^{\beta} \left(\fint_{2B_0} g^p \right)^{1/p} \\
&\qquad + C \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n} r)^{\beta} \left(\fint_{B'_n} g^p \right)^{1/p} \\
&\leq C \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n} r)^{\beta - N/p} \|g\|_p + C \frac{1}{C_D} (2r)^{\beta - N/p} \|g\|_p + C \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n} r)^{\beta - N/p} \|g\|_p \\
&\leq C \|g\|_p r^{\beta - N/p} = C \|g\|_p d(x, y)^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Ahora, si L es el conjunto de puntos de Lebesgue, $m(X \backslash L) = 0$, luego $f|_L$ es Lipschitz-α y se puede extender a una función $\tilde{f}$ Lipschitz-α en todo X (pues $\alpha \leq 1$). $\Gamma^+_{X \backslash L}$ tiene p-módulo 0, y el conjunto Γ_0 de curvas donde f no es absolutamente continua también tiene p-módulo 0. Ahora, si $\gamma \notin (\Gamma^+_{X \backslash L} \cup \Gamma_0)$, como $\mu(|\gamma| \cup X \backslash L) = 0$, si γ_h es su parametrización por μ-medida de arco, resulta que $\gamma_h^{-1}(X \backslash L)$ tiene medida cero (como subconjunto de $\mathbb{R}$), y como $f \circ \gamma_h$ y $\tilde{f} \circ \gamma_h$ coinciden fuera de $\gamma_h^{-1}(X \backslash L)$ y ambas son continuas (una absolutamente continua, la otra composición de continuas), tienen que coincidir en todo $[0, h(\gamma)]$, es decir que f y $\tilde{f}$ coinciden en todo $|\gamma|$. Luego si $E = \{x \in X : f(x) \neq \tilde{f}(x)\}$, entonces Γ_E tiene p-módulo cero y por lo tanto f y $\tilde{f}$ son la misma función de $N^{1,p}$. $\square$

Teorema 7.4.10. *Si X es acotado, Ahlfors N-regular y admite una desigualdad de Poincaré $(1, q)$ de exponente β, con $q > 1/\beta$, entonces para p con $q < p < Nq$ y $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{Nq}$ vale que para toda $f \in N^{1,p}$ de gradiente superior g,*

$$
\|f - f_X\|_{p^*} \leq C diam(X)^{\beta - 1/q} \|g\|_p.
$$

Demostración. Sea $f \in \tilde{N}^{1,p}$ y sea x un punto de Lebesgue de f. Sea $r = 2diam(X)$ y consideremos la sucesión de bolas $B_n = B(x, 2^{-n}r)$. Luego

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_X| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_{B_n} - f_{B_{n+1}}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} C2^N \fint_{B_n} |f - f_{B_n}| \leq C \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n}r)^{\beta} \left(\fint_{B_n} g^q \right)^{1/q} \\
&\leq C \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n}r)^{\beta} \left(\frac{C}{(2^{-n}r)^N} \int_{B_n} g^q \right)^{1/q} \\
&\leq C \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n}r)^{\beta - 1/q} \left(\int_{B_n} \frac{g^q(z)}{d(x,z)^{N-1}} dm(z) \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Luego vale

$$|f(x) - f_X| \leq C diam(X)^{\beta - 1/q} \left(\int_X \frac{g^q(z)}{d(x,z)^{N-1}} dm(z) \right)^{1/q}.$$

Como para espacios regulares el potencial de Riesz

$$I_1(h)(x) = \int_X \frac{h(z)}{d(x,z)^{N-1}} dm(z)$$

está acotado de L^s en L^{s^*} con $s^* = Ns/(N-s)$ para $1 < s < N$ (lo demostramos en 3.3.15, ver también [He]), y $g^q \in L^{p/q}$, tenemos que para $s = p/q$ vale

$$\|I_1(g^q)\|_{s^*} \leq C \|g\|_{p/q} = C \|g\|_p^q.$$

Luego

$$\| |f - f_X|^q \|_{s^*} \leq C \left(diam(X) \right)^{\beta q - 1} \|I_1(g^q)\|_{s^*} \leq C \left(diam(X) \right)^{\beta q - 1} \|g\|_p^q$$

y como $qs^* = Nqp/(Nq - p) = p^*$, tenemos lo deseado. $\square$

Conclusiones

> Alice laughed. “There’s no use trying,” she said: “one can’t believe impossible things.”
>
> “I daresay you haven’t had much practice,” said the Queen. “When I was your age, I always did it for half-an-hour a day. Why, sometimes I’ve believed as many as six impossible things before breakfast.”
>
> - Lewis Carroll, *Through the Looking-Glass, and What Alice Found There*

A continuación se listan los principales resultados alcanzados:

- En el contexto de espacios métricos Ahlfors regulares se pudo definir un operador potencial J_α de tipo Bessel que preserva espacios L^p y posee propiedades de mejora de regularidad Lipschitz, Besov y Sobolev.
- Mediante este operador se introdujeron los espacios de Sobolev tipo potencial $L^{\alpha,p}$, generalizando muchas de las propiedades conocidas para estos espacios en el caso euclídeo.
- Se probó que la composición de J_α con el operador $I + D_\alpha$, donde D_α es la derivada fraccionaria, es una integral singular, que resulta inversible para valores pequeños de α.
- Se pudo concluir que estos espacios potenciales $L^{\alpha,p}$ pueden describirse, para órdenes de regularidad pequeños, mediante la derivada fraccionaria del mismo orden, y que coinciden en el caso de $\mathbb{R}^n$ con los espacios de Sobolev clásicos.
- Con las herramientas desarrolladas anteriormente se pudo concluir que interpolando espacios potenciales de órdenes de regularidad pequeños se obtienen espacios de Besov.
- Para un espacio de tipo homogéneo y un subconjunto cerrado equipado de una medida que lo convierte en otro espacio de tipo homogéneo, se pudo definir un

operador de extensión para funciones de Besov en el espacio menor, de modo que las imágenes resulten también de Besov en el espacio mayor.

- En la situación anterior y bajo la hipótesis adicional de regularidad Ahlfors en los espacios, se construyó un operador de restricción inverso al de extensión, para el caso de α pequeño.

- Se pudieron generalizar a una clase mayor los espacios de Newton-Sobolev, conservando muchas de sus propiedades. La misma consistió en reemplazar la noción de longitud de curvas por la de una medida más general sobre éstas.

Por otra parte, quedan abiertos los siguientes problemas:

- *Relación entre los espacios potenciales $L^{\alpha,p}$ y otros espacios de Sobolev.* En las definiciones clásicas de espacios de Sobolev en espacios métricos, bajo la hipótesis de la desigualdad de Poincaré todas las definiciones coinciden. Nos preguntamos si hay condiciones bajo las que se pueda lograr algo similar con los espacios potenciales.

- *Inversibilidad de J_α.* Se pudo probar la inversibilidad del operador J_α sólo para valores pequeños de α. Un problema a futuro es el de ampliar ese rango a todo el intervalo $(0, 1)$.

- *Relaciones entre los espacios potenciales.* Relacionada con el ítem anterior, otra propiedad que interesaría tener de los espacios potenciales es la de inclusión $L^{\alpha,p} \hookrightarrow L^{\beta,p}$ para $\alpha > \beta$, que sólo se pudo probar para valores pequeños de β.

- *Ampliar la lista de ejemplos de espacios de Newton-Sobolev.* Sería deseable poder caracterizar las funciones de Newton-Sobolev en espacios como $\mathbb{R}^2$ con la métrica parabólica o espacios fractales que posean "suficientes" curvas de una dada dimensión.

Bibliografía

[A] H. Aimar, *Distance and measure in Analysis and PDE*, Birkhäuser Basel, submitted for publication.

[ACT] H. Aimar, M. Carena, M. Toschi, *Muckenhoupt weights with singularities on closed lower dimensional sets in spaces of homogeneous type*. J. Math. Anal. Appl. 416 (2014) 1, 112-125.

[AH] P. Auscher, T Hytönen, *Orthonormal bases of regular wavelets in spaces of homogeneous type*. Appl. Comput. Harmon. Anal., Vol 34, 2013, 2, 266-296.

[BL] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1976.

[BS] C. Bennet, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, Inc., Pure and Applied Mathematics, vol. 129, 1988.

[Ca] A.P. Calderón, *Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions*, Studia Math. 44 (1972), 563-582.

[Ch] J. Cheeger, *Differentiability of Lipschitz Functions on Metric Measure Spaces*, Geometric And Functional Analysis Vol.9 (1999) 428-517.

[CG] R. Coifman, M. de Guzmán *Singular integrals and multipliers on homogeneous spaces*. Collection of articles dedicated to Alberto González Domínguez on his sixty-fifth birthday. Rev. Un. Mat. Argentina 25 (1970/71), 137Ű143.

[CW] R. Coifman, G. Weiss *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogenes*. Lecture Notes in Math. Vol. 242. Springer - Verlag, Berlin-New York (1971).

[DH] Donggao Deng, Yongsheng Han. *Harmonic Analysis on Spaces of Homogeneous Type*, Lecture Notes in Mathematics. Volume 1966 2009.

[DJS] G. David, J.L. Journé, S. Semmes, *Opérateurs de Calderón-Zygmund, conctions para-accrétives et interpolation*, Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1985), 1-56.

[E] L. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, American Mathematical Society (1998).

[Fa] Falconer, K. J. *The geometry of fractal sets*. Cambridge Tracts in Mathematics, 85. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. xiv+162 pp.

[Fu] Fuglede, Bent. *Extremal length and functional completion*. Acta Math. 98 1957 171Ű219.

[FHK] B. Franchi, P. Hajłasz, P. Koskela, *Definitions of Sobolev classes on metric spaces*, Ann. Inst. Fourier 49 (1999), 1903-1924.

[Ga] A. Gatto, *On fractional calculus associated to doubling and non-doubling measures*, dedicado a S. Vági, Mathematics Subject Classification, 2000.

[GSV] A. Gatto , C. Segovia, S. Vági, *On fractional differentiation and integration on spaces of homogeneous type*, Revista Matemática Iberoamericana 12, (1996), 111-145.

[GKS] Gogatishvili, Amiran; Koskela, Pekka; Shanmugalingam, Nageswari. *Interpolation properties of Besov spaces defined on metric spaces*. (English summary) Math. Nachr. 283 (2010), no. 2, 215-231.

[H1] P. Hajłasz, *Sobolev spaces on an arbitrary metric space*, J. Potential Anal. 5 (1995), 403-415.

[HK1] P. Hajłasz, P. Koskela, *Sobolev meets Poincaré*, C.R. Acad. Sci. Paris 320 (1995), 1211-1215.

[HK2] P. Hajłasz, P. Koskela, *Sobolev met Poincaré*, Memoirs of the A.M.S., number 688, Vol.145 (2000).

[HS] Y.S. Han, E.T. Sawyer, *Littlewood Paley theory on spaces of homogeneous type and the classical function spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. 110 (530) (1994).

[Hz] S. Hartzstein, *Acotación de operadores de Calderón-Zygmund en espacios de Triebel-Lizorkin y de Besov generalizados sobre espacios de tipo homogéneo*. Tesis para la obtención del Grado Académico de Doctor en Matemática. Director: B. Viviani. Universidad Nacional del Litoral, Facultad de Ingeniería Química, 2000.

[HV] S. Hartzstein, B. Viviani, *Homeomorphisms acting on Besov and Triebel-Lizorkin spaces of Local Regularity $\psi(t)$*, Collectanea Mathematica; Año: 2005 vol. 56 p. 27 - 45.

[He] J. Heinonen, *Analysis on metric spaces*, lecture notes, University of Michigan (1996).

[HeK] J. Heinonen, P. Koskela, *A note on Lipschitz functions, upper gradients, and the Poincaré inequality*, New Zealand J. Math 28 (1999), 37-42.

[Hu] J.E. Hutchinson, *Fractals and self similarity*. Indiana Univ. Math. J. 30 (5), 713Ű747 (1981).

[JW] A. Jonsson, H. Wallin, *Function spaces on subsets of* $\mathbb{R}^n$, Harwood Academic Publisher, Mathematical Reports, Volume 2, Part 1 (1984).

[KSh] S. Kallunki, N. Shanmugalingam, *Modulus and continuous capacity*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 26 (2001), 455-464.

[KK] J. Kinnunen, R. Korte, *Characterizations of Sobolev inequalities on metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. 344 (2008), 1093-1104.

[KK2] J. Kinnunen, R. Korte, N. Shanmugalingam, H. Tuominen, *A characterization of Newtonian functions with zero boundary values*, Calculus of Variations and PDE 43, issue 3-4 (2012), 507-528.

[KM] J. Kinnunen, O. Martio, *The Sobolev capacity on metric spaces*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 21 (1996), 367-382.

[KS] J.N. Korevaar, R.M. Schoen, *Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets*, Comm. Anal. Geom., 1 (1993), 561-659.

[KM2] P. Koskela, P. MacManus, *Quasiconformal mappings and Sobolev spaces*, Studia Math., 131 (1998), 1-17.

[L] Leindler, L. *Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood.* Acta Sci. Math. (Szeged) 31 1970 279-285.

[MS1] R.A. Macías, C. Segovia, *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*, Advances in Math 33 (1979), 257-270.

[MS2] R.A. Macías, C. Segovia, *A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. 33 (1979), no. 3, 271Ű309.

[Mo] U. Mosco, *Variational fractals.* Dedicated to Ennio De Giorgi. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze 25.3-4 (1997): 683-712.

[MY] Müller, Detlef; Yang, Dachun; *A difference characterization of Besov and Triebel-Lizorkin spaces on RD-spaces.* (English summary) Forum Math. 21 (2009), no. 2, 259-298.

[P] J. Peetre, *New thoughts on Besov spaces*, Mathematics Dept., Duke University, 1976.

[R] N.M. Rivière, *On singular integrals.* Bull. Amer. Math. Soc. 75 1969 843Ű847.

[Sh1] N. Shanmugalingam, *Newtonian spaces: an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces*, Revista Matemática Iberoamericana 16 (2000), 243-279.

[Sh2] N. Shanmugalingam, *Harmonic functions on metric spaces*, Illinois J. Math. 45 (2001) no.3, 1021-1050.

[S2] R. Strichartz, *Differential equations on fractals: a tutorial*, Princeton University Press (2006).

[S] Stein, E. *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press (1971). 1984.

Índice alfabético