UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Diseño y análisis de tareas para la enseñanza de las operaciones con racionales desde una mirada estocástica

Trabajo Final Integrador

Especialización en Didáctica de la Matemática
Facultad de Humanidades y Ciencias

Autor: Hilguero Alexis

Directora: Dra. Tauber Liliana

Febrero 2021

Agradecimientos

Con este trabajo deseo agradecer a mi pequeña hija que con sus sonrisas me llenaron de fortaleza.

A mi esposa, cuya P(brindar su apoyo)=1.

A mis padres que extendieron sin límites sus intervalos de confianza en mí y por darme la posibilidad de estudiar lo que más quiero.

A Liliana Tauber por brindarme sugerencias sin sesgo alguno y alentándome con una esperanza positiva ante la cantidad de aciertos y equivocaciones.

Un agradecimiento final a quién lea este trabajo por dedicar parte de su tiempo.

Índice

Introducción

En diferentes momentos de la formación de los estudiantes, en la educación obligatoria de Santa Fe, se propone la enseñanza de los números racionales y las operaciones priorizando el sentido de los mismos.
En la formación de profesores en educación primaria, el *Diseño Curricular* (2009) propone al respecto:

"Números racionales: Funciones y distintos contextos de uso. Distintos significados y diferentes formas de representación.
Las operaciones con números racionales: significados y sentidos de su enseñanza. Propiedades de cada operación. Justificación de reglas de cálculo". (p. 65)

Asimismo, no se brinda una orientación de cómo articular tales conceptos con las nociones de estadística y probabilidad, más aún si se tiene en cuenta que se los plantea como ejes disyuntos[1]. Es habitual que la enseñanza de la estadística y la probabilidad esté planteada para el final del año y si no se alcanza a dar, no genera la preocupación si en lugar de ello no se alcanzaría a trabajar con aritmética básica.

En el nivel medio ocurre algo similar. Agnelli (2009) se refiere al respecto:

"Pero más allá de lo normado oficialmente, la implementación efectiva de la enseñanza de la Probabilidad en la Escuela Media pareciera que es percibida por muchos docentes, quienes no han tenido formación específica en el tema, no como un componente básico e ineludible en la formación de sus alumnos sino como una imposición curricular adicional. Esta percepción hace que tanto la enseñanza de la Probabilidad y en consecuencia, su propia formación disciplinar, queden relegadas por la importancia que se le asigna a otros temas dentro del programa" (p. 24)

Lo anterior se evidencia, tanto en los diseños curriculares de la formación de profesores en educación primaria como en diseño curricular de la escuela secundaria en ciclo básico. En ambos documentos el tratamiento de los conceptos vinculados con la estadística y la probabilidad se encuentra como último eje.

A raíz de lo antedicho se ha decidido diseñar tareas que involucren la enseñanza de las fracciones desde nociones estocásticas para el segundo ciclo de la educación primaria y para el ciclo básico de la educación secundaria. Con ello, se pretende contribuir con una propuesta que articule los conceptos de fracción, razón, frecuencia relativa y probabilidad, a partir de las operaciones con números racionales o sus expresiones equivalentes y su vinculación con procesos aleatorios.

Cabe destacar la importancia que tiene que los docentes puedan contar con un conjunto de actividades que permitan trabajar con la aleatoriedad:

"En general podemos decir entonces, que es recomendable para el tratamiento del tema en clase, trabajar con un conjunto de problemas prototípicos que permitan promover la discusión de los elementos básicos de la naturaleza aleatoria del fenómeno a modelar, la manera de construir el modelo, las herramientas a utilizar para hallar la

[1] Se plantean 7 ejes en el Diseño Curricular para la formación de profesores de educación primaria, de los cuales en el presente trabajo se desea articular los siguientes tres: Sistema de Numeración y Números, Operaciones en diferentes campos numéricos y Tratamiento de la información, Estadística y Probabilidades.

solución, la interpretación que esta merece, y a la luz de los resultados obtenidos, la confrontación del modelo con situaciones reales. (Agnelli, 2009, p. 32)"

Se seleccionan esos dos ciclos, con el objetivo de articular las propuestas e integrar las nociones estocásticas, de tal forma que se habilite un paso continuo desde la alfabetización estocástica hacia la cultura estadística.
Para ello, se han tomado elementos de la didáctica de la Escuela Francesa, particularmente la Teoría de las situaciones Didácticas (Brousseau, 2012) y de los aportes que brinda el enfoque Ontosemiótico (Godino, 2009; 2013). El encuadre didáctico se aborda en la primera parte del trabajo y las tareas y sus respectivos análisis en la segunda parte.
Con esta propuesta no se pretende dejar de lado lo que se viene realizando en la enseñanza de los racionales y las operaciones aritméticas, sino que se pretende complementar los ejes que generalmente se enseñan sin ningún tipo de conexión. A su vez, se pretende enriquecer los conceptos desde nociones estocásticas y mostrando que no hace falta desarrollar toda una teoría previa para abordar conceptos relacionados a la estadística y la probabilidad.
Sin dejar de lado la rigurosidad de la teoría que sustenta las tareas, se considera importante incorporar problemas que fomenten la noción de azar. En esta misma línea, se adhiere a lo propuesto en el Diseño Curricular para el ciclo básico de la educación secundaria (2014):

"Es importante resolver problemas que permitan el reconocimiento y uso de la probabilidad como modo de cuantificar la incertidumbre".(p. 43)

En consonancia con lo anterior y con una crítica a los libros de texto destinados a los estudiantes, Olesker y Tauber (2014), señalan:

"Existe una preponderancia de problemas con un enfoque clásico, en los que se aplica la regla de Laplace y las propiedades de la probabilidad. No aparecen en los textos, problemas cuyo centro sea el significado del azar, ni aparecen problemas de simulación y probabilidad frecuencial". (p. 3)

Finalmente, se piensa que el diseño y análisis de tareas es un momento muy importante que un docente debe tener para planificar secuencias de actividades que permitan aprendizajes que trasciendan el aula y que colaboren con la formación de personas como sujetos y ciudadanos en una sociedad democrática.

Antecedentes

El presente trabajo es una alternativa a tantas propuestas vigentes, cada una de ellas con un especial énfasis en un determinado marco de la matemática. Las diferentes tareas fueron pensadas para la introducción de conceptos matemáticos ligados a los racionales positivos empleando nociones estocásticas. Deseamos aclara que, este trabajo no intenta dar una respuesta definitiva al problema del abordaje de la enseñanza de las operaciones de los racionales en la educación primaria y en los primeros años de la secundaria, sino que es un complemento que pretende mostrar aspectos complementarios a lo ya existente.
Las actividades por sí solas no garantizan el aprendizaje de las operaciones, sin la mediación del docente, el intercambio de argumentos puede llegar a ser una utopía. Es decir, la fase de validación es más viable a partir de las intervenciones que puede ofrecer el docente, recordemos que es él quien gesta la intencionalidad didáctica.

La comunicación es una instancia muy importante, no sólo para comprender lo solicitado sino como vehículo para establecer un diálogo que, a través de argumentos, tienda a establecer un debate. Tales argumentos irán atravesando diferentes niveles de complejidad, permitiendo tener al principio, expresiones que carezcan de justificaciones matemáticas, pero que a la vez se constaten por medio de ejemplos o intuiciones sostenidas de experiencias anteriores. Es posible que los interlocutores, inicialmente, no tengan todas las herramientas y que poco a poco vayan construyendo, no sólo los conocimientos sino el propio lenguaje matemático. Es más, quizás perciban la necesidad de mayores precisiones en el vocabulario para establecer un intercambio de mensajes lo más claros y precisos, a fin de resolver y dar cuenta de las respuestas a las actividades. Si bien la comunicación se da en todo momento, es factible que durante la formulación encuentre su nivel de mayor importancia, ya que es la fase donde el estudiante se encuentra con sus pares y la intervención del docente es mínima o nula, ya que es donde los estudiantes, el medio y el saber se encuentran.

Una de las tareas que el docente lleva adelante es la adopción de cierta bibliografía de referencia. Tales textos deben ser un recurso que permita contextualizar el concepto matemático y a su vez, pueda permitir un abanico de interpretaciones que nutran el sentido mediante diversos marcos matemáticos. Es decir, la selección del material bibliográfico debe ser eso y no una elección. La diferencia entre ambos términos –selección y elección- es el grado de concientización que se tiene en el primero sobre el segundo. Cuando seleccionamos estamos realizando una clasificación según las potencialidades, intentando alejarnos de modismos o tradiciones injustificadas. La elección de un texto matemático implica que hacemos la adopción de un lenguaje, un contexto y un enfoque didáctico, que tiene en su matriz, una concepción de aprendizaje y enseñanza. Por lo tanto, a la hora de seleccionar un texto habría que contemplar que contenga diversos significantes de los racionales y de su relación con las operaciones para cargar de sentido a los conceptos y no limitarlos al guarismo y al ámbito de la medida.

A continuación, brindaremos algunas precisiones de las herramientas teóricas en la que se funda este trabajo. En primer lugar haremos un recorrido por algunos enfoques didácticos que nos ofrecen un marco de referencia. Seguidamente nos referiremos a los conceptos estocásticos que se tratan en esta obra y en un tercer momento, relacionaremos los números racionales y su enseñanza con algunos desarrollos referidos al aprendizaje y enseñanza de la estadística y probabilidad.

Acerca del enfoque didáctico

En primer lugar deseamos describir qué entendemos por situación y distinguir su concepto de otros, empleados en los textos de educación primaria, como por ejemplo: actividad, problema, ejercicio, situación-problema, entre otros.

Tomando como referencia a Brousseau (2012), coincidimos que:

> *"El término "situación" designa el conjunto de circunstancias en las cuales se encuentra el alumno, las relaciones que lo unen a su medio, el conjunto de datos que caracterizan una acción o una evolución. Una situación es una situación-problema que necesita una adaptación, una respuesta del alumno. En particular, si la necesidad de esta respuesta ha sido objeto de una consigna precisa, si el alumno tiene un proyecto, un objetivo declarado, tendremos una "situación problema estricta" (o formal), y aún un "problema" si el medio se reduce a un enunciado y sin ninguna traba material, debida a ciertos aspectos físicos de la situación, ni ninguna condición psicológica o social, modifica la interpretación. Una situación didáctica es una situación donde se manifiesta directa o indirectamente una voluntad de enseñar, un enseñante. En general, se puede distinguir, en una situación didáctica, al menos una situación-problema y un contrato didáctico". (p. 59)*

Como puede evidenciarse, una situación no es un agrupamiento de datos y preguntas que el estudiante debe leer y que automáticamente, lo conduce a una respuesta. Su rol dentro de la propuesta planteada es fundamental, es decir, el estudiante tendrá que ir tomando decisiones que lo irán llevando (y nos llevarán) a posibles respuestas e intercambios que nos permitirán ir construyendo significados.

En la misma línea, Godino (2013) nos brinda las siguientes conceptualizaciones al respecto:

"Tanto en el EOS, como en la TSD y la TAD la noción de situación-problema, o tarea (no rutinaria), desempeña un papel central, ya que se asume una visión antropológica para la matemática, la cual se concibe como una actividad ligada a la resolución de determinadas tareas problemáticas. Son las situaciones-problemas/tareas las que dan sentido a la matemática, entendidas como sistema de estructuras conceptuales, social o culturalmente compartidas. Debido a esta relevancia, el primer componente de la idoneidad epistémica de un proceso de estudio matemático se refiere a los problemas/tareas, e incluye los siguientes indicadores de idoneidad:

- *En el proceso de estudio se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.*
- *Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)" (p. 3)*[2]

Es decir, que en este trabajo adoptaremos los constructos de situación-problema y tarea como términos similares que apuntan a resoluciones no mecánicas.

A su vez, es importante destacar que las actividades que se muestran en este trabajo promueven el aprendizaje de los números racionales a partir de nociones estocásticas. O sea, hay una intencionalidad didáctica en las actividades, esto es percibido por los estudiantes y junto con los acuerdos explícitos e implícitos con el docente, a partir de las situaciones-problemas planteadas, consolidan una situación didáctica.

Gran parte de las situaciones brindadas implican que los estudiantes ajusten los enunciados a sus marcos de referencias personales, lo que puede traer consigo resoluciones diversas y que aportan riqueza a los intercambios.
Al plantearse problemas y no un mero ejercicio se ofrece un desafío al estudiante promoviendo que sus respuestas no se limiten a un número, sino que las argumentaciones son el centro principal de la escena. Es decir, que el desafío pasa por verbalizar los razonamientos que validan sus resoluciones. Lo anterior es sumamente importante, no es simple poder comunicar nuestros razonamientos, para ello necesitamos algunas herramientas propias de la matemática, la estadística y la probabilidad. Eso es algo que los estudiantes lo perciben y de allí podemos incorporar los aspectos conceptuales, o sea desde la necesidad o urgencia que implica la situación-problema y no desde la imposición. Aquí, los docentes, debemos ser tanto o más pacientes que nuestros estudiantes, comenzar desde las concepciones de los estudiantes hasta alcanzar aquellas nociones[3] conceptuales que deseamos alcanzar, no es un camino simple ni lineal, cuando a aprendizaje y enseñanza nos referimos no hay atajos ni podemos engañarnos en que con "dar" actividades o temas eso equivale a aprendizajes.

En relación a lo anterior, Batanero y Díaz (2011) se refieren de la siguiente manera:

---

[2] EOS (Enfoque ontosemiótico), TAD (Teoría Antropológica Didáctica) y TSD (Teoría de las Situaciones Didácticas.)

[3] Hablamos de nociones debido a que concebimos que los conceptos no son acabados sino que sus significados se van articulando e integrando a través de otros significantes.

"Por otro lado, hay que diferenciar entre conocer y ser capaz de aplicar un conocimiento. La habilidad para aplicar los conocimientos matemáticos es frecuentemente mucho más difícil de lo que se supone, porque requiere no sólo conocimientos técnicos (tales como preparar un gráfico o calcular un promedio), sino también conocimientos estratégicos (saber cuándo hay que usar un concepto o gráfico dado). Los problemas y ejercicios de los libros de texto sólo suelen concentrarse en los conocimientos técnicos. Al trabajar con proyectos se coloca a los alumnos en la posición de tener que pensar en preguntas como las siguientes (Graham, 1987): ¿Cuál es mi problema? ¿Necesito datos? ¿Cuáles? ¿Cómo puedo obtenerlos? ¿Qué significa este resultado en la práctica?" (p. 21)

Ahora bien, para que un estudiante logre cierto aprendizaje es necesario que nuestra propuesta esté dotada de *sentido* matemático. Siguiendo los aportes de Brousseau (2012):

"La definición del sentido de una noción es, lo hemos dicho, uno de los problemas centrales de la didáctica. Lo que precede nos permite ahora entrever cómo nos proponemos resolverlo: se tratará de inventariar y clasificar todas las situaciones donde esta noción aparece involucrada, ya sea como solución, necesaria o no, óptima o no, ya sea en el enunciado, o en los comportamientos de los protagonistas del juego didáctico. Así, la noción aparece en su funcionamiento y en sus relaciones con los diferentes sectores de la matemática. Se puede identificar diversas concepciones particulares que permiten resolver una clase de situaciones, mientras que sugieren respuestas falsas sobre otra, y cuya reunión constituye el concepto". (p.58)

Por lo tanto, concebimos que incorporar una propuesta que no se limite a los contextos de medida, partición de objetos o fraccionamiento del tiempo, no sólo es que brinda una estrategia más de enseñanza sino que permite dotar de otros significados a los números racionales y enmarcarlos en otros contextos, por ejemplo, donde el azar es una variable que en pocas ocasiones se estudia.

A continuación se brindan los elementos característicos que componen el significado en torno al aprendizaje y la enseñanza de la probabilidad según Batanero (2005):

"1. El campo de problemas de los que emerge el objeto. Los objetos matemáticos han surgido para resolver problemas particulares; esta solución es específica en un primer momento y más tarde se generaliza a otros problemas similares. Ahora bien, la solución involucra un nuevo objeto matemático que en un principio es usado implícitamente, pero posteriormente se convierte en tema de estudio en sí mismo y más tarde se introduce en la enseñanza. Dichos problemas forman parte del significado del objeto, ya que lo justifican y dotan de sentido". (p. 250)

Esto nos muestra la necesidad de una adecuada secuenciación de actividades que permitan a los estudiantes ir articulando e integrando nuevos saberes.

"2. Elementos lingüísticos. Al tratar de resolver los problemas, necesitamos objetos ostensivos como símbolos, palabras o gráficos para representar los datos y soluciones, al igual que las operaciones y conceptos usados. Todas estas expresiones sirven, por un lado, como sistemas de representación, es decir, para sustituir o ponerse en lugar del objeto representado; por otro, cabe indicar que el lenguaje matemático cumple también un papel instrumental en la actividad matemática". (p.250)

Esto es esencial, ya que en los primeros años de la educación formal el aprendizaje de la lectura y la escritura conjugan el lenguaje natural, las normas de escritura y la matemática a través de su propio lenguaje emplea los recursos como letras y números de manera diferente que en otras disciplinas. Por ejemplo, la letra A es una vocal y a la vez puede representar un evento. En la educación secundaria P(A) puede confundirse con el registro de una función.

"3. Procedimientos y algoritmos. Los primitivos problemas, una vez resueltos, dan lugar a métodos particulares que permiten resolver problemas dentro de un campo dado…" (p. 250)

Esto nos lleva a la necesaria revisión de los modos y técnicas empleadas por nuestros estudiantes a fin de estudiar qué tipo de obstáculos o procesos originales podrían llegar a emerger. Asimismo, comparar producciones para buscar aquellas tecnologías que los hacen funcionar.

"4. Las definiciones y propiedades de los objetos y sus relaciones con otros objetos matemáticos. […]Una vez que la probabilidad es reconocida como objeto matemático por la comunidad científica, en el 1700, aparecen diferentes definiciones que estudiaremos en las secciones siguientes. Al mismo tiempo, comienzan a publicarse tratados donde se analizan las propiedades de la probabilidad: el hecho de que siempre es positiva, las reglas de la suma y producto, los teoremas de la probabilidad total y de Bayes, así como sus relaciones con los conceptos de esperanza, distribución o convergencia". (p. 251)

Aquí podemos notar la importancia del estudio de las propiedades a través del estudio de regularidades y de la construcción del concepto de probabilidad desde su génesis mediante actividades que pongan a los estudiantes ante preguntas similares a las que ponen en funcionamiento a cada tipo de probabilidad.

"5. Los argumentos y demostraciones de estas propiedades. […] Aunque el tipo de demostración más característico en matemáticas es el formal deductivo, podemos hallar también una variedad de tipos de justificación; Galileo usó la enumeración para dar una solución completa al problema propuesto por el Duque de Toscana. Esta misma demostración sería comprensible para los alumnos de secundaria,… " (p. 251)

Nuestra propuesta pone su mirada en los procedimientos de los estudiantes a fin de ser tomados como fundamentos parciales de los conceptos que se tratan. Cada situación-problema los enfrenta a mejorar sus argumentos. No pretendemos llegar a demostraciones deductivas, sino incursionar desde algunos casos particulares a la formulación de conjeturas que se funden en una observación sistemática y reflexiva.

Resumiendo esta primera aproximación: nuestra propuesta incorpora situaciones que implican el compromiso del estudiante en la tarea encomendada y pone al docente como un actor que promueve la construcción del sentido de las nociones a partir del intercambio entre los estudiantes y con él. Cada situación, al ser adaptada por el estudiante, se convierte en su propio proyecto, ya que al resolverla el primer desafío es con él mismo y sus saberes y concepciones, luego con el resto de sus pares y el o la docente.

Acerca de las nociones estocásticas

Existe una amplia y variada literatura en relación a los conceptos de estadística y probabilidad. Aun así su enseñanza queda relegada a una unidad desconectada del resto de los marcos matemáticos o como complemento de un período escolar (Tauber, 2018).

Con el correr del tiempo las nociones estocásticas están cada vez más presentes en nuestros contextos y muchas veces nos permiten tener una opinión mejor informada si conocemos y comprendemos sus conceptos (Olesker y Tauber, 2014).

En ocasiones la estadística está reducida a la construcción de gráficos con un único fin. Con la incorporación de las herramientas tecnológicas a la educación se está propiciando un espacio para el trabajo con datos reales obtenidos de fuentes propias o de otras instituciones.

Ahora bien, cuando nos referimos a probabilidad ¿todos entendemos lo mismo?

Antes de continuar abordaremos el concepto de probabilidad a partir de cinco significados, para ello nos basaremos en la obra de Batanero (2005).

En ocasiones las frases "es probable que gane la quiniela, porque hoy me caí y le jugué al 56", "hoy es un día nublado como ayer y antes de ayer, entonces hoy hay más posibilidad de que llueva" o "tal equipo tiene más chances de ganar porque vine ganado todos los partidos", contienen un cierto nivel de opinión no fundada en conceptos probabilísticos, sino más bien en la experiencia y ligado a nuestras sensaciones o pálpitos. El significado que se asocia a este tipo de probabilidad es el intuitivo, que Batanero (2005) lo expresa en los siguientes términos:

"Las primeras ideas intuitivas y los juegos de azar son comunes en todas las civilizaciones primitivas. Aparecen tanto en niños como en personas que no han estudiado probabilidades, pero usan frases y expresiones coloquiales para cuantificar los sucesos inciertos y expresar su grado de creencia en ellos. Estas primeras ideas, que surgen ligadas a las apuestas, la esperanza, la ganancia en un juego y el concepto de juego equitativo, no se precisaron hasta que se trató de asignar números a estos grados de creencia para poder comparar la verosimilitud de diferentes sucesos". (p. 253)

Con el tiempo, los matemáticos han ido cuantificando procesos como los anteriores, es decir, se comienza a medir la incertidumbre (Batanero, 2005):

"Aunque la idea de probabilidad está ya implícita en todos estos trabajos, tenemos que esperar hasta De Moivre para encontrar una definición: Por tanto, si constituimos una fracción cuyo denominador es el número de chances (posibilidades) con la que el suceso podría ocurrir y el denominador el número de chances con las que puede ocurrir o fallar, esta fracción será una definición propia de la probabilidad de ocurrencia". (p. 253)

Al respecto, Batanero (2005) continúa diciendo:

"En 1814, Laplace acuñó la definición que hoy enseñamos como regla de Laplace para la probabilidad de un suceso que puede ocurrir solamente en un número finito de modalidades, como una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el número de todos los casos posibles, e indica también la necesidad de reducir los acontecimientos de un cierto tipo a un cierto número de casos igualmente posibles". (p. 253-254).

Las citas anteriores nos permiten la introducción de los racionales –en los casos de fracciones propias- como herramienta para dar cuenta de situaciones donde interesa conocer el grado de magnitud de la ocurrencia de un suceso o evento.

También, podemos observar que la fracción presenta otro significado distinto a los empleados habitualmente en relación a magnitudes continuas, en este caso, se expresa un cociente entre dos magnitudes discretas.
A su vez, en la última cita se deja entrever que la propuesta de Laplace se limita a aquellas situaciones-problemas donde los casos individuales son igualmente posibles. Lo anterior es aplicable en el caso de los juegos de azar cuyas condiciones se consideran "justas", por ejemplo, que en la quiniela salga un cierto número.

Lo anterior es estudiado y ampliado por Bernoulli, quién agrega una mirada más aguda sobre la realización de los experimentos y las condiciones en las que se los desarrolla. Al siguiente significado de la probabilidad se lo conoce como *significado frecuencial* (Batanero, 2005)

"Bernoulli sugirió que podríamos asignar probabilidades a los sucesos aleatorios que aparecen en diversos campos, a partir de la frecuencia relativa observada en una serie grande de ensayos del experimento; su demostración de la Primera Ley de los Grandes Números fue aceptada en su época como un apoyo al carácter objetivo de la probabilidad. Dicho teorema indica que la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones se acerque tanto como queramos a la probabilidad teórica del suceso puede aproximarse suficientemente a uno, sin más que aumentar el número de pruebas". (p. 254)

Es así que enfrentamos el desafío de mantener las condiciones en las que se desarrolla la experimentación, ya que su reproducción permitirá al experimentador detectar regularidades que lo conducirán a las frecuencias relativas y éstas a su vez, permitirán aproximarse a la probabilidad de un determinado evento. Aquí se comienza a incorporar la variabilidad como parte del fenómeno estudiado y de la mano del cálculo infinitesimal comienzan a dar señales del potencial de predicción que pueden ofrecer ambos recursos.
Cabe aclarar que en el presente trabajo se trabajará con el *significado frecuencial*, pero esto no implica que los estudiantes deban conocer acerca del cálculo infinitesimal.
Lo que sí comienza a aparecer es que ante un mismo experimento y condiciones, dos observadores pueden obtener resultados que no sean idénticos. Por ejemplo, si un niño lanza al aire una moneda y al caer al piso observa la cara superior y repite esta situación en 100 oportunidades, puede ocurrir, que en idénticas condiciones otro niño lo realice con las mismas indicaciones y moneda, obteniendo resultados que sean o no idénticos.

Seguramente el lector ya ha logrado notar lo que implica cumplir con lo previsto por Bernoulli y como respuesta al significado frecuencial surge el *significado subjetivo* (Batanero, 2005):

"Aunque el significado frecuencial amplía el campo de aplicaciones de la probabilidad y da una regla de cálculo sobre ella, no estuvo libre de controversias. Un nuevo punto de vista aparece a través de la regla de Bayes, que permite transformar las probabilidades a priori (antes de realizar un experimento) de varias causas, una vez observadas sus consecuencias, en probabilidades a posteriori, que incorporan la información de los datos analizados". (p. 255)

Este tipo de significado permite estudiar de una mejor manera la probabilidad de sucesos condicionados o donde el experimento no se puede repetir.

Finalmente, y través de incorporación de la teoría de conjuntos surge el *significado axiomático* de la mano Kolmogorov (Batanero, 2005):

"...Kolmogorov [...], aplicando la teoría de conjuntos y de la medida, para deducir una axiomática que han aceptado todas las escuelas, independientemente del significado filosófico otorgado a la naturaleza de la probabilidad. Desde entonces, la probabilidad es simplemente un modelo matemático que podemos usar para describir e interpretar la realidad de los fenómenos aleatorios". (p. 255)

Algunas propuestas de enseñanza priorizan este tipo de significado a raíz de la formación de los docentes que se centran en la semiótica conjuntista y que refuerzan la idea de que la probabilidad se limita al estudio de juegos de azar. Asimismo en los textos se presentan notaciones que no son utilizadas previamente y que sin la debida atención hacen pensar que dichos conceptos tengan su origen en la estadística y la probabilidad.

Es importante tener en cuenta que si el acento estará en algunos de los significados se perderán los demás. Aquí no se trata de buscar uno que suprima a los demás, sino estudiar las condiciones en la que se aplica cada uno y cómo éstos a su vez son más adecuados a las estructuras cognitivas de nuestros estudiantes.

Los números racionales y su enseñanza desde una mirada estocástica

Siempre que hacemos una selección de los enfoques de enseñanza y de los significados que se abordarán en una propuesta didáctica, conllevan que ciertos aspectos serán tenidos en cuenta y otros estarán un poco más cerca o lejos según las articulaciones que hagamos con esos marcos matemáticos.

Coincidimos con Batanero (2005) en:

"Por otro lado, los diferentes significados de la probabilidad también deberían incluirse progresivamente, comenzando desde las ideas intuitivas de los alumnos sobre el azar y la probabilidad, ya que la comprensión es un proceso continuo y creciente por el cual el alumno construye y relaciona progresivamente los diferentes elementos del significado que atañen al concepto. Es necesario un "tránsito flexible "entre los distintos significados parciales, lo cual se logra través un proceso de estudio prolongado; dicho proceso tiene que ser planificado y distribuido entre los distintos niveles educativos". (p.257)

Como ya se ha mencionado, los estudiantes en edades tempranas, acceden a cantidades fraccionarias sin la necesidad de una instrucción formal y con determinados significados relacionados a las medidas de caños de agua, por ejemplo, o cantidades referidas a fracciones de kg, en el caso de los panificados. Por lo tanto, ese conocimiento no se debe dejar de atender y de complementar con otros sentidos. Vinculado a esto, podemos encontrar en Brousseau (2012) los siguientes comentarios:

"La enseñanza de los decimales, como la de la numeración plantea, en mi opinión, un problema didáctico difícil y primordial. Por una parte, su uso está tan expandido, es tan cómodo y tan banal que los niños lo encuentran muy pronto, bajo su forma acabada, actual. Cualquiera sea la forma del aprendizaje, es el hábito y el empleo familiar quien regulará la significación del concepto [...]Por otra parte, es impensable atrasar la enseñanza de los decimales o aproximarlos a una génesis demasiado larga o que conduciría a prácticas insólitas". (p. 67)

De esta manera nos hemos propuesto abordar otros significados de los números racionales que vayan más allá de aquellos vinculados a la aritmética.

Repasemos algunos significados habituales trabajados en la educación primaria y secundaria (Cattaneo, Lagreca, González y Buschiazzo, 2010):

- *"Las fracciones pueden representar parte de un todo". (p.38).* En este caso al todo usualmente se lo asocia a un único entero, por ejemplo una torta o una pared y en menor medida a la relación entre un conjunto y parte de sus elementos.
- *"Las fracciones pueden expresar un cociente". (p.38).* Por ejemplo, cuando se desea distribuir equitativamente una cantidad que al dividirla ofrece un resto distinto de cero.
- *"Las fracciones pueden expresar una probabilidad". (p.39).* Este punto lo retomaremos un poco más adelante.
- *"Las fracciones pueden expresar una razón". (p.39).* En el texto tomado de referencia, el concepto de razón se vincula a la relación entre dos cantidades de la misma magnitud, sin embargo en los libros de texto de la educación secundaria el concepto se aproxima más a relaciones entre magnitudes de nivel externo como ser la rapidez, la densidad, aceleración, etc.
- *"Las fracciones pueden expresar un porcentaje". (p.39).* Este es uno de los significados que se trabaja como caso particular de las fracciones centesimales.
- *Las fracciones como operadores.* Llinares Ciscar y Sánchez García (1997), refieren a ello del siguiente modo: *"Bajo esta interpretación, las fracciones son vistas en el papel de transformaciones: de "algo que actúa sobre una situación (estado) y la modifica". Se concibe aquí la fracción como una sucesión de multiplicaciones y divisiones o a la inversa". (p.72)* Este significado usualmente lo encontramos más ligado a los contextos de medida.

Los anteriores significados, en ocasiones, son incorporados a la determinación de las probabilidades sin un grado de concientización amplio. Por ejemplo, en el caso parte-todo se utiliza el *enfoque laplaciano* y a su vez, se toma la definición como sinónimos. Es importante destacar que el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles puede llevar a las siguientes situaciones:

- Su enunciado es acotado y conciso generando un cierto atractivo, ya que no implica complejas interpretaciones.
- La definición de probabilidad es circular, convirtiéndose en algo así como un concepto primitivo.
- Supone una constante en la ocurrencia de los casos favorables, no permitiendo la variación de los resultados.

Otro tipo de *probabilidad es el frecuencial* que como ya hemos visto, está asociado a la repetición de un mismo experimento bajo las mismas condiciones. Esto para los estudiantes puede no tener mucho sentido (tanto en la concepción coloquial como matemática), ya que se convierte en una tarea repetitiva y en ocasiones no se lo conecta con las nociones estadísticas. Sin embargo, con una gestión de la clase que permita tomar las repeticiones como un modelo para simular situaciones donde no se tienen datos puede ser una buena alternativa para incursionar en la enseñanza de la estadística y la probabilidad. Lo anterior permitirá a los niños y adolescentes responder con una mejor precisión cuando se pregunta el porcentaje asociado a una probabilidad en el caso de obtener cara en el próximo lanzamiento de una moneda.

Por ejemplo: al consultar a un estudiante sobre las chances de obtener cara en el próximo lanzamiento de una moneda, un niño puede indicar que tiene la mitad de las posibilidades sin la necesidad de asociar a ningún tipo de probabilidad o regla de cálculo, pero se puede observar que hay presente una noción laplaciana. Otro, quizás pruebe lanzando varias veces una misma moneda e intente buscar una regularidad, este estudiante estará más próximo a un tipo de probabilidad frecuencial si observa el patrón de los resultados, pero si realiza el cociente entre los casos en los que obtuvo cara y el total de lanzamientos estará más cercano al tipo laplaciano.

Una interesante propuesta del estudio de las probabilidades desde la mirada frecuencialista se encuentra en Polya (1966), vinculado al estudio de fenómeno de masas:

> *"Un objetivo importante de cualquier teoría de tales fenómenos debe ser predecir la final y estable frecuencia relativa o la frecuencia relativa a largo alcance. Consideraremos el valor teórico de la frecuencia relativa a largo alcance y llamaremos a este valor teórico probabilidad. Tenemos que aclarar este concepto de probabilidad. Naturalmente, empezamos con el estudio de los fenómenos de masas cuya frecuencia relativa a largo alcance podemos predecir con un grado de confianza razonable". (p. 352)*

Con la probabilidad a través de la experimentación se ofrecen otras respuestas, posiblemente más fundamentadas y con otro grado de validación. Pero hay ocasiones en las que no se puede realizar la experimentación o que su realización implicaría la pérdida de mucho tiempo y recursos. En estos casos parece más adecuado otro enfoque que supere las limitaciones de los enfoques objetivos, así surge el *enfoque subjetivo* (Batanero y Díaz, 2011):

> *"En otras situaciones la probabilidad no es una propiedad objetiva de los sucesos, sino la percepción o grado de creencia en la verosimilitud de la persona que asigna la probabilidad sobre la plausibilidad de ocurrencia del suceso. Muchos problemas de toma de decisión o elaboración de un juicio son abiertos o tienen más de una posible decisión y en su solución intervienen tanto factores matemáticos como extra matemático. La concepción subjetiva de la probabilidad seria adecuada para modelizar este tipo de situaciones". (p. 4)*

En la misma línea de pensamiento Agnelli (2009) señala:

> *"La interpretación subjetiva considera a la probabilidad, como una medida numérica de la creencia que tiene una persona acerca de la ocurrencia de un evento. La persona asigna una probabilidad a un evento de manera que refleje su creencia acerca de la verdad o falsedad del mismo. Éste es el enfoque más general, ya que se aplica a eventos que pueden no ser equiprobables y a eventos que no pueden repetirse bajo las mismas condiciones.*
> *De este modo, la probabilidad está referida a la incertidumbre y no únicamente a la repetición de experimentos. Esta interpretación es personal en el sentido de que diferentes personas pueden tener diferentes opiniones y en consecuencia asignar al mismo evento diferentes probabilidades; de aquí el nombre de probabilidad subjetiva". (p.31)*

Lo anterior fue considerado por Kolmogorov, quien definió la probabilidad a través de axiomas cuya naturaleza semiótica se basa en la teoría de conjuntos.

"Sea E el espacio muestral de cierto experimento aleatorio. La Probabilidad de cada suceso es un número que verifica:

1. Cualquiera que sea el suceso A, $P(A) \geq 0$.

2. Si dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3. La probabilidad total es 1. P(E) = 1."[4]

[4] Definición tomada del sitio https://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/3.html

La definición anterior es menos frecuente en los textos del nivel primario y de los primeros años de a educación secundaria obligatoria. Pero sus consecuencias son incorporadas sin un trabajo previo en torno a las notaciones conjuntistas o las únicas nociones trabajadas son referentes a los conjuntos numéricos como conjuntos inclusivos. Se evidencian estos axiomas como notas a los márgenes de los libros de textos recientes (últimos 15 años). Los términos conjuntos, favorables y desfavorables son expresados como lenguaje natural, pero cada uno tiene profundas raíces matemáticas y estadísticas.

Aquí pueden surgir algunos obstáculos con los aprendizajes de los estudiantes, ya que lograr comprender que la fracción es un único número no es algo sencillo y a la vez que expresa una relación entre dos estados.

Revisión de los significados de las probabilidades y las fracciones

Al abordar la probabilidad desde el enfoque clásico, una cuestión más para atender es la limitación que tiene este significado, ya que supone la equiprobabilidad de los sucesos simples y sus resultados son a priori de la realización del experimento. Dicha situación no es simple de observar en edades tempranas donde es preciso el material concreto en los estudiantes tal como indican los trabajos de Piaget (1991).

Con respecto al concepto de razón, éste nos lleva a reflexionar en torno al concepto de fracciones equivalentes, ya que aritméticamente dos fracciones que tengan la misma razón representan la misma cantidad. Ahora bien, en estadística y probabilidad esto no siempre es trasladable. Al respecto Sosa (2018) se refiere de la siguiente manera:

"En el contexto de la probabilidad, se trata de suponer, por ejemplo, que un evento que tiene a casos favorables de un total de b casos posibles, tiene la misma probabilidad de ocurrir que uno que tiene na casos favorables, de nb casos en total. Pero en este contexto, la veracidad de dicho supuesto, dependerá también del número de ocurrencias: para a, b grandes, tenderá a ser verdadero, para a, b pequeños, no". (p. 31)

En el presente trabajo se busca que ese tipo de reflexiones surjan a partir de preguntas que orienten a los estudiantes en la discusión de las condiciones en las que podemos hablar de equivalencias.

Vinculado al concepto de razón surge el significado de porcentaje. Que en ocasiones puede ser interpretado en forma incorrecta si no se hacen las debidas aclaraciones. Una cosa es suponer un caso hipotético de 100 casos posibles y otra es que los estudiantes piensen que siempre eso será así y que puede trasladarse a cualquier situación. Sosa (2018), lo expresa de la siguiente forma:

"Es usual expresar las probabilidades en términos de porcentaje, y ésta última es una noción que no se escapa a la interpretación en términos de razones, sino que "vive" y es su razón de ser, la razón". (p. 38)

Continúa señalando que:

"En un análisis didáctico-matemático del porcentaje, Mendoza (2007) ubica la noción, como una razón, que puede expresarse mediante una fracción o un decimal; considera la posibilidad de estudiarla como una relación entre dos cantidades ante (Sic.) de verla como número y caracteriza los modos de utilización por parte de los alumnos de esta noción: como una

relación parte todo o, más difícil, parte parte, como una relación que asocia un total con el número arbitrario 100, como un operador fraccionario, como una cantidad absoluta (interpretación errónea), entre otras (Mendoza, 2007, pp.190-196)"

Es decir, es deseable no dejar de estudiar el concepto de porcentaje a la luz de las nociones estocásticas, ya que dicho concepto expresa un significado muy difundido en la sociedad y que conlleva una responsabilidad de ser explicada y entendida según el contexto y bajo las condiciones de la propia situación estudiada. Como indica Valero (2002):

"El contexto de un problema es importante dentro de concepciones que abogan por la necesidad de involucrar al estudiante en una construcción activa del conocimiento. Los estudiantes necesitan enfrentarse a problemas con un contexto que les permita establecer conexiones con lo que ya conocen…" (p. 51)

Dentro del presente trabajo se propone la introducción de la multiplicación de fracciones mediante nociones estocásticas, su desarrollo no resuelve algunos *obstáculos epistemológicos*[5] relacionados a la aplicación de conclusiones elaboradas en el campo de los números naturales con respecto al producto de dos números. Pero sí consideramos que al momento de incorporarlo ofrece más herramientas para una comprensión más adecuada debido a las propiedades trabajadas en relación a los valores que pueden tomar las probabilidades. Gadino (1996) explica la situación anterior de la siguiente manera:

"El manejo inicial con números naturales lleva al niño a la conclusión apresurada de que la multiplicación es una operación cuyo resultado o producto es mayor que los factores, y que en la división el dividendo siempre se reduce, obteniéndose un cociente más pequeño que él. Cuando se introduce la multiplicación por un número comprendido entre 0 y 1, se produce un momento de gran confusión para el niño ya que el producto será menor que el multiplicando. Si los factores a su vez serán menores que la unidad, el producto a su vez será menor que ambos, lo que torna inaplicable la idea de multiplicación como suma abreviada". (p. 86-87)

Algo similar ocurre en la adición, donde algunas resoluciones erróneas pueden presentarse a raíz de suponer que las propiedades de la adición en los números naturales se preservan en los racionales, nos referimos a una correspondencia directa entre los numeradores y denominadores.

En lo que respecta a la incorporación de representaciones simbólicas es un aspecto que tanto en la estadística como en la probabilidad están presentes. Ahora bien, porque formalmente se dedique mucho tiempo no implica que eso se traduzca en aprendizajes.

Consideramos importante ir incorporando gradualmente la semiótica propia de las conceptualizaciones que aquí presentamos, pero no que sea un fin en sí mismo. Sí compartimos los siguientes aportes de Batanero (2005):

[5] Tomado de Cortina, Zúñiga y Visnovska (2013): *"Según Brousseau, los obstáculos no son producidos por la ignorancia de un saber ni por una comprensión errónea. En lugar de ello, los obstáculos implican la (adecuada) adquisición de saberes específicos; los cuales posteriormente dificultan y obstruyen la adquisición de saberes más complejos."* Luego, continúan diciendo *"Brousseau (1997) reconoce que hay un segundo tipo de obstáculos que tiene su origen en la propia disciplina matemática (obstáculos de origen epistemológico). Estos obstáculos se presentan cuando la comprensión de cierto concepto matemático interfiere con la comprensión de otro más complejo. Por ejemplo, en la literatura sobre fracciones, múltiples autores han considerado que el conocimiento que los estudiantes desarrollan de los números naturales interfiere con la comprensión de los números racionales". (p.9)*

"…interesa centrarse en la noción de función semiótica que Godino (2002) toma de Eco (1979), y a la cual considera como una relación entre una expresión que juega el papel de original en la correspondencia (significante) y un contenido (significado). Cuando una persona produce o interpreta una función semiótica se crea un significado elemental, en el que la persona relaciona la expresión con el contenido". (p. 257)

Es de interés didáctico y pedagógico estudiar los significados personales que elaboran nuestros estudiantes a través de los significantes que cada uno elabore a la hora de resolver alguna situación-problema.
Lo anterior conlleva la producción de argumentos mediante la escritura y/o la verbalización, promoviendo un acto comunicativo único y necesario. Esto permite realizar una negociación de significados no arbitraria que pone el acento en la construcción de conocimiento a partir del rol protagónico de nuestros estudiantes y la gestión del o la docente. Esto, Batanero (2005) lo señala así:

"En cada función semiótica, la correspondencia entre expresión y contenido se fija mediante reglas que no siempre son explícitas, o no son entendidas por los dos actores del discurso, lo cual provoca que, en algunas ocasiones, el profesor y el estudiante atribuyan diferente significado a la misma expresión; aquí hablamos de conflicto semiótico... Dichos conflictos aparecen en la interacción comunicativa y con frecuencia explican las dificultades y limitaciones del aprendizaje de las matemáticas". (p. 258)

Los intercambios que se pueden dar entre los estudiantes y con el docente ponen de manifiesto que todo acto de enseñanza y aprendizaje precisa de momentos de acuerdos y para ello, el desarrollo de argumentos es fundamental. La presente propuesta tiene previsto momentos de socialización en los cuales dicho acuerdos surjan a manera de *micro comunidad matemática*, de esa forma contribuir a la construcción de significados de una manera menos arbitraria. Vinculado a esto surge un momento muy importante de la secuencia que es la validación, Sadovsky y Sessa (2004) se refiere de la siguiente manera:

"Entendemos por validación, el proceso por el cual los chicos pueden acceder, por sus propios medios y usando el conocimiento matemático, a conocer la pertinencia de los resultados y resoluciones que producen. Entendemos que los resultados incluyen los procesos. Resolver un problema implica desplegar y agotar un cierto proceso. La validación no es sólo saber si el resultado coincide o no con lo esperado, es fundamentar, es saber dar razones de por qué estas herramientas resuelven el problema. Esta posición que queremos lograr en los alumnos contradice aquello culturalmente establecido". (p. 38)

Como mencionamos, las actividades proponen momentos de trabajo individual, instancias de trabajo grupal y de socialización. Cada momento está previsto para ir desde lo personal a lo interpersonal para volver sobre sí mismos. De allí promover la autoevaluación como un proceso a adquirir. Brousseau (2012), en relación a la enseñanza de los decimales en otro marco de la matemática, pero con aportes adecuados a nuestro contexto, señala:

"Las convicciones chocan y se expresan según los caracteres y las posiciones sociales en el seno del equipo. Es entonces cuando comienza el proceso científico, hay que buscar la causa, obstinarse. No sirve de nada seducir o intimidar al oponente, hay que convencerse, convencer, probar. El equipo estalla en movimientos: unos controlan el trabajo hecho, otros quieren ampliar el cuadrado, duplicarlo y cortarle una partecita. Las amistades son sometidas a prueba, las dudas son recibidas como traiciones, los "flojos" ponen en duda la competencia

de los "buenos". Nada que hacer, la retórica deberá ceder paso a la prueba científica e intelectual, único medio honorable de rendirse al "adversario". Cuando, franqueado el obstáculo, la solución aparezca a cada uno como desmitificada, contingente, banal e incluso un poco decepcionante, cada uno se la habrá apropiado, y habrá triunfado, no sobre sus compañeros, sino sobre él mismo, todos han ganado sin que la maestra tenga necesidad de concluir con una lección. El mérito de abandonar una idea que se manifiesta falsa es tan grande como el de encontrar directamente una idea correcta, la obstinación es también necesaria como el renunciamiento a la obstinación. Los niños han sido llevados a tomar partido por la verdad más apasionadamente". (p. 31)

Como es notoria la intención de generar una propuesta que complemente a las existentes, la misma tiene sus raíces en nociones estocásticas, su tronco en las nociones matemáticas ligadas a las fracciones, su follaje en las actividades y las respuestas e intercambios que puedan gestarse serán sus frutos.

Los invitamos a continuar la lectura de las situaciones-problemas con análisis estocásticos y referencias a los documentos ministeriales.

Diseño y Análisis de tareas

Una de las principales ideas a trabajar durante la educación primaria y secundaria es el concepto de número racional. Al respecto, el Diseño curricular para el ciclo básico de la provincia de Santa Fe propone:

"Números y Operaciones

Se propone iniciar el trabajo con los Números Racionales Positivos desde las fracciones y su expresión como decimal para ciertos cocientes, como modo de establecer continuidad con lo trabajado en la escolaridad primaria. (Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, 2012)"

A su vez, en la formación de docentes de educación primaria, uno de los puntos destacados está vinculado a la enseñanza de los números racionales:

"Números racionales: Funciones y distintos contextos de uso. Distintos significados y diferentes formas de representación. Expresiones enteras, fraccionarias, decimales finitas y decimales periódicas. Orden. Densidad. Representación en la recta numérica. (Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, 2009)"

Además, algunos estudios en relación a la enseñanza y aprendizaje de las fracciones se refieren de la siguiente manera:

"Una vez determinada esta necesidad se plantea la tarea de identificar las diferentes interpretaciones, contextos, en los que aparezca el concepto fracción: la fracción como un megaconcepto". (Llinares Ciscar y Sánchez García, 1997, p. 54)

A partir del análisis de los artículos en los que se aborda la noción de fracción (Llinares Ciscar y Sánchez García, 1997; Brousseau, 2012; Cattaneo, Lagreca, González y Buschiazzo, 2010), Obando, 2003) podemos indicar que la enseñanza está enmarcada -en la mayoría de las ocasiones- en relación con la medida y en otras, relacionada con tasas de crecimiento como, por ejemplo, la tasa de interés. Teniendo en cuenta esto, en las siguientes actividades, proponemos tareas que conllevan el abordaje de su enseñanza a partir de nociones básicas de probabilidad. Las mismas pueden ser utilizadas como una secuencia didáctica o en forma independiente (realizando las adecuaciones necesarias en relación a las nociones previas) según el objetivo de aprendizaje que busque el docente.

Tarea 1: Estimando…
Imaginen que disponemos de las siguientes ruletas y deseamos saber en cuál de ellas hay más posibilidades de obtener el color verde, si al hacerlas girar al menos se dan dos vueltas. Escribir cómo llegaste a tu respuesta.

Figura 1. Situaciones relacionadas con ruletas

Con esta situación se pretende que los estudiantes puedan identificar sucesos con mayor y menor posibilidades de ocurrencia. Además, se espera que logren comprender que tales posibilidades no dependen del tamaño de la ruleta sino de la proporción del sector de cada color, es decir del ángulo central de cada figura.

Como puede observarse aquí no se pretende que los estudiantes trabajen con cantidades, sino que puedan asociar la ocurrencia de un suceso o de otro en relación al tamaño del ángulo central sin recurrir necesariamente a la medición.

Una finalidad secundaria, y a la vez muy importante, es dar pistas a los estudiantes de la equiprobabilidad y de contar con un elemento de representación de las posibilidades en una determinada situación para poder trabajar la simulación.[6] Algunos detalles que se desprenden al proponer este tipo que actividades.

[6] Un posible recurso para este caso es en la página de García Moreno http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/index.html en la sección Equipamiento experimental opción Ruleta múltiple, particularmente en la cuarta alternativa. Cabe aclarar que los simuladores de la página fueron utilizados al momento de la elaboración del presente trabajo, en el Anexo se brindan alternativas para algunas de las simulaciones aquí presentadas.

En primer lugar, ¿qué se entiende por equiprobabilidad? Según Whilhelmi (2004):
"…la asignación de una probabilidad a un suceso de un experimento aleatorio por la regla de Laplace se justificó por el principio de indiferencia: los casos posibles son considerados como equiprobables cuando hay un balance de evidencia a favor de cada una de las alternativas. Dicha evidencia, puede conseguirse por la repetición de un experimento en las mismas condiciones y observando la simetría de las frecuencias relativas de los casos". (p. 130)

Con esta tarea se invita a los estudiantes a observar en qué casos se puede suponer la equiprobabilidad y a su vez, comenzar a revisar las posibles relaciones entre este concepto y el concepto de equipartición. Aquí se puede solicitar que los estudiantes construyan sus propias ruletas y que muestren ambos conceptos y por qué no plantearles el siguiente interrogante, ¿existen casos donde las opciones sean equiprobables, pero no que no haya equipartición?

Tarea 2

Tarea 2 a. Identificación de sucesos y equiprobabilidad
Alexis realiza un viaje de estudios a San Carlos de Bariloche y visita el cerro Catedral. Él tiene que elegir a una de sus amigas para que lo acompañe a subir la aerosilla, ya que no permiten que asciendan más de dos personas. Sus amigas son Gisela y Helena. Observar, decidir y justificar cuál de los siguientes procedimientos es más justo para realizar la elección.

<table>
<tr>
<td>I. Colocar en una bolsa de tela las siguientes esferas, mezclarlas y sacar una.

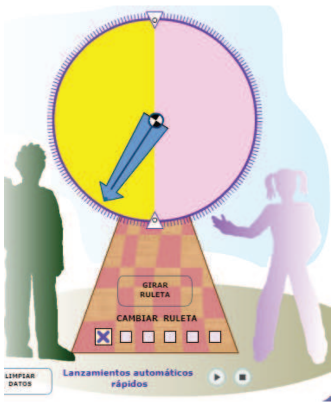
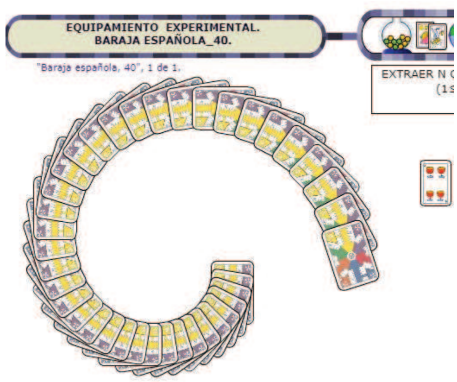
</td>
<td>II. Escribir los números del 1 al 9 en papeles de igual tamaño, colocarlos en una caja y sacar uno. Si es par, Gisela acompaña a Alexis y en caso contrario, Helena lo hará.</td>
</tr>
<tr>
<td>III. En la siguiente ruleta cada amiga elige un color, el que salga al hacer girar la ruleta, acompañará a Alexis.

</td>
<td>IV. De un mazo de naipes español (40 naipes) se extrae una carta. Si es de oro o bastos, Gisela acompaña a Alexis, en los otros casos lo hará Helena.

</td>
</tr>
</table>

Figura 2. Identificación de sucesos y equiprobabilidad

Tarea 2 b. Hacia una noción de probabilidad

En una caja, donde no se puede observar lo que hay en su interior, hay dos pelotitas de color azul y tres de color amarillo. En otra caja, hay 4 azules y 6 amarillas. El profesor le pide a sus estudiantes que saquen una pelotita, si es de color amarillo deberán responder una pregunta sobre temas de la clase anterior y si sacan de color azul contestarán en la próxima clase. Teniendo en cuenta lo anterior y que justo hoy no estudiaste, ¿de qué caja extraerías la pelotita? ¿Por qué? Teniendo en cuenta cada caja por separado, ¿cómo anotarías las posibilidades de extraer una pelotita amarilla teniendo en cuenta todas las pelotitas que hay en cada caja?

Mediante esta actividad se pretende enfrentar a los estudiantes a una situación donde deben argumentar en relación a las posibilidades de extraer una pelotita de cierto color considerando el total de pelotitas que hay en cada caja, poniendo énfasis en la forma de expresar esa información.

Es muy factible que no surja en forma espontánea la representación fraccionaria, más aún si los estudiantes no han tenido la oportunidad de trabajar con la noción de fracción y sus significados. En tal caso, es una buena oportunidad de presentar el concepto desde el significado como parte-todo. Como puede notarse se recurre al empleo de fracciones para dar cuenta de una relación entre un subconjunto de elementos y el total.

La introducción de las fracciones propuesta puede pensarse como algo arbitrario, pero detengámonos un momento a pensar: *cuando hacemos uso de una definición, ¿hasta qué punto no es arbitraria su elección?*

Resulta interesante proponernos un análisis de las definiciones que empleamos en nuestras clases y reflexionar el sentido de las mismas. Es decir, cuando realizamos una selección de los conceptos a trabajar estamos dando un sentido a nuestras explicaciones que, seguramente, tienen coherencia interna con la secuencia de actividades que hemos previsto abordar o que responden a un enfoque didáctico o lineamiento curricular particular. En esta oportunidad, lo que se desea es establecer una representación que nos permita cuantificar las posibilidades de que ocurra algo. Como se ha dicho al inicio de este trabajo, lo que se desea con la realización del mismo es brindar una aproximación a la noción de fracción desde un lugar que quizás los docentes de nivel primario y secundario estamos menos familiarizados y que permita complementar las estrategias que ya tenemos internalizadas.

Una de las posibles representaciones puede ser en forma coloquial indicando la proporción: dos de cinco en la primera urna y 4 de 10 en la segunda urna. Esta respuesta se aproxima al concepto de razón aritmética, que corresponde a otro de los significados de las fracciones. Es decir, se pueden relacionar los dos significados atendiendo a cada uno de los marcos conceptuales.

A su vez, si relacionamos el cociente entre cantidades de las pelotitas de cada color en cada urna, obtendremos otro significado: el de razón estocástica. Dicha razón no debe confundirse con el significado de razón aritmética, ya que la primera hace referencia a eventos independientes (en este caso las pelotitas de distinto color)[7] y la segunda a la proporción de las pelotitas de un color respecto al total que hay en la urna. Aquí pueden emerger nociones de probabilidad que están sujetas a los conceptos que previamente conozca el estudiante, brindando respuestas más orientadas a uno u otro significado.

[7] Un ejemplo relacionado con medidas es comparar la distancia recorrida de dos vehículos en un mismo intervalo de tiempo.

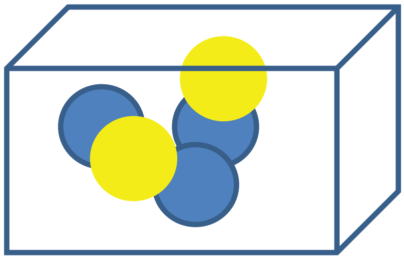


Figura 3: extracciones de pelotitas

A la vez incorporar el concepto de fracciones equivalentes. Esto se puede fortalecer mediante una actividad como la siguiente.

Tarea 2 c. Manteniendo posibilidades…
Si se tiene otra urna con 10 pelotitas amarillas, se desea mantener las posibilidades que se tiene con la primera urna, ¿cuántas pelotitas en total hay que tener entre ambos colores? Y si se tuvieran 100 pelotitas en total, ¿cuántas deberían ser del color azul?

Lo anterior nos permite trabajar el concepto de fracción equivalente desde la amplificación, recurriendo a la relación entre la cantidad de pelotitas de un color determinado y el total. Es interesante destacar que mediante esta actividad se busca que los estudiantes establezcan relaciones entre las cantidades dadas anteriormente y la nueva situación manteniendo la proporcionalidad entre los casos favorables y posibles. Aquí estamos fortaleciendo uno de los contenidos transversales a la educación primaria: la proporcionalidad. Como puede observarse se está estableciendo en cierta manera la definición de probabilidad a la manera de Laplace.

¿Cómo argumentar la fórmula de la regla de Laplace? Más allá del posicionamiento de algunos autores y docentes en que la regla es de "sentido común", se debe considerar que los estudiantes por esencia son curiosos y que debemos tener algunas herramientas conceptuales que justifiquen nuestras propuestas hasta llegar a aproximarnos a los entes primitivos.

Siguiendo la propuesta de Sosa (2018), podemos establecer una proporción entre las expresiones fraccionarias asociadas a las posibilidades de extraer una bola en particular. Esto es:

$$Probabilidad\ de\ que\ salga\ un\ pelotita\ azul\ en\ la\ caja\ 1 = \frac{2}{5}$$

$$Probabilidad\ de\ que\ salga\ un\ pelotita\ azul\ en\ la\ nueva\ caja\ = \frac{10}{?}$$

Como los estudiantes pudieron haber notado, a través de la mediación docente, la relación que existe entre los registros de la primera urna y la segunda:

$$\frac{2 \overset{\times 2}{\rightarrow}}{5 \overset{\times 2}{\rightarrow}} \frac{4}{10}$$

De allí que se puede extender este razonamiento entre la primera urna y la nueva urna.

$$\frac{2 \overset{\times\ldots}{\longrightarrow} 10}{5 \underset{}{\overset{\times\ldots}{\longrightarrow}} \ ?}$$

En este tipo de procedimientos hay cierta dificultad en relación a la identificación de los dos números a determinar, uno es de proceso y el otro es de producto[8]. Aquí consideramos que no es necesario este tipo de registro, si los estudiantes pueden hallar el cuarto proporcional de manera coloquial es una estrategia válida, siempre que se apoye en argumentos matemáticos.

Esto es un primer acercamiento para que los estudiantes puedan conjeturar que el numerador coincide con el número de casos favorables y el denominador con el número de casos posibles. Aún resta mostrar la equiprobabilidad necesaria de los resultados para que la regla se cumpla. En próximas tareas se irá completando esta noción.

Para poder responder a la consigna, en lo que se refiere a la conveniencia en la elección de una de las dos urnas, se planea trabajar en forma experimental y aproximarse a la noción de probabilidad desde el concepto de frecuencia relativa.

Tarea 3: Aproximándonos a la probabilidad

Aquí reutilizaremos las urnas de la Tarea 2 b, donde una de las unas posee 2 pelotitas azules y 3 amarillas y la segunda urna posee 4 y 6 pelotitas respectivamente.

A partir de las dos urnas que tiene cada grupo, extraer –sin mirar- una pelotita y anotar el color. Realizar lo anterior en 10, 20, 50 y 100 ocasiones. Luego, expresar la cantidad de pelotitas azules obtenidas respecto al total de extracciones. Finalmente, calcular el porcentaje de pelotitas azules obtenidas en cada caso.

A continuación, presentamos, a modo de ejemplo, la siguiente tabla para registrar la información anterior, privilegiando los registros espontáneos:

Urna 1		
Cantidad de extracciones	Cantidad de pelotitas azules obtenidas respecto al total de extracciones[9]	Porcentaje de pelotitas azules obtenidas
10		
20		
50		
100		

Figura 4: Tabla como posible respuesta de la tarea 3

La misma tabla podría trabajarse con la urna 2 para realizar comparaciones y establecer conjeturas. Pueden surgir otros tipos de registros que permitan establecer otras comparaciones que

[8] Gadino (1996) deja entrever esto en lo siguiente: *"La propiedad conmutativa (de la suma y la multiplicación)* ***se comprende mejor cuando ambos sumandos o factores cumplen el mismo rol (ley de composición interna) que cuando uno corresponde a una situación inicial y el otro a un operador****. En cambio, la existencia de una operación inversa (la sustracción para la adición, la división para la multiplicación) resulta de más fácil comprensión a partir de la operación externa; por ejemplo, para el caso de la multiplicación, del mismo modo que puedo hacer actuar a un operador para trasformar la situación inicial, ampliándola "n" veces, puede encontrar un nuevo transformador "1/n" veces que reduce al producto obtenido lo reduce "n" veces, volviéndolo a la situación inicial. P. 60"* La negrita no pertenece a la obra original.

[9] Consideramos que aquí pueden aparecer dos tipos de registro: Coloquial en el que se manifiesta el concepto de razón y el numérico mediante la fracción al estilo regla de Laplace. Esta nota hace referencia a la casilla en sí y no a la tarea, es decir, puede haber otras representaciones de los resultados obtenidos.

los datos tabulados no lo permiten. Por ejemplo, un gráfico que muestre la relación entre la cantidad de extracciones y la cantidad de pelotitas azules obtenidas en cada urna. El resumen podría ser un gráfico de barras adosadas o un pictograma (más ilustrativo para los estudiantes de menor edad). A modo de ejemplo se presenta la siguiente representación[10]:

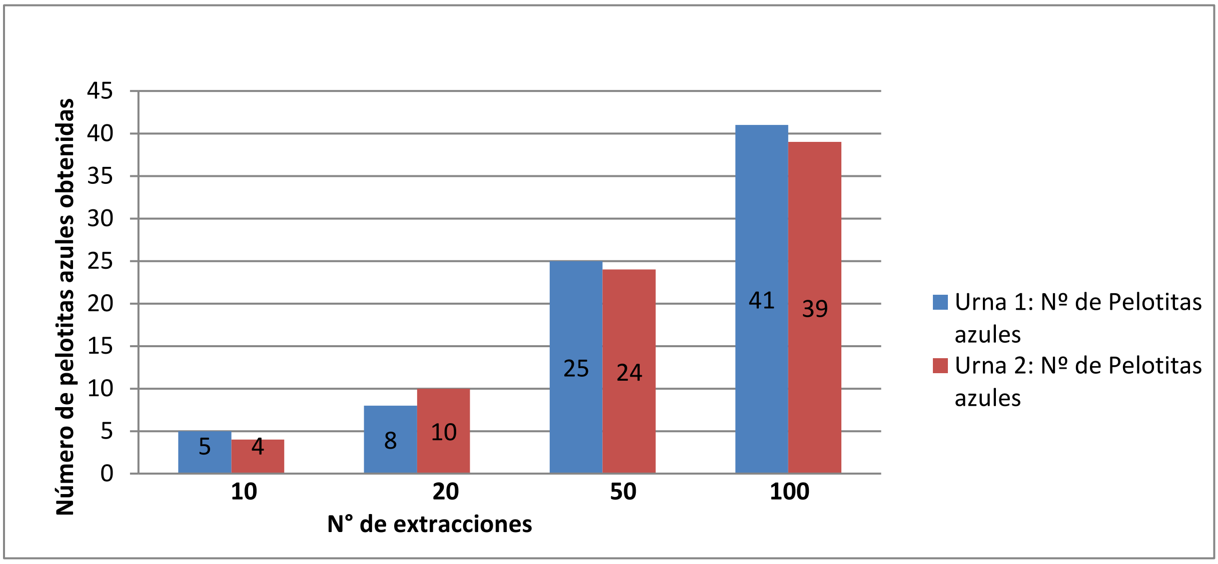


Figura 5: Posible representación de resolución de tarea 3

Con la implementación de la tabla se pone énfasis en la comparación de registros semióticos. En primer lugar, se propone la frecuencia relativa como proporción, la que se puede expresar en forma fraccionaria y, en segundo lugar, en forma porcentual. Dichos registros aportan al significado, el cual tiene una construcción singular a partir de las decisiones que tomemos los formadores. En esta línea coincidimos con los aportes de Godino y Batanero (1994):

"DEFINICION 10: Significado de un objeto OI para un sujeto p desde el punto de vista de la institución I: Es el subsistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas que son consideradas en I como adecuadas y características para resolver dichos problemas. (Godino y Batanero, 1994, p. 14)"

Aquí se puede optar por realizar las extracciones con reposición en forma manual permitiendo a los estudiantes observar la aleatoriedad de los resultados, además de brindar la oportunidad de comprender aquello de que "las extracciones se realizan manteniendo las condiciones".

Otra alternativa es incorporar la simulación. Por ejemplo, se puede emplear el simulador on line *Laboratorio básico de Azar, probabilidad y combinatoria*, en la opción de recursos, correspondiente a aquella que se refiere a la extracción de n bolas con reposición.

Acerca de la implementación del simulador:

[10] Los valores obtenidos fueron mediante simulación en el *Laboratorio básico de Azar, probabilidad y combinatoria*. Otra opción es el simulador on line http://dm.udc.es/elearning/Applets/Probabilidad_Condicionada/index.html con extracciones aleatorias que permite modificar la cantidad de pelotitas y más alá que está diseñado para probabilidades condicionadas se lo puede ir ajustando en cada extracción para que la simulación sea con reposición.

Ventaja: la extracción es automática y el registro se lo puede copiar y utilizar en cualquier documento que deseemos. A su vez, esto permite que la actividad no se vuelva tediosa y evitar posibles ofuscaciones. Además, no responde a lo solicitado en forma directa. Es decir, no brinda el porcentaje ni la frecuencia relativa, por lo tanto, los cálculos y la búsqueda de regularidades (en este caso la ley de los grandes números) queda en manos de los estudiantes.

Desventajas: puede perderse significatividad en lo que respecta al azar dando a pensar que los sorteos son manipulados[11]. Perderse algo de curiosidad en la espera de los resultados (anticiparse a resultados, los cuales podrán o no coincidir con los resultados obtenidos, permitiendo fortalecer la noción de azar). Otra situación que puede ocurrir es la confusión con la frecuencia absoluta y relativa que marca el recurso y que no coincide con el experimento propuesto[12]. Esto se debe a que el recurso permite realizar la extracción de más de una bola por vez y define los sucesos en relación a si el color de las bolas se repite ó no (Ver Figura 6).

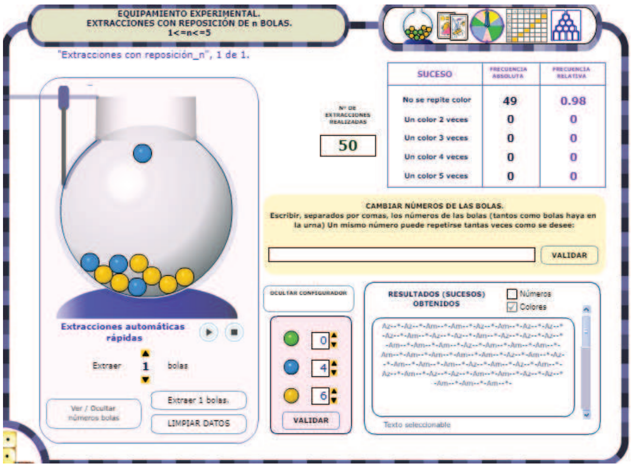


Figura 6: Simulación de extracciones de bolas de colores

Las tres tareas apuntan a tratar el concepto de probabilidad a partir del enfoque frecuentista de manera que la definición de Laplace sea otra oportunidad de acceder a dicha noción. Así contrastar lo teórico con lo empírico. Aquí es muy importante el desarrollo de la estimación. Hay que desarrollar tal competencia en los estudiantes de tal manera que ante expresiones decimales puedan asociar algunas posibles fracciones. Esto será posible a partir del cálculo de razones. La temática se irá enriqueciendo cuando los estudiantes cuenten con herramientas para la conversión de expresiones decimales a fracción. Como docentes debemos comprender que el desarrollo de dicha competencia no es sencillo, ya que estamos incursionando en un conjunto numérico donde la densidad es una complejidad a ser estudiada y cuyo aprendizaje se extiende durante toda la escolaridad primaria y secundaria.

A su vez, en la última fila de las tablas se allana el camino para relacionar las expresiones decimales a las fracciones y los porcentajes.

[11] Si bien los sorteos son seudoaleatorios, una forma de superar esta posible inquietud es comparar diferentes sorteos para poder evidenciar la diferencia entre los resultados y buscar regularidades a partir de cada sorteo.
[12] Esto se puede subsanar mediante la mediación docente y sus respectivas aclaraciones. Las ventajas que ofrece el recurso superan a sus limitaciones.

Tarea 4: Identificando sucesos, equiprobabilidad y hacia una noción integrada de la probabilidad

Se tiene una moneda de $1 y se la tira al aire de tal manera de volver a agarrarla con la mano, se observa qué salió y se anota el resultado.

Figura 7: Moneda de curso legal de un peso argentino.

a. ¿Qué se puede esperar que se observe como resultado en cada lanzamiento?
b. ¿Qué resultado esperas que salga con mayor frecuencia? ¿Por qué? Si se lanzan 200 veces la moneda y se anotan sus resultados, ¿cuántos escudos esperas que se obtengan?
c. Al arrojar la moneda, la primera vez se obtiene sol, ¿eso significa que en el segundo lanzamiento saldrá escudo?
d. ¿Cuántos soles y cuántos escudos esperas que hayan sacado tus compañeros? Contar los resultados obtenidos y comparar con tu estimación.
e. Junto al resto de la clase lanzar 100 veces la moneda, anotar los resultados resumiendo toda la información obtenida. ¿Hay alguna cuestión que se deba acordar antes de realizar el experimento? ¿Por qué? ¿Qué tipo de número ofrece mayor información en relación a la experiencia, los naturales o los fraccionarios?

Con esta tarea se pretende un trabajo personal por parte de cada estudiante de manera de darles un tiempo de internalizar las concepciones trabajadas anteriormente, como así también de evaluación del proceso. Recién al final se propone un momento de socialización y de trabajo colaborativo. Otra opción de trabajo, en lugar de los lanzamientos manuales podría ser el uso del simulador de lanzamiento de moneda del *Laboratorio básico de Azar, probabilidad y combinatoria*. A continuación, se muestra un caso particular de 100 lanzamientos.

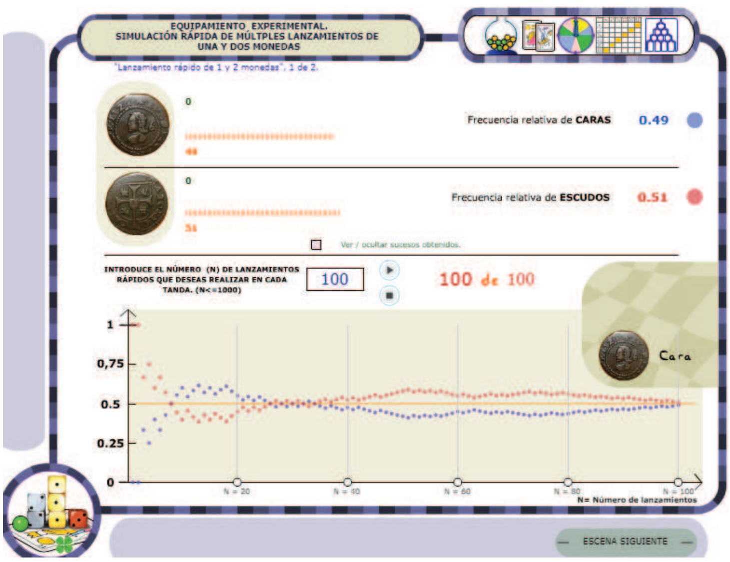


Figura 8: Simulación de lanzamiento de moneda

Ya hemos nombrado algunas de las ventajas y desventajas de la implementación de este tipo de recursos. Consideramos que en la actualidad prescindir de un recurso como un simulador reduce la posibilidad de centrarnos en la discusión del significado y sentido de ciertos saberes, ya que acota el trabajo experimental fáctico, consumiendo un recurso muy limitado que tenemos en nuestras clases: el tiempo didáctico.

Hacer uso de este tipo de simuladores nos permite comparar experimentos que insumen mucho tiempo y nos permite estudiar comportamientos, rachas y aproximarnos a la noción de probabilidad desde el enfoque frecuentista y contrastarlo con el enfoque subjetivo y el clásico, situación que se indaga en las consignas b, c y d. En tales incisos de esta tarea deseamos observar las concepciones de los estudiantes y cómo ellas influyen en los saberes matemáticos que se desea que se apropien. Es decir, queremos observar cuán fuertes son los significados personales.

Hasta el momento se han propuesto tareas que fomentan el registro e introducción de las probabilidades mediante fracciones, expresiones decimales y porcentajes. A continuación, ampliaremos las representaciones, buscando la reversibilidad de los razonamientos.

Tarea 5: Una fracción en diferentes representaciones

I) Se tiene en una bolsa con 10 pelotitas, 4 son verdes y el resto amarillas.

a. Pintar en la siguiente bolsa las pelotitas según la información brindada.

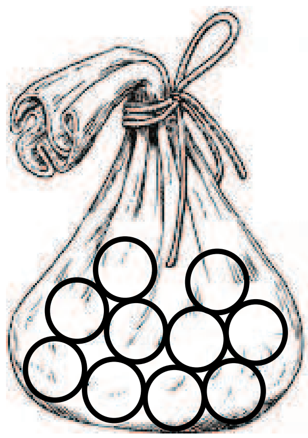


Figura 9: Manteniendo proporciones en la extracción de una bolsa

b. Si tuvieras 2 bolsas con igual contenido, ¿cuántas pelotitas de cada color tendríamos?
c. Y si tuvieras 10 bolsas con igual contenido, ¿cuántas pelotitas de cada color tendríamos?

II) Thiago suele jugar en una parte de una vereda de la plaza arrojando una goma y observa en qué color cae.

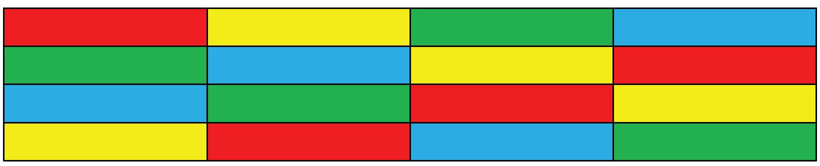


Figura 10: Jugando en la vereda

a. ¿Cuántas posibilidades de obtener celeste hay? ¿cuántas posibilidades hay en total?
b. ¿Qué fracción se le puede asociar a las posibilidades de obtener rojo respecto al total? Y, ¿los demás colores?

III) Se realiza una encuesta para saber qué sabor de helado prefieren los estudiantes de sexto año. Se logra determinar que 4 de cada 10 les gusta sabor dulce de leche.

a. Si hay 100 estudiantes, ¿A cuántos les gusta ese sabor?

b. ¿A qué porcentaje les gusta el sabor dulce de leche? ¿Cómo sería la fracción que representa el porcentaje?[13] Dicha fracción, ¿representa una razón ó una proporción estadística? Justifica tu respuesta.
c. Dibujar dos cuadrados de $10\ cm$ de lado y representar la fracción indicada en el enunciado y la fracción que le corresponde al porcentaje. ¿Cómo son las zonas pintadas? ¿Representan lo mismo?

IV) En una caja hay 20 pelotitas de color verde y amarillo. Se sabe que la probabilidad de extraer una de color verde es de $\frac{2}{5}$. ¿Cuántas pelotitas de cada color hay en la caja?

Algunas consideraciones en relación a las consignas anteriores:

- En la I a) se tiene previsto trabajar la complementariedad de los sucesos y ser un recurso para aquellos estudiantes que se estén iniciando en el conteo y las operaciones con naturales. Es decir, queremos incluir a estudiantes con adaptaciones curriculares.
- Los incisos b y c tienen por objeto incorporar la proporcionalidad desde la representación concreta con bolsas pasando por la multiplicación con números naturales, llegando a la amplificación de fracciones.
- En la consigna II enfatizamos el estudio de casos favorables y posibles, indagando las concepciones subjetivas de los estudiantes. Esto lo decimos, ya que algunos de ellos pueden suponer que un color puede tener mayores posibilidades debido a su preferencia o pálpito. Además, permite discutir acerca de la aleatoriedad de los resultados y bajo qué condiciones se podría considerar que el experimento posee tal característica.
- Respecto a la consigna III, se desea que los estudiantes comparen registros equivalentes: fracciones, fracciones equivalentes donde se puedan interpretar y leer porcentajes. Además, incorporar la representación gráfica para establecer comparaciones. A su vez, invitarlos a razonar en contexto los valores presentados: como razón y como tanto por cada 100.
- Como se ha indicado anteriormente las actividades tienen como objetivo la reversibilidad de los razonamientos empleados en las tareas precedentes. Además, se incorpora la noción de la fracción como operador (más claramente expuesta en la última actividad).

Seguidamente se proponen actividades que fomentan su abordaje.

Tarea 6: La fracción como operador

I) En una encuesta se logró determinar que el 40% de los estudiantes de una escuela viven dentro del ejido urbano. Si la escuela tiene 500 estudiantes, ¿cuántos viven en dicha zona?

En esta actividad se puede trabajar la fracción como operador introduciendo tal procedimiento mediante el cálculo de la unidad porcentual. Esto es:

$Si\ el\ 100\% \rightarrow 500\ estudiantes$

Empleando las propiedades de la proporcionalidad directa, para obtener la unidad porcentual debemos dividir por 100.

$$1\% \rightarrow 5\ estudiantes$$

Para obtener el 40%, multiplicamos ambas cantidades por 40, obteniendo:

$$40 \times 1\% \rightarrow 40 \times 5\ estudiantes$$

[13] En relación esta consigna debemos recordar que en la tarea 3 se ha abordado tal representación.

$$40\% \rightarrow 200\ estudiantes$$

Este procedimiento permite obtener la cantidad solicitada, el cual se puede utilizar en situaciones similares para colaborar en la elaboración de la conjetura que permita arribar al cálculo mediante el empleo de fracciones. Para ello, debemos recurrir al registro del procedimiento presentado sin resolver las operaciones intermedias en la expresión de la derecha. Esto no es una acción que surge de manera espontánea en los estudiantes, sino que es una forma de validación que se debe enseñar y trabajar con cierta dedicación, ya que no es habitual que dada una operación no se la resuelva. Es decir, hay que trabajar la metodología de registro de tal manera que el estudiante comprenda el sentido de su no resolución. Esto es una buena ocasión para dar inicio a la introducción de razonamientos algebraicos, o sea, brindar herramientas de generalización de la aritmética elemental.

Retomando el ejemplo anterior, podemos emplear el siguiente registro:

$$100\% \rightarrow 500\ estudiantes$$

$$\frac{100\%}{100} \rightarrow \frac{500}{100}\ estudiantes$$

$$1\% \rightarrow \frac{500}{100}\ estudiantes$$

$$40 \times 1\% \rightarrow 40 \times \frac{500}{100}\ estudiantes$$

Aquí pueden surgir varias discusiones en relación a la última expresión de la derecha y es donde el docente debe mediar. Es muy frecuente, a partir de la bibliografía que utilizamos o de reglas memotécnicas, que dicha expresión aparezca de la siguiente manera:

$$\frac{40 \times 500}{100}$$

Como se ha mencionado en párrafos anteriores, este tipo de registros no es una construcción cognitiva que se dé de una sola vez y sin contradicciones. Aquí la tarea de los docentes debe servir para articular entre los dos registros para poder llegar a la expresión anterior.

Cálculo mediante unidad porcentual	Hacia la expresión generalizada.
$100\% \rightarrow 500\ estudiantes$:100 $1\% \rightarrow 5\ estudiantes$ × 40 $40 \times 1\% \rightarrow 40 \times 5\ estudiantes$ $40\% \rightarrow 200\ estudiantes$	$100\% \rightarrow 500\ estudiantes$ $\frac{100\%}{100} \rightarrow \frac{500}{100}\ estudiantes$ $1\% \rightarrow \frac{500}{100}\ estudiantes$ $40 \times 1\% \rightarrow 40 \times \frac{500}{100}\ estudiantes$ $\frac{40 \times 500}{100}$

Como puede observarse en el cuadro precedente, hay al menos dos puntos a poner en discusión con los estudiantes. Uno es la utilización de la barra fraccionaria como operador y la segunda, es la que se indicó con el resaltado en amarillo. Aquí la discusión debe pasar por el producto en el numerador. Debemos tratarlo porque puede surgir un obstáculo epistemológico relacionado con la obtención de fracciones equivalentes mediante amplificación de fracciones. Recordemos, parafraseando a Brousseau (1986), que los *obstáculos epistemológicos* surgen de conocimientos anteriores que funcionaban y que ahora se vuelven limitados e inclusive equivocados.

En esta tarea se ha trabajado desde nociones estadísticas. A continuación, se propone una tarea desde una mirada más probabilística.

II) En la localidad de Costa de Ensueño, se pudo determinar entre sus habitantes que la probabilidad de que a una persona le guste el color rojo es de $\frac{2}{5}$. Y sabiendo que en una reunión hay 200 personas, ¿cuántas de ellas podemos esperar que tengan la preferencia por dicho color?

Según el momento del año y del desarrollo de los temas existen diversas formas de abordarse la resolución de esta actividad.

- Una manera es trabajar desde uno de los significados de las fracciones: como razón. Es decir, si 2 de cada 5 personas prefieren el color rojo se puede indagar en forma inductiva o trabajar mediante la propiedad fundamental de las proporciones.

$\frac{2}{5} = \frac{?}{200}$

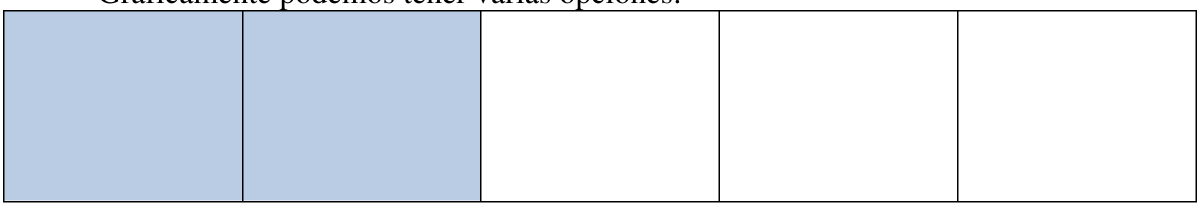
No hace falta que el estudiante conozca el concepto de ecuación, con un diálogo en el que se rescate la propiedad, consultando por el número por el cual hay que multiplicar el 5 para obtener el producto entre 2 y 200, es suficiente para abordar tal propiedad. En este caso estimularíamos la estimación mediante cálculos aproximados, se podría trabajar la factorización mediante factores primos[14].

- Aquí también podemos retomar el concepto de fracciones equivalentes:

$$\frac{2}{5}\begin{array}{c}\xrightarrow{\times\dots}\\ \xrightarrow{\times\dots}\end{array}\frac{?}{200}$$

$$\frac{2}{5}\begin{array}{c}\xrightarrow{\times 40}\\ \xrightarrow{\times 40}\end{array}\frac{?}{200} \rightarrow \frac{80}{200}$$

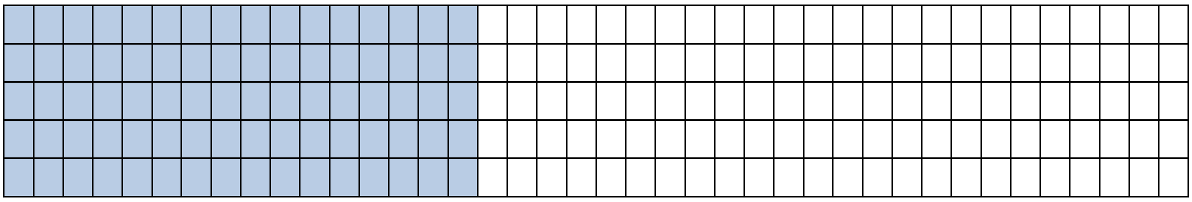
- Gráficamente podemos tener varias opciones:



Si el entero representa las 200 personas, cada porción representa 40 personas. De allí que 80 sería la cantidad de personas que prefieren dicho color.

Otra manera podrá ser la siguiente:

[14] Como $2 \times 200 = 5 \times ? \rightarrow 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 5 \times ? \rightarrow 80 = ?$



- Una alternativa que podemos incorporar a la consigna es la siguiente tabla.

Completar la siguiente tabla anotando los cálculos y procedimientos realizados.

Cantidad de personas en total	Cantidad que le gusta el color rojo
5	
10	
20	
100	
200	
a	¿?

En este caso se puede trabajar nuevamente con la propiedad fundamental de las proporciones en forma directa o forma indirecta como indicamos a continuación.

$\times 2$ $\div 2$

Cantidad de personas en total	Cantidad que le gusta el color rojo
5	2
10	$4 = \mathbf{2} \times 2$

$\times 4$ $\div 4$

Cantidad de personas en total	Cantidad que le gusta el color rojo
5	2
20	$8 = \mathbf{4} \times 2$

$\times 20$ $\div 20$

Cantidad de personas en total	Cantidad que le gusta el color rojo
5	2
100	$40 = \mathbf{20} \times 2$

$\times 40$ $\div 40$

Cantidad de personas en total	Cantidad que le gusta el color rojo
5	2
200	$80 = \mathbf{40} \times 2$

Cantidad de personas en total	Cantidad que le gusta el color rojo

$$¿\,\boldsymbol{b}? = \frac{a}{5}$$

$$c = \boldsymbol{b} \times 2$$

$$c = \frac{a}{5} \times 2$$

	5	2
$\times ¿\,\boldsymbol{b}?$	$\div ¿\,\boldsymbol{b}?$ a	$c = \boldsymbol{b} \times 2$

Una vez más estamos poniendo énfasis en la importancia de la adquisición de la reversibilidad en las operaciones y sus propiedades. Lo anterior lo podemos evidenciar en las flechas azules y rojas. Con las rojas, indicamos la relación entre los totales de personas y nos permite calcular el factor correspondiente al cuarto proporcional solicitado en la consigna.

La expresión $\frac{a}{5} \times 2$ permite introducir la fracción como operador. Una de las cuestiones que se debe tratar se vincula con la diferencia entre el último registro y la fracción brindada en la consigna. Esto es la expresión $\frac{a}{5} \times 2$ muestra una fracción que corresponde el factor de amplificación[15] en lugar de la constante de proporcionalidad. La constante de proporcionalidad aritmética es la fracción $\frac{2}{5}$ y el cálculo al que estamos habituados a ver en los libros escolares es el siguiente: $\frac{2}{5} \times a$. Si bien las expresiones generalizadas que se presentan en esta situación son diferentes, la estrategia permitiría comparar expresiones algebraicas o aritméticas (según con lo que se decida trabajar) y abordar la equivalencia de las mismas. Ahora bien, esta situación no se manifiesta si se decide resolver las operaciones en cada paso, tal y como se analizó en el cálculo de la unidad porcentual.

Retomaremos este punto cuando trabajemos la adición de fracciones y daremos un posible abordaje para la validación de la equivalencia entre las expresiones: $\frac{a}{5} \times 2 \; y \; \frac{2}{5} \times a$.

Antes de continuar hacia la tarea siguiente, es importante volver sobre las nociones estocásticas y comparar entre las nociones de la proporción aritmética y la proporción estadística. Para ello, se puede solicitar:

En este curso, ¿cuántos de ustedes prefieren el color rojo? Si tenemos en cuenta a cada uno de ustedes, ¿estamos analizando una muestra ó la población? Si la directora viene al curso y elige a uno de ustedes, ¿cuál es la probabilidad que le guste el color rojo? Comparar la probabilidad obtenida con la de la localidad de Costa de Ensueño y anotar si hubo ó no coincidencia en los valores e indicar a qué se debe.

Tarea 7: Adición de fracciones

Se lanza un dado cúbico de los que se utilizan para jugar generala y se anota el número que aparece en su parte superior.

a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 5?
b. En cada lanzamiento, ¿hay algún valor que tenga mayor posibilidad de salir? Justificar.
c. Hallar la probabilidad de obtener un número impar en el próximo lanzamiento. Hacerlo de dos maneras diferentes.

[15] O simplificación según qué flecha se observe.

Con la primera consigna se desea repasar el cálculo de la probabilidad desde el enfoque de Laplace.

Con el segundo inciso se pretende que los estudiantes analicen la equiprobabilidad de los resultados, con ello introducir la discusión de resultados simples y compuestos, tal y como se propone en el inciso siguiente. Los dos procedimientos que suponemos que se van a dar tienen que ver con[16]:

- Cálculo de la probabilidad a partir de los sucesos simples $A = \{Salga\ 1\}$, $B = \{Salga\ 3\}$ y $C = \{Salga\ 5\}$. Es decir $P(salga\ un\ número\ impar) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$.
- Cálculo de la probabilidad a partir del suceso compuesto $D = \{Salga\ 1\ o\ 3\ o\ 5\}$. En este caso $P(salga\ un\ número\ impar) = \frac{3}{6}$

La expresión $P(salga\ un\ número\ impar) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ más precisamente, la adición de las fracciones se trabaja por primera vez. Esto puede llevar a los estudiantes a realizar las consultas en cómo resolver este tipo de operaciones. Otros quizás intenten realizar procedimientos similares a los aplicados con los números naturales, o sea:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1+1+1}{6+6+6} = \frac{3}{18}$$

Lo anterior permite discutir la validez del resultado obtenido desde las definiciones de probabilidad y no únicamente desde las definiciones aritméticas.

Analizando el resultado $\frac{3}{18}$ desde la concepción de Laplace.

Como la probabilidad de un suceso es $\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$, se tiene:

$$\frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{3}{18}$$

Analizando lo casos favorables podemos decir que coincide con el numerador. Sin embargo, el denominador no coincide con el total de los casos posibles. Desde esta tarea podemos introducir la adición de fracciones con igual denominador, conjeturando que se suman lo numeradores y se conserva el denominador (ya que los casos posibles no se alteran):

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

Una propuesta alternativa a la anterior es discutir con los estudiantes lo siguiente:

Al lanzar el dado:

- ✓ ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par?
- ✓ ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número impar?

[16] Con esto no limitamos las resoluciones a éstas dos propuestas. Pueden surgir respuestas informales que podemos expresar mediante la regla de Laplace. El fin de rescatar estos procedimientos reside en la importancia de establecer algunos registros en relación a la adición de racionales con igual denominador.

✓ ¿Hay otra probabilidad que debamos tener en cuenta entre los posibles resultados del dado? ¿Por qué?
✓ ¿Cuál es la probabilidad que un número sea par e impar?
✓ ¿Cuál es la probabilidad que un número sea par o impar?
✓ Según los sucesos solicitados, ¿cómo son los valores de sus probabilidades?
✓ Consigan tres botellas plásticas, agua y junto a tu creatividad, intenta explicar cómo se relaciona la probabilidad de obtener un número par, un número impar y la probabilidad de obtener ambos tipos de números.

Con esta alternativa se desea incorporar el concepto de distribución de probabilidades, además distinguir si el espacio muestral posee eventos disyuntos. Para ello se solicitan las justificaciones de tal manera que el estudiante pueda interpretar tal situación. A su vez, se incorpora la representación de las probabilidades con botellas y agua para que los estudiantes puedan observar la uniformidad en las probabilidades. Recordemos que el objetivo es justificar por qué los denominadores no se deben sumar. Esta alternativa no trabaja con las probabilidades de los eventos simples, lo que ofrece otra estrategia de resolución.

Hay que tener en cuenta que la adición estará asociada al número de casos posibles como denominador, así que si las fracciones no son simplificadas, el estudiante enfrentará sólo casos con sumandos con igual denominador. Esta variable didáctica podrá ser incorporada mediante situaciones que vinculen diversas representaciones numéricas de las probabilidades: sea en forma coloquial, como porcentaje, como expresión decimal (mediante frecuencia relativa). Esta situación será presentada en breve, a continuación, se presenta una tarea en la que los estudiantes podrán develar algunas propiedades de la probabilidad.

Tarea 8: Observando regularidades

I) Se tiene un mazo de 40 cartas españolas. El experimento consiste en mezclarlas y colocar una de ellas boca arriba sobre la mesa.

a. ¿Cuál es la probabilidad de extraer cada uno de los palos?
b. ¿Cuál es la suma de todas las probabilidades? Expresar el resultado como fracción simplificada.

II) Se tira un dado que tiene los números del 1 al 6 y se observa el número obtenido en la parte superior.

a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada número?
b. Sumar todas las probabilidades obtenidas en el inciso anterior. Anotar el resultado como una fracción simplificada.

III) Teniendo en cuenta las dos actividades anteriores se solicita:

a. Observar los resultados de las probabilidades obtenidas en el inciso “a” de las actividades anteriores y decidir si dichos resultados son mayores ó menores que la unidad.
b. Revisar los resultados obtenidos en el inciso “b” de las actividades anteriores, analizar los sucesos e indicar si son simples ó compuestos. Finalmente, completar el siguiente texto:
c. “Al sumar las probabilidades de los sucesos……………………… el resultado es igual a …………………………………….. .”

IV) En las situaciones anteriores las probabilidades, ¿se han obtenido experimentalmente ó teóricamente? ¿Sería lo mismo ó cambia algo en las conclusiones?

A través de la tarea 8 se pretende trabajar la definición de la probabilidad desde la axiomática de Kolmogorov. Se debe tener en cuenta que la condición $P(A) \geq 0$ es una situación que se podrá institucionalizar mediante casos particulares teniendo en cuenta que dentro de la educación primaria no es el objetivo trabajar con cantidades negativas, por lo cual, la discusión deberá circunscribirse a sucesos imposibles para dar cuenta de $P(A) = 0$. En palabras de Polya (1966):

> *"Para aprender algo nuevo sobre el mundo necesitamos el razonamiento plausible, que es la única clase de razonamiento que utilizamos en nuestra vida cotidiana. El razonamiento demostrativo tiene modelos rígidos, codificados y aclarados por la lógica (formal o demostrativa), que es la teoría del razonamiento demostrativo. Los modelos del razonamiento plausible son fluidos…" (p. 13)*

Como docentes debemos realizar una revisión de nuestras prácticas pedagógicas y didácticas que tienen sus raíces en enfoques didácticos que formaron parte de la educación de nuestros formadores y que, si no las ponemos en discusión las mismas se envuelven de justificaciones tales como: *"porque sí…, más adelante lo vamos a ver…, lo vas a necesitar en la facultad…, la matemática está en todos lados…"*. Consideramos que es preciso avanzar a un proceso de argumentación donde el eje sea la validación.

Con el inciso b, se desea conjeturar el axioma $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, donde p_i es la probabilidad de cada evento simple.

Respecto a la consigna IV el objetivo es que los estudiantes reflexionen en torno a cuestiones tales como:

- Lo que posiblemente puede ocurrir y lo que ocurrió. Esto, para comprender un poco más la probabilidad desde las miradas "determinista" y aleatoria.
- Que los estudiantes busquen la realización de experimentos aleatorios como recurso para validar sus respuestas.
- Observar que al realizar un experimento, un suceso puede no ocurrir y otros, pueden ocurrir con mayor frecuencia que lo esperado según el enfoque clásico.
- Conjeturar que más allá de la distribución de las probabilidades, la suma de las mismas (en términos de frecuencias relativas) es uno. A modo de ejemplo se muestran algunas simulaciones para el caso del dado.

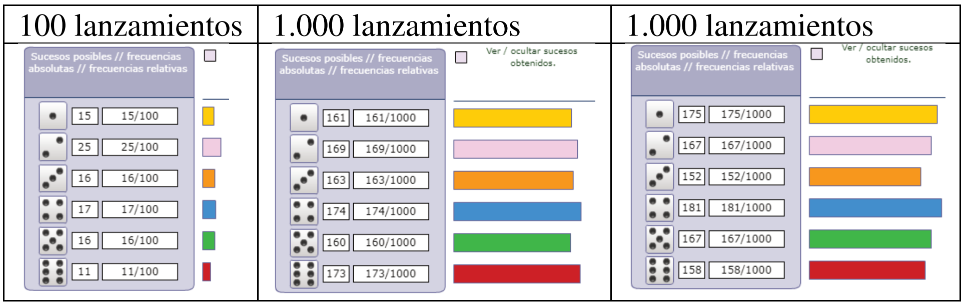


Figura 11: Registro de posibles lanzamientos de dados

Se presentan dos números diferentes de repeticiones para poder comparar que la conclusión es independiente del número de lanzamientos. Además, si el número es el mismo también se verifica que las frecuencias relativas tienden a estabilizarse alrededor del 16,6% para cada suceso. Es importante destacar que se están considerando todos los eventos o sucesos que pueden darse en el experimento considerado, como los eventos son disyuntos, la suma de todas las probabilidades es igual al entero, mostrando que todas las posibilidades que se ponen en juego están siendo consideradas.

Sería muy interesante trabajar con los estudiantes representaciones de las frecuencias relativas a partir de figuras, donde el área que corresponde a la probabilidad de cada evento permita la interpretación de la distribución (en estos casos propuestos debería tender a ser uniforme como se visualiza en las representaciones), allanando el espacio para la discusión en relación al balance de los dados, por ejemplo. Además, se puede trabajar con las representaciones gráficas como especie de tangram donde el área total sea la unidad.

Lo que no podemos dejar de remarcar es que los casos presentados son sucesos finitos numerables. Una situación a discutir con los estudiantes sería en relación al estudio de casos no numerables, como ser la vida útil de una lámpara. En estos casos hay que recurrir a otro tipo de distribuciones, situación que supera los alcances de este trabajo, ya que está dirigido a estudiantes del segundo ciclo de la educación primaria, séptimo año y los primeros años de la educación secundaria.

Como se evidencia en las tareas anteriores, la propuesta gira alrededor de un lenguaje habitual de los estudiantes sin recurrir a notación conjuntista. Lo anterior no es sinónimo de abandonar el formalismo matemático que permite comprender representaciones mundialmente reconocidas y que permiten compartir, analizar, discutir, redescubrir y crear matemática.

Tarea 9: Al complementarnos, podemos hacer la diferencia

En la elección a presidente, no se ha podido definir el presidente, ya que no reunió la cantidad de votos necesarios en primera vuelta, tal como indica la reglamentación. A su vez, en esta nueva votación no se puede votar en blanco. Una de las encuestas indica que el candidato por el oficialismo posee una intención de voto de 1 cada 3. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo candidato, y único opositor, sea votado? Explicar cómo obtuviste tu respuesta.

En esta oportunidad, se presentan sucesos complementarios y como los estudiantes han trabajado la propiedad: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, es decir:

$$P(voto\ candidato\ oficialista) + P(voto\ candidato\ opositor) = 1.$$

Una de las posibles resoluciones que podrían poner en juego los estudiantes es estimar la probabilidad solicitada de tal manera de obtener el complemento, esto es:

$$P(voto\ candidato\ oficialista) + P(voto\ candidato\ opositor) = 1$$

$$\frac{1}{3} + ? = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{?}{3} = 1 \rightarrow identificación\ del\ denominador$$

$$\frac{1}{3} + \frac{?}{3} = \frac{3}{3} \rightarrow el\ entero\ se\ expresa\ en\ forma\ fraccionaria$$

El registro anterior quizás no surja en forma espontánea, lo que sí muestra es la complejidad de razonamientos matemáticos que los niños y adolescentes deben poner en juego a la hora de resolver la actividad. Tampoco es descabellado pensar en una estrategia como la anterior, ya que, desde el primer año de la educación primaria, el aprendizaje del concepto del complemento de un número para obtener diez es uno de las competencias propuestas en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP[17]). Una vez más prima la enseñanza y el aprendizaje de la

[17] NAP: Núcleo de Aprendizajes Prioritarios, es un documento nacional que busca la integración de las distintas jurisdicciones mediante acuerdo federales.

reversibilidad de operaciones y razonamientos. Con actividades como éstas se incentiva la estimación como recurso para la resolución de problemas y habilita la discusión en relación a la intención de voto como algo probable no como algo ya dado y definitivo. Esto permitirá a los estudiantes analizar los alcances de las encuestas y los posibles sesgos que pueda haber en la comunicación de las mismas. También, permite establecer diálogos argumentativos donde los estudiantes ensayen la discusión en forma de debate, contribuyendo en cierta manera al ejercicio de la democracia.

Nuevamente, el docente es el especialista en la materia a la hora de tomar la decisión de cuál es el momento más oportuno para la incorporación de la notación de complementariedad de sucesos, como así también de realizar la institucionalización en relación a la propiedad: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. A su vez, se puede consultar a los estudiantes cómo podrían determinar la probabilidad mediante las operaciones que conocen, sin la necesidad de definir de antemano el concepto de complemento de un suceso. De esta manera, construir el concepto de diferencia a partir de nociones previas ante la ampliación del conjunto numérico que se está estudiando.

Consideramos que la incorporación de la propiedad anterior se puede introducir en el quinto año de la educación primaria, es decir, la operación $1 - \frac{1}{3}$. Como los estudiantes han estudiado la adición y con ella la ventaja de que los denominadores sean idénticos entre ambas fracciones, los docentes pueden dialogar con sus estudiantes preguntándoles acerca de las representaciones que puede tener el 1 mediante fracciones equivalentes y seleccionar de aquellas cuál es la más conveniente en este caso.

Debate necesario: mediante este procedimiento del cálculo del complemento es preciso discutir con los estudiantes qué nos indica cada fracción, compararlas, establecer una relación de orden y poner en juego la razón como significado de las fracciones. También, es conveniente poner algunos ejemplos donde las fracciones funcionen como operadores de posibles números de encuestados, de esta manera integrar algunas nociones y sobre todo dimensionar cantidades de votantes en relación a representaciones que en los medios de comunicación ponen en juego a la hora de expresar algunas informaciones[18].

El ejemplo propuesto corresponde a eventos mutuamente excluyentes. Seguidamente presentamos dos tareas que tienden a complementar el caso anterior y a integrar adición y sustracción.

Tarea 10: ¡A jugar con monedas y dados!

I) Se tira una moneda de un peso dos veces seguidas al aire y se anota el número de escudos que se obtiene cuando regresan a la mano.

a. Escribir cuáles pueden ser los resultados posibles.
b. Realizar los lanzamientos repitiendo la experiencia en 100 oportunidades. Teniendo en cuenta el número de escudos obtenidos, resumir la información obtenida suponiendo que tienen que publicarla en un diario. Explicar por qué eligieron esa manera.

II) Se tira un dado como el siguiente  y se anota el número que aparece en la parte superior. Expresar las respuestas en forma fraccionaria.

a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par?
b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número primo?

[18] No es lo mismo uno de cada tres que un 33% de posibles votantes en una pequeña localidad que en una ciudad capital. Siendo la primera, una manera más adecuada de comunicar, ya que si bien ambas muestran la misma proporción de votantes, el porcentaje no informa el total de la población

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par o primo?
d. ¿Por qué la probabilidad anterior no da 1?

Con la tarea de las monedas se pretende que los estudiantes puedan identificar los sucesos y noten que no hay equiprobabilidad en algunos de los resultados. En esta oportunidad deseamos que los estudiantes pongan en juego diferentes formas de representación, las que pueden incluir íconos, designaciones de letras, tablas, dibujos, formas coloquiales. Trabajar las diferentes representaciones nos permitirá generar mayores canales de comunicación, de esta manera se busca la sistematización de resultados, no como un requerimiento del docente sino como herramienta para hacer comprender a otros los razonamientos que cada uno pone en juego.

Dentro de las herramientas que los estudiantes pueden utilizar están las simulaciones o apps, las cuales brindan diferentes recursos a los estudiantes y docentes, siendo éstos quienes deberían darle la intencionalidad didáctica y buscar aquellos que mejor se adapten a la situación a abordar. Por ejemplo, si el objetivo es trabajar la aleatoriedad, podemos emplear algunas de las tantas aplicaciones para celulares que permiten realizar el lanzamiento de una moneda, tal es el caso de *Cara o Cruz*, simulador que brinda una atractiva interface. Otra alternativa, es empleando el asistente de voz de Google, indicar *"Cara o Cruz"* y se obtiene una simulación de una moneda ficticia. Asimismo, se podría emplear una simulación mediante Geogebra a partir de números aleatorios representando los escudos con el 1 y los soles con un 0. Para este caso sería conveniente un trabajo en los primeros años de la escuela secundaria, en el Anexo se brinda un ejemplo de ello. En este trabajo presentamos a continuación una propuesta que nos permitirá, más adelante, abordar la adición de fracciones desde la conversión de expresiones decimales obtenidas de la simulación.

Para aclarar a lo que nos referimos, la propuesta está vinculada a la simulación del lanzamiento de dos monedas mediante alguna aplicación o recurso on line. La actividad podría ser la siguiente:

Se lanzan dos monedas y se observa el número de escudos. El profesor divide al curso en dos grupos: aquellos a los que les dará un punto si al arrojar las monedas obtienen dos caras y aquellos que obtengan dos escudos. Sin embargo, si las monedas no muestran la misma figura el grupo no ganador deberá darle un punto al profesor[19].

a. ¿Es justa la propuesta del profesor? Si consideran que sí justificar, de lo contrario realizar las modificaciones que consideren necesarias para que la propuesta sea justa[20].
b. Con la ayuda del *Laboratorio básico de Azar, probabilidad y combinatoria*[21], realizar la simulación del lanzamiento de dos monedas en 400 oportunidades.
c. ¿En cuántas oportunidades se obtuvieron dos escudos?
d. Completar la siguiente tabla:

Número de escudos obtenidos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa en forma fraccionaria	Frecuencia relativa mediante expresiones decimales

[19] El juego los puntos se anotarán en papeles que funcionarán como fichas. Con el juego se busca que los estudiantes puedan razonar y posicionarse ante situaciones de inequidad de oportunidades.

[20] Entiéndase por propuesta justa que todos los participantes tienen las mismas posibilidades.

[21] . Cabe aclarar que las monedas son españolas antiguas, por allí hay que tener la prudencia de realizar la aclaración a los estudiantes antes de iniciar la actividad. El recurso está disponible en http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/index.html . Otro simulador con euros es https://www.geogebra.org/m/qjWuUAgs#material/nUZQCReV

Total de cada columna			

e. Observar el gráfico que aparece en la parte inferior de la imagen y describir qué deberíamos interpretar de dicho gráfico.
f. Para la imagen de la Figura 12, y bajo condiciones de una propuesta justa, ¿quién ha ganado?

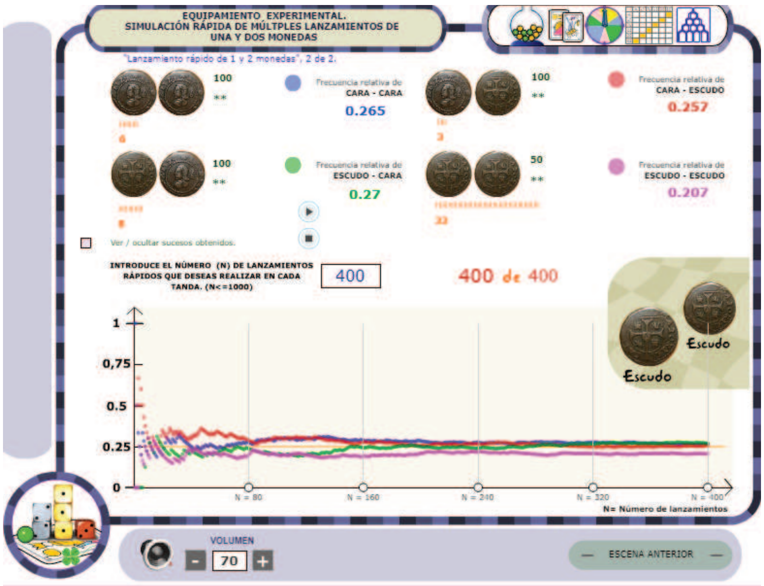


Figura 12: Simulación del lanzamiento de dos monedas

Esta actividad se introduce a los estudiantes mediante un juego incorporándolos en la discusión de la equidad de resultados, trabajando la validación de argumentos y enfrentándolos a la posibilidad de poner reglas. Esto conduce a razonamientos cada vez más formales y con una importante cuota de protagonismo en la toma de decisiones, ellos no sólo tienen que interpretar la consigna sino que además la deben estudiar para proponer condiciones. La respuesta no está en la consigna o no se da de antemano, sino que deberán producir información mediante la cual generarán argumentos.

La incorporación de la tabla tiene por objetivo realizar una lectura de la información provista con la imagen que genera la simulación, la que no se reduce a la copia literal, sino que implica cierto grado de interpretación y que si alentamos el trabajo en equipos, posiblemente genere discusiones en relación a la forma de registro que propone el simulador. Otro resultado que, si bien fue trabajado anteriormente en esta propuesta puede sorprender, es la diversidad de resultados obtenidos en cada grupo, lo que implicará la mediación docente con el objetivo de calmar ansiedades, ya que en ciertas ocasiones pueden suponer que hicieron algo mal.

Una alternativa didáctica que puede proponer el docente es brindar solamente las expresiones decimales, es decir, no brindar la frecuencia absoluta, de esa manera trabajar con la conversión de las mismas a fracción, emplear la fracción como operador para poder determinar los denominadores o como razón, ya que a través de la expresión fraccionaria no se observará el número de casos favorables. Por ejemplo: si la frecuencia relativa del evento Escudo-Cara es de 0,27, tenemos que la expresión fraccionaria podría ser $\frac{27}{100}$. Ahora bien, el número de lanzamientos ha sido 400, tenemos que $\frac{27}{100}$ de 400= $\frac{27}{100} \times 400 = 108$. También, que cada 100 lanzamientos, 27 han sido Escudo-Cara, por lo que se puede esperar que al cuadriplicarse la cantidad de lanzamientos, la cantidad de casos favorables se cuadriplique[22].

Ya en el inciso e, la imagen tiende a unificar la información a partir de la cual se generará la discusión de respuestas. Aquí, se pretende que los estudiantes puedan interpretar el concepto de probabilidad desde el enfoque frecuencialista, asociar las probabilidades y el número de lanzamientos, poder expresar en forma coloquial fracciones de uso frecuente.

En el caso del lanzamiento del dado (Tarea 10. II), la combinación de los eventos propuestos incorpora el trabajo con sucesos que no son mutuamente excluyentes. Esto los lleva a trabajar con un evento que antes no se había presentado: la intersección. Como podrá comprobarse con los estudiantes, es una actividad que no necesariamente se debe resolver mediante la expresión que hemos estudiado en los cursos de probabilidad básica: $P(A \cup B) = P(A) + (B) - (A \cap B)$. Quizás lo estudiantes realicen un conteo de casos favorables y posibles y empleen el enfoque clásico para calcular la probabilidad. Si así lo hicieran, es una oportunidad de solicitarles otra forma de expresar el valor obtenido para los sucesos indicados. Lo anterior nos conduce en cierta manera a llegar a la expresión de la probabilidad de la unión de dos eventos o sucesos. ¿En qué modifica la situación?

La definición de la $P(A \cup B)$ implica definir los operadores de conjuntos $\cup\, y\ \cap$, dicha situación nos lleva al trabajo con conjuntos. Sin embargo, si solicitamos que los estudiantes propongan el registro, esto permite que ellos controlen aquello que realmente es importante que comprendan: identificación de eventos y de elementos comunes, vinculación entre sucesos, discriminación entre eventos mutuamente excluyentes, de aquellos que no lo son. Es decir, el registro aparece como un recurso para dar a conocer los razonamientos y que permitan una comunicación con el resto de la clase y la incorporación de la nomenclatura siendo una oportunidad de comprender y comunicarse con el resto de la comunidad matemática[23].

Es decir, que la $P(A \cup B)$ puede surgir desde el lenguaje natural hacia escritos más formales. Esto podría darse de la siguiente manera:

Probabilidad de que salga un número par $= \frac{3}{6}$ →Salga 2, 4 o 6.

Probabilidad de que salga un número primo $= \frac{3}{6}$ →Salga 2, 3 o5

Probabilidad de que salga un número par o primo= $\frac{3}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6}$ →Esto implicaría un suceso seguro. Esta situación no es correcta por dos razones que deben ser discutidas con los estudiantes y a su vez, darán pie a la discusión de eventos que no son disjuntos. Una de las cuestiones a discutir es el elemento que comparten ambos sucesos y el elemento que no está incluido en ninguno de ellos (Ver Figura 13). Respecto a este último, en el inciso d está incluida la consigna en el caso de que no surja en el diálogo con la clase.

Consideramos que luego de una discusión de la actividad, los propios estudiantes podrán corregir el cálculo $\frac{3}{6} + \frac{3}{6}$ quitando la probabilidad que se repite, por ejemplo, de la siguiente manera:

[22] Otra posibilidad es el cálculo $0{,}27 \times 400$ ya sea en forma escrita o empleando la calculadora, lo anterior dependerá del año en el que se trabaja y cuáles son los objetivos que persigue el docente.

[23] Aquí no solo nos referimos a los compañeros de la clase sino de otras divisiones y escuelas, como así también poder comprender -a través de la lectura- material bibliográfico específico.

$\frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{1}{6}$. Puede surgir que algunos estudiantes decidan o indiquen que en lugar de escribir los tres términos escribamos dos con uno de ellos donde al numerador se lo disminuya en uno ($\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$). Si bien el resultado será el mismo, lo interesante es poder debatir al respecto poniendo en funcionamiento la definición de probabilidad.

En la tarea 11, que se presenta a continuación, seguimos trabajando con la introducción de la multiplicación de fracciones, retomando el concepto de la fracción como operador y ampliando su significado.

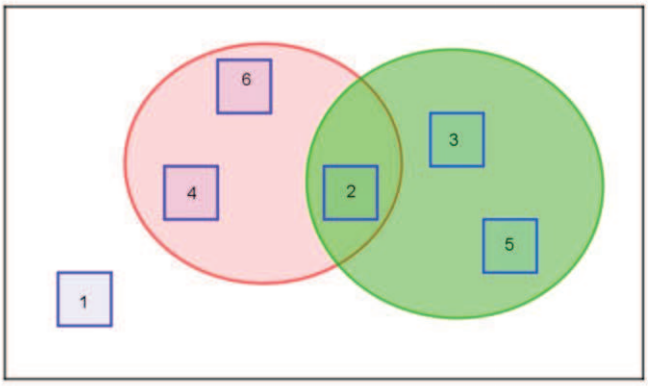


Figura 13: Diagrama que representa la Tarea 10. I

Tarea 11: La suerte está echada

Se tiran dos dados balanceados y se observan las caras superiores.

a. ¿Cuántos resultados posibles hay?
b. ¿Cuál es la probabilidad de cada resultado? ¿Son equiprobables?
c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par en cada dado? Escribir al menos dos maneras de cómo calcularla.

Esta actividad puede ser una propuesta que atienda a un amplio abanico en el estudiantado en relación a la diversidad en los ritmos de aprendizaje. Si existe un gran espectro de puntos de partida, podemos ir trabajando en forma diferenciada (Desde identificar los números, pasando por la clasificación entre pares e impares, aplicando técnicas de conteo hasta la identificación de eventos de mayor complejidad). Un grupo puede estudiar el principio fundamental de conteo (inciso a, cálculo del número de casos posibles), repasando la multiplicación con números naturales. Con otro grupo, se pueden identificar los eventos simples mediante algún tipo de representación (dibujos, coloquial, como par ordenado) y claro está, determinar la probabilidad solicitada volcando los resultados a través de diferentes procedimientos.

El contraste de los diferentes procedimientos servirá para analizar qué información brinda cada registro como así también las ventajas o desventajas que ofrecen. Por ejemplo, si los estudiantes responden los dos primeros incisos, tendrán los insumos para contestar el último requerimiento de alguna de las siguientes maneras:

- Como los sucesos son equiprobables y cada uno tiene una probabilidad de $\frac{1}{36}$ y hay 9 casos favorables tenemos:

$$\underbrace{\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}}_{9 \text{ veces } \frac{1}{36}}=\frac{9}{36}$$

9 veces $\frac{1}{36}$, lo cual podemos utilizar como una ampliación de la multiplicación de los números naturales, es decir, 9 veces $\frac{1}{36} = 9 \times \frac{1}{36} = \frac{9\times1}{36} = \frac{9}{36}$.

- Como hay 36 casos posibles y 9 son los favorables, se tiene que la probabilidad solicitada es $\frac{9}{36}$ teniendo en cuenta la visión determinista.

Mediante estos dos procedimientos, y si no ha quedado claro el concepto de la fracción como operador, lo anterior podría ser otra manera de introducir o continuar trabajando con el concepto (A esta estrategia nos referimos al final del análisis de la tarea 6).

Con la propuesta anterior estamos introduciendo la multiplicación de un número natural por una fracción mediante la adición con sumandos reiterados. Esto nos lleva a revisar el concepto de equiprobabilidad de los eventos simples, esto da un control a los estudiantes en relación a la posibilidad o imposibilidad del empleo de la regla de Laplace.

Además, con la presente tarea se da continuidad a la tarea 10.I, debido a que con ella se han incorporado experimentos con eventos donde se deben tener en cuenta dos objetos. Dicha variable didáctica hay que contemplarla porque implica controlar dos resultados en forma conjunta.

Tarea 12: Una cuestión de suerte
En una urna hay 2 pelotitas azules y 3 verdes. Se extrae una pelotita sin mirar, se anota el color obtenido y se la vuelve a colocar en la urna. Luego se saca una segunda pelotita y se anota el color.

a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una pelotita azul en la primera extracción? ¿Y en la segunda extracción? ¿cuál es la probabilidad de sacar verde en la segunda extracción?
b. Teniendo en cuenta lo que respondieron en el inciso anterior, la pelotita que se sacó la primera vez, ¿necesariamente tiene que ser la misma en la segunda extracción? ¿Cómo podríamos hacer para saberlo?
c. Teniendo en cuenta el siguiente esquema, completarlo teniendo en cuenta el número de posibilidades.

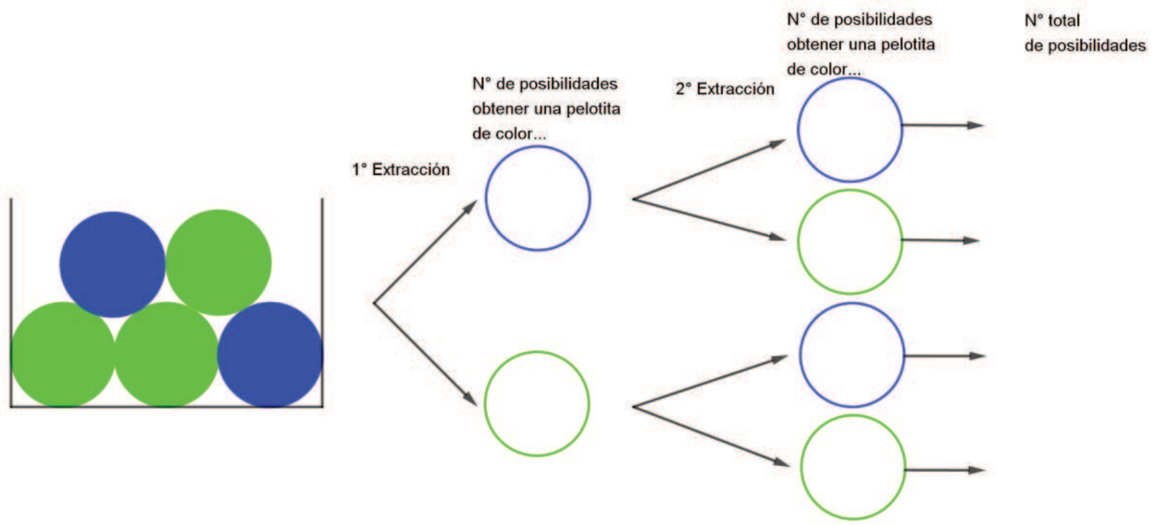


Figura 14: Esquema para completar la Tarea 12

d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una pelotita azul en la primera extracción y verde en la segunda?
e. Observar los resultados obtenidos en el inciso a y d. ¿Es posible obtener la probabilidad de obtener azul en la primera extracción y verde en la segunda a partir de las probabilidades calculadas en el inciso a?

Con esta tarea se pretende introducir el estudio de la multiplicación entre fracciones. Este tipo de propuesta implica poner en juego múltiples conocimientos trabajados con anterioridad y la respuesta no es evidente. En este sentido, nos referimos a que no es sencillo identificar los casos favorables y los posibles. Por tal motivo, se han formulado consignas que orienten a los estudiantes, brindando algunas herramientas de control de sus producciones: una de ellas es identificar si la reposición afecta o no la probabilidad en la segunda extracción y la otra –que posiblemente se pueda trabajar con anterioridad- es el diagrama de árbol como registro y técnica de conteo de sucesos simples. Como puede evidenciarse estamos llevando a nuestros estudiantes al estudio de experimentos donde la independencia de los sucesos es importante.

Como es el espíritu de todo este trabajo, la construcción de los algoritmos viene de la mano de preguntas en las tareas o por medio del debate de las producciones. Si bien con un solo caso no es recomendable generar una conjetura, es posible que a esta altura los estudiantes ya tengan incorporado este tipo de razonamientos y con ellos, la metodología de realizar validaciones sea algo que no les resulte ajeno. Por lo tanto, suponemos que comenzarán a sospechar y a preguntar si esto ocurre siempre. Dicha circunstancia allana el camino para la resolución de otras situaciones que impliquen recolectar otros casos particulares para hacer más convincente nuestra conjetura, es decir, "que tenga un grado mayor de validez", como así también detectar condiciones que deben satisfacer los eventos y experimentos para que las probabilidades se puedan calcular mediante los algoritmos propuestos.

Se podría comenzar con otros ejemplos, como puede ser el lanzamiento de una moneda dos veces, siendo menos los casos a analizar y más sencillos de representar con dibujos e inclusive con el diagrama de árbol. Ahora bien, el cálculo de las probabilidades seguirá un camino similar, pero podemos introducir algunas concepciones equivocadas[24] en nuestros estudiantes mediante este ejemplo. A continuación, ofrecemos un cuadro comparativo en que se muestran dos posibles resoluciones (una correspondiente a la Tarea 12 y la otra referida al lanzamiento de las monedas).

Extracción de pelotitas	Lanzamiento de moneda
1° extracción $A: sale\ pelotita\ azul$ $P(A) = \frac{2}{5}$	Primer lanzamiento $C: Salga\ Cara$ $P(C) = \frac{1}{2}$
2° extracción $V: sale\ pelotita\ verde$ $P(V) = \frac{3}{5}$	Segundo lanzamiento $D: Salga\ Cara$ $P(D) = \frac{1}{2}$
$P(A \cap V) = \frac{6}{25}$	$P(C \cap D) = \frac{1}{4}$

[24] Tales concepciones no se generan en forma intencionada sino que responden a supuestos que nacen desde los estudiantes a partir de interpretaciones de nuestras consignas, que en ocasiones poseen términos que los estudiantes vinculan con sus saberes previos y no tienen vinculación con los conceptos matemáticos y en otras oportunidades, realizamos suposiciones que a la hora de la resolución, los niños y adolescentes no llegan a comprender debido a que el contexto les resulta limitado o poco comprensible.

Implica determinar los 6 casos favorables y los 25 posibles	
Para obtener la probabilidad $\frac{6}{25}$ a partir de las probabilidades $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ podrán comprobar que no se trata de una adición de fracciones de igual denominador, ya que el numerador 6 no se puede obtener sumando 2 y 3. Además, el denominador tampoco cumple con la condición de mantenerse. Por razones similares la diferencia entre fracciones no se puede emplear. Como ambos números son fracciones que no corresponden a números naturales, no se aplica el significado de la fracción como operador. De allí, que la multiplicación se vuelve la operación adecuada.	Sin embargo, para obtener $\frac{1}{4}$, puede darse la concepción equivocada en la que el denominador se obtiene sumando los denominadores de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ manteniendo el numerador, algo así como un procedimiento similar a la adición de fracciones con igual denominador. Con otros ejemplos se podría poner en discusión si surge esta concepción, es decir, trabajar con no ejemplos de tal manera que la conjetura sea descartada mediante contraejemplos.

A continuación, presentamos una actividad que puede complementar lo anterior -si el procedimiento de la multiplicación no ha quedado claro o como tarea inicial- si al docente le parece más pertinente y con una discusión diferente en lo que refiere al origen de la multiplicación como operación a desarrollar.

Tarea 12.b. Ampliación

Manteniendo la consigna original: En una urna hay 2 pelotitas azules y 3 verdes. Se extrae una pelotita sin mirar, se anota el color obtenido y se la vuelve a colocar en la urna. Luego se saca una segunda pelotita y se anota el color.

a. En la primera extracción, ¿cuál es la probabilidad de obtener una pelotita azul?
b. Si se ha sacado azul en la primera pelotita, en la segunda extracción, ¿cuál es la probabilidad de obtener una pelotita verde?
c. Dibujar un cuadrado y representar horizontalmente la probabilidad de extraer una pelotita azul en la primera extracción y verticalmente, la probabilidad de extraer la pelotita verde en la segunda extracción. Pintar cada probabilidad con su color correspondiente.
d. En la representación anterior, ¿hay zonas que se sombrearon con dos colores simultáneamente? En caso que así sea, ¿cómo harías para calcular su superficie?
e. ¿Qué representa cada zona en la representación gráfica?

Como puede evidenciarse el objeto de estudio se apoya en la geometría y la medida. Si dichos marcos conceptuales han sido tratados, es una buena oportunidad para realizar una integración con la probabilidad como eje transversal.

En la Figura 14 se ilustra una posible representación que se podría construir en forma conjunta con los estudiantes.

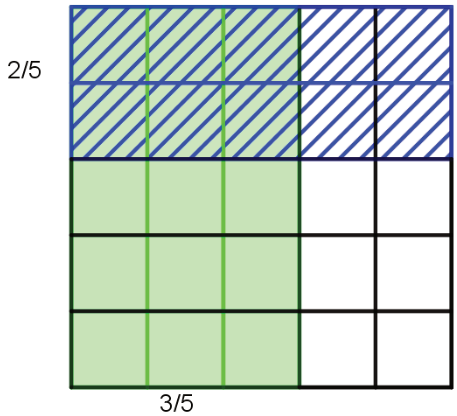


Figura 15: Posible representación de la Tarea 12

Es factible que los estudiantes hayan visto el cálculo de la superficie de figuras planas. Identificar el largo y el ancho del rectángulo en el que se mezclan los dos colores.

La situación permite establecer una relación entre las extracciones y las pelotitas mediante la representación gráfica. Horizontalmente podemos indicar a la primera extracción y la segunda, se la podría señalar en forma vertical. La intersección entre dichas direcciones y las correspondientes representaciones de las fracciones permiten identificar cuatro sectores:

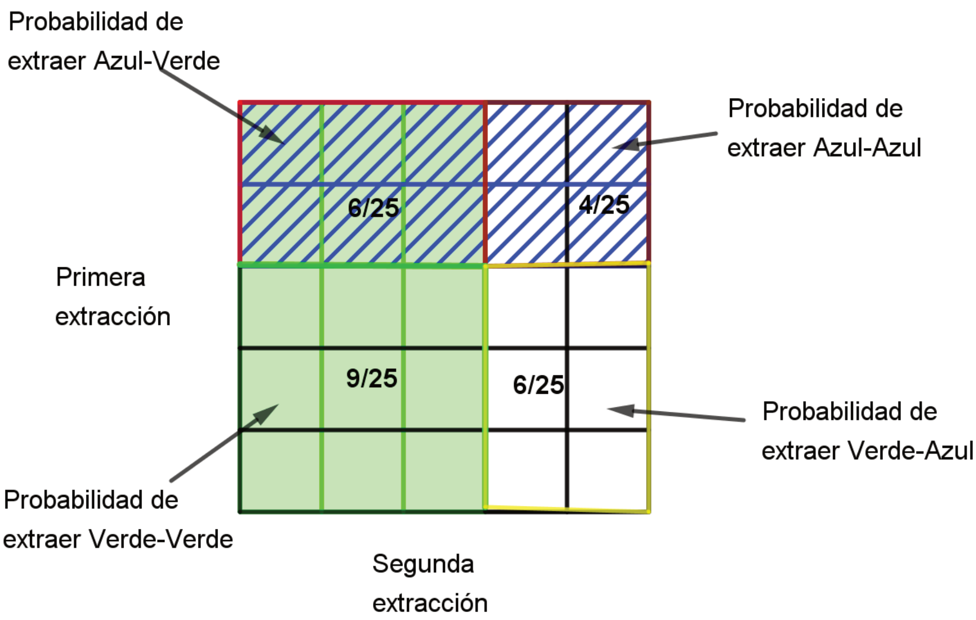


Figura 16: Análisis de extracción de dos pelotas con reposición de la Tarea 12

No podemos dejar de tener presente que este tipo de representaciones es complejo en el nivel primario si no se ha trabajado lo suficiente la representación de fracciones mediante figuras planas. Se sugiere un desarrollo más profundo en lo que respecta a la posibilidad de representar fracciones de diversas formas (orientaciones de las particiones, particiones equivalentes, unidad representada por una sola figura o por un conjunto de objetos).

La lectura de la información se asemeja a una tabla de doble entrada, cuestión que puede ser trabajada desde este recurso concreto para realizar una interpretación de los sucesos de manera conjunta.

Tarea 13: Armando duplas

En un curso hay 10 varones y 15 mujeres. Para el acto escolar se deben seleccionar dos estudiantes que lean parte de un texto alusivo.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer estudiante elegido sea varón?
b. Si la primera persona elegida fue varón, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda persona sea varón?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos estudiantes sean varones?
d. Comparar con la tarea anterior y escribir las características similares y diferentes en cada caso.

Con la presente tarea se pone en discusión la dependencia de los sucesos, ya que cobra relevancia saber si la persona elegida en la primera oportunidad corresponde a un varón o a una mujer. ¿Por qué? Dicha situación cambia nuestro número de casos posibles y los favorables también. Para que tal situación no pase desapercibida, se solicita la revisión de ambas tareas y la contrastación de las mismas. Debemos brindar la posibilidad de comparar, ya que corresponde a una competencia a adquirir, lo que permite generar aprendizajes basados en un razonamiento controlado por parte de los estudiantes.

En algunas ocasiones, algunos textos presentan este tipo de comparaciones en relación a una situación de extracción de bolas con y sin reposición. Es decir, se observa la misma condición inicial y se compara las diferencias en los experimentos. Esto permite mantener a los estudiantes dentro de una misma situación. La decisión sigue estando en manos del docente, ya que es quien sabrá qué tipo de situación es más propicia para su grupo de estudiantes. En nuestro caso, decidimos proponer esta situación de manera que los estudiantes puedan ensayar respuestas tomando como casos particulares su propio curso. Si bien se presenta una cantidad específica de estudiantes, consideramos que lo conveniente es proponer la actividad según la nómina de estudiantes, de esa manera acercar la situación a ellos.

A su vez, deseamos que surja la propiedad de la probabilidad condicionada:

$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) \rightarrow$ La expresión resaltada la consideramos como algo muy prematuro de proponer a los estudiantes de primaria y de primer año de la escuela secundaria. ¿Por qué? La similitud con la notación fraccionaria de los números racionales podría incorporar concepciones erróneas muy difíciles de modificar. Un estudiante podría llegar a pensar que debe dividir la cantidad de casos favorables del evento A por los del evento B. Sin embargo, podemos plantear estas tareas con una notación diferente y hasta más coloquial. Es decir, en lugar de emplear la notación de los eventos es preferible emplear la definición del evento (por ejemplo: El estudiante elegido es varón. Quizás sea algo engorroso escribir en cada ocasión dicho texto, pero seguramente ganaremos en interpretación de los conceptos probabilísticos y de una mejor lectura y relectura de la situación problemática.

El lector puede argüir que si definimos los conceptos matemáticos en forma axiomática y formal dichos errores no deberían aparecer. Como hemos visto a través de múltiples autores dedicados a la Didáctica de la matemática y a partir de nuestras propias prácticas docentes, es habitual que aparezcan este tipo de concepciones[25]. Dar por supuesto que lo "*que damos*" como explicación es "*aprendido tal cual*", es una de las primeras cosas que no se cumplen en nuestras aulas y que como docentes, nos movilizan a capacitarnos y formarnos. No podemos olvidar que

[25] En este punto es preciso que los docentes tomemos los recaudos para analizar dichas concepciones, para ello es necesario revisar nuestros propios marcos conceptuales. Godino (2009) se refiere del siguiente modo *"Se trata de extender la noción de proficiencia en la matemática escolar donde se incluye: comprensión conceptual, fluencia procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo, y disposición productiva". (p. 18)*

los estudiantes tienen su propio bagaje conceptual y cultural y esa variable didáctica es la que mayor atención hay que prestarle en la evaluación de proceso.

Tarea 14: Todos para uno

Completar cada uno de los siguientes enunciados:

I. Se tira un dado equilibrado y se observa la cara superior. La probabilidad de que salga un 5 es ……. . La cantidad de casos posibles son …… .

II. Helena, Ivana, Lorenzo, Gisela, Úrsula, Eliana, Renata y Olga formaron un grupo que debe exponer en una feria. Las profesoras les dijeron que elijan un expositor. Los chicos anotan sus nombres en un papel y los colocan en una bolsa que no se puede ver desde afuera. Sacan un nombre al azar. La probabilidad de que Helena salga sorteada es de ……. La cantidad de casos posibles son……. .

III. Se arrojan dos dados equilibrados y se anota lo que aparece en la cara superior. La probabilidad de obtener un 5 en el primer dado y un 2 en el segundo es de ….. . La cantidad de resultados posibles ha sido de ….. .

IV. A partir de las respuestas anteriores, multiplicar la probabilidad calculada por la cantidad de casos posibles. ¿Hay alguna regularidad en los resultados obtenidos? ¿Qué significado tiene dicho resultado en cada situación propuesta?

La presente tarea no consiste en una propuesta de alta dificultad como lo pudo ser la anterior. La misma está orientada a conceptualizar la noción de inversa de una fracción. Quizás pueda ser considerada una pérdida de tiempo presentarla de esta manera y dedicar gran parte de la clase para un concepto que se puede mencionar directamente. Más allá de ese posicionamiento, concebimos que el aprendizaje se logra si uno es capaz de establecer relaciones con otros saberes ya internalizados y comprender su funcionamiento –al menos parte de él-. Si bien la actividad se propone como algo muy guiado, la misma no tiene por objetivo un gran desequilibrio cognitivo –Piaget (1991)-, sino que tiende a generar una instancia de rutinización para la próxima tarea. Consideramos que el estudiante no puede estar permanentemente de tema en tema sin los debidos detenimientos para la autoevaluación –valioso momento personal de autonomía-, para la revisión de la propuesta pedagógica –¿habrá que corregir o cambiar ciertos aspectos de la secuencia didáctica?- Momento de la evaluación en proceso-, para validar aprendizajes –instancia de evaluaciones sumativas-.

Como el lector ya habrá notado, las fracciones inversas son del tipo $\frac{1}{a}$ donde a corresponde al número de casos posibles. Si bien presentamos un concepto en forma incompleta, recordemos que este trabajo es una herramienta complementaria a todas las estrategias que día a día ponemos en juego en nuestras aulas. Con ello queremos decir que para que el aprendizaje sea significativo, el estudiante debe contar con la mayor cantidad de alternativas que otorguen significado a los conceptos que se están estudiando, por tal razón indicamos que con esta tarea el estudiante tendrá la ocasión de incorporar una noción de fracción inversa, es decir, algo que se irá completando. A su vez, consideramos que una consigna más que los pongan ante la situación de fracciones cuyo numerador sea diferente de la unidad, es algo accesible desde lo aritmético, desde la propuesta que hicimos en esta tarea ya no sería posible (¿Por qué?).

Lo que sí podríamos hacer es generar una instancia de problematización en torno a lo aritmético. Por ejemplo, en el caso del sorteo de los nombres, la probabilidad es de un octavo (Tarea 14.II), siendo ocho los casos posibles, hemos calculado el producto entre ambos como se muestra a continuación:

$$8 \times \frac{1}{8} = \frac{8}{1} \times \frac{1}{8} = \frac{8 \times 1}{1 \times 8} = \frac{8}{8} = 1$$

En lugar de multiplicar al 8 por un octavo, ¿cómo podemos obtener el mismo resultado mediante otra operación?

En este caso es posible que los estudiantes noten que al 8 se lo puede dividir por 8.

Esta situación se puede analizar en los otros casos particulares de la tarea 14. Finalmente, se puede institucionalizar que: *si al número de casos particulares lo multiplicamos por su inverso multiplicativo, equivale a dividir dicho número de casos particulares por el inverso de la fracción del segundo factor*.

Tarea 15: Dime tus características y te diré qué figura eres

Se coloca en una caja, tarjetas de igual tamaño, con las figuras que se brindan a continuación. Se extrae una tarjeta al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un cuadrilátero?
b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un polígono convexo?
c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un cuadrilátero convexo?
d. Un compañero saca una tarjeta y te dice que obtuvo un polígono convexo, ¿cuál es la probabilidad de que sea un cuadrilátero? ¿Es posible calcularla a partir de los resultados obtenidos en los incisos anteriores?

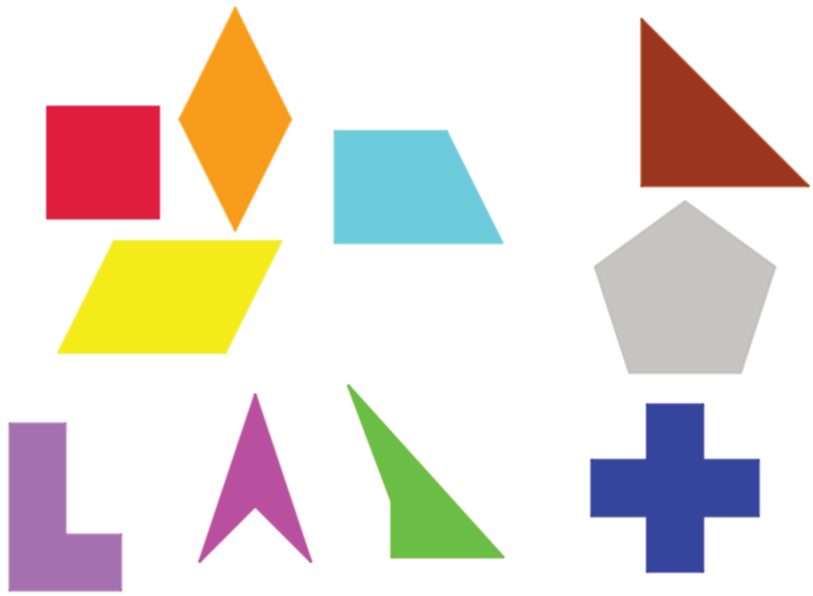


Figura 17: Polígonos que estarían en las tarjetas de la Tarea 15

En esta ocasión, se presenta una tarea en la que los estudiantes tendrán la oportunidad de articular marcos conceptuales ligados a la probabilidad y a la geometría. Es una buena oportunidad de repasar conceptos ligados a la clasificación de figuras planas. Además, se puede trabajar el concepto de intersección de una forma que el vocabulario fluya de una manera más habitual. Nos referimos a que, en lugar de indicar intersección, podemos señalar que una figura cumple dos características. Como así también en la última consigna, hablamos de la probabilidad condicionada y en lugar de indicar "cuál es la probabilidad de…**sabiendo que**…". Dicha frase podría ser un poco ficticia en el contexto de la situación, por tal motivo incluimos la consigna de tal manera que parezca una especie de adivinanza.

Una de las características que se debe discutir con los estudiantes es la independencia de los sucesos. Extraer una de las tarjetas implica varias opciones, que intentamos mostrar en la Figura 18, a partir de la cual se podrían obtener las respuestas a las consignas a, b y c, del siguiente modo:

a) $P(sale\ un\ cuadrilátero) = \frac{6}{10}$

b) $P(sale\ un\ polígono\ convexo) = \frac{6}{10}$

c) $P(sale\ un\ cuadrilátero\ convexo) = \frac{4}{10}$

Para el inciso c), los estudiantes se podrían apoyar en la representación de la Figura 18. La discusión pasaría por determinar la probabilidad de estar en la región pintada de rojo y la de estar en la región pintada de celeste. Es decir, el espacio muestral cambia de los 10 resultados originales a 6 y desde aquí se observa la cantidad de casos favorables.

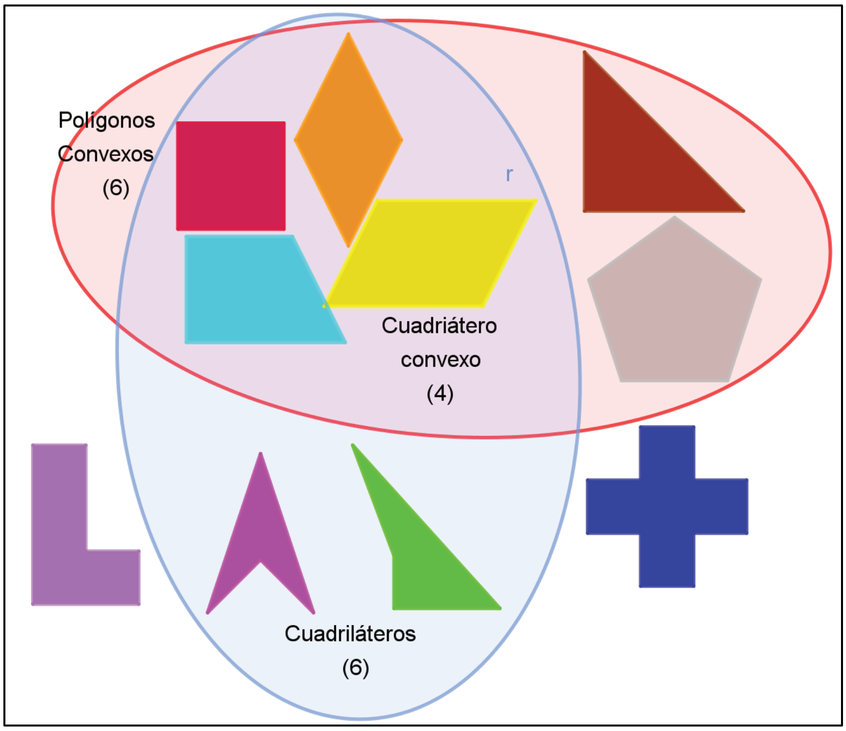


Figura 18: Representación conjuntista de la Tarea 15

Con estas consignas, los estudiantes tienen un desafío diferente respecto a los anteriores. Detenerse en el detalle del cambio del espacio muestral es una labor necesaria para que los estudiantes comprendan la condicionalidad de los resultados y podría servir como base para introducir, en otros niveles educativos, el Teorema de Bayes. Es decir, que la probabilidad solicitada es $\frac{4 \rightarrow}{6 \rightarrow} \frac{Cantidad\ de\ cuadriláteros\ que\ son\ convexos}{Cantidad\ de\ cuadriláteros}$

Aquí, si no surgiera en la clase, habría que interpelar a los estudiantes en la posibilidad de utilizar la propiedad de las probabilidades con eventos independientes:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

O propiedad de la probabilidad condicionada:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

Donde, en lugar de utilizar los símbolos de los eventos, podemos emplear su definición, tal y como se ha indicado anteriormente. En nuestro caso decidimos emplear los símbolos para generar una lectura más fluida, considerando que el lector tiene un conocimiento disciplinar diferente a los estudiantes.

$$A\text{: }Sale\ un\ polígono\ convexo$$

$$B\text{: }Sale\ un\ cuadrilátero$$

$$A \cap B = Sale\ un\ cuadrilátero\ que\ es\ convexo$$

La primera expresión quedará rápidamente descartada cuando se comprenda que los sucesos no son independientes.

La segunda expresión nos enfrenta a la situación de no contar con el factor $P(B/A)$.

Es posible que haya estudiantes que opten por la estrategia anterior en la resolución de la actividad y otros busquen la respuesta a partir de las probabilidades obtenidas en los incisos previos en busca de relaciones con tales valores (esto es independientemente de la consigna de la propia actividad, debido a que puede haber estudiantes que comiencen a buscar por sí mismos argumentos a sus razonamientos y esto se debe al tipo de estrategia metodológica que el docente propone).

Partiendo de la expresión $P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$

Tenemos $\frac{4}{10} = \frac{6}{10} \times P(Siendo\ convexo\ sea\ cuadrilátero)$

Mediante la expresión anterior se puede retomar el algoritmo de la división entera, como ampliación de tal propiedad en relación al conjunto de los racionales.

$$Dividendo = Divisor \times Cociente + Resto$$

En este caso en particular, el resto es nulo.

$$Dividendo = Divisor \times Cociente$$

Es decir, que junto a los estudiantes podemos plantear que la probabilidad solicitada es un factor desconocido y que cuando tenemos situaciones similares en la multiplicación con números naturales podemos emplear la operación inversa: la división. Siguiendo este razonamiento el valor a determinar es el cociente.

$$Dividendo \div Divisor = Cociente$$

$$\frac{4}{10} \div \frac{6}{10} = P(Siendo\ convexo\ sea\ cuadrilátero)$$

Siguiendo la metodología que hemos propuesto a lo largo del presente trabajo de comparar estrategias, resultados y procedimientos, tenemos que:

$$\frac{4}{10} \div \frac{6}{10} = P(Siendo\ convexo\ sea\ cuadrilátero)$$

$$\frac{4}{10} \div \frac{6}{10} = \frac{4}{6}$$

Aquí se presenta el desafío didáctico, ¿cómo explicar el algoritmo de la división con fracciones?

Los estudiantes podrán ensayar algunas alternativas, por ejemplo, dividir numerador con numerador y denominador con denominador, tal y como resulta con la multiplicación. Hecho que quedará rápidamente descartado a partir del contraejemplo que puede surgir del ejemplo anterior[26].

Ahora bien, en encuentros anteriores, los estudiantes tuvieron la posibilidad de trabajar la multiplicación entre fracciones y particularmente, la propiedad del inverso multiplicativo:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1.$$

Retomando la expresión $\frac{4}{10} = \frac{6}{10} \times P(Siendo\ convexo\ sea\ cuadril\acute{a}tero)$, podemos preguntar a nuestros estudiantes, ¿cuál es la fracción que deberíamos multiplicar a $\frac{6}{10}$ para obtener 1?

Aquí surgirá la fracción $\frac{10}{6}$, pero para este tipo de razonamientos los estudiantes necesitarán conocer las propiedades de la igualdad para poder despejar la probabilidad solicitada, obteniendo lo que sigue:

$$\frac{4}{10} \times \frac{10}{6} = \frac{10}{6} \times \frac{6}{10} \times P(Siendo\ convexo\ sea\ cuadril\acute{a}tero)$$

$$\frac{4}{10} \times \frac{10}{6} = 1 \times P(Siendo\ convexo\ sea\ cuadril\acute{a}tero)$$

$$\frac{4}{10} \times \frac{10}{6} = P(Siendo\ convexo\ sea\ cuadril\acute{a}tero)$$

$$\frac{4}{6} = P(Siendo\ convexo\ sea\ cuadril\acute{a}tero)$$

Una segunda alternativa, sería la siguiente (recordemos que aún no se definió la división entre racionales). Como tenemos que resolver $\frac{4}{10} \div \frac{6}{10}$podemos escribirla en forma equivalente[27]:

$$\frac{\frac{4}{10}}{\frac{6}{10}} =$$

Como a un número no se afecta si le realizamos una operación y en forma simultánea realizamos su operación inversa, podemos multiplicar la fracción numerador y la fracción denominador por un mismo número tal que se pueda simplificar sus denominadores, en este caso sería por 10.

$$\frac{\cancel{10} \times \frac{4}{\cancel{10}}}{\cancel{10} \times \frac{6}{\cancel{10}}} = \frac{4}{6}$$

También se podría decir que la fracción se ha amplificado por 10, por lo que se obtiene una fracción equivalente. Esto es complejo de comprender en los niveles educativos inferiores, para los que se sugiere estas propuestas, debido a que los estudiantes deben reconocer la dupla numerador-denominador como un único número, lo cual reviste de una dificultad, ya que hasta el

[26] Si bien la parte de los numeradores coincide, el entero que se obtiene con el cociente de los denominadores no aparece registrado.

[27] Esto dependerá de las escrituras que se hayan trabajado con anterioridad.

momento venían trabajando con números naturales cuyo guarismo es diferente tanto en sus significados como en su operatoria.

Cabe destacar que el procedimiento anterior es desarrollable si los denominadores son iguales. ¿Qué hacer cuando son distintos? Una alternativa es la búsqueda de fracciones equivalentes a la del dividendo y divisor, tal que sus denominadores sean iguales y luego, se procede de la misma manera. Lo anterior permite resolver la división, pero no permite visualizar la división como producto de la fracción dividendo por la fracción inversa del divisor. Una manera para que se evidencie este procedimiento, sería hacer lo anterior sin resolver las multiplicaciones, es decir, mostrando los factores que componen las fracciones equivalentes.

Otra alternativa que, quizás esté más al alcance de los estudiantes y que puede hallar suelo fértil en la conjetura que se pudo obtener en la tarea 14 al momento de institucionalizarla, es la siguiente. En este caso emplearemos la reversibilidad de la conjetura elaborada: "si al número de casos particulares lo multiplicamos por su inverso multiplicativo, equivale a dividir dicho número de casos particulares por el inverso de la fracción del segundo factor." O sea, en lugar de transformar la multiplicación en división haremos lo inverso.

Tenemos que resolver $\frac{4}{10} \div \frac{6}{10}$, como realizar esta división es equivalente a multiplicar la fracción $\frac{4}{10}$ por la fracción inversa de $\frac{6}{10}$. Es decir:

$$\frac{4}{10} \times \frac{10}{6}$$

$$\frac{4 \times 10}{10 \times 6}$$

Al no resolver las multiplicaciones se puede llegar al algoritmo de la división. Volvemos a insistir que este tipo de estrategia no es algo que se dé en forma natural en los estudiantes, es parte del hacer matemático que se debe enseñar. En este punto, consideramos que el trabajo desde la inducción es una metodología que los estudiantes pueden adquirir mediante una secuenciación de contenidos que capte alguno de los significados de los conceptos a tratar, mediante situaciones que involucren desafíos cognitivos graduales. También resulta de importancia, ir mostrando las limitaciones del trabajo conjetural en relación a la validación, mostrando la necesidad de incorporar la generalización y el razonamiento deductivo como otra alternativa dentro del hacer matemático.

$$\frac{4}{10} \div \frac{6}{10} = \frac{4}{10} \times \frac{10}{6} = \frac{4 \times 10}{10 \times 6}$$

Algunas consideraciones a tener en cuenta al momento de trabajar la división entre fracciones:

- Uno de los principales obstáculos que los estudiantes se encuentran en la aplicación del algoritmo, es la implementación del mismo procedimiento que en la multiplicación. Consideramos que esto ocurre cuando se brindan, en forma prematura, los procedimientos en forma de reglas: "cuando se multiplican fracciones…se multiplican derecho, cuando se dividen…se multiplican cruzado"[28]. Ambas reglas, así presentadas, carecen de anclajes

[28] En esta línea Obando (2003), indica: *"En estrategias como esta se asume que para generalizar basta con dar unos cuantos casos particulares, para luego —de manera natural— inferir la ley general. Se olvida que —como lo plantean Mason, Graham, Pimm y Gowar (1999)— el paso a la formulación de una ley general implica algo más profundo: reconocer una estructura invariante en un conjunto de situaciones particulares, la cual, una vez*

suficientes en los saberes previos rompiendo con la articulación e integración de saberes. Se le impide a los niños y adolescentes a generar una construcción de su conocimiento. Este tipo de reglas pueden ser consideradas conjeturas finales, es decir, si nosotros solo le contamos el final del chiste es muy probable que el estudiante no comprenda la gracia del mismo porque le falta el contexto, los actores y las condiciones. Al respecto Brousseau (2012) describe uno de los obstáculos epistemológicos en relación a la multiplicación con racionales:

*"Habrá también la multiplicación interna formal en los racionales. A priori es diferente de la multiplicación de los naturales. La diferencia aparece sobre todo en las propiedades utilizadas por los alumnos para "comprender" o controlar el uso de estas operaciones, por ejemplo: la multiplicación aplicación natural "agranda" siempre, no la racional. La denotaremos en consecuencia de modo diferente: a/b * c/d = a**X**c/b**X**d. (Brousseau, 2012, p. 12)"*

Si ampliamos nuestro análisis a partir de la cita anterior, los estudiantes suelen esperar que al dividir números naturales el cociente es menor que el dividendo. Entonces, esa situación lo predispone a suponer que el resultado cumpla esa propiedad. En nuestro caso, podemos orientar a los estudiantes a observar el cambio en el espacio muestral cuando se propone un condicionamiento (en este caso que el polígono sea convexo).

- Vinculado a lo anterior, en relación al producto cruzado, en nuestra experiencia docente es frecuente que los estudiantes se confundan con la propiedad fundamental de las proporciones. Esto conlleva a que ninguno de los dos conceptos pueda ser controlado por los niños y adolescentes. Al respecto Jiménez Vargas (2014), indica:

  "…otras dificultades o concepciones erróneas sobre el Azar y la Probabilidad derivan de la falta de conocimiento del significado de las fracciones y de las proporciones (razonamiento proporcional. (p. 11)"
- Nuestra propuesta presenta el caso de los denominadores iguales. Entendemos que generalizar a partir de situaciones con igual denominador no garantiza el aprendizaje del algoritmo. Volvemos a indicar que estamos interesados en brindar algunas alternativas de trabajo que nos permitan tener otra mirada del mismo saber. A su vez, el hecho de que los denominadores sean iguales tiene que ver con el contexto en el que estamos trabajando. Será parte de nuestra responsabilidad como profesores, buscar propuestas que incorporen aquellos casos donde los denominadores difieren.
- En el segundo ciclo de la educación primaria, el trabajo con material concreto y situaciones que el estudiante tenga a su alcance, se hace sumamente necesario debido a la etapa cognitiva transitada.

Vinculado con lo anterior, en el Diseño Curricular para la formación de docente de la educación primaria (2009), se plantea:

"La perspectiva de la heterogeneidad con que cada sujeto se vincula con este saber, fortalece valores de cooperación, respeto y solidaridad en tanto favorece la desarticulación de prejuicios acerca de lo difícil que resulta su aprendizaje, lo que ha dado lugar a innumerables situaciones de exclusión. Por lo tanto, la flexibilidad y la diversificación metodológica utilizada (formas de trabajo, materiales y contextos variados) es la que se vale de las diferencias como potenciales para el aprendizaje. (Ministerio de educación de la provincia de Santa fe, p. 64)

conceptualizada, debe permitir el tratamiento de cada situación particular como si se tratara de la situación general. Se ha mostrado que un proceso de generalización no se puede dar a partir de unos cuantos ejemplos, sino que requiere de múltiples situaciones…" (p. 173)

Por tal razón, hemos propuesto una actividad que permita varias representaciones: numérica, figurales y coloquial. Ahora bien, se ha dejado de lado la representación gráfica mediante la intersección de las zonas pintadas en una figura. ¿Por qué? (Aquí sugerimos que el lector haga una pausa antes de seguir con la lectura, intente darse una respuesta y trabaje con algunos casos que considere oportunos). Al incorporar este registro, agregamos más variables a la situación, no sólo se debe encontrar una fracción sino considerar qué dimensiones tendrá el entero a representar, qué fracciones conviene representar (la original o la equivalente), cómo obtener la fracción equivalente más conveniente. Todo lo anterior puede desbordar a los estudiantes y desalentarlos, quizás algún estudiante que tenga otras herramientas pueda trabajarlo (esto también es atender a la diversidad) y sea ocasión de que indague en forma autónoma para luego compartir con sus pares.

- Otra cosa a destacar es que las fracciones utilizadas no superan el entero, esto es algo a discutir con los estudiantes y trabajar la argumentación desde las nociones que emanan de la probabilidad.

Como puede observarse hay un camino recorrido y aún mucho por recorrer. Este trabajo es una invitación a continuar indagando y proponiendo otras tareas que contribuyan con los aprendizajes de los estudiantes.

A modo de cierre, presentamos dos tablas en las que se resumen los principales conceptos abordados (según nuestro criterio) en cada una de las tareas. En la segunda tabla, se proponen las relaciones que pueden establecerse entre conceptos y acciones que surgen en cada tarea. Esperamos que dichas tablas sirvan de guía para el lector, no es la única forma de establecer relaciones e invitamos que cada uno pueda elaborar la propia.

Tabla de conceptos abordados en cada una de las tareas propuestas

Tarea	Conceptos abordados								
	Fracción	Razón	Proporción	Enfoque Clásico	Enfoque Frecuencial	Distribución	Dependencia de eventos	Variabilidad	Datos
1			x					x	x
2	x	x	x	x		x		x	x
3	x		x	x	x	x		x	x
4	x	x	x	x	x	x		x	x
5	x	x	x	x					
6	x		x	x	x				x
7	x			x					x
8	x			x		x		x	x
9	x	x	x	x					x
10	x	x	x	x	x	x	x	x	x
11	x			x					x
12	x	x		x			x	x	x
13	x	x		x			x		x
14	x			x					x
15	x			x			x		x

Fuente: Elaboración propia

Tarea	Conceptos y acciones que pueden relacionarse en cada tarea								
	Fracción	Razón	Proporción	Enfoque Clásico	Enfoque Frecuencial	Distribución	Dependencia de eventos	Variabilidad	Datos
1			Comparación de sectores angulares					Visualización de condiciones	Sectores angulares y tamaños de ruletas
2	Escritura como representación. Amplificación de fracciones	Como comparador	Relación entre cantidades	Equiprobabilidad		Observación de posibles resultados de extracciones		En los resultados	Múltiples contextos para identificar sucesos
3	Para expresar probabilidades. Como porcentaje		Relación entre cantidades	Definición casos favorables y posibles	Experimentación observación de regularidades	Comparación de resultados, observación de rachas		El azar dentro de la experimentación	Extracciones con reposición para mantener las condiciones de la experiencia
4	Como probabilidad. Amplificación de fracciones	Como comparación de dos estados	Como relación entre cantidades. Frecuencia relativa	Como preconcepción	La probabilidad como aproximación de la frecuencia relativa	Comparación de probabilidad y número de lanzamientos de la moneda		Como parte del proceso de experimentación	Obtención e interpretación de situaciones futuras
5	Como probabilidad. Eventos complementarios. Representaciones	Como comparación de dos estados	Proporcionalidad. Porcentaje	Equiprobabilidad y equipartición					
6	Como operador. Porcentaje. Representaciones gráficas		Proporcionalidad	Equiprobabilidad y equipartición	Extensión de conclusiones sin la realización de experiencia				Para operar sobre las cantidades en relación a las probabilidades
7	Como número. Adición			Equipartición					El contexto permite establecer relaciones con cada parte de la fracción
8	Como número. Adición			Equiprobabilidad. Axiomas de Kolmogorov		De probabilidades		En los para la misma cantidad de lanzamientos de dados	Comparación de resultados para los mismos eventos
9	Sustracción. Eventos complementarios	Relación entre votantes de un candidato y electores	Comparación de sentidos en relación a la población	Mirada clásica					Lectura de la información para establecer conclusiones
10	Diferentes representaciones numéricas. Adición y sustracción	Relación entre cantidades	Equivalencia entre fracciones y situaciones. Proporcionalidad	Para establecer probabilidades	Simulación de lanzamiento. Observación de regularidades	Análisis de eventos	Intersección de eventos	Estudios de tendencias mediante simulación	Identificación de eventos

11	Como operador			Equiprobabilidad					Identificación de eventos simples
12	Multiplicación	Para expresar probabilidades		Como posible argumento			Eventos independientes	De resultados según las extracciones. Diagrama de árbol	Identificación de eventos
13	Multiplicación	Para expresar probabilidades		Para expresar probabilidades			Eventos dependientes		Identificación de eventos
14	Inverso multiplicativo			Equiprobabilidad. Fracción como operador					Observación de casos particulares para elaborar conjeturas
15	División			Para expresar probabilidades			Eventos dependientes		Articulación los conceptos de Geometría

Reflexiones finales

A partir de la realización de este trabajo me encontré con una actividad poco usual, que consiste en escribir sistemáticamente una propuesta didáctica. Más allá de la exigencia propia de una formación de posgrado, el desafío es con uno mismo, al enfrentarse a aquellas temáticas que ofrecen ciertas dificultades a los estudiantes y a nosotros mismos como docentes.

Considero muy valioso y necesario no sólo realizar un listado de actividades con una cierta secuenciación, sino establecer conexiones entre las situaciones-problemas que uno elabora o adapta con las concepciones previas de nuestros estudiantes, nuestras matrices de aprendizaje y como todo eso se conjuga en una secuencia didáctica que contemple lo anterior y las motivaciones de nuestros estudiantes. Nuestra tarea no se reduce a transmitir información, sino a provocar en nuestros estudiantes una curiosidad como un método de estudio, que le posibilite la adopción de posturas en relación a las problemáticas que le toque enfrentar.

Por lo dicho anteriormente, he tomado a las nociones estocásticas como un recurso para la enseñanza de las operaciones con fracciones. Partir de significados que en la enseñanza primaria y secundaria no son habituales, pero que tienen un gran auge en nuestra cotidianeidad. Cabe aclarar que no me refiero metafóricamente como indican algunos libros en relación a que su contenido es "*para la vida cotidiana*". Estoy convencido que la estadística y la probabilidad nos atraviesa como sociedad y necesitamos estar formados adecuadamente para ejercer nuestra ciudadanía de la mejor manera posible. Hoy en día nos enfrentamos a un sinnúmero de fuentes y bases de datos, pero sin saber cómo tratar, leer, interpretar o resumir dicha información, tal tarea se termina delegando y podemos ser víctimas de opiniones sesgadas a partir de nuestro desconocimiento.

La propuesta intenta brindar algunos elementos teóricos, contextualizarlos al alcance de las estructuras cognitivas de los estudiantes, con ella establecer algún tipo de germen a través del cual la lectura de la información no sea ingenua.

Se ha logrado que la secuencia de problemas sean eso, una ocasión para que nuestros estudiantes ensayen posibles respuestas, compartan producciones, las pongan en consideración de otros, evaluar otras producciones y en cierta manera, establecer un debate a través del diálogo.

Como toda propuesta tiene sus alcances y limitaciones. En cuanto a los alcances, considero que permite abordar el concepto de fracción, razón, fracciones inversas, algunas operaciones con racionales, propiedades de las probabilidades, como así también el trabajo con eventos independientes y dependientes. Incorporar todos esos conceptos y articularlos con los significados de las fracciones tanto desde la mirada aritmética como estocástica no ha sido una tarea simple, pero el estudio, la lectura y relectura de los materiales ha permitido comprender la complejidad de la enseñanza de la estadística y la probabilidad y de la construcción del sentido de los conceptos intervinientes. Recordemos que la propuesta está pensada para estudiantes de educación primaria y de los primeros años de educación secundaria. Posee una graduación que contempla las herramientas conceptuales que pueden contar los estudiantes en cada año.

Dentro de las limitaciones, es posible indicar que, debido al contexto estocástico seleccionado, las fracciones no superan el entero, lo que puede conllevar a obstáculos epistemológicos si no se realiza una aplicación de su enseñanza en otros marcos de la matemática. Esta es una de las razones por lo que indiqué que la propuesta no viene a suplantar nada sino a complementar. Asimismo, ofrece la oportunidad de superar un obstáculo muy frecuente relacionado con el producto entre dos números, el que siempre se espera que sea mayor o igual que cualquiera de los factores (Brousseau, 2012), a raíz de las concepciones que emanan del trabajo con los números naturales.

También, este trabajo me ha permitido comprender que la elaboración de tareas estocásticas para el desarrollo de operaciones con racionales no es algo sencillo. En cada oportunidad, lo aritmético se presenta como emergente y uno tiende inconscientemente a apoyarse en ese marco, tal vez por mayor conocimiento del mismo o por buscar una cierta seguridad ante aspectos que se están incorporando. La estadística y la probabilidad poseen una didáctica propia donde lo aleatorio, el azar, la definición de eventos y los modelos que acompañan sus descripciones difieren en gran medida de los marcos aritméticos y funcionales. De allí que el desafío futuro es continuar la construcción de tareas o la reformulación de la que se presentan en este trabajo en pos de incorporar más elementos estocásticos. ¿Por qué? Considero que la incorporación de tareas que tengan sus raíces en las nociones estocásticas permite a los estudiantes describir fenómenos que desde otros marcos matemáticos no se puede hacer, por ejemplo, medir la incertidumbre, interpretar situaciones de juego justo, interpretar predicciones asociadas al clima, a lo económico, estimaciones electorales, precisión en la medida, entre otros.

Finalmente, puedo indicar que el principal desafío considero haberlo superado. Comencé a incursionar en el estudio de una matemática diferente más cercana a la vida cotidiana. Me enfrenté a mis concepciones estocásticas y las puse en discusión y revisión. Ahora sólo veo caminos de articulación entre las diferentes herramientas matemáticas y el inicio de un proceso de sistematización de experiencias para la revisión de conceptos, concepciones, estrategias y la propia práctica docente.

Referencias bibliográficas

Agnelli, H. (2009). Relevancia de la Enseñanza de la Probabilidad. *Ciencias Económicas, 2(11), 23-33*. https://doi.org/10.14409/ce.v2i11.1139

Batanero, C. (2005) Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 8*, núm. 3, noviembre, 2005, pp. 247-263. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. México.

Batanero, C. y Díaz C. (2011). *Estadística con proyectos*. Facultad de Ciencias de la Educación. Granada. España.

Batanero, C. y Godino, J. C. (1994) *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 14, nº 3, pp. 325-355.*

Brousseau, G. (2012). *Problemas de didáctica de los decimales***.** Universidad Nacional de Córdoba. Argentina.

Cattaneo, L., Lagreca, N., González, M. I., y Buschiazzo, N. (2010). *Didáctica de la Matemática: Enseñar Matemática*. Homosapiens Ediciones. Argentina.

Cortina, J.L., Zúñiga, C. y Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*, vol. 25, 2, pp. 7-29.

Gadino, A. (1996). *Las operaciones aritméticas, los niños y la escuela*. Editorial Magisterio del Río de la Plata. Argentina.

García Moreno, J. (2020) *Laboratorio básico de azar, probabilidad y combinatoria*. http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/index.html

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques 22, 2-3.

Godino, J. (2009) Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, N. 20, 13-31.

Godino, J. (2013) Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. Universidad de Granda. España. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/Godino_2013_Dise%F1o_tareas.pdf

SaJiménez Vargas, J. (2014) *Diseño y Planificación de la noción de Azar y Probabilidad en Educación Primaria*. (Grado en Educación Primaria) Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Cádiz. España.

Llinares Ciscar, S y Sánchez García, M. V. (1997) *Fracciones: La relación parte-todo*. Editorial Síntesis. Primera reimpresión. España.

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (2009) *Diseño Curricular para la Educación Primaria*. Santa Fe. Argentina.

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (2014) *Diseño Curricular Educación Secundaria Ciclo Básico*. Santa Fe. Argentina.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA, V. 3, n° 2, 157-182*. Recuperado el 10 de noviembre de 2019 de: http://funes.uniandes.edu.co/1521/1/99_Obando2003La_RevEMA.pdf

Olesker, L y Tauber, L. (2014). Significado dado a los fenómenos aleatorios en el contexto de la enseñanza media uruguaya. En B. Iaffei y K. Temperini (eds.) *Actas de las V Jornadas de Educación Matemática y II Jornadas de Investigación en Educación Matemática. Recuperado el 10 de noviembre de:* http://www.fhuc.unl.edu.ar/materiales_congresos/CD_matematica%202014/pdf/Eje%207_EDUC_ESTAD/ponencia%2046_Olesker_Tauber

Piaget, J. (1991). *Seis estudios de psicología*. Editorial Labor S. A. España.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Ed. Tecnos. Madrid.

Sadovsky, P. y Sessa, C. (2004) Para estar seguros. *La educación en nuestras manos, n° 71*, mayo de 2004.

Seda, J. (2020) *Definición de Probabilidad. Propiedades*. Thales Cica. https://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/28/3.html

Sosa, J. J., (2018) *La probabilidad como lugar de encuentro de razones, fracciones y decimales. Un estudio didáctico en primer grado de nivel secundaria*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV). México.

Tauber, L. (2018) *El problema del sentido de la estadística y la probabilidad*. Especialización en Didáctica de la matemática. Universidad Nacional del Litoral. Argentina.

Valero, P. (2002) Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la democracia. *Quadrante, Vol. 11, Nº 1*.

Whilhelmi, M. (2004). Combinatoria y probabilidad. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España.

Anexo

Tarea 1: Simulación de ruleta

Otra opción es utilizar la App “Ruleta de decisiones” https://play.google.com/store/apps/details?id=es.treebit.decisionroulette&hl=es_AR&gl=US

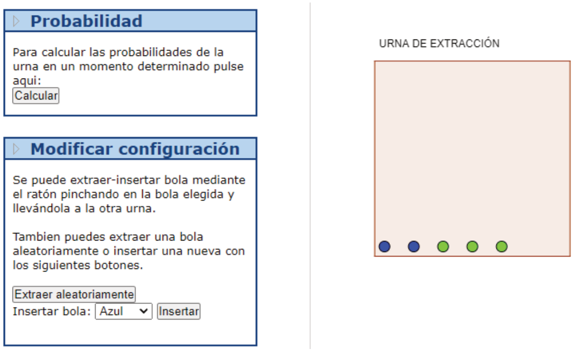
A partir de las opciones que brinda la aplicación se pueden seleccionar los colores de las opciones de las ruletas, repitiendo uno o más de los colores se modifica el sector angular tal como se muestra a continuación:

Tarea 3: Aproximándonos a la probabilidad

Extracción de pelotitas de una urna

http://dm.udc.es/elearning/Applets/Probabilidad_Condicionada/index.html

Última fecha de acceso al recurso: 10/10/21



Tarea 8: Observando regularidades

Enlace para lanzamiento de dado, obtención de frecuencia relativa y estudio de la Ley de los grandes números

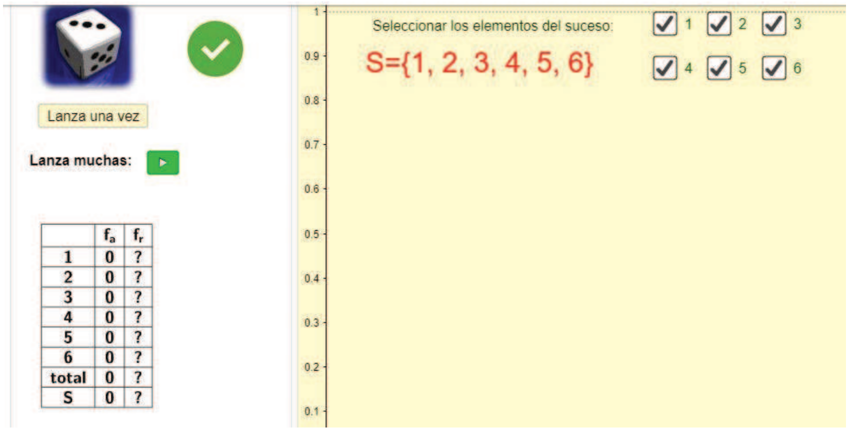
https://www.geogebra.org/m/qjWuUAgs#material/ugsN4ERy

Autor: Manuel Sada

Tema: Números. Probabilidad.

Título: Lanzamiento de dados. Ley de los grandes números.

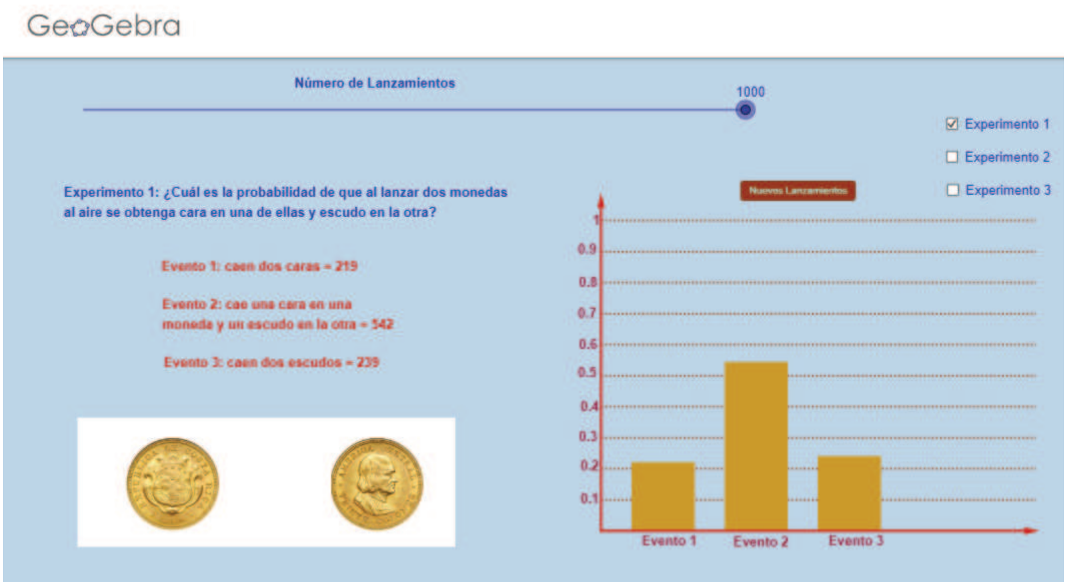
Última fecha de acceso al recurso: 9/10/21



Tarea 10: Simulación del lanzamiento de dos monedas mediante Geogebra

Dentro de los recursos del programa GeoGebra, existe esta opción con tres experimentos. En particular nos interesa el experimento 1 (Ver on line https://www.geogebra.org/m/w858XEkw).

A continuación, se muestra una imagen de la simulación con 1000 lanzamientos, hay que tener en cuenta que los eventos están definidos de igual manera que lo propusimos en la Tarea 10, pero realiza la representación en forma directa. O sea, a diferencia del *Laboratorio básico de azar, probabilidad y combinatoria*, el estudiante no debe sumar las frecuencias absolutas de los lanzamientos con diferentes resultados.



Autor: Minor Rojas García

Tema: Probabilidad

Título: Lanzamiento de dos monedas (simulación)

Última fecha de acceso al recurso: 11/10/21