

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL



DOCTORADO EN INGENIERÍA

Diseño de Controladores Predictivos con Objetivos Económicos Robustos

Agustina D' Jorge

FICH

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HIDRICAS

INTEC

INSTITUTO DE DESARROLLO TECNOLÓGICO PARA LA INDUSTRIA QUÍMICA

CIMEC

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DE MÉTODOS COMPUTACIONALES

sinc(i)

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN SEÑALES, SISTEMAS E INTELIGENCIA COMPUTACIONAL

Doctorado en Ingeniería
Mención Inteligencia Computacional Señales y Sistemas

Título de la obra:

Diseño de Controladores Predictivos con Objetivos Económicos Robustos

Autora: Ing. Agustina D' Jorge

Lugar: Santa Fe, Argentina

Palabras clave: Control Predictivo basado en Modelo (MPC), Optimización Económica, Control Robusto, Control Estocástico.



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

DISEÑO DE CONTROLADORES PREDICTIVOS CON OBJETIVOS ECONÓMICOS ROBUSTOS.

Agustina D' Jorge

Tesis remitida al Comité Académico del Doctorado

como parte de los requisitos para la obtención

del grado de

DOCTOR EN INGENIERÍA

Mención Inteligencia Computacional Señales y Sistemas

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

2019



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Centro de Investigación de Métodos Computacionales

Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional

DISEÑO DE CONTROLADORES PREDICTIVOS CON OBJETIVOS ECONÓMICOS ROBUSTOS.

Agustina D' Jorge

Lugar de trabajo:

INTEC (CONICET-UNL)

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Universidad Nacional del Litoral

Director:

Dr. Alejandro H., González (CONICET-INTEC / Universidad Nacional del Litoral)

Co-director:

Dr. Antonio, Ferramosca (CONICET / Universidad Tecnológica Nacional, Regional Reconquista)

Jurado evaluador:

Dr. David Zumoffen (CONICET-CIFASIS / Universidad Nacional de Rosario)

Dr. Diego Feroldi (CONICET-CIFASIS / Universidad Nacional de Rosario)

Dr. Jorge Vega (CONICET-INTEC / Universidad Tecnológica Nacional, Regional Santa Fe)

Dr. José Luis Figueroa (CONICET-IIIIE / Universidad Nacional del Sur)

2019



ACTA DE EVALUACIÓN DE TESIS DE DOCTORADO

En la sede de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral, a los veintidós días del mes de marzo del año dos mil diecinueve, se reúnen los miembros del Jurado designado para la evaluación de la Tesis de Doctorado en Ingeniería titulada *"Diseño de controladores predictivos con objetivos económicos robustos"*, desarrollada por la Ing. Agustina D'JORGE, DNI N° 34.563.682. Ellos son: Dr. Diego Feroldi, Dr. José Luis Figueroa, Dr. David Zumoffen y Dr. Jorge Vega.

Luego de escuchar la Defensa Pública y de evaluar la Tesis, el Jurado resuelve: *APROBAR LA TESIS DE DOCTORADO CON LA MÁXIMA CALIFICACIÓN 10 (SOBRESALIENTE). FUNDAMENTAMOS NUESTRA DECISIÓN EN LA DESTACADA PROFUNDIDAD TEÓRICA EXPUESTA EN LA TESIS Y EN LO BRILLANTE EXPOSICIÓN DE DEFENSA ORAL EFECTUADA POR LA TESISista.*

Sin más, se da por finalizado el Acto Académico con la firma de los miembros del Jurado al pie de la presente. -----

[Signature]
.....

Dr. Diego Feroldi

[Signature]
.....

Dr. David Zumoffen

[Signature]
.....
DR. JOSÉ LUIS MACOR
SECRETARIO DE POSGRADO
Facultad de Ingeniería y Cs. Hídricas

Dr. José Luis Figueroa (x)

[Signature]
.....

Dr. Jorge Vega

() El Dr. José Luis Figueroa participó por videoconferencia*

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Secretaría de Posgrado

Ciudad Universitaria
C.C. 217
Ruta Nacional Nº 168 - Km. 472,4
(3000) Santa Fe
Tel: (54) (0342) 4575 229
Fax: (54) (0342) 4575 224
E-mail: posgrado@fich.unl.edu.ar

[Signature]
DR. JOSÉ LUIS MACOR
SECRETARIO DE POSGRADO
Facultad de Ingeniería y Cs. Hídricas



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

Santa Fe, 22 de Marzo de 2019.

Como miembros del Jurado Evaluador de la Tesis de Doctorado en Ingeniería titulada "*Diseño de controladores predictivos con objetivos económicos robustos*", desarrollada por la Ing. Agustina D'JORGE, en el marco de la Mención "Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas", certificamos que hemos evaluado la Tesis y recomendamos que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor en Ingeniería.

La aprobación final de esta disertación estará condicionada a la presentación de dos copias encuadernadas de la versión final de la Tesis ante el Comité Académico del Doctorado en Ingeniería.

.....
Dr. Diego Feroldi

.....
Dr. David Zumoffen

.....
Dr. José Luis Figueroa (x)

.....
Dr. Jorge Vega

Santa Fe, 22 de Marzo de 2019

Certifico haber leído la Tesis, preparada bajo mi dirección en el marco de la Mención "Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas" y recomiendo que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor en Ingeniería.

.....
Dr. Antonio Ferramosca
Codirector de Tesis

.....
Dr. Alejandro González
Director de Tesis

(*) EL Dr José Luis Figueroa participó por videoconferencia

Universidad Nacional del
Litoral
Facultad de Ingeniería y
Ciencias Hídricas

Secretaría de Posgrado

Ciudad Universitaria
C.C. 217
Ruta Nacional Nº 168 - Km. 472,4
(3000) Santa Fe
Tel: (54) (0342) 4575 229
Fax: (54) (0342) 4575 224
E-mail: posgrado@fich.unl.edu.ar

Dr. JOSÉ LUIS MACOR
SECRETARIO DE POSGRADO
Facultad de Ingeniería y Cs. Hídricas

DECLARACIÓN DE AUTOR

Esta Tesis ha sido remitida como parte de los requisitos para la obtención del grado académico Doctorado en Ingeniería ante la Universidad Nacional del Litoral y ha sido depositada en la Biblioteca de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas para que esté a disposición de sus lectores bajo las condiciones estipuladas por el reglamento de la mencionada Biblioteca.

Citaciones breves de esta Tesis son permitidas sin la necesidad de un permiso especial, en la suposición de que la fuente sea correctamente citada. Solicitudes de permiso para la citación extendida o para la reproducción parcial o total de ese manuscrito serán concebidos por el portador legal del derecho de propiedad intelectual de la obra.

Santa Fe, Argentina, 2019

D' Jorge Agustina

ÍNDICE GENERAL

Índice de Figuras	XV
Notación	XVI
Acrónimos	XVIII
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos y estructura de la tesis	3
1.3. Contribuciones de la tesis	5
1.3.1. Publicaciones en revistas	5
1.3.2. Publicaciones en congresos internacionales	6
1.3.3. Publicaciones en congresos nacionales	6
2. MPC Económico para puntos de operación cambiantes	7
2.1. Introducción	7
2.2. Control predictivo basado en modelo (MPC)	12
2.2.1. Sistemas dinámicos de control con restricciones	12
2.2.2. Esquema básico del control predictivo	14
2.2.3. MPC para seguimiento	18
2.3. MPC con objetivos económicos	22
2.3.1. MPC económico de una sola capa	23
2.3.2. MPC económico de una sola capa basado en el gradiente del costo económico	24
2.3.3. MPC Económico	29
2.4. Análisis de estabilidad del MPC	30
2.4.1. Estabilidad en MPC	30

2.4.2.	Estabilidad en MPCT	35
2.4.3.	Estabilidad en MPC económico	36
3.	MPC para sistemas lineales con incertidumbre aditiva	39
3.1.	Introducción	39
3.2.	MPC robusto	41
3.2.1.	Análisis de estabilidad	45
3.3.	Enfoque estocástico	47
3.3.1.	Análisis de estabilidad	52
4.	Formulación robusta del MPC-RTO Económico	55
4.1.	Introducción	55
4.2.	Descripción del sistema	57
4.2.1.	Enfoque robusto	59
4.2.2.	Caracterización del equilibrio y punto óptimo	60
4.3.	Estrategia de MPC económico robusto de una sola capa.	61
4.3.1.	Solución sub-óptima	64
4.3.2.	Análisis de estabilidad	66
4.4.	Ejemplo de aplicación: sistema de cuatro tanques	75
4.4.1.	Descripción del sistema	75
4.4.2.	Sistema dinámico de la planta	76
4.4.3.	Simulaciones dinámicas	79
4.5.	Conclusiones	82
4.6.	Apéndice	84
5.	Formulación robusta del MPC Económico	89
5.1.	Introducción	89
5.2.	Descripción del sistema	92
5.2.1.	Enfoque robusto	93
5.2.2.	Caracterización del equilibrio y punto óptimo	94
5.3.	Formulación robusta del MPC Económico	95
5.3.1.	Problema de optimización	95
5.3.2.	Análisis de estabilidad	100
5.4.	Propiedades del controlador	108
5.5.	Ejemplo de aplicación: sistema de cuatro tanques	109

5.5.1. Descripción del sistema	109
5.5.2. Simulaciones dinámicas	110
5.6. Conclusiones	113
5.7. Apéndice	115
6. Formulación estocástica del MPC+RTO	119
6.1. Introducción	119
6.2. Descripción del sistema	121
6.3. Formulación estocástica del MPC + RTO	123
6.3.1. Restricciones probabilísticas y dominio de atracción	127
6.3.2. Estabilidad asintótica en probabilidad y convergencia	132
6.3.3. Propiedades del controlador propuesto	138
6.4. Ejemplo de aplicación: sistema convertor CC-CC	139
6.4.1. Descripción del sistema	139
6.4.2. Dominio de atracción	141
6.4.3. Rendimiento del controlador para seguimiento	142
6.5. Conclusiones	144
6.6. Apéndice	146
7. Conclusiones	149
7.1. Futuras líneas de investigación	151
Bibliografía	154

ÍNDICE DE FIGURAS

2-1. Estructura jerárquica de control.	9
2-2. Estructura jerárquica de control de dos capas.	9
2-3. Estructura jerárquica de control de una sola capa.	10
2-4. Factibilidad del controlador MPC diseñado para el punto de equilibrio x_{s1}^* : el estado inicial $x(0)$ es infactible para el controlador MPC con restricción terminal $x(N) = x_{s2}^*$, dado que $x(0) \notin \mathcal{X}_N(x_{s2}^*)$	18
2-5. Factibilidad del controlador MPCT: el estado inicial $x(0)$ es factible para el controlador MPCT con restricción terminal $x(N) = x_{s2}^*$, dado que $x(0) \in \mathcal{X}_N$	22
2-6. Solución factible (\hat{x}, \hat{u})	26
2-7. Solución aproximada (x^*, u^*)	26
2-8. Solución subóptima y costos parametrizados.	27
2-9. Decrecimiento iterativo del costo.	28
4-1. Proceso de cuatro tanques.	76
4-2. Evolución de las salidas h_1 y h_2 : salida del sistema en línea negra, referencia artificial en línea de puntos roja, óptimo económico en línea de trazos y puntos azul.	80
4-3. Evolución de las entradas q_a y q_b : salida del sistema en línea negra, referencia artificial en línea de puntos roja.	81
4-4. Evolución de los estados h_3 y h_4 : salida del sistema en línea negra, referencia artificial en línea de puntos roja.	82
4-5. Evolución del costo económico ℓ_{eco} , para diferentes valores de p	83
4-6. Evolución del espacio de salida del sistema a lazo cerrado en el caso de una distribución Gaussiana truncada.	84
4-7. Evolución del espacio de salida del sistema a lazo cerrado en el caso de perturbaciones periódicas y constantes.	85

4-8.	Evolución en el tiempo de las perturbaciones periódicas.	86
5-1.	Evolución de las salidas h_1 y h_2 : salida del sistema en línea negra, referencia artificial en línea de puntos roja, óptimo económico en línea de trazos y puntos azul.	112
5-2.	Evolución de las entradas q_a y q_b : salida del sistema en línea negra, referencia artificial en línea de puntos roja.	113
5-3.	Evolución del espacio de salida del sistema a lazo cerrado en el caso de una distribución Gaussiana truncada.	114
5-4.	Evolución del costo económico f_{eco} , para diferentes valores de p	115
6-1.	Circuito esquemático del conversor CC-CC Buck-Boost.	140
6-2.	Comparación de los dominios de atracción para un horizonte $N = 5$: SMPCT propuesto (rojo) frente a SMPC [Lorenzen et al., 2017] (amarillo).	142
6-3.	Comparación de los dominios de atracción para un horizonte $N = 8$: SMPCT propuesto (rojo) frente a SMPC [Lorenzen et al., 2017] (amarillo).	143
6-4.	Evolución en el espacio de estados para la realización de 50 perturbaciones diferentes. Conjunto azul: restricciones de estado. Conjunto rojo: región factible para $N = 5$. Conjunto amarillo: \mathcal{R}_∞ centrado en el punto de referencia óptimo.	144
6-5.	Evolución temporal de la salida y y la entrada u	145
6-6.	Izquierda: evolución en el espacio de estados del sistema a lazo cerrado, para 100 realizaciones de perturbaciones diferentes, comenzando desde el estado inicial $x_0 = (2.8, 3.2)$. Derecha: Trayectorias cerca de la restricción $Pr\{x_1 \leq 2\} \geq 0.8$	145

Notación

Se denotará una matriz simétrica definida positiva T como $T > 0$ y $T > P$ denota que $T - P > 0$. Para una matriz simétrica dada $P > 0$, $\|x\|_P$ denota la norma euclidiana ponderada de x , es decir, $\|x\|_P = \sqrt{x'Px}$, donde $'$ denota el operador transpuesto. Para un conjunto cerrado $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_{\mathbb{S}} := \inf_{y \in \mathbb{S}} \|x - y\|$ es la distancia Euclídea a \mathbb{S} . Considérese $a \in \mathbb{R}^{n_a}$ y $b \in \mathbb{R}^{n_b}$, el vector hecho de apilar ambos vectores se define como $(a, b) \triangleq [a', b']' \in \mathbb{R}^{n_a+n_b}$; para un conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n_a+n_b}$, la proyección de Γ sobre a se define como $Proj_a(\Gamma) = \{a \in \mathbb{R}^{n_a} : \exists b \in \mathbb{R}^{n_b}, (a, b) \in \Gamma\}$. Un vector \mathbf{t} en negrita, denota una secuencia finita de valores, es decir, un vector definido como $\{t(0), t(1), \dots, t(N)\}$, donde N se deduce según el contexto. La norma de una señal \mathbf{t} es definida como $\|\mathbf{t}\|_{\infty} = \sup_{k \geq 0} (t(k))$. Una matriz de ceros es denotada como $\mathbf{0}_{n,m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ denota la matriz identidad. Dados dos conjuntos \mathcal{U} y \mathcal{V} , tales que $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$, la suma de Minkowski está definida por $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \triangleq \{u + v : u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}\}$, mientras que la diferencia de Pontryagin de conjuntos esta dada por $\mathcal{U} \ominus \mathcal{V} \triangleq \{u : u \oplus \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}\}$; dada una matriz $M \in \mathbb{R}^{p \times n}$, el conjunto $M\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ es definido como $M\mathcal{U} \triangleq \{Mu : u \in \mathcal{U}\}$; para un dado λ , $\lambda\mathcal{U} \triangleq (\lambda I_n)\mathcal{U}$. $[A]_j$ y $[a]_j$ denotan la j -ésima fila de la matriz A y el vector a , respectivamente. $\mathbb{P}_k\{\Omega\}$ representa la probabilidad condicional de un evento Ω dadas todas las observaciones hasta el momento k , es decir, es la probabilidad condicional $\mathbb{P}\{\Omega|x(k)\}$. Análogamente, $\mathbb{E}_k\{\xi\}$ es el valor esperado condicional de una variable aleatoria ξ , es decir, $\mathbb{E}\{\xi|x(k)\}$.

Acrónimos

Abreviatura	Término derivado del inglés
<i>D-RTO</i>	Optimizador Dinámico en Tiempo Real (Dynamic Real Time Optimizer).
<i>ISS</i>	Estabilidad Entrada-Estado (Input-to-State Stability).
<i>LMI</i>	Desigualdad de Matriz Lineal (Linear Matrix Inequality).
<i>LQR</i>	Regulador Cuadrático Lineal (Linear Quadratic Regulator).
<i>LTI</i>	Lineal e Invariante en el Tiempo (Linear Time Invariant).
<i>MPC</i>	Control Predictivo Basado en Modelo (Model Predictive Control).
<i>MPCT</i>	MPC para Seguimiento (Model Predictive Control for Tracking).
<i>QP</i>	Programación Cuadrática (Quadratic Programming).
<i>RMPC</i>	MPC Robusto. (Robust Model Predictive Control).
<i>RPI</i>	Invariante Robusto Positivo (Robust Positively Invariant).
<i>RTO</i>	Optimizador en Tiempo Real (Real-Time Optimizer).
<i>SSTO</i>	Optimizador de punto de equilibrio objetivo (Steady State Target Optimizer).

RESUMEN

El *Control Predictivo basado en Modelos* (MPC) es una estrategia de control avanzado ampliamente utilizada, y estudiada, tanto en ámbitos académicos como industriales. Entre sus principales virtudes se encuentra la de ser una estrategia optimizante, con robustez frente a perturbaciones o discrepancias entre planta y modelo, y la de considerar de forma explícita restricciones en las variables de estado, de entrada y de salida del sistema que se quiere controlar. Para su formulación, intrínsecamente ligada al estudio de sistemas dinámicos, pueden alcanzarse diferentes niveles de abstracción, de modo de garantizar, bajo ciertas hipótesis generales, estabilidad, factibilidad recursiva, robustez y optimalidad según criterios exógenos al problema de control.

El objetivo de esta técnica de control ha sido, durante muchos años, guiar el proceso a un punto de operación óptimo en forma rápida y confiable. Sin embargo, en la última década los investigadores se centraron en una formulación particular, denominada MPC Económico, cuyo objetivo ya no es estabilizar el sistema controlado en un estado estacionario particular, sino optimizar su desempeño teniendo en cuenta algún criterio de rendimiento económico.

En este marco, el objetivo general de la presente tesis es ampliar las fronteras de los desarrollos teóricos de los controladores MPC con objetivos económicos, bajo la influencia de incertidumbre.

Esta tesis trata el problema del diseño de controladores predictivos con objetivos económicos, tanto dinámicos como estacionarios, que sean capaces de garantizar la estabilidad a pesar de la presencia de incertidumbres en el sistema, sin que se produzca pérdida de factibilidad, debido a los posibles cambios de los puntos de operación económicamente óptimos. Los controladores diseñados garantizan la satisfacción de las restricciones del sistema incluso en presencia de perturbaciones, ya sea de manera determinística o en probabilidad para el caso estocástico, asegurando factibilidad recursiva y estabilidad asintótica del sistema a lazo cerrado.

ABSTRACT

Model Predictive Control (MPC) is an advanced control strategy widely used and studied, both in academic and industrial settings. Among its main virtues is that of being an optimizing strategy, with robustness against disturbances or discrepancies between plant and model, and that of explicitly considering constraints on the state, input and output variables of the system to be controlled. For its formulation, intrinsically linked to the study of dynamic systems, different levels of abstraction can be achieved, in order to guarantee, under certain general hypotheses, stability, recursive feasibility, robustness and optimality according to criteria exogenous to the control problem.

The objective of this control technique has been, for many years, to guide the process to an optimal operating point quickly and reliably. However, in the last decade the researchers focused on a particular formulation, called Economic MPC, whose objective is no longer to stabilize the controlled system in a particular steady state, but to optimize its performance taking into account some criteria of economic performance.

Within this framework, the general objective of this Thesis is to expand the boundaries of the theoretical developments of MPC controllers with economic objectives, under the influence of uncertainty.

This thesis deals with the problem of the design of predictive controllers with economic objectives, both dynamic and stationary, that are able to guarantee stability despite the presence of uncertainties in the system, without loss of feasibility due to possible changes in the economically optimal operating points. The designed controllers guarantee the satisfaction of the system restrictions even in the presence of disturbances, either in a deterministic or probability for the stochastic case, ensuring recursive feasibility and asymptotic stability of the closed loop system.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

La forma de operar procesos en la industria ha experimentado una serie de avances tecnológicos significativos durante los últimos años, guiados por la necesidad de producir productos que satisfagan las necesidades del mercado, de forma segura y en condiciones competitivas. Por lo tanto resulta deseable buscar técnicas de control que a la vez que controlan el proceso, optimicen ciertos criterios de eficiencia, garantizando al mismo tiempo el cumplimiento de límites impuestos a los productos. Una de las pocas técnicas que permiten resolver este problema complejo es la estructura jerárquica de control multi-variable que subyace al *Control Predictivo basado en Modelos (MPC)*.

El objetivo de esta técnica de control ha sido, durante muchos años, guiar el proceso a un punto de operación óptimo en forma rápida y confiable. Sin embargo, en la última década los investigadores se centraron en una formulación particular, denominada MPC Económico, cuyo objetivo ya no es estabilizar el sistema controlado en un estado estacionario particular, sino optimizar su desempeño teniendo en cuenta algún criterio de rendimiento económico.

En el diseño de este tipo de controladores es importante tener en consideración que pueden ocurrir cambios en los criterios que definen la optimalidad económica. Esto significa que puede producirse una variación en el estado al que el controlador debe conducir al sistema, es decir, en el estado estacionario económicamente óptimo, ocasionando, debido a los requisitos de estabilidad, una posible pérdida de factibilidad.

En la literatura, se pueden encontrar diferentes formulaciones que abordan la temática presentada, cada una de las cuales están dedicadas a estudiar y analizar diversos aspectos de esta interesante técnica de control. Algunas procuran que tanto el desempeño dinámico

como el estacionario del sistema satisfagan un objetivo de optimización económico, mientras que otras solamente tienen como propósito llevar el sistema a un punto de operación (un equilibrio) económicamente óptimo.

La estabilidad de los controladores predictivos se garantiza bajo la hipótesis de que el modelo de predicción coincide con el sistema a controlar y no existen perturbaciones desconocidas. Sin embargo, todo modelo (simplificado, como requiere MPC) tiene limitaciones a la hora de describir el sistema que representa y, además, en las aplicaciones reales siempre existen perturbaciones no previstas. Por ello, para que un controlador sea aplicable debe poseer ciertas características de robustez (ya sea inherente, cuando las incertidumbres son pequeñas o moderadas, o explícita, cuando estas son mayores).

El estudio de la robustez en MPC se puede realizar de dos formas: el estudio de la robustez inherente de las formulaciones nominales, y el estudio de la incorporación explícita de modelos de incertidumbre, que derivan en controladores robustos. En el primero, se parte de un controlador MPC obtenido para un sistema sin considerar el efecto de las incertidumbres en su diseño y se determina qué grado de incertidumbres es capaz de soportar, conservando la estabilidad del sistema. El segundo enfoque es el de la síntesis de un nuevo controlador, por el cual se establecen formulaciones del controlador que consideran en el cálculo de las actuaciones el efecto que tienen las incertidumbres sobre el sistema. El objetivo es por lo tanto garantizar, para cierto grado de incertidumbres, la estabilidad, la satisfacción de las restricciones y, de ser posible, alguna especificación sobre el desempeño.

En este contexto, el desafío que se aborda en esta Tesis es el de diseñar diferentes controladores predictivos con objetivos económicos, tanto dinámicos como estacionarios, que sean capaces de garantizar la estabilidad a pesar de la presencia de las incertidumbres, sin que se produzca pérdida de factibilidad, debido a los posibles cambios de los puntos de operación económicamente óptimos.

Si bien parece que la problemática planteada se podría solucionar con el diseño de estos controladores, el principal inconveniente de las formulaciones robustas es el alto grado de conservadurismo, debido al diseño que contempla todas las posibles realizaciones de las perturbaciones. Este inconveniente busca ser superado por el denominado MPC estocástico, que considera una descripción probabilística de las perturbaciones y permite una (pequeña) probabilidad de violación de las restricciones (mediante las llamadas restricciones de probabilidad), lo que permite tener un mayor dominio de atracción.

Uno de los grandes desafíos que presenta la formulación del MPC estocástico está dado por la dificultad que se tiene para garantizar la factibilidad recursiva. Esto se debe a que

la estrategia clásica, basada en suponer que la secuencia de entrada óptima seguirá siendo factible en el próximo tiempo de muestreo, puede no aplicarse en el MPC estocástico ya que se permite una cierta probabilidad de violación futura de la restricción.

Teniendo en cuenta esta problemática general, se presentarán a lo largo de la Tesis diferentes formulaciones de MPC con objetivos económicos, tanto dinámicos como estacionarios, que son robustos frente a la presencia de perturbaciones aditivas en el sistema. Se pretende que los controladores diseñados garanticen la satisfacción de las restricciones del sistema incluso en presencia de perturbaciones, ya sea de manera determinística o en probabilidad para el caso estocástico, asegurando factibilidad recursiva y estabilidad asintótica del sistema a lazo cerrado.

1.2. Objetivos y estructura de la tesis

Aunque estudios preliminares han sido realizados para evaluar y desarrollar controladores MPC económicos, en general, ninguno de los trabajos ha estudiado y presentado resultados acerca de la robustez y la estabilidad en presencia de perturbaciones.

En este marco, el objetivo general de la investigación, consiste en la profundización del conocimiento y el desarrollo de técnicas de control avanzado conocidas como control predictivo basado en modelos con fines económicos (Economic MPC) de sistemas lineales sujetos a perturbaciones aditivas.

En particular, el problema de la optimización económica de procesos ha recibido recientemente un renovado impulso en el campo del control predictivo, dado que los objetivos económicos del proceso bajo control son, en muchos casos, contrapuestos a los objetivos dinámicos propios del control, y el problema no es trivial (por ejemplo, los objetivos económicos pueden corresponderse con puntos de operación distintos del punto de equilibrio que estabiliza el sistema, etc.). Por otro lado, el diseño del controlador debe ser tal que se garantice la estabilidad a pesar de la presencia de incertidumbres aditivas, y a su vez, que no ocurra pérdida de factibilidad en caso de producirse cambios en el punto de operación. Según esta problemática motivadora, los objetivos específicos se enfocan en *desarrollar formulaciones de MPC que permitan la incorporación adecuada de objetivos económicos, tanto dinámicos como estacionarios, asegurando estabilidad y robustez frente a posibles perturbaciones.*

La tesis se divide en dos partes. La primera está destinada a introducir los distintos conceptos formales que serán utilizados luego, a la hora de presentar las propuestas propiamente

dichas. La segunda, contiene los resultados y contribuciones logrados en el marco del doctorado - concretamente formulaciones específicas de controladores - que son, por lo demás, los pilares de este documento.

Específicamente, la estructura de la Tesis, donde se destacan los aportes originales, se muestra a continuación:

- El Capítulo 2 describe, en primer lugar, la teoría detrás de la estrategia de control MPC, que es la base de las estrategias utilizadas a lo largo de la tesis, para luego desarrollar de forma sintética los distintos enfoques que aparecen en la literatura especializada sobre controladores predictivos económicos para seguimiento, es decir, aquellos que contemplan la posibilidad de que el punto de operación cambie y que son objeto de estudio para los aportes realizados.
- El Capítulo 3 se destina a un tema de particular interés, que es la formulación de controladores predictivos para seguimiento, para sistemas lineales que están sujetos a perturbaciones aditivas persistentes. Para ello se parte de la formulación robusta que garantiza factibilidad recursiva y la estabilidad asintótica, para toda perturbación acotada en un conjunto convexo conocido. Luego, se presenta una estrategia denominada estocástica que surge para solventar el conservadurismo de la técnica anterior, y aprovecha el conocimiento del sistema y de la distribución de las perturbaciones para proponer una formulación que permite que, con cierta probabilidad, se puedan infringir las restricciones.
- El Capítulo 4, por su parte, describe la formulación robusta de un controlador predictivo con fines económicos de una sola capa, basado en la estrategia del gradiente de la función de costo. La formulación robusta resultante considera un modelo de predicción nominal, pero restringe las restricciones, para tener en cuenta el efecto de las perturbaciones aditivas. El rendimiento económico nominal se conserva y se garantiza una estabilidad robusta. Los resultados obtenidos han sido publicados en [D’Jorge et al., 2017].
- En el Capítulo 5 se propone un controlador predictivo económico robusto, con estabilidad garantizada. La propuesta garantiza la factibilidad bajo cualquier cambio del criterio económico, gracias al uso de variables artificiales y una restricción terminal relajada, y la robustez en presencia de perturbaciones aditivas acotadas. El sistema controlado bajo el controlador propuesto se muestra como estable entrada-estado en

el sentido de que está dirigido asintóticamente a una región invariante alrededor del mejor estado de equilibrio admisible. El diseño de este controlador ha sido publicado en [D’Jorge et al., 2018b].

- El Capítulo 6 está destinado al diseño de un controlador predictivo para seguimiento estocástico que garantiza la estabilidad asintótica en probabilidad. El controlador propuesto garantiza la satisfacción de las restricciones en probabilidad y mantiene las características principales del MPCT, las cuales son factibilidad frente a cualquier cambio de punto óptimo y dominio de atracción ampliado. Finalmente, se realiza el análisis correspondiente a la estabilidad asintótica en probabilidad del controlador. Los resultados de este trabajo han sido publicados en una edición especial de la revista “*Optimal Control Applications and Methods*” [D’Jorge et al., 2018c].
- Por último, el Capítulo 7 presenta las conclusiones generales de la tesis y futuras líneas de investigación.

1.3. Contribuciones de la tesis

El objetivo de esta tesis ha sido estudiar el problema de las incertidumbres en controladores predictivos con fines económicos para sistemas lineales, analizando en particular algunos problemas como la pérdida de factibilidad, la optimalidad económica y el análisis de estabilidad. Asimismo, el proceso de estudio y aprendizaje de la temática involucrada ha llevado a la realización y contribución de diferentes trabajos, los cuales, si bien no se enmarcan en el desarrollo de la presente tesis, fueron aportes que se han realizado en el marco del doctorado.

A continuación, a modo de resumen, se presentan todas las contribuciones que se han realizado.

1.3.1. Publicaciones en revistas

- [D’Jorge et al., 2017] D’ Jorge A., Ferramosca A., and González A. H. A robust gradient-based MPC for integrating real time optimizer (RTO) with control. *Journal of Process Control*, Volume 54, June 2017, Pages 65-80.
- [D’Jorge et al., 2018b] D’ Jorge A., Anderson A., González A. H., and Ferramosca A. A robust economic MPC for changing economic criterion. In *International Journal of Robust and Nonlinear Control (IJRNC)*, 2018.

- [Anderson et al., 2018c] Anderson, A., González A.H., Ferramosca A., D' Jorge A. and Kofman E. Robust MPC suitable for closed-loop re-identification, based on probabilistic invariant sets. *Systems & Control Letters*. Volume 118, August 2018, Pages 84-93.
- [D'Jorge et al., 2018c] D' Jorge A., Santoro B. F. González A. H., Anderson A., Ferramosca A. Stochastic MPC for tracking. Special Issue - *Optimal Control Applications and Methods*, Submitted (2018).
- [Anderson et al., 2018a] Anderson A., D' Jorge A, González A. H., Ferramosca A. and Actis M. MPC for tracking with maximum domain of attraction for any predicted horizon. *Automática*, Submitted (2018).

1.3.2. Publicaciones en congresos internacionales

- [D'Jorge et al., 2016] A. D' Jorge, A. Anderson, A. H. González, and A. Ferramosca. A robust economic MPC for changing economic criterion. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications, CCA 2016, Buenos Aires, Argentina, September, 19-22 2016*.

1.3.3. Publicaciones en congresos nacionales

- [D'Jorge et al., 2015] A. D' Jorge, A. Ferramosca, and A. H. González. A robust gradient-based MPC for integrating real time optimizer (RTO) with control. En *Actas de la XVI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (RPIC)*, 2015.
- [Actis et al., 2017] M. Actis, A. Anderson, and A. D' Jorge. MPC para sistemas lineales con máximo dominio de atracción. *UMA*, 2017.
- [D'Jorge et al., 2018a] A. D'Jorge, A. Anderson, A.H. González and A. Ferramosca. Robust and Stochastic MPC for tracking: a performance comparison. En *Actas del congreso de la Asociación Argentina de Control Automático (AADECA)*, 2018.
- [Anderson et al., 2018b] A. Anderson, A. D'Jorge, A. Ferramosca, E. Kofman and A.H. González. i-Steps Closed-Loop Sets for Constrained Linear Systems under Model Predictive Control. En *Actas del congreso de la Asociación Argentina de Control Automático (AADECA)*, 2018.

Capítulo 2

MPC Económico para puntos de operación cambiantes

2.1. Introducción

El Control Predictivo basado en Modelo (MPC) es una de las técnicas de control avanzado más utilizadas en las industrias de procesos, plantas químicas y refinerías de petróleo desde los años ochenta. Tiene sus raíces en el control óptimo y su éxito se debe a la formulación de los problemas de control, al uso de un modelo para predecir el comportamiento futuro del sistema a controlar, y a la capacidad de manejar sistemas multivariables sujetos a restricciones explícitas en los estados y las entradas [Mayne et al., 2000, Rawlings and Mayne, 2009].

La estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado con el MPC se garantiza a través de los denominados '*ingredientes terminales*', que se eligen de manera tal que se satisfagan ciertas condiciones en una vecindad de un punto de equilibrio objetivo [Mayne et al., 2000, Mayne, 2014].

El objetivo de muchos sistemas de control avanzados ha sido, a lo largo de los años, guiar el proceso a un punto de operación óptimo en forma rápida y confiable. Sin embargo, en la última década los investigadores han propuesto nuevas estrategias, englobadas en lo que se puede denominar '*MPC Económico*', que buscan ampliar estos objetivos, de modo de dar mayor generalidad a la formulación. En este caso el objetivo de control ya no es estabilizar el sistema controlado en un estado estacionario particular sino, además, calcular dicho punto y las trayectorias en régimen transitorio que guían el sistema hasta él, de forma óptima, teniendo en cuenta algún criterio de rendimiento económico.

Más aun, según esta formulación se deben tener en cuenta los posibles cambios en los criterios económicos [Fagiano and Teel, 2013, Angeli et al., 2015], lo que significa que puede producirse una variación en el estado al que el controlador debe conducir al sistema, ocasionando, debido a los requisitos de estabilidad, una posible pérdida de factibilidad. Cabe señalar que dichos cambios, que pueden ocurrir durante el funcionamiento de una planta, se deben, por ejemplo, a: (i) las fluctuaciones del mercado, lo que provoca cambios en la función de costos y en los precios que parametrizaron esta función; (ii) cambios en la estimación de las perturbaciones o restricciones, debido a los algoritmos de reconciliación de datos.

El análisis del problema de control presentado anteriormente, comienza con el estudio de la estructura jerárquica de control (Figura 2-1), típicamente utilizada en las industrias de proceso [Engell, 2007]: en la parte superior de esta estructura, un planificador económico determina la producción de toda la planta teniendo en cuenta el objetivo económico de la empresa y la situación del mercado (nivel, calidad, etc.); luego, las salidas de esta capa son funciones de costos económicos y restricciones operativas que se envían a un optimizador de tiempo real (RTO), que se dedica a calcular los puntos de consigna estacionarios de acuerdo con los criterios económicos. Este optimizador, que generalmente se basa en un modelo estacionario no lineal complejo de la planta y tiene un tiempo de muestreo diferente de otras capas, calcula los setpoints económicos que se enviarán al nivel de control. El controlador, usualmente un MPC, calcula las acciones de control necesarias para la planta para alcanzar esos puntos de referencia, teniendo en cuenta un modelo dinámico simplificado de la planta y las restricciones sobre las variables.

Sin embargo, una desventaja principal bien conocida que posee esta estructura de control, es que la comunicación entre las capas económica/estacionaria y dinámica puede ser inconsistente. Las diferencias entre los modelos y las escalas de tiempo producen problemas que van desde la imposibilidad de alcanzar los puntos de equilibrio (en un contexto estacionario puro) hasta los malos resultados económicos transitorios y estacionarios. Una estrategia adecuada para unificar estos objetivos se convierte en un desafío altamente deseado desde un punto de vista operativo.

Dos estrategias principales para reducir la inconsistencia son las llamadas estructuras de dos capas (Figura 2-2) y de una sola capa (Figura 2-3). En el primer caso, se agrega un nivel de optimización adicional - el optimizador de punto de equilibrio objetivo, SSTO - entre el RTO y el MPC para decidir la mejor referencia admisible para el MPC, de acuerdo con una aproximación local de la función de costo de RTO, y usando el mismo modelo simplificado utilizado en la capa MPC [Muske, 1997, Rao and Rawlings, 1999, Ying and

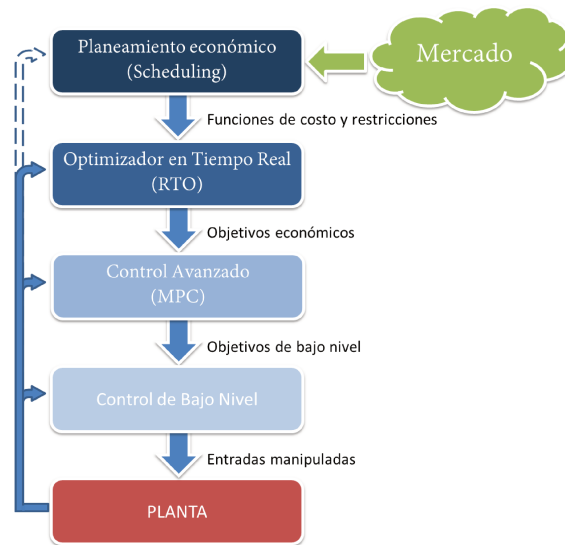


Figura 2-1: Estructura jerárquica de control.

Joseph, 1999, Marchetti et al., 2014, Limon et al., 2008, Ferramosca et al., 2009, Gonzalez and Odloak, 2009]. En este marco, otro enfoque está representado por el optimizador dinámico en tiempo real (D-RTO) [Biegler, 2009, Würth et al., 2009, Ellis and Christofides, 2013], que resuelve una optimización económica dinámica y entrega trayectorias objetivo (en lugar de un punto de equilibrio) a la capa MPC. La estrategia de una sola capa, por otro lado, consiste

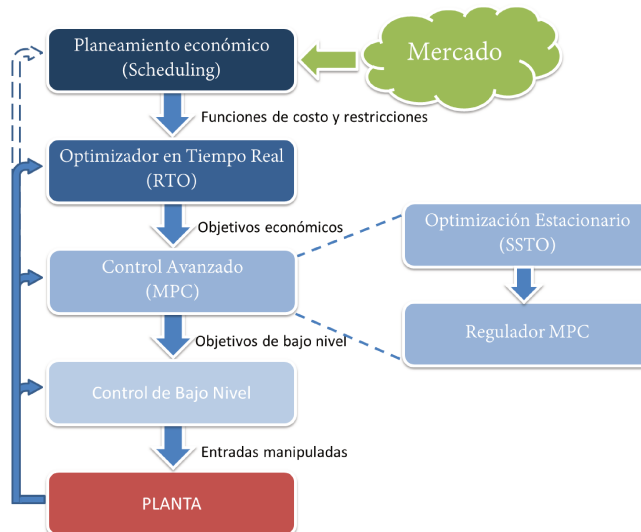


Figura 2-2: Estructura jerárquica de control de dos capas.

en una función de costo de MPC unificada que considera simultáneamente los objetivos económicos y los objetivos dinámicos, como por ejemplo en [Zanin et al., 2002, Adetola

and Guay, 2010] o [Diehl et al., 2011, Angeli et al., 2012, Ferramosca et al., 2010b]. El principal problema de esta estrategia es que los objetivos económicos generalmente están representados por una compleja función no lineal que hace que el costo de optimización de una sola capa también sea no lineal y difícil de resolver. En el contexto de las estrategias de

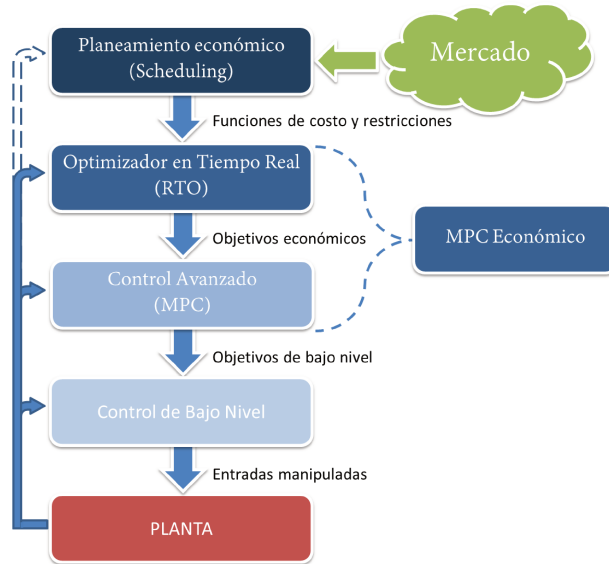


Figura 2-3: Estructura jerárquica de control de una sola capa.

una sola capa, también se propusieron varias soluciones para superar el problema de la carga computacional de dicho MPC económico. El más significativo es el uso de una función de costo económico aproximado, en lugar de la original no lineal. Un primer enfoque se presenta en [De Souza et al., 2010], donde el gradiente de la función de objetivo económico se incluye en la función de costo del controlador para obtener una estrategia computacional de bajo costo. Esta solución permite resolver el problema de control/optimización resultante como un único problema de programación cuadrática. Los resultados se han demostrado prometedores, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Esta idea se ha ampliado en [Alamo et al., 2014] para obtener una formulación con garantía de estabilidad.

La novedad de esta última estrategia es que, en lugar de aplicar al sistema la solución óptima de un problema aproximado, se aplica una solución subóptima, en el sentido de que la acción de control aplicada está dada por la combinación convexa de una solución factible, y fácil de obtener, del problema original y la solución óptima de un problema aproximado/simplificado. Como se muestra en [Alamo et al., 2014], esta estrategia MPC subóptima asegura la factibilidad recursiva y la convergencia al punto de equilibrio óptimo (en el sentido económico), con un costo computacional significativamente reducido.

En la literatura, se pueden encontrar diferentes formulaciones que abordan la temática presentada, cada una de las cuales están dedicadas a estudiar y analizar diversos aspectos de esta interesante técnica de control [Angeli et al., 2012, Müller et al., 2014a, Müller et al., 2014b, Ellis et al., 2014]. Algunas procuran que tanto el desempeño dinámico como el estacionario del sistema satisfagan un objetivo de optimización económico [Rawlings et al., 2012, Angeli et al., 2012, Ellis et al., 2014], mientras que otras solamente tienen como propósito llevar el sistema a un punto de operación económicamente óptimo [De Souza et al., 2010, Alamo et al., 2014].

Para el primer caso, uno de los principales desafíos ha sido presentar la existencia de una función de Lyapunov para demostrar la estabilidad. Este objetivo se ha logrado en primer lugar bajo la suposición de una dualidad fuerte [Diehl et al., 2011], y, más tarde, bajo el supuesto de disipatividad (lo que representa una suposición relajada respecto a la anterior) [Angeli et al., 2012, Zanon et al., 2014]; siendo este último no solo suficiente, sino también una condición necesaria para la estabilidad en lazo cerrado [Müller et al., 2015, Müller et al., 2015].

Una formulación del MPC económico, que contempla cambios en el objetivo económico, se presenta en [Ferramosca et al., 2014b]. En ese trabajo, se diseña un controlador con una función de costo ligeramente modificada, a lo que se agrega, siguiendo los fundamentos presentados en [Limon et al., 2008], una función de costo final y una restricción terminal relajada, que requiere que el estado terminal al final del horizonte sea un punto de equilibrio admisible. Como consecuencia, este controlador posee las siguientes propiedades: (i) garantiza la factibilidad bajo cualquier cambio del criterio económico; (ii) asegura la optimalidad económica; (iii) proporciona un dominio de atracción más grande que el MPC económico estándar. Además, se prueba estabilidad asintótica recurriendo a una función de Lyapunov.

El segundo caso de estrategias, surge debido a que los investigadores se centraron en mejorar el rendimiento del controlador según un criterio económico del proceso que podría no coincidir con el de los objetivos dinámicos.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. En primer lugar, y a modo de introducción se presenta en la Sección 2.2 el denominado Control Predictivo basado en Modelo (MPC). Asimismo, realiza una descripción del problema de control que será el utilizado a lo largo del capítulo y se presenta un MPC para seguimiento, como solución al problema de la pérdida de factibilidad frente a cambios en el punto de operación. En la Sección 2.3 se presentan y describen brevemente los controladores MPC económicos que serán objeto de estudio en esta tesis. En particular se caracteriza el equilibrio del sistema y el rendimiento

económico. Finalmente, en la Sección 2.4 se describe el procedimiento y las consideraciones que se deben tener en el diseño de los controladores para garantizar estabilidad asintótica.

2.2. Control predictivo basado en modelo (MPC)

Antes de poder presentar las estrategias de MPC con objetivos económicos es primordial comenzar explicando en qué consiste la técnica de control MPC y cuáles son los aspectos involucrados en su formulación.

El control predictivo basado en modelos (MPC) es una de las técnicas más exitosas de control avanzado en la industria de procesos [Camacho and Bordons, 1999, Rawlings and Mayne, 2009] porque permite el control de sistemas sujetos a restricciones, minimizando cierto criterio deseado y garantizando estabilidad y convergencia [Mayne et al., 2000]; además de su simplicidad conceptual y su capacidad para tratar sistemas complejos (como aquellos que poseen múltiples entradas y salidas) de manera fácil y efectiva. Básicamente, la estrategia de control MPC proporciona una secuencia finita de acciones de control al resolver un problema de control óptimo de tiempo discreto y sujeto a restricciones. La resolución de este problema de optimización es muy arduo, pero es perfectamente aceptable si el tiempo de cálculo de los problemas de optimización es inferior al tiempo de muestreo. En la actualidad, en la teoría de MPC [Mayne et al., 2000] son bien conocidas las condiciones suficientes que garantizan la estabilidad en lazo cerrado utilizando un enfoque basado en Lyapunov. En la Sección 2.4 se analizarán las condiciones necesarias que se deben tener en cuenta al momento de diseñar un problema de MPC para garantizar estabilidad asintótica y factibilidad.

Para proceder con la descripción de los elementos que componen un controlador MPC, se define el sistema dinámico que se utilizará a lo largo del capítulo, el cual es un factor primordial para su diseño.

2.2.1. Sistemas dinámicos de control con restricciones

La teoría de sistemas de control se ocupa del análisis y el diseño de componentes inter-actuantes de un sistema en una configuración que brinde un comportamiento deseado. La configuración esencial usada en teoría de sistemas de control se basa en el concepto fundamental de realimentación, que consiste en el proceso de medir las variables de interés en el sistema y usar esa información para controlar su comportamiento.

El punto de partida en el análisis de un sistema de control es su representación por un

modelo matemático, generalmente como un operador entre entradas y salidas del sistema, o como un conjunto de ecuaciones en diferencia y/o diferenciales.

Los sistemas dinámicos pueden ser modelados por un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden acopladas entre sí, que representaremos en forma compacta con la ecuación diferencial vectorial de primer orden

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2-1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado y $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas (de control). Asimismo la ecuación de salida está dada por

$$y = h(x, u)$$

donde $y \in \mathbb{R}^r$ es un vector de variables de interés.

Particularmente, se considerará el siguiente sistema descrito por un modelo discreto, lineal e invariante en el tiempo, dado por la ecuación en diferencias:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2-2)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ representan, respectivamente, el vector de estados del sistema y el vector de entradas de control en el instante de tiempo k , mientras que $x(k+1)$ representa el estado en el instante de tiempo $k+1$. Cada una de estas señales están confinadas mediante una serie de restricciones a lo largo del tiempo, las cuales tienen la forma

$$x(k) \in \mathcal{X} \quad (2-3)$$

$$u(k) \in \mathcal{U} \quad (2-4)$$

donde el conjunto $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ se considera generalmente cerrado y $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ compacto. Para que el sistema pueda evolucionar al punto de equilibrio, estos conjuntos deben contener el origen en su interior. Además se considera que la siguiente suposición es válida:

Suposición 2.1. *El par (A, B) es controlable y el estado es medible en cada instante de tiempo.*

Si el par (A, B) no es controlable, entonces el sistema no puede ser controlado por un controlador de retroalimentación y, por lo tanto, el problema de control debe ser re-estudiado. Por otro lado, si el estado de la planta no se puede medir, entonces debe estimarse por medio de un observador adecuado. En este caso, el sistema se debe dirigir manualmente a un punto

de equilibrio adecuado y luego se debe activar el observador para iniciar la estimación. Una vez que se sabe que el error de estimación es pequeño, se debe operar el modo automático. Este procedimiento garantiza que el esquema de control resultante basado en el observador funcione de manera apropiada, y de manera similar al caso del control de retroalimentación de estado, gracias al principio de separación.

El conjunto de equilibrio admisible para el sistema, está dado por:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_s &\triangleq \{(x, u) \in \gamma\mathcal{Z} \mid x = Ax + Bu\}, \\ \mathcal{X}_s &\triangleq Proj_x(\mathcal{Z}_s) \\ \mathcal{U}_s &\triangleq Proj_u(\mathcal{U}_s)\end{aligned}$$

donde $\gamma \in (0, 1)$ es una constante que se toma arbitrariamente cercana a 1, agregada para evitar los estados y entradas de equilibrio que proporcionan restricciones activas.

Finalmente, debe tenerse en cuenta que todo sistema, junto con sus restricciones, tiene asociado un máximo conjunto controlable \mathcal{X}_∞ , es decir, un conjunto que contiene todos los estados que pueden ser controlados a un punto de equilibrio, de manera admisible.

2.2.2. Esquema básico del control predictivo

Los sistemas con grandes rangos de operación se caracterizan por una dinámica compleja generalmente definida por sistemas con ecuaciones algebraicas, diferenciales ordinarias o diferenciales parciales combinadas. Otro aspecto importante relacionado con estos sistemas es la existencia de restricciones que limitan el rango de las variables de control del proceso (variables de entrada o manipuladas) o la variable medible del proceso (variables de salidas y estados que se considerarán medibles a lo largo de esta tesis).

El objetivo del MPC, es dirigir al sistema a un punto de operación deseado prediciendo la evolución del sistema y calculando la secuencia admisible de entradas de control que minimiza un funcional de costo, tal que la evolución del sistema satisfaga las restricciones. Para cumplir con este objetivo, el control predictivo está compuesto por los siguientes componentes:

- *Modelo de predicción:* esta dado por un conjunto de ecuaciones algebraicas diferenciales que describen el comportamiento dinámico de un sistema de control. Dependiendo de estas ecuaciones, los modelos se pueden clasificar en lineal/no lineal, determinístico/incierto o discreto/continuo. En particular, se considerarán modelos en tiempo discreto, en el espacio de estado como se describió en la sección anterior, expresados

mediante la Ecuación 2-2. Se considera además que el origen es el punto de equilibrio en el que se quiere regular el sistema. Para una secuencia dada de acciones de control, el modelo de predicción se usa para estimar la trayectoria futura del sistema a lo largo de un horizonte de predicción dado y tiene la forma:

$$x(j+1; k) = Ax(j; k) + Bu(j; k) \quad j \in \mathbb{I}_{0:N-1}$$

donde $x(j; k)$ representa el estado del sistema predicho en el instante j a partir del estado conocido en el instante k , mientras que $u(j; k)$ indican las acciones de control. El estado terminal, está dado por el estado predicho al final del horizonte de predicción, es decir $x(N; k)$.

- **Función de costo:** esta función matemática muestra los criterios a optimizar. Por lo general, es una función definida positiva que define el costo de la trayectoria del sistema a lazo cerrado a lo largo del horizonte de predicción, indicado como N . Esta función de costo a menudo está compuesta por dos términos: un *costo de etapa*, generalmente denotado como $\ell(\cdot)$, que define el costo del sistema en un determinado estado y entrada en cada paso y la función de *costo terminal*, $V_f(\cdot)$, que penaliza el estado del sistema predicho al final del horizonte de predicción. Formalmente, esta función tiene la forma

$$V_N(x; \mathbf{u}) := \sum_{j=0}^{N-1} \ell(x(j; k), u(j; k)) + V_f(x(N; k)),$$

donde $\ell(\cdot) : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ y $V_f(\cdot) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$.

- **Restricciones:** son un conjunto de ecuaciones que definen la región donde el estado y la entrada del sistema se deben limitar en cada tiempo de muestreo. Esta región es la llamada *región factible*. Estas restricciones son impuestas por los límites físicos del sistema o por razones de seguridad y se plantean como un conjunto de desigualdades. Las restricciones en los estados y las entradas de control del sistema se indican como $x(j; k) \in \mathcal{X}$, $u(j; k) \in \mathcal{U}$, para todo $j \in \mathbb{I}_{0:N-1}$. Normalmente, debido a razones de estabilidad, se agrega una restricción al estado predicho al final del horizonte de predicción N . Esta restricción se denomina *restricción terminal* y se puede expresar como $x(N; k) \in \mathcal{X}_f$, donde $\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}$ es un conjunto que se define como región terminal [Mayne et al., 2000].

Idealmente, el horizonte en el problema de control óptimo debería ser infinito para considerar el costo de toda la trayectoria a lazo cerrado. Sin embargo, esto es imposible de resolver

en la práctica, excepto en ciertos casos simples, como el Regulador Cuadrático Lineal (LQR) sin restricciones para sistemas lineales. Para evitar estas desventajas, se usa un horizonte finito que implica que el controlador resultante puede perder propiedades importantes de los controladores de horizonte infinito, como la estabilidad a lazo cerrado. El esquema clásico del problema de optimización de horizonte finito de un controlador predictivo basado en modelo, denotado como $\mathcal{P}_N(x)$, se puede plantear como sigue

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} \quad & V_N(x; \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell(x(j; k), u(j; k)) + V_f(x(N; k)) \\ \text{sujeto a:} \quad & \\ & x(j+1; k) = Ax(j; k) + Bu(j; k), \quad x(0; k) = x(k) \\ & u(j; k) \in \mathcal{U}, \quad x(j; k) \in \mathcal{X}, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{I}_{0:N-1} \\ & x(N; k) \in \mathcal{X}_f, \end{aligned}$$

donde el estado actual del sistema es $x(k)$. Este problema de optimización tiene como variables de decisión las actuaciones a lo largo del horizonte de predicción, \mathbf{u} y depende de forma paramétrica del estado del sistema x . La solución que se obtiene al resolver este problema de optimización es:

$$\mathbf{u}^0(x) := \{u^0(0; x(k)), u^0(1; x(k)), \dots, u^0(N-1; x(k))\}.$$

Siguiendo la estrategia del horizonte deslizante, sólo la primera acción de control $u^0(0; x(k))$ se aplica al sistema en el instante k y se vuelve a resolver el problema de optimización en el siguiente período de muestreo $k+1$. De esta manera, la ley de control del MPC viene dada por.

$$\kappa_N(x(k)) = u^0(0; x(k)).$$

Por simplicidad y en aras de clarificar las ideas, en lo que sigue, la dependencia respecto del instante de tiempo k no se tendrá en cuenta en la notación, es decir $x(j; k)$ será denotado por $x(j)$. Pero téngase presente que el problema de optimización se realiza en cada instante k .

Asociado a este problema de optimización, se puede definir el conjunto de estados para los cuales existe una secuencia de N acciones de control admisibles, tal que el sistema a lazo cerrado tiene una evolución dentro de la región de restricción \mathcal{X} y llega al conjunto terminal \mathcal{X}_f , denominado *dominio de atracción* del controlador predictivo y se denota como \mathcal{X}_N .

Teniendo en cuenta que todo sistema, junto con sus restricciones, tiene asociado un máximo conjunto controlable, el objetivo que se persigue, es expandir el dominio de atracción del

controlador MPC, de manera tal que sea igual al máximo conjunto controlable que el sistema admite. Si esto no ocurre, entonces se tendrá un desperdicio del espacio de estado, debido sólo a limitaciones del control, y no del sistema en sí.

Para clarificar estas ideas, considérese un sistema doblemente integrador, dado por el modelo en tiempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} u(k).$$

Este sistema está sujeto a restricciones dadas por los conjuntos $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 5\}$ y $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\|_\infty \leq 0.5\}$. Para poder controlarlo, se diseñada una estrategia MPC con matrices de ponderación $Q = I_2$ y $R = I_2$, y un horizonte de predicción $N = 3$. En la Figura 2-4 se muestra el espacio de estado del sistema \mathcal{X} junto con el conjunto de equilibrio \mathcal{X}_s . Asimismo, se puede observar el máximo dominio controlable que admite el sistema \mathcal{X}_∞ y el dominio de atracción del controlador para los puntos de equilibrio $x_{s1}^* = (4.5, 0)$ y $x_{s2}^* = (-4.5, 0)$, dado por $X_N(x_{s1}^*)$ y $X_N(x_{s2}^*)$, respectivamente.

La estabilidad a lazo cerrado de este controlador se garantiza mediante una restricción terminal de igualdad $x(N) = x_{s1}^*$. Esta ley de control ha sido diseñada para dirigir el sistema desde el estado inicial $x(0) = (2, 1.5)$ hasta el punto de equilibrio x_{s1}^* . Como $x(0)$ está contenido en la región factible, la ley de control dirigirá el sistema al punto óptimo x_{s1}^* de forma asintótica.

En este ejemplo se pueden observar dos cuestiones claves, respecto del dominio de atracción del controlador. En primer lugar, queda en evidencia que es inferior al máximo dominio de control que admite el sistema, con lo cual, esto representa una clara limitación por parte del controlador. En segundo lugar, demuestra que se puede producir una pérdida de factibilidad de la ley de control de MPC debido a cambios en el punto de equilibrio al cual se quiere dirigir el sistema. Es decir, supóngase el escenario en el que se produce un cambio en el punto de equilibrio una vez aplicada la ley de control, es decir, cambia de x_{s1}^* a un nuevo punto x_{s2}^* . Como se observa en la Figura 2-4, la ley de control de MPC así diseñada no se puede aplicar, dado que el estado inicial no está dentro del dominio de atracción del controlador del nuevo punto de operación deseado, es decir, $x(0) \notin X_N(x_{s2}^*)$.

Para solucionar la primera problemática, se han desarrollado diferentes propuestas destinadas a ampliar el dominio de atracción [Limon et al., 2005]. Dado que el mismo depende directamente de la longitud del horizonte de predicción N y de la restricción terminal \mathcal{X}_f , de manera intuitiva, las primeras estrategias que surgieron consistían en flexibilizar estas

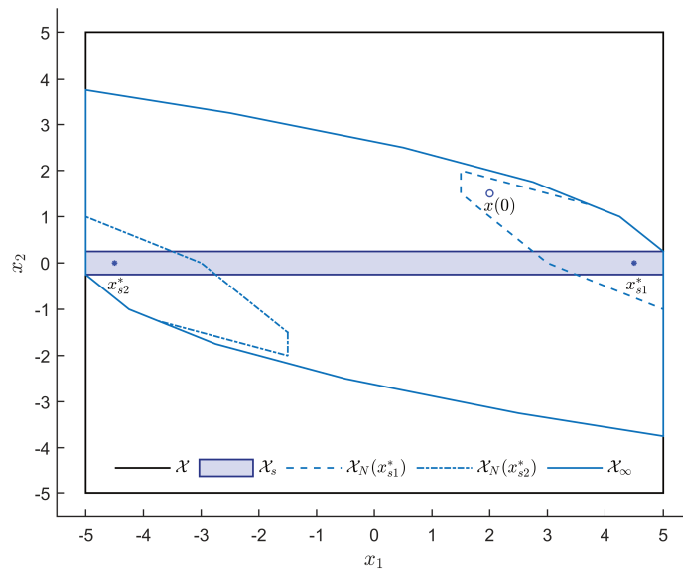


Figura 2-4: Factibilidad del controlador MPC diseñado para el punto de equilibrio x_{s1}^* : el estado inicial $x(0)$ es infactible para el controlador MPC con restricción terminal $x(N) = x_{s2}^*$, dado que $x(0) \notin \mathcal{X}_N(x_{s2}^*)$.

condiciones. Si bien con estas técnicas se consigue el objetivo de aumentar \mathcal{X}_N , ninguna de estas estrategias logra obtener el máximo dominio de control que proporciona el sistema. Además, estas consideraciones poseen la desventaja de que producen un aumento en el costo computacional.

Con respecto al problema de la posible pérdida de factibilidad frente a cambios de puntos de equilibrio, surge una estrategia denominada como MPC para seguimiento [Limon et al., 2008, Ferramosca et al., 2009] que lo resuelve y produce un mayor dominio de atracción que un MPC estándar para un mismo horizonte N . A continuación se explicará esta estrategia con mayor detenimiento.

2.2.3. MPC para seguimiento

El MPC para seguimiento (MPCT, por sus siglas en inglés), es una técnica de control que mediante el uso de variables artificiales (x_a, u_a) permite aumentar el dominio de atracción del sistema y garantizar la factibilidad recursiva bajo cualquier cambio de punto de equilibrio admisible. La formulación considerada, garantiza además la estabilidad y la convergencia del sistema en lazo cerrado al punto de operación deseado.

En su formulación más simple, la función de costo del MPCT está constituida por dos términos. En primer lugar consta de un *costo de etapa*, $V_N^{dyn}(\cdot)$, que penaliza la desviación de la trayectoria predicha respecto de las variables artificiales, y en segundo lugar, por un costo adicional denominado *costo de offset*, $V_O(\cdot)$, que penaliza la desviación de las variables artificiales respecto del punto de referencia objetivo, según alguna métrica de interés. Formalmente, esta función de costo se calcula de la siguiente manera:

$$V_N(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) = V_N^{dyn}(x; \mathbf{u}, x_a, u_a) + V_O(x_a, x_s^*)$$

$$\text{con } V_N^{dyn}(x; \mathbf{u}, x_a, u_a) = \sum_{j=0}^{N-1} (\|x(j) - x_a\|_Q^2 + \|u(j) - u_a\|_R^2),$$

donde $x(j), u(j)$ denotan, respectivamente, la predicción de los estados y las entradas j -muestras adelantadas, mientras que (x_a, u_a) son variables artificiales que representan el mejor punto de equilibrio que el controlador puede alcanzar en N pasos, desde un estado inicial x .

La función costo de offset $V_O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, es necesaria para garantizar la convergencia del sistema a lazo cerrado al punto de operación (x_s^*, u_s^*) y está definida como:

Definición 2.2. $V_O(x, x_s^*)$ es una función definida positiva, estrictamente convexa de tal manera que el único mínimo de

$$\min_{(x,u) \in \mathcal{Z}_s} V_O(x, x_s^*) \quad (2-5)$$

es (x_s^*, u_s^*) .

De la definición anterior, está claro que las condiciones en la elección de $V_O(\cdot)$ no son tan restrictivas. Esta función se puede elegir, en el marco de MPC para seguimiento, como una norma de la distancia al punto de equilibrio deseado [Limon et al., 2008, Ferramosca et al., 2009], es decir, $\|x - x_s^*\|_\infty$, $\|x - x_s^*\|_1$, o una norma cuadrática $\|x - x_s^*\|_T^2$, donde T es una matriz definida positiva; o como una distancia a un conjunto objetivo [Ferramosca et al., 2010a, Ferramosca et al., 2012]. Asimismo, se la puede configurar como una función de costo económico genérico (posiblemente no lineal), proporcionando propiedades significativas al sistema en lazo cerrado. Dado que una función de costo no lineal puede no cumplir con las condiciones requeridas en la Definición 2.2, para este último caso los algoritmos para una aproximación adaptativa del costo no lineal se proporcionan en [Limon et al., 2013, Alamo et al., 2014, D'Jorge et al., 2017].

La ley de control se deriva de la solución del siguiente problema de optimización $\mathcal{P}_N(x, p)$:

$$\min_{\mathbf{u}, x_a, u_a} V_N(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) \quad (2-6)$$

$$s.a. \quad x(0) = x, \quad (2-7)$$

$$x(j+1) = Ax(j) + Bu(j), \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \quad (2-8)$$

$$x(j) \in \mathcal{X}, \quad u(j) \in \mathcal{U}, \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \quad (2-9)$$

$$(x_a, u_a) \in \mathcal{Z}_s, \quad (2-10)$$

$$x(N) = x_a. \quad (2-11)$$

En este problema de optimización x y p son parámetros, mientras que las acciones de control $\mathbf{u} = \{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$ y las referencias artificiales (x_a, u_a) , se consideran como variables de decisión.

Las restricciones (2-7)-(2-9) obligan a que la trayectoria predicha sea coherente con las ecuaciones del modelo dinámico mientras se cumplen las restricciones del sistema. La restricción (2-10) garantiza que (x_a, u_a) es un punto de equilibrio admisible. La última ecuación (2-11) es la restricción terminal de igualdad relajada que obliga al estado predicho al final del horizonte de predicción, a ser igual al estado artificial, es decir, a pertenecer al equilibrio.

Téngase en cuenta, que si bien se plantea una restricción terminal de igualdad, eso no sería muy restrictivo ni complicado de cumplir para el controlador, dado que se le pide que $x(N) = x_a$, donde x_a es una variable de optimización. Asimismo, se podría plantear el diseño del controlador con restricción terminal de desigualdad. La idea subyacente es similar a la del caso de regulación: una ley de control terminal (lineal) debe diseñarse para estabilizar el sistema a cualquier punto de equilibrio admisible (x_a, u_a) . Luego, una función Lyapunov para el sistema controlado, $V_f(x - x_a)$, se usa como la función de costo terminal y un dominio de atracción del sistema controlado por la ley de control terminal $(x(N), x_a, u_a) \in \Omega_t$ se usa como restricción terminal. La región terminal Ω_t depende del punto de equilibrio admisible y es un conjunto denominado invariante para seguimiento, construido de manera tal que hay garantías de estabilidad asintótica y factibilidad recursiva [Limon et al., 2008].

El problema de optimización puede plantearse como un problema de programación cuadrática, cuya solución óptima se denota como $(\mathbf{u}^0, x_a^0, u_a^0)$ y depende de los parámetros del problema de optimización (x, p) . Luego, la ley de control está dada por $\kappa_N(x) = u^0(0; x)$.

Finalmente, dado que el conjunto de restricciones (2-7)-(2-11) no depende del punto de referencia objetivo x_s^* , tampoco lo hace la región de factibilidad, que sólo dependerá del

estado inicial. Esto significa que existe una región \mathcal{X}_N tal que para todo $x \in \mathcal{X}_N$ y para todo $x_s^* \in \mathcal{X}_s$, el problema de optimización $\mathcal{P}_N(x)$ es factible. Es decir, la factibilidad del problema de optimización no se perderá frente a cambios del punto de referencia.

Para un punto de equilibrio determinado x_a , $\mathcal{X}_N(x_a)$ denota el conjunto de estados que pueden dirigirse a x_a en N pasos que satisfacen las restricciones del estado y la entrada a lo largo de su evolución. Este es el dominio de atracción de un controlador MPC diseñado para regular el sistema a x_a . Entonces, el conjunto factible de este controlador es un poliedro $\mathcal{X}_N \subseteq \mathbb{R}^n$ dado por el conjunto de estados iniciales que pueden ser llevados a x_a en N pasos, cumpliendo las restricciones del sistema. Es decir,

$$\mathcal{X}_N = \{x \in \mathcal{X} : \exists(\mathbf{u}, x_a, u_a) \text{ s.a. } x(j) \in \mathcal{X}, u(j) \in \mathcal{U}, j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]}, x(N) = x_a\}.$$

En MPCT, el punto de equilibrio artificial es una variable de decisión, lo que significa que su región \mathcal{X}_N factible es el conjunto de estados x que pueden dirigirse a cualquier estado de equilibrio alcanzable en N pasos, satisfaciendo las restricciones. Esto se puede leer como sigue

$$\mathcal{X}_N = \bigcup_{x_a \in \mathcal{X}_s} \mathcal{X}_N(x_a). \quad (2-12)$$

Para clarificar estas ideas, considérese nuevamente el ejemplo del sistema doble integrador, presentado anteriormente. En la Figura 2-5 se muestra el dominio de atracción para el controlador MPCT, \mathcal{X}_N , y el correspondiente al MPC estándar para el punto x_{s1}^* , $\mathcal{X}_N(x_{s1}^*)$, para un mismo horizonte N . Como se puede observar, ahora se tiene un dominio de atracción mucho más grande al obtenido con MPC, que incluye todo el equilibrio del sistema, con lo cual, si se produce un cambio en el punto de referencia la ley de control del MPCT podrá dirigir al sistema al nuevo punto de operación, y no sólo eso, sino que podrá hacerlo para cualquier cambio de punto de equilibrio que se produzca.

Resumiendo, este esquema de control predictivo se caracteriza por las siguientes características:

- se añade como variable de decisión, un punto de referencia artificial alcanzable;
- se considera un costo de etapa que penaliza la desviación de la trayectoria predicha de las condiciones de estabilidad artificial;
- se añade a la función de costo, un término adicional denominado función de *costo de offset*, que penaliza la desviación entre la referencia artificial y el punto de equilibrio real;

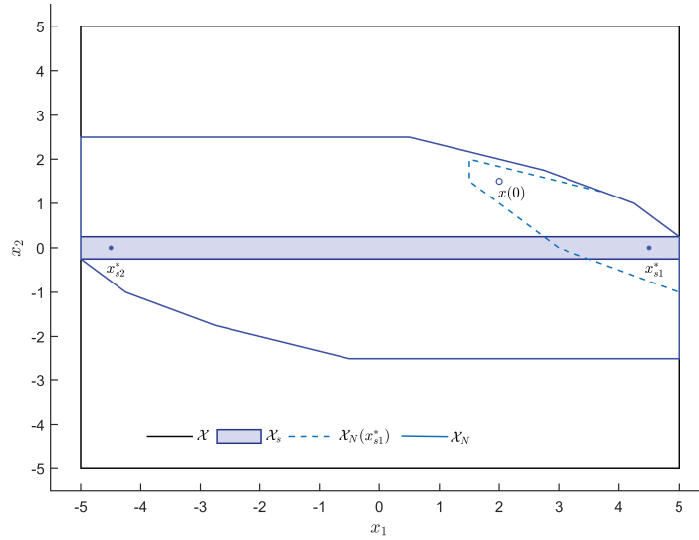


Figura 2-5: Factibilidad del controlador MPCT: el estado inicial $x(0)$ es factible para el controlador MPCT con restricción terminal $x(N) = x_{s2}^*$, dado que $x(0) \in \mathcal{X}_N$.

- se considera una restricción de terminal relajada que depende del punto de referencia artificial en lugar del punto de ajuste real.

2.3. MPC con objetivos económicos

Hasta aquí lo que se tiene es el diseño de controladores cuyo objetivo consiste en dirigir el sistema a un punto de referencia arbitrario lo más rápido posible, pero como se ha comentado anteriormente, el objetivo de control que se desea estudiar, no es estabilizar el sistema controlado en un punto de equilibrio particular, sino optimizar teniendo en cuenta algún criterio económico. Para lo cual se realiza la siguiente definición:

Definición 2.3. La medida del desempeño económico está definida por la función:

$$\ell_{eco}(x, u, p),$$

donde x y u son el estado y la entrada del sistema, respectivamente y p es un vector de parámetros que tiene en cuenta los precios, costos, objetivos de producción, etc.

La función $\ell_{eco}(\cdot)$ representa el criterio económico que se quiere optimizar, y puede cambiar, como se explicó anteriormente, acorde a cambios en el mercado, en los objetivos de producción, a la planificación, o la reconciliación de datos, etc. En general existen muchos

factores que determinan este costo y que hacen que pueda variar. Es por ello que surge la idea de usar un parámetro p , como una simplificación matemática para tener en cuenta los posibles cambios involucrados dentro de la misma. Este parámetro viene dado como resultado de la capa superior de programación y planificación económica y debe considerarse como una entrada a la capa del RTO. En lo que sigue, se supondrá que el parámetro p puede cambiar a lo largo de la evolución de la planta, debido a las fluctuaciones del mercado o la reconciliación de datos [Ferramosca et al., 2014b].

El punto de operación óptimo en el cual se desea estabilizar la planta es el punto de equilibrio económico resultado de la optimización en tiempo real RTO, y se define como:

Definición 2.4. *El punto de equilibrio óptimo, (x_s^{eco}, u_s^{eco}) , satisface*

$$(x_s^{eco}, u_s^{eco}) = \arg \min_{(x,u) \in \mathcal{Z}_s} \ell_{eco}(x, u, p),$$

para un dado p y se asume único.

Por medio de esta definición, queda reflejada la dependencia del punto de operación óptimo respecto del valor de p , es decir, $(x_s^{eco}(p), u_s^{eco}(p))$. Esto significa que si ocurre un cambio en el parámetro p , se puede producir un cambio en el punto de equilibrio óptimo. A lo largo del capítulo, con la finalidad de ser más claros, se utilizará la notación (x_s^{eco}, u_s^{eco}) .

A continuación, se presentarán los controladores que serán objeto de estudio en esta tesis. Un detalle importante a remarcar es que en todos los casos, el diseño del controlador es tal que se garantiza estabilidad, así como también factibilidad recursiva y la convergencia a un punto de operación deseado.

2.3.1. MPC económico de una sola capa

El MPC económico de una sola capa es una estrategia de control que busca resolver la inconsistencia que puede ocurrir entre las capas económica/estacionaria y dinámica en la estructura de control jerárquica. Las diferencias entre los modelos y las escalas de tiempo producen problemas que van desde la imposibilidad de alcanzar los puntos de equilibrio (en un contexto estacionario puro) hasta malos desempeños económicos, en régimen transitorio y en régimen estacionario.

Una estrategia adecuada para unificar estos objetivos consiste en integrar la función de costo económica del RTO como un costo estacionario adicional al costo cuadrático dinámico del MPC para seguimiento, descrito anteriormente. De esta manera, los objetivos económicos

se convierten en objetivos de proceso. Teniendo en cuenta este contexto, se define la función de costo como:

$$\begin{aligned} V_N(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) &= V_N^{dyn}(x; \mathbf{u}, x_a, u_a) + V_{eco}(x_a, u_a, p) \\ \text{con } V_N^{dyn}(x; \mathbf{u}, x_a, u_a) &= \sum_{j=0}^{N-1} \|x(j) - x_a\|_Q^2 + \|u(j) - u_a\|_R^2, \\ V_{eco}(x_a, u_a, p) &= \ell_{eco}(x_a, u_a, p), \end{aligned}$$

donde $x(j), u(j)$ denotan, respectivamente, los estados y entradas predichas, N es el horizonte de predicción y (x_a, u_a) son las variables artificiales.

La ley de control se deriva de la solución del siguiente problema de optimización $\mathcal{P}_N(x, p)$:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}, x_a, u_a} \quad & V_N(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) & (2-13) \\ \text{s.a.} \quad & (2-7) - (2-11). \end{aligned}$$

La particularidad que presenta el diseño de este controlador viene dada por el hecho de que la formulación, tanto en la función de costo, como en las restricciones del problema de optimización, no depende del punto de referencia x_s^{eco} . Esto significa que es el propio controlador quien determina el punto de operación óptimo, guiando el sistema a lazo cerrado hacia el mínimo de la función económica $\ell_{eco}(\cdot)$. Por otro lado, mantiene las ventajas del MPC para seguimiento, presentadas anteriormente.

La contraparte negativa de esta formulación radica en que los objetivos económicos generalmente están representados por una función no lineal. Esto produce que el costo de optimización también lo sea, ocasionando una notable complejidad en la resolución del problema de optimización, además de un elevado costo computacional.

2.3.2. MPC económico de una sola capa basado en el gradiente del costo económico

El objetivo de este controlador es solventar la problemática planteada en la sección anterior. Esencialmente se tiene un MPC que, por medio de un algoritmo subóptimo y haciendo uso del gradiente de la función económica, es resoluble a través de un sólo problema de programación cuadrática, incluso cuando el costo económico es no lineal, garantizando factibilidad recursiva y convergencia al punto de operación económicamente óptimo. De esta manera, la complejidad computacional resulta considerablemente reducida.

Es decir, se propone solucionar el problema de la alta no linealidad a través de aproximaciones. Particularmente, el costo del problema de optimización está dado por la combinación convexa de la solución de dos problemas de optimización, que son cuadráticos y por lo tanto sencillos de resolver. Formalmente, se tiene que la función de costo se define como:

$$V_N^{app}(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) = V_N^{dyn}(x; \mathbf{u}, x_a, u_a) + \ell_{eco}(\hat{x}_a, \hat{u}_a, p) + \nabla \ell'_{eco}(\hat{x}_a, \hat{u}_a, p) \begin{bmatrix} x_a - \hat{x}_a \\ u_a - \hat{u}_a \end{bmatrix},$$

donde $\nabla \ell_{eco}(\cdot)$ es el gradiente de la función de costo económico y $(\mathbf{u}, \hat{x}_a, \hat{u}_a)$ al tiempo k es una solución factible conocida, obtenida desplazando en un paso la solución subóptima aplicada al sistema al tiempo $k - 1$. La ley de control al tiempo k es el resultado de la combinación convexa $\mathbf{u}(k) = \lambda \mathbf{u}^* + (1 - \lambda) \hat{\mathbf{u}}$, con $\lambda \in (0, 1)$, siendo \mathbf{u}^* la solución al tiempo k del siguiente problema de optimización $\mathcal{P}_N^{app}(x, p)$:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}, x_a, u_a} \quad & V_N^{app}(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) \\ \text{s.a.} \quad & (2-7) - (2-11). \end{aligned} \quad (2-14)$$

En primer lugar, para emplear esta estrategia, se debe calcular la **solución factible** (\hat{x}, \hat{u}) del Problema $\mathcal{P}_N(x, p)$, planteado en la sección anterior. Para esto, en la primera iteración simplemente se resuelve el problema reducido $V_N^{dyn}(x)$; luego se podrá utilizar la solución desplazada aplicada al sistema en el instante de tiempo $k - 1$.

A modo de ejemplo, y para clarificar las ideas, considere que se tiene una función de costo original como se muestra en la Figura 2-6. Un punto factible es aquel que se encuentra en la región factible del problema de optimización, sin importar la optimalidad; con lo cual una solución factible del problema de optimización es simplemente un punto en esta función (\hat{x}, \hat{u}) .

Luego, se procede a resolver un problema de optimización aproximado $\mathcal{P}_N^{app}(x, p)$:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}, x_a, u_a} \quad & V_N^{app}(x, p; \hat{\mathbf{u}}, x_a, u_a) \\ \text{s.a.} \quad & (2-7) - (2-11), \end{aligned}$$

donde la función de costo está dada por el costo dinámico V_N^{dyn} y una aproximación lineal de primer orden de la función económica en el punto factible, es decir:

$$V_N^{app}(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) = V_N^{dyn}(x; \mathbf{u}, x_a, u_a) + \ell_{eco}(\hat{x}_a, \hat{u}_a, p) + \nabla \ell'_{eco}(\hat{x}_a, \hat{u}_a, p) \begin{bmatrix} x_a - \hat{x}_a \\ u_a - \hat{u}_a \end{bmatrix}.$$

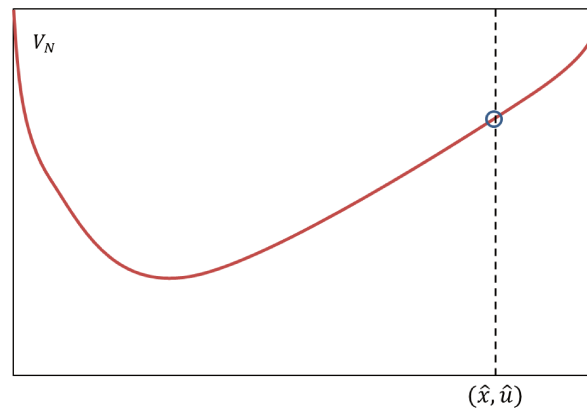


Figura 2-6: Solución factible (\hat{x}, \hat{u}) .

La **solución óptima aproximada** del problema $\mathcal{P}_N(x, p)$, está dada por (x^*, u^*) . Como se puede observar, esta función de costo es meramente cuadrática, debido a que está constituida por un término cuadrático dado por el costo $V_N^{dyn}(\cdot)$ y un término lineal, ya que tanto el gradiente de la función de costo económico con respecto a (x, u) , es decir, $\nabla \ell_{eco}(\cdot)$, como la función económica $\ell_{eco}(\cdot)$ están evaluados en el punto factible obtenido anteriormente.

En la Figura 2-7 se puede observar una representación gráfica del costo original V_N (función en color rojo) y del costo del problema aproximado V_N^{app} (función en color verde). Nótese que los costos van a coincidir en el punto factible.

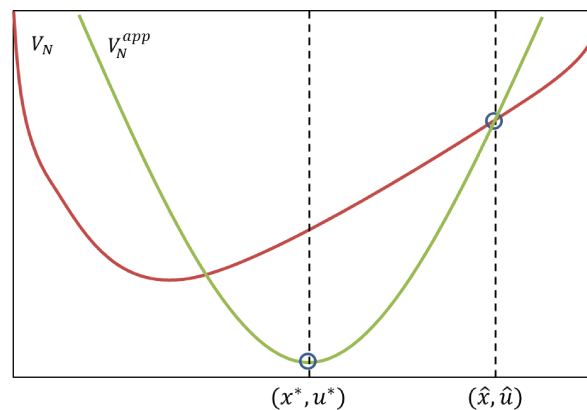


Figura 2-7: Solución aproximada (x^*, u^*) .

Una vez planteado estos problemas de optimización se obtiene una **solución subóptima** que produce un decrecimiento del costo del MPC, a partir de la combinación convexa de la

solución factible y la aproximada, es decir,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\lambda) &= \lambda \mathbf{u}^* + (1 - \lambda) \hat{\mathbf{u}} & u_a(\lambda) &= \lambda u_a^* + (1 - \lambda) \hat{u}_a, \\ \mathbf{x}(\lambda) &= \lambda \mathbf{x}^* + (1 - \lambda) \hat{\mathbf{x}} & x_a(\lambda) &= \lambda x_a^* + (1 - \lambda) \hat{x}_a,\end{aligned}$$

para un $\lambda \in [0, 1]$. A partir de esto, se obtiene una solución que mejora el costo real total respecto del punto factible.

Para comprender mejor estas ideas, considérese la siguiente parametrización del costo original y el aproximado en λ :

$$\begin{aligned}V_N(\lambda) &= \sum_{j=0}^{N-1} (\|x_j(\lambda) - x_a(\lambda)\|_Q^2 + \|u_j(\lambda) - u_a(\lambda)\|_R^2) + \ell_{eco}(x_a(\lambda), u_a(\lambda)) \\ V_N^{app}(\lambda) &= \sum_{j=0}^{N-1} (\|x_j(\lambda) - x_a(\lambda)\|_Q^2 + \|u_j(\lambda) - u_a(\lambda)\|_R^2) + \ell_{eco}(\hat{x}_a, \hat{u}_a) \\ &\quad + \nabla \ell_{eco}(\hat{x}_a, \hat{u}_a) \begin{bmatrix} x_a(\lambda) - \hat{x}_a \\ u_a(\lambda) - \hat{u}_a \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Analizando estas ecuaciones, se observa que en los extremos se tendrá que:

- si $\lambda = 0$ se está en presencia de la solución factible. Nótese que en este punto se tiene que ambos costos son iguales, es decir, si se define el costo $\hat{V} \triangleq V_N(\lambda = 0)$, se tiene que $V_N^{app}(\lambda = 0) = \hat{V}$.
- si $\lambda = 1$ se está en presencia de la solución aproximada. En este punto se define el costo como $V^* \triangleq V_N(\lambda = 1)$ y se tiene que $V_N^{app}(\lambda = 1)$ cuyo valor es el óptimo.

Esto se puede observar gráficamente en la Figura 2-8.

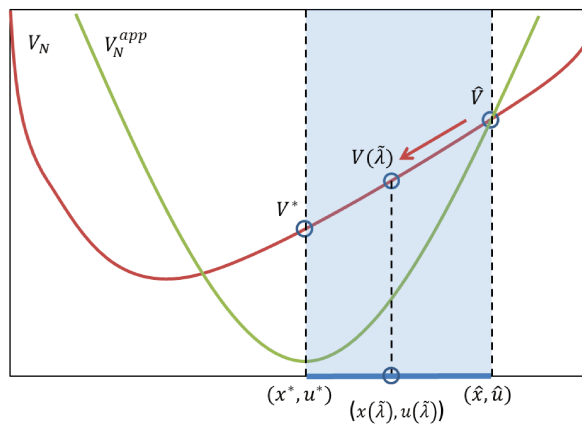


Figura 2-8: Solución subóptima y costos parametrizados.

Dado que para $\lambda = 1$ el costo aproximado es óptimo, por optimalidad se tiene que $V_N^{app}(1) < V_N^{app}(0)$. Entonces se establece el siguiente teorema

Teorema 2.5. [Alamo et al., 2014, Teorema 1] Sea el Problema $\mathcal{P}_N(x, p)$, con $x \neq x_s^{eco}$, y las soluciones subóptimas mencionadas anteriormente, $\mathbf{u}(\lambda), x_a(\lambda), u_a(\lambda)$. Considerar también que $(\hat{x}_a, \hat{u}_a) \neq (x_s^{eco}, u_s^{eco})$. Luego existe un $\tilde{\lambda} \in (0, 1]$ tal que, para todo $0 \leq \lambda \leq \tilde{\lambda}$

$$V_N(x, p; \mathbf{u}(\lambda), x_a(\lambda), u_a(\lambda)) < V_N(x, p; \hat{\mathbf{u}}, \hat{x}_a, \hat{u}_a). \quad (2-15)$$

La prueba de este teorema se puede ver en [Alamo et al., 2014]. Téngase en cuenta que, en dicho trabajo, se propone un método para calcular $\tilde{\lambda}$ basado en el Hessiano del costo económico. Asimismo, $\tilde{\lambda}$ se puede calcular heurísticamente de tal forma que se cumpla la condición (2-15).

Finalmente, de la **solución subóptima** $(\mathbf{u}^{so}, x_s^{so}, u_s^{so}) = (\mathbf{u}(\tilde{\lambda}), x_a(\tilde{\lambda}), u_a(\tilde{\lambda}))$, se considera el primer elemento de la secuencia de entradas \mathbf{u}^{so} para implementar la ley de control MPC implícita, $\kappa_N(x, p) \triangleq u^{so}(0; x)$. En el siguiente instante de tiempo k , se tomará como solución factible la solución óptima desplazada obtenida en $k - 1$. De esta manera el costo real irá decreciendo iterativamente, hasta converger al óptimo de la función de costo original $V_N(\cdot)$, como se observa en la Figura 2-9.

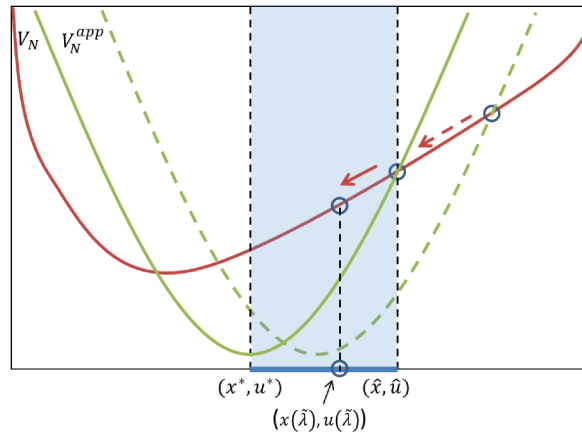


Figura 2-9: Decrecimiento iterativo del costo.

Entonces, teniendo en cuenta estos resultados, la función de costo del controlador se define a partir de una función aproximada dada por $V_N^{app}(\cdot)$.

2.3.3. MPC Económico

Los controladores presentados en las secciones anteriores, están diseñados para garantizar el seguimiento asintótico del punto de referencia óptimo económicamente, pero sin considerar el valor del costo económico en el transitorio. Esta estrategia de control es prácticamente óptima cuando el setpoint no cambia respecto a la dinámica del sistema. Sin embargo, en algunas aplicaciones industriales, el valor del costo económico durante el transitorio es más importante que el valor en el estado estacionario. En particular, cuando el costo económico está sujeto a continuos cambios. Por lo tanto, en estos casos resulta importante optimizar el criterio económico a lo largo de toda la trayectoria, y no solamente en el estado estacionario.

Este contexto representa la motivación principal para el diseño de lo que se define en la literatura como MPC Económico. Este controlador se caracteriza por utilizar como costo de etapa dinámico, la propia función de costo económica del RTO. La función de costo se define como:

$$V_N(x, p; \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell_{eco}(x(j), u(j), p),$$

donde $x(j), u(j)$ denotan, respectivamente, los estados y entradas predichas, N es el horizonte de predicción.

El problema de optimización asociado a este costo, que se desea resolver, está dado por:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}} \quad & V_N(x, p; \mathbf{u}) \\ \text{s.a.} \quad & x(0) = x, \\ & x(j+1) = Ax(j) + Bu(j), \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \\ & x(j) \in \mathcal{X}, \quad u(j) \in \mathcal{U}, \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \\ & x(N) = x_s^{eco}, \end{aligned}$$

donde (x_s^{eco}, u_s^{eco}) es el óptimo económico que minimiza la función $\ell_{eco}(\cdot)$ para un parámetro p dado, mientras que \mathbf{u} es la variable de optimización.

Como se puede observar, en esta formulación es necesario conocer el valor del óptimo económico (x_s^{eco}, u_s^{eco}) , por lo tanto se debe resolver en primer lugar el problema RTO, para luego solventar el problema MPC.

De manera similar a lo realizado en la Sección 2.2, con el objetivo de garantizar la factibilidad recursiva frente a posibles cambios en el punto de operación económicamente óptimo,

y aumentar el dominio de atracción del controlador, se añaden variables artificiales al problema de optimización. De esta manera, la formulación del costo está dada por:

$$V_N^e(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell_{eco}(x(j) - x_a + x_s^{eco}, u(j) - u_a + u_s^{eco}, p) + V_O(x_a, u_a),$$

donde x y p son los parámetros, mientras que (\mathbf{u}, x_a, u_a) son las variables de optimización. La función costo de offset $V_O(\cdot)$ está definida según (2.2).

La ley de control se deriva de la solución del siguiente problema de optimización $\mathcal{P}_N^e(x, p)$:

$$\min_{\mathbf{u}, x_a, u_a} V_N^e(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) \quad (2-16)$$

$$s.a. \quad (2-7) - (2-11). \quad (2-17)$$

Cabe destacar que la única diferencia que presentan todas estas formulaciones es el costo que se va a minimizar. Es decir, solo varía la trayectoria del sistema en lazo cerrado obtenida en cada uno de los casos. Sin embargo, todas las ventajas relativas al tema de la factibilidad recursiva y dominio de atracción ampliado que se tienen por medio del MPCT se mantienen con cualquiera de los controladores formulados previamente, dado que el conjunto de restricciones es exactamente el mismo para todos los casos.

2.4. Análisis de estabilidad del MPC

Esta sección está destinada a explicar los requisitos necesarios para que la formulación de los controladores MPC económicos, presentados en la sección anterior garanticen factibilidad, convergencia y estabilidad. Para esto, en primer lugar se presentan las condiciones necesarias y suficientes para garantizar estabilidad en un controlador MPC nominal y MPC para seguimiento, presentados en la Sección 2.2. Luego, se verá como se puede adaptar esta idea al caso del MPC económico.

2.4.1. Estabilidad en MPC

La idea principal en la demostración de estabilidad en MPC es usar una función de costo óptimo como función de Lyapunov [Rawlings and Mayne, 2009]. La teoría de Lyapunov provee un marco de gran utilidad, para determinar la estabilidad o estabilidad asintótica. Esta teoría establece condiciones suficientes para garantizar la estabilidad de un sistema y está

basada en la existencia de una función del estado definida positiva asociada al sistema denominada función de Lyapunov. Bajo ciertas hipótesis sobre esta función se puede demostrar estabilidad, estabilidad asintótica o exponencial [Vidyasagar, 1993].

Antes de proceder con la definición formal de función de Lyapunov, supóngase que se tiene el sistema descrito en la Sección 2-2, y que el problema de optimización $\mathcal{P}_N(x)$ está dado por

$$\min_{\mathbf{u}} V_N(x, \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell(x(j), u(j)) + V_f(x(N)) \quad (2-18)$$

$$s.a \quad x(0) = x, \quad (2-19)$$

$$x(j+1) = Ax(j) + Bu(j), \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \quad (2-20)$$

$$u(j) \in \mathcal{U}, \quad x(j) \in \mathcal{X}, \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \quad (2-21)$$

$$x(N) \in \mathcal{X}_f, \quad (2-22)$$

donde el horizonte de predicción está dado por $N \in \mathbb{I}_{>0}$. En este problema de optimización x es un parámetro, y las acciones de control $\mathbf{u} = \{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$ se consideran como variables de decisión. La solución óptima del problema se denota como $\mathbf{u}^0(x) := \{u^0(0; x), u^0(1; x), \dots, u^0(N-1; x)\}$ y depende del parámetro x . La ley de control está dada por $\kappa_N(x) = u^0(0; x)$, es decir, por el primer elemento de la secuencia óptima de control obtenida en cada instante de tiempo k .

Asimismo, para proceder con el análisis de estabilidad, a continuación se presentan algunas definiciones importantes que se utilizarán en la teoría de Lyapunov presentada.

Definición 2.6. (Función definida positiva) Una función γ es definida positiva con respecto a $x = a$ si es continua, $\gamma(a) = 0$, y $\gamma(x) > 0$ para todo $x \neq a$.

Definición 2.7. (Funciones \mathcal{K} , \mathcal{K}_∞ , \mathcal{KL})

- Una función $\alpha(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función \mathcal{K} si es continua, vale cero en el origen y es estrictamente creciente.
- Una función $\alpha(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función \mathcal{K}_∞ si es una función \mathcal{K} y además $\alpha(a) \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow \infty$.
- Una función $\beta(\cdot) : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{I}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ se dice que es una función \mathcal{KL} si:
 - la función $\beta(a, k)$ es \mathcal{K} en a para todo $k \geq 0$ fijo,

- la función $\beta(a, k)$ es decreciente en k para todo $a \geq 0$ fijo, de modo que $\beta(a, k) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Teniendo en cuenta estos conceptos, las funciones de Lyapunov se definen como sigue:

Definición 2.8. (Función de Lyapunov) Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una función de Lyapunov para el sistema $x(k+1) = f(x(k))$ en un conjunto \mathcal{X}_f , si existen funciones $\alpha_i \in \mathcal{K}_\infty$, $i = 1, 2$ y una función α_3 definida positiva, tal que se cumple

$$V(x) \geq \alpha_1(\|x\|), \quad (2-23)$$

$$V(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad (2-24)$$

$$V(f(x)) - V(x) \leq -\alpha_3(\|x\|), \quad (2-25)$$

para todo $x \in \mathcal{X}_f$.

Si $V(\cdot)$ satisface las ecuaciones (2-23)-(2-25) para todo $x \in \mathcal{X}$, donde $\mathcal{X}_f \subset \mathcal{X}$ es un conjunto invariante positivo para $x(k+1) = f(x)$, entonces se dice que $V(\cdot)$ es una función de Lyapunov en \mathcal{X} para el sistema $x(k+1) = f(x)$ y el conjunto \mathcal{X}_f .

La existencia de una función de Lyapunov es una condición suficiente para la estabilidad asintótica global como se enuncia en el siguiente teorema

Teorema 2.9. Si existe una función de Lyapunov, $V(\cdot)$, para el sistema $x(k+1) = f(x(k))$, con $\alpha_3 \in \mathcal{K}_\infty$. Entonces, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema.

La demostración de este Teorema puede verse detalladamente en [Rawlings and Mayne, 2009].

Para proceder con el análisis de estabilidad, a continuación se presentaran una serie de supuestos necesarios para la existencia de soluciones y finalmente se muestra que, bajo estas condiciones, la función de costo es de Lyapunov. Para esto, considérese el sistema a lazo cerrado $x(k+1) = Ax(k) + B\kappa_N(x(k)) := f_{lc}(x(k))$, donde $\kappa_N(\cdot)$ es la ley de control obtenida al resolver el problema $\mathcal{P}_N(\cdot)$. Debido a que esta ley es una función implícita del estado bien puede no ser continua, provocando que $f_{lc}(\cdot)$ tampoco lo sea. Por esto se debe suponer que $f_{lc}(\cdot)$ es localmente acotada¹ (ver Apéndice B de [Rawlings and Mayne, 2009]).

¹Una función $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ es localmente acotada si para todo $x \in \mathcal{X}$ existe un entorno \mathcal{N} de x tal que $f(\mathcal{N})$ es un conjunto acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq M$ para todo $x \in \mathcal{N}$.

Supuestos para la existencia de soluciones MPC

Para la existencia de soluciones al problema $\mathcal{P}_N(x)$ se deben considerar algunas hipótesis básicas además de las mencionadas referentes a los conjuntos de restricciones:

Suposición 2.10. (Continuidad del modelo de predicción y del costo) Las funciones de costo final, $V_f(\cdot)$, costo de etapa, $\ell(\cdot)$ y modelo de predicción, $Ax + Bu$, se supondrán continuas y, además, valdrán cero en el origen.

Suposición 2.11. (Propiedad de las restricciones) El conjunto \mathcal{X} y el conjunto final $\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}$ son cerrados y \mathcal{U} compacto. Cada uno de ellos contiene al origen en su interior.

Suposición 2.12. (Supuesto básico de estabilidad)

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \{V_f(Ax + Bu) + \ell(x, u) : Ax + Bu \in \mathcal{X}_f\} \leq V_f(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}_f$$

Suposición 2.13. (Supuesto de invarianza) El conjunto \mathcal{X}_f es un invariante de control para el sistema $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$.

Bajo estas suposiciones, se tiene que ([Rawlings and Mayne, 2009]):

- (i) La función de costo $V_N(\cdot)$ es continua en $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$.
- (ii) Para cada $x \in \mathcal{X}_N$, existe una solución para $\mathcal{P}_N(x)$.

Observación 2.14. Para el análisis básico de estabilidad que se dará a continuación, se considera que no existe error entre el modelo de predicción y el sistema dinámico que se quiere controlar.

Ahora bien, bajo las hipótesis mencionadas, se puede presentar el siguiente Teorema, que determina las condiciones generales para la estabilidad de MPC [Rawlings and Mayne, 2009].

Teorema 2.15. (Decrecimiento del costo óptimo) Supóngase, como es usual, ciertas las Hipótesis 2.10-2.13. Entonces

$$V_N^0(f_{lc}(x(k))) \leq V_N^0(x) - \ell(x, \kappa_N(x)),$$

para todo $x \in \mathcal{X}_N$.

Demostración. La demostración puede encontrarse en [Rawlings and Mayne, 2009, Lema 2.14]. □

El resultado del teorema anterior se mantiene si el conjunto de entradas \mathcal{U} es cerrado aunque no necesariamente acotado, y puede usarse, con suposiciones adecuadas en la función de costo de etapa $\ell(\cdot)$, para establecer la estabilidad asintótica del origen. La propiedad de decrecimiento establecida en el teorema anterior puede establecerse también utilizando una propiedad de monotonía de la función de costo óptimo. Como muestra la siguiente propiedad.

Proposición 2.16. (Monotonía del costo óptimo) *Supóngase ciertas las Hipótesis 2.10, 2.11, 2.12 y 2.13. Entonces*

$$V_{j+1}^0(x) \leq V_j^0(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (2-26)$$

$$V_N^0(x) \leq V_f(x) \quad \forall x \in \mathcal{X}_f. \quad (2-27)$$

Demostración. La demostración puede encontrarse en [Rawlings and Mayne, 2009, Lema 2.15]. □

La propiedad anterior también es cierta si \mathcal{U} es cerrado y no acotado. La propiedad de monotonía de la función de costo óptimo puede utilizarse para establecer el decrecimiento del costo propuesto en el Teorema 2.15 ([Rawlings and Mayne, 2009]).

La función de costo óptimo es de Lyapunov

El Teorema 2.15 muestra que la función de costo óptimo $V_N^0(\cdot)$ tiene la propiedad de decrecimiento que la convierte en la candidata adecuada para ser una función de Lyapunov (véase Definición 2.8), con lo cual se puede utilizar para establecer la estabilidad del origen para una amplia variedad de sistemas MPC. Para continuar, se postula la siguiente condición en el costo de la etapa $\ell(\cdot)$ y el costo de la terminal $V_f(\cdot)$ requeridos para demostrar que $V_N^0(\cdot)$ tiene las propiedades indicadas en la Definición 2.8, que son suficientes para establecer estabilidad del origen. Un supuesto adicional es:

Suposición 2.17. (Cotas para el costo de etapa y final) *El costo de etapa $\ell(\cdot)$ y el costo final $V_f(\cdot)$ satisfacen*

$$\ell(x, u) \geq \alpha_1(\|x\|) \quad \forall x \in \mathcal{X}_N, \quad y \forall u \in \mathcal{U}$$

$$V_f(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad \forall x \in \mathcal{X}_f.$$

Con esta hipótesis extra se tiene la siguiente proposición

Proposición 2.18. (*Función de Lyapunov en \mathcal{X}_N*) Supóngase ciertas los Supuestos 2.10-2.13 y 2.17, además \mathcal{X}_f es acotado y contiene al origen en su interior. Entonces, existen funciones $\alpha_i \in \mathcal{K}_\infty$, $i = 1, 2$, tal que $V_N^0(\cdot)$ tiene las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} V_N^0(x) &\geq \alpha_1(\|x\|), \\ V_N^0(x) &\leq \alpha_2(\|x\|), \\ V_N^0(f_{lc}(x)) &\leq V_N^0(x) - \alpha_1(\|x\|), \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathcal{X}_N$.

Demostración. La prueba puede encontrarse en [Rawlings and Mayne, 2009, Proposición 2.19]. \square

Ahora, teniendo en cuenta el Teorema 2.9, y la Proposición anterior, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 2.19. *Supóngase ciertas las hipótesis requeridas en la Proposición 2.18. Luego, el origen es asintóticamente estable para el sistema a lazo cerrado $x(k+1) = f_{lc}(x(k))$.*

2.4.2. Estabilidad en MPCT

Para el caso de la formulación de MPC para seguimiento, las tres condiciones para que el costo óptimo V_N^0 sea una función de Lyapunov, se cumplen de manera similar al caso de regulación; sólo que referido a la cantidad $\|x - x_a\|$, en lugar de a $\|x\|$, lo que muestra que $x \rightarrow x_a$. Pero bien podría ocurrir que estas dos secuencias de estados, si bien una converge a la otra, no se produzca la convergencia a ningún equilibrio. Para mostrar que eso no es así, además se muestra que existe una función \mathcal{K} , α , tal que

$$\|x - x_a\| \geq \alpha(\|x - x_s\|),$$

de modo que si $\|x - x_a\|$ va a cero, también lo hace $\|x - x_s\|$. De esta manera podemos recurrir a los mismos argumentos del MPC estándar para demostrar estabilidad asintótica.

También en este caso, como sucede para el MCP estándar el controlador se puede diseñar con una función de costo terminal y una restricción de desigualdad en el estado terminal. La restricción terminal obliga al estado terminal a estar en una región que es un dominio de atracción del sistema estabilizado por un controlador local, denominado ley de control terminal. La función de costo terminal se elige para que sea una función de Lyapunov del

sistema controlado por la ley de control terminal. Estas suposiciones aseguran la existencia de una solución factible basada en la solución óptima en el último instante de muestreo y aseguran que la función de costo óptimo sea una función de Lyapunov para el sistema controlado. Las principales ventajas de esta metodología es que el controlador resultante tiene un mayor dominio de atracción y un mejor rendimiento en bucle cerrado que el controlador que usa una restricción de igualdad.

2.4.3. Estabilidad en MPC económico

En la formulación de MPC económico, dado a que el costo óptimo no necesariamente decrece a lo largo de la trayectoria en lazo cerrado y, en algunos casos, puede suceder que $\ell_{eco}(x, u, p) < \ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p)$ en el régimen transitorio, el enfoque presentado anteriormente no puede usarse, [Rawlings et al., 2012, Angeli et al., 2012]. En este contexto, se introduce un costo de etapa modificado, denominado como *costo rotado* [Amrit, 2011], que presenta la misma solución que el problema original y que puede ser usado como una función de Lyapunov si se satisfacen ciertos supuestos. Antes de definir el costo rotado, se introducen algunas definiciones y suposiciones previas necesarias.

Definición 2.20. (*Sistema estrictamente disipativo*) El sistema $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ es estrictamente disipativo con respecto a una tasa de suministro $s : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ si existe una función de almacenamiento $\lambda : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ y una función definida positiva $\rho : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, tal que para todo $(x, u) \in \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{U}$

$$\lambda(Ax + Bu) - \lambda(x) \leq -\rho(x - x_s^{eco}, u - u_s^{eco}) + s(x, u). \quad (2-28)$$

La noción de disipatividad en las ciencias físicas, está estrechamente relacionada con la noción de energía. Un sistema disipativo se caracteriza por la propiedad de que, en cualquier momento, la cantidad de energía que el sistema puede suministrar a su entorno no puede exceder la cantidad de energía que se le ha suministrado.

Suposición 2.21. (*Sistema disipativo*). El sistema lineal $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ es disipativo con respecto a una tasa de suministro $s(x, u) = \ell(x, u) - \ell(x_s^{eco}, u_s^{eco})$.

Suposición 2.22. (*Continuidad del costo, del sistema y del almacenamiento*). El costo $\ell(\cdot)$, la función dinámica del sistema $x(k+1)$ y la función de suministro $\lambda(\cdot)$ son continuos en \mathcal{Z} .

Teniendo en cuenta las suposiciones precedentes, se define el costo de etapa rotado como $L(x, u) : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, en función del costo de etapa económico $\ell(\cdot)$, y la función de

almacenamiento $\lambda(\cdot)$ correspondiente, como:

$$L(x, u, p) := \ell_{eco}(x, u, p) + \lambda(x) - \lambda(Ax + Bu) - \ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p). \quad (2-29)$$

Considerando que las Suposiciones 2.21 - 2.22 se cumplen, entonces el costo rotado presenta las siguientes propiedades:

1 Solución óptima en el punto de equilibrio: El siguiente problema de optimización

$$\min_{(x,u) \in \mathcal{Z}} L(x, u, p) \quad \text{suje to a } x = Ax + Bu, \quad (2-30)$$

presenta la misma solución que el problema

$$\min_{(x,u) \in \mathcal{Z}} \ell_{eco}(x, u, p) \quad \text{suje to a } x = Ax + Bu, \quad (2-31)$$

la cual esta dada por (x_s^{eco}, u_s^{eco}) .

2 Límite inferior: La desigualdad de disipatividad implica que el costo de etapa rotado $L(x, u, p) \geq \rho(x - x_s^{eco}, u - u_s^{eco}), \forall (x, u) \in \mathcal{Z}$ y por lo tanto puede estar limitado por una función $\mathcal{K}, \gamma(\cdot)$

$$L(x, u, p) \geq \gamma(|(x - x_s^{eco}, u - u_s^{eco})|) \geq \gamma(|x - x_s^{eco}|) \geq 0, \quad \forall (x, u) \in \mathcal{Z}. \quad (2-32)$$

Finalmente, si el sistema es disipativo con respecto a la tasa de decrecimiento $\ell_{eco}(x, u, p) - \ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p)$, resolver el problema de optimización dado por (2-18), es equivalente a resolver

$$\min_{\mathbf{u}} \tilde{V}_N(x, \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{N-1} L(x(j), u(j), p) + \tilde{V}_f(x(N)) \quad (2-33)$$

$$\text{suje to a:} \quad (2-34)$$

$$x(j+1) = Ax(j) + Bu(j) \quad x(0) = x, \quad (2-35)$$

$$u(j) \in \mathcal{U}, \quad x(j) \in \mathcal{X}, \quad \forall j \in \mathbb{I}_{0:N-1} \quad (2-36)$$

$$x(N) \in \mathcal{X}_f, \quad (2-37)$$

donde $\tilde{V}_f(x(N))$ es el costo rotado del costo final $V_f(x(N))$. Este problema presenta la particularidad de que por las propiedades del costo rotado, ahora sí se puede utilizar el costo $\tilde{V}_N(\cdot)$ como función de Lyapunov para demostrar estabilidad asintótica.

Capítulo 3

MPC para sistemas lineales con incertidumbre aditiva

3.1. Introducción

Como se ha visto al comienzo del capítulo anterior, el control predictivo está basado en la determinación de la evolución futura del sistema que se desea controlar, para lo cual es necesario disponer de un modelo apropiado de la dinámica de dicho sistema. Sin embargo, es a menudo muy difícil, si no imposible, contar con un modelo que describa exactamente el comportamiento del sistema real. Esto se debe, principalmente, a que siempre existen fenómenos no modelados, inexactitudes en los parámetros estimados y perturbaciones externas no contempladas al momento de definir el modelo. Más aun, suele existir una decisión de compromiso a la hora de elegir entre *complejidad* y *exactitud*, que hace que muchas veces se acepte un cierto grado de inexactitud para poder contar con un modelo sencillo, que simplifique tanto la identificación como el control propiamente dicho.

Esa inexactitud en la descripción del comportamiento de un dado sistema se conoce como *incertidumbre* y, aunque no puede ser descrita en sentido estricto, sí puede ser tomada en cuenta en los modelos, aunque más no sea como una cantidad responsable de las discrepancias entre predicciones y comportamiento real o estimado.

Formalmente, se considerará el siguiente modelo lineal, en tiempo discreto, con incertidumbre aditiva, [Michalska and Mayne, 1993, De Nicolao et al., 1998, Mayne et al., 2000]:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k), \quad (3-1)$$

siendo $x(k) \in \mathbb{R}^n$ el vector de estados y $u(k) \in \mathbb{R}^m$ el vector de entradas de control, ambos

en el instante k . El vector $w(k) \in \mathbb{R}^n$ representa la incertidumbre del modelo (que incluye tanto diferencias planta-modelo como perturbaciones no medidas), y el único conocimiento que se tiene de ella es que está acotada, de forma tal que

$$w(k) \in \mathcal{W}, \quad k \in \mathbb{I}_{\geq 0}, \quad (3-2)$$

donde \mathcal{W} es un conjunto compacto en \mathbb{R}^n , que contiene al origen en su interior. El sistema está, además, sometido a restricciones tanto en las actuaciones como en los estados, descritas como

$$\begin{aligned} x(k) &\in \mathcal{X}, \\ u(k) &\in \mathcal{U}, \end{aligned} \quad (3-3)$$

donde \mathcal{X} y \mathcal{U} son, como en el capítulo anterior, conjuntos compactos que contienen al origen en su interior.

El modelo

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + Bu(k), \quad (3-4)$$

describe el comportamiento del sistema en caso de no haber incertidumbres, y se denomina *modelo nominal*.

En el contexto de los controladores MPC - donde el modelo de predicción juega un papel fundamental - se sabe que la estrategia cuenta ya con una robustez intrínseca (denominada en la literatura *robustez inherente* [Rawlings and Mayne, 2009]) que hace que aun con modelos nominales se puedan conseguir desempeños del lazo cerrado altamente aceptables. Sin embargo, a medida que la incertidumbre del modelo comienza a ser significativa, esta robustez inherente de la estrategia deja de ser suficiente, y comienzan a aparecer efectos indeseados, como los que se detallan a continuación:

- Las acciones de control obtenidas en base al modelo nominal pueden no ser óptimas para el sistema real, incurriendo en un costo mayor al calculado y, por tanto, en un comportamiento inaceptable del sistema.
- El sistema real puede evolucionar a estados en los que el control MPC no es factible, es decir, a estados en los que es imposible satisfacer todas las restricciones del sistema. En este caso, el problema de optimización no tendría solución posible.
- La evolución del sistema podría hacerse inestable, a pesar del correcto diseño del controlador, basado en el modelo nominal.

Por estas razones, se han ido desarrollando en la literatura distintas formulaciones de MPC basadas en modelos con incertidumbre como el (3-1). Cuando lo que se busca es garantizar las propiedades típicas de MPC (factibilidad, estabilidad) para todas las posibles realizaciones de la incertidumbre, se habla de formulaciones de *MPC robusto*. Cuando por el contrario, lo que se busca es mantener las propiedades de MPC con una cierta probabilidad, aprovechando el conocimiento de las distribuciones probabilísticas de la incertidumbre, se habla de formulaciones de *MPC estocástico*. En el primer caso, se obtienen formulaciones que pagan la garantía determinística de las propiedades con desempeños más conservadores. En el segundo, se obtienen formulaciones que pagan desempeños más ambiciosos con pérdidas esporádicas de factibilidad o estabilidad en términos de la esperanza matemática.

En ambos casos, la convergencia del sistema real ya no será a un punto de equilibrio, sino a un conjunto tal que contenga las excursiones del sistema bajo la influencia exclusiva de la incertidumbre. A continuación se presentarán dos estrategias de MPC particulares, que se encuadran, respectivamente, en el enfoque robusto y el enfoque estocástico.

3.2. MPC robusto

En lo que sigue se presentará una estrategia de MPC robusto, que será clave en la formulación de los controladores propuestos en los capítulos finales. El enfoque sigue las ideas presentadas en [Chisci et al., 2001, Ferramosca et al., 2012], y se caracteriza por utilizar un modelo nominal para las predicciones y acotar los conjuntos de restricciones originales \mathcal{X} y \mathcal{U} , para dar cuenta de las posibles realizaciones de la incertidumbre.

Se considerará, sin perder generalidad, el problema de regulación al origen. La convergencia asintótica que se busca es, por tanto, a un conjunto \mathcal{R}_∞ que contiene al origen en su interior y que, además de contener todas las evoluciones posibles del sistema incierto en torno al origen, deberá ser lo más pequeño posible, de modo de minimizar la sensibilidad del lazo a las perturbaciones.

Para esto último, se considera una pre-estabilización del sistema nominal (destinada, como se verá, a operar principalmente dentro de \mathcal{R}_∞) dada por una realimentación de estado estabilizante, K . El sistema pre-estabilizado se describe como:

$$\begin{aligned}\bar{x}(k+1) &= A_K \bar{x}(k) + Bc(k) \\ u(k) &= K\bar{x}(k) + c(k),\end{aligned}\tag{3-5}$$

donde $A_K = A + BK$ tiene todos sus autovalores en el interior del círculo unitario y la

variable de control $c(k)$ representa la diferencia entre la entrada de control $u(k)$ y la realimentación $K\bar{x}(k)$. Se supondrá, además, que $\lim_{k \rightarrow \infty} c(k) = 0$, de manera tal que el sistema (3-5) tiende asintóticamente a $\bar{x}(k+1) = A_K \bar{x}(k)$.

Ahora interesa caracterizar el conjunto objetivo \mathcal{R}_∞ , donde la realimentación K tendrá la tarea de minimizar el efecto de la incertidumbre. Para ello, es conveniente introducir primero la noción formal de conjunto invariante robusto.

Definición 3.1. [Kolmanovsky and Gilbert, 1998] Un conjunto \mathcal{S} es llamado conjunto invariante positivo robusto (RPI) para el sistema incierto $x(k+1) = A_K x(k) + w(k)$, con $w(k) \in \mathcal{W}$, si $A_K \mathcal{S} \oplus \mathcal{W} \subseteq \mathcal{S}$.

Entre todos los posibles conjuntos RPI, se busca asociar el conjunto objetivo \mathcal{R}_∞ al mínimo de ellos, es decir, al conjunto RPI que, para una dada K , no contiene a ningún otro. Una forma de caracterizar este conjunto es mediante el cálculo de los conjuntos alcanzables, como se muestra a continuación.

Definición 3.2. El conjunto alcanzable en j pasos, \mathcal{R}_j , está dado por

$$\mathcal{R}_j = \bigoplus_{i=0}^{j-1} A_K^i \mathcal{W}, \quad j \in \mathbb{I}_{>0}. \quad (3-6)$$

Teniendo en cuenta esta definición, \mathcal{R}_j representa el conjunto de estados del sistema $x(k+1) = A_K x(k) + w(k)$ que pueden ser alcanzados en j pasos desde el origen, para alguna realización de la incertidumbre w . Este conjunto cumple, para $j \in \mathbb{I}_{>0}$, las siguientes propiedades [Chisci et al., 2001]:

- (i) $\mathcal{R}_j \oplus A_K^j \mathcal{W} = \mathcal{R}_{j+1}$, con $\mathcal{R}_1 = \mathcal{W}$.
- (ii) $A_K \mathcal{R}_j \oplus \mathcal{W} = \mathcal{R}_{j+1} = \mathcal{R}_j \oplus A_K^j \mathcal{W}$.
- (iii) $\mathcal{R}_j \subseteq \mathcal{R}_{j+1}$
- (iv) La secuencia de conjuntos \mathcal{R}_j tiende a \mathcal{R}_∞ , para $j \rightarrow \infty$, siendo \mathcal{R}_∞ el mínimo conjunto invariante robusto para $x(k+1) = A_K x(k) + w(k)$ ([Kolmanovsky and Gilbert, 1998]).
- (v) Existe un índice de determinación, $j^* > 0$, tal que $\mathcal{R}_{j+1} = \mathcal{R}_j$, para todo $j \geq j^*$, y $\mathcal{R}_{j^*} = \mathcal{R}_\infty$.

Como se puede ver, las dos últimas propiedades son las que permiten caracterizar el conjunto objetivo \mathcal{R}_∞ , para una dada K , mediante la sencilla iteración de la Ecuación (3-6), (y de hecho, su denominación surge de estas propiedades). Naturalmente, este conjunto depende de K , y esta realimentación deberá ser elegida de modo de minimizarlo (es decir, se debe elegir la ganancia K que minimice el mínimo invariante robusto \mathcal{R}_∞).

Una vez caracterizado el conjunto al que convergerá el lazo cerrado, el siguiente paso consiste en prever el efecto de la incertidumbre en las trayectorias de entrada y estado predichas, de modo de asegurar que las restricciones originales (3-3) no serán incumplidas. Para ello, dichas restricciones se reemplazarán (en el problema de optimización que subyace al MPC) por otras más estrictas - denominadas **restricciones acotadas**:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_j &\triangleq \mathcal{X} \ominus \mathcal{R}_j \\ \mathcal{U}_j &\triangleq \mathcal{U} \ominus K\mathcal{R}_j,\end{aligned}\tag{3-7}$$

donde j representa, en este contexto, el tiempo de predicción para las entradas y estados. Pero dado que se calculan mediante una diferencia de Pontryagin, los conjuntos \mathcal{X}_j y \mathcal{U}_j bien pueden ser vacíos, si \mathcal{R}_j es demasiado grande. Para asegurar que esto no ocurra, para ningún $j \in \mathbb{I}_{>0}$, se realizará la siguiente suposición:

Suposición 3.3. *El conjunto \mathcal{R}_∞ es tal que $\mathcal{R}_\infty \subset \mathcal{X}$ y $K\mathcal{R}_\infty \subset \mathcal{U}$.*

Como se observa, quien determina en gran medida si la suposición anterior se cumple es la ganancia de realimentación K , pues afecta tanto a \mathcal{R}_∞ (según la Ecuación (3-6)) como a $K\mathcal{R}_\infty$. En [Limon et al., 2010] se propone un método para calcular K , basado en desigualdades matriciales lineales (LMI, por su sigla en inglés), que para un dado sistema, hace cumplir la Suposición 3.3 a la vez que minimiza el conjunto \mathcal{R}_∞ .

Teniendo en cuenta los conceptos anteriores, se plantea a continuación el algoritmo de optimización correspondiente a un control MPC robusto, cuyo objetivo es guiar al sistema incierto (3-1), en forma factible, al conjunto Ω :

Algoritmo 1 (MPC Robusto).

Offline: Calcular los conjuntos $\tilde{\mathcal{X}}_j$, $\tilde{\mathcal{U}}_j$ y \mathcal{R}_N , según las definiciones previas, donde N es el horizonte de predicción.

Online: En cada instante de tiempo $k \in \mathbb{I}_{>0}$,

- I. medir el estado $x(k)$,

II. resolver el siguiente problema de optimización, para $\mathbf{c} = \{c(0; k), \dots, c(N-1; k)\}$,

$$\min_{\mathbf{c}} V_N(x; \mathbf{c}) = \sum_{j=0}^{N-1} \|\bar{x}(j; k)\|_Q^2 + \|u(j; k)\|_R^2 + \|\bar{x}(N; k)\|_P^2, \quad (3-8)$$

$$s.a. \quad (3-9)$$

$$\bar{x}(0; k) = x(k), \quad (3-10)$$

$$\bar{x}(j+1; k) = A\bar{x}(j; k) + Bu(j; k), \quad (3-11)$$

$$u(j; k) = K\bar{x}(j; k) + c(j; k), \quad (3-12)$$

$$\bar{x}(j; k) \in \tilde{\mathcal{X}}_j, \quad j \in \mathbb{I}_{1:N} \quad (3-13)$$

$$\bar{u}(j; k) \in \tilde{\mathcal{U}}_j, \quad j \in \mathbb{I}_{0:N-1} \quad (3-14)$$

$$\bar{x}(N; k) \in \Sigma_0 \ominus \mathcal{R}_N, \quad (3-15)$$

donde Σ_0 es un poliedro definido como:

$$\Sigma_0 = \{x: A_K^j x \in \tilde{\mathcal{X}}_j, K A_K^j x \in \tilde{\mathcal{U}}_j, \forall j \geq 0\},$$

III. aplicar la acción de control $u(k) = u^0(0; k)$.

Nótese que todos los conjuntos involucrados en el problema de optimización son calculados por única vez y de manera *offline*. Además, Σ_0 es un conjunto invariante robusto para el sistema $x(k+1) = A_K x(k) + w(k)$ para $w(k) \in \mathcal{W}$, $x(k) \in \mathcal{X}$ y $Kx(k) \in \mathcal{U}$.

La ley de control esta dada por:

$$\kappa_N(x) = Kx(k) + c^0(0; x(k)),$$

donde $c^0(0; x(k))$ es el primer elemento de la secuencia óptima calculada en $x(k)$.

Observación 3.4. Si bien en esta tesis se trabajará con el enfoque robusto presentado, se debe destacar que existen otros similares, como ser, el conocido como ‘MPC por tubos’ ([Cannon and Kouvaritakis, 2016, Cannon et al., 2011a, Mayne et al., 2005]), que es algo más conservador, pues utiliza el conjunto \mathcal{R}_∞ , en lugar de \mathcal{R}_j , para las restricciones acotadas dadas por la Ecuación (3-8) de modo de tener conjuntos de restricciones que no dependen del tiempo de predicción (lo que equivale asegurar que no solo la trayectoria nominal sera factible, sino también el ‘tubo’ cuyo centro está dado por las predicciones nominales, y la sección está dada por \mathcal{R}_∞).

3.2.1. Análisis de estabilidad

Como se explicó en la sección anterior, dado que el único conocimiento que se tiene de la incertidumbre que presenta el sistema es que está acotada, el origen deja de ser un punto de equilibrio del sistema incierto, por lo que la región atractora pasará a ser su generalización robusta, \mathcal{R}_∞ . En este contexto, los conceptos clásicos de estabilidad, tales como la definición de estabilidad asintótica o la teoría clásica de Lyapunov, presentadas en el Capítulo 2, no pueden aplicarse directamente.

En esta sección se establecerán las condiciones bajo las cuales se conservan la factibilidad recursiva y la estabilidad del lazo cerrado. Resumidamente, las claves de la estabilidad robustas para esquemas MPC son dos: la estabilidad asintótica del sistema nominal en lazo cerrado y la continuidad uniforme del costo óptimo. La primera garantiza un decrecimiento positivo del costo óptimo nominal en cada instante, mientras que la segunda garantiza que el efecto de la incertidumbre permanezca acotado. Por tanto, para mantener la estabilidad del sistema, basta con que el posible incremento de costo óptimo que produce la incertidumbre sea compensado por el decrecimiento que fuerza la estabilidad asintótica nominal. A continuación se presentan las definiciones y resultados necesarios para el desarrollo de esta sección.

La estabilidad robusta es la denominada estabilidad entrada-estado, la cual fue formulada por primera vez en [Sontag, 1989] para sistemas en tiempo continuo, pero resultados presentados en [Jiang et al., 1999, Jiang and Wang, 2001] han trasladado estos conceptos a sistemas en tiempo discreto.

Definición 3.5. (*Estabilidad entrada a estado*) [Jiang and Wang, 2001] Un sistema $x(k+1) = Ax(k) + w(k)$ es estable entrada a estado si existe una función \mathcal{KL} , $\beta(\cdot)$, y una función \mathcal{K} , $\gamma(\cdot)$, tal que la evolución del sistema satisface que

$$\|x(k)\| \leq \beta(\|x(0)\|, k) + \gamma(\mu),$$

para todo $x(0) \in B_\epsilon$, siendo $\|w(k)\| \leq \mu$ para todo k .

La definición anterior dice que en ausencia de incertidumbres el sistema es asintóticamente estable. Sin embargo, cuando aparecen incertidumbres acotadas, el efecto que éstas tienen sobre la evolución del sistema está acotado, es decir, las incertidumbres no hacen divergir al sistema.

Nótese que esta definición incluye a otra, denominada estabilidad asintótica de cota final, pues, de la definición de estabilidad entrada-estado se deduce que para todo $\|x(0)\| \leq \epsilon$,

el estado está acotado según $\|x(k)\| \leq b_k$, de forma que la cantidad positiva b_k cumple $b_k \rightarrow \gamma(\mu)$ para $k \rightarrow \infty$, dado que para ese caso $\beta(\|x(0)\|, k) \rightarrow 0$.

Asociada a este concepto de estabilidad está la definición de función de Lyapunov entrada a estado:

Definición 3.6. (*Función de Lyapunov entrada a estado*) ([Jiang and Wang, 2001])

Una función continua $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ se denomina función de Lyapunov entrada a estado si satisface que

- Existen unas funciones \mathcal{K} , $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot)$, tales que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad \forall x \in B_\epsilon.$$

- Existen unas funciones \mathcal{K} , $\alpha_3(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$, tales que

$$V(Ax + w) - V(x) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \sigma(\mu) \quad \forall x \in B_\epsilon, \quad \forall w \in B_\mu.$$

La segunda propiedad de la definición es equivalente a decir que existe una función \mathcal{K}_∞ , $\chi(\cdot)$, y una función \mathcal{K} , $\alpha_4(\cdot)$, tales que

$$V(Ax + w) - V(x) \leq -\alpha_4(x) \quad \forall x : \|x\| \geq \chi(\mu)$$

es decir, que fuera de una vecindad del origen se satisface la condición de Lyapunov estándar.

El principal resultado es el siguiente lema, donde se establece la condición suficiente para garantizar la estabilidad entrada a estado de un sistema.

Lema 3.7. ([Jiang and Wang, 2001])

Si un sistema $x(k+1) = Ax(k) + w(k)$ admite una función de Lyapunov entrada a estado entonces el sistema es estable entrada a estado.

Teniendo en cuenta estas definiciones se establece el siguiente teorema

Teorema 3.8. Para toda condición inicial factible, $x(0) \in \mathcal{X}_N$, el sistema (3-1) controlado por la ley de control $u(k) = Kx(k) + c(k)$ derivada del Algoritmo 1 satisface las siguientes propiedades:

- I. La evolución del sistema es robustamente factible y admisible, esto es, $x(j) \in \mathcal{X}_N$ y $(x(j), u(j)) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$, $\forall w(k) \in \mathcal{W}$, $k = 0, 1, \dots, j-1$.
- II. $\lim_{k \rightarrow \infty} c(k) = 0$.

III. *El lazo cerrado converge asintóticamente $x \rightarrow \mathcal{R}_\infty$ como $k \rightarrow \infty$.*

IV. *Existe una función \mathcal{KL} , β , y una función \mathcal{K} , γ , tales que*

$$\|x(k)\| \leq \beta(\|x(0)\|, k) + \gamma(\|w\|),$$

para todo $x(0) \in \mathcal{X}_N$ y toda perturbación $w(k) \in \mathcal{W}$, por lo que el lazo cerrado es ISS.

La demostración de este último resultado, que omitimos por brevedad, se basa (tal como se esbozó al comienzo de la subsección) en la continuidad de uniforme y el decrecimiento positivo del costo óptimo nominal, $V_N^0(x)$, del problema de optimización (3-8). Para los detalles, se remite al lector a [Limon et al., 2009].

3.3. Enfoque estocástico

El principal inconveniente de las formulaciones robustas antes mencionadas es el alto grado de conservadurismo que presentan, debido a que el diseño considera todas las posibles realizaciones de las perturbaciones. Este inconveniente busca ser superado por el denominado MPC estocástico (SMPC), en el cual se considera una descripción probabilística de las predicciones, permitiendo pequeñas infactibilidades (mediante las llamadas restricciones probabilísticas), lo que redundará en controles más agresivos e, incluso, en mayores dominios de atracción ([Cannon et al., 2011b, Mayne, 2016, Lorenzen et al., 2017]).

Para sistemas lineales con incertidumbre estocástica aditiva, el sistema generalmente se descompone en una parte determinista, nominal, y un sistema autónomo (pre-estabilizado) que involucra solo la parte incierta. Luego, los diferentes enfoques se caracterizan por (i) calcular una región de confianza para la parte incierta y usarla para la reducción de las restricciones (ver [Cannon et al., 2011b] para el caso de una región de confianza elipsoidal) y (ii) restringir directamente las restricciones, dada la evolución de la parte incierta, como por ejemplo se hace en [Kouvaritakis et al., 2010, Korda et al., 2011]. Un enfoque ligeramente diferente es el presentado en [X. Zhang and Lygeros, 2013], donde los autores también determinan primero una región de confianza para la secuencia de las perturbaciones, pero luego emplean técnicas de optimización robustas. En el trabajo reciente [M. Farina and Scattolini, 2016] se proporciona un resumen de los diferentes enfoques para la propagación de la incertidumbre y la reducción de las restricciones.

Se considera, al igual que en la sección anterior, el sistema incierto (3-1), con la particularidad de que la incertidumbre $w(k)$, $k \geq 0$, constituye una secuencia de variables aleatorias (estadísticamente) independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.), con media cero. Además, están acotadas y se encuentran en un poliedro convexo y compacto que contiene el origen en su interior, dado por

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}^n : A_w w \leq b_w\}. \quad (3-16)$$

Una de las diferencias que presenta la formulación estocástica respecto de la robusta, radica en que las restricciones que se consideran son probabilísticas; es decir, las restricciones pueden ser incumplidas con una cierta probabilidad menor o igual a una cantidad preestablecida. Suponiendo que los conjuntos \mathcal{X} y \mathcal{U} son poliedros (esto es, $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n | A_x x \leq b_x\}$ y $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^m | A_u u \leq b_u\}$), las restricciones para las predicciones pueden escribirse como:

$$\mathbb{P}_k\{[A_x]_i x(j; k) \leq [b_x]_i\} \geq 1 - [\varepsilon]_i \quad i \in \mathbb{I}_{1:p}, \quad j \in \mathbb{I}_{1:N} \quad (3-17)$$

$$\mathbb{P}_k\{[A_u]_i u(j; k) \leq [b_u]_i\} \geq 1 - [\varepsilon_u]_i \quad i \in \mathbb{I}_{1:q}, \quad j \in \mathbb{I}_{0:N-1} \quad (3-18)$$

donde p y q son el número de restricciones lineales que definen \mathcal{X} y \mathcal{U} respectivamente; y $A_x \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $A_u \in \mathbb{R}^{q \times m}$, $b_x \in \mathbb{R}^p$ y $b_u \in \mathbb{R}^q$. Además, $[\varepsilon]_i \in [0, 1]$ es un parámetro dado que restringe la probabilidad condicional de infringir la restricción de estado lineal i en la predicción futura $(j; k)$, dada la realización del estado actual $x(k)$. Obsérvese que considerar $[\varepsilon]_i = 0$ convierte una restricción probabilística en una restricción determinística.

Como es habitual en la formulación de MPC estocástico, se puede descomponer el estado y las trayectorias predichas de entrada del modelo (3-1) en sus componentes deterministas y estocásticas. Para esto, considérese una ganancia de realimentación K , típicamente escogida como la ganancia de control óptimo de LQR, de manera que $A_K = A + BK$ presente todos sus autovalores en el interior del círculo unitario. Entonces, dado un horizonte de predicción finito N , se tiene que para $j \in \mathbb{I}_{0:N-1}$,

$$x(j; k) = z(j; k) + e(j; k), \quad (3-19)$$

$$u(j; k) = Ke(j; k) + v(j; k), \quad (3-20)$$

donde $z \in \mathbb{R}^n$ representa la evolución del modelo nominal (determinístico), mientras que $e \in \mathbb{R}^n$ representa la evolución de la componente estocástica del estado, es decir

$$z(j+1; k) = Az(j; k) + Bv(j; k), \quad z(0; k) = x(k) \quad (3-21)$$

$$e(j+1; k) = A_K e(j; k) + w(j; k), \quad e(0; k) = 0. \quad (3-22)$$

Teniendo en cuenta las Ecuaciones (3-19) - (3-22) y las propiedades de distribución de las perturbaciones, el valor esperado del costo puede ser calculado explícitamente en las variables determinísticas $z(j)$ y $v(j)$ como sigue [Lorenzen et al., 2017]:

$$V_N(x; \mathbf{u}, x_a, u_a) = V_N^d(x; \mathbf{u}) + V_N^e(w) \quad (3-23)$$

donde

$$V_N^d(x; \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{N-1} \|z(j; k)\|_Q^2 + \|v(j; k)\|_R^2 + \|z(N; k)\|_P^2$$

$$V_N^e(w) = \mathbb{E}_k \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \|e(j; k)\|_{Q+K'RK}^2 + \|e(N; k)\|_P^2 \right\},$$

donde $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices definidas positivas y $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz semi definida positiva tal que el par $(Q^{1/2}, A)$ es observable. De manera similar al caso robusto, a continuación se derivan los conjuntos de restricciones determinísticas y no conservadoras $\tilde{\mathcal{X}}_j$ y $\tilde{\mathcal{U}}_j$ para el sistema nominal, de manera que las restricciones (3-17) y (3-18) para el sistema (3-1) se mantienen a lazo cerrado bajo la ley de control del controlador. Luego, estos conjuntos de restricciones se modifican aún más para proporcionar garantías de estabilidad estocástica y factibilidad recursiva para todas las realizaciones de perturbación admisibles.

Restricciones de estado

Las restricciones de estado probabilístico se pueden reescribir de forma no conservadora en términos de conjuntos de restricciones lineales convexas $\tilde{\mathcal{X}}_j$ en el estado nominal predicho $z(j; k)$, como se indica a continuación.

Sea $\varepsilon \in [0, 1]^p$, el sistema (3-1) satisface las restricciones probabilísticas (3-17) para $k \in \mathbb{I}_{[1:N]}$ e $i \in \mathbb{I}_{[1:p]}$ si y sólo si el sistema nominal (3-21) satisface las restricciones $z(j; k) \in \tilde{\mathcal{X}}_j$, con

$$\tilde{\mathcal{X}}_j = \{z \in \mathbb{R}^n \mid A_x z \leq \eta_j\}, \quad j \in \mathbb{I}_{1:N}, \quad (3-24)$$

donde η_j viene dada por

$$[\eta_j]_i = \max_{\eta} \eta \quad (3-25)$$

$$s.a. \quad \mathbb{P}_k \{ \eta \leq [b_x]_i - [A_x]_i e(j; k) \} \geq 1 - [\varepsilon]_i \quad i \in \mathbb{I}_{1:p}.$$

Restricciones de entrada

Dado que en cada instante de muestreo, la entrada óptima se recalcula y se adapta a la realización real de la perturbación pasada, se permite la probabilidad de que las futuras entradas predichas puedan violar las restricciones del sistema.

Sea $\varepsilon_u \in [0; 1)$ un nivel de satisfacción de restricción probabilística. De manera similar a lo realizado con las restricciones de estado, se reemplaza la restricción original por $v(j; k) \in \tilde{\mathcal{U}}_j$, con

$$\tilde{\mathcal{U}}_j = \{v \in \mathbb{R}^m \mid A_u v \leq \mu_j\}, \quad j \in \mathbb{I}_{0:N-1}, \quad (3-26)$$

donde μ_j está dado por

$$[\mu_j]_i = \underset{\mu}{\text{máx}} \mu$$

$$s.a. \quad \mathbb{P}_k\{\mu \leq [b_u]_i - [A_u]_i K e(j; k)\} \geq 1 - \varepsilon_u \quad i \in \mathbb{I}_{1:q}.$$

Es importante remarcar que en lazo cerrado, las restricciones duras de entrada se cumplirán debido a que $\mu_0 = b_u$.

Restricción terminal

Primero construimos un conjunto admisible recursivamente factible bajo una ley de control local y luego empleamos un ajuste adecuado para determinar la restricción terminal \mathcal{X}_f para el sistema nominal.

Para el sistema (3-1) con entrada $u(k) = Kx(k)$, sea $\mathcal{X}_f = \{x \mid A_f x \leq b_f\}$ el máximo conjunto invariante positivo en el interior de

$$\Sigma_f = \{x \mid A_x A_K x \leq \eta_1, A_u K x \leq b_u\}$$

donde η_1 está dada por la Ecuación (3-25).

Una vez obtenido este conjunto, se procede de manera similar a lo realizado con las restricciones de estado y entrada. Es decir, sea $\varepsilon_f \in [0; 1)$ un nivel probabilístico, luego se define el conjunto

$$\tilde{\mathcal{X}}_f = \{z \in \mathbb{R}^n \mid A_f z \leq \eta_f\}$$

con

$$[\eta_f]_i = \underset{\eta}{\text{máx}} \eta$$

$$s.a. \quad \mathbb{P}_k\{\eta \leq [b_f]_i - [A_f]_i e(N; k)\} \geq 1 - \varepsilon_f \quad i \in \mathbb{I}_{1:p}$$

donde p es el número de restricciones lineales que definen el conjunto \mathcal{X}_f .

Restricción del primer paso y dominio de atracción

Uno de los grandes desafíos que presenta la formulación de MPC estocástico, es el de poder asegurar la factibilidad recursiva del controlador. La estrategia desarrollada, para cumplir con este objetivo, fue presentada en [Lorenzen et al., 2017] y consiste en restringir un poco más a la primera predicción del estado, $z(1; k)$ en términos de la distribución de w , mientras que el resto de las predicciones $z(2; k), \dots, z(N-1; k), z(N; k)$ están restringidas, según lo presentado anteriormente. Para esto se define un conjunto invariante robusto, de manera tal que, si $z(1; k)$ se encuentra en su interior, el resto de las predicciones sujetas a las restricciones probabilísticas (presentadas anteriormente) no se irán más allá del dominio de atracción del sistema.

Formalmente, en primer lugar, para poder definir el conjunto de restricción de la primera predicción, considérese el conjunto factible \mathcal{C}_N definido como

$$\mathcal{C}_N = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} z \\ v \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n+m} \\ \left. \begin{array}{l} \exists v(1), \dots, v(N-1) \in \mathbb{R}^m \\ z(j+1; k) = Az(j; k) + Bv(j; k) \\ A_x z(j; k) \leq \eta_j, \quad j \in [1, N] \\ A_u v(j; k) \leq \mu_j, \quad j \in [0, N-1] \\ A_f z(N; k) \leq \eta_f \end{array} \right\} \end{array} \right\}. \quad (3-27)$$

La proyección de \mathcal{C}_N en las primeras N predicciones $\mathcal{X}_N = Proj_x(\mathcal{C}_N)$ no es necesariamente un conjunto invariante robusto positivo con respecto al conjunto de perturbaciones \mathcal{W} . Por lo tanto, deberá calcularse recursivamente, un politopo invariante de control robusto sujeto a \mathcal{C}_N . Para esto, sea $\mathcal{C}_{N,x}^\infty = Proj_x(\mathcal{C}_N^\infty)$, a partir de $\mathcal{C}_{N,x}^0 = \mathcal{X}_N$ se tiene que:

$$\mathcal{C}_{N,x}^{i+1} = \left\{ x \in \mathcal{C}_{N,x}^i \mid \begin{array}{l} \exists u \in \mathbb{R}^m \text{ s.a. } (x, u) \in \mathcal{C}_N \\ Ax + Bu \in \mathcal{C}_{N,x}^i \ominus \mathcal{W} \end{array} \right\},$$

donde, por definición, $\mathcal{C}_{N,x}^\infty = \bigcap_{i=0}^\infty \mathcal{C}_{N,x}^i$.

Teniendo en cuenta estas definiciones se plantea el siguiente algoritmo de optimización:

Algoritmo 2 (MPC Estocástico).

Offline: Calcular los conjuntos $\tilde{\mathcal{X}}_j, \tilde{\mathcal{U}}_j, \tilde{\mathcal{X}}_f$ y $\mathcal{C}_{N,x}^\infty$, según las definiciones previas.

Online: En cada instante de tiempo $k \in \mathbb{I}_{\geq 0}$,

- I. medir el estado $x(k)$,

II. resolver el siguiente problema de optimización, para $\mathbf{v} = \{v(0; k), \dots, v(N-1; k)\}$,

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{v}} V_N^d(x; \mathbf{v}) \\ & \text{s.a.} \\ & z(0; k) = x, \\ & z(j+1; k) = Az(j; k) + Bv(j; k) \\ & z(j; k) \in \tilde{\mathcal{X}}_j, \quad j \in \mathbb{I}_{1:N} \\ & v(j; k) \in \tilde{\mathcal{U}}_j, \quad j \in \mathbb{I}_{0:N-1} \\ & (z(N; k)) \in \tilde{\mathcal{X}}_f \\ & z(1; k) \in \mathcal{C}_{N,x}^\infty \ominus \mathcal{W} \end{aligned}$$

III. Aplicar la acción de control $u(k) = v^0(0; k)$.

Nótese que todos los conjuntos involucrados en el problema de optimización son calculados por única vez y de manera offline, es decir, fuera de la optimización.

Observación 3.9. *Al igual que en la caso de MPC robusto, se debe destacar que existen otros enfoques para MPC estocástico diferentes al tratado en esta tesis. De entre ellos se destacan los presentados [Cannon and Kouvaritakis, 2016, Cannon et al., 2011b, Cannon et al., 2009, Korda et al., 2011], que si bien siguen las ideas mostradas en este capítulo, son diferentes en los detalles de la formulación.*

3.3.1. Análisis de estabilidad

En esta sección se presentan las suposiciones necesarias para la existencia de un conjunto que es asintóticamente estable, en probabilidad, para el sistema a lazo cerrado bajo el algoritmo de MPC estocástico propuesto.

Definición 3.10. *(Estabilidad asintótica en probabilidad [Lorenzen et al., 2017]) Se dice que un conjunto compacto \mathbb{S} es asintóticamente estable en probabilidad para el sistema (3-1), con una ley de control $u(k) = \kappa(x(k))$, si para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\rho \in [0, 1) \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que:*

$$\|x(0)\|_{\mathbb{S}} \leq \delta \Rightarrow \mathbb{P}\{\sup_{k \geq 0} \|x(k)\|_{\mathbb{S}} \geq \varepsilon\} \leq 1 - \rho,$$

y para una vecindad $\mathcal{N}_{\mathbb{S}}$ de \mathbb{S} , para todo $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, $\exists k' > 0$ tal que:

$$x(0) \in \mathcal{N}_{\mathbb{S}} \Rightarrow \lim_{k' \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\sup_{k > k'} \|x(k)\|_{\mathbb{S}} < \varepsilon_2\} = 1,$$

donde $\mathcal{N}_{\mathbb{S}}$ es denominado dominio de atracción.

El concepto, más allá de esta definición, es claramente una estabilidad asintótica probabilística, en el sentido de que la alternativa de inestabilidad $\epsilon - \delta$ no es imposible (con una pequeña probabilidad), pero la convergencia está asegurada. En pocas palabras, significa que algunas realizaciones podrían deambular en torno al conjunto objetivo \mathbb{S} , o incluso alejarse, antes de ir asintóticamente hacia él.

Para simplificar la presentación, hacemos el siguiente supuesto sobre la ganancia de control K , así como dos supuestos técnicos no restrictivos:

Suposición 3.11.

- I. La ganancia de realimentación K para el controlador de pre-estabilización se elige como la solución óptima de LQR sin restricciones.
- II. Sea \mathcal{R}_{∞} el mínimo conjunto invariante robusto positivo para el sistema (3-1) con $u(k) = Kx(k)$ y sea \mathbb{B} una bola unitaria abierta en \mathbb{R}^n . Luego, existe $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\mathcal{R}_{\infty} \oplus \lambda\mathbb{B} \subseteq \mathcal{X}_f$ (nótese que \mathcal{R}_{∞} es el conjunto definido en la Sección 3.2).
- III. El conjunto $\mathcal{C}_{N,x}^{\infty}$ es compacto.

Bajo este supuesto, el resultado principal de la estabilidad asintótica en probabilidad de \mathcal{R}_{∞} , bajo el MPC estocástico propuesto, se puede enunciar como sigue:

Teorema 3.12. Para el sistema (3-1) con el controlador SMPC propuesto, bajo el Supuesto 3.11, el conjunto \mathcal{R}_{∞} es asintóticamente estable en probabilidad con una región de atracción $\mathcal{C}_{N,x}^{\infty}$.

La demostración de este resultado, que es omitida por brevedad, sigue los pasos de la presentada en [Lorenzen et al., 2017].

Capítulo 4

Formulación robusta del MPC-RTO Económico

4.1. Introducción

Tradicionalmente, la estrategia más utilizada en la industria para guiar un sistema a un punto de operación dado, es la estructura de control jerárquica compuesta por una capa de optimización en tiempo real (RTO), encargada de calcular el punto de operación óptimo, teniendo en cuenta consideraciones económicas o de otro tipo, y un controlador avanzado, encargado de regular el sistema a dicho punto de operación. Sin embargo, como se mostró en el Capítulo 2, ésta estrategia presenta ciertos inconvenientes, por el hecho de que la comunicación entre las capas económico/estacionaria y dinámica puede ser inconsistente debido a que existen diferencias tanto entre los modelos utilizados como en las escalas de tiempo. Una de las principales consecuencias de estas discrepancias, que atañe principalmente al desempeño económico de la planta, es que el punto económico óptimo calculado por el RTO puede ser inconsistente o inalcanzable para la capa dinámica, invalidando de este modo toda la estrategia.

Particularmente, el esquema de control presentado en este capítulo consiste en una estrategia que soluciona este problema mediante una estructura de una sola capa, que unifica el cálculo del punto de operación económicamente óptimo con la etapa de MPC que regula el sistema hasta él. Este controlador, a diferencia de los tradicionales, garantiza que el sistema a lazo cerrado converge al óptimo económico, para cualquier condición económica factible (Figura 2-3).

La estrategia de una sola capa utiliza una función de costo unificada que considera si-

multáneamente los objetivos económico/estacionarios y dinámicos, al estilo de lo hecho en [Zanin et al., 2002, Adetola and Guay, 2010, Diehl et al., 2011, Angeli et al., 2012, Ferramosca et al., 2010b]. El principal problema a resolver en estas estrategias es que los objetivos económicos generalmente están representados por una función no lineal compleja que hace que el problema de optimización también sea no lineal y, por tanto, difícil de resolver. En este contexto, se han propuesto varias soluciones para superar el problema de la carga computacional de un MPC económico.

El más significativo es el uso de una función de costo económico aproximado, en lugar de la función no lineal original. Un primer enfoque se presenta en [De Souza et al., 2010], donde el gradiente de la función económica se incluye en la función de costo del controlador para obtener una estrategia de bajo costo computacional. Esta solución permite resolver el problema de control óptimo resultante como un único problema de programación cuadrática (QP).

Si bien los resultados presentados en [De Souza et al., 2010] fueron prometedores tanto desde el punto de vista teórico como práctico, no había garantía de estabilidad. Frente a este desafío, esta idea se extendió luego en [Alamo et al., 2014] para obtener una formulación estable. La novedad de esta última estrategia es que, en lugar de aplicar al sistema la solución óptima de un problema aproximado, aplica una solución sub-óptima, en el sentido de que la acción de control aplicada viene dada por la combinación convexa de una solución factible del problema original (fácil de obtener) y la solución óptima de un problema aproximado. Como se muestra en [Alamo et al., 2014], esta estrategia de MPC sub-óptima garantiza la factibilidad recursiva y la convergencia al estado óptimo (en el sentido económico), con un costo computacional significativamente reducido.

Asimismo, en el marco de MPC económico, es crucial que haya garantías de factibilidad frente a cambios en los criterios económicos (esto es, cuando los parámetros que determinan la optimalidad económica cambian). Es por ello que el concepto de MPC para seguimiento [Limon et al., 2008, Ferramosca et al., 2009] juega un papel importante en esta clase de controladores económicos. De hecho, si el criterio económico cambia, por ejemplo debido a cambios en los precios, la demanda esperada, etc., el punto de operación económicamente óptimo, donde el controlador dirige al sistema - determinado por la dupla estado-entrada (x_s^{eco}, u_s^{eco}) -, puede cambiar, dando como resultado la pérdida de factibilidad del problema de optimización. Esto se debe a que (i) la región terminal calculada para un cierto punto de equilibrio puede no ser admisible para el nuevo punto de operación, y (ii) la región terminal asociada al nuevo punto podría ser inalcanzable en N pasos. Si esto ocurre será necesario

volver a calcular el valor apropiado del horizonte de predicción para garantizar la factibilidad, lo que requeriría un re-diseño online del controlador para cada punto de referencia, lo que claramente implica un alto costo computacional.

En este contexto, uno de los objetivos que se plantean en este capítulo es asegurar que bajo cualquier cambio del punto de operación óptimo, el sistema a lazo cerrado mantenga la factibilidad, y por lo tanto la convergencia al nuevo punto de operación. Por otro lado, se busca extender la formulación presentada en [Alamo et al., 2014], que se desarrolló solo para el caso nominal, al caso robusto. Para ello, se utiliza un esquema de perturbaciones aditivas acotadas y, teniendo en cuenta las ideas presentadas en [Chisci et al., 2001] (para regulación) y [Ferramosca et al., 2012] (para el seguimiento de zonas de operación), se propone un MPC robusto de una capa que considera un modelo de predicción nominal y restricciones contractivas o reducidas (para tener en cuenta el efecto de la perturbación aditiva). Esta extensión robusta se hace con el objetivo, no trivial, de preservar el rendimiento económico nominal y asegurar la estabilidad robusta. La formulación de control así obtenida se prueba simulando varios escenarios económicos en un sistema de cuatro tanques presentado en [Johansson, 2000].

El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 4.2 se realiza una descripción del problema de control. En particular se describe brevemente el enfoque robusto que se utilizará y se caracteriza el equilibrio del sistema. En la Sección 4.3 se presenta la estrategia de controlador robusto propuesta. En esta sección se presenta la estrategia subóptima y se formula el controlador MPC económico robusto propuesto. En la Sección 4.4, se aplica el controlador propuesto a un sistema de cuatro tanques. Finalmente, en la Sección 4.5 se sacan algunas conclusiones del desempeño obtenido.

4.2. Descripción del sistema

Considérese un sistema dinámico descrito por un modelo discreto, lineal e invariante en el tiempo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k), \quad (4-1)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados del sistema, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de actuaciones, $x(k+1)$ es el estado sucesor y $w(k) \in \mathbb{R}^n$ representa las posibles incertidumbres o perturbaciones que afectan al sistema, en el instante de tiempo k .

El sistema está sujeto a restricciones de estado y entrada, de forma que

$$(x(k), u(k)) \in \mathcal{Z}, \quad (4-2)$$

para todo instante $k \geq 0$, donde $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ es un conjunto convexo compacto que contiene el origen en su interior.

El modelado de incertidumbres como aditivas representa a una gran cantidad de sistemas inciertos, dado que $w(k)$ puede depender del estado del sistema. El único conocimiento de estas perturbaciones, es el margen de variación que éstas pueden tener, que se traduce en un determinado conjunto \mathcal{W} , definido como

$$\mathcal{W} = \{w(k) \in \mathbb{R}^n : A_w w \leq b_w\}. \quad (4-3)$$

Este conjunto es convexo, compacto y contiene el origen en su interior.

Teniendo en cuenta la estrategia robusta presentada en el Capítulo 3.2, se define un sistema en ausencia de perturbaciones w , denominado como modelo nominal, que viene dado por

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + Bu(k). \quad (4-4)$$

La solución de este sistema para una secuencia dada de entradas de control $\mathbf{u} = \{u(0), \dots, u(j-1)\}$ y un estado inicial \bar{x} , se denota como $\bar{x}(j) = \phi(j; \bar{x}, \mathbf{u})$, $j \in \mathbb{I}_{\geq 1}$, donde $\bar{x} = \phi(0; \bar{x}, \mathbf{u})$.

Por otra parte, se supone que el modelo de la planta cumple con la siguiente suposición:

Suposición 4.1. *El par (A, B) es controlable, el estado es medible en cada tiempo de muestreo k y el vector de incertidumbres es tal que $w(k) \in \mathcal{W}$.*

Si el par (A, B) no es controlable, entonces el sistema no puede ser controlado por un controlador de retroalimentación y, por lo tanto, el problema de control debe ser re-estudiado. Por otro lado, si el estado de la planta no se puede medir, entonces debe estimarse por medio de un observador adecuado. En este caso, el sistema se debe dirigir manualmente a un punto de equilibrio preestablecido y luego se debe activar el observador para iniciar la estimación. Una vez que se sabe que el error de estimación es pequeño, se debe cerrar el lazo de control. Este procedimiento garantiza que el esquema de control resultante basado en el observador funcione de manera apropiada, y de manera similar al caso del control de retroalimentación de estado, gracias al principio de separación.

4.2.1. Enfoque robusto

En esta formulación robusta de MPC, se utilizará la estrategia presentada en el Capítulo 3.2. La clave es usar predicciones basadas en el sistema nominal, es decir, ignorando la entrada de perturbación $w \in \mathcal{W}$, pero restringiendo los conjuntos de restricciones \mathcal{X} y \mathcal{U} , de forma tal que aun en presencia de la peor perturbación, la evolución del sistema no incumpla las restricciones. Para lograr esto, la estrategia presentada consiste en restar a los conjuntos \mathcal{X} y \mathcal{U} ciertos conjuntos de alcance, robustos, que se construyen teniendo en cuenta el efecto de las perturbaciones en cualquier paso del horizonte de predicción. Esta estrategia fue presentada por primera vez en [Chisci et al., 2001], y ha mostrados ser significativamente menos conservadora que la tradicionalmente conocida como estrategia de tubos, presentada en [Mayne et al., 2005], donde el conjunto sustraído en cada paso es fijo y más conservador, tal y como se muestra en la Sección 3.2 del Capítulo 3.

Para llevar a cabo este objetivo, el controlador se basa en una pre-estabilización del sistema, mediante una ganancia de realimentación K , tal que la matriz $A_K = A + BK$ sea Schur, es decir, que posea todos los autovalores dentro del círculo unitario. De esta manera, el modelo nominal de predicciones está dado por:

$$\bar{x}(k+1) = A_K \bar{x}(k) + Bc(k), \quad (4-5)$$

$$u(k) = K\bar{x}(k) + c(k), \quad (4-6)$$

donde la variable de control $c(k)$ representa la diferencia entre la entrada de control $u(k)$ y la realimentación nominal $K\bar{x}(k)$.

En función de esto, se definen los conjuntos de *restricciones acotadas*, como una versión reducida de los conjuntos de restricciones \mathcal{X} y \mathcal{U} del sistema. Para $j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]}$, siendo N el horizonte de control/predicción, se tiene:

$$\mathcal{X}_j \triangleq \mathcal{X} \ominus \mathcal{R}_j, \quad (4-7)$$

$$\mathcal{U}_j \triangleq \mathcal{U} \ominus K\mathcal{R}_j,$$

donde \mathcal{R}_j es el conjunto alcanzable en j pasos, dado por la Ecuación (3-6). Estos conjuntos dependen tanto del tamaño del conjunto de incertidumbres \mathcal{W} , como de la ley de control local K . Esta ganancia de control presenta un rol importante y debe diseñarse de manera tal que dichos conjuntos sean no vacíos. Para asegurarse de esto, se debe satisfacer la Suposición 3.3, que establece que los conjuntos \mathcal{X}_j y \mathcal{U}_j existirán, para todo $j \geq 0$, si se cumple que $\mathcal{R}_\infty \subset \mathcal{X}$ y $K\mathcal{R}_\infty \subset \mathcal{U}$.

Los conjuntos $\mathcal{X}_j, \mathcal{U}_j$, así definidos, son poliedros y se los considerará como los conjuntos de restricciones de las trayectorias predichas para garantizar la satisfacción de las restricciones originales, como se demostrará más adelante. Asimismo, es importante tener en cuenta que el cálculo de los mismos no tiene efectos prácticos sobre el problema de MPC, en el sentido de que se realiza por única vez, de manera *offline*.

4.2.2. Caracterización del equilibrio y punto óptimo

Considerando la variable conjunta (\bar{x}, u) , el subespacio de equilibrio de estado y entrada, asociado al modelo nominal (4-4), viene dado por $\mathcal{N}([A - I_n \ B])$, donde \mathcal{N} representa el espacio nulo de una matriz. Es decir, el subespacio de equilibrio está dado por las duplas (\bar{x}, u) que cumplen

$$[A - I_n \ B] \begin{bmatrix} \bar{x} \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{n,1}.$$

Definiendo $\bar{\mathcal{Z}} \triangleq \bar{\mathcal{X}}_N \times \bar{\mathcal{U}}_N$, entonces, el conjunto de equilibrios admisibles para el sistema nominal es:

$$\bar{\mathcal{Z}}_s \triangleq \{(\bar{x}, u) \in \rho \bar{\mathcal{Z}} \mid \bar{x} = A\bar{x} + Bu\},$$

donde $\rho \in (0, 1)$ es un parámetro agregado para evitar estados y entradas de equilibrio que activen las restricciones.

Teniendo en cuenta la última caracterización del conjunto de equilibrio, el punto óptimo de operación en el que se desea estabilizar el sistema viene dado en la siguiente definición

Definición 4.2. *El estado y la entrada de equilibrio óptimos, (x_s^{eco}, u_s^{eco}) , satisfacen*

$$(x_s^{eco}, u_s^{eco}) = \arg \min_{(x,u) \in \bar{\mathcal{Z}}_s} \ell_{eco}(x, u, p), \quad (4-8)$$

donde $\ell_{eco}(x, u, p)$ define una función de costo económico y p es un parámetro que tiene en cuenta factores como los precios, costos u objetivos de producción, que pueden hacer variar el valor óptimo del problema (4-8).

Se supone, para dar generalidad a la formulación, que $\ell_{eco}(x, u, p)$ es no lineal y que su evaluación requiere un tiempo de cálculo significativo. Además, por cuestiones relacionadas a la estabilidad del lazo, se supondrá lo siguiente:

Suposición 4.3. *La función de costo económico $\ell_{eco}(x, u, p)$ es estrictamente convexa en (x, u) y al menos dos veces diferenciable.*

4.3. Estrategia de MPC económico robusto de una sola capa.

En esta sección, se presenta la formulación del controlador propuesto. El objetivo es extender el diseño del MPC económico presentado en el Capítulo 2, Sección 2.3.1, al caso robusto. Para esto, siguiendo las ideas de dicha formulación, se considera un término de costo adicional, denominado *costo de offset*, como el objetivo económico y la acción de control a implementar se calcula como la combinación convexa de una solución factible del problema original, que es fácil de obtener, y la solución óptima de un problema aproximado (simplificado). Esto último, si bien redundante en soluciones subóptima del problema de optimización que se resuelve en línea, permite lograr un decrecimiento de los costos asociados.

Por otro lado, como se dijo, la robustez se abordará de acuerdo al enfoque presentado en el Capítulo 3.2. El objetivo principal es preservar las propiedades de la primera formulación (simplicidad, factibilidad, convergencia) cuando se considera explícitamente una perturbación aditiva, acotada.

En este contexto, la función de costo propuesta para el problema de optimización del controlador está compuesta por dos términos, basados en predicciones nominales. El primero de ellos, es un término puramente dinámico/transitorio que penaliza la diferencia de las predicciones con respecto al objetivo artificial (x_a, u_a) , el cual está forzado a estar en el equilibrio \bar{Z}_s ; mientras que el segundo es un término puramente estacionario, que penaliza las variables artificiales de acuerdo a los objetivos económicos. Formalmente, la función de costo está dada por

$$V_N(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) = V_N^{dyn}(x; \mathbf{u}, x_a, u_a) + V_{eco}(x_a, u_a, p) \quad (4-9)$$

con

$$\begin{aligned} V_N^{dyn}(x; \mathbf{u}, x_a, u_a) &= \sum_{j=0}^{N-1} \|\bar{x}(j) - x_a\|_Q^2 + \|u(j) - u_a\|_R^2 + \|\bar{x}(N) - x_a\|_P^2, \\ V_{eco}(x_a, u_a, p) &= \ell_{eco}(x_a, u_a, p), \end{aligned}$$

donde $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices definidas positivas y $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz semi definida positiva tal que el par $(Q^{1/2}, A)$ es observable.

Considerando la ganancia de pre-estabilización K , se puede re-definir el costo (4-9) como $V_N(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) = V_N(x, p; \mathbf{c}, x_a, u_a)$, donde cada elemento del vector \mathbf{c} , es decir, $c(j; x)$, con $j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]}$, cumple $u(j; x) = K(\bar{x}(j) - x_a) + u_a + c(j; x)$. De esta forma, para cualquier

estado actual x , el problema de optimización $\mathcal{P}_N(x, p)$ a resolver en cada instante de tiempo, viene dado por:

$$\min_{\mathbf{c}, x_a, u_a} V_N(x, p; \mathbf{c}, x_a, u_a) \quad (4-10)$$

$$s.a. \quad \bar{x}(0) = x, \quad (4-11)$$

$$\bar{x}(j+1) = A\bar{x}(j) + Bu(j), \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \quad (4-12)$$

$$u(j) = K(\bar{x}(j) - x_a) + u_a + c(j), \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \quad (4-13)$$

$$\bar{x}(j) \in \mathcal{X}_j, \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \quad (4-14)$$

$$u(j) \in \mathcal{U}_j, \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \quad (4-15)$$

$$(\bar{x}(N), x_a, u_a) \in \Omega_t. \quad (4-16)$$

En este problema de optimización, x y p son los parámetros, mientras que la secuencia de entradas $\mathbf{c} = \{c(0), \dots, c(N-1)\}$ y los estados y entradas artificiales, x_a, u_a , son variables de optimización.

Las restricciones (4-11) y (4-12) definen las trayectorias predichas del sistema a partir del estado en el instante actual. Las Ecuaciones (4-14) y (4-15) incluyen las restricciones para los estados y entradas predichas, que dependen de los conjuntos acotados definidos anteriormente y son diferentes para cada paso de predicción j . Además, se incluye una restricción terminal de desigualdad, dada por la Ecuación (4-16), que garantiza que el estado terminal de la trayectoria predicha y las variables artificiales, pertenecen a un conjunto invariante robusto, que será definido a continuación. El objetivo de esta restricción es asegurar la estabilidad del mínimo conjunto invariante robusto alrededor del equilibrio alcanzable óptimo, para el lazo cerrado.

Definición 4.4. [Conjunto invariante robusto para seguimiento [Ferramosca et al., 2012]]

Se define el estado extendido $x_z = (x, x_a, u_a)$, y

$$A_z = \begin{bmatrix} A + BK & -BK & B \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}$$

También se define

$$X_{z,i} = \{(x, x_a, u_a) : x \in \mathcal{X}_i, K(x - x_a) + u_a \in \mathcal{U}_i, (x_a, u_a) \in \bar{\mathcal{Z}}_s\}$$

y

$$\Sigma_t = \{x_z : A_z^i x_z \in X_{z,i}, \text{ para } i \geq 0\}$$

que denota el máximo conjunto robusto admisible para seguimiento. Entonces, el conjunto invariante robusto terminal para seguimiento, esta dado por

$$\Omega_t = \Sigma_t \ominus (\mathcal{R}_N \times \{0\} \times \{0\}).$$

Teniendo en cuenta la definición previa, se puede observar que la restricción terminal de desigualdad dada por $(\bar{x}(N), x_a, u_a) \in \Omega_t$, implica las siguientes dos condiciones: por un lado que $\bar{x}(j) \in \mathcal{X}_j$, $u(j) \in \mathcal{U}_j$, para todo $j > N$, con $\bar{x}(j+1) = A\bar{x}(j) + Bu(j)$ y $u(j) = K(\bar{x}(j) - x_a) + u_a$; y por otro lado que las variables artificiales están forzadas a pertenecer al conjunto de equilibrio, es decir, $(x_a, u_a) \in \bar{\mathcal{Z}}_s$.

Estas restricciones están diseñadas para garantizar la factibilidad recursiva del sistema a lazo cerrado; es decir, a partir de un estado inicial dentro de la región factible del problema de optimización denotado como dominio de atracción, se garantiza que el sistema a lazo cerrado permanecerá dentro de esta región para todo $w \in \mathcal{W}$.

La solución óptima al Problema $\mathcal{P}_N(x, p)$ y el valor óptimo de la función de costo $V_N(x, p; \mathbf{c}, x_a, u_a)$ son denotados respectivamente como $\mathbf{v}^0(x, p) = \{\mathbf{c}^0(x, p), x_a^0(x, p), u_a^0(x, p)\}$ y $V_N^0(x, p)$. La ley de control del MPC está dada por

$$\kappa_N^0(x, p) = u^0(0; x, p) = K(x - x_a^0(x, p)) + u_a^0(x, p) + c^0(0; x, p),$$

donde $c^0(0; x, p)$ es el primer elemento de la secuencia de solución $\mathbf{c}^0(x, p)$.

Como el conjunto de restricciones del Problema $\mathcal{P}_N(x, p)$ no depende del parámetro p , ni del punto óptimo económico (x_s^{eco}, u_s^{eco}) , la región factible tampoco dependerá de ninguno de ellos. De este modo, el conjunto factible de este controlador es un poliedro $\mathcal{X}_N \subseteq \mathbb{R}^n$ dado por el conjunto de estados iniciales que pueden ser llevados a $\Omega_t^x = Proj_x(\Omega_t)$ en N pasos, cumpliendo las restricciones para todas las perturbaciones admisibles. Es decir,

$$\mathcal{X}_N = \{x \in \mathcal{X} : \exists(\mathbf{c}, x_a, u_a) \text{ s.a. } \bar{x}(j) \in \mathcal{X}_j, u(j) \in \mathcal{U}_j, j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]}, (\bar{x}(N), x_a, u_a) \in \Omega_t\}.$$

Observación 4.5. Siguiendo los mismos argumentos que en [Chisci et al., 2001, Ferramosca et al., 2012, Pannocchia and Kerrigan, 2003], si la ganancia de control K se elige como la ganancia de un LQR, el costo dinámico $V_N^{dyn}(x; \mathbf{u}, x_a, u_a)$ puede reescribirse como:

$$V_N^{dyn}(x; \mathbf{c}, x_a, u_a) = \|\bar{x}(0) - x_a\|_P^2 + \sum_{j=0}^{N-1} \|c(j)\|_\Psi^2$$

donde $\Psi = R + B'PB$ y P es la solución única de la ecuación de Riccati

$$P = A'_K P A_K + Q + K' R K.$$

4.3.1. Solución sub-óptima

Como se indicó anteriormente, por lo general, el costo económico es una función no lineal compleja. El principal inconveniente para resolver el problema de optimización $\mathcal{P}_N(x, p)$, así planteado, es el elevado costo computacional. En este contexto, la estrategia subóptima propuesta en la Sección 2.3.1 del Capítulo 2.1 parece ser una forma conveniente de superar esta complicación. La idea es implementar una acción de control que no sea una solución de este problema de optimización, sino de una combinación convexa de dos soluciones: la primera, una mera *solución factible* del problema original $\mathcal{P}_N(x, p)$ y, la segunda, la solución óptima de una versión linealizada de $\mathcal{P}_N(x, p)$. En lo que sigue, esta última solución será referida, por simplicidad, como la *solución óptima aproximada*.

En primer lugar, para un instante de tiempo k dado, se define la *solución factible* al problema $\mathcal{P}_N(x, p)$, $(\hat{\mathbf{c}} = \{\hat{c}(0), \dots, \hat{c}(N-2), 0\}, \hat{x}_s, \hat{u}_s)$, como la *solución desplazada* del mismo problema, pero en el instante $k-1$. Para el caso en que el instante de tiempo actual sea $k=0$, se la puede obtener, resolviendo el siguiente problema reducido $\mathcal{P}_N^{dyn}(x)$:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{c}, x_a, u_a} \quad & V_N^{dyn}(x; \mathbf{c}, x_a, u_a) \\ \text{s.a.} \quad & (\mathbf{c}, x_a, u_a) \in \mathcal{C}_N(x), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{C}_N(x)$ define el conjunto de valores (\mathbf{c}, x_a, u_a) que cumple con las restricciones del Problema $\mathcal{P}_N(x, p)$. Asociada a esta solución, está la secuencia de estados factible $\hat{\mathbf{x}} = \{\hat{x}(0), \dots, \hat{x}(N)\}$, donde $\hat{x}(N) \in \Omega_t^x$ por la restricción terminal.

La función de costo correspondiente a la solución $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{c}}, \hat{x}_s, \hat{u}_s)$, denominada como *costo factible*, está dada por:

$$V_N(x, p; \hat{\mathbf{c}}, \hat{x}_s, \hat{u}_s) = V_N^{dyn}(\hat{\mathbf{x}}; \hat{\mathbf{c}}, \hat{x}_s, \hat{u}_s) + V_{eco}(\hat{x}_s, \hat{u}_s, p)$$

En segundo lugar, la *solución óptima aproximada* al problema original $\mathcal{P}_N(x, p)$, se define resolviendo el siguiente problema aproximado $\mathcal{P}_N^{app}(x, p)$:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{c}, x_a, u_a} \quad & V_N^{app}(x, p; \mathbf{c}, x_a, u_a) \\ \text{s.a.} \quad & (\mathbf{c}, x_a, u_a) \in \mathcal{C}_N(x), \end{aligned}$$

donde el costo aproximado viene dado por:

$$V_N^{app}(x, p; \mathbf{c}, x_a, u_a) = V_N^{dyn}(x; \mathbf{c}, x_a, u_a) + V_{eco}(\hat{x}_s, \hat{u}_s, p) + \nabla V'_{eco}(\hat{x}_s, \hat{u}_s, p) \begin{bmatrix} x_a - \hat{x}_s \\ u_a - \hat{u}_s \end{bmatrix},$$

y $\nabla V_{eco}(\hat{x}_s, \hat{u}_s, p)$ representa el gradiente de V_{eco} con respecto a (x, u) , evaluado en el punto (\hat{x}_s, \hat{u}_s) .

Como se puede ver, esta solución óptima del problema aproximado intenta acercarse a la solución óptima de $\mathcal{P}_N(x, p)$ mediante una versión simplificada del mismo. Esta solución es subóptima (en el régimen transitorio del lazo cerrado) si se la compara con la solución óptima de $\mathcal{P}_N(x, p)$, y por lo tanto su aplicación directa en el esquema MPC no garantiza la convergencia del sistema en lazo cerrado al óptimo económico dado por el mínimo de V_{eco} .

Denótese a la *solución óptima aproximada*, es decir, a la solución óptima al problema $\mathcal{P}_N^{app}(x, p)$, como $\mathbf{c}^* = \{c^*(0), \dots, c^*(N-1)\}$, (x_s^*, u_s^*) , y a la secuencia de estados correspondiente como $\mathbf{x}^* = \{x^*(0), \dots, x^*(N)\}$. Luego, la función de costo correspondiente a la solución óptima aproximada $(\mathbf{x}^*, \mathbf{c}^*, x_s^*, u_s^*)$ es:

$$V_N(x, p; \mathbf{c}^*, x_s^*, u_s^*) = V_N^{dyn}(x^*; \mathbf{c}^*, x_s^*, u_s^*) + V_{eco}(x_s^*, u_s^*, p)$$

La idea ahora es construir una combinación convexa de la *solución factible* y la *solución óptima aproximada*, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(\lambda) &= (1 - \lambda)\hat{\mathbf{c}} + \lambda\mathbf{c}^*, \\ \mathbf{x}(\lambda) &= (1 - \lambda)\hat{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{x}^*, \\ u_s(\lambda) &= (1 - \lambda)\hat{u}_s + \lambda u_s^*, \\ x_s(\lambda) &= (1 - \lambda)\hat{x}_s + \lambda x_s^*, \end{aligned}$$

con $\lambda \in [0, 1]$, para obtener la denominada *solución subóptima*, que es factible y produce un costo de MPC decreciente como se muestra en el Teorema 2.5. De acuerdo con este último resultado, se puede definir más precisamente la *solución subóptima* como aquella que produce un decrecimiento positivo en las sucesivas funciones de costo. Esto es, a partir de un $\tilde{\lambda}$, (cuya existencia garantiza el Teorema 2.5) se obtiene $(\mathbf{c}^{so}, x_s^{so}, u_s^{so}) \triangleq (\mathbf{c}(\tilde{\lambda}), x_s(\tilde{\lambda}), u_s(\tilde{\lambda}))$, y asociada a esta solución se encuentra la secuencia de estados subóptima, $\mathbf{x}^{so} \triangleq \mathbf{x}(\tilde{\lambda})$, y la función de costo $V_N^{so}(x, p) = V_N(x, p; \mathbf{c}^{so}, x_s^{so}, u_s^{so})$.

A modo de resumen, se presenta a continuación, una forma de implementar esta solución subóptima secuencialmente.

Algoritmo 3. En primer lugar, los conjuntos \mathcal{X}_j y \mathcal{U}_j , necesarios para definir el espacio factible del Problema $\mathcal{P}_N(x, p)$, deben computarse de manera offline. Luego, en cada instante de tiempo k se procede como sigue:

- I. Calcular la **solución factible** (\hat{x}, \hat{c}) del Problema $\mathcal{P}_N(x, p)$, usando la solución desplazada aplicada al sistema en el instante de tiempo $k - 1$. Si el instante de tiempo actual es $k = 0$, calcular la **solución factible** (\hat{x}, \hat{c}) resolviendo el problema reducido $\mathcal{P}_N^{\text{dyn}}(x)$.
- II. Calcular el gradiente de la función de costo económico $V_{\text{eco}}(x, u, p)$ con respecto a (x, u) , es decir, $\nabla V_{\text{eco}}(x, u, p)$, y evaluarlo en (\hat{x}_s, \hat{u}_s) .
- III. Calcular la **solución óptima aproximada** del problema $\mathcal{P}_N(x, p)$, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{c}^*, x_s^*, u_s^*)$, minimizando el problema aproximado $\mathcal{P}_N^{\text{app}}(x, p)$.
- IV. Calcular el valor del parámetro $\tilde{\lambda}$ que define la **solución subóptima**.
- V. De la **solución subóptima** $(\mathbf{c}^{\text{so}}, x_s^{\text{so}}, u_s^{\text{so}}) \triangleq (\mathbf{c}(\tilde{\lambda}), x_s(\tilde{\lambda}), u_s(\tilde{\lambda}))$, considerar el primer elemento de la secuencia de entradas \mathbf{c}^{so} para implementar la ley de control MPC implícita, $\kappa_N(x, p) \triangleq u^{\text{so}}(0; x) = K(x - x_s^{\text{so}}) + u_s^{\text{so}} + c^{\text{so}}(0; x)$.

En la siguiente sección se realiza el análisis de estabilidad robusta del sistema controlado.

4.3.2. Análisis de estabilidad

En esta sección se estudian las propiedades del sistema a lazo cerrado del controlador propuesto. Se procura demostrar convergencia de manera asintótica y robusta en las inmediaciones del óptimo económico, satisfaciendo las restricciones. Con este fin, se busca que la desviación del sistema al óptimo económico sea estable entrada-estado con respecto a la incertidumbre, es decir, que el tamaño de la región en la cual la desviación está delimitada tenga una dependencia explícita del tamaño de la región en la que se encuentra dicha incertidumbre. Además se requiere que el controlador mantenga la factibilidad recursiva y la convergencia incluso en presencia de cambios repentinos en el punto de equilibrio.

Poder garantizar estas propiedades no es trivial y, para esto, el controlador deberá estar diseñado adecuadamente. En particular, los siguientes supuestos de diseño deben ser válidos:

Suposición 4.6.

- I. Sea $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ una matriz definida positiva y $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz semi definida positiva tal que el par $(Q^{1/2}, A)$ es observable.
- II. Sea $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la ganancia de control de estabilización del controlador LQR.

III. Sea $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz definida positiva, solución de la ecuación de Riccati:

$$P = A'_K P A_K + Q + K' R K$$

IV. Sea Ω_t un conjunto invariante robusto para seguimiento, como se describe en la Definición 4.4.

v. Sean los conjuntos \mathcal{X}_j y \mathcal{U}_j , tales que satisfacen el Supuesto 3.3.

A continuación, en el siguiente teorema, se establece la estabilidad entrada a estado (ISS) del sistema controlado.

Teorema 4.7 (Estabilidad). *Considérese que las Suposiciones 4.1-4.6 se cumplen y sea p un parámetro dado para el costo económico $V_{eco}(x, u, p) = \ell_{eco}(x, u, p)$. El sistema controlado por la ley de control $\kappa_N(x, p)$ dada por el controlador MPC propuesto es tal que para cualquier condición inicial $x(0) \in \mathcal{X}_N$, el problema de optimización $\mathcal{P}_N(x, p)$ es recursivamente factible y estabiliza asintóticamente el sistema perturbado (4-1) a $x_s^{eco} \oplus \mathcal{R}_\infty$.*

Demostración:

Para poder demostrar este teorema, en primer lugar se define la solución subóptima, $\mathbf{v}^{so}(x(k), p)$, del problema $\mathcal{P}_N(x, p)$ en el instante de tiempo k , como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{so}(x(k), p) &= \{ \mathbf{c}^{so}(x(k), p), x_s^{so}(x(k), p), u_s^{so}(x(k), p) \}, \\ \mathbf{c}^{so}(x(k), p) &= \{ c^{so}(0; x(k), p), c^{so}(1; x(k), p), \dots, c^{so}(N-1; x(k), p) \}. \end{aligned}$$

Luego se define una solución factible en el instante de tiempo $k+1$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{c}}(x(k+1), p) &= \{ c^{so}(1; x(k), p), \dots, c^{so}(N-1; x(k), p), 0 \}, \\ \tilde{x}_s(x(k+1), p) &= x_s^{so}(x(k), p), \\ \tilde{u}_s(x(k+1), p) &= u_s^{so}(x(k), p). \end{aligned}$$

Como se puede observar, $\tilde{\mathbf{c}}(x(k+1), p)$ no es más que la solución subóptima $\mathbf{c}^{so}(x(k), p)$ desplazada. Además, se define como $\tilde{x}(j; x(k+1), p)$ la predicción del j -ésimo paso, dado $x(k+1)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \tilde{x}(j; x(k+1), p) &= \tilde{x}_s(x(k+1), p) + A_K^j (x(k+1) - \tilde{x}_s(x(k+1), p)) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{j-1} A_K^i B \tilde{c}(j-i-1; x(k+1), p). \end{aligned}$$

En lo que sigue, se omitirá la dependencia de las variables de (x, p) , de modo que $x(j; x(k), p)$ se denotará como $x(j; k)$.

Se procederá, como es habitual, a mostrar primero la factibilidad recursiva, luego el decrecimiento del costo y, finalmente, de la estabilidad asintótica robusta de $x_s^{eco} \oplus \mathcal{R}_\infty$.

I. Factibilidad recursiva

Como se mencionó en el Capítulo 3, la factibilidad recursiva se fundamenta en el hecho de que \mathcal{X}_N es un invariante positivo del sistema en lazo cerrado. Como el conjunto Ω_t es un conjunto invariante positivo robusto según una ley de control local, entonces \mathcal{X}_N es el conjunto estabilizable en N pasos a dicho conjunto.

En primer lugar, se demuestra que la única diferencia entre el estado predicho $j + 1$ en el instante de tiempo k y el estado predicho j en el instante de tiempo $k + 1$, está dada por la evolución de la incertidumbre en j . Es decir, la diferencia entre lo que se predijo que iba a suceder y lo que realmente sucede, está dada por la incertidumbre. Luego se procederá a demostrar la factibilidad recursiva de los conjuntos $\mathcal{X}_j, \mathcal{U}_j$ y de la restricción terminal.

Lema 4.8. Para todo $j = 0, \dots, N - 1$

$$\tilde{x}(j; k + 1) - x(j + 1; k) = A_K^j w(k)$$

Demostración: Dado que

$$x^{so}(j + 1; k) = x_s^{so}(k) + A_K^j (x^{so}(1; k) - x_s^{so}(k)) + \sum_{i=0}^{j-1} A_K^i B c^{so}(j - i; k)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{x}(j; k + 1) &= \tilde{x}_s(k + 1) + A_K^j (x(k + 1) - \tilde{x}_s(k + 1)) + \sum_{i=0}^{j-1} A_K^i B \tilde{c}(j - i - 1; k + 1) \\ &= x_s^{so}(k) + A_K^j (x(k + 1) - x_s^{so}(k)) + \sum_{i=0}^{j-1} A_K^i B c^{so}(j - i; k) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\tilde{x}(j; k + 1) - x(j + 1; k) = A_K^j [x(k + 1) - x^{so}(1; k)] = A_K^j w(k)$$

■

Lema 4.9. Si $x^{so}(j; k) \in \mathcal{X}_j$, entonces $\tilde{x}(j - 1; k + 1) \in \mathcal{X}_{j-1}$, para todo $j = 0, \dots, N$.

Demostración: Dado que $\tilde{x}(j-1; k+1) = x^{so}(j; k) + A_K^{j-1}w(k)$, luego

$$\begin{aligned} \tilde{x}(j-1; k+1) \in \mathcal{X}_j \oplus A_K^{j-1}\mathcal{W} &= \mathcal{X} \ominus \left[\bigoplus_{i=0}^{j-1} A_K^i \mathcal{W} \right] \oplus A_K^{j-1}\mathcal{W} \\ &\subseteq \mathcal{X} \ominus \left[\bigoplus_{i=0}^{j-2} A_K^i \mathcal{W} \right] \\ &\subseteq \mathcal{X}_{j-1} \end{aligned}$$

■

Lema 4.10. Si $u^{so}(j; k) \in \mathcal{U}_j$, entonces $\tilde{u}(j-1; k+1) \in \mathcal{U}_{j-1}$, para todo $j = 1, \dots, N-1$.

Demostración: Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} u^{so}(j; k) &= K(x^{so}(j; k) - x_s^{so}(k)) + u_s^{so}(k) + c^{so}(j; k) \\ \tilde{u}(j-1; k+1) &= K(\tilde{x}(j-1; k+1) - \tilde{x}_s(k+1)) + \tilde{u}_s(k+1) + \tilde{c}(j-1; k+1) \\ &= K(\tilde{x}(j-1; k+1) - x_s^{so}(k)) + u_s^{so}(k) + \tilde{c}(j-1; k+1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} K(x^{so}(j; k) - x_s^{so}(k)) + u_s^{so}(k) + c^{so}(j; k) &= K(\tilde{x}(j-1; k+1) - x_s^{so}(k)) - KA_K^{j-1}w(k) \\ &\quad + u_s^{so}(k) + \tilde{c}(j-1; k+1) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\tilde{u}(j-1; k+1) = K(\tilde{x}(j-1; k+1) - x_s^{so}(k)) + u_s^{so}(k) + \tilde{c}(j-1; k+1) \in \mathcal{U}_j \oplus KA_K^{j-1}\mathcal{W}$$

y

$$\mathcal{U}_j \oplus KA_K^{j-1}\mathcal{W} = \mathcal{U} \ominus K\mathcal{R}_j \oplus KA_K^{j-1}\mathcal{W} = \mathcal{U} \ominus K\mathcal{R}_{j-1} = \mathcal{U}_{j-1}$$

■

Lema 4.11. [Factibilidad recursiva de la restricción terminal] Para todo $k \geq 0$,

$$(\bar{x}^{so}(N; k), x_s^{so}(k), u_s^{so}(k)) \in \Omega_t$$

Demostración: Considérese que al instante k , $(\bar{x}^{so}(N; k), x_s^{so}(k), u_s^{so}(k)) \in \Omega_t$. Debido a que $\Omega_t = \Sigma_t \ominus (\mathcal{R}_N \times \{0\} \times \{0\})$, se tiene que

$$(\bar{x}^{so}(N-1; k+1), x_s^{so}(k+1), u_s^{so}(k+1)) \in \Sigma_t \ominus (\mathcal{R}_N \times \{0\} \times \{0\}) \oplus (A_K^{N-1}\mathcal{W} \times \{0\} \times \{0\})$$

Dado que

$$(\bar{x}^{so}(N; k+1), x_s^{so}(k+1), u_s^{so}(k+1)) = A_z(\bar{x}^{so}(N-1; k+1), x_s^{so}(k+1), u_s^{so}(k+1)),$$

entonces

$$(\bar{x}^{so}(N; k+1), x_s^{so}(k+1), u_s^{so}(k+1)) \in A_z(\Sigma_t \ominus (\mathcal{R}_N \times \{0\} \times \{0\})) \oplus (A_K^{N-1} \mathcal{W} \times \{0\} \times \{0\}))$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} A_z(\Sigma_t \ominus (\mathcal{R}_N \times \{0\} \times \{0\})) \oplus (A_K^{N-1} \mathcal{W} \times \{0\} \times \{0\}) & \\ &= A_z \Sigma_t \ominus (A_K \mathcal{R}_N \times \{0\} \times \{0\}) \oplus (A_K^N \mathcal{W} \times \{0\} \times \{0\}) \\ &= A_z \Sigma_t \ominus \left(\bigoplus_{j=1}^N A_K^j \mathcal{W} \times \{0\} \times \{0\} \right) \oplus (A_K^N \mathcal{W} \times \{0\} \times \{0\}) \\ &= A_z \Sigma_t \ominus \left(\bigoplus_{j=1}^{N-1} A_K^j \mathcal{W} \times \{0\} \times \{0\} \right) \ominus (A_K^N \mathcal{W} \times \{0\} \times \{0\}) \\ &\quad \oplus (A_K^N \mathcal{W} \times \{0\} \times \{0\}) \\ &\subseteq A_z \Sigma_t \ominus \left(\bigoplus_{j=1}^{N-1} A_K^j \mathcal{W} \times \{0\} \times \{0\} \right) \\ &\subseteq (\Sigma_t \ominus (\mathcal{W} \times \{0\} \times \{0\})) \ominus \left(\bigoplus_{j=1}^{N-1} A_K^j \mathcal{W} \times \{0\} \times \{0\} \right) \\ &= \Sigma_t \ominus \left(\bigoplus_{j=0}^{N-1} A_K^j \mathcal{W} \times \{0\} \times \{0\} \right) \\ &= \Sigma_t \ominus (\mathcal{R}_N \times \{0\} \times \{0\}) \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad proviene de $A_z \Sigma_t \oplus (\mathcal{W} \times \{0\} \times \{0\}) \subseteq \Sigma_t \Leftrightarrow A_z \Sigma_t \subseteq \Sigma_t \ominus (\mathcal{W} \times \{0\} \times \{0\})$.

Por lo tanto,

$$(\bar{x}^{so}(N; k+1), x_s^{so}(k+1), u_s^{so}(k+1)) \in \Sigma_t \ominus (\mathcal{R}_N \times \{0\} \times \{0\}) = \Omega_t$$

■

II. Decrecimiento robusto del costo

Para probar el decrecimiento robusto del costo, al igual que se realiza en el MPC nominal estándar, se compararán dos costos, uno correspondiente al instante de tiempo $k+1$ y el otro

al instante k . Dado que el estado medido $x(k+1)$ es incierto, se considerará por un lado el caso que $w(k) = 0$ y por el otro que $w(k) \neq 0$.

Para realizar la comparación de dichos costos, en primer lugar, considérese la solución subóptima al problema $\mathcal{P}_N(x(k), p)$ en el tiempo k , dada por

$$\mathbf{v}^{so}(x(k), p) = \{\mathbf{c}^{so}(x(k), p), x_s^{so}(x(k), p), u_s^{so}(x(k), p)\}.$$

El valor de la función de costo en el tiempo k , debido a $\mathbf{v}^{so}(x(k), p)$, es $V_N^{so}(x(k), p)$, donde

$$V_N^{so}(x(k), p) = \sum_{j=0}^{N-1} \|\bar{x}^{so}(j; k) - x_s^{so}(k)\|_Q^2 + \|u^{so}(j; k) - u_s^{so}(k)\|_R^2 + \|\bar{x}^{so}(N; k) - x_s^{so}(k)\|_P^2 \\ + V_{eco}(x_s^{so}(k), u_s^{so}(k), p)$$

donde

$$\mathbf{u}^{so}(k) = \{u^{so}(0; k), u^{so}(1; k), \dots, u^{so}(N-1; k)\}, \\ \mathbf{c}^{so}(k) = \{c^{so}(0; k), c^{so}(1; k), \dots, c^{so}(N-1; k)\}, \\ \bar{\mathbf{x}}^{so}(k) = \{\bar{x}^{so}(0; k), \bar{x}^{so}(1; k), \dots, \bar{x}^{so}(N-1; k), \bar{x}^{so}(N; k)\},$$

con

$$\bar{x}^{so}(0; k) = x(k), \\ \bar{x}^{so}(j; k) = A\bar{x}^{so}(j-1; k) + Bu^{so}(j-1; k), \\ \bar{x}^{so}(N; k) \in \Omega_t^x = Proj_x(\Omega_t),$$

debido a la restricción de estabilización terminal y

$$u^{so}(j; k) = K(\bar{x}^{so}(j; k) - x_s^{so}(k)) + u_s^{so}(k) + c^{so}(j; k).$$

Se define la secuencia de control y las variables artificiales factibles como

$$\tilde{\mathbf{c}}(x(k+1), p) = \{c^{so}(1; k), \dots, c^{so}(N-1; k), 0\}, \\ \tilde{x}_s(k+1) = x_s^{so}(k), \\ \tilde{u}_s(k+1) = u_s^{so}(k).$$

Definir también la siguiente secuencia:

$$\tilde{\mathbf{u}}(k+1) = \{\tilde{u}(0; k+1), \tilde{u}(1; k+1), \dots, \tilde{u}(N-2; k+1), \tilde{u}(N-1; k+1)\}$$

$$= \{u^{so}(1; k), u^{so}(2; k), \dots, u^{so}(N-1; k), \tilde{u}(N-1; k+1)\}$$

con $\tilde{u}(N-1; k+1) = K(\bar{x}^{so}(N; k) - x_s^{so}(k)) + u_s^{so}(k) + \overbrace{\tilde{c}(N-1; k+1)}^{=0}$. La secuencia de predicciones a partir del estado medido incierto $x(k+1)$ debido a la secuencia de control factible $\tilde{u}(k+1)$ está dada por

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \{\tilde{x}(0; k+1), \tilde{x}(1; k+1), \dots, \tilde{x}(N; k+1)\},$$

con $\tilde{x}(0; k+1) = x(k+1)$, $\tilde{x}(j; k+1) = A\tilde{x}(j-1; k+1) + B\tilde{u}(j-1; k+1)$, $j \in \mathbb{I}_{[1:N]}$.

Por los Lemas 4.8-4.10, se deriva que $\tilde{\mathbf{v}}(x(k+1), p) = \{\tilde{c}(k+1), \tilde{x}_s(k+1), \tilde{u}_s(k+1)\}$ es una solución factible al problema $\mathcal{P}_N(x(k+1), p)$. Además, del Lema 4.8, $\tilde{x}(j; k+1) = \bar{x}^{so}(j+1; k) + A_K^j w(k)$, para $j \in \mathbb{I}_{[1:N]}$, Y del Lema 4.11 se tiene que $\tilde{x}(N; k+1) \in \Omega_t^x$.

El valor de la función de costo, en el tiempo $k+1$, debido a la solución factible $\tilde{\mathbf{v}}(x(k+1), p)$, esta dado por

$$\begin{aligned} V_N(x(k+1), p; \tilde{\mathbf{v}}(x(k+1), p)) &= \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \|\tilde{x}(j; k+1) - \tilde{x}_s(k+1)\|_Q^2 + \|\tilde{u}(j; k+1) - \tilde{u}_s(k+1)\|_R^2 \\ &\quad + \|\tilde{x}(N; k+1) - \tilde{x}_s(k+1)\|_P^2 + V_{eco}(\tilde{x}_s(k+1), \tilde{u}_s(k+1), p) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \|\tilde{x}(j; k+1) - x_s^{so}(k)\|_Q^2 + \|\tilde{u}(j; k+1) - u_s^{so}(k)\|_R^2 \\ &\quad + \|\tilde{x}(N; k+1) - x_s^{so}(k)\|_P^2 + V_{eco}(x_s^{so}(k), u_s^{so}(k), p) \end{aligned}$$

Como suele hacerse en el MPC estándar, se comparan los dos costos $V_N(x(k+1), p; \tilde{\mathbf{v}}(k+1))$ y $V_N^{so}(x(k), p)$. Como el estado medido $x(k+1)$ es incierto, se realiza la siguiente definición:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}V_N &= V_N(x(k+1), p; \tilde{\mathbf{v}}(k+1)) - V_N^{so}(x(k), p) \\ &= V_N(x(k+1), p; \tilde{\mathbf{v}}(k+1)) - \bar{V}_N(\bar{x}(k+1), p; \tilde{\mathbf{v}}(k+1)) \\ &\quad + \bar{V}_N(\bar{x}(k+1), p; \tilde{\mathbf{v}}(k+1)) - V_N^{so}(x(k), p) \\ &= \tilde{\Delta}V_N^w + \tilde{\Delta}V_N^{w=0} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}V_N^w &= V_N(x(k+1), p; \tilde{\mathbf{v}}(k+1)) - \bar{V}_N(\bar{x}(k+1), p; \tilde{\mathbf{v}}(k+1)) \\ \tilde{\Delta}V_N^{w=0} &= \bar{V}_N(\bar{x}(k+1), p; \tilde{\mathbf{v}}(k+1)) - V_N^{so}(x(k), p) \end{aligned}$$

y $\bar{x}(k+1)$ es el estado sucesor si $w(k) = 0$, lo que significa (por el Lema 4.8) que el estado sucesor solo viene dado por la evolución del modelo nominal, esto es $\bar{x}(k+1) = \bar{x}^{so}(1; k) = Ax(k) + Bu^{so}(0; k)$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\Delta V_N^{w=0} &= \bar{V}_N(\bar{x}^{so}(1; k), p; \tilde{\mathbf{v}}(k+1)) - V_N^{so}(x(k), p) \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \|\bar{x}^{so}(j; k) - x_s^{so}(k)\|_Q^2 + \|u^{so}(j; k) - u_s^{so}(k)\|_R^2 \\
&\quad + \|\bar{x}^{so}(N; k) - x_s^{so}(k)\|_Q^2 + \|u^{so}(N; k) - u_s^{so}(k)\|_R^2 \\
&\quad + \|\bar{x}^{so}(N+1; k) - x_s^{so}(k)\|_P^2 + V_{eco}(x_s^{so}(k), u_s^{so}(k), p) \\
&\quad - \|\bar{x}^{so}(0; k) - x_s^{so}(k)\|_Q^2 - \|u^{so}(0; k) - u_s^{so}(k)\|_R^2 \\
&\quad - \left(\sum_{j=1}^{N-1} \|\bar{x}^{so}(j; k) - x_s^{so}(k)\|_Q^2 + \|u^{so}(j; k) - u_s^{so}(k)\|_R^2 \right) \\
&\quad - \|\bar{x}^{so}(N; k) - x_s^{so}(k)\|_P^2 - V_{eco}(x_s^{so}(k), u_s^{so}(k), p) \\
&= -\|x(k) - x_s^{so}(k)\|_Q^2 - \|u^{so}(0; k) - u_s^{so}(k)\|_R^2 \\
&\quad + \|\bar{x}^{so}(N; k) - x_s^{so}(k)\|_Q^2 + \|K(\bar{x}^{so}(N; k) - x_s^{so}(k))\|_R^2 \\
&\quad + \|A_K(\bar{x}^{so}(N; k) - x_s^{so}(k))\|_P^2 - \|\bar{x}^{so}(N; k) - x_s^{so}(k)\|_P^2 \\
&= -\|x(k) - x_s^{so}(k)\|_Q^2 - \|u^{so}(0; k) - u_s^{so}(k)\|_R^2 \\
&\quad + \|\bar{x}^{so}(N; k) - x_s^{so}(k)\|_{(Q+K'RK+A_K'PA_K-P)}^2 \\
&= -\|x(k) - x_s^{so}(k)\|_Q^2 - \|u^{so}(0; k) - u_s^{so}(k)\|_R^2.
\end{aligned}$$

Ahora se analizará el caso de $\tilde{\Delta}V_N^w$. De las definiciones dadas anteriormente,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}V_N(w) &= V_N(x(k+1), p; \tilde{\mathbf{v}}(k+1)) - \bar{V}_N(\bar{x}^{so}(1; k), p; \tilde{\mathbf{v}}(k+1)) \\
&= V_N^{dyn}(x(k+1); \tilde{\mathbf{c}}, x_s^{so}(k), u_s^{so}(k)) + V_{eco}(x_s^{so}(k), u_s^{so}(k), p) \\
&\quad - V_N^{dyn}(\bar{x}^{so}(1; k); \tilde{\mathbf{c}}, x_s^{so}(k), u_s^{so}(k)) - V_{eco}(x_s^{so}(k), u_s^{so}(k), p) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \|\tilde{\mathbf{c}}(j; k+1)\|_{\Psi}^2 + \|x(k+1) - x_s^{so}(k)\|_P^2 \\
&\quad - \sum_{j=0}^{N-1} \|\tilde{\mathbf{c}}(j; k+1)\|_{\Psi}^2 - \|\bar{x}^{so}(1; k) - x_s^{so}(k)\|_P^2 \\
&= \|x(k+1) - x_s^{so}(k)\|_P^2 - \|\bar{x}^{so}(1; k) - x_s^{so}(k)\|_P^2 \\
&\leq \|\|x(k+1) - x_s^{so}(k)\|_P^2 - \|\bar{x}^{so}(1; k) - x_s^{so}(k)\|_P^2\| \\
&\leq \sigma(\|x(k+1) - \bar{x}^{so}(1; k)\|)
\end{aligned}$$

$$= \sigma(\|w(k)\|)$$

donde σ es una función \mathcal{K} , la tercera igualdad proviene de la Observación 4.5, mientras que la segunda desigualdad proviene del hecho de que $\|\cdot\|_P^2$ es uniformemente continuo (ya que $\|\cdot\|_P^2$ es continuo y el conjunto \mathcal{X} es compacto), y la última igualdad proviene del Lema 4.8.

Luego

$$\tilde{\Delta}V_N \leq -\|x(k) - x_s^{so}(k)\|_Q^2 - \|u^{so}(0; k) - u_s^{so}(k)\|_R^2 + \sigma(\|w(k)\|)$$

Por el Teorema 2.5, $V_N^{so}(x(k+1), p) \leq V_N(x(k+1), p; \tilde{\mathbf{v}}(k+1))$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Delta V_N^{so} &= V_N^{so}(x(k+1), p) - V_N^{so}(x(k), p) \\ &\leq -\|x(k) - x_s^{so}(k)\|_Q^2 - \|u^{so}(0; k) - u_s^{so}(k)\|_R^2 + \sigma(\|w(k)\|) \\ &\leq -\alpha(\|x(k) - x_s^{so}(k)\|) + \sigma(\|w(k)\|) \end{aligned} \quad (4-17)$$

donde α es una función \mathcal{K} .

III. Estabilidad asintótica robusta

Para demostrar la estabilidad asintótica robusta, se define $J(x) = V_N^{so}(x, p) - V_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p)$. Esta función está definida en el conjunto factible \mathcal{X}_N . Se define también $e(x) = x - x_s^{so}$. Luego, dado que el costo $V_N(x, p; \mathbf{v})$ es definido positivo, existe una función \mathcal{K} , α_1 , tal que $J(x) \geq \alpha_1(\|e(x)\|)$, para todo $x \in \mathcal{X}_N$.

Del Lema 4.13 (ver Sección 4.6), se deduce que

$$\alpha_1(\|e(x)\|) \geq \alpha_1(\alpha_e(\|x - x_s^{eco}\|)) = \alpha_J(\|x - x_s^{eco}\|)$$

donde α_e y α_J son funciones \mathcal{K} . Teniendo en cuenta esto, se puede concluir que:

(I) $J(x) \geq \alpha_J(\|x - x_s^{eco}\|)$, para todo $x \in \mathcal{X}_N$. Esto se deduce, dado que $J(x) \geq \alpha_1(\|e(x)\|)$ y $\alpha_1(\|e(x)\|) \geq \alpha_J(\|x - x_s^{eco}\|)$.

(II) $J(x) \leq \alpha_2(\|x - x_s^{eco}\|)$, para todo $x \in \mathcal{X}_N$, donde α_2 es una función \mathcal{K}_∞ . Como la función de costo de etapa es cuadrática y el modelo es lineal, entonces la función de costo $J(x) = V_N^{so}(x, p) - V_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p)$ es una función localmente continua acotada y, además, $J(x_s^{eco}) = 0$. Entonces, existe una función \mathcal{K}_∞ , $\alpha_2(\cdot)$, tal que $J(x) \leq \alpha_2(\|x - x_s^{eco}\|)$, para todo $x \in \mathcal{X}_N$.

(III) $J(x^+) - J(x) \leq -\alpha_3(\|x - x_s^{eco}\|) + \sigma(\|w\|)$ para todo $x \in \mathcal{X}_N$, donde $x^+ = Ax + Bu$, α_3 y σ son funciones \mathcal{K} . A partir del decrecimiento robusto del costo, presentado anteriormente, se tiene que $J(x^+) - J(x) \leq -\alpha(\|e(x)\|) + \sigma(\|w\|)$, siendo α y σ funciones- \mathcal{K} . Dado que $\alpha(\|e(x)\|) \geq \alpha_J(\|x - x_s^{eco}\|)$, entonces $J(x^+) - J(x) \leq -\alpha_3(\|x - x_s^{eco}\|) + \sigma(\|w\|)$, con α_3 y σ funciones- \mathcal{K} . Esto implica que, para $k \rightarrow \infty$, si $w = 0$, entonces $x(k) \rightarrow x_s^{eco}$; si $w \neq 0$, entonces $x(k) \rightarrow x_s^{eco} \oplus \mathcal{R}_\infty$.

Luego, en base a estos hechos, y recurriendo a los argumentos de ISS presentados en el Capítulo 3, se puede probar que existe una función \mathcal{KL} , ϑ , y una función \mathcal{K} , δ , tales que

$$\|\bar{x}(k) - x_s^{eco}\| \leq \vartheta(\|\bar{x}(0) - x_s^{eco}\|, k) + \delta(\|w\|)$$

para todo estado inicial $\bar{x}(0) \in \mathcal{X}_N$ y toda perturbación $w(k) \in \mathcal{W}$. Esto significa que el sistema a lazo cerrado es ISS, con lo cual el sistema perturbado (4-1) es mantenido por el controlador en la región del espacio de estado dada por $x_s^{eco} \oplus \mathcal{R}_\infty$.

De esta manera, habiendo demostrado la factibilidad recursiva, el decrecimiento del costo y la estabilidad entrada a estado, se concluye la demostración del Teorema 4.7. ■

4.4. Ejemplo de aplicación: sistema de cuatro tanques

En esta sección, con el fin de contemplar las propiedades y los beneficios de la estrategia de MPC económica robusta propuesta, se presentan algunos resultados de simulaciones correspondientes a una planta de laboratorio multivariable, consistente en cuatro tanques interconectados, con dinámica no lineal y sujeto a restricciones de estado y entrada, presentadas en [Alvarado, 2007]. En primer lugar, se realiza una descripción del sistema considerado, y luego se presentan los resultados de las simulaciones dinámicas.

4.4.1. Descripción del sistema

El sistema de cuatro tanques considerado es el banco de ensayo para estrategias de control descrito en [Johansson, 2000]. El sistema está constituido por cuatro depósitos interconectados diagonalmente, como se ve en la Figura 4-1. Las bombas de caudal controlado A y B extraen agua del depósito inferior vertiéndola en los tanques 1 y 4, la bomba A, y en los tanques 2 y 3 la bomba B. Todos los tanques se descargan por gravedad, el 3 sobre el 1, el 4 sobre el 2, y el 1 y el 2 sobre el depósito inferior. El objetivo de la planta es controlar los

niveles de los tanques 1 y 2 (que son las salidas del sistema), actuando sobre los caudales de las bombas (que son las acciones de control). Las salidas del sistema están fuertemente acopladas, ya que si se desea aumentar el nivel del depósito 1, al aumentar del caudal de la bomba A también aumenta el nivel de depósito 4 que al descargarse sobre el 2 aumentará el nivel del mismo.

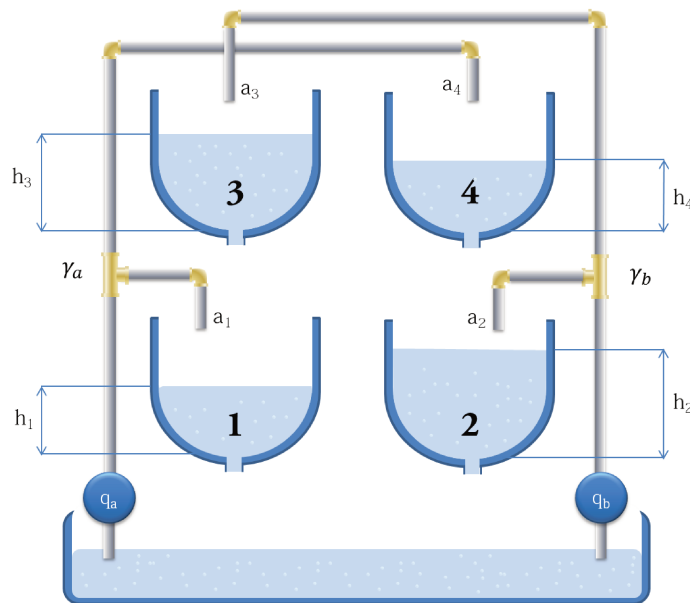


Figura 4-1: Proceso de cuatro tanques.

El sistema es un interesante banco de ensayos debido a que:

- Todas las variables de estados son accesibles, puesto que las alturas de los líquidos se pueden medir.
- Dependiendo de los valores de los caudales de las bombas, el sistema puede poseer un cero de transmisión en el semiplano derecho o de fase no mínima.
- El modelo del sistema es no lineal.
- Las variables a controlar están fuertemente acopladas.
- Los estados y entradas de la planta están restringidos.

4.4.2. Sistema dinámico de la planta

Se define un modelo a tiempo continuo en el espacio de estados de la planta, considerando las ideas presentadas en [Johansson, 2000]:

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{a_1}{S} \sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{S} \sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_a}{S} \frac{q_a}{3600} \quad (4-18a)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = -\frac{a_2}{S} \sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{S} \sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_b}{S} \frac{q_b}{3600} \quad (4-18b)$$

$$\frac{dh_3}{dt} = -\frac{a_3}{S} \sqrt{2gh_3} + \frac{(1 - \gamma_b)}{S} \frac{q_b}{3600} \quad (4-18c)$$

$$\frac{dh_4}{dt} = -\frac{a_4}{S} \sqrt{2gh_4} + \frac{(1 - \gamma_a)}{S} \frac{q_a}{3600} \quad (4-18d)$$

Donde los parámetros de la planta son:

- S : Secciones de los tanques ($[m^2]$).
- a_i : Constante de descarga del tanque i ($[m^2]$).
- h_i : Nivel de agua del tanque i (estado del sistema) ($[m]$).
- q_a, q_b : Flujo producido por las bombas a y b ($[m^3/h]$).
- g : Aceleración de la gravedad ($[m/s^2]$).
- γ_a, γ_b : Parámetros de las válvulas de tres vías.

El valor de estos parámetros se muestra en la Tabla 4-1. Estos valores han sido estimados en una planta experimental ubicada en el Laboratorio de Control de la Universidad de Sevilla (España). Para obtener una descripción detallada de esta planta experimental, consulte [Alvarado et al., 2011].

	Value	Unit	Description
a_1	1.310e-4	m^2	Discharge constant of tank 1
a_2	1.507e-4	m^2	Discharge constant of tank 2
a_3	9.267e-5	m^2	Discharge constant of tank 3
a_4	8.816e-5	m^2	Discharge constant of tank 4
S	0.06	m^2	Cross-section of all tanks
γ_a	0.3		Parameter of the 3-ways valve
γ_b	0.4		Parameter of the 3-ways valve

Tabla 4-1: Parámetros de la planta de cuatro tanques

Linealizando el sistema en torno de un punto operacional dado por

$$h^o = (0.6487, 0.6639, 0.6498, 0.6592),$$

$$q^o = (1.63, 2),$$

y definiendo $x_i = h_i - h_i^o$, $u_j = q_j - q_j^o$, donde $i = 1, \dots, 4$ y $j = a, b$, se tiene que:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\tau_1} & 0 & \frac{1}{\tau_3} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\tau_2} & 0 & \frac{1}{\tau_4} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\tau_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\tau_4} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{\gamma_a}{\chi} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_b}{\chi} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_b)}{\chi} \\ \frac{(1-\gamma_a)}{\chi} & 0 \end{bmatrix} u + w,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x,$$

donde $\chi = 3600 * S$, y $\tau_i = \frac{S}{a_i} \sqrt{\frac{2h_i^o}{g}} \geq 0$, $i = 1, \dots, 4$, representan las constantes de tiempo de cada tanque. Los parámetros γ_a y γ_b determinan la presencia de ceros de transmisión en el sistema, para cualquier punto operacional elegido:

- Si $0 \leq \gamma_a + \gamma_b \leq 1$ el sistema presenta ceros de transmisión en el semiplano derecho.
- Si $1 \leq \gamma_a + \gamma_b \leq 2$ el sistema presenta ceros de transmisión en el semiplano izquierdo.

Teniendo en cuenta este sistema, se discretiza el modelo linealizado utilizando el método retenedor de orden cero, con un tiempo de muestreo de cinco segundos. Las matrices resultantes para el modelo lineal son las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9704 & 0 & 0.0207 & 0 \\ 0 & 0.9664 & 0 & 0.0195 \\ 0 & 0 & 0.9790 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9802 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0.0068 & 0.0001 \\ 0.0002 & 0.0091 \\ 0 & 0.0137 \\ 0.0160 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema debe cumplir las siguientes restricciones:

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^4 : 0.2 \leq x_{1,2} \leq 1.36; 0.2 \leq x_{3,4} \leq 1.30, \},$$

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^2 : [0, 0] \leq u \leq [3.26, 4]\}.$$

En lo que sigue, \mathcal{Y} denotará el conjunto de salidas admisibles, dado por $\mathcal{Y} = Proj_y(\mathcal{X})$.

El conjunto \mathcal{W} de posible realización de perturbaciones viene dado por

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathcal{R}^4 : \|w\|_\infty \leq 5 \times 10^{-3}\},$$

y fue seleccionado para tener en cuenta los desajustes entre planta y modelo en los puntos de operación habituales [Alvarado, 2007].

Con respecto a los parámetros del controlador, el horizonte de predicción se ha designado como $N = 5$, mientras que la matriz K ha sido elegida como la ganancia del Regulador Cuadrático Lineal (LQR), para $Q = I_4$ y $R = 0.0005I_2$, y está dada por:

$$K = \begin{bmatrix} -8.3586 & -6.3160 & 3.9788 & -28.7655 \\ -7.9006 & -12.4498 & -27.9745 & 3.1314 \end{bmatrix}.$$

El objetivo económico es minimizar el consumo energético de la planta [Ferramosca et al., 2014a], minimizando el voltaje de las dos bombas y, al mismo tiempo, maximizando el volumen de agua en los tanques 1 y 2. Entonces la función de costo económico está dada por:

$$\ell_{eco}(y, u, p) = (q_a^2 + p(1)q_b^2) + p(2)\frac{V_{min}}{S(h_1 + h_2)},$$

donde $V_{min} = 0.012[m^3]$ es el volumen mínimo de agua que debe acumularse en los tanques. $y = (h_1, h_2)$, $u = (q_a, q_b)$, y $p = (p(1), p(2))$ son los precios en la función de costos. Tenga en cuenta que esta función es estrictamente convexa en (x, u) y dos veces diferenciable.

4.4.3. Simulaciones dinámicas

Para observar el rendimiento dinámico del sistema, se considerarán tres costos económicos, basados en los siguientes valores de precios: $p_1 = (5, 10)$, $p_2 = (0.5, 100)$ y $p_3 = (5, 100)$. Para cada uno de estos casos, las condiciones constantes económicamente óptimas y los costos óptimos son, respectivamente:

$$\begin{aligned} (y_{s1}^{eco}, u_{s1}^{eco}) &= (0.2988, 0.3986, 1.452, 1.333), & \ell_{eco}(y_{s1}^{eco}, u_{s1}^{eco}, p_1) &= 13.6553, \\ (y_{s2}^{eco}, u_{s2}^{eco}) &= (1.1090, 0.9473, 1.671, 2.974), & \ell_{eco}(y_{s2}^{eco}, u_{s2}^{eco}, p_2) &= 16.9311, \\ (y_{s3}^{eco}, u_{s3}^{eco}) &= (0.5198, 0.8519, 2.408, 1.333), & \ell_{eco}(y_{s3}^{eco}, u_{s3}^{eco}, p_3) &= 29.1083. \end{aligned}$$

Para probar el controlador propuesto, se considera como estado inicial el punto de linealización del modelo nominal h_i^o . A continuación, primero se regula el sistema a un punto de operación, que corresponde al punto de referencia $(y_{s1}^{eco}, u_{s1}^{eco})$. Una vez que el sistema alcanza una vecindad de dicho punto, dada por el mínimo conjunto invariante robusto, se produce el primer cambio del óptimo económico, dirigiendo al sistema a $(y_{s2}^{eco}, u_{s2}^{eco})$. Finalmente, una

vez alcanzada cierta vecindad de este punto se produce un segundo cambio en el parámetro p y se dirige al sistema al punto $(y_{s3}^{eco}, u_{s3}^{eco})$.

Los resultados de la simulación son presentados en las Figuras 4-2-4-7.

En particular, en la Figura 4-2 se muestra la evolución de las salidas de control h_1 y h_2 . El óptimo económico, las referencias artificiales y la salida real se representan, respectivamente, en líneas de trazos y puntos azules, en líneas punteadas rojas y líneas continuas negras.

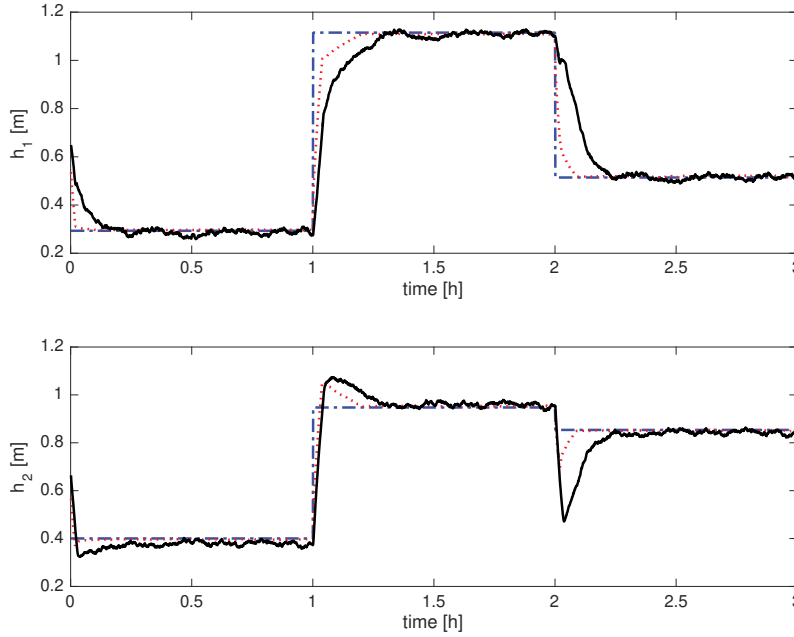


Figura 4-2: Evolución de las salidas h_1 y h_2 : salida del sistema en línea negra, referencia artificial en línea de puntos roja, óptimo económico en línea de trazos y puntos azul.

Las Figuras 4-3 y 4-4 muestran la evolución de las entradas de control q_a y q_b y la evolución de h_3 y h_4 , respectivamente.

La Figura 4-5 muestra el costo económico para los diferentes valores de p_1, p_2, p_3 . Como se puede observar, la función de costo económico converge robustamente al valor óptimo de ℓ_{eco} para todos los cambios de p .

Para simular la perturbación, se considera una distribución Gaussiana truncada. La evolución del espacio de salida de esta simulación se muestra en la Figura 4-6. Se puede observar cómo el sistema a lazo cerrado converge y se mantiene dentro de los conjuntos sombreados en azul. Esos conjuntos representan las proyecciones en el espacio de salida de los RPI mínimos centrados en los equilibrios económicos, es decir $y_{si}^{eco} \oplus CR_{\infty}$.

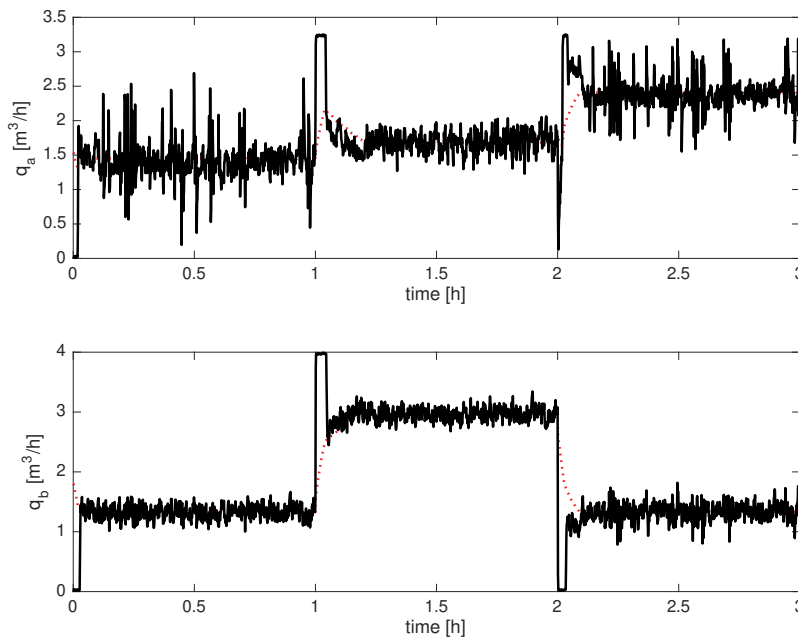


Figura 4-3: Evolución de las entradas q_a y q_b : salida del sistema en línea negra, referencia artificial en línea de puntos roja.

Por otro lado, la Figura 4-7 muestra la evolución del espacio de salida para una simulación donde las perturbaciones aditivas se toman como constantes y periódicas, como se muestra en la Figura 4-8. Dichas perturbaciones se generaron utilizando la función de Matlab $square(T)$, que genera una onda cuadrada con un período de 2π para los elementos del vector de tiempo T .

Se puede observar que en ambos casos $y \rightarrow y_s^{eco} \oplus C\mathcal{R}_\infty$ como $\bar{y} \rightarrow y_s^{eco}$, con la diferencia de que en el primer caso, el sistema permanece cerca de y_s^{eco} mientras que en el segundo caso, debido al tipo de perturbación, está cerca del límite del conjunto $y_s^{eco} \oplus C\mathcal{R}_\infty$.

Es importante observar que:

- la evolución del estado nunca deja $y_s^{eco} \oplus C\mathcal{R}_\infty$ una vez que está dentro de este conjunto. Sólo cuando se produce un cambio en el parámetro p , el controlador lleva el sistema fuera del conjunto para ir al nuevo punto de operación;
- el controlador acerca el sistema lo más posible al punto de operación económicamente óptimo. La desviación se debe a la presencia de w ;
- la referencia artificial permite que el controlador mantenga la factibilidad cuando cam-

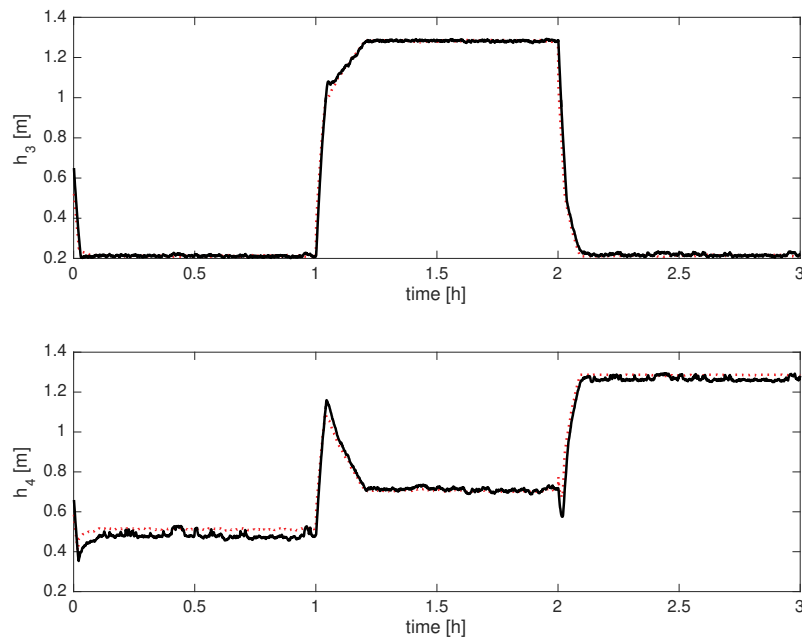


Figura 4-4: Evolución de los estados h_3 y h_4 : salida del sistema en línea negra, referencia artificial en línea de puntos roja.

bia el punto de óptimo económico. Este hecho se puede observar en la Figura 4-2: cuando cambia el costo económico y, por lo tanto, cambia el punto de referencia (línea azul punteada), la referencia artificial (en línea de puntos roja) proporciona una referencia admisible y accesible, que puede ser seguido por el controlador, evitando cualquier pérdida de factibilidad.

Observación 4.12. *Es importante resaltar que la demanda computacional online del controlador robusto propuesto, no es mayor que la de un controlador nominal, ya que cada conjunto politópico involucrado en el problema de optimización de MPC se calcula offline.*

4.5. Conclusiones

En este capítulo, se propuso el diseño de una formulación robusta para el MPC económico de una sola capa basado en el gradiente del costo económico, para el caso de sistemas lineales con perturbaciones aditivas y acotadas.

El controlador propuesto es capaz de dirigir al sistema a un punto de operación económicamente óptimo, manteniendo el sistema a lazo cerrado en una región del espacio de estado

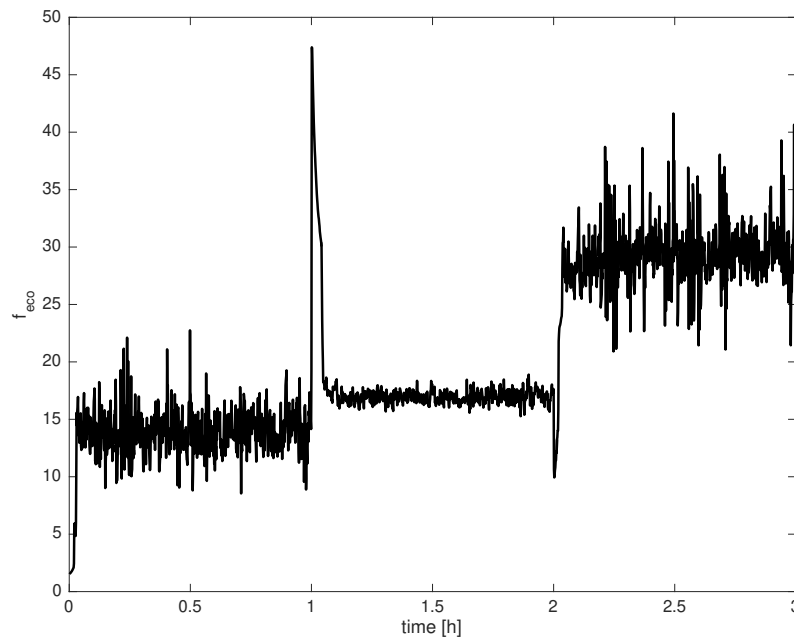


Figura 4-5: Evolución del costo económico l_{eco} , para diferentes valores de p .

alrededor de este punto, dado por el mínimo conjunto invariante positivo robusto. Se probó la factibilidad recursiva y la estabilidad asintótica robusta para cualquier realización de la perturbación acotada.

Los principales beneficios del controlador propuesto son:

- El sistema a lazo cerrado converge en forma robusta al punto óptimo económico que minimiza l_{eco} .
- El controlador sigue siendo factible bajo cualquier cambio del objetivo económico y cualquier realización de perturbaciones, gracias al uso de referencias artificiales y de una restricción terminal relajada.
- El problema de optimización es simple de resolver dado que sólo requiere la solución de un problema de programación cuadrática.

Un ejemplo de simulación de un sistema de cuatro tanques mostró que la estrategia podría ser útil desde el punto de vista de la aplicación.

Los resultados de este Capítulo originaron las siguientes publicaciones [D’Jorge et al., 2015, D’Jorge et al., 2017].

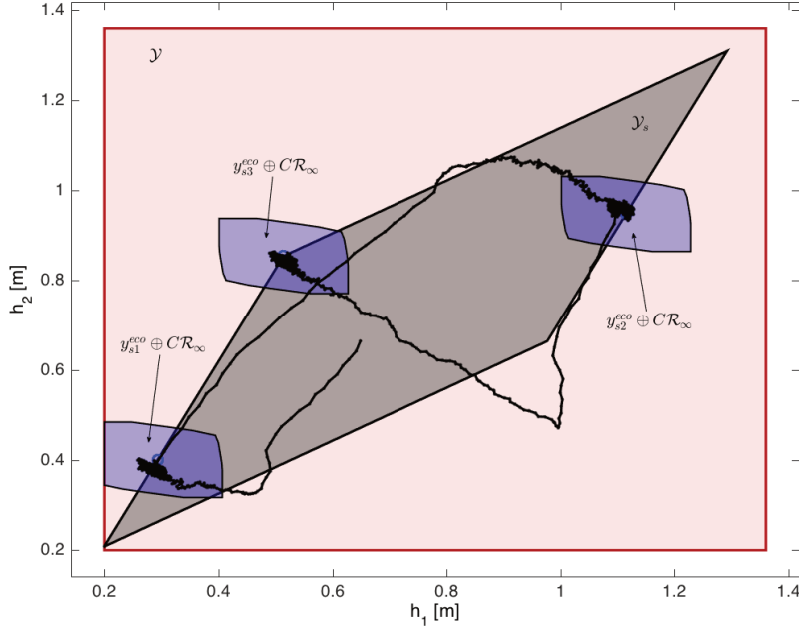


Figura 4-6: Evolución del espacio de salida del sistema a lazo cerrado en el caso de una distribución Gaussiana truncada.

4.6. Apéndice

A continuación se presentan los lemas necesarios para la demostración del Teorema 4.7.

Lema 4.13. *Considérese que las Suposiciones 4.1-4.6 se cumplen y $w = 0$. Sea x_s^{eco} el estado estable óptimo, de manera que minimice la función $V_{eco}(x, u, p)$. Para todo $x \in \mathcal{X}_N$ y $x_s^{so}(x) \in \mathcal{X}_s = Proj_x(\bar{\mathcal{Z}}_s)$, se define la función $e(x) = x - x_s^{so}(x)$. Entonces, existe una función \mathcal{K} , α_e , tal que*

$$\|e(x)\| \geq \alpha_e(\|x - x_s^{eco}\|) \quad (4-19)$$

Demostración: Nótese que, debido a la convexidad, $e(x)$ es una función continua. Además se consideran estos dos casos.

- I. $\|e(x)\| = 0$ si y solo si $x = x_s^{eco}$. De hecho, (i) si $e(x) = 0$, entonces $x = x_s^{so}(x)$, y por el Lema 4.14, esto implica que $x_s^{so}(x) = x_s^{eco}$; (ii) si $x = x_s^{eco}$, entonces por optimalidad $x_s^{so}(x) = x_s^{eco}$, y luego $x = x_s^{so}(x)$. Entonces, $\|e(x)\| = 0$.
- II. $\|e(x)\| > 0$ para todo $\|x - x_s^{eco}\| > 0$. De hecho, para cualquier $x \neq x_s^{eco}$, $\|e(x)\| \neq 0$ y además $\|x - x_s^{eco}\| > 0$. Entonces, $\|e(x)\| > 0$.

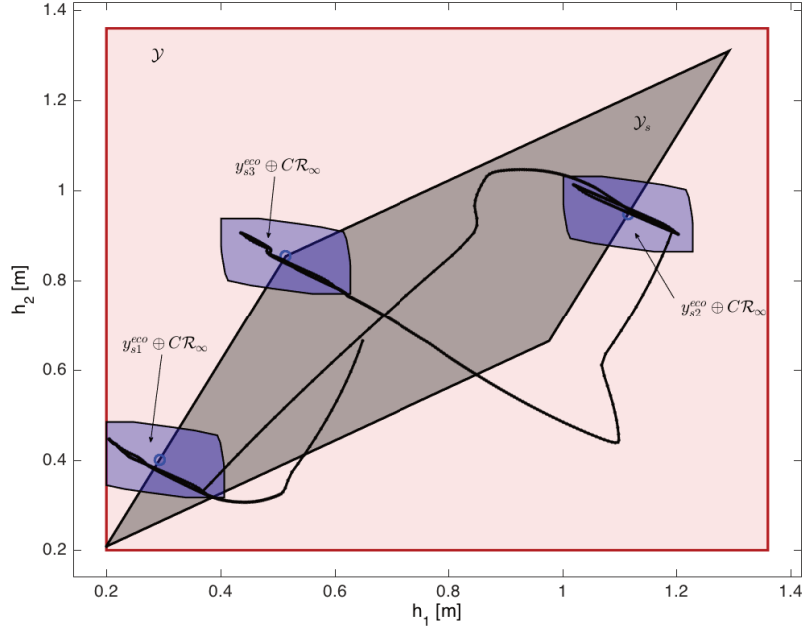


Figura 4-7: Evolución del espacio de salida del sistema a lazo cerrado en el caso de perturbaciones periódicas y constantes.

Luego, dado que \mathcal{X}_N es compacto, en virtud de [Vidyasagar, 1993, Cap. 5, Lema 6, pag. 148], existe una función \mathcal{K} , α_e tal que $\|e(x)\| \geq \alpha_e(\|x - x_s^{eco}\|)$ en \mathcal{X}_N . ■

Lema 4.14. *Considere que las Suposiciones 4.1-4.6 se cumplen y que $w = 0$. Sea la solución óptima al Problema $\mathcal{P}_N(x, p)$, en tiempo k , tal que $x(k) = x_s^{so}(x(k))$, y $\bar{u}(k) = u_s^{so}(x(k))$. Sea (x_s^{eco}, u_s^{eco}) el óptimo, tal que la función $V_{eco}(x, u, p)$ es minimizada. Entonces $x(k) = x_s^{eco}$, y $u(k) = u_s^{eco}$.*

Demostración: Considérese que $(x_s^{so}(x(k)), u_s^{so}(x(k)))$ es la solución al Problema $\mathcal{P}_N(x, p)$ obtenida en el instante k . Entonces, recordando que $w = 0$, se tiene que

$$V_N^{so}(x(k)) = V_{eco}(x_s^{so}(x(k)), u_s^{so}(x(k)), p).$$

En lo que sigue, la dependencia del tiempo se elimina por simplicidad en la presentación. La prueba se realizará por contradicción. Se supone que el punto estacionario en el tiempo k no es el óptimo, es decir, $(x_s^{so}(x), u_s^{so}(x)) \neq (x_s^{eco}, u_s^{eco})$. Dado que estos puntos pertenecen al conjunto de equilibrio, entonces, por convexidad, existe un $\beta \in [0, 1]$ tal que

$$(\hat{x}_s, \hat{u}_s) = \beta(x_s^{so}(x), u_s^{so}(x)) + (1 - \beta)(x_s^{eco}, u_s^{eco})$$

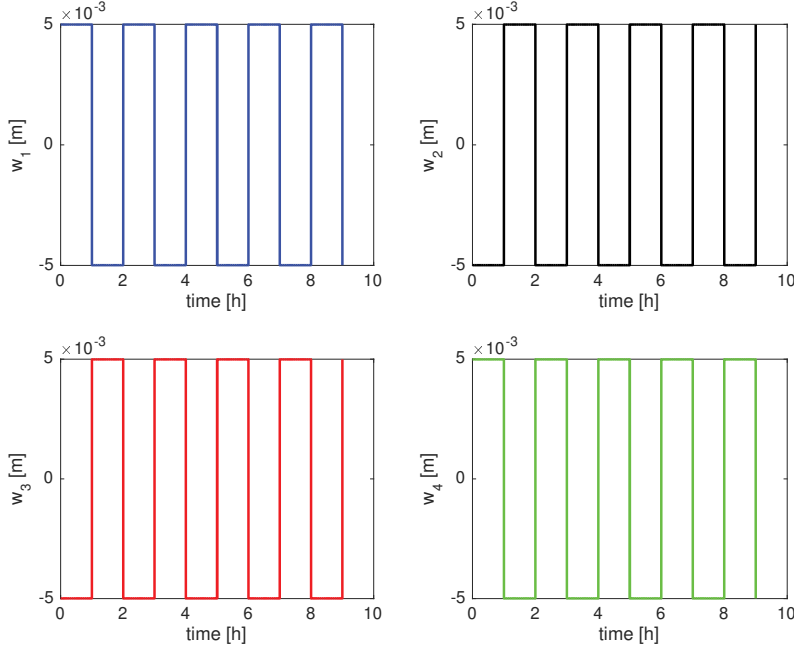


Figura 4-8: Evolución en el tiempo de las perturbaciones periódicas.

caracteriza un punto estacionario y, además,

$$V_{eco}(\hat{x}_s, \hat{u}_s, p) < V_{eco}(x_s^{so}, u_s^{so}, p). \quad (4-20)$$

Es decir, dado que el sistema real no está en el punto óptimo (x_s^{eco}, u_s^{eco}) , es más conveniente moverse hacia (\hat{x}_s, \hat{u}_s) , que permanecer en $(x_s^{so}(x), u_s^{so}(x))$. Se define la secuencia factible $\hat{\mathbf{u}} = \{\hat{u}(0), \hat{u}(1), \dots, \hat{u}(N-1)\}$ que dirige el sistema a lazo cerrado desde $(x_s^{so}(x), u_s^{so}(x))$ a (\hat{x}_s, \hat{u}_s) en N pasos. Dado que $x(k) = x_s^{so}(k)$ entonces $\hat{c}(j) = 0$, y $\hat{u}(j) = K(\hat{x}(j) - \hat{x}_s) + \hat{u}_s$, donde $\hat{x}(j+1) = A\hat{x}(j) + B\hat{u}(j)$, $\hat{x}(0) = x_s^{so}(x)$. Entonces, el costo de dirigir al sistema desde $(x_s^{so}(x), u_s^{so}(x))$ a (\hat{x}_s, \hat{u}_s) está dado por

$$\begin{aligned} V_N(x_s^{so}(x), p; \hat{\mathbf{u}}, \hat{x}_s, \hat{u}_s) &= \sum_{j=0}^{N-1} \|\hat{x}(j) - \hat{x}_s\|_Q^2 + \|\hat{u}(j) - \hat{u}_s\|_R^2 + \|\hat{x}(N) - \hat{x}_s\|_P^2 \\ &\quad + V_{eco}(\hat{x}_s, \hat{u}_s, p) \\ &= \|x_s^{so}(x) - \hat{x}_s\|_P^2 + V_{eco}(\hat{x}_s, \hat{u}_s, p) \\ &= (1 - \beta)^2 \|x_s^{so}(x) - x_s^{eco}\|_P^2 + V_{eco}(\hat{x}_s, \hat{u}_s, p). \end{aligned}$$

Ahora se define $W(\beta) = (1 - \beta)^2 \|x_s^{so}(x) - x_s^{eco}\|_P^2 + V_{eco}(\hat{x}_s, \hat{u}_s, p)$ observando que para $\beta = 1$, $W(1) = V_{eco}(x_s^{so}(x), u_s^{so}(x), p)$. Tomando la derivada parcial de esta función respecto

de β , y evaluándola en $\beta = 1$ se obtiene:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \beta} \right|_{\beta=1} = g^{0'}(x_s^{so}(x), u_s^{so}(x), p),$$

donde $g^{0'} \in \partial V_{eco}(x_s^{so}(x), u_s^{so}(x), p)$, definiendo $\partial V_{eco}(x_s^{so}(x), u_s^{so}(x), p)$ como el subdiferencial de $V_{eco}(x_s^{so}(x), u_s^{so}(x), p)$. Debido a la convexidad y por la Ecuación (4-20),

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial W}{\partial \beta} \right|_{\beta=1} &= g^{0'}(x_s^{so}(x), u_s^{so}(x), p) \\ &\geq V_{eco}(x_s^{so}(x), u_s^{so}(x), p) - V_{eco}(\hat{x}_s, \hat{u}_s, p) > 0. \end{aligned}$$

Esto significa que existe un valor de $\beta \in [0, 1)$ tal que $V_N(x_s^{so}(x), p; \hat{\mathbf{u}}, \hat{x}_s, \hat{u}_s)$ es más pequeño que el valor del costo $V_N(x_s^{so}(x), p; \hat{\mathbf{u}}, \hat{x}_s, \hat{u}_s)$ para $\beta = 1$, que es $V_{eco}(x_s^{so}(x), u_s^{so}(x), p)$.

Esta afirmación contradice la optimalidad de la solución al Problema $\mathcal{P}_N(x, p)$ en el tiempo k . Entonces tiene que cumplirse que $(x_s^{so}(x), u_s^{so}(x)) = (x_s^{eco}, u_s^{eco})$. Además, se puede afirmar que este punto es el que minimiza la función de costo de offset $V_{eco}(x, u, p)$. De esta manera, el lema es probado. ■

Capítulo 5

Formulación robusta del MPC Económico

5.1. Introducción

Como se ha vislumbrado en capítulos anteriores, en la literatura existen diversas formulaciones de controladores predictivos basados en modelo con objetivos económicos, cada una de ellas dedicada a diferentes regímenes de la evolución de los sistemas en su búsqueda de puntos de operación de interés. Este capítulo está destinado al estudio de aquellos métodos que optimizan el rendimiento económico dinámico completo de los sistemas bajo control. Esto es, aquellos controladores económicos que, además de guiar el sistema a un estado estacionario económicamente óptimo, optimizan también las trayectorias con que se alcanzan dichos equilibrios [Rawlings et al., 2012, Angeli et al., 2012, Ellis et al., 2014].

En rigor, la formulación de MPC económico propiamente dicha, tal y como se la conoce en la literatura, se encarga de la optimización de las trayectorias (esto es, del régimen transitorio), mientras que el cálculo del punto de operación (equilibrio) económicamente óptimo es realizado por una etapa económico-estacionaria, en un esquema de dos etapas, como la que se muestra en la Figura 2-2.

Tradicionalmente, se han utilizado varios métodos para mejorar el rendimiento económico de los sistemas de control sin proporcionar directamente información económica al controlador, tales como la selección de objetivos económicos. En este caso, la estrategia consiste en optimizar el rendimiento económico dinámico para dirigir al sistema a un punto de operación económicamente óptimo, obtenido de la capa del RTO. Sin lugar a dudas, si se compara la trayectoria obtenida con un controlador MPC para seguimiento con objetivos económicos,

como el presentado en el Capítulo 4, con respecto a la obtenida por medio de esta estrategia, posiblemente se tendrán resultados diferentes. Esto se debe a que en el primer caso se busca que el sistema llegue a un punto (o a las cercanías del mismo) económicamente óptimo lo más rápido posible, sin importar el rendimiento económico en el transitorio. En el segundo caso, la trayectoria obtenida por el controlador no tiene porqué ser la más rápida, pero desde luego que será la que cueste menos, desde el punto de vista del rendimiento económico, es decir, del criterio económico que se quiere optimizar.

Si bien las ventajas de la aplicación de este esquema han sido fáciles de corroborar, el principal desafío de su formulación matemática ha sido mostrar la existencia de una función de Lyapunov para probar la estabilidad. Esto se debe a que, en este caso, ya no se está en presencia de una función de costo cuadrático, y por lo tanto definida positiva en todo el espacio de estado, como costo de optimización. En el diseño del controlador económico bajo la estrategia presentada en el capítulo anterior, se adopta un costo de etapa que no necesita estar directamente relacionado con el costo económico, es decir, la función de costo es tal que se penalizan las desviaciones del estado del sistema y las entradas de control, respecto de un estado estacionario económicamente óptimo, por medio de una variable artificial. En cambio, en el MPC económico, el costo incurrido para la operación del sistema se usa directamente como costo de etapa en la capa de optimización de MPC. Por lo tanto, no se puede asumir que el costo óptimo decrece a lo largo de la trayectoria en lazo cerrado, pudiendo ocurrir que el costo en un punto factible sea menor que el costo en el punto de equilibrio, o incluso más fundamentalmente puede no ser definido positivo [Rawlings et al., 2012, Angeli et al., 2012], con lo cual la hipótesis básica de la demostración de estabilidad del MPC tradicional, no se cumple.

Como se ha visto en el Capítulo 2, los primeros aportes para la solución a este problema se lograron bajo el supuesto de una dualidad fuerte en [Diehl et al., 2011] y, más tarde, bajo el supuesto de disipatividad (relajada) en [Angeli et al., 2012, Zanon et al., 2014], siendo esta última no sólo una condición suficiente sino también necesaria para la estabilidad a lazo cerrado [Müller et al., 2015, Müller et al., 2015]. La estabilidad asintótica también se ha demostrado en el caso de usar el costo del terminal (con [Amrit et al., 2011] y sin [Grüne, 2013] restricción terminal) y en el caso de los controladores MPC basados en Lyapunov [Heidarinejad et al., 2012].

Al realizar una formulación económica de MPC, es importante tener en cuenta que pueden ocurrir posibles cambios en los criterios económicos [Fagiano and Teel, 2013, Angeli et al., 2015]. La función de costo económico generalmente depende de parámetros exóge-

nos, como los precios unitarios o las demandas esperadas, que pueden cambiar a lo largo de la operación de la planta. Esto significa que puede ocurrir un cambio en el estado al que el controlador debe dirigir el sistema, es decir, en el estado estacionario económicamente óptimo, produciendo, debido a los requisitos de estabilidad, una posible pérdida de factibilidad.

En [Ferramosca et al., 2014b] se presenta una formulación del MPC económico, que contempla cambios en el parámetro económico. En ese trabajo, el controlador se diseña con una función de costo ligeramente modificada, a la que se agrega, siguiendo los fundamentos presentados en [Amrit et al., 2011], una función de costo terminal y una restricción terminal relajada, que requiere que el estado terminal al final del horizonte sea cualquier punto de equilibrio admisible. Como consecuencia, este controlador tiene las siguientes propiedades: (i) garantiza la factibilidad bajo cualquier cambio del criterio económico; (ii) asegura la optimalidad económica; (iii) proporciona un dominio de atracción mayor que el correspondiente al MPC económico estándar. Además, la estabilidad asintótica se demuestra recurriendo a una función de Lyapunov.

El objetivo de este capítulo es proponer una formulación robusta del MPC económico presentado en [Ferramosca et al., 2014b] para el caso de perturbaciones aditivas. La estrategia robusta propuesta utiliza el modelo de predicción nominal y contrae las restricciones para tener en cuenta los efectos de las perturbaciones [Chisci et al., 2001]. Como resultado, se obtiene un MPC económico robusto, que garantiza la factibilidad recursiva para cualquier cambio del criterio o parámetro económico, satisfaciendo en forma robusta las restricciones. Por otro lado, dado que el sistema controlado está continuamente sujeto a perturbaciones, se demuestra que el controlador propuesto es estable entrada-estado (ISS, por su sigla en inglés). Esto implica que convergerá asintóticamente a una región en torno al estado óptimo admisible, caracterizada como el mínimo conjunto invariante robusto positivo (RPI), centrado en dicho estado óptimo.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. Después de la introducción, el sistema es presentado en la Sección 5.2. La Sección 5.3 describe el controlador robusto propuesto, así como los resultados concernientes a la estabilidad. La Sección 5.4 analiza las propiedades principales del controlador propuesto, mientras que en la Sección 5.5, se presenta un ejemplo ilustrativo basado en la simulación del sistema de cuatro tanques visto anteriormente. Finalmente, en la Sección 5.6 se muestran las conclusiones del capítulo.

5.2. Descripción del sistema

Considérese un sistema dinámico (ya presentado en la Sección 4.2 del Capítulo 4, y repetido aquí por claridad) descrito por un modelo discreto, lineal e invariante en el tiempo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k), \quad (5-1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de control actual, $x(k+1)$ es el estado sucesor y $w \in \mathbb{R}^n$ es una perturbación aditiva desconocida pero limitada. En lo que sigue, $x(k)$, $u(k)$ y $w(k)$ denotan el estado, la variable manipulable y la perturbación respectivamente, en el tiempo de muestreo k .

El sistema está sujeto a restricciones de estado y entrada:

$$(x(k), u(k)) \in \mathcal{Z}, \quad (5-2)$$

para todo $k \geq 0$, donde $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ es un poliedro convexo compacto que contiene el origen en su interior.

Teniendo en cuenta la estrategia robusta presentada en el Capítulo 3.2, se define un sistema en ausencia de perturbaciones w , denominado como modelo nominal, que viene dado por

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + Bu(k), \quad (5-3)$$

La solución de este sistema para una secuencia dada de entradas de control $\mathbf{u} = \{u(0), \dots, u(j-1)\}$ y un estado inicial \bar{x} , se denota como $\bar{x}(j) = \phi(j; \bar{x}, \mathbf{u})$, $j \in \mathbb{I}_{\geq 1}$, donde $\bar{x} = \phi(0; \bar{x}, \mathbf{u})$.

Al igual que en el capítulo anterior, y sin perder generalidad, se supondrá que el modelo de la planta cumple con el siguiente supuesto:

Suposición 5.1.

- El par (A, B) es controlable.
- El estado es medible en cada instante de muestreo.
- El vector de incertidumbre w está limitado y se encuentra en un poliedro convexo compacto, \mathcal{W} , que contiene el origen en su interior: $\mathcal{W} = \{w \in \mathcal{R}^n : A_w w \leq b_w\}$.

5.2.1. Enfoque robusto

En esta formulación robusta de MPC, se utilizará la estrategia presentada en el Capítulo 3.2. La clave es usar predicciones basadas en el sistema nominal, es decir, ignorando la entrada de perturbación w , pero acotando el conjunto de restricciones \mathcal{X} y \mathcal{U} , de forma tal que si ocurre la peor perturbación, la evolución del sistema real no incumpla con las restricciones. Para lograr esto, la estrategia presentada consiste en restar a los conjuntos \mathcal{X} y \mathcal{U} ciertos conjuntos, llamados conjuntos alcanzables, robustos, que se construyen teniendo en cuenta el efecto de las perturbaciones en cualquier paso del horizonte de predicción.

El controlador está basado en una pre-estabilización de la planta, mediante una ganancia de realimentación K , tal que la matriz $A_K = A + BK$, tenga todos los autovalores en el círculo unitario. De esta manera, el modelo nominal de predicciones está dado por:

$$\bar{x}(k+1) = A_K \bar{x}(k) + Bc(k) \quad (5-4)$$

$$u(k) = K\bar{x}(k) + c(k), \quad (5-5)$$

donde la variable de control $c(k)$ representa la diferencia entre la entrada de control $u(k)$ y la realimentación nominal $K\bar{x}(k)$.

En función de esto, se definen los conjuntos de *restricciones acotadas*, como una versión reducida de los conjuntos de restricciones \mathcal{X} y \mathcal{U} del sistema. Para $j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]}$, siendo N el horizonte de control/predicción, se tiene:

$$\mathcal{X}_j \triangleq \mathcal{X} \ominus \mathcal{R}_j \quad (5-6)$$

$$\mathcal{U}_j \triangleq \mathcal{U} \ominus K\mathcal{R}_j.$$

donde \mathcal{R}_j es el conjunto alcanzable en j pasos, dado por la Ecuación (3-6). Es decir, como se vislumbró anteriormente, los conjuntos \mathcal{X}_j y \mathcal{U}_j son versiones reducidas de los conjuntos de restricciones del sistema real, \mathcal{X} y \mathcal{U} , a partir de la resta, en cada paso j , del efecto acumulado de la máxima perturbación posible en ese momento.

Estos conjuntos dependen tanto del tamaño del conjunto de incertidumbres \mathcal{W} como de la ley de control local K , la cual tiene un rol importante y debe diseñarse de manera tal que estos conjuntos sean no vacíos, es decir, que cumplan con la Suposición 3.3, donde se establece la condición necesaria para que existan dichos conjuntos y sean no vacíos es que $\mathcal{R}_\infty \subset \mathcal{X}$ y $K\mathcal{R}_\infty \subset \mathcal{U}$, siendo \mathcal{R}_∞ el mínimo conjunto invariante robusto positivo (RPI).

Estos conjuntos conservadores se considerarán como un conjunto de restricciones de las trayectorias predichas para garantizar la satisfacción de restricciones duras (esto es, de cumplimiento obligatorio, en contraposición con las llamadas restricciones débiles, que pueden

ser eventualmente violadas), como se demostrará en la siguiente sección. Asimismo, es importante tener en cuenta que los conjuntos \mathcal{X}_j y \mathcal{U}_j son poliedros y su cálculo se realiza por única vez offline, por lo que no tiene efectos prácticos sobre la complejidad del cálculo del problema de MPC.

5.2.2. Caracterización del equilibrio y punto óptimo

Primero, se hará una caracterización del subespacio de equilibrio. Para ello, se considera la variable conjunta (\bar{x}, u) . Entonces, el subespacio de equilibrio de estado y entrada asociado al modelo nominal (5-3), está dado por $\mathcal{N}([A - I_n \ B])$, donde \mathcal{N} denota el espacio nulo de una matriz. Es decir,

$$[A - I_n \ B] \begin{bmatrix} \bar{x} \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{n,1}.$$

Definiendo $\bar{\mathcal{Z}} \triangleq \bar{\mathcal{X}}_N \times \bar{\mathcal{U}}_N$, el conjunto de puntos de equilibrio admisibles del sistema nominal, viene dado por

$$\bar{\mathcal{Z}}_s \triangleq \{(\bar{x}, u) \in \rho \bar{\mathcal{Z}} \mid \bar{x} = A\bar{x} + Bu\}$$

donde $\rho \in (0, 1)$ es un parámetro, usualmente muy cercano a 1.

A continuación, se define una medida del rendimiento económico, es decir, el objetivo económico de la planta como,

$$\ell_{eco}(x, u, p), \tag{5-7}$$

donde x y u son el estado y la entrada del sistema, y p es un vector de parámetros acotados que tiene en cuenta los precios, costos, objetivos de producción, etc.

Esta función cumple un rol fundamental en la formulación del controlador, dado que representa el costo económico, y por lo tanto, el desempeño dinámico económicamente óptimo, que se busca minimizar. Es importante destacar que no se asume que esta función sea definida positiva.

En general hay muchos factores que determinan este costo y que hacen que pueda variar, es por ello que surge la idea de usar un parámetro p , como una simplificación matemática para tener en cuenta los posibles cambios involucrados dentro de la misma. Este parámetro viene dado como resultado de la capa superior de programación y planificación económica y debe considerarse como una entrada a la capa del RTO. En lo que sigue, se supondrá que el parámetro p puede cambiar a lo largo de la evolución de la planta, debido a las fluctuaciones del mercado o la reconciliación de datos [Ferramosca et al., 2014b].

El mejor estado estacionario admisible es el punto de equilibrio óptimo proporcionado por el RTO, y se puede definir como:

Definición 5.2. *El estado estacionario y entrada óptimos, (x_s^{eco}, u_s^{eco}) , satisfacen*

$$(x_s^{eco}, u_s^{eco}) = \arg \min_{(x,u) \in \bar{Z}_s} \ell_{eco}(x, u, p), \quad (5-8)$$

para un dado p , y se supone que es único.

Observación 5.3. *Notar que el punto de equilibrio y la entrada dependen del valor de p , esto es $(x_s^{eco}(p), u_s^{eco}(p))$. Esto implica que, si p cambia, también el punto de equilibrio óptimo cambiará. Sin embargo, en aras de la claridad, a continuación utilizaremos la notación (x_s^{eco}, u_s^{eco}) .*

5.3. Formulación robusta del MPC Económico

Como es habitual en la literatura de MPC económico, la idea es utilizar la función de costo económico (5-7) como costo de etapa del controlador MPC. Sin embargo, como se explicó anteriormente, si el criterio económico cambia, el estado estacionario y la entrada admisible económicamente óptimos, (x_s^{eco}, u_s^{eco}) , donde el controlador debe dirigir el sistema puede cambiar, y la factibilidad del controlador puede perderse. En este capítulo, y siguiendo la idea presentada en el Capítulo 2, se utiliza una función de costo ligeramente modificada, que considera variables de estado estacionario artificiales y una restricción terminal relajada, para garantizar la factibilidad recursiva para cualquier valor de p . Además, con el propósito de garantizar la robustez frente a perturbaciones, el problema de control óptimo se formula considerando el modelo de predicción nominal y las restricciones reducidas detalladas en el Capítulo 5.2.1.

5.3.1. Problema de optimización

La función de costo propuesta para el problema de optimización está constituida por tres partes. En primer lugar por el costo económico propiamente dicho, que está dado por la función $\ell_{eco}(\cdot)$ presentada anteriormente; luego por un costo final denotado como V_f , que no es más que una penalización en el estado terminal respecto de la referencia artificial (necesario a los fines de la estabilidad) y, finalmente, por una función denominada como costo de offset, $V_O(x_a, u_a)$, que está dedicada a penalizar la falta de optimalidad económica

de las variables artificiales. La función de costo del problema de optimización del controlador se define entonces, de la siguiente manera:

$$V_N(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) = \sum_{j=0}^{N-1} \ell_{eco}(\bar{x}(j) - x_a + x_s^{eco}, u(j) - u_a + u_s^{eco}, p) + V_f(\bar{x}(N), x_a) + V_O(x_a, u_a), \quad (5-9)$$

donde las referencias artificiales dadas por x_a y u_a , son variables de optimización que representan el mejor punto de equilibrio que el controlador puede alcanzar en N pasos desde un estado inicial x , y se incluyen para garantizar la factibilidad bajo cualquier cambio en el costo económico.

Suponiendo la ganancia de pre-estabilización K , se puede escribir $V_N(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) = V_N(x, p; \mathbf{c}, x_a, u_a)$ donde cada elemento del vector \mathbf{c} , $c(j; x)$, cumple con $\bar{u}(j; x) = K(\bar{x}(j) - x_a) + u_a + c(j; x)$. De esta forma, para cualquier estado actual x , el problema de optimización $\mathcal{P}_N(x, p)$ a resolver en cada instante de tiempo, viene dado por:

$$\min_{\mathbf{c}, x_a, u_a} V_N(x, p; \mathbf{c}, x_a, u_a) \quad (5-10)$$

$$s.a. \quad \bar{x}(0) = x, \quad (5-11)$$

$$\bar{x}(j+1) = A\bar{x}(j) + Bu(j), \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \quad (5-12)$$

$$u(j) = K(\bar{x}(j) - x_a) + u_a + c(j), \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \quad (5-13)$$

$$\bar{x}(j) \in \mathcal{X}_j, \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \quad (5-14)$$

$$u(j) \in \mathcal{U}_j, \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \quad (5-15)$$

$$(\bar{x}(N), x_a, u_a) \in \Omega_t, \quad (5-16)$$

En este problema de optimización, x y p son los parámetros, mientras que la secuencia de entrada $\mathbf{c} = \{c(0), \dots, c(N-1)\}$ y las referencias artificiales, (x_a, u_a) , son las variables de optimización.

Las restricciones constituidas por las Ecuaciones (5-11) y (5-12) definen las trayectorias predichas del sistema a partir del estado actual, mientras que las establecidas por (5-14) y (5-15) incluyen las restricciones para los estados y entradas predichas, las cuales dependen de los conjuntos acotados definidos mediante la Ecuación (5-7).

Finalmente, para tener en cuenta adecuadamente la estabilidad robusta, se realizan algunas suposiciones y definiciones con respecto a las condiciones terminales del Problema $\mathcal{P}_N(x, p)$. Se añade una restricción final, provista por la Ecuación (5-16), que garantiza que, tanto el estado terminal de la trayectoria predicha, como las variables artificiales pertenecen a un

conjunto invariante robusto $\Omega_t \subset \mathbb{R}^{2n+m}$, el cual se define de manera tal que, para todo $(x, x_a, u_a) \in \Omega_t$, (x_a, u_a) es un punto de equilibrio admisible, la entrada de control $u = K(x - x_a) + u_a$ es admisible, y el estado sucesor permanece en Ω_t para el mismo punto de equilibrio (x_a, u_a) . El conjunto Ω_t se caracteriza según la Definición 4.4.

Es importante señalar que el conjunto de restricciones del problema de optimización (5-10) no depende del punto de equilibrio (x_s^{eco}, u_s^{eco}) , ni del parámetro p , razón por la cual tampoco lo hace la región factible. El dominio de atracción del controlador derivado del Problema $\mathcal{P}_N(x, p)$ es un conjunto compacto dado por:

$$\mathcal{X}_N = \{x \in \mathcal{X} : \exists (\mathbf{c}, x_a, u_a) \text{ s.a. } \bar{x}(j) \in \mathcal{X}_j, u(j) \in \mathcal{U}_j, j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]}, (\bar{x}(N), x_a, u_a) \in \Omega_t\}.$$

La solución óptima para el problema $\mathcal{P}_N(x, p)$ y el valor óptimo de la función de costo $V_N(x, p; \mathbf{c}, x_a, u_a)$ se indican respectivamente como $\mathbf{v}^0(x, p) = \{\mathbf{c}^0(x, p), x_a^0(x, p), u_a^0(x, p)\}$ y $V_N^0(x, p)$. La ley de control obtenida, se deriva de la solución óptima de la siguiente manera

$$\kappa_N(x, p) = u^0(0; x, p) = K(x - x_a^0(x, p)) + u_a^0(x, p) + c^0(0; x, p),$$

donde $c^0(0; x, p)$ es el primer elemento de la secuencia de solución $\mathbf{c}^0(x, p)$.

Finalmente, para poder mantener la optimalidad económica, las funciones de costo involucradas en $V_N(\cdot)$, deberán cumplir con las siguientes suposiciones.

Suposición 5.4 (Sobre el costo económico, ℓ_{eco}).

La función de costo económico $\ell_{eco}(x, u, p)$ es localmente Lipschitz continua en (x_s^{eco}, u_s^{eco}) , esto es existe una constante $\Gamma > 0$ tal que

$$\|\ell_{eco}(x, u, p) - \ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p)\| \leq \Gamma \|(x, u) - (x_s^{eco}, u_s^{eco})\|,$$

para todo p y todo $(x, u) \in \mathcal{Z}$, tal que $\|x - x_s^{eco}\| \leq \varepsilon$ y $\|u - u_s^{eco}\| \leq \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$.

Como se distinguió en el Capítulo 3, la continuidad Lipschitz garantiza que la discrepancia de una función evaluada entre dos puntos está acotada y depende, además, de la distancia entre dichos puntos.

Suposición 5.5 (El costo final, V_f).

Sea $\Omega_t \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}$, el conjunto terminal presentado anteriormente y sea $\kappa_f(x, x_a, u_a) = K(x - x_a) + u_a$ una ley de control local estabilizante [Limon et al., 2008]. Además, sea la función de costo final $V_f(x, x_a)$ continua, con $V_f(x_a, x_a) = 0$ para todo x_a , y tal que para todo $(x, x_a, u_a) \in \Omega_t$, se cumpla

$$V_f(x^+, x_a) \leq V_f(x, x_a) - \ell_{eco}(x - x_a + x_s^{eco}, \kappa_f(x, x_a, u_a) - u_a + u_s^{eco}, p) + \ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p), \quad (5-17)$$

donde $x^+ = Ax + Bu$.

Encontrar la función de costo terminal V_f y la región Ω_t que satisfagan este supuesto de estabilidad no es trivial y puede resultar poco intuitivo para costos genéricos y sistemas no lineales. A continuación, siguiendo las ideas presentadas en [Amrit et al., 2011], se propone una función de costo terminal candidata V_f que satisface el Supuesto 5.5 dentro de la región terminal Ω_t bien definida. Formalmente, se tiene que

$$V_f(x, x_a) = \frac{1}{2} \|x - x_a\|_P^2 + g'(x - x_a), \quad (5-18)$$

donde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es solución de la ecuación de Lyapunov $A'_K P A_K - P = -Q$, para una matriz dada $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y $g' = t'(I - A_K)^{-1}$, para un vector dado $t \in \mathbb{R}^n$. En el siguiente lema se demuestra cómo una opción adecuada de Q y t permite que la Ecuación (5-18) cumpla con la Suposición 5.5.

Lema 5.6. *Considérese que las Suposiciones 5.1-5.4 se cumplen. Sea la función de costo terminal dada por $V_f(x, x_a) = \frac{1}{2} \|x - x_a\|_P^2 + g'(x - x_a)$, donde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la solución de la ecuación de Lyapunov $A'_K P A_K - P = -Q$, para un dado $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y $g' = t'(I - A_K)^{-1}$, para un dado $t \in \mathbb{R}^n$. Entonces, existe un valor adecuado de φ tal que $Q = \varphi I + \alpha I$ con $\alpha > -\varphi$, y $t = \nabla \ell_{eco}(0,0)$ tal que $V_f(x, x_a)$ cumpla con la Suposición 5.5.*

Demostración: Antes que nada y sin perder generalidad, se supone que $(x_s^{eco}, u_s^{eco}) = (0, 0)$. Entonces, según el teorema del valor medio, existe un valor de x en el intervalo (x_a, x_s^{eco}) tal que:

$$\begin{aligned} \ell_{eco}(x - x_a + x_s^{eco}, \kappa_f(x, x_a, u_a) - u_a + u_s^{eco}, p) &= \ell_{eco}(x - x_a, K(x - x_a), p) \\ &= \ell_{eco}(0, 0) + \nabla \ell_{eco}(0,0)(x - x_a) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x - x_a)' H_{\ell_{eco}}(x)(x - x_a), \end{aligned}$$

donde $\nabla \ell_{eco}(0,0)$ es el gradiente de $\ell_{eco}(x - x_a, K(x - x_a), p)$ con respecto a x , evaluado en $(0, 0)$, y $H_{\ell_{eco}}(x)$ es la matriz Hessiana de $\ell_{eco}(x - x_a, K(x - x_a), p)$ con respecto a x . Teniendo en cuenta esto, se define $t = \nabla \ell_{eco}(0,0)$.

Por otra parte, sea

$$\varphi = \max_{x \in Proj_x(\Omega_t)} \{\lambda_M(H_{\ell_{eco}}(x))\}$$

donde $\lambda_M(H_{\ell_{eco}}(x))$ es el máximo autovalor de $H_{\ell_{eco}}(x)$, y $Proj_x(\Omega_t)$ es la proyección de Ω_t en x . Luego

$$\varphi(x - x_a)'(x - x_a) \geq (x - x_a)' H_{\ell_{eco}}(x)(x - x_a)$$

para todo $(x, x_a, u_a) \in \Omega_t$.

Ahora se puede definir la matriz Q como $Q = \varphi I + \alpha I$, con $\alpha > -\varphi$. Luego,

$$(x - x_a)'Q(x - x_a) \geq (x - x_a)'H_{\ell_{eco}}(x)(x - x_a)$$

para todo $(x, x_a, u_a) \in \Omega_t$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \ell_{eco}(x - x_a, K(x - x_a), p) - \ell_{eco}(0, 0, p) &= \\ &= \nabla \ell_{eco}(0,0)(x - x_a) + \frac{1}{2}(x - x_a)'H_{\ell_{eco}}(x)(x - x_a) \\ &\leq t'(x - x_a) + \frac{1}{2}\|x - x_a\|_Q^2, \end{aligned}$$

o, en general,

$$\ell_{eco}(x - x_a + x_s^{eco}, \kappa_f(x, x_a, u_a) - u_a + u_s^{eco}, p) - \ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p) \leq t'(x - x_a) + \frac{1}{2}\|x - x_a\|_Q^2.$$

Tomando ahora el incremento del costo terminal bajo la ley de control $\kappa_f(x, x_a, u_a) = K(x - x_a) + u_a$, se tiene

$$\begin{aligned} V_f(x^+, x_a) - V_f(x, x_a) &= \\ &= \frac{1}{2}\|x^+ - x_a\|_P^2 + g'(x^+ - x_a) - \frac{1}{2}\|x - x_a\|_P^2 - g'(x - x_a) \\ &= \frac{1}{2}\|A_K(x - x_a)\|_P^2 + g'(A_K(x - x_a)) - \frac{1}{2}\|x - x_a\|_P^2 - g'(x - x_a) \\ &= \frac{1}{2}\|x - x_a\|_{A'_K P A_K - P}^2 - g'(I - A_K)(x - x_a) \\ &= -\frac{1}{2}\|x - x_a\|_Q^2 - t'(I - A_K)^{-1}(I - A_K)(x - x_a) \\ &= -\frac{1}{2}\|x - x_a\|_Q^2 - t'(x - x_a) \\ &\leq -\ell_{eco}(x - x_a + x_s^{eco}, \kappa_f(x, x_a, u_a) - u_a + u_s^{eco}, p) + \ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p). \end{aligned}$$

Además, observar que $V_f(x_a, x_a) = 0$. Entonces, al elegir $t = \nabla \ell_{eco}(0,0)$ y $Q = \varphi I + \alpha I$, con $\alpha > -\varphi$, la función de costo terminal (5-18) satisface la Suposición 5.5. ■

Suposición 5.7 (Sobre el costo de offset, V_O).

$V_O(x, u)$ es una función definida positiva estrictamente convexa de manera tal que el único mínimo de

$$\min_{(x,u) \in \bar{Z}_s} V_O(x, u) \tag{5-19}$$

es (x_s^{eco}, u_s^{eco}) , para un dado p . Además, existe una constante positiva γ tal que:

$$V_O(x, u) - V_O(x_s^{eco}, u_s^{eco}) \geq \gamma \|x - x_s^{eco}\|, \quad \forall (x, u) \in \bar{\mathcal{Z}}_s. \quad (5-20)$$

En la siguiente sección, se procederá a realizar el análisis de estabilidad robusta del controlador propuesto.

5.3.2. Análisis de estabilidad

La forma habitual de probar la estabilidad asintótica de un sistema a lazo cerrado bajo un controlador MPC es utilizar la función de costo óptima como una función Lyapunov. Como se expuso en el Capítulo 2 este enfoque no puede usarse directamente en el marco de MPC económico, debido a que el costo óptimo no necesariamente decrece a lo largo de la trayectoria en lazo cerrado y, en algunos casos, puede suceder que $\ell_{eco}(x, u, p) < \ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p)$ en el régimen transitorio. En este contexto, se necesita una suposición adicional, que es la disipatividad del sistema con respecto a la tasa de suministro $s(x, u) = \ell_{eco}(x, u, p) - \ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p)$.

Suposición 5.8. Para cada $(x_s^{eco}, u_s^{eco}) \in \bar{\mathcal{Z}}_s$ y un dado p , existe una función continua $\lambda : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, denominada como función de almacenamiento, tal que

$$\begin{aligned} \min_{x, u} \quad & \ell_{eco}(x, u, p) + \lambda(x, p) - \lambda(x^+, p) \geq \ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p) \\ \text{s.a.} \quad & x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

donde $x^+ = Ax + Bu$. Además, definiendo la función de costo de etapa rotado como

$$L(x, u, p) = \ell_{eco}(x, u, p) + \lambda(x, p) - \lambda(x^+, p) - \ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p),$$

existe una función \mathcal{K} , α , tal que $L(x, u, p) \geq \alpha(\|x - x_s^{eco}\|)$.

Observación 5.9. Note que la función de almacenamiento depende del valor de p . Sin embargo, en aras de la claridad, a continuación se utilizará la notación $\lambda(x)$.

Para el controlador propuesto, el costo rotado es $L(x - x_a + x_s^{eco}, u - u_a + u_s^{eco}, p)$. Si se define $z = x - x_a$ y $v = u - u_a$, entonces se puede reescribir el costo rotado de tal forma que $L_r(z, v, p) = L(z + x_s^{eco}, v + u_s^{eco}, p)$. Dicho costo goza de la siguiente propiedad, que es un punto clave de la prueba de estabilidad:

Propiedad 5.10.

1. Si $(x_a, u_a) = (x_s^{eco}, u_s^{eco})$, entonces $L_r(x - x_s^{eco}, u - u_s^{eco}, p) = L(x, u, p)$, donde $L(x, u, p)$ es la función de costo rotado.
2. Si $(x, u) = (x_a, u_a)$, entonces $L_r(0, 0, p) = L(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p) = 0$.
3. $L_r(z, v, p) \geq \alpha_1(\|z\|) + \alpha_2(\|v\|)$ para ciertas funciones \mathcal{K} , α_1 y α_2 .

A continuación se define el costo final rotado como

$$\tilde{V}_f(x, x_a) = V_f(x, x_a) + \lambda(x) - \lambda(x_a) - V_f(x_a, x_a).$$

El mismo consta de las siguientes propiedades:

Propiedad 5.11 (Costo final rotado). *Dado que se cumple la Suposición 5.5; luego el par $(\tilde{V}_f(\cdot), L(\cdot))$ satisface:*

$$\tilde{V}_f(x^+, x_a) \leq \tilde{V}_f(x, x_a) - L(x - x_a + x_s^{eco}, \kappa_f(x, x_a, u_a) - u_a + u_s^{eco}, p),$$

para los estados $x \in \mathcal{X}$, $x^+ = Ax + Bu$, $(x_a, u_a) \in \bar{\mathcal{Z}}_s$ y un dado p .

Demostración: Esta propiedad se demuestra agregando $\lambda(x^+) - \lambda(x)$ en ambos lados de (5-17), es decir:

$$\begin{aligned} V_f(x^+, x_a) - V_f(x, x_a) + \lambda(x^+) - \lambda(x) &\leq -\ell_{eco}(x - x_a + x_s^{eco}, \kappa_f(x, x_a, u_a) - u_a + u_s^{eco}, p) \\ &\quad + \ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p) + \lambda(x^+) - \lambda(x) \\ \tilde{V}_f(x^+, x_a) - \tilde{V}_f(x, x_a) &\leq L(x - x_a + x_s^{eco}, \kappa_f(x, x_a, u_a) - u_a + u_s^{eco}, p). \end{aligned}$$

■

En base a todas las consideraciones previas, se puede definir una función de costo auxiliar, de la siguiente manera:

$$\tilde{V}_N(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) = \sum_{j=0}^{N-1} L(\bar{x}(j) - x_a + x_s^{eco}, \bar{u}(j) - u_a + u_s^{eco}, p) + \tilde{V}_f(\bar{x}(N), x_a) + \tilde{V}_O(x_a, u_a),$$

donde $\tilde{V}_O(x_a, u_a)$ es la función de costo de offset rotado, dada por

$$\tilde{V}_O(x_a, u_a) = V_O(x_a, u_a) + \lambda(x_a) - \lambda(x_s^{eco}) - V_O(x_s^{eco}, u_s^{eco}).$$

En cuanto a la Ecuación (5-9), dada una ganancia de pre-estabilización K , de la Sección 5.2.1, se puede escribir $\tilde{V}_N(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) = \tilde{V}_N(x, p; \mathbf{c}, x_a, u_a)$ donde cada elemento

de \mathbf{c} , $c(j; x)$, es tal que $u(j; x) = K(\bar{x}(j) - x_a) + u_a + c(j; x)$. Entonces, para cualquier estado actual x , se puede definir el problema de optimización auxiliar $\tilde{\mathcal{P}}_N(x, p)$, dado por:

$$\min_{\mathbf{c}, x_a, u_a} \tilde{V}_N(x, p; \mathbf{c}, x_a, u_a) \quad (5-21)$$

$$s.a. \quad \bar{x}(0) = x, \quad (5-22)$$

$$\bar{x}(j+1) = A\bar{x}(j) + Bu(j), \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \quad (5-23)$$

$$u(j) = K(\bar{x}(j) - x_a) + u_a + c(j), \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \quad (5-24)$$

$$\bar{x}(j) \in \mathcal{X}_j, \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \quad (5-25)$$

$$u(j) \in \mathcal{U}_j, \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]} \quad (5-26)$$

$$(\bar{x}(N), x_a, u_a) \in \Omega_t. \quad (5-27)$$

En el siguiente lema, se demuestra que el problema de optimización auxiliar $\tilde{\mathcal{P}}_N(x, p)$ posee la misma solución óptima que $\mathcal{P}_N(x, p)$.

Lema 5.12. *Se considera que las Suposiciones 5.1-5.8 se cumplen, y dado un parámetro p para el costo económico $\ell_{eco}(x, u, p)$. Luego, para cualquier estado inicial $x \in \mathcal{X}_N$, el Problema $\mathcal{P}_N(x, p)$ y el Problema auxiliar $\tilde{\mathcal{P}}_N(x, p)$ ofrecen la misma solución óptima.*

Demostración: De la definición de costo rotado en la Ecuación (5-21), se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{V}_N(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) &= \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} L(\bar{x}(j) - x_a + x_s^{eco}, u(j) - u_a + u_s^{eco}, p) + \tilde{V}_f(\bar{x}(N), x_a) + \tilde{V}_O(x_a, u_a) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} (\ell_{eco}(\bar{x}(j) - x_a + x_s^{eco}, u(j) - u_a + u_s^{eco}, p) + \lambda(\bar{x}(j)) - \lambda(\bar{x}(j+1))) \\ &\quad - \ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p) + V_f(\bar{x}(N), x_a) + \lambda(\bar{x}(N)) - \lambda(x_a) \\ &\quad - V_f(x_a, x_a) + V_O(x_a, u_a) + \lambda(x_a) - \lambda(x_s^{eco}) - V_O(x_s^{eco}, u_s^{eco}) \end{aligned}$$

Dado que $V_f(x_a, x_a) = 0$ y $\sum_{j=0}^{N-1} \lambda(\bar{x}(j)) - \lambda(\bar{x}(j+1)) = \lambda(\bar{x}) - \lambda(\bar{x}(N))$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{V}_N(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a) &= \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \ell_{eco}(\bar{x}(j) - x_a + x_s^{eco}, u(j) - u_a + u_s^{eco}, p) \\ &\quad + \lambda(\bar{x}) - \lambda(\bar{x}(N)) - N\ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +V_f(\bar{x}(N), x_a) + \lambda(\bar{x}(N)) + V_O(x_a, u_a) - \lambda(x_s^{eco}) - V_O(x_s^{eco}, u_s^{eco}) \\
= & \sum_{j=0}^{N-1} \ell_{eco}(\bar{x}(j) - x_a + x_s^{eco}, u(j) - u_a + u_s^{eco}, p) + V_f(\bar{x}(N), x_a) + V_O(x_a, u_a) \\
& - N\ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p) - V_O(x_s^{eco}, u_s^{eco}) + \lambda(x) - \lambda(x_s^{eco}),
\end{aligned}$$

donde el primer término es $V_N(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a)$, dado por la Ecuación (5-9), y el segundo no depende de las variables de optimización (\mathbf{u}, x_a, u_a) . Entonces $\tilde{V}_N(\cdot)$ y $V_N(\cdot)$ difieren en términos que son constantes para un estado inicial dado x .

Por lo tanto, dado que los Problemas $\mathcal{P}_N(x, p)$ y $\tilde{\mathcal{P}}_N(x, p)$ tienen el mismo conjunto de restricciones, y su función objetivo solo difiere en términos constantes, se concluye que las soluciones de $\mathcal{P}_N(x, p)$ y $\tilde{\mathcal{P}}_N(x, p)$ son iguales. ■

Entonces, el valor óptimo de la función de costo $\tilde{V}_N(x, p; \mathbf{u}, x_a, u_a)$, denotado en lo que sigue como $\tilde{V}_N^0(x, p)$, se puede usar para definir una función candidata Lyapunov.

Teorema 5.13. *Considere que las Suposiciones 5.1-5.8 se cumplen, y considere un parámetro p dado para el costo económico $\ell_{eco}(x, u, p)$. Entonces, para cualquier estado inicial $x \in \mathcal{X}_N$, y para todo $\gamma > \|g\|$ con g dado por la Ecuación (5-18), el problema de optimización $\tilde{\mathcal{P}}_N(x, p)$ es factible recursivamente y la ley de control de MPC dirige al sistema perturbado (5-1) a $x_s^{eco} \oplus \mathcal{R}_\infty$, para cualquier $w \in \mathcal{W}$.*

Demostración:

I. Factibilidad recursiva

La factibilidad recursiva del MPC económico robusto propuesto puede probarse recurriendo a los Lemas 4.8-4.11 presentados en el Capítulo 4. El lector interesado puede consultar dicho capítulo para obtener las pruebas detalladas.

II. Decrecimiento del costo

Lema 5.14. *Considerando que las Suposiciones 5.1-5.8 se cumplen, y dado un parámetro p para el costo económico $\ell_{eco}(x, u, p)$. Para cualquier estado inicial $x(k) \in \mathcal{X}_N$, se considera la solución óptima al problema $\tilde{\mathcal{P}}_N(x(k), p)$, como $\tilde{V}_N^0(x(k), p)$ y se define la función $J(x(k), p) = \tilde{V}_N^0(x(k), p) - \tilde{V}_O(x_s^{eco}, u_s^{eco})$. Luego,*

$$J(x(k+1), p) - J(x(k), p) \leq -\alpha_J(\|x(k) - x_s^{eco}\|) + \sigma(\|w(k)\|)$$

para todo $x(k) \in \mathcal{X}_N$ y $w(k) \in \mathcal{W}$, donde σ y α_J son funciones \mathcal{K} .

Demostración: Para probar este lema, al igual que en el MPC nominal estándar, se compararán dos costos, uno correspondiente al instante de tiempo $k + 1$ y el otro al instante k . Dado que el estado medido $x(k + 1)$ es incierto, se considerará el caso de que $w(k) = 0$ y $w(k) \neq 0$. A continuación, se utilizará la notación x para $x(k)$, x^+ para $x(k + 1)$, y w para $w(k)$.

En primer lugar, obsérvese que, si $w = 0$, se está en presencia del MPC para seguimiento nominal, con lo cual, siguiendo los mismos argumentos que en [Ferramosca et al., 2014b], se puede mostrar que:

$$J(x^+, p) - J(x, p) \leq -\alpha_J(\|x - x_s^{eco}\|).$$

Considérese el caso de que $w \neq 0$. En este caso se procederá a comparar el costo $\tilde{V}_N^0(x, p)$ en el tiempo k , con $\tilde{V}_N(x^+, p; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{x}_a, \tilde{u}_a)$, es decir, con el costo en el tiempo $k + 1$ dado por la secuencia candidata factible

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} &= \{\tilde{u}(0), \tilde{u}(1), \dots, \tilde{u}(N - 1)\} \\ &= \{u^0(1; x), u^0(2; x), \dots, u^0(N - 1, x), K(x(N) - x_a^0) + u_a^0\} \\ \tilde{x}_a &= x_a^0(x) \\ \tilde{u}_a &= u_a^0(x). \end{aligned}$$

Debido a la presencia de las perturbaciones, no es posible comparar $\tilde{V}_N(x^+, p; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{x}_a, \tilde{u}_a)$ y $\tilde{V}_N^0(x, p)$ usando los mismos argumentos del MPC nominal estándar, dado que $x^+ \neq Ax + Bu^0(0; x)$. Sin embargo, teniendo en cuenta el modelo de predicción nominal y el Lema 4.8, se puede decir que $x^+ = \bar{x}(1; x) + w$, donde $\bar{x}(1; x) = Ax + Bu^0(0; x)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \Delta V_N &= \tilde{V}_N(x^+, p; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{x}_a, \tilde{u}_a) - \tilde{V}_N^0(x, p) \\ &= \tilde{V}_N(x^+, p; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{x}_a, \tilde{u}_a) - \tilde{V}_N(\bar{x}(1; x), p; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{x}_a, \tilde{u}_a) + \tilde{V}_N(\bar{x}(1; x), p; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{x}_a, \tilde{u}_a) - \tilde{V}_N^0(x, p) \\ &= \Delta V_N^w + \Delta V_N^{nom} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta V_N^w &= \tilde{V}_N(x^+, p; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{x}_a, \tilde{u}_a) - \tilde{V}_N(\bar{x}(1; x), p; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{x}_a, \tilde{u}_a) \\ \Delta V_N^{nom} &= \tilde{V}_N(\bar{x}(1; x), p; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{x}_a, \tilde{u}_a) - \tilde{V}_N^0(x, p). \end{aligned}$$

Tener en cuenta que, siguiendo el mismo argumento que en [Amrit et al., 2011, Ferramosca et al., 2014b], se puede demostrar que

$$\Delta V_N^{nom} = \tilde{V}_N(\bar{x}(1; x), p; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{x}_a, \tilde{u}_a) - \tilde{V}_N^0(x, p)$$

$$= -L(x - x_a^0 + x_s^{eco}, u^0(0; x) - u_a^0 + u_s^{eco}, p).$$

Ahora se analizará ΔV_N^w . En primer lugar, se define la secuencia de predicciones nominales correspondiente a la secuencia candidata factible $\tilde{\mathbf{u}}$, comenzando desde x^+ al tiempo $k + 1$.

$$\begin{aligned}\tilde{x}(j; x^+) &= A^j x^+ + \sum_{i=0}^{j-1} A^i B \tilde{u}(j - i - 1) \\ &= \bar{x}(j + 1; x) + A_K^j w,\end{aligned}$$

donde la última igualdad proviene del Lema 4.8.

Luego,

$$\begin{aligned}\Delta V_N^w &= \tilde{V}_N(x^+, p; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{x}_a, \tilde{u}_a) - \tilde{V}_N(\bar{x}(1; x), p; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{x}_a, \tilde{u}_a) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} L(\tilde{x}(j; x^+) - \tilde{x}_a + x_s^{eco}, \tilde{u}(j) - \tilde{u}_a + u_s^{eco}, p) \\ &\quad + \tilde{V}_f(\tilde{x}(N; x^+), \tilde{x}_a) + \tilde{V}_O(\tilde{x}_a, \tilde{u}_a) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{N-1} L(\bar{x}(j + 1; x) - \tilde{x}_a + x_s^{eco}, \tilde{u}(j) - \tilde{u}_a + u_s^{eco}, p) \\ &\quad - \tilde{V}_f(\bar{x}(N + 1; x), \tilde{x}_a) - \tilde{V}_O(\tilde{x}_a, \tilde{u}_a) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \ell_{eco}(\tilde{x}(j; x^+) - x_a^0 + x_s^{eco}, u^0(j + 1; x) - \tilde{u}_a + u_s^{eco}, p) \\ &\quad + V_f(\tilde{x}(N; x^+), x_a^0) + V_O(x_a^0, u_a^0) \\ &\quad + \lambda(x^+) - \lambda(x_s^{eco}) - N \ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p) + \lambda(\tilde{x}(N; x^+)) - \lambda(x_a^0) \\ &\quad - V_f(x_a^0, x_a^0) - V_O(x_s^{eco}, u_s^{eco}) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{N-1} \ell_{eco}(\bar{x}(j + 1; x) - x_a^0 + x_s^{eco}, u^0(j + 1; x) - u_a^0 + u_s^{eco}, p) \\ &\quad - V_f(\bar{x}(N + 1; x), x_a^0) - V_O(x_a^0, u_a^0) \\ &\quad - \lambda(\bar{x}(1; x)) + \lambda(x_s^{eco}) + N \ell_{eco}(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p) - \lambda(\bar{x}(N + 1; x)) \\ &\quad + \lambda(x_a^0) + V_f(x_a^0, x_a^0) + V_O(x_s^{eco}, u_s^{eco}) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\ell_{eco}(\tilde{x}(j; x^+) - x_a^0 + x_s^{eco}, u^0(j + 1; x) - \tilde{u}_a + u_s^{eco}, p) \right. \\ &\quad \left. - \ell_{eco}(\bar{x}(j + 1; x) - x_a^0 + x_s^{eco}, u^0(j + 1; x) - u_a^0 + u_s^{eco}, p) \right) \\ &\quad + V_f(\tilde{x}(N; x^+), x_a^0) - V_f(\bar{x}(N + 1; x), x_a^0)\end{aligned}$$

$$+\lambda(x^+) - \lambda(\bar{x}(1; x)) + \lambda(\tilde{x}(N; x^+)) - \lambda(\bar{x}(N+1; x)),$$

donde de la segunda a la última igualdad es similar a las desarrolladas en el Lema 5.12. Notar que, como $\lambda(\cdot)$ es continua en el conjunto compacto \mathcal{X} , entonces es uniformemente continua en \mathcal{X} y por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda(x^+) - \lambda(\bar{x}(1; x)) &\leq \|\lambda(x^+) - \lambda(\bar{x}(1; x))\| \\ &\leq \sigma_{\lambda_1}(\|x^+ - \bar{x}(1; x)\|) = \sigma_{\lambda_1}(\|w\|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda(\tilde{x}(N; x^+)) - \lambda(\bar{x}(N+1; x)) &\leq \\ &\leq \|\lambda(\tilde{x}(N; x^+)) - \lambda(\bar{x}(N+1; x))\| \\ &\leq \bar{\sigma}_{\lambda_2}(\|\tilde{x}(N; x^+) - \bar{x}(N+1; x)\|) = \bar{\sigma}_{\lambda_2}(\|A_k^N w\|) \leq \sigma_{\lambda_2}(\|w\|), \end{aligned}$$

donde σ_{λ_1} , σ_{λ_2} , y $\bar{\sigma}_{\lambda_2}$ son funciones \mathcal{K} .

Además, teniendo en cuenta que $\tilde{x}(N; x^+) = \bar{x}(N+1; x) + A_k^N w$, se puede obtener la siguiente acotación:

$$\begin{aligned} V_f(\tilde{x}(N; x^+)) - V_f(\bar{x}(N+1; x)) &\leq \sigma_{V_f}(\|\tilde{x}(N; x^+) - \bar{x}(N+1; x)\|) \\ &\leq \sigma_{V_f}(\|A_k^N w\|) \\ &\leq \sigma_{V_f}(\|w\|), \end{aligned}$$

σ_{V_f} es una función \mathcal{K} y la primera desigualdad proviene de la continuidad uniforme de $V_f(x)$ ¹. Además,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{N-1} \ell_{eco}(\tilde{x}(j; x^+) - x_a^0 + x_s^{eco}, u^0(j+1; x) - \tilde{u}_a + u_s^{eco}, p) \\ &\quad - \ell_{eco}(\bar{x}(j+1; x) - x_a^0 + x_s^{eco}, u^0(j+1; x) - u_a^0 + u_s^{eco}, p) \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \left\| \ell_{eco}(\tilde{x}(j; x^+) - x_a^0 + x_s^{eco}, u^0(j+1; x) - \tilde{u}_a + u_s^{eco}, p) \right. \\ &\quad \left. - \ell_{eco}(\bar{x}(j+1; x) - x_a^0 + x_s^{eco}, u^0(j+1; x) - u_a^0 + u_s^{eco}, p) \right\| \\ &\leq \Gamma \sum_{j=0}^{N-1} \left\| (\tilde{x}(j; x^+) - \bar{x}(j+1; x)) \right\| \\ &\leq \Gamma \sum_{j=0}^{N-1} \|A_k^j\| \|w\| \end{aligned}$$

¹ V_f es uniformemente continua porque es continua en un compacto.

$$\begin{aligned} &\leq \Gamma \|w\| \sum_{j=0}^{N-1} \|A_K^j\| = \Gamma \frac{1 - \|A_K\|^N}{1 - \|A_K\|} \|w\| \\ &\leq \sigma_L(\|w\|), \end{aligned}$$

donde σ_L es una función \mathcal{K} y la segunda desigualdad proviene de la continuidad de Lipschitz de $\ell_{eco}(x, u, p)$, siendo Γ la constante de Lipschitz.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Delta V_N^w &\leq \sigma_{\lambda_1}(\|w\|) + \sigma_{\lambda_2}(\|w\|) + \sigma_{V_f}(\|w\|) + \sigma_L(\|w\|) \\ &\leq \sigma(\|w\|), \end{aligned}$$

siendo σ una función \mathcal{K} . Debido a la desigualdad anterior, se puede concluir que

$$\begin{aligned} \Delta V_N &= \Delta V_N^{nom} + \Delta V_N^w \\ &\leq -L(x - x_a^0 + x_s^{eco}, u^0(0; x) - u_a^0 + u_s^{eco}, p) + \sigma(\|w\|). \end{aligned}$$

Por optimalidad de la solución en el tiempo $k + 1$, se puede afirmar que $\tilde{V}_N^0(x^+, p) \leq \tilde{V}_N(x^+, p; \tilde{u}, \tilde{x}_a, \tilde{u}_a)$ y entonces,

$$\begin{aligned} \Delta V_N^0 &= \tilde{V}_N^0(x^+, p) - \tilde{V}_N^0(x, p) \\ &\leq \Delta V_N \\ &\leq -L(x - x_a^0 + x_s^{eco}, u^0(0; x) - u_a^0 + u_s^{eco}, p) + \sigma(\|w\|) \\ &\leq -\alpha(\|x - x_a^0\|) + \sigma(\|w\|) \\ &\leq -\alpha_J(\|x - x_s^{eco}\|) + \sigma(\|w\|), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad proviene del Lema 5.16(ver Sección 5.7), que concluye la prueba.

Finalmente, se puede concluir que,

$$J(x^+, p) - J(x, p) \leq -\alpha_J(\|x - x_s^{eco}\|) + \sigma(\|w\|),$$

para todo $x \in \mathcal{X}_N$ y $w \in \mathcal{W}$. ■

III. Estabilidad entrada a estado

Se define la función $J(x, p) = \tilde{V}_N^0(x, p) - \tilde{V}_O(x_s^{eco}, u_s^{eco})$, como una función Lyapunov candidata. Entonces, existen funciones \mathcal{K} α_J , β_J y σ tal que

- (i) $J(x, p) \geq \alpha_J(\|x - x_s^{eco}\|)$, para todo $x \in \mathcal{X}_N$ (se deduce de la Propiedad 5.10 y el Lema 5.16 presentado en la Sección 5.7).
- (ii) $J(x, p) \leq \beta_J(\|x - x_s^{eco}\|)$, para todo $x \in \mathcal{X}_N$ (se deduce del hecho de que \mathcal{X}_N es compacto, $J(x_s^{eco}, p) = 0$, y $J(x, p)$ es continuo en $x = x_s^{eco}$).
- (iii) $J(x^+, p) - J(x, p) \leq -\alpha_J(\|x - x_s^{eco}\|) + \sigma(\|w\|)$, para todo $x \in \mathcal{X}_N$ y $w \in \mathcal{W}$, donde σ es una función \mathcal{K} (ver Lema 5.14).

Entonces, recurriendo a los argumentos de ISS presentados en el Capítulo 3, se puede probar que existe una función \mathcal{KL} , β , y una función \mathcal{K} , ϑ , tales que,

$$\|x(k) - x_s^{eco}\| \leq \beta(\|x(0) - x_s^{eco}\|, k) + \vartheta(\|w\|)$$

para todo estado inicial $x(0) \in \mathcal{X}_N$ y toda perturbación $w \in \mathcal{W}$. Esto significa que el sistema a lazo cerrado es ISS, con lo cual el sistema perturbado (5-1) es dirigido por el controlador a $x_s^{eco} \oplus \mathcal{R}_\infty$.

■

5.4. Propiedades del controlador

El controlador propuesto es una formulación robusta del MPC económico para el criterio económico cambiante presentado en el Capítulo 2. A continuación se enumeran las principales propiedades de la nueva formulación:

- **Factibilidad y Dominio de Atracción.** Dado que el dominio de atracción \mathcal{X}_N no depende del estado estacionario óptimo, entonces para todas las condiciones iniciales $x \in \mathcal{X}_N$, se puede alcanzar cada punto de equilibrio admisible. Además, dado que la trayectoria permanece en \mathcal{X}_N , si el criterio económico cambia, el problema $\mathcal{P}_N(x, p)$ no pierde factibilidad. Sin embargo, en la práctica, puede ser difícil saber de antemano si hay un estado inicial en \mathcal{X}_N para cerrar el lazo con el controlador. Es una práctica industrial operar manualmente la planta a un punto de equilibrio admisible antes de cerrar el lazo de control. Entonces, el estado inicial es un punto de equilibrio, esto es $(x, u) \in \bar{\mathcal{Z}}_s$. En este caso práctico, la factibilidad del controlador propuesto está garantizada, ya que el estado inicial estaría en el dominio de atracción del controlador incluso para $N = 1$.

- **Optimalidad Económica Local.** El controlador propuesto puede ser subóptimo mientras que $x_a \not\approx x_s^{eco}$, es decir, su rendimiento puede ser diferente de los controladores MPC económicos estándar. Esta suboptimalidad es una consecuencia de minimizar un costo particular y la restricción terminal relajada, y en cierto sentido es el precio que uno tiene que pagar para garantizar siempre la factibilidad. Sin embargo, se ha demostrado en [Ferramosca et al., 2014b] que bajo una sencilla suposición sobre el costo $V_O(\cdot)$, el controlador asegura la optimalidad económica al menos localmente, es decir en una región $\mathcal{X}_N^e \subseteq \mathcal{X}_N$, donde \mathcal{X}_N^e es el dominio de atracción del MPC económico estándar. Dado que es el costo de etapa el que proporciona la optimalidad económica, uno es libre de elegir la función de costo de compensación $V_O(\cdot)$ en cualquier forma que satisfaga el Supuesto 5.7.
- **Estrategia Robusta.** El controlador propuesto asegura robustez para cualquier perturbación aditiva acotada $w \in \mathcal{W}$, y mantiene el lazo cerrado en una región del espacio de estado alrededor del punto de operación económicamente óptimo, dado por el mínimo conjunto invariante robusto, es decir, el Sistema (5-1) es llevado a $x_s^{eco} \oplus \mathcal{R}_\infty$, para todo $w \in \mathcal{W}$.

5.5. Ejemplo de aplicación: sistema de cuatro tanques

En esta sección, para demostrar las propiedades y los beneficios de la estrategia de MPC económica robusta propuesta, se presentarán algunos resultados de simulaciones. Primero, se muestra a modo de resumen, una breve descripción del sistema de cuatro tanques considerado. Una descripción detallada del mismo puede verse en el Capítulo 4. Luego, se presentan los resultados de las simulaciones dinámicas.

5.5.1. Descripción del sistema

Considérese el sistema de cuatro tanques descrito en el Capítulo 4. El modelo linealizado es discretizado utilizando el método retenedor de orden cero, con un tiempo de muestreo de cinco segundos. Las matrices resultantes para el modelo lineal son las siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9704 & 0 & 0.0207 & 0 \\ 0 & 0.9664 & 0 & 0.0195 \\ 0 & 0 & 0.9790 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9802 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0.0068 & 0.0001 \\ 0.0002 & 0.0091 \\ 0 & 0.0137 \\ 0.0160 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema debe cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= \{x \in \mathbb{R}^4 : 0.2 \leq x_{1,2} \leq 1.36; 0.2 \leq x_{3,4} \leq 1.30\} \\ \mathcal{U} &= \{u \in \mathbb{R}^2 : [0, 0] \leq u \leq [3.26, 4]\}.\end{aligned}$$

En lo que sigue, \mathcal{Y} denotará el conjunto de salidas admisibles, dado por $\mathcal{Y} = Proj_y(\mathcal{X})$.

El conjunto \mathcal{W} de posible realización de perturbaciones viene dado por

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathcal{R}^4 : \|w\|_\infty \leq 5 \times 10^{-3}\},$$

y fue seleccionado para tener en cuenta los desajustes entre planta y modelo en los puntos de operación habituales.

Con respecto a los parámetros del controlador, el horizonte de predicción se ha designado como $N = 5$, mientras que la matriz K ha sido elegida como la ganancia del Regulador Cuadrático Lineal (LQR), para $Q = I_4$ y $R = 0.001I_2$, y está dada por:

$$K = \begin{bmatrix} -6.5049 & -4.9114 & 3.0196 & -22.5094 \\ -6.1002 & -9.5974 & -21.7712 & 2.3534 \end{bmatrix}$$

El objetivo económico es minimizar el consumo energético de la planta, minimizando el voltaje de las dos bombas y, al mismo tiempo, maximizando el volumen de agua en los tanques 1 y 2. Entonces la función de costo económico está dada por:

$$\ell_{eco}(y, u, p) = (q_a^2 + p(1)q_b^2) + p(2) \frac{V_{min}}{S(h_1 + h_2)}$$

donde $V_{min} = 0.012[m^3]$ es el volumen mínimo de agua que debe acumularse en los tanques. $y = (h_1, h_2)$, $u = (q_a, q_b)$, y $p = (p(1), p(2))$ son los precios en la función de costos. Tenga en cuenta que esta función es estrictamente convexa en (x, u) y dos veces diferenciable.

5.5.2. Simulaciones dinámicas

Para observar el rendimiento dinámico del sistema, se considera un punto de partida que es el punto de linealización del modelo nominal h_i^o .

Por otro lado, se han considerado tres costos económicos, basados en los siguientes valores de precios: $p_1 = (5, 10)$, $p_2 = (0.5, 100)$ y $p_3 = (5, 100)$. Para estos casos, las condiciones de equilibrio económicamente óptimas y los costos óptimos son, respectivamente:

$$(y_{s1}^{eco}, u_{s1}^{eco}) = (0.2951, 0.3997, 1.4623, 1.3196), \quad f_{eco}(y_{s1}^{eco}, u_{s1}^{eco}, p_1) = 13.7234,$$

$$\begin{aligned}(y_{s2}^{eco}, u_{s2}^{eco}) &= (1.1118, 0.9473, 1.6652, 2.9832), & f_{eco}(y_{s2}^{eco}, u_{s2}^{eco}, p_2) &= 16.9358, \\(y_{s3}^{eco}, u_{s3}^{eco}) &= (0.5153, 0.8517, 2.4144, 1.3196), & f_{eco}(y_{s3}^{eco}, u_{s3}^{eco}, p_3) &= 29.1662.\end{aligned}$$

La función de costo terminal elegida $V_f(x, x_a)$, dada por el Lema 5.6, satisface la Suposición 5.5, y tiene los siguientes valores para las matrices P y g , para cada valor de precios p_1, p_2, p_3 :

$$P_1 = 10^4 * \begin{bmatrix} 9.0172 & -1.5784 & 1.2552 & -3.5418 \\ -1.5784 & 7.3651 & -4.3798 & 0.8197 \\ 1.2552 & -4.3798 & 3.9311 & -0.6338 \\ -3.5418 & 0.8197 & -0.6338 & 2.4651 \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} -224.0255 \\ -253.8485 \\ -753.2375 \\ -89.7624 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = 10^4 * \begin{bmatrix} 2.4811 & -0.4343 & 0.3454 & -0.9745 \\ -0.4343 & 2.0265 & -1.2051 & 0.2255 \\ 0.3454 & -1.2051 & 1.0816 & -0.1744 \\ -0.9745 & 0.2255 & -0.1744 & 0.6783 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} -155.5548 \\ -134.4142 \\ -128.1216 \\ -139.6735 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = 10^4 * \begin{bmatrix} 9.4163 & -1.6482 & 1.3108 & -3.6985 \\ -1.6482 & 7.6911 & -4.5737 & 0.8560 \\ 1.3108 & -4.5737 & 4.1051 & -0.6618 \\ -3.6985 & 0.8560 & -0.6618 & 2.5742 \end{bmatrix}, \quad g_3 = \begin{bmatrix} -382.3292 \\ -373.7694 \\ -688.4208 \\ -144.6703 \end{bmatrix}$$

Los resultados de la simulación se presentan en las Figuras 5-1 - 5-3. En particular, las Figuras 5-1 y 5-2 muestran la evolución de las salidas controladas h_1 y h_2 , y la evolución de las entradas de control q_a y q_b , respectivamente. El óptimo económico constante, las referencias artificiales y la salida real se representan, respectivamente, con líneas azules discontinuas, rayas rojas y negras. Se puede observar cómo las entradas y salidas del sistema se ven afectadas a lo largo del tiempo por las perturbaciones aditivas w , lo que resalta el comportamiento robusto del sistema controlado. Este comportamiento también es visible en la Figura 5-3, donde se muestra la evolución del espacio de salida de esta simulación. Los conjuntos sombreados en verde representan las proyecciones en el espacio de salida del mínimo RPI centrado en los estados estacionarios económicamente óptimos, es decir $y_{si}^{eco} \oplus CR_\infty$. Se puede notar que el controlador lleva el sistema controlado hacia el punto de operación económicamente óptimo. La desviación se debe a la presencia de la perturbación, que se considera, en este caso,

que tiene una distribución Gaussiana truncada. Se puede observar que el sistema converge asintóticamente a la región invariante robusta alrededor del estado estacionario óptimo, y luego se mantiene allí, es decir, $y \rightarrow y_s^{eco} \oplus CR_\infty$ cuando $\bar{y} \rightarrow y_s^{eco}$, lo que significa que el controlador propuesto cumple el objetivo económico, incluso en presencia de perturbaciones.

Además, no hay pérdida de factibilidad cuando se cambia el parámetro económico p y, por lo tanto, el controlador puede conducir el sistema a un nuevo punto de equilibrio económicamente óptimo. Esto es gracias al papel que juegan las variables artificiales en el diseño del controlador.

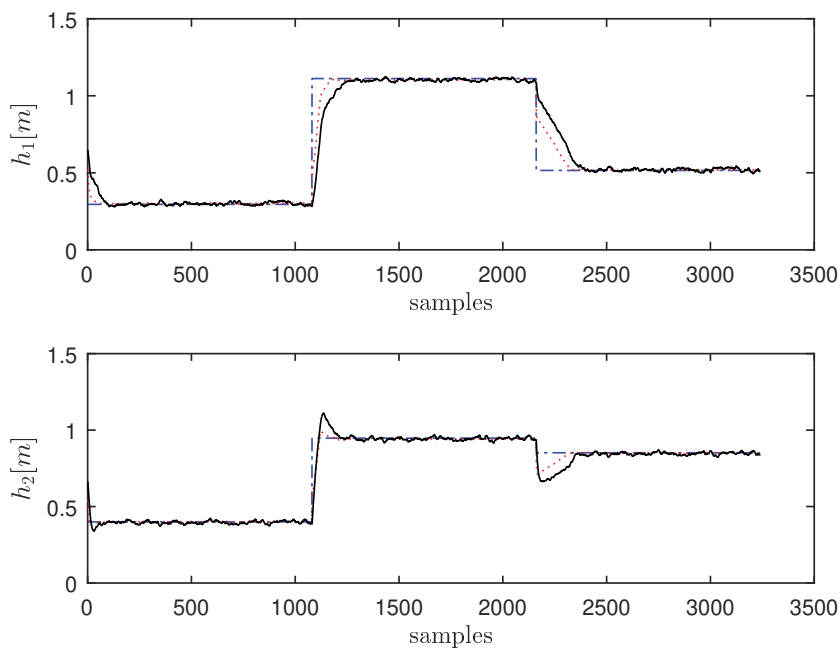


Figura 5-1: Evolución de las salidas h_1 y h_2 : salida del sistema en línea negra, referencia artificial en línea de puntos roja, óptimo económico en línea de trazos y puntos azul.

La Figura 5-4 muestra el costo económico de los diferentes valores de p_1, p_2, p_3 . Podemos observar que la función de costo económico converge robustamente al valor óptimo de f_{eco} para todos los cambios de p .

Resumiendo, este ejemplo ilustrativo muestra que:

- A pesar de que no desaparece la presencia de la perturbación aditiva w , el controlador puede llevar el sistema hacia el punto de operación económicamente óptimo, manteniéndolo en una región alrededor del estado estable dada por el conjunto RPI. De hecho, una vez que la evolución de la salida del sistema ingresa en el conjunto

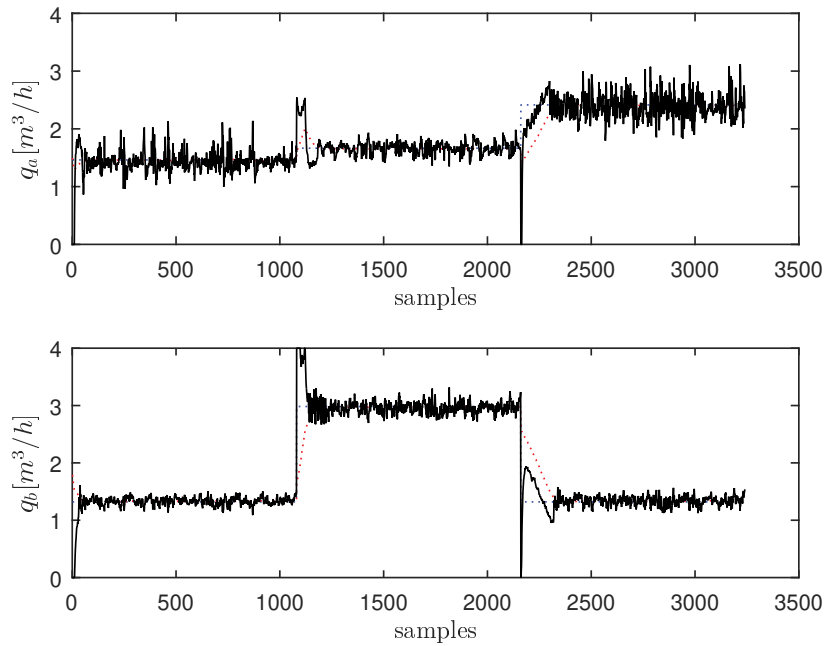


Figura 5-2: Evolución de las entradas q_a y q_b : salida del sistema en línea negra, referencia artificial en línea de puntos roja.

$y_s^{eco} \oplus C\mathcal{R}_\infty$, nunca lo abandona, a menos que haya un cambio en el criterio económico, es decir, cuando ocurre un cambio en el parámetro p .

- La referencia artificial permite que el controlador mantenga la factibilidad cuando cambia el equilibrio económicamente óptimo. Es decir, si el objetivo económico cambia, el controlador puede llevar el sistema a un nuevo punto de operación factible, manteniendo las propiedades de estabilidad y convergencia.

Observación 5.15. *Es importante remarcar que la demanda computacional del controlador robusto propuesto no es mayor que la de un controlador nominal, ya que cada conjunto politópico involucrado en el problema de optimización del MPC se calcula offline.*

5.6. Conclusiones

En este capítulo, se ha presentado una nueva formulación de la estrategia conocida como MPC económico robusto para criterios económicos cambiantes, para el caso de sistemas lineales con perturbaciones aditivas y acotadas.

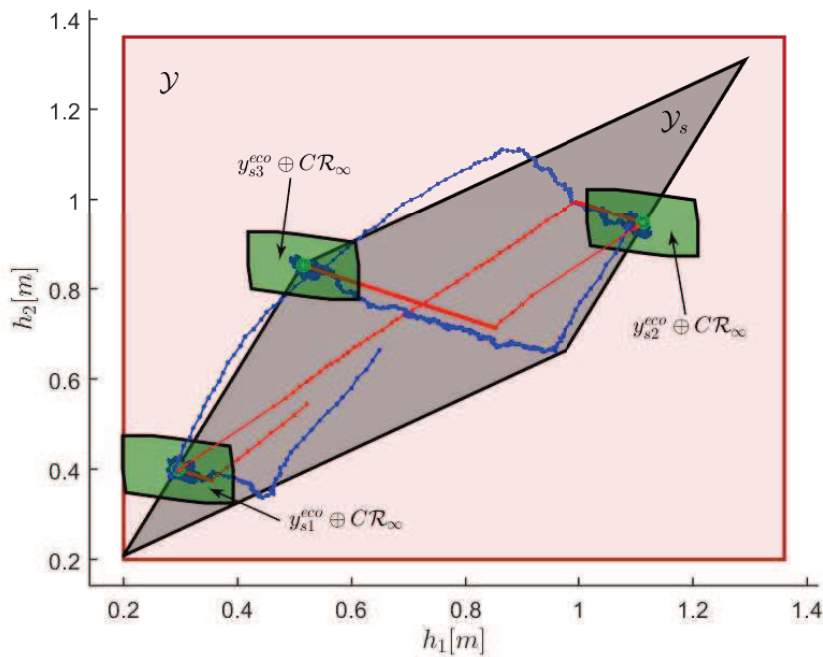


Figura 5-3: Evolución del espacio de salida del sistema a lazo cerrado en el caso de una distribución Gaussiana truncada.

La idea general es considerar el costo de optimización económica en la formulación del controlador, evaluando los posibles efectos de las perturbaciones. De esta manera, el controlador propuesto es capaz de guiar el sistema a una operación económicamente óptima, asegurando la optimalidad económica y manteniendo el sistema a lazo cerrado en una región del espacio de estado alrededor del punto de operación económicamente óptimo, dado por el mínimo conjunto robusto invariante positivo.

Mediante la formulación de MPC económico y el uso de variables artificiales, se garantiza la estabilidad y la convergencia al óptimo económico. La robustez se logra por medio de un modelo de predicción nominal, y el uso de restricciones reducidas, para dar cuenta adecuadamente de los efectos de la perturbación.

Los principales beneficios del controlador propuesto son:

- El sistema a lazo cerrado converge en forma robusta al punto óptimo económico que minimiza ℓ_{eco} .
- El controlador sigue siendo factible bajo cualquier cambio del objetivo económico y la realización de cualquier perturbación.

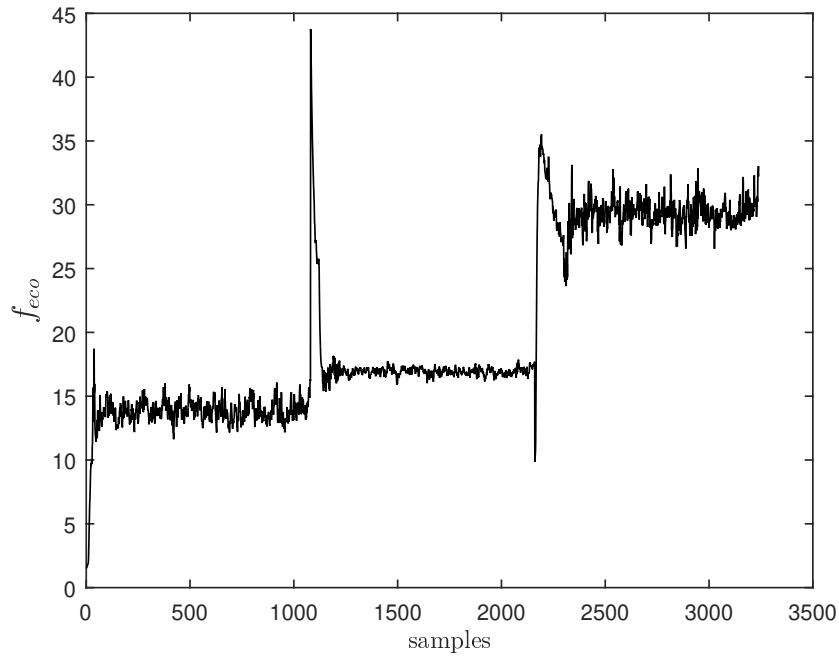


Figura 5-4: Evolución del costo económico f_{eco} , para diferentes valores de p .

- La optimalidad económica se mantiene, bajo algunas suposiciones suaves sobre la función de costo de offset.

Un ejemplo de simulación de un sistema de cuatro tanques mostró que la estrategia podría ser útil desde el punto de vista de la aplicación.

Los resultados de este Capítulo originaron las siguientes publicaciones [D’Jorge et al., 2016, D’Jorge et al., 2018b].

5.7. Apéndice

A continuación se presentan los lemas necesarios para la demostración del Teorema 5.13.

Lema 5.16. *Considérese que las Suposiciones 5.1-5.8 se cumplen y que $w = 0$. Para un dado p , sea x_s^{eco} el estado estable óptimo. Para todo $x \in \mathcal{X}_N$ y $x_a^0 \in \mathcal{X}_s = Proj_x(\bar{\mathcal{Z}}_s)$, se define la función $e(x) = x - x_a^0$. Entonces, existe una función \mathcal{K} , α_e , tal que*

$$\|e(x)\| \geq \alpha_e(\|x - x_s^{eco}\|) \quad (5-28)$$

Demostración: Debido a la convexidad de los conjuntos \mathcal{X}_N y \mathcal{X}_s , $e(x)$ es una función continua [Rawlings and Mayne, 2009]. A demás se consideran los siguientes dos casos:

- I. $\|e(x)\| = 0$ si y solo si $x = x_s^{eco}$. De hecho, (i) si $e(x) = 0$, entonces $x = x_a^0$, y por el Lema 5.17, esto implica que $x_a^0 = x_s^{eco}$; (ii) si $x = x_s^{eco}$, entonces, por la optimalidad económica de x_s^{eco} , se tiene que $x_a^0 = x_s^{eco}$, y luego, $x = x_a^0$.
- II. $\|e(x)\| > 0$ para todo $\|x - x_s^{eco}\| > 0$. De hecho, para cualquier $x \neq x_s^{eco}$, $\|e(x)\| \neq 0$ y más aún $\|x - x_s^{eco}\| > 0$. Entonces, $\|e(x)\| > 0$.

Entonces, dado que \mathcal{X}_N es compacto, en virtud de [Vidyasagar, 1993, Cap. 5, Lema 6, pag. 148], existe una función \mathcal{K} , α_e tal que $\|e(x)\| \geq \alpha_e(\|x - x_s^{eco}\|)$. ■

Lema 5.17. *Considérese que se cumplen las Suposiciones 5.1-5.8 y que $w = 0$. Tomando $\gamma > \|g\|$, donde g se define en la Ecuación (5-18). Sea la solución óptima del Problema $\tilde{\mathcal{P}}_N(x, p)$, en el tiempo k y para un dado p , tal que $x(k) = x_a^0(x(k))$, y $\bar{u}(k) = u_a^0(x(k))$. Entonces $x(k) = x_s^{eco}$, y $\bar{u}(k) = u_s^{eco}$.*

Demostración: En esta prueba, la dependencia del tiempo se omitirá por razones de claridad. Dado que la solución óptima para el Problema $\tilde{\mathcal{P}}_N(x, p)$ es tal que $x = x_a^0$ y $\bar{u} = u_a^0$, entonces, debido a la restricción terminal, $(x, \bar{u}) \in \tilde{\mathcal{Z}}_s$ la función de costo óptimo está dada por

$$\tilde{V}_N^0(x_a^0, p) = \sum_{j=0}^{N-1} L(x_s^{eco}, u_s^{eco}, p) + \tilde{V}_O(x_a^0, u_a^0) = \tilde{V}_O(x_a^0, u_a^0).$$

La última forma de costo proviene del hecho de que la entrada predicha óptima y las trayectorias de estado corresponden a la acción de mantener el sistema en equilibrio (x_a, u_a) , para los pasos N del horizonte.

El lema se probará por contradicción. Se asume que $(x, \bar{u}) = (x_a^0, u_a^0) \neq (x_s^{eco}, u_s^{eco})$. Por lo tanto, dado que ambos, (x_a^0, u_a^0) y (x_s^{eco}, u_s^{eco}) pertenecen al conjunto convexo $\tilde{\mathcal{Z}}_s$ (es decir, son puntos de equilibrios factibles), existe un $\hat{\beta} \in (0, 1)$ tal que para cualquier $\beta \in [\hat{\beta}, 1)$

- I. $(\hat{x}_s, \hat{u}_s) = \beta(x_a^0, u_a^0) + (1 - \beta)(x_s^{eco}, u_s^{eco})$.
- II. $(\hat{x}_s, \hat{u}_s) \in \tilde{\mathcal{Z}}_s$.
- III. la ley de control $u = K(x - \hat{x}_s) + \hat{u}_s$ dirige al sistema desde x_a^0 a \hat{x}_s de una manera admisible.

Por lo tanto, definiendo como \hat{u} la secuencia de acciones de control derivadas de la ley de control $\hat{u}(j) = K(\hat{x}(j) - \hat{x}_s) + \hat{u}_s$, con $\hat{x}(0) = x_a^0$, se infiere que \hat{u} es una solución factible al Problema $\tilde{\mathcal{P}}_N(x, p)$. Entonces, por la optimalidad de la solución asumida, se tiene que

$\tilde{V}_N^0(x_a^0, p) = \tilde{V}_N(x_a^0, p; \mathbf{u}^0, x_a^0, u_a^0) \leq \tilde{V}_N(x_a^0, p; \hat{\mathbf{u}}, \hat{x}_s, \hat{u}_s)$. Luego, teniendo en cuenta que $\tilde{V}_N^0(x_a^0, p) = \tilde{V}_O(x_a^0, u_a^0)$, y desarrollando el segundo término de la última desigualdad, se deduce que

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_O(x_a^0, u_a^0) &\leq \sum_{j=0}^{N-1} L(\hat{x}(j) - \hat{x}_s + x_s^{eco}, \hat{u}(j) - \hat{u}_s + u_s^{eco}, p) + \tilde{V}_f(\hat{x}(N), \hat{x}_s) + \tilde{V}_O(\hat{x}_s, \hat{u}_s) \\
&\leq \tilde{V}_f(\hat{x}(0), \hat{x}_s) + \tilde{V}_O(\hat{x}_s, \hat{u}_s) \\
&= \tilde{V}_f(x_a^0, \hat{x}_s) + \tilde{V}_O(\hat{x}_s, \hat{u}_s) \\
&= V_f(x_a^0, \hat{x}_s) + \lambda(x_a^0) - \lambda(\hat{x}_s) - V_f(\hat{x}_s, \hat{x}_s) + V_O(\hat{x}_s, \hat{u}_s) \\
&\quad + \lambda(\hat{x}_s) - \lambda(x_s^{eco}) - V_O(x_s^{eco}, u_s^{eco}) \\
&= V_f(x_a^0, \hat{x}_s) + V_O(\hat{x}_s, \hat{u}_s) + d,
\end{aligned} \tag{5-29}$$

donde $d = \lambda(x_a^0) - \lambda(x_s^{eco}) - V_O(x_s^{eco}, u_s^{eco})$.

La segunda desigualdad proviene de la Propiedad 5.11, debido a que

$$\tilde{V}_f(\hat{x}(j+1), \hat{x}_s) \leq \tilde{V}_f(\hat{x}(j), \hat{x}_s) - L(\hat{x}(j) - \hat{x}_s + x_s^{eco}, \kappa(\hat{x}(j), \hat{x}_s, \hat{u}_s) - \hat{u}_s + u_s^{eco}, p),$$

donde $\kappa(\hat{x}(j), \hat{x}_s, \hat{u}_s) = \hat{u}(j) = K(\hat{x}(j) - \hat{x}_s) + \hat{u}_s$, con $\hat{x}(0) = x_a^0$, y $\hat{x}(j+1) = A\hat{x}(j) + B\hat{u}(j)$.

Tomando $j = 0$ se tiene que

$$\tilde{V}_f(\hat{x}(1), \hat{x}_s) \leq \tilde{V}_f(\hat{x}(0), \hat{x}_s) - L(\hat{x}(0) - \hat{x}_s + x_s^{eco}, \hat{u}(0) - \hat{u}_s + u_s^{eco}, p),$$

mientras que considerando $j = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_f(\hat{x}(2), \hat{x}_s) &\leq \tilde{V}_f(\hat{x}(1), \hat{x}_s) - L(\hat{x}(1) - \hat{x}_s + x_s^{eco}, \hat{u}(1) - \hat{u}_s + u_s^{eco}, p) \\
&\leq \tilde{V}_f(\hat{x}(0), \hat{x}_s) - \sum_{j=0}^1 L(\hat{x}(j) - \hat{x}_s + x_s^{eco}, \hat{u}(j) - \hat{u}_s + u_s^{eco}, p).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por inducción, para $j = N - 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_f(\hat{x}(N), \hat{x}_s) &\leq \tilde{V}_f(\hat{x}(N-1), \hat{x}_s) - L(\hat{x}(N-1) - \hat{x}_s + x_s^{eco}, \hat{u}(N-1) - \hat{u}_s + u_s^{eco}, p) \\
&\leq \tilde{V}_f(\hat{x}(0), \hat{x}_s) - \sum_{j=0}^{N-1} L(\hat{x}(j) - \hat{x}_s + x_s^{eco}, \hat{u}(j) - \hat{u}_s + u_s^{eco}, p)
\end{aligned}$$

eso se puede escribir como

$$\tilde{V}_f(\hat{x}(0), \hat{x}_s) \geq \sum_{j=0}^{N-1} L(\hat{x}(j) - \hat{x}_s + x_s^{eco}, \hat{u}(j) - \hat{u}_s + u_s^{eco}, p) + \tilde{V}_f(\hat{x}(N), \hat{x}_s).$$

Ahora, se retomará la Ecuación (5-29). Dado que (\hat{x}_s, \hat{u}_s) es una combinación convexa de (x_a^0, u_a^0) y (x_s^{eco}, u_s^{eco}) , con $\beta \in (0, 1)$ como el parámetro convexo, la idea es calcular el costo como una función de β . Para esto, se define la función $W(\beta)$, que viene dada por:

$$\begin{aligned} W(\beta) &= V_f(x_a^0, \hat{x}_s) + V_O(\hat{x}_s, \hat{u}_s) + d \\ &= \frac{1}{2} \|x_a^0 - \hat{x}_s\|_P^2 + g'(x_a^0 - \hat{x}_s) + V_O(\hat{x}_s, \hat{u}_s) + d \\ &= (1 - \beta)^2 \frac{1}{2} \|x_a^0 - x_s^{eco}\|_P^2 + (1 - \beta)g'(x_a^0 - x_s^{eco}) + V_O(\hat{x}_s, \hat{u}_s) + d. \end{aligned}$$

Observar que $W(1) = V_O(x_a^0, u_a^0) + d = \tilde{V}_O(x_a^0, u_a^0) = \tilde{V}_N^0(x_a^0, p)$.

Tomando la derivada parcial de W respecto de β se tiene que

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = -(1 - \beta) \|x_a^0 - x_s^{eco}\|_P^2 - g'(x_a^0 - x_s^{eco}) + q'(x_a^0 - x_s^{eco}, u_a^0 - u_s^{eco}),$$

donde $q' \in \partial V_O(\hat{x}_s, \hat{u}_s)$, definiendo $\partial V_O(\hat{x}_s, \hat{u}_s)$ como el subdiferencial de $V_O(\hat{x}_s, \hat{u}_s)$. Evaluando la derivada parcial en $\beta = 1$ se obtiene:

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \beta} \right|_{\beta=1} = -g'(x_a^0 - x_s^{eco}) + \bar{q}'(x_a^0 - x_s^{eco}, u_a^0 - u_s^{eco}),$$

donde $\bar{q}' \in \partial V_O(x_a^0, u_a^0)$, definiendo $\partial V_O(x_a^0, u_a^0)$ como el subdiferencial de $V_O(x_a^0, u_a^0)$.

Luego, por la Suposición 5.7, se puede afirmar que para cada x_a^0 y x_s^{eco} ,

$$\bar{q}'(x_a^0 - x_s^{eco}, u_a^0 - u_s^{eco}) \geq V_O(x_a^0, u_a^0) - V_O(x_s^{eco}, u_s^{eco}) \geq \gamma \|x_a^0 - x_s^{eco}\|.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial W}{\partial \beta} \right|_{\beta=1} &\geq -g'(x_a^0 - x_s^{eco}) + \gamma \|x_a^0 - x_s^{eco}\| \geq -\|g\| \|x_a^0 - x_s^{eco}\| + \gamma \|x_a^0 - x_s^{eco}\| \\ &= (\gamma - \|g\|) \|x_a^0 - x_s^{eco}\|. \end{aligned}$$

Dado que $\gamma > \|g\|$ y $\|x_a^0 - x_s^{eco}\| > 0$, entonces $\left. \frac{\partial W}{\partial \beta} \right|_{\beta=1} > 0$.

Esto significa que existe un $\beta \in [\hat{\beta}, 1)$ tal que el costo de dirigir al sistema desde x_a^0 a \hat{x}_s , $W(\beta)$, es menor que el costo de permanecer en x_a^0 , el cual está dado por $W(1) = \tilde{V}_O(x_a^0, u_a^0) = \tilde{V}_N^0(x_a^0, p)$.

Esta afirmación contradice la optimalidad de la solución al Problema $\tilde{\mathcal{P}}_N(x, p)$ y por lo tanto $x = x_a^0 = x_s^{eco}$, y $\bar{u} = u_a^0 = u_s^{eco}$, lo que prueba el lema. ■

Observación 5.18. Resumiendo, este lema demuestra que, si el sistema converge a un punto de equilibrio x_a^0 , este punto no puede ser otro que el estado estacionario económicamente óptimo, x_s^{eco} .

Capítulo 6

Formulación estocástica del MPC+RTO

6.1. Introducción

En los capítulos presentados anteriormente se analizó el diseño robusto de un controlador MPC+RTO y de un MPC económico. La necesidad de hacerlo surge del hecho que estos controladores, si bien pueden garantizar la factibilidad recursiva frente a cambios de objetivos económicos, pueden incurrir en problemas de estabilidad y factibilidad en presencia de incertidumbres y perturbaciones aditivas, lo cual es algo habitual en la práctica.

Los controladores que se propusieron en los Capítulos 4 y 5 logran garantizar la factibilidad recursiva frente a cualquier incertidumbre aditiva acotada. Esto se consigue de una manera muy satisfactoria, reduciendo el conjunto de restricciones para tener en cuenta cualquier posible realización futura de las perturbaciones. Asimismo, esta estrategia posee un bajo costo computacional, dado que los conjuntos necesarios para su formulación son calculados de manera offline, y el problema de optimización del MPC no es diferente del caso nominal. Sin embargo, si bien presentan estas grandes ventajas, por otro lado, el costo que se debe pagar para obtener todas estas garantías se traduce en un desempeño general muy conservador. Es decir, el principal inconveniente de las formulaciones robustas es el alto grado de conservadurismo que presentan, debido al diseño basado en considerar todas las posibles realizaciones de las perturbaciones, que inferen en pequeños dominios de atracción. Este inconveniente busca ser superado por el denominado MPC estocástico (SMPC), en el cual se tiene en cuenta la distribución probabilística de las perturbaciones permitiendo una pequeña probabilidad de violación de las mismas (mediante las llamadas restricciones probabilísticas), lo que lleva a un mayor dominio de atracción ([Cannon et al., 2011b, Mayne, 2016, Lorenzen et al., 2017]).

Uno de los principales desafíos que presenta esta técnica de control es la dificultad para garantizar la factibilidad recursiva. La estrategia clásica, basada en suponer que la secuencia de entrada óptima seguirá siendo factible en el siguiente instante de muestreo, no puede aplicarse en SMPC debido a que, en este caso, se permite con una cierta probabilidad infringir las restricciones. Como consecuencia, la existencia de esta probabilidad no nula de violar las restricciones de un instante de tiempo a otro (incluso bajo la misma ley de control), podría hacer inviable el problema de optimización. Una primera solución a este problema está representada por tubos probabilísticos recursivamente factibles y fue abordada en [Kouvaritakis et al., 2010, Cannon et al., 2011b]. En dichos trabajos, la factibilidad recursiva se asegura considerando la distribución de probabilidad de las perturbaciones j pasos adelante, siempre que en los pasos previos $j - 1$ se produzca cualquier posible realización. En la práctica, estos resultados se basan en acotar las restricciones para los primeros pasos $j - 1$ y en una predicción estocástica en el momento j . Un resultado muy interesante es la versión mejorada de la estrategia anterior, que se propone en [Lorenzen et al., 2017]: basada en la idea de [Korda et al., 2011], la estrategia consiste en calcular una región invariante de control y forzar el primer estado predicho a estar dentro de esta región. Este procedimiento produce una región factible menos restrictiva, no solo con respecto al MPC basado en tubos robusto, sino también con respecto a los tubos probabilísticos presentados en [Cannon et al., 2011b].

En este capítulo, se presenta una formulación estocástica de un controlador MPC+RTO, como el propuesto en el Capítulo 4, basada en los resultados de [Lorenzen et al., 2017]. El diseño del controlador es tal que busca garantizar la satisfacción de las restricciones en cuanto a la probabilidad y mantener las características principales del MPCT, que son factibilidad para cualquier punto de referencia cambiante y dominio de atracción ampliado, incluso más grande que el proporcionado por [Lorenzen et al., 2017], gracias al uso de las referencias artificiales y a la restricción terminal relajada. Se pretende garantizar la estabilidad asintótica (en probabilidad) del mínimo conjunto invariable robusto positivo (RPI) centrado en el punto de ajuste deseado.

Recientemente, otro enfoque que extiende el MPCT al marco estocástico fue publicado en [Santos et al., 2018, Paulson et al., 2018]. Sin embargo, en este último caso, el conocimiento de la distribución de probabilidad de la perturbación se explica mediante el uso de las ideas presentadas en [Kouvaritakis et al., 2010, Cannon et al., 2011b], que son esencialmente diferentes de las que se encuentran en [Lorenzen et al., 2017].

Los beneficios del SMPC han hecho en los últimos años que esta estrategia de control sea una de las más elegidas para diferentes aplicaciones, dentro de las cuales se destaca el

control de los sistemas de energía, como el control del clima en edificios eficientes [Zavala et al., 2009, Oldewurtel et al., 2010, Oldewurtel et al., 2012, Ma et al., 2015], redes inteligentes y microgrids [Su et al., 2014, Olivares et al., 2015], gestión de energía en fuentes de alimentación [Patrinos et al., 2011, Di Cairano et al., 2014, Zeng and Wang, 2015], entre otros.

En particular, el controlador propuesto se prueba en simulación en un modelo linealizado de un convertidor CC-CC (corriente continua). Este sistema se emplea generalmente en fuentes de alimentación para dispositivos electrónicos para controlar el flujo de energía entre dos sistemas de CC, y se usa ampliamente en diversos procesos como vehículos eléctricos e híbridos, sistemas fotovoltaicos, turbinas eólicas, motores de corriente continua, etc.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 6.2 se realiza una breve descripción del problema de control que se va a abordar a lo largo del capítulo. En la Sección 6.3 se presenta la formulación estocástica del controlador MPC+RTO propuesta. En esta sección se realiza el análisis de la estabilidad asintótica del controlador propuesto, así como también se resaltan las propiedades del mismo. En la Sección 6.4, se aplica el controlador propuesto a un sistema convertidor CC-CC. Finalmente, en la Sección 6.5 se sacan algunas conclusiones del desempeño obtenido.

6.2. Descripción del sistema

Considérese el siguiente sistema dinámico discreto, lineal e invariante en el tiempo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k), \quad (6-1)$$

donde $x(k) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada o acciones de control y $w(k) \in \mathbb{R}^n$ es una perturbación de estado estocástica desconocida pero limitada, en el tiempo de muestreo k , mientras que $x(k+1)$ denota el estado sucesor.

A diferencia de los casos presentados en los capítulos anteriores, dado que los estados en el sistema (6-1) evolucionan como procesos estocásticos, las restricciones se aplican como restricciones probabilísticas. Esencialmente lo que se plantea es que con cierta probabilidad, la cual será definida de acuerdo al sistema a controlar, los estados y entradas podrán estar fuera de los límites del sistema. Formalmente se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_k\{x(k) \in \mathcal{X}\} &\geq 1 - \varepsilon \\ \mathbb{P}_k\{u(k) \in \mathcal{U}\} &\geq 1 - \varepsilon_u \end{aligned} \quad (6-2)$$

donde $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ son poliedros compactos, convexos y contienen al origen en su interior, y $\varepsilon \in [0, 1)$, $\varepsilon_u \in [0, 1)$ son parámetros dados para restringir la probabilidad de quebrantar las restricciones del sistema. Es importante notar que, en caso que así se requiera, estas restricciones se pueden convertir en deterministas, haciendo $\varepsilon = 0$ o $\varepsilon_u = 0$.

Para luego poder garantizar la estabilidad asintótica, el modelo del sistema incierto (6-1) deberá cumplir con el siguiente supuesto:

Suposición 6.1.

- *El par (A, B) es controlable.*
- *Las incertidumbres $w(k)$, $k \geq 0$ son variables aleatorias con media cero, independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.). Además, están acotadas y se encuentran en un poliedro convexo compacto que contiene el origen en su interior.*

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathbb{R}^n : A_w w \leq b_w\} \quad (6-3)$$

- *El estado del sistema es medible y, por lo tanto, se conoce $x(k)$ en cada instante de muestreo.*

El estado estacionario y la entrada del sistema (x_s, u_s) son tales que (6-1) se cumple para el sistema nominal, es decir,

$$x_s = Ax_s + Bu_s.$$

Se definen los conjuntos de estados y entradas de equilibrio admisibles del sistema (6-1) como

$$\mathcal{Z}_s = \{(x, u) \in \mathcal{Z} \mid x = Ax + Bu\} \quad (6-4)$$

$$\mathcal{X}_s = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists u \in \mathcal{U} \text{ tal que } (x, u) \in \mathcal{Z}_s\}. \quad (6-5)$$

Teniendo en cuenta la última caracterización de equilibrio, el punto óptimo de operación que estabiliza el sistema es

Definición 6.2. *El estado estacionario y entrada óptimos, (x_s^{eco}, u_s^{eco}) , satisfacen*

$$(x_s^{eco}, u_s^{eco}) = \arg \min_{(x, u) \in \mathcal{Z}_s} \ell_{eco}(x, u, p). \quad (6-6)$$

Donde $\ell_{eco}(x, u, p)$ define una función de costo económico y p es un parámetro que tiene en cuenta factores como los precios, costos u objetivos de producción, que pueden hacer variar el valor óptimo del problema (6-6). Se supone, para dar generalidad a la formulación, que $\ell_{eco}(x, u, p)$ es no lineal.

El objetivo de este capítulo es diseñar un MPC estocástico capaz de alcanzar cualquier punto de operación cambiante x_s^{eco} , satisfaciendo las restricciones (6-2)-(6-3), a pesar de las incertidumbres. A continuación se presenta la estrategia diseñada para cumplir con este propósito.

6.3. Formulación estocástica del MPC + RTO

Una vez formalizado el problema que se desea resolver y planteado el objetivo, en esta sección se buscará llevar a cabo el diseño de un controlador MPC+RTO estocástico. Para lo cual, se propone una función de costo caracterizada por: (i) un punto de referencia artificial alcanzable, añadido como variable de decisión; (ii) un costo de etapa que minimiza la desviación de la trayectoria predicha respecto de esta condición estable artificial; (iii) un costo adicional, dado por la función *costo de offset*, que penaliza la desviación entre el punto de referencia artificial y el punto de operación deseado; (iv) una restricción terminal relajada que depende de la variable artificial en lugar del punto de operación real.

Teniendo en cuenta la naturaleza estocástica de las predicciones, se presenta el costo del problema de optimización como el valor esperado del costo cuadrático, que debe minimizarse en cada instante de tiempo k :

$$V_N(x; \mathbf{u}, x_a, u_a) = \mathbb{E}_k \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \|x(j; k) - x_a(k)\|_Q^2 + \|u(j; k) - u_a(k)\|_R^2 \right. \\ \left. + \|x(N; k) - x_a(k)\|_P^2 + V_O(x_a(k), u_a(k)) \right\}, \quad (6-7)$$

para $j \in \mathbb{I}_{[0:N-1]}$, siendo N el horizonte de control/predicción. Donde $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices definidas positivas y $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz semi definida positiva tal que el par $(Q^{1/2}, A)$ es observable. El par (x_a, u_a) es la denominada referencia artificial, que representa el mejor estado de equilibrio al que puede acceder el sistema en N pasos, a partir de la condición inicial $x = x(k)$. Asimismo, $V_O(x_a, u_a)$ es la llamada función de costo de offset, que se define como sigue:

Definición 6.3. Sea $V_O(x, u)$ una función convexa definida positiva tal que el único mínimo de

$$\min_{(x,u) \in \mathcal{Z}_s} V_O(x, u) \quad (6-8)$$

es (x_s^{eco}, u_s^{eco}) .

Para poder garantizar estabilidad y convergencia, a esta función se le pedirá que cumpla con el siguiente supuesto:

Suposición 6.4. Existe una constante positiva γ tal que

$$V_O(x, u) - V_O(x_s^{eco}, u_s^{eco}) \geq \gamma \|x - x_s^{eco}\|. \quad (6-9)$$

Teniendo en cuenta que esta función se evalúa en las variables $(x_a(k), u_a(k))$, este supuesto garantiza que la diferencia de entre la función evaluada en la referencia artificial y el óptimo del sistema está acotada y depende, además, de la distancia entre dichos puntos.

Observación 6.5. La función de costo de offset $V_O(\cdot)$ representa el criterio económico que determina el comportamiento a lazo cerrado del sistema controlado. De la definición anterior, está claro que las condiciones en la elección de $V_O(\cdot)$ no son tan restrictivas. Esta función se puede elegir, en el marco de MPC+RTO, como una norma de la distancia al estado estable deseado [Limon et al., 2008, Ferramosca et al., 2009], es decir, $\|x - x_s^{eco}\|_\infty$, $\|x - x_s^{eco}\|_1$, o una norma cuadrática $\|x - x_s^{eco}\|_T^2$, donde T es una matriz definida positiva; o como una distancia a un conjunto objetivo [Ferramosca et al., 2010a, Ferramosca et al., 2012]. También se puede configurar como una función de costo económico genérico (posiblemente no lineal), es decir, $V_O(\cdot) = \ell_{eco}(x, u)$, proporcionando propiedades significativas al sistema en lazo cerrado. Dado que una función de costo no lineal puede no cumplir con las condiciones requeridas en la Definición 6.3, para este último caso los algoritmos para una aproximación adaptativa del costo no lineal $\ell_{eco}(x, u)$ se proporcionan en [Alamo et al., 2014, D’Jorge et al., 2017, Limon et al., 2013].

Como es habitual en la formulación de MPC estocástico, siguiendo las ideas presentadas en el Capítulo 3, se puede descomponer el estado y las trayectorias predichas de entrada del modelo (6-1) en sus componentes deterministas y estocásticas. Para esto, considérese una ganancia K de realimentación de estado óptima, típicamente escogida como la ganancia de control óptimo de LQR, de manera que $A_K = A + BK$ presente todos sus autovalores en el interior del círculo unitario. Entonces, dado un horizonte de predicción finito N , se tiene que

$$x(j; k) = z(j; k) + e(j; k) \quad (6-10)$$

$$u(j; k) = Ke(j; k) + v(j; k) \quad (6-11)$$

para $j \in \mathbb{I}_{0:N-1}$, donde $z \in \mathbb{R}^n$ representa la evolución del modelo nominal (determinístico), mientras que $e \in \mathbb{R}^n$ representa la evolución de la componente estocástica del estado, es decir

$$z(j+1; k) = Az(j; k) + Bv(j; k), \quad z(0; k) = x(k) \quad (6-12)$$

$$e(j+1; k) = A_K e(j; k) + w(j; k), \quad e(0; k) = 0. \quad (6-13)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (6-10) - (6-13) y las propiedades de distribución de las perturbaciones, dadas por la Suposición 6.1, el valor esperado del costo puede ser calculado explícitamente en las variables determinísticas $z(j)$ y $v(j)$ como sigue:

$$V_N(x; \mathbf{u}, x_a, u_a) = V_N^d(x; \mathbf{v}, x_a, u_a) + V_N^e(w) \quad (6-14)$$

donde

$$V_N^d(x; \mathbf{v}, x_a, u_a) = \sum_{j=0}^{N-1} \|z(j; k) - x_a(k)\|_Q^2 + \|v(j; k) - u_a(k)\|_R^2 + \|z(N; k) - x_a(k)\|_P^2 + V_O(x_a(k), u_a(k))$$

$$V_N^e(w) = \mathbb{E}_k \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \|e(j; k)\|_{Q+K'RK}^2 + \|e(N; k)\|_P^2 \right\}.$$

En la formulación correspondiente a $V_N^d(\cdot)$, x es un parámetro, mientras que la secuencia de entrada $\mathbf{v} = \{v(0), \dots, v(N-1)\}$ y las variables artificiales x_a y u_a son las variables de optimización. Asimismo, obsérvese que la formulación de $V_N^e(\cdot)$ solo está en función de la variable estocástica, es decir, no depende del estado actual x , ni de las variables de optimización (\mathbf{v}, u_a, x_a) , con lo cual, deja entrever que no formará parte del problema de optimización del controlador propuesto.

A continuación, mediante el siguiente lema, se demuestra la equivalencia de los costos dados por las ecuaciones (6-7) y (6-14).

Lema 6.6. *Considérese que las Suposiciones 6.1 y 6.7 se cumplen, entonces la función de costo dada por la ecuación (6-7), es equivalente a la función (6-14) donde*

$$V_N^d(x; \mathbf{v}, x_a, u_a) = \sum_{j=0}^{N-1} \|z(j; k) - x_a(k)\|_Q^2 + \|v(j; k) - u_a(k)\|_R^2 + \|z(N; k) - x_a(k)\|_P^2 + V_O(x_a(k), u_a(k))$$

$$V_N^e(w) = \mathbb{E}_k \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \|e(j; k)\|_{Q+K'RK}^2 + \|e(N; k)\|_P^2 \right\}.$$

Demostración: Manipulando la función de costo (6-7), usando las ecuaciones (6-10)-(6-13), se tiene que

$$\begin{aligned}
V_N(x; \mathbf{u}, x_a, u_a) &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}_k (\|x(j; k) - x_a(k)\|_Q^2 + \|u(j; k) - u_a(k)\|_R^2) \\
&\quad + \mathbb{E}_k (\|x(N; k) - x_a(k)\|_P^2) + V_O(x_a(k), u_a(k)) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}_k (\|z(j; k) + e(j; k) - x_a(k)\|_Q^2 + \|v(j; k) + Ke(j; k) - u_a(k)\|_R^2) \\
&\quad + \mathbb{E}_k (\|z(N; k) + e(N; k) - x_a(k)\|_P^2) + V_O(x_a(k), u_a(k)) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}_k (\|z(j; k) - x_a(k)\|_Q^2 + \|e(j; k)\|_Q^2 + 2(z(j; k) - x_a(k))'Qe(j; k) \\
&\quad + \|v(j; k) - u_a(k)\|_R^2 + \|e(j; k)\|_{K'RK}^2 + 2(v(j; k) - u_a(k))'RKe(j; k)) \\
&\quad + \mathbb{E} (\|z(N; k) - x_a(k)\|_P^2 + \|e(N; k)\|_P^2 + 2(z(N; k) - x_a(k))'Qe(N; k)) \\
&\quad + V_O(x_a(k), u_a(k)).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $e(j; k)$ es de media cero e independiente de $z(j; k)$, el valor esperado de los términos cruzados es igual a cero. Entonces, es posible separar la componente estocástica del costo de la determinista, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
V_N(x; \mathbf{u}, x_a, u_a) &= \sum_{j=0}^{N-1} \|z(j; k) - x_a(k)\|_Q^2 + \|v(j; k) - u_a(k)\|_R^2 + \|z(N; k) - x_a(k)\|_P^2 \\
&\quad + V_O(x_a(k), u_a(k)) + \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}_k (\|e(j; k)\|_{Q+K'RK}^2) + \mathbb{E}_k (\|e(N; k)\|_P^2) \\
&= V_N^d(x; \mathbf{v}, x_a, u_a) + V_N^e(w)
\end{aligned}$$

lo que prueba el Lema. ■

Finalmente, el MPC estocástico propuesto viene dado por la solución en cada instante de tiempo k , para cualquier estado factible x , del problema de optimización $\mathcal{P}_N(x; \mathbf{v}, x_a, u_a)$, dado por

$$\min_{\mathbf{v}, x_a, u_a} V_N^d(x; \mathbf{v}, x_a, u_a) \quad (6-15)$$

$$s.a. \quad z(0; k) = x(k), \quad (6-16)$$

$$(6-10) - (6-13), \quad (6-17)$$

$$z(j; k) \in \tilde{\mathcal{X}}_j, \quad j \in \mathbb{I}_{1:N} \quad (6-18)$$

$$v(j; k) \in \tilde{\mathcal{U}}_j, \quad j \in \mathbb{I}_{0:N-1} \quad (6-19)$$

$$(z(N; k), x_a, u_a) \in \tilde{\Omega}_t^a \quad (6-20)$$

$$z(1; k) \in \mathcal{C}_{N,x}^\infty \ominus \mathcal{W} \quad (6-21)$$

donde $\tilde{\mathcal{X}}_j$, $\tilde{\mathcal{U}}_j$ y Ω_t^a son, respectivamente, las restricciones de estado, entrada y terminal necesarias para que el problema de optimización estocástico sea recursivamente factible. Además, $\mathcal{C}_{N,x}^\infty$ es el máximo conjunto invariante robusto de control. Estos conjuntos serán definidos formalmente en la siguiente sección.

En el problema de optimización planteado, x es un parámetro, mientras que la secuencia de entrada $\mathbf{v} = \{v(0), \dots, v(N-1)\}$ y las variables artificiales x_a y u_a son las variables de optimización¹. Téngase en cuenta que el término de costo V_N^e no se incluye en el costo que se debe minimizar porque, como se distinguió anteriormente, no depende de las variables de optimización.

A continuación se procederá a definir los conjuntos involucrados en el problema de optimización presentado previamente.

6.3.1. Restricciones probabilísticas y dominio de atracción

Como se pudo vislumbrar a lo largo de la tesis, una de las claves para una adecuada formulación de un controlador predictivo basado en modelo, se encuentra en la formulación de las restricciones del problema de optimización. En esta sección se aborda la formulación adecuada de las mismas para poder asegurar los tres pilares del MPC, es decir, estabilidad, convergencia y factibilidad recursiva.

En primer lugar, se derivan los conjuntos de restricciones deterministas y no conservadores $\tilde{\mathcal{X}}_j$ y $\tilde{\mathcal{U}}_j$ para el sistema nominal, de manera que las restricciones (6-2) para el sistema (6-1) se cumplan en lazo cerrado bajo la ley de control del MPC estocástico para seguimiento. Luego se presentarán el conjunto final y la restricción adicional del primer paso junto con el dominio de atracción del sistema. Estos conjuntos de restricciones se modifican aún más para proporcionar garantías de estabilidad estocástica y factibilidad recursiva en todas las secuencias de perturbación admisibles.

Téngase en cuenta que todos los conjuntos de restricciones involucrados en el problema de optimización, se calculan de manera offline.

¹Obsérvese que la dependencia de estas variables con respecto a la condición inicial $x(k)$, es decir, $(\mathbf{v}(x(k)), x_a(x(k)), u_a(x(k)))$, se elimina por motivos de claridad.

Teniendo en cuenta las ideas presentadas en el Capítulo 3, a continuación, las restricciones de estado y entrada dadas por la ecuación 6-2, se reescribirán a partir de las predicciones como sigue:

$$\mathbb{P}_k\{[A_x]_i x(j; k) \leq [b_x]_i\} \geq 1 - [\varepsilon]_i \quad i \in \mathbb{I}_{1:p}, \quad j \in \mathbb{I}_{1:N} \quad (6-22)$$

$$\mathbb{P}_k\{[A_u]_i u(j; k) \leq [b_u]_i\} \geq 1 - [\varepsilon_u]_i \quad i \in \mathbb{I}_{1:q}, \quad j \in \mathbb{I}_{0:N-1} \quad (6-23)$$

donde p y q son el número de restricciones lineales que definen \mathcal{X} y \mathcal{U} respectivamente. Las matrices $A_x \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $A_u \in \mathbb{R}^{q \times m}$, y los vectores $b_x \in \mathbb{R}^p$, $b_u \in \mathbb{R}^q$ son tales que, $x(j; k) \in \mathcal{X}$ es equivalente a $A_x x(j; k) \leq b_x$ y que $u(j; k) \in \mathcal{U}$ es equivalente a $A_u u(j; k) \leq b_u$.

Además, $[\varepsilon]_i \in [0, 1]$ es un parámetro dado que restringe la probabilidad condicional de infringir la restricción de estado lineal i en la predicción futura $(j; k)$, dada la realización del estado actual $x(k)$. Obsérvese que considerar $[\varepsilon]_i = 0$ convierte una restricción suave en una restricción dura.

Finalmente, dada la evolución de la componente estocástica del estado (6-13), las restricciones probabilísticas se pueden reescribir en términos de conjuntos de restricciones convexos y lineales, de la siguiente manera.

Restricciones de estado

Sea $\varepsilon \in [0, 1]^p$, el sistema (6-1) satisface las restricciones de probabilidad (6-22) para $k = 1, \dots, N$ e $i = 1, \dots, p$ si y sólo si el sistema nominal (6-12) satisface las restricciones $z(j; k) \in \tilde{\mathcal{X}}_j$ con

$$\tilde{\mathcal{X}}_j = \{z \in \mathbb{R}^n \mid A_x z \leq \eta_j\} \quad j \in \mathbb{I}_{1:N} \quad (6-24)$$

donde η_j viene dada por

$$[\eta_j]_i = \max_{\eta} \eta$$

s.a. $\mathbb{P}_k\{\eta \leq [b_x]_i - [A_x]_i e(j; k)\} \geq 1 - [\varepsilon]_i \quad i \in \mathbb{I}_{1:p}$.

Restricciones de entrada

Sea $\varepsilon_u \in [0, 1]$ un nivel de satisfacción de restricción probabilística. De manera similar a lo realizado con las restricciones de estado, se reemplaza la restricción original con $v(j; k) \in \tilde{\mathcal{U}}_j$ donde

$$\tilde{\mathcal{U}}_j = \{v \in \mathbb{R}^m \mid A_u v \leq \mu_j\} \quad j \in \mathbb{I}_{0:N-1} \quad (6-25)$$

donde μ_j está dado por

$$[\mu_j]_i = \underset{\mu}{\text{máx}} \mu$$

$$s.a. \quad \mathbb{P}_k\{\mu \leq [b_u]_i - [A_u]_i Ke(j; k)\} \geq 1 - \epsilon_u \quad i \in \mathbb{I}_{1:q}.$$

Es importante remarcar que en el lazo cerrado, las restricciones duras de entrada se cumplirán siempre, dado que $\mu_0 = b_u$. Es decir, la entrada de control que finalmente se inyecta en el sistema, cumplirá siempre con las restricciones duras, independientemente de valor de ϵ_u .

Costo final y restricción terminal

Como es bien sabido por la teoría de control predictivo, en un diseño de estabilización de MPC nominal, la restricción terminal fuerza al estado de predicción final a residir en una región del espacio de estado que se encuentra dentro del dominio de atracción del sistema nominal, estabilizado por una ley de control local. En el caso del MPC nominal para seguimiento, esta ley de control debe diseñarse para estabilizar el sistema a cualquier punto de equilibrio admisible (x_a, u_a) . Luego se utiliza una función de Lyapunov para el sistema controlado, $V_f(x, x_a) = \|x - x_a\|_P^2$, como función de costo final, y el dominio de atracción del sistema controlado $(x, x_a, u_a) \in \Omega_t^a$ se utiliza como restricción terminal.

Suposición 6.7.

- Sea $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ una matriz definida positiva y $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz semi-definida positiva tal que el par $(Q^{1/2}, A)$ es observable.
- Sea $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una ganancia de control de estabilización tal que la matriz $A_K = (A + BK)$ tenga todos sus valores propios dentro del círculo unitario.
- Sea $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz definida positiva, solución de la ecuación de Riccati

$$P = A'_K P A_K + Q + K' R K$$

Debido a la Suposición 6.7, para el caso nominal, es posible definir la siguiente restricción de terminal.

Definición 6.8. (Conjunto invariante para seguimiento [Limon et al., 2008]). El poliedro $\Omega_t^a \subseteq \mathbb{R}^{n+n+m}$ es un conjunto invariante admisible para seguimiento, para el sistema nominal $x^+ = Ax + Bu$, sujeto a restricciones duras $x \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{U}$, bajo la ley de control local $u = K(x - x_a) + u_a$. Es decir, para todo $(x, x_a, u_a) \in \Omega_t^a$, se satisface que:

$$(x, K(x - x_a) + u_a) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$$

$$\begin{aligned} (x_a, u_a) &\in \mathcal{Z}_s \\ (Ax + B(K(x - x_a) + u_a), x_a, u_a) &\in \Omega_t^a \end{aligned}$$

■

El supuesto de la matriz P es una condición de Lyapunov y garantiza que $V_f(x - x_a) = \|x - x_a\|_P^2$ es una función de tipo Lyapunov para el sistema controlado por la ley de control terminal $u = K(x - x_a) + u_a$, que es $x^+ = Ax + B(K(x - x_a) + u_a)$. La existencia de esta matriz está garantizada gracias a la ganancia de control de estabilización K . Por otro lado, el conjunto invariante para la condición de seguimiento de Ω_t^a garantiza que para cualquier $(x, x_a, u_a) \in \Omega_t^a$, (x_a, u_a) es un punto de equilibrio admisible, la entrada de control $u = K(x - x_a) + u_a$ es admisible, es decir, $(x, u) \in \mathcal{Z}$, y el estado sucesor x^+ permanece en Ω_t^a para el mismo punto de equilibrio (x_a, u_a) , es decir, $(x^+, x_a, u_a) \in \Omega_t^a$. Es interesante notar que $(x_a, x_a, u_a) \in \Omega_t^a$, lo que significa que cualquier estado estable admisible x_a está contenido en $\Omega_t = Proj_x(\Omega_t^a)$.

El conjunto invariante para seguimiento dado por la Definición 6.8 no puede emplearse en el controlador estocástico propuesto, debido a la presencia de las perturbaciones. Por lo tanto, teniendo en cuenta el modelo de predicción y siguiendo las ideas presentadas en el Capítulo 4 para el caso robusto, primero se definirá un conjunto invariante robusto admisible bajo la ley de control local $v = K(z - x_a) + u_a$ y luego se procederá, al igual que se hizo con las restricciones de estado y entrada, a realizar un ajuste adecuado para construir el conjunto terminal $\tilde{\Omega}_t^a$.

Para este objetivo, se define el estado extendido $z_t = (z, x_a, u_a)$, y

$$A_t = \begin{bmatrix} A + BK & -BK & B \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Defínase también el conjunto

$$\mathcal{X}_t^j = \{(z, x_a, u_a) \mid z \in \tilde{\mathcal{X}}_j, K(z - x_a) + u_a \in \tilde{\mathcal{U}}_j, (x_a, u_a) \in \mathcal{Z}_s\}$$

y

$$\Sigma_t = \{z_t : A_t^j z_t \in \mathcal{X}_t^j, \text{ para } j \geq 0\},$$

que denota el máximo conjunto invariante robusto para el seguimiento. Para obtener el conjunto de terminal para el Problema (6-15), se define

$$\Sigma_z = Proj_z(\Sigma_t) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid A_{\Sigma_z} z \leq b_{\Sigma_z}\},$$

donde $A_{\Sigma_z} \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $b_{\Sigma_z} \in \mathbb{R}^p$ y $\Sigma_s = Proj_{(x_a, u_a)}(\Sigma_t)$. Una vez obtenido el conjunto Σ_z , se procede de manera similar a lo realizado con las restricciones de estado y de entrada. Es decir, sea $\varepsilon_f \in [0; 1)$ un nivel probabilístico, luego se define el conjunto

$$\tilde{\Sigma}_z = \{z \in \mathbb{R}^n \mid A_{\Sigma_z} z \leq \eta_f\}$$

con

$$\begin{aligned} [\eta_f]_i &= \max_{\eta} \eta \\ \text{s.a.} \quad &\mathbb{P}_k\{\eta \leq [b_{\Sigma_z}]_i - [A_{\Sigma_z}]_i e(N; k)\} \geq 1 - \varepsilon_f \quad i \in \mathbb{I}_{1:p} \end{aligned}$$

donde p es el número de restricciones lineales que definen el conjunto Σ_z . Finalmente, el conjunto terminal del Problema (6-15) viene dado por

$$\tilde{\Omega}_t^a = \tilde{\Sigma}_z \times \Sigma_s \quad (6-26)$$

Obsérvese que la restricción del terminal $(z(N; k), x_a, u_a) \in \tilde{\Omega}_t^a$ implica las siguientes afirmaciones: (i) $z(j; k) \in \tilde{\mathcal{X}}_j$, $v(j; k) \in \tilde{\mathcal{U}}_j$, con $z(j+1; k) = Az(j; k) + Bv(j; k)$ y $v(j; k) = K(z(j; k) - x_a) + u_a$, y (ii) $(x_a, u_a) \in \tilde{\mathcal{Z}}_s$.

Restricción del primer paso y dominio de atracción

Uno de los grandes desafíos que presenta la formulación de MPC estocástico, es el de poder asegurar la factibilidad recursiva del controlador. La estrategia desarrollada, para cumplir con este objetivo, consiste en restringir un poco más a la primera predicción del estado, $z(1; k)$ en términos de la distribución de \mathcal{W} , mientras que el resto de las predicciones $z(2; k), \dots, z(N-1; k), z(N; k)$ están restringidas, según lo presentado anteriormente. Para esto se define un conjunto invariante robusto, de manera tal que, si $z(1; k)$ se encuentra en su interior, el resto de las predicciones sujetas a las restricciones probabilísticas, presentadas anteriormente, no se irán más allá del dominio de atracción del sistema.

Formalmente, en primer lugar, para poder definir el conjunto de restricción de la primera predicción, considérese el conjunto factible \mathcal{C}_N definido como el conjunto de todas las condiciones iniciales (z, v) , tales que las restricciones (6-17)-(6-21) tengan al menos una solución factible, es decir,

$$\mathcal{C}_N = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} z \\ v \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n+m} \\ \left\{ \begin{array}{l} \exists v(1), \dots, v(N-1) \in \mathbb{R}^m \\ z(j+1; k) = Az(j; k) + Bv(j; k) \\ A_x z(j; k) \leq \eta_j, \quad j \in [1, N] \\ A_u v(j; k) \leq \mu_j, \quad j \in [0, N-1] \\ (z(N; k), x_a, u_a) \in \tilde{\Omega}_t^a \end{array} \right. \end{array} \right\}. \quad (6-27)$$

La proyección de \mathcal{C}_N en x , dada por $\mathcal{X}_N = Proj_x(\mathcal{C}_N)$, no es necesariamente un conjunto invariante robusto positivo con respecto al conjunto de perturbaciones \mathcal{W} .

Por lo tanto, deberá calcularse recursivamente, un polígono invariante de control robusto sujeto a \mathcal{C}_N . Para esto, sea $\mathcal{C}_{N,x}^\infty = Proj_x(\mathcal{C}_N^\infty)$, a partir de $\mathcal{C}_{N,x}^0 = \mathcal{X}_N$ se tiene que:

$$\mathcal{C}_{N,x}^{i+1} = \left\{ x \in \mathcal{C}_{N,x}^i \left| \begin{array}{l} \exists u \in \mathbb{R}^m \text{ s.a. } (x, u) \in \mathcal{C}_N \\ Ax + Bu \in \mathcal{C}_{N,x}^i \ominus \mathcal{W} \end{array} \right. \right\},$$

donde, por definición, $\mathcal{C}_{N,x}^\infty = \bigcap_{i=0}^\infty \mathcal{C}_{N,x}^i$.

De esta manera, se puede formular la restricción de primer paso, como $z(1; k) \in \mathcal{C}_{N,x}^\infty \ominus \mathcal{W}$. Asimismo, el conjunto $\mathcal{C}_{N,x}^\infty$ representa el dominio de atracción del controlador derivado del Problema $\mathcal{P}_N(x; \mathbf{v}, x_a, u_a)$.

6.3.2. Estabilidad asintótica en probabilidad y convergencia

En esta sección se estudian las propiedades del sistema a lazo cerrado del controlador propuesto. Se procura demostrar la existencia de un conjunto $\mathcal{C}_{N,x}^\infty$ que es asintóticamente estable en probabilidad para el sistema a lazo cerrado bajo el controlador propuesto.

Para poder garantizar estas propiedades se deberá considerar el siguiente supuesto:

Suposición 6.9. Sea \mathcal{R}_∞ el mínimo conjunto invariante robusto (RPI) (Definición 3.1, del Capítulo 3) para el sistema (6-1) con entrada $u(k) = K(x(k) - x_a) + u_a$, para todo $w(k) \in \mathcal{W}$. Se asume que $\mathcal{R}_\infty \subset \mathcal{X}$.

Teorema 6.10 (Estabilidad asintótica). *Considérese que las Suposiciones 6.7-6.9 se cumplen. Para el sistema (6-1) en lazo cerrado con el controlador propuesto, la región $x_s^{eco} \oplus \mathcal{R}_\infty$ es asintóticamente estable en probabilidad, con un dominio de atracción dado por $\mathcal{C}_{N,x}^\infty$.*

Demostración:

Para probar la estabilidad asintótica, como es habitual en el marco de MPC, primero se debe introducir una solución óptima en el instante de tiempo k y luego una solución candidata factible para el tiempo $k + 1$.

Particularmente, sea la solución óptima del Problema (6-15) en el momento k dada por $(\mathbf{v}^0(k), x_a^0(k), u_a^0(k))$. Asimismo, considérese la solución factible $\tilde{\mathbf{v}}^a(k + 1) = (\tilde{\mathbf{v}}(k + 1), \tilde{x}_a(k + 1), \tilde{u}_a(k + 1))$, con:

$$\tilde{\mathbf{v}}(k + 1) = \{\tilde{v}(0; k + 1), \tilde{v}(1; k + 1), \dots, \tilde{v}(N - 1; k + 1)\} \quad (6-28)$$

$$(\tilde{x}_a(k+1), \tilde{u}_a(k+1)) = (x_a^0(k), u_a^0(k)) \quad (6-29)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{v}(j; k+1) &= v^0(j+1; k) + KA_K^j w(k), \quad j \in \mathbb{I}_{[0:N-2]} \\ \tilde{v}(N-1; k+1) &= K(z(N; k) - x_a^0(k)) + u_a^0(k) + KA_K^{N-1} w(k). \end{aligned}$$

Nótese que, debido a la perturbación w , esta secuencia puede no ser factible en el instante $K+1$.

Luego, en función de [Lorenzen et al., 2017] se puede refinar el ajuste de restricción presentado en las ecuaciones (6-24)-(6-26), para garantizar que la solución candidata sea factible con cierta probabilidad.

Para este objetivo, sea $\varepsilon_f \in [0, 1)$ y sea el conjunto $\mathcal{W}_f \subset W$, de tal manera que $\mathbb{P}_k\{w(k) \in \mathcal{W}_f\} \geq 1 - \varepsilon_f$. Luego, para todo $i \in \mathbb{I}_{1:p}$, $j \in \mathbb{I}_{1:N}$, y $l \in \mathbb{I}_{0:j-1}$ se considera

$$[\hat{\eta}_{l,j}]_i = \min_{w_\kappa \in \mathcal{W}_f} -[A_x]_i \sum_{\kappa=1}^l A_K^{j-\kappa} w_\kappa$$

y se define

$$[\tilde{\eta}_j]_i = \min_{l \in \mathbb{I}_{0:j-1}} \{[\hat{\eta}_{l,j}]_i + [\eta_{j-l}]_i\}$$

y de manera similar se obtiene $\tilde{\mu}_j$, para la restricción de entrada. Usando la misma idea, para la restricción de terminal se considerará

$$\begin{aligned} [\hat{\eta}_{f,l}]_i &= \min_{w_\kappa \in \mathcal{W}_f} -[A_{\Sigma_z}]_i \sum_{\kappa=1}^l A_K^{N-\kappa} w_\kappa, \\ [\eta_{f,l}]_i &= \max_{\eta} \eta, \text{ s.a. } \mathbb{P}_k\{\eta \leq [b_{\Sigma_z}]_i - [A_{\Sigma_z}]_i e(l; k)\} \geq 1 - \varepsilon_f \end{aligned} \quad (6-30)$$

y se define

$$[\tilde{\eta}_f]_i = \min_{l \in \mathbb{I}_{0:N}} \{[\hat{\eta}_{f,l}]_i + [\eta_{f,N-l}]_i\}$$

Factibilidad recursiva

La factibilidad recursiva de las restricciones de estado, entrada y terminal se demuestra en Lema 6.11. La factibilidad recursiva de $z(1; k) \in \mathcal{C}_{N,x}^\infty \ominus \mathcal{W}$ se deriva directamente de la factibilidad recursiva del estado, las entradas y las restricciones de terminal.

Lema 6.11. *[Factibilidad recursiva de la solución candidata.] Deje que la restricción de estado, entrada y terminal en ecuaciones (6-24)-(6-26) esté dada por $\tilde{\eta}_j$, $\tilde{\mu}_j$ y $\tilde{\eta}_f$ en lugar de η_j , μ_j y η_f . Entonces, la solución candidata (6-28) es recursivamente factible con una probabilidad no menor a $1 - \varepsilon_f$.*

Demostración: Dado que la referencia artificial añadida, solo altera la función de costo y la restricción del terminal, la factibilidad recursiva del estado y las restricciones de entrada siguen directamente de [Lorenzen et al., 2017]. La factibilidad recursiva de la restricción del terminal se demuestra en el Lema 6.12, presentado a continuación. ■

Lema 6.12. *[Factibilidad recursiva de la restricción terminal.]*

Para todo $k \geq 0$,

$$(z(N; k), x_a(k), u_a(k)) \in \tilde{\Omega}_t^a,$$

con probabilidad no menor a $1 - \varepsilon_f$.

Demostración: Por los supuestos planteados, se cumple que, con una probabilidad $1 - \varepsilon_f$, $w(k) \in \mathcal{W}_f$, por lo tanto, sólo se requiere demostrar el Lema para $w(k) \in \mathcal{W}_f$. En este caso, para probar la factibilidad recursiva de la restricción terminal, se pueden seguir los mismos argumentos usados para demostrar la factibilidad recursiva robusta de la restricción terminal.

En primer lugar, de la ecuación (6-26) y del hecho de que $w(k) \in \mathcal{W}_f$ se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_t^a &= \tilde{\Sigma}_z \times \Sigma_s = (\Sigma_z \ominus \mathcal{R}_N) \times \Sigma_s \\ &= \Sigma_t \ominus (\mathcal{R}_N \times 0) \end{aligned}$$

donde $\tilde{\Sigma}_z = \{z \in \mathbb{R}^n \mid A_{\Sigma_z} z \leq \tilde{\eta}_f\}$, y \mathcal{R}_N es el conjunto alcanzable en N pasos, que representa la respuesta forzada del sistema debido a la presencia de las perturbaciones, es decir,

$$\mathcal{R}_N \triangleq \bigoplus_{i=0}^{N-1} A_K^i \mathcal{W}_f$$

Dado que, al tiempo k , $(z(N; k), x_a^0(k), u_a^0(k)) \in \tilde{\Omega}_t^a = \Sigma_t \ominus (\mathcal{R}_N \times 0)$, y teniendo en cuenta que, debido a las ecuaciones (6-28), $\tilde{z}(j; k+1) = z(j+1; k) + A_K^j w(k)$, entonces

$$(\tilde{z}(N-1; k+1), \tilde{x}_a(k+1), \tilde{u}_a(k+1)) \in \Sigma_t \ominus (\mathcal{R}_N \times 0) \oplus (A_K^{N-1} \mathcal{W}_f \times 0)$$

Luego, dado que $(\tilde{z}(N; k+1), \tilde{x}_a(k+1), \tilde{u}_a(k+1)) = A_t(\tilde{z}(N-1; k+1), \tilde{x}_a(k+1), \tilde{u}_a(k+1))$, se obtiene

$$(\tilde{z}(N; k+1), \tilde{x}_a(k+1), \tilde{u}_a(k+1)) \in A_t(\Sigma_t \ominus (\mathcal{R}_N \times 0) \oplus (A_K^{N-1} \mathcal{W}_f \times 0)).$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
A_t(\Sigma_t \ominus (\mathcal{R}_N \times 0) \oplus (A_K^{N-1} \mathcal{W}_f \times 0)) &= A_t \Sigma_t \ominus (A_K \mathcal{R}_N \times 0) \oplus (A_K^N \mathcal{W}_f \times 0) \\
&= A_t \Sigma_t \ominus \left(\bigoplus_{j=1}^N A_K^j \mathcal{W}_f \times 0 \right) \oplus (A_K^N \mathcal{W}_f \times 0) \\
&= A_t \Sigma_t \ominus \left(\bigoplus_{j=1}^{N-1} A_K^j \mathcal{W}_f \times 0 \right) \ominus (A_K^N \mathcal{W}_f \times 0) \oplus (A_K^N \mathcal{W}_f \times 0) \\
&\subseteq A_t \Sigma_t \ominus \left(\bigoplus_{j=1}^{N-1} A_K^j \mathcal{W}_f \times 0 \right) \\
&\subseteq (\Sigma_t \ominus (\mathcal{W}_f \times 0)) \ominus \left(\bigoplus_{j=1}^{N-1} A_K^j \mathcal{W}_f \times 0 \right) \\
&= \Sigma_t \ominus \left(\bigoplus_{j=0}^{N-1} A_K^j \mathcal{W}_f \times 0 \right) \\
&= \Sigma_t \ominus (\mathcal{R}_N \times 0)
\end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se produce por el hecho de que $A_t \Sigma_t \oplus (\mathcal{W}_f \times 0) \subseteq \Sigma_t \Leftrightarrow A_t \Sigma_t \subseteq \Sigma_t \ominus (\mathcal{W}_f \times 0)$.

Por lo tanto,

$$(\tilde{z}(N; k+1), \tilde{x}_a(k+1), \tilde{u}_a(k+1)) \in \Sigma_t \ominus (\mathcal{R}_N \times 0) = \tilde{\Omega}_t^a$$

lo que prueba el Lema. ■

Decrecimiento del costo

El valor óptimo de la función de costo en el momento k , debido a la solución óptima al Problema (6-15), se denota como $V_N^0(x(k))$, donde

$$\begin{aligned}
V_N^0(x(k)) &= \sum_{j=0}^{N-1} \|z^0(j; k) - x_a^0(k)\|_Q^2 + \|v^0(j; k) - u_a^0(k)\|_R^2 \\
&\quad + \|z^0(N; k) - x_a^0(k)\|_P^2 + V_O(x_a^0(k), u_a^0(k))
\end{aligned}$$

donde, $z(0; x(k)) = x(k)$, es decir, el estado medido en el instante de tiempo k , y

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^0(k) &= \{v^0(0; k), v^0(1; k), \dots, v^0(N-1; k)\} \\
\mathbf{z}^0(k) &= \{z^0(0; k), z^0(1; k), \dots, z^0(N-1; k), z^0(N; k)\}.
\end{aligned}$$

Esta función de costo óptimo es convexa, continua y cuadrática por partes en $x(k)$. Por lo tanto, existe una constante de Lipschitz, L , para esta función.

Sea definida la solución candidata en el instante de tiempo $k + 1$ como en (6-28). La secuencia de predicciones de estado a partir del estado incierto medido $x(k + 1)$, debido a la secuencia de control candidata $\tilde{\mathbf{v}}(k + 1)$ es

$$\tilde{\mathbf{z}}(k + 1) = \{ \tilde{z}(0; k + 1), \tilde{z}(1; k + 1), \dots, \tilde{z}(N; k + 1) \}$$

donde $\tilde{z}(j; k + 1) = z^0(j + 1; k) + A_K^j w(k)$ para $j \in \mathbb{I}_{[1:N-1]}$ y $\tilde{z}(N; k + 1) = A_K(z^0(N; k) - x_a^0(k)) + x_a^0(k) + A_K^N w(k)$, con $\tilde{z}(0; k + 1) = x(k + 1)$, esto es el estado medido en el instante de tiempo $k + 1$. Nótese que $\tilde{z}(j; k + 1) = A\tilde{z}(j - 1; k + 1) + B\tilde{v}(j - 1; k + 1)$, $j \in \mathbb{I}_{[1:N]}$.

Sobre esta base, el valor óptimo esperado de la función de costo, en el instante $k + 1$, debido a la solución candidata $\tilde{\mathbf{v}}^a(k + 1) = (\tilde{\mathbf{v}}(k + 1), \tilde{x}_a(k + 1), \tilde{u}_a(k + 1))$, está dado por

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_k \left\{ \tilde{V}_N(x(k + 1); \tilde{\mathbf{v}}^a(k + 1)) \right\} = \\ & = \mathbb{E}_k \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \|\tilde{z}(j; x(k + 1)) - \tilde{x}_a(x(k + 1))\|_Q^2 + \|\tilde{v}(j; x(k + 1)) - \tilde{u}_a(x(k + 1))\|_R^2 \right. \\ & \quad \left. + \|\tilde{z}(N; x(k + 1)) - \tilde{x}_a(x(k + 1))\|_P^2 + V_O(\tilde{x}_a(x(k + 1)), \tilde{u}_a(x(k + 1))) \right\} \\ & = \mathbb{E}_k \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \|z^0(j; x(k)) + A_K^{j-1} w(k) - x_a^0(x(k))\|_Q^2 \right. \\ & \quad + \|v^0(j; x(k)) + K A_K^{j-1} w(k) - u_a^0(x(k))\|_R^2 \\ & \quad + \|z^0(N; x(k)) + A_K^{N-1} w(k) - x_a^0(x(k))\|_Q^2 \\ & \quad + \|K(z^0(N; x(k)) - x_a^0(x(k))) + K A_K^{N-1} w(k)\|_R^2 \\ & \quad \left. + \|A_K(z^0(N; x(k)) - x_a^0(x(k))) + A_K^N w(k)\|_P^2 + V_O(x_a^0(x(k)), u_a^0(x(k))) \right\} \\ & = \sum_{j=1}^{N-1} \|z^0(j; x(k)) - x_a^0(x(k))\|_Q^2 + \|v^0(j; x(k)) - u_a^0(x(k))\|_R^2 \\ & \quad + \|z^0(N; x(k)) - x_a^0(x(k))\|_{Q+K'RK}^2 + \|z^0(N; x(k)) - x_a^0(x(k))\|_{A_K'PA_K}^2 \\ & \quad + V_O(x_a^0(x(k)), u_a^0(x(k))) \\ & \quad + \mathbb{E}_k \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \|A_K^{j-1} w(k)\|_{Q+K'RK}^2 + \|A_K^{N-1} w(k)\|_{Q+K'RK}^2 + \|A_K^N w(k)\|_P^2 \right\}. \end{aligned}$$

Comparando este último costo con el costo óptimo en el instante k , se obtiene ²

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_k \left\{ \tilde{V}_N(x(k+1); \tilde{\mathbf{v}}^a(k+1)) \right\} - V_N^0(x(k)) &= \\ &= \|z^0(N; k) - x_a^0(k)\|_{Q+K'RK}^2 + \|z^0(N; k) - x_a^0(k)\|_{A'_K P A_K}^2 \\ &\quad - \|z^0(0; k) - x_a^0(k)\|_Q^2 - \|v^0(0; k) - u_a^0(k)\|_R^2 \\ &\quad - \|z^0(N; k) - x_a^0(k)\|_P^2 \\ &\quad + \mathbb{E}_k \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \|A_K^j w(k)\|_{Q+K'RK}^2 + \|A_K^N w(k)\|_P^2 \right\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $P - A'_K P A_K = Q + K'RK$, y que

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{N-1} A_K^{j'} (Q + K'RK) A_K^{j'} + A_K^{N'} P A_K^N = \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} A_K^{j'} (P - A'_K P A_K) A_K^{j'} + A_K^{N'} P A_K^N \\ &= P - A'_K P A_K + A'_K P A_K - A_K^{2'} P A_K^2 + \dots + A_K^{N-1'} P A_K^{N-1} - A_K^{N'} P A_K^N + A_K^{N'} P A_K^N \\ &= P \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_k \left\{ \tilde{V}_N(x(k+1); \tilde{\mathbf{v}}^a(x(k+1))) \right\} - V_N^0(x(k)) = \\ &= -\|z^0(0; k) - x_a^0(k)\|_Q^2 - \|v^0(0; k) - u_a^0(k)\|_R^2 + \mathbb{E}_k \left\{ \|w(k)\|_P^2 \right\} \\ &= -\|x(k) - x_a^0(k)\|_Q^2 - \|u^0(0; k) - u_a^0(k)\|_R^2 + \mathbb{E}_k \left\{ \|w(k)\|_P^2 \right\} \\ &= -\|x(k) - x_s^{eco}\|_Q^2 - \|u^0(0; k) - u_s^{eco}\|_R^2 + \mathbb{E}_k \left\{ \|w(k)\|_P^2 \right\} \end{aligned}$$

donde la última desigualdad viene dada por los Lemas 6.13-6.14, desarrollados en la Sección 6.6.

Se debe tener en cuenta que la trayectoria de la entrada candidata no permanece factible con la mayor probabilidad ε_f , pero dado que $V_N^0(x(k))$ es continuo, convexo y por partes cuadrático en $x(k)$, existe una constante de Lipschitz L en $C_{N,x}^\infty$ de manera tal que el aumento del costo máximo $V_N(x(k+1)) - V_N(z(1; k))$ puede ser delimitado por $\Psi = L \max_{w \in \mathcal{W}} \|w(k)\|$.

Luego

$$\mathbb{E}_k \left\{ V_N^0(x(k+1)) \right\} - V_N^0(x(k)) \leq (1 - \varepsilon_f) \left(\mathbb{E}_k \left\{ \tilde{V}_N(x(k+1); \tilde{\mathbf{v}}(x(k+1))) \right\} - V_N^0(x(k)) \right)$$

²En lo que sigue, se omitirá la dependencia de x en aras de la claridad, es decir, $v^0(j; k)$ denotará $v^0(j; x(k))$.

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon_f \left(-\|x(k) - x_s^{eco}\|_Q^2 - \|u^0(0; k) - u_s^{eco}\|_R^2 + \Psi \right) \\
\leq & -\|x(k) - x_s^{eco}\|_Q^2 - \|u^0(0; k) - u_s^{eco}\|_R^2 \\
& + (1 - \varepsilon_f) \mathbb{E}_k \{ \|w\|_P^2 \} + \varepsilon_f \Psi.
\end{aligned}$$

Estabilidad

Dado que la solución candidata puede no ser factible con una probabilidad ε_f , para terminar la prueba se necesitan distinguir dos casos posibles:

- (i) Si la solución candidata sigue siendo factible para todos los $k > 0$, entonces utilizando los mismos argumentos que en el caso robusto, se puede probar que el sistema a lazo cerrado es ISS con respecto a las perturbaciones w , y por lo tanto, converge asintóticamente a una región del espacio de estado, dada por $x_s^{eco} \oplus \mathcal{R}_\infty$.
- (ii) Si el supuesto anterior no se cumple, entonces, utilizando los mismos argumentos que [Lorenzen et al., 2017, Lema 2-3] se puede demostrar que, con una probabilidad de $(1 - \rho)$, existe un horizonte suficientemente largo como para que la solución candidata siga siendo factible durante un cierto número de pasos de tiempo consecutivos y entra en el conjunto terminal. Luego, a partir de este instante, por la invariancia de la región terminal, la solución candidata sigue siendo factible y por [Lorenzen et al., 2017, Lema 4] el sistema a lazo cerrado converge a $x_s^{eco} \oplus \mathcal{R}_\infty$.

■

6.3.3. Propiedades del controlador propuesto

El controlador propuesto es una formulación estocástica del MPC para el seguimiento. De esta forma, hereda sus principales propiedades tales como:

- **Optimización de estado estacionario.** La función de costo de offset puede considerarse como un optimizador de punto de equilibrio objetivo (SSTO) integrado en el mismo MPC: el controlador impulsará el sistema en lazo cerrado a una región centrada en el estado estable admisible que minimiza esta función. La función de costo de offset puede asumir diferentes formas, lo que proporciona un comportamiento de lazo cerrado diferente. Además, si una distancia a un punto de equilibrio deseado x_t se

considera una función de costo de compensación, es decir $V_O(x_a, u_a) = \|x_a - x_t\|_q$, con q una cierta norma, entonces el mejor estado estacionario está dado por $x_s^{eco} = x_t$, si x_t es admisible. Si no, entonces por Definición 6.3, el mejor punto de equilibrio será el que minimice dicha distancia, es decir, $x_s^{eco} = \arg \min_{x \in \mathcal{X}_s} \|x - x_t\|_q$.

- **La factibilidad está garantizada para cualquier cambio de consigna o costo económico.** El conjunto de restricciones del controlador propuesto no depende de un punto de ajuste específico, ni del minimizador de la función de costo de offset (x_s^{eco}, u_s^{eco}) . Por lo tanto, se garantiza la factibilidad para cualquier cambio del punto óptimo y para cualquier horizonte de predicción N .
- **Mayor dominio de atracción.** La restricción terminal del controlador propuesto es un conjunto invariante diseñado para *cualquier* punto de equilibrio del sistema. En el MPC estándar, el conjunto invariante se calcula para un punto de equilibrio específico. Por lo tanto, la restricción del terminal y, como consecuencia, el dominio de atracción del controlador propuesto son (potencialmente) más grandes que en el MPC estándar.

6.4. Ejemplo de aplicación: sistema conversor CC-CC

En esta sección, con el objetivo de mostrar las propiedades y los beneficios de la estrategia de MPC+RTO estocástico propuesta, se presentan algunos resultados de simulaciones correspondientes a un sistema convertidor CC-CC, con dinámica no lineal y sujeto a restricciones de estado y entrada, presentadas en [Cannon et al., 2011b, Lorenzen et al., 2017]. En primer lugar, se muestra una breve descripción del sistema considerado. Luego, se presentan los resultados de las simulaciones dinámicas.

6.4.1. Descripción del sistema

Un convertidor CC-CC es un dispositivo que transforma corriente continua de una tensión a otra. Suelen ser reguladores de conmutación, dando a su salida una tensión regulada y, la mayoría de las veces con limitación de corriente.

Los convertidores CC-CC se utilizan en fuentes de alimentación para dispositivos electrónicos para controlar el flujo de energía entre dos sistemas de CC. En particular, los convertidores del tipo Buck-Boost (Figura 6-1) se encuentran frecuentemente en varios procesos, como vehículos eléctricos e híbridos, plantas solares, motores de CC, etc. La propie-

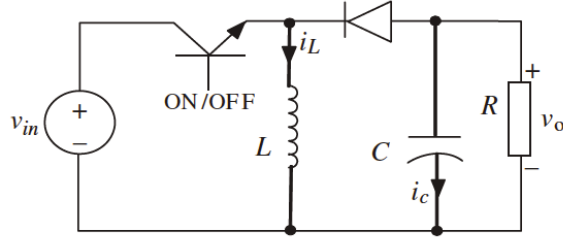


Figura 6-1: Circuito esquemático del convertor CC-CC Buck-Boost.

dad fundamental de esta clase de convertidores es que el voltaje de salida es de signo opuesto al del voltaje a la entrada. En [Lazar et al., 2008] se encuentra un modelo no lineal discreto de un convertidor CC-CC Buck-Boost, que viene dado por:

$$i_L(k+1) = i_L(k) + \frac{T}{L}v_o(k) - \frac{T}{L}(v_o(k) - V_{in})d_c(k) \quad (6-31)$$

$$v_o(k+1) = -\frac{T}{C}i_L(k) + \frac{T}{C}i_L(k)d_c(k) + (1 - \frac{T}{RC})v_o(k) \quad (6-32)$$

donde los estados están representados por la corriente que fluye a través del inductor, i_L y la tensión de salida, v_o , mientras que la entrada d_c es el ciclo de trabajo, es decir, la parte del período de muestreo durante el cual el transistor se mantiene encendido. El período de muestreo es $T = 0.65 \text{ ms}$, y los parámetros del circuito están dados por: inductancia $L = 4.2 \text{ mH}$, capacitancia $C = 2200 \text{ } \mu\text{F}$, resistencia $R = 85 \text{ } \Omega$ y voltaje de entrada $V_{in} = 15 \text{ V}$. Para el punto de operación dado por $i_L^o = 0.389$, $v_o^o = -16$ y $d_c^o = 0.516$, se obtiene un modelo linealizado de la forma:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (6-33)$$

$$y(k) = \Phi x(k)$$

donde $x_1(k) = (i_L(k) - i_L^o)$, $x_2(k) = (v_o(k) - v_o^o)$, $u(k) = (d_c(k) - d_c^o)$ y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{T}{L}(1 - d_c^o) \\ \frac{T}{C}(d_c^o - 1) & 1 - \frac{T}{RC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0075 \\ -0.143 & 0.996 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{T}{L}(V_{in} - v_o^o) \\ \frac{T}{RCV_{in}}v_o^o(v_o^o - V_{in}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.798 \\ 0.115 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para implementar el controlador MPC+RTO estocástico propuesto (SMPCT), se consideran las matrices $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ y $R = 1$ para el costo. La ganancia K ha sido elegida como la del LQR no restringido, obteniendo así:

$$K = \begin{bmatrix} -0.2858 & 0.4910 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1.9074 & -5.0562 \\ -5.0562 & 39.5448 \end{bmatrix}$$

con P solución de la ecuación discreta de Lyapunov $P - (A + BK)'P(A + BK) = Q + K'RK$. Asimismo, se considerará para las perturbaciones una distribución Gaussiana truncada con matriz de covarianza $\Sigma = 0.04^2 I_2$, truncada en $\|w\|_\infty \leq 0.02$.

En los convertidores de potencia prácticos, hay perturbaciones internas que tienen efectos en la dinámica del convertidor y en el rendimiento general. En particular, las fluctuaciones en la corriente del inductor, que surgen debido a variaciones aleatorias en el voltaje de entrada de la fuente, están sujetas a restricciones probabilísticas. Luego, para implementar el MPC estocástico para el esquema de seguimiento, adoptamos las siguientes restricciones en el sistema linealizado:

$$Pr\{\|x_1\|_\infty \leq 2\} \geq 0.8, \quad Pr\{\|x_2\|_\infty \leq 3\} \geq 0.8, \quad \|u\|_\infty \leq 0.2 \quad (6-34)$$

Finalmente, el ajuste de restricciones estocástico se ha implementado utilizando el enfoque de muestreo presentado en [Lorenzen et al., 2017, Sección V], tomando $\epsilon_l = 0.95\epsilon$, $\epsilon_u = 1.05\epsilon$, $\beta = 10^{-4}$.

En lo que sigue, el MPC+RTO estocástico propuesto en el presente trabajo se señalará como SMPCT, mientras que el MPC estocástico presentado en [Lorenzen et al., 2017] se anotará como SMPC.

6.4.2. Dominio de atracción

En las figuras 6-2 y 6-3, el dominio de atracción del controlador propuesto se compara con el SMPC presentado en [Lorenzen et al., 2017], para un horizonte de predicción de $N = 5$ y $N = 8$ respectivamente. Obsérvese que el controlador propuesto proporciona un dominio de atracción más grande que el SMPC. Este resultado se debe al hecho de que el SMPCT tiene una restricción terminal relajada, en el sentido de que el conjunto invariante para seguimiento

está diseñado con respecto a cualquier punto de equilibrio del sistema (6-33), y no sólo con respecto al origen (o cualquier otro punto de referencia específico).

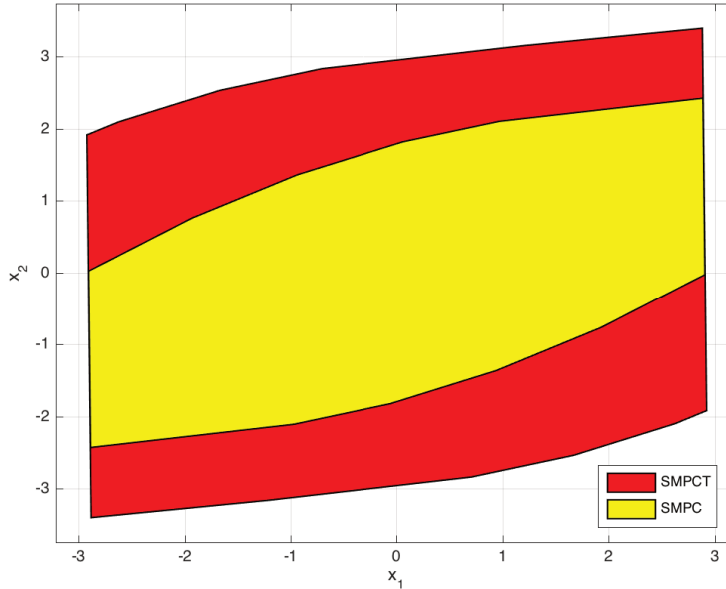


Figura 6-2: Comparación de los dominios de atracción para un horizonte $N = 5$: SMPCT propuesto (rojo) frente a SMPC [Lorenzen et al., 2017] (amarillo).

6.4.3. Rendimiento del controlador para seguimiento

Los objetivos de control, que se desean lograr cuando se utiliza o diseña un convertidor de potencia de CC-CC, es regular el voltaje de salida para estabilizarlo a un valor constante o seguir una señal de referencia dada.

Para probar el controlador propuesto, comenzando desde el estado inicial $x_0 = (2.8, 3.2)$, primero se regula el sistema a un punto de operación, que corresponde a un punto de referencia $y_t^1 = 0$ para el sistema linealizado, y luego se realizan dos cambios en el punto de operación, dados por $y_t^2 = -2.7$ y $y_t^3 = 2.7$. El SMPCT está configurado con un horizonte de predicción $N = 5$ y una función de costo de offset $V_O = \|y_a - y_t\|_F^2$, con $F = 100$ y $y_a = \Phi x_a$. Téngase en cuenta que, como se destacó en la Observación 6.5, la función de costo de offset define el criterio económico que determina el comportamiento a lazo cerrado del sistema y puede asumir diferentes formas. En este ejemplo, se elige como costo de offset una distancia a un punto de referencia de salida.

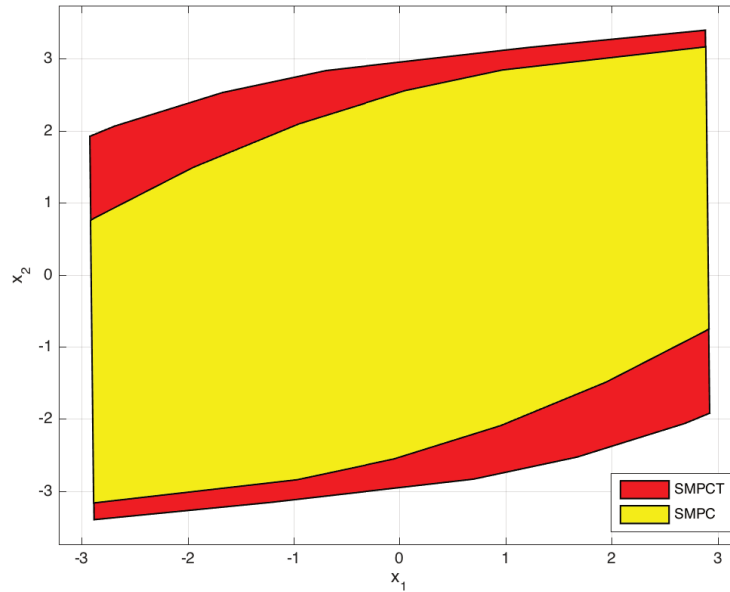


Figura 6-3: Comparación de los dominios de atracción para un horizonte $N = 8$: SMPCT propuesto (rojo) frente a SMPC [Lorenzen et al., 2017] (amarillo).

Las Figuras 6-4 y 6-5 muestran, respectivamente, la evolución del sistema en el espacio de estados para 50 realizaciones de perturbaciones diferentes, y la evolución en el tiempo de la salida y entrada. La evolución en el espacio de estado en la Figura 6-4 muestra claramente la capacidad del controlador propuesto para conducir el sistema a lazo cerrado hacia el punto de referencia deseado, sin perder nunca la factibilidad. De hecho, los puntos de operación $y_t^2 = 2.7$ y $y_t^3 = -2.7$ serían inviables para el SMPC con el horizonte elegido (compárese con la Figura 6-2), por lo tanto, sería necesario detener el controlador, antes de cualquier cambio en el punto de referencia, para volver a configurarlo, mediante el cálculo de un nuevo conjunto terminal. Esto no es necesario con el SMPCT, gracias al uso de la referencia artificial y la restricción terminal relajada. Obsérvese también que el sistema a lazo cerrado converge al mínimo conjunto invariante robusto positivo (RPI) \mathcal{R}_∞ (conjuntos amarillos), centrado en el punto de ajuste deseado.

En cuanto a la violación de restricciones, es evidente en la Figura 6-4 que se permiten algunas violaciones de las mismas. Esta situación también se destaca en la Figura 6-6, donde se traza la evolución del sistema en el espacio de estado a lazo cerrado hacia el primer punto de referencia y_t^1 , para 100 realizaciones de perturbaciones diferentes. La simulación por 10^4

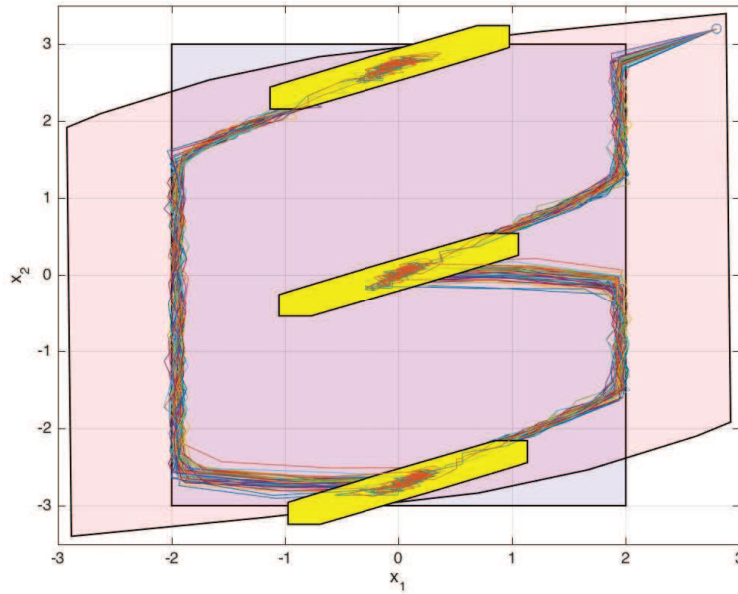


Figura 6-4: Evolución en el espacio de estados para la realización de 50 perturbaciones diferentes. Conjunto azul: restricciones de estado. Conjunto rojo: región factible para $N = 5$. Conjunto amarillo: \mathcal{R}_∞ centrado en el punto de referencia óptimo.

diferentes realizaciones de perturbación, comenzando desde el estado inicial $x_0 = (2.8, 3.2)$, y tomando un horizonte de predicción de $N = 5$, han demostrado que el SMPCT propuesto tiene un comportamiento similar al SMPC, con una violación de restricción promedio de 20% en los primeros 6 pasos de la simulación, que es exactamente la frecuencia de violación aceptable especificada, que muestra que el enfoque propuesto no es excesivamente conservador.

6.5. Conclusiones

En este capítulo, se presentó una nueva formulación estocástica del MPC+RTO, para el caso de sistemas lineales con perturbaciones aditivas y acotadas, basadas en los resultados de [Lorenzen et al., 2017].

La idea general estuvo basada en utilizar la información estocástica sobre la perturbación para proponer un MPC estocástico para el seguimiento capaz de guiar al sistema a un punto de operación óptimo, manteniéndolo a lazo cerrado en una región del espacio de estado

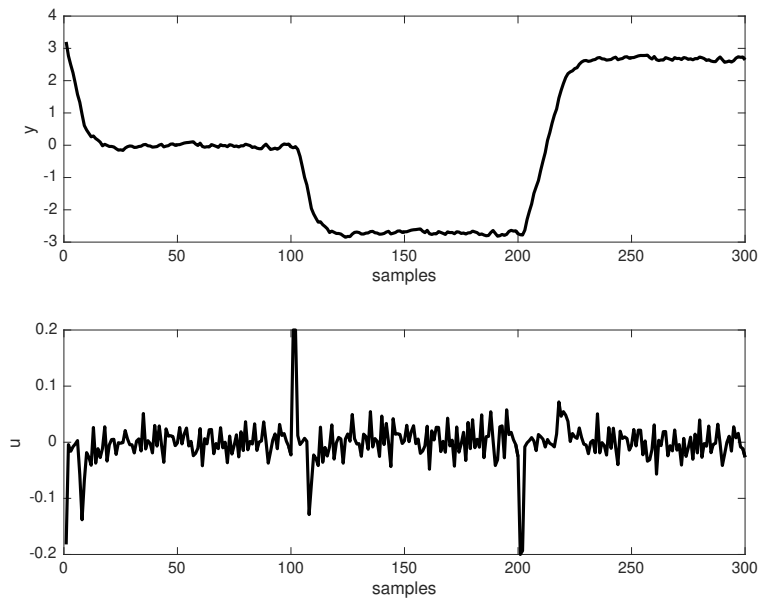


Figura 6-5: Evolución temporal de la salida y y la entrada u

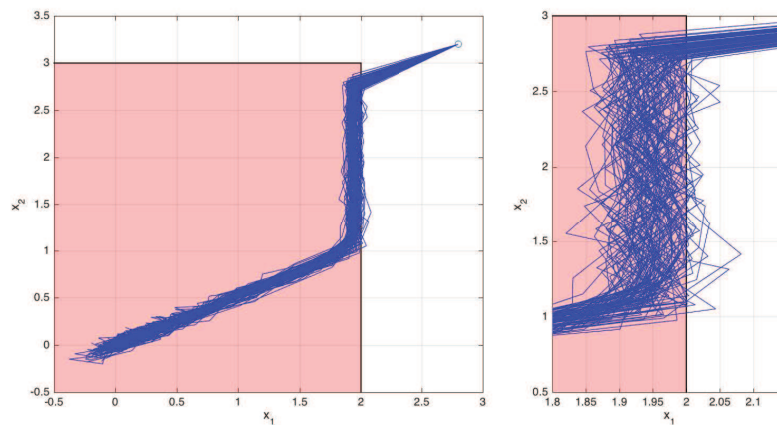


Figura 6-6: Izquierda: evolución en el espacio de estados del sistema a lazo cerrado, para 100 realizaciones de perturbaciones diferentes, comenzando desde el estado inicial $x_0 = (2.8, 3.2)$. Derecha: Trayectorias cerca de la restricción $Pr\{x_1 \leq 2\} \geq 0.8$.

alrededor del punto de equilibrio deseado, dado por mínimo conjunto invariante robusto positivo. Se ha demostrado la estabilidad asintótica (en probabilidad) y la factibilidad recursiva para cualquier realización de la perturbación acotada. Además, el controlador resultante pro-

porciona un mayor dominio de atracción que [Lorenzen et al., 2017], gracias al uso de la referencia artificial y de una restricción terminal relajada.

Los resultados, proporcionados por un ejemplo de simulación en un sistema de convertidor CC-CC, corroboraron los principales beneficios del controlador propuesto.

Los resultados de este Capítulo originaron la presentación de los siguientes trabajos [D’Jorge et al., 2018a, D’Jorge et al., 2018c].

6.6. Apéndice

A continuación se presentan los lemas necesarios para la demostración del Teorema 6.10.

Lema 6.13. *Considérese que las Suposiciones 6.7-6.9 se cumplen y que $w = 0$. Sea x_s^{eco} el estado estable óptimo, de modo que la función $V_N(x; \mathbf{v}, x_a, u_a)$ se minimice. Para todo $x \in \mathcal{X}_N$ y $x_a^0(x) \in \mathcal{X}_s = \text{Proj}_x(\mathcal{Z}_s)$, se define la función $e(x) = x - x_a^0(x)$. Entonces, existe una función- \mathcal{K} , α_e , tal que*

$$\|e(x)\| \geq \alpha_e(\|x - x_s^{eco}\|) \quad (6-35)$$

Demostración: Teniendo en cuenta que, debido a la convexidad, $e(x)$ es una función continua. Además, consideremos estos dos casos.

- I. $\|e(x)\| = 0$ si y sólo si $x = x_s^{eco}$. De hecho, (i) si $e(x) = 0$, entonces $x = x_a^0(x)$, y por el Lema 6.14, esto implica que $x_a^0(x) = x_s^{eco}$; (ii) si $x = x_s^{eco}$, entonces, por optimalidad $x_a^0(x) = x_s^{eco}$, y por consiguiente $x = x_a^0(x)$. Luego, se tiene que $\|e(x)\| = 0$.
- II. $\|e(x)\| > 0$ para todo $\|x - x_s^{eco}\| > 0$. De hecho, para cualquier $x \neq x_s^{eco}$, $\|e(x)\| \neq 0$ y además $\|x - x_s^{eco}\| > 0$. Entonces, $\|e(x)\| > 0$.

Dado que \mathcal{X}_N es compacto, en virtud de lo presentado en [Vidyasagar, 1993, Ch. 5, Lemma 6, pag. 148], se puede afirmar que existe una función- \mathcal{K} , α_e , tal que $\|e(x)\| \geq \alpha_e(\|x - x_s^{eco}\|)$ en el conjunto \mathcal{X}_N . ■

Lema 6.14. *Considérese que las Suposiciones 6.7-6.9 se cumplen y que $w = 0$. Sea la solución óptima al problema $\mathcal{P}_N(x; \mathbf{v}, x_a, u_a)$, al tiempo k , tal que $x(k) = x_a^0(x(k))$, y $u(k) = u_a^0(x(k))$. Sea (x_s^{eco}, u_s^{eco}) el estado estable óptimo, de manera que la función $V_N(x, u)$ se minimice. Entonces $x(k) = x_s^{eco}$, y $u(k) = u_s^{eco}$.*

Bosquejo de demostración: En lo que sigue, la dependencia del tiempo se elimina por motivos de claridad. La idea principal de este Lema es probar que si el sistema converge a un punto de equilibrio x_a^0 , entonces este punto es el estado estable económicamente óptimo, x_s^{eco} . Esto será demostrado por la contradicción. Primero, se supone que el punto estacionario en el momento k no es el óptimo, es decir, que $(x_a^0, u_a^0) \neq (x_s^{eco}, u_s^{eco})$. Por lo tanto, teniendo en cuenta que ambos puntos pertenecen al conjunto convexo \mathcal{Z}_s , se sabe que existe un $\beta \in [0, 1]$ tal que

$$(\hat{x}_s, \hat{u}_s) = \beta(x_a^0, u_a^0) + (1 - \beta)(x_s^{eco}, u_s^{eco})$$

caracteriza un punto estacionario y además

$$V_O(\hat{x}_s, \hat{u}_s) < V_O(x_a^0, u_a^0) \quad (6-36)$$

Es decir, dado que el sistema real no está en el punto óptimo (x_s^{eco}, u_s^{eco}) , es más conveniente avanzar hacia (\hat{x}_s, \hat{u}_s) , que permanecer en (x_a^0, u_a^0) .

La idea principal de la prueba es calcular el costo para pasar de (x_a^0, u_a^0) a (\hat{x}_s, \hat{u}_s) como una función de β . Entonces, al desarrollar el primer término de la última desigualdad, se define una función $W(\beta) = (1 - \beta)^2 \|x_a^0 - x_s^{eco}\|_P^2 + V_O(\hat{x}_s, \hat{u}_s)$, que para $\beta = 1$ es tal que $W(1) = V_O(x_a^0, u_a^0)$.

Siguiendo los mismos argumentos que en el Capítulo 4, se puede mostrar que existe un valor de $\beta \in [0, 1)$ tal que el costo, $W(\beta)$, de mover el sistema de x_a^0 a \hat{x}_s es más pequeño que el costo de permanecer en x_a^0 , es decir, $W(1)$. Esta afirmación contradice la optimalidad de la solución al Problema $\mathcal{P}_N(x; \mathbf{v}, x_a, u_a)$ en el instante k , y por lo tanto, $x = x_a^0 = x_s^{eco}$, y $u = u_a^0 = u_s^{eco}$, lo que prueba el Lema. ■

Capítulo 7

Conclusiones

En esta Tesis se ha abordado el análisis y el diseño de controladores MPC con objetivos económicos, para sistemas lineales con incertidumbre. Varios enfoques fueron abordados tanto en la forma de considerar los objetivos económicos (en régimen transitorio, en régimen estacionario) como en la forma de considerar los efectos de las incertidumbres (robustez explícita, determinística y probabilística), siempre atendiendo a mantener la garantía de estabilidad del lazo, la factibilidad recursiva frente a posibles cambios en el punto de operación, y la optimalidad económica.

Particularmente, el objetivo de esta tesis ha sido el de solventar los diferentes problemas que surgen cuando se desea incorporar objetivos económicos a las formulaciones clásicas de MPC, cuando además se cuenta con incertidumbre de modelado. Como es evidente, la optimalidad económica de una formulación se ve seriamente afectada por el efecto de la incertidumbre, y la forma de considerar la propagación en las predicciones de dicha incertidumbre plantea siempre un desafío teórico de importancia. En esta tesis, se consiguieron explotar diferentes abordajes, que van desde las formas garantistas (uso de restricciones contraídas, a través de la diferencia de Pontryagin, que tienen en cuenta el peor efecto posibles de las perturbaciones a lo largo del horizonte de predicción) hasta formas arbitrariamente no conservadoras (uso de la función de distribución de la incertidumbre para considerar restricciones probabilísticas, es decir restricciones blandas que se pueden violar con una cierta baja probabilidad), que permitieron mantener las ya de por sí complejas condiciones de estabilidad y convergencia de costos que tienen en cuenta criterios económicos no lineales.

Los principales aportes aparecen condensados en los siguientes capítulos:

- Capítulo 4: El controlador MPC económico/estacionario robusto, de una sola etapa, planteado en este capítulo, dio por fin solución al problema de la extensión robusta de

una estrategia altamente aplicable que, sin embargo, estaba diseñada sólo para el caso nominal, debido a cierta complejidad que la aproximación lineal del costo económico estacionario proponía. Más precisamente, se consiguió hacer un uso apropiado, dinámico, del gradiente del costo económico no lineal, que aun en presencia de incertidumbre, origina una secuencia de costos óptimos decrecientes, aún sin ser estos últimos necesariamente óptimos.

- Capítulo 5: En este capítulo, se logró, análogamente a lo hecho en el capítulo anterior, la extensión robusta de la formulación de MPC económico, que en este caso se encarga de la optimalidad económica tanto transitoria como estacionaria. Las dificultades en este contexto son si quiere aun mayores que en el caso del capítulo anterior, dado que los costos de etapa considerados en el MPC son también no lineales. Esto obliga, como indica la literatura, a incluir hipótesis adicionales, que tornan las pruebas de estabilidad menos intuitivas. El valor de la formulación obtenida reside, por tanto, en haber podido plantear las hipótesis adicionales que se requieren en este caso (disipatividad del sistema, etc.) aun en el caso de considerar incertidumbre en el modelo. De este modo, con alguna complejidad extra no significativa en las pruebas correspondientes, se consiguió mantener el decrecimiento del costo óptimo fuera del mínimo conjunto invariante robusto en torno a los puntos de operación económicamente óptimos. Un aporte adicional de este resultado es la obtención de “ingredientes” terminales para el MPC con criterios económicos cambiantes.
- Capítulo 6: La estrategia conocida como MPC para seguimiento (MPCT), de alto impacto en el ámbito de MPC para aplicaciones industriales, y de otros tipos, es bien conocida por sus beneficios a la hora de conservar la factibilidad ante cambios de puntos de operación. Sin embargo, la estrategia (que fue extendida según múltiples necesidades al caso robusto, económico, no lineal, etc.) nunca había sido tratada en el contexto de predicciones y restricciones estocásticas. En este capítulo, justamente, se consiguió dar un primer paso en este sentido, al incorporar explícitamente las distribuciones de probabilidad de la incertidumbre en la formulación. El resultado final ha sido satisfactorio, dado que se lograron mantener todos los beneficios de MPCT, pero de forma menos conservadora, siempre bajo el concepto de estabilidad probabística (en términos de la esperanza estadística). Claramente, las posibles extensiones de esta estrategia son muchas, principalmente si se considera objetivo alcanzar la optimalidad económica.

7.1. Futuras líneas de investigación

En esta tesis se han estudiado con profundidad los aspectos teóricos respecto de la estabilidad y robustez de los controladores predictivos económicos de sistemas lineales con incertidumbres y se han adquirido conocimientos que servirán de base para el análisis de aspectos del control predictivo no abordados en la misma o bien que han quedado abiertos, principalmente orientados a la implementación.

En la actualidad, esta estrategia de control - con vastos fundamentos teóricos - ha demostrado ser idónea no sólo para el control general de procesos industriales (para los cuales fue desarrollada inicialmente), sino también para el control de otros sistemas tan diversos como lo son las aplicaciones mecánicas (control de robots y vehículos aéreos), eléctricas (inversores y demás circuitos de potencia), o aun biomédicas (suministro de medicamentos).

Desde un punto de vista teórico/formal, son numerosos los aspectos a tener en cuenta a la hora de los diseños de MPC para esas aplicaciones particulares. En concordancia/continuidad con las líneas de investigación y lo hecho en la presente tesis los temas que serán extendidos y aplicados en las futuras líneas de investigación son:

- **MPC Económico: extensión al caso estocástico.**

El objetivo general del plan consiste en el estudio y desarrollo de estrategias de control predictivo, con incorporación de objetivos adicionales a los del control dinámico con restricciones. Estos objetivos adicionales, que son los que justamente darían aplicabilidad a los desarrollos, incluyen objetivos de tipo económico (fundamentales en las estructuras estudiadas), objetivos de robustez estocástica, frente a perturbaciones/ruidos aditivos de tipo estocástico o probabilístico, y muchos otros de índole técnica (factibilidad ante cambios frecuentes de puntos de operación, mejora de la optimalidad, reducción del costo y tiempo computacional, programación en microprocesadores embebidos, etc.). Los aportes realizados en la labor de la tesis de doctorado, son un punto de salida ideal para la investigación.

Directamente relacionado con lo anterior, es el tema de la formulación estocástica de MPC económico. La ventaja principal de esta formulación es que a las restricciones duras de estados, las cuales limitan en demasía el dominio de atracción del controlador en presencia de perturbaciones aditivas, se las considera en este caso como restricciones probabilísticas, es decir, se admite una cierta (baja) probabilidad de no poderlas satisfacer. Esto permite relajar mucho las restricciones del problema de control, gene-

rando un dominio de atracción ampliado. Es muy desafiante y es de gran relevancia en la comunidad del Control Predictivo, como demuestran la gran cantidad de publicaciones que se han realizado en los últimos años relativas a este tema.

■ **MPC Económico: exploración de la problemática no lineal.**

Uno de los problemas principales de la estructura de control jerárquica es la diferencia entre los modelos no lineales estacionarios y exactos utilizados por los optimizadores RTO, y los modelos lineales simples utilizados para las predicciones en el MPC. Si bien desde un punto de vista industrial es mucho más sencillo identificar y utilizar modelos lineales, desde un punto de vista teórico es muchísimo más interesante proponer controladores predictivos que usen modelos de predicción no lineales, lo más parecidos posible a los del RTO. De esta manera se reducen sensiblemente las diferencias entre planta y modelo. Este marco es conocido como MPC no lineal. Dada la problemática planteada, el primer objetivo a cumplir será el de proponer formulaciones de control predictivo no lineal con inclusión de objetivos económicos. Asimismo, es sabido que utilizar modelos no lineales conlleva un aumento considerable de la carga computacional, con lo cual otro objetivo será proponer métodos subóptimos de solución del problema de optimización, que sigan garantizando las propiedades fundamentales, tales como la estabilidad, factibilidad y convergencia al punto óptimo deseado.

■ **MPC Económico: aplicaciones.**

Numerosas son las aplicaciones de esta interesante técnica de control. En particular, y en concordancia con las líneas de investigación del grupo de trabajo, dentro del amplio campo de aplicaciones, los objetivos se centran en:

● *Aplicaciones Biomédicas.*

Dada la naturaleza no lineal de los modelos existentes, referentes a diferentes sistemas biomédicos (particularmente enfermedades infecciosas), y continuando con la línea de investigación del grupo de trabajo, se plantea como objetivo aplicar los controladores diseñados, teniendo en cuenta las técnicas desarrolladas con anterioridad, para estos casos en particular.

● *Sistemas cyber-físicos*

Los sistemas ciber-físicos (CPS) están formados por sistemas digitales distribuidos e interconectados, implementados en sistemas físicos dinámicos con un grado de autonomía cada vez mayor, los cuales tienen que satisfacer una multitud

de restricciones de seguridad, eficiencia energética, desempeño, tamaño y costes. En particular, siendo que el Dr. Daniel Limon (Profesor en la Universidad de Sevilla, España) se encuentra trabajando en sistemas de distribución y tratamiento de agua, eficiencia energética en edificios inteligentes y sistemas de generación de energía renovable, y dada la vinculación existente dentro del proyecto “Operación Económica Basada en Datos de Sistemas Cyber-Físicos”, se plantea como objetivo aplicar los controladores diseñados para estos casos.

- *Vehículos aéreos no tripulados*

Los vehículos aéreos no tripulados (en inglés conocidos como UAV's - Unmanned Aerial Vehicles) han despertado un gran interés en el área de control automático en las últimas décadas. Varios campos del control y de la robótica, como por ejemplo la fusión de sensores, técnicas de visión por computador, estimadores de estado y metodologías de control, han sido investigados para mejorar el comportamiento de estos sistemas. Los UAV's han sido utilizados tanto en el ámbito militar como en el civil, centrándose en las tareas de búsqueda y rescate, exploración de edificios, seguridad, inspección y cinematografía aérea, así como para maniobras acrobáticas. Es de destacar, además, que los UAV's son muy útiles, sobre todo, cuando estas tareas son ejecutadas en entornos peligrosos e inaccesibles. El desarrollo de sistemas de control para este tipo de vehículos no es trivial. Los UAV's tienen un comportamiento altamente no lineal y variante en el tiempo y están constantemente afectados por perturbaciones aerodinámicas. Además el objetivo de control de estos sistemas se basa en criterios económicos que van desde el aumento de la autonomía de vuelo, hasta la optimización de la trayectoria con el fin de evitar posible obstáculos. Por lo tanto, la estrategias de control avanzado, resultados de la investigación desarrollada para esta tesis, aparecen adecuadas para ser aplicadas a estos sistemas.

Bibliografía

- [Actis et al., 2017] Actis, M., Anderson, A., and D’Jorge, A. (2017). MPC para sistemas lineales con máximo dominio de atracción. *UMA*.
- [Adetola and Guay, 2010] Adetola, V. and Guay, M. (2010). Integration of real-time optimization and model predictive control. *Journal of Process Control*, 20(2):125–133.
- [Alamo et al., 2014] Alamo, T., Ferramosca, A., González, A. H., Limon, D., and Odloak, D. (2014). A gradient-based strategy for the one-layer RTO+MPC controller. *Journal of Process Control*, 24(4):435–447.
- [Alvarado, 2007] Alvarado, I. (2007). *Model Predictive Control for Tracking Constrained Linear Systems*. PhD thesis, Univ. de Sevilla.
- [Alvarado et al., 2011] Alvarado, I., Limon, D., Muñoz de la Peña, D., Maestre, J. M., Ridao, M. A., Scheu, H., Marquardt, W., Negenborn, R. R., Schutter, B. D., Valencia, F., and Espinosa, J. (2011). A comparative analysis of distributed MPC techniques applied to the HD-MPC four-tank benchmark. *Journal of Process Control*, 21:800–815.
- [Amrit, 2011] Amrit, R. (2011). *Optimizing Process Economics in Model Predictive Control*. PhD thesis, University of Wisconsin, Madison.
- [Amrit et al., 2011] Amrit, R., Rawlings, J. B., and Angeli, D. (2011). Economic optimization using model predictive control with a terminal cost. *Annual Reviews in Control*, 35(2):178–186.
- [Anderson et al., 2018a] Anderson, A., D’Jorge, A., Actis, M., González, G., and Ferramosca, A. (Submitted 2018a). MPC for tracking with maximum domain of attraction for any predicted horizon. *Automática*.

- [Anderson et al., 2018b] Anderson, A., D’Jorge, A., Ferramosca, A., Kofman, E., and González, A. (2018b). i-steps closed-loop sets for constrained linear systems under model predictive control. *Asociación Argentina de Control Automáticos*.
- [Anderson et al., 2018c] Anderson, A., González, A. H., Ferramosca, A., D’Jorge, A., and Kofman, E. (2018c). Robust mpc suitable for closed-loop re-identification, based on probabilistic invariant sets. *Systems & Control Letters*.
- [Angeli et al., 2012] Angeli, D., Amrit, R., and Rawlings, J. B. (2012). On average performance and stability of economic model predictive control. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 57(7):1615–1626.
- [Angeli et al., 2015] Angeli, D., Casavola, A., and Tedesco, F. (2015). Economic model predictive control with parameter-varying cost and guaranteed average performance. In *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4314–4319.
- [Biegler, 2009] Biegler, L. T. (2009). Technology advances for dynamic real-time optimization. *Computer Aided Chemical Engineering - 10th International Symposium on Process Systems Engineering*, 27:1–6.
- [Camacho and Bordons, 1999] Camacho, E. F. and Bordons, C. (1999). *Model Predictive Control*. Springer-Verlag, 1 edition.
- [Cannon et al., 2011a] Cannon, M., Buerger, J., Kouvaritakis, B., and Rakovic, S. (2011a). Robust tubes in nonlinear model predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(8):1942–1947.
- [Cannon and Kouvaritakis, 2016] Cannon, M. and Kouvaritakis, B. (2016). Model predictive control—classical, robust and stochastic.
- [Cannon et al., 2011b] Cannon, M., Kouvaritakis, B., Rakovic, S. V., and Cheng, Q. (2011b). Stochastic tubes in model predictive control with probabilistic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(1):194–200.
- [Cannon et al., 2009] Cannon, M., Kouvaritakis, B., and Wu, X. (2009). Model predictive control for systems with stochastic multiplicative uncertainty and probabilistic constraints. *Automatica*, 45(1):167–172.

- [Chisci et al., 2001] Chisci, L., Rossiter, J. A., and Zappa, G. (2001). Systems with persistent disturbances: predictive control with restricted constraints. *Automatica*, 37:1019–1028.
- [De Nicolao et al., 1998] De Nicolao, G., Magni, L., and Scattolini, R. (1998). Stabilizing receding-horizon control of non-linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43:1030–1036.
- [De Souza et al., 2010] De Souza, G., Odloak, D., and Zanin, A. C. (2010). Real time optimization (RTO) with model predictive control (MPC). *Computers and Chemical Engineering*, 34(12):1999–2006.
- [Di Cairano et al., 2014] Di Cairano, S., Bernardini, D., Bemporad, A., and Kolmanovsky, I. V. (2014). Stochastic mpc with learning for driver-predictive vehicle control and its application to hev energy management. *IEEE Trans. Control Systems Technology*, 22(3):1018–1031.
- [Diehl et al., 2011] Diehl, M., Amrit, R., and Rawlings, J. B. (2011). A Lyapunov function for Economic Optimizing Model Predictive Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(3):703 –707.
- [D’Jorge et al., 2018a] D’Jorge, A., Anderson, A., González, A., and Ferramosca, A. (2018a). Robust and stochastic MPC for tracking: a performance comparison. *Asociación Argentina de Control Automáticos*.
- [D’Jorge et al., 2016] D’Jorge, A., Anderson, A., González, A. H., and Ferramosca, A. (2016). A robust economic MPC for changing economic criterion. *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications, CCA 2016*.
- [D’Jorge et al., 2018b] D’Jorge, A., Anderson, A., González, A. H., and Ferramosca, A. (2018b). A robust economic MPC for changing economic criterion. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*.
- [D’Jorge et al., 2015] D’Jorge, A., Ferramosca, A., and González, A. H. (2015). A robust gradient-based MPC for integrating real time optimizer (RTO) with control. *Actas de la XVI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control (RPIC)*.

- [D’Jorge et al., 2017] D’Jorge, A., Ferramosca, A., and González, A. H. (2017). A robust gradient-based mpc for integrating real time optimizer (RTO) with control. *Journal of Process Control*, 54:65–80.
- [D’Jorge et al., 2018c] D’Jorge, A., Santoro, B. F., González, A. H., Anderson, A., and Ferramosca, A. (Submitted 2018c). Stochastic MPC for tracking. *Optimal Control Applications and Methods*.
- [Ellis and Christofides, 2013] Ellis, M. and Christofides, P. D. (2013). Integrating dynamic economic optimization and model predictive control for optimal operation of nonlinear process systems. *Control Engineering Practice*.
- [Ellis et al., 2014] Ellis, M., Durand, H., and Christofides, P. D. (2014). A tutorial review of economic model predictive control methods. *Journal of Process Control*, 24(8):1156–1178.
- [Engell, 2007] Engell, S. (2007). Feedback control for optimal process operation. *Journal of Process Control*, 17(3):203–219.
- [Fagiano and Teel, 2013] Fagiano, L. and Teel, A. R. (2013). Generalized terminal state constraint for model predictive control. *Automatica*, 49(9):2622–2631.
- [Ferramosca et al., 2014a] Ferramosca, A., González, A. H., Limón, D., and Odloak, D. (2014a). One-layer robust MPC: a multi-model approach. In *19th IFAC World Congress*, pages 11067–11072, Cape Town, South Africa.
- [Ferramosca et al., 2009] Ferramosca, A., Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., and Camacho, E. F. (2009). MPC for tracking with optimal closed-loop performance. *Automatica*, 45(8):1975–1978.
- [Ferramosca et al., 2014b] Ferramosca, A., Limon, D., and Camacho, E. F. (2014b). Economic MPC for a Changing Economic Criterion for Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(10):2657–2667.
- [Ferramosca et al., 2012] Ferramosca, A., Limon, D., González, A. H., Alvarado, I., and Camacho, E. F. (2012). Robust MPC for tracking zone regions based on nominal predictions. *Journal of Process Control*, 22(10):1966–1974.

- [Ferramosca et al., 2010a] Ferramosca, A., Limon, D., González, A. H., Odloak, D., and Camacho, E. F. (2010a). MPC for tracking zone regions. *Journal of Process Control*, 20(4):506–516.
- [Ferramosca et al., 2010b] Ferramosca, A., Rawlings, J. B., Limon, D., and Camacho, E. F. (2010b). Economic MPC for a changing economic criterion. In *Proceedings of 49th IEEE Conference on Decision and Control, CDC 2010*, Atlanta, GE, USA.
- [Gonzalez and Odloak, 2009] Gonzalez, A. H. and Odloak, D. (2009). A stable MPC with zone control. *Journal of Process Control*, 19(1):110–122.
- [Grüne, 2013] Grüne, L. (2013). Economic receding horizon control without terminal constraints. *Automatica*, 49(3):725–734.
- [Heidarinejad et al., 2012] Heidarinejad, M., Liu, J., and Christofides, P. D. (2012). Economic model predictive control of nonlinear process systems using lyapunov techniques. *AIChE Journal*, 58(3):855–870.
- [Jiang et al., 1999] Jiang, Z. P., Sontag, E., and Wang, Y. (1999). Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems. In *Proceedings of the IFAC World Congress*.
- [Jiang and Wang, 2001] Jiang, Z.-P. and Wang, Y. (2001). Input-to-state stability for discrete-time nonlinear systems. *Automatica*, 37:857–869.
- [Johansson, 2000] Johansson, K. H. (2000). The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, 8:456–465.
- [Kolmanovsky and Gilbert, 1998] Kolmanovsky, I. and Gilbert, E. G. (1998). Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete-time linear systems. *Mathematical Problems in Engineering: Theory, Methods and Applications*, 4:317–367.
- [Korda et al., 2011] Korda, M., Gondhalekar, R., Cigler, J., and Oldewurtel, F. (2011). Strongly feasible stochastic model predictive control. In *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, pages 1245–1251.
- [Kouvaritakis et al., 2010] Kouvaritakis, B., Cannon, M., Raković, S. V., and Cheng, Q. (2010). Explicit use of probabilistic distributions in linear predictive control. *Automatica*, 46(10):1719–1724.

- [Lazar et al., 2008] Lazar, M., Heemels, W. P. M. H., Roset, B. J. P., Nijmeijer, H., and van den Bosch, P. P. J. (2008). Input-to-state stabilizing sub-optimal NMPC with an application to DC–DC converters. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(8):890–904.
- [Limon et al., 2005] Limon, D., Alamo, T., and Camacho, E. F. (2005). Enlarging the domain of attraction of MPC controllers. *Automatica*, 41:629–645.
- [Limon et al., 2013] Limon, D., Alamo, T., Pereira, M., Ferramosca, A., González, A. H., and Odloak, D. (2013). Integrating the RTO in the MPC: an adaptive gradient-based approach. In *Proceedings of the European Control Conference*, pages 7–12, Zürich, Switzerland.
- [Limon et al., 2009] Limon, D., Alamo, T., Raimondo, D. M., de la Peña, D. M., Bravo, J. M., Ferramosca, A., and Camacho, E. F. (2009). Input-to-state stability: an unifying framework for robust model predictive control. In Magni, L., Raimondo, D. M., and Allgöwer, F., editors, *Nonlinear Model Predictive Control - Towards New Challenging Applications*, pages 1–26. Springer.
- [Limon et al., 2008] Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., and Camacho, E. F. (2008). MPC for tracking of piece-wise constant references for constrained linear systems. *Automatica*, 44(9):2382–2387.
- [Limon et al., 2010] Limon, D., Alvarado, I., Alamo, T., and Camacho, E. F. (2010). Robust tube-based MPC for tracking of constrained linear systems with additive disturbances. *JPC*, 20:248–260.
- [Lorenzen et al., 2017] Lorenzen, M., Dabbene, F., Tempo, R., and Allgöwer, F. (2017). Constraint-tightening and stability in stochastic model predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(7):3165–3177.
- [M. Farina and Scattolini, 2016] M. Farina, L. G. and Scattolini, R. (2016). “stochastic linear model predictive control with chance constraints—a review. *Journal Process Control*.
- [Ma et al., 2015] Ma, Y., Matusko, J., and Borrelli, F. (2015). Stochastic model predictive control for building hvac systems: Complexity and conservatism. *IEEE Trans. Control Systems Technology*, 23(1):101–116.

- [Marchetti et al., 2014] Marchetti, A. G., Ferramosca, A., and González, A. H. (2014). Steady-state target optimization designs for integrating real-time optimization and model predictive control. *Journal of Process Control*, 24(1):129–145.
- [Mayne, 2016] Mayne, D. (2016). Robust and stochastic model predictive control: Are we going in the right direction? *Annual Reviews in Control*, 41:184–192.
- [Mayne, 2014] Mayne, D. Q. (2014). Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*, 50(12):2967–2986.
- [Mayne et al., 2000] Mayne, D. Q., Rawlings, J. B., Rao, C. V., and Scokaert, P. O. M. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6):789–814.
- [Mayne et al., 2005] Mayne, D. Q., Seron, M. M., and Rakovic, S. V. (2005). Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances. *Automatica*, 41:219–224.
- [Michalska and Mayne, 1993] Michalska, H. and Mayne, D. Q. (1993). Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(11):1623–1633.
- [Müller et al., 2014a] Müller, M. A., Angeli, D., and Allgöwer, F. (2014a). Transient average constraints in economic model predictive control. *Automatica*, 50(11):2943–2950.
- [Müller et al., 2015] Müller, M. A., Angeli, D., and Allgöwer, F. (2015). On necessity and robustness of dissipativity in economic model predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(6):1671–1676.
- [Müller et al., 2014b] Müller, M. A., Angeli, D., Allgöwer, F., Amrit, R., and Rawlings, J. B. (2014b). Convergence in economic model predictive control with average constraints. *Automatica*, 50(12):3100–3111.
- [Müller et al., 2015] Müller, M. A., Grüne, L., and Allgöwer, F. (2015). On the role of dissipativity in economic model predictive control. *IFAC-PapersOnLine*, 48(23):110–116.
- [Muske, 1997] Muske, K. (1997). Steady-state target optimization in linear model predictive control. In *Proceedings of the ACC*.

- [Oldewurtel et al., 2010] Oldewurtel, F., Parisio, A., Jones, C., Morari, M., Gyalistras, D., Gwerder, M., Stauch, V., Lehmann, B., and Wirth, K. (2010). Energy efficient building climate control using stochastic model predictive control and weather predictions. In *Proceedings of the 2010 American control conference*, Proceedings of the 2010 American control conference, pages 5100–5105.
- [Oldewurtel et al., 2012] Oldewurtel, F., Parisio, A., Jones, C. N., Gyalistras, D., Gwerder, M., Stauch, V., Lehmann, B., and Morari, M. (2012). Use of model predictive control and weather forecasts for energy efficient building climate control. *Energy and Buildings*, 45:15–27.
- [Olivares et al., 2015] Olivares, D. E., Lara, J. D., Cañizares, C. A., and Kazerani, M. (2015). Stochastic-predictive energy management system for isolated microgrids. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 6(6):2681–2693.
- [Pannocchia and Kerrigan, 2003] Pannocchia, G. and Kerrigan, E. C. (2003). Offset-free receding horizon control of constrained linear systems subject to time-varying set points and persistent unmeasured disturbances. Technical Report CUED/F-INFENG/TR.468, Department of Engineering. University of Cambridge.
- [Patrinos et al., 2011] Patrinos, P., Trimboli, S., and Bemporad, A. (2011). Stochastic mpc for real-time market-based optimal power dispatch. In *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, Proceedings of 2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), pages 7111–7116.
- [Paulson et al., 2018] Paulson, J. A., Santos, T. L. M., and Mesbah, A. (2018). Mixed stochastic-deterministic tube mpc for offset-free tracking in the presence of plant-model mismatch. *Journal of Process Control*. In press. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2018.04.010>.
- [Rao and Rawlings, 1999] Rao, C. V. and Rawlings, J. B. (1999). Steady states and constraints in model predictive control. *AIChE Journal*, 45(6):1266–1278.
- [Rawlings et al., 2012] Rawlings, J. B., Angeli, D., and Bates, C. N. (2012). Fundamentals of Economic Model Predictive Control. In *Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 3851–3861.

- [Rawlings and Mayne, 2009] Rawlings, J. B. and Mayne, D. Q. (2009). *Model Predictive Control: Theory and Design*. Nob-Hill Publishing, 1st edition.
- [Santos et al., 2018] Santos, T. L. M., Paulson, J. A., and Mesbah, A. (2018). Stochastic model predictive control with enlarged domain of attraction for offset-free tracking. In *Proceedings of the 2018 Annual American Control Conference (ACC)*, Proceedings of the 2018 Annual American Control Conference (ACC), pages 742–748, Milwaukee, Wisconsin, USA.
- [Sontag, 1989] Sontag, E. D. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34:435–443.
- [Su et al., 2014] Su, W., Wang, J., and Roh, J. (2014). Stochastic energy scheduling in microgrids with intermittent renewable energy resources. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 5(4):1876–1883.
- [Vidyasagar, 1993] Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear Systems Theory*. Prentice-Hall, 2 edition.
- [Würth et al., 2009] Würth, L., Rawlings, J. B., and Marquardt, W. (2009). Economic dynamic real-time optimization and nonlinear model predictive control on infinite horizons. In *Proceedings of the International Symposium on Advanced Control of Chemical Process*, Istanbul, Turkey.
- [X. Zhang and Lygeros, 2013] X. Zhang, K. Margellos, P. G. and Lygeros, J. (2013). Stochastic model predictive control using a combination of randomized and robust optimization. *Proc. IEEE Conf. Decision Control*.
- [Ying and Joseph, 1999] Ying, C. M. and Joseph, B. (1999). Performance and stability analysis of LP-MPC and QP-MPC cascade control systems. *AIChE Journal*, 45(7):1521–1534.
- [Zanin et al., 2002] Zanin, A. C., de Gouva, M. T., and Odloak, D. (2002). Integrating real time optimization into the model predictive controller of the FCC system. *Control Engineering Practice*, 10(8):819–831.
- [Zanon et al., 2014] Zanon, M., Gros, S., and Diehl, M. (2014). Local properties of economic nmpe, dissipativity and dynamic programming. In *Decision and Control (CDC), 2014 IEEE 53rd Annual Conference on*, pages 2746–2751.

- [Zavala et al., 2009] Zavala, V. M., Constantinescu, E. M., Krause, T., and Anitescu, M. (2009). On-line economic optimization of energy systems using weather forecast information. *Journal of Process Control*, 19(10):1725–1736.
- [Zeng and Wang, 2015] Zeng, X. and Wang, J. (2015). A parallel hybrid electric vehicle energy management strategy using stochastic model predictive control with road grade preview. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(6):2416–2423.