

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL



FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN DE MÉTODOS COMPUTACIONALES

MECÁNICA DE FRACTURA DETERMINISTA: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE SIMULACIÓN NUMÉRICA

ING. CIVIL ANGEL CIARBONETTI

Tesis remitida al comité Académico de Doctorado
como requisito para la obtención del grado de

Doctor en Ingeniería

Mención Mecánica Computacional

de la

Universidad Nacional del Litoral

2015



a mis padres

Agradecimientos

A las instituciones que permitieron el desarrollo de esta tesis: a la Autoridad Regulatoria Nuclear (ARN), que financió este desarrollo a través de su programa de becas doctorales; a la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hidricas (FICH-UNL) que me ha permitido enmarcar esta tesis dentro de su programa de postgrado; al Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC) que me brindó las herramientas y lugar de trabajo.

Estoy mas que agradecido a mis directores, Alfredo Huespe y Pablo Sánchez, por el tiempo dedicado, su buena disposición para transmitir sus conocimientos y su constante apoyo en las dificultades que hayan surgido. Sin su dedicación, no hubiera sido posible lograr crecer en mi formación y llegar a concluir esta tesis.

Quiero agradecer también al Prof. Fernando Duda, de la Universidade Federal de Rio de Janeiro, por haberme permitido trabajar con él en mi breve estancia en Brasil.

A mis compañeros y personal de CIMEC, que han compartido su día a día conmigo, haciendo más amenas las largas horas de trabajo.

A mis padres, a quienes dedico este trabajo, por sus enseñanzas a lo largo de toda mi vida, al resto de mi familia, por el constante apoyo y a Dios...

Motivación y Objetivos

Motivación

La motivación de este trabajo parte del siguiente interrogante:

¿Qué permite estudiar la mecánica de fractura?

La mecánica de fractura permite el estudiar la estabilidad de materiales o elementos estructurales, considerando la existencia de defectos, en este caso la presencia de una fisura. Considerar la presencia de una fisura permite establecer criterios de falla que dependan de ésta. Es decir:

*Para que una fisura **propague** debe **superarse** cierto valor límite definido para el material.*

Objetivos principales

- ✓ **Aplicar los conceptos de mecánica de fractura en modelos numéricos.** Éstos junto a los criterios más clásicos como son: el factor de intensidad de tensiones y la *Integral-J*, aún en la actualidad tienen un rol fundamental en la resolución de problemas de mecánica de fractura ya sea de diseño o de verificación. Es por ello que es fundamental su aplicación en el área numérica.
- ✓ **Desarrollar e implementar modelos para analizar y predecir la evolución de fisuras.** En simulación numérica uno de los fenómenos más importantes de estudiar asociado a la mecánica de fractura, es la propagación de fisuras. En este sentido se espera desarrollar un modelo **numérico** capaz de predecir y estudiar dicho fenómeno.
- ✓ **Estudio de problemas de mecánica de fractura en forma integral.** En este sentido se espera desarrollar capacidades y una metodología numérica que sea capaz de estudiar el problema de fractura ya sea desde un punto de vista de evaluación crítica de una fisura existente, como así también el estudio de la evolución de ésta en condiciones de propagación, o incluso el desarrollo de fisuras o defectos desde cero.
- ✓ **Realizar aportes en el área científica.** A través de publicaciones y del presente trabajo como tal.

Resumen

Esta tesis trata sobre distintos métodos numéricos aplicables a la mecánica de fractura determinista y basados en la técnica de elementos finitos.

Dentro de esta temática se estudian dos aspectos que se describen a seguir:

a) Evaluación de parámetros que predicen la estabilidad de fisuras preexistentes

El estudio se refiere a la estimación de parámetros fractomecánicos clásicos que resultan ser la base para el cálculo y predicción de la integridad estructural ante el problema de fisuras preexistentes en medios sólidos. Si bien se trata de conceptos y criterios convencionales, su evaluación continúa siendo un problema de gran importancia en aplicaciones tecnológicas.

Esta primera parte de la tesis se desarrolla en los siguientes capítulos: **Capítulo 1** Introducción teórica sobre las definiciones clásicas de la mecánica de fractura y las metodologías numéricas consideradas clásicas para la determinación del factor de intensidad de tensiones. **Capítulo 2:** Presentación de una metodología más reciente para la determinación de estos parámetros a través de la evaluación de fuerzas configuracionales. Este capítulo centra su desarrollo en la mecánica de fractura lineal elástica, esto permite por lo tanto hacer una evaluación sobre las ventajas y contras de utilizar técnicas numéricas convencionales frente a la metodología que aquí se presenta. En el **Capítulo 3**, se extiende el modelo de fuerzas configuracionales a medios con comportamiento elasto plástico.

b) Problemas de generación de nuevas fisuras y su propagación en sólidos.

Este segundo aspecto aborda el problema de generación y propagación de fisura a través de técnicas numéricas innovadoras. El problema de generación de nuevas fisuras está excluido de los alcances de la mecánica de fractura clásica. Aquí, el problema es aproximado mediante una técnica novedosa que además permite analizar el comportamiento estructural durante la etapa de propagación de fisuras. Se consideran especialmente medios elasto-plásticos que muestran fractura frágil.

Esta segunda parte de la tesis se desarrolla en los siguientes capítulos: **Capítulo 4** presenta un modelo del continuo enmarcado dentro de los modelos de gradiente de daño, el modelo de campo de fase. En el **Capítulo 5** se presenta una validación del modelo de campo de fase a través de ensayos experimentales en probetas de PMMA.

En el **Capítulo 6**, se presenta una generalización del modelo de campo de fase, para el estudio de propagación de fisuras en medios elasto plásticos, logrando con este análisis evaluar fenómenos típicos de fractura por clivaje.

La contribución más relevante de esta tesis se centra en los desarrollos ejecutados tanto con la aplicación de la técnica de fuerzas configuracionales en medios elastoplásticos, como en los modelos de campo de fase para evaluar diversos tipos de problemas en mecánica de fractura. Algunos autores consideran al modelo de campo de fase, presentado en los Capítulos 4 y 6, como una extensión directa de modelos de daño continuo, no local, de los cuales existe una literatura extensa. Sin embargo, el enfoque aquí se presenta desde el abordaje de la teoría de los modelos micromórficos, siendo el campo de fase un descriptor morfológico en un sólido con micro-estructura. Esta formulación resulta novedosa en la literatura.

Índice general

I	Evaluación de parámetros fractomecánicos en forma numérica	21
1.	Conceptos clásicos de Mecánica de Fractura	25
1.1.	Introducción	25
1.2.	Perspectiva histórica de la Mecánica de Fractura	26
1.2.1.	Contribuciones de Griffith	26
1.2.2.	La Tasa de Liberación de Energía	28
1.2.3.	Contribuciones de Irwin	28
1.2.4.	Relación entre los parámetros \mathcal{G} y K_I	30
1.2.5.	Contribuciones de Rice	32
1.3.	Perspectiva energética de la Integral-J: flujo de energía en la punta de una fisura	35
1.4.	Evaluación de la Tasa de Liberación de Energía en forma numérica	37
1.4.1.	Cálculo de la Integral-J como integral de dominio	39
1.4.2.	Diseño de las mallas de elementos finitos	41
1.5.	Las ramas de la mecánica de fractura y zonas de validez	43
2.	Aplicación del concepto de Fuerzas Configuracionales en Mecánica de Fractura Lineal Elástica	47
2.1.	Introducción	47
2.2.	Fuerzas configuracionales en medios elásticos - Evaluación de la Integral-J	48
2.3.	Principio Variacional e implementación numérica	49
2.4.	Ejemplos numéricos	51
2.4.1.	Ejemplo 1 - Viga a flexión simple con fisura de borde (SENB)	52
2.4.2.	Ejemplo 2 - Probeta compacta	57
2.4.3.	Ejemplo 3 - Probeta compacta con malla regular	60
3.	Fuerzas configuracionales en medios elasto plásticos	63
3.1.	Introducción	63
3.2.	Definición del modelo constitutivo	64
3.3.	Comportamiento de elementos finitos S_2 en el modelo plástico	65
3.4.	Fuerzas configuracionales en medios elasto plásticos	66
3.5.	Cálculo de la Integral-J a través de fuerzas configuracionales en medios elasto plásticos	67
3.6.	Principio variacional e Implementación numérica	69
3.7.	Ejemplos numéricos	72
3.7.1.	Probeta solicitada a tracción Simple	72

3.7.2.	Determinación de la Integral-J en una probeta compacta	77
II	Estudio y análisis de propagación de fisuras	83
4.	Modelo de campo de fase para simular fractura frágil	87
4.1.	Introducción	87
4.2.	Teoría del continuo con Microestructura	88
4.2.1.	El campo de fase como descriptor cinemático	88
4.2.2.	Especificación para la función de energía libre	90
4.3.	Solución analítica del problema 1D	91
4.3.1.	Caso homogéneo	92
4.3.2.	Caso no-homogéneo	93
4.4.	Principio Variacional e implementación numérica	95
4.5.	Ejemplos Numéricos	96
4.5.1.	Ejemplo 1 - Análisis de convergencia 1-D	96
4.5.2.	Ejemplo 2- Espécimen con entalladura profunda	101
4.5.3.	Ejemplo 3 - Viga con entalla lateral en tracción (SENT)	105
4.5.4.	Ejemplo 4 - Panel de doble entalla (DENT) solicitado a desplazamiento uniforme	106
5.	Validación experimental de un modelo de campo de fase para simular fractura frágil	111
5.1.	Introducción	111
5.2.	Procedimiento de ensayo	111
5.3.	Validación del modelo de campo de fase	115
6.	Modelo de campo de fase para fractura frágil en Elasto-Plasticidad	121
6.1.	Introducción	121
6.2.	Fractura Elasto-plástica	122
6.2.1.	Desbalance de energías	123
6.2.2.	Modelo constitutivo	123
6.2.3.	Ecuaciones de gobierno para la evolución de los descriptores cinemáticos α y d	126
6.2.4.	Especialización para la función de energía libre	126
6.3.	Principio variacional e implementación numérica	128
6.4.	Ejemplos numéricos	129
6.4.1.	Ejemplo 1 - Análisis de la propagación de fisura en Modo I para fluencia en pequeña escala	129
7.	Conclusiones	137
A.	Breve descripción de las ecuaciones de la mecánica del continuo convencional	141
A.1.	Algunas ecuaciones de balance y continuidad	141
A.1.1.	Lema y Teorema de Reynolds	142
A.2.	Termodinámica del Continuo	142
A.2.1.	Potencia Mecánica	142

A.2.2. Potencia Calorífica	143
B. Trabajos realizados durante el desarrollo de esta tesis	147
B.1. Trabajos presentados en congresos	147
B.2. Trabajos publicados en revistas	147
Bibliografía	149

Índice de figuras

1.1.	Descripción esquemática del procedimiento propuesto por Griffith.	27
1.2.	Distribución de tensiones en la punta de una fisura.	30
1.3.	Mecanismo cohesivo esquemático para evaluar la energía requerida al extender la fisura una magnitud: Δa	31
1.4.	Sólido con una fisura propagando a una velocidad v	35
1.5.	Sólido con una fisura propagando a velocidad v . El observador \mathcal{O} está montado en la punta de la fisura. El balance de energía en el volumen espacial Ω y Ω_i es descrito por este observador.	36
1.6.	Definición del dominio Ω y de la función de peso $Q(x)$	38
1.7.	Diseño de la malla de elementos finitos para problemas de fractura lineal elástica. a) aspecto general de la malla y estructurado en las cercanías de la punta de la fisura. b) y c) Colapso de elementos cuadriláteros que forman la punta de la fisura y desplazamiento de los nodos centrales de dichos elementos	42
1.8.	División de las distintas ramas de la Mecánica de Fractura	43
1.9.	Diferentes zonas de aplicación de la mecánica de fractura en función de la tenacidad K_{IC} , para una placa fisurada, de dimensiones constantes. El eje de ordenadas se refiere a una tensión estructural representativa del estado de pérdida de capacidad portante.	44
1.10.	Diferentes zonas de aplicación de la mecánica de fractura, en función del tamaño D representativo de la estructura, para placas fisuradas del mismo material. La pendiente de $-1/2$ de la recta que identifica la MFLE es típica de esta teoría.	45
2.1.	Esquema de Fuerzas configuracionales que aparecen en un cuerpo fisurado, compuesto por dos materiales. Aquí las fuerzas configuracionales de interface \mathbf{g}_{int} , están asociadas al término $\partial_x \varphi \neq 0$. Se esquematizan las fuerzas configuracionales de borde relacionadas con el término $\Sigma \mathbf{n}$ y la fuerza configuracional que aparece en la punta de la fisura \mathbf{g}	50
2.2.	Probeta SENB, con dimensiones $a = 2,5$ (cm), $w=8,0$ (cm), $s=28,0$ (cm) y espesor unitario	52
2.3.	Malla de elementos finitos $S2$ para una probeta SENB	53
2.4.	Detalle de la posición αl , en la malla de elementos finitos de los alrededores de la punta de la fisura	54

2.5. Comparación de la integral-J obtenido por los métodos de integración y fuerzas configuracionales en función de la relación r/l y en una malla fija. El método de las fuerzas configuracionales brinda mayor información sobre los puntos en donde se obtiene el mejor valor de la integral-J, para la malla utilizada en este ejemplo.	54
2.6. Función Q , sobre una malla de elementos finitos	55
2.7. Comportamiento de las fuerzas configuracionales para distintos valores de la relación r/l	56
2.8. Esquema de una probeta compacta (<i>Compact Specimen</i>)	57
2.9. Tamaño de elementos finitos mas pequeños utilizados en las tres mallas para el problema de la probeta compacta en el ejemplo 2. a) Malla 1 - $h_{min} = 6,5 \cdot 10^{-5}w$, b) Malla 2 - $h_{min} = 5,0 \cdot 10^{-5}w$, Malla 3 - $h_{min} = 2,5 \cdot 10^{-5}w$. Puede observarse que a medida que los elementos reducen su tamaño en cada malla se agregan círculos concéntricos al rededor de la punta de la fisura.	58
2.10. Curvas de convergencia para los métodos de fuerzas configuracionales e integral de dominio, en función de la cantidad de nodos de las distintas mallas de elementos finitos utilizadas en el ejemplo 2.	58
2.11. Fuerzas configuracionales en la punta de la fisura de una probeta compacta en distintas mallas. Puede observarse del aumento en la densidad de elementos en hacia la punta de la fisura y la disminución de fuerzas residuales a medida que la malla en esta zona se refina. a) Malla 1 - $h_{min} = 6,5 \times 10^{-5}w$, b) Malla 2 - $h_{min} = 5,0 \times 10^{-5}w$, Malla 3 - $h_{min} = 2,5 \times 10^{-5}w$	59
2.12. Malla de elementos finitos regular, para el problema del ejemplo 3.	60
2.13. Curva de convergencia para el método de fuerzas configuracionales utilizando mallas de elementos finitos S_2 , con diseño regular	62
2.14. Fuerzas configuracionales en una de las mallas regulares utilizadas, puede observarse la aparición de una fuerza principal, equivalente al valor de J y algunas fuerzas residuales de menor orden de magnitud.	62
3.1. Respuesta estructural elementos finitos S_2 y Q_1 con formulación $B\bar{B}AR$. <i>Izq.</i> curva carga desplazamiento para una probeta compacta con entalla lateral. <i>Der.</i> , mapa de deformación plástica equivalente, para cada uno de los casos analizados para $\Delta u_y \approx 3mm$	66
3.2. Definición de los dominios de análisis. Ω_r dominio regular, Ω_δ dominio singular que contiene la punta de la fisura	67
3.3. Dominio y bordes considerados en la definición de Q	70
3.4. Geometría de una probeta normalizada para tracción (<i>izq.</i>) y planteo numérico del problema (<i>der.</i>)	72
3.5. Respuesta estructural obtenida para el análisis de una probeta a tracción.	73
3.6. Curvas de error evaluadas a través del módulo de fuerzas configuracionales en el interior de un dominio sin singularidades. a) Resultados para las tres mallas analizadas. b)Error en función del tamaño h	74

3.7.	Resultados en el test de la probeta sometida a tracción para la malla de tamaño $h = 0,125$. <i>arriba</i> : fuerzas configuracionales (F_{conf}) y ampliación de las fuerzas residuales en el interior del dominio, para $\Delta u = 0,024(mm)$ <i>abajo</i> : fuerzas configuracionales disipativas (F_{dis}) y mapa de deformación plástica equivalente	75
3.8.	Resultados en el test de la probeta sometida a tracción para la malla de tamaño $h = 0,03125$. <i>arriba</i> : fuerzas configuracionales (F_{conf}) y ampliación de las fuerzas residuales en el interior del dominio, para $\Delta u = 0,024(mm)$ <i>abajo</i> : fuerzas configuracionales disipativas (F_{dis}) y mapa de deformación plástica equivalente	76
3.9.	Esquema de una probeta compacta entallada. <i>Der</i> : dimensiones y condiciones de borde, <i>Izq</i> : discretización de la geometría con una malla de elementos finitos regular $h = 0,50(mm)$	78
3.10.	Evolución de la deformación plástica equivalente para distintos niveles de desplazamiento Δu_y . a) $\Delta u_y = 0,25 (mm)$, b) $\Delta u_y = 0,425(mm)$ y c) $\Delta u_y = 0,475 (mm)$	79
3.11.	Curvas $J_{ana}, J_{far}, J_{tip}$ y J_{dis} . Se observa como la curva J_{far} coincide con el valor analítico J_{ana} , además como disminuye el valor de J_{tip} a medida que evoluciona la plasticidad representada por J_{dis}	80
3.12.	Fuerzas configuracionales. a) Fuerzas configuracionales representativas de F_{tip} para un nivel de desplazamientos $\Delta u_y = 0,475$ y b) Fuerzas configuracionales representativas del término F_{conf} en el mismo nivel de desplazamiento	81
4.1.	Esquema de la función $\pi(t)$. $\pi_r = 0$ para $\dot{d} > 0$ y π_r arbitraria para $\dot{d} = 0$, en función del tiempo t	91
4.2.	Análisis de sensibilidad de las curvas σ vs. ε variando los parámetros G_c y ℓ	93
4.3.	Distribución del campo de fase d para diferentes valores de $\sigma(d_h)$	94
4.4.	a): Esquema del problema de fractura 1-D resuelto en el ejemplo 1; b) Relación de aspecto de las distintas mallas utilizadas para obtener la solución numérica del problema esquematizado (ℓ es el tamaño horizontal de los elementos, h es la altura)	97
4.5.	Curvas de error para los campos u y d en función de h/ℓ para elementos finitos Q_1 con interpolación bilineal	98
4.6.	Campos obtenidos numéricamente, para el problema de fractura 1 - D utilizando mallas de elementos finitos Q_1	99
4.7.	Comparación entre las curvas de error, para los campos u y d obtenidas numéricamente con elementos finitos Q_1 y S_2	100
4.8.	Esquema probeta compacta con entalladura profunda, dimensiones en (mm)	101
4.9.	Aspecto de la malla del ejemplo 2, <i>izq</i> : malla completa, <i>der</i> : tamaño de elementos h en la punta de la fisura en (mm).	102
4.10.	Curvas Carga-Desplazamiento y comparación con valores de referencia. Los estados 1,2 ,3 y 4 son los que se corresponden con los cuadros de la Figura 9	103
4.11.	Evolución del campo d : a) $\ell = 0,0375(mm)$, cuadros de 1 a 4 evolución según las escalas mostradas en c), b) resultados para $\ell = 0,0075(mm)$	104

4.12. SENT test: a) Condiciones de borde del problema. b) Malla de elementos finitos y detalle de elementos regulares en la zona de fisura.	105
4.13. Espécimen SENT solicitado a tensión uniforme en los extremos (energías de fractura: $G_c^1 = 1.(N/mm)$; $G_c^2 = 5.(N/mm)$; $G_c^3 = 10.(N/mm)$). a) Curva de (σ_{yy}^{crit}) vs. G_c , comparación de soluciones numéricas con la solución analítica. b) Carga total (por unidad de espesor) vs. desplazamiento vertical del punto A.	106
4.14. Espécimen DENT sometido a desplazamiento uniforme en sus bordes superior e inferior. a) Datos geométricos. b) Modelo mecánico y detalle de la malla de elementos finitos en la región de propagación de fisura	107
4.15. DENT bajo desplazamientos uniforme. Curvas carga vs desplazamiento. Soluciones obtenidas para la Malla 1, con $\ell = 1,2(mm)$ y $2,4(mm)$ y en la Malla 2 con $\ell = 1,2[mm]$	108
4.16. DENT bajo desplazamiento uniforme. (a) Distribución del daño a lo largo de la línea y-y' (Malla 1, $\ell = 2,4(mm)$). Estas curvas corresponden a los estados de carga marcados en la curva estructural del inserto. (b) Distribución de daños en las etapas F y G, en un espécimen estructuralmente agotado.	109
4.17. DENT bajo desplazamiento uniforme. (a) Distribución de daño (Malla 1, $\ell = 2,4(mm)$). (b) Malla deformada. (Estas figuras corresponden a los niveles de desplazamientos vertical del borde superior : $0,20(mm)$, $0,44(mm)$, $0,50(mm)$ y $0,82(mm)$ respectivamente.	109
5.1. Relaciones geométricas de una probeta SENB, ASTM E399,	112
5.2. Dispositivo utilizado para los ensayos de probetas SENB. Condiciones de carga y apoyo para las probetas ensayadas	113
5.3. a)- Maquina de ensayos multiples INSTRON 3344 utilizada para realizar los ensayos en probetas de PPMA. b) - Dispositivo y soporte de ensayo. c) Probeta montada en la máquina de ensayos	114
5.4. Ensayo de un espécimen SENB de PPMA. a) Probeta antes de ser ensayada. b) Probeta ensaya	114
5.5. Curvas carga-desplazamiento obtenida mediante ensayos, en probetas SENB de acrílico	115
5.6. Malla de elementos finitos utilizada, en el modelo numérico, con las condiciones de borde impuestas para el análisis. En la ampliación se muestra la zona regular y el menor h utilizado en este modelo.	116
5.7. Punto (A), utilizado para imponer el control de desplazamiento ds , en la dirección de apertura de fisura	116
5.8. Curva Carga-desplazamiento obtenida en forma numérica junto a las curvas de máximos y mínimos, obtenidas en forma experimental.	117
5.9. Evolución del campo d para $\ell = 0,50$, utilizado en el modelo numérico de las probetas SENB. En los cuadros 1 a 5 se muestra la evolución de los puntos marcados en la curva mostrada en la Fig.(5.8) con su correspondientes escalas	118

5.10.	a)- Malla original y deformada al final del problema. b) Ampliación de la zona de fisura, esquema de su evolución para los 5 puntos marcados en la curva carga-desplazamiento	119
6.1.	Región semicircular con una fisura. (a) Datos geométricos. (b) Modelo de elementos finitos.	130
6.2.	Tensión crítica de un modelo de campo de fase como función de $G_c(N/mm)$ y $\ell(mm)$, para un problema unidimensional homogéneo	131
6.3.	Propagación de fisura. Caso: $n = 0$, $\hat{\sigma}/\sigma_y = 1,7$, $R_0 = 1270.[\mu m]$. (a) Parámetro de control $\hat{\sigma}$ y Punto T donde se evalúa el desplazamiento u_y^T en función de s . (b) Curva u_y^T vs $\hat{\sigma}$. (c-f) Secuencias de la distribución del daño durante el proceso de carga (sólo se muestran valores $d > 0,97$). (g) Distribución de la tensión vertical (σ_{yy}), normalizada con la tensión de fluencia, a lo largo de la línea horizontal de simetría en las distintas etapas: D es la curva que corresponde al inicio de propagación de fisura en la figura (c), y las curvas A, B y C corresponden a los tiempos previos, para valores de daño 0,003, 0,06 and 0,18 respectivamente.	133
6.4.	Crecimiento de fisura en Modo I. K_I normalizado vs. el desplazamiento de apertura de fisura. a) $n = 0,0$, $\hat{\sigma}/\sigma_y = 0,5$. b) $n = 0,2$, $\hat{\sigma}/\sigma_y = 3,0$	134
6.5.	Fractura en Modo I. K_{SS} factor de intensidad de tensiones como función de $\hat{\sigma}/\sigma_y$	134
A.1.	Volumen de control Ω en un medio continuo, Γ es el contorno del volumen de control. \mathbf{P} es una partícula y se representa su trayectoria con el vector velocidad \mathbf{v}	141
A.2.	Volumen de control interactuando mecánicamente con el medio.	143
A.3.	Volumen de control interactuando termicamente con el medio.	143

Parte I

**Evaluación de parámetros
fractomecánicos en forma numérica**

Breve introducción a la primera parte

Esta primera parte o eje de trabajo, está asociado a los conceptos más clásicos de mecánica de fractura determinista. Se analiza en ésta la estabilidad de una fisura preexistente, para lo cual se recurre a los conceptos de parámetros fractomecánicos clásicos como son el factor de intensidad de tensiones y la *Integral-J*.

Se estudian por lo tanto metodologías numéricas y computacionales, convencionales algunas, y otras que se han desarrollado en los últimos diez o quince años, dirigidas a evaluar los parámetros de la mecánica de fractura clásica antes mencionados.

Como problema en sí mismo, la determinación de estos parámetros fractomecánicos mediante métodos numéricos, es un tema que lleva muchos años de desarrollo en la ingeniería. Se han realizado aportes decisivos desde el mismo comienzo de las aplicaciones del método de los elementos finitos al cálculo de problemas en la ingeniería, principalmente en las décadas del 70 y del 80.

- En el *Cap. 1* se presenta una breve descripción histórica del desarrollo de la mecánica de fractura a lo largo del siglo XX, más con el objetivo de introducir la temática para el desarrollo posterior de la tesis, que de describir el proceso histórico en sí mismo.
- En el *Cap. 2* se introduce el concepto de fuerza configuracional. Este concepto ha sido investigado e impulsado en el campo de la mecánica del continuo por los desarrollos y contribuciones de Eshelby en el estudio de defectos móviles en sólidos. En particular se utilizarán dichos conceptos y definiciones para evaluar parámetros fractomecánicos en forma numérica.
- En el *Cap. 3* se extiende la noción de fuerza configuracional a medios elasto-plásticos. En este capítulo desarrollamos una discusión completa del concepto de fuerzas configuracionales aplicado en el caso particular de medios elasto plásticos.

Capítulo 1

Conceptos clásicos de Mecánica de Fractura

1.1. Introducción

La gran mayoría de componentes estructurales en la ingeniería actual presentan defectos de varios tipos y tamaños que pueden producirse durante la fabricación, montaje o servicio. Estos defectos pueden ser de distintas dimensiones tales como de punto (inclusiones), de línea (dislocaciones), o de superficies (cambios de fase, etc.).

Los criterios tradicionales de diseño estructural basados en una tensión crítica como límite a las tensiones producidas por un determinado estado de carga, no son suficientes para evaluar el comportamiento mecánico de este tipo de componentes ante la existencia de tales defectos. En particular consideramos aquí, los defectos del tipo “fisuras o grietas”.

La mecánica de fractura, por el contrario, considera los efectos que inducen las fisuras sobre la integridad estructural. Para ello, esta área de la ciencia trata de responder al problema mediante la búsqueda y definición de parámetros adecuados que caractericen la criticidad de una fisura. Entendemos como estado crítico de un cuerpo sometido a un estado de cargas creciente, a aquél asociado con el instante en que la fisura comienza a propagar.

Varios parámetros han jugado este papel a lo largo de la historia del desarrollo de la Mecánica de Fractura. En particular, por su importancia, interés y porque reveremos esta idea numerosas veces en esta tesis, queremos remarcar un parámetro que está asociado con el siguiente concepto:

Imaginemos un abordaje del problema de propagación de fisuras en sólidos a través de la Mecánica de Lagrange, en el sentido clásico que para un cierto movimiento existe una velocidad y una entidad física asociada, “fuerza conjugada”, que produce potencia. Desde esta perspectiva, la fuerza conjugada, como concepto, no tiene entidad física “per se”. Se puede imaginar, para el problema de propagación de fisuras en medios sólidos, la existencia de una “fuerza impulsora”, actuando en la punta de la fisura en movimiento que produce potencia ante el avance de ésta.

Este concepto fundamental ha sido explorado en la Mecánica de Fractura desde diversos puntos de vista. Nosotros revisaremos este concepto desde una perspectiva bastante novedosa.

Pero antes de ello, haremos un breve repaso de los principales hitos históricos, ideas

y contribuciones que se han propuesto en la Mecánica de Fractura a lo largo de la última centuria.

1.2. Perspectiva histórica de la Mecánica de Fractura

Pocas áreas de la ingeniería actual tienen una historia tan extensa como la Mecánica de Fractura. Desde los primeros trabajos que han contribuido al desarrollo de esta temática, se pueden contar ahora más de 100 años de desarrollo. En todo este tiempo, la literatura dedicada al área ha sido inmensa, y en ella se mencionan, en forma genérica, tres contribuciones significativas que han producido cambios paradigmáticos.

Las contribuciones de Griffith, en la década del 20 que introdujeron la perspectiva energética. Las de Irwin, en la década del 40, que introdujeron la perspectiva de la intensidad de campos; y las de Rice, en la década del 60, extendiendo los aplicación de la Mecánica de Fractura al comportamiento no-lineal de los materiales. Podríamos agregar a esta lista contribuciones de varios autores en los últimos años que introducen el modelado del continuo para capturar fenómenos de fractura.

A continuación, describimos las particularidades más sobresalientes de cada una de estas contribuciones. No pretendo ser fiel en cuanto al desarrollo histórico formal de contribuciones secuenciales en el tiempo, ni en cuanto a la asignación correcta de ideas específicas a cada autor. Por el contrario, pretendo presentar una breve descripción de las principales ideas, remarcando y enfatizando metodologías generales o procedimientos que han guiado al entendimiento más acabado de esta rama de la ingeniería. Para ello, es que me valgo de una perspectiva histórica un tanto desajustada aunque adecuada a los objetivos que persigo.

En el *Apéndice A* de esta tesis se presenta una breve descripción de los conceptos básicos de la termodinámica del continuo. Haremos uso intensivo de ellos a lo largo de esta monografía. Recomiendo su lectura para identificar adecuadamente las nociones energéticas a seguir.

1.2.1. Contribuciones de Griffith

Se consideran el origen, o punto de partida, de ideas que conectan la resistencia estructural con el tamaño de una fisura existente en un cuerpo: podríamos decir que este es el Grial de la Mecánica de Fractura. Son ideas que han gobernado esta ciencia durante todo el siglo 20.

Griffith introduce una aproximación cuasi termodinámica al abordaje del problema de fractura mediante el concepto de energía superficial de un sólido: $\gamma_s [J/m^2]$. Considerando un sólido elástico que tiene una fisura de área a , y que propaga hasta alcanzar un área $a + da$, donde da es un incremento infinitesimal de área, plantea el siguiente balance de energía mecánica considerando un proceso isotérmico, ver *Apéndice A*:

$$d\mathcal{W}^{ext} - d\Phi = 2\gamma_s da \quad (1.1)$$

siendo \mathcal{W}^{ext} el trabajo realizado por el sistema de cargas externas, y Φ la energía libre total del sólido (integrada en todo el volumen). Para un sólido elástico en proceso isotérmico, Φ equivale a la energía de deformación.

Con la notaci3n $d(\cdot)$ simbolizamos incrementos infinitesimales de la variable correspondiente. El factor 2 en la derecha de la ecuaci3n (1.1) resulta del hecho que un incremento de 3rea da de fisura, genera dos superficies enfrentadas de valor da .

La Figura 1.1 esquematiza el proceso de propagaci3n de fisura en un cuerpo el3stico sometido al estado de cargas \mathbf{P} , cuyo punto de aplicaci3n sufre un desplazamiento \mathbf{u} . A medida que la fisura propaga, pasando de un superficie de fisura a a otra $a + da$, el comportamiento estructural se modifica, de acuerdo a lo esquematizado en el plot de la Figura 1.1-a. De hecho, el especimen pierde rigidez, lo cual se traslada a la respuesta estructural \mathbf{P} vs. \mathbf{u} .

En ese caso, el t3rmino: $d\mathcal{W}^{ext} = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{u}$, se puede interpretar como el 3rea $\Delta_0 + \Delta_1$ esquematizado en la Figura 1.1-b. Mientras que el cambio de energ3a libre $d\Phi$, se puede interpretar como las 3reas $\Delta_1 - \Delta_2$.

Por lo tanto, el t3rmino $2\gamma_s da$ se interpreta como el 3rea Δ de la Figura 1.1-c. As3, seg3n la aproximaci3n de Griffith, para un s3lido puramente el3stico, toda la energ3a externa consumida para inducir la p3rdida total de capacidad resistente estructural, representada por el 3rea bajo la curva \mathbf{P} vs. \mathbf{u} , se ha transferido a la energ3a superficial distribuida sobre las nuevas caras generadas por la fisura.

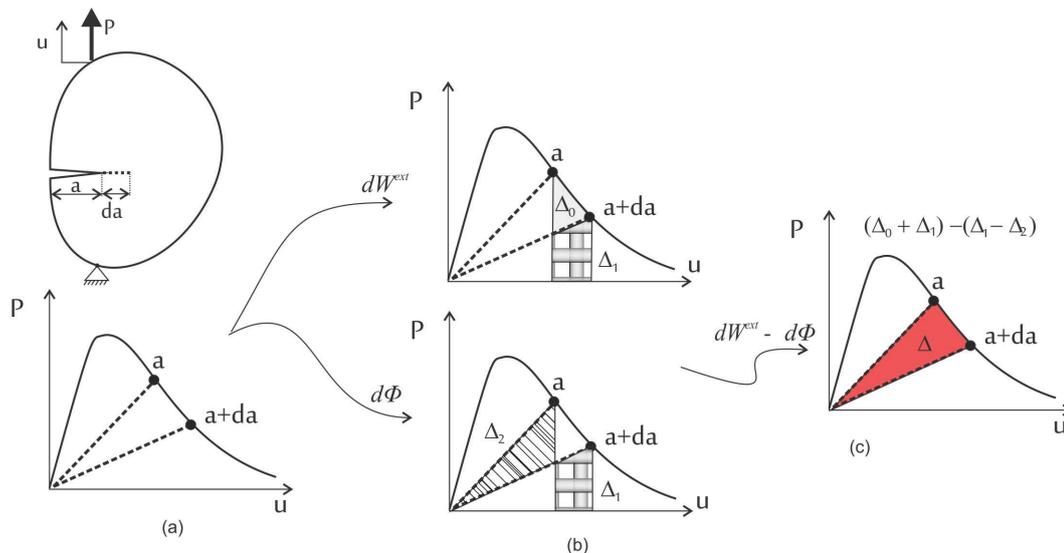


Figura 1.1: Descripci3n esquem3tica del procedimiento propuesto por Griffith.

Aunque el concepto fundamental permanece id3ntico en la actualidad, se ha generalizado la idea de Griffith en el sentido que ahora se asume que una fisura para propagar, requiere de una cierta energ3a por unidad de 3rea, aunque la misma no necesariamente est3 asociada a una energ3a de superficie. Denotaremos de ahora en m3s $G_c [J/m^2]$ a esta energ3a por unidad de 3rea y la llamaremos energ3a de fractura. Obviamente, de acuerdo a la suposici3n de Griffith:

$$G_c = 2\gamma_s \quad (1.2)$$

Inclusive, el concepto de la energ3a de fractura se puede generalizar en forma bastante directa cuando intervienen procesos disipativos, lo cual haremos en esta tesis. T3picamente nos referimos a la disipaci3n generada por la evoluci3n de materiales no-lineales durante el fen3meno de propagaci3n de fisura.

1.2.2. La Tasa de Liberación de Energía

Íntimamente asociada a la contribución de Griffith y al proceso físico esquematizado en la Figura 1.1, está el concepto de tasa de liberación de energía \mathcal{G} . Se define como la tasa negativa de cambio de la energía potencial respecto al área de fisura. Su expresión general es:

$$\mathcal{G} = -\frac{d\Pi}{da} \quad (1.3)$$

La energía potencial Π del cuerpo cargado se escribe como:

$$\Pi = \Phi - \mathcal{W}^{ext} \quad (1.4)$$

Donde, y en consonancia con la notación utilizada en (1.1), Φ es la energía libre total en el cuerpo y \mathcal{W}^{ext} es el trabajo realizado por las fuerzas externas.

El término \mathcal{G} se puede evaluar para cualquier estado de carga, induciendo en la estructura un cambio virtual de área de fisura y evaluando el cambio virtual de energía potencial. \mathcal{G} representa una energía potencial disponible, tanto en el cuerpo como en el sistema de cargas, que podría liberarse al avanzar la fisura un área da . Alternativamente, esta energía liberada podría contribuir, aportando a la energía necesaria según la hipótesis de Griffith, para incrementar la energía superficial del cuerpo al propagar la fisura. Desde este punto de vista, \mathcal{G} juega el papel de una fuerza impulsora.

El término \mathcal{G} aumenta con el aumento del estado de carga ($\mathcal{G}(P)$). Entonces, si pensamos en que la transferencia de energía arriba mencionada se produce en un estado de equilibrio, teniendo en cuenta que un incremento de área da de fisura está asociado a un incremento de energía de fractura G_c ; para algún nivel de estado de carga: $P = P_f$, resulta que:

$$\mathcal{G}(P_f) = G_c. \quad (1.5)$$

De este modo, el estado de carga P_f identifica el nivel crítico para el cual la propagación (infinitesimal) de una fisura no insume más energía que la energía potencial disponible en el sistema.

1.2.3. Contribuciones de Irwin

La contribución de Irwin a la Mecánica de Fractura se ha basado en la introducción del concepto de intensidad de campos como criterio para evaluar estados críticos de cuerpos con fisuras.

Para valorar adecuadamente los aportes de Irwin, primero escribimos las soluciones analíticas de distribución de campos de tensión, desplazamientos y deformaciones en las zonas vecinas a la punta de una fisura. Estas soluciones existieron en la literatura varios años antes de los aportes de Irwin.

Denotemos con: σ , ε a los tensores de tensión y deformación, respectivamente; y con \mathbf{u} el vector desplazamientos. Sólo consideramos problemas planos. Sea un sistema de coordenadas polares (r, θ) , con r coordenada radial y θ coordenada angular, centrado en la punta de la fisura, y tal que la coordenada $\theta = 0$ coincide con el plano de la fisura, como se esquematiza en la Figura 1.2.

Para una fisura abriendo en modo I, las componentes σ_{ij} , ε_{ij} , u_i ($i, j = 1, 2$), de los campos singulares cercanos a la fisura (y que se superponen a los campos del sólido considerado libre de fisura, aunque estos términos no juegan ningún papel en el análisis a seguir): σ y ε y también de u , respectivamente, tienen el siguiente formato:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \hat{\sigma}_{ij}(\theta); \quad (1.6)$$

En estas expresiones, las funciones $\hat{\sigma}_{ij}$ son sólo función de la coordenada θ , mientras que se observa una singularidad de orden $\mathcal{O}(r^{-1/2})$ para las tensiones, con un factor de proporcionalidad K_I denominado “factor de intensidad de tensiones”.

De la misma forma se han determinado las componentes del vector desplazamiento, cuyas expresiones son las siguientes:

$$u_i(r, \theta) = \frac{K_I}{f(G)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \hat{u}_i(\theta); \quad (1.7)$$

al igual que para las tensiones, las funciones \hat{u}_i sólo dependen de θ . Se remarca que la función: $\hat{u}_\theta(\pi) \neq \hat{u}_\theta(-\pi)$, luego para $r < 0$: la apertura de fisura se define por: $[[u_\theta]] = \hat{u}_\theta(\pi) - \hat{u}_\theta(-\pi)$.

El módulo de corte es denotado G , y la función $f(G)$ toma valores distintos si el estado plano es de deformación o tensión. No obstante, este hecho es irrelevante para la discusión presente. La dependencia de $u_i(r, \theta)$ con r no muestra singularidad (y es del orden $\mathcal{O}(r^{1/2})$).

Las componentes de las deformaciones compatibles con el campo de desplazamientos (1.7), son:

$$\varepsilon_{ij}(r, \theta) = \frac{K_I}{f(G)\sqrt{2\pi r}} \hat{\varepsilon}_{ij}(\theta); \quad (1.8)$$

en donde nuevamente observamos una singularidad del tipo: $\mathcal{O}(r^{-1/2})$.

Es importante remarcar el orden de singularidad de los campos en la vecindad de la punta de la fisura, y el hecho de que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\sigma \cdot \varepsilon) \rightarrow \frac{f(\theta)}{r} \approx \mathcal{O}(r^{-1}) \quad (1.9)$$

Este es un requisito imprescindible para que el modelo matemático sea coherente con la suposición de Griffith. Y por lo tanto, para que no existan contradicciones con la aproximación energética del problema de fractura.

El factor K_I que surge en las expresiones (1.6)–(1.8), es una función:

$$K_I = \hat{K}_I(P, a, B) \quad (1.10)$$

donde P , a y B representan el nivel de carga, longitud de fisura y geometría del cuerpo, respectivamente. Para un material elástico lineal asumiendo pequeñas deformaciones, K_I es lineal con P , crece proporcionalmente.

Irwin postuló que existe un parámetro del material, constante, denominado K_{Ic} y tal que la igualdad:

$$K_I = K_{Ic} \quad (1.11)$$

marca el estado crítico del sistema de cargas en el cuerpo al instante de inicio de propa-

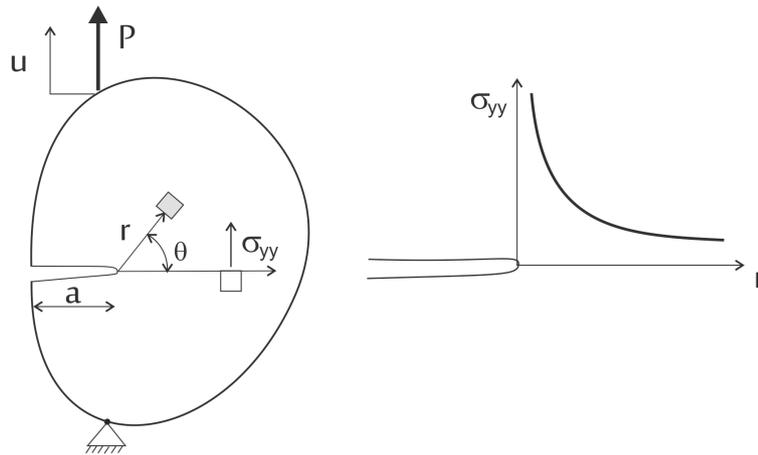


Figura 1.2: Distribución de tensiones en la punta de una fisura.

gación de la fractura.

El parámetro K_{Ic} se denomina tenacidad a fractura del material. Y es un parámetro extremadamente importante en la ingeniería actual para caracterizar el comportamiento mecánico del material.

En los hechos, K_{Ic} no es una constante del material, sino que típicamente es una función: $K_{Ic} = \hat{K}_{Ic}(T, a, B)$ donde T representa la temperatura, y como se mencionó arriba, a y B son la longitud de la fisura y una medida característica del espécimen.

1.2.4. Relación entre los parámetros \mathcal{G} y K_I

Se puede determinar la relación existente entre los parámetros \mathcal{G} y K_I haciendo el siguiente análisis, cuya línea argumental hemos tomado de Hellan (Hellan, 1984).

Consideremos la propagación de una fisura de longitud inicial a_0 hasta alcanzar la longitud $a_0 + \Delta a$, tal como se muestra la Figura 1.3. La fisura, originalmente en el “Estado 1”, tiene un perfil como se esquematiza. Al avanzar una distancia Δa , tendrá un perfil similar (consideramos soluciones autosimilares) como el esquematizado en el “Estado 2”.

Durante ese lapso y en el plano de la fisura que propaga, actúan tensiones normales σ_θ que producen trabajo mientras la fisura abre hasta alcanzar un salto en desplazamientos valorado $[[u_\theta]]$. Este salto se consigue cuando la punta de la fisura tiene la coordenada $a_0 + \Delta a$.

Ambas magnitudes, tanto σ_θ como $[[u_\theta]]$ durante el proceso de apertura, además de ser funciones de r también dependen de la posición a_t que ha ido ocupando la punta de la fisura en el transcurso del tiempo. Simbolizamos esta dependencia con $\sigma_\theta(r, a_t)$ y $[[u_\theta]](r, a_t)$. El primer argumento de las funciones es la coordenada y el segundo es una parametrización del tiempo (posición de la punta de la fisura al tiempo t).

Por lo tanto, el trabajo de estas fuerzas, por unidad de incremento de área de fisura, se puede evaluar del siguiente modo:

$$W = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \underbrace{\left(\int_{a_0}^{a_0 + \Delta a} \sigma_\theta(r, a_t) d[u_\theta](r, a_t) \right)}_{\hat{W}(r)} dr \quad (1.12)$$

La integral interior, denotada $\hat{W}(r)$, es el trabajo (por unidad de área) realizado por las tensiones y deformaciones actuantes en el punto de coordenada \hat{r} durante el proceso de propagación. Por lo arriba mencionado, los términos del integrando interno son función de la posición a_t , por ello, los límites de integración se fijan entre a_0 y $a_0 + \Delta a$. La integral interna $\hat{W}(r)$ es el resultado del trabajo total en el punto r . La integral exterior evalúa la integral a lo largo del eje r , en el segmento $[a_0 : a_0 + \Delta a]$.

El siguiente argumento es que el trabajo total por unidad de área $\hat{W}(r)$, por ser un medio elástico, puede evaluarse como el valor medio de los valores extremos de tensión y desplazamiento, durante el proceso de propagación, resultando:

$$\hat{W}(r) = \frac{1}{2} (\sigma_\theta(r, a_0) [[u_\theta]](r, a_0 + \Delta a)) \quad (1.13)$$

donde $\sigma_\theta(r, a_0)$ se interpreta como la tensión en el punto r y en el estado 1, mientras que $[[u_\theta]](r, a_0 + \Delta a)$ se interpreta como el salto de desplazamientos en r y en el estado 2. Siendo un medio elástico, este argumento es exactamente correcto, no hay aproximaciones al evaluar (1.13).

Por la autosimilaridad de las soluciones, resulta que: $[[u_\theta]](r, a_0 + \Delta a) = [[u_\theta]](r - \Delta a, a_0)$, en palabras: el salto de desplazamiento en la coordenada \hat{r} al estado 2 es igual al salto en la coordenada $-\Delta a + \hat{r}$ en el estado 1, resultado que se ha esquematizado en la Figura 1.3. Los valores de tensión y deformación en el estado 1 se determinan mediante las ecuaciones (1.6) y (1.7), y luego de integrar se obtiene:

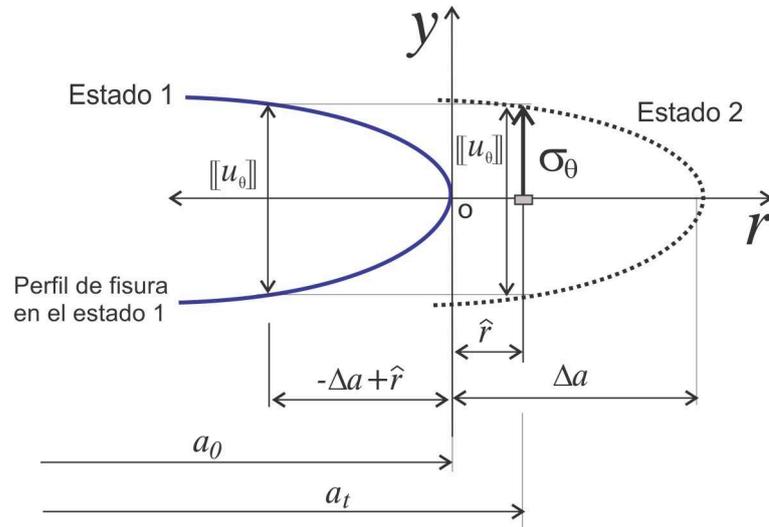


Figura 1.3: Mecanismo cohesivo esquemático para evaluar la energía requerida al extender la fisura una magnitud: Δa .

$$W = \frac{\beta K_I^2}{E} \quad (1.14)$$

donde, el factor constante β incluye todos los términos constantes que resultan de la integración de (1.12), y sólo hemos dejado explícita la dependencia entre W , K_I y el módulo de elasticidad E .

Finalmente notemos que W se puede asociar a la energía liberada \mathcal{G} durante el proceso de propagación de fisura, por lo que finalmente llegamos a la relación que pretendemos establecer:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{\beta K_I^2}{E}; \\ \beta &= 1 - \nu^2 \quad (\text{deformación plana}); \\ \beta &= 1 \quad (\text{tensión plana}); \end{aligned} \tag{1.15}$$

Una observación adicional se refiere, al hecho fundamental de la singularidad que presentan los campos de tensión y deformación que mencionamos más arriba, para que la expresión del trabajo W , dada en la ecuación (1.12), no sea nula.

1.2.5. Contribuciones de Rice

En el año 1968, Rice y Rosengreen por un lado (Rice y Rosengren, 1968) y Hutchinson por otro (Hutchinson, 1968), publicaron casi simultáneamente la solución singular de los campos de tensiones y deformaciones en las vecindades de una fisura para un material elástico no lineal y una teoría de pequeñas deformaciones. A esta solución, y en honor de esas contribuciones que han introducido un cambio substancial en el abordaje de la Mecánica de Fractura No-Lineal, se la denomina HRR (por Hutchinson, Rice y Rosengreen).

La teoría de plasticidad que ambas contribuciones han adoptado para resolver el problema es la teoría de la plasticidad deformacional. Como es sabido, esta teoría puede ser asumida como un modelo no-lineal elástico, y aproxima bien la fenomenología asociada a la plasticidad en casos de cargas monótonas. Pero es muy deficiente para casos donde no hay monotonicidad de carga.

Claramente, durante el proceso de propagación de fisuras, el material en las vecindades de la punta de la fisura tiene un comportamiento de carga no lineal inicial, mientras el punto considerado está por delante de la punta de la fisura. Pero está sujeto a un proceso de descarga (que sigue la misma ley no lineal) cuando queda en la cola o estela de la misma. No obstante ello, la solución HRR ha sido extremadamente importante para entender más adecuadamente los fenómenos plásticos que ocurren en la punta y en las vecindades de una fisura.

A continuación describo las tensiones, deformaciones y desplazamientos de la solución HRR tomadas de (Hutchinson, 1983). Se comparan con los campos de la solución elástica dados en (1.6)–(1.8).

Considerando una teoría elástica no lineal (plasticidad deformacional), donde el endurecimiento se expresa según una ley del tipo Ramberg-Osgood:

$$\frac{\varepsilon_{eq}}{\varepsilon_y} = \alpha \left(\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_y} \right)^n \tag{1.16}$$

siendo ε_{eq} y σ_{eq} la deformación y tensión equivalentes, σ_y es la tensión de (pseudo) fluencia

cia, $\varepsilon_y = \sigma_y/E$ y $n \geq 0$ es el exponente de endurecimiento; luego los campos singulares de tensiones, desplazamientos y deformaciones en las cercanías de la punta de la fisura resultan:

$$\sigma_{ij} = \sigma_y \left(\frac{J}{\alpha \sigma_y \varepsilon_y I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \quad (1.17)$$

$$u_i = \frac{J}{\sigma_y I_n} \left(\frac{\alpha \sigma_y \varepsilon_y I_n r}{J} \right)^{\frac{1}{n+1}} \tilde{u}_i(\theta, n) \quad (1.18)$$

$$\varepsilon_{ij} = \alpha \varepsilon_y \left(\frac{J}{\alpha \sigma_y \varepsilon_y I_n r} \right)^{\frac{n}{n+1}} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \quad (1.19)$$

donde, las funciones: $\tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n)$, $\tilde{u}_i(\theta, n)$ y $\tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n)$, que dependen del ángulo θ y del exponente de endurecimiento, cambian según el modo de apertura de la fisura y de si se trata de estados planos de tensión o deformación, como también sucede con la constante I_n .

De las expresiones (1.17)–(1.19) remarcamos dos hechos importantes. Primero, el parámetro J , denominado “integral- J ”, juega un papel similar al factor de intensidad de tensiones K_I de la teoría lineal elástica. De aquí, podemos decir que J tiene en cuenta la intensidad de los campos. Ha resultado ser el parámetro clave en todo el desarrollo posterior de la Mecánica de Fractura No-Lineal. Por este motivo, volveremos a interpretarlo en esta tesis numerosas veces, y desde diversas perspectivas. De todos modos, esta primera interpretación que damos a J como factor de intensidad de campos, debe ser considerada en todo el desarrollo posterior.

El segundo punto que queremos remarcar se refiere al tipo de singularidad que presentan estas soluciones para $r \rightarrow 0$. Nuevamente, podemos observar que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \rightarrow \frac{f(\theta, n)}{r} \approx \mathcal{O}(r^{-1}) \quad (1.20)$$

lo que garantiza la consistencia energética del modelo. En análisis posteriores, más específicos, realizados para el caso de una fisura propagante en un medio elastoplástico, Rice determinó que la singularidad del campo de deformaciones es más débil de la expresada en (1.19). Este hecho es conocido como la “Paradoja de Rice”.

Siguiendo un camino similar a lo que se plantea para la Mecánica de Fractura Lineal Elástica, el parámetro J se debe evaluar como una función de las cargas actuantes en el cuerpo, y de la geometría del mismo. Para fisuras abriendo en modo I, específicamente escribimos:

$$J_I = \hat{J}_I(P, a, B); \quad (1.21)$$

donde P , a y B como en (1.10), representan el nivel de carga, longitud de fisura y geometría del cuerpo, respectivamente. El subíndice I en este caso hace referencia al modo de apertura de la fisura. Puede estimarse entonces un valor crítico J_{Ic} , también función de la temperatura y del tamaño de la fisura, tal que:

$$\hat{J}_I(P_c, a, B) = J_{Ic} \quad (1.22)$$

el cual determina la carga crítica P_c para un sólido no-lineal con fisuras.

Este procedimiento, aunque es muy adecuado para problemas de la Mecánica de Fractura Lineal Elástica, aplicada a materiales frágiles, presenta serias dificultades para aproximar problemas no-lineales. Fundamentalmente por dos razones que se deben satisfacer:

- la teoría deformacional plástica adoptada para el análisis del campo HRR no es un modelo adecuado para predecir el comportamiento plástico en las regiones de interés, y mas aún asumiendo la hipótesis de pequeñas deformaciones. Ya hemos comentado que este hecho se satisface aproximadamente bien sólo en casos de carga uniforme.
- las regiones donde se producen las inevitables grandes deformaciones, en la punta de la fisura deben estar “bien” contenidas dentro de las zonas dominadas por la respuesta singular del campo HRR. Esto es, el dominio donde surgen las grandes deformaciones plásticas debe ser un dominio muy pequeño en comparación con los dominios en los que prevalece la solución HRR. Esta hipótesis se denomina “dominancia J” y es análoga a la condición de “fluencia en pequeña escala”, requerida para el dominio de la solución lineal elástica basada en el factor K_I . En este caso, la “fluencia en pequeña escala” garantiza que la región plástica en la punta de la fisura es muy pequeña si es comparada con la zona donde prevalece la solución K_I .

1.3. Perspectiva energética de la Integral-J: flujo de energía en la punta de una fisura

En el apartado anterior se ha introducido la perspectiva de la intensidad de campos asociados al parámetro J . En este apartado se introduce la perspectiva energética del parámetro J , para lo cual se sigue el trabajo de (Moran y Shih, 1987). Para ello, evaluamos el balance de energía mecánica alrededor de la punta de una fisura propagante. Esto es, el flujo de energía hacia la punta de la fisura. En el balance, se descarta la parte térmica.

Analicemos un medio sólido \mathcal{B} , como se observa en la Fig. 1.4, con una fisura propagante. La punta avanza con una velocidad v .

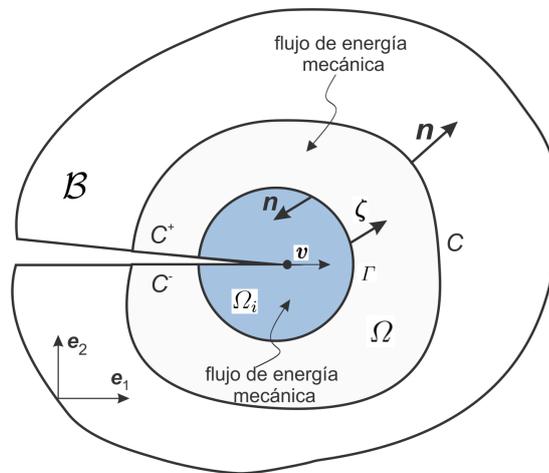


Figura 1.4: Sólido con una fisura propagando a una velocidad v

Definimos el dominio Ω como la parte del cuerpo delimitada por los contornos C , C^+ , C^- , Γ . El contorno Γ es interior al cuerpo y rodea a la punta de la fisura. Mientras que los contornos C^+ y C^- representan las caras de la fisura (el signo colocado como supraíndice en esta notación está relacionado con la posición del vector normal en ese contorno).

La aproximación considerada en este apartado, asume que el dominio Ω_i , delimitado por la curva Γ , se mueve conjuntamente con la punta de la fisura sin cambio de forma. Para un observador montado en la punta de la fisura, el volumen Ω_i representa un volumen espacial fijo. Este observador detecta una velocidad del punto material $\omega = -v$ y por lo tanto, los flujos que se evalúan a través de Γ , incluido los flujos de energía, corresponden con esa velocidad relativa, tal como se muestra en la Fig.1.5. Mientras el contorno C es un contorno material. Se asume además que este observador detecta campos que son localmente estacionarios (en regiones próximas a la punta de la fisura). Esta suposición concuerda con la autosimilaridad de los campos, al avanzar la fisura tal como fue anteriormente comentado.

Se evalúan los flujos de energía (mecánica) a través de las superficies y la energía almacenada en Ω . En particular, interesa determinar el flujo de energía a través de Γ , cuando esta superficie se contrae, tendiendo a un punto coincidente con la punta de la fisura.

Partiendo del Teorema de las Fuerzas Vivas, (Oliver y Agelet, 2000) aplicándolo a la

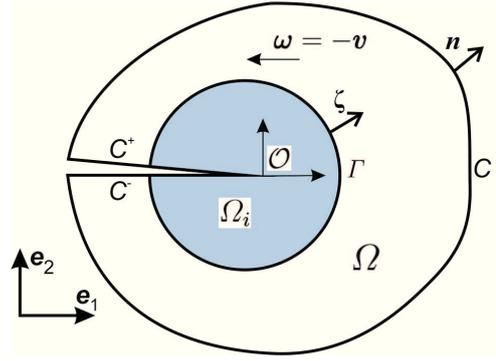


Figura 1.5: Sólido con una fisura propagando a velocidad v . El observador \mathcal{O} está montado en la punta de la fisura. El balance de energía en el volumen espacial Ω y Ω_i es descrito por este observador.

parte del cuerpo Ω y despreciando la energía cinética y su derivada temporal, resulta:

$$\mathcal{P}_{\Omega}^{ext} = \int_{\Gamma \cup C \cup C^+ \cup C^-} \mathbf{t}^{ext} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi \, d\Omega = \dot{\Phi}_{\Omega} \quad (1.23)$$

Con φ y Φ , la energía libre por unidad de volumen y energía libre total definidas en el Apéndice A a través de la expresión A.24. El término de la izquierda de la ecuación (1.23) representa la potencia mecánica que el medio externo le ejerce a la parte Ω , a través del producto del vector tracción \mathbf{t}^{ext} por la velocidad $\dot{\mathbf{u}}$ en el contorno. El término de la derecha representa el cambio (derivada material) de la energía libre contenida en el volumen de control Ω . Considerando además que el material es no-lineal elástico y el proceso es isotérmico, luego por el primer principio de la termodinámica:

$$\mathcal{P}_{\Omega}^{ext} = \dot{\Phi}_{\Omega} \quad (1.24)$$

Considerando que la fisura está libre de tracciones ($\mathbf{t}^{ext} \equiv 0$ en $C^+ \cup C^-$), el término de la potencia externa se puede reescribir como:

$$\int_{\Gamma \cup C \cup C^+ \cup C^-} \mathbf{t}^{ext} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} -(\boldsymbol{\sigma} \dot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \, d\Gamma + \int_C (\boldsymbol{\sigma} \dot{\mathbf{u}}) \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (1.25)$$

El primer término se evalúa con la normal $\boldsymbol{\zeta}$ saliente de Ω_i ($\boldsymbol{\zeta} = -\mathbf{n}$). Mientras tanto, el término de la derecha de la ecuación (1.25), aplicando el teorema de Reynolds, ver Apéndice A resulta:

$$\dot{\Phi} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\varphi} \, d\Omega + \int_{\Gamma \cup C \cup C^+ \cup C^-} \varphi (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma \quad (1.26)$$

Donde, el término de flujo en $\Gamma \cup C \cup C^+ \cup C^-$ es evaluado con la velocidad relativa del material respecto al volumen de control ($\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{v}$), que por las suposiciones adoptadas resulta nula en el contorno C y ortogonal a \mathbf{n} en los contornos $C^+ \cup C^-$. Por lo que el término de flujo se puede reescribir como:

$$\int_{\Gamma \cup C \cup C^+ \cup C^-} \varphi (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \varphi (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \, d\Gamma \quad (1.27)$$

Reemplazando (1.26) y (1.27) en (1.25) y acomodando términos, obtenemos:

$$\int_C (\boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_\Gamma [\varphi\mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{u}}] \cdot \boldsymbol{\zeta} \, d\Gamma \quad (1.28)$$

El término de la izquierda se interpreta como el flujo de energía mecánica que el medio (cuerpo \mathcal{B}) le realiza a Ω . El primer término de la derecha se interpreta como el cambio de energía de deformación experimentado por la parte del sólido Ω , por lo tanto, el último término, se interpreta como el flujo de energía mecánica que Ω_i le realiza a Ω . La velocidad \mathbf{u} en el contorno Γ para el observador \mathcal{O} , siguiendo una descripción euleriana en el formato estándar (según este observador, los campos son estacionarios), se escribe (ver Apéndice A):

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}\nabla\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}\nabla\mathbf{u} = -\mathbf{v}\nabla\mathbf{u} = -(\mathbf{e}_1\nabla\mathbf{u})v \quad (1.29)$$

donde, la velocidad de la punta de la fisura: $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$ con v su magnitud. Aquí se sobreentiende que la base canónica $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ del sistema de coordenadas es tal que el plano de la fisura es paralelo al versor \mathbf{e}_1 . Por lo tanto, el término: $\mathcal{F} = [\varphi\mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{u}}]\boldsymbol{\zeta}$, que es el segundo término a la derecha de (1.28), con la expresión: $(\boldsymbol{\sigma}\dot{\mathbf{u}})\boldsymbol{\zeta}$ en notación indicial dada por $-\sigma_{ij}u_{j,1}\zeta_i$, puede reescribirse como:

$$\mathcal{F} = v \int_\Gamma (\varphi\delta_{1i} - \sigma_{ij}u_{j,1})\zeta_i \, d\Gamma \quad (1.30)$$

La expresión:

$$J = -\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_\Gamma (\varphi\delta_{1i} - \sigma_{ij}u_{j,1})\zeta_i \, d\Gamma \quad (1.31)$$

es por definición la *Integral-J* (que aparece en las expresiones (1.17) y (1.19)). Por otro lado, la Tasa de Liberación de energía definida en la ecuación (1.3) se la puede reinterpretar como:

$$\mathcal{G} = -\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}}{v} = -\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_\Gamma (\varphi\delta_{1i} - \sigma_{ij}u_{j,1})\zeta_i \, d\Gamma \quad (1.32)$$

que se entiende, debido al signo negativo, como el flujo de energía que el medio le realiza a la parte del cuerpo Ω_i para extender la fisura una unidad de área.

De las ecuaciones (1.15), (1.31) y (1.32) determinamos la relación entre los parámetros J y \mathcal{G} :

$$J = \mathcal{G} = \frac{(1 - \nu^2)K_I^2}{E} \quad (1.33)$$

1.4. Evaluación de la Tasa de Liberación de Energía en forma numérica

En esta sección introducimos una técnica numérica para calcular la integral de contorno dada por (1.31). La metodología que seguimos a continuación es convencional en las aplicaciones numéricas de mecánica de fractura. La introducimos y desarrollamos en este apartado debido a que en capítulos posteriores, se utilizará como herramienta para comparar resultados con metodologías más recientes.

Primeramente definimos un dominio regular Ω tal como el presentado en la Fig.(1.6) y un subdominio singular Ω_i que contiene a la punta de la fisura. El borde de Ω está

definido por: $\partial\Omega = C \cup C^+ \cup C^- \cup \Gamma$ ver Fig.(1.6). Definimos además una función de peso arbitraria Q .

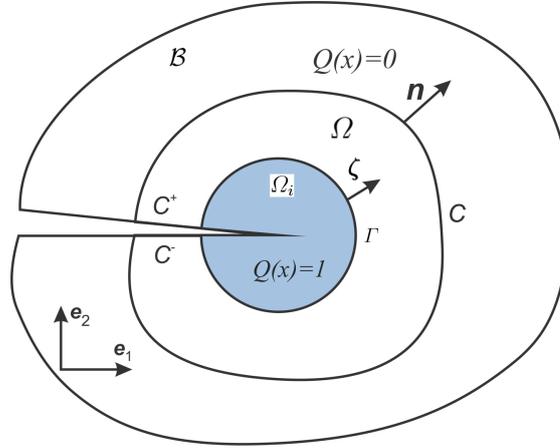


Figura 1.6: Definición del dominio Ω y de la función de peso $Q(x)$

Analicemos la siguiente integral de contorno:

$$\mathcal{I} = \int_{\partial\Omega} (\varphi\delta_{1i} - \sigma_{ij}u_{j,1})n_i Q d\Gamma \quad (1.34)$$

que debido al teorema de la divergencia, resulta:

$$\mathcal{I} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi\delta_{1i} - \sigma_{ij}u_{j,1}) Q d\Omega + \int_{\Omega} (\varphi\delta_{1i} - \sigma_{ij}u_{j,1}) \frac{\partial Q}{\partial x_i} d\Omega \quad (1.35)$$

Analicemos primero la integral de contorno (1.34). Sobre C^+ y C^- se asume condición de tracción libre. Por lo tanto:

$$\sigma_{ij}n_i = 0 \quad (1.36)$$

Además, el término $\varphi\delta_{1i}n_i$, en el mismo borde C^+ y C^- , es también nulo debido a que el versor n tiene componente $n_1 = 0$.

Luego la integral de contorno (1.34) resulta:

$$\mathcal{I} = \int_{\Gamma} (\varphi\delta_{1i} - \sigma_{ij}u_{j,1})n_i Q d\Gamma + \int_C (\varphi\delta_{1i} - \sigma_{ij}u_{j,1})n_i Q d\Gamma \quad (1.37)$$

Analicemos ahora el término derecho de (1.35). El integrando del primer término se escribe como:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi\delta_{1i} - \sigma_{ij}u_{j,1}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij}u_{j,1}) \quad (1.38)$$

Ahora asumimos que tratamos con una clase muy específica de materiales. En efecto, asumimos un material hiperelástico, en el sentido que: $\sigma = \nabla_\varepsilon\varphi$ y además que es espacialmente homogéneo. Luego, el primer término de la derecha en (1.38) resulta:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} : \frac{\partial\varepsilon}{\partial x_1} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij,1} = \sigma_{ij}u_{j,i1} = \sigma_{ij}u_{j,1i} \quad (1.39)$$

Mientras que el segundo término de (1.38) resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij}u_{j,1}) = \sigma_{ij,i}u_{j,1} + \sigma_{ij}u_{j,1i} \quad (1.40)$$

en donde hemos considerado que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, y que por balance de fuerzas $\sigma_{ij,i} = 0$. De (1.39) y (1.40), arribamos a que el primer término del lado derecho de (1.35) resulta nulo en Ω . De hecho, resulta nulo punto a punto, con lo cual es cero independiente de la función Q adoptada.

Finalmente, de (1.34) y (1.35), la integral \mathcal{I} se reduce a:

$$\mathcal{I} = \int_{\Gamma} (\varphi\delta_{1i} - \sigma_{ij}u_{j,1})n_i Q d\Gamma + \int_C (\varphi\delta_{1i} - \sigma_{ij}u_{j,1})n_i Q d\Gamma = \int_{\Omega} (\varphi\delta_{1i} - \sigma_{ij}u_{j,1}) \frac{\partial Q}{\partial x_i} d\Omega \quad (1.41)$$

Independencia del camino de integración en la evaluación de \mathcal{I}

Consideramos específicamente la función $Q = 1$ en todo Ω ($\nabla Q = \mathbf{0}$), y de (1.41) resulta que $\mathcal{I} = 0$:

$$\mathcal{I} = \int_{\Gamma} (\varphi\delta_{1i} - \sigma_{ij}u_{j,1})n_i d\Gamma + \int_C (\varphi\delta_{1i} - \sigma_{ij}u_{j,1})n_i d\Gamma = 0 \quad (1.42)$$

o lo que es lo mismo considerando los versores normales a Γ como: $\zeta = -\mathbf{n}$ respectivamente, se puede ver que:

$$\int_{\Gamma} (\varphi\delta_{1i} - \sigma_{ij}u_{j,1})\zeta_i d\Gamma = \int_C (\varphi\delta_{1i} - \sigma_{ij}u_{j,1})n_i d\Gamma \quad (1.43)$$

Esta última igualdad muestra la independencia del camino para evaluar la integral (1.34) ya que Γ y C se pueden elegir arbitrariamente. La condición es que Γ o C sean contornos que se cierran sobre C^+ y C^- . Notar aquí, que la independencia del camino de integración se ha obtenido gracias al hecho de que se anula el primer término de la derecha en la ecuación (1.35). Este término se anula luego de asumir un dominio Ω que excluye singularidades (típicamente se ha excluido de Ω la punta de la fisura), que el material es homogéneo, y además que:

$$\boldsymbol{\sigma} = \nabla_{\varepsilon}\boldsymbol{\varphi} \quad (1.44)$$

Como dijimos más arriba, la identidad (1.44) típicamente se satisface para cualquier material hiperelástico.

1.4.1. Cálculo de la Integral-J como integral de dominio

Consideremos ahora una función de peso Q , definida como sigue:

$$Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{en } x \in (\mathcal{B} \setminus \Omega) \cup C \\ 1 & \text{en } x \in \Omega_i \cup \Gamma \end{cases} \quad (1.45)$$

En este caso, la ecuación (1.41) resulta para el dominio Ω que se contrae hacia la punta de la fisura, sin incluirla ($\lim_{\Gamma \rightarrow 0}$) y en notación intrínseca:

$$-\mathbf{e}_1 \cdot \left(\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (\varphi \mathbb{1} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}) \zeta Q d\Gamma \right) = \mathbf{e}_1 \cdot \int_{\Omega} (\varphi \mathbb{1} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}) \nabla Q d\Omega \quad (1.46)$$

el dominio de integración del primer término (dado que $\nabla Q = \mathbf{0}$ en el interior de Γ y en $\mathcal{B} \setminus \Omega$) se puede extender a todo \mathcal{B} . Donde $\mathbb{1}$, es el tensor identidad de segundo orden.

Con lo cual, concluimos que:

$$J = \mathcal{G} = \mathbf{e}_1 \cdot \int_{\mathcal{B}} (\varphi \mathbb{1} - \boldsymbol{\sigma} \nabla \mathbf{u}) \nabla Q d\Omega \quad (1.47)$$

La ecuación (1.47) permite evaluar la *Integral-J* o equivalentemente, la tasa de liberación de energía \mathcal{G} mediante una implementación numérica muy simple.

Implementación numérica

Consideremos una discretización espacial mediante el método de los elementos finitos e introducimos la siguiente aproximación para Q y ∇Q :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n_{\text{nodos}}} N_i(x) \hat{Q}_i \quad ; \quad \nabla Q(x) = \sum_{i=1}^{n_{\text{nodos}}} \nabla N_i(x) \hat{Q}_i \quad (1.48)$$

Donde: n_{nodos} es el numero de nodos en la malla de elementos finitos, $N_i(x)$ son las funciones de forma estándar asociadas al nodo i , \hat{Q}_i son los valores que toma Q en cada nodo de la malla. Introduciendo estas aproximaciones y realizando las operaciones de montaje correspondientes (1.47) puede escribirse discretamente como:

$$J = \mathbf{e}_1 \cdot \int_{\Omega} (\varphi \mathbb{1} - \boldsymbol{\sigma} \nabla \mathbf{u}) \nabla \mathbf{N} \hat{Q} d\Omega \quad (1.49)$$

A través de esta última expresión puede observarse que J puede calcularse fácilmente a través de un post-proceso, una vez conocidos $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{u} y ε en cada punto de Gauss de la malla considerada.

1.4.2. Diseño de las mallas de elementos finitos

Para resolver numéricamente los problemas de mecánica de fractura lineal elástica a través del método de elementos finitos deben observarse algunas cuestiones previas de especial importancia. Por un lado debe considerarse el grado de interpolación polinomial adecuado de los elementos finitos y por otro lado el diseño de la malla en las cercanías de la punta de la fisura.

En la bibliografía especializada, se enumera gran cantidad de antecedentes sobre la implementación numérica de (1.49). En general se recomienda el uso de elementos finitos de alto orden (ver (Anderson, 2000),(Moran y Shih, 1987)). En particular para los casos 2D, se menciona el uso de la familia de elementos finitos cuadriláteros cuadráticos de 9 nodos Q_2 . En esta tesis se han implementado y utilizado con buenos resultados, elementos cuadriláteros con interpolación cuadrática de 8 nodos S_2 .

El diseño de la malla en las cercanías de la punta de una fisura, está ligado a capturar el gradiente de tensiones que se produce debido a la singularidad. Para ello, en primera medida se debe realizar un cuidadoso diseño, en forma radial, con refinamiento hacia la punta de la fisura, tal como se presenta en la Fig.(1.7 a). Los elementos que convergen en la punta de la fisura se colapsan en forma triangular, como se muestra en las Fig.(1.7 b) y (1.7 c). Si bien estos cuadriláteros se colapsan, mantienen la cantidad de nodos respectivamente, por ejemplo en la Fig. (1.7 b) se esquematiza, un elemento que formará la punta de la fisura, los nodos numerados 1, 8, 4 se mueven a la misma coordenada quedando en la misma posición, pero resultan ser nodos independientes, ver Fig. (1.7 c). Con esta técnica, los nodos de la punta conservan la capacidad de desplazarse en forma independiente a partir de una posición inicial común.

Otra consideración importante que debe hacerse es sobre la posición de los nodos intermedios de los elementos que forman la punta de la fisura. Se ha demostrado (Anderson, 2000) que desplazar éstos a la posición que corresponde a $0,25l$ (l es el lado del elemento), el elemento finito cuadrático produce deformaciones $\varepsilon = \mathcal{O}(1/\sqrt{r})$, que es la singularidad que se tiene en la solución analítica lineal elástica para la zona que rodea la punta de la fisura. Este hecho se esquematiza en la Fig.(1.7 b) donde los nodos 5 y 7 se desplazan hacia la punta de la fisura, quedando a $0,25l$.

Esta técnica de diseño de malla de elementos finitos se utiliza, en mecánica de fractura lineal elástica, a partir de la implementación del método de integral de dominio desarrollado en la sección anterior. Se muestra en capítulos posteriores, ejemplos de aplicación de estos criterios y se observará que el buen diseño de la malla de elementos finitos tiene una notable importancia en obtener resultados tecnológicamente válidos (con hasta menos de un 2 % de error).

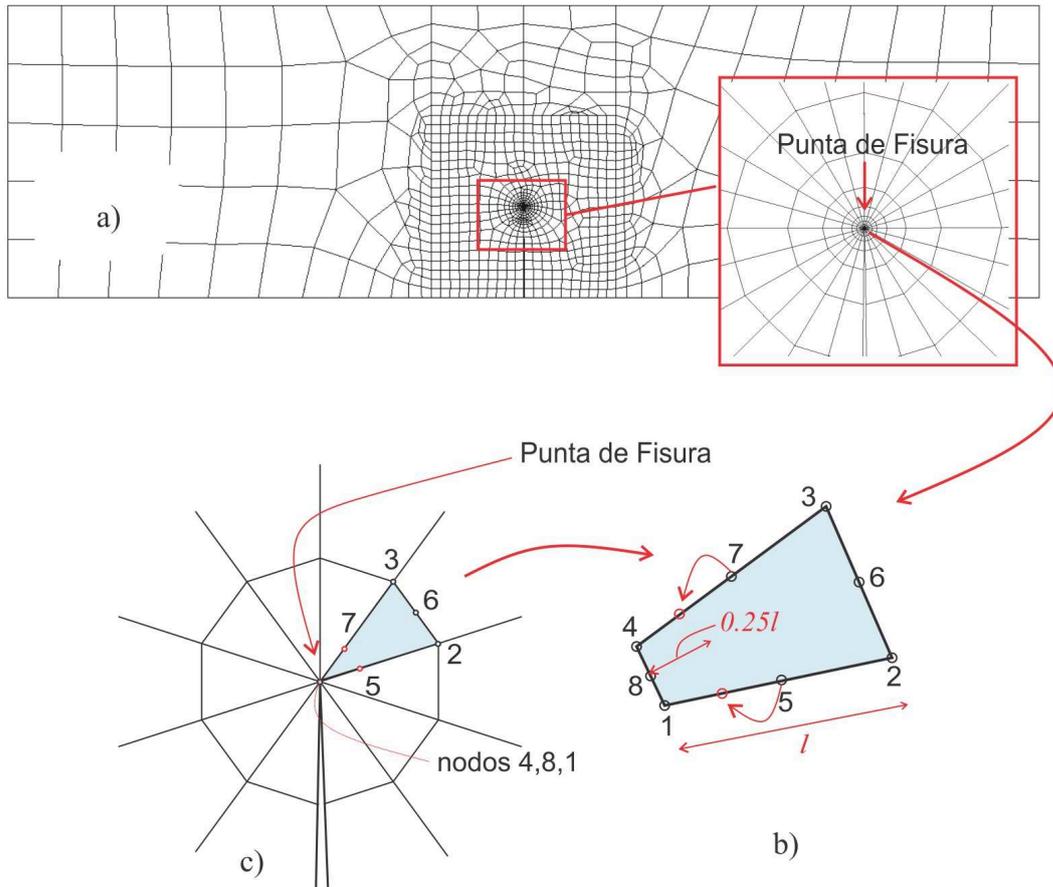


Figura 1.7: Diseño de la malla de elementos finitos para problemas de fractura lineal elástica. a) aspecto general de la malla y estructurado en las cercanías de la punta de la fisura. b) y c) Colapso de elementos cuadriláteros que forman la punta de la fisura y desplazamiento de los nodos centrales de dichos elementos

1.5. Las ramas de la mecánica de fractura y zonas de validez

Podemos mencionar en principio que los conceptos y parámetros de la mecánica de fractura introducidos en este primer capítulo, son extensamente utilizados en las industrias aeronáutica, aeroespacial, nuclear en el diseño y mantenimiento de plantas de generación de potencia y en industrias como la química y la petrolera.

Desde un punto de vista de la escala de estudio, podemos enmarcar a la mecánica de fractura dentro de las escalas macroscópica y mesoscópica. Es decir abarca el estudio de defectos visibles al ojo humano. Las variables que se utilizan para cuantificar problemas de mecánica de fractura son la tenacidad a fractura del material K_{IC} , el tamaño del defecto y el estado de tensiones generales aplicadas en el cuerpo. En función de las condiciones del problema a resolver y las propiedades de los materiales intervinientes, podemos dividir a la mecánica de fractura en dos familias o ramas.

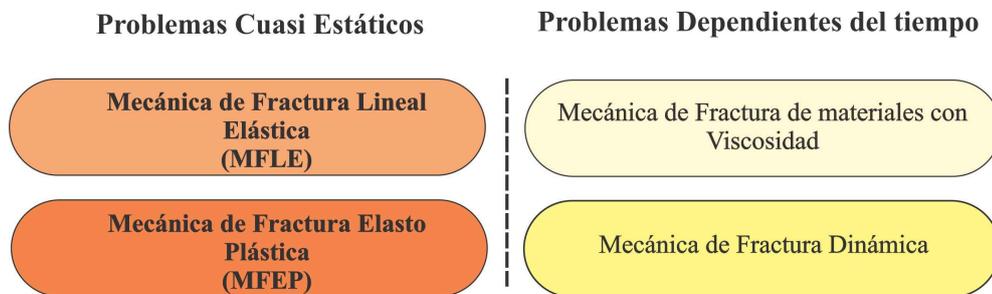


Figura 1.8: División de las distintas ramas de la Mecánica de Fractura

Estas ramas o familias se esquematizan en la Fig.(1.8), donde se muestra una división principal entre la mecánica de fractura independiente del tiempo, aplicable a los casos donde el incremento de solicitaciones se realiza en forma cuasi-estática y una segunda rama principal de la mecánica de fractura dependiente del tiempo. Dentro de la primera podemos situar a la mecánica de fractura lineal elástica y a la mecánica de fractura elasto plástica o mecánica de fractura no lineal. La segunda rama incluye los problemas o casos donde las solicitaciones o estados de carga se dan en forma dinámica, o las propiedades del material son dependientes del tiempo, como es el caso de materiales con viscosidad.

En esta tesis sólo se estudian las metodologías ligadas a la mecánica de fractura en problemas cuasi estáticos. Esto lleva a definir algún tipo de convencionalismo para establecer límites entre una y otra rama a la hora de resolver un problema.

Frente a un determinado problema, que puede ser de diseño o verificación de un componente o elemento estructural, debe considerarse si se resuelve mediante las técnicas provistas por la Mecánica de Fractura o por métodos tradicionales de estados límites, aunque igualmente existan defectos. Consideraremos entonces dos criterios para encasillar un problema de fractura dentro de una determinada técnica:

- * El primer criterio parte de tomar en cuenta la relación entre la tenacidad K_{IC} y la tensión de falla σ .

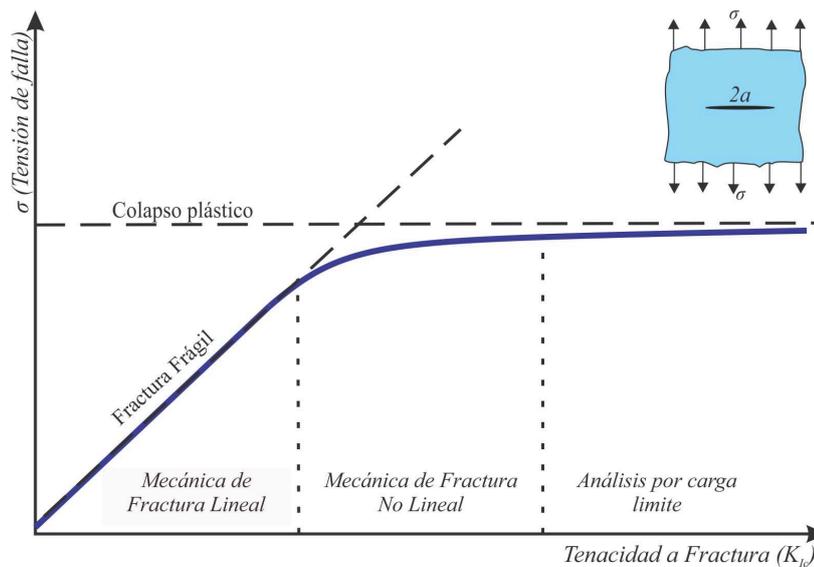


Figura 1.9: Diferentes zonas de aplicación de la mecánica de fractura en función de la tenacidad K_{IC} , para una placa fisurada, de dimensiones constantes. El eje de ordenadas se refiere a una tensión estructural representativa del estado de pérdida de capacidad portante.

Supongamos una placa fisurada de tamaño fijo, que se somete a carga hasta falla. Si el material de esta placa tiene una tenacidad baja, la respuesta estructural será gobernada por un mecanismo de fractura frágil, y la variación de tensión será lineal con la tenacidad, tal como se muestra en la primera parte de la curva esquematizada en la Fig.(1.9), es decir el problema se resuelve como un problema de Mecánica de Fractura Lineal Elástica (MFLE).

Si por el contrario, el material de dicha placa tiene una tenacidad alta, el problema pasa a estar gobernado por la tensión de colapso plástica, es decir deja de tener influencia considerar la presencia de la fisura y por lo tanto el problema se resuelve como un problema de estados límite. Este fenómeno se esquematiza en el extremo derecho de la curva mostrada en la Fig.(1.9).

Alternativamente, para niveles intermedios de la tenacidad del material a los antes descritos, el comportamiento estructural de la placa, tendrá una variación no lineal de la tensión de falla con respecto a la tenacidad. En ese caso, el problema se resuelve como un problema de Mecánica de Fractura No Lineal (MFNL), o mecánica de fractura elasto plástica.

- * La segunda convención o criterio, se basa en el hecho que para un material determinado, el tamaño del espécimen analizado modifica el criterio del problema. Si se consideran estructuras fisuradas de distintos tamaños y del mismo material, sometidas a carga de colapso se puede describir la fenomenología a partir de la curva mostrada en la Fig.(1.10), que esquematiza la curva $\log \sigma$ en función de $\log D$, donde D es una dimensión representativa de la estructura que se analiza. Se observa que a medida que aumenta el tamaño de la placa, la influencia de la plasticidad en la punta de la fisura disminuye. Con el aumento de la magnitud D , el problema pasa de ser un problema controlado por estados límites, a un problema de mecánica de

fractura no lineal. Si el tamaño de D sigue incrementándose, pasa a un nivel donde la plasticidad no tiene influencia y por lo tanto el tratamiento del problema puede abordarse mediante la teoría de MFLE (mecánica de fractura lineal elástica). En cuyo caso la variación de $\log \sigma$ vs. $\log D$ resulta una recta de pendiente $-1/2$, típica de esta teoría.

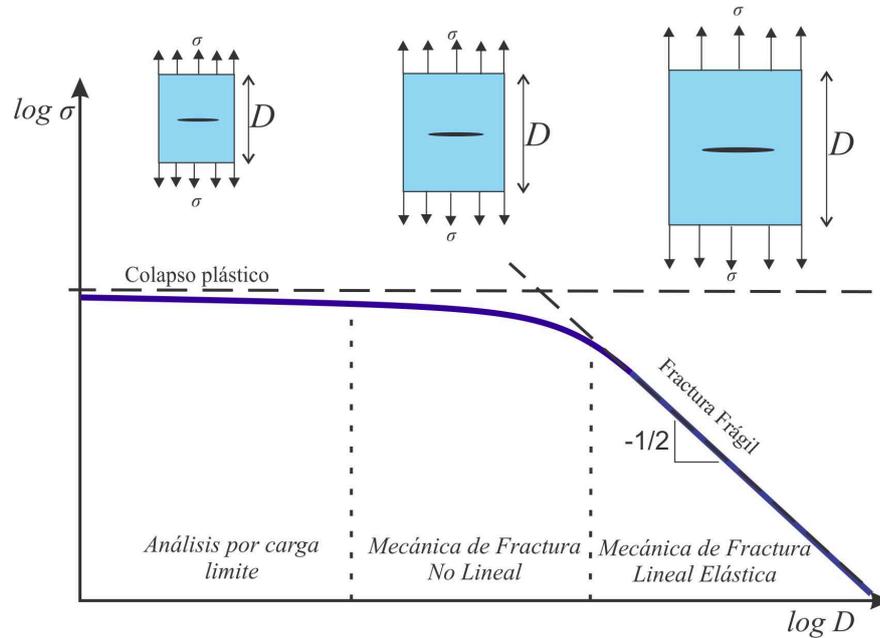


Figura 1.10: Diferentes zonas de aplicación de la mecánica de fractura, en función del tamaño D representativo de la estructura, para placas fisuradas del mismo material. La pendiente de $-1/2$ de la recta que identifica la MFLE es típica de esta teoría.

Capítulo 2

Aplicación del concepto de Fuerzas Configuracionales en Mecánica de Fractura Lineal Elástica

2.1. Introducción

En el capítulo precedente se mencionó que uno de los parámetros fundamentales utilizados por la mecánica de fractura para evaluar la intensidad de los campos alrededor de una fisura es el Factor de Intensidad de Tensiones K_I . Alternativamente, el parámetro que juega ese rol es la tasa de liberación de energía \mathcal{G} relacionada con la *Integral-J*. Se introdujo además, las ecuaciones para evaluar dichos parámetros en forma numérica y se desarrolló el método clásico de la Integral de Dominio propuesto por (Moran y Shih, 1987) ampliamente difundido y utilizado en la solución numérica de problemas de mecánica de fractura. Una gran mayoría de códigos comerciales tiene disponible esta técnica.

Este capítulo trata sobre una metodología más reciente desarrollada para evaluar los parámetros fractomecánicos clásicos: el método de fuerzas configuracionales. Introducimos el concepto de fuerza configuracional en un contexto general de defectos materiales y presentamos las ecuaciones de balance que gobiernan su distribución.

El concepto de fuerza configuracional ha sido estudiado y formalizado por (Gurtin, 2000) y coautores en varios trabajos desde hace al menos 15 años, y utilizado en varios contextos, ver por ejemplo: (Mueller et al., 2002), (Steinmann, 2000), aunque se puede considerar los estudios de Eshelby en la década del 60, como los aportes originales de este concepto.

En este capítulo, las ecuaciones de balance, se implementan en problemas elásticos cuasi-estáticos, utilizando el Método de los Elementos Finitos. Se evalúan los parámetros fractomecánicos clásicos a través de las fuerzas configuracionales nodales del sistema discreto. En las primeras secciones, se introducen los conceptos teóricos que asocian a la *Integral-J* con el Tensor de Tensiones de Eshelby y las Fuerzas configuracionales (Mueller y Maugin, 2002). Luego se implementan numéricamente las ecuaciones presentadas, a través del método de elementos finitos. Finalmente, se exponen ejemplos en los que se comparan las aproximaciones numéricas del método de fuerzas configuracionales, con las ofrecidas por el de integral de dominio (presentado en la *secc. 1.4*) y con soluciones analíticas obtenidas de bibliografía (Anderson, 2000).

2.2. Fuerzas configuracionales en medios elásticos - Evaluación de la Integral-J

Consideremos un sólido con defectos móviles. El movimiento, o cambio de configuración de estos defectos induce una variación en la energía de deformación en el sólido que será explícitamente considerada al modelar la función energía de deformación $\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$. La dependencia explícita de esta función con el punto \mathbf{x} , considera la posible no homogeneidad espacial del material (Mueller y Maugin, 2002).

Evaluamos el gradiente espacial de la función de energía libre como sigue:

$$\nabla\varphi = \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon} + (\partial_x \varphi)_{expl} \quad (2.1)$$

en donde hemos utilizado la identidad: $\boldsymbol{\sigma} = \partial\varphi/\partial\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}}\varphi$. Por simplicidad de notación, identificaremos al operador $\nabla(\cdot)$ con el gradiente espacial de la variable. Los gradientes respecto a otras variables serán identificadas con un subíndice acompañando al operador ∇ . Note que $\partial_x \varphi$ es la derivada parcial de la función energía, fijando el argumento $\boldsymbol{\varepsilon}$. Este término considera explícitamente la variación espacial debido a la heterogeneidad del material. Sin pérdida de generalidad, a continuación consideramos materiales espacialmente homogéneos, con lo que $(\partial_x \varphi)_{expl} = 0$.

El segundo término de la ecuación (2.1) puede reescribirse como:

$$\boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}) - \nabla \mathbf{u}^T \nabla \boldsymbol{\sigma} \quad (2.2)$$

donde utilizamos la ecuación de compatibilidad entre el desplazamiento \mathbf{u} y la deformación: $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u}$. De la ecuación de balance de la cantidad de movimiento para un problema cuasi-estático, se tiene la ecuación de Cauchy:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (2.3)$$

siendo \mathbf{b} la fuerza por unidad de volumen y despreciándose los términos inerciales. Reemplazando esta relación en (2.2) y luego en (2.1), resulta:

$$\nabla\varphi - \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{b} \nabla \mathbf{u} \quad (2.4)$$

y reagrupando términos:

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbb{1} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{b} \nabla \mathbf{u} \quad (2.5)$$

La expresión (2.5) se interpreta como una ecuación de balance de cantidad de movimiento generalizada, en forma local, dada por la siguiente expresión:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{g} = 0 \quad (2.6)$$

donde $\boldsymbol{\Sigma}$ se denomina tensor momento de energía (Eshelby), y se define como sigue:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \varphi \mathbb{1} - \nabla \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (2.7)$$

El segundo término de la derecha de (2.6) se denomina fuerza configuracional o ma-

terial:

$$\mathbf{g} = -\mathbf{b}\nabla\mathbf{u} \quad (2.8)$$

Se observa que dimensionalmente, el tensor momento de energía Σ , definido en (2.7) tiene unidades de tensión (N/m^2), y que en general es no simétrico, aunque sí lo es para elasticidad isotrópica.

Si introducimos la definición (2.7) en la (1.31), queda asociada la tasa de liberación de energía con el tensor momento de energía como se muestra a continuación:

$$J = \mathbf{e}_1 \cdot \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \Sigma \mathbf{n} \, d\Gamma = \mathbf{e}_1 \cdot \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \Sigma \, d\Omega \quad (2.9)$$

siendo \mathbf{e}_1 el versor unitario en el plano de la fisura y apuntando hacia la dirección de avance. El contorno Γ es la curva que circunda la punta de la fisura, en el interior de Ω , como se ha mostrado en el capítulo precedente, y el vector unitario \mathbf{n} es ortogonal a Γ y apunta hacia la fisura.

En la última igualdad hemos aplicado el teorema de Green; y de la ecuación (2.6) arribamos a:

$$J = -\mathbf{e}_1 \cdot \int_{\Omega_i} \mathbf{g} \, d\Omega = -\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{f}_{tip} \quad (2.10)$$

Observe que considerando un sólido elástico, espacialmente homogéneo ($\partial_{\mathbf{x}}\varphi \equiv 0$) y sin fuerzas de cuerpo ($\mathbf{b} \equiv 0$), luego $\mathbf{g} \equiv 0$ en todo punto no singular. No obstante, el hecho que (2.10) en la punta de la fisura, resulte $J \neq 0$, significa que surge una fuerza configuracional $\mathbf{f} \neq 0$ discreta posicionada en la punta de la fisura, cuya componente en la dirección \mathbf{e}_1 resulta ser $-J$. De aquí inferimos que siendo \mathbf{f}_{tip} no nula, la expresión (2.10) impone que \mathbf{g} debe ser de orden $\mathcal{O}(r^{-1})$ en la punta de la fisura. Podemos interpretar que \mathbf{f}_{tip} es una fuerza configuracional que se opone al avance de la fisura.

Atendiendo al análisis dimensional de las distintas magnitudes involucradas en (2.9) y en (2.10), observamos que la fuerza configuracional (por unidad de volumen) \mathbf{g} es (N/m^3). En los análisis que realizamos de fisuras en este capítulo, en particular las ecuaciones (2.9) y (2.10), se refieren a estados planos, por unidad de espesor. Se entiende a Ω como un área, de dimensión (m^2), y a Γ como una curva, de dimensión (m). Por lo tanto, la dimensión de \mathbf{f} en (2.10) es (N/m) = (J/m^2), fuerza por unidad de espesor, o equivalentemente, energía por unidad de área (de avance de fisura).

Note además que \mathbf{f}_{tip} , por ser una entidad vectorial, contiene mayor información respecto a la distribución de campos en la proximidad de la punta de la fisura, que la que tiene la magnitud escalar J .

Finalmente, note que en las interfaces de materiales distintos, $\partial_{\mathbf{x}}\varphi \neq 0$. Por lo que es de esperar una distribución de fuerzas configuracionales en la misma interfase, como se esquematiza en la Fig.2.1.

2.3. Principio Variacional e implementación numérica

En esta sección se presenta la implementación numérica de la ecuación de balance de fuerzas configuracionales (2.6) que permitirá resolver el parámetro J a través de una técnica de elementos finitos.

Sea Ω el dominio de un sólido que incluye a la punta de una fisura. Introduzcamos un

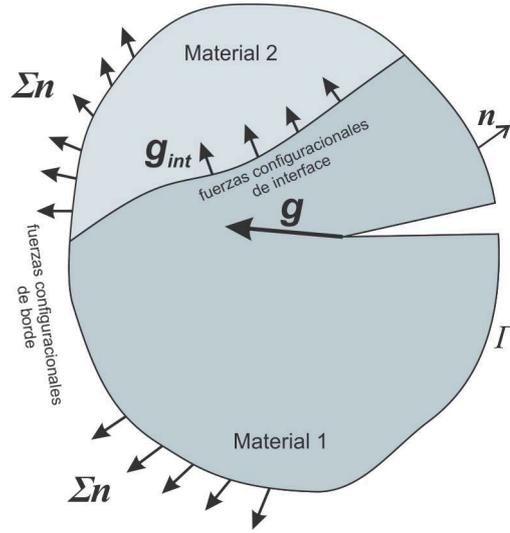


Figura 2.1: Esquema de Fuerzas configuracionales que aparecen en un cuerpo fisurado, compuesto por dos materiales. Aquí las fuerzas configuracionales de interface g_{int} , están asociadas al término $\partial_x \varphi \neq 0$. Se esquematizan las fuerzas configuracionales de borde relacionadas con el término Σn y la fuerza configuracional que aparece en la punta de la fisura g .

pseudo principio de las potencias virtuales como sigue. Definimos un espacio de funciones: $\mathcal{V} = \{\delta \mathbf{u} \mid \delta \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1\}$ y proponemos la siguiente ecuación variacional:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \Sigma) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = 0 \quad ; \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad (2.11)$$

La expresión (2.11) debe ser interpretada como una aproximación tipo Galerkin de la ecuación de balance local (2.6). Desde este punto de vista, \mathcal{V} resulta el espacio de las funciones de test, suficientemente suaves para garantizar la existencia de la forma débil de (2.11), que se desarrolla a continuación.

Aplicando el teorema de Green a (2.11), podemos reescribir esta ecuación como sigue:

$$\int_{\Omega} (\Sigma \cdot \nabla \delta \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \Sigma \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad ; \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad (2.12)$$

siendo \mathbf{n} el vector exterior al contorno Γ_{Ω} de Ω .

Interpolamos, mediante elementos finitos el campo $\delta \mathbf{u}$ como sigue:

$$\delta \mathbf{u}(x) = \sum_{i=1}^{n_{nodos}} N_i(x) \delta \hat{\mathbf{u}}_i \quad (2.13)$$

donde n_{nodos} es el numero de nodos de la malla de elementos finitos, $N_i(x)$ son las funciones de forma standard asociadas al nodo i , y $\delta \hat{\mathbf{u}}_i$ es el vector de parámetros del mismo nodo.

Introduciendo esta interpolación en (2.12), se llega finalmente a la siguiente ecuación matricial:

$$\underbrace{\bigwedge_{e=1}^{nelem} \int_{\Omega^e} (\boldsymbol{\Sigma}[\nabla \mathbf{N}^e]) d\Omega^e}_{\mathbf{F}_{conf}^{int}} = \underbrace{\bigwedge_{e=1}^{nelem} \int_{\Omega^e} \mathbf{g}[\mathbf{N}^e] d\Omega^e}_{\mathbf{F}_{conf}^g} + \underbrace{\bigwedge_{e=1}^{nelem} \int_{\Gamma_{\Omega}^e} \mathbf{n}\boldsymbol{\Sigma}[\mathbf{N}^e] d\Gamma_{\Omega}^e}_{\mathbf{f}^S} \quad (2.14)$$

donde \bigwedge es la operación de montaje de matrices o vectores elementales, $nelem$ es el número de elementos finitos de la malla, Ω^e es el dominio de un elemento finito, $[\nabla \mathbf{N}^e]$ es la matriz de los gradientes de funciones de forma elemental y $[\mathbf{N}^e]$ la matriz de funciones de forma elemental.

En (2.14) hemos identificado al vector global \mathbf{F}_{conf}^{int} como siendo la fuerza configuracional debido a la divergencia del tensor momento de energía, \mathbf{F}_{conf}^g es el vector global de fuerzas configuracionales distribuido en el volumen y \mathbf{f}^S es el vector de fuerzas configuracionales distribuidos en el contorno del cuerpo, y que deben ser impuestas por un agente exterior para mantener el balance correspondiente (en un completo paralelismo con lo que sucede con las tracciones convencionales en el borde del cuerpo). También, haciendo el paralelismo con el problema de balance de fuerzas convencionales derivado de la metodología de elementos finitos, identificamos \mathbf{F}_{conf}^{int} como las fuerzas configuracionales internas, mientras que la suma $\mathbf{F}_{conf}^g + \mathbf{f}^S$ identifica las fuerzas configuracionales externas.

Observe que mediante (2.14), podemos escribir la Integral-J en forma discreta como:

$$J = \mathbf{e}_1 \cdot \bigwedge_{e=1}^{e_{tip}} \int_{\Omega^e} \boldsymbol{\Sigma}[\nabla \mathbf{N}_i^e] d\Omega^e \quad (2.15)$$

siendo e_{tip} el set de elementos que tienen algún nodo asociado a la punta de la fisura y \mathbf{N}_i^e son las funciones de forma de esos elementos que corresponden a dicho nodo.

Es importante observar que el Método de los Elementos Finitos evalúa la fuerza configuracional J en un sentido débil.

2.4. Ejemplos numéricos

En esta sección se muestran los resultados obtenidos para la *Integral-J* a partir del método de fuerzas configuracionales y el método de la integral de dominio presentado en la *secc. 1.3*.

Con el desarrollo de estos ejemplos se pone en evidencia la influencia del diseño de la malla de elementos finitos principalmente para el método de integral de dominio.

El primer ejemplo es una validación numérica de la metodología propuesta. Se calcula J para una viga entallada a flexión simple (SENB por su siglas en inglés) y se comparan los resultados numéricos con el resultado analítico obtenido de la literatura (Anderson, 2000). Se realiza un análisis de error de los resultados en función del diseño de la malla de elementos finitos. En el segundo ejemplo se muestra un análisis similar para una probeta compacta normalizada (Compact Specimen).

Ambos casos se estudian en el campo lineal elástico y con hipótesis de deformación plana.

Finalmente se presenta un tercer ejemplo, en donde se analiza la convergencia del

método de fuerzas configuracionales a través de una malla de elementos finitos con diseño regular, y se muestra la convergencia del método con el diseño de una malla estándar.

2.4.1. Ejemplo 1 - Viga a flexión simple con fisura de borde (SENB)

Sea el espécimen SENB, con la geometría que se muestra en la Fig.(2.2). Sus dimensiones son: $s = 28\text{cm}$, $w = 8\text{cm}$, $a = 2,50\text{cm}$ y espesor unitario.

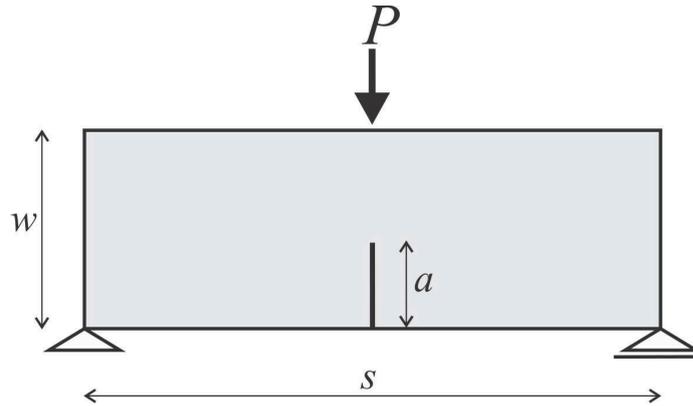


Figura 2.2: Probeta SENB, con dimensiones $a = 2,5$ (cm), $w=8,0$ (cm), $s=28,0$ (cm) y espesor unitario

Primero se calcula la *Integral-J* mediante el factor de Intensidad de tensiones K_I :

$$J = \frac{K_I^2}{E'} \quad ; \quad E' = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \quad (2.16)$$

siendo que K_I se obtiene de tabla (Anderson, 2000) con 2.17 y 2.18 donde: E es el módulo de Young del material, ν el coeficiente de Poisson del material, w la altura de la viga, a la longitud de la fisura y B es el espesor de la probeta:

$$K_I = \frac{P}{B\sqrt{w}} f(a/w) \quad (2.17)$$

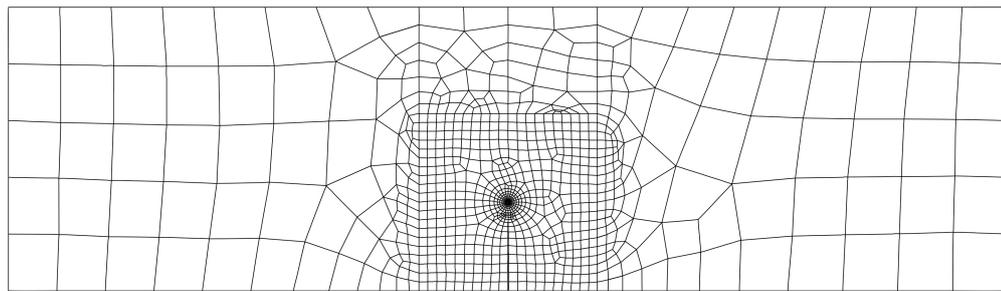
$$f(a/w) = \frac{3 \frac{s}{w} \sqrt{\frac{a}{w}}}{2 \left(1 + 2 \frac{a}{w}\right) \left(1 - \frac{a}{w}\right)^{3/2}} \left[1,99 - \frac{a}{w} \left(1 - \frac{a}{w}\right) \left\{ 2,15 - 3,93 \frac{a}{w} - 2,7 \left(\frac{a}{w}\right)^2 \right\} \right] \quad (2.18)$$

En el modelo se utiliza un material elástico lineal con modulo de Young $E = 2,1 \times 10^6$ (kN/cm^2), $\nu = 0,30$. Se aplica una carga de 100 (kN), de la ecuación (2.16)) se puede observar que los resultados de J están normalizados por E y ν . El valor analítico de tenacidad arribado con estos parámetros y las dimensiones geométricas descritas resulta: $K_I = 709,82$ [$KNm^{-3/2}$].

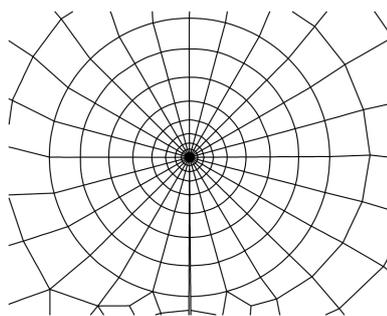
A continuación, evaluamos J mediante elementos finitos utilizando la metodología de la Secc. 1.4 y la Secc. 2.3.

La geometría se discretiza con una malla de elementos finitos utilizando elementos serendipitos S_2 de ocho nodos con interpolación cuadrática, siguiendo la descripción pre-

sentada en la *subsecc.1.4.2*. La malla se densifica en los alrededores de la punta de la fisura a través de una estructura radial, como se muestra en la Fig.(2.3). Además en la punta de la fisura todos los elementos se colapsan a una forma triangular con los nodos medios de los lados, que convergen al lado colapsado corridos hacia la punta de fisura a la posición $r = \alpha l$, siendo α un coeficiente que varía entre 0 y 1, tal como se muestra en la Fig (2.4). Los datos del material son los mismos utilizados en el cálculo analítico y que antes se mencionan.



(a) Vista general de la malla



(b) Concentración radial de los elementos hacia la punta de la fisura

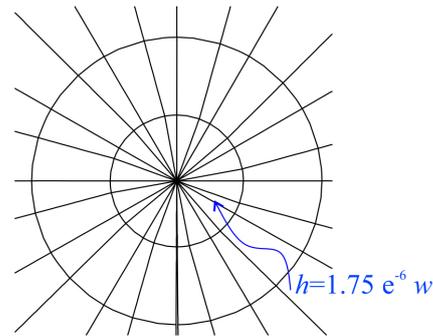
(c) Tamaño del menor elemento utilizado en la malla con respecto al tamaño w de la probeta

Figura 2.3: Malla de elementos finitos S2 para una probeta SENB

En este ejemplo se analiza la convergencia numérica para el método de fuerzas configuracionales y el método clásico de integral de dominio, en función de la variación del coeficiente α a fin de determinar la influencia de la posición del nodo desplazado en los resultados numéricos. Se comprueba el argumento mencionado en la *secc.1.4.2*, sobre la posición de los nodos medios en los elementos colapsados. En este caso y según la bibliografía $\alpha = 0,25$ corresponde al valor en el que el elemento finito cuadrático produce deformaciones $\epsilon = \mathcal{O}(1/\sqrt{r})$.

Los resultados del análisis de convergencia para distintos valores del coeficiente α se exponen en la Fig.(2.5).

Se observa que el valor más exacto se consigue para los nodos en la posición $r/l = 0,25$ con un error frente al valor analítico de 2.23 % para valores menores de la relación r/l el valor de obtenido a través las fuerzas configuracionales cae drásticamente a un valor menor al 50 % para la relación $r/l = 0,15$. Para valores mayores a 0,25 el error aumenta hasta un 9.09 % para la relación $r/l = 0,60$. El método de fuerzas configuracionales permite por lo tanto mostrar en una forma cualitativa cual es la mejor posición para los nodos medios

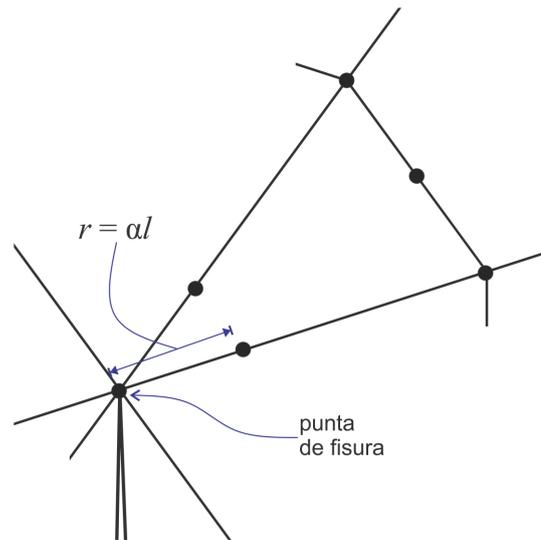


Figura 2.4: Detalle de la posición αl , en la malla de elementos finitos de los alrededores de la punta de la fisura

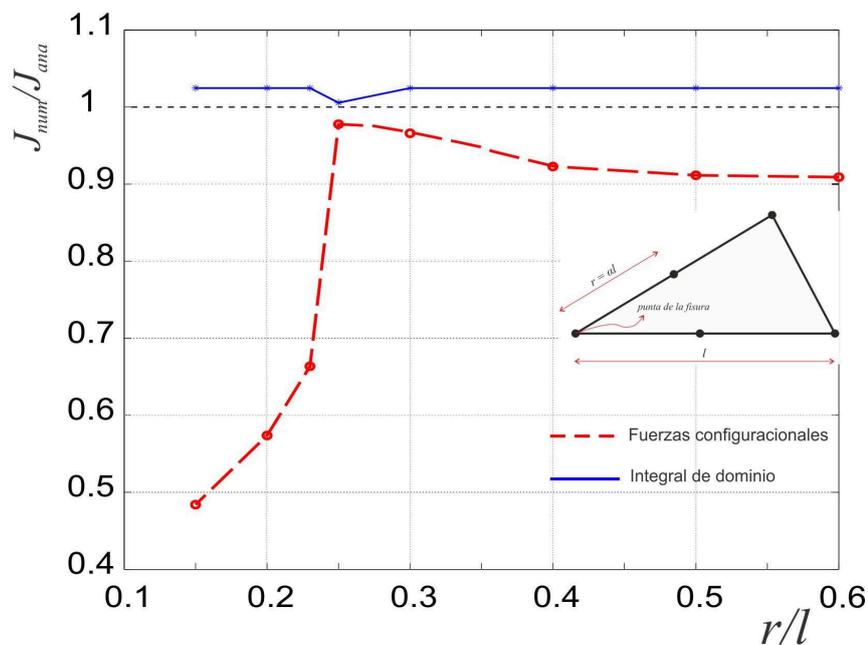


Figura 2.5: Comparación de la integral-J obtenido por los métodos de integración y fuerzas configuracionales en función de la relación r/l y en una malla fija. El método de las fuerzas configuracionales brinda mayor información sobre los puntos en donde se obtiene el mejor valor de la integral-J, para la malla utilizada en este ejemplo.

de los elementos que convergen a la punta de la fisura, en este tipo de diseño clásico para la malla de elementos finitos. Se desprende también de este ejemplo que el método de la integral de dominio muestra no ser demasiado influenciado por la posición de los nodos en general, aunque el valor más exacto se obtuvo para $r/l = 0,25$, tal como se prevé.

La metodología basada en la integral de dominio presentada en la sección(1.4), se ha calculado utilizando el dominio de integración delimitado por la función Q dada en la fórmula (1.45) y que se muestra en la Fig.(2.6). El dominio Ω_i se asigna fijando la

distancia a la punta de la fisura a través de un “radio”. En Ω_i , la función Q toma valor unitario y fuera de este dominio, toma valor nulo. Se adoptó para este caso un valor para el radio de $1/16w$, con w el alto de la viga (ver Fig.2.2).

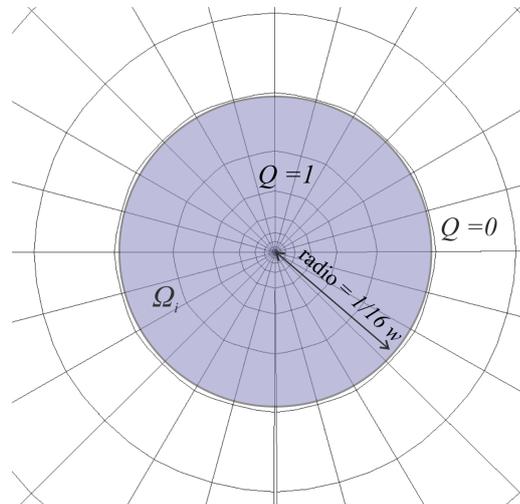


Figura 2.6: Función Q , sobre una malla de elementos finitos

Las fuerzas configuracionales dadas por (2.15) se muestran en la Fig.(2.7). Las fuerzas cuyos módulos son más significativos, son las que aparecen en la punta de la fisura, sumando las componentes en dirección contraria a la propagación de la fisura se obtiene el valor de J . El hecho de que aparezcan varias fuerzas en la punta de la fisura y no una única de módulo importante, como las ecuaciones presentadas lo predicen, es debido a que la punta de la fisura está representada por varios nodos (por el colapso de los elementos finitos), tal como se explica en la *Secc. 1.4*. El método de fuerzas configuracionales pone de manifiesto la calidad del diseño de la malla, ya que las únicas fuerzas configuracionales que deben permanecer no nulas, son las que aparecen en la punta de la fisura. Las restantes fuerzas que aparecen en el interior del cuerpo representan un residuo. El tamaño de dicho residuo está relacionado en forma directa con el diseño de la malla y con la sensibilidad con que se resuelve el problema. En este ejemplo se utiliza la misma malla para ambos métodos a fin de comparar la convergencia bajo las mismas condiciones de modelado numérico. Más adelante se muestra la convergencia del método de fuerzas configuracionales con una malla de elementos finitos regular.

En la Fig.(2.7), se muestra el comportamiento de las fuerzas configuracionales para distintas posiciones de los puntos medios de los elementos colapsados donde se observa que para $r/l = 0,25$ se obtiene un mínimo desequilibrio de las fuerzas configuracionales en el interior del cuerpo y en los nodos de la vecindad de la punta de la fisura. Esto coincide con el menor error en la obtención de J si se compara con el resultado analítico.

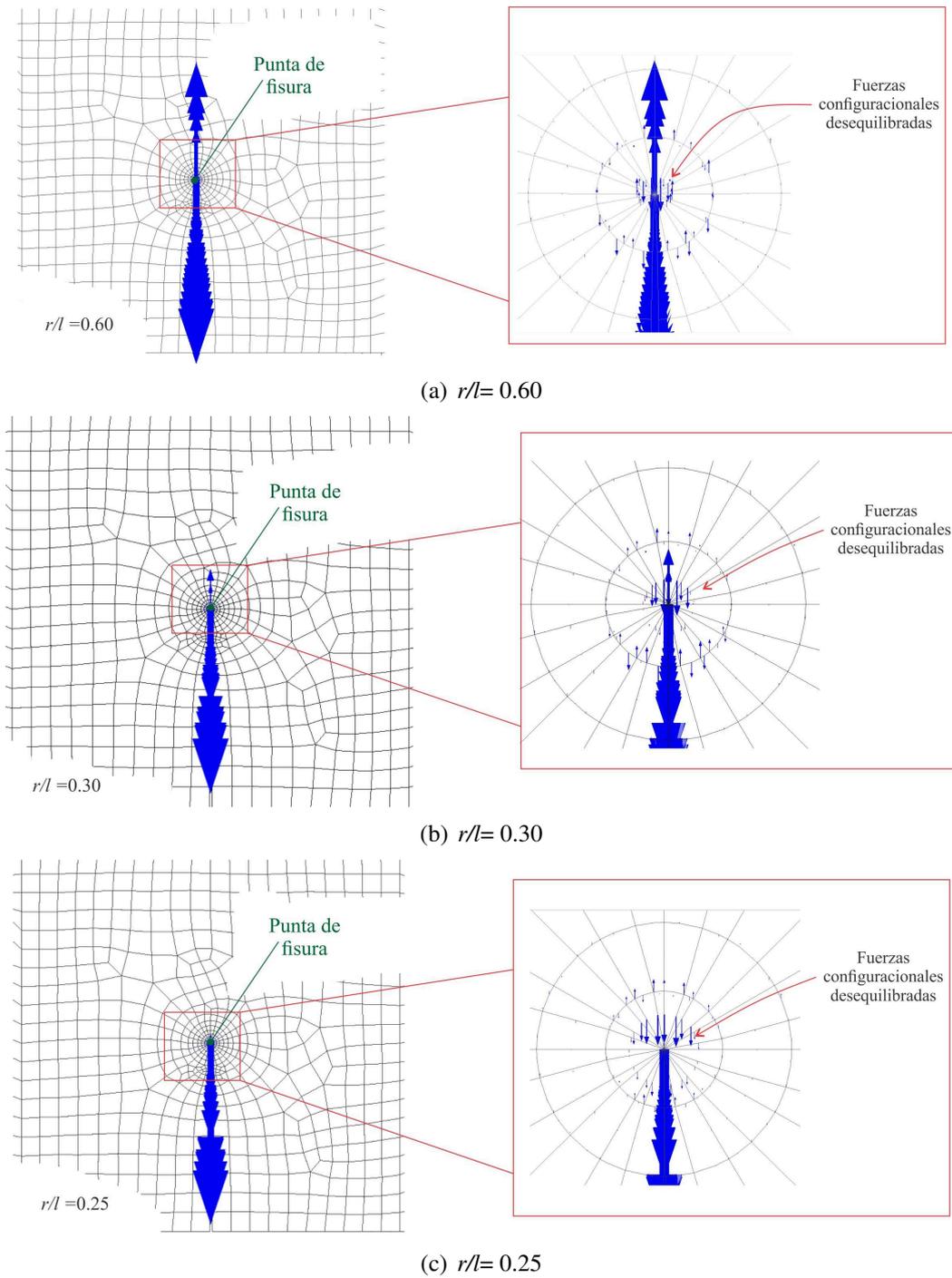


Figura 2.7: Comportamiento de las fuerzas configuracionales para distintos valores de la relación r/l

2.4.2. Ejemplo 2 - Probeta compacta

Se analiza ahora el modelo de una probeta compacta con la geometría que se muestra en la Fig.(2.8 a), cuyas dimensiones para este caso $w = 5$ (cm), $a = 2,5$ (cm) y espesor unitario. El material utilizado para este ejemplo es elástico con las siguientes características: módulo de Young $E = 2,1e4$ (kN/cm²), $\nu = 0,30$.

Como en el caso del ejemplo previo, se considera una geometría normalizada para análisis de fractura, con solución analítica para la determinación de los parámetros fractomecánicos en estudio. Se cotejan los valores obtenidos numéricamente para tres mallas. Las ecuaciones (2.16) y (2.17) son válidas en este caso con la función $f\left(\frac{a}{w}\right)$ dada como:

$$f(a/w) = \frac{2 + \frac{a}{w}}{\left(1 - \frac{a}{w}\right)^{3/2}} \left[0,88 + 4,64 \left(\frac{a}{w}\right) - 13,32 \left(\frac{a}{w}\right)^2 + 14,72 \left(\frac{a}{w}\right)^3 - 5,60 \left(\frac{a}{w}\right)^4 \right] \quad (2.19)$$

donde en (2.19) w = ancho de la probeta; a = longitud de la fisura.

El diseño de la malla de elementos finitos (serendípitos S_2) responde a características similares a las del ejemplo anterior siguiendo los lineamientos mencionados en la *secc.* 1.4.2, mayor densidad de elementos en las proximidades de la punta de la fisura distribuidos en forma radial y los elementos que rodean a la punta de la fisura, con los nodos medios de los lados que convergen a los nodos colapsados (punta de la fisura) corridos a $0,25l$, distancia que en el ejemplo anterior se comprobó arroja los mejores resultados para ambos métodos. La malla descrita se muestra en la Fig. (2.8 b)

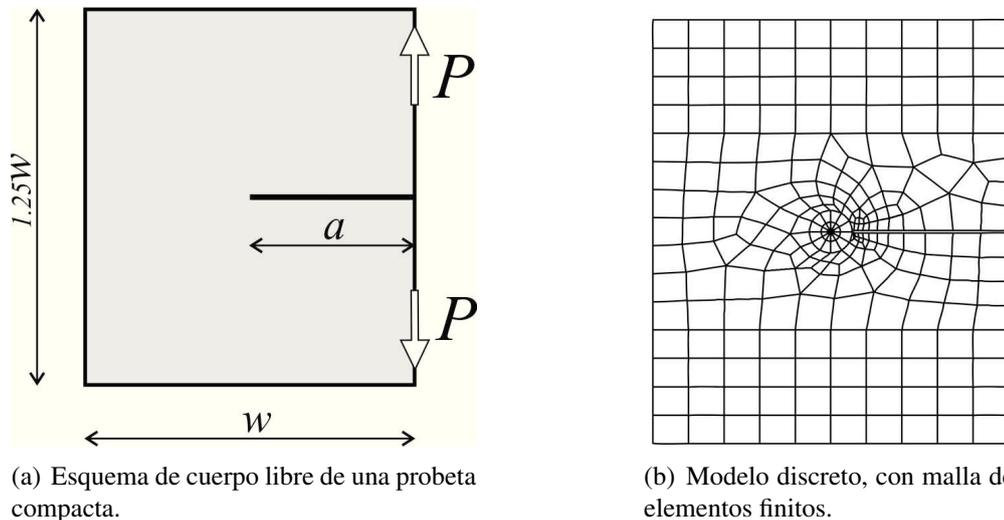


Figura 2.8: Esquema de una probeta compacta (*Compact Specimen*)

En la Fig.(2.9), se muestran los tamaños más pequeños de elementos que convergen a la punta de la fisura, para cada una de las tres mallas utilizadas en este ejemplo. Como puede observarse dichos elementos van desde tamaños $h = 6 \times 10^{-5}w$ hasta $h = 2 \times 10^{-5}w$ en la malla más refinada; este nivel de refinamiento fue necesario para obtener buenos resultados numéricos y una buena captura del campo de tensiones hacia la punta de la fisura, debido al modelo lineal elástico que en este apartado se trata.

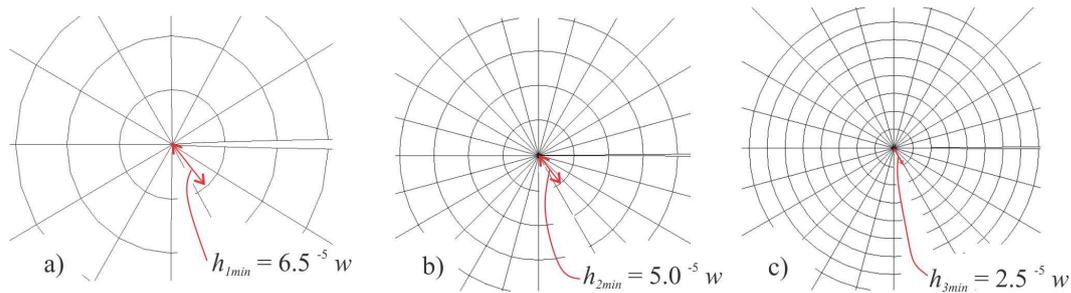


Figura 2.9: Tamaño de elementos finitos mas pequeños utilizados en las tres mallas para el problema de la probeta compacta en el ejemplo 2. a) Malla 1 - $h_{min} = 6,5^{-5}w$, b) Malla 2 - $h_{min} = 5,0^{-5}w$, Malla 3 - $h_{min} = 2,5^{-5}w$. Puede observarse que a medida que los elementos reducen su tamaño en cada malla se agregan círculos concéntricos al rededor de la punta de la fisura.

El análisis que se realiza en este ejemplo es el de comparar la convergencia del método de integral numérica y fuerzas configuracionales, esta vez en función de la cantidad de elementos de cada malla, para lo cual se utilizaron tres mallas de elementos finitos con las características descritas y con numero creciente de nodos desde 1090 para la malla más gruesa hasta aproximadamente 2300 para la malla más refinada. Cabe aclarar que la mayor cantidad de elementos y por tanto de nodos se encuentran en los alrededores de la punta de la fisura, tal como puede observarse en la Fig.(2.8).

Los resultados del análisis de este ejemplo se plasman en la Fig.(2.10), donde puede observarse que ambos métodos tienden al mismo valor, y se logra obtener una diferencia entre el valor analítico y el numérico más preciso del orden del 1 % para ambos métodos.

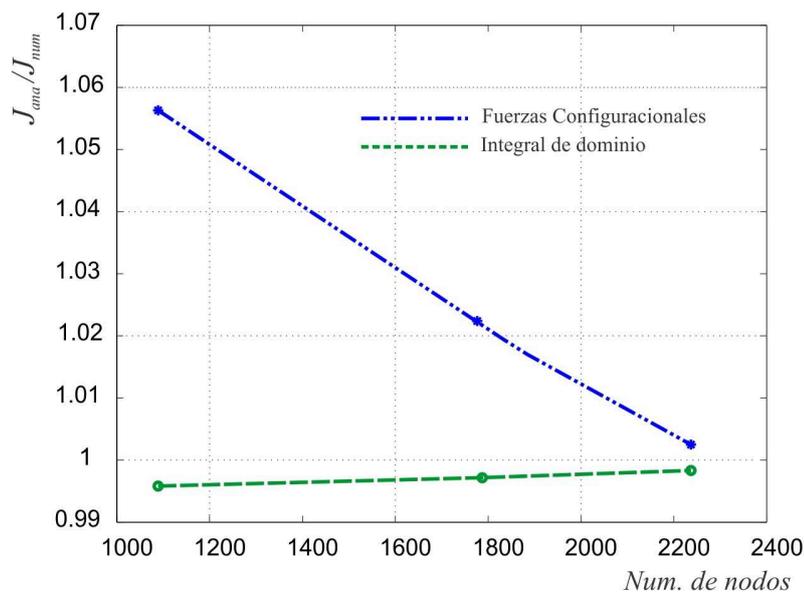


Figura 2.10: Curvas de convergencia para los métodos de fuerzas configuracionales e integral de dominio, en función de la cantidad de nodos de las distintas mallas de elementos finitos utilizadas en el ejemplo 2.

Si bien ambos métodos logran buenas aproximaciones respecto del valor analítico de J , el método de fuerzas configuracionales nos permite ver cómo es la calidad de cada malla. Este fenómeno se pone de manifiesto a través de las fuerzas configuracionales residuales, en la Fig.(2.11) en la que se muestran las fuerzas configuracionales para las tres mallas en la punta de la fisura. Las fuerzas predominantes son las que intervienen en el valor de J , mientras que las de menor valor circundantes son las desequilibradas o residuales que por error de discretización no son nulas. El comportamiento observado es que a medida que se concentran elementos en la región de la punta de la fisura las fuerzas configuracionales desequilibradas (residuos de discretización) se reducen y las fuerzas, que intervienen en forma directa en el valor de J , se hacen más importantes, es decir se disminuyen los valores residuales y se mejora el valor de interés, tal cual se refleja en la curva de la Fig.(2.10).

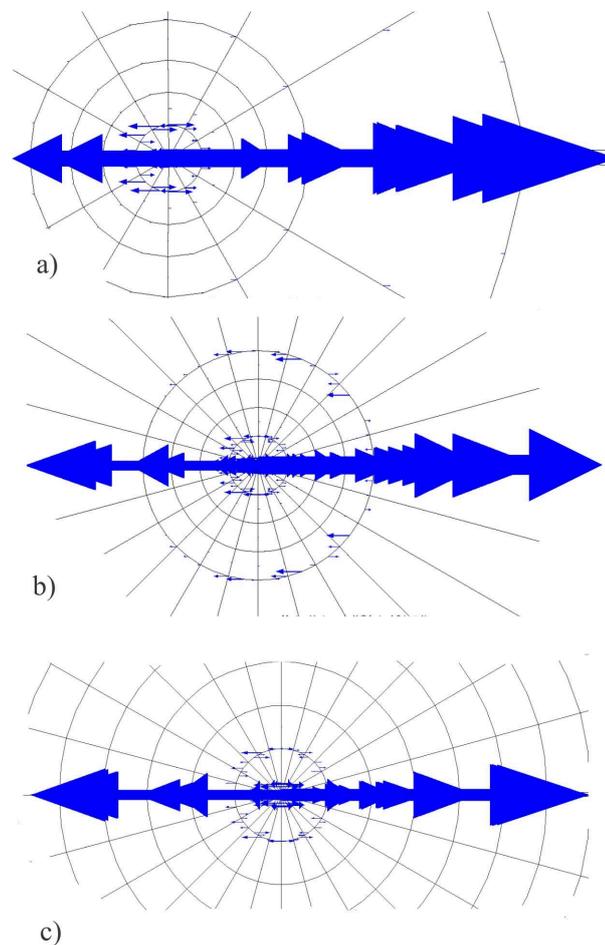


Figura 2.11: Fuerzas configuracionales en la punta de la fisura de una probeta compacta en distintas mallas. Puede observarse del aumento en la densidad de elementos en hacia la punta de la fisura y la disminución de fuerzas residuales a medida que la malla en esta zona se refina. a) Malla 1 - $h_{min} = 6,5 \times 10^{-5}w$, b) Malla 2 - $h_{min} = 5,0 \times 10^{-5}w$., Malla 3 - $h_{min} = 2,5 \times 10^{-5}w$

2.4.3. Ejemplo 3 - Probeta compacta con malla regular

En los ejemplos anteriores se siguieron los lineamientos clásicos para construir las mallas de elementos finitos, tal como se describe en la *Secc. 1.4.2* y en la amplia bibliografía (ver por ejemplo (Anderson, 2000)). El diseño de las mismas corresponde a resultados relacionados con la metodología de la integral de dominio propuesta por (Moran y Shih, 1987) y presentada en la *sección(1.4)* aunque se utilizó la misma en el método de fuerzas configuracionales a fin de tener una mejor comparación de ambas metodologías.

Este ejemplo sigue los lineamientos propuestos por (Mueller et al., 2002), de utilizar mallas más convencionales en el método de fuerzas configuracionales. A diferencia de la cita mencionada que sólo trata algunos ejemplos, aquí se realiza un análisis de convergencia sobre la capacidad del método de fuerzas configuracionales para capturar el parámetro J en mallas de elementos finitos regulares, y sin ningún tipo de consideración especial en el diseño.

Para este caso se optó por utilizar la misma geometría de probeta compacta del ejemplo anterior y que se muestra en la Fig.(2.8), pero con mallas regulares como la que se muestra en la Fig.(2.12). Las dimensiones de la probeta en este caso son las mismas utilizadas en el ejemplo anterior. El material es lineal elástico con las siguientes características: modulo de Young $E = 2,1e6(kN/cm^2)$, $\nu = 0,30$.

El análisis de convergencia contrasta el valor de J obtenido analíticamente por las relaciones (2.16), (2.17), (2.19)) y los valores obtenidos numéricamente en las distintas mallas, a través del método de fuerzas configuracionales.

Los elementos finitos utilizados en las distintas mallas regulares son del tipo S_2 como los utilizados en los ejemplos anteriores, con interpolación cuadrática, cuyos tamaños se variaron para cada malla en relación al ancho w de la probeta. Esta variación se adopta en este caso desde $h = 0,05w$ hasta $h = 0,005w$. En la Fig.(2.12) puede verse el aspecto general de las mallas utilizadas, como así también el detalle de la punta de la fisura. En principio no se ha hecho ningún diseño especial en la punta de la fisura, ya que se trata de mostrar con este ejemplo la convergencia del método de fuerzas configuracionales utilizando mallas estructuradas homogéneas.

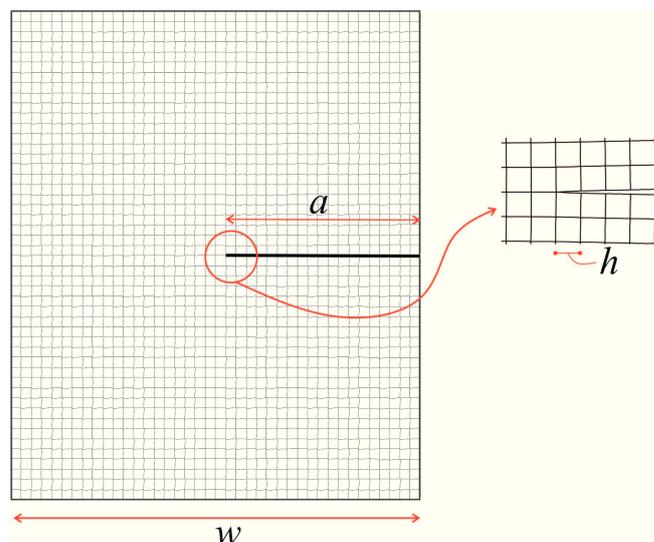


Figura 2.12: Malla de elementos finitos regular, para el problema del ejemplo 3.

Los resultados para este ejemplo, son los que se muestran en la curva de la Fig.(2.13), donde puede observarse que el método tiene convergencia, logrando hasta una diferencia del 4 % entre el valor numérico para la malla más refinada y el obtenido en forma analítica. Si bien en el ejemplo anterior se logra una diferencia menor entre los valores numéricos y analítico, debe destacarse que las mallas utilizadas en tal caso son más complejas de construir, debido a la concentración y colapso de elementos hacia la punta de la fisura. El tamaño de elementos mas pequeño utilizado en los ejemplos anteriores resulta varios ordenes menores que en el presente ejemplo (0,00125 (mm) vs 0,25 (mm) ejemplo 2 vs ejemplo 3 respectivamente). Una consideración adicional puede hacerse en este aspecto. En el caso de requerir mas precisión, refinar una malla regular conlleva también menos trabajo que el refinamiento en una malla con el diseño presentado en la *secc. 1.4.2*. De todos modos debe aclararse aquí que la malla completamente regular no es una condición necesaria, se ha utilizado por simplicidad, pero en realidad esta debe ser regular solo en la zona de la punta de la fisura. De ese modo sería mas óptimo el costo computacional. La Fig(2.14), muestra las fuerzas configuracionales sobre una de las mallas utilizadas, se observa la aparición de una única fuerza configuracional de gran magnitud en la punta de la fisura, tal como predice la ecuación (2.10). La cantidad de fuerzas residuales que aparecen en este tipo de mallas estructuradas es menor que a las aparecidas en las mallas utilizadas en los ejemplos anteriores y de varios órdenes de magnitud menor que la fuerza principal, localizada en la punta de la fisura. Este resultado es idéntico en todas las mallas, lo que puede interpretarse como un buen diseño de malla, independientemente del tamaño de los elementos. Esto podemos afirmarlo debido a que en todas las mallas aparecen menor cantidad de fuerzas residuales que en las mallas con diseño clásico. El hecho de aparecer menor cantidad de fuerzas residuales en los alrededores de la punta de la fisura y una única fuerza residual se interpreta como una mejora en la discretización, refiriéndonos a esta en el sentido geométrico del diseño de la malla de elementos finitos. Podemos inferir entonces que el método de fuerzas configuracionales permite el uso de mallas regulares, dando como resultado una menor dispersión de fuerzas residuales. Uno de los aspectos por los cuales se presenta esta mejora de la discretización, la ofrece el hecho de que la punta de la fisura solo está modelada con un solo nodo y no con varios nodos compartiendo la misma coordenada como en el diseño utilizado en los ejemplos anteriores.

Podemos concluir, a través de este ejemplo, que el método de fuerzas configuracionales presentado en este capítulo, da resultados aceptables para mallas suficientemente refinadas, independientemente del diseño de la mismas, sin embargo la calidad de discretización demuestra ser mejor para el caso de mallas regulares, ya que aparece menor número de fuerzas residuales en el dominio discreto.

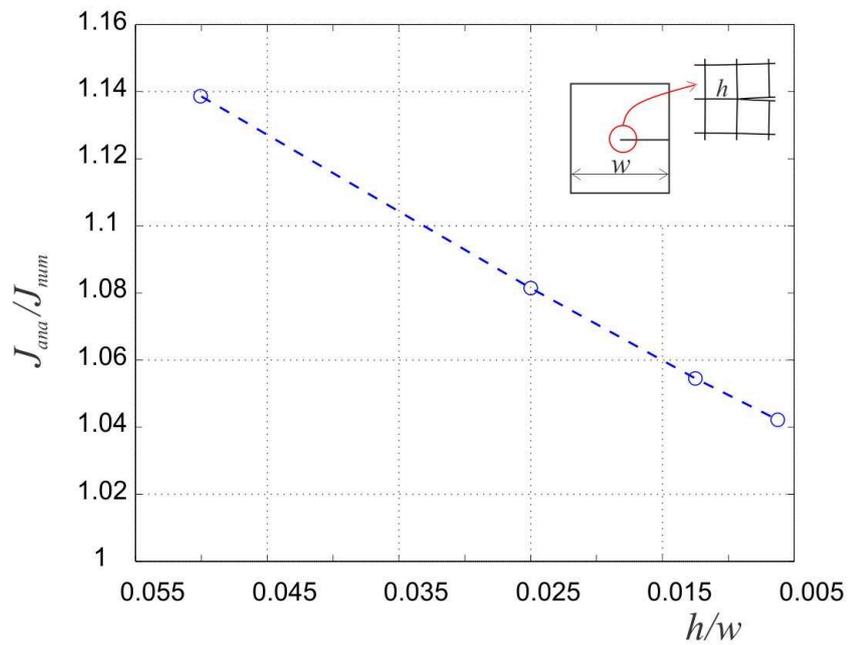


Figura 2.13: Curva de convergencia para el método de fuerzas configuracionales utilizando mallas de elementos finitos S2, con diseño regular

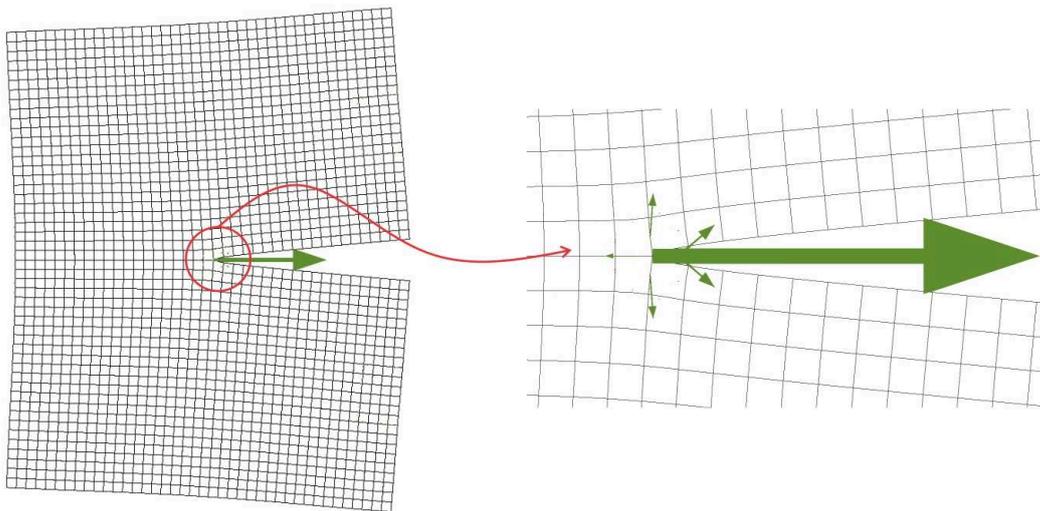


Figura 2.14: Fuerzas configuracionales en una de las mallas regulares utilizadas, puede observarse la aparición de una fuerza principal, equivalente al valor de J y algunas fuerzas residuales de menor orden de magnitud.

Capítulo 3

Fuerzas configuracionales en medios elasto plásticos

3.1. Introducción

En el capítulo anterior se introdujo el concepto y las ecuaciones que gobiernan la distribución de las denominadas fuerzas configuracionales o materiales en sólidos con comportamiento lineal elástico. Dentro de ese contexto se demostró que dicho método resulta válido en la determinación de la *Integral-J*, o considerando sólo el contexto de la mecánica de fractura lineal elástica hablamos de la *Tasa de liberación de energía \mathcal{G}* o simplemente como lo denominamos parámetro *J*.

Este capítulo presenta una extensión del modelo de fuerzas configuracionales, para materiales con comportamiento elasto plástico. Primeramente se introduce y presenta el modelo constitutivo a utilizar en el desarrollo del capítulo, siendo éste, un modelo de plasticidad isótropo.

Tradicionalmente en plasticidad es conocida la utilización de elementos finitos *BBAR* (Simo y Hughes, 1998), para evitar el efecto de bloqueo numérico inducido por la preservación del volumen de las deformaciones plásticas (deformaciones plásticas isocóricas). En el capítulo precedente se utilizaron elementos finitos cuadráticos S_2 con interpolación cuadrática para implementar el método de fuerzas configuracionales en mecánica de fractura lineal elástica (MFLE). Inicialmente, en este capítulo se realizará un test comparativo de respuesta estructural entre los elementos finitos *BBAR* y S_2 en un problema típico de fractura con plasticidad, a fin de evidenciar la presencia de bloqueo o no, en la solución obtenida a través de los elementos S_2 .

Luego se presentan la formulación del método de fuerzas configuracionales en elasto plasticidad y se asocian éstas al concepto más general de *Integral-J*, basándose en los trabajos de (Simha et al., 2008), (Nguyen et al., 2005) y (Kolednik et al., 2014). Aunque a diferencia de dichos autores, la presente contribución se enmarca dentro del análisis en pequeñas deformaciones y en condiciones de fisuras estables.

Finalmente se desarrollan ejemplos con el fin de validar la formulación, poner de manifiesto la presencia de las fuerzas configuracionales y su comportamiento con el incremento de plasticidad.

3.2. Definición del modelo constitutivo

El modelo utilizado a lo largo de este capítulo, es un modelo constitutivo isótropo de plasticidad J_2 , obtenido de (Simo y Hughes, 1998). Para definir las ecuaciones de dicho modelo, se asumen pequeñas deformaciones y la descomposición aditiva del tensor de deformaciones total ($\boldsymbol{\varepsilon}$), en dos partes: elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}, t)$ y plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}, t)$.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}^e(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

La energía libre total φ , se escoge como la adición de dos términos. Un término φ^e asociada a la parte elástica del tensor de deformaciones ($\boldsymbol{\varepsilon}^e$), y un término exponencial φ^p asociado a las variables internas del modelo. Esta función de energía libre se escribe como:

$$\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \alpha) = \varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^e) + \varphi^p(\alpha) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e) + \frac{1}{2}\theta\mathcal{H}\alpha^2 + (K_\infty - K_0)(1 - e^{-\delta\alpha}) \quad (3.2)$$

donde: $\mathbb{C}^e = \lambda\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + 2\mu\mathbf{I}$ es el tensor elástico de Hooke, en cuya expresión, λ y μ son los parámetros de Lamé, $\mathbb{1}$ el tensor identidad de orden 2 e \mathbf{I} el tensor identidad de orden 4. K_∞ y K_0 , son parámetros que definen los límites de las tensiones características y coinciden con los valores de la tensión de fluencia (K_0) y tensión última (K_∞) ($K_\infty > K_0$); θ , δ son parámetros de la función de energía libre mientras que α es una variable interna del modelo (deformación plástica equivalente) y \mathcal{H} el coeficiente de endurecimiento. A partir de esta definición, el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ se considera como una variable termodinámicamente conjugada a la deformación elástica a través de φ , lo que permite definir la relación constitutiva como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = \mathbb{C}^e : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.3)$$

La función de fluencia para el modelo isótropo que estamos tratando (plasticidad J_2), se define como:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, q) = \|\mathbf{s}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y - q) \leq 0 \quad (3.4)$$

donde $\mathbf{s} = dev(\boldsymbol{\sigma})$, cuya norma es $\|\mathbf{s}\| = \sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}$, σ_y es la tensión de fluencia del material, y q es una variable termodinámicamente conjugada a α a través de φ como:

$$q = -\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \quad (3.5)$$

En el modelo presente, no consideramos ablandamiento, por lo que q debe cumplir con la restricción $q \leq 0$, y el segundo término de (3.4) resulta monótonamente creciente.

La evolución de las variables internas α y $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, están ligadas a la función de fluencia:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \gamma \mathbf{N}; \quad \mathbf{N} = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}; \quad \dot{\alpha} = \gamma \frac{\partial f}{\partial q} = \gamma M \quad (3.6)$$

Donde en las últimas relaciones: \mathbf{N} , el tensor de orientación plástico, γ es el multiplicador plástico que define la magnitud de $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, es decir: $\gamma = \|\boldsymbol{\varepsilon}^p\|$. M es un coeficiente de proporcionalidad entre $\dot{\alpha}$ y γ .

El proceso de disipación plástica tiene como característica principal ser no reversible,

debido a ello se definen las condiciones complementarias y de restricción que permiten controlar la evolución y presencia de dicho fenómeno:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0; \quad \gamma \geq 0 \quad \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0; \quad \gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \quad (3.7)$$

3.3. Comportamiento de elementos finitos S_2 en el modelo plástico

En esta sección se evalúa la respuesta de estructuras que presentan fisuras (no propagantes) y que son modeladas mediante elementos finitos S_2 . Se realiza dicha comprobación con el fin de evaluar la existencia de bloqueo numérico en la solución de los campos cinemáticos.

Este test se basa en contrastar la solución de elementos finitos cuadráticos S_2 , y la solución del mismo problema a través de elementos finitos lineales con formulación $BBAR$, cuya formulación puede verse en (Simo y Hughes, 1998) y que reconocidamente, no están sujetas a bloque numérico.

La geometría y condiciones de borde que se utilizarán en este test son las correspondientes a una probeta compacta, en estado plano de deformación, como la presentada en la Fig. (2.8 a) y con dimensiones: $w = 50$ (mm), $a = 25$ (mm).

Los parámetros del material utilizados son: $E = 2 \times 10^5$ (MPa), $\nu = 0,30$, $\sigma_u = 270$ (MPa). Donde E es el módulo de Young, ν coeficiente de Poisson y σ_u la tensión última a su vez, los coeficientes propios del modelo, para la evolución de la plasticidad adoptados son $\theta = 1$, $\delta = 15$, $K_\infty = 426$ (MPa), $K_0 = \sigma_y = 270$ (MPa) y $\mathcal{H} = 1$.

La discretización se realizó con dos mallas de elementos finitos con diseño regular y con tamaños de elementos $h = 1$. Una malla correspondiente a los elementos lineales Q_1 (sobre los que se usa la formulación $BBAR$) y la restante de elementos finitos con interpolación cuadrática S_2 .

La respuesta obtenida se refleja en las curvas carga-desplazamiento de la Fig.(3.1). Dichas curvas corresponden a cada una de las variantes de elementos finitos utilizados, elementos $BBAR$, elementos S_2 con integración completa de 9 puntos y elementos S_2 con 4 puntos de integración. Puede observarse en estas curvas que al evolucionar la plasticidad, todos los elementos testeados proveen respuesta estructural similares. En lo que sigue se descarta la utilización de elementos S_2 con 4 puntos de integración, debido a que introduce un mayor error que el elemento $BBAR$ para el mismo orden de integración.

En la Fig.(3.1), a la (*der.*) se presentan, los mapas de deformación plástica equivalente para el nivel de carga marcado en las curvas de la (*izq.*), para un nivel de desplazamiento impuesto $\Delta u_y \approx 3$ (mm) y para cada caso analizado. Se observa que los elementos finitos S_2 con 9 puntos de integración, no presentan bloqueo y además dan una captura suave de la deformación plástica equivalente aunque los elementos lineales $BBAR$, ofrecen una respuesta muy similar y con un menor costo computacional.

Podemos concluir entonces que para el desarrollo que sigue puede utilizarse uno u otro tipo de elemento, a priori la respuesta estructural es prácticamente idéntica siendo levemente más flexible para los elementos S_2 con 9 puntos de integración, comparados a los elementos Q_1 , con formulación $BBAR$. Se preferirá el uso de estos últimos principalmente debido al menor costo computacional requerido para mallas con elementos del

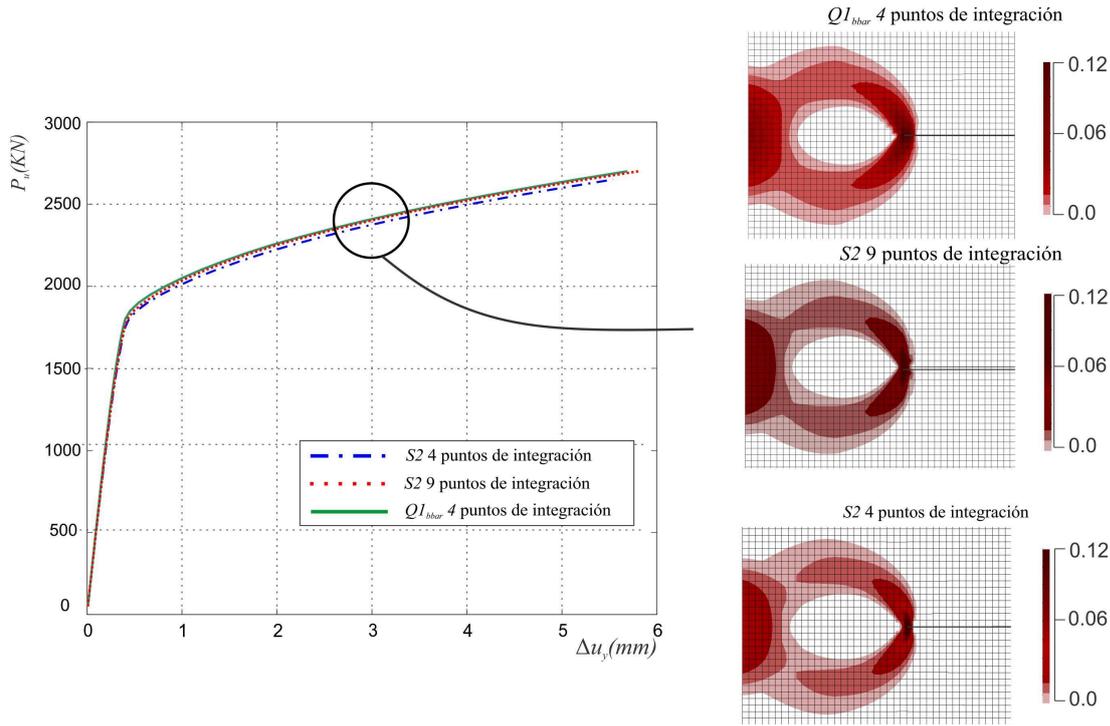


Figura 3.1: Respuesta estructural elementos finitos S_2 y Q_1 con formulación $B\bar{B}A\bar{R}$. Izq. curva carga desplazamiento para una probeta compacta con entalla lateral. Der., mapa de deformación plástica equivalente, para cada uno de los casos analizados para $\Delta u_y \approx 3$ mm.

mismo tamaño.

3.4. Fuerzas configuracionales en medios elasto plásticos

En esta sección se desarrolla una formulación de fuerzas configuracionales para un medio con comportamiento elasto-plástico, basado en el modelo constitutivo presentado en la *secc.* 3.2 y siguiendo los trabajos de (Simha et al., 2008) y (Nguyen et al., 2005). Para esto se realiza un razonamiento idéntico al realizado en la *secc.* 2.2.

Partimos de la energía libre φ para este caso como función explícita del tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$, el punto espacial \mathbf{x} y de la deformación plástica equivalente α , es decir: $\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \alpha)$, ver *Secc.* 3.2. Aplicando la regla de la cadena determinamos el gradiente espacial de la función de energía:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \varphi = \boldsymbol{\sigma} : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon}^p - q \nabla \alpha + (\partial_{\mathbf{x}} \varphi)_{expl} \quad (3.8)$$

La notación: $\nabla_{\mathbf{x}}(\cdot)$ y $\partial_{\mathbf{x}} \varphi$ tienen el mismo significado que en el capítulo anterior. Bajo la misma premisa sin perder generalidad en lo que sigue se considerará que el material es inicialmente homogéneo y por lo tanto el último término de (3.8) es nulo, ver *Secc.* 2.2. El segundo y tercer término de (3.8) surgen de considerar las definiciones de $\boldsymbol{\varepsilon}$ y q dadas por (3.1) y (3.5), respectivamente. El primer término se reescribe con la (2.2) y considerando

la ecuación de Cauchy para un problema cuasi estático, obtenemos:

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbb{1} - \nabla^T \mathbf{u} \boldsymbol{\sigma}) = \underbrace{-\boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon}^p - q \nabla \alpha + \mathbf{b} \nabla \mathbf{u}}_{-\mathbf{g}} \quad (3.9)$$

La ecuación (3.9), podemos reescribirla en una forma más convencional:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{g} = 0 \quad (3.10)$$

Esta última expresión coincide con la presentada en el capítulo anterior como (2.6). La definición del tensor momento de energía $\boldsymbol{\Sigma}$ dada en la *secc.2.2* tiene el mismo significado, sólo que en este capítulo la función energía libre φ esta definida por (3.2). En este apartado el tensor $\boldsymbol{\Sigma}$ a través de $\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \alpha)$, tiene dependencia de las variables internas asociadas a la evolución de plasticidad. De ese modo podemos escribir la definición (2.7), de una forma mas general:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \alpha) \mathbb{1} - \nabla^T \mathbf{u} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.11)$$

El segundo término de la derecha de (3.10), representa la fuerza configuracional (por unidad de volumen) que en este caso resulta ser:

$$\mathbf{g} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon}^p + q \nabla \alpha - \mathbf{b} \nabla \mathbf{u} \quad (3.12)$$

3.5. Cálculo de la Integral-J a través de fuerzas configuracionales en medios elasto plásticos

Consideremos ahora un sólido que tiene una fisura, en el que definimos dos dominios: uno regular que llamaremos Ω_r y otro singular que contiene a la punta de la fisura Ω_δ . Los bordes de Ω_r y Ω_δ se definen como: Γ_r , y Γ_δ . Si consideramos que el dominio Ω_δ , es circular δ define el radio del mismo y puede ser de un tamaño arbitrario.

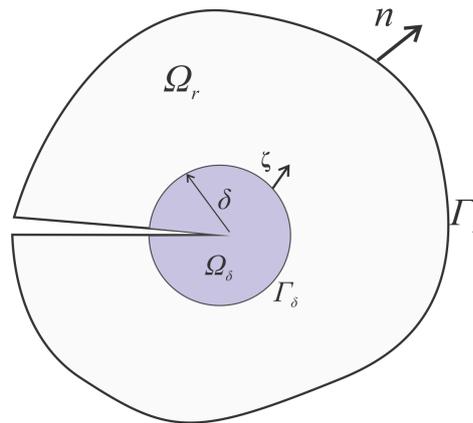


Figura 3.2: Definición de los dominios de análisis. Ω_r dominio regular, Ω_δ dominio singular que contiene la punta de la fisura

En el caso de que no exista propagación de fisura y el problema sea cuasi-estático, considerando además las fuerzas volumétricas convencionales: $\mathbf{b} = 0$, el balance de fuerzas

configuracionales dado por (3.9), queda:

$$\nabla \cdot \Sigma + \sigma : \nabla \varepsilon^p + q \nabla \alpha = 0 \quad (3.13)$$

Esta expresión es válida en todo punto de Ω que excluya puntos singulares, tales como la punta de una fisura.

El segundo y tercer término a la izquierda de la igualdad de (3.13), representan las fuerzas configuracionales asociadas a las variables internas del modelo elasto plástico propuesto. Integrando esta última expresión en el dominio regular Ω_r y aplicando el teorema de Green al primer término, se obtiene la expresión del balance global de fuerzas configuracionales:

$$\int_{\Gamma_r} \Sigma \mathbf{n} d\Gamma - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\delta} \Sigma \zeta d\Gamma + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_r} (\sigma : \nabla \varepsilon^p + q \nabla \alpha) d\Omega = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

En donde hemos considerado nuevamente que: $\int_{C^+} \Sigma \mathbf{n} d\Gamma + \int_{C^-} \Sigma \mathbf{n} d\Gamma = \mathbf{0}$.

De acuerdo con el capítulo anterior, ver ecuación (2.10), el segundo término de (3.14) no se anula en el límite $\delta \rightarrow 0$, siendo:

$$-\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\delta} \Sigma \zeta d\Gamma = \mathbf{f}_{tip} \quad (3.15)$$

La *Integral-J* puede evaluarse ahora con (3.14). Proyectando miembro a miembro por \mathbf{e}_1 (dirección de propagación de fisura considerando fractura en Modo I) y reordenando términos, se obtiene:

$$\underbrace{\mathbf{e}_1 \cdot \int_{\Gamma_r} \Sigma \mathbf{n} d\Gamma}_{J_{far}} = \underbrace{\mathbf{e}_1 \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\delta} \Sigma \zeta d\Gamma}_{J_{tip}} + \underbrace{\mathbf{e}_1 \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_r} -(\sigma : \nabla \varepsilon^p + q \nabla \alpha) d\Omega}_{J_{dis}} \quad (3.16)$$

Es decir renombrando cada término:

$$J_{far} = J_{tip} + J_{dis} \quad (3.17)$$

En la ecuación (3.17), el término de la izquierda de la igualdad representa el valor de la *Integral-J* evaluada en el contorno Γ_r y descrita en la *secc.*(1.3). En este apartado la llamaremos J_{far} . El valor de este término puede interpretarse como la energía total disponible para el crecimiento de fisura, más la disipación energética. En otras palabras representa la integral dada en (1.32) evaluada en un contorno lejos de la influencia del bulbo de deformación plástica que se produce en las cercanías de la punta de la fisura. Los términos del lado derecho de la igualdad, los asignaremos como J_{tip} , como ya lo hemos hecho en el capítulo anterior y con la misma interpretación física, y J_{dis} respectivamente. Si bien no existe formalmente un parámetro J ligado a la energía disipada, aquí lo hemos denominado como J_{dis} abusando de la notación y para notar dicho término en forma simplificada. Puede observarse que en el caso de no existir disipación de energía (modelo lineal elástico), el segundo término de la izquierda de (3.16) no existe y por lo tanto, ésta coincide con (2.9) (interpretación de tasa de liberación de energía) y no es más que la consecuencia de la independencia del camino para evaluar J .

3.6. Principio variacional e Implementación numérica

Consideramos (3.13) y (3.15) como las ecuaciones de balance de fuerzas configuracionales locales. Siguiendo un procedimiento similar al del capítulo precedente, pretendemos escribir una formulación variacional, del tipo pseudo principio de las potencias virtuales, y que admita una aproximación por elementos finitos. Adoptamos un espacio de funciones $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}$, con $\mathcal{V} = \{\delta \mathbf{u} \mid \delta \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1\}$ y proponemos la siguiente ecuación variacional:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_r} (\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_r} (\boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon}^p + q \nabla \alpha) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \mathbf{f}_{tip} \cdot \delta \mathbf{u} = 0; \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad (3.18)$$

Donde ahora consideramos $\Omega_r = \Omega \setminus \Omega_\delta$, con el contorno Γ_{ext} coincidente con el contorno externo del cuerpo.

Debilitando el primer término, operando y cancelando términos iguales, resulta:

$$-\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_r} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{ext}} (\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega_r} (\boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon}^p + q \nabla \alpha) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \mathbf{f}_{tip} \cdot \delta \mathbf{u}_{tip} = 0; \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad (3.19)$$

Los integrandos del primer y del tercer término son limitados en Ω_δ . Significa que se anula la integral de esos términos en el dominio Ω_δ cuando $\delta \rightarrow 0$. Por lo tanto, podemos extender las integraciones del primero y tercer término a todo Ω y aún la identidad (3.19) se mantiene.

Similar al capítulo anterior, interpolamos mediante elementos finitos el campo $\delta \mathbf{u}$ como sigue:

$$\delta \mathbf{u}(x) = \sum_{i=1}^{n_{nodos}} N_i(x) \delta \hat{\mathbf{u}}_i \quad (3.20)$$

donde n_{nodos} es el número de nodos de la malla de elementos finitos, $N_i(x)$ son las funciones de forma standard asociadas al nodo i , y $\delta \hat{\mathbf{u}}_i$ es el vector de parámetros del mismo nodo.

Introduciendo esta interpolación en (3.19), se llega finalmente a la siguiente ecuación matricial:

$$\underbrace{\bigwedge_{e=1}^{nelem} \int_{\Omega^e} (\boldsymbol{\Sigma}[\nabla \mathbf{N}^e]) \, d\Omega^e}_{\mathbf{F}_{conf}} = \underbrace{\bigwedge_{e=1}^{nelem} \int_{\Omega^e} (\boldsymbol{\sigma} \nabla \boldsymbol{\varepsilon}^p + q \nabla \alpha) [\mathbf{N}^e] \, d\Omega^e}_{\mathbf{F}_{dis}} + \underbrace{\bigwedge_{e=1}^{nelem} \int_{\Gamma_\Omega^e} \mathbf{n} \boldsymbol{\Sigma}[\mathbf{N}^e] \, d\Gamma_\Omega^e + \mathbf{f}_{tip} \mathbf{N}(\mathbf{x}|_{tip})}_{\mathbf{f}^S} \quad (3.21)$$

Al igual que la notación utilizada en el capítulo anterior, \bigwedge es la operación de montaje de matrices o vectores elementales, $nelem$ es el número de elementos finitos de la malla, Ω^e

es el dominio de un elemento finito, $[\nabla N^e]$ es la matriz de los gradientes de funciones de forma elemental y $[N^e]$ la matriz de funciones de forma elemental. El último término se interpreta como una fuerza discreta localizada en la punta de la fisura.

Con la notación utilizada en (3.21), el balance de fuerzas configuracionales discretizadas mediante elementos finitos, se reescribe como:

$$\mathbf{F}_{conf} = \mathbf{F}_{dis} + \mathbf{f}^S + \mathbf{f}_{tip} \quad (3.22)$$

Cálculo numérico de la *Integral-J* a través del balance discreto de fuerzas configuracionales

Consideremos nuevamente el cuerpo fisurado Ω . De la ecuación de balance de fuerzas configuracionales discreto dada por 3.21, evitaremos evaluar los términos de fuerzas de borde \mathbf{f}^S que aparecen en forma general tal como antes se menciona y que se esquematizan en la Fig. 3.3. A tal efecto definimos la función vectorial de peso arbitraria $\mathbf{Q} = Q(x)\mathbf{q}$,

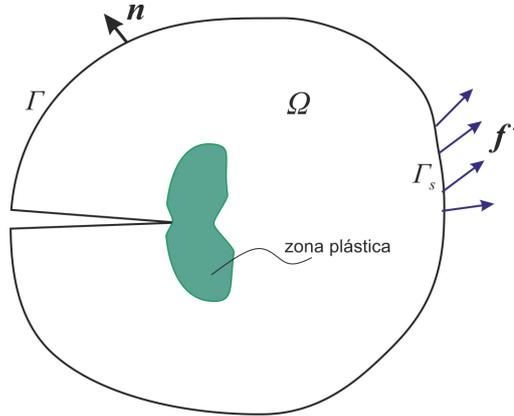


Figura 3.3: Dominio y bordes considerados en la definición de Q .

con $Q(x) \in C^1(\Omega)$, que interpretamos como un campo virtual de desplazamientos $\delta\mathbf{u}$, con

$$Q = \begin{cases} 0 & \text{en } \Gamma_s \\ 1 & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (3.23)$$

y \mathbf{q} un vector arbitrario constante en todo Ω . Con esta selección del campo \mathbf{Q} , pretendemos incluir en las integrales de dominio sólo el volumen Ω incluyendo toda la zona plástica. De este modo, podremos evaluar integrales de contorno en curvas que incluyan la zona plástica (estas integrales la denominamos J_{far} cuyo concepto fue introducido en la ecuación (3.16).

Introduciendo la interpolación (3.20), la ecuación (3.21) se puede reescribir como:

$$\mathbf{q} \cdot \underbrace{\sum_{e=1}^{nelem} \int_{\Omega^e} (\boldsymbol{\Sigma}[\nabla N^e][Q^e]) d\Omega^e}_{\mathbf{F}_{conf}} = \mathbf{q} \cdot \underbrace{\sum_{e=1}^{nelem} \int_{\Omega^e} (\boldsymbol{\sigma} \nabla \boldsymbol{\varepsilon}^p + q \nabla \alpha)[N^e][Q^e] d\Omega^e}_{\mathbf{F}_{dis}} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{f}_{tip} \quad (3.24)$$

siendo $[Q^e]$ la matriz elemental que recolecta los parámetros de interpolación del campo $Q(\mathbf{x})$. Note que \mathbf{f}^S es nula debido a la selección específica del campo Q , y además, hemos usado el hecho que $Q(\mathbf{x}_{tip}) = q$. En un abuso de notación, el vector \mathbf{f}_{tip} , que está definido en los grados de libertad locales del nodo de la punta de fisura, se ha extendido a un vector de fuerzas globales, con ceros en todos los restantes grados de libertad de la malla de elementos finitos.

Seleccionando como caso específico $\mathbf{q} = \mathbf{e}_1$, obtenemos una ecuación en términos de *Integral-J*, como sigue:

$$\underbrace{\mathbf{e}_1 \cdot \bigwedge_{e=1}^{nelem} \int_{\Omega^e} (\boldsymbol{\Sigma}[\nabla N^e][Q^e]) d\Omega^e}_{J_{far}} = \underbrace{\mathbf{e}_1 \cdot \bigwedge_{e=1}^{nelem} \int_{\Omega^e} (\boldsymbol{\sigma} \nabla \boldsymbol{\varepsilon}^p + q \nabla \alpha)[N^e][Q^e] d\Omega^e}_{J_{dis}} + \underbrace{(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{f}_{tip} Q_{tip})}_{J_{tip}} \quad (3.25)$$

El término de la izquierda de (3.25), con la función Q definida en (3.23), es igual a la integral de contorno:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \int_{\Omega} \boldsymbol{\Sigma} \nabla Q d\Omega = \mathbf{e}_1 \cdot \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.26)$$

y por ese motivo es que la hemos denominado J_{far} en la aproximación por elementos finitos (3.25). La demostración de la identidad (3.26) se basa en que, por lo visto en el capítulo previo, el dominio Ω_0 no contiene punto singular y además el material se comporta elásticamente. Por tanto:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{0} \quad ; \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_0 \quad (3.27)$$

Luego, pesando por la función Q , integrando en todo Ω_0 y aplicando el teorema de Green:

$$\int_{\Omega_0} \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} Q d\Omega = 0 = - \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Sigma} \nabla Q d\Omega + \underbrace{\int_{\Gamma_0} \mathbf{n} \boldsymbol{\Sigma} Q d\Gamma}_{Q=0} - \underbrace{\int_{\Gamma_1} \mathbf{n} \boldsymbol{\Sigma} Q d\Gamma}_{Q=1} \quad (3.28)$$

de donde:

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Sigma} \nabla Q d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Sigma} \nabla Q d\Omega = - \int_{\Gamma_1} \mathbf{n} \boldsymbol{\Sigma} Q d\Gamma \quad (3.29)$$

La extensión a todo Ω de la integral del término izquierdo es válida ya que: $\nabla Q = \mathbf{0}$ en todo $\Omega \setminus \Omega_0$. De este modo, queda demostrada la identidad (3.26).

Aquí, como en el capítulo anterior, debe distinguirse que el método de elementos finitos evalúa la fuerza configuracional J en un sentido débil, como contribución de los dos términos de la derecha en la ecuación (3.25), proyectados en la dirección del plano de fisura.

3.7. Ejemplos numéricos

En este apartado se presentan dos ejemplos numéricos que ponen en evidencia el comportamiento de las fuerzas configuracionales en un medio elasto plástico.

El primer ejemplo consiste en el modelo de una probeta solicitada a tracción, en el que se evalúa el error numérico del método al resolver numéricamente la ecuación de balance dada por (3.13), dentro del dominio de dicha probeta. En este ejemplo además se muestra la distribución de fuerzas configuracionales asociadas a la plasticidad.

En el segundo ejemplo se determina en forma numérica, a través de la evaluación de las fuerzas configuracionales, la *Integral-J* para el caso de una probeta compacta. La respuesta obtenida en ese caso se contrasta con la solución analítica que aporta la mecánica de fractura clásica.

3.7.1. Probeta solicitada a tracción Simple

Se plantea a continuación un ejemplo similar al presentado en (Kolednik et al., 2014), con el fin de validar la implementación presentada en los párrafos anteriores. Consideremos ahora una probeta normalizada para ensayos de tracción tal como la mostrada en la Fig.(3.4) con dimensiones: $W = 2,0$ (mm), $W_0 = 1,0$ (mm), $L = 10$ (mm) y espesor unitario.

Esta geometría se discretiza con distintas mallas de elementos finitos regulares y se aprovecha la simetría para modelar solo la mitad, tal como se muestra en la Fig.(3.4 der).

En este ejemplo se evalúa el error numérico introducido para lo cual se utilizan tres mallas de elementos finitos lineales (*BBAR*) con diseño regular y con tamaño h variable de $h = 0,125$ a $h = 0,03125$.

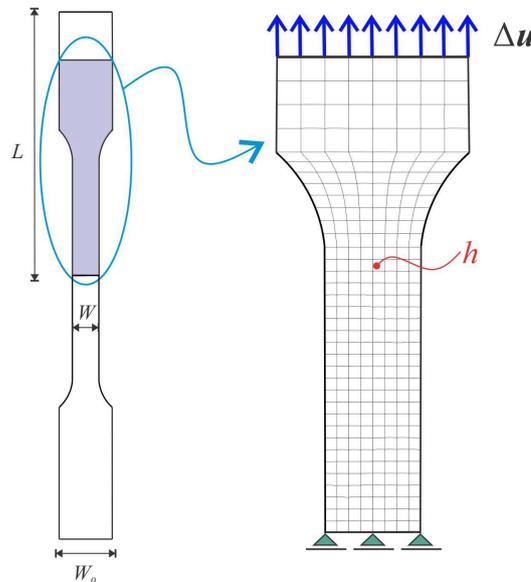


Figura 3.4: Geometría de una probeta normalizada para tracción (*izq.*) y planteo numérico del problema (*der.*)

El modelo del material a utilizar es el presentado en la *secc.3.2*, cuyos parámetros a considerar son: $E = 2 \times 10^5$ (MPa), $\nu = 0,30$, $\sigma_u = 270$ (MPa). A su vez los coeficientes

que definen la energía libre en este caso son: $\theta = 1$, $\delta = 0,15$, $K_\infty = 426(MPa)$, $K_0 = 270(MPa)$, $\mathcal{H} = 0$.

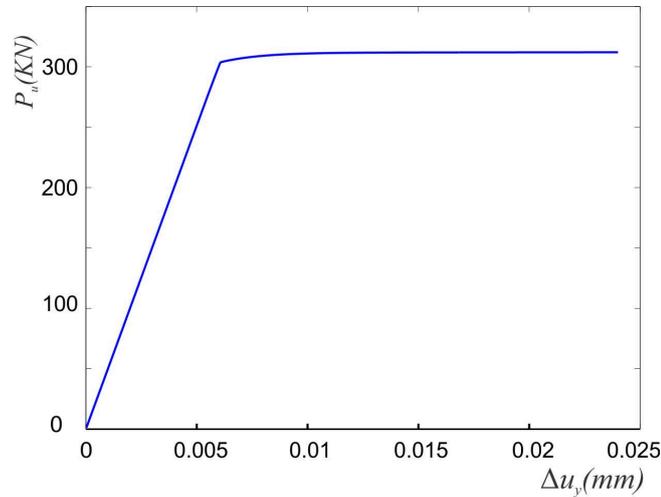


Figura 3.5: Respuesta estructural obtenida para el análisis de una probeta a tracción.

La probeta se solicita imponiendo desplazamientos hasta llegar a un $\Delta u_{max} = 0,024(mm)$ a lo largo de 1000 pasos. La curva de respuesta estructural se presentada en la Fig.(3.5).

El análisis consiste en evaluar los términos de (3.22) de forma discreta. En particular, al no existir puntos singulares en el interior del dominio, deben aparecer fuerzas configuracionales solo en el borde de éste, debiendo ser nulas en su interior. Cualquier valor no nulo obtenido en la evaluación numérica de esta ecuación de balance de fuerzas configuracionales, dentro del dominio, debe ser considerado como un error de discretización o un error numérico posiblemente asociado al cálculo de los términos $\mathbf{F}_{dis} = \nabla \hat{\epsilon}^p + q \nabla \hat{\alpha}$, en cuya evaluación surge la necesidad de realizar un suavizado general de ϵ^p y α .

Este error se pone de manifiesto en forma directa a través de la aparición de fuerzas configuracionales residuales. Lo que condice con lo dicho en párrafos del capítulo anterior sobre las bondades del método de fuerzas configuracionales para evaluar la calidad de discretización.

Definiendo la función de peso Q definida en (3.23), en este caso como $Q = 1$ en el interior de la probeta y $Q = 0$ en los bordes, el error absoluto se establece como la sumatoria de los módulos de las fuerzas en el interior del dominio, es decir:

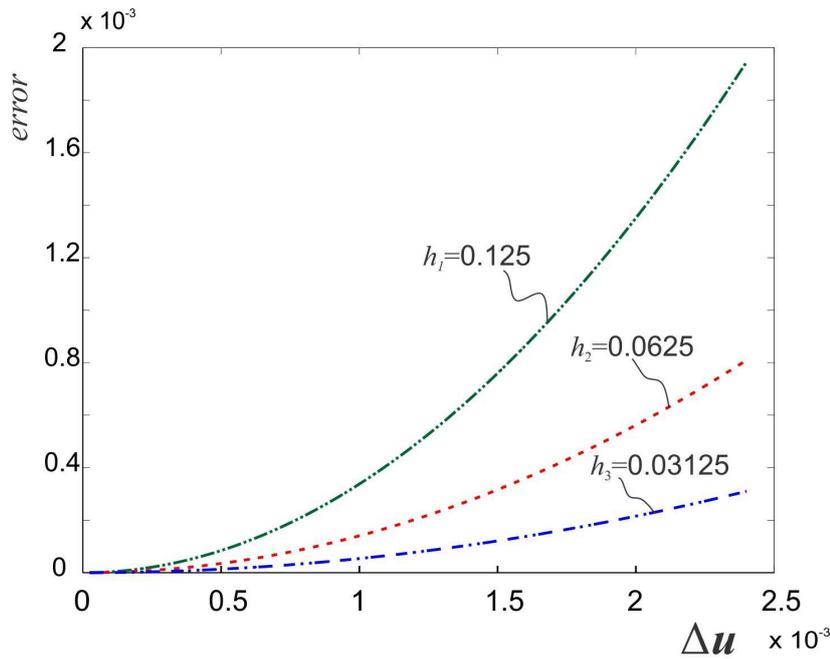
$$error = \sum_{i=1}^{n_{nodos}} |\mathbf{F}_{conf}| Q \quad (3.30)$$

donde: n_{nodos} es el numero de nodos de la malla de elementos finitos considerada.

En la Fig.(3.6), se muestran los resultados del análisis, las curvas de la Fig.(3.6 a) presentan la evolución del error absoluto a medida que evoluciona la carga, para las tres mallas utilizadas. Se observa que al refinar la malla, $\mathbf{F}_{conf} \rightarrow 0$, lo que demuestra la convergencia del método.

La curva de la Fig.(3.6 b) presenta la curva de error vs $\log h$, en este caso se observa una velocidad de convergencia lineal del orden de 1.50.

Finalmente en las Fig.(3.7) y (3.8), se muestran los resultados para las mallas de $h = 0,125$ y $h = 0,3125$ respectivamente, en el estado de máximo desplazamiento con-



(a) error vs desplazamiento

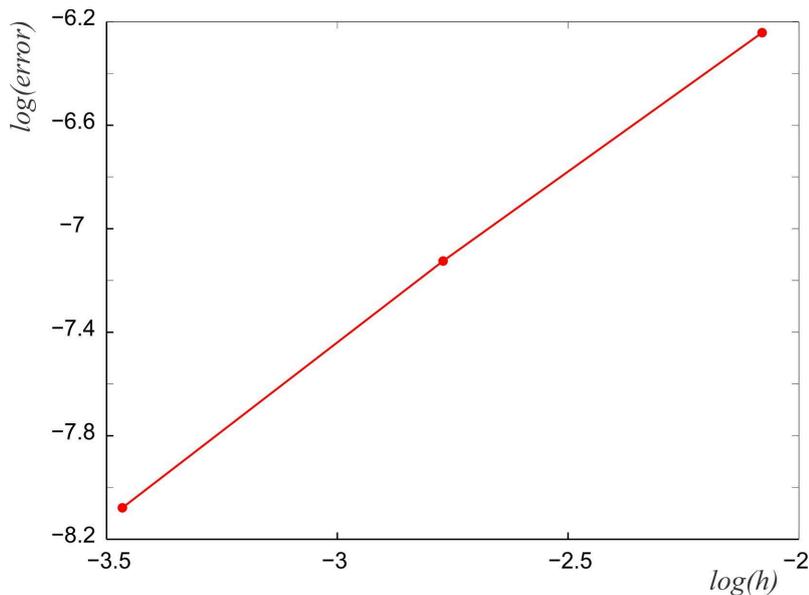
(b) $\log(\text{error})$ vs $\log(h)$

Figura 3.6: Curvas de error evaluadas a través del módulo de fuerzas configuracionales en el interior de un dominio sin singularidades. a) Resultados para las tres mallas analizadas. b) Error en función del tamaño h

siderado en el análisis, $\Delta u = 0,024(mm)$. En ambos casos se gráfica el término \mathbf{F}_{conf} en todo el dominio, donde se observa que las fuerzas configuracionales en el interior son prácticamente nulas, mientras que las fuerzas predominantes surgen en los bordes. Cada figura mencionada además presenta una magnificación de las fuerzas interiores para cada caso. La relación entre el módulo de éstas y las principales (del borde) son entre un 6% y un 3% para cada malla mencionada respectivamente.

La deformación plástica equivalente, en el nivel de máximo desplazamiento vertical, se expone también en las Fig.(3.7) y (3.8), junto a las fuerzas configuracionales disipativas F_{dis} . Se observa cómo éstas solo existen en la zona de deformación plástica.

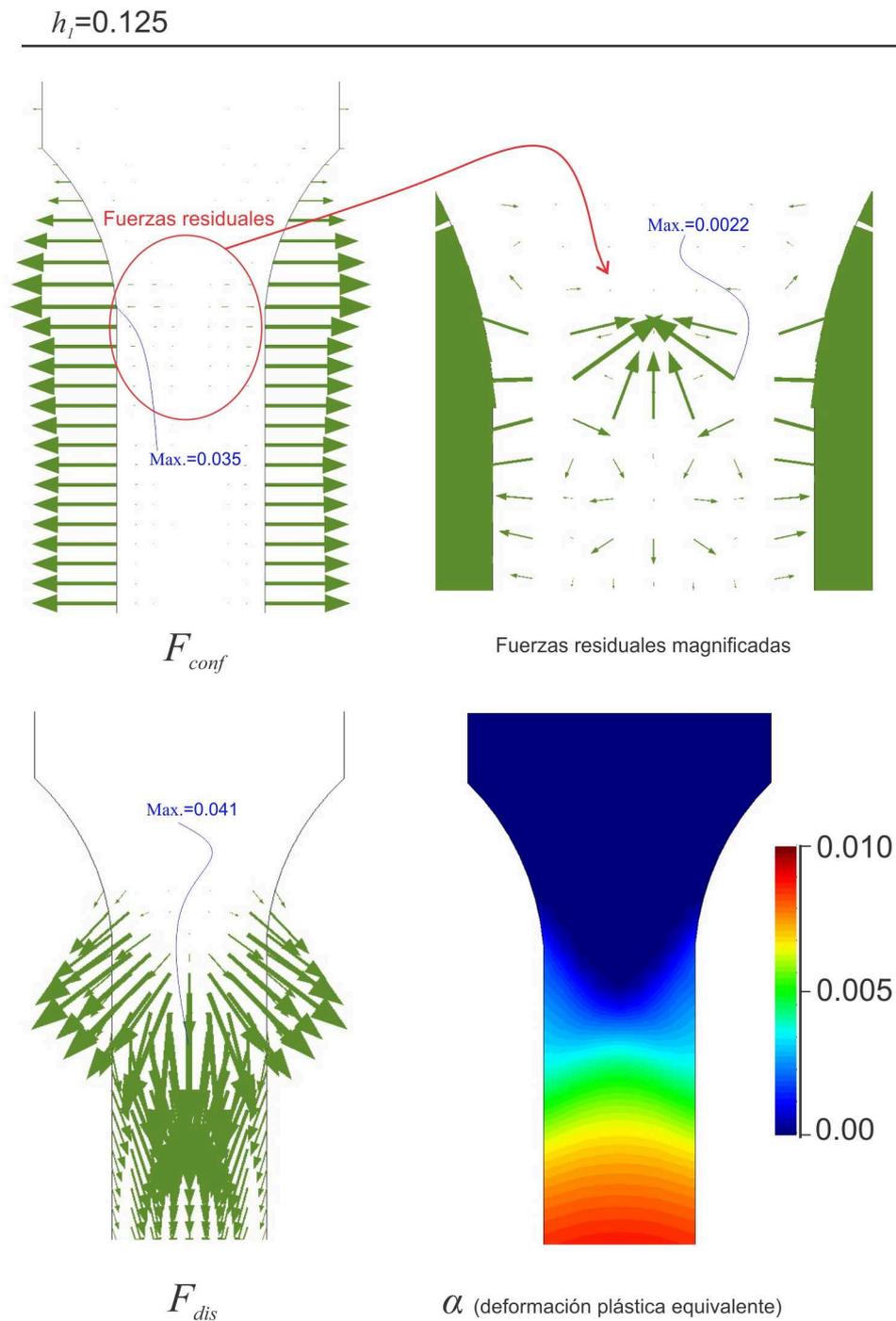


Figura 3.7: Resultados en el test de la probeta sometida a tracción para la malla de tamaño $h = 0,125$. arriba: fuerzas configuracionales (F_{conf}) y ampliación de las fuerzas residuales en el interior del dominio, para $\Delta u = 0,024(mm)$ abajo: fuerzas configuracionales disipativas (F_{dis}) y mapa de deformación plástica equivalente

$$h_3=0.03125$$

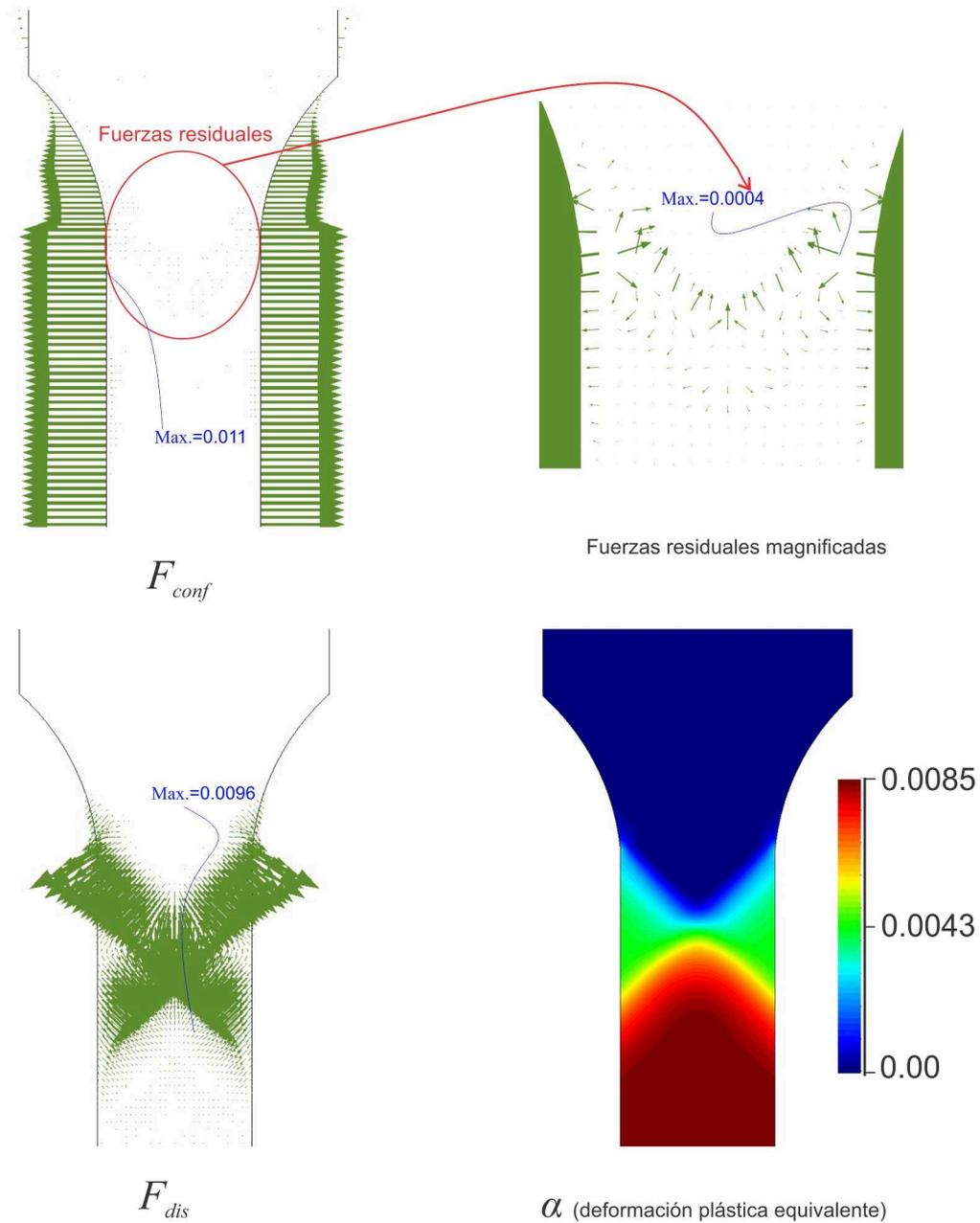


Figura 3.8: Resultados en el test de la probeta sometida a tracción para la malla de tamaño $h = 0,03125$. *arriba:* fuerzas configuracionales (F_{conf}) y ampliación de las fuerzas residuales en el interior del dominio, para $\Delta u = 0,024(mm)$ *abajo:* fuerzas configuracionales disipativas (F_{dis}) y mapa de deformación plástica equivalente

3.7.2. Determinación de la Integral-J en una probeta compacta

A través de este ejemplo se muestra una aplicación directa de la metodología desarrollada en este capítulo para determinar la *Integral-J*, en medios elasto-plásticos y en donde no se satisface la hipótesis de fluencia en pequeña escala.

Consideremos una probeta compacta entallada como la mostrada en la Fig. (3.9), cuyas dimensiones son: $w = 50$ (mm) , $a = 25$ (mm) y espesor $e = 25$ (mm). Esta geometría se discretiza con una malla regular de elementos finitos *BBAR*, de tamaño $h = 0,50$ (mm) tal como se muestra en la misma figura junto a las condiciones de borde impuestas para este caso. Note que si bien en este ejemplo por simplicidad se utiliza una malla completamente regular en general esto no es necesario pudiendo usarse una regularización de la malla solo en los alrededores de la punta de la fisura.

Las características del material que se utilizan en este ejemplo responden al modelo elasto plástico presentado en la *Secc.* 3.2 siendo: $E = 2 \times 10^5$ (MPa), $\nu = 0,30$, $\sigma_y = 270$ (MPa). A su vez los coeficientes propios para la evolución de la plasticidad adoptados para este caso son: $\theta = 1$, $\delta = 15$, $K_\infty = 426$ (MPa), $K_0 = 270$ (MPa) y $\mathcal{H} = 0,60$ (MPa)

En este ejemplo se determina la *Integral-J*, evaluando numéricamente el balance representado por (3.17) donde J_{far} como se a mencionado en párrafos anteriores, representa la *Integral-J* lejos de la influencia de la plasticidad que se produce en la punta de la fisura. Este término debe coincidir con el concepto de tasa de liberación de energía que surge de la mecánica de fractura lineal elástica. Para comprobar este resultado se evaluará la adición de los términos J_{tip} y J_{dis} en (3.17) y se comparará dicha respuesta con la solución analítica para este caso dada en (Anderson, 2000), transcrita en (2.19) y que notaremos con J_{ana} .

El problema planteado se resuelve con incrementos de desplazamiento vertical $\Delta u_y = 0,005$ (mm) hasta lograr un nivel considerable de plasticidad, es decir hasta que el nivel de deformación plástica equivalente abarque áreas importante mas allá de la punta de la fisura.

En la Fig.(3.10), se presenta la evolución de la deformación plástica equivalente, para diferentes niveles de desplazamiento impuesto (se ocultó la malla a los fines de mostrar con más detalle la captura de dicho campo). Puede observarse que para $\Delta u_y = 0,475$ (mm) el nivel de plastificación es importante por lo tanto se consideró este punto como el límite del presente análisis.

En las curvas de la Fig.(3.11), se presentan los resultados obtenidos, donde se contrasta el valor numérico, representado a través de las curvas J_{far} , J_{tip} , J_{dis} , y la curva analítica J_{ana} en función de los desplazamientos verticales Δu_y . Se puede notar que en el inicio del problema en un régimen elástico puro, las curvas J_{far} y J_{tip} coinciden con el valor analítico, es decir que estos valores representan el valor de la *Integral-J* independiente del camino coincidente con lo que predice la evolución de la curva analítica, tal como se demostró en el capítulo anterior.

A partir del valor $\Delta u_y = 0,25$ (mm), la plasticidad se hace notoria tal como se muestra en la Fig. (3.10 a) y comienza a tener influencia el valor de J_{dis} que hasta ese momento toma valores prácticamente nulos. En este punto las curvas J_{tip} y J_{far} comienzan a separarse, poniéndose en evidencia lo expresado a través de la ecuación (3.14). La evolución de plasticidad comienza a tener influencia en el valor de la *Integral-J* en las cercanías de la punta de la fisura y por lo tanto ésta deja de ser independiente del camino.

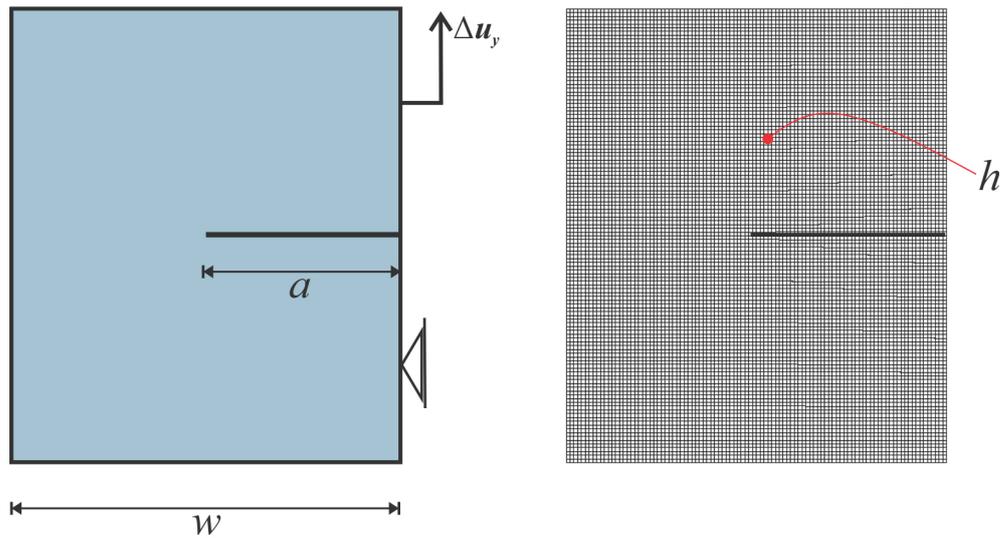


Figura 3.9: Esquema de una probeta compacta entallada. *Der.* dimensiones y condiciones de borde, *Izq.* discretización de la geometría con una malla de elementos finitos regular $h = 0,50(mm)$

Al incrementarse más el nivel de plasticidad, lo antedicho cobra aún mas importancia para evaluar la *Integral-J* sin depender de un camino, ya que la ecuación de balance dada en (3.17) permite evaluar cada uno de los términos intervinientes sin importar el nivel de plasticidad involucrado. Puede observarse que hasta el valor de desplazamiento impuesto $\Delta u_y = 0,475(mm)$, mostrado en la Fig.(3.10 c), el resultado numérico de J_{far} coincide con los valores analíticos sin diferencia apreciable.

Finalmente en la Fig.(3.12), se exponen las fuerzas configuracionales para el nivel de máximo desplazamiento considerado ($\Delta u_y = 0,475(mm)$) para los términos J_{dis} y J_{far} . En dicha figura puede verse que las fuerzas configuracionales disipativas delimitan la región del bulbo de plasticidad y son más importantes en los alrededores de la punta de la fisura en relación a los niveles de deformación plástica equivalente. Las fuerzas configuracionales J_{far} presentan una fuerza principal en la punta de la fisura similar a lo mostrado en el capítulo anterior, aunque en este caso el módulo de dicha fuerza representa el valor de la energía de disipación plástica y disponible para la propagación de la fisura.

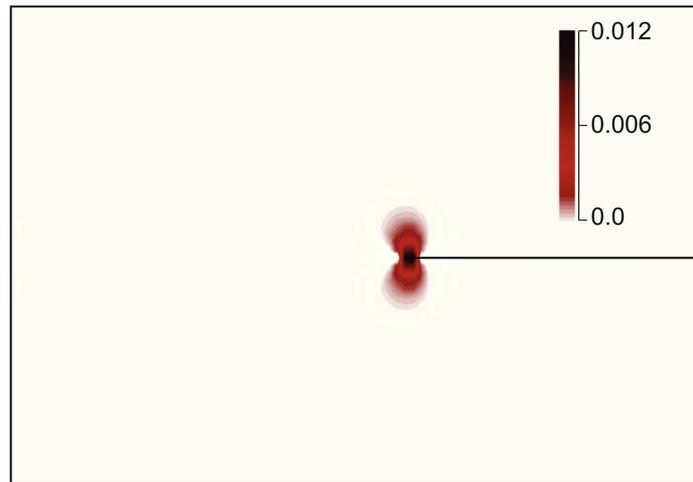
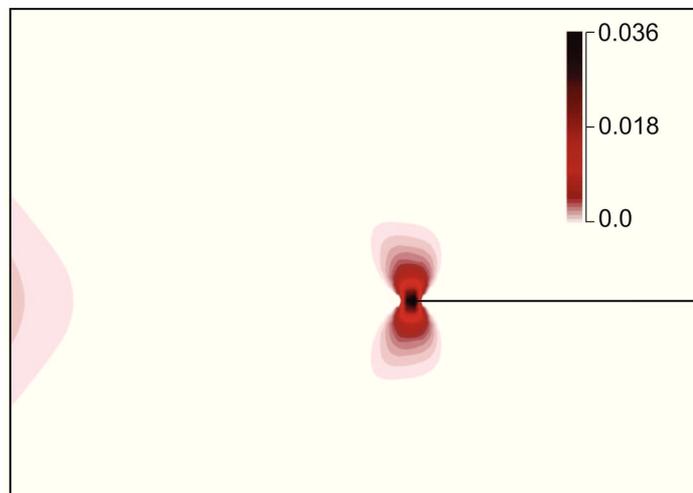
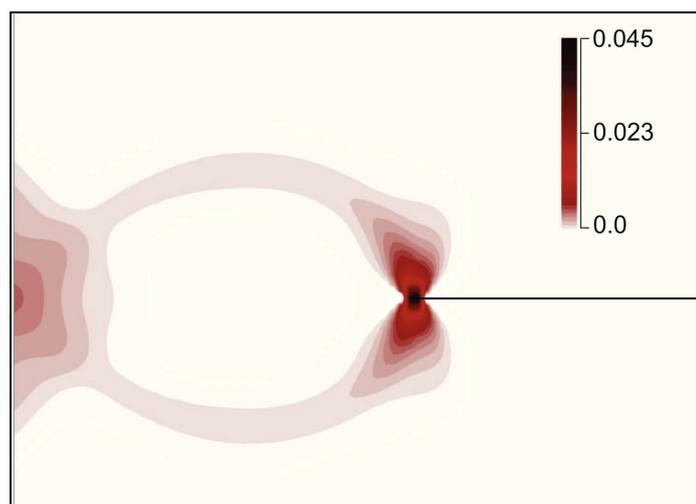
(a) $\Delta u_y = 0,25$ (mm)(b) $\Delta u_y = 0,425$ (mm)(c) $\Delta u_y = 0,475$ (mm)

Figura 3.10: Evolución de la deformación plástica equivalente para distintos niveles de desplazamiento Δu_y . a) $\Delta u_y = 0,25$ (mm), b) $\Delta u_y = 0,425$ (mm) y c) $\Delta u_y = 0,475$ (mm)

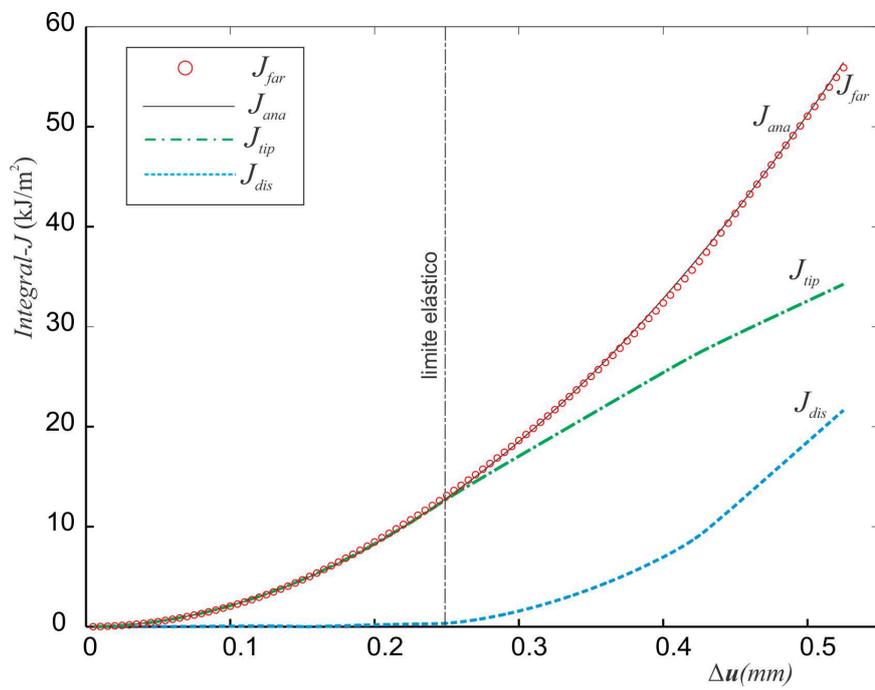


Figura 3.11: Curvas J_{ana} , J_{far} , J_{tip} y J_{dis} . Se observa como la curva J_{far} coincide con el valor analítico J_{ana} , además como disminuye el valor de J_{tip} a medida que evoluciona la plasticidad representada por J_{dis}

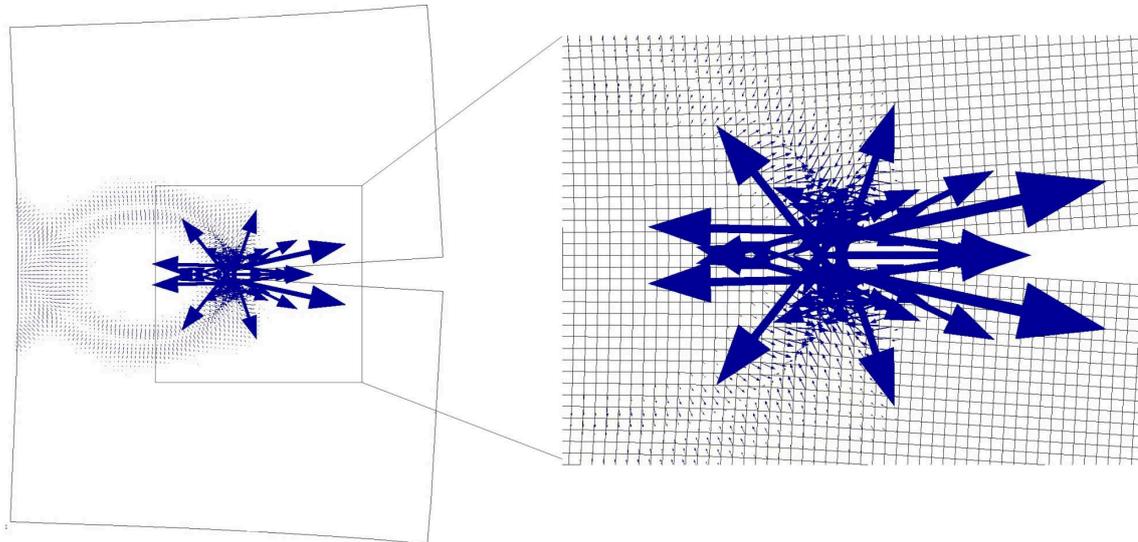
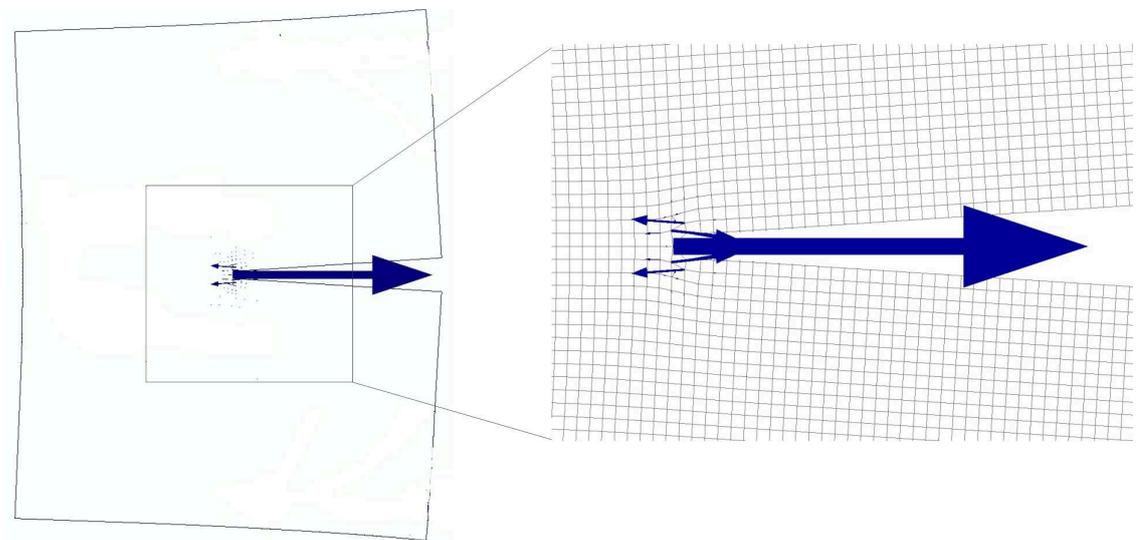
(a) Fuerzas configuracionales disipativas F_{dis} (b) Fuerzas configuracionales F_{conf}

Figura 3.12: Fuerzas configuracionales. a) Fuerzas configuracionales representativas de F_{tip} para un nivel de desplazamientos $\Delta u_y = 0,475$ y b) Fuerzas configuracionales representativas del término F_{conf} en el mismo nivel de desplazamiento

Parte II

**Estudio y análisis de propagación de
fisuras**

Breve introducción a la segunda parte

En los siguientes capítulos, se presenta una aproximación diferente para resolver el problema de propagación de una fisura en medios sólidos.

La metodología de análisis, se basa en la utilización de modelos del continuo para describir fisuras. En contraposición con las aproximaciones de la Mecánica de Fractura convencional, en este tipo de métodos, no se requiere la existencia de una fisura inicial en el sólido, además predice tanto el inicio como la dirección en la cual la fisura propaga a través del sólido.

- En el *Cap. 4* se presenta el modelo de campo de fase para problemas elásticos. La teoría del modelo se basa en la del continuo con micro estructura de este modo se introduce el campo de fase bajo un punto de vista teórico generalizado.
- En el *Cap. 5* se valida el modelo de campo de fase para medios elásticos, a través de ensayos de laboratorio en probetas de material frágil. Se comparan los resultados obtenidos a través de ensayos con las respuestas del modelo numérico propuesto.
- En el *Cap. 6* se extiende el modelo de campo de fase, para simular fisuras en medios elasto plásticos. Realizamos un completo desarrollo y discusión teórica considerando el campo de fase y la plasticidad como descriptores cinemáticos adicionales, manteniendo este desarrollo dentro del modelo del continuo con microestructura.

Capítulo 4

Modelo de campo de fase para simular fractura frágil

4.1. Introducción

Desde hace un tiempo, en el contexto de las aproximaciones numéricas de Mecánica de Fractura clásica para materiales con comportamiento frágil, se ha comenzado a utilizar una formulación variacional introducida por (Francfort y Marigo, 1998).

El concepto fundamental de esta propuesta consiste en resolver un problema de minimización de una función energía total. Esta función es la suma de la energía volumétrica de deformación elástica convencional (integrada en todo el cuerpo) más la energía de fractura sobre la superficie completa de la fisura. La propuesta de estos autores considera al camino de fisura como una variable del problema, cuyo resultado surge del proceso de minimización del funcional energía.

El problema así planteado es singular. Cabe aclarar que, a pesar que esta propuesta está basada en el concepto de minimización energética, no tiene fundamentación termodinámica. De hecho, ningún principio termodinámico avala esta hipótesis de minimización energética.

En este capítulo y en conexión con la formulación variacional de dichos autores, se aproxima el problema de fractura frágil considerando al campo de fase como un descriptor morfológico micro mecánico, partiendo de la teoría del continuo con microestructura. Esta idea surge de las teorías multicampo, que consisten en asignarle a un punto P el par de descriptores cinemáticos que caracterizan la configuración del cuerpo (\mathbf{x}, d) , con \mathbf{x} posición del punto y d parámetro de orden que da información adicional sobre la microestructura del material. El orden tensorial de d es a priori arbitrario.

El campo d realiza interacciones que tienen asociada una cierta potencia, este término ingresa en la expresión de la potencia interna \mathcal{P}^{int} y por ende surgen nuevas ecuaciones de balance, como se muestra a continuación.

En esta aproximación, el campo d difiere notablemente de los modelos con variables internas. En la teoría de variables internas, estos campos no interactúan para producir \mathcal{P}^{int} , y por ende no tienen asociadas ecuaciones de balance de microfuerzas, sólo intervienen en la descripción de la energía interna, lo que implica que están sujetos a la satisfacción del segundo principio de la termodinámica.

Desde este punto de vista, los modelos de materiales multicampos ver (Capriz, 1989),

(Mariano, 2002), son más generales, ya que casos particulares de esta teoría son modelos de variables internas.

En la teoría que desarrollamos a continuación d será un campo de fase escalar. Esta selección reduce los requerimientos de invariancia ante cambios de observador. A partir de este contexto teórico se desarrollan las ecuaciones que gobiernan el problema de inicio y propagación de fisuras realizados por (Da Silva et al., 2012).

En la primera sección de este capítulo se introducen los conceptos fundamentales de la teoría del continuo con microestructura y las consideraciones del campo de fase como descriptor morfológico. Luego se desarrolla la solución analítica del problema de fractura 1-D (barra) a fin de interpretar el modelo de manera más sencilla.

Finalmente se introducen la correspondiente implementación numérica y se realizan validaciones del modelo a través de la resolución de ejemplos.

4.2. Teoría del continuo con Microestructura

4.2.1. El campo de fase como descriptor cinemático

Consideremos dos descriptores cinemáticos para un sólido \mathcal{B} . El primero es la ubicación espacial \boldsymbol{x} de una partícula material inicialmente en la posición \mathbf{X} dada por:

$$\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \boldsymbol{u}$$

donde t es el tiempo y \boldsymbol{u} es el vector de desplazamientos. El segundo descriptor es el campo de fase $d(\mathbf{X}, t)$, considerado en este contexto como una variable microestructural $d \in [0, 1]$, significando con $d = 1$, al material completamente dañado y con $d = 0$, el material libre de daño. Valores intermedios a dicho intervalo indican niveles de daño parcial. Bajo este contexto, la cinemática de \mathcal{B} queda definida por los campos \boldsymbol{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$, d y ∇d y sus correspondientes variaciones admisibles $\dot{\boldsymbol{u}}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, \dot{d} y $\nabla \dot{d}$.

Las expresiones de potencias virtuales en Ω , una parte de \mathcal{B} delimitada por Γ , las definiremos considerando las variables $(\dot{\boldsymbol{u}}, \dot{d}) \in \mathcal{V}$, donde \mathcal{V} es el espacio de tasas admisibles. En un instante de tiempo dado se definen las potencias virtuales interna \mathcal{P}^{int} y externa \mathcal{P}^{ext} como:

$$\mathcal{P}^{int} = \int_{\Omega} (\boldsymbol{s} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\xi} \nabla \dot{d} + \boldsymbol{\pi} \dot{d}) d\Omega \quad \forall (\dot{\boldsymbol{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{d}, \nabla \dot{d}) \in \mathcal{V} \quad (4.1)$$

y

$$\mathcal{P}^{ext} = \int_{\Omega} (\boldsymbol{b} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\kappa} \dot{d}) d\Omega + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{t} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\eta} \dot{d}) d\Gamma; \quad \forall (\dot{\boldsymbol{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{d}, \nabla \dot{d}) \in \mathcal{V} \quad (4.2)$$

En la expresión de potencia interna (4.1): \boldsymbol{s} es la interacción mecánica que produce potencia a través de $\dot{\boldsymbol{u}}$ (velocidad), $\nabla^s \dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, es la tasa de deformación; $\boldsymbol{\sigma}$, es el tensor de tensiones de Cauchy; $\boldsymbol{\xi}$, vector de microtensiones internas; $\boldsymbol{\pi}$ es la microfuerza interna y \dot{d} es la tasa de evolución del daño virtual.

Asimismo en la (4.2) se consideran: \boldsymbol{t} tracciones en la superficie, \boldsymbol{b} son las fuerzas de cuerpo, ambas convencionales. Se consideran además interacciones mecánicas tipo fuerza generalizada $\boldsymbol{\kappa}$ y microtensiones $\boldsymbol{\eta}$, que generan potencia a través de \dot{d} y $\nabla \dot{d}$.

A partir de aquí asumiremos invariancia ante cambio de observadores y consideramos el axioma de la mecánica clásica, para un desplazamiento rígido cualquiera debe cumplirse:

$$\nabla^s \dot{\mathbf{u}} = 0; \quad \dot{d} = 0; \quad \nabla \dot{d} = 0 \quad (4.3)$$

De este axioma se desprende que la potencia interna \mathcal{P}^{int} debe ser nula para desplazamientos rígidos, $\dot{\mathbf{u}}$ no debe tener interacción en dicha potencia, por lo tanto en lo que sigue consideraremos como es convencional en la mecánica del continuo clásica que: $\mathbf{s} \equiv 0$.

Introducimos ahora el concepto de tasas virtuales admisibles: $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{d}, \nabla \hat{d}) \in \hat{\mathcal{V}}$, siendo $\hat{\mathcal{V}}$ el espacio vectorial de las tasas virtuales admisibles.

Aplicando el Principio de las Potencias Virtuales podemos escribir la siguiente identidad:

$$\mathcal{P}^{ext}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{d}, \nabla \hat{d}) = \mathcal{P}^{int}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{d}, \nabla \hat{d}); \quad \forall (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{d}, \nabla \hat{d}) \in \hat{\mathcal{V}}$$

es decir:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\kappa} \hat{d}) d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\eta} \hat{d}) d\Gamma = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\xi} \nabla \hat{d} + \boldsymbol{\pi} \hat{d}) d\Omega; \quad \forall (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{d}, \nabla \hat{d}) \in \hat{\mathcal{V}} \quad (4.4)$$

Agrupando términos, y considerando alternativamente $\hat{d} = 0$ con $\hat{\mathbf{u}}$ admisible y arbitrario, o bien $\hat{\mathbf{u}} = 0$ con \hat{d} arbitrario, podemos desacoplar la ecuación de las potencias virtuales en las siguientes dos identidades:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}}) d\Omega - \int_{\Gamma} (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0; \quad \forall (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{d}, \nabla \hat{d}) \in \hat{\mathcal{V}} \quad (4.5)$$

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\xi} \nabla \hat{d} + \boldsymbol{\pi} \hat{d} - \boldsymbol{\kappa} \hat{d}) d\Omega - \int_{\Gamma} (\boldsymbol{\eta} \hat{d}) d\Gamma = 0; \quad \forall (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{d}, \nabla \hat{d}) \in \hat{\mathcal{V}} \quad (4.6)$$

De las ecuaciones (4.5) y (4.6), se concluyen las siguientes ecuaciones de balance:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (4.7a)$$

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \Gamma \quad (4.7b)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\kappa} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4.7c)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \Gamma \quad (4.7d)$$

La ecuación (4.7a) es la ecuación convencional de Cauchy en forma local (despreciando las fuerzas de inercia), (4.7b) la ecuación de equilibrio de tracciones en el borde del cuerpo, la (4.7c), resulta ser el balance de fuerzas microscópicas local y la última de éstas (4.7d), representa el equilibrio de micro tracciones generalizadas en el contorno del cuerpo.

De ahora en más se asumirá que no existen microfuerzas impuestas externamente, es decir $\boldsymbol{\kappa} = 0$. Aplicando el segundo principio de la termodinámica siguiendo a (Gurtin et al., 2010) la expresión de la disipación mecánica para este caso viene dada como:

$$\mathcal{D} = -\dot{\varphi}(\boldsymbol{\varepsilon}, d, \nabla d) + \underbrace{\boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\pi} \dot{d} + \boldsymbol{\xi} \nabla \dot{d}}_{\mathcal{P}^{int}} \geq 0 \quad \forall (\dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dot{d}, \nabla \dot{d}) \in \mathcal{V} \quad (4.8)$$

válido para todo proceso termodinámicamente admisible. De la (4.8) se puede determinar que:

$$\partial_\varepsilon \varphi = \boldsymbol{\sigma} \quad \partial_d \varphi = \boldsymbol{\pi}_a \quad \partial_{\nabla d} \varphi = \boldsymbol{\xi} \quad (4.9)$$

Siguiendo la idea de (Da Silva et al., 2012), escribimos la microfuerza $\boldsymbol{\pi}$ como la suma de dos términos:

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_a + \boldsymbol{\pi}_r \quad (4.10)$$

En donde $\boldsymbol{\pi}_r \neq 0$ sólo si $\dot{d} = 0$. De este modo, $\boldsymbol{\pi}_r$ puede ser considerada como una microfuerza reactiva y no produce potencia. Por lo que, cualquier valor arbitrario de $\boldsymbol{\pi}_r$ es termodinámicamente admisible.

4.2.2. Especificación para la función de energía libre

Como hipótesis de partida asumiremos que la función de energía libre φ , se define con los siguientes argumentos: $\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}, d, \nabla d)$. Consideramos entonces una función general para la energía de la forma:

$$\varphi = \frac{1}{2} g(d) \boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^- : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^- + f(d) + \frac{G_c \ell}{2} |\nabla d|^2 \quad (4.11)$$

Con $\mathbb{C}^e = \lambda \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + 2\mu \mathbf{I}$ denotamos el tensor elástico Hooke, en cuya expresión, λ y μ son los parámetros de Lamé, $\mathbb{1}$ el tensor identidad de orden 2, e \mathbf{I} el tensor identidad de cuarta orden. Los tensores $\boldsymbol{\varepsilon}^+$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^-$ son la partes positiva y negativa del tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$, definidas como: $\boldsymbol{\varepsilon}^+ = \langle \varepsilon_i \rangle \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^- = -\langle -\varepsilon_i \rangle \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$; siendo $\langle \cdot \rangle$ los corchetes de Mac-Aulay y toman el valor del argumento si es positivo o cero si negativo. G_c es la energía de fractura por unidad de área de fisura, cuya unidades son: (Nm/m^2) y ℓ es un parámetro de orden del modelo de campo de fase cuya dimensión es una longitud (m).

Los primeros dos términos de la ecuación (4.11), denotan la densidad de energía de deformación elástica, con $g(d)$ función del daño verifica que:

$$g(0) = 1, \quad g(1) = 0, \quad g'(1) = 0$$

En este caso se define la función de daño como: $g(d) = (1-d)^2$. Los últimos dos términos de (4.11) se pueden interpretar como la energía cohesiva, regularizada de acuerdo a la longitud característica ℓ . Siendo: $f(d) = G_c d^2 / 2\ell$.

De manera completa la (4.11) se reescribe como:

$$\varphi = \frac{1}{2} (1-d)^2 \boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^- : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^- + \frac{G_c d^2}{2\ell} + \frac{G_c \ell}{2} |\nabla d|^2 \quad (4.12)$$

Reemplazando la expresión (4.12) en las ecuaciones de estado (4.9), éstas se reescriben como:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-d)^2 \mathbb{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \mathbb{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}^- \quad (4.13a)$$

$$\boldsymbol{\pi}_a = [(1-d) \boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^+] + G_c d / \ell \quad (4.13b)$$

$$\boldsymbol{\xi} = G_c \ell \nabla d \quad (4.13c)$$

La ecuación de gobierno para el campo de fase (4.6) en forma variacional resulta:

$$\int_{\Omega} G_c \ell \nabla d \nabla \hat{d} + \left[(1-d) \boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \frac{G_c d}{\ell} \right] \hat{d} d\Omega - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\eta} \hat{d} d\Gamma = 0; \quad \forall \hat{d} \in \hat{\mathcal{V}} \quad (4.14)$$

En (4.10) se debe considerar que $\pi_r = 0$ para $\dot{d} > 0$ y π_r es tal que verifica automáticamente (4.14) cuando $\dot{d} = 0$, la forma que toma $\pi(t)$ se esquematiza en la Fig.(4.1).

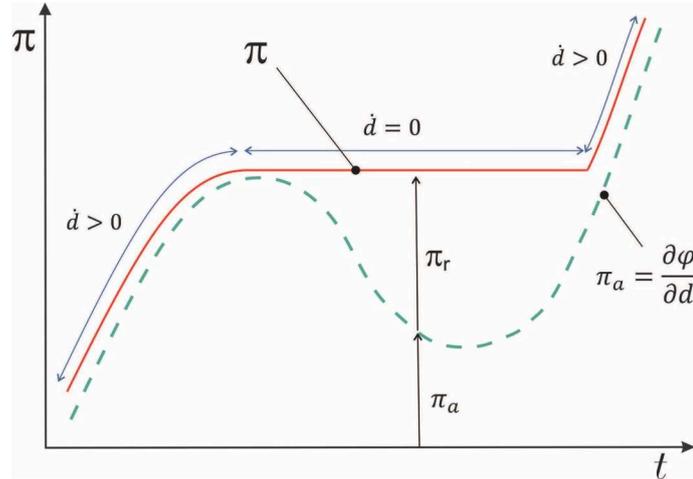


Figura 4.1: Esquema de la función $\pi(t)$. $\pi_r = 0$ para $\dot{d} > 0$ y π_r arbitraria para $\dot{d} = 0$, en función del tiempo t

La ecuación (4.14) se considera la ecuación de gobierno variacional para el campo de fase. Su resolución se puede llevar a cabo adicionando condiciones de borde adecuadas. Las condiciones de borde adicionales, pueden ser de dos tipos:

- i) $\pi = 0$ en Γ , siendo Γ el contorno de \mathcal{B} ;
- ii) $\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n} = 0$, lo que es equivalente a definir: $\nabla d \cdot \mathbf{n} = 0$ en Γ .

Para todos los casos que se han desarrollado en esta tesis, se optó por el segundo tipo (ii) de condiciones de contorno para el campo de fase.

4.3. Solución analítica del problema 1D

Se resuelve en esta sección el problema 1D (barra) utilizando las ecuaciones de campo de fase, siguiendo el trabajo de (Borden et al., 2011). Las ecuaciones para el problema 1D, barra sometida a tensiones (se asume que la deformación uniaxial es positiva, con lo que $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^+$), impuestas en sus extremos, se escriben como sigue:

- i) Ecuación de equilibrio (4.7a) especificada para el caso 1-D:

$$\sigma_{,x} = 0 \quad (4.15)$$

Donde utilizamos la notación $(\cdot)_{,x} = \frac{d(\cdot)}{dx}$

ii) Ecuación del campo de fase (4.7c)

$$\frac{G_c}{\ell} (d - \ell^2 d_{,xx}) = (1 - d) E \varepsilon^2 \quad (4.16)$$

iii) Ecuación constitutiva (4.13a):

$$\sigma = (1 - d)^2 E \varepsilon \quad (4.17)$$

más las condiciones de borde según lo comentado arriba. En este caso ambas condiciones de borde son: $d_{,x} = 0$ y $\sigma = \sigma^h$ (con el superíndice h , refiriendo a la solución del caso homogéneo), en ambos bordes de la barra. Además, en cualquier caso, la ecuación de equilibrio (4.15), determina que la tensión es constante a lo largo de la barra.

4.3.1. Caso homogéneo

Cabe aclarar aquí, que no tiene sentido físico el problema de una barra estirada homogéneamente hasta falla. Sólo resolveremos este caso para identificar los parámetros del modelo.

Analizamos el caso de la barra homogéneamente deformada e identificamos los campos con el supra-índice “h”. Para este caso: $d_{,x}^h = d_{,xx}^h \equiv 0$, y de la ecuación (4.16) resulta:

$$\frac{G_c}{\ell} d^h = (1 - d) E (\varepsilon^h)^2 \quad (4.18)$$

Despejando de esta ecuación d^h e introduciendo en (4.17), se obtiene la respuesta $\sigma^h(\varepsilon^h)$ que determina este modelo, para una barra estirada homogéneamente.

Diversas curvas $\sigma^h(\varepsilon^h)$ se muestran en la Fig. 4.2. Los valores críticos σ_{max}^h y ε_{max}^h mostrados en esas curvas resultan:

$$\sigma_{max}^h = \frac{3\sqrt{3}}{16} \sqrt{\frac{G_c E}{\ell}} \quad ; \quad \varepsilon_{max}^h = \sqrt{\frac{G_c E}{3E\ell}} \quad (4.19)$$

En la misma Figura se remarca la sensibilidad de la respuesta $\sigma^h(\varepsilon^h)$ con los parámetros G_c y ℓ .

Notamos, que el aumento de G_c , manteniendo fijos los otros parámetros del material, no implica en una disminución de la pendiente poscrítica de la respuesta $\sigma^h(\varepsilon^h)$, lo que contrasta significativamente con la respuesta de modelos de fractura alternativos tipo cohesivos.

De (4.18) podemos expresar ε^h como una función explícita de d^h , e introducirla en el modelo constitutivo, resultando:

$$\sigma^h = \sqrt{\left(\frac{G_c E}{\ell}\right) d^h (1 - d^h)^3} \quad (4.20)$$

Esta expresión es utilizada en la próxima **subsección** para derivar la respuesta de una barra no-homénea.

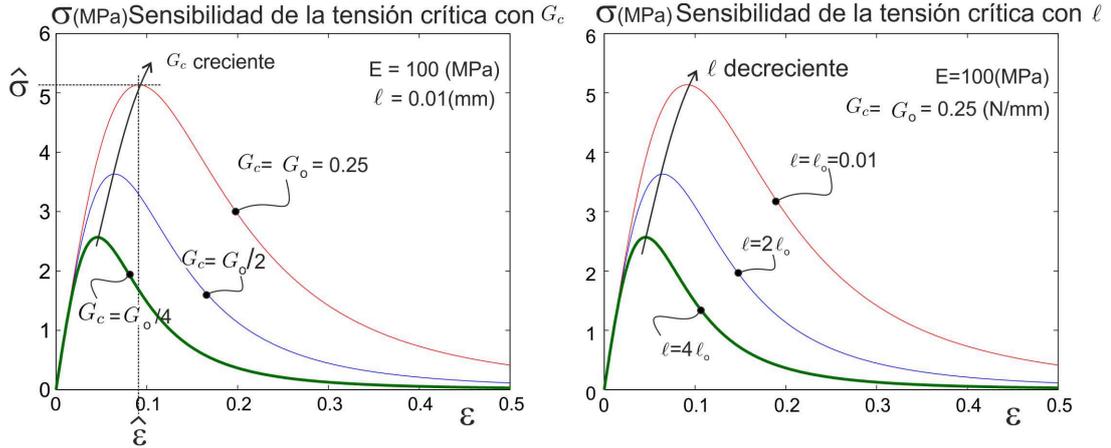


Figura 4.2: Análisis de sensibilidad de las curvas σ vs. ε variando los parámetros G_c y ℓ

4.3.2. Caso no-homogéneo

En este apartado resolvemos el caso que se espera observar físicamente. La barra estirada con localización de deformaciones.

Utilizando la ecuación (4.17), la expresión (4.16) se puede reescribir como:

$$\frac{G_c}{\ell} d - \frac{\sigma \varepsilon}{(1-d)} - (G_c \ell) d_{,xx} = 0 \quad (4.21)$$

Multiplicando esta expresión por: $d_{,x}$, derivando (4.17) respecto a x e igualando a cero por la ecuación de equilibrio: (4.15) y finalmente operando, se obtiene la expresión:

$$\left(\frac{d^2}{\ell} - \frac{1}{G_c E \ell} \frac{\sigma^2}{(1-d)^2} - (d_{,x})^2 \right)_{,x} = 0 \quad (4.22)$$

que resulta en:

$$\frac{d^2}{\ell} - \frac{1}{G_c E \ell} \frac{\sigma^2}{(1-d)^2} - (d_{,x})^2 - k = 0 \quad (4.23)$$

el término k es una constante que se puede evaluar considerando la condición de borde para $x \rightarrow \infty$. En este caso, utilizamos $d_{,x}(\infty) = 0$, con lo que $d \rightarrow d^h$ y siendo d^h un valor constante.

De la solución que determinamos para la barra homogénea (en este caso hay que considerar que en el infinito los campos tienden a ser homogéneos y por lo tanto la solución de la **subsección** previa, prevalece), podemos considerar la tensión: $\sigma^h(d^h)$ que está asociada con d^h , y que por lo tanto será el valor de la tensión de equilibrio que se impone en la barra: $\sigma = \sigma^h$ para todo x . Con lo cual, evaluando (4.23) en $x \rightarrow \infty$, obtenemos:

$$k = \frac{(d^h)^2}{\ell} - \frac{1}{G_c E \ell} \frac{(\sigma^h)^2}{(1-d^h)^2} \quad (4.24)$$

Y de (4.23) despejamos $d_{,x}$ e integramos, como sigue:

$$x(d^*) = \int_{d_0}^{d^*} \left(\frac{d^2}{\ell} - \frac{1}{G_c E \ell} \frac{\sigma^2}{(1-d)^2} - k \right)^{-1/2} \partial d \quad (4.25)$$

Por cuestiones obvias de notación, la expresión ∂d se interpreta en este caso como el diferencial de d . El limite inferior de la integral d_0 , con $d_0 \geq d^h$, es el valor de d en el centro de la barra y tal que define $d_{,x} = 0$ en $x = 0$, que se asume como la segunda condición de borde para resolver (4.21).

Por experimentación numérica se puede observar que para $d \in [d^h, d_0]$ la función:

$$\frac{d^2}{\ell} - \frac{1}{G_c E \ell} \frac{\sigma^2}{(1-d)^2} - k \geq 0 \quad (4.26)$$

y fuera de ese intervalo, la función es negativa. De este modo, la integral (4.25) determina la coordenada x del punto de la barra que tiene un valor de $d = d^*$. Esta función se representa en la Figura 4.3 para distintos valores de d^h que se han tomado como dato para evaluar la integral (4.25).

La tensión de la barra, $\sigma^h(d^h)$, en cada caso es un porcentaje de la tensión máxima σ_{max}^h definida mediante la ecuación: (4.19). Este porcentaje se define a través del parámetro: $\beta = \sigma^h(d^h)/\sigma_{max}^h$ que también identifica cada curva de la Fig.(4.3).

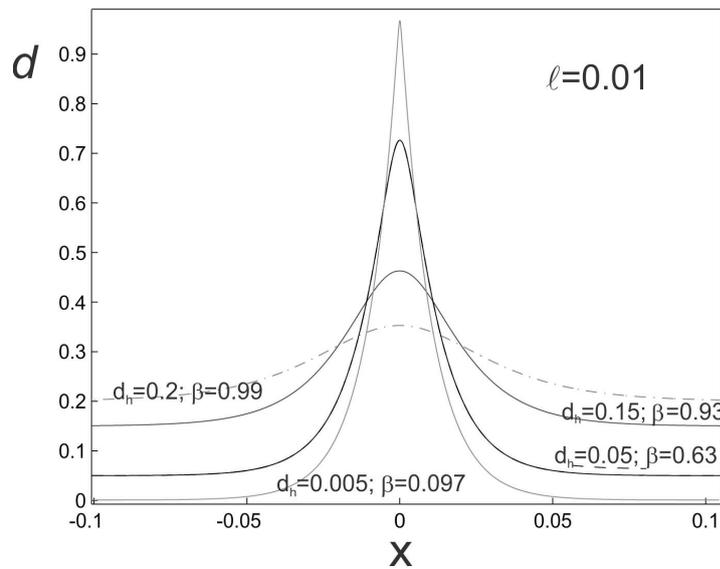


Figura 4.3: Distribución del campo de fase d para diferentes valores de $\sigma(d_h)$

4.4. Principio Variacional e implementación numérica

Las ecuaciones (4.5) y (4.14) son las ecuaciones variacionales de gobierno del problema planteado. La primera resuelve la cinemática del problema y la segunda gobierna la evolución del modelo de campo de fase. Estas ecuaciones se implementan numéricamente a través del método de elementos finitos en forma standard. Para tal fin se considera la discretización espacial para los campos \mathbf{u} y d dada por:

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{i=1}^{n_{\text{nodos}}} N_i(x) \mathbf{u}_i \quad (4.27)$$

$$d(x) = \sum_{i=1}^{n_{\text{nodos}}} N_i(x) d_i \quad (4.28)$$

Donde n_{nodos} es el numero de nodos en la malla de elementos finitos considerada, $N_i(x)$ son las funciones de forma estándar asociadas al nodo i , \mathbf{u}_i y d_i son los parámetros de cada campo en el nodo considerado. Para ambos campos (\mathbf{u}, d) se utilizan interpolaciones de igual orden determinadas en este caso por el tipo de elemento finito utilizado, elementos finitos de tipo cuadriláteros bilineales Q_1 . De esta forma, las funciones de forma N son las estándar de ese tipo de elemento finito. Del mismo modo las variaciones $\hat{\mathbf{u}}$ y \hat{d} se aproximan con:

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nodos}}} N_i(x) \delta \hat{\mathbf{u}}_i \quad (4.29)$$

$$\hat{d} = \sum_{i=1}^{n_{\text{nodos}}} N_i(x) \delta \hat{d}_i \quad (4.30)$$

Las condiciones de borde que se adoptan para el campo d son: $\eta = \boldsymbol{\xi} \mathbf{n} = 0$ en Γ . El problema variacional dado, queda expresado en forma discreta como:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \nabla N^s \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} N \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} N \hat{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (4.31)$$

$$\int_{\Omega} (G_c \ell \nabla d \nabla N) \hat{d} - \left((1-d) \boldsymbol{\varepsilon}^+ : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^+ - \frac{G_c d}{\ell} \right) N \hat{d} \, d\Omega = 0 \quad (4.32)$$

La integración temporal se implementa resolviendo cada uno de los campos \mathbf{u} y d en forma desacoplada bajo un esquema por etapas ("staggered"). Primero se resuelve conocida la solución al tiempo $(t - \Delta t)$, resuelve al tiempo t el campo de desplazamientos $\mathbf{u}(t)$ a través de (4.31), luego calculado el término $\boldsymbol{\varepsilon}^+(t) : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^+(t)$ es reemplazando en la ecuación (4.32) y se resuelve el campo $d(t)$.

4.5. Ejemplos Numéricos

En esta sección se presenta una serie de ejemplos numéricos resueltos mediante el modelo de campo de fase propuesto. Con estos ejemplos se trata de demostrar la potencialidad del método en distintos aspectos.

El primer ejemplo trata sobre un análisis de convergencia para el caso unidimensional comparando la solución numérica con la obtenida analíticamente por las ecuaciones (4.15) y (4.16). En el segundo ejemplo se valida la implementación realizada, a través del cálculo de la carga de rotura para un caso mostrado en el trabajo de (Miehe et al., 2010).

Luego se presentan dos ejemplos más, en uno se estima a través del modelo de campo de fase, la carga crítica de propagación de fisura, en una viga con entalla lateral solicitada a tracción lateral. Finalmente, a través del último ejemplo se realiza la captura de la energía de fractura para un panel de doble entalla solicitado a desplazamiento uniforme.

4.5.1. Ejemplo 1 - Análisis de convergencia 1-D

Mediante este ejemplo, evaluamos la convergencia para los campos \mathbf{u} y d a través de mallas de elementos finitos con distintos órdenes de interpolación. En este caso se realiza una comparación entre la convergencia para elementos finitos cuadriláteros con interpolación bilineal Q_1 y con interpolación cuadrática S_2 .

El objetivo primordial de este test es evaluar la posibilidad de la existencia de bloqueo numérico debido a la interpolación con igual orden.

Se considera una barra de longitud L en la que se resuelve el problema de fractura 1-D, con las ecuaciones descritas en la Secc. 4.3. La solución analítica se obtiene con los siguientes parámetros $E = 100(GPa)$, $\nu = 0$, $G_c = 1(kN/mm)$, $d_h = 0,05$ y se adoptaron valores de $\ell = 0,01 (mm)$ y $\ell = 0,005 (mm)$.

Aprovechando la distribución simétrica de los campos d y \mathbf{u} , ver Fig.(4.3), en el análisis sólo se modela la mitad de la barra, hasta una longitud $L = 0,1(mm)$. La barra se discretiza, con distintas mallas regulares de elementos finitos Q_1 y S_2 con tamaño h decreciente, considerándose como parámetro de diseño la relación ℓ/h , variable de 4 a 128, como se observa en la Fig.(4.4). Estas mallas ofrecen una variación en el tamaño h , para ambos tipos de elementos, entre $0,0025$ y $7,81 \times 10^{-5} (mm)$.

El procedimiento de análisis, a fin de evaluar la convergencia de cada uno de los campos intervinientes, consiste, por un lado, en imponer el campo \mathbf{u} obtenido analíticamente a través de la ecuación (4.15) en todos los nodos de la malla y con ello, recuperar el campo d en forma numérica resolviendo la ecuación (4.32).

De manera similar se impone el campo d resuelto analíticamente a través de (4.16), en los nodos de la malla y se resuelve el campo \mathbf{u} a través de la ecuación (4.31). Este procedimiento se repitió para las mallas de ambos tipos de elementos finitos mencionados. Es decir, en el análisis, ambos campos se interpolaron con el mismo tipo de elemento en cada caso. Primeramente se realizó el procedimiento descrito con mallas de elementos Q_1 con interpolación lineal y luego se repitió todo el proceso en mallas con la misma discretización de tamaños h pero con elementos tipo S_2 e interpolación cuadrática.

El error relativo entre la solución analítica y numérica se calcula en todos los casos a

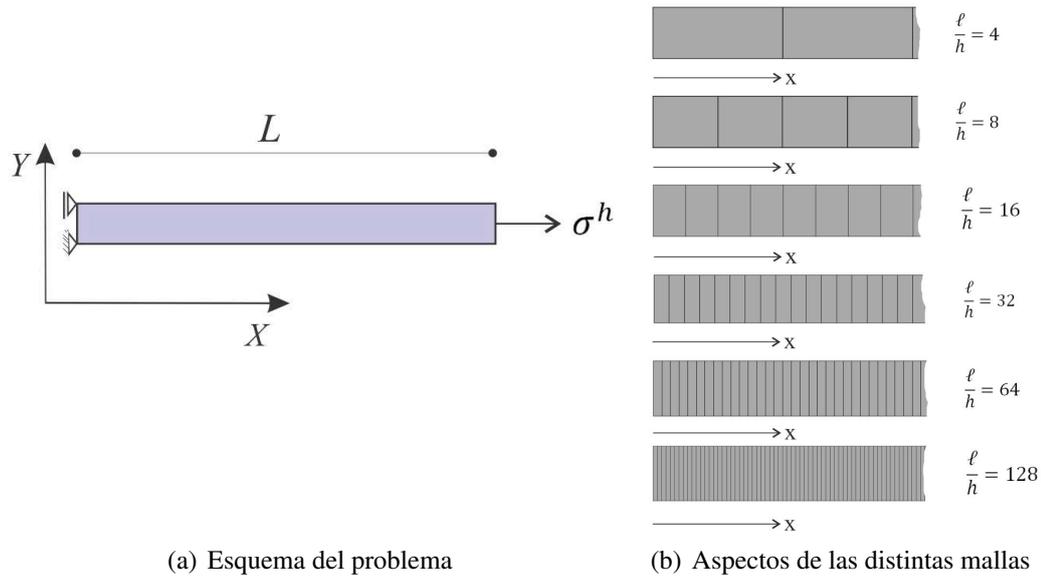


Figura 4.4: a): Esquema del problema de fractura 1-D resuelto en el ejemplo 1; b) Relación de aspecto de las distintas mallas utilizadas para obtener la solución numérica del problema esquematizado (ℓ es el tamaño horizontal de los elementos, h es la altura)

través de la norma L_2 dada por:

$$\|e_u\|_2 = \frac{\left(\int_x |u_{ex} - u_{num}|^2 dx\right)^{1/2}}{\left(\int_x |u_{ex}|^2 dx\right)^{1/2}}$$

$$\|e_d\|_2 = \frac{\left(\int_x |d_{ex} - d_{num}|^2 dx\right)^{1/2}}{\left(\int_x |d_{ex}|^2 dx\right)^{1/2}}$$

Donde los subíndices "ex" se refiere a la solución analítica, y "num" a la numérica, respectivamente.

En Fig. (4.5) se presentan las curvas en escalas logarítmicas obtenidas en el análisis con elementos finitos Q_1 . En estas curvas puede observarse que las respuestas para ambos campos obtenidos numéricamente resultan en una recta con pendiente 2 como era de esperarse del análisis de convergencia teórico del modelo numérico. En la Fig.(4.6), mostramos los mapas para cada uno de los campos resueltos en este ejemplo sobre la malla más refinada de elementos Q_1 . Allí queda reflejada la suavidad de la solución numérica para los campos: tensión σ_x , daño d y desplazamientos u_x . Adicionalmente en la Fig.(4.6 d), presentamos la curva de respuesta estructural, resultante $R(kN)$ vs desplazamientos $u_x(mm)$ para la misma malla.

Continuando con el análisis, demostramos la convergencia del modelo con elementos de mayor orden de interpolación, en este caso con elementos S_2 y orden de interpolación cuadrático. El análisis realizado responde al mismo procedimiento descrito con anterioridad para el caso de interpolación lineal, los resultados de las curvas de error son los que

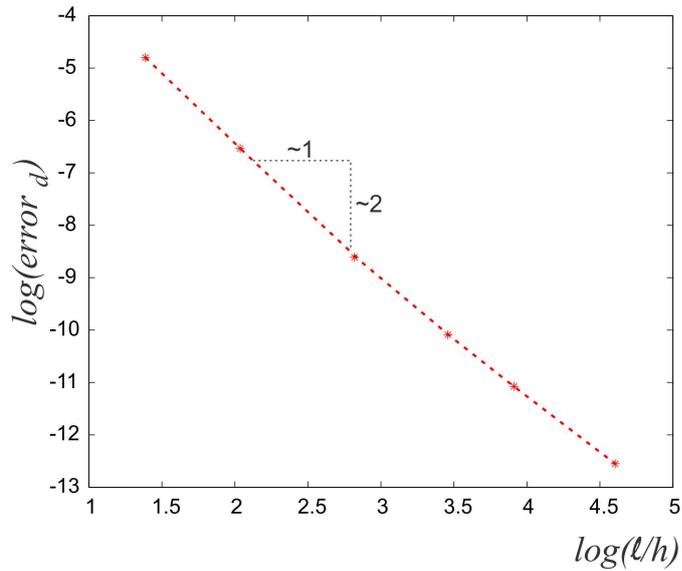
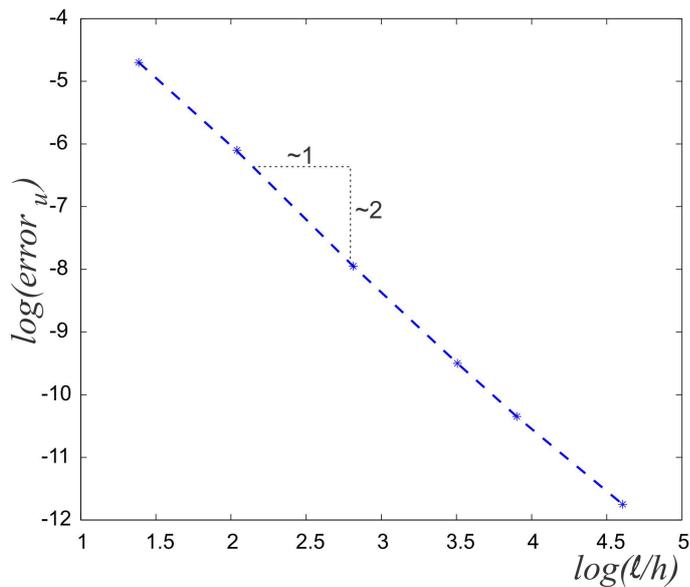
(a) Convergencia campo de daño d (b) Convergencia campo de desplazamientos u

Figura 4.5: Curvas de error para los campos u y d en función de h/ℓ para elementos finitos Q_1 con interpolación bilineal

se presentan en la Fig.(4.7), contrastándose además con las curvas surgidas en el caso de elementos Q_1 , puede observarse que en este caso la pendiente de la curva de error es 3, tal como es de esperarse teóricamente. Se puede concluir que para un orden cuadrático, tampoco presenta bloqueo la solución de los campos u y d . Se demuestra que, las soluciones, del modelo, para ambos campos no presentan signos de bloqueo numérico.

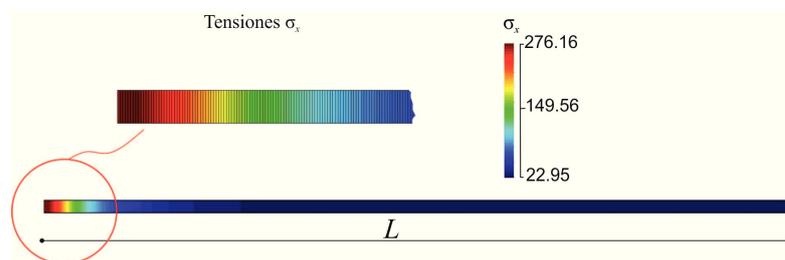
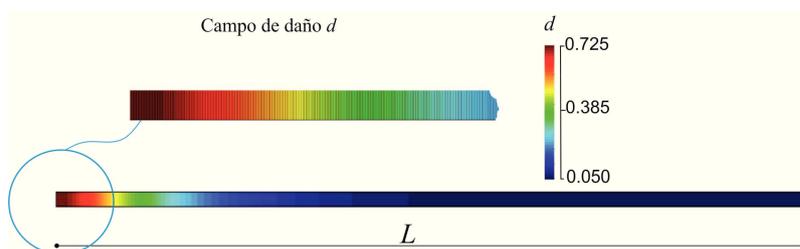
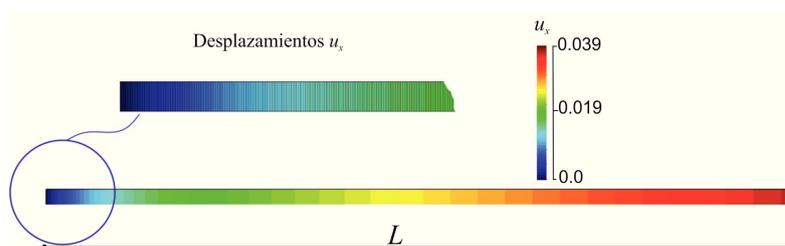
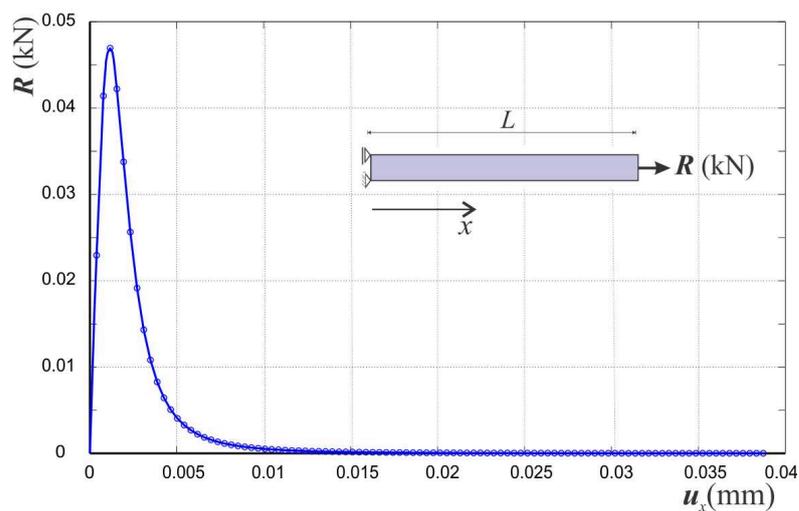
(a) Campo de tensiones σ_x (b) Campo de daño d (c) Campo de desplazamientos u_x (d) Curva estructural. Resultante R vs desplazamiento u_x

Figura 4.6: Campos obtenidos numéricamente, para el problema de fractura 1 – D utilizando mallas de elementos finitos Q_1

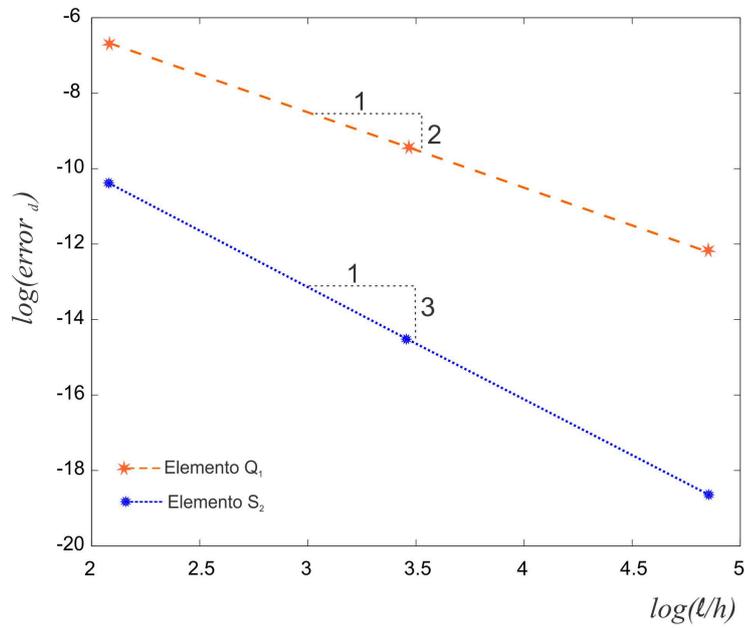
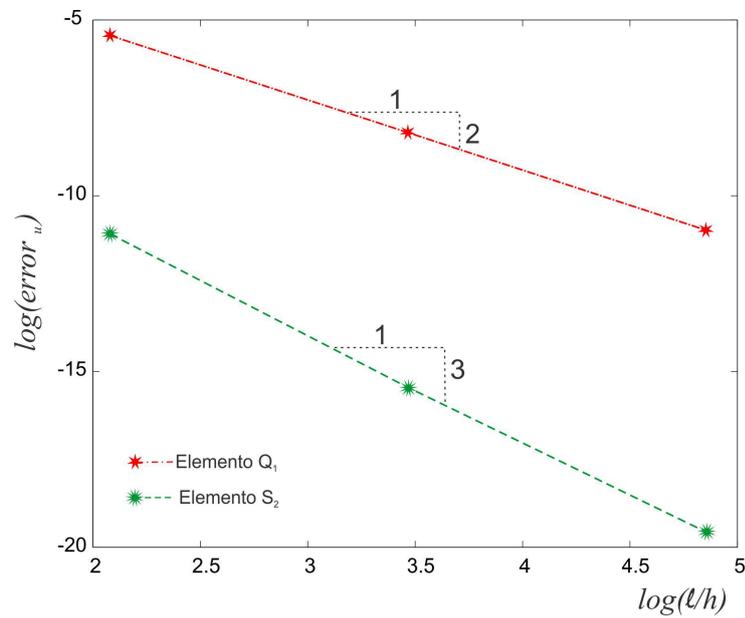
(a) Curvas de error de daño d (b) Curvas de error para desplazamientos u

Figura 4.7: Comparación entre las curvas de error, para los campos u y d obtenidas numéricamente con elementos finitos Q_1 y S_2

4.5.2. Ejemplo 2- Espécimen con entalladura profunda

Este ejemplo muestra la captura de la evolución del daño, a través del modelo de campo de fase gobernado por la ecuación (4.32), para ello se considera el problema de un espécimen compacto con entalladura profunda con la geometría que muestra la Fig.(4.8).

Se obtiene en este caso la respuesta carga-desplazamiento y se muestra la propagación de fisura a través del cuerpo modelado con el campo de fase de manera similar a (Miehe et al., 2010).

Los parámetros mecánicos utilizados son los mismos que en la referencia citada: $E = 209,99(GPa)$; $\nu = 0,30$ y $G_c = 2,7 \times 10^{-3}(kN/mm)$.

Analizamos la influencia del parámetro ℓ en la captura de la propagación de fisura. Para ello se estudian dos valores de ℓ : $0,0375(mm)$ y $0,0075(mm)$. La geometría se discretiza con una malla de elementos finitos Q_1 . En este caso no se utiliza una malla totalmente estructurada, como en la cita mencionada, sino que se introducen elementos regulares de tamaño $h = 1,0 \times 10^{-3}(mm)$ en la vecindad de la punta de la fisura y en la dirección de propagación de la misma. A su vez se distribuye una faja regular de un ancho 10ℓ en dirección perpendicular. En la Fig.(4.9) se muestra el aspecto de la malla de elementos finitos, utilizada para obtener la solución numérica, donde puede apreciarse el diseño de la malla con los elementos regulares y de menor tamaño distribuidos en la zona donde se espera capturar la evolución del campo de daño d .

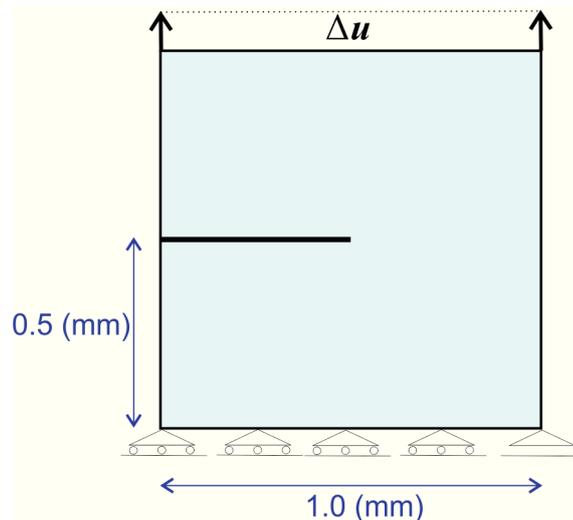


Figura 4.8: Esquema probeta compacta con entalladura profunda, dimensiones en (mm)

Las condiciones de borde del problema son las que se esquematizan también en la Fig. (4.8): el borde inferior permanece con los desplazamientos restringidos en dirección vertical y se impone un desplazamiento uniforme en el borde superior. El incremento de desplazamiento impuesto se realiza en una primera etapa $\Delta u = 10^{-5}(mm)$ hasta que el daño d llega a un valor cercano a 0,70 en la punta de la fisura, luego se define un incremento de desplazamiento de valor $\Delta u = 10^{-6}(mm)$. Con ésto, se logra simular la evolución de la fisura para obtener la rotura total.

Las curvas carga-desplazamiento obtenidas para este caso se muestran en la Fig. (4.10), en contraste con las obtenidas por (Miehe et al., 2010). Puede observarse que se

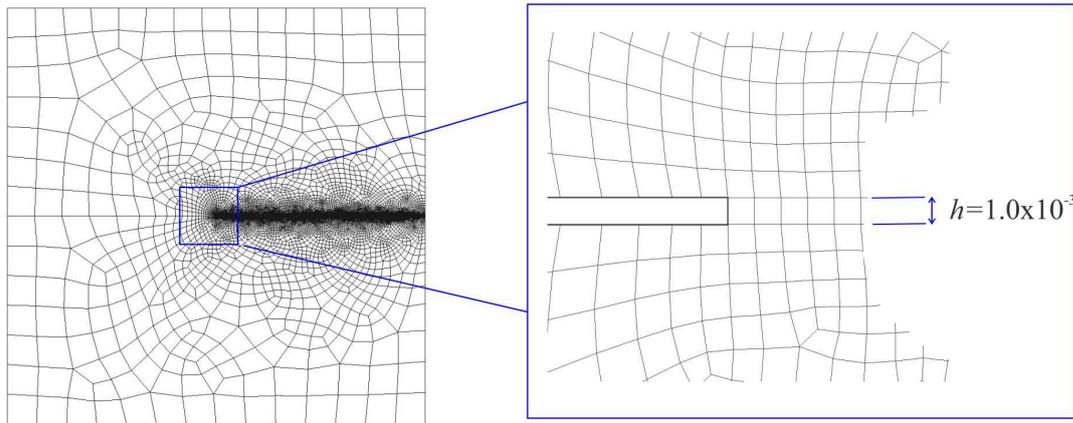


Figura 4.9: Aspecto de la malla del ejemplo 2, *izq*: malla completa, *der*: tamaño de elementos h en la punta de la fisura en (*mm*).

captura con bastante similitud dichas curvas, sólo que en el presente trabajo no se utilizó una malla regular en su totalidad, lo que se traduce en una menor cantidad de elementos finitos y por lo tanto en menor costo computacional.

Mediante del campo de fase, mostramos en la Fig.(4.11) la captura de la evolución de la fisura, para ambos valores de ℓ y para los cuatro puntos marcados en la Fig.(4.10). En cada uno de estos puntos puede observarse la correspondiente evolución del daño, para un determinado nivel de cargas, entre el punto 2 y el 3 el incremento de desplazamiento pasa de $\Delta u = 10^{-5}$ a $\Delta u = 10^{-6}$ ya que el daño evoluciona de 0,50 hasta 0,99 en dicho intervalo. Posterior al punto 3 el daño propaga en forma instantánea, una vez que se llega al valor $d = 1$.

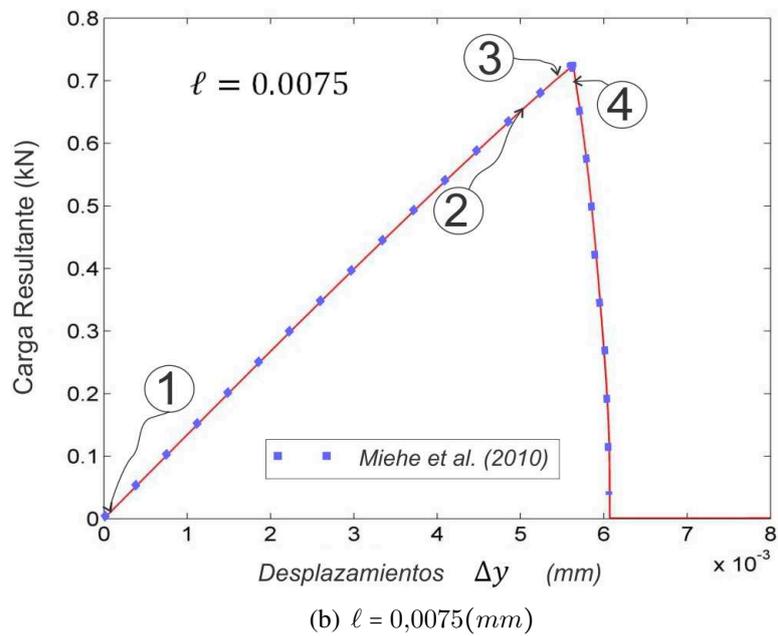
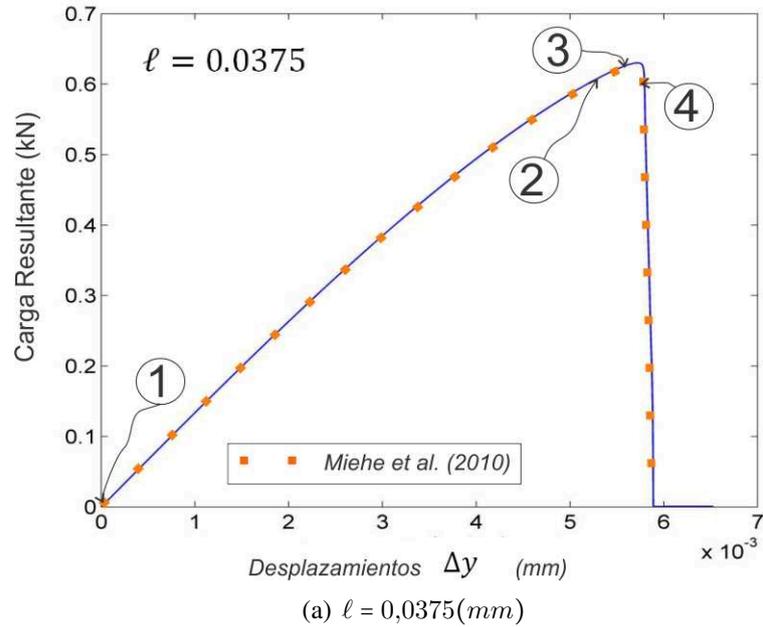


Figura 4.10: Curvas Carga-Desplazamiento y comparación con valores de referencia. Los estados 1,2 ,3 y 4 son los que se corresponden con los cuadros de la Figura 9

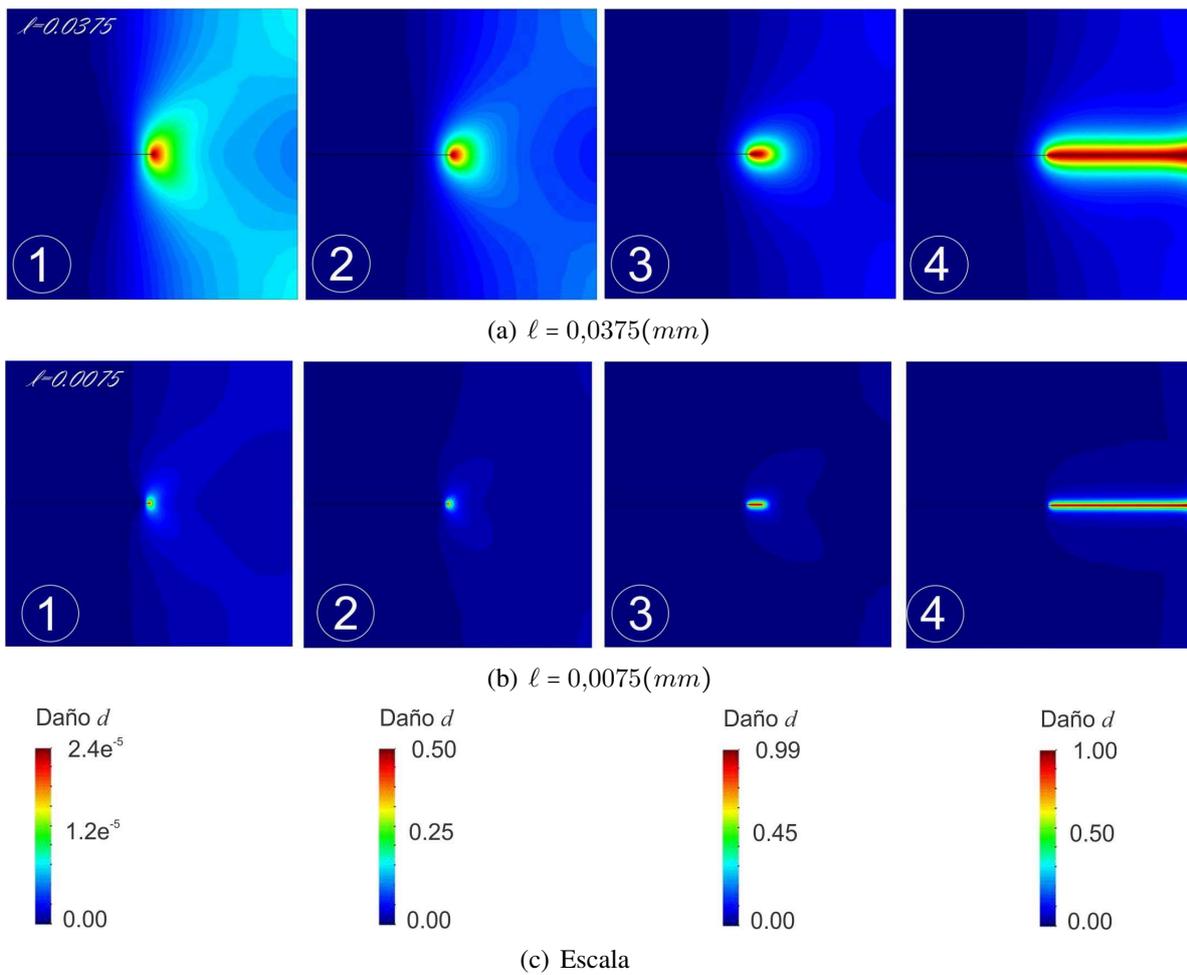


Figura 4.11: Evolución del campo d : a) $l = 0,0375(mm)$, cuadros de 1 a 4 evolución según las escalas mostradas en c), b) resultados para $l = 0,0075(mm)$

4.5.3. Ejemplo 3 - Viga con entalla lateral en tracción (SENT)

En este ejemplo presentamos una viga con entalla lateral (SENT por sus siglas en inglés) sometida a tracción uniforme en los bordes superior e inferior. La Fig.(4.12-a), muestra la geometría y las condiciones de borde del problema. Dicho problema se resuelve numéricamente utilizando el modelo de campo de fase y se contrasta con soluciones analíticas para este caso obtenidas de bibliografía clásica.

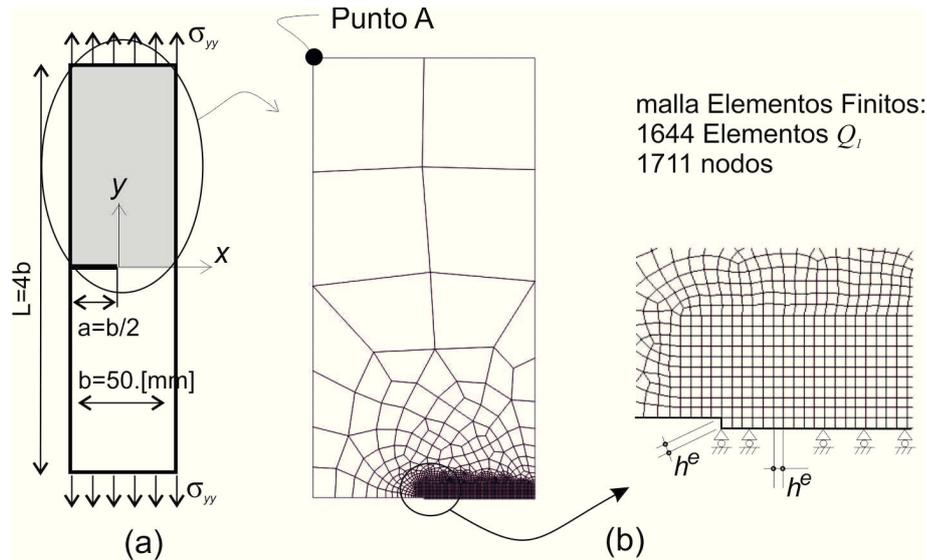


Figura 4.12: SENT test: a) Condiciones de borde del problema. b) Malla de elementos finitos y detalle de elementos regulares en la zona de fisura.

La Fig.(4.12) muestra la geometría del espécimen y el modelo de elemento finito que es usado para estimar la carga externa que inicia el proceso de propagación de la fisura. Debido a condiciones de simetría, sólo la mitad del espécimen es modelada. Se utiliza una malla de elementos finitos Q_1 . Cerca de la zona de propagación de fisura, la malla tiene una faja estructurada con elementos de tamaño $h^e = 0,3125$ (mm).

El factor de intensidad de tensiones en el inicio de propagación de la fisura para el test SENT, es una función de la energía de fractura y puede verse en (Gross y Seelig, 2006), de donde se determina la tensión uniforme crítica correspondiente (σ_{yy}^{crit}) actuando sobre los bordes superior e inferior del espécimen, que inicia el proceso de propagación de fisura y que se transcribe en (4.33). Básicamente el análisis que realizamos en este ejemplo consiste en obtener la carga crítica para la cual la fisura empieza a propagar y contrastarla, con la solución analítica.

En las soluciones numéricas que presentamos adoptamos el inicio de propagación de la fisura como el instante de tiempo cuando el nodo inferior en la punta de la entalla, alcanza el nivel de daño $d = 0,97$.

$$\sigma_{yy}^{crit} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{E}{1-\nu^2} \frac{g_f}{2b}} \quad ; \quad B = \frac{1,762 + 0,37(1 - \sin(\frac{\pi}{4}))^3}{\cos(\frac{\pi}{4})} \quad (4.33)$$

Para resolver este ejemplo, se adoptaron los siguientes parámetros del material: módulo de Young $E = 5,5$ (GPa), coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$, además se consideraron

tres energías de fractura: $G_c^1 = 1$ (N/mm), $G_c^2 = 5$ (N/mm) y $G_c^3 = 10$ (N/mm). En tanto que los parámetros para el campo de fase adoptados son: $\ell = 1,2$ (mm) ($\approx 4h^\epsilon$).

En la Fig.(4.13-a), se presentan las soluciones numéricas y la curva analítica de σ_{yy}^{crit} en función de G_c . Puede observarse que se arriban a soluciones que tienen gran exactitud para los tres casos analizados. Podemos decir entonces que el modelo de campo de fase, es una buena metodología para estimar tensiones críticas. Para este caso hemos arribado a una conclusión similar a la presentada en (Kuhn y Müller, 2010).

La Fig.(4.13-b) se presentan las curvas de carga versus desplazamiento vertical del punto designado en la Fig.(4.12-b) con la letra A. En estas curvas puede observarse que las cargas críticas, en el inicio de propagación de la fisura son levemente inferiores a las cargas de límite estructurales y la respuesta estructural muestra una pequeña no linealidad antes del alcance de la carga de límite. Esto puede deberse a un error de discretización, en el refinamiento de la malla sobre la zona de propagación de fisura. Un refinamiento en dicha zona permitiría un ℓ menor, y por lo tanto tener una mejor respuesta.

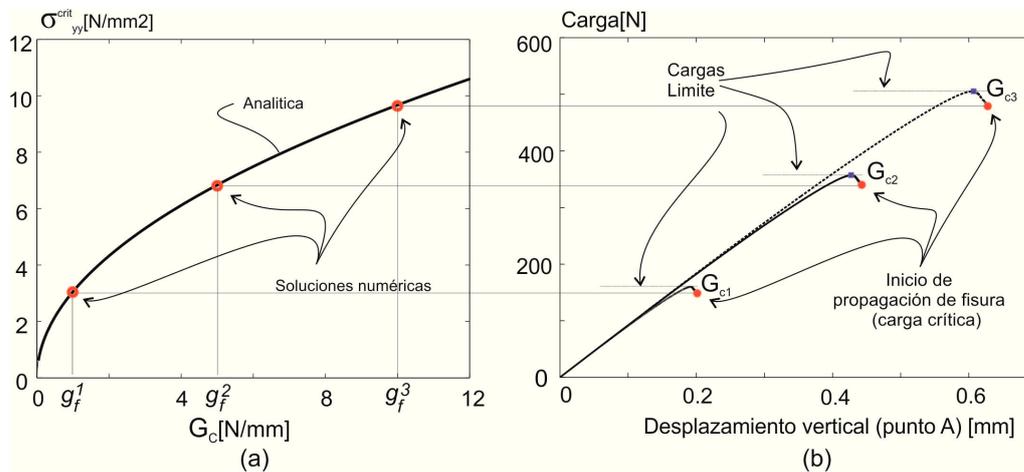


Figura 4.13: Espécimen SENT solicitado a tensión uniforme en los extremos (energías de fractura: $G_c^1 = 1$.(N/mm); $G_c^2 = 5$.(N/mm); $G_c^3 = 10$.(N/mm)). a) Curva de (σ_{yy}^{crit}) vs. G_c , comparación de soluciones numéricas con la solución analítica. b) Carga total (por unidad de espesor) vs. desplazamiento vertical del punto A.

4.5.4. Ejemplo 4 - Panel de doble entalla (DENT) solicitado a desplazamiento uniforme

Con este ejemplo evaluaremos la exactitud del modelo para capturar la energía disipada durante la evolución de una fisura. Con este fin se adopta la geometría de un panel con doble entalladura (DENT) solicitado a desplazamiento uniforme, cuya geometría y condiciones de borde se presentan en la Fig.(4.14). En este caso imponemos desplazamientos uniforme en el borde superior e inferior del panel. Por razones de simetría sólo modelamos un cuarto de la geometría con las condiciones esquematizadas en la misma Fig.(4.14).

En la zona central del espécimen siguiendo la línea de entalla se realiza en una altura de 3(mm) una malla de elementos finitos regulares y en forma estructurada con tamaño $1,67h^\epsilon \times h^\epsilon$, tal como se muestra en la Fig.(4.14-b). Bajo este criterio se diseñan dos mallas

de elementos finitos donde la Malla 1 se utilizan elementos de tamaño: $h^e = 0,1(mm)$, y la en la Malla 2 el tamaño es $h^e = 0,3(mm)$. Los parámetros del material utilizados para este caso son: módulo de Young $E = 2,5(GPa)$, coeficiente de de Poisson $\nu = 0,25$, la energía de fractura $G_c = 5(N/mm)$.

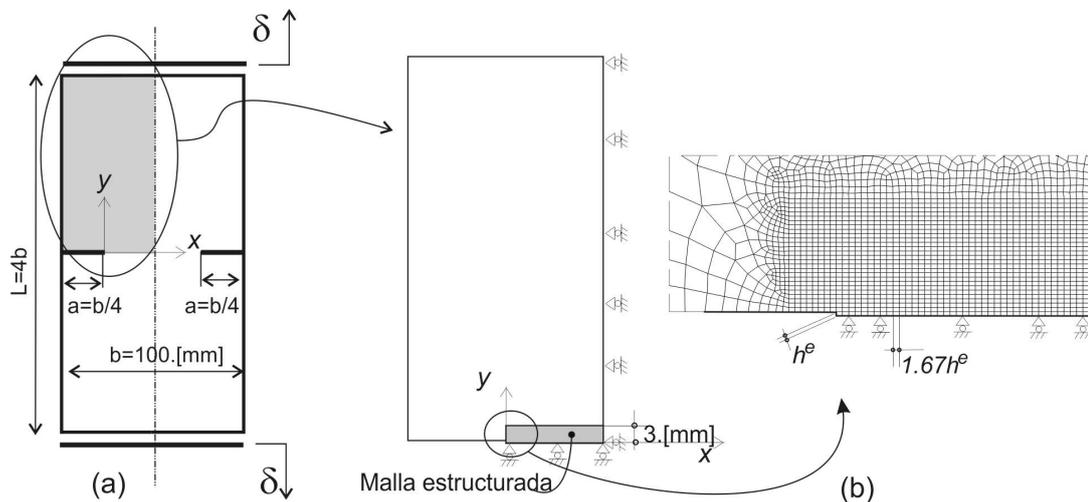


Figura 4.14: Espécimen DENT sometido a desplazamiento uniforme en sus bordes superior e inferior. a) Datos geométricos. b) Modelo mecánico y detalle de la malla de elementos finitos en la región de propagación de fisura

En la Fig.(4.15-a) se presentan tres curvas carga- desplazamiento que muestran las cargas totales. Dos de estas curvas han sido obtenidas con la Malla 1 y dos valores de longitud característica ℓ : $\ell = 1,2 (mm)$ y $\ell = 2,4 (mm)$, la tercer curva se obtuvo con la Malla 2 y ($\ell = 1,2 (mm)$).

Para resolver este problema, se implementó un algoritmo de control de avance de fisura. Este consiste en realizar una lista de los nodos localizados encima del camino de propagación de la fisura (la dirección del avance de la fisura ha sido estimada de antemano y es la línea horizontal que coincide con el borde inferior del modelo de elemento finitos). En dicha lista seleccionamos el nodo que ha mostrado el desplazamiento incremental máximo vertical en un determinado paso de tiempo, en el paso siguiente; un incremento de desplazamiento Δs es prescrito en dicho nodo.

Debido a que el material tiene una respuesta elástica y que consideramos un espesor unitario para la geometría, podemos evaluar la energía total disipada en forma exacta siendo esta coincidente con la energía de fractura $G_c = 125(Nmm)$. Como por condiciones de simetría modelamos sólo la mitad de la geometría, sólo consideraremos para el análisis la mitad de la energía, es decir $62,5(Nmm)$.

El área bajo las curvas presentadas en la Fig.(4.15) representa la mitad del trabajo externo total, consumido para producir la falla estructural. Debido a la respuesta elástica del material, estas cantidades son equivalentes a la energía disipada por el proceso de propagación de la fisura a través del espécimen.

En la tabla 4.1 se presentan los trabajos externos obtenidos para las dos mallas utilizadas y los tres parámetros de longitud ($\ell = 1,2(mm)$, $\ell = 1,8(mm)$ y $\ell = 2,4(mm)$). En cada caso las cifras presentadas en dicha tabla entre paréntesis dan la sobre-estimación en porcentaje del trabajo externo evaluado numéricamente y el valor exacto obtenido para la

propagación de la fisura ($62,5(Nmm)$).

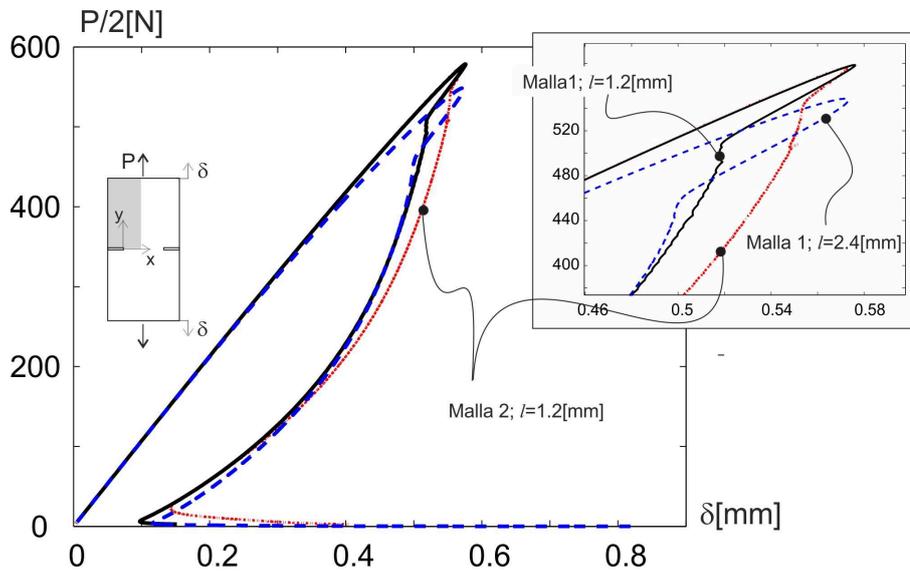


Figura 4.15: DENT bajo desplazamientos uniformes. Curvas carga vs desplazamiento. Soluciones obtenidas para la Malla 1, con $\ell = 1,2(mm)$ y $2,4(mm)$ y en la Malla 2 con $\ell = 1,2[mm]$.

	$\ell = 1,2[mm]$	$\ell = 1,8[mm]$	$\ell = 2,4[mm]$
Malla 1	72.5 [Nmm]	72.7 [Nmm]	73.0 [Nmm]
$h^e = 0,1[mm]$	(16%)	(16%)	(16%)
Malla 2	83.0 [Nmm]	78.6 [Nmm]	77.3 [Nmm]
$h^e = 0,3[mm]$	(32%)	(25%)	(23%)

Cuadro 4.1: DENT prueba bajo desplazamiento uniforme. Trabajo externo necesario para llegar a la falla estructural completa

La Fig. (4.16) muestra la distribución del campo de daño d a lo largo de la línea vertical denotada con $y-y'$, cerca de la punta de la fisura. Los resultados corresponden a la Malla 1 para $\ell = 2,4(mm)$, estos resultados se muestran a través de distintas curvas que representan la evolución de daño. Cada curva corresponde a una etapa de carga, las que están representadas a través de puntos en la curva de respuesta estructural insertada en la Fig.(4.16-a).

En las curvas de la Fig. (4.16-a), puede observarse que al crecer el proceso de carga hay un aumento monótono de daño: $\Delta d(\mathbf{x}) \geq 0$, satisfaciendo la coacción que modela el campo de fase: $\dot{d} \approx \Delta d(\mathbf{x}) \geq 0$. Esta propiedad se observa siempre en cada punto \mathbf{x} a lo largo de la línea $y-y'$.

La figura 4.16-b muestra además un rasgo muy importante que es característico del modelo de campo de fase. Las distribuciones de daño a lo largo de la línea vertical $y-y'$ en las etapas F y G se presentan en dicha figura. Ambos resultados los hemos tomado con el espécimen completamente degradado mientras la fisura propaga, puede observarse que ambas curvas son casi indistinguibles. Podemos decir entonces que el modelo de campo de fase presentado, captura en forma correcta bandas de localización de deformaciones que conducen a soluciones de discontinuidades fuertes, distinto a lo que ocurre en los modelos de gradiente de daño.

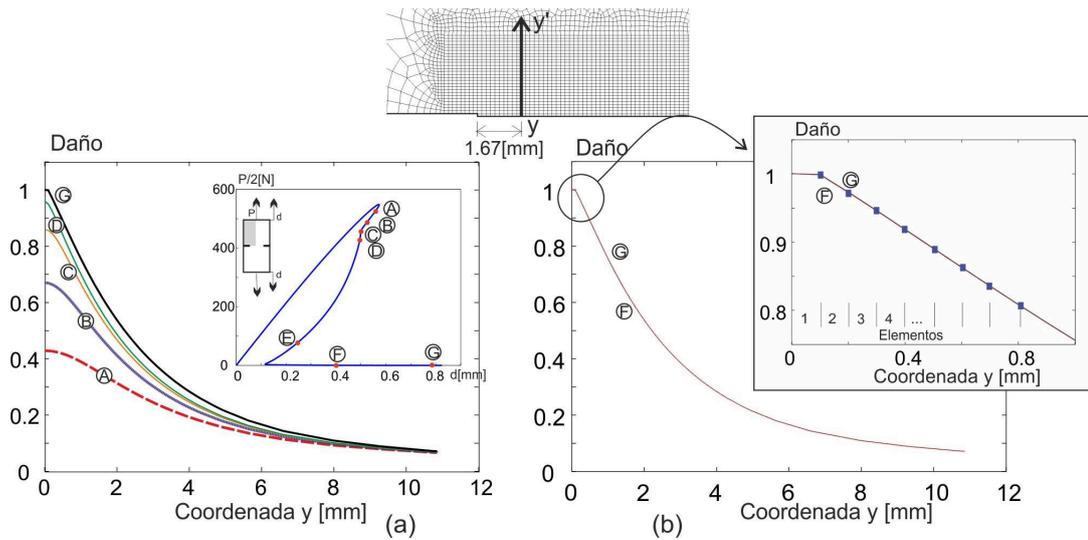


Figura 4.16: DENT bajo desplazamiento uniforme. (a) Distribución del daño a lo largo de la línea y - y' (Malla 1, $\ell = 2,4(mm)$). Estas curvas corresponden a los estados de carga marcados en la curva estructural del inserto. (b) Distribución de daños en las etapas F y G, en un espécimen estructuralmente agotado.

Este rasgo característico, no tiene similitudes con algunos modelos de gradientes como el presentado en Peerlings et al. (1996). En la Fig.(4.17-a) se muestra una serie de

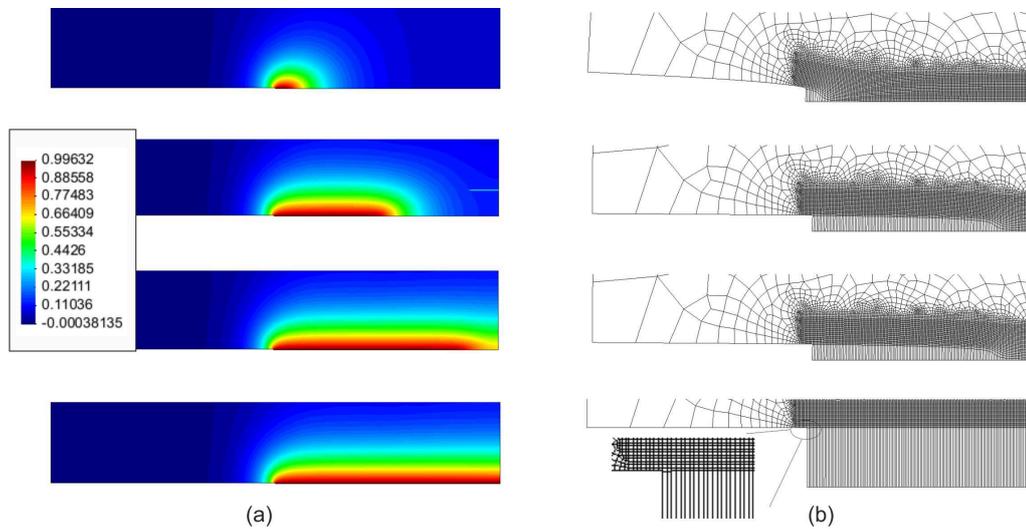


Figura 4.17: DENT bajo desplazamiento uniforme. (a) Distribución de daño (Malla 1, $\ell = 2,4(mm)$). (b) Malla deformada. (Estas figuras corresponden a los niveles de desplazamientos vertical del borde superior : $0,20(mm)$, $0,44(mm)$, $0,50(mm)$ y $0,82(mm)$ respectivamente.

imágenes de distribución del daño para distintos niveles de carga. En la Fig.(4.17-b) se presentan las mallas deformadas en las mismas etapas. Puede observarse la capacidad del modelo de campo de fase para capturar una solución de discontinuidad fuerte.

Capítulo 5

Validación experimental de un modelo de campo de fase para simular fractura frágil

5.1. Introducción

En el capítulo anterior se presentó y desarrolló un modelo de campo de fase para simular fractura frágil. En este capítulo se valida dicho modelo utilizando respuestas de fractura frágil obtenidas experimentalmente. Para esto se realizan ensayos de fractura en probetas de material Polimetilmetacrilato (PMMA o Acrílico) con técnicas y metodologías que responden a adaptaciones de normas utilizadas para determinar los parámetros fractomecánicos habitualmente en materiales metálicos .

El material seleccionado permite abordar la experimentación de forma sencilla ya que puede considerarse como un material homogéneo, con comportamiento frágil además de ser de fácil mecanizado.

La geometría de las probetas, la metodología y protocolo de ensayo seguida en este capítulo, es una adaptación de la norma (ASTM, 1990) para metales, propuesta por (Moore y J.G., 2001), con el fin de realizar ensayos de fractura en materiales poliméricos.

De los ensayos se obtiene la tenacidad a fractura K_{Ic} , la energía de fractura G_c y la curva carga-desplazamiento para cada probeta.

La validación del modelo de campo de fase se realiza introduciendo la energía de fractura obtenida en laboratorio, y recuperando la curva carga-desplazamiento a través de una simulación computacional.

5.2. Procedimiento de ensayo

En esta sección se presenta la descripción del procedimiento de ensayo. Este procedimiento está diseñado para caracterizar el comportamiento a fractura de materiales plásticos a través de el factor de intensidad de tensiones (K_I) y la energía de fractura G_c , similarmente a lo realizado en metales a través de los procedimientos dados en (ASTM, 1990).

Se utiliza probetas del tipo viga con entalla simple (SENB por su siglas en inglés),

sometidas a flexión de tres puntos. Este tipo de probetas presentan dos ventajas : por un lado, se pueden mecanizar de tamaño reducido, comparado con otras geometrías utilizadas habitualmente en ensayos de fractura, lo que permite hacer un análisis con resultados aceptables a un costo razonable.

Las probetas normalizadas están diseñadas en función de relaciones dimensionales con el espesor de la misma y profundidad de entalla, igual que las utilizadas para ensayos en metales. Estas relaciones se muestran en Fig.(5.1). En este caso se adoptó un espesor $B = 5(mm)$ y una relación para el ancho de probeta $W = 4B$. Las dimensiones restantes quedan entonces: $W = 20(mm)$, $a = 7,50(mm)$. Para dar precisión suficiente al mecanizado se optó por realizarlas, mediante corte automático por láser.

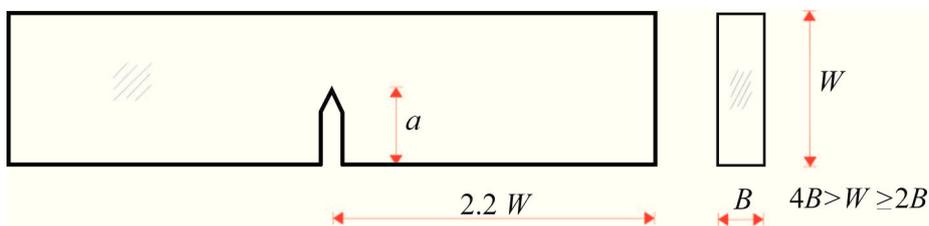


Figura 5.1: Relaciones geométricas de una probeta SENB, ASTM E399,

Los ensayos se realizaron siguiendo el procedimiento propuesto por (Moore y J.G., 2001), Cap.I, pág. 11, para ensayos de baja velocidad, en polímeros. Este procedimiento exige hacer el ensayo en condiciones de temperatura ambiente a no más de $23^{\circ}C$ y utilizar una velocidad máxima de desplazamientos durante el ensayo de $10 (mm/min)$ con el fin de garantizar que el ensayo sea en condiciones quasi estáticas. En este caso se adoptó como velocidad apropiada para las dimensiones de las probetas utilizadas una velocidad de $\Delta u = 0,10 (mm/min)$, lo que garantizó el cumplimiento de las condiciones requeridas.

El soporte para la probeta ha sido suficientemente rígido para garantizar que no cedan los apoyos durante el ensayo. En este caso se diseñó y construyó un dispositivo metálico, apropiado para realizar los ensayos con las características presentadas en la Fig. (5.2), la distancia entre apoyos para la viga es de $S = 4W$ tal como especifica la norma seguida. Los apoyos son cilíndricos al igual que el dispositivo de carga y suficientemente grandes para evitar hendiduras o deformaciones plásticas en las probetas. En este caso ambas, dimensiones se adoptaron como: $D = 8 (mm)$.

Otro condicionante según el tipo de polímero a ensayar, es la manera en que se induce el inicio de fisura previo al ensayo. Una forma de iniciar la fisura, es solicitar la probeta a fatiga. Alternativamente, la fisura puede ser inducida marcando el fondo de la entalla de la probeta con una hoja de afeitar. En este trabajo, por razones de simplicidad y debido a que el acrílico lo permite, se utiliza la segunda técnica para producir el inicio de la fisura.

Los resultados obtenidos en los ensayos, son curvas carga-desplazamientos y representan la respuesta estructural desde el comienzo de carga hasta la propagación total de la fisura a través de la probeta. Con la carga máxima P_Q obtenida de estas curvas, se calcula la tenacidad a fractura K_I , bajo la hipótesis de deformación plana, asumiendo para esta condición que $K_I = K_{IC}$ (tenacidad a fractura en modo I). Para obtener K_I se recurre a la relación dada en (Moore y J.G., 2001):

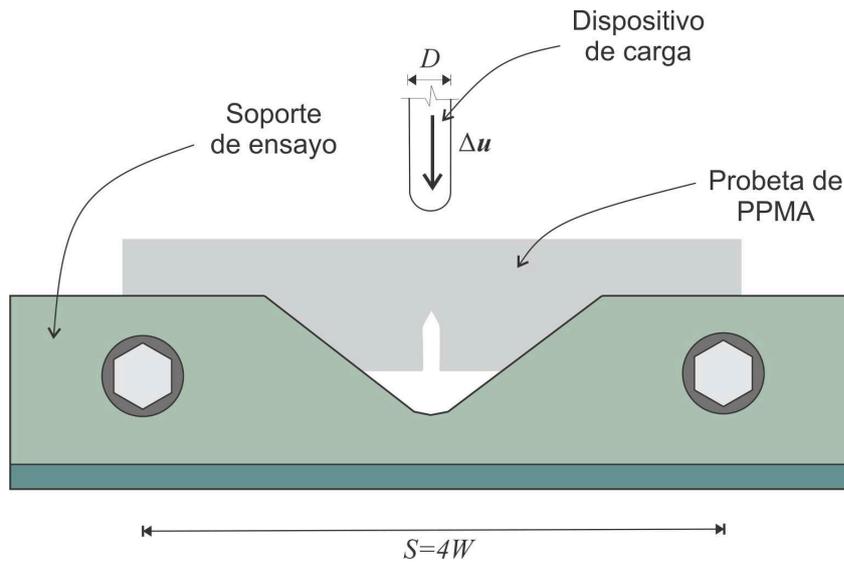


Figura 5.2: Dispositivo utilizado para los ensayos de probetas SENB. Condiciones de carga y apoyo para las probetas ensayadas

$$K_I = f \frac{P_Q}{BW^{1/2}} \quad (5.1)$$

donde f es un coeficiente geométrico que, para probetas SENB, es dado por:

$$f = 6\alpha^{1/2} \frac{[1,99 - \alpha(1 - \alpha)(2,15 - 3,93\alpha) + 2,7\alpha^2]}{(1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^{2/3}} \quad (5.2)$$

con $\alpha = a/W$.

Con este procedimiento se ensayaron las probetas en una máquina de ensayos múltiples INSTRON 3344, con celda de carga de $1(kN)$ y mandril adaptador para acoplar el dispositivo de carga tal como se muestra en las fotografías de la Fig.(5.3).

La metodología de trabajo en laboratorio requiere de ajustes y puesta a punto del equipamiento con el fin de lograr la mejor eficacia en la metodología empleada. Por lo tanto se aceptaron cuatro resultados de seis probetas ensayadas,. De las desechadas se utilizó una para efectuar el ajuste de la velocidad de ensayo y la restante para el ajuste de la profundidad de entalla.

Las curvas carga-desplazamiento obtenidas, se muestran en la Fig.(5.5). En ellas se observa un crecimiento lineal de la carga, hasta el valor de carga última P_Q , coincidente con el crecimiento repentino de la fisura en forma frágil y casi instantánea.

Los valores de carga última de los cuatro resultados tomados como aceptables se muestran en la Tabla (5.1). La carga P_Q , promedio de estos cuatro valores es: $P_Q = 85,26(N)$, y se utiliza en el cálculo de K_I . De (5.1) se obtiene $K_I = 30,01(\frac{N}{mm} \sqrt{mm})$.

Finalmente la energía de fractura G_c , para estado plano de deformación, se calcula con la relación (5.3), extraída de (Moore y J.G., 2001), donde: $E = 2528(N/mm^2)$, es el módulo de elasticidad y $\nu = 0,25$ el coeficiente de Poisson, según datos que proporciona el fabricante del material. Con esta relación y K_I , se obtiene:

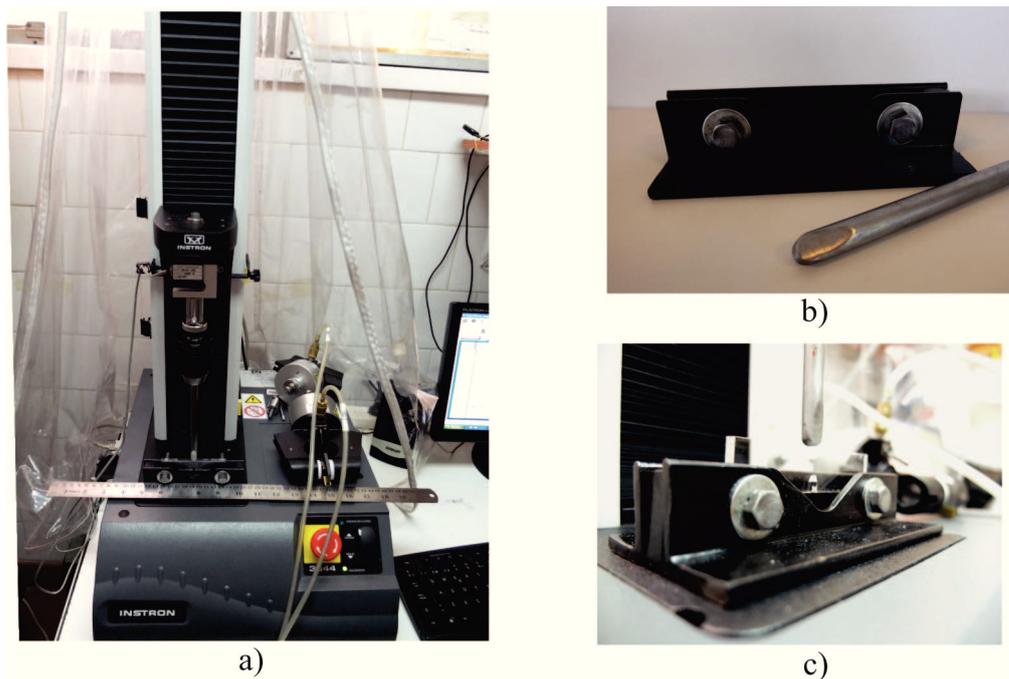


Figura 5.3: a)- Máquina de ensayos múltiples INSTRON 3344 utilizada para realizar los ensayos en probetas de PPMA. b) - Dispositivo y soporte de ensayo. c) Probeta montada en la máquina de ensayos

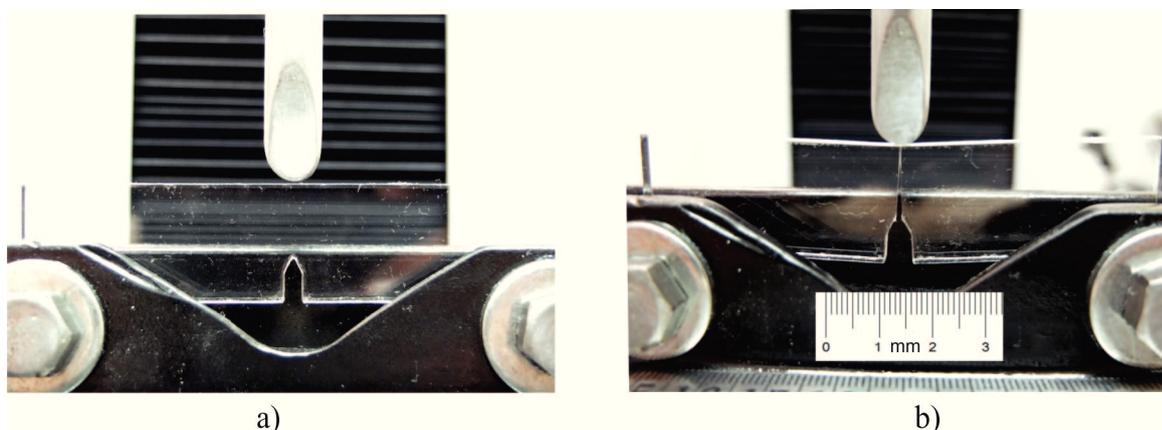


Figura 5.4: Ensayo de un espécimen SENB de PPMA. a) Probeta antes de ser ensayada. b) Probeta ensaya

$$G_c = \frac{(1 - \nu^2)K_C^2}{E} = 0,31\left(\frac{N}{mm}\right) \quad (5.3)$$

En la Fig.(5.3), se presentan fotografías de la máquina de ensayos múltiples utilizada, el soporte, dispositivo de carga y una probeta montada para el ensayo.

La Fig.(5.4) muestra las fotos de una probeta antes y después de ser ensayada. En esta se puede ver el mecanismo de falla que responde al de un material frágil (5.4 b)), puede observarse asimismo, el tamaño de apertura de fisura a través de la escala inserta (en *mm*). Una vez iniciada la fisura, esta propagó en forma casi instantánea.

Probeta	$P_Q(N)$
1	84.30
2	87.40
3	85.47
4	83.88

Cuadro 5.1: Valores de P_Q , obtenidos en el ensayo de probetas SENB, de acrílico

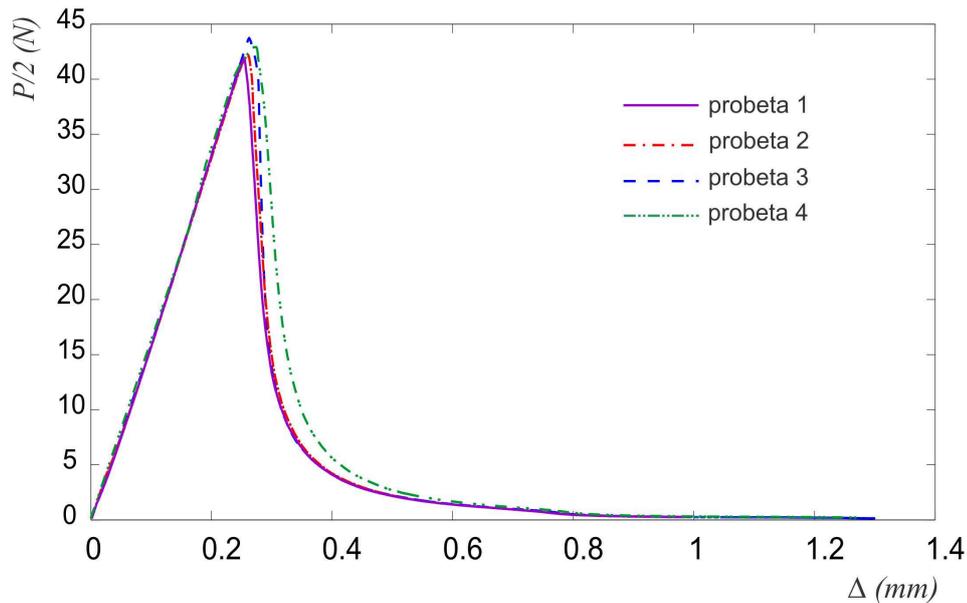


Figura 5.5: Curvas carga-desplazamiento obtenida mediante ensayos, en probetas SENB de acrílico

5.3. Validación del modelo de campo de fase

Con los resultados de laboratorio obtenidos a través del procedimiento descrito en la sección anterior, se valida el modelo de campo de fase desarrollado en el *Cap. 4* cuya implementación numérica está dada por (4.31) y (4.32). Para tal fin se discretiza la geometría de las probetas con una malla de elementos finitos, que por razones de simetría, sólo modela la mitad de la misma, respetando las dimensiones utilizadas en los ensayos. La energía de fractura G_c obtenida experimentalmente se introduce como parámetro, junto con el módulo de elasticidad E , el coeficiente de Poisson ν y el parámetro ℓ propio del modelo de campo de fase. Como resultado se obtiene la curva carga-desplazamiento, que se compara con las curvas de máximos y mínimos, construidas a partir de las curvas de laboratorio mostradas en la Fig. (5.5). La Fig.(5.6) muestra la malla utilizada, con su parte regular y el aspecto del elemento de menor tamaño utilizado. También se esquematizan las condiciones de borde consideradas en este análisis. En la malla de elementos finitos se utilizaron 4402 elementos cuadriláteros bilineales standard Q_1 . La malla se diseña con un refinamiento regular a lo largo de la línea de fisura, cuyo ancho es de diez elementos, de tamaño $h = 0,05(mm)$, siendo este tamaño el menor utilizado para este caso. Se imponen condiciones de borde, que respetan simetría a lo largo de la fisura. Los incremen-

tos de desplazamiento Δu , en cada paso de tiempo, se controlan mediante incrementos predeterminados de apertura de fisura ds . Este tipo de control se utiliza para capturar la propagación de fisura en forma incremental, permitiendo obtener en forma detallada y con mayor exactitud, la fenomenología simulada en cada paso de tiempo.

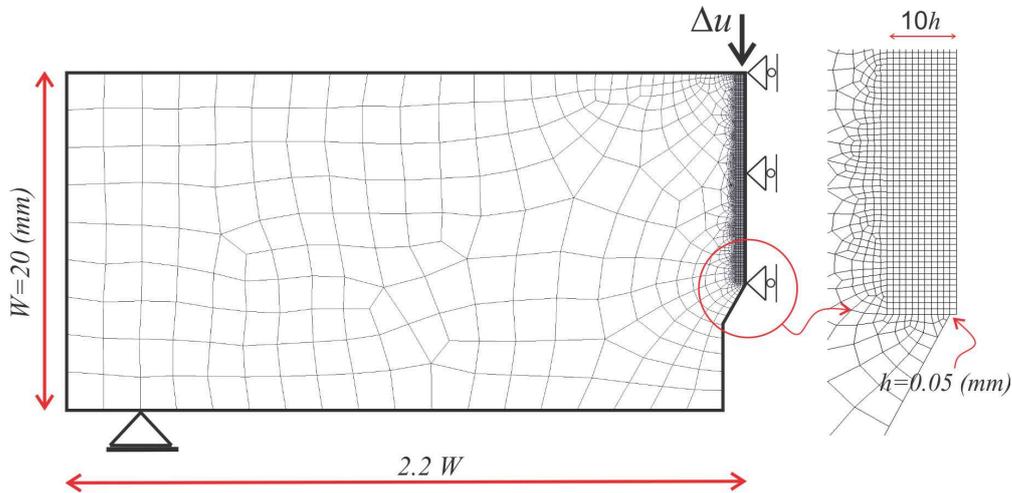


Figura 5.6: Malla de elementos finitos utilizada, en el modelo numérico, con las condiciones de borde impuestas para el análisis. En la ampliación se muestra la zona regular y el menor h utilizado en este modelo.

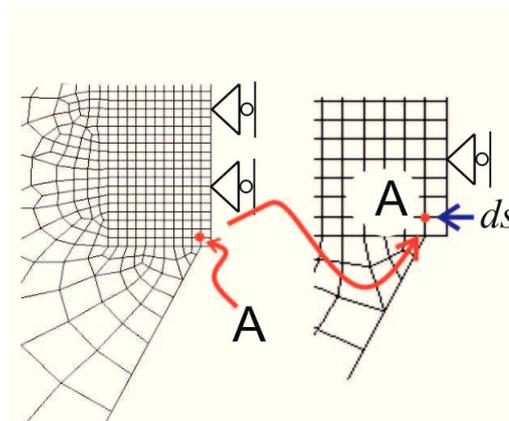


Figura 5.7: Punto (A), utilizado para imponer el control de desplazamiento ds , en la dirección de apertura de fisura

Para obtener la curva carga-desplazamiento, en el análisis se utiliza $ds = 10^{-4}$ (mm), con los datos del material previamente mencionados y el parámetro geométrico del modelo $\ell = 10h_{min} = 0,50$ (mm).

En la Fig.(5.8) se presenta la curva obtenida en forma numérica a través del modelo de campo de fase, superpuesta a las curvas de máximos y mínimos obtenidas en laboratorio. Esta curva tiene un comportamiento similar al registrado en forma experimental, aunque se capturó con más detalle el fenómeno de relajación ("*snap-back*") producido cuando comienza a propagar la fisura (punto 2). La diferencia observada entre el comportamiento experimental y los resultados de la simulación numérica en el inicio de la etapa post-crítica se debe, posiblemente, a que en el modelo numérico, se controla el crecimiento

del campo d , como se describió anteriormente a través del parámetro ds . Mientras que el procedimiento experimental carece de este tipo de control. Otra observación sobre la curva numérica es la aparición de una leve pérdida de linealidad, cerca del inicio de la falla (punto marcado como 1 en la Fig.(5.8)). Según el estudio que hemos realizado del modelo, este comportamiento se debe a que el parámetro ℓ utilizado debería ser menor, para lo cual a su vez los elementos finitos utilizados en la zona regular de la malla, deberían ser de menor tamaño.

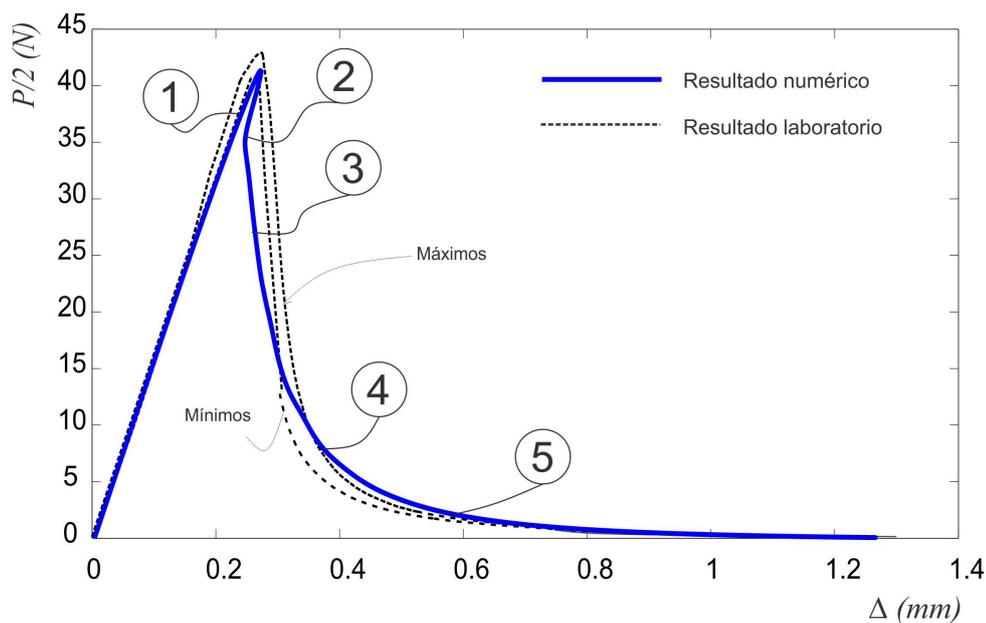


Figura 5.8: Curva Carga-desplazamiento obtenida en forma numérica junto a las curvas de máximos y mínimos, obtenidas en forma experimental.

La evolución del daño, para los puntos marcados en la Fig.(5.8) de 1 a 5, se presentan en la Fig.(5.9), se muestra además cómo es la evolución de la fisura, para la longitud característica $\ell = 0,50(mm)$ utilizada en este análisis. En la Fig.(5.10), se incluye la malla deformada completa, en el momento en que comienza a propagar la fisura y en forma ampliada la deformada de la zona de fisura, mostrando la evolución de ésta, para los 5 puntos marcados en la curva carga-desplazamiento.

La carga última obtenida en forma numérica es $P_{Qnum} = 85,95(N)$, tiene un error menor al 1% con respecto a la carga promedio obtenida en los ensayos.

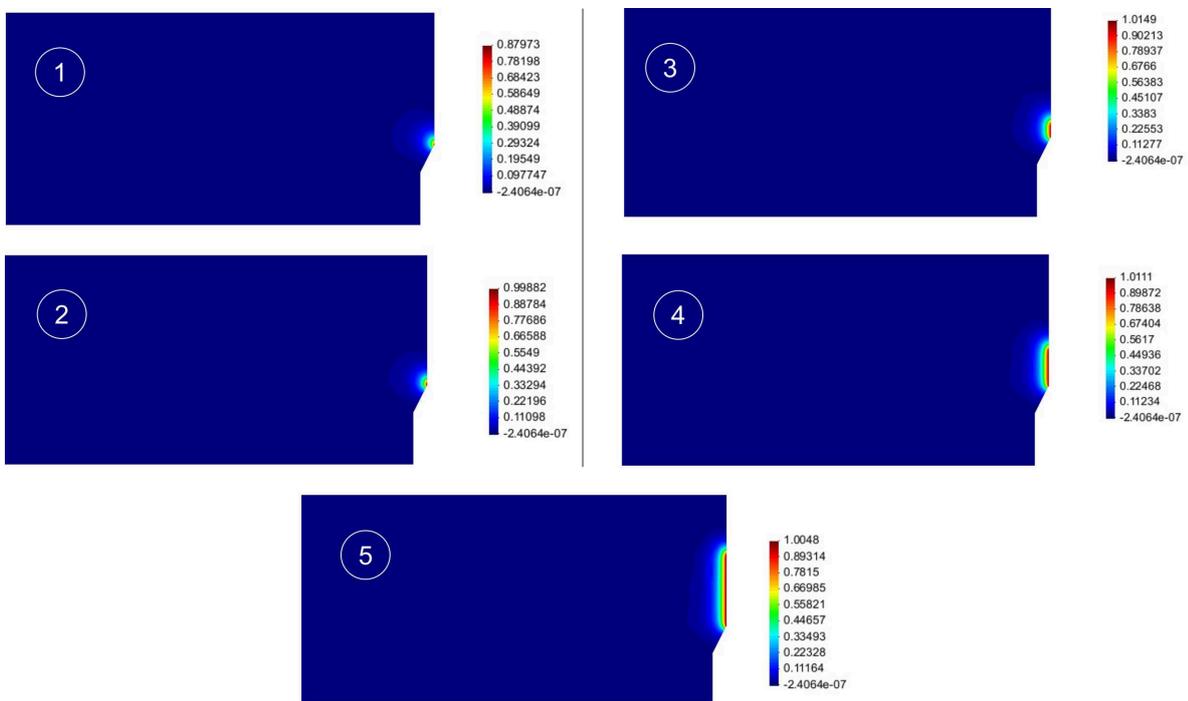


Figura 5.9: Evolución del campo d para $\ell = 0,50$, utilizado en el modelo numérico de las probetas SENB. En los cuadros 1 a 5 se muestra la evolución de los puntos marcados en la curva mostrada en la Fig.(5.8) con su correspondientes escalas

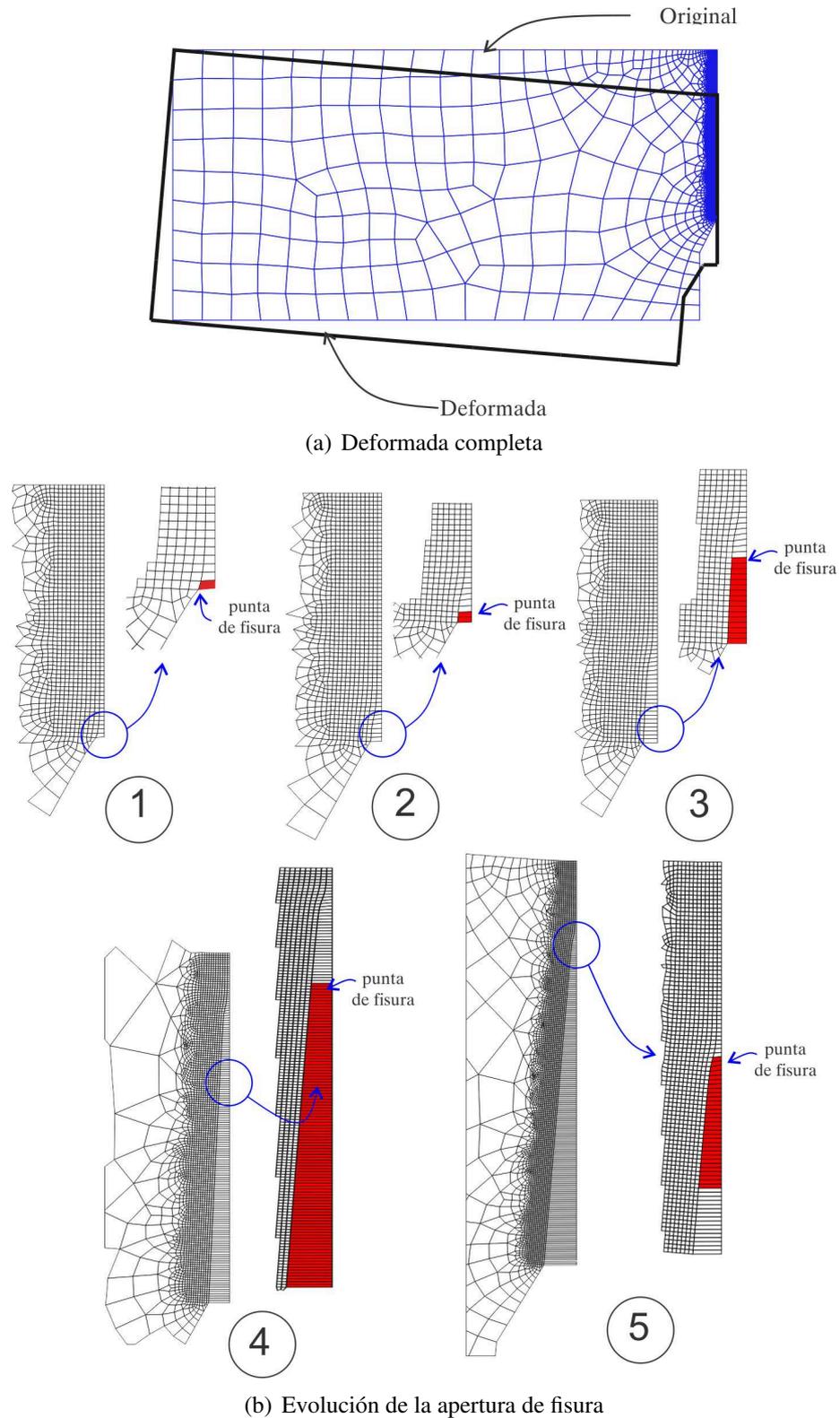


Figura 5.10: a)- Malla original y deformada al final del problema. b) Ampliación de la zona de fisura, esquema de su evolución para los 5 puntos marcados en la curva carga-desplazamiento

Capítulo 6

Modelo de campo de fase para fractura frágil en Elasto-Plasticidad

6.1. Introducción

En este capítulo desarrollamos una formulación de campo de fase para fractura frágil elasto-plástica en medios sólidos y asumiendo pequeñas deformaciones. Típicamente, este mecanismo de falla puede observarse en metales a temperaturas inferiores a la temperatura de transición de ductilidad nula.

La formulación que presentamos, cuya versión completa ha sido publicada en (Duda et al., 2015), se enmarca dentro de la teoría del continuo con microestructura, siguiendo el contexto del *Cap. 4*. En consecuencia el campo de daño d y la plasticidad, a través de la deformación plástica equivalente α , son considerados como dos descriptores cinemáticos adicionales que tienen asociados un sistema de microfuerzas correspondientes. A través del principio de potencias virtuales introducimos las expresiones de balance de fuerzas y momentos convencionales, como también el balance de las microfuerzas conjugadas a los descriptores cinemáticos d y α . Luego siguiendo las ideas de (Fried y Gurtin, 2003), incluimos la versión mecánica de la segunda ley de termodinámica, que permite definir las relaciones constitutivas termodinámicamente consistentes y las restricciones asociadas a las leyes de evolución de los descriptores cinemáticos. Combinando estas relaciones con las ecuaciones de balance, se deriva el sistema de ecuaciones que gobiernan la evolución del campo de fase y la plasticidad.

Finalmente implementamos numéricamente el modelo propuesto siguiendo los mismos lineamientos de lo presentado en el *Cap. 4*. De este modo, el desplazamiento y el campo de fase son interpolados a través del método de elementos finitos. Mientras que el descriptor cinemático asociado a la deformación plástica equivalente es considerado mediante colocación puntual. Además, un esquema "*staggered*", propuesto por (Bourdin et al., 2000) y (Miehe et al., 2010) es utilizado para la integración temporal de las ecuaciones de evolución resultantes.

6.2. Fractura Elasto-plástica

En esta sección formulamos la teoría de campo de fase para simular fractura frágil en sólidos con comportamiento elasto plástico bajo las hipótesis de pequeñas deformaciones y condiciones isotérmicas.

La teoría se desarrolla a partir del principio de potencias virtuales en un sentido generalizado, similar a lo presentado en el *Cap. 4*. Siguiendo las ideas allí planteadas, se considerarán dos descriptores cinemáticos independientes: el campo de fase y el campo de deformaciones plásticas equivalentes. El tratamiento de la plasticidad que se desarrolla aquí es semejante al presentado en (Gurtin et al., 2010) donde la deformación plástica equivalente es un descriptor cinemático independiente. Aunque las ecuaciones finales que gobiernan la plasticidad local (de orden uno) resultan similares a las obtenidas con el tratamiento clásico o convencional, en donde se considera a la deformación plástica equivalente como una variable interna del modelo, las hipótesis involucradas son diferentes y definen una metodología que abre las puertas al desarrollo de modelos de plasticidad más generales, no abordables con el tratamiento clásico.

Del modelo constitutivo de plasticidad que presentamos en la *secc.3.2* tomamos el concepto de deformación plástica equivalente: α . Mientras que la definición del campo de fase d , al igual que en el *Cap. 4*, toma valores en el intervalo $[0, 1]$. Si $d = 0$ en un punto, se considera al material libre de daño. Si $d = 1$, el material está completamente dañado, y valores intermedios representan daño parcial.

Consideremos ahora un cuerpo \mathcal{B} . Su cinemática está definida por los campos: \mathbf{u} , α , d y ∇d y sus correspondientes velocidades admisibles $\dot{\mathbf{u}}$, $\dot{\alpha}$, \dot{d} y $\nabla \dot{d}$. Aclaremos que sólo se tratará la plasticidad local. Con lo cual no se consideran interacciones de primer orden para $\nabla \dot{\alpha}$. Ésta es la razón por la que $\nabla \dot{\alpha}$, a diferencia de $\nabla \dot{\mathbf{u}}$ y $\nabla \dot{d}$, no juega ningún papel en la descripción cinemática del sólido.

Siguiendo con nuestro razonamiento, definimos las potencias virtuales en Ω (parte de \mathcal{B}) considerando las variables $(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\alpha}, \dot{d} \in \mathcal{V})$, donde \mathcal{V} es el espacio de tasas admisibles tal como se describió en la *Secc. 4.2.1*. Las potencias interna \mathcal{P}^{int} y \mathcal{P}^{ext} resultan ahora:

$$\mathcal{P}^{int} = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \dot{d} + \chi \dot{\alpha} + \boldsymbol{\pi} \dot{d}) d\Omega; \quad (6.1)$$

y

$$\mathcal{P}^{ext} = \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \chi^{ext} \dot{\alpha} + \boldsymbol{\kappa} \dot{d}) d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\eta} \dot{d}) d\Gamma; \quad (6.2)$$

donde $\dot{\mathbf{u}}$, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ y \dot{d} resultan tasas arbitrarias, aunque admisibles, de los descriptores cinemáticos, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones macro y $\boldsymbol{\xi}$ son las tensiones micro que representa las interacciones de primer orden del descriptor \dot{d} , mientras que χ , χ^{ext} , $\boldsymbol{\pi}$ y $\boldsymbol{\kappa}$ son las microfuerzas de interacción (interna y externas) asociadas a $\dot{\alpha}$ y \dot{d} , respectivamente, y representan las interacciones de orden cero (al igual que la fuerza de cuerpo convencional \mathbf{b}). Los términos \mathbf{t} y $\boldsymbol{\eta}$ representan las interacciones en el borde. Dentro del termino de fuerza “convencional” de cuerpo \mathbf{b} se podrían incluir los términos inerciales:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 - \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (6.3)$$

siendo \mathbf{b}_0 la contribución no inercial a \mathbf{b} y ρ la densidad. Planteamos ahora el Principio

de Potencias virtuales:

$$\mathcal{P}^{int}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\alpha}, \hat{d}, \nabla \hat{d}) = \mathcal{P}^{ext}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\alpha}, \hat{d}, \nabla \hat{d}) \quad \forall (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{d}, \nabla \hat{d}) \in \hat{\mathcal{V}} \quad (6.4)$$

donde $\hat{\mathcal{V}}$ es el espacio virtual de variaciones admisibles de descriptores cinemáticos.

Al igual que en la *Secc. 4.2.1*, de esta igualdad, y adoptando variaciones independientes de cada descriptor cinemático y argumentando independencia de observador, derivamos las ecuaciones de balance del problema:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad y \quad \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \Gamma \quad (6.5a)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\kappa} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad y \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \Gamma \quad (6.5b)$$

$$-\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\chi}^{ext} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (6.5c)$$

Donde \mathbf{n} es el vector normal a Γ . La primera expresión de (6.5a) representa la forma local de la ecuación convencional de Cauchy, mientras que la segunda es el equilibrio de tracciones en el borde. De la misma manera, la expresión de la izquierda de (6.5b) es la forma local de la ecuación de balance de microfuerzas asociada al campo de fase, mientras que la expresión de la derecha, es la condición de equilibrio de microtracciones. Observar que debido a la condición de orden cero adoptada para la plasticidad, no existe microtensión asociada al descriptor morfológico α en (6.5c).

De este tratamiento también se deriva la simetría del tensor $\boldsymbol{\sigma}$.

En el desarrollo a continuación, consideramos que la interacciones externas $\boldsymbol{\kappa}$ y $\boldsymbol{\chi}^{ext}$ son nulas.

6.2.1. Desbalance de energías

La segunda ley de la termodinámica se impone a través de plantear el siguiente desbalance de energías. La tasa de cambio de la energía libre total en cualquier parte Ω del cuerpo \mathcal{B} , no debe exceder la potencia externa realizada sobre esta parte del cuerpo:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \varphi \, d\Omega \leq \mathcal{P}^{ext} \quad (6.6)$$

Teniendo en cuenta que Ω es arbitrario, la igualdad de potencias internas y externas (6.4) es válida, podemos arribar a la siguiente desigualdad válida punto a punto:

$$\dot{\varphi} - \boldsymbol{\sigma} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\xi} \nabla \dot{d} - \boldsymbol{\chi} \dot{\alpha} - \pi \dot{d} \leq 0. \quad (6.7)$$

6.2.2. Modelo constitutivo

Introducimos ahora algunos criterios cinemáticos que se asumen como preestablecidos en el modelo plástico, como ser: la aditividad de las deformaciones totales en parte elástica y plástica: $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p$, y además que:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\alpha} \mathbf{N} \quad ; \quad \dot{\alpha} = \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p\| \quad ; \quad \|\mathbf{N}\| = 1 \quad ; \quad \text{tr}(\mathbf{N}) = 0. \quad (6.8)$$

la última identidad impone la isocoricidad de las deformaciones plásticas. Con estas suposiciones cinemáticas, la desigualdad (6.7) se puede reescribir:

$$\dot{\varphi} - \sigma \dot{\varepsilon}_e - \xi \nabla \dot{d} - \bar{\chi} \dot{\alpha} - \pi \dot{d} \leq 0, \quad (6.9)$$

donde

$$\bar{\chi} = \chi + \tau \quad , \quad \tau = \sigma \cdot N = s \cdot N, \quad (6.10)$$

siendo s el tensor desviador de tensiones de Cauchy. Observamos además que de la ecuación de balance (6.5c), e introduciendo la definición de $\bar{\chi}$, resulta:

$$\chi = \tau - \bar{\chi} = 0. \quad (6.11)$$

La desigualdad (6.9) debe ser válida para cualquier proceso termodinámico admisible. Luego, aplicando el método de Coleman y Gurtin para sólidos convencionales y asumiendo la dependencia funcional de φ mediante los descriptores cinemáticos:

$$\varphi = \varphi(\varepsilon_e, \alpha, d, \nabla d), \quad (6.12)$$

es posible derivar la relación constitutiva para ambas tensiones:

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_e}, \quad \xi = \frac{\partial \varphi}{\partial \nabla d}, \quad (6.13)$$

El próximo paso consiste en introducir restricciones constitutivas adicionales. Consideramos que la evolución de los dos descriptores cinemáticos están sujetos a:

$$\dot{\alpha} \geq 0 \quad ; \quad \dot{d} \geq 0. \quad (6.14)$$

Estas restricciones introducen el concepto de irreversibilidad de los procesos mecánicos involucrados. Estrictamente, la irreversibilidad se produce en un proceso que está caracterizado por: $\dot{\alpha} > 0$ o por $\dot{d} > 0$. El tratamiento matemático de ambas restricciones se considera del siguiente modo. Las variables duales, conjugadas a $\dot{\alpha} \geq 0$ y $\dot{d} \geq 0$ se partitionan de acuerdo a una parcela activa y otra reactiva. Esta última, no produce potencia interna. Esto es similar a lo que ocurre en otro tipo de restricciones constitutivas convencionales. Por ejemplo, es el caso de materiales incompresibles. La restricción en el caso de un material incompresible se impone al $\text{tr}(\varepsilon)$ y la variable conjugada es el $\text{tr}(\sigma)$. Como es sabido, esta variable actúa como una reacción del modelo, de tal modo que su valor no puede ser evaluado a partir de las ecuaciones constitutivas. La tensión media en un modelo constitutivo de un material incompresible es indeterminada.

Siguiendo este concepto, proponemos que

$$\bar{\chi} = \bar{\chi}_a + \bar{\chi}_r \quad ; \quad \pi = \pi_a + \pi_r \quad (6.15)$$

donde $\bar{\chi}_a$ y π_a corresponden a las partes activas de las variables asociadas y $\bar{\chi}_r$ y π_r a las reactivas. Estas últimas, no generan potencia interna, y por lo tanto serán gobernadas por

la siguiente regla:

$$\bar{\chi}_r = \begin{cases} \text{indeterminada,} & \text{para: } \dot{\alpha} = 0, \\ 0, & \text{para: } \dot{\alpha} > 0, \end{cases} \quad ; \quad \pi_r = \begin{cases} \text{indeterminada,} & \text{para: } \dot{d} = 0, \\ 0, & \text{para: } \dot{d} > 0, \end{cases} \quad (6.16)$$

mientras que ambas componentes activas resultan determinadas por la ecuación constitutiva en todos los casos.

De este modo escogemos el siguiente comportamiento constitutivo:

(i) Para plasticidad:

$$\text{para } \dot{\alpha} = 0 : \begin{cases} \bar{\chi}_r = \tau - (\partial_\alpha \varphi + \hat{a}), \\ \bar{\chi}_a = (\partial_\alpha \varphi + \hat{a}), \end{cases} \quad ; \quad \text{para } \dot{\alpha} > 0 : \begin{cases} \bar{\chi}_r = 0, \\ \bar{\chi}_a = (\partial_\alpha \varphi + \hat{a}), \end{cases} \quad (6.17)$$

donde $\hat{a}(\varepsilon_e, \alpha, d, \nabla d)$ es una función a ser definida más adelante. De las condiciones (6.17) resulta, en todos los casos, que la ecuación de balance (6.11) se satisface automáticamente. Para $\dot{\alpha} = 0$ se satisface trivialmente ya que: $\bar{\chi} = \bar{\chi}_a + \bar{\chi}_r = \tau$. Mientras que para $\dot{\alpha} > 0$, resulta:

$$\tau - \partial_\alpha \varphi - \hat{a} = 0 \quad (6.18)$$

En este último caso, la ecuación de balance tiene la misma apariencia que el criterio de fluencia en la plasticidad convencional, como lo tratamos más adelante.

Por otro lado, calculamos la disipación debido únicamente a la plasticidad (\mathcal{D}_{plast}), para $\dot{\alpha} > 0$. De la desigualdad (6.9) considerando $\dot{d} \equiv 0$ fijo, podemos obtener que:

$$\mathcal{D}_{plast} = -(\partial_\alpha \varphi - \bar{\chi})\dot{\alpha} = \hat{a}\dot{\alpha} = (\tau - \partial_\alpha \varphi)\dot{\alpha} \geq 0 \quad (6.19)$$

La última igualdad se obtiene luego de aplicar el balance de microfuerzas (6.18). Dado un estado termodinámico, proponiendo un principio de máxima disipación plástica es posible obtener la dirección \mathbf{N} del tensor tasa de deformación plástica y tal que determina la máxima disipación \mathcal{D}_{plast} . Utilizando el último término de (6.19) y la identidad (6.10)₂, resulta:

$$\max_{\mathbf{N}, \text{ s.t. } \|\mathbf{N}\|=1} \mathcal{D}_{plast} = \max_{\mathbf{N}, \text{ s.t. } \|\mathbf{N}\|=1} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{N} - \partial_\alpha \varphi)\dot{\alpha} \geq 0 \quad (6.20)$$

se observa que la solución de este problema determina:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|} \quad (6.21)$$

y por lo tanto:

$$\tau = \mathbf{s} \cdot \mathbf{N} = \|\mathbf{s}\| \quad (6.22)$$

(i) Para daño:

$$\text{para } \dot{d} = 0 : \begin{cases} \pi_r = \nabla \cdot \partial_{\nabla d} \varphi - \partial_d \varphi, \\ \pi_a = \partial_d \varphi, \end{cases} \quad ; \quad \text{para } \dot{d} > 0 : \begin{cases} \pi_r = 0, \\ \pi_a = \partial_d \varphi, \end{cases} \quad (6.23)$$

con lo cual, y teniendo en cuenta la ecuación constitutiva (6.13), el balance de microfuerzas (6.5b) resulta trivialmente satisfecha para $\dot{d} = 0$, mientras que para $\dot{d} > 0$, este balance resulta:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\pi} = \nabla \cdot \partial_{\nabla d} \varphi + \partial_d \varphi = 0 \quad (6.24)$$

Estipulamos que en todo caso la microfuerza reactiva π_r obedece la desigualdad:

$$\pi_r \leq 0. \quad (6.25)$$

y que la condición: $\pi_r = 0$ es necesaria para que $\dot{d} > 0$.

6.2.3. Ecuaciones de gobierno para la evolución de los descriptores cinemáticos α y d

En esta sección se reescriben, en un formato más convencional, las combinaciones de las ecuaciones de equilibrio de fuerza y restricciones que definen los criterios de evolución del daño y la plasticidad.

Introducimos una función de fluencia que está definida como sigue:

$$f := \boldsymbol{\tau} - \partial_\alpha \varphi - \hat{a} = \| \mathbf{s} \| - \partial_\alpha \varphi - \hat{a}, \quad (6.26)$$

La evolución de $\dot{\alpha}$ está ligada a la función de fluencia a través de las relaciones (6.17) y (6.18), que pueden ser reescritas como:

$$\dot{\alpha} \geq 0 \quad ; \quad f \leq 0 \quad ; \quad \dot{\alpha} f = 0 \quad (6.27)$$

Del mismo modo, definiendo la función:

$$F = \pi_r = \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\pi} = \nabla \cdot \partial_{\nabla d} \varphi - \partial_d \varphi, \quad (6.28)$$

el criterio para la evolución de \dot{d} se reescribe como:

$$\dot{d} \geq 0, \quad F \leq 0, \quad \dot{d} F = 0 \quad (6.29)$$

6.2.4. Especialización para la función de energía libre

En la *secc.4.2.2* hemos definimos una función de energía libre asociada sólo al campo de daño d . En esta sección desarrollamos una discusión más completa, e introducimos una función de energía, más general, especialmente apta para modelar plasticidad y daño.

La función de energía libre $\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \alpha, d, \nabla d)$, se define como una adición de distintos

términos, como sigue:

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \alpha, d, \nabla d) = \varphi_e(\boldsymbol{\varepsilon}_e, d) + \varphi_p(\alpha) + \varphi_f(d, \nabla d), \quad (6.30)$$

donde:

$$\begin{aligned} \varphi_e(\boldsymbol{\varepsilon}_e, d) &= ((1-d)^2 + k_c) \varphi_e^+(\boldsymbol{\varepsilon}_e) + \varphi_e^-(\boldsymbol{\varepsilon}_e); \\ \varphi_e^+(\boldsymbol{\varepsilon}_e) &= \frac{1}{2} (\lambda \langle \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_e \rangle^2 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_e^+ : \boldsymbol{\varepsilon}_e^+); \\ \varphi_e^-(\boldsymbol{\varepsilon}_e) &= \frac{1}{2} (\lambda \langle -\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_e \rangle^2 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_e^- : \boldsymbol{\varepsilon}_e^-); \\ \boldsymbol{\varepsilon}_e^+ &= \langle (\boldsymbol{\varepsilon}_e)_i \rangle \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_e^- = -\langle -(\boldsymbol{\varepsilon}_e)_i \rangle \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i; \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$\varphi_p(\alpha) = \frac{\sigma_y^2}{E(n+1)} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{E\alpha}{\sigma_y} \right)^{n+1} - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y \alpha, \quad (6.32)$$

$$\varphi_f(d, \nabla d) = G_c \left(\frac{d^2}{2\ell} + \frac{\ell}{2} |\nabla d|^2 \right). \quad (6.33)$$

Donde λ y μ son los parámetros de Lamé, E es el módulo de Young, $(\boldsymbol{\varepsilon}_e)_i$ y \mathbf{e}_i son los i -ésimos autovalor y autovector del tensor de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}_e$, respectivamente. En las expresiones (6.31)₂₋₃, y de acuerdo con (6.31)₄, $\boldsymbol{\varepsilon}_e^+$ and $\boldsymbol{\varepsilon}_e^-$ son la descomposición espectral de la parte positiva y negativa del tensor de deformaciones.

La constante k_c es un parámetro siempre mayor a cero ($k_c > 0$), que introducimos para prevenir una posible inestabilidad numérica del modelo cuando $d = 1$. Debe ser lo más cercana a cero posible para no sobrestimar la energía almacenada.

El exponente de endurecimiento del modelo plástico se denota n , mientras que el límite elástico para $\alpha = 0$ es σ_y . G_c es la energía de fractura y ℓ es el parámetro de longitud característica del modelo de campo de fase.

La parte elástica de la energía libre es φ_e . Como puede observarse, éste término tiene una interacción directa con el campo de daño d que representa la degradación del material. El término φ_e se descompone aditivamente en dos partes: una asociada a la componente positiva del tensor de deformación elástico y otra parte a la componente negativa del mismo tensor. Solo el término asociado a la parte positiva de la deformación es el que está acoplado directamente con d . Es decir, la evolución de d está ligada sólo a $\hat{\varphi}_e^+$.

La definición de φ_f , también coincide con el criterio presentado en *Secc. 4.2.2*.

Adicionalmente de las condiciones (6.17), definimos:

$$\hat{a}(\boldsymbol{\varepsilon}_e, \alpha, d, \nabla d) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y, \quad (6.34)$$

Las expresiones para $\boldsymbol{\sigma}$, f y F quedan entonces:

$$\boldsymbol{\sigma} = ((1-d)^2 + k_c) (\lambda \langle \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_e \rangle \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_e^+) + (-\lambda \langle -\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_e \rangle \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_e^-); \quad (6.35)$$

$$f = \|\mathbf{s}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{Ee}{\sigma_y} \right)^n. \quad (6.36)$$

$$F = 2(1-d)\varphi_e^+(\boldsymbol{\varepsilon}_e) - \frac{G_c}{\ell}(d - \ell^2 \nabla d); \quad (6.37)$$

6.3. Principio variacional e implementación numérica

El problema variacional obtenido a través del principio de potencias virtuales dado por (6.4), se implementa a través del método de elementos finitos en forma estándar, de manera similar a lo presentado en la *Secc. 4.4*.

A continuación definimos las variaciones admisibles de los campos \mathbf{u} y d como $\delta\mathbf{u}$ y δd e introducimos un método de residuos ponderados para evaluar las ecuaciones de gobierno del problema.

Las condiciones de borde las definiremos considerando un cuerpo Ω cuyo borde es Γ . Las condiciones de contorno esenciales para los desplazamientos se prescriben en el borde Γ_u : $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$. Las tracciones y micro-tracciones se imponen en los contornos Γ_σ y Γ_ξ : $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{t}$ en Γ_σ , y $\nabla\xi \cdot \mathbf{n} = 0$ en Γ_ξ . Las condiciones iniciales para d , son $d = 0$ en Ω . Consideremos los siguientes espacios funcionales definidos en Ω :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_u &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1 \mid \mathbf{u} = \delta\mathbf{u} \text{ en } \Gamma_u\}; \\ \mathcal{V}_d &= \{d \in \mathbf{H}^1\}; \end{aligned} \quad (6.38)$$

con \mathbf{H}^1 espacio de funciones suficientemente suaves. \mathcal{V}_u es el espacio de desplazamientos admisibles y \mathcal{V}^d el espacio de daño admisible. Los correspondientes espacios admisibles para las variaciones de estos campos son:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0^u &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1 \mid \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Gamma_u\}; \\ \mathcal{V}_0^d &= \mathcal{V}^d; \end{aligned} \quad (6.39)$$

Finalmente podemos escribir el principio variacional como:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \nabla^s \delta\mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \delta\mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \delta\mathbf{u} \, d\Gamma = 0; \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{V}_0^u \quad (6.40)$$

$$\int_{\Omega} (G_c \ell \nabla d \nabla \delta d) \, d\Omega + \int_{\Omega} \left(-2(1-d)\mathcal{H}(\mathbf{u}, \alpha) + \frac{G_c}{\ell} d \right) \delta d \, d\Omega = 0; \quad \forall \delta d \in \mathcal{V}_0^d \quad (6.41)$$

siendo

$$\mathcal{H}(t) = \max_t \varphi_e^+ \quad (6.42)$$

Las ecuaciones (6.40) y (6.41), se resuelven por el método de elementos finitos. Para tal fin se utilizan las mismas discretizaciones espaciales dadas por (4.27) y (4.28) para los campos \mathbf{u} , d respectivamente y (4.29), (4.30) para sus variaciones respectivamente. Interpolaciones de igual orden se utilizan para ambos campos: interpolación lineal mediante elementos finitos tipo *BBAR*, como se los describe en (Simo y Hughes, 1998). Para el campo de daño d se utilizan elementos lineales con formulación convencional.

El problema variacional dado queda expresado en forma discreta como:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \nabla N^s \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} N \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t} N \hat{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (6.43)$$

$$\int_{\Omega} (G_c \ell \nabla d \nabla N) \hat{d} \, d\Omega + \int_{\Omega} \left(-2(1-d) \mathcal{H}(\mathbf{u}, \alpha) + \frac{G_c}{\ell} d \right) N \hat{d} \, d\Omega = 0 \quad (6.44)$$

Las ecuaciones (6.43) y (6.44), permiten resolver en problema en forma numérica de igual manera que el tratamiento realizado para las ecuaciones (4.31) y (4.32), el esquema de integración temporal se realiza resolviendo cada uno de los campos \mathbf{u} y d en forma desacoplada por el mismo esquema que se describió en la Secc. 4.4.

6.4. Ejemplos numéricos

En esta sección se presenta a través de un ejemplo de una fisura preexistente en Modo I, un análisis detallado sobre la sensibilidad de la relación entre los parámetros del modelo plástico y del campo de fase.

6.4.1. Ejemplo 1 - Análisis de la propagación de fisura en Modo I para fluencia en pequeña escala

Con este ejemplo, se evalúan los efectos inducidos en la respuesta estructural por los parámetros propios de los modelos elasto plástico y de campo de fase.

Analizamos un domino circular, como parte de un cuerpo sometido a un estado de carga, alrededor de la punta de una fisura. El modelo de estudio, descripción geométrica del problema y malla de elementos finitos, se ilustra en la Fig. (6.1-a).

Debido a la simetría de problema, sólo se modela la mitad del dominio. Para la discretización se utiliza una malla de elementos finitos lineales tipo BBAR, estructurada en las cercanías de la línea de propagación de fisura. El tamaño de los elementos de la zona estructurada es $(h^e \times h^e)$, siendo $h^e = 40.(\mu m)$. La región con malla estructurada se extiende sobre un subdominio de tamaño: $90h^e \times 40h^e$ alrededor de la punta de la fisura. Obsérvese que, la geometría completa, incluyendo el tamaño de entalla, es parametrizada con h^e .

Los desplazamientos impuestos en el borde son deducidos de la solución que provee la mecánica de fractura lineal para este tipo de problema. Para garantizar la validez de esta condición de borde se debe considerar que el concepto de factor de intensidad de tensiones K_I es válido. Por lo tanto, la zona plástica que se desarrolla en los alrededores de la punta de la fisura permanece pequeña con relación al tamaño de la región circular modelada. De acuerdo con este criterio, se imponen desplazamientos en el límite externo marcado por la curva $A - B - C$, que garantizan el Modo I de apertura de fisura y están dados como función del K_I :

$$u_x = \frac{2(1+\nu)K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos(\theta/2) [1 - 2\nu + \sin^2(\theta/2)] \quad (6.45)$$

$$u_y = \frac{2(1+\nu)K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin(\theta/2) [2 - 2\nu - \cos^2(\theta/2)] \quad (6.46)$$

En el borde $C - D$, las condiciones impuestas corresponden a garantizar la simetría del modelo. Las condiciones iniciales para el modelo de campo de fase en este caso son: $d = 0$ dentro del dominio y $\nabla d \cdot \mathbf{n} = 0$ en todo el borde $D - A - B - C$. Se controla la apertura de la fisura a través del parámetro Δs mostrado en la Fig.(6.3-a).

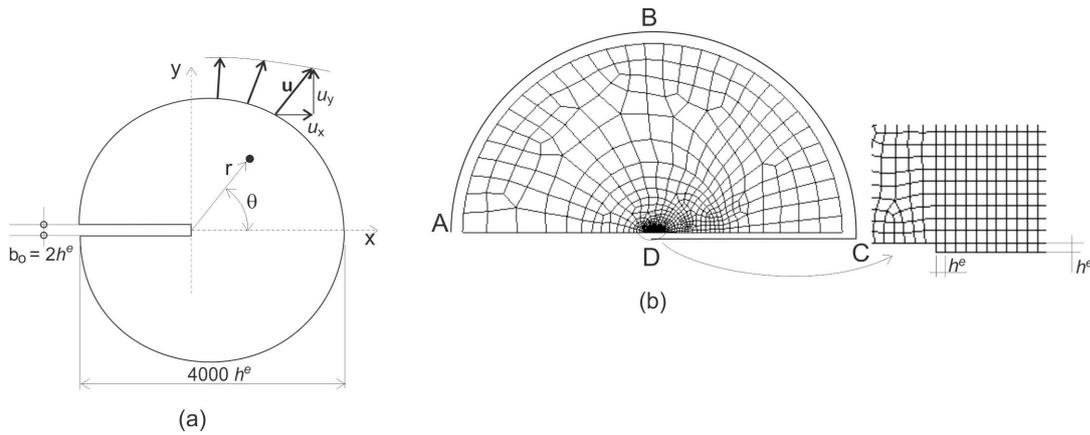


Figura 6.1: Región semicircular con una fisura. (a) Datos geométricos. (b) Modelo de elementos finitos.

Los parámetros del material utilizados en este análisis son: tensión de fluencia $\sigma_y = 10(Mpa)$, la relación entre el módulo de Young y la tensión de fluencia $E/\sigma_y = 333,3$ y el coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

El exponente n que caracteriza el endurecimiento plástico y la energía de fractura del material G_c , cambiarán según los casos que se analicen.

Campo de fase y plasticidad: análisis de los efectos de interacción

Seguendo el trabajo de (Tvergaard y Hutchinson (1992)), deben considerarse dos parámetros que gobiernan la interacción de los efectos entre los mecanismos de daño y la deformación plástica. Estos dos parámetros son:

- i) la relación $\hat{\sigma}/\sigma_y$, donde $\hat{\sigma}$ es la tensión crítica del mecanismo de apertura de fisura, en un modelo cohesivo y σ_y es la tensión de fluencia del modelo plástico.
- ii) el exponente de endurecimiento en el modelo plástico denotado por n .

El modelo de campo de fase no tiene un parámetro explícito que identifica la tensión crítica $\hat{\sigma}$. Sin embargo, puede ser estimado a través de los parámetros G_c y ℓ . Primero se resuelve analíticamente un problema de campo de fase homogéneo lineal elástico, tal como se presenta en la Secc. 4.3.1, cuyas ecuaciones de gobierno están dadas por (4.15), (4.16) y (4.17). Debido a la homogeneidad, como se explicó oportunamente, los gradientes se asumen cero ($\nabla d = \Delta d = 0$). De acuerdo al resultado presentado en la Secc. 4.3.1 y que puede consultarse en (?), se obtiene la respuesta de tensión mostrada en la Fig.(4.2) y que incluimos nuevamente en la Fig.(6.2). Las ecuaciones que dan los valores de tensión y deformación máxima, se presentaron en la sección antes mencionada de esta tesis y se transcriben nuevamente a continuación:

$$\hat{\sigma} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \sqrt{\frac{G_c E}{\ell}} \quad ; \quad \hat{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{G_c}{\ell E}} \quad (6.47)$$

Debe tomarse en cuenta que, debido a la homogeneidad espacial asumida en el problema 1-D, la respuesta dada por la ecuación (6.47) es idealizada y artificial porque no

está ligada a la localización de deformaciones, por lo tanto no representa una solución física admisible del problema de fractura. Por lo tanto, el área delimitada por las curvas de la Fig.(6.2), representa una densidad de energía por unidad de volumen distribuida uniformemente en el dominio 1D que no está relacionada con la energía de fractura G_c .

En cualquier caso, la expresión (6.47)-a permite estimar de forma adecuada al parámetro $\hat{\sigma}$ que nos es útil para comparar nuestros resultados con los obtenidos con modelos cohesivos. Puede notarse la conexión entre (6.47) y la expresión clásica de la longitud característica de Irwin en (6.48).

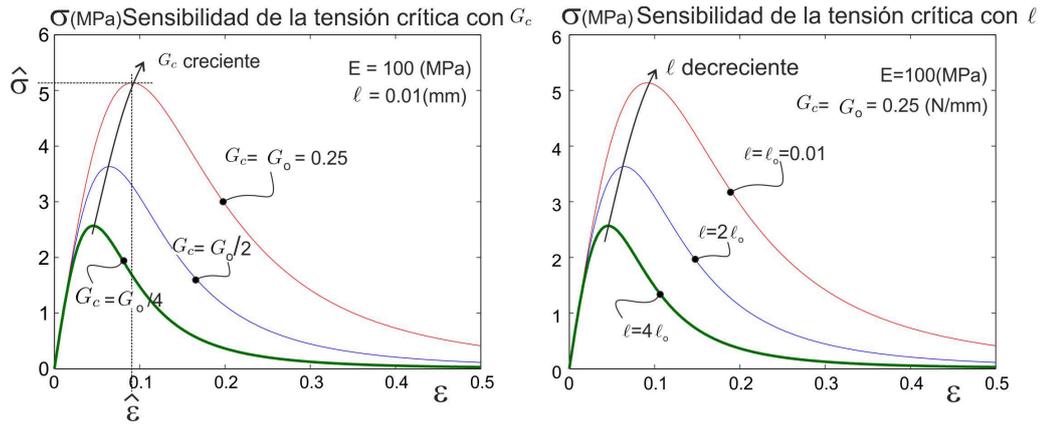


Figura 6.2: Tensión crítica de un modelo de campo de fase como función de $G_c(N/mm)$ y $l(mm)$, para un problema unidimensional homogéneo

$$R_0 = \frac{1}{3\pi(1-\nu^2)} \frac{G_c E}{\sigma_y^2} \quad (6.48)$$

El análisis que realizamos en este ejemplo es similar al presentado en Tvergaard y Hutchinson (1992), con la diferencia que en dicho trabajo utilizan un modelo cohesivo, mientras que nosotros utilizamos el modelo de campo de fase con plasticidad propuesto.

En este análisis utilizaremos los parámetros G_c y n variables, mientras se mantendrán fijos los parámetros: l , E y σ_y . Como se ha mencionado anteriormente $l \rightarrow 0$, recupera la respuesta teórica de fractura clásica en medios elásticos pero en la práctica l se toma como un valor pequeño pero no nulo. En este caso se considera $l = 400(\mu m) = 10h^e$.

La energía de fractura G_c permite definir entonces la tensión crítica $\hat{\sigma}$ a través de la ecuación (6.47) y calcular el parámetro n . En el presente análisis, las energías de fractura varían en el rango $G_c = [0,116 ; 1,024](N/mm)$, de donde se obtienen las relaciones $\hat{\sigma}/\sigma_y$ y R_0 dentro de los rangos $\hat{\sigma}/\sigma_y = [1, 3]$ y $R_0 = [450 ; 3970](\mu m)$ respectivamente.

Finalmente puede observarse que la relación $\hat{\sigma}/\sigma_y$ termina gobernando la interacción entre el daño controlado por el campo de fase y la plasticidad proporcional $\sqrt{R_0/l}$.

Los resultados numéricos de este ejemplo se compilan en la Fig.(6.3) donde se muestran los resultados obtenidos para los parámetros $n = 0$ (plasticidad perfecta), $G_c = 0,328(mm)$ y ($\hat{\sigma}/\sigma_y = 1,7$).

En la (Fig.6.3-b) se presenta la curva de desplazamiento vertical u_y^T del punto T de la Fig.(6.3-a) versus el parámetro de control Δs normalizado con h^e .

En las subfiguras dentro de la misma Figura 6.3-c:f son mostrados la evolución de daño d , con $d > 0,97$. Arbitrariamente, consideramos que los puntos con $d > 0,97$

representan la fisura. Como puede observarse cada cuadro presentado en esta figura está en correspondencia con un punto identificado en la curva de equilibrio: u_y^T vs $\Delta s/h^e$.

La Fig. (6.3-g) muestra las curvas de tensión vertical (σ_{yy}) normalizada con la tensión de fluencia, a lo largo del eje de abscisas de simetría horizontal. Se presenta una secuencia de curvas hasta la degradación completa del material. La curva marcada con la letra D, coincide justamente con el instante donde se produce la iniciación de la fisura. Puede observarse en esta curva que este fenómeno tiene lugar en un punto de abscisa distinto al punto donde se produce la tensión máxima, pero en este punto es donde se produce la localización de la interfaz elasto/plástica, tal como se muestra en la Fig.(6.3-c). Para niveles de daño bajo se recupera la curva A, en este caso puede observarse que la localización coincide con el punto de máxima tensión, es decir la punta de la fisura tiene lugar en el punto de máximo nivel de tensiones. Pero al incrementarse el nivel de cargas, este fenómeno deja de ser cierto. La localización se produce mas allá del punto de máxima tensión hacia el interior del cuerpo (curvas B y C).

Respuestas similares se han obtenido en soluciones clásicas del fenómeno de propagación de fisuras en medios elasto plásticos, tal como se puede ver en los aportes de McMeecking (1977) y Ritchie et al. (1973)). En estos trabajos se consideraron los cambios geométricos en la punta de la fisura, en este caso por el contrario se considera que la geometría de la punta de la fisura es de ancho finito y no se producen cambios durante el análisis.

Una vez que la fisura inicia el proceso de propagación, ésta se extiende en ambas direcciones a lo largo del eje horizontal. Otro fenómeno observado es que la fisura inicia cuando el desplazamiento vertical u_y^T disminuye del valor máximo $(u_y^T)_{max}$ alcanzado en pasos de carga anteriores.

A partir de la relación (6.46) y los desplazamientos (u_y^T) el factor de intensidad de tensiones K_I puede ser determinado. Este resultado se presenta en Fig.(6.4) donde se muestra dos curvas de K_I versus la apertura del borde de fisura Δs . Estas curvas están resueltas para $n = 0$, $\hat{\sigma}/\sigma_y = 0,5$ y $n = 0,2$, $\hat{\sigma}/\sigma_y = 3$, respectivamente. En estas curvas el factor de intensidad de tensiones K_I es normalizado con la tenacidad a fractura en ausencia de plasticidad $K_0 = \sqrt{(EG_c)/(1-\nu^2)}$. Definimos la tenacidad estable del material K_{SS} como: $K_{SS} = K_I((u_y^T)_{max})$. Es decir K_{SS} es el valor máximo de K_I que se logra antes del inicio de la propagación de la fisura.

En la Fig.(6.5) se muestran los resultados obtenidos con los distintos valores adoptados en la relación $\hat{\sigma}/\sigma_y$, considerando $n = 0$ y $n = 0,2$, respectivamente. El eje vertical corresponde a la tenacidad de crecimiento estable K_{SS} normalizada con K_0 . La abscisa representa los valores de la relación $\hat{\sigma}/\sigma_y$.

Comparando las respuestas de la curva Fig.(6.5), con los resultados presentados en el trabajo de (Tvergaard y Hutchinson, 1992) podemos concluir que el modelo de campo de fase interactúa con el modelo plástico de un modo similar a como lo hace el modelo cohesivo y la plasticidad allí presentado, siempre que se mantenga fijo el parámetro ℓ .

Puede observarse que los resultados obtenidos en plasticidad perfecta ($n = 0$) y $\hat{\sigma}/\sigma_y > 2$ no predicen propagación de la fisura. Observe la asíntota vertical en los valores cercano a $\hat{\sigma}/\sigma_y = 2$. Una respuesta similar ha sido mencionado en el trabajo de Tvergaard y Hutchinson.

Alternativamente la respuesta teórica de fractura frágil se recuperada a través del modelo de campo de fase, siempre que la plasticidad no se desarrolle. Esto sucede si las

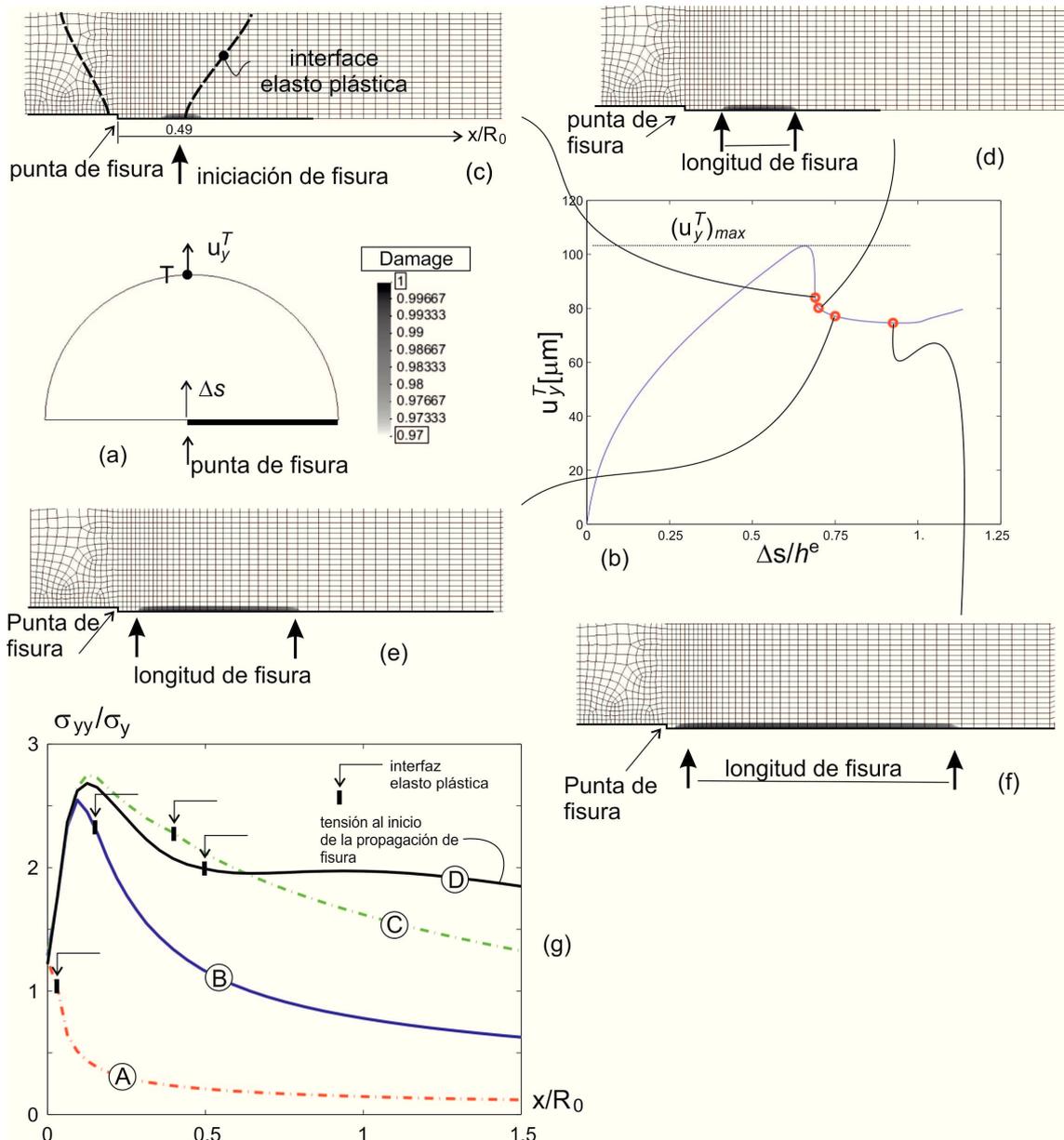


Figura 6.3: Propagación de fisura. Caso: $n = 0$, $\hat{\sigma}/\sigma_y = 1,7$, $R_0 = 1270$. [μm]. (a) Parámetro de control Δs y Punto T donde se evalúa el desplazamiento u_y^T en función de s . (b) Curva u_y^T vs Δs . (c-f) Secuencias de la distribución del daño durante el proceso de carga (sólo se muestran valores $d > 0,97$). (g) Distribución de la tensión vertical (σ_{yy}), normalizada con la tensión de fluencia, a lo largo de la línea horizontal de simetría en las distintas etapas: D es la curva que corresponde al inicio de propagación de fisura en la figura (c), y las curvas A, B y C corresponden a los tiempos previos, para valores de daño 0,003, 0,06 and 0,18 respectivamente.

tensiones límites del campo de fase permanecen en un valor menor a σ_y . Según lo antes dicho, a través de la ecuación (6.47) se puede estimar el valor de la tensión $\hat{\sigma}$. De este modo el parámetro ℓ es fijo y no nulo, con lo que la solución de fractura frágil se alcanzaría cuando $G_c \rightarrow 0$. Como puede observarse en la Fig.(6.5), este límite es alcanzado cuando: $\hat{\sigma}/\sigma_y \rightarrow 0$. El valor límite $K_{SS}/K_0 = 1$ es obtenido en forma aproximada en este modelo.

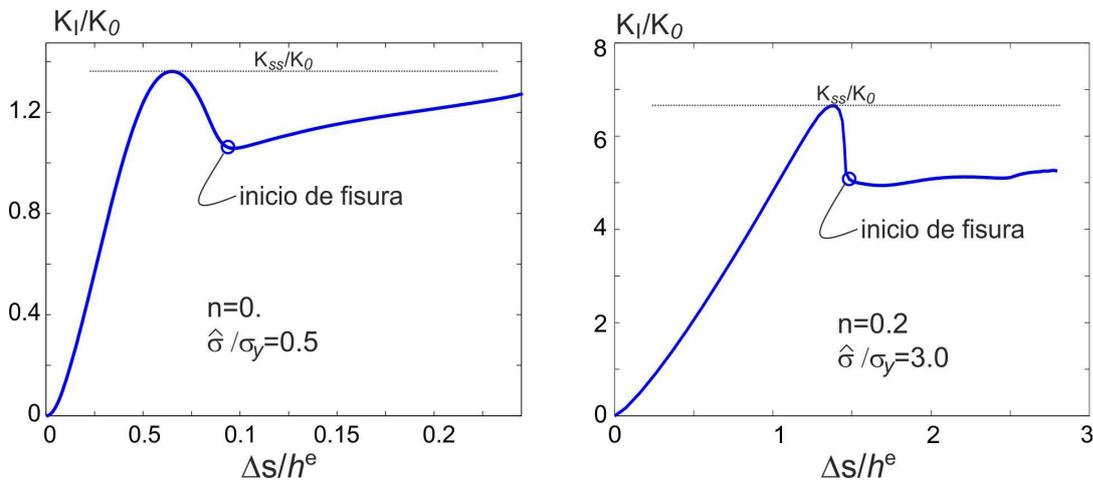


Figura 6.4: Crecimiento de fisura en Modo I. K_I normalizado vs. el desplazamiento de apertura de fisura. a) $n = 0,0$, $\hat{\sigma}/\sigma_y = 0,5$. b) $n = 0,2$, $\hat{\sigma}/\sigma_y = 3,0$.

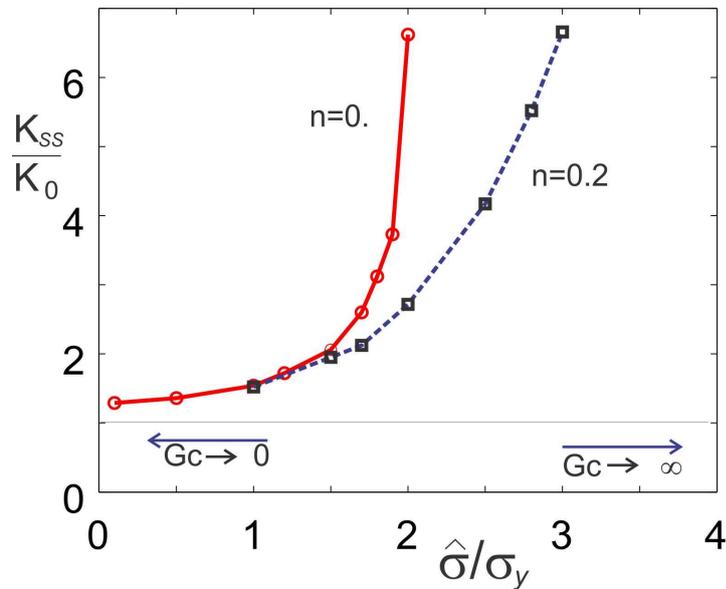


Figura 6.5: Fractura en Modo I. K_{SS} factor de intensidad de tensiones como función de $\hat{\sigma}/\sigma_y$.

Consideremos ahora el caso $\ell \rightarrow 0$ manteniendo fijos los demás parámetros. Es sabido, y ha sido demostrado, que si consideramos una respuesta puramente elástica sin plasticidad, el modelo tiende asintóticamente a la solución teórica de fractura frágil. Sin embargo, cuando el campo de fase es acoplado a un modelo de plasticidad, con $\ell \rightarrow 0$ y G_c permanecen fijos, se tiene que $\hat{\sigma} \rightarrow \infty$, lo demuestra la ecuación (6.47). De modo que se inhibe la propagación de fisura, esto sucede incluso considerando $n > 0$. A partir de esto podemos concluir que la longitud ℓ debe ser considerada como un parámetro del material con valor no nulo, y que junto con G_c y los restantes parámetros del modelo plástico debe ser caracterizado en forma correcta.

El hecho de considerar dos parámetros que definan el modelo de campo de fase es equivalente a lo que ocurre en los modelos cohesivos, donde se consideran dos parámetros a ser definidos: tensión crítica y energía de fractura. Con lo presentado en este ejemplo se puede arribar a que el modelo predice entre otras cosas que:

- Para un dado conjunto de parámetros: E , ν , σ_y , n y G_c , la tenacidad a fractura aquí denotada como K_{SS} e interpretada como el valor máximo de K_I logrado hasta la iniciación de la propagación de fisura, aumenta o disminuye en función del valor de ℓ . En particular, podemos concluir que existe un valor crítico ℓ_c , para el cual $K_{SS} \rightarrow \infty$ cuando $\ell \rightarrow \ell_c$. Así, si $\ell \leq \ell_c$ la teoría predice que la extensión de la fisura es imposible sin importar el nivel de carga. Por lo tanto, para describir la propagación de la fisura, debe considerarse un valor de ℓ mayor que ℓ_c . Este valor de ℓ puede ser estimado proporcionalmente con el valor experimental de K_{SS} .
- En algunos casos, la propagación de una fisura preexistente implica las siguientes etapas: 1) formación de una nueva fisura delante la punta; 2) propagación de la fisura lejos y hacia, la punta original ; 3) la extensión de fisura original cuando su punta es alcanzada por la nueva fisura. Esto implica que la propagación de la fisura puede ocurrir de una manera discontinua. Se han citado los siguiente aportes para evaluar este comportamiento en la propagación de fisuras en medios elasto plásticos (Tetelman y McEvily, 1967); (Kfoury, 2008); (Kfoury y Miller, 1976); (Ritchie et al., 1973). De modo interesante, este efecto es capturado aún usando una teoría de deformación en pequeña fluencia.

Capítulo 7

Conclusiones

Esta tesis propone aportes al estudio numérico de problemas de propagación de fractura en medios sólidos, y por ende, los resultados obtenidos tienen aplicación directa a la resolución de problemas de alta relevancia tecnológica.

Las conclusiones generales que pueden mencionarse de primera instancia son:

- ✓ Se presentaron modelos numéricos con alto desarrollo teórico. En cada una de las partes en que se divide este trabajo podemos ver un gran desarrollo y discusión de las ecuaciones que se han desarrollado a lo largo del mismo.
- ✓ Hemos presentados metodologías que permiten ser aplicadas a diversidad de problemas tanto industriales como académicos. Si bien en este trabajo se presentan ejemplos de carácter académico, las metodologías desarrolladas pueden ser aplicables sobre problemas concretos de aplicación industrial.

En este caso la primera parte de esta tesis fue enfocada en determinar parámetros fractomecánicos y cuyo objeto perseguido fue contar con una metodología apta para ser aplicable a problemas industriales en forma casi directa.

A su vez la segunda parte de este desarrollo, basada en modelos del continuo ofrece un aporte sustancial en el ámbito científico ya que el modelo presentado resulta ser una total innovación y ofrece un enfoque capaz de seguir siendo motivo de estudio, y de aplicación en la simulación de fractura en medios frágiles y cuasi frágiles.

- ✓ Los modelos desarrollados en esta tesis, si bien se desarrollaron en dos dimensiones son fácilmente generalizable a tres ya que su implementación numérica es convencional y no requiere de consideraciones especiales.
- ✓ Se ha logrado tratar el problema de fractura desde un enfoque integral abarcando tanto problemas de evaluación de estabilidad de fisuras (en la primera parte), como la propagación y/o desarrollo de las mismas (segunda parte).

Conclusiones sobre el método de fuerzas configuracionales

En la primera parte de esta tesis se ha utilizado el método de fuerzas configuracionales para obtener los parámetros fractomecánicos clásicos (*Integral-J*, K_I , etc). En este sentido dicha metodología se validó con resultados analíticos y se contrastó con técnicas numéricas más clásicas con es la de integral de dominio.

Las conclusiones más destacadas que arribamos de esta metodología son las que se presentan a continuación:

- ✓ **El método de fuerzas configuracionales demostró suficiente precisión para evaluar parámetros fractomecánicos.** Al abordar la problemática de la evaluación numérica de la tasa de liberación de energía G_c y el factor de intensidad de tensiones K_I , se validaron los resultados obtenidos a través de fuerzas configuracionales, con la técnica integral de contorno considerada como clásica (Moran y Shih, 1987), a su vez también se comparó dichas técnicas numéricas con resultados analíticos.
- ✓ **Puede evaluarse de forma directa todas las componentes del parámetro J .** Es sabido que según el modo de apertura de fisura que se considere, tendremos un parámetro J asociado a éste. La metodología de fuerzas configuracionales al tratarse de una magnitud vectorial, permite evaluar de forma directa cada componente J_1, J_2, J_3 , sin necesidad de recurrir a técnicas especiales como lo hacen otras metodologías numéricas.
- ✓ **Obtención de información adicional en Mecánica de Fractura Lineal Elástica.** Además de obtener el valor de J (módulo de la fuerza principal), la metodología de fuerzas configuracionales ofrece información adicional sobre la discretización y la posible dirección de propagación de la fisura.
- ✓ **Puede generalizarse a materiales no homogéneos y diferentes fenomenologías.** Esta metodología permite generalizar la técnica de evaluar los parámetros fractomecánicos en presencia de distintas fenomenologías y materiales no homogéneos, por ejemplo: problemas térmicos, de fragilización, laminados, etc).
- ✓ **Es posible extender las capacidades del método para obtener parámetros fractomecánicos en medios disipativos.** Se ha generalizado la formulación de fuerzas configuracionales a medios con comportamiento elasto plástico. En este contexto se presentó un modelo que para calcular la *Integral-J* y determinar en cada etapa, la cantidad de energía disponible para la evolución de la fisura y que parte de esta energía es disipada en el proceso de deformación plástica. Su generalización a comportamientos de materiales disipativos, como por ejemplo viscoelasticidad, viscoplasticidad, etc., es inmediata. La validación del modelo de fuerzas configuracionales en medios elásto-plásticos con soluciones analíticas, cierra la primera parte de la tesis

Conclusiones sobre campo de fase

En la segunda parte de esta tesis se desarrollo un modelo de campo de fase para simular la propagación de fisuras en medios sólidos mediante aproximaciones del continuo. Las conclusiones y aportes mas destacadas que podemos mencionar son:

- ✓ **Introducción del campo de fase como un descriptor cinemático.** Contextualizar al campo de fase dentro de la teoría del continuo con microestructura, o materiales micromórficos, permite ver al modelo desde un enfoque mas general. La variable “campo de fase” aparece en este contexto como un descriptor cinemático adicional (Silva Jr. et al., 2013).
- ✓ **Se demostro que no existe bloqueo en la implementación numérica propuesta.** Inicialmente se implementó el modelo de campo de fase en medios con comportamiento lineal elástico utilizando una técnica de elementos finitos con interpolación mixta de campos, desplazamientos u y campo de fase d . Se validó y estudio la convergencia del modelo propuesto para diferentes grados de interpolación, lo que dio como conclusión que éste no presenta bloqueos numéricos debido al carácter mixto de la interpolación propuesta.
- ✓ **Se demostró que el campo de fase tiene la capacidad de predecir la fenomenología real de propagación de fisuras.** Ésto se demostró a través de ensayos de laboratorio. Con este fin se realizaron ensayos utilizando un material casi homogéneo y con comportamiento quasi-frágil, el PPMA (acrílico). El montaje de los experimentos ha sido realizado en forma sencilla, las probetas de PPMA resultaron fáciles de moldear con precisión. Lo que junto a un buen diseño en el dispositivo de ensayo posibilitó obtener una variabilidad muy baja entre especímenes ensayados. A partir de los resultados de laboratorio se puede concluir que el modelo de campo de fase determina una respuesta numérica carga-desplazamiento muy próxima a la que se consigue como promedio de los valores extraídos de los ensayos.
- ✓ **Se generaliza y caracteriza el modelo de campo de fase para capturar fractura frágil en medios elasto plásticos.** Destacamos que las ideas existentes en la literatura sobre esta metodología, se refieren estrictamente al comportamiento lineal de los materiales. Por ello, consideramos que este ítem es novedoso en la literatura. No hemos encontrado precedentes que hayan estudiado el acople del modelo de campo de fase con elasto-plasticidad, involucrando los longitudes características asociadas al campo de fase, cuyas expresiones han sido definidas en esta tesis y presentadas en el capítulo 5.

Podemos decir que cuando el modelo de campo de fase se acopla a la plasticidad, el parámetro de longitud característica ℓ debe ser re-interpretado, como un parámetro del material y no como una longitud característica en si misma.

La combinación de campo de fase y elasto-plasticidad es un teoría valida para simular efectos de fractura frágil en metales. Este tipo de fenómeno se observa típicamente en metales a bajas temperaturas, fractura por clivaje.

- ✓ **En el campo de fase no es necesario definir el camino de evolución de fisura.** Desde el punto de vista de la implementación numérica, esta es una conclusión

importante ya que pudo observarse como el modelo de campo de fase determina en forma automática el camino de evolución de la fisura. Éste puede interceptar arbitrariamente la malla de elementos finitos por lo tanto, no es necesario prescribir previamente el camino de fisura. Este tópico específico del análisis de fractura mediante técnicas de elementos finitos es un aspecto crucial en la actualidad.

- ✓ **Modelo robusto pero costoso.** Podemos afirmar que el modelo es suficientemente robusto por si mismo, en contra parte a esto el costo computacional es relativamente elevado , ya que para proporcionar una buena solución requiere la adopción de mallas de elementos finitos muy refinadas. Los elementos finitos deben ser lo suficientemente pequeños, y regulares (en la zona donde se prevé evolución del daño). Según nuestros estudio este tamaño debe ser del orden $\mathcal{O}(\ell/4)$.

Apéndice A

Breve descripción de las ecuaciones de la mecánica del continuo convencional

A.1. Algunas ecuaciones de balance y continuidad

En los capítulos 1 y 2 hemos definido medios continuos generalizados, donde surge un espacio generalizado de descriptores cinemáticos (Medios multicampos). En este anexo, restringimos la descripción a los medios continuos convencionales. Se entiende por medio continuo convencional, aquellos cuyo único descriptor cinemático es el desplazamiento \mathbf{u} de un punto. Consideremos un medio continuo y un volumen de control Ω como el de la Fig.(A.1). La partícula P atraviesa el volumen de control con una velocidad \mathbf{v} . En el medio continuo existe una magnitud específica, extensiva, por ejemplo la energía interna $u(J/kg)$ tal que en Ω , la cantidad total está dada por:

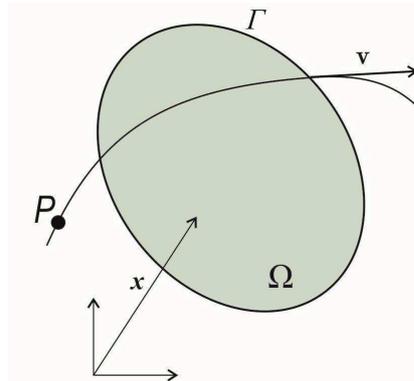


Figura A.1: Volumen de control Ω en un medio continuo, Γ es el contorno del volumen de control. P es una partícula y se representa su trayectoria con el vector velocidad \mathbf{v} .

$$\mathcal{U} = \int_{\Omega} \rho u \, dV; \quad dm = \rho \, dV \quad (\text{A.1})$$

Donde ρ es la densidad; m la masa y \mathcal{U} la energía interna total en (J). Para desarrollar las ecuaciones de este apéndice tomamos, como ejemplo, una magnitud extensiva escalar (u). Sin embargo, todas las expresiones siguientes se generalizan trivialmente si la magnitud extensiva tiene carácter tensorial.

Denotamos con du/dt o alternativamente con \dot{u} a la derivada material de la energía interna, y con $\frac{\partial u}{\partial t}$ a la derivada local. La misma notación utilizamos para cualquier otra magnitud. Ambas derivadas, material y local, están relacionadas entre sí por:

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x \mathbf{u} \quad (\text{A.2})$$

A.1.1. Lema y Teorema de Reynolds

Utilizando la misma magnitud extensiva u , el Lema de Reynolds muestra la siguiente igualdad:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho u \, dV = \int_{\Omega} \rho \frac{du}{dt} \, dV = \int_{\Omega} \rho \dot{u} \, dV \quad (\text{A.3})$$

obviamente, el Lema es válido para cualquier magnitud extensiva. Para derivar este teorema, se considera implícitamente la ecuación de conservación de masa

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \, dV = 0 \quad (\text{A.4})$$

Y el teorema de Reynolds muestra que:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{du}{dt} \, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho u \, dV - \int_{\Gamma} \rho u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (\text{A.5})$$

el último término, es el flujo de la magnitud extensiva a través del contorno Γ . Para un problema estacionario, como el que se analiza en esta tesis, el primer termino de la derecha se anula, y en ese caso particular el Teorema de Reynolds resulta:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{du}{dt} \, dV = - \int_{\Gamma} \rho u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (\text{A.6})$$

A.2. Termodinámica del Continuo

A.2.1. Potencia Mecánica

Para definir la potencia mecánica externa que actúa sobre un volumen de control Ω , se considera que las fuerzas de cuerpo son nulas y las interacción de Ω con el medio se da a través de fuerzas superficiales \mathbf{t}^{ext} . La expresión para la potencia mecánica externa resulta

$$\mathcal{P}^{ext} = \int_{\Gamma} \mathbf{t}^{ext} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad (\text{A.7})$$

A partir del balance de cantidad de movimiento y utilizando el teorema de Green se puede demostrar el teorema de fuerzas vivas aplicado al volumen de control Ω :

$$\mathcal{P}^{ext} = \frac{d\mathcal{K}}{dt} + \mathcal{P}^{int} \quad (\text{A.8})$$

donde \mathcal{K} , es la energía cinética:

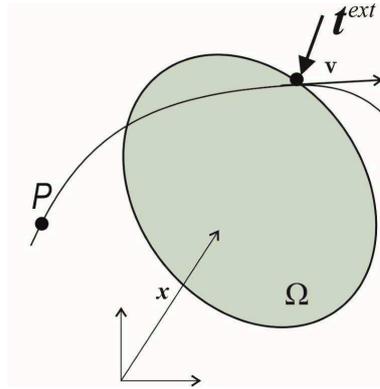


Figura A.2: Volumen de control interactuando mecánicamente con el medio.

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV \quad (\text{A.9})$$

La potencia mecánica interna se define entonces como:

$$\mathcal{P}^{int} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \quad (\text{A.10})$$

A.2.2. Potencia Calorífica

De nuevo, consideramos que en el volumen Ω no existen fuentes internas de calor. Luego, el intercambio total de energía térmica de Ω con el medio está dada por:

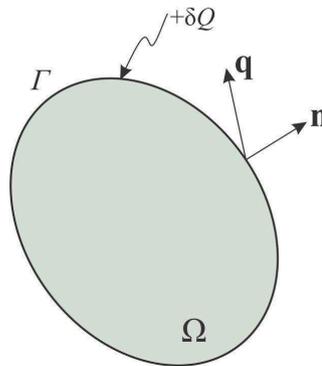


Figura A.3: Volumen de control interactuando térmicamente con el medio.

$$\delta Q = - \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (\text{A.11})$$

el signo negativo significa que el flujo entrante a Ω se considera positivo.

Primer principio de la termodinámica - Balance de energía

El primer principio de la termodinámica, o ecuación de balance de energía, impone para un volumen de control la siguiente igualdad:

$$\dot{U} + \dot{K} = \mathcal{P}^{ext} + \delta Q \quad (\text{A.12})$$

de donde, utilizando el Lema de Reynolds y el teorema de las fuerzas vivas, resulta:

$$\dot{U} = \int_{\Omega} \rho \dot{u} dV = \mathcal{P}^{int} + \delta Q \quad (\text{A.13})$$

Segundo principio de la termodinámica - Flujo de entropía

Consideremos el flujo de entropía Θ_s a través de la superficie Γ :

$$\Theta_s = - \int_{\Gamma} \frac{\delta Q}{\theta} d\Gamma, \quad (\text{A.14})$$

luego, el segundo principio de la termodinámica manifiesta que el incremento total de entropía \dot{S} en Ω , siendo s la entropía específica, debe satisfacer:

$$\dot{S} = \int_{\Omega} \rho \dot{s} dV \geq \int_{\Gamma} \frac{\delta Q}{\theta} d\Gamma = \int_{\Gamma} -\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} d\Gamma = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{\theta} d\Omega \quad (\text{A.15})$$

deonde, en la ultima igualdad hemos aplicado el teorema de Green. Operando con el término de la divergencia, resulta:

$$\int_{\Omega} \left(\rho \dot{s} + \frac{\nabla \mathbf{q}}{\theta} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta^2} \right) d\Omega \geq 0, \quad (\text{A.16})$$

En problemas isotérmicos es mas conveniente trabajar con la transformada de Legendre de u , en vez de con \mathbf{n} . Definamos la transformada de Legendre $\varphi_m(\theta, \varepsilon)$ y que se denomina energía libre específica, como:

$$\varphi_m(\theta, \varepsilon) = \mathbf{u}(s, \varepsilon) - s \theta, \quad (\text{A.17})$$

y tal que $\theta = \frac{\partial u}{\partial s} \geq 0$. Luego:

$$\dot{\varphi}_m + s \dot{\theta} = \dot{u} - \dot{s} \theta \quad (\text{A.18})$$

Reemplazando (A.13) en (A.15) y (A.18) en (A.15); operando se comprueba que dadas las desigualdades:

$$\mathcal{D}_{mech} = \int_{\Omega} \left[-\rho(\dot{\varphi}_m + s\dot{\theta}) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right] dV \geq 0; \quad (\text{A.19})$$

$$\mathcal{D}_{ter} = \int_{\Omega} -\mathbf{q} \cdot \nabla \theta d\Omega \geq 0; \quad (\text{A.20})$$

luego (A.15), es satisfecho para cualquier proceso termodinámico. Constitutivamente se impone que $\mathbf{q} \cdot \nabla \theta \leq 0$, y que:

$$-\rho(\dot{\varphi}_m + s\dot{\theta}) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0 \quad (\text{A.21})$$

se satisfacen punto a punto y para cualquier proceso termodinámico. Por lo que (A.19) y (A.20) se satisfacen globalmente y también para cualquier proceso termodinámico.

Nota: en esta tesis para facilitar la notación y no trasladar los términos de densidad se asume que $\dot{\rho} = 0$ y se reemplaza $\dot{\varphi} = \rho\dot{\varphi}_m$, con lo cual φ es una energía específica por unidad de volumen cuyas unidades son (J/m^3). Observe que dada la suposición $\dot{\rho} = 0$, resulta $\dot{\varphi} = \rho\dot{\varphi}_m$.

Casos especiales

Materiales elásticos, lineales y no-lineales se caracterizan por $\mathcal{D}_{mech} \equiv 0$ para cualquier proceso termodinámico admisible. Luego en un proceso isotérmico, se satisface:

$$\dot{\varphi}_m = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (\text{A.22})$$

Para cuerpos en los que la $\mathcal{K} \simeq 0$, (A.22) resulta:

$$\mathcal{P}^{int} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \mathcal{P}^{ext} = \int_{\Gamma} \mathbf{t}^{ext} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (\text{A.23})$$

Por lo que

$$\dot{\Phi} = \int_{\Omega} \dot{\varphi} dV = \int_{\Gamma} \mathbf{t}^{ext} \cdot \mathbf{v} d\Gamma = \mathcal{P}^{ext} \quad (\text{A.24})$$

siendo Φ la energía interna total contenida en el volumen Ω .

La expresión (A.24) es válida bajo la condición que no exista ningún proceso disipativo en Ω . Típicamente, y como hemos visto a lo largo de esta tesis, una fisura propagante está asociada a un proceso disipativo, lo cual implica que la expresión de balance global (A.24), no se satisface, sino que:

$$\mathcal{P}^{ext} - \dot{\Phi} > 0 \quad (\text{A.25})$$

Apéndice B

Trabajos realizados durante el desarrollo de esta tesis

B.1. Trabajos presentados en congresos

- * **Aplicación del concepto de fuerzas configuracionales en la mecánica de fractura.** Ciarbonetti A., Huespe A.E., Sánchez P.J. *Mecánica Computacional, Vol. XXX.* Pág.(1789-1807).
- * **Modelo de campo de fase para simular fractura frágil.** Ciarbonetti A., Huespe A.E., Sánchez P.J, Milton N. da Silva. *Mecánica Computacional, Vol. XXXI.* Pág.(1655-1670).
- * **Validación Experimental de un modelo de campo de fase, para simular fractura frágil.** Ciarbonetti A., Huespe A.E., Fernando P. Duda, Sánchez P.J. *Mecánica Computacional, Vol. XXXII.* Pág.(1545-1557).

B.2. Trabajos publicados en revistas

- ** **A phase-field model for brittle fracture in elastic-plastic solids.** Fernando P. Duda, Angel A. Ciarbonetti, Pablo J. Sanchez, Alfredo E. Huespe, *International Journal of Plasticity* . Vol. 65. Pag. 269-296. Año 2015

Bibliografía

- T.L. Anderson. *Fracture Mechanics Fundamentals and applications*. CRC Press, 2000.
- E399 ASTM. *Standard Test Method for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials*. ASTM, 1990.
- M. J. Borden, C. V. Verhoosel, M. A. Scott, T. J. R. Hughes, y C. M. Landis. A phase-field description of dynamic brittle fracture. *ICES REPORT 11-14, The Institute for Computational Engineering and Sciences, The University of Texas at Austin, May 2011*, 2011.
- B. Bourdin, G.A. Francfort, y J.J. Marigo. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 48(4):797–826, 2000.
- G. Capriz. *Continua with microstructure*. Springer Verlag, 1989. Berlin.
- M. Da Silva, F.P. Duda, y E. Fried. Sharp-crack limit of a phase-field model brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics*, 2012.
- F.P. Duda, A. Ciarbonetti, P.J. Sánchez, y A.E. Huespe. A phase-field/gradient damage model for brittle fracture in elastic-plastic solids. *International Journal of Plasticity*, 65:269–296, 2015.
- G.A. Francfort y J.J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *J. Mech. Phys. Solids*, 46(8):1319–1342, 1998.
- E. Fried y M.E. Gurtin. Continuum theory of thermally induced phase transitions based on an order parameter. *Phys D*, 68:326–343, 2003.
- D. Gross y T. Seelig. *Fracture Mechanics With an Introduction to Micromechanics*. Springer, 2006.
- M.E. Gurtin, E. Fried, y L. Anand. *The mechanics and thermodynamics of continua*. Cambridge University Press, 2010.
- Morton E. Gurtin. Configurational forces as basic concepts of continuum physics. *Applied Mathematical Sciences*, 137, 2000.
- K. Hellan. *Introduction to fracture mechanics*, tomo 150. 1984.
- J.W. Hutchinson. Plastic stress and strain fields at a crack tip. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16(5):337–342, 1968.

- J.W. Hutchinson. Fundamentals of the phenomenological theory of nonlinear fracture mechanics. *Journal of Applied Mechanics*, 50(4b):1042–1051, 1983.
- A.P. Kfourri. Characteristic crack-tip distances in fracture criteria: Is crack propagation discontinuous? *Eng. Fract. Mech.*, 75(7):1815–1828, 2008.
- A.P. Kfourri y K.J. Miller. Crack separation energy rates in elastic-plastic fracture mechanics. *Proc. of the Inst. of Mech. Eng.*, 190(1):571–584, 1976.
- O. Kolednik, R. Schöngrundner, y F.D. Fisher. A new view on j-integrals in elastic-plastic materials. *International Journal of Fracture*, 187:77–107, 2014.
- C. Kuhn y R. Müller. A continuum phase field model for fracture. *Eng. Fract. Mech.*, 77:3625–3634, 2010.
- P. M. Mariano. Multifield theories in mechanics of solids. *Adv. Appl. Mech.*, 38:1–93, 2002.
- M.N. Silva Jr., F.P. Duda, y E. Fried. Sharp-crack limit of a phase-field model for brittle fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 61(11):2179–2195, 2013.
- R.M. McMeeking. Finite deformation analysis of crack-tip opening in elastic-plastic materials and implications for fracture. *J. Mech. Phys. Solids*, 25:357–381, 1977.
- C. Miehe, M. Hofacker, y F. Welschinger. A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:2765–2778, 2010.
- Pavan A. Moore, D.R. y Williams J.G. *Fracture Mechanics Testing Methods for Polymers, Adhesives and Composites*. ELSEVIER, 2001.
- B. Moran y C. Shih. Crack tip associated domain integrals from momentum and energy balance. *Engineering Fracture Mechanics*, 27:615 – 642, 1987.
- R. Mueller, S. Kolling, y D. Gross. On configurational forces in the context of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:1557–1574, 2002.
- R. Mueller y G.A. Maugin. On material forces and finite element discretizations. *Computer Mechanics*, 29:52–60, 2002.
- T.D. Nguyen, S. Govindjee, P.A. Klein, y H. Gao. A material force method for inelastic fracture mechanics. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 51:91–121, 2005.
- J Oliver y C Agelet. *Mecánica de Medios Continuos*. UPC Barcelona, 2000.
- R. Peerlings, R. de Borst, W. Brekelmans, y J. de Vree. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 39:3391–3403, 1996.
- J. Rice y G.F. Rosengren. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16(1):1–12, 1968.

- R.O. Ritchie, J.F. Knott, y J.R. Rice. On the relationship between critical tensile stress and fracture toughness in mild steel. *J. Mech. Phys. Solids*, 21(6):395–410, 1973.
- N.k. Simha, F.D. Fisher, G.X. Shan, C.R. Chen, y O. Kolednik. J-integral and crack driving force in elastic-plastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:2876–2895, 2008.
- J.C. Simo y T.J. Hughes. *Computational Inelasticity*. New York, NY: Springer New York, 1998.
- P. Steinmann. On configurational forces in the context of the finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 37, 2000.
- A.S. Tetelman y A.J. McEvily. *Fracture of structural materials*, tomo 264. Wiley New York, 1967.
- V. Tvergaard y J.W. Hutchinson. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elasto-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 40:1377–1397, 1992.