Acotaciones con pesos del operador maximal generalizado M_η en espacios de tipo homogéneo.

TESIS DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Tesista: Ana María Kanashiro

Director : Dr. Oscar Salinas

Codirectora : Dra. Gladis Pradolini

Integrantes del Jurado:

Dr. Sheldy Ombrosi

Dra. Liliana Forzani

Dra. Ana Bernardis

mayo de 2009

Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral.
Santiago del Estero 2829 – 3000 Santa Fe - Argentina.
akanashi@fiq.unl.edu.ar

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.
Güemes 3450 – 3000 Santa Fe - Argentina.
salinas@santafe-conicet.gov.ar
gpradolini@gmail.com

Índice General

Resumen

Para una función de Young η, definimos el operador maximal generalizado M_η y estudiamos estimaciones modulares y en norma con y sin pesos desde los espacios de Orlicz $L^\phi(X, w)$ en $L^\psi(X, w)$, en el contexto de los espacios de tipo homogéneo. Demostramos que dichas estimaciones son todas equivalentes a una condición de tipo Dini que relaciona al par (ϕ, ψ) con η una función de Young doblante. En particular obtendremos una generalización de un resultado de C. Pérez y R. Wheeden probado con $\phi(t) = \psi(t) = t^p$ en [PW].

En una segunda instancia, caracterizamos a los pesos A_1 de Muckenhoupt relacionados con estas estimaciones y la condición de Dini, extendiendo y mejorando los resultados de H. Kita contenidos en [K1] y [K2].

Para la demostración de los resultados planteados fue necesario por un lado, obtener versiones para M_η de desigualdades de tipo débil y débil inversa y su relación con la clase de pesos A_1 de Muckenhoupt. Por otro lado, definimos y caracterizamos una clase de pesos, que involucra a η, denotada por B_ϕ^η, que en un principio generaliza a la clase B_ϕ estudiada en $\mathbb{R}^n$ por Bagby en [B] pero que finalmente resultan ser coincidentes.

Introducción

Para una función de Young η, el operador maximal generalizado M_η se define como

$$M_\eta f(x) = \sup_{x\in B} \|f\|_{\eta,B}$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas B que contienen a x y donde

$$\|f\|_{\eta,B} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \frac{1}{\mu(B)} \int_B \eta(|f|/\lambda) d\mu \leq 1\}.$$

Este operador, contiene como casos particulares a los ya conocidos. Por ejemplo, si $\eta(t) = t^r$ con $r \geq 1$, resulta

$$\|f\|_{\eta,B} = \left[\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f|^r d\mu\right]^{1/r}$$

y se tiene a la maximal-r (M_r) cuando $r > 1$ o el operador maximal de Hardy-Littlewood (M) si $r = 1$.

El aporte fundamental de esta tesis es la obtención -en el contexto de los espacios de tipo homogéneo- de acotaciones para el operador maximal generalizado y luego, como consecuencia de esto, una nueva caracterización para la clase de pesos A_1 de Muckenhoupt.

Para su realización partimos, de dos trabajos previos, por un lado (I) el perteneciente a C. Pérez y R. Wheeden [PW] y por otro (II) el de H. Kita [K2]. Así en

(I) C. Perez y R. Wheeden definen una clase de funciones de Young llamada B_p, que contiene a aquellas para las cuales existe una constante

$c > 0$ y satisfacen

$$\int_c^\infty \frac{\eta(t)}{t^p}\frac{dt}{t} < \infty.$$

Como lo afirman los autores, la relevancia de esta condición está dada por el hecho de permitir estimaciones modulares con pesos para un operador maximal definido en términos de una función de Young perteneciente a B_p. Dichas estimaciones para el operador maximal, que permiten una caracterización de la clase B_p, se resumen en el teorema 5.1 de [PW]:

Sea S un espacio de tipo homogéneo de medida infinita y con anillos no vacíos, sea $1 < p < \infty$ y sea η una función de Young doblante. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

(0.1) $\eta \in B_p$

(0.2) *Existe una constante positiva C tal que*

$$\int_S M_\eta f(x)^p d\mu(x) \leq C \int_S f(x)^p d\mu(x)$$

para toda f positiva.

(0.3) *Existe una constante positiva C tal que*

$$\int_S M_\eta f(x)^p w(x) d\mu(x) \leq C \int_S f(x)^p Mw(x) d\mu(x)$$

para toda f y w positiva, donde M es la maximal de Hardy-Littlewood.

(0.4) *Existe una constante positiva C tal que*

$$\int_S Mf(x)^p \frac{w(x)}{[M_{\tilde{\eta}}(u^{1/p})(x)]^p} d\mu(x) \leq C \int_S f(x)^p \frac{Mw(x)}{u(x)} d\mu(x)$$

para toda f, w, y u positiva, donde M como antes.

Es necesario subrayar que este mismo teorema pero sin la restricción de anillos no vacíos fue probado por G.Pradolini y O. Salinas en [PS].

Como mencionáramos previamente, en el segundo trabajo (II) H. Kita estudia en el contexto de $\mathbb{R}^n$ a la maximal iterada $M^k f(x) = M(M^{k-1}f)(x)$, para $k \geq 2$. Considerando funciones ϕ y ψ definidas sobre $[0, \infty)$ que se anulan en cero y con derivada continua no negativa a y b respectivamente, en el teorema 2.1 de [K2] el autor demuestra que:
Si $w \in A_1$ entonces la condición
(i) $\exists C / \int_0^t (log(t/s))^{k-1} a(s)/s ds \leq Cb(Ct)$, con $t > 0$
implica
(ii) $\exists C / \int_{\mathbb{R}^n} \phi(M^k f(x)) w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \psi(C|f(x)|) w(x) dx$, para toda $f \in L^\psi(w, \mathbb{R}^n)$.
En particular cuando $k = 1$ las condiciones (i) y (ii) toman las formas siguientes:
(i') $\int_0^t a(s)/s ds \leq Cb(Ct)$, con $t > 0$.
(ii') $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(Mf(x)) w(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \psi(C|f(x)|) w(x) dx$,
para toda $f \in L^\psi(w, \mathbb{R}^n)$.
Posteriormente en el teorema 2.3 de [K2], H. Kita prueba que
$w \in A_1$ sí y sólo sí (i') entonces (ii') .
Como lo adelantáramos en párrafos anteriores nuestro objetivo consiste en probar la capacidad del operador maximal M_η para transformar los espacios de Orlicz $L^\psi(X)$ en $L^\phi(X)$ -en espacios de tipo homogéneo- cuando el par (ϕ, ψ) verifica una condición de tipo Dini como

$$\int_0^{2t} \frac{a(s)}{s} \eta'(t/s) ds \leq Cb(Ct),$$

para todo $t > 0$. Notaremos que esta condición contiene a la clase B_p en donde los $L^p(X)$ se han cambiado por los nuevos espacios de Orlicz. Para ello vamos a probar, bajo determinadas hipótesis, la equivalencia existente entre las siguientes afirmaciones

(0.5) *(Condición de Dini) Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_0^{2t} \frac{a(s)}{s} \eta' \left(\frac{t}{s} \right) ds \leq Cb(Ct)$$

es cierta para todo t positivo.

(0.6) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_X \phi(M_\eta f(x)) w(x) d\mu(x) \leq C \int_X \psi(|f(x)|) Mw(x) d\mu(x)$$

es cierta para toda f positiva y cada peso w.

(0.7) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\|M_\eta f\|_{\phi,w} \leq C \|f\|_{\psi,Mw}$$

es cierta para toda f positiva y cada peso w.

(0.8) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_X \phi(M_\eta f(x)) d\mu(x) \leq C \int_X \psi(|f(x)|) d\mu(x)$$

es cierta para toda f positiva.

(0.9) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_X \phi \left(\frac{Mf(x)}{M_{\tilde{\eta}}(\psi^{-1}(u(x)))} \right) w(x) d\mu(x) \leq C \int_X \psi \left(\frac{f(x)}{\psi^{-1}(u(x))} \right) Mw(x) d\mu(x)$$

es cierta para toda f positiva y todos los pesos w y u.

(0.10) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\|M_\eta f\|_\phi \leq C \|f\|_\psi$$

es cierta para toda f positiva.

Cabe aclarar que, a efectos de simplificar, utilizamos la misma letra C para indicar constantes que podrían ser distintas.

Particularmente veremos, por un lado, que en espacios de medida infinita y que contengan al menos un punto de medida nula, todas las afimaciones de (0.5) a (0.10) son equivalentes pero que si eliminamos la condición de existencia del punto no atómico siguen siendo equivalentes (0.5) a (0.9). Este caso generaliza el teorema 5.1 de [PW]. Por otro lado, probaremos que si existe en el espacio con medida finita algun punto de medida nula se mantienen las equivalencias entre (0.5) a (0.8), mientras que en espacios puramente atómicos y de medida finita la acotación modular no implica la condición de Dini.

También realizaremos un análisis de la condición A_1 de Muckenhoupt en relación con las acotaciones modulares pesadas que satisfacen los operadores M_η. Más precisamente, veremos que si $w \in A_1$, luego la condición de Dini (0.5) es equivalente a:
Existe una constante positiva C tal que

$$\int_X \phi(M_\eta f(x))w(x)d\mu(x) \leq C \int_X \psi(|f(x)|)w(x)d\mu(x) \tag{0.11}$$

es cierta para toda f positiva.
Además probaremos que w es un peso tal que (0.5) implica (0.11) es condición suficiente para $w \in A_1$.
La primera implicación extiende a los espacios de tipo homogéneo el resultado parcial probado por H. Kita en $\mathbb{R}^n$ para M^k en [K2], además mejora un resultado parcial probado para M en [K1].
La segunda implicación es un cierto recíproco de la primera, y es una extensión a los espacios de tipo homogéneo del teorema 2.3 en [K2].
Como consecuencia de los resultados anteriores podemos afirmar que en cualquier X es válida la siguiente caracterización
(0.5)$\Rightarrow$(0.11)$\Longleftrightarrow w \in A_1$.
Para obtener los resultados mencionados es necesario probar previamente algunas desigualdades débiles y débiles de tipo inversa para los operadores maximales generalizados y su relación con los pesos A_1 de

Muckenhoupt. Además partiendo de lo realizado por R. Bagby en [B] definimos y caracterizamos una clase de pesos que cumplen

$$w(\{x \in X : M_\eta f(x) > t\}) \leq \int_X \phi \circ \eta \left(C \frac{|f(x)|}{t} \right) w(x) d\mu(x)$$

que llamamos B_ϕ^η. Demostramos además que B_ϕ^η coincide con la B_ϕ definida por Bagby para la maximal de Hardy-Littlewood en el contexto de $\mathbb{R}^n$ en [B].

A modo de cierre para esta Introducción, enunciaremos brevemente las tres grandes instancias que conforman esta tesis:

(a)En el capítulo 1 mostramos las definiciones y resultados preliminares en espacios de tipo homogéneo y de Orlicz que nos permitirán enunciar y probar los resultados del capítulo 2 y 3.

(b)En el capítulo 2 se prueban desigualdades débiles, débiles inversas y débiles con peso para los operadores maximales generalizados y su relación con las clases de pesos A_1 y definimos a la clase de pesos B_ϕ^η.

(c) Finalmente para dichos operadores, en el capítulo 3, presentamos: en primer lugar, acotaciones modulares y en norma pesadas y su equivalencia con una condición de Dini en espacios tanto de medida infinita como finita y en segundo lugar, como consecuencia de este resultado obtendremos una caracterización para la clase de pesos A_1 de Muckenhoupt.

CAPITULO 1

Preliminares

En este capítulo se darán las definiciones y resultados preliminares relacionados con los espacios de tipo homogéneo y los espacios de Orlicz, que conforman el contexto en el cual desarrollaremos los teoremas que constituyen el aporte de esta tesis.

Espacios de tipo homogéneo

Dado un conjunto X, diremos que una función $d : X\text{x}X \to [0,\infty)$ es una *quasi-distancia* sobre X si satisface las siguientes condiciones:

i) para cada x e y en X, $d(x,y) \geq 0$, y $d(x,y) = 0$ sí y sólo si $x = y$,

ii) para cada x e y en X, $d(x,y) = d(y,x)$,

iii) existe una constante $K > 1$ tal que

$$d(x,y) \leq K(d(x,z) + d(z,y)) \tag{1.1}$$

para cada $x,\ y$ y z en X.

Sea $B(x,r) = \{y : d(x,y) < r\}$ la bola con centro en $x \in X$ y radio $r > 0$ asociada a la quasi-distancia d. Sea μ una *medida* positiva sobre la σ-algebra de subconjuntos de X generada por las d-bolas $B(x,r)$. Diremos que μ satisface una propiedad de duplicación si existe una constante A tal que la desigualdad

$$(1.2) \qquad 0 < \mu(B(x, 2Kr)) \leq A\mu(B(x, r)) < \infty$$

es cierta para cada bola $B(x, r) \subset X$.

Decimos que μ es una *medida regular* si para cada conjunto medible E y para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto abierto G tal que $E \subset G$ y $\mu(G - E) < \epsilon$.

Definición 1.3. Diremos que una estructura (X, d, μ), con una quasi-distancia d y una medida μ que satisface una propiedad de duplicación es un *espacio de tipo homogéneo.*

Observación 1.4. Para nuestros resultados supondremos de ahora en más que el espacio (X, d, μ) es regular en medida. Los números K y A en (1.1) y (1.2) serán llamdos constantes del espacio.

Una quasi-distancia d es equivalente a la quasi-distancia d' sobre X, si existen constantes C_1 y C_2 tales que $C_1 d'(x, y) \leq d(x, y) \leq C_2 d'(x, y)$. En el espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) las bolas B asociadas a la quasi-distancia d no son conjuntos necesariamente abiertos, pero el siguiente resultado de Macías y Segovia ([MS]) demuestra la existencia de una quasi-distancia d' equivalente a d tal que las bolas asociadas a d' resultan conjuntos abiertos.

Teorema 1.5. *Sea d una quasi-distancia sobre un conjunto X. Entonces existe una quasi-distancia d' sobre X, una constante finita C y un número $0 < \theta < 1$, tal que d' es equivalente a d y, para cada x, x' e*

y en X la siguiente desigualdad

$$(1.6) \qquad |d'(x,y) - d'(x',y)| \leq Cd'(x,x')^{\theta}(d'(x,y) + d'(x',y))^{1-\theta}$$

es cierta. Más aún, las bolas correspondientes a la quasi-distancia d' son conjuntos abiertos en la topología inducida por d'.

Observación 1.7. Con esto en mente, supondremos de aquí en adelante que la quasi-distancia d es continua y que las bolas son conjuntos abiertos. Estas propiedades son las que nos aseguran la medibilidad de los operadores que trataremos más adelante.

En este contexto comenzamos considerando la función $\delta : X\text{x}X \to [0,\infty)$ introducida por Macías, Segovia y Torrea en [MST] y definida por

$$(1.8) \qquad \delta(x,y) = \begin{cases} \mu(B(x,d(x,y))) & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

que cumple

(i) $\delta(x,y) \geq 0$ y $\delta(x,y) = 0$ sí y sólo sí $x = y$,

(ii) $\delta(x,y) \leq A\delta(y,x)$ y

(iii) $\delta(x,y) \leq A^2(\delta(x,z) + \delta(y,z))$ para cada x, y y z en X, donde A es la constante en (1.2).

Observemos que δ no satisface necesariamente la condición de simetría como d. Sin embargo es equivalente a la quasi-distancia definida por la función

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\mu(B(x,d(x,y))) + \mu(B(y,d(x,y)))] & \text{if} \quad x \neq y \\ 0 & \text{if} \quad x = y \end{cases}$$

Más aún, las propiedades que cumple δ implican la existencia de una constante positiva D tal que vale la siguiente condición de duplicación para μ

$$(1.9) \qquad 0 < \mu(B_\delta(x, 2Kr)) \leq D\mu(B_\delta(x, r)) < \infty,$$

donde $B_\delta(x, r) = \{y \in X : \delta(x, y) < r\}$.

Además en [MST] se demuestra que δ cumple las siguientes propiedades

(i) $B_\delta(x, r) = \{x\}$, si $0 < r < \mu(\{x\})$,

(ii) $\mu(B_\delta(x, r)) \leq r$, si $\mu(\{x\}) \leq r$,

(iii) $B_\delta(x, r) = X$, si $\mu(X) \leq r$ y

(iv) $A^{-2}r \leq \mu(B_\delta(x, r))$, si $r < \mu(X)$.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el siguiente lema, que fue probado por Pradolini y Salinas en [PS].

Lema 1.10. *Si* $\mu(X) = \infty$ *existen dos constantes* C_o *y* C_1*, que dependen sólo de las constantes del espacio* (X, d, μ)*, tal que*

$$\mu(B_\delta(z, C_oR) - B_\delta(z, R)) \geq C_1R$$

para cada z *en* X *y cada* $R > \mu(\{z\})/2A^2$*, donde* A *es la constante en* (1.2).

Espacios de Orlicz

Definición 1.11. Una función ϕ, no negativa y creciente definida en $[0, \infty)$ es una *función de Young* si es convexa y satisface $\phi(0) = 0$, $\phi(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

A cada función de Young ϕ, podemos asociarle otra función convexa $\tilde{\phi}$ con propiedades similares, definida por

$$\tilde{\phi}(y) = \sup_{x \geq 0}\{xy - \phi(x)\}, \tag{1.12}$$

para cada y en $[0, \infty)$. Esta función es la función de Young complementaria asociada a ϕ y verifica

$$t \leq \phi^{-1}(t)\tilde{\phi}^{-1}(t) \leq 2t, \tag{1.13}$$

para todo $t > 0$, (ver [RR]).

Definición 1.14. Una función de Young ϕ se dice *submultiplicativa* si

$$\phi(st) \leq \phi(s)\phi(t), \tag{1.15}$$

para cada número positivo t y s.

Si ϕ es submultiplicativa, claramente es de clase Δ_2, o sea, existe una constante positiva C tal que

$$\phi(2s) \leq C\phi(s), \tag{1.16}$$

y en particular esto implica la equivalencia entre $\phi'(t)$ y $\phi(t)/t$, esto es

$$\phi'(t) \sim \phi(t)/t. \tag{1.17}$$

Asociada a cada función ϕ, el espacio de Orlicz $L^\phi(X)$, es la clase de todas la funciones medibles sobre X tales que $\int_X \phi(C|f|) < \infty$ para alguna constante positiva C(ver [RR]).

El espacio $L^\phi(X)$ es un espacio de Banach con la norma Luxemburgo definida por

$$\|f\|_\phi = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \int_X \phi(|f(y)|/\lambda)\, d\mu(y) \leq 1\}. \tag{1.18}$$

Una generalización de la desigualdad de Hölder en el contexto de los espacio de Orlicz está dada por

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_\phi \, \|g\|_{\tilde{\phi}}. \tag{1.19}$$

Las funciones de Young complementarias pueden relacionarse también a través de una tercera función, como muestra el resultado enunciado a continuación

Lema 1.20. *Sean ϕ y $\bar{\phi}$ funciones de Young complementarias, existe una función g sobre $[0, \infty)$ continua y monótona que verifica las siguientes condiciones*

$$\phi(g(t)) \leq tg(t) \leq \phi(2g(t)) \tag{1.21}$$

$$2\tilde{\phi}(t/2) \leq tg(t) \leq \tilde{\phi}(2t) \tag{1.22}$$

La demostración de este lema fue realizada por R. Bagby en [B].

CAPITULO 2

Desigualdades débiles y los operadores maximales generalizados.

Vamos a definir a continuación ciertos operadores maximales en el contexto de un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ). Veremos en primer lugar que estos operadores, que generalizan a la maximal clásica de Hardy-Littlewood, satisfacen cierta desigualdad de tipo débil con peso y además que esto implica una equivalencia con la clase de pesos A_1 de Muckenhoupt, analogamente a lo que sucede en $\mathbb{R}^n$. En una segunda instancia definimos una clase de pesos que llamaremos B_ϕ^η que generaliza a la clase B_ϕ estudiada en $\mathbb{R}^n$ por Bagby en relación con la maximal de Hardy- Littlewood en [B] y que nos lleva a una caracterización para dicha clase. Además veremos que los operadores maximales generalizados también satisfacen desigualdades de tipo débil inversa.

Desigualdades débiles con peso y los pesos A_1

En lo que sigue, la terna (X, d, μ) será siempre un espacio de tipo homogéneo en el sentido de lo definido en el capítulo 1.

Definición 2.1. Una función w definida en X y positiva en casi todo punto se dice que es una función peso si es localmente integrable respecto de la medida μ.

Definición 2.2. Decimos que una función peso w pertenece a la clase A_1 de Muckenhoupt si existe una constante positiva C independiente de la bola B tal que la desigualdad

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B w(y)d\mu(y) \leq C\ essinf_{x\in B}w(x) \tag{2.3}$$

es cierta para toda B.

Observación 2.4. Notemos que la desigualdad anterior también se puede escribir como

$$\frac{w(B)}{\mu(B)} \leq Cw(x), \tag{2.5}$$

para casi todo $x \in B$, donde $w(B) = \int_B w(y)d\mu(y)$.

Definición 2.6. Asociado a una función de Young η el operador maximal generalizado M_η se define como

$$M_\eta f(x) = \sup_{B\ni x} \|f\|_{\eta,B} \tag{2.7}$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas B de X que contienen a x y

$$\|f\|_{\eta,B} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \frac{1}{\mu(B)}\int_B \eta(|f|/\lambda)d\mu \leq 1\}. \tag{2.8}$$

Observación 2.9. Notar por ejemplo que, si $\eta(t) = t^r$ con $r \geq 1$, resulta

$$\|f\|_{\eta,B} = \left[\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f|^r d\mu\right]^{1/r}.$$

Así se tiene a la conocida maximal-r (M_r) cuando $r > 1$ o el operador maximal de Hardy-Littlewood (M) si $r = 1$.

A continuación vamos a demostrar que el operador maximal generalizado M_η satisface una desigualdad de tipo débil con peso que involucra a la función η.

Teorema 2.10. *Sea* (X, d, μ) *un espacio de tipo homogéneo y sean* η *una función de Young y* w *un peso. Entonces existe una constante positiva* C *tal que el operador maximal* M_η *satisface la siguiente desigualdad*

$$w(\{x \in X : M_\eta f(x) > t\}) \leq C \int_X \eta\left(\frac{f(x)}{t}\right) Mw(x)d\mu(x) \tag{2.11}$$

para todo t *positivo, para toda* f *no negativa y para todo peso* w*, siendo* M *el operador maximal de Hardy-Littlewood.*

Para probar el teorema se necesita un lema de cubrimiento que enunciamos a continuación y cuya demostración puede verse en [CW].

Lema 2.12. *Sea* E *un subconjunto acotado de* X*. Sea* $\{B(x, r(x)) : x \in E\}$ *un cubrimiento de* E *por bolas centradas en cada punto de* E*. Entonces existe una sucesión de puntos* $\{x_i\}_{i \in N} \subset E$ *tal que*
(i) $B(x_i, r(x_i)) \bigcap B(x_j, r(x_j)) = \emptyset$ *si* $i \neq j$*,*
(ii) $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, 4Kr(x_i))$*, siendo* K *la constante de la quasi-distancia en* (1.1)*.*

Estamos ya en condiciones de demostrar el teorema **2.10**
Demostración de **2.10**:
Sea $\tilde{M}_\eta$ la maximal centrada definida por

$$\tilde{M}_\eta f(x) = \sup_{r>0} \|f\|_{\eta, B(x,r)}$$

Es fácil ver que se verifica la siguiente relación

$$\tilde{M}_\eta f(x) \leq M_\eta f(x) \leq C_o \tilde{M}_\eta f(x) \tag{2.13}$$

con $C_o > 0$.
Para f no negativa y $t > 0$, consideramos el siguiente conjunto

$$E_t = \{x \in X : M_\eta f(x) > t\}$$

Supongamos en primer lugar que E_t es acotado. Si $E_t = \emptyset$ hay nada que probar. Supongamos que E_t es no vacío, por (2.13) se tiene

$$E_t \subset \{x \in X : \tilde{M}_\eta f(x) > \frac{t}{C_o}\}$$

Luego si $x \in E_t$ existe una bola $B(x, r(x))$ tal que

$$\|f\|_{\eta.B(x,r(x))} > \frac{t}{C_o}$$

La familia $\{B(x, r(x)), x \in E_t\}$ cubre a E_t, luego como E_t es acotado, por lema **2.12** existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset E_t$ tal que las bolas $B_i = B(x_i, r(x_i))$ son disjuntas y verifican

$$E_t \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, 4Kr(x_i)) \tag{2.14}$$

Además se tiene que $\|f\|_{\eta,B_i} > \frac{t}{C_o}$, o bien

$$\|C_o t^{-1} f\|_{\eta,B_i} > 1,$$

lo que implica que

$$1 < \frac{1}{\mu(B_i)} \int_{B_i} \eta\left(C_o \frac{f(x)}{t}\right) d\mu(x).$$

Así de (2.14) y la última desigualdad se tiene que

$$\begin{aligned} w(E_t) &\leq \sum_i w(\tilde{B}_i) \\ &\leq \sum_i \frac{w(\tilde{B}_i)}{\mu(B_i)} \int_{B_i} \eta\left(C_o \frac{f(x)}{t}\right) d\mu(x) \end{aligned}$$

con $\tilde{B}_i = B(x_i, 4Kr(x_i))$. Entonces dado que la medida μ satisface una propiedad de duplicación se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{w(\tilde{B}_i)}{\mu(B_i)} &= \frac{w(\tilde{B}_i)}{\mu(\tilde{B}_i)} \frac{\mu(\tilde{B}_i)}{\mu(B_i)} \\ &\leq C \frac{w(\tilde{B}_i)}{\mu(\tilde{B}_i)} \end{aligned}$$

$$(2.15) \qquad \leq \quad CMw(x)$$

para casi todo $x \in B$ y dado que las las B_i son disjuntas resulta

$$\begin{aligned} w(E_t) &\leq C\sum_i \frac{w(\tilde{B}_i)}{\mu(\tilde{B}_i)} \int_{B_i} \eta\left(C_o\frac{f(x)}{t}\right) d\mu(x) \\ &\leq C\sum_i \int_{B_i} \eta\left(C_o\frac{f(x)}{t}\right) Mw(x)d\mu(x) \\ &\leq C\int_X \eta\left(C_o\frac{f(x)}{t}\right) Mw(x)d\mu(x) \end{aligned}$$

donde C es la constante en (2.15) y tenemos probado (2.11) en el caso en que E_t es acotado.

Para el caso en que el conjunto E_t es no acotado se toma una bola B_0 tal que $E_t \bigcap B_0 \neq \emptyset$, del mismo modo que antes se puede probar que

$$w\{E_t \bigcap B_0\} \leq C\int_X \eta\left(C_o\frac{f(x)}{t}\right) Mw(x)d\mu(x)$$

y haciendo tender el radio de B_0 a infinito se obtiene la validez de **2.10** en general. ($\square$)

Como consecuencia del tipo débil de M_η resultan dos corolarios.

Corolario 2.16. *En las hipótesis del teorema* **2.10** *existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

(2.17)

$$w(\{x \in X : M_\eta f(x) > 2t\}) \leq C\int_{\{x\in X: f(x)>t\}} \eta\left(\frac{f(x)}{t}\right) Mw(x)d\mu(x)$$

es válida para todo $t > 0$, para toda f no negativa y todo peso w.

Demostración:

Dado $t > 0$, descomponemos a f como suma de dos funciones $f_1 + f_2$ siendo $f_1 = f\chi_{\{x\in X: f(x)\leq t\}}$. Ya que el operador M_η es sublineal se tiene que

$$M_\eta f \leq M_\eta f_1 + M_\eta f_2 \leq t + M_\eta f_2.$$

Usando esta estimación y aplicando el teorema **2.10** a f_2 se tiene

$$\begin{aligned} w\{x \in X : M_\eta f(x) > 2t\} &\leq w\{x \in X : M_\eta f_2(x) > t\} \\ &\leq C \int_X \eta\left(\frac{f_2(x)}{t}\right) Mw(x)d\mu(x) \\ &\leq C \int_{\{x\in X: f(x)>t\}} \eta\left(\frac{f(x)}{t}\right) Mw(x)d\mu(x), \end{aligned}$$

como queríamos probar. ($\Box$)

Corolario 2.18. *En las hipótesis del teorema* **2.10** *existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

(2.19)
$$w(\{x \in X : M_\eta f(x) > 2t\}) \leq C \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} Mw(\{x \in X : \frac{f(x)}{t} > s\})\eta'(s)ds$$

es válida para todo $t > 0$, para toda f no negativa y para todo peso w.

Demostración:

En vista del corolario anterior basta ver la validez de la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} &\int_{\{x\in X: f(x)>t\}} \eta(f(x)/t) Mw(x)d\mu(x) \\ &\leq C \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} Mw\left(\left\{x \in X : \frac{f(x)}{t} > s\right\}\right)\eta'(s)ds \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} &\int_{\{x\in X: f(x)>t\}} \eta(f(x)/t)\, Mw(x)d\mu(x) \\ &= \int_0^{\infty} Mw\left(\left\{x \in X : f(x) > t \wedge \frac{f(x)}{t} > s\right\}\right)\eta'(s)ds \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

donde

$$I_1 = \int_0^1 Mw\left(\left\{x \in X : f(x) > t \wedge \frac{f(x)}{t} > s\right\}\right)\eta'(s)ds$$

e

$$I_2 = \int_1^\infty Mw\left(\left\{x \in X : f(x) > t \wedge \frac{f(x)}{t} > s\right\}\right) \eta'(s)ds$$

Estimemos primero I_1. Como $0 < s < 1$ entonces $0 < ts < t$ y se tiene

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_0^1 Mw(\{x \in X : f(x) > t\})\, \eta'(s)ds \\
&\leq CMw(\{x \in X : f(x) > t\}) \\
&\leq C\int_{\frac{1}{2}}^1 Mw\left(\left\{x \in X : \frac{f(x)}{t} > s\right\}\right) \eta'(s)ds \\
&\leq C\int_{\frac{1}{2}}^\infty Mw\left(\left\{x \in X : \frac{f(x)}{t} > s\right\}\right) \eta'(s)ds.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_1^\infty Mw\left(\left\{x \in X : f(x) > t \wedge \frac{f(x)}{t} > s\right\}\right) \eta'(s)ds \\
&\leq \int_1^\infty Mw\left(\left\{x \in X : \frac{f(x)}{t} > s\right\}\right) \eta'(s)ds \\
&\leq \int_{\frac{1}{2}}^\infty Mw\left(\left\{x \in X : \frac{f(x)}{t} > s\right\}\right) \eta'(s)ds.
\end{aligned}$$

Con estas dos estimaciones queda probada la desigualdad (2.19) y por lo tanto el corolario **2.18** . ($\square$)

Es conocido que, en el caso de la maximal de Hardy-Littlewood, el tipo (1,1)-débil con un peso es equivalente a que el peso sea de clase A_1. Este resultado, como veremos, se mantiene para la maximal generalizada, cuando se considera el tipo débil asociado a esta maximal.

Teorema 2.21. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y w un peso. Son equivalentes las siguientes afirmaciones*

(2.22) $\quad w \in A_1$

(2.23) *Existe una constante positiva C tal que el operador maximal M_η satisface*

$$w(\{x \in X : M_\eta f(x) > t\}) \leq C \int_X \eta\left(\frac{f(x)}{t}\right) w(x)d\mu(x) \tag{2.24}$$

para todo t positivo y para toda f no negativa ,

Demostración:.

En primer lugar supongamos que $w \in A_1$. Entonces, dado que $w \in A_1$ tenemos que $Mw \leq Cw$ para casi todo x. Luego la validez de (2.23) es inmediata a partir de (2.11).

Veamos ahora la implicación recíproca. Sea f una función no negativa y B una bola. Sea t un número positivo tal que $0 < t < \|f\|_{\eta,B}$. Entonces $B \subset \{x \in X : M_\eta(f\chi_B)(x) > t\}$. Luego de la desigualdad (2.24) se tiene que

$$\begin{aligned} w(B) &\leq w\{x \in X : M_\eta f\chi_B(x) > t\} \\ &\leq C \int_B \eta\left(\frac{f(x)}{t}\right) w(x)d\mu(x) \end{aligned}$$

Sea S un subconjunto medible de B y la función $f = \chi_S$. Aplicando la desigualdad anterior a f obtenemos

$$\begin{aligned} w(B) &\leq C \int_{B \bigcap S} \eta\left(\frac{1}{t}\right) w(x)d\mu(x) \\ &= Cw(S)\eta\left(\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

Si hacemos ahora t tender a $\|\chi_S\|_{\eta,B}$, como η es continua se tiene

$$w(B) \leq Cw(S)\eta\left(\frac{1}{\|\chi_S\|_{\eta,B}}\right). \tag{2.25}$$

Además es facil ver que

$$\|\chi_S\|_{\eta,B} \geq 1/\eta^{-1}(\mu(B)/\mu(S)). \tag{2.26}$$

En efecto, por definición del promedio de tipo Luxemburgo tenemos

$$\|\chi_S\|_{\eta,B} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : (\frac{1}{\mu(B)}\int_{B\bigcap S}\eta(1/\lambda)d\mu \leq 1\}$$

Ahora bien $(\mu(B))^{-1}\eta(1/\lambda)\mu(S) \leq 1$ sí y sólo sí $\lambda \geq 1/\eta^{-1}(\mu(B)/\mu(S))$, con lo que (2.26) queda probado. De (2.25) y (2.26) se tiene que

$$\frac{w(B)}{\mu(B)} \leq C\frac{w(S)}{\mu(S)}.$$

Sea $a = essinf_{x\in B}w(x)$. Luego para cada $\epsilon > 0$, existe $S_\epsilon \subset B$ tal que $\mu(S_\epsilon) > 0$ y $w(x) \leq a+\epsilon$, para todo $x \in S_\epsilon$. Entonces, tomando $S = S_\epsilon$ en la desigualdad anterior, resulta

$$\begin{aligned}\frac{w(B)}{\mu(B)} &\leq C\frac{w(S_\epsilon)}{\mu(S_\epsilon)} \\ &= C\frac{1}{\mu(S_\epsilon)}\int_{S_\epsilon} w(x)d\mu(x) \\ &\leq C(a+\epsilon)\end{aligned}$$

para todo $\epsilon > 0$. Así

$$\frac{w(B)}{\mu(B)} \leq Cinf_{x\in B}w(x),$$

que es (2.22) y el teorema **2.21** queda demostrado. ($\Box$)

Antes de finalizar esta sección veremos una desigualdad de tipo débil inversa que verifica el operador maximal generalizado. Esta desigualdad nos permitirá probar un resultado central del próximo capítulo.

Lema 2.27. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y sea f una función no negativa localmente integrable. Luego existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

(2.28)

$$\mu(\{x \in X : M_\eta f(x) > \lambda\}) \geq C\int_{\{x\in X:\,\eta\left(\frac{f(x)}{\lambda}\right)>1\}}\eta\left(\frac{f(x)}{\lambda}\right)d\mu(x)$$

es cierta para todo $\lambda > \|f\|_{\eta,X}$.

Para probar el lema necesitamos una descomposición de Calderón-Zygmund relacionada a las normas Orlicz. Su demostración puede encontrarse en [PS]. Cabe mencionar que las técnicas utilizadas fueron introducidas por H. Aimar en [A] para el caso $\eta(t) = t$.

Lema 2.29. *Sea* (X, d, μ) *un espacio de tipo homogéneo. Sea* $f \geq 0$ *una función integrable sobre* X*. Entonces dado* $\sigma > 1$*, para cada* $\lambda \geq \|f\|_{\eta,X}$ *existe una sucesión* $\{B_i\}_i$ *de bolas disjuntas tales que si* $\tilde{B}_i$ *es una dilatación de* B_i *por* σ*, se tiene que*
i) $\|f\|_{\eta,\tilde{B}_i} \leq \lambda < \|f\|_{\eta,B_i}$,
ii) $\|f\|_{\eta,B} < \lambda$*, para cada* $x \in X - \bigcup_i \tilde{B}_i$ *y para cada bola* B *que contiene a* x.

Observación 2.30. Notar que si $\mu(X) = \infty$ entonces $\|f\|_{\eta,X} = 0$ y en consecuencia los lemas **2.27** y **2.29** valen para todo $\lambda > 0$.

Demostración del lema **2.27**:
Por lema **2.29**, dado $\sigma > 1$ y $\lambda > \|f\|_{\eta,X}$ existe una sucesión de bolas $\{B_i\}$ disjuntas y que satisfacen *i)* y *ii)*. Más aún, por ser μ una medida regular se puede probar que

$$\{x \in X : \eta(f/\lambda) > 1\} \subset \bigcup_i \tilde{B}_i, \tag{2.31}$$

salvo conjunto de medida nula. En efecto, si y es punto de Lebesgue de $\eta(f/\lambda)$ en $X - \bigcup_i \tilde{B}_i$ por *ii)* $\|f\|_{\eta,B} < \lambda$ para cada bola B centrada en y y entonces $(\mu(B))^{-1} \int_B \eta(f/\lambda) \leq 1$. Luego, como μ es regular, cuando el radio de la bola B tiende a cero, se sigue que $1 \geq \eta(f(y)/\lambda)$ y así $y \notin \{x \in X : \eta(f(x)/\lambda) > 1\}$. Por lo tanto la contención es cierta, salvo conjunto de medida nula. Por otra parte si $x \in B_i$ entonces por $i)$ $\lambda < \|f\|_{\eta,B_i} \leq M_\eta f(x)$, y así, dado que las B_i son disjuntas,

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in X : M_\eta f(x) > \lambda\}) &\geq \sum_i \mu(B_i) \\ &\geq C \sum_i \mu(\tilde{B}_i). \end{aligned}$$

Además, como $\|f\|_{\eta,\tilde{B}_i} \leq \lambda$ entonces $(\mu(\tilde{B}_i))^{-1} \int_{\tilde{B}_i} \eta(f/\lambda) \leq 1$. Luego de (2.31) y la estimación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in X : M_\eta f(x) > \lambda\}) &\geq C \sum_i \int_{\tilde{B}_i} \eta\left(\frac{f(x)}{\lambda}\right) d\mu(x) \\ &\geq C \int_{\{x \in X : \eta\left(\frac{f(x)}{\lambda}\right) > 1\}} \eta\left(\frac{f(x)}{\lambda}\right) d\mu(x). \end{aligned}$$

Así hemos probado **2.27**.($\Box$)

Desigualdades débiles con peso y los pesos B_ϕ^η

En esta sección presentamos una clase de pesos que en principio, generaliza a la clase B_ϕ introducida en [B] y demostraremos algunos resultados útiles para la prueba de uno de los teoremas principales del capítulo 3. A continuación damos algunas definiciones previas.

Definición 2.32. Sea ϕ una función de Young. Se dice que un peso w es de clase B_ϕ^η, si existe una constante positiva C tal que la desigualdad

$$w(\{x \in X : M_\eta f(x) > t\}) \leq \int_X \phi \circ \eta \left(C \frac{|f(x)|}{t}\right) w(x) d\mu(x) \tag{2.33}$$

se verifica para todo $t > 0$ y toda $f \in L_w^{\phi\circ\eta}(X)$.

Cuando $\eta(s) = s$ utilizaremos directamente la notación B_ϕ. Ésta es la clase considerada por R. Bagby en [B] en el contexto de $\mathbb{R}^n$.

El siguiente resultado es una extensión al contexto de los espacios de tipo homogéneo del correspondiente para la clase B_ϕ demostrado en [B].

Lema 2.34. *Si w es un peso en la clase B_ϕ con constante c_o, entonces para cada $\epsilon > 0$ se tiene que $(w + \epsilon) \in B_\phi$ con constante Cc_o siendo $C > 1$.*

Demostración:

En primer lugar notar que $\phi(\alpha c_o) \geq 1$ para $\alpha > 1$. En efecto, sea B una bola y $f = \chi_B$. Como $w \in B_\phi$ tenemos que

$$\begin{aligned} w(B) \leq w\{x \in X : Mf(x) > 1/\alpha\} &\leq \int_B \phi(c_o\alpha)w(x)d\mu(x) \\ &\leq \phi(c_o\alpha)w(B), \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado deseado.

En segundo lugar, por el tipo (1,1)-débil sin pesos de M tenemos

$$\mu\{x \in X : Mf(x) > \lambda\} \leq C\frac{1}{\lambda}\int_{\{x : |f(x)| > \lambda/2\}} |f(x)|d\mu(x).$$

En tercer lugar, dado que $\phi(\alpha c_o) \geq 1$, la convexidad de ϕ implica que

$$\begin{aligned} 2C\frac{|f(x)|}{\lambda} &\leq 2C\frac{|f(x)|}{\lambda}\phi(\alpha c_o) \\ &\leq \phi\left(2C\frac{|f(x)|}{\lambda}\alpha c_o\right), \end{aligned}$$

cuando $2C|f(x)|/\lambda > 1$.

Ahora, aplicando estas estimaciones, tenemos

$$\begin{aligned} &(w + \epsilon)\{x \in X : Mf(x) > \lambda\} \\ &\quad = w\{x \in X : Mf(x) > \lambda\} + \epsilon\mu\{x \in X : Mf(x) > \lambda\} \\ &\quad \leq \int_X \phi\left(c_o\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)w(x)d\mu(x) + \epsilon\int_X \phi\left(\alpha c_o 2C\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)d\mu(x) \end{aligned}$$

$$\leq \int_X \phi\left(\alpha c_o 2C\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)(w+\epsilon)d\mu(x)$$

y queda demostrado que $w+\epsilon$ es de clase B_ϕ. ($\Box$)

Con el resultado anterior podemos probar una caracterización para las clases B_ϕ y B_ϕ^η y más aún, que ambas coinciden. Previo al enunciado del teorema vamos a considerar una versión local de la norma definida en (2.8) pero en un espacios con medida $dw = wd\mu$ y que denotamos

$$\|f\|_{\phi,w,B} = \{\lambda > 0 : 1/w(B)\int_B \phi(|f|/\lambda)wd\mu \leq 1\},$$

para toda bola B.

Teorema 2.35. *Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo. Sean η una función de Young submultipicativa y w un peso. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(2.36) $w \in B_\phi$

(2.37) *w satisface una propiedad de duplicación y existe una constante positiva C tal que si $\tilde{\phi}$ es la función de Young complementaria de la función de Young ϕ la siguiente desigualdad*

$$\left\|\frac{1}{w}\right\|_{\tilde{\phi},w,B} \leq C\frac{\mu(B)}{w(B)} \tag{2.38}$$

se verifica para toda bola $B \subset X$.

(2.39) $w \in B_\phi^\eta$

Demostración:

Para probar el teorema seguiremos el siguiente esquema

(2.36)⇒(2.37)⇒(2.39)⇒(2.36)

Probemos que (2.36) implica (2.37).

Supongamos que $w \in B_\phi$. Veamos que w duplica. Para ello tomamos una bola $B = B(x_B, r)$ y la función $f = \chi_B$, entonces $Mf(x) \geq A^{-1}$ sobre $B^* = B(x_B, 2Kr)$ siendo K y A las constantes en (1.1) y (1.2) respectivamente. En efecto,

$$Mf(x) \geq \frac{1}{\mu(B^*)} \int_{B^* \bigcap B} d\mu(x) = \frac{\mu(B^* \bigcap B)}{\mu(B^*)} \geq A^{-1}.$$

Luego aplicando que $w \in B_\phi$ se tiene

$$w(B^*) \leq w\{x \in X : Mf(x) \geq A^{-1}\} \leq \phi(CA)w(B)$$

y por lo tanto w duplica.

Notemos que para probar la desigualdad (2.38) , basta ver que existe C tal que

$$\int_B \tilde{\phi}\left(\frac{w(B)}{C\mu(B)w(x)}\right) w(x)d\mu(x) \leq w(B) \tag{2.40}$$

para cada bola B.

Supongamos en primer lugar que $1/w$ es acotada. Sea g la función del lema **1.20**. Para cada bola B existe un $s > 0$ (que depende de B) tal que

$$\int_B g\left(\frac{1}{sw(x)}\right) d\mu(x) = sw(B). \tag{2.41}$$

Esto es inmediato a partir del hecho que la función

$$i(s) = \frac{1}{sw(B)} \int_B g\left(\frac{1}{sw(x)}\right) d\mu(x),$$

es continua sobre $(0, \infty)$ y que $i(s) \to 0$ cuando $s \to \infty$ e $i(s) \to \infty$ cuando $s \to 0$.

Además de la desigualdad (1.22) tenemos que $tg(t) \geq 2\tilde{\phi}(t/2)$ y, en consecuencia, usando (2.41), resulta

$$\begin{aligned} 2\int_B \tilde{\phi}\left(\frac{1}{2sw(x)}\right) sw(x)d\mu(x) &\leq \int_B g\left(\frac{1}{sw(x)}\right) d\mu(x) \\ &= sw(B) \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\int_B \tilde{\phi}\left(\frac{1}{2sw(x)}\right) w(x)d\mu(x) \leq w(B). \tag{2.42}$$

Por otra parte, de la desigualdad (1.21), sabemos que $\phi(g(t)) \leq tg(t)$. Luego de (2.41) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_B \phi\left(g\left(\frac{1}{sw(x)}\right)\right) w(x)d\mu(x) &\leq \frac{1}{s}\int_B g\left(\frac{1}{sw(x)}\right) d\mu(x) \\ &= w(B) \end{aligned} \tag{2.43}$$

Ahora si $f(x) = \chi_B(x)g(1/sw(x))$, de (2.41) tenemos que

$$\begin{aligned} Mf(x) &\geq \frac{1}{\mu(B)}\int_B g\left(\frac{1}{sw(y)}\right) d\mu(y) \\ &= s\frac{w(B)}{\mu(B)} \end{aligned}$$

sobre la bola B. Así, como $w \in B_\phi$ con constante C, se verifica que

$$\begin{aligned} w(B) &\leq w\left\{x \in X : Mf(x) \geq \frac{sw(B)}{\mu(B)}\right\} \\ &\leq \int_B \phi\left(Cg\left(\frac{1}{sw(x)}\right)\frac{\mu(B)}{sw(B)}\right) w(x)d\mu(x). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Entonces de (2.44) y (2.43) tenemos que

$$\int_B \phi\circ g\left(\frac{1}{sw(x)}\right) w(x)d\mu(x) \leq \int_B \phi\left(Cg\left(\frac{1}{sw(x)}\right)\frac{\mu(B)}{sw(B)}\right) w(x)d\mu(x).$$

Luego es claro que $1 < C\mu(B)/sw(B)$, o sea $C\mu(B)/w(B) > s$. Entonces, tomando $\lambda = 2C\mu(B)/w(B)$ de (2.43) resulta

$$\begin{aligned} \int_B \tilde{\phi}\left(\frac{1}{\lambda w(x)}\right) w(x)d\mu(x) &\leq \int_B \tilde{\phi}\left(\frac{1}{2sw(x)}\right) w(x)d\mu(x) \\ &\leq w(B) \end{aligned}$$

y (2.42) queda probada.

Supongamos ahora que $1/w$ no acotado. Como $w \in B_\phi$, por lema **2.34** se tiene que $w + \epsilon \in B_\phi$ y para cada $\epsilon > 0$ la función $1/(w + \epsilon)$ es acotada. Luego el resultado anterior es válido con $w+\epsilon$ en lugar de w, es decir

$$\begin{aligned}\int_B \tilde{\phi}\left(\frac{1}{\lambda_\epsilon(w(x)+\epsilon)}\right)(w(x)+\epsilon)d\mu(x) &\leq (w+\epsilon)(B)\\ &= w(B)+\epsilon\mu(B)\end{aligned}$$

con $\lambda_\epsilon = C\mu(B)/(w(B)+\epsilon\mu(B))$ (notar que la constante C es la misma para todo ϵ). Ahora bien, haciendo $\epsilon \to 0$ el lema de Fatou permite obtener

$$\int_B \tilde{\phi}\left(\frac{1}{\lambda w(x)}\right) w(x)d\mu(x) \leq w(B)$$

que es (2.40) como se quería probar.

Veamos (2.37) implica (2.39). Para ello, dada f y una bola B, consideremos t un número positivo tal que $\int_B \eta(|f(x)|/t)d\mu(x) > \mu(B)$. Luego, dividiendo ambos miembros de la desigualdad por $w(B)$, aplicando la versión generalizada (1.19) de la desigualdad de Hölder y la hipótesis se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\mu(B)}{w(B)} &< \frac{1}{w(B)}\int_B \eta\left(\frac{|f(x)|}{t}\right)\frac{1}{w(x)}w(x)d\mu(x)\\ &\leq \left\|\frac{1}{w}\right\|_{\tilde{\phi},w,B}\left\|\eta\left(\frac{|f|}{t}\right)\right\|_{\phi,w,B}\\ &\leq C\frac{\mu(B)}{w(B)}\left\|\eta\left(\frac{|f|}{t}\right)\right\|_{\phi,w,B},\end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$1 < \left\|C\eta\left(\frac{|f|}{t}\right)\right\|_{\phi,w,B}$$

o, equivalentemente por la convexidad de η

$$\int_B \phi\left(\eta\left(C\frac{|f(x)|}{t}\right)\right) w(x)d\mu(x) > w(B). \tag{2.45}$$

Ahora consideremos un subconjunto acotado E_λ de $\{x : M_\eta f(x) > \lambda\}$. Por ser M_η menor o igual que una constante veces la maximal centrada $\tilde{M}_\eta$, se cumple

$$E_\lambda \subset \{x \in X : \tilde{M}_\eta f(x) > \lambda/C\}.$$

Así dado $x \in E_\lambda$ existe una bola $B(x, r(x))$ tal que $\|f\|_{\eta,B(x,r(x))} > \lambda/C$. Aplicando el lema **2.14** existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in N} \subset E_\lambda$ tal que las bolas $B(x_i, r(x_i))$ son disjuntas y verifican

$$E_\lambda \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, 4Kr(x_i)). \tag{2.46}$$

Luego, dado que w define una medida doblante, de la desigualdad (2.45) se tiene que

$$\begin{aligned} w(E_\lambda) &\leq \sum_i w(B(x_i, 4Kr(x_i))) \\ &\leq \sum_i Cw(B(x_i, r(x_i))) \\ &\leq \sum_i \int_{B_i} C\phi \circ \eta \left(C\frac{|f(x)|}{\lambda} \right))(x)d\mu(x) \\ &\leq \int_X \phi \circ \eta \left(C\frac{|f(x)|}{\lambda} \right))(x)d\mu(x), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene a partir de que $\phi \circ \eta$ es convexa. Tomando el supremo sobre todos los subconjuntos acotados se obtiene, recordando la definición **2.32** que $w \in B_\phi^\eta$ como se quería probar.

Para completar la demostración vamos a ver que si w está en B_ϕ^η también lo está en B_ϕ. Para ello definimos el operador

$$\bar{M}_\eta f(x) = \sup_{x\in B} \eta^{-1} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B \eta(|f(y)|) d\mu(y) \right). \tag{2.47}$$

Como η es submultiplicativa, es fácil ver que

$$\bar{M}_\eta f(x) \leq M_\eta f(x) \tag{2.48}$$

En efecto, por definición de $\|f\|_{\eta,B}$ y las hipótesis en η se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{1}{\mu(B)}\int_B \eta\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\eta,B}}\right)d\mu \\ &\geq \frac{1}{\mu(B)}\int_B \frac{\eta(|f|)}{\eta(\|f\|_{\eta,B})}d\mu. \end{aligned}$$

Luego $\eta(\|f\|_{\eta,B}) \geq \frac{1}{\mu(B)}\int_B \eta(|f|)d\mu$. Como η es no decreciente se tiene

$$\|f\|_{\eta,B} \geq \eta^{-1}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B \eta(|f|)d\mu\right),$$

de donde (2.48) es inmediato.

Ahora bien a partir de (2.48) y de que $w \in B_\phi^\eta$ se tiene

$$\begin{aligned} w\{x \in X : \bar{M}_\eta f(x) > \lambda\} &\leq w\{x \in X : M_\eta f(x) > \lambda\} \\ &\leq \int_X \phi\circ\eta\left(C\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)w(y)d\mu(y). \end{aligned}$$

Por otra parte, de la definición de $\bar{M}_\eta$ resulta

$$w\{x \in X : \bar{M}_\eta f(x) > \lambda\} = w\{x \in X : M(\eta(|f(x)|)) > \eta(\lambda)\},$$

que, sustituída en la desigualdad anterior, lleva a

$$w\{x \in X : M(\eta(|f(x)|)) > \eta(\lambda)\} \leq \int_X \phi\circ\eta\left(C\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)w(y)d\mu(y)$$

para todo λ positivo. Tomando $\lambda = 1$ y suponiendo, sin pérdida de generalidad que $\eta(\lambda) = 1$ se tiene

$$w\{x \in X : M(\eta(|f(x)|)) > 1\} \leq \int_X \phi(\eta(C|f(y)|))w(y)d\mu(y).$$

Para $s > 0$ definimos $g = s\,\eta\circ|f|$. Recordando que η es submultiplicativa, se tiene que

$$w\{x \in X : M(g/s)(x) > 1\} \leq \int_X \phi\left(C\frac{|g(y)|}{s}\right)w(y)d\mu(y),$$

con lo cual obtenemos que $w \in B_\phi$. Luego el teorema queda probado.($\Box$)

CAPITULO 3

Desigualdades modulares y los operadores maximales generalizados.

En este capítulo vamos a estudiar acotaciones modulares y en norma con un peso para los operadores maximales M_η desde los espacios de Orlicz $L^\phi(X,w)$ en $L^\psi(X,w)$, en el contexto de los espacios de tipo homogéneo. Los resultados obtenidos generalizan el obtenido por Carlos Pérez [P] en $\mathbb{R}^n$ para el caso $\phi(t) = \psi(t) = t^p$. En una segunda instancia veremos una relación entre la clase de pesos A_1 con desigualdades modulares para M_η que involucra una condición de tipo Dini. Este resultado extiende el obtenido por Hiro Kita [K2] para el caso de iteraciones del operador maximal de Hardy-Littlewood en el contexto de $\mathbb{R}^n$.

Desigualdades modulares y en norma con pesos para M_η

Previo al enunciado de los teoremas presentamos algunas definiciones y propiedades de las funciones relacionadas con los espacios de Orlicz que vamos a considerar.

Definición 3.1. Sean a y b funciones positivas y continuas definidas sobre $[0,\infty)$ ambas nulas en cero. Supongamos además que b es no decreciente y $b(s) \to \infty$ cuando $s \to \infty$. Para t no negativo definimos

$$\phi(t) = \int_0^t a(s)ds \tag{3.2}$$

y

$$\psi(t) = \int_0^t b(s)ds. \tag{3.3}$$

A partir de las propiedades de la función b se puede ver que ψ es una función de Young, aunque ϕ no necesariamente lo es. Además es fácil ver que

$$\frac{1}{2}b\left(\frac{t}{2}\right) \leq \frac{\psi(t)}{t} \leq b(t). \tag{3.4}$$

Estamos ahora en condiciones de enunciar el siguiente teorema que relaciona las estimaciones modulares y en norma Orlicz con y sin peso para el operador maximal generalizado con una condición de tipo Dini.

Teorema 3.5. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo con medida infinita y que contiene al menos un punto x tal que $\mu(\{x\}) = 0$. Sean a, b, ϕ y ψ como en la definición* **3.1** *y η una función de Young doblante. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(3.6) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_0^{2t} \frac{a(s)}{s}\eta'\left(\frac{t}{s}\right) ds \leq Cb(Ct)$$

es cierta para todo t positivo.

(3.7) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_X \phi(M_\eta f(x))w(x)d\mu(x) \leq C \int_X \psi(C|f(x)|)Mw(x)d\mu(x)$$

es cierta para toda f positiva y cada peso w.

(3.8) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\|M_\eta f\|_{\phi,w} \leq C\|f\|_{\psi,Mw}$$

es cierta para toda f positiva y cada peso w.

(3.9) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_X \phi(M_\eta f(x))d\mu(x) \leq C \int_X \psi(C|f(x)|)d\mu(x)$$

es cierta para toda f positiva.

(3.10) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_X \phi\left(\frac{Mf(x)}{M_{\tilde{\eta}}(\psi^{-1}(u(x)))}\right) w(x)d\mu(x) \leq C \int_X \psi\left(C\frac{f(x)}{\psi^{-1}(u(x))}\right) Mw(x)d\mu(x)$$

es cierta para toda f positiva y todos los pesos w y u.

(3.11) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\|M_\eta f\|_\phi \leq C\|f\|_\psi$$

es cierta para toda f positiva.

Demostración

Esto se realizará de acuerdo al siguiente esquema

(i) (3.6)⇒(3.7)⇒(3.8)⇒(3.9)⇒(3.6)

(ii) (3.7)⇒(3.10)⇒(3.6)

(iii) (3.9)⇒(3.11)⇒(3.6)

(i) Veamos que (3.6) implica (3.7). Para probar (3.7) basta considerar $f \in L^\psi(X, Mw)$. Aplicando el corolario **2.18**, realizando un cambio de variable e intercambiando el orden de integración obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_X \phi \left(\frac{1}{2}M_\eta f(x)\right) w(x)d\mu(x) &= \int_0^\infty \phi'(\lambda)w\{x \in X : M_\eta f(x) > 2\lambda\}d\lambda \\
&\leq C\int_0^\infty a(\lambda)\int_{\frac{1}{2}}^\infty Mw\left\{x \in X : \frac{|f(x)|}{\lambda} > s\right\}\eta'(s)dsd\lambda \\
&\leq C\int_0^\infty a(\lambda)\int_{\frac{\lambda}{2}}^\infty Mw\{x \in X : |f(x)| > u\}\eta'\left(\frac{u}{\lambda}\right)\frac{du}{\lambda}d\lambda \\
&= C\int_0^\infty Mw\{x \in X : |f(x)| > u\}\int_0^{2u} \frac{a(\lambda)}{\lambda}\eta'\left(\frac{u}{\lambda}\right)d\lambda du.
\end{aligned}$$

Finalmente por (3.6) y dado que $b(t) = \psi'(t)$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_X \phi\left(\frac{1}{2}M_\eta f(x)\right) w(x)d\mu(x) &\leq C\int_0^\infty Mw\{x \in X : |f(x)| > u\}b(Cu)du \\ &\leq C\int_X \psi(C|f(x)|)Mw(x)d\mu(x) \end{aligned}$$

de donde se sigue (3.7).

A continuación veremos que (3.7) implica (3.8), para lo cual basta sustituir en la hipótesis f por $f/C\|f\|_{\psi,Mw}$ y así

$$\int_X \phi\left(M_\eta\left(\frac{f(x)}{C\|f\|_{\psi,Mw}}\right)\right) w(x)d\mu(x) \leq C\int_X \psi\left(\frac{C|f(x)|}{C\|f\|_{\psi,Mw}}\right) Mw(x)d\mu(x).$$

Como $f \in L^\psi(X, Mw)$ y ψ es convexa, resulta

$$\int_X \phi\left(M_\eta\left(\frac{f(x)}{C\|f\|_{\psi,Mw}}\right)\right) w(x)d\mu(x) \leq 1,$$

de donde, por definición de $\|.\|_{\phi,w}$, se tiene

$$\|M_\eta f\|_{\phi,w} \leq C\|f\|_{\psi,Mw},$$

que es (3.8).

Probemos (3.8) implica (3.9). Para ello, dada f una función positiva, tomemos $\alpha = 1/(\int_X \psi(C|f(x)|)d\mu(x))$. Es claro que

$$\int_X \psi(C|f(x)|)\alpha d\mu(x) = 1,$$

y por lo tanto que $\|f\|_{\psi,\alpha} = 1/C$, por definición de norma ψ con peso $w \equiv \alpha$. Así la desigualdad en norma de la hipótesis, dado que la constante es independiente del peso y de f se puede reescribir para este peso como

$$\int_X \phi(M_\eta f(x))\alpha d\mu(x) \leq 1,$$

de donde, a partir de la definición de α, se tiene

$$\int_X \phi(M_\eta f(x))d\mu(x) \leq C\int_X \psi(C|f(x)|)d\mu(x)$$

que es (3.9).

Finalmente para completar (i), probemos que (3.9) implica (3.6). Por hipótesis se tiene

$$\begin{aligned} C\int_X \psi(C|f(x)|)d\mu(x) &\geq \int_X \phi(M_\eta(f(x)))d\mu(x) \\ &= \int_0^\infty a(\lambda)\mu\{x\in X : M_\eta f(x) > \lambda\}d\lambda. \end{aligned}$$

De la desigualdad débil inversa para M_η establecida en el lema **2.27** se sigue que

$$C\int_X \psi(C|f(x)|)d\mu(x) \geq \int_0^\infty a(\lambda)\int_{\{x\in:\eta(|f(x)|/\lambda)>1\}} \eta(|f(x)|/\lambda)d\mu(x)d\lambda.$$

Ahora bien, sean $\lambda_o > 0$ y B_o una bola fija cualquiera. Sea $f = \lambda_o\chi_{B_o}$. En ambos extremos de la desigualdad anterior sustituimos f y llegamos a

$$\begin{aligned} C\psi(C\lambda_o)\mu(B_o) &\geq \int_0^{\lambda_o} a(\lambda)\eta\left(\frac{\lambda_o}{\lambda}\right)\mu(B_o)d\lambda \\ &\geq C\int_0^{\lambda_o} \frac{a(\lambda)}{\lambda}\eta'\left(\frac{\lambda_o}{\lambda}\right)\lambda_o\mu(B_o)d\lambda, \end{aligned}$$

habiéndose aplicado en esta última que $\eta'(t) \sim \eta(t)/t$.

Finalmente como $\psi(t)/t \leq b(t)$ se tiene

$$\begin{aligned} Cb(C\lambda_o) &\geq C\frac{\psi(\lambda_o)}{\lambda_o} \\ &\geq C\int_0^{\lambda_o} \frac{a(\lambda)}{\lambda}\eta'\left(\frac{\lambda_o}{\lambda}\right)d\lambda \end{aligned}$$

para todo $\lambda_o > 0$ de donde se sigue claramente (3.6).

(ii) Veamos que (3.7) implica (3.10). La demostración es una adaptación de la realizada por C. Pérez y R. Wheeden para el resultado análogo en el caso $\phi(t) = \psi(t) = t^p$ (teorema 5.1 de [PW]). Notemos que la desigualdad en (3.10) es equivalente a

(3.12)
$$\int_X \phi\left(\frac{M(f(x)\,\psi^{-1}(u(x)))}{M_{\tilde\eta}(\psi^{-1}(u(x)))}\right) w(x)d\mu(x) \le C\int_X \psi(C|f(x)|)Mw(x)d\mu(x)$$

para todas las funciones no negativas f, u y w. Veamos que vale (3.12).
Por un lado se tiene que

$$M(fg)(x) \le M_\eta(f)(x)M_{\tilde\eta}(g)(x) \qquad x \in X. \tag{3.13}$$

En efecto, a partir de la desigualdad de Hölder generalizada, (1.19) resulta
$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B |fg|d\mu \le \|f\|_{\eta,B}\|g\|_{\tilde\eta,B}$$
y tomando el supremo sobre todas las bolas B obtenemos (3.13).
Por otro, con $g = \psi^{-1}\circ u$ en (3.13) y la hipótesis (3.7), resulta
$$\int_X \phi\left(\frac{M(f(x)\,\psi^{-1}(u(x))}{M_{\tilde\eta}(\psi^{-1}(u(x)))}\right) w(x)d\mu(x) \le C\int_X \psi(C|f(x)|)Mw(x)d\mu(x),$$
que es (3.12).
Finalmente probemos que (3.10) implica (3.6).
Esta demostración se basa en la realizada por G. Pradolini y O. Salinas en el teorema 1.4 de [PS] para el caso $\phi(t) = \psi(t) = t^p$. Tomando en (3.10) $w = 1$ se tiene

$$\int_X \phi\left(\frac{Mf(x)}{M_{\tilde\eta}(\psi^{-1}(u(x)))}\right) d\mu(x) \le C\int_X \psi\left(\frac{Cf(x)}{\psi^{-1}(u(x))}\right) d\mu(x). \tag{3.14}$$

Ahora bien, para $\bar t > 0$, $z \in X$ y $R > 0$ definimos las funciones $f = \bar t\chi_{B_o}$ y $u = \psi(\chi_{B_o})$ donde $B_o = B(z,R)$. Así para la u dada

$$M_{\tilde\eta}(\psi^{-1}u)(x) = \sup_{x\in B}\frac{1}{\tilde\eta^{-1}\left(\frac{\mu(B)}{\mu(B\bigcap B_o)}\right)}. \tag{3.15}$$

En efecto, por definición
$$\|\psi^{-1}u\|_{\tilde\eta,B} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \frac{1}{\mu(B)}\int_B \tilde\eta(\psi^{-1}(u(x))/\lambda)d\mu(x) \le 1\}.$$

Luego, en particular para la u considerada

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B \tilde{\eta}(\psi^{-1}(u(x))/\lambda)d\mu(x) = \frac{1}{\mu(B)}\int_{B\bigcap B_o} \tilde{\eta}(1/\lambda)d\mu(x) \leq 1$$

de donde se obtiene $\lambda \geq (\tilde{\eta}^{-1}(\mu(B)(\mu(B\bigcap B_o))^{-1}))^{-1}$ y así resulta

$$\|\psi^{-1}u\|_{\tilde{\eta},B} = \frac{1}{\tilde{\eta}^{-1}\left(\frac{\mu(B)}{\mu(B\bigcap B_o)}\right)},$$

y (3.15) es claro.

Se puede demostrar además que para $x \in X$ tal que $d(x,z) > \gamma R$ con $\gamma > 0$ exiten constantes D y $\tilde{D}$ tales que verifican la siguiente desigualdad

(3.16)

$$\frac{1}{\tilde{\eta}^{-1}(D\mu(B(x,d(x,z))))} \leq M_{\tilde{\eta}}(\psi^{-1}u)(x) \leq \frac{1}{\tilde{\eta}^{-1}(\tilde{D}\mu(B(x,d(x,z))))}.$$

En efecto, en primer lugar B_o está contenida en $B(x, Cd(x,z))$ para alguna constante C, pues si $y \in B_o$, entonces

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq K(d(x,z)+d(z,y)) \\ &\leq K(d(x,z)+R) \\ &\leq K\left(d(x,z)+\frac{d(x,z)}{\gamma}\right) \\ &= K\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)d(x,z) \\ &= Cd(x,z). \end{aligned}$$

Ahora estimemos el cociente en (3.15) para la bola $B = B(x, Cd(x,z))$,

$$\begin{aligned} \frac{\mu(B(x,Cd(x,z)))}{\mu(B(x,Cd(x,z))\bigcap B_o)} &= \frac{\mu(B(x,Cd(x,z)))}{\mu(B_o)} \\ &\leq D\mu(B(x,d(x,z))) \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene por ser μ una medida doblante y D es una constante que depende de $\mu(B_o)$. Luego de esto, (3.15) y por ser $\tilde{\eta}^{-1}$ no decreciente tenemos

$$\frac{1}{\tilde{\eta}^{-1}(D\mu(B(x,d(x,z))))} \leq M_{\tilde{\eta}}(\psi^{-1}u)(x)$$

Por otro lado para toda bola B que interseca a B_o se tiene

$$\frac{\mu(B)}{\mu(B\bigcap B_o)} \geq \frac{\mu(B)}{\mu(B_o)} \Rightarrow \frac{1}{\tilde{\eta}^{-1}(\frac{\mu(B)}{\mu(B\bigcap B_o)})} \leq \frac{1}{\tilde{\eta}^{-1}(\frac{\mu(B)}{\mu(B_o)})}.$$

En particular para $B = B(x,d(x,z))$ resulta

$$\frac{1}{\tilde{\eta}^{-1}(\frac{\mu(B)}{\mu(B\bigcap B_o)})} \leq \frac{1}{\tilde{\eta}^{-1}(\tilde{D}\mu(B(x,d(x,z))))},$$

siendo $\tilde{D} = 1/\mu(B_o)$.

Así, se completa la demostración de (3.16). Con similar razonamiento, para $d(x,z) > \gamma R$, se puede probar la siguiente equivalencia

$$Mf(x) \cong \frac{\bar{t}}{\mu(B(x,d(x,z)))}. \tag{3.17}$$

Ahora bien, como $\mu(X) = \infty$ podemos elegir $\alpha > 1$ tal que $\mu(B(z,\alpha\gamma R)) > \mu(B(z,\gamma R))$. Luego definimos el conjunto $\Omega = \{x \in X : \mu(B(z,d(x,z))) \geq \mu(B(z,\alpha\gamma R))\}$. Entonces resulta cierta la siguiente contención

$$\Omega \subset E = \{x \in X : d(x,z) > \gamma R\}.$$

En efecto

$$\begin{aligned} x \in \Omega \quad &\Rightarrow \quad \mu(B(z,d(z,x))) \geq \mu(B(z,\alpha\gamma R)) \\ &\Rightarrow \quad \mu(B(z,d(z,x))) > \mu(B(z,\gamma R)) \Rightarrow d(z,x) > \gamma R \\ &\Rightarrow \quad x \in E \end{aligned}$$

Aplicando las estimaciones (3.16) y (3.17) en (3.14) tenemos

$$\begin{aligned} C\psi(C\bar{t})\mu(B_o) \quad &\geq \quad \int_X \phi\left(\frac{Mf(x)}{M_{\tilde{\eta}}(\psi^{-1}(u(x)))}\right) d\mu(x) \\ &\geq \quad \int_\Omega \phi\left(\frac{\bar{t}\tilde{\eta}^{-1}(\tilde{D}\mu(B(x,d(x,z))))}{\mu(B(x,d(x,z)))}\right) d\mu(x) \end{aligned}$$

$$\geq \int_{\Omega} \phi\left(\frac{\bar{t}\tilde{\eta}^{-1}(\tilde{D}\mu(B(z,d(x,z))))}{\mu(B(z,d(x,z)))}\right) d\mu(x).$$

Sea $R_o = \mu(B(z, \alpha\gamma R))$, además con α suficientemente grande, como para que $R_o > \mu(\{z\})/(2A^2)$. Entonces dado que $\tilde{\eta}^{-1}(t) \geq t/(\eta^{-1}(t))$ (ver (1.13)), a partir del lema **1.10** y renombrando a $B_d = B(z, d(x,z))$ resulta

$$\begin{aligned}
C\psi(C\bar{t})\mu(B_o) &\geq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{C_o^j R_o \leq \mu(B_d) < C_o^{j+1} R_o} \phi\left(\frac{\bar{t}\tilde{\eta}^{-1}(\tilde{D}\mu(B_d))}{\mu(B_d)}\right) d\mu(x) \\
&\geq \sum_{j=0}^{\infty} \phi\left(\frac{\bar{t}\tilde{\eta}^{-1}(\tilde{D}C_o^j R_o)}{C_o^{j+1} R_o}\right) \mu(B_\delta(z, C_o^{j+1}R_o) - B_\delta(z, C_o^j R_o)) \\
&\geq \sum_{j=0}^{\infty} \phi\left(\frac{\bar{t}\tilde{D}}{C_o \eta^{-1}(\tilde{D}C_o^j R_o)}\right) C_1 R_o C_o^j \\
&\geq C_2 \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\tilde{D}C_o^j R_o}^{\tilde{D}C_o^{j+1} R_o} \phi\left(\frac{\bar{t}\tilde{D}}{C_o \eta^{-1}(\bar{s})}\right) d\bar{s} \\
&\geq C_2 \int_{\tilde{D}R_o}^{\infty} \phi\left(\frac{\bar{t}\tilde{D}}{C_o \eta^{-1}(\bar{s})}\right) d\bar{s} \\
&\geq C_2 \int_{\tilde{D}R_o}^{\infty} a\left(\frac{\bar{t}\tilde{D}}{C_o \eta^{-1}(\bar{s})2}\right) \frac{\bar{t}\tilde{D}}{C_o \eta^{-1}(\bar{s})2} d\bar{s},
\end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad hemos aplicado que $\phi(t) \geq (t/2)a(t/2)$ (ver (3.4)). Ahora, tomando $s = \bar{t}\tilde{D}/C_o\eta^{-1}(\bar{s})2$ se tiene

$$C\psi(C\bar{t})\mu(B_o) \;\; \geq \;\; C_2 \int_0^{\frac{\bar{t}\tilde{D}}{2C_o \eta^{-1}(\tilde{D}R_o)}} \frac{a(s)}{s} \eta'\left(\frac{\bar{t}\tilde{D}}{2C_o s}\right) \frac{\bar{t}\tilde{D}}{2C_o} ds.$$

LLamando $t = \frac{\bar{t}\tilde{D}}{2C_o}$ se sigue

$$C\psi(Ct\frac{2C_o}{\tilde{D}})\mu(B_o) \geq C_2 \int_0^{\frac{t}{\eta^{-1}(\tilde{D}R_o)}} \frac{a(s)}{s} \eta'\left(\frac{t}{s}\right) t ds. \tag{3.18}$$

Denotando $A = 1/(2\eta^{-1}(\tilde{D}R_o))$, tenemos por un lado, que cuando $A > 1$ el extremo superior de integración es $tA > t$ y de la desigualdad anterior resulta

$$\frac{C\psi(Ct\frac{2C_o}{\tilde{D}})}{t}\mu(B_o) \;\; \geq \;\; C_2\int_0^{2t} \frac{a(s)}{s}\eta'\left(\frac{t}{s}\right) ds.$$

Luego, aplicando $\psi(t)/t \leq b(t)$ por (3.4), con una constante C adecuada tenemos

$$\int_0^{2t} \frac{a(s)}{s}\eta'\left(\frac{t}{s}\right) ds \leq Cb(Ct)$$

que es (3.6).

Por otro lado si $A \leq 1$, tomando $\tau = tA/2$, de (3.18) se tiene

$$\frac{A\psi(C\tau\frac{2C_o}{A\tilde{D}})}{2\tau}\mu(B_o) \;\; \geq \;\; C_2\int_0^{2\tau} \frac{a(s)}{s}\eta'\left(\frac{2\tau}{As}\right) ds$$

Aplicando que $\eta'(t) \sim \eta(t)/t$ y que η es convexa y submultiplicativa tenemos que

$$\eta'\left(\frac{2\tau}{As}\right) \geq \frac{\eta\left(\frac{2\tau}{As}\right)}{\left(\frac{2\tau}{As}\right)} \geq \frac{1}{A}\frac{\eta\left(\frac{2\tau}{s}\right)}{\left(\frac{2\tau}{As}\right)} \geq C\frac{\eta\left(\frac{\tau}{s}\right)}{\left(\frac{\tau}{s}\right)} \geq C\eta'\left(\frac{\tau}{s}\right).$$

De esto y aplicando $\psi(t)/t \leq b(t)$ de (3.4) la desigualdad anterior lleva a (3.6) que es lo que queríamos probar.

(iii) Para demostrar (3.9) implica (3.11), basta tomar en la hipótesis (3.9) $f = f/C\|f\|_\psi$. Finalmente para cerrar esta cadena probaremos que (3.11) implica (3.6).

Para ello, sean $x_o \in X$, tal que $\mu(\{x_o\}) = 0$ y $r > 0$. Asociada a r y x_o definimos la función:

$$f_r(x) = \frac{1}{\mu(B(x_o, r))}\chi_{B(x_o,r)}(x) \tag{3.19}$$

Veamos que para f_r con $0 < r < 1$ y $0 < \lambda < 1/\mu(B(x_o, r))$ es cierta la siguiente estimación

$$\mu(\{x \in X : M_\eta f_r(x) > \lambda\}) \geq \mu(B(x_o, r))\, \eta \left(\frac{1}{\mu(B(x_o, r))\lambda} \right) \tag{3.20}$$

Para ello probaremos antes que para λ en el rango mencionado vale

$$B(x_o, r) \subset \{x \in X : \eta(f_r(x)/\lambda) > 1\}. \tag{3.21}$$

En efecto, por definición de f_r se tiene que si $y \in B(x_o, r)$ y λ es como dijimos más arriba luego $\eta(f_r/\lambda) = \eta(1/(\mu(B(x_o, r))\lambda) > 1$. Así (3.21) es inmediata. Aplicando esto y el lema **2.27** de la desigualdad débil inversa para M_η tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu(\{x \in X : \quad M_\eta & \quad f_r(x) > \lambda\}) \\
& \geq \int_{\{x \in X : \eta\left(\frac{|f_r(x)|}{\lambda}\right) > 1\}} \eta \left(\frac{|f_r(x)|}{\lambda} \right) d\mu(x) \\
& = \int_{B(x_o, r)} \eta \left(\frac{1}{\mu(B(x_o, r))\lambda} \right) d\mu(x) \\
& = \eta \left(\frac{1}{\mu(B(x_o, r))\lambda} \right) \mu(B(x_o, r))
\end{aligned}$$

y (3.20) queda probado.

Por otra parte tenemos

$$\|f_r\|_\psi = \frac{1}{\mu(B(x_o, r))\psi^{-1}\left(\frac{1}{\mu(B(x_o, r))}\right)} \tag{3.22}$$

pues, a partir de la definición de norma en $L^\psi(X)$ resulta

$$\begin{aligned}
\int_X \psi \left(\frac{|f_r(x)|}{t} \right) d\mu(x) & = \int_{B(x_o, r)} \psi \left(\frac{1}{t\mu(B(x_o, r))} \right) d\mu(x) \\
& = \psi \left(\frac{1}{t\mu(B(x_o, r))} \right) \mu(B(x_o, r)).
\end{aligned}$$

Luego la expresión anterior es menor o igual que 1 para

$$t \geq \frac{1}{\mu(B(x_o, r))\ \psi^{-1}\left(\frac{1}{\mu(B(x_o,r))}\right)}$$

de donde se sigue (3.22).

Ahora estamos en condiciones de probar (3.6) a partir de (3.11). Para ello notemos que la desigualdad en normas sin peso en (3.11) se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} 1 &\geq \int_X \phi\left(\frac{M_\eta f_r(x)}{C_1\|f_r\|_\psi}\right) d\mu(x) \\ &= \int_0^\infty a(\lambda)\mu(\{x \in X : M_\eta f_r(x) > \lambda C_1\|f_r\|_\psi\})d\lambda. \end{aligned}$$

Cambiando variables y denotando $B_r = B(x_o, r)$, (3.20) lleva a

$$\begin{aligned} 1 &\geq C\int_0^\infty a\left(\frac{\lambda}{C_1\|f_r\|_\psi}\right)\mu(\{x \in X : M_\eta f_r(x) > \lambda\})\frac{d\lambda}{C_1\|f_r\|_\psi} \\ &\geq C\int_0^{\frac{1}{\mu(B_r)}} a\left(\frac{\lambda}{C_1\|f_r\|_\psi}\right)\mu(B_r)\,\eta\left(\frac{1}{\lambda\mu(B_r)}\right)\frac{d\lambda}{C_1\|f_r\|_\psi}. \end{aligned}$$

Dado que $\eta'(t) \sim \eta(t)/t$, otro cambio de variable lleva a

$$\begin{aligned} 1 &\geq C\int_0^{\frac{1}{\mu(B_r)}} a\left(\frac{\lambda}{C_1\|f_r\|_\psi}\right)\frac{1}{\lambda}\,\eta'\left(\frac{1}{2\lambda\mu(B_r)}\right)\frac{d\lambda}{C_1\|f_r\|_\psi} \\ &= C\int_0^{\frac{1}{\mu(B_r)C_1\|f_r\|_\psi}} \frac{a(\lambda)}{\lambda}\,\eta'\left(\frac{1}{2\lambda\mu(B_r)C_1\|f_r\|_\psi}\right)\frac{d\lambda}{C_1\|f_r\|_\psi}. \end{aligned}$$

Sea $t = 1/2\mu(B_r)C_1\|f_r\|_\psi$, aplicando (3.22) se tiene $t = \psi^{-1}((\mu(B_r))^{-1})/2C_1$. Entonces de la desigualdad anterior se sigue

$$\int_0^{2t} \frac{a(\lambda)}{\lambda}\,\eta'\left(\frac{t}{\lambda}\right)d\lambda \;\leq\; \frac{C_1}{C}\frac{1}{\mu(B_r)\psi^{-1}(\frac{1}{\mu(B_r)})}.$$

A partir de la definición de t se tiene $\psi^{-1}(1/\mu(B_r)) = 2tC_1$ o bien $1/\mu(B_r) = \psi(2tC_1)$. Sustituyendo en la última desigualdad y aplicando que $\psi(t)/t \leq b(t)$, resulta

$$\begin{aligned}\int_0^{2t} \frac{a(\lambda)}{\lambda}\,\eta'\left(\frac{t}{\lambda}\right) d\lambda &\leq \frac{C_1}{C}\frac{\psi(2tC_1)}{2tC_1}\\ &\leq Cb(Ct)\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, pues $1/\mu(B_r) \to \infty$ cuando $r \to 0$ obteniéndose (3.5) y el teorema queda probado. $(\square)$

Observación 3.23. Cuando $a(t) = b(t) = pt^{p-1}$ con $p > 1$, el teorema anterior fue demostrado en el contexto de los espacios euclídeos por C. Pérez en [P]. La extensión a los espacios de tipo homogéneo para las mismas funciones a y b fue obtenida por C. Pérez y R. Wheeden en [PW] pero bajo la suposición de que cada anillo en el espacio fuera no vacío (lo cual implica que el espacio es de medida infinita y sin átomos). G. Pradolini y O. Salinas en [PS] (Teorema 1.4) eliminan la condición sobre los anillos y muestran que el resultado es válido en cualquier espacio de tipo homogéneo con medida infinita.

Observación 3.24. Notar que, por un lado las equivalencias establecidas en las cadenas de implicaciones (i) y (ii) en la demostración del teorema **3.5** tienen validez general, esto es para cualquier espacio de medida infinita. Dada esta libertad si eligimos uno que contenga al menos un punto de medida cero se pueden extender las equivalencias con la desigualdad en norma sin peso como se realizó en (iii). Cabe mencionar además, que las implicaciones probadas en sentido creciente tienen validez tanto en espacios de medida finita como infinita, sin necesidad de la condición sobre la existencia de un punto no atómico.

A continuación veremos qué resultados de los obtenidos para el caso de espacios de medida infinita siguen siendo válidos en espacios de medida

finita. En primer lugar cuando estamos en un espacio con medida finita y puramente atómico ($\mu(\{x\}) \neq 0, \forall x \in X$), la condición de Dini deja de ser equivalente a la modular sin peso. Esto se puede ver con el siguiente ejemplo: si consideramos $X = \{0, 1\}$ con $\mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = 1$ y la métrica euclídea, se puede probar para $\eta(t) = \phi(t) = \psi(t) = t^p$ que se cumple una desigualdad de tipo modular pero la condición de Dini, no se verifica. En efecto, por un lado sea $|f| < \infty$ sobre X entonces la desigualdad modular se verifica trivialmente. Pero para ϕ, ψ y η consideradas, la condición de Dini no se cumple desde el momento en que $\int_0^{2t} \frac{1}{s} ds$ no converge.
Sin embargo para el caso en que el espacio no sea puramente atómico se tiene la siguiente versión del teorema **3.5**.

Teorema 3.25. *En las hipótesis del teorema* **3.5** *pero en un espacio de tipo homogéneo* (X, d, μ) *con* $\mu(X) < \infty$*, las afirmaciones* (3.6) *a* (3.9) *son equivalentes.*

Demostración:
Para probar las equivalencias basta cerrar la primer cadena (i) de implicaciones planteadas en la demostración del teorema **3.5** ya que su validez no depende de la medida del espacio, veamos entonces que
(i'') (3.9)$\Rightarrow$ (3.6)

Sean $\lambda_o > 0$, $M > 0$, x_o un punto de X con medida cero y la bola $B_o = B(x_o, M)$. Definimos $f = \lambda_o \chi_{B_o}$, entonces por definición de norma se tiene que $\|f\|_{\eta,X} = \lambda_o/\eta^{-1}(\mu(X)/\mu(B_o))$. Así por hipótesis

$$\begin{aligned} C \int_X \psi(C|f(x)|) d\mu(x) &\geq \int_X \phi(M_\eta(f(x))) d\mu(x) \\ &= \int_0^\infty a(\lambda)\mu\{x \in X : M_\eta f(x) > \lambda\} d\lambda. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad débil inversa establecida en **2.27** para M_η con $\lambda \geq \|f\|_{\eta,X}$ (recordemos que $\mu(X) < \infty$) se tiene que

$$C \int_X \psi(C|f(x)|) d\mu(x) \ \geq \ \int_{\|f\|_{\eta,X}}^{\lambda_o} a(\lambda) \int_{\{x \in :\eta(|f(x)|/\lambda)>1\}} \eta(|f(x)|/\lambda) d\mu(x) d\lambda$$

En ambos extremos con la f considerada se llega a

$$\begin{aligned} C\psi(C\lambda_o)\mu(B_o) \ &\geq \ \int_{\frac{\lambda_o}{\eta^{-1}(\mu(X)/\mu(B_o))}}^{\lambda_o} a(\lambda)\eta\left(\frac{\lambda_o}{\lambda}\right)\mu(B_o)d\lambda \\ &\geq \ \bar{C}\int_{\frac{\lambda_o}{\eta^{-1}(\mu(X)/\mu(B_o))}}^{\lambda_o} \frac{a(\lambda)}{\lambda}\eta'\left(\frac{\lambda_o}{\lambda}\right)\lambda_o\mu(B_o)d\lambda \end{aligned}$$

habiéndose aplicado en esta última que $\eta'(t) \sim \eta(t)/t$.
Ahora aplicando que $\psi(t)/t \leq b(t)$ se tiene

$$\begin{aligned} Cb(C\lambda_o) \ &\geq \ C\frac{\psi(C\lambda_o)}{\lambda_o} \\ &\geq \ \int_{\frac{\lambda_o}{\eta^{-1}(\mu(X)/\mu(B_o))}}^{\lambda_o} \frac{a(\lambda)}{\lambda}\eta'\left(\frac{\lambda_o}{\lambda}\right)d\lambda \end{aligned}$$

y como $\frac{\lambda_o}{\eta^{-1}(\mu(X)/\mu(B_o))}$ tiende a cero cuando el radio de B_o tiende a cero, se obtiene

$$Cb(C\lambda_o) \geq \int_0^{\lambda_o} \frac{a(\lambda)}{\lambda}\eta'\left(\frac{\lambda_o}{\lambda}\right)d\lambda$$

para todo $\lambda_o > 0$, que es (3.6) y el teorema queda probado. ($\Box$)

Observación 3.26. En espacios de Orlicz y para subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$, E. Harboure, O. Salinas y B. Viviani probaron para el caso $\eta(t) = t$ en [HSV] que la acotación en norma sin pesos (3.11) es equivalente a una condición de Dini ligeramente diferente, siendo ésta, $\int_1^t a(s)/s ds \leq Cb(Ct)$ y a una modular que difiere en una constante.

Desigualdades modulares y la clase A_1

A continuación analizaremos relaciones entre desigualdades modulares con peso para la maximal generalizada en el contexto de los espacio de tipo homogéneo y los pesos de clase A_1. Los resultados de la sección anterior nos permitirán probar que la clase de pesos A_1 es la intersección de todas las clases de pesos que permiten la realización de una desigualdad modular para M_η cuando el par (ϕ, ψ) y la η satisfacen una condición de tipo Dini.

Teorema 3.27. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo con medida infinita. Sean a, b, ϕ y ψ como en* **3.1** *, η una función de Young submultiplicativa y w un peso. Si $w \in A_1$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(3.28) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_0^{2t} \frac{a(s)}{s} \eta' \left(\frac{t}{s} \right) ds \leq Cb(Ct)$$

es cierta para todo t positivo .

(3.29) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_X \phi(M_\eta f(x)) w(x) d\mu(x) \leq C \int_X \psi(C|f(x)|) w(x) d\mu(x)$$

es cierta para toda f positiva y cada peso w .

Demostración:

La prueba de **3.27** es inmediata pues es claramente una consecuencia del teorema **3.5** donde se probó la equivalencia entre la condición de Dini con una desigualdad de tipo modular para M_η con peso Mw en su segundo miembro, en particular como $w \in A_1$ se tiene que $Mw \cong w$ de donde resulta la validez de **3.27**. ($\square$)

Observación 3.30. El teorema **3.27** introduce una extensión a los espacios de tipo homogéneo de un resultado probado por H. Kita en el contexto euclídeo en [K2] y para la maximal iterada definida por $M^k f(x) = M(M^{k-1}f)(x)$, donde $k > 1$. Alli se prueba que si $w \in A_1$ entonces (3.28) con $\eta(t)$ definida por $\eta_k(t) = t(1+log^+ t)^{k-1}$, implica la desigualdad (3.29) para M^k. Sabemos que este operador es equivalente al operador maximal M_{η_k} asociado a la función de Young η_k como se puede ver, por ejemplo, en [DLZ] en espacios euclideanos y en [CS], [PW] o [BHP] en espacios de tipo homogéneo. Es importante destacar que H. Kita en [K1] para probar que (3.28) es también una condición necesaria para (3.29) impone a w su pertenencia, además de ser A_1, a la clase A'_∞, esto significa que exista una constante positiva C tal que $\frac{1}{\mu(B)}\int_{2B} w \geq C \sup_{x\in B} w$ para toda bola B. Nuestro resultado prueba que dicha suposición puede ser eliminada.

A continuación veremos que un cierto recíproco del teorema anterior también es válido.

Teorema 3.31. *Si la condición* (3.28) *implica* (3.29) *para cada función positiva, continua a, b, ϕ y ψ como en el teorema* **3.27** *y η una función de Young submultiplicativa entonces $w \in A_1$.*

Observación 3.32. Este teorema fue probado en el contexto de los espacios euclídeos para la maximal clásica de Hardy-Littlewood (esto es $\eta(t) = t$) por H. Kita en [K2].

Observación 3.33. Notar que este teorema y su recíproco son válidos tanto en espacios X de medida finita como infinita.

Demostración de **3.31**: La prueba que presentamos es una adaptación de la realizada por H.Kita en [K2] para $\mathbb{R}^n$. Para ello supondremos que

$w \notin A_1$ y esto llevará a una contradicción.

Si $w \notin A_1$, por la definición de la clase A_1 (ver(2.5)) existe una sucesión de bolas $\{B_n; n \geq 1\}$ tales que

$$\mu(\{x \in B_n : \frac{w(B_n)}{\mu(B_n)} > 2^{2n} w(x)\}) > 0$$

para cada $n \geq 1$. Sea

$$G_n = \{x \in B_n : \frac{w(B_n)}{\mu(B_n)} > 2^{2n} w(x)\}.$$

Ahora definimos

$$g_n = max_{1 \leq k \leq n}(\frac{w(B_k)}{w(G_k)}) \tag{3.34}$$

para $n \geq 1$. Así se tiene

$$1 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots \leq g_n \leq g_{n+1} \ldots$$

Sea $\tilde{b} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función tal que

1. $\tilde{b}(u) = 2g_1\sqrt{u}$ para $0 \leq u \leq 1$,
2. $\tilde{b}(2^{n-1}) \geq g_n$ para $n = 2, 3, \ldots$,
3. $\tilde{b}$, estrictamente creciente, suave con $\lim_{u\to\infty} \tilde{b}(u) = \infty$ y
4. $0 < \tilde{b}'(u) < \infty$, para todo $u > 0$.

Con una función así definimos

$$\tilde{\psi}(t) = \int_0^t \tilde{b}(u)du$$

para $t \geq 0$ y resulta que $\tilde{\psi}$ es una función de Young. En efecto:

1. $\tilde{\psi}(0) = 0$;
2. $\lim_{t\to\infty} \tilde{\psi}(t) = \infty$;
3. $\tilde{\psi}$ es no decreciente pues $\tilde{\psi}'(t) = \tilde{b}(t) \geq 0$;
4. $\tilde{\psi}$ es continua;

5. $\tilde{\psi}$ es convexa, pues $\tilde{\psi}''(t) = \tilde{b}'(t) > 0$, para todo $t > 0$ por condición 4. de $\tilde{b}$
6. $\tilde{\psi}(t)/t \to \infty$ cuando $t \to \infty$ por condición 4. de la construcción de $\tilde{b}$.

Además cumple

$$\tilde{\psi}(2^n) > \frac{w(B_n)}{w(G_n)} \tag{3.35}$$

para todo $n \geq 1$. En efecto, por las condición 2. y 3. de $\tilde{b}$ y por (3.34) tenemos que

$$\tilde{\psi}(2^n) \geq \int_{2^{n-1}}^{2^n} \tilde{b}(u)du \geq \tilde{b}(2^{n-1})2^{n-1} \geq \tilde{b}(2^{n-1}) > g_n \geq \frac{w(B_n)}{w(G_n)}$$

para todo $n \geq 1$. Ahora consideremos $b(s)$ la inversa de $\tilde{b}(u)$. Es inmediato de la condición 1. de $\tilde{b}$, que

$$b(s) = \frac{s^2}{(2g_1)^2}$$

para $0 \leq s \leq 2g_1$.
Por otro lado

$$\lim_{s \to 0^+} b'(s) = \lim_{s \to 0^+} \frac{2s}{(2g_1)^2} = 0 \tag{3.36}$$

y por condición 4. de $\tilde{b}$ se tiene

$$0 < b'(s) < \infty \tag{3.37}$$

para todo $s > 0$.
A partir de b definimos $\psi(t) = \int_0^t b(s)ds$ para todo $t > 0$. Así ψ resulta una función de Young. En efecto, pues

1. $\psi(0) = 0$,
2. $\lim_{t \to \infty} \psi(t) = \infty$,
3. ψ no-decreciente, pues $\psi'(t) = b(t) \geq 0$, por definición de ψ

4. ψ es convexa pues $\psi''(t) = b'(s) > 0$, por (3.37)
5. $\psi(t)/t \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

Con la misma b definimos

$$a(s) = (b \circ \eta)'(s)/\eta(1/s) \tag{3.38}$$

para todo $s > 0$ y $a(0) = 0$. Notar que por (3.38) se tiene que

$$a(s) = \frac{2\eta(s)}{2g_1^2\eta(1/s)}$$

para s próximo a cero. Por lo tanto $a(s) \to 0$ cuando $s \to 0$. También tenemos, $0 \leq a(s) < \infty$ (de (3.37)) y $a(s)$ continua sobre $[0, \infty)$. Definimos a partir de a,

$$\phi(t) = \int_0^t a(s)ds,$$

para todo $t > 0$.

Aplicando que $\eta(t)/t \sim \eta'(t)$ y que η submultiplicativa se tiene para todo $t > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{a(s)}{s}\eta'\left(\frac{t}{s}\right) ds &\leq C\int_0^t a(s)\frac{1}{t}\eta(\frac{t}{s})ds \\
&\leq C\int_0^t a(s)\frac{1}{t}\eta(t)\eta(\frac{1}{s})ds \\
&\leq C\eta'(t)\int_0^t (b \circ \eta)'(s)ds.
\end{aligned}$$

Luego es claro que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{a(s)}{s}\eta'\left(\frac{t}{s}\right) ds &= C(b \circ \eta)(t)\eta'(t) \\
&\leq C(\psi \circ \eta)'(t).
\end{aligned}$$

Pero la estimación anterior es la hipótesis (3.28), asociada al par $(\phi, \psi \circ \eta)$ por lo tanto vale

$$\int_X \phi(\frac{1}{\lambda}M_\eta f(x))w(x)d\mu(x) \leq C\int_X \psi \circ \eta\left(\frac{C|f(x)|}{\lambda}\right) w(x)d\mu(x) \tag{3.39}$$

para todo $\lambda > 0$.

Por otro lado

$$\begin{aligned}\int_X \phi\left(\frac{1}{\lambda}M_\eta f(x)\right) \quad w(x) \quad d\mu(x) & \\ &\geq \int_{\{x\in X: M_\eta f(x)>\lambda\}} \phi\left(\frac{1}{\lambda}M_\eta f(x)\right) w(x)d\mu(x) \\ &\geq \phi(1)w(\{x\in X : M_\eta f(x) > \lambda\})\end{aligned}$$

Luego, de (3.38), con $\tilde{C} = max\{1, C/\phi(1)\}$ y usando el hecho que $\psi \circ \eta$ es convexa se tiene

$$\begin{aligned}w(\{x\in X : M_\eta f(x) > \lambda\}) &\leq \frac{C}{\phi(1)}\int_X \psi\circ\eta\left(C\frac{1}{\lambda}|f(x)|\right) w(x)d\mu(x) \\ &\leq \int_X \psi\circ\eta\left(C\tilde{C}\frac{1}{\lambda}|f(x)|\right) w(x)d\mu(x)\end{aligned}$$

para todo $\lambda > 0$. Así hemos probado la desigualdad

$$w(\{x\in X : M_\eta f(x) > \lambda\}) \leq \int_X \psi\circ\eta\left(C\frac{1}{\lambda}|f(x)|\right) w(x)d\mu(x).$$

Entonces, por definición **2.32**, $w \in B_\psi^\eta$. Más aún por la caracterización de dicha clase dada en (2.38) existe una constante positiva ε_o tal que la función de Young complementaria $\tilde{\psi}$ satisface

$$\int_{B_n} \tilde{\psi}\left(\frac{\varepsilon_o w(B_n)}{\mu(B_n)}\frac{1}{w(x)}\right) w(x)d\mu(x) \leq w(B_n) \tag{3.40}$$

para toda bola B_n. Sin embargo para $n > 0$ lo suficientemente grande como para que $1/2^n < \varepsilon_o$, se tiene, por ser ψ creciente, por definición de G_n y por (3.35), que

$$\begin{aligned}\int_{B_n} \tilde{\psi}\left(\frac{\varepsilon_o w(B_n)}{\mu(B_n)}\frac{1}{w(x)}\right) w(x)d\mu(x) &\geq \int_{G_n} \tilde{\psi}\left(\varepsilon_o\frac{w(B_n)}{\mu(B_n)}\frac{1}{w(x)}\right) w(x)d\mu(x) \\ &\geq \int_{G_n} \tilde{\psi}(2^n)w(x)d\mu(x) \\ &= \tilde{\psi}(2^n)w(G_n)\end{aligned}$$

$$> \quad w(B_n)$$

lo que contradice (3.40). En consecuencia $w \in A_1$ y el teorema queda demostrado. ($\Box$)

Conclusiones

Los resultados fundamentales para los operdores maximales generalizados -en espacios de tipo homogéneo- que obtuvimos en este trabajo se exponen a modo de resumen en los siguientes cuatro teoremas, los dos primeros involucran estimaciones modulares y en norma con y sin peso y una condición de tipo Dini y los otros dos permiten una caracterización para la clase de pesos A_1.

Teorema 3.41. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo con medida infinita y que contiene al menos un punto x tal que $\mu(\{x\}) = 0$. Sean a, b, ϕ y ψ como en la definición* **3.1** *y η una función de Young doblante. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(3.42) *(Condición de Dini) Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_0^{2t} \frac{a(s)}{s}\eta'\left(\frac{t}{s}\right) ds \leq Cb(Ct)$$

es cierta para todo t positivo.

(3.43) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_X \phi(M_\eta f(x))w(x)d\mu(x) \leq C\int_X \psi(C|f(x)|)Mw(x)d\mu(x)$$

es cierta para toda f positiva y cada peso w.

(3.44) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\|M_\eta f\|_{\phi,w} \leq C\|f\|_{\psi,Mw}$$

es cierta para toda f positiva y cada peso w.

(3.45) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_X \phi(M_\eta f(x))d\mu(x) \leq C \int_X \psi(C|f(x)|)d\mu(x)$$

es cierta para toda f positiva.

(3.46) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_X \phi\left(\frac{Mf(x)}{M_{\tilde{\eta}}(\psi^{-1}(u(x)))}\right) w(x)d\mu(x) \leq C \int_X \psi\left(C\frac{f(x)}{\psi^{-1}(u(x))}\right) Mw(x)d\mu(x)$$

es cierta para toda f positiva y todos los pesos w y u.

(3.47) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\|M_\eta f\|_\phi \leq C\|f\|_\psi$$

es cierta para toda f positiva.

Teorema 3.48. *En las hipótesis del teorema* **3.41** *pero en un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ) con $\mu(X) < \infty$, las afirmaciones* (3.42) *a* (3.45) *son equivalentes.*

Teorema 3.49. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo con medida infinita. Sean a, b, ϕ, ψ y η como en* **3.1**. *Si $w \in A_1$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(3.50) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_0^{2t} \frac{a(s)}{s}\eta'\left(\frac{t}{s}\right) ds \leq Cb(Ct)$$

es cierta para todo t positivo .

(3.51) *Existe una constante positiva C tal que la desigualdad*

$$\int_X \phi(M_\eta f(x))w(x)d\mu(x) \leq C \int_X \psi(C|f(x)|)w(x)d\mu(x)$$

es cierta para toda f positiva y cada peso w .

Teorema 3.52. *Si la condición* (3.50) *implica* (3.51) *para cada función positiva, continua a, b, ϕ y ψ como en el teorema* **3.49** *y η una función de Young submultiplicativa entonces $w \in A_1$.*

El teorema **3.41** recupera el resultado que C. Pérez y R. Wheeden en [PW] realizan considerando $a(t) = b(t) = pt^{p-1}$ en el contexto de los espacios de tipo homogéneo con medida infinita y no atómico. Además hemos aportado una versión para el caso de espacios con medida finita como se prueba en el teorema **3.48**. En cuanto a los teoremas **3.51** y **3.52** constituyen una extensión a los espacios de tipo homogéneos y a la vez una mejora de dos resultados probados por H. Kita en $\mathbb{R}^n$ en [K2] y [K1]. Como cierre, queremos también hacer énfasis en dos aspectos particulares:

Por un lado, la importancia de estudiar y obtener resultados sobre los operadores maximales generalizados por las aplicaciones que tienen en distintos ámbitos, por ejemplo en la teoría de conmutadores de integrales singulares.

Por otro lado, poner de relieve la posibilidad que esta tesis genera de trabajar sobre nuevos problemas de acotación para otros operadores del análisis armónico.

Bibliografía

[A] H. Aimar, *Singular integrals and approximate identities on spaces of homogeneous type*,Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 292, N°1(1985), 135-153.

[B] R. J. Bagby, *Weak bounds for the maximal function in weighted Orlicz spaces*, Studia Mathematica, T. XCV (1990), 195-204.

[BHP] A. Bernardis, S. Hartzstein y G. Pradolini, *Weighted inequalities for conmutators of fractional integrals on spaces of homogeneous type*, J. Math., Anal. Appl. **322**, (2006), 825-846.

[CW] R.R. Coifman and G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains spaces homogènes*, in Lecture Notes in Math., Vol. 242, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1971.

[CS] W. Cheng y E. Sawyer, *Endpoints estimates for conmutators of fractional integrals on spaces of homogeneous type*, J. Math. Anal. Appl. 282, 2003, pp. 553-566.

[DLZ] Y. Ding, S.Z. Lu and P. Zhang, *Weak estimates for commutators of fractional integral operators* Science in China (Series A), Vol.44 **7**(2001), 877-888.

[HSV] E. Harboure, O. Salinas, B. Viviani, *Orlicz boundedness for certain classical operators*, Colloquium Mathematicum, **91,2**, (2002), 263-282.

[K1] H. Kita, *Inequalities with weights for maximal functions in Orlicz spaces*, Acta Math. Hungar, **72,4**, (1996),pp. 291-305.

[K2] H. Kita, *Weighted inequalities for iterated maximal functions in Orlics spaces*, Mathematische Nachrichten, V.178 (2005), pp. 1180-1189.

[MS] R. Macías and C. Segovia, *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*, Adv. Math., **33**, (1979), 257-270.

[MST] R. Macías, C. Segovia and J.L. Torrea, *Singular integral operators with non-necessarily bounded kernels on spaces of homogeneous type*, Advances in Math., **93**, No. 1. (1992).

[P] C. Pérez, *On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L^p spaces with different weights*, Proc. London Math. Soc.3, 71, pp. 135-157 (1995).

[PS] G. Pradolini and O. Salinas, *Maximal operators on spaces of homogeneous type*, Proc. of A.M.S., **132, 2** (2003), 435-441.

[PW] C. Pérez and R. Wheeden, *Uncertainty principle estimates for vector fields*, J. Funct. Anal., **181** (2001), 146-188.

[RR] M.M. Rao, Z. D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker,Inc. 1991