XX Encuentro de Jóvenes Investigadores
de la Universidad Nacional del Litoral
18 y 19 de Octubre de 2016

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CATEGORÍAS: APLICACIONES A LA LÓGICA ALGEBRAICA

Font Federico[A]

[A]*Facultad de Ingeniería Química UNL*

Área: Ciencias Exactas
Sub-Área: Matemática
Grupo: X

Palabras clave: Categorías, lógica, álgebra

INTRODUCCIÓN

La teoría de categorías fue formalmente introducida en 1945, por MacLane y Eilenberg. Sus orígenes se fundamentan en la topología algebraica, donde se desarrollan construcciones conectando ciertas topologías con álgebras, más precisamente, con grupos. La teoría creció rápidamente, consolidándose como una disciplina abstracta y es hoy en día una rama substancial de las matemáticas. Su fuerte impacto reside en su capacidad para fundamentar las matemáticas y proveer medios elegantes y poderosos para expresar relaciones entre distintas ramas de esta disciplina, visualizar y contextualizar diferentes teorías dentro de un marco común.

Una categoría puede pensarse como un universo para una clase particular de discurso matemático. Este universo se determina especificando los objetos y las flechas, que relacionan los distintos objetos. Por ejemplo, podemos considerar la categoría formada por una clase de espacios topológicos (objetos) y funciones continuas (flechas); la categoría formada por espacios vectoriales (objetos) y transformaciones lineales (flechas); la categoría algebraica de los grupos conmutativos y sus morfismos, entre otras. A su vez tanto los objetos como las flechas deben satisfacer ciertos axiomas específicos. Uno de los más importantes es que dadas dos flechas f de a en b y g de b en c, con a, b, c objetos, siempre debe existir una flecha g°f de a en c, que se la denominará composición de g con f. Esta condición se la puede expresar gráficamente diciendo que un cierto diagrama es conmutativo. Dichos diagramas son característicos de la teoría de categorías, y son utilizados habitualmente para expresar propiedades.

La teoría de categorías ocupa un rol central en las matemáticas actuales. También es utilizada en las ciencias de la computación, la física matemática, la lógica y la filosofía. Es una teoría general de estructuras y sistemas de estructuras; provee un marco conceptual que permite ver los componentes universales de una familia de estructuras de un tipo dado y relacionar distintos tipos de estructuras.

Cuando uno cuenta con dos categorías equivalentes o dualmente equivalentes, posee una manera de pasar de ciertas construcciones de la primera a la segunda y viceversa. Actualmente, la teoría de categorías es una herramienta fundamental para el estudio de distintas estructuras algebraicas, puesto que permite relacionarlas con

Proyecto: CAI+D 501 201101 00172 LI, “Tópicos Avanzados de algebra”
Directora del proyecto: Manuela Busaniche
Directora del becario: Manuela Busaniche

otras estructuras matemáticas, como ser, espacios topológicos o categorías geométricas.

El puntapié inicial de su aplicación en la lógica algebraica es el famoso teorema de representación de Stone, en el que se prueba que toda álgebra de Boole, semántica de la lógica clásica es categóricamente equivalente a un espacio topológico con ciertas propiedades. Esto implica que nociones algebraicas pueden estudiarse dualmente en la categoría de espacios topológicos de Stone y viceversa. Actualmente, son muchas las equivalencias categóricas entre semánticas algebraicas de distintas lógicas y otras categorías. En el proyecto de investigación en el cual se inscribió la beca en la que se enmarco el presente trabajo, son utilizadas dualidades y equivalencias categóricas para el estudio de semánticas de lógicas multivaluadas. Por ejemplo, como parte de un proyecto de investigación se ha publicado el artículo de Busaniche y col. (2014) en donde se obtuvo una equivalencia entre una subcategoría de MV-álgebras (álgebras correspondientes a la lógica infinito-valuada de Lukasiewicz) y poliedros en el espacio real n-dimensional. De esta manera se observa como las técnicas geométricas utilizadas en la categoría de poliedros pueden emplearse para obtener resultados sobre las MV-álgebras.

En el proyecto trabajado en el marco de la beca hemos estudiado definiciones y construcciones elementales de esta teoría e investigado su aplicación en la lógica algebraica. El objetivo fue aprender nociones de categorías, comprender su implementación a ejemplos concretos y apreciar el potencial de esta teoría en las aplicaciones matemáticas.

OBJETIVOS

- Hemos aprendido las nociones básicas de la teoría de categorías, que es una teoría de gran uso actualmente en numerables aplicaciones y no está comprendida en los cursos básicos de la carrera por el grado de abstracción de la misma y la complejidad de sus ejemplos.
- Hemos estudiado ejemplos concretos de equivalencias categóricas para la lógica algebraica. Cada uno de estos ejemplos no solo nos muestra el potencial de la teoría, sino que involucra el estudio de muchos temas profundos y relaciona e integra distintas teorías y herramientas de la matemática, algunas aprendidas de forma aislada a lo largo de la carrera.
- Hemos tenido contacto con diferentes fuentes de información, ya que se han investigado los temas de distintos libros como así también de publicaciones en revistas. El análisis de las publicaciones y la familiaridad con este tipo de textos es indispensable en la investigación científica.
- Hemos presentado ante colegas los temas aprendidos, para lo que fue necesaria la realizar una presentación oral de los mismos, que conllevó un trabajo de síntesis y esquematización.
- Hemos redactado una monografía con los temas aprendidos. La redacción requirió:

1. selección de resultados más importantes,
2. unificación de la notación,
3. integración de los distintos temas, para ponerlos bajo un marco común,
4. búsqueda de bibliografía relacionada con lo estudiado,
5. aprendizaje de la forma de los trabajos matemáticos y del uso de editor de textos matemáticos.

METODOLOGÍA

El estudio realizado es de carácter teórico. La metodología utilizada fue la lectura y comprensión de los temas, junto con la elaboración de una monografía final, con el objetivo de afianzar y dar forma a los conceptos adquiridos, así como introducirse en la elaboración de textos académicos, capacidad necesaria para el posterior ejercicio de la profesión, ya sea en la realización de un posgrado, como en el ámbito laboral.

Hemos comenzado estudiando libros básicos sobre la teoría de categorías, utilizando para ello distintas fuentes bibliográficas para estudiar los conceptos básicos, entre ellos (McLane, 1971; Goldblatt, 2006; Borceux, 1994). Como parte del trabajo de iniciación a la investigación, fue recalcable la consulta sobre variados autores, permitiendo comprender las ideas esenciales de la teoría, comparar notaciones y familiarizarse con ejemplos.

Luego de haber sido debidamente aprendidas las herramientas básicas de la teoría de categorías, nos hemos enfocado en aplicaciones concretas de equivalencias categóricas en la lógica algebraica: estudiamos retículos distributivos equivalentes a espacios topológicos de Priestley, álgebras de Boole y espacios de Stone, y el caso de MV-álgebras y grupos reticulados con unidad fuerte. Con este fin, la bibliografía utilizada para esta segunda etapa ha sido (Davey y col., 2002; Cignoli y col., 2000).

Continuando con la etapa de aprendizaje, y con el objetivo de afianzar la iniciación en la educación científica, algunos ejemplos de equivalencias categóricas publicados en revistas de investigación han sido estudiados y comprendidos. En concreto, se ha hecho hincapié en la equivalencia categórica entre MV-algebras finitamente presentadas y poliedros racionales de Mundici (2011), y la generalización dada por Busaniche y col. (2014). Esta última instancia de lectura y aprehensión resultó ser la de mayor importancia en el marco del trabajo de la beca, puesto que los textos presentados en los trabajos publicados presentaron un desafío de mayor magnitud, en el sentido de que están escritos en un lenguaje más técnico y especializado, siendo el tipo de trabajos que deberán ser enfrentados en una posterior tarea de formación académica de posgrado.

Para finalizar, se ha elaborado una monografía, englobando los conocimientos principales adquiridos a lo largo del año de duración de la beca, con el fin de primero de afianzar los conocimientos adquiridos, así como dejar sentado un texto de consulta básico para aquellos que dese El estudio realizado es de carácter teórico. La metodología utilizada fue la lectura y comprensión de los temas, junto con la elaboración de una monografía final, con el objetivo de afianzar y dar forma a los conceptos adquiridos, así como introducirse en la elaboración de textos académicos, capacidad necesaria para el posterior ejercicio de la profesión, ya sea en la realización de un posgrado, como en el ámbito laboral.

Remarcamos además el hecho de haber comenzado la lectura de un nuevo tema, relacionado con los anteriores vistos, teoría de Topos. La misma se comenzó una vez finalizado el cronograma planificado en el plan de la beca propuesto inicialmente, y habiendo tiempo para la iniciación del estudio del mismo. A su vez se continuará con la misma una vez finalizado el período estipulado por el reglamento de la beca.

RESULTADOS/CONCLUSIONES

Como se mencionó anteriormente, los resultados estudiados son detallados en una monografía, que integra los distintos temas investigados. Cabe aclarar que la monografía provee de un material interesante para aquellas estudiantes interesados en estudiar ejemplos de equivalencias de categorías en lógica algebraica, ya que no se cuente con material que integre los distintos ejemplos en una sola fuente.

Algunos de los temas han sido expuestos en reuniones del grupo de álgebra y lógica algebraica del Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL), de doble dependencia CONICET-UNL, para las cuales presentaciones fueron preparadas con herramientas de apoyo visuales.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Borceux F., 1994. Handbook of categorical algebra I. Cambridge University Press.

Busaniche M., Cabrer L., Mundici D., 2014. Polyhedral MV-algebras. Fuzzy Sets and Systems, 292, 150-159.

Cignoli R., D'Ottaviano I.M.L., Mundici D., 2000. Algebraic foundations of many-valued reasoning. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston / London.

Davey B., Priestley H., 2002. Introduction to Lattices and Order, second edition. Cambridge University Press.

Goldblatt R., 2006. Topoi: the categorical analysis of logic. Dover Publications, inc.

Mac Lane S., 1971. Categories for the working mathematician. Srpinger-Verlag.

Mundici D., 2011. Finite axiomatizability in Lukasiewicz logic. Annals of Pure and Applied Logics, 162, 1035-1047.