

## **EL LUGAR GEOMÉTRICO... UN LUGAR PARA CONJETURAR**

**Hurani Cintia Ailén<sup>A</sup>**

<sup>A</sup> *Facultad de Humanidades y Ciencias, UNL*

**Área:** Humanidades

**Sub-Área:** Ciencias de la Educación.

**Grupo:** X

**Palabras clave:** lugar geométrico, GeoGebra, actividad demostrativa.

### **INTRODUCCIÓN**

En este trabajo se presenta el análisis previo de una propuesta de problemas de lugar geométrico y se comentan cuestiones generales observadas en su implementación en la cátedra Taller de Geometría con alumnos de tercer año del profesorado de matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral. La propuesta consiste en presentar tres problemas de lugar geométrico con el propósito de analizar e identificar dificultades que surgen desde la actividad demostrativa, la visualización y del uso del software, examinar argumentos utilizados por los estudiantes e indagar acerca de los recursos y estrategias que pueden favorecer los procesos de formulación y validación de conjeturas, intentando generar en los estudiantes una verdadera necesidad de validar sus conjeturas no solo como un requerimiento externo para convencer, sino también para convencerse.

### **MARCO DE REFERENCIA**

El concepto de lugar geométrico involucra a la doble implicación dado que todos los puntos que verifican una determinada propiedad describen un determinado lugar geométrico y que, todos los puntos de dicho lugar geométrico verifican esa propiedad. Según Novembre, Nicodemo y Coll (2015) las computadoras ayudan a la comprensión ya que la tecnología aporta múltiples representaciones de objetos matemáticos brindando la posibilidad de relacionarlos dinámicamente influyendo en la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, y en especial de la geometría, a partir de la posibilidad de visualizar. Destacan además que ofrecen la posibilidad de explorar, actividad necesaria para fomentar la actividad demostrativa.

Como plantea Santos Trigos (2011), el uso de software permite trazar fácilmente el camino que describe un punto, segmento, triángulo, etc; cuando se mueve respecto a otros elementos, ofreciendo la oportunidad al estudiante de analizar y describir tal lugar geométrico en término de propiedades.

La demostración se hace presente cuando las conjeturas o propiedades deben ser demostradas. Es un objetivo a lograr que los estudiantes del Profesorado en Matemática aprendan a demostrar, según Lara Quintero- Samper (2015), a la actividad demostrativa se la entiende como la realización de dos procesos no necesariamente independientes. En el primer proceso se establecen conjeturas a partir de las evidencias que provee la exploración de la situación con geométrica dinámica, hecho que favorece al convencimiento de su validez. En el segundo proceso se justifica, se

<sup>A</sup> Proyecto: *"Estudios de procesos de validación en la producción de conocimientos en clases de matemática de distintos niveles educativos"*.

Director del proyecto: Ana María Mantica

Director del becario: María Susana Dal Maso

valida la conjetura dentro de un sistema teórico.

Estas, entre otras, son las dificultades que generan un desafío en el docente universitario, con la tarea de diseñar ambientes de aprendizajes para el desarrollo de competencia demostrativa y utilizar un software de geometría dinámica que propicie el proceso de reflexión, “Lo relevante en esta visión es que el estudiante desarrolle recursos, estrategias y herramientas que le permitan recuperarse de dificultades iniciales y robustecer sus formas de pensar acerca de su propio aprendizaje y la resolución de problemas.” (Santos Trigo, 2008).

## METODOLOGÍA

En esta investigación de modalidad cualitativa se realiza un estudio de caso, cuyo objetivo es recolectar información acerca de las estrategias utilizadas en la asignatura Taller de Geometría por los estudiantes del profesorado en matemática al momento de argumentar y validar lugares geométricos y acerca del papel que cumple un software de geometría dinámica al momento de realizar conjeturas para su posterior análisis. Para tal fin se mencionan como instrumentos de recolección de datos una guía de problemas de lugar geométrico, grabaciones de audio, los registros de los estudiantes realizados en papel y lápiz y los archivos realizados en el software.

En este trabajo se presenta el análisis previo realizado al momento de elaborar la guía de problemas a implementar y se comentan algunas cuestiones generales observadas luego de la implementación de la misma. En primera instancia se buscan y examinan problemas que permitan recolectar la información deseada, de esta búsqueda se seleccionan once problemas probables de lugar geométrico para su utilización, se analiza cada uno de ellos con un software libre de geometría dinámica (GeoGebra), se hallan los lugares geométricos reflexionando sobre el potencial de cada uno y se consideran procedimientos esperados que pueden surgir en la tarea desarrollada en clase por los estudiantes. Del análisis realizado se efectúa una nueva selección eligiendo tres de los once problemas.

### Desarrollo

La propuesta consta de tres problemas ordenados, según nuestro análisis, en grado de dificultad creciente. Los alumnos realizan las actividades en el horario de cursado de la asignatura Taller de Geometría, considerando que, al momento de implementar la propuesta cuentan con algunas competencias propias del pensamiento geométrico.

La primera tarea de la guía, “*Determinar el lugar geométrico del centro de todas las circunferencias que son tangentes a dos rectas  $l_1$  y  $l_2$  que se cortan*”, se presenta con el fin de que los estudiantes, teniendo acceso a los libros de la cátedra, recuerden propiedades, definiciones, relaciones geométricas y comandos básicos del software. En la búsqueda de la solución de este problema puede que surjan cuestionamientos sobre la perpendicularidad o no de las rectas secantes o sobre las condiciones que deben cumplir las circunferencias para ser tangentes a ambas rectas. Puede que se indague sobre la existencia de alguna herramienta del software GeoGebra que permita realizar de modo directo la construcción de las circunferencias tangentes a ambas rectas. El software cuenta con una herramienta que permite realizar rectas tangentes a una circunferencia dada, sin embargo, la misma no da la opción de realizar circunferencias tangentes a dos rectas secantes dadas.

Luego de la implementación de la propuesta se observa en las grabaciones de audio, que surgen durante la realización de la primera tarea, cuestionamientos como: ¿las circunferencias son tangentes a ambas rectas?, ¿las rectas pueden ser perpendiculares?, sin embargo, estos cuestionamientos no se evidencian en los archivos realizados en GeoGebra dado que los estudiantes logran realizar la

construcción de la situación planteada. Respecto a los registros escritos, uno de los grupos pretende justificar un argumento correcto, los centros de todas las circunferencias tangentes a dos rectas que se cortan pertenecen a la bisectriz de los ángulos que las rectas determinan, basándose en la afirmación errónea de que todos los puntos de las circunferencias tangentes a dos rectas equidistan de dichas rectas.

La segunda propuesta, “*En un triángulo ABC, el lado BC es fijo y el ángulo BAC es constante de amplitud  $60^\circ$ . Al variar el vértice A: a) determinar el lugar geométrico de los pies de la altura trazada desde B. b) determinar el lugar geométrico del ortocentro del triángulo ABC*”, no es sólo un problema de lugar geométrico sino también un problema de construcción. Es indispensable, para visualizar el lugar geométrico, construir la figura geométrica que debe cumplir con ciertas condiciones iniciales que figuran en los datos del problema, pero realizar con éxito la construcción, conlleva a plantearse la discusión sobre la cantidad de soluciones del problema de construcción. Sin lugar a dudas un sistema de geometría dinámica es el escenario adecuado para buscar estas soluciones.

La tarea se presenta a la mitad de las parejas en su formato original y a las demás con una variante: En un triángulo ABC, el lado BC es fijo y el ángulo BAC es constante de amplitud  $60^\circ$ . Al variar el vértice A: **a)** determinar el lugar geométrico de los pies de la altura trazada desde B. **b)** determinar el lugar geométrico del ortocentro del triángulo ABC. Esta idea surge ya que, al analizarlo como posible problema a trabajar con los estudiantes, la autora junto con su directora se cuestionan acerca de la condición impuesta sobre la construcción antihoraria del triángulo ABC y sobre las consideraciones a tener en cuenta si dicha condición no es usada y si modifica o no el resultado de la consigna original.

Al analizar los archivos realizados en el software y los registros escritos por los estudiantes en referencia a esta segunda tarea, se observa que ninguna de las parejas cuya consigna tenía la condición del triángulo ABC antihorario, se cuestiona acerca de lo que implica esta condición y si modifica o no la construcción del problema el hecho de descartarla. Por otra parte, las parejas que no reciben en la consigna la condición impuesta, no tienen en cuenta que la construcción en este caso está dada por un triángulo ABC antihorario y su simétrico. Otra de las cuestiones notables observadas al analizar las grabaciones de audio es que, al momento de realizar la construcción del triángulo con las condiciones pedidas surge un gran debate en la totalidad de las parejas acerca de cómo lograrla.

Al reflexionar sobre los procedimientos esperados, la autora y su directora apuestan a que surja sin demasiada complejidad la construcción del arco capaz para la construcción del triángulo. De los audios registrados, se concluye que a pesar de generar esta construcción dudas y controversias en los estudiantes, las parejas logran realizar la construcción recurriendo a métodos que utilizan de forma implícita el concepto de arco capaz.

La tercera tarea propuesta, *determinar el lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias tangentes a dos circunferencias concéntricas dadas*, es seleccionada por las implicancias teóricas que se ponen en juego como así también la necesidad de reflexionar sobre diferentes alternativas en relación a las posiciones entre las circunferencias en búsqueda de la solución del problema. No basta solo con la utilización del software para hallar el lugar geométrico, sino que se requiere del conocimiento de argumentos teóricos que iluminarán el proceso de exploración. La herramienta *lugar geométrico* del software Geogebra permite encontrar una curva determinada por un punto que depende de otro punto que se mueve en una figura construida, objeto o deslizador. Es decir, se necesita que un punto dependa del movimiento de otro para desplazarse.

Luego de la implementación de la propuesta, se observa que la totalidad de las parejas tiene en cuenta solo un caso, de los dos posibles, en que las circunferencias

son tangentes a las dos concéntricas dadas. Queda en evidencia en este ejercicio, que si bien tener conocimientos del software facilita el hecho de hallar el lugar geométrico, su uso debe ser combinado con conocimientos geométricos para poder producir los resultados deseados.

## REFLEXIONES FINALES

Para aprender a demostrar es necesario que los estudiantes se involucren en la actividad demostrativa, y los problemas de lugares geométricos son un campo favorable para lograrlo. "...el uso de un software de geometría dinámica...es un medio para viabilizar la participación de los estudiantes; este recurso proporciona un entorno en el que acciones como la exploración empírica, la comunicación, y la validación de los enunciados se pueden propiciar."(Molina, Samper, Perry y Camargo, 2011, p.76). Reflexionar sobre procesos de razonamiento que se ponen en juego en la construcción de conjeturas, y durante la validación de las mismas, permite realizar procesos didácticos bien planificados, que tengan en cuenta dificultades que los estudiantes tienen que vencer.

Se propone en este trabajo dar cuenta del análisis previo de las tareas a desarrollar con los estudiantes, comentar algunas evidencias de las producciones por ellos registradas e identificar recursos y estrategias que favorecen u obstaculizan los procesos de formulación y validación de conjeturas.

## BIBLIOGRAFIA BÁSICA

**Dal Maso, M., Hurani, M;** 2016. Algunas consideraciones sobre una propuesta de resolución de problemas de lugares geométricos con GeoGebra. En *memorias de VI Reunion Pampeana de Educación matemática*. Disponible en [http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/descargas/MemoriasVIREPEM2016\\_completas.pdf](http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/descargas/MemoriasVIREPEM2016_completas.pdf)

**Lara Quintero, L. F y Samper, C.;** 2015. Logros y desaciertos cuando se aprende a demostrar. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.2, 113-132.

**Molina, O., Samper, C., Perry, P. y Camargo, L.;** 2011. *Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema*. Revista Integración. Vol 29 N°1 73-96. Escuela de Matemáticas Universidad Industrial de Santander. Bogotá

**Novembre, A., Nicodemo, M. y Coll, P.;** 2015. *Matemática y TIC: orientaciones para la enseñanza*. Ciudad autónoma de Bs As: ANSES.

**Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Molina, O. y Echeverry, A.;** 2010. *Geometría dinámica: Su contribución a la comprensión de condicionales de la forma si- entonces*. Educación Matemática. 22. 3, 119-142. Santillana. México.

**Santos Trigo, L. M.;** 2008. La resolución de problemas matemáticos Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. *Educación Matemática XII*. España.

**Santos Trigo, L. M.;** 2011. La educación matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Año 6, 8, 35-54. Costa Rica.

**Villar, D.;** 2006). Geometría 2°. Lugares geométricos-Repertorio Práctico. Fecha de consulta: 26-03-2016. URL: <http://www.x.edu.uy/LGpractico2006.pdf>

Lugares Geométricos. Fecha de consulta: 26-03-2016  
[http://www.sectormatematica.cl/media/diferenciado/NM3\\_lugares\\_geometricos.doc](http://www.sectormatematica.cl/media/diferenciado/NM3_lugares_geometricos.doc)