GEO

Adriana Engler
Daniela Müller
Silvia Vrancken
Marcela Hecklein

GEO

GEOMETRÍA

GEOMETRÍA ANALÍTICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Rector Enrique Mammarella
Director de Planeamiento y Gestión Académica Daniel Comba
Directora Ediciones UNL Ivana Tosti

. . . .

Engler, Adriana
Geometría / Adriana Engler ; YR. - 2a ed . - Santa Fe : Ediciones UNL, 2019.
Libro digital, PDF - (Cátedra)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-749-135-7

1. Geometría. 2. Matemática. I. Título.
CDD 516

. . . .

© Adriana Engler, Daniela Müller,
Silvia Vrancken, Marcela Hecklein, 2020.

© edicionesUNL, 2020

Coordinación editorial
María Alejandra Sedrán
Coordinación diseño
Alina Hill
Producción general
Ediciones UNL

—
editorial@unl.edu.ar
www.unl.edu.ar/editorial

. . . .

BY NC ND

hdl.handle.net/11185/2309

Geometría Analítica

Adriana Engler
Daniela Müller
Silvia Vrancken
Marcela Hecklein

A los míos, por su gran amor y paciencia
A mi mamá, siempre conmigo
Adriana

A la memoria de mi madre
A mis hijos, María, Magdalena y Martín
Daniela

A Fernando, Melina y Roberto
Silvia

A Carlos y Martín
Marcela

Prólogo

Al iniciar sus estudios de Geometría con Euclides, uno de sus alumnos, en cuento aprendió la primera de sus proposiciones, le preguntó: "¿Qué sacaré con saber esto?". Entonces Euclides llamó a su esclavo y le dijo: "Dadle tres monedas, pues, según dice, todo lo que aprende debe rendir un beneficio." (Estobeo)

La creatividad matemática no es privilegio de ninguna cultura ni civilización en particular y tampoco corresponde a ninguna época. La influencia, importancia y el papel relevante de la matemática en nuestra sociedad fue en constante crecimiento en especial por el gran aumento de sus aplicaciones. Podemos decir que la matemática está presente en casi todas las actividades humanas. Su presencia en la vida cotidiana de la mayoría de las personas es constante. La universalidad de la matemática hace que hoy resulte indispensable en las ciencias de la naturaleza, ciencias sociales y ciencias económicas. La comprensión del mundo actual con sus avances tecnológicos y la gran cantidad de información hace necesario familiarizarse con ciertas nociones matemáticas.

La construcción del conocimiento matemático implica flexibilidad y movilidad. Sabemos que es importante desarrollar una forma de conocimiento a través de la cual se organice información, se resuelvan problemas, se interprete la realidad y se tomen decisiones. Como docentes debemos ser reflexivos y analíticos en la selección y aplicación de contenidos y desarrollarlos desde distintos enfoques. Las historias e ideas del pasado son muy ricas en matemática.

Las nuevas ideas y tendencias en Educación Matemática están centradas en el desarrollo de una disciplina que permita a los alumnos apropiarse del conocimiento matemático fomentando la autonomía de pensamiento, la capacidad de aprender matemáticamente, de razonar, elaborar conclusiones, generalizar, demostrar, descartar y elaborar conclusiones.

Decidimos generar esta nueva obra como desprendimiento de nuestro primer trabajo "Matemática Básica" después de compartir muchos años de experiencia áulica. Si bien los escribimos pensando en nuestros estudiantes, alumnos de Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral, consideramos que resulta un material también interesante para docentes y estudiantes de los primeros niveles de las carreras de grado y para docentes del polimodal. Nuestro objetivo no es hacer de ellos expertos en matemática sino que buscamos hacerlos sentir cómodos en un ambiente donde cada vez se hace más importante lograr trabajar con la matemática de manera dinámica y valerse de sus contenidos y técnicas para resolver los problemas que se presentan en el área de la especialidad. Pretendemos que descubran el inmenso potencial de la matemática teniendo en cuenta sus propios valores y su carácter instrumental.

Presentamos los contenidos básicos y métodos de la geometría con énfasis en su aplicación en la resolución de problemas del campo de la administración, economía, biología y ciencias sociales. Los temas desarrollados corresponden a vectores en el plano y el espacio, coordenadas cartesianas y polares, recta en el plano, cónicas, plano y recta en el espacio. Para la realización de este trabajo tuvimos en cuenta que el estudiante no aprende matemática si sólo maneja símbolos y técnicas de resolución. Teniendo en cuenta la valoración de la matemática como disciplina para resolver problemas, se torna absolutamente necesario que maneje con facilidad el lenguaje matemático. Para los futuros profesionales es fundamental la resolución de problemas durante su período de formación y, en especial, durante su educación matemática a fin de contribuir en el desarrollo de sus capacidades.

Comprometidas en ayudar a desarrollar un pensamiento matemático, estamos convencidas de que este libro constituye en aporte para la educación matemática de nuestros jóvenes. Respeta criterios pedagógicos y didácticos tendientes a una forma de aprendizaje amena y accesible con abundantes ejemplos, contempla y busca dar respuestas a la problemática de la motivación, intentando vencer el desafío de despertar el entusiasmo para estudiar matemática en alumnos de carreras no matemáticas, la construcción del conocimiento, integración de contenidos y aplicaciones y la resolución de problemas.

CARACTERÍSTICAS DE LA OBRA

A lo largo de la misma se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos:

- Los nuevos conceptos se presentan por medio de ejemplos que generan la necesidad de desarrollar nuevas técnicas.
- Un enfoque donde se desarrolla el concepto matemático para después reforzarlo con las aplicaciones.
- Un énfasis especial en la comunicación verbal de los conceptos matemáticos mediante la traducción del lenguaje coloquial al lenguaje matemático y viceversa.
- Un cuidado especial en las explicaciones de los conceptos más difíciles teniendo en cuenta la necesidad de aplicar distintos caminos según el grado de dificultad. Se trata de guiar el proceso de pensamiento del alumno hacia la meta propuesta, trabajar en forma intuitiva una idea para después formalizarla tratando de salvar todos los obstáculos.
- Presentación de la teoría con rigurosidad y precisión. En muchos casos, a fin de ganar en claridad, se presentan discusiones intuitivas informales.
- Motivación del alumno a través de valorar la necesidad de saber matemática para, mediante la resolución de problemas, enfrentarse a la futura vida profesional.
- Una gran cantidad y amplia variedad de aplicaciones y problemas para que los estudiantes asuman la utilización de todos los contenidos matemáticos que están aprendiendo.
- Utilización de representaciones gráficas convencidas de que quienes se enfrentan por primera vez a grandes desafíos matemáticos tienen dificultades y, sin embargo, el uso de los gráficos logra un efecto muy importante en la construcción del conocimiento.
- Uso del lenguaje gráfico, numérico y algebraico de manera indistinta.

ORGANIZACIÓN DE LA OBRA

En el desarrollo de los capítulos se incluyen las explicaciones teóricas con abundantes ejemplos y desarrollo de aplicaciones en el campo de la física, ingeniería, biología, economía, ciencias sociales, ecología, química, administración y ciencias naturales. Se presenta una gran cantidad de ejemplos y problemas resueltos a fin de que el alumno observe distintos detalles que aparecen en los mismos y que constituyen su quehacer matemático. Están considerados de manera gradual, según las dificultades. En primer lugar aparecen ejemplos rutinarios para adquirir destrezas, principalmente desde el punto de vista de la operatoria y, en un paso posterior, los de mayor dificultad.

En los mismos se presentan además:

- **Ejercicios de aplicación** del nuevo concepto desarrollado. Aparecen todas las respuestas de manera inmediata a fin de fijar los contenidos y poder avanzar con el desarrollo del tema.
- **Ejercicios integradores** de un tema. Están organizados según los diferentes temas que se presentan en cada capítulo. Se incluyen las respuestas de todos al final del libro.
- **Ejercicios de repaso** de cada uno de los capítulos. Se incluyen guías que reúnen numerosos ejercicios cuyas respuestas figuran al final del libro.
- **Problemas de aplicación.** Se incluyen problemas de aplicación de los diferentes contenidos. Los mismos están organizados por temas y por capítulo. Las respuestas se enuncian al final del libro.
- **Pruebas de opción múltiple y autoevaluaciones** para que, según los diferentes temas y capítulos el alumno compruebe cómo avanza en la adquisición de los conocimientos. Están integradas por novedosos enunciados y las respuestas se encuentran al final del libro.
- **Guías de estudio** referidas a funciones donde se hace hincapié en las representaciones gráficas y en el uso de la computadora como herramienta fundamental para la elaboración de conclusiones.
- **Guías de estudio de teoría** referidas a los distintos contenidos de Vectores y Geometría Analítica.

Como reflexión final compartimos un párrafo que la Dra. María Rosa Farfán Márquez escribió en 1997 en su libro Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio que dice "*Como educadores, no podemos enfrentar a los novicios ante un discurso finamente pulido, impecable, elegante (según los cánones), producto de la conformación de la comunidad científica, pero que oculta las ideas germinales, los andamiajes mentales que el sujeto construye para acceder a las nociones de un concepto; en suma, los procesos y fenómenos subyacentes a la construcción del pensamiento matemático, sin el cual no pueden formarse en el individuo las habilidades mentales que lo posibiliten para generar un nuevo conocimiento, y no sólo el conocimiento matemático*" ... "*la tradición educativa confunde el rigor propio de la matemática, con el rigorismo de su enseñanza y, en esa medida, no contribuye a la formación real de los estudiantes; por el contrario, redunda en el fracaso escolar que hoy padecemos.*"

LAS AUTORAS

Agradecimientos

Desde el año 2000 cuando presentamos, con muchas expectativas, nuestro primer trabajo "Matemática Básica" recibimos numerosas muestras de aliento, sugerencias, comentarios y opiniones que nos motivaron a "seguir trabajando, estudiando, debatiendo, escribiendo..." Hoy "Geometría Analítica" ya es una realidad que nos implica un nuevo desafío.

Este libro, preparado especialmente para nuestros alumnos, surge de las experiencias obtenidas de nuestro trabajo continuo durante casi veinte años en el aula universitaria y de compartir el camino de enseñar y aprender matemática. Por eso un especial agradecimiento a ellos que con sus: "no entiendo", "¿por qué tengo que estudiar esto?", "qué bueno que la matemática me sirva", "¿me puede dar otro ejemplo?", "¿por qué tenemos que saber teoría?", "este ejercicio no me da", "a este problema le sobran datos", "¿qué significan esos símbolos?", "esa respuesta está mal", "¿ustedes no se habrán equivocado? ..." contribuyeron a mejorar nuestros primeros apuntes de cátedra y nuestro primer trabajo.

También, queremos expresar nuestro profundo agradecimiento a las autoridades de la Universidad Nacional del Litoral por permitir que sus docentes publiquen sus obras y, en especial, a las autoridades de la Facultad de Ciencias Agrarias por su aliento y apoyo permanente.

Nuestro especial reconocimiento a la profesora Nelly Vázquez de Tapia por sus palabras de aliento y por acompañarnos en nuestros emprendimientos.
No podemos dejar de agradecer a nuestros colegas, amigos, graduados y a todas aquellas personas que de una u otra manera nos ayudaron y alentaron a continuar con esta tarea docente.

Las críticas, observaciones, comentarios y sugerencias de María Inés nos permitieron mejorar la presentación de los contenidos.
Gracias Daniel, Natalia y Emanuel por acompañarnos.
Estamos muy contentas al poder manifestar un sincero y enorme "muchas gracias" a nuestras familias por su paciencia, la espera y la comprensión por tantas horas de ausencia.

Por último, nuestro profundo agradecimiento a las autoridades y personal del Centro de Publicaciones de la Universidad Nacional del Litoral por la confianza, el interés y la colaboración que recibimos para poder cumplir con nuestro objetivo: la producción de un texto de cátedra para los estudiantes.

Adriana, Daniela, Silvia y Marcela

Contenido

1. VECTORES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

> Mientras el álgebra y la geometría tomaron caminos distintos, su avance fue lento y sus aplicaciones limitadas. Pero cuando las dos ciencias se complementaron, se contagiaron una a la otra de vitalidad, y de ahí en adelante marcharon con ritmo rápido hacia la perfección.

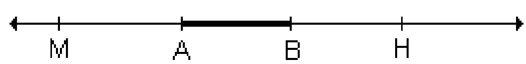
Joseph-Louis Lagrange

1.1 Vectores geométricos

El estudio de los vectores es uno de los desarrollos de la matemática que provienen de la física. En esta ciencia se distingue entre magnitudes escalares y magnitudes vectoriales. Se consideran magnitudes vectoriales aquellas en las que, de alguna manera, influyen la dirección y el sentido en que se aplican. Cuando se plantea un movimiento no basta decir cuánto se ha desplazado el móvil, sino que es preciso decir también en qué dirección y sentido ha tenido lugar el movimiento. Por esto la idea de vector surge de forma natural cuando es preciso indicar la dirección, el sentido y la intensidad de, por ejemplo, una fuerza, la velocidad de un móvil o del viento. Hacia fines del siglo XVIII, Lagrange aritmetiza la física descomponiendo una fuerza según otras tres y Gauss suma geométricamente vectores. Aunque el estudio matemático de los vectores tardó mucho en hacerse formalmente, en la actualidad tiene un gran interés, sobre todo a partir de los estudios de David Hilbert (1862-1943) y Stefan Banach (1892-1945), que hicieron uso de la teoría de espacios vectoriales, aplicándolos a las técnicas del análisis matemático.
La generalización del concepto dio origen a nuevas ramas científicas y nuevas técnicas. La teoría de vectores resulta hoy indispensable, por ejemplo, en matemática, física y planificaciones económicas.
Enunciamos a continuación algunas definiciones importantes para el desarrollo de este capítulo.

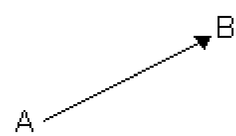
Definición: En geometría elemental, se define al segmento $\overline{AB}$ igual al $\overline{BA}$ y además:

$$\overline{AB} = \overrightarrow{AH} \cap \overrightarrow{BM}$$

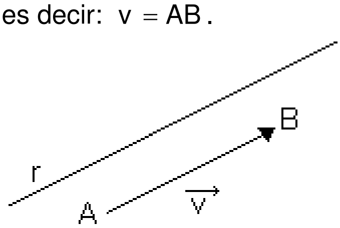


donde $\overrightarrow{AH}$ es la semirrecta de origen en el punto A que contiene a H y $\overrightarrow{BM}$ la semirrecta de origen en el punto B que contiene a M.

Definición: Dados dos puntos A y B, se llama *segmento orientado* $\overrightarrow{AB}$ al segmento que tiene origen en A y extremo en B.



Definición: En el espacio geométrico se llama vector al segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, es decir: $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.



El punto A se llama *origen* del vector mientras que al punto B se lo conoce como *extremo* del mismo.

Sostén o dirección del vector $\vec{v}$: Es la dirección de la recta que determinan los extremos.

Módulo del vector: Es el número real positivo que expresa la distancia entre A y B.

Su notación es: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Sentido del vector: Es el sentido según el cual A precede a B. Es el que indica cuál es el origen y el extremo del vector.

Vector nulo: Es todo vector de módulo cero. Su imagen geométrica es un punto.

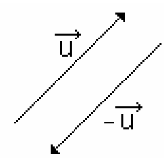
(El vector nulo no tiene dirección ni sentido). Se indica $\vec{0}$.

Definición: Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son *iguales* sí y sólo sí:

- **a)** ambos tienen módulo cero; o bien,
- **b)** ambos tienen igual dirección, sentido y módulo.

Definición: Se llama *versor* a todo vector de módulo uno.

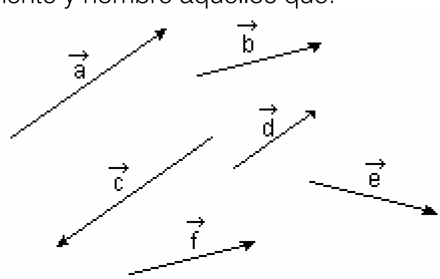
Definición: Dado un vector $\vec{u}$, se llama *opuesto* de $\vec{u}$ y lo designamos como $-\vec{u}$, al vector que tiene igual dirección y módulo que $\vec{u}$, pero sentido contrario:



EJERCICIO

Observe los vectores definidos gráficamente y nombre aquellos que:

- **a)** tienen la misma dirección,
- **b)** poseen el mismo sentido,
- **c)** tienen el mismo módulo,
- **d)** son iguales.



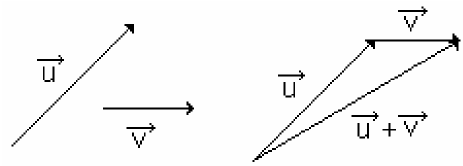
RESPUESTAS

a) $\vec{a}, \vec{c}$ y $\vec{d}$; $\vec{b}$ y $\vec{f}$ **b)** $\vec{a}$ y $\vec{d}$; $\vec{b}$ y $\vec{f}$ **c)** $\vec{b}, \vec{e}$ y $\vec{f}$; $\vec{a}$ y $\vec{c}$ **d)** $\vec{b}$ y $\vec{f}$

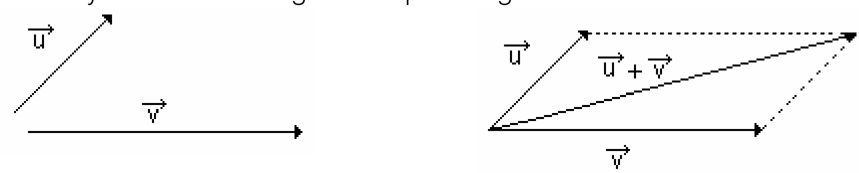
1.2 Operaciones entre vectores

Suma

La suma de dos vectores es otro vector que se obtiene como resultante de la poligonal de dos lados formada por los vectores dados. Se dibuja el vector $\vec{u}$ y se traslada la representación del vector $\vec{v}$ de manera que su origen coincida con el extremo de $\vec{u}$. El vector suma $\vec{u}+\vec{v}$ tiene origen en el origen de $\vec{u}$ y extremo en el extremo de $\vec{v}$.



La suma también puede efectuarse a través de la regla del paralelogramo. Se dibuja un paralelogramo considerando los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con un origen común y lados del mismo. El vector $\vec{u}+\vec{v}$ es el que resulta con origen en el punto común y determina la diagonal del paralelogramo.

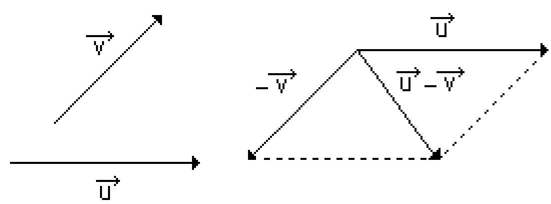


Diferencia

La diferencia entre dos vectores es otro vector que se define como

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$$

La diferencia entre dos vectores es otro vector que se obtiene sumando al minuendo el opuesto del sustraendo.



Producto de un vector por un escalar

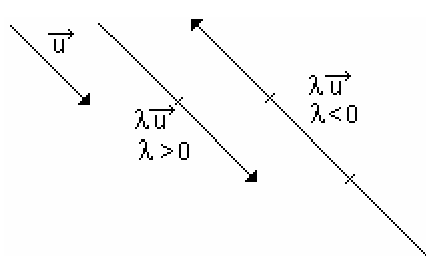
El producto de un vector $\vec{u}$ por un escalar $\lambda \in R$, es otro vector $\lambda\,\vec{u}$ que tiene las siguientes características:

a) $\left|\lambda\,\vec{u}\right| = |\lambda|\left|\vec{u}\right|$

b) Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\lambda \neq 0$, los vectores $\vec{u}$ y $\lambda\,\vec{u}$ tienen igual dirección.

c) Si $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda\,\vec{u}$ tiene igual sentido que $\vec{u}$.

Si $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda\,\vec{u}$ tiene sentido contrario que $\vec{u}$.



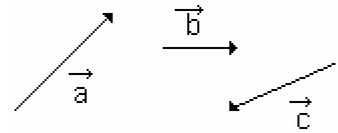
Observaciones:

- Si $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda \vec{u} = \vec{0}$
- Si $\lambda = 1 \Rightarrow \lambda \vec{u} = \vec{u}$
- Si $\lambda = -1 \Rightarrow \lambda \vec{u} = -\vec{u}$

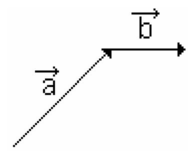
Ejemplo: Grafique tres vectores cualesquiera $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, no paralelos y halle:

a) $\vec{a} + \vec{b}$ **b)** $2\vec{b} - \vec{c}$

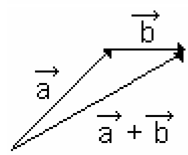
Elijamos los vectores no paralelos:



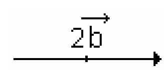
a) Para calcular $\vec{a} + \vec{b}$ hacemos coincidir el extremo de $\vec{a}$ con el origen de $\vec{b}$, es decir:



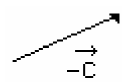
El resultado de la suma es un nuevo vector cuyo origen coincide con el origen de $\vec{a}$ y cuyo extremo con el extremo de $\vec{b}$, o sea:



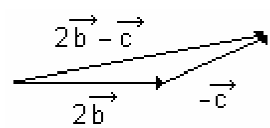
b) Para realizar esta operación debemos hallar primero $2\vec{b}$. Obtenemos un vector de igual dirección y sentido que $\vec{b}$, pero de módulo doble.



Luego calculamos $-\vec{c}$, que es el vector de igual dirección y módulo pero de sentido opuesto a $\vec{c}$:



Para hallar $2\vec{b} - \vec{c}$ le sumamos a $2\vec{b}$ el opuesto de $\vec{c}$, o sea $2\vec{b} + (-\vec{c})$. Gráficamente:



EJERCICIO

Grafique tres vectores cualesquiera, no paralelos, y halle:

a) $\vec{a} + \vec{b}$ **b)** $\vec{b} - \vec{c}$ **c)** $2\vec{a}$

d) $-3\vec{b}$ **e)** $\frac{1}{2}\vec{c}$ **f)** $\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$

Vectores paralelos

Definición: Dos vectores son *paralelos* cuando tienen igual dirección.

Propiedad: La condición necesaria y suficiente para que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos es que uno de ellos pueda ser expresado como el producto del otro por un número real. $\vec{u} \,//\, \vec{v} \Leftrightarrow \exists \lambda \in R \,/\, \vec{u} = \lambda \vec{v}$

Versor correspondiente a un vector

Definición: Se llama *versor correspondiente a un vector* al vector de igual dirección y sentido que el dado pero de módulo 1.

Si $\vec{v}$ es el vector indicamos con $\vec{v_0}$ al versor.

Según la propiedad vista para vectores paralelos: $\exists\ h \in R^+ / \vec{v} = h\vec{v_0}$.

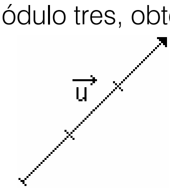
De aquí, si calculamos el módulo:

$$\left|\vec{v}\right| = |h| \left|\vec{v_0}\right| = h . \left|\vec{v_0}\right| \Rightarrow \left|\vec{v}\right| = h$$

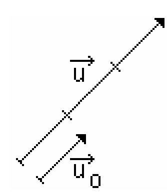
$$\underset{h \in R^+}{\downarrow} \qquad \underset{\left|\vec{v_0}\right| = 1}{\downarrow}$$

Reemplazando en $\vec{v} = h\vec{v_0}$ resulta: $\vec{v} = \left|\vec{v}\right| . \vec{v_0}$ o bien: $\vec{v_0} = \dfrac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$

Ejemplo: Dado el vector $\vec{u}$ de módulo tres, obtenga gráficamente su versor.



El versor, $\vec{u_0}$, es el vector unitario de igual dirección y sentido que $\vec{u}$. Como $\vec{u}$ tiene módulo tres, resulta:



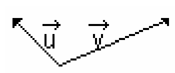
EJERCICIOS INTEGRADORES 1.2 OPERACIONES ENTRE VECTORES

1) Grafique tres vectores cualesquiera, no paralelos $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ y halle

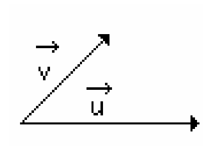
$3\vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

2) Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ calcule $\vec{w}$ si:

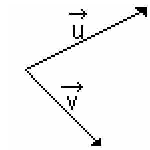
a) $\vec{w} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$



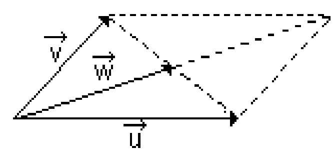
b) $\vec{w} = 2\vec{v} - 3\vec{u}$



c) $\vec{w} = \vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$



3) La figura dada es un paralelogramo. Exprese $\vec{w}$ en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



4) Grafique un vector cualquiera $\vec{a}$ y determine una operación que afecte a dicho vector de forma tal de obtener:

a) un vector de igual dirección, sentido y módulo la mitad del módulo de $\vec{a}$.

b) un vector de igual dirección, sentido contrario y módulo el doble del módulo de $\vec{a}$.

c) igual dirección y el módulo la tercera parte del módulo de $\vec{a}$.

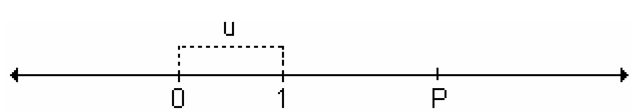
1.3 Descomposición de vectores

Sistema de referencia

Para trabajar en forma analítica con los vectores necesitamos referirlos a un sistema coordenado. Coordenar significa ordenar respecto de una referencia fija.

a) *Sistema coordenado unidimensional o lineal* (espacio R^1)

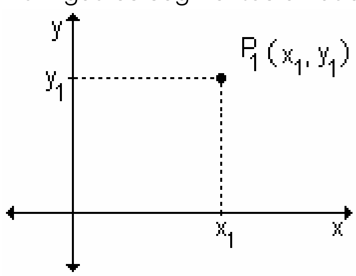
Si tenemos una recta y sobre ella fijamos un punto 0 llamado *origen*, un sentido positivo y un segmento unidad, formamos un sistema coordenado lineal:



La ubicación de un punto sobre el eje queda determinada por su distancia al origen. La distancia se toma siempre positiva.

En un sistema coordenado lineal, a cada punto del eje x le corresponde un número real y a su vez, cada número real tiene como imagen geométrica un punto en el eje coordenado. Es decir, existe una correspondencia biunívoca entre los puntos del eje coordenado lineal y los números reales.
El número que da la posición del punto en el eje numérico se llama *abscisa* del punto. Si el punto se encuentra a la derecha del origen, la abscisa es de signo positivo (+) y si se encuentra a la izquierda, se le asigna el signo negativo (–).

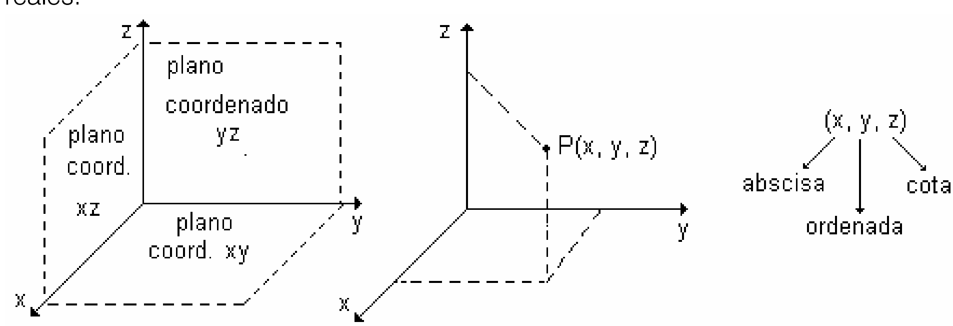
b) *Sistema coordenado bidimensional o plano* (espacio R^2)
Dos ejes que se cortan determinan un sistema coordenado. Si dichos ejes son perpendiculares, el sistema se llama *ortogonal* o *rectangular*. Si sobre los ejes se toman iguales segmentos unidad, el sistema se llama *ortonormal.*



Un punto en el plano queda determinado por un par ordenado de números reales.
El primero, x_1, es la *abscisa* del punto y el segundo, y_1, la *ordenada*.
Al par ordenado (x_1, y_1) se lo llama *coordenadas del punto*.

Conclusión. Existe una correspondencia biunívoca entre los pares ordenados de números reales y los puntos del plano.

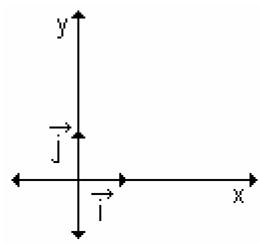
c) *Sistema coordenado tridimensional o espacio* (espacio R^3)
Si consideramos tres ejes perpendiculares entre sí que se cortan en un punto común (el origen de coordenadas) y tomamos sobre ellos el mismo segmento unidad, formamos un sistema coordenado ortonormal. Un punto en el espacio queda perfectamente determinado por una terna ordenada (x, y, z) de números reales.



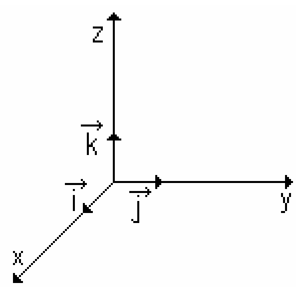
Versores fundamentales de R^2 y R^3

Veremos las ventajas de algebrizar la geometría y expresaremos los vectores libres como coordenadas del extremo de un segmento orientado.
Los versores fundamentales son vectores de módulo uno, con origen en el origen de coordenadas, incluidos en los ejes y cuyo sentido señala el sentido positivo sobre los ejes.

En R^2

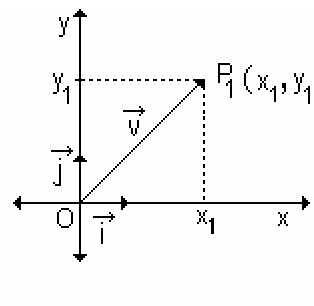


En R^3

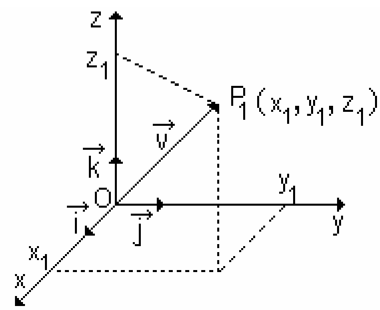


Descomposición canónica de un vector

En R^2



En R^3



$$\vec{v} = \overrightarrow{OP_1} = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \overrightarrow{OP_1} = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

La descomposición del vector como suma de dos vectores en la dirección de los ejes coordenados se llama "*descomposición canónica del vector*".
Debe tenerse en cuenta lo siguiente:

(x_1, y_1) coordenadas del punto P_1 $\qquad$ (x_1, y_1, z_1) coordenadas del punto P_1

$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ componentes del vector $\vec{v}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ componentes del vector $\vec{v}$

El vector $\overrightarrow{OP_1}$ se denomina vector posición del punto P_1.

EJERCICIOS

1) Represente gráficamente los siguientes vectores incluidos en R^2.

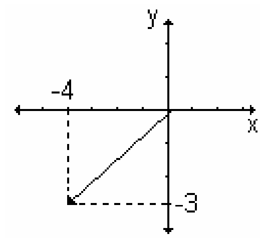
a) $\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ **b)** $2\,\vec{i}$ **c)** $-3\,\vec{j} + \frac{1}{2}\,\vec{i}$ **d)** $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

2) Represente gráficamente los siguientes vectores incluidos en R^3.

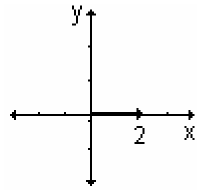
a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ **c)** $3\vec{i} - \vec{j}$ **d)** $-2\vec{j} - \vec{i} + 3\vec{k}$

RESPUESTAS

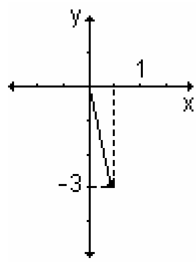
1)a)



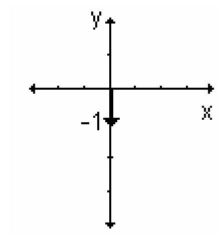
b)



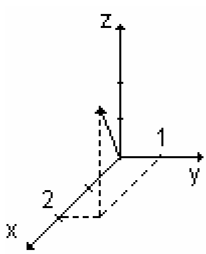
c)



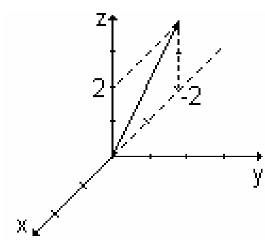
d)



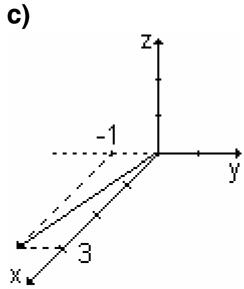
2)a)



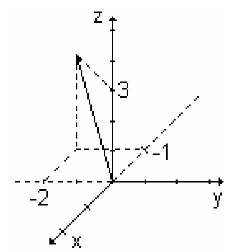
b)



c)



d)



Componentes de un vector determinado por dos puntos

Sean los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

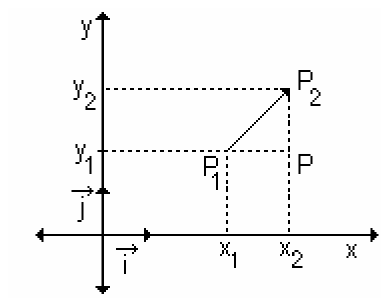
Consideramos el punto $P(x_2, y_1)$.tal que $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1P} + \overrightarrow{PP_2}$.

Pero $\overrightarrow{P_1P} = (x_2 - x_1)\vec{i}$ y $\overrightarrow{PP_2} = (y_2 - y_1)\vec{j}$,

luego:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

Por lo tanto: $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$



En R^3, dados $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS

1) Dados los puntos A y B, determine las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$.

a) A(–4, –2) ; B(5, 1) **b)** A(7, 0) ; B(–5, 0)

c) A(3, 4, –2) ; B(5, 7, 8) **d)** A(1, –1, 2) ; B(–3, 1, 1)

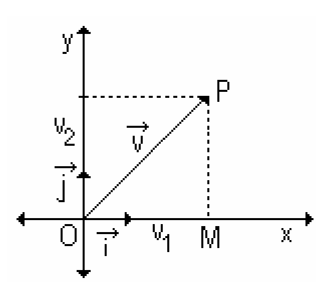
2) Halle el valor de α y β para que los puntos A(α, 3) y B(–2, β) determinen el vector $\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$.

RESPUESTAS

1)a) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$ **b)** $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \end{bmatrix}$ **c)** $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$ **d)** $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

2) $\alpha = 3$; $\beta = 4$

Módulo de un vector



El módulo de un vector es el número real positivo que indica la distancia que separa el origen del extremo del mismo.

Sea $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

Para calcular su módulo tenemos en cuenta que, en el triángulo rectángulo OMP, si aplicamos el teorema de Pitágoras resulta:

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OM}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MP}\right|^2 \Rightarrow \left|\vec{v}\right|^2 = v_1^2 + v_2^2 \Rightarrow \left|\vec{v}\right| = +\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\,.$$

Observación: el módulo de un vector vale cero sí y sólo si es el vector nulo.

En R^2: $\left|\vec{v}\right| = 0 \Leftrightarrow v_1^2 + v_2^2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0 \wedge v_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

En R^3: $\left|\vec{v}\right| = 0 \Leftrightarrow v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0 \wedge v_2 = 0 \wedge v_3 = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Ejemplo: Halle el módulo del vector $\vec{m} = 3\vec{k} - 2\vec{j} + \vec{i}$

El módulo de un vector es la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de sus componentes, en este caso:

$$\left|\vec{m}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{m}\right| = \sqrt{14}$$

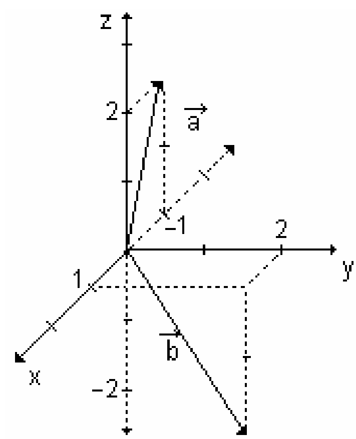
Ejemplo: Calcule el módulo y grafique en R^3, los vectores $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{k}$ y $\vec{b} = 2\vec{j} - 2\vec{k} + \vec{i}$.

Las componentes del vector $\vec{a}$ son $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y las de $\vec{b}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, entonces resulta:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5}\,.$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3\,.$$

Gráficamente:



Ejemplo: Sea el vector $\vec{a} = 8\vec{i} + \alpha\vec{j}$. Determine el valor de α de modo que su módulo sea 10. Grafique.

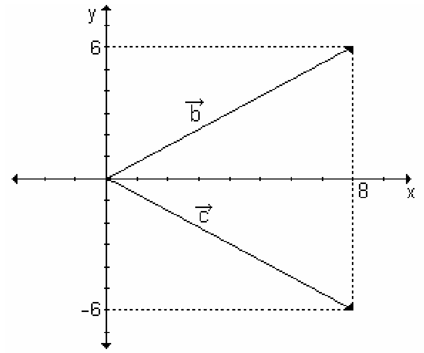
Calculando el módulo de $\vec{a}$ e igualándolo a 10 resulta: $\sqrt{8^2 + \alpha^2} = 10$

Resolviendo: $64 + \alpha^2 = 10^2 \Rightarrow \alpha^2 = 100 - 64 \Rightarrow \alpha^2 = 36 \Rightarrow \alpha = 6, \alpha = -6$

Por lo tanto hay dos posibles vectores que cumplen el requisito solicitado.

Ellos son: $\vec{b} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$ y $\vec{c} = 8\vec{i} - 6\vec{j}$.

Gráficamente:



EJERCICIOS

1) Determine el módulo de los siguientes vectores:

a) $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ **b)** $2\,\vec{i} - 5\,\vec{j}$ **c)** $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **d)** $4\,\vec{k}$

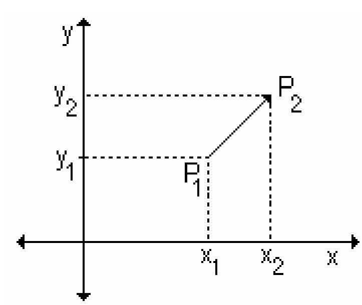
2) Calcule el valor de b para que el módulo del vector $\vec{v} = -4\,\vec{i} + 3\,\vec{j} - b\,\vec{k}$ sea seis.

RESPUESTAS

1)a) $\sqrt{13}$ **b)** $\sqrt{29}$ **c)** $\sqrt{11}$ **d)** 4 **2)** $b = \sqrt{11}$, $b = -\sqrt{11}$

Módulo de un vector determinado por dos puntos

En R^2, considerando los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:



$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En R^3, dados los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y P_2 (x_2, y_2, z_2):

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = +\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .$$

Ejemplo: Sean los puntos P(1, –1) y Q(–2, 3), obtenga el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

En primer lugar hallamos el vector $\overrightarrow{PQ}$, restando las componentes del punto extremo con las del punto origen, es decir: $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -2-1 \\ 3-(-1) \end{bmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

El módulo es la raíz cuadrada positiva de las suma de los cuadrados de sus componentes, o sea:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{PQ}\right| = 5$$

Ejemplo: Sean los puntos P(1, m) y Q(1, 3), determine el valor de m sabiendo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene módulo cinco. Para dicho valor de m grafique el vector.

Formemos el vector $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 3-m \end{bmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3-m \end{bmatrix}$.

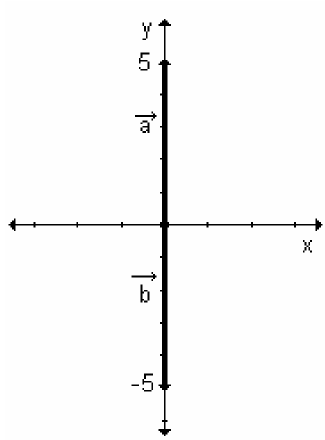
Calculamos el módulo de $\overrightarrow{PQ}$: $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{0^2+(3-m)^2}$.

Pero dicho módulo debe ser 5, entonces: $\sqrt{0^2+(3-m)^2} = 5$.

Resolviendo: $\sqrt{0^2+(3-m)^2} = 5 \Rightarrow |3-m| = 5 \Rightarrow 3-m=5$ ó $3-m=-5 \Rightarrow$ $m=-2$ ó $m=8$.

Hay dos posibles valores de m, entonces también hay dos posibles vectores: $\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Gráficamente:



EJERCICIOS

1) Halle en cada caso el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$ sabiendo que:

a) P(–2, 0, 1) ; Q(3, –1, 1) **b)** P(2, 1, –1) ; Q(–1, 2, 1)

c) P(–2, 0) ; Q(0, 3) **d)** P(1, 3) ; Q(4, –1)

2) Determine el valor de a para que el módulo del vector de origen M(–4, a) y extremo N(–3, –1) sea $\sqrt{10}$.

RESPUESTAS

1)a) $\sqrt{26}$ **b)** $\sqrt{14}$ **c)** $\sqrt{13}$ **d)** 5 **2)** a = 2, a = –4

Versor correspondiente a un vector

Versor es el vector de módulo uno de igual dirección y sentido que el vector dado. Si $\vec{v}$ es el vector, indicamos con $\vec{v}_0$ al versor.

Según vimos $\vec{v}_0 = \dfrac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$.

Trabajando el vector según sus componentes resulta:

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{\left|\vec{v}\right|}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \text{ en } R^2 \quad \text{y} \quad \vec{v}_0 = \frac{1}{\left|\vec{v}\right|}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \text{ en } R^3.$$

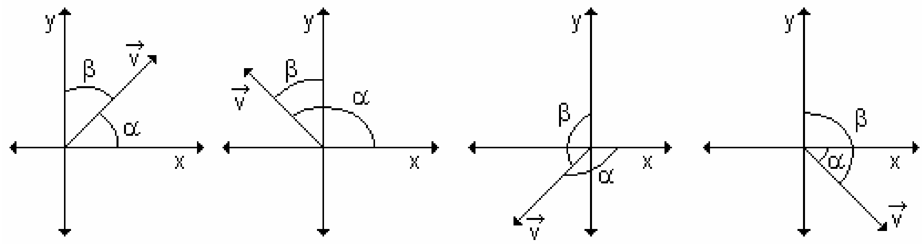
Ejemplo: Halle el versor del vector $\vec{u} = \vec{i} - 2\,\vec{j}$.

El versor se obtienen dividiendo cada componente del vector por su módulo, es decir: $\vec{u}_0 = \dfrac{\vec{u}}{\left|\vec{u}\right|}$.

En el ejemplo $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$. Entonces: $\vec{u}_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{i} - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{j}$.

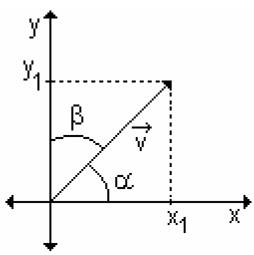
Ángulos directores y cosenos directores de un vector

Se llaman *ángulos directores* de un vector a los ángulos convexos determinados por dichos vectores y los versores fundamentales ($\vec{v} \neq \vec{0}$).



Observación: Conociendo los ángulos directores queda determinado el sentido y la dirección del vector pero no su módulo.

Se llaman *cosenos directores* de un vector no nulo a los cosenos de sus ángulos directores.



$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\left|\vec{v}\right|} \qquad \cos\beta = \frac{y_1}{\left|\vec{v}\right|}$$

Propiedad: La suma de los cuadrados de los cosenos directores de un vector es igual a uno. En símbolos: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$

En efecto: $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \frac{x_1^2}{\left|\vec{v}\right|^2} + \frac{y_1^2}{\left|\vec{v}\right|^2} = \frac{x_1^2 + y_1^2}{\left|\vec{v}\right|^2} = \frac{\left|\vec{v}\right|^2}{\left|\vec{v}\right|^2} = 1$$

En R^3: α, β, γ son los ángulos directores

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\left|\vec{v}\right|} \qquad \cos\beta = \frac{y_1}{\left|\vec{v}\right|} \qquad \cos\gamma = \frac{z_1}{\left|\vec{v}\right|}$$

Entonces: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

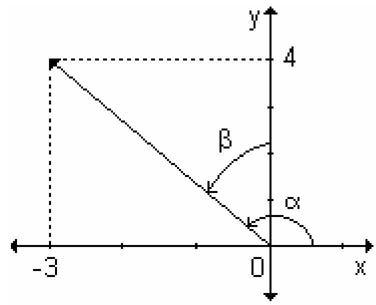
Ejemplo: Sea el vector $\vec{m} = 4\,\vec{j} - 3\,\vec{i}$. Halle su módulo, sus cosenos directores y sus ángulos directores. Grafique.

Sabemos que el módulo es la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de sus componentes, entonces:

$$\left|\vec{m}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \;\Rightarrow\; \left|\vec{m}\right| = 5$$

El cociente de cada componente por el módulo nos da los cosenos directores, o sea, los cosenos de los ángulos que el vector forma con cada semieje positivo.

Sea α el ángulo que forma con el semieje positivo de abscisas y β, con el semieje positivo de ordenadas.



$\cos\alpha = \frac{-3}{5} \Rightarrow \quad \alpha = \text{arc cos}\left(\frac{-3}{5}\right) \Rightarrow$

$\alpha = 126^{o}\ 52'$

$\cos\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \quad \beta = \text{arc cos}\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow$

$\beta = 36^{o}\ 52'\ 11''$

EJERCICIOS

1) Determine los ángulos y cosenos directores de los siguientes vectores incluidos en R^2:

a) $3\vec{i} + 2\vec{j}$ **b)** $-2\vec{i} + \vec{j}$

2) Encuentre los ángulos y cosenos directores de los siguientes vectores incluidos en R^3:

a) $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ **b)** $-3\vec{i} + \vec{k}$

3) Calcule el valor de a y de b para que el vector $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$, de módulo 2, forme con el eje de las abscisas un ángulo de 30^{o}.

RESPUESTAS

1)a) $\alpha = 33^\circ 41' 24''; \beta = 56^\circ 18' 35''; \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}; \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

b) $\alpha = 153^{o} 26' 5''; \ \beta = 63^{o}\ 26' 6''; \cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}; \ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

2)a)

$\alpha = 54^{o} 44' 8''; \ \beta = 125^{o} 15'; \ \gamma = 54^{o} 44' 8''; \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{3}}; \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\alpha = 161^{o} 33'; \ \beta = 90^{o}; \ \gamma = 71^{o} 33' 54''; \cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{10}}; \ \cos\beta = 0; \ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{10}}$

3) $a = \sqrt{3}$, $b = \pm 1$

Igualdad entre vectores

Dos vectores dados en función de sus componentes son *iguales* sí y sólo si son iguales sus componentes homólogas.

En R^2: Dados $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$; $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$.

En R^3: Dados $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$; $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$.

EJERCICIO

Calcule x para que los vectores dados sean iguales

a) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2x+1 \\ -10 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = -10\,\vec{j} - 5\,\vec{i}$

b) $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + 5\,\vec{j}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 5 \\ 3x-1 \end{bmatrix}$

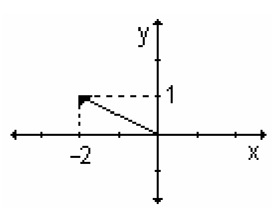
RESPUESTA

a) $x = -3$ **b)** $x = \frac{1}{3}$

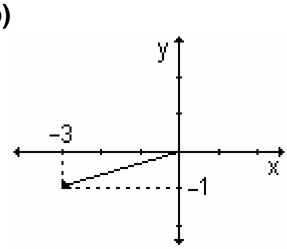
EJERCICIOS INTEGRADORES 1.3 DESCOMPOSICIÓN DE VECTORES

1) Determine las componentes del vector $\vec{v}$ representado gráficamente

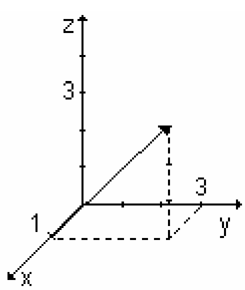
a)



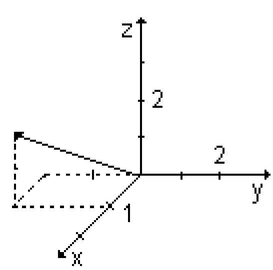
b)



c)



d)



2) Calcule:

a) el valor de m para que el módulo del vector determinado por P(4, 5, m) y Q(3, –2, 1) sea $\sqrt{51}$.

b) el valor de t para que el módulo del vector determinado por los puntos A(–5, 6) y B(t, 3) sea $\sqrt{10}$.

3) Halle las coordenadas del punto P en el espacio, si su vector posición forma con los ejes coordenados ángulos iguales y su módulo es tres.

4) Dados los puntos P(–2, 1, 0) y Q(3, –3, 1), obtenga el vector $\overrightarrow{QP}$ y represéntelo gráficamente.

5) Un vector de módulo seis forma con el eje x un ángulo de 60º y con el eje z un ángulo de 120º. Halle:

a) el ángulo que forma con el eje y.

b) sus componentes.

c) Escriba su expresión canónica.

1.4 Operaciones con vectores en función de sus componentes

Suma

Dados en R^2 los vectores $\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$; $\vec{v} = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$,

la suma entre ellos es otro vector de la forma:

$$\vec{u} + \vec{v} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} + v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} = (u_1 + v_1)\,\vec{i} + (u_2 + v_2)\,\vec{j} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$$

Diferencia

Dados en R^2 los vectores $\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$; $\vec{v} = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right) = \vec{u} + (-1)\,\vec{v} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} + (-v_1)\,\vec{i} + (-v_2)\,\vec{j}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1)\,\vec{i} + (u_2 - v_2)\,\vec{j} = \begin{bmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{bmatrix}$$

Producto de un vector por un escalar

En R^2: $\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j}$; $\lambda \in R$

$$\lambda\,\vec{u} = \lambda\left(u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j}\right) = \lambda u_1\,\vec{i} + \lambda u_2\,\vec{j} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{bmatrix}$$

De la misma forma se definen en R^3:

Dados $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$ y $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix} \qquad \vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{bmatrix} \qquad \lambda \vec{u} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Sean los vectores $\vec{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, calcule analíticamente:

a) $\vec{a} + 3\vec{b}$ **b)** $-\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$

Represente, en cada caso, el vector que obtenga como resultado.

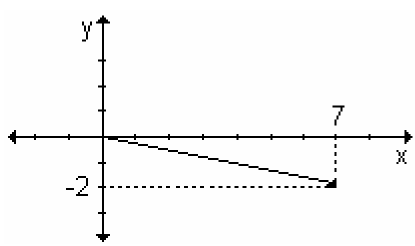
a) Para calcular $3\vec{b}$ se multiplica cada componente de $\vec{b}$ por 3 y resulta:

$3\vec{b} = \begin{bmatrix} 3.3 \\ 3.(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Para hallar la suma $\vec{a} + 3\vec{b}$, se suman las componentes homólogas:

$\vec{a} + 3\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+9 \\ 1+(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$

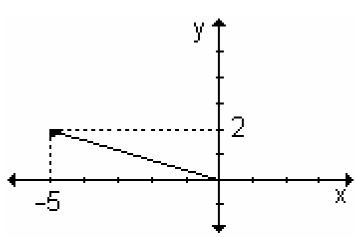
Gráficamente:



b) Procediendo de manera similar que en el ejemplo anterior, se obtiene:

$-\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = -\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

Gráficamente:



Ejemplo: Dados los vectores $\vec{u} = 4\,\vec{j} - 2\,\vec{i} + 2\,\vec{k}$ y $\vec{v} = \vec{k} + \vec{j}$, halle analíticamente:

a) $-\dfrac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$ **b)** $\vec{u} - 3\,\vec{v}$

Escribiendo los vectores como matriz columna obtenemos: $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Planteamos la operación requerida en cada caso y resolvemos según las definiciones.

a) $$-\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\vec{u} - 3\,\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS

1) Dados los vectores $\vec{m} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{n} = -2\,\vec{i} + 5\,\vec{k}$ y $\vec{p} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, halle:

a) $\vec{m} + \vec{n}$ **b)** $\vec{m} - \vec{p}$ **c)** $3\vec{m}$ **d)** $\dfrac{1}{2}\vec{n}$ **e)** $2\vec{m} - \vec{n}$

2) Dados los vectores $\vec{a} = -4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$, $\vec{b} = -\,\vec{j} + 3\,\vec{i}$ y $\vec{r} = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \end{bmatrix}$, calcule el valor de los escalares k y m tales que $\vec{r} = k\,\vec{a} + m\,\vec{b}$

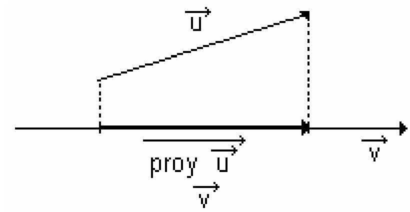
RESPUESTAS

1)a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ -3 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}$ **2)** $k = -3$; $m = -2$

Proyección de un vector sobre otro

Llamamos *vector proyección* de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$ y lo indicamos

$\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}}$, al vector que tiene la misma dirección que $\vec{v}$ y se obtiene proyectando perpendicularmente el origen y el extremo de $\vec{u}$ sobre la dirección del vector $\vec{v}$.



Se llama *proyección* del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$ y lo simbolizamos $\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}$, al número real que se obtiene con la operación $\left|\vec{u}\right| \cos\left(\widehat{\vec{u}\,,\,\vec{v}}\right)$.

Propiedades: $\overrightarrow{\text{proy}_{\vec{w}}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)} = \overrightarrow{\text{proy}_{\vec{w}}\,\vec{u}} + \overrightarrow{\text{proy}_{\vec{w}}\,\vec{v}}$

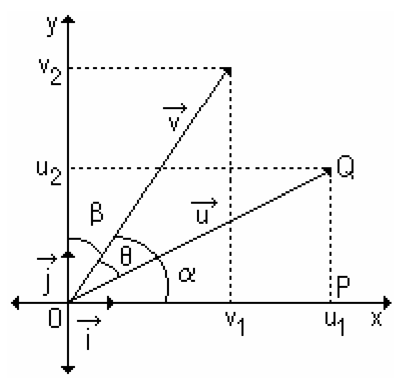
$$\text{proy}_{\vec{w}}\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \text{proy}_{\vec{w}}\,\vec{u} + \text{proy}_{\vec{w}}\,\vec{v}$$

Ángulo entre dos vectores

En R^2, dados los vectores $\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j}$ y $\vec{v} = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j}$, calcularemos el ángulo θ que ellos forman.

Hallaremos el coseno de dicho ángulo y para ello consideramos $\vec{u} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$.

Proyectando estos vectores sobre $\vec{v}$, se obtiene:



$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \text{proy}_{\vec{v}}\,\overrightarrow{OP} + \text{proy}_{\vec{v}}\,\overrightarrow{PQ}$ y teniendo en cuenta la definición de proyección: $\left|\vec{u}\right| \cos\theta = \left|\overrightarrow{OP}\right| \cos\alpha + \left|\overrightarrow{PQ}\right| \cos\beta$.

$$\left|\vec{u}\right|\cos\theta = u_1\frac{v_1}{\left|\vec{v}\right|} + u_2\frac{v_2}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\left|\vec{v}\right|}$$ y por lo tanto:

$$\cos\theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}.\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

En R^3: $\cos\theta = \dfrac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$ siendo $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$.

Nota: La proyección de un vector sobre otro se define

$$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left|\vec{u}\right|\cos\left(\widehat{\vec{u}\,,\,\vec{v}}\right).$$

Hemos visto que $\cos\left(\widehat{\vec{u}\,,\,\vec{v}}\right) = \dfrac{u_1v_1 + u_2v_2}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$.

Reemplazando obtenemos:

$$\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left|\vec{u}\right|.\cos\left(\widehat{\vec{u}\,,\,\vec{v}}\right) = \left|\vec{u}\right|.\frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\left|\vec{v}\right|}.$$

Por lo tanto, $\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \dfrac{u_1v_1 + u_2v_2}{\left|\vec{v}\right|}$.

Ejemplo: Sean los vectores $\vec{u} = \vec{j} + 4\,\vec{i}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, calcule:

a) el ángulo determinado por los mismos,

b) la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ e interprete gráficamente.

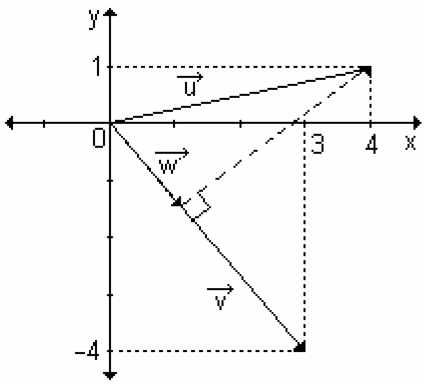
a) Para calcular el ángulo determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se utiliza la expresión $\cos\theta = \dfrac{u_1v_1 + u_2v_2}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$.

$$\cos\theta = \frac{4.3 + 1.(-4)}{\sqrt{4^2 + 1^2}\ \sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{8}{\sqrt{17}\ \sqrt{25}} = \frac{8}{\sqrt{17}\ \sqrt{25}} \approx 0{,}38806$$

El ángulo que forman los dos vectores es $\theta = 67^{O}\ 9'\ 59''$

b) dado que $\text{proy}_{\vec{v}}\ \vec{u} = \dfrac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\left|\vec{v}\right|}$, reemplazando según los datos

$$\text{proy}_{\vec{v}}\ \vec{u} = = \frac{4.3 + 1.(-4)}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{12 - 4}{\sqrt{25}} = \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad \text{proy}_{\vec{v}}\ \vec{u} = \frac{8}{5}\ .$$



La $\text{proy}_{\vec{v}}\ \vec{u} = \dfrac{8}{5}$ y $\vec{w}$ es el vector proyección.

EJERCICIOS

1) Dados los vectores $\vec{r} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\vec{s} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, halle $\text{proy}_{\vec{s}}\ \vec{r}$ y $\text{proy}_{\vec{r}}\ \vec{s}$.

2) Obtenga el valor de m sabiendo que $\text{proy}_{\vec{b}}\ \vec{a} = 2,\ \vec{a} = \begin{bmatrix} m \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = -3\ \vec{i} + 4\ \vec{j}$.

3) Calcule el ángulo que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ determinan siendo $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = -\ \vec{i} + 4\ \vec{j}$.

4) Dado el vector $\vec{u} = 3\ \vec{i} + 4\ \vec{j}$, halle el ángulo que forma con el semieje positivo de las abscisas.

5) Encuentre el ángulo que determinan los vectores $\vec{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\vec{t} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

RESPUESTAS

1) $\text{proy}_{\vec{s}}\,\vec{r} = -\dfrac{17}{\sqrt{17}}$; $\text{proy}_{\vec{r}}\,\vec{s} = -\dfrac{17}{\sqrt{38}}$ **2)** $m = -\dfrac{2}{3}$

3) $\theta = 160^\circ\ 20'\ 46''$ **4)** $\alpha = 53^\circ\ 7'\ 48''$ **5)** $\theta = 160^\circ\ 53'\ 36''$

Producto escalar de vectores

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se denomina *producto escalar* de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al *número real* que se obtiene de la siguiente manera:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \\ \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\widehat{\vec{u}\,,\,\vec{v}}\right) \quad \text{si} \quad \vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Trabajando con las componentes:

En R^2: Sean $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = u_1v_1 + u_2v_2$$

Por lo tanto, $\vec{u}\,.\,\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$

En R^3: si $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u}\,.\,\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

EJERCICIOS

1) Determine $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ sabiendo que:

a) $\vec{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -5 \end{bmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

2) Sabiendo que $\vec{a}\,.\,\vec{b} = -\dfrac{3}{2}$, $\vec{a} = \begin{bmatrix} a \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcule el valor de a.

RESPUESTAS

1)a) $-\dfrac{23}{2}$ **b)** -17 **2)** $a = 3$

Vectores perpendiculares

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares si el ángulo que ellos determinan es $\dfrac{\pi}{2}$. Lo indicamos $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Propiedad: La condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares es que su producto escalar sea nulo.

Demostración: Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no nulos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 0 \Leftrightarrow |\vec{u}| = 0 \vee |\vec{v}| = 0 \vee \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 0 \quad \text{pues} \quad \vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$$

$$\text{Pero} \quad \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

Si los vectores están dados en función de las componentes:

En R^2: $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 = 0$

En R^3: $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$$

Ejemplo: Indique si los siguientes pares de vectores son perpendiculares:

a) $\vec{u} = \dfrac{3}{2}\vec{i} + \vec{k} + 2\vec{j}$; $\vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$

b) $\vec{m} = 2\,\vec{j} - \vec{k} + 5\,\vec{i}\ ;\quad \vec{p} = 2\,\vec{j} - \vec{i} + \vec{k}$

Recordemos que dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es nulo, entonces:

a) $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{3}{2}.(-4) + 2.3 + 1.0 = -6 + 6 = 0$. Por lo tanto, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

b) $\vec{m}\,.\,\vec{p} = 5.(-1) + 2.2 + (-1).1 = -5 + 4 - 1 = -2$. Entonces $\vec{m}$ y $\vec{p}$ no son perpendiculares.

Ejemplo: Sean los vectores $\vec{m} = 3\,\vec{j} - 2\,\vec{i} + \vec{k}$ y $\vec{p} = \vec{i} + \beta\,\vec{k}$. Halle el valor de β para que resulten perpendiculares. Para el valor de β hallado, grafique ambos vectores en un mismo sistema.

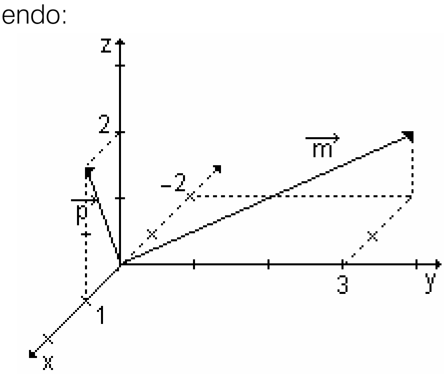
Dos vectores son perpendiculares si el producto escalar es nulo. Escribiendo los vectores en función de sus componentes, resulta $\vec{m} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}$.

Planteando el producto escalar y resolviendo:

$\vec{m}\,.\,\vec{p} = 0 \;\Rightarrow\; -2.1 + 3.0 + 1.\beta = 0$

$\Rightarrow\; \Rightarrow\; -2 + 0 + \beta = 0 \;\Rightarrow\; \beta = 2.$

Gráficamente:



Vectores paralelos

Ya hemos visto que $\vec{u} \,//\, \vec{v} \Leftrightarrow \exists\ \lambda \in R \,/\, \vec{u} = \lambda\,\vec{v}$.

Trabajando ahora los vectores en función de sus componentes, resulta:

En R^2: $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$; $\vec{u} \,//\, \vec{v} \Leftrightarrow \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \lambda;\ \lambda \in R$.

En R^3: $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$; $\vec{u} \,//\, \vec{v} \Leftrightarrow \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} = \lambda;\ \lambda \in R$.

La condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean paralelos es que sus componentes homólogas sean proporcionales.

- Si la constante λ es positiva, los vectores tienen el mismo sentido.
- Si es negativa, tienen sentidos opuestos.

Ejemplo: Determine si los pares de vectores dados son o no paralelos.

a) $\vec{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$; $\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{i} + 5\vec{k} - \vec{j}$ **b)** $\vec{m} = -5\vec{j} + 4\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{k}$; $\vec{p} = \begin{bmatrix} 8 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix}$

Recordemos que dos vectores son paralelos si sus componentes homólogas son proporcionales. En los ejemplos resulta:

a) ¿$\frac{-4}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{-1} = \frac{10}{5}$? como $-6 = -6 \neq 2$ los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos.

b) ¿$\frac{4}{8} = \frac{-5}{-10} = \frac{\frac{1}{2}}{1}$? como $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, los vectores $\vec{m}$ y $\vec{p}$ son paralelos.

Ejemplo: Sean los vectores $\vec{u} = -3\vec{j} + \vec{i} + \vec{k}$ y $\vec{v} = -\vec{j} - \vec{k} + 2\vec{i}$. Halle un vector paralelo a $\vec{u} + \vec{v}$, de módulo dos y de sentido opuesto.

Calculemos $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

Un procedimiento para encontrar un vector paralelo a $\vec{u} + \vec{v}$ es calcular el versor correspondiente.
Para ello se divide cada componente del vector suma por su módulo:

$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Entonces el versor de $\vec{u} + \vec{v}$ es $\vec{h} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$.

El vector $\vec{h}$ es paralelo a $\vec{u}+\vec{v}$ pero tiene módulo 1, entonces multiplicándolo por dos obtenemos el vector del módulo pedido: $2\vec{h} = 2.\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{8}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$.

El nuevo vector es paralelo y de módulo dos pero de igual sentido que $\vec{u}+\vec{v}$. Para que resulte de sentido contrario lo multiplicamos por –1.

Por lo tanto el vector buscado es $\begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$.

Se puede observar que si se dividen las componentes homólogas del vector hallado y las del vector $\vec{u}+\vec{v}$, se obtiene $\lambda = -\frac{2}{5}$.

EJERCICIOS

1) Determine si los vectores $\vec{u} = -3\,\vec{i} - 5\,\vec{j}$ y $\vec{v} = 10\,\vec{j} + 6\,\vec{i}$ son perpendiculares. Grafique.

2) Indique si los vectores $\vec{u} = -2\,\vec{i} + 5\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$ y $\vec{v} = -6\,\vec{k} - 10\,\vec{j} + 4\,\vec{i}$ son paralelos. Grafique.

3) Sean los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$ y $\vec{v} = \vec{i} + \alpha\,\vec{j}$, halle α para que resulten paralelos.

4) Encuentre las coordenadas de un vector paralelo a $\vec{u} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + \sqrt{12}\,\vec{k}$ de módulo dos pero de sentido contrario.

5) Dados los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, halle α y β para que sean paralelos y su producto escalar sea seis.

6) Sean los vectores $\vec{u} = -2\,\vec{i} + 5\,\vec{j}$ y $\vec{v} = \alpha\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$, determine el valor de α para que los dos vectores sean perpendiculares. Grafique.

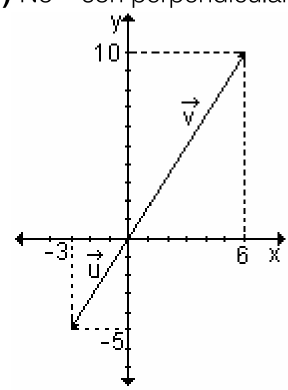
7) Dados los vectores $\vec{a} = 3\,\vec{i} + \vec{k}$ y $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ halle un vector paralelo a $\vec{a} - \vec{b}$ de módulo tres.

8) Obtenga las componentes de un vector paralelo al vector $\vec{u} = 5\,\vec{i} + 12\,\vec{j}$ de módulo tres y de sentido opuesto.

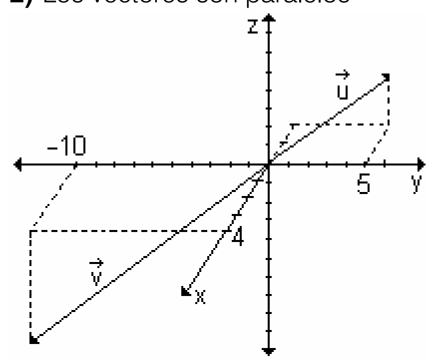
9) Dado el vector $\vec{v} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$ halle un vector paralelo a $\vec{v}$ de igual sentido y que mida la mitad.

RESPUESTAS

1) No son perpendiculares



2) Los vectores son paralelos

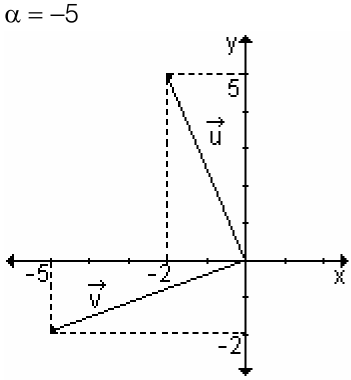


3) $\alpha = \dfrac{4}{3}$

4) $\vec{v} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -2\sqrt{12} \end{bmatrix}$

5) $\alpha = -\dfrac{18}{13};\ \ \beta = \dfrac{12}{13}$

6) $\alpha = -5$



7) $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$

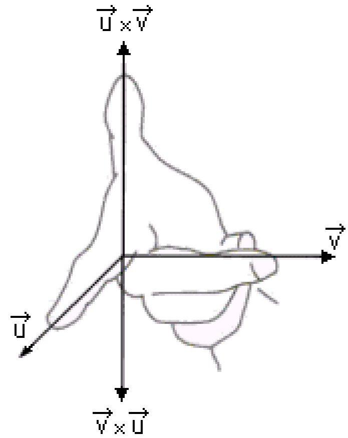
8) $\vec{v} = -\dfrac{1}{13}\begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$

9) $\vec{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$

Producto vectorial de vectores

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, definimos producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a un nuevo vector que indicamos $\vec{u} \times \vec{v}$ (o bien $\vec{u} \wedge \vec{v}$) tal que:

a) $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right| . \left|\vec{v}\right| . \operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$.



b) el vector resultante es perpendicular a $\vec{u}$, a $\vec{v}$, y también, al plano que ellos determinan.

c) el sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ es tal que la terna $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\right)$ tiene la misma orientación que $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ (regla de la mano derecha).

Nota: el producto vectorial no es conmutativo $\vec{u} \times \vec{v} = -\left(\vec{v} \times \vec{u}\right)$.

Observación: La condición necesaria y suficiente para que dos vectores no nulos sean paralelos es que su producto vectorial sea el vector nulo.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = 0 \Rightarrow \left|\vec{u}\right| . \left|\vec{v}\right| . \operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left|\vec{u}\right| = 0 \vee \left|\vec{v}\right| = 0 \vee \operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \vee \operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \vee \vec{u} \,//\, \vec{v}$$

Producto vectorial en función de las componentes

Dados en R^3 los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$, el producto vectorial entre ellos es otro vector de componentes: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$.

Observación: el producto vectorial se puede obtener mediante el desarrollo del siguiente determinante: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

Ejemplo: Determine las componentes de un vector perpendicular a los vectores $\vec{m} = -\vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{p} = 2\vec{i} - \vec{k} + \vec{j}$.

El vector que se obtiene al realizar el producto vectorial entre dos vectores es perpendicular a cada uno de ellos. Entonces para encontrar el vector pedido se debe calcular el producto vectorial entre los vectores dados.

$\vec{m} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. Resolviendo por Sarrus resulta:

$$\vec{m} \times \vec{p} = \left(\vec{i} + 6\vec{j}\right) - \left(-2\vec{k} + 3\vec{i}\right) = \vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k} - 3\vec{i} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}.$$

El vector hallado, $\vec{u}$, es perpendicular a $\vec{m}$ y a $\vec{p}$ pero de un sentido y de un módulo determinado. También lo será cualquier vector paralelo a $\vec{u}$. Por ello el vector buscado es de la forma $\beta\vec{u}$, siendo β un número real.
Es decir, el vector buscado es , $\beta \in R$.

Ejemplo: Sean los vectores $\vec{r} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ y $\vec{a} = \vec{j} - \vec{k}$, halle las componentes de un vector perpendicular a $\vec{r}$ y a $\vec{a}$ de módulo seis.

El vector que buscamos es :

$$\vec{r} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left(\vec{i} + \vec{k}\right) - \left(2\vec{i} - \vec{j}\right) = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

Al vector obtenido llamémoslo $\vec{p} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Su módulo es $\sqrt{3}$.
Para obtener un vector de módulo seis, debemos hallar su versor y luego multiplicarlo por 6:

$$\frac{\vec{p}}{\left|\vec{p}\right|} . 6 = \begin{bmatrix} -\frac{6}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Los vectores buscados pueden ser $\vec{u} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\sqrt{3}} \\ \frac{6}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ o su opuesto $-\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{3}} \\ -\frac{6}{\sqrt{3}} \\ -\frac{6}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.

Verifiquemos que son perpendiculares a $\vec{r}$ y a $\vec{a}$ realizando los correspondientes productos escalares:

$$\vec{u}\,.\,\vec{r} = -\frac{6}{\sqrt{3}}.1+\frac{6}{\sqrt{3}}.(-1)+\frac{6}{\sqrt{3}}.2 = -\frac{6}{\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{3}}+\frac{12}{\sqrt{3}} = 0\,.$$

$$\vec{u}\,.\,\vec{a} = -\frac{6}{\sqrt{3}}.0+\frac{6}{\sqrt{3}}.1+\frac{6}{\sqrt{3}}(-1) = \frac{6}{\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{3}} = 0\,.$$

$$-\vec{u}\,.\,\vec{r} = \frac{6}{\sqrt{3}}.1+\left(-\frac{6}{\sqrt{3}}\right).(-1)+\left(-\frac{6}{\sqrt{3}}\right).2 = \frac{6}{\sqrt{3}}+\frac{6}{\sqrt{3}}-\frac{12}{\sqrt{3}} = 0\,.$$

$$-\vec{u}\,.\,\vec{a} = \frac{6}{\sqrt{3}}.0+\left(-\frac{6}{\sqrt{3}}\right).1+\left(-\frac{6}{\sqrt{3}}\right)(-1) = -\frac{6}{\sqrt{3}}+\frac{6}{\sqrt{3}} = 0\,.$$

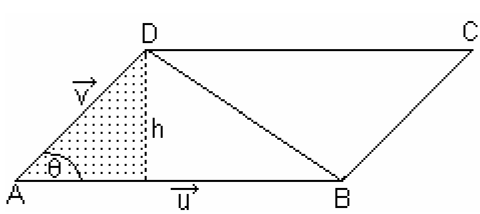
Calculemos los módulos:

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\left(-\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{12+12+12} = \sqrt{36} = 6\,.$$

Como los módulos de vectores opuestos son iguales concluimos que $\left|-\vec{u}\right| = 6$.

Interpretación geométrica del producto vectorial

El módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo que tiene por lados dichos vectores.



Área del paralelogramo ABCD = b.h, pero $h = \left|\vec{v}\right|.\text{sen}\,\theta$. Luego, el área del paralelogramo ABCD = $\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\text{sen}\theta$

Es decir, el área del paralelogramo ABCD = $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$

Área triángulo ABD = $\frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$

Ejemplo: Calcule el área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix}$ y $\vec{v}=\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 5\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=\left(\vec{k}+15\,\vec{j}\right)-\left(-6\,\vec{k}+5\,\vec{i}\right)=-5\,\vec{i}+15\,\vec{j}+7\,\vec{k}.$$

Calculando el módulo del vector obtenido:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{(-5)^2+15^2+7^2}=\sqrt{25+225+49}=\sqrt{299}.$$

Por lo tanto el área del paralelogramo es $\sqrt{299}$.

EJERCICIOS

1) Calcule el producto vectorial entre los vectores $\vec{u}=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$ y $\vec{v}=\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}$.

2) Sean los vectores $\vec{u}=2\,\vec{i}-\vec{j}+2\,\vec{k}$ y $\vec{w}=\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}$ halle un vector perpendicular a $-\vec{u}$ y $\vec{w}$ pero de módulo dos.

3) Determine el área del paralelogramo determinado por los vectores:

$\vec{u}=\begin{bmatrix}2\\-2\\3\end{bmatrix}$ y $\vec{v}=\begin{bmatrix}4\\2\\\frac{9}{2}\end{bmatrix}$.

RESPUESTAS

1) $-\vec{i}+5\,\vec{j}+7\,\vec{k}$

2) $\begin{bmatrix}\pm\frac{2}{\sqrt{18}}\\ \pm\frac{8}{\sqrt{18}}\\ \pm\frac{2}{\sqrt{18}}\end{bmatrix}$

3) $\sqrt{378}$

Producto mixto

Dados tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (en ese orden), se denomina *producto mixto* de los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ al *número real* que resulta de efectuar la operación: $\vec{u} . \left(\vec{v} \times \vec{w} \right)$.

Producto mixto en función de las componentes

Sean los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$, el producto mixto resulta:

$$\vec{u} . \left(\vec{v} \times \vec{w} \right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix} = u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) +$$
$$+ u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1) \ .$$

$$\vec{u} . \left(\vec{v} \times \vec{w} \right) = u_1 v_2 w_3 - u_1 v_3 w_2 + u_2 v_3 w_1 - u_2 v_1 w_3 + u_3 v_1 w_2 - u_3 v_2 w_1 \, .$$

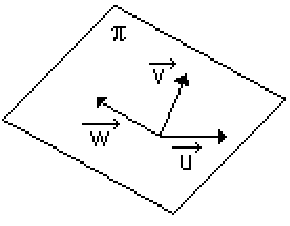
El producto mixto también puede obtenerse desarrollando el determinante:

$$\vec{u} . \left(\vec{v} \times \vec{w} \right) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Condición de coplanaridad de tres vectores

Tres vectores son coplanares si están incluidos en el mismo plano.

Los vectores no nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son coplanares sí y sólo sí su producto mixto es nulo.

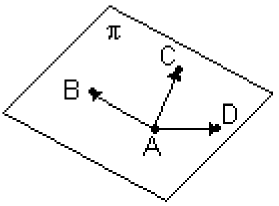


En símbolos:

$\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son coplanares $\Leftrightarrow$ $\vec{u} . \left(\vec{v} \times \vec{w} \right) = 0$ donde $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ y $\vec{w} \neq \vec{0}$.

Condición de coplanaridad de cuatro puntos

Dados los puntos A, B, C, D, los vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ son coplanares sí y sólo sí $\vec{AB}.\left(\vec{AC} \times \vec{AD}\right) = 0$.



Ejemplo: Determine si los vectores $\vec{a} = 3\,\vec{i} + \vec{k} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{k} - \vec{i}$ y $\vec{c} = 2\,\vec{k} + 2\,\vec{i} - \vec{j}$ son coplanares.

Planteamos el producto mixto de los tres vectores:

$$\vec{a}.\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0 + 1 - 2) - (0 - 3 + 2) = (-1) - (-1) = 0$$

Como el producto mixto es nulo, concluimos que los tres vectores son coplanares.

Ejemplo: Sean los vectores $\vec{u} = 2\,\vec{j} - \vec{i} + 5\,\vec{k}$, $\vec{v} = \alpha\,\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{w} = 4\,\vec{k} - \vec{j} - \vec{i}$, halle el valor de α de modo que los vectores resulten coplanares.

El producto mixto debe ser cero y por lo tanto planteamos: $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

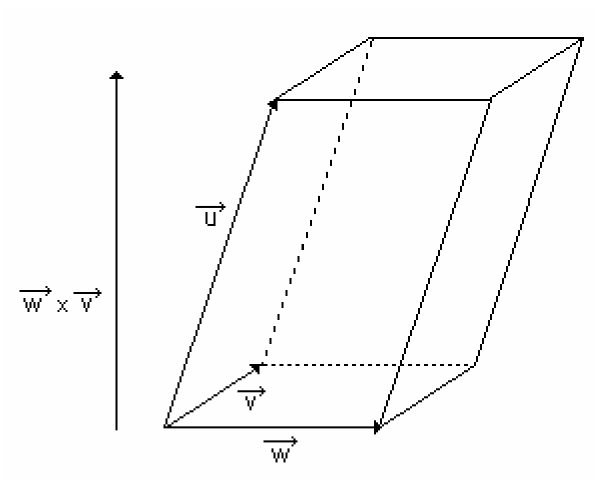
Para resolverlo, aplicamos la regla de Sarrus y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-4\alpha + 0 + 2) - (-5\alpha - 1 + 0) = -4\alpha + 2 + 5\alpha + 1 = \alpha + 3 = 0$$

$\Rightarrow \alpha = -3$. Por lo tanto, para que los vectores sean coplanares, α debe valer -3.

Interpretación geométrica del producto mixto

Si tres vectores no son coplanares podemos pensar que están soportados por las aristas de un paralelepípedo:



Volumen = Superficie base . altura = $\left|\vec{v} \times \vec{w}\right| . h$

Como $h = \left|\text{proy}_{\left(\vec{v} \times \vec{w}\right)} \vec{u}\right| = \left|\dfrac{\vec{u} . \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)}{\left|\vec{v} \times \vec{w}\right|}\right|$, entonces:

$$\text{Volumen} = \left|\vec{v} \times \vec{w}\right| . \frac{\left|\vec{u} . \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{v} \times \vec{w}\right|} = \left|\vec{u} . \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)\right|$$

El valor absoluto del producto mixto es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los tres vectores.

Ejemplo: Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a} = \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{k} - \vec{j} + 6\vec{i}$ y $\vec{c} = 4\vec{i} + \vec{j}$.

Planteamos el producto mixto $\vec{a} . \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Resolvemos el determinante aplicando la regla de Sarrus y resulta:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 18 + 4) - (12 + 0 + 0) = -14 - 12 = -26.$$

En consecuencia el volumen es $|-26| = 26$.

Ejemplo: Sean los vectores $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = 3\,\vec{j} - 2\,\vec{i}$ y $\vec{c} = 2\,\vec{j} + \beta\,\vec{i} - \vec{k}$. Halle el valor de β para que el volumen del paralelepípedo que ellos determinan sea 35.

Planteamos el producto mixto y resolvemos por Sarrus:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 0 \\ \beta & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-9 - 16 + 0) - (12\beta + 0 - 2) = -25 - 12\beta + 2$$

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = -23 - 12\beta.$$

El valor absoluto de este producto mixto es el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores. Por lo tanto:

$$\left|-23 - 12\beta\right| = 35 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -23 - 12\,\beta = 35 \Rightarrow -12\,\beta = 58 \;\Rightarrow\; \beta = -\dfrac{29}{6} \\[2ex] -23 - 12\,\beta = -35 \Rightarrow -12\,\beta = -12 \;\Rightarrow\; \beta = 1 \end{cases}$$

Existen dos valores de β que cumplen el requisito pedido: $\beta = -\dfrac{29}{6}$, $\beta = 1$.

EJERCICIOS

1) Calcule el producto mixto entre los siguientes vectores:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{c} = -\vec{k} + \vec{j} + 2\,\vec{i}$$

2) Determine si los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$; $\vec{v} = -2\,\vec{j} - 4\,\vec{i} + 3\,\vec{k}$ y $\vec{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ son coplanares.

3) Sean los vectores $\vec{u} = \vec{i} + 2\,\vec{j} + x\,\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$ y $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k}$, halle x sabiendo que son coplanares y grafique.

4) Calcule el volumen del paralelepípedo tal que cuatro de sus vértices son los puntos $P_1\,(-1, 1, 2)$; $P_2\,(0, 2, 3)$; $P_3\,(1, 1, 1)$; $P_4\,(-1, 3, 3)$.

RESPUESTAS

1) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=35$ **2)** Sí **3)** $x=9$ **4)** 4

Combinación lineal

Dados tres vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$, decimos que $\vec{a}$ puede escribirse como *combinación lineal* de $\vec{b}$ y $\vec{c}$ si existen dos números reales α y β tales que $\vec{a}=\alpha\,\vec{b}+\beta\,\vec{c}$.

Ejemplo: Escriba el vector $\vec{r}=7\,\vec{i}-8\,\vec{j}$ como combinación lineal de $\vec{a}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$ y $\vec{b}=4\,\vec{j}-\vec{i}$.

Debemos encontrar dos números α y β de modo que $\vec{r}=\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}$. Planteando en función de las componentes resulta: $\begin{bmatrix}7\\-8\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$ (1).

Resolviendo el miembro derecho queda planteada la igualdad:

$$\begin{bmatrix}7\\-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\alpha-\beta\\-2\alpha+4\beta\end{bmatrix}.$$

Dos vectores son iguales si las componentes homólogas lo son, es decir:

$$\begin{cases}3\alpha-\beta=7\\-2\alpha+4\beta=-8\end{cases}$$

Resolviendo el sistema por el método de sustitución, se despeja β de la primera ecuación y se la reemplaza en la segunda:

$3\alpha-\beta=7 \;\Rightarrow\; \beta=3\alpha-7$

$-2\alpha+4(3\alpha-7)=-8 \;\Rightarrow\; -2\alpha+12\alpha-28=-8 \;\Rightarrow\; 10\alpha=20 \;\Rightarrow\; \alpha=2$

Sustituyendo el valor de α en $\beta=3\alpha-7$ obtenemos: $\beta=3.2-7 \;\Rightarrow\; \beta=-1$

Por lo tanto escribimos $\vec{r}=2\,\vec{a}-\vec{b}$.

Para verificar si los valores hallados son correctos reemplazamos en (1) y resulta:

$$\begin{bmatrix}7\\-8\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}\;\Rightarrow\;\begin{bmatrix}7\\-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}\;\Rightarrow\;\begin{bmatrix}7\\-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-8\end{bmatrix}\;\checkmark$$

Ejemplo: Sean los vectores $\vec{u} = 5\,\vec{k} + 2\,\vec{j} - 11\,\vec{i}$, $\vec{a} = -2\,\vec{i} + 3\,\vec{k} + \vec{j}$, $\vec{b} = 3\,\vec{i} - \vec{k}$ y $\vec{c} = 2\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$. Escriba al vector $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Debemos encontrar tres números α, β y δ que satisfagan la siguiente igualdad: $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \delta\,\vec{c} = \vec{u}$, es decir $\alpha\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Operando resulta el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} -2\,\alpha + 3\,\beta = -11 \\ \alpha + 2\,\delta = 2 \\ 3\,\alpha - \beta - 2\,\delta = 5 \end{cases}$ normal, no homogéneo, que lo resolvemos aplicando el teorema de Rouché-Frobenious.

1	0	2	2	
–2	3	0	–11	$F_2 \to F_2 + 2F_1$
3	–1	–2	5	$F_3 \to F_3 - 3F_1$
1	0	2	2	
0	3	4	–7	$F_2 \to \frac{1}{3}\,F_2$
0	–1	–8	–1	
1	0	2	2	
0	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	
0	–1	–8	–1	$F_3 \to F_3 + F_2$
1	0	2	2	
0	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	
0	0	$-\frac{20}{3}$	$-\frac{10}{3}$	

El rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada, por lo tanto, el sistema es compatible. Y además dicho rango coincide con el número de incógnitas, entonces es determinado.

El nuevo sistema, equivalente al original, es: $\begin{cases} \alpha + 2\delta = 2 \\ \beta + \dfrac{4}{3}\delta = -\dfrac{7}{3} \\ -\dfrac{20}{3}\delta = -\dfrac{10}{3} \end{cases}$

Realizando sustitución hacia atrás resulta que $\alpha = 1$, $\beta = -3$ y $\delta = \dfrac{1}{2}$.

Verificamos que dichos números son los buscados:

$$1.\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + -3.\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \checkmark$$

EJERCICIOS

1) Escriba el vector $\vec{r} = \begin{bmatrix} \dfrac{11}{2} \\ -\dfrac{21}{2} \end{bmatrix}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2) Exprese el vector $\vec{a} = \vec{i} + 26\,\vec{j} - 5\,\vec{k}$ como combinación lineal de $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = 2\,\vec{i} - \vec{k} + \vec{j}$ y $\vec{d} = 2\,\vec{i} - 14\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$.

RESPUESTAS

1) $\vec{r} = -2\,\vec{u} + \dfrac{1}{2}\vec{v}$ **2)** $\vec{a} = 3\,\vec{b} + \vec{c} - 2\,\vec{d}$

Según lo desarrollado, concluimos que los vectores constituyen una herramienta muy interesante que además tiene su definición algebraica. Es importante destacar cómo el Álgebra colabora con la Geometría, pero es preciso revalorizar los conceptos geométricos con el objeto de que ésta no sea absorbida por el Álgebra. Ante cada situación planteada, debemos usar lo que nos resulte más conveniente.

EJERCICIOS INTEGRADORES 1.4 OPERACIONES CON VECTORES EN FUNCIÓN DE SUS COMPONENTES

1) Sean los vectores $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j}$ en R^2 y los vectores $\vec{d} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ y $\vec{e} = 5\vec{i} + 4\vec{k} + 2\vec{j}$, en R^3 , calcule:

a) $\vec{a} - 2\vec{b}$ **b)** $2\vec{c} - \vec{a}$ **c)** el versor de $(\vec{b} - \vec{c})$

d) el ángulo entre $\vec{d}$ y $\vec{e}$ **e)** $\vec{d} + 2\vec{e}$ **f)** $\vec{d} \times \vec{e}$ y $\vec{e} \times \vec{d}$

2) Dados los vectores $\vec{a} = -5\vec{j} + 3\vec{i} + 4\vec{k}$ y $\vec{b} = 9\vec{i} + x\vec{j} - 4\vec{k}$, encuentre el valor de x de modo que sean perpendiculares. Para dicho valor de x represente los vectores.

3) Dados los vectores $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ z \end{bmatrix}$, halle el valor de z de manera tal que sean paralelos. Para dicho valor de z, represente los vectores.

4) Sea el vector determinado por los puntos P(1, 2, –2) y A(4, 1, –2) y el vector $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

a) Obtenga el vector $\vec{a}$ de origen P y extremo A.

b) Obtenga las componentes de un vector perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$, de módulo 3.

c) ¿Qué posición tiene el vector $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ con respecto al hallado en el ítem b)?

5) Encuentre un vector de módulo 6 que tenga la misma dirección y sentido contrario al vector $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{k} + 2\vec{j}$.

6) Halle el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son los vectores $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{b} = -2\vec{k} + \vec{j}$; $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

7)a) ¿Son coplanares los vectores $\vec{u} = -\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{v} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$ y $\vec{w} = \vec{j} - 3\vec{k}$?

b) Sean los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ x \end{bmatrix}$, determine el valor de x de modo que sean coplanares. Para dicho valor de x, represente los vectores.

8) Sean P(2, 3); Q(5, 7); R(2, –3) y S(1, 2). Calcule: $\text{proy}_{\vec{PQ}} \vec{RS}$ y $\text{proy}_{\vec{RS}} \vec{PQ}$.

9) Sean los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$ y $\vec{v} = \vec{i} + \alpha\,\vec{j}$, determine el valor de α para que el ángulo que forman sea de 45°.

10) Dados los vectores $\vec{a} = 3\,\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ y $\vec{c} = 3\,\vec{i} - \vec{k} + 2\,\vec{j}$ halle un vector perpendicular a $\vec{b}$ y a $\left(\vec{a} - \vec{c}\right)$.

11) Dados los vectores $\vec{b} = 3\,\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{p} = \vec{i} - \vec{j}$, encuentre un versor paralelo a $\left(\vec{b} + \vec{p}\right)$.

12) Dados los vectores $\vec{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ \alpha \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{bmatrix} \beta \\ 3 \end{bmatrix}$, halle el valor de α y β sabiendo que $\vec{a} \,.\, \vec{b} = 2$ y $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{20}$.

13) Dados los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = -\,\vec{j} + 2\,\vec{i}$ calcule el valor de α si $\text{proy}_{\vec{u}} \vec{v} = 0{,}4$.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE VECTORES

1) Si a un vector no nulo $\vec{v}$ se lo multiplica por un escalar λ, el vector $\lambda\,\vec{v}$ tiene sentido contrario al de $\vec{v}$ si:

a) $\lambda = 0$ **b)** $\lambda < 0$
c) $\lambda > 0$ **d)** Ninguna de las anteriores

2) Dados los puntos B(6, 5) y A(–2, 3), el módulo del vector $\vec{AB}$ se obtiene resolviendo

a) $\sqrt{(6-2)^2 + (5+3)^2}$ **b)** $(6 + 2)^2 + (5 - 3)^2$
c) $\sqrt{(6-(-2))^2 + (5-3)^2}$ **d)** Ninguna de las anteriores

3) El versor correspondiente al vector $\vec{u} = -4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ es:

a) $\vec{u}_0 = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ **b)** $\vec{u}_0 = 5\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) $\vec{u}_0 = -5\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ **d)** $\vec{u}_0 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

4) Sean los vectores $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = 3\,\vec{j} + 2\,\vec{i}$, la suma de ambos es:

a) $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

5) Dados los vectores $\vec{u} = -3\,\vec{j} + 2\,\vec{i}$ y $\vec{v} = -4\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$, la diferencia $\vec{v} - \vec{u}$ es:

a) $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

6) Si $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k} - 3\,\vec{j}$ y $\vec{b} = 3\,\vec{k} - 2\,\vec{j} - 3\,\vec{i}$, el producto escalar de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es:

a) 10 **b)** 6 **c)** 2 **d)** –6

7) Sean los vectores $\vec{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{b} = 4\,\vec{j} + x\,\vec{i}$, el valor de x para que los vectores sean perpendiculares es:

a) –8 **b)** –2 **c)** 8 **d)** 2

8) Para que los vectores $\vec{a} = -2\,\vec{j} + 3\,\vec{i}$ y $\vec{b} = \begin{bmatrix} x \\ 6 \end{bmatrix}$ sean paralelos, x debe ser:

a) 4 **b)** 9 **c)** –9 **d)** –4

9) Si $\vec{a} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$ y $\vec{b} = \vec{j} + 3\,\vec{k}$, entonces $\vec{a} \times \vec{b}$ es:

a) $-9\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$ **b)** $-9\,\vec{i} + 6\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$

c) $-9\,\vec{i} + 6\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$ **d)** $9\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 8\,\vec{k}$

10) El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = 2\,\vec{k} - 3\,\vec{i}$ y $\vec{c} = -7\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$ es:

a) 0 **b)** 15 **c)** 3 **d)** 5

GUÍA DE ESTUDIO DE TEORÍA N° 1: VECTORES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

1) Defina:

a) segmento orientado,
b) vector,
c) dirección de un vector,
d) módulo de un vector,

e) sentido de un vector.
2) ¿A qué se llama vector nulo?
3) Defina:
a) vector opuesto,
b) versor,
c) vectores paralelos.
4) ¿Cuándo dos vectores son iguales?
5) Defina:
a) suma de vectores,
b) diferencia entre dos vectores,
c) producto de un vector por un escalar.
6) Enuncie y exprese simbólicamente las propiedades que cumple la operación suma entre vectores.
7) Enuncie y exprese simbólicamente la condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean paralelos.
8) Defina versor correspondiente a un vector.
9) Deduzca una fórmula para calcular el versor correspondiente a un vector.
10) Defina sistema coordenado:
a) unidimensional,
b) bidimensional,
c) tridimensional.
11) Defina versores fundamentales en R^2 y R^3.
12) ¿Cómo se obtienen las componentes de un vector determinado por dos puntos? Justifique la respuesta.
13) Defina ángulos directores de un vector.
14) Defina cosenos directores de un vector.
15) Enuncie y demuestre la relación entre los cosenos directores de un vector.
16) ¿Cómo se calcula el módulo de un vector conocidas sus componentes?
17) Defina igualdad entre vectores dados por sus componentes.
18) Defina:
a) suma,
b) diferencia de dos vectores dados por sus componentes.
19) Defina producto de un escalar por un vector dado por sus componentes.
20) Defina vector proyección y proyección.
21) Deduzca una fórmula para obtener el ángulo entre dos vectores.
22) Defina producto escalar de vectores.
23) ¿Cómo se realiza el producto escalar entre dos vectores dados por sus componentes? Justifique la respuesta.
24) ¿Cuándo dos vectores son perpendiculares?
25) Enuncie y demuestre la condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares.
26) Si los vectores están en función de sus componentes, enuncie y escriba simbólicamente la condición necesaria y suficiente para que sean:
a) paralelos,
b) perpendiculares.
27) Defina producto vectorial entre vectores.

28) Defina producto vectorial entre vectores dados en función de sus componentes.
29) Enuncie y demuestre la condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean paralelos (teniendo en cuenta el producto vectorial).
30) ¿Qué representa geométricamente el producto vectorial?
31) Defina producto mixto.
32) Deduzca la expresión del producto mixto mediante sus componentes.
33) Enuncie la condición necesaria y suficiente de coplanaridad entre cuatro puntos.
34) Enuncie la condición necesaria y suficiente de coplanaridad de tres vectores.
35) ¿Cómo se interpreta geométricamente el producto mixto? Justifique la respuesta.

APLICACIONES DE LOS VECTORES

1) Un nadador quiere atravesar un río cuya corriente se desplaza en dirección este a una velocidad de $4\frac{km}{h}$. Comienza a nadar en forma perpendicular a la orilla sur del mismo a una velocidad de $6\frac{km}{h}$. La velocidad real del nadador es la que se obtiene al componer ambas velocidades.

a) Represente mediante vectores las velocidades.

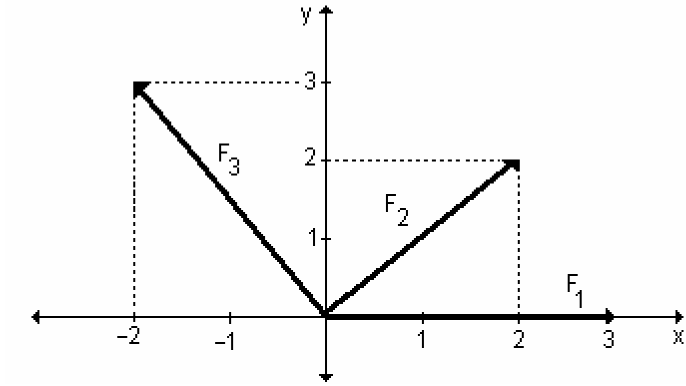
b) Halle el vector velocidad real e indique el módulo y los ángulos que forma con los ejes coordenados.

2) En un sistema de fuerzas, la resultante es la suma de las fuerzas que intervienen en el mismo.

Halle el módulo de la resultante de dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ de igual intensidad aplicadas en un mismo punto cuando tienen:

a) igual dirección e igual sentido,
b) igual dirección y sentido opuesto,
c) forman un ángulo recto.

3) La equilibrante de un sistema de fuerzas, es aquella fuerza capaz de contrarrestar la acción de todas. Es la fuerza opuesta a la resultante, de igual dirección y módulo. Sea el sistema de fuerzas:



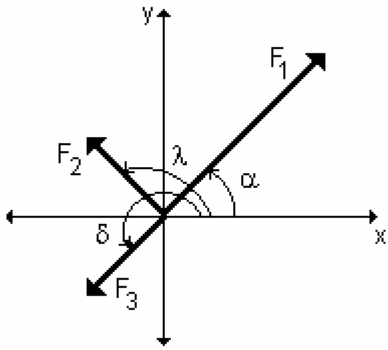
a) Indique las componentes de cada una.

b) Halle la resultante y la equilibrante analítica y gráficamente.

c) Calcule los ángulos que forman cada fuerza con la resultante y la equilibrante.

4) Un sistema de fuerzas está en equilibrio si su resultante es nula.

Sean las fuerzas:



$\left|\vec{F_1}\right| = \sqrt{8}\,;\ \alpha = 45^\circ$

$\left|\vec{F_2}\right| = \sqrt{2}\,;\ \lambda = 135^\circ$

$\left|\vec{F_3}\right| = \sqrt{2}\,;\ \delta = 225^\circ$

a) Exprese cada fuerza según sus componentes.

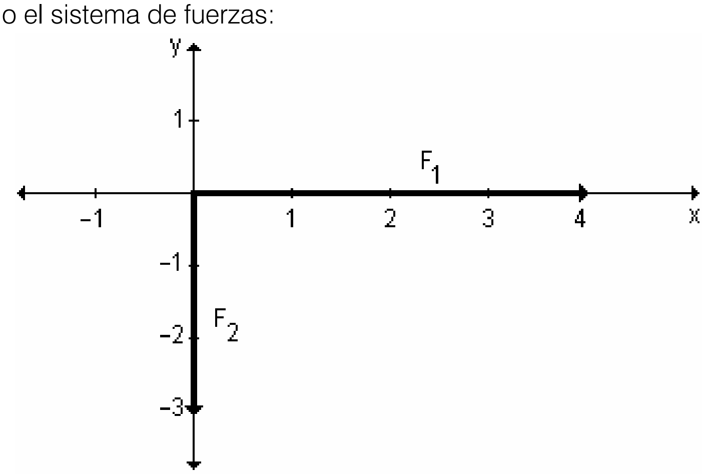
b) Indique si el sistema está en equilibrio.

5) Sean las fuerzas: $\vec{F_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\vec{F_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

a) Determine el ángulo que ellas forman.

b) Obtenga gráfica y analíticamente la resultante.

6) Dado el sistema de fuerzas:

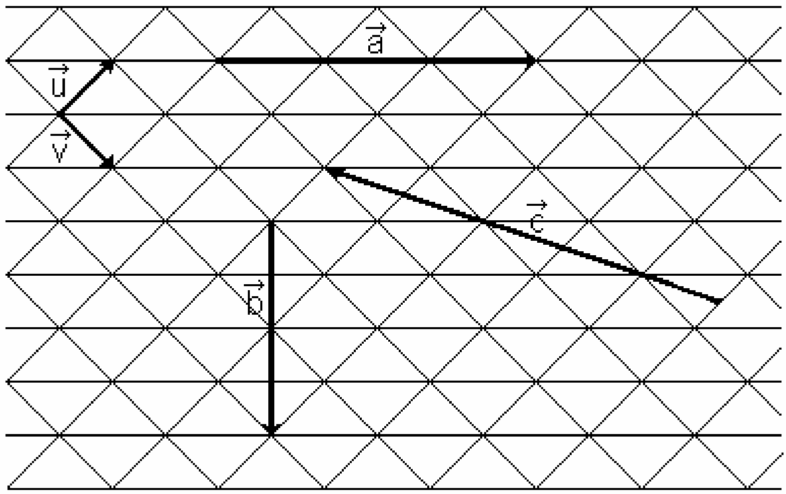


Halle:

a) las componentes de cada fuerza.

b) las componentes de una fuerza $\vec{F_3}$ de modo que el sistema formado por $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ y $\vec{F_3}$ resulte en equilibrio.

7) En la siguiente figura, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ representan dos fuerzas que actúan en distinta dirección y tienen la misma intensidad. ¿De qué manera deben actuar estas dos fuerzas para obtener como resultado las fuerzas representadas gráficamente por $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$?



AUTOEVALUACIÓN Nº 1: VECTORES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

1) Las fuerzas $\vec{F_1} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$ y $\vec{F_2} = 4\,\vec{j} - 2\,\vec{i}$ actúan sobre el punto P. Encuentre la resultante y la equilibrante. Grafique todas las fuerzas en un mismo sistema cartesiano y verifique gráficamente.

2) Sean los vectores $\vec{u} = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ a \end{bmatrix}$, halle el valor de a para que los vectores sean perpendiculares.

3) Escriba el vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = 2\,\vec{j} + \vec{i}$ y $\vec{w} = \vec{i} - \vec{j}$.

4) Encuentre un vector unitario en la dirección de $\vec{PQ}$ si P(3,–1, 2) y Q(–4, 1, 7)

5) Halle el volumen del paralelepípedo determinado por los puntos P(2, 1, –1), Q(–1, 0, 2), R(–3, 1, 4) y M(–3, –1, 5).

6) Sean los puntos P (1, –3, 2) y Q (5, –2, z), calcule el o los valores de z para que el vector que determinan tenga módulo $\sqrt{18}$.

7) Dados los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ a \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = a\,\vec{i} - 3\,\vec{j}$ y $\vec{w} = 5\,\vec{j} - 3\,\vec{i} - \vec{k}$, determine el o los valores de a para que resulten coplanares.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

1) Grafique tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ cualesquiera y halle:

a) $3\,\vec{c}$ **b)** $\frac{1}{3}\,\vec{a}$ **c)** $\vec{a}+\vec{b}$

d) $\vec{b}+2\,\vec{c}$ **e)** $2\,\vec{b}-\vec{c}$ **f)** $\frac{1}{2}\vec{c}+3\,\vec{b}$

2) Dados los vectores $\vec{a}=\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\vec{b}=\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}$, $\vec{c}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$ y $\vec{d}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ calcule:

a) los vectores opuestos de cada uno **b)** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

c) $2.\left(\vec{b}-5\,\vec{d}\right)$ **d)** $-\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{d}-2\,\vec{a}$

e) el versor de $\left(\vec{b}-\vec{d}\right)$ **f)** el ángulo entre $\vec{d}$ y $\vec{c}$

g) los cosenos directores y los módulos de $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$.

3) Dados los puntos A(3, –2) y B(6, y), determine el vector $\vec{AB}$ tal que su módulo sea cinco e interprete gráficamente.

4) El módulo de un vector es tres y su origen es el punto P(3, 2, 1) y el extremo el punto Q(5, 3, z). Halle z.

5) Dados los vectores $\vec{a}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, $\vec{b}=\begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix}$ y $\vec{c}=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$, encuentre los números x e y tales que $x.\vec{a}-y\,\vec{b}=\vec{c}$.

6) Un vector de módulo 4 forma un ángulo de 60° con el eje x y un ángulo de 45° con el eje y.

a) Halle el valor del ángulo γ que forma con el eje z.

b) Determine las componentes del vector.

7) Dados los vectores $\vec{u}=\begin{bmatrix}5\\3\\2\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}-1\\-2\\5\end{bmatrix}$ y $\vec{w}=\begin{bmatrix}0\\3\\-2\end{bmatrix}$ calcule:

a) $\mathrm{proy}_{\vec{u}}\,\vec{v}$ y $\mathrm{proy}_{\vec{u}}\,\vec{w}$,

b) un vector de módulo 2 paralelo a $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$,

c) un vector paralelo a $\left(\vec{v}-\vec{w}\right)$ pero de sentido opuesto.

8) Dados $\vec{u}=\begin{bmatrix} a \\ -3a \end{bmatrix}$ y $\vec{v}=\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, halle el valor de a para que $\text{proy}_{\vec{v}}\vec{u}=1$.

9) Dados los vectores $\vec{v}=\begin{bmatrix} 3x \\ -y \end{bmatrix}$ y $\vec{u}=\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ calcule los valores de x e y de modo que el módulo de $\vec{v}$ sea $\sqrt{13}$ y su producto escalar sea -15.

10) Dado un vector $\vec{a}$ (en el espacio) de módulo 4 que forma con el eje x un ángulo de 30° y con el eje y un ángulo de 60°, determine las componentes de otro vector de módulo 9 paralelo al vector pero de sentido opuesto.

11) Dados los vectores $\vec{v}=2\,\vec{i}-3\,\vec{j}, \vec{w}=4\,\vec{j}+5\,\vec{k}$ y $\vec{u}=3\,\vec{i}-\vec{j}+2\,\vec{k}$ obtenga:

a) las componentes de un vector perpendicular a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$,

b) las componentes del versor perpendicular a $\vec{v}$ y a $\vec{u}$,

c) las componentes de un vector de módulo tres perpendicular a $\vec{v}$ y a $-\vec{u}$,

d) el área del paralelogramo que forman $\vec{v}$ y $\vec{w}$,

e) el área del paralelogramo que forman $\vec{w}$ y $\vec{u}$.

12) Indique si los siguientes vectores son paralelos o perpendiculares. En caso contrario, calcule el ángulo que forman.

a) $\vec{a}=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{b}=\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$ **b)** $\vec{c}=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\vec{d}=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ **c)** $\vec{e}=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\vec{f}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

13) Dados los vectores $\vec{a}=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\vec{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix}$ halle el valor de x tal que:

a) $\vec{a} \,//\, \vec{b}$ **b)** $\vec{a} \perp \vec{b}$ **c)** $\text{proy}_{\vec{b}}\vec{a}=2$

14) Siendo $\vec{a}=\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{b}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$ y $\vec{c}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ calcule:

a) $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ **b)** $\vec{a}\times\vec{b}$ **c)** $\vec{a}\,.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$

d) $\left(\vec{a} \times \vec{c}\right).\vec{b}$ **e)** el módulo de $\vec{a} \times \vec{b}$

15) Determine si los puntos dados en cada caso son coplanares:

a) A(1, 1, 6) B(2, 3, 5) C(8, 4, 6) D(2, 1, 3)

b) A(1, 1, 2) B(–7, 4, –3) C(7, 3, 5) D(5, 8, 3)

16) Dados los vectores $\vec{a} = \vec{i} + x\,\vec{j} - \vec{k}$ y $\vec{b} = 2\,\vec{j} + \vec{i}$ halle el valor de x para que el área del paralelogramo determinado por ellos sea tres.

17) Calcule el valor de w de manera que los vectores $\vec{a} = 2\,\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\vec{c} = w\,\vec{j} + 3\,\vec{i} + 5\,\vec{k}$ sean coplanares.

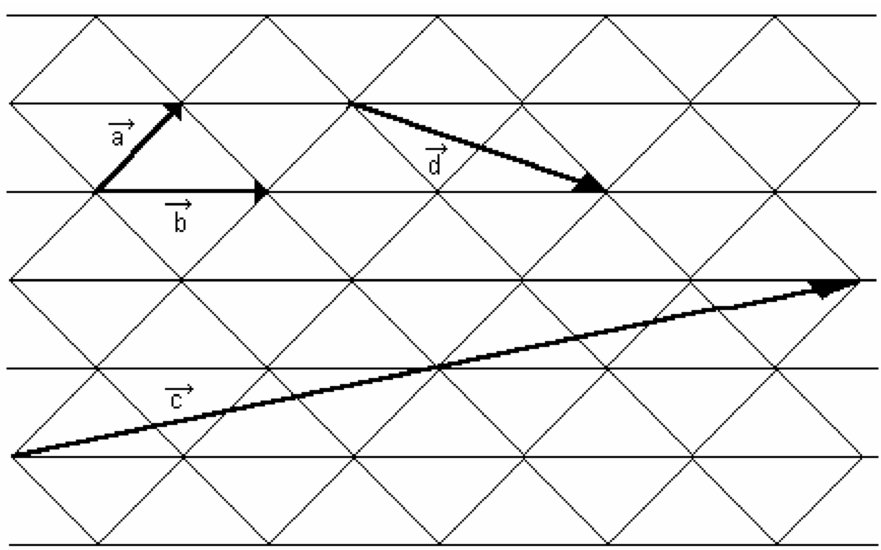
18) Obtenga el área del triángulo determinado por los vectores $\vec{v}_1 = -\vec{j} + \vec{i} + 2\,\vec{k}$ y $\vec{v}_2 = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j}$.

19) Determine el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

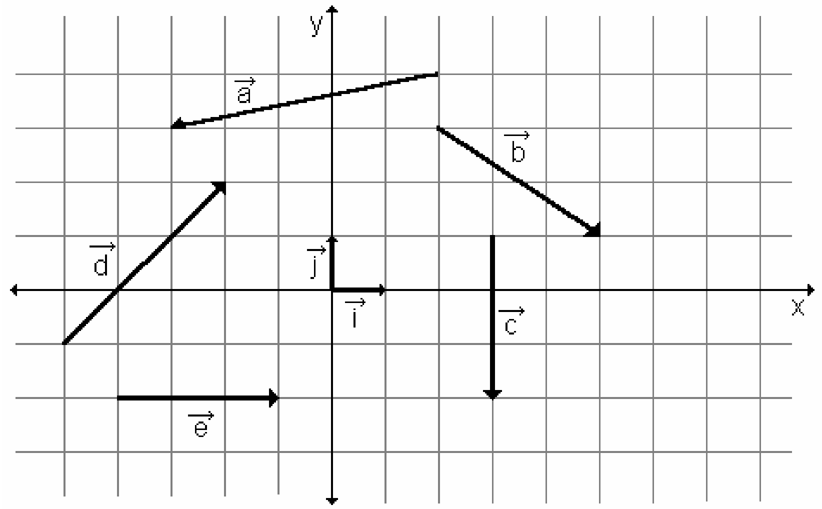
20) El volumen de un paralelepípedo es 18. Si sus lados son los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ halle el valor de x.

21) Calcule el volumen del paralelepípedo sabiendo que cuatro de sus vértices son los puntos $P_1(-1, 1, 2)$; $P_2(0, 2, 3)$; $P_3(1, 1, 1)$; $P_4(-1, 3, 3)$.

22) Exprese los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



23) Escriba los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ y $\vec{e}$ como combinación lineal de los versores fundamentales:



24) Sean los vectores $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$. Escriba:

a) cada uno de los vectores como combinación lineal de los versores fundamentales.

b) el vector $\vec{a}$ como combinación lineal de $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

25) Escriba el vector $\vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ como combinación lineal de $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2. ELEMENTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

2.1 Objeto de la geometría analítica.

2.2 Coordenadas cartesianas.

2.3 Lugares geométricos.

2.4 Coordenadas polares.

> Así, bajo el esquema Descartes-Fermat, los puntos se convirtieron en parejas de números y las curvas en colecciones de parejas de números restringidas a una ecuación. Las propiedades de las curvas pudieron deducirse mediante procesos algebraicos aplicados a las ecuaciones. Con este desarrollo, la relación entre número y geometría llegó a ser plena. Los griegos clásicos sepultaron el álgebra en la geometría, pero ahora la geometría quedó eclipsada por el álgebra. Tal y como los matemáticos lo expresan, la geometría fue aritmetizada.

Morris Kline

2.1 Objeto de la geometría analítica

Los primeros métodos de la geometría analítica se deben a Menecmo (380 – 320 A.C.), quien llega a plantearse problemas de intersección de superficies, aplicando técnicas que, si bien no incluyen todavía las coordenadas, las llevan ocultas en su tratamiento conceptual.

Algo parecido ocurre con Apolonio de Perga (262 – 190 A.C.), quien demostró diversos resultados relacionados con rectas y circunferencias empleando técnicas similares a las de Menecmo.

El matemático parisino Nicole Oresme (1321-1382), obispo de Lisieux, hizo algunos trabajos haciendo uso de la longitud y la latitud, equivalentes a las actuales abscisa y ordenada.

La geometría analítica propiamente dicha comienza con los matemáticos René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665), quienes en sus trabajos llegan a considerar sistemas de coordenadas, aunque sólo admitían coordenadas positivas. El principal logro de la misma es la transformación mutua entre enunciados de tipo geométrico y enunciados de tipo algebraico.

Fermat, en su Introduction to Loci, estudia ya algunas ecuaciones de primer y segundo grado, con lo que consigue clasificar las rectas y algunas de las cónicas, siempre con la limitación que le imponía el no admitir coordenadas negativas.

A principios del siglo XIX, con la construcción de la geometría proyectiva, se dio un fuerte avance a la geometría analítica.

La geometría analítica estudia la relación entre los elementos geométricos y los elementos algebraicos. Propone el estudio de las propiedades de las figuras y la resolución de problemas geométricos mediante la aplicación del álgebra y del análisis matemático. En la resolución de un problema geométrico podemos distinguir los siguientes pasos:

a) transformación de un problema geométrico en un problema analítico,
b) resolución del problema con la ayuda del álgebra y el análisis,
c) interpretación geométrica de los resultados.

La geometría analítica trata dos problemas fundamentales:

- Dada una ecuación algebraica interpretarla geométricamente, es decir, determinar propiedades que permitan construir la figura geométrica que ella representa.
- Dada una figura geométrica o también un conjunto de puntos del plano o el espacio que gocen de una cierta propiedad, encontrar la ecuación algebraica que la represente.

Para la resolución de los problemas mediante la aplicación de la Geometría Analítica debemos referirnos a un sistema coordenado:

- Sistema Coordenado Unidimensional (espacio R, recta)
- Sistema Coordenado bidimensional (espacio R^2, plano)
- Sistema Coordenado Tridimensional (espacio R^3, espacio)

2.2 Coordenadas cartesianas

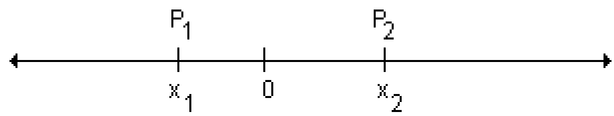
Distancia entre dos puntos

1) En R^1: La distancia entre dos puntos en un *sistema coordenado lineal* se calcula como el valor absoluto de la diferencia de abscisas.

Datos: $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$

Incógnita: d = distancia entre P_1 y P_2

$d = |x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$



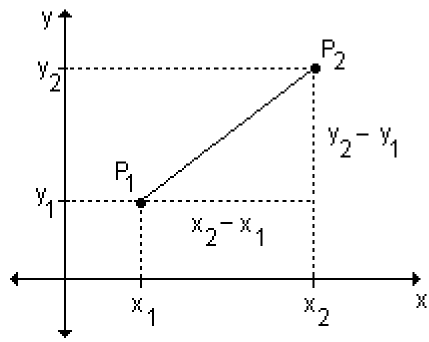
2) En R^2:

Datos: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$

Incógnita: d = distancia entre P_1 y P_2

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



3) En R^3:

Datos: $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$

Incógnita: d = distancia entre P_1 y P_2

$$d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ejemplo: Determine la distancia entre los puntos P_1 (3, –2, 4) y P_2 (–1, –2, 1).

Empleando la fórmula vista con $x_1 = 3$, $y_1 = -2$, $z_1 = 4$, $x_2 = -1$, $y_2 = -2$, $z_2 = 1$ resulta: $d = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-(-2))^2 + (1-4)^2} = \sqrt{16+0+9} = \sqrt{25} = 5$.

La distancia buscada es 5.

Ejemplo: Halle él o los valores de a para que el punto (a, 3) esté a cinco unidades del punto (–2, –1). Con el valor de a hallado grafique la situación.

La distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se expresa como $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

En nuestro ejemplo la distancia entre P(a, 3) y Q(–2, –1) es 5, es decir: $\sqrt{(-2-a)^2 + (-1-3)^2} = 5$.

Resolviendo la ecuación planteada resulta: $4 + 4a + a^2 + (-4)^2 = 5^2 \Rightarrow$

$a^2 + 4a + 4 + 16 - 25 = 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 5 = 0.$

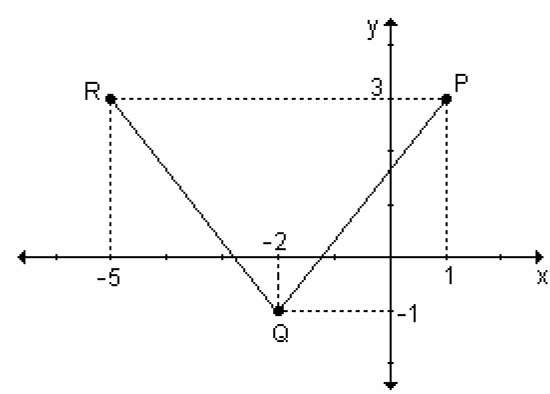
Resolviendo la ecuación obtenemos:

$$a_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.(-5)}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

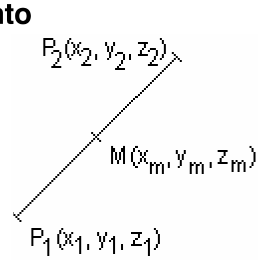
Los valores posibles de a son $a_1 = \frac{-4+6}{2} = 1$, $a_2 = \frac{-4-6}{2} = -5$

Es decir, que existen dos puntos del plano de ordenada 3 cuya distancia a (–2, –1) es 5. Dichos puntos son P(1, 3) y R(–5, 3).

Gráficamente:



Coordenadas del punto medio de un segmento



Datos: $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$

Incógnita: $M(x_m, y_m, z_m)$

Si M es punto medio, entonces:

$$\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{MP_2} \Rightarrow \overrightarrow{P_1M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2}$$

Por lo tanto se debe cumplir:

$$\begin{bmatrix} x_m - x_1 \\ y_m - y_1 \\ z_m - z_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_m - x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \\ y_m - y_1 = \frac{1}{2}(y_2 - y_1) \\ z_m - z_1 = \frac{1}{2}(z_2 - z_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_m = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ z_m = \dfrac{z_1 + z_2}{2} \end{cases}.$$

Ejemplo: Dados los puntos $P_1(-4, 8, 5)$ y $P_2(2, 1, 3)$, halle las coordenadas de su punto medio.

Reemplazando en la fórmula dada considerando $x_1 = -4$, $y_1 = 8$, $z_1 = 5$, $x_2 = 2$, $y_2 = 1$, $z_2 = 3$ resulta:

$x_m = \dfrac{-4+2}{2} = -1$, $y_m = \dfrac{8+1}{2} = \dfrac{9}{2}$ y $z_m = \dfrac{5+3}{2} = 4$.

Las coordenadas del punto medio son $\left(-1, \dfrac{9}{2}, 4\right)$.

EJERCICIOS

1) Calcule la distancia entre los puntos P(–7, 4) y Q(5, –1).
2) Determine las coordenadas del punto medio del segmento que determinan los puntos P y Q del ejercicio 1.
3) Dados los puntos de coordenadas A(–3, 5) y B(x, –1), halle el valor de x sabiendo que la longitud del segmento que determinan es $\sqrt{61}$.
4) El extremo de un segmento es el punto P(3, –4). Si su punto medio es M(–1, 1), encuentre las coordenadas del otro extremo.
5) Dados los puntos M(2, –1) y S(5, y), calcule el valor de y de manera tal que la longitud del segmento que ellos determinan sea 5.
6) Halle el valor de b de manera tal que la distancia que separa los puntos P(b, 7) y Q(–4, 2) sea 13. Para dicho valor de b, encuentre las coordenadas del punto medio M.

RESPUESTAS

1) 13 **2)** $\left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$ **3)** $x = 2$, $x = -8$ **4)** (–5, 6)

5) $y = 3$, $y = -5$ **6)** $b = -16$, $b = 8$; $M\left(-10, \dfrac{9}{2}\right)$, $M\left(2, \dfrac{9}{2}\right)$

EJERCICIOS INTEGRADORES 2.2 COORDENADAS CARTESIANAS

1) Demuestre que los puntos A(2, –2), B(–8, 4), C(5, 3) son vértices de un triángulo rectángulo. Represente gráficamente.
2) Calcule el valor de x e y sabiendo que P(4, y) es el punto medio del segmento que determinan M(3, –7) y N(x, 6).
3) La abscisa de un punto es –3 y su distancia al punto P(1, –2) es $\sqrt{52}$. Encuentre la ordenada del punto.
4) La distancia del punto P(2, x) a R(5, –1) es la mitad de la distancia a S(–6, 9). Calcule el valor de la ordenada del punto P.
5) Obtenga el valor de la ordenada de M(1, y) sabiendo que su distancia al punto A(–1, –3) es el doble que su distancia al origen de coordenadas.

2.3 Lugares geométricos

Definición: Se llama así al conjunto de puntos en R^2 o R^3 que cumplen con ciertas condiciones comunes.

Ejemplo: La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *centro.*

Ecuación del lugar geométrico

Es una ecuación del tipo f(x, y) = 0 (ó f(x, y, z) = 0) que representa las condiciones algebraicas que deben cumplir las coordenadas (x, y) (ó (x, y, z)) de los puntos del lugar geométrico.

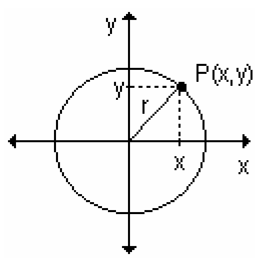
De aquí podemos decir:

- todo par (x, y) que satisface f(x, y) = 0, pertenece al lugar geométrico.
- si un punto (x, y) pertenece al lugar geométrico, satisface f(x, y) = 0.

Ejemplo:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$ ecuación de una circunferencia



Gráfica de un lugar geométrico

Está formada por el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación del lugar geométrico.

Para el trazado de la gráfica puede tomarse una cantidad de puntos suficientes tal que las coordenadas de los mismos satisfagan la ecuación del lugar geométrico, pero, para facilitarlo, se realiza un estudio previo que permite tener una idea de la forma de la gráfica, reduciéndose de esta manera la cantidad de puntos que se necesitan encontrar para trazarla.

Ejemplo: Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos P (–1, 2) y Q (3, 4). Identifique el lugar geométrico y grafique.

Debemos encontrar todos los puntos del plano R(x, y) cuya distancia a P sea igual a su distancia a Q, es decir, que equidisten de P y Q. Entonces planteamos d(R, P) = d(R, Q).

Calculamos las distancias: $d(R, P) = \sqrt{(-1-x)^2 + (2-y)^2}$

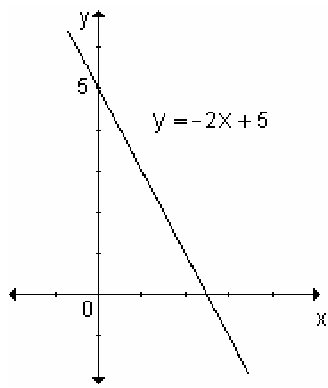
$$d(R, Q) = \sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2}$$

Igualando dichas distancias y resolviendo resulta:

$\sqrt{(-1-x)^2+(2-y)^2} = \sqrt{(3-x)^2+(4-y)^2}$, elevando ambos miembros al cuadrado: $\left(\sqrt{(-1-x)^2+(2-y)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(3-x)^2+(4-y)^2}\right)^2$

$1 + 2x + x^2 + 4 - 4y + y^2 = 9 - 6x + x^2 + 16 - 8y + y^2$
$2x - 4y + 5 = -6x - 8y + 25$
$8x + 4y - 20 = 0 \Rightarrow \quad 2x + y - 5 = 0$

El lugar geométrico de los puntos del plano que verifican la condición dada es la recta $y = -2x + 5$.
Gráficamente:



Ejemplo: Encuentre la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto Q(3, 0) es el doble de la distancia al punto R(–3, 0).

Para hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x, y) cuya distancia a Q es el doble de la distancia a R, se plantea: d (Q, P) = 2.d(R, P).

$\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2} = 2.\sqrt{(x-(-3))^2+(y-0)^2}$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 = \left(2.\sqrt{(x+3)^2+y^2}\right)^2$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4\,(x^2 + 6x + 9 + y^2)$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4x^2 - 24x - 36 - 4y^2 = 0$

$-3x^2 - 3y^2 - 30x - 27 = 0$

Dividiendo ambos miembros por (–3) obtenemos $x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0$, que es la ecuación del lugar geométrico buscado.

EJERCICIOS

1) Obtenga la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos P(3, –1) y Q(2, –5).
2) Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia a la recta $x = 2$ es el triple de la distancia al punto P(–1, 1).
3) Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto R(2, –2) es la mitad de la distancia al eje de las ordenadas.

4) Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a los puntos R(0, 3) y Q(0, –3) se mantiene constante e igual a 4 .
5) Obtenga la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan del punto R(1, –2) y de la recta $y - 2 = 0$.

RESPUESTAS

1) $-2x - 8y - 19 = 0$ **2)** $8x^2 + 9y^2 + 22x - 18y + 14 = 0$

3) $3x^2 + 4y^2 - 16x + 16y + 32 = 0$ **4)** $\frac{5}{4}y^2 - x^2 = 5$ **5)** $x^2 - 2x + 1 + 8y = 0$

Discusión de la ecuación del lugar geométrico (en R^2)

Analizamos los siguientes pasos:

1) *Intersección con los ejes coordenados*

a) *Intersección con el eje de abscisas (x)*

Hacemos y = 0, reemplazamos en la ecuación y calculamos él o los valores de x.

b) *Intersección con el eje de ordenadas (y)*

Hacemos x = 0, reemplazamos en la ecuación y calculamos él o los valores de y.

2) *Simetrías*

a) *Con respecto al eje de abscisas*

Dos puntos son simétricos con respecto al eje x si el segmento que los une es perpendicular a dicho eje y además éste lo corta en el punto medio.

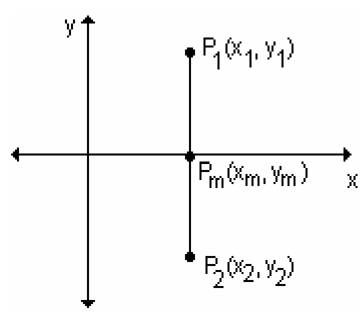
$P_m(x_m, y_m)$ es el punto medio entonces:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Pero $x_1 = x_2 = x_m$.

Como y_m está sobre el eje x debe ser $y_m = 0$.

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = 0 \Rightarrow y_1 = -y_2$$



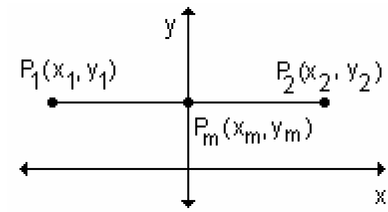
Conclusión: la gráfica de un lugar geométrico es simétrica respecto al eje x si al reemplazar en su ecuación y por – y, ésta no varía.

b) *Con respecto al eje de ordenadas*

Dos puntos son simétricos con respecto al eje y si la recta que los une intercepta al eje en su punto medio y es normal al mismo.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ donde } y_1 = y_2 = y_m$$

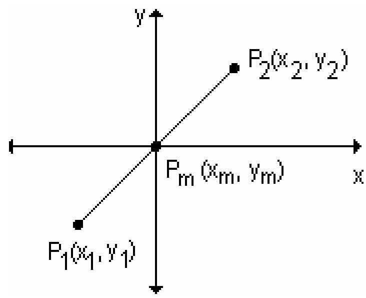


Conclusión: Si la ecuación de un lugar geométrico no se altera cuando se sustituye x por –x, su gráfica es simétrica respecto al eje y.

c) *Con respecto al origen de coordenadas*
Dos puntos son simétricos respecto al origen de coordenadas, si dicho origen es el punto medio del segmento que ellos determinan.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = 0 \Rightarrow y_1 = -y_2$$



Conclusión: Si al sustituir x por –x e y por –y la ecuación no cambia, su gráfica es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

3) *Extensión de la curva*: se determinan intervalos de variación para los cuales x e y son valores reales.

a) *Extensión con respecto al eje de abscisas*: dada la ecuación f(x, y) = 0, se despeja y = f(x) y luego se determina el intervalo real de x para los cuáles y es real.

b) *Extensión respecto al eje de ordenadas*: se expresa f(x, y) = 0 como x = f(y) y se determina el intervalo real de y para los cuáles x es real.

4) *Trazado de la gráfica*: en la ecuación y = f(x) damos valores a x, teniendo en cuenta la extensión y la simetría, y calculamos los valores de y correspondientes. Los pares hallados, se representan en un sistema coordenado.

Ejemplo: Realice la discusión del lugar geométrico de ecuación: $4y^2 - 4x + 2 = 0$

Llamemos G a la gráfica de la ecuación dada.
Intersección con los ejes

a) $G \cap \text{eje } x \Rightarrow y = 0, \quad -4x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \; P\left(\frac{1}{2}, \; 0\right)$

b) G $\cap$ eje y $\Rightarrow x = 0$, $4y^2 + 2 = 0 \Rightarrow 4y^2 = -2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}} \notin R$, por lo tanto, no existe intersección con el eje y

Simetrías

a) *Respecto al eje x* (se realiza la sustitución $y \to -y$)

$4(-y)^2 - 4x + 2 = 4y^2 - 4x + 2$. Se obtiene la misma ecuación y por lo tanto la gráfica es simétrica con respecto al eje x.

b) *Respecto al eje y* (se realiza la sustitución $x \to -x$)

$4y^2 - 4(-x) + 2 \neq 4y^2 - 4x + 2$. Al no obtenerse la misma ecuación, puede decirse que la gráfica no es simétrica con respecto al eje y.

c) *Respecto al origen de coordenadas* (se realizan las sustituciones $x \to -x$ e $y \to -y$)

$4(-y)^2 - 4(-x) + 2 \neq 4y^2 - 4x + 2$. No se obtiene la misma ecuación. Por lo tanto, la gráfica no es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

Extensión

a) *Con respecto al eje x:*

Escribimos $y = f(x)$

$4y^2 - 4x + 2 = 0$

$4y^2 = 4x - 2$

$y^2 = x - \frac{1}{2} \Rightarrow \qquad y = \pm\sqrt{x - \frac{1}{2}}$

Para que y tome valores reales, el radicando deber ser mayor o igual que cero. Por lo tanto:

$x - \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

b) *Con respecto al eje y:*

Escribimos $x = f(y)$

$4y^2 - 4x + 2 = 0$

$-4x = -4y^2 - 2$

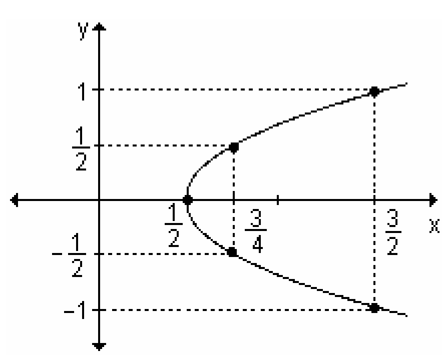
$x = y^2 + \frac{1}{2}$

Como x existe para todo valor de real de y real, resulta:

$-\infty < y < +\infty$

Trazado de la gráfica

x	y
$\frac{1}{2}$	0
$\frac{3}{4}$	$\begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$
$\frac{3}{2}$	$\begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$



EJERCICIOS

1) Dada la curva de ecuación $2x^2 + \frac{9}{2}y^2 = 12$, determine la extensión con respecto a los ejes coordenados.

2) Dada la curva de ecuación $y^2 = 4x + 2$ encuentre las intersecciones con los ejes y simetrías.

3) Dada la curva de ecuación $2x^2 - y^2 - 4 = 0$ estudie la extensión con respecto a los ejes x e y, las intersecciones con los ejes coordenados y las simetrías. Grafique.

RESPUESTAS

1) $-\sqrt{6} \le x \le \sqrt{6}; -\sqrt{\frac{8}{3}} \le y \le \sqrt{\frac{8}{3}}$

2) $P\left(-\frac{1}{2},\ 0\right), Q\left(0,\ \sqrt{2}\right), R\left(0,\ -\sqrt{2}\right)$.

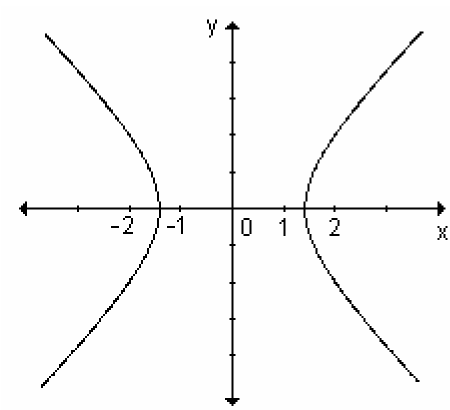
Simétrica con respecto al eje x

3) Extensión: $x \le -\sqrt{2}$ o $x \ge \sqrt{2}$, $y \in$ R.

Intersección con el eje x: $P(\sqrt{2}, 0)$ y $Q(-\sqrt{2}, 0)$.

No presenta intersección con el eje y.

Tiene simetría total.



EJERCICIOS INTEGRADORES 2.3 LUGARES GEOMÉTRICOS

1) En cada inciso halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen las condiciones dadas:

- **a)** la distancia al punto P(2, 3) es igual a 5.
- **b)** equidistan de A(1, –2) y B(5, 4).
- **c)** se conservan siempre a dos unidades a la izquierda del eje y.
- **d)** están siempre a igual distancia de los ejes x e y.
- **e)** equidistan de los puntos A(3, 0) y B(0, 3).
- **f)** la diferencia de las distancias a los puntos P(5, 0) y Q(–5, 0) es 8.

2) Realice la discusión de los siguientes lugares geométricos:

a) $y^2 - 2x = 0$ **b)** $x^2 + y^2 = 9$

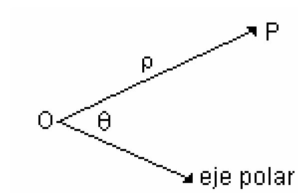
2.4 Coordenadas polares

Dados en un plano un punto O llamado *polo* y una semirrecta de origen O llamada *eje polar*, elegido un sentido positivo para los ángulos y fijado el segmento y el ángulo unidad, se denomina coordenadas polares de un punto P de ese plano a los números reales que simbolizamos ρ y θ y que representan respectivamente:

ρ: distancia que separa el punto O del punto P, es decir $\rho = \left|\overrightarrow{OP}\right|$.

θ: ángulo cuyos lados son el eje polar y la semirrecta determinada por el punto P y el polo.

Con la definición anterior se establece un sistema de referencia para los puntos del plano.



ρ: radio vector de P

θ: argumento o ángulo polar

$-\infty < \rho < +\infty \qquad -\infty < \theta < +\infty$

El argumento o ángulo polar puede ser positivo o negativo al igual que en trigonometría.

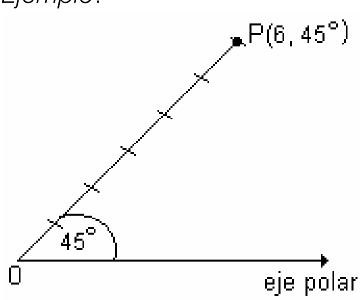
El radio vector es positivo si P se halla sobre el lado terminal de θ y negativo si está sobre el extremo opuesto. Si ρ es positivo y θ el ángulo positivo menor que 360º, el par de números que determinan la ubicación del punto en el plano, se llama *par principal de coordenadas.*

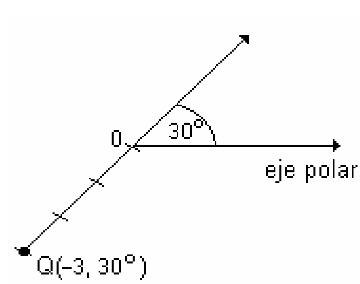
Secuencia para el trazado de un punto

1) Se traza el ángulo polar, teniendo como lado inicial el eje polar positivo. Si θ es mayor que cero, el ángulo se genera en sentido contrario a las agujas del reloj y si θ es menor que cero, en el mismo sentido de giro que las agujas del reloj.

2) Si ρ es mayor que cero, se lo toma a partir del polo sobre el lado terminal del ángulo polar, si ρ es menor que cero, se lo toma a partir del polo sobre la prolongación del lado terminal del ángulo polar.

Ejemplo:





Nota: En coordenadas cartesianas, cada punto (x, y) tiene una representación única. Esto no sucede, en cambio, en coordenadas polares. Por ejemplo, las coordenadas (ρ, θ) y $(\rho, \theta + 2\pi)$ representan el mismo punto. Otra manera de obtener distintas representaciones de un punto es usar valores negativos de ρ. Así, las coordenadas (ρ, θ) y $(-\rho, \theta \pm \pi)$ representan el mismo punto.

Ejemplo: Dibuje el punto $\left(2,-\frac{2}{3}\pi\right)$ y encuentre tres representaciones más en coordenadas polares de ese punto considerando $-2\pi < \theta < 2\pi$.

A partir de $\left(2,-\frac{2}{3}\pi\right)$ obtenemos una representación equivalente si sumamos 2π, es decir un giro completo, al ángulo:

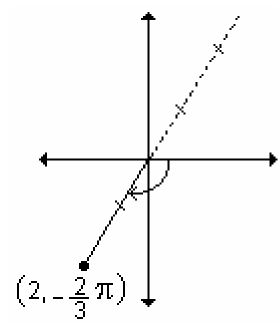
$$\left(2,-\frac{2}{3}\pi+2\pi\right)=\left(2,\frac{4}{3}\pi\right)$$

Otras representaciones las obtenemos cambiando ρ por $-\rho$ y sumando o restando π al ángulo:

$$\left(-2,-\frac{2}{3}\pi+\pi\right)=\left(-2,\frac{1}{3}\pi\right)$$

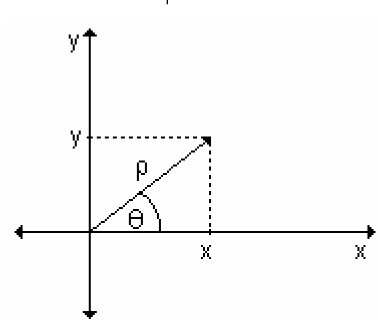
$$\left(-2,-\frac{2}{3}\pi-\pi\right)=\left(-2,-\frac{5}{3}\pi\right)$$

Para obtener una mejor visualización del punto, al realizar su representación gráfica superponemos el sistema de coordenadas polares con el sistema de coordenadas cartesianas de manera tal que el polo coincida con el origen (0, 0) y el eje polar con el semieje positivo de las abscisas.



Transformación de coordenadas cartesianas a polares

Un mismo punto puede estar referido a distintos sistemas coordenados. Dadas las coordenadas cartesianas de un punto P nos proponemos determinar las coordenadas polares del mismo.



Datos: P(x, y)

Incógnitas: ρ, θ / P(ρ, θ)

Trabajamos con sistemas superpuestos, es decir, hacemos coincidir el polo con el origen de coordenadas y el eje polar con el eje x. En la figura queda formado un triángulo rectángulo.

Podemos definir: $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho}$

Elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro resulta:

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} \Rightarrow 1 = \frac{x^2+y^2}{\rho^2} \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = x^2 + y^2$$

A partir de las igualdades dadas, podemos escribir $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, $x = \rho\cos\theta$.
Dividiendo miembro a miembro obtenemos:

$$\frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Resumen: Dado P(x, y) $\rightarrow$ P(ρ, θ) es tal que:

- El radio vector se calcula de la forma $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$.
- El argumento o ángulo polar se calcula teniendo en cuenta que $\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Ejemplo: Exprese en coordenadas polares el punto A(1, 1) obteniendo dos representaciones diferentes, $0^o \le \theta < 360^o$.

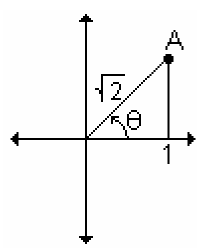
En este caso x = 1 e y = 1. Por lo tanto el radio vector ρ es:

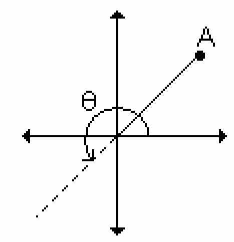
$\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2} = .$

El ángulo $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \operatorname{arctg} 1.$

Existen infinitos valores de θ cuyo arcotangente es uno, pero el enunciado nos pide $0^o \le \theta < 360^o$.

Para el par principal de coordenadas elegimos ρ positivo y θ debe ser positivo y menor de 360^o.
Como vemos en la figura el punto A es del primer cuadrante por lo tanto el valor de θ es 45^o.
El par principal de coordenadas es A ($\sqrt{2}$, 45^o).





Otra representación del mismo punto es
A ($-\sqrt{2}$, $45^o + 180^o$) es decir A ($-\sqrt{2}$, 225^o).

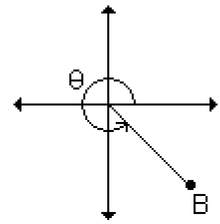
Ejemplo: Exprese en coordenadas polares el punto B(5, –5) obteniendo dos representaciones diferentes, $0^o \le \theta < 360^o$.

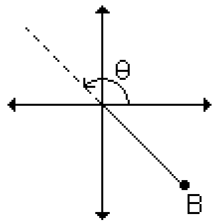
Obtenemos ρ y θ usando las fórmulas correspondientes:

$\rho = \pm\sqrt{5^2 + (-5)^2} = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2}$ y

$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{-5}{5}\right) = \operatorname{arctg}(-1)$

El punto es del cuarto cuadrante, por lo tanto el par principal de coordenadas es B $(5\sqrt{2}, 315^{o})$.





Considerando $0^{o} \leq \theta < 360^{o}$, otra representación es:
$B(-5\sqrt{2}, 315^{o} - 180^{o}) = B(-5\sqrt{2}, 135^{o})$.

Ejemplo: Escriba las siguientes ecuaciones en coordenadas polares:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 9 = 0$
b) $y + 2x - 7 = 0$

Hemos visto que:

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \cos\theta = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho\cos\theta, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho\operatorname{sen}\theta$$

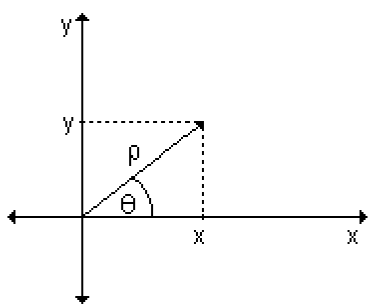
Sustituyendo resulta:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 - 2\rho\cos\theta + 9 = 0$

b) $y + 2x - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho\operatorname{sen}\theta + 2\rho\cos\theta - 7 = 0$

que son las ecuaciones en coordenadas polares buscadas.

Transformación de coordenadas polares a cartesianas



Datos: $P(\rho, \theta)$

Incógnitas: x, y / P(x, y)

Teniendo en cuenta las mismas consideraciones que en el caso anterior resulta:

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \quad \Rightarrow \quad x = \rho\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho} \quad \Rightarrow \quad y = \rho\operatorname{sen}\theta$$

Resumen: Dado P(ρ, θ) → P(x, y) es tal que:

- La coordenada x se calcula resolviendo $\rho \cos \theta$.
- La coordenada y del punto se obtiene del producto ρ sen θ.

Ejemplo: Exprese en coordenadas cartesianas $P(-2, 60^{\circ})$ y $Q(3, 270^{\circ})$.

La abscisa se obtiene multiplicando el módulo del radio vector por el coseno del ángulo θ ($x = \rho \cos\theta$) y la ordenada, multiplicando el módulo del radio vector por el seno del mismo ángulo ($y = \rho \operatorname{sen} \theta$).

Para $P(-2, 60^{\circ})$, obtenemos:

$$x = -2.\cos 60^{\circ} = -2.0{,}5 = -1; \quad y = -2.\operatorname{sen} 60° = -2.\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

Entonces, las coordenadas cartesianas de P son $(-1, -\sqrt{3})$

Para el punto $Q(3, 270^{\circ})$ resulta:

$x = 3.\cos 270^{\circ} = 3.0 = 0$; $y = 3.\operatorname{sen} 270^{\circ} = 3.(-1) = -3$

Entonces, las coordenadas cartesianas de Q son (0, –3).

Ejemplo: Exprese en coordenadas cartesianas las siguientes ecuaciones:

a) $\rho \cos \theta - 2\rho \operatorname{sen} \theta - 10 = 0$

b) $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 8 = 0$

Hemos visto que:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \rho^2 = x^2 + y^2 \text{ ; } x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

Reemplazando, resulta:

a) $x - 2y - 10 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$

que son las ecuaciones en coordenadas cartesianas buscadas.

Ejemplo: Dada la ecuación $\rho(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) = 1$ expresada en coordenadas polares, escríbala en coordenadas cartesianas. Determine qué tipo de curva representa y grafique.

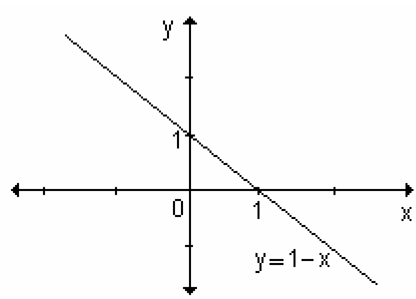
Aplicamos propiedad distributiva en la ecuación dada y reemplazamos:

$\rho \operatorname{sen} \theta + \rho \cos \theta = 1 \Rightarrow y + x = 1 \Rightarrow$

$y = 1 - x$

El lugar geométrico que describe esta ecuación es una recta.

Gráficamente:



EJERCICIOS

1) Represente gráficamente los siguientes puntos expresados en coordenadas polares:

a) $P(-3, 45^{o})$ **b)** $Q(2, 120^{o})$ **c)** $R(-1, 300^{o})$

2) Indique dos representaciones distintas del punto $P(-1, 1)$ en coordenadas polares considerando $0^{o} \le \theta < 360^{o}$.

3) Escriba en coordenadas polares $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ considerando $0^{o} \le \theta < 360^{o}$.

4) Halle las coordenadas polares del punto $P\left(3, -\sqrt{3}\right)$ $(0^{o} \le \theta < 360^{o})$.

5) Escriba en coordenadas polares las siguientes ecuaciones:

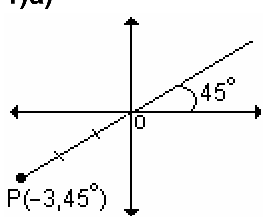
a) $x^2 + y^2 = 9$ **b)** $x^2 + y^2 - 2x = 0$

6) Exprese en coordenadas cartesianas:

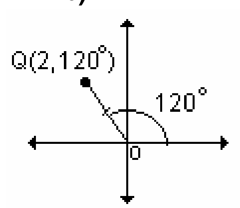
a) $2\rho\,(\text{sen}\,\theta + \cos\theta) = \rho^2\,\text{sen}^2\,\theta$ **b)** $\rho^2(4\,\text{sen}^2\,\theta - 9\cos^2\theta) = 36$

RESPUESTAS

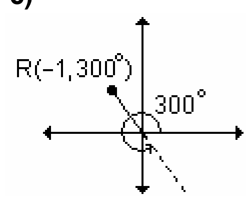
1)a)



b)



c)



2) $P\left(\sqrt{2}, 135^{o}\right)$, $P\left(-\sqrt{2}, 315^{o}\right)$

3) $P(1, 135^{o})$, $P(-1, 315^{o})$

4) $P_1\left(\sqrt{12}, 330^{o}\right)$, $P_2\left(-\sqrt{12}, 150^{o}\right)$

5)a) $\rho^2 = 9$ **b)** $\rho = 2\cos\theta$

6)a) $2y + 2x = y^2$ **b)** $4y^2 - 9x^2 = 36$

EJERCICIOS INTEGRADORES 2.4 COORDENADAS POLARES

1) Escriba dos representaciones distintas en coordenadas polares considerando $0^{o} \le \theta < 360^{o}$ de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas:

a) $P_1(-2, 2)$ **b)** $P_2(4, 0)$ **c)** $P_3(0, -4)$

2) Halle las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos dados en coordenadas polares:

a) $P_1(2, 60^{o})$ **b)** $P_2(-2, 120^{o})$ **c)** $P_3\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$

3) Exprese las siguientes ecuaciones en coordenadas polares:

a) $x^2 + y^2 = 2x$ **b)** $y = x^2$

4) Exprese las siguientes ecuaciones en coordenadas cartesianas:

a) $5 - \rho.\text{sen}\,\theta = 0$ **b)** $\rho.(2\cos\theta - \text{sen}\,\theta) = 0$

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE ELEMENTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

1) El segmento determinado por los puntos P(–1, k) y Q(3, –2) tiene longitud 5 si k es igual a:

a) –5 **b)** 1 **c)** –5 ó 1 **d)** 5 ó –1

2) Las coordenadas del punto medio M del segmento determinado por P(–1, 2) y Q(5, -4) son:

a) M(3, –1) **b)** M(2, –1) **c)** M(2, –3) **d)** M(–2, 1)

3) Uno de los extremos de un segmento es $P_1(3, -7)$ y su punto medio es M(–7, 3). Las coordenadas del otro extremo son:

a) $P_2\,(5, 5)$ **b)** $P_2\,(-2, -2)$ **c)** $P_2\,(17, -13)$ **d)** $P_2\,(-17, 13)$

4) Un punto P del eje de las abscisas que equidista de R(1, 3) y S(8, 4) es:

a) P(5, 0) **b)** P(0, 5) **c)** P(–5, 0) **d)** P(0, –5)

5) Un punto T sobre el eje de las ordenadas que equidista de P(–2, 0) y R(4, 6) es: **a)** S(4, 0) **b)** S(0, 4) **c)** S(–4, 0) **d)** S(0, –4)

6) Considerando ángulos polares menores que un giro, las coordenadas polares de P(–1, 1) son:

a) $P_1\left(-\sqrt{2}, 45^\circ\right),\ P_2\left(\sqrt{2},\ 225^\circ\right)$ **b)** $P_1\left(\sqrt{2}, 45^\circ\right),\ P_2\left(-\sqrt{2}, 225^\circ\right)$

c) $P_1\left(-\sqrt{2}, 135^\circ\right),\ P_2\left(\sqrt{2},\ 315^\circ\right)$ **d)** $P_1\left(\sqrt{2}, 135^\circ\right),\ P_2\left(-\sqrt{2},\ 315^\circ\right)$

7) Las coordenadas cartesianas del punto R(4, 150º) son:

a) $R\left(2\sqrt{3}, 2\right)$ **b)** $R\left(-2\sqrt{3}, 2\right)$ **c)** $R\left(-2\sqrt{3}, -2\right)$ **d)** $R\left(2\sqrt{3}, -2\right)$

8) Dada la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, su expresión en coordenadas polares es:

a) $\rho^2 = 4$ **b)** $\rho = 4$ **c)** $\rho = 4\cos\theta$ **d)** $\rho = 4\text{sen}\theta$

9) Dada la ecuación $\rho = 4\text{sen}\theta$, su expresión en coordenadas cartesianas es:

a) $x + y = 4$ **b)** $x^2 + y^2 = 4$ **c)** $x^2 + y^2 = 4y$ **d)** $x^2 + y^2 = 4x$

GUÍA DE ESTUDIO DE TEORÍA N° 2: COORDENADAS CARTESIANAS Y POLARES

1) ¿Qué estudia la geometría analítica?

2) ¿Cuáles son los problemas fundamentales de la geometría analítica?

3) Deduzca la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos en:

a) R **b)** R^2 **c)** R^3

4) ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio entre dos puntos? ¿Cómo se obtienen?
5) ¿Qué entiende por lugar geométrico?
6) Defina ecuación de un lugar geométrico.
7) Defina gráfica de un lugar geométrico.
8) ¿Cuáles son los pasos a seguir para realizar la discusión de la ecuación de un lugar geométrico? Explique cada uno de ellos.
9) Defina sistema de coordenadas polares.
10) ¿Cómo se representa gráficamente un punto dado en coordenadas polares?
11) Exprese las relaciones existentes entre las coordenadas cartesianas y las polares. Deduzca la fórmula para pasar de un sistema a otro.

AUTOEVALUACIÓN Nº 2. ELEMENTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

1) Deduzca la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $(-1, 5)$ y de la recta $y - 1 = 0$.
2) Analice la extensión y la simetría de la curva $4x^2 - 9y^2 = 36$.
3) Exprese en coordenadas polares las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 8y = 0$ **b)** $5x + y = 0$ **c)** $2x^2 + y^2 - 4 = 0$

4) Analice las simetrías, la extensión y la intersección con los ejes coordenados del lugar geométrico cuya ecuación es $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$. Grafique.
5) Halle las coordenadas polares de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas:

a) $P_1\ (-3, 3)$ **b)** $P_2\ (2, -6)$ **c)** $P_3\ (-2, 0)$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

1) Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto $P(3, -2)$. Si la abscisa del otro extremo es 6, calcule su ordenada.
2) Determine sobre los ejes los puntos que equidistan de $P(-3, 2)$ y $Q(3, 4)$.
3) Los vértices de un triángulo rectángulo son los puntos $A(1, -2)$, $B(4, -2)$ y $C(4, 2)$. Halle la longitud de los catetos, de la hipotenusa, el área del triángulo y los puntos medios de cada uno de sus lados.
4) Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $P(-1, 1)$ y $Q(3, 1)$. Calcule las coordenadas del tercer vértice y represente gráficamente.
5) Uno de los extremos de un segmento es el punto $A(7, 8)$ y su punto medio es $M(4, 3)$. Encuentre las coordenadas del otro extremo.
6) Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano:

a) que equidistan de los puntos $A(-3, 5)$ y $B(7, -9)$,

b) cuya distancia al punto $P(4, 0)$ es igual a la distancia al eje de las ordenadas,

c) cuya distancia al eje de ordenadas disminuida en 3 unidades es igual al doble de la distancia al eje de las abscisas,

d) tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos P(0, 4) y Q(0, –4) es 10,

e) tales que su distancia al punto (1, –3) es el doble de su distancia a la recta y = 3,

f) cuya distancia a la recta x = –3 es igual a la distancia al punto P(–1, 2).

7) Realice la discusión de las ecuaciones de los lugares geométricos siguientes:

a) $9x^2 + 4y^2 = 36$ **b)** $-4x^2 + 4y - 2 = 0$

8) Halle las coordenadas polares de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas, considerando $0^o \leq \theta < 360^o$:

a) P_1 (–1, –3) **b)** $P_2 \left(3, -\sqrt{3}\right)$ **c)** P_3 (3, 2)

d) P_4 (0, 1) **e)** P_5 (–1, 0)

9) Encuentre las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos expresados en coordenadas polares:

a) P_1 $(4, 30^o)$ **b)** $P_2 \left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ **c)** P_3 $(6, 300^o)$

d) $P_4 \left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$ **e)** P_5 $(5, 195^o\, 30')$

10) Dadas las siguientes ecuaciones en coordenadas cartesianas expréselas en coordenadas polares:

a) $5x - 4y + 3 = 0$ **b)** $y^2 = 4x$ **c)** $x^2 + y^2 - 2y = 0$ **d)** $x.y = 2$

11) Dadas las siguientes ecuaciones en coordenadas polares expréselas en coordenadas cartesianas:

a) ρ sen $\theta = -2$ **b)** $\rho = 4 \cos \theta$

c) ρ (cos θ – sen θ) = 2 **d)** $\rho - \rho \cos \theta = 4$

3. RECTA EN EL PLANO

3.1 Ecuación de la recta.

3.2 Posiciones relativas de dos rectas.

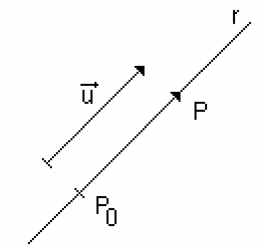
3.3 Familia de rectas.

El gran libro de la Naturaleza se encuentra abierto ante nuestros ojos y la verdadera filosofía está escrita en él... Pero no podemos leerlo a no ser que primero aprendamos el lenguaje y los caracteres con los cuales está escrito... Está escrito en lenguaje matemático y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas.

Galileo

3.1 Ecuación de la recta

Determinación de la ecuación de una recta dado un punto que le pertenece y un vector paralelo a la misma

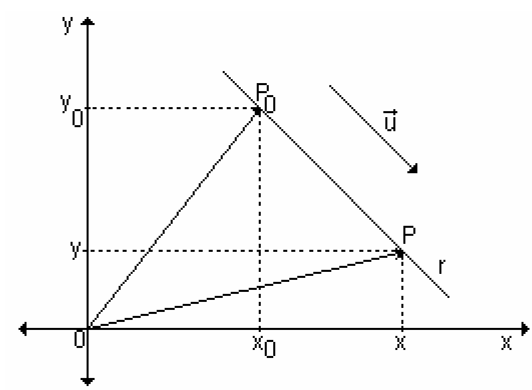


Sea P un punto cualquiera que pertenece a la recta r, P_0 un punto determinado de la recta y $\vec{u}$ un vector paralelo a la misma ($\vec{u}$ // r).

Para determinar la ecuación de r es necesario expresar qué condiciones deben cumplir los puntos P que pertenecen a la recta. Entre P_0 y P determinamos el vector $\overrightarrow{P_0P}$. Por condiciones de paralelismo entre vectores deducimos que $P \in r$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \,//\, \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = t\,\vec{u}, t \in R$.

La expresión $\overrightarrow{P_0P} = t\,\vec{u}, t \in R$ recibe el nombre de *ecuación absoluta de la recta.* Se denomina absoluta pues no está referida a ningún sistema coordenado.

Si suponemos ahora la recta referida a un sistema cartesiano ortogonal, las conclusiones son similares.



Datos: $P_0(x_0, y_0) \in r$

$\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \;//\; r$

P(x, y) punto genérico de la recta (representa uno cualquiera de los puntos de r).

Incógnita: ecuación de la recta r tal que $P_0 \in r$ y $\vec{u}$ // r.

Usando las condiciones vectoriales podemos escribir:

$$P(x,y) \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} \text{ pero } \overrightarrow{P_0P} \;//\; \vec{u} \;\Rightarrow \overrightarrow{P_0P} = t\,\vec{u}, t \in R$$

Luego: $P \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\,\vec{u}, t \in R$. Ésta se conoce como *ecuación vectorial* de la recta que contiene al punto P_0 y es paralela al vector $\vec{u}$.

A partir de la ecuación vectorial se puede determinar otra forma de expresar la ecuación de la misma recta. Escribiendo los vectores en función de sus componentes resulta:

$$\vec{OP_0} = x_0 \, \vec{i} + y_0 \, \vec{j} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad \vec{OP} = x \, \vec{i} + y \, \vec{j} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\vec{P_0P} = t.\vec{u} = t.\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t\,u_1 \\ t\,u_2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Reemplazando en la ecuación vectorial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tu_1 \\ tu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + tu_1 \\ y_0 + tu_2 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta la igualdad entre vectores podemos escribir la *ecuación paramétrica* de la recta que contiene al punto P_0 y es paralela al vector $\vec{u}$ de la forma $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Si las componentes del vector son no nulas es decir $u_1 \neq 0$ y $u_2 \neq 0$, despejando t podemos escribir $\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{u_1} \\ t = \dfrac{y - y_0}{u_2} \end{cases}$ e igualando obtenemos $\dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2}$ que es la *ecuación cartesiana simétrica o canónica* de la recta que contiene al punto P_0 y es paralela al vector $\vec{u}$.

Los valores u_1 y u_2, que son las componentes del vector dirección, se llaman también *números directores.*

A partir de la ecuación simétrica, eliminando los denominadores y operando algebraicamente, se obtiene: $u_2(x - x_0) = u_1(y - y_0) \Rightarrow$

$u_2x - u_2x_0 = u_1y - u_1y_0 \Rightarrow u_2x - u_1y + (-u_2x_0 + u_1y_0) = 0$

Si llamamos $a = u_2$, $b = -u_1$, $c = u_1y_0 - u_2x_0$ y reemplazamos en la ecuación anterior resulta la expresión $ax + by + c = 0$ que se conoce como *ecuación cartesiana implícita.* A ésta se la llama también *ecuación general de la recta.*

Observaciones:

a) La ecuación cartesiana implícita $ax + by + c = 0$ es una expresión algebraica racional entera de primer grado con dos variables. Toda expresión de este tipo representa geométricamente una recta en el plano. Sus soluciones son infinitos pares de valores.

Cada par corresponde a las coordenadas de un punto que pertenece a la recta.

$$(x, y) \text{ es solución de } ax + by + c = 0 \Leftrightarrow P(x, y) \in r.$$

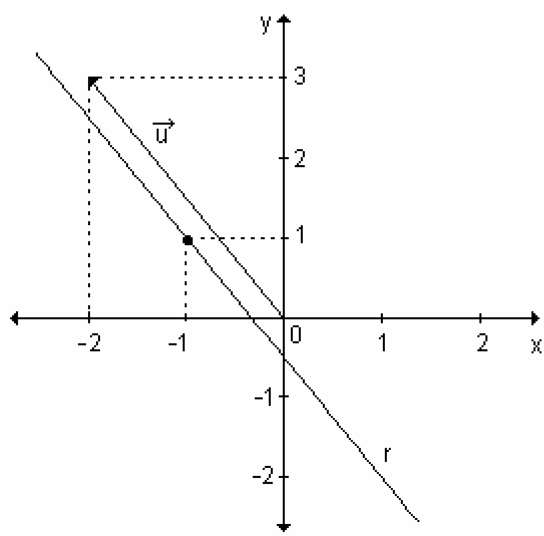
Para obtener las coordenadas de puntos que pertenecen a la recta, le asignamos valores a x obteniendo así los correspondientes valores de y.
b) Dos puntos determinan una sola recta a la cual pertenecen.

Ejemplo: Determine la ecuación de la recta teniendo en cuenta que $P_0(-1, 1)$ es un punto que le pertenece y $\vec{u} = -2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ el vector paralelo a la misma. Grafique.

Hallamos en primer término la ecuación vectorial de la recta. Si $P(x, y) \in r$, el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo a $\vec{u}$ entonces: $\overrightarrow{P_0P} = t\,\vec{u}$, $t \in R$.

Es decir: $\overrightarrow{P_0P} = \begin{bmatrix} x-(-1) \\ y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ 3t \end{bmatrix}$.

Por igualdad de vectores podemos escribir: $\begin{cases} x+1=-2t \\ y-1=3t \end{cases}$, $t \in R$, que es la ecuación paramétrica de la recta r.
Gráficamente:



De la ecuación paramétrica obtenida podemos obtener la ecuación simétrica despejando de ambas ecuaciones el parámetro t y luego igualando:

$$\begin{cases} x+1=-2t \\ y-1=3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{-2}=t \\ \dfrac{y-1}{3}=t \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{3}$$ ecuación cartesiana simétrica (o canónica) de la recta r.

Nota: teniendo en cuenta los datos, las ecuaciones paramétricas y la forma simétrica se pueden hallar directamente con la fórmula, sin necesidad de pasar de una a otra.

EJERCICIOS

1) Determine las componentes de un vector paralelo y las coordenadas de un punto perteneciente a la recta de ecuación $\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$. Escriba la ecuación simétrica correspondiente a dicha recta.

2) Halle:

a) la ecuación paramétrica de la recta que es paralela al vector $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y pasa por el punto T(–3, 2).

b) la intersección de la recta hallada en a) con la recta $3x + y - 7 = 0$.

3) Obtenga:

a) la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $P_0(1, 2)$ y es paralela a $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j}$.

b) teniendo en cuenta lo obtenido en **a)**, las coordenadas de un punto P_1 para $t = -2$.

c) de acuerdo a la ecuación **a)**, el valor de t para el punto (–3, 14).

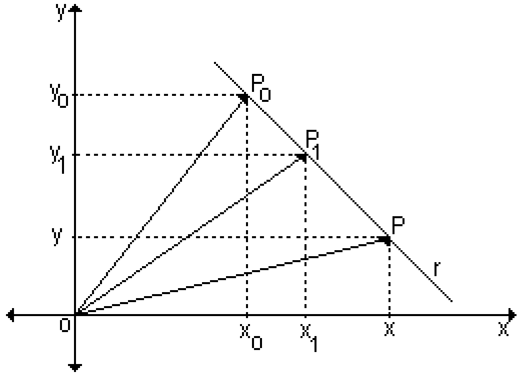
RESPUESTAS

1) $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$; P(–3, 2) ; $\dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y-2}{4}$

2) a) $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 + t \end{cases}, t \in R$ **b)** $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{11}{2}\right)$

3)a) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, t \in R$ **b)** P_1 (3, –4) **c)** $t = 4$

Ecuación de la recta determinada por dos puntos



Datos: $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$
P(x, y) punto genérico de la recta.

Incógnita: la ecuación de la recta r tal que $P_0 \in r \wedge P_1 \in r$.

$P(x, y) \in r \Leftrightarrow \vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{P_0P}$, pero $\vec{P_0P} = t\,\vec{P_0P_1},\ t \in R$.

Se obtiene la expresión $\vec{OP} = \vec{OP_0} + t\,\vec{P_0P_1},\ t \in R$ que es la *ecuación vectorial.*

Escribiendo los vectores en función de sus componentes:

$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{OP_0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix}$ y reemplazando en la forma vectorial de la ecuación resulta:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t.\begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix};\ t \in R \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + t\left(x_1 - x_0\right) \\ y_0 + t\left(y_1 - y_0\right) \end{bmatrix}.$$

Igualando vectores se obtiene: $\begin{cases} x = x_0 + t\left(x_1 - x_0\right) \\ y = y_0 + t\left(y_1 - y_0\right) \end{cases}$ $t \in R$. Esta expresión es la *ecuación paramétrica* de la recta que contiene a los puntos $P_0\,(x_0, y_0)$ y $P_1\,(x_1, y_1)$.

Despejando t de la ecuación paramétrica e igualando (si $x_0 \neq x_1$ y $y_0 \neq y_1$):

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ t = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

se obtiene la *ecuación cartesiana canónica o simétrica* de la recta que contiene a $P_0\,(x_0, y_0)$ y $P_1\,(x_1, y_1)$.

Nota: Tener en cuenta que deben ser $x_1 \neq x_0$ e $y_1 \neq y_0$.

A partir de la expresión anterior, trabajando algebraicamente resulta:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\left(x - x_0\right) \quad \Rightarrow \ (x - x_0).(y_1 - y_0) = (y - y_0).(x_1 - x_0) \quad \Rightarrow$$

$(x - x_0).(y_1 - y_0) - (y - y_0).(x_1 - x_0) = 0$.

Esta expresión también podría obtenerse mediante el desarrollo de cualquiera de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{o} \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo: Determine la ecuación paramétrica, simétrica e implícita de la recta que pasa por los puntos Q(2, 3) y R(–1, 4).

Para hallar la ecuación paramétrica tenemos en cuenta la expresión:

$\begin{cases} x = x_0 + t\left(x_1 - x_0\right) \\ y = y_0 + t\left(y_1 - y_0\right) \end{cases}$, $t \in R$ donde $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $x_1 = -1$, $y_1 = 4$.

Reemplazando, se obtiene la ecuación $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 + t \end{cases}$, $t \in R$.

Para la ecuación simétrica, reemplazamos en $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$ y se obtiene $\frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{1}$.

Observamos que el vector $\vec{u}=-3\,\vec{i}+\vec{j}$ es paralelo a la recta hallada.

Haciendo pasajes de términos en la ecuación $\frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{1}$ resulta la ecuación general implícita: $x - 2 = -3(y - 3) \Rightarrow x - 2 = -3y + 9 \Rightarrow x + 3y - 11 = 0$.

Interpretación geométrica de los coeficientes de la ecuación cartesiana implícita

Dada la ecuación general o implícita de la recta $ax + by + c = 0$ los valores a y b se llaman coeficientes y c es el término independiente.

Supongamos que el vector $\vec{n}=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ es perpendicular a la recta.

Sabemos que si $\vec{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$ es paralelo a la misma, las componentes del vector resultan: $a = u_2$ y $b = -u_1$.

$$\vec{n}\,.\,\vec{u}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=a\,u_1+b\,u_2=u_2\,u_1+(-u_1)u_2=0 \Rightarrow \vec{n}\,.\,\vec{u}=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{u}$$

Conclusión: los coeficientes de la ecuación $ax + by + c = 0$ son las componentes de un vector $\vec{n}$ perpendicular a $\vec{u}$, y como $\vec{u}\ //\ r \Rightarrow \vec{n}\perp r$.

Ejemplo: Encuentre las componentes de un vector paralelo y de uno perpendicular a la recta de ecuación $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-2}{2}$.

El vector $\vec{u}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ es paralelo a la recta dada y el vector $\vec{n}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ es perpendicular a la misma. En efecto, si resolvemos $\vec{n}\,.\,\vec{u}=(-1)\,.\,2+2\,.\,1=0$ y, por lo tanto, los vectores son perpendiculares.

Ejemplo: Halle las componentes de un vector paralelo y de un vector perpendicular a la recta de ecuación $x + 3y - 2 = 0$.

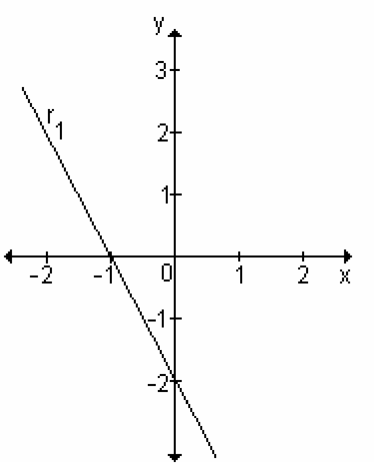
El vector $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ es perpendicular a la recta y a partir de él podemos asegurar que el vector $\vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ es paralelo a la misma.

EJERCICIOS

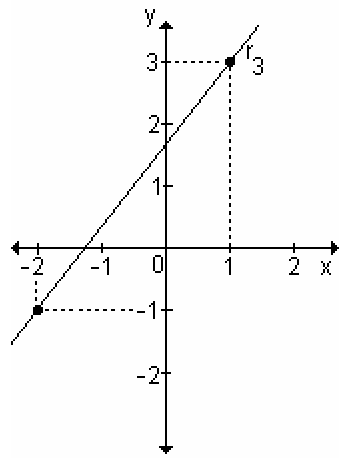
1) Halle la ecuación explícita de la recta que pasa por P(–1, –5) y el punto de intersección de $r_1 : x - y - 1 = 0$ y $r_2 : \begin{cases} x = 3t \\ y = -1 - 2t \end{cases}$.

2) Obtenga las ecuaciones implícitas de las rectas definidas gráficamente:

a)



b)



3) Escriba la ecuación simétrica de la recta que pasa por los puntos (2, –5) y (3, –2).

4) Determine la ecuación general de la recta que cumple con las siguientes condiciones:

a) contiene a los puntos (0, –2) y (5, 0).

b) pasa por los puntos $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$ y (–1, –1).

RESPUESTAS

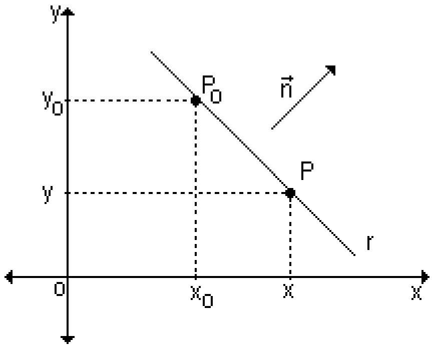
1) $y = 4x - 1$

2) a) $r_1 : 2x + y + 2 = 0$; **b)** $r_3 : 4x - 3y + 5 = 0$

3) $x - 2 = \frac{y+5}{3}$ o $x - 3 = \frac{y+2}{3}$

4) a) $2x - 5y - 10 = 0$; **b)** $4x - y + 3 = 0$

Determinación de la ecuación de una recta dado un vector normal a la misma y un punto que le pertenece



Datos:

$P_0(x_0, y_0) \in r$

$\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \perp r$

P(x, y) punto genérico

Incógnita: ecuación de la recta r si el punto $P_0 \in r$ y el vector $\vec{n}$ es perpendicular a r.

Determinamos el vector $\overrightarrow{P_0P}$ y decimos que $P \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \,.\, \vec{n} = 0$. Esta es la *ecuación vectorial* de la recta que contiene al punto $P_0(x_0, y_0)$ y es perpendicular al vector $\vec{n}$.

Si escribimos los vectores en función de las componentes se obtiene: $\overrightarrow{P_0P} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$; $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ y reemplazando en la ecuación vectorial resulta lo siguiente:

$$\overrightarrow{P_0P} \,.\, \vec{n} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \quad (x - x_0)a + (y - y_0)b = 0 \Rightarrow$$

$ax - ax_0 + by - by_0 = 0 \Rightarrow ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0$.

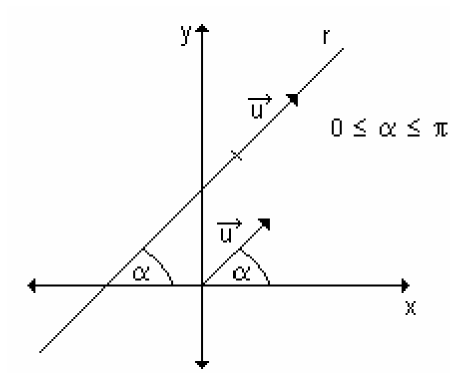
Si llamamos con $c = -ax_0 - by_0$ obtenemos *la ecuación cartesiana o general implícita* de la recta $ax + by + c = 0$.

Definición: Se llama *ángulo de inclinación de una recta* al ángulo que ella forma con el semieje positivo de las abscisas.

Definición: la *pendiente de una recta* es el valor de la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación.

Según estas definiciones, si α es el ángulo de inclinación, entonces la tangente de dicho ángulo es la pendiente. En símbolos: $m = tg\alpha$.

Gráficamente:

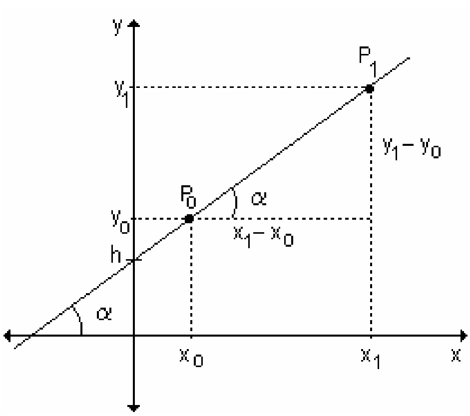


A partir de estos nuevos parámetros podemos encontrar otras formas de ecuaciones de recta.

Ecuación de una recta conocida su pendiente y un punto que le pertenece

Partimos de la ecuación $y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$; $x_1 \neq x_0$

Pero $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg}\alpha = m \in R$; $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$



Reemplazando:

$y - y_0 = m(x - x_0)$ es la *ecuación de la recta que contiene el punto P_0 y tiene pendiente m*.

Observamos que si $y - y_0 = mx - mx_0$ $\Rightarrow$ $y = mx + (y_0 - mx_0)$.

Si designamos con h a la expresión $(y_0 - mx_0)$, se obtiene $y = mx + h$ que es la *ecuación explícita* de la recta**.**

Observación: El punto P(0, h) pertenece a la recta r. El valor de h representa la ordenada del punto donde la recta corta al eje de las ordenadas. En la ecuación explícita $y = mx + h$, m es la pendiente y h, la ordenada al origen.

Si la recta está dada en la forma general $ax + by + c = 0$ despejamos la variable y para llevarla a su forma explícita $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$; $b \neq 0$.

En este caso $m = -\dfrac{a}{b}$ y $h = -\dfrac{c}{b}$.

Nota: las rectas paralelas al eje de ordenadas no se pueden expresar en forma explícita pues α debe ser distinto de $\dfrac{\pi}{2}$.

EJERCICIOS

1) Encuentre la ecuación general de la recta sabiendo que el vector $\vec{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es normal a la misma y el punto (3, –2) le pertenece.

2) Dada la recta r : $-3x + 5y - 3 = 0$, determine las componentes de un vector perpendicular a la misma y las coordenadas de un punto que le pertenezca.

3) Obtenga la ecuación general de la recta que cumple con las siguientes condiciones:

a) contiene al punto (–3, 2) y su pendiente es $\frac{1}{2}$,

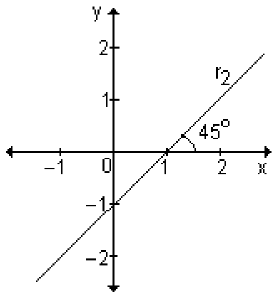
b) pasa por la intersección de las rectas $y = 2x - 3$ e $y = -x + 6$ y su pendiente es 1.

4) Halle la ecuación implícita de la recta de pendiente –4 que pase por el punto de intersección de las rectas $2x + y - 8 = 0$ y $3x - 2y + 9 = 0$.

5) Escriba las ecuaciones explícita y paramétrica de la recta que pasa por el punto $R\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ y forma un ángulo de 30º con el eje positivo de las abscisas.

6) Halle la ecuación explícita de la recta a la que pertenecen el punto P(–1, –5) y el punto de intersección de las rectas $r_1 : x - y - 1 = 0$ y $r_2 : \begin{cases} x = 3t \\ y = -1 - 2t \end{cases}$.

7) Encuentre la ecuación implícita de la recta definida gráficamente:



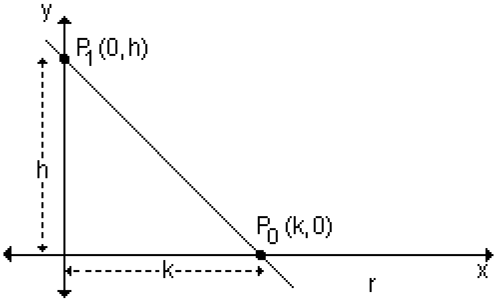
RESPUESTAS

1) $-x + 2y + 7 = 0$ **2)** $\vec{n} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

3)a) $x - 2y + 7 = 0$, **b)** $x - y = 0$ **4)** $4x + y - 10 = 0$

5) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3} - 3}{6}$, $\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = \sqrt{3}t - \frac{1}{2} \end{cases}$ **6)** $y = 4x - 1$ **7)** $r_2 : x - y - 1 = 0$

Ecuación segmentaria de la recta



Datos:
k: abscisa del punto donde la recta r corta al eje x. El punto $(k, 0) \in r$.
h: ordenada del punto donde la recta r corta al eje y.
El punto $(0, h) \in r$.
Incógnita:
$r / P_0(k, 0) \in r$ y $P_1(0, h) \in r$

De la ecuación $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$ surge la expresión $y-y_0=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$.

Si reemplazamos los puntos que tenemos como datos, obtenemos:

$$y-0=\frac{h-0}{0-k}(x-k) \Rightarrow y=\frac{h}{-k}(x-k) \Rightarrow -ky=hx-hk$$

Como $h \neq 0$, $k \neq 0$, por lo tanto $h.k \neq 0$. Dividiendo por h.k, resulta:

$\dfrac{-y}{h}=\dfrac{x}{k}-1 \Rightarrow \dfrac{x}{k}+\dfrac{y}{h}=1$ que es la *ecuación segmentaria* de la recta.

Nota: la ecuación obtenida es válida para rectas que no pasan por el origen.

Observación: Si la recta es $ax + by + c = 0 \Rightarrow ax + by = -c \Rightarrow$
$\dfrac{ax}{-c}+\dfrac{by}{-c}=1 \Rightarrow \dfrac{x}{\frac{-c}{a}}+\dfrac{y}{\frac{-c}{b}}=1$

Ejemplo: Determine la ecuación explícita, segmentaria y cartesiana implícita de la recta a la que pertenecen los puntos (–4, –3) y (2, 6). Grafique.

La pendiente de la recta conocidos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ que le pertenecen es $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

En nuestro caso $P_1(-4, -3)$, $P_2(2, 6)$ y por lo tanto:

$$m=\frac{6-(-3)}{2-(-4)}=\frac{9}{6} \Rightarrow m=\frac{3}{2}$$

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_1 = m.(x - x_1)$ donde m es la pendiente y (x_1, y_1) son las coordenadas de un punto que pertenece a la recta. En consecuencia, considerando el punto $P_1(-4, -3)$, la ecuación buscada es:

$$y-(-3)=\frac{3}{2}(x-(-4)) \Rightarrow y+3=\frac{3}{2}(x+4)$$

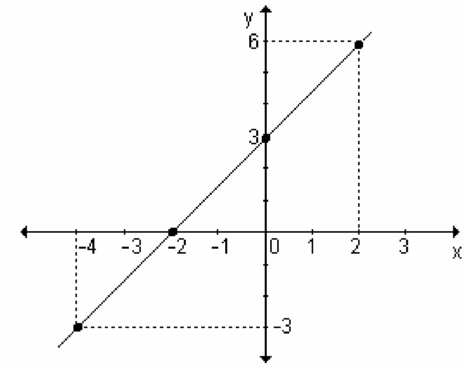
Aplicando propiedad distributiva y realizando pasaje de términos obtenemos la ecuación explícita:

$y+3=\dfrac{3}{2}x+6 \Rightarrow y=\dfrac{3}{2}x+3$, donde $\dfrac{3}{2}$ es la pendiente y 3 es la ordenada al origen.

Para hallar la ecuación segmentaria agrupamos las variables en el primer miembro $-\dfrac{3}{2}x+y=3$. Dividiendo ambos miembros por 3 resulta $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}=1$.

Podemos asegurar que 2 es la longitud del segmento determinado por el origen de coordenadas y el punto de intersección de la recta con el semieje negativo de abscisas y 3 es la longitud del segmento determinado por el origen de

coordenadas y el punto de intersección de la recta con el semieje positivo de ordenadas.
Para obtener la ecuación cartesiana implícita pasamos todos los términos al primer miembro: $-\dfrac{3}{2}x + y - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x + 2y - 6 = 0$.
La representación gráfica de la recta es:

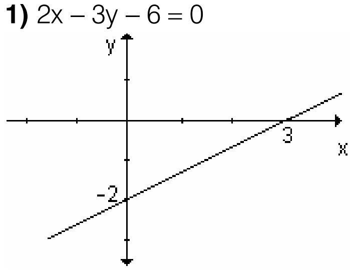


EJERCICIOS

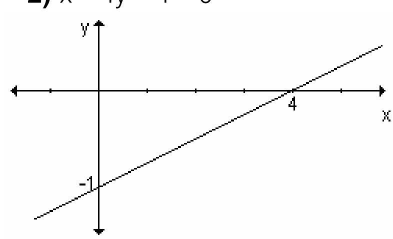
1) Halle la ecuación general de la recta que determina sobre el semieje positivo de las abscisas un segmento de longitud 3 y sobre el semieje negativo de las ordenadas un segmento de longitud 2. Grafique.
2) Obtenga la ecuación general de la recta si las longitudes de los segmentos que determina sobre el semieje positivo de las abscisas y el semieje negativo de las ordenadas son 4 y 1, respectivamente. Grafique.

RESPUESTAS

1) $2x - 3y - 6 = 0$



2) $x - 4y - 4 = 0$



Discusión de la ecuación general de la recta

La ecuación general permite expresar cualquier recta, cualquiera sea su posición. Esto la diferencia de las otras ecuaciones cartesianas que tienen limitación en su aplicación, según lo siguiente:

Ecuación canónica: $\dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2}$ donde $u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0$

Ecuación segmentaria: $\dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}=1$ donde $h \neq 0,\ k \neq 0$

Ecuación explícita: $y = mx + h = \dfrac{u_2}{u_1}x+h$ donde $u_1 \neq 0$

Ecuación simétrica: $\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$ donde $x_1 \neq x_0,\ y_1 \neq y_0$

Estudiaremos las distintas formas en que se presenta la ecuación general, según sea el valor de sus coeficientes y término independiente.

Dada la recta de ecuación $ax + by + c = 0$ analizamos la misma según los valores de los coeficientes y el término independiente.

Primer Caso: $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$; $by = -ax - c \Rightarrow y = -\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

Comparando con la forma explícita es: $m=-\dfrac{a}{b}$ $h=-\dfrac{c}{b}$

Segundo Caso: $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c = 0 \Rightarrow ax + by = 0 \Rightarrow y=-\dfrac{a}{b}x$ recta que pasa por el origen.

Tercer Caso: $a \neq 0$, $b = c = 0 \Rightarrow ax = 0 \Rightarrow x = 0$ ecuación del eje de ordenadas.

Cuarto Caso: $a = c = 0$, $b \neq 0 \Rightarrow by = 0 \Rightarrow y = 0$ ecuación del eje de abscisas.

Quinto Caso: $a \neq 0$, $b = 0$ y $c \neq 0 \Rightarrow ax + c = 0 \Rightarrow x=-\dfrac{c}{a}$ recta paralela al eje de ordenadas.

Sexto Caso: $a = 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0 \Rightarrow by + c = 0 \Rightarrow y=-\dfrac{c}{b}$ recta paralela al eje de abscisas.

Séptimo Caso: $a = b = c = 0$ no existe ecuación.

EJERCICIOS INTEGRADORES 3.1 ECUACIÓN DE LA RECTA

1) Halle la ecuación general de la recta que cumple con las siguientes condiciones y grafíquela:

a) pasa por el origen y el punto (–3, –1),

b) pasa por el punto A(–1, –2) y tiene pendiente $\dfrac{3}{4}$,

c) pasa por el punto (3, –2) y tiene un ángulo de inclinación $\alpha = 135^{o}$,

d) pasa por el punto (3, 0) y por el punto de intersección de las rectas $r_1 : -x + y = -4$ y $r_2 : y - \frac{1}{2}x + 1 = 0$,

e) pasa por el (–1, –2) y es perpendicular a la recta y – 3x = 9.

2) Determine:

a) si los puntos (–3, –1) y $(-\frac{1}{2}, 3)$ pertenecen a la recta –2x + y = 4,

b) dos puntos de la recta de ecuación 3x – 2y – 3 = 0

3) Determine:

a) si los puntos A(6, 3), B(–3, –3) y C(0, –1) están alineados,

b) el valor de k para que los puntos A(3, –3); B(0, 4) y C(k, –10) estén alineados.

4) Dadas las rectas $r_1 : 7x - 3y + 2 = 0$; $r_2: x + 2y - 4 = 0$; $r_3: x = 5$

a) represéntelas en un mismo sistema de coordenadas cartesianas ortogonales expresando cada una en forma explícita,

b) determine las intersecciones con los ejes coordenados,

c) encuentre para cada recta un vector normal $\vec{n}$ y un vector paralelo $\vec{u}$,

d) demuestre que el punto A(1, 3) pertenece a r_1 y no pertenece a r_2.

5) Obtenga la ecuación de la recta a la que pertenecen los puntos dados y exprésela en forma paramétrica, simétrica, explícita, general y segmentaria.

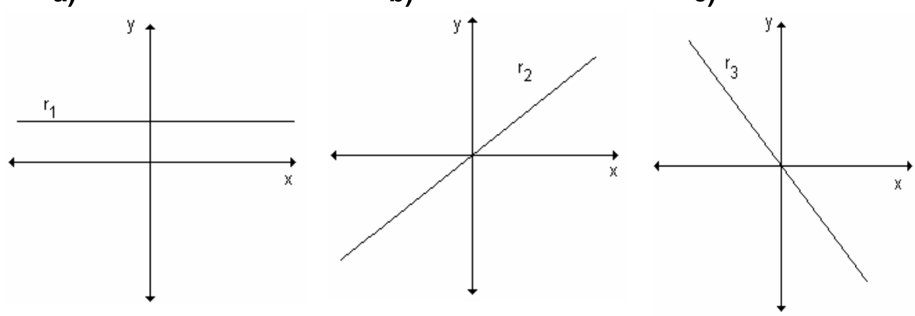
a) $P_1(5, -1)$; $P_2(2, -2)$ **b)** A(2, 1); B(–3, 2) **c)** C(3, –1); D(1, 2)

6) Dadas las ecuaciones ax + (2 – b)y – 23 = 0 y (a – 1)x + b y + 15 = 0, halle los valores de a y b para que representen rectas que se intersequen en el punto (2, –3).

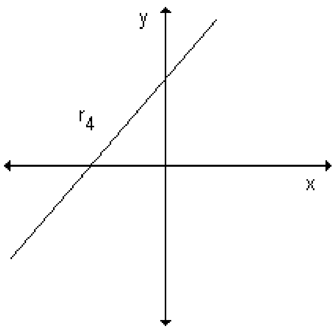
7) Determine la ecuación de la recta que forma sobre el eje x un segmento de longitud 7 y pasa por el punto de abscisa 4 de la recta 5x + 2y = 30.

8) Las siguientes gráficas representan ecuaciones de la forma r : ax + by + c = 0, en cada una determine los signos de a, b y c.

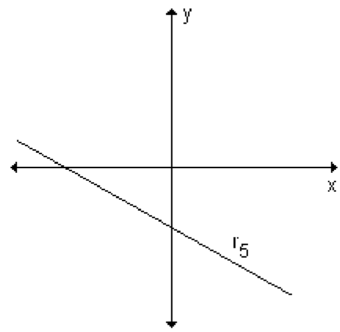
a) **b)** **c)**



d)



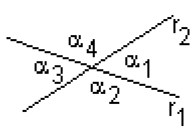
e)

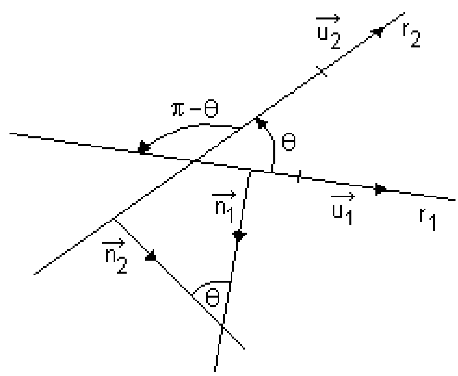


3.2 Posiciones relativas de dos rectas

Ángulo determinado por dos rectas

Dos rectas distintas en un plano que se cortan, determinan dos pares de ángulos opuestos. Un par son ángulos agudos y el otro, obtusos. El menor de estos ángulos se denomina ángulo entre dos rectas. Para calcularlo utilizamos conceptos relacionados con los vectores o bien a través de las pendientes.





a) *Trabajando con los vectores paralelos a cada una de las rectas.*
Dado que los mismos son paralelos a cada una de las rectas calculando el ángulo que determinan estos dos vectores estamos determinando el ángulo entre las rectas.

$$\begin{cases} \vec{u}_1 \,//\, r_1 \\ \vec{u}_2 \,//\, r_2 \end{cases} \Rightarrow \widehat{r_1 r_2} = \widehat{\vec{u}_1\, \vec{u}_2} = \theta \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta = \frac{\vec{u}_1 . \vec{u}_2}{\left|\vec{u}_1\right|\left|\vec{u}_2\right|}$$

b) *Trabajando con los vectores perpendiculares a cada una de las rectas.*
Dado que los mismos son perpendiculares a cada una de las rectas calculando el ángulo que determinan estos dos vectores estamos determinando el ángulo entre las rectas.

$$\begin{cases} \vec{n_1} \perp r_1 \\ \vec{n_2} \perp r_2 \end{cases} \Rightarrow \widehat{r_1 r_2} = \widehat{\vec{n_1}\,\vec{n_2}} = \theta$$

Si escribimos las ecuaciones generales o implícitas de las dos rectas:

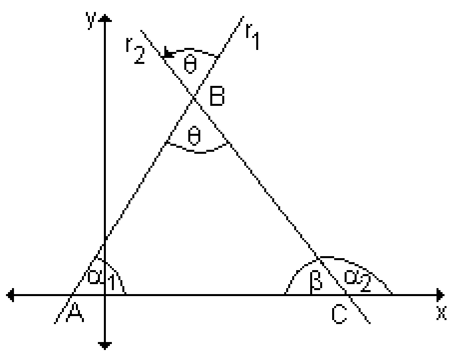
$$r_1 : a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n_1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \perp r_1$$

$$r_2 : a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n_2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \perp r_2$$

Resulta $\cos\theta = \dfrac{\vec{n_1}.\vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right|\left|\vec{n_2}\right|} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \qquad \Rightarrow$

$$\theta = \operatorname{arc}\cos \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

c) *Trabajando con las pendientes de cada una de las rectas.*



Datos:

$r_1 : y = m_1\,x + h_1$; $m_1 = \operatorname{tg}\,\alpha_1$

$r_2 : y = m_2\,x + h_2$; $m_2 = \operatorname{tg}\,\alpha_2$

Incógnita: $\widehat{r_1 r_2} = \theta$

En $\widehat{ABC}$: $\alpha_1 + \theta + \beta = \pi \;\wedge\; \beta + \alpha_2 = \pi \;\Rightarrow\; \theta = \alpha_2 - \alpha_1$

$\operatorname{tg}\,\theta = \operatorname{tg}\,(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha_1} = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \;\Rightarrow\; \qquad \theta = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$

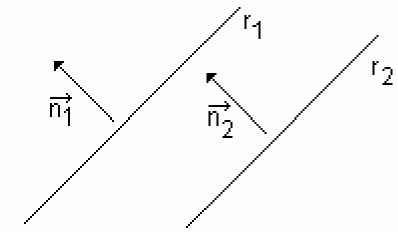
Nota: De los dos ángulos que forman las rectas, salvo que sean perpendiculares, elegimos el ángulo menor, que es un agudo. Como la tangente de un ángulo agudo es positiva, a la expresión dada para el cálculo de θ, la consideramos en valor absoluto para que el resultado sea el ángulo menor.

Por lo tanto, $\theta = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right|$

Casos particulares

1) *Rectas paralelas*

- Las rectas están dadas en su forma general o implícita



$r_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$r_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$

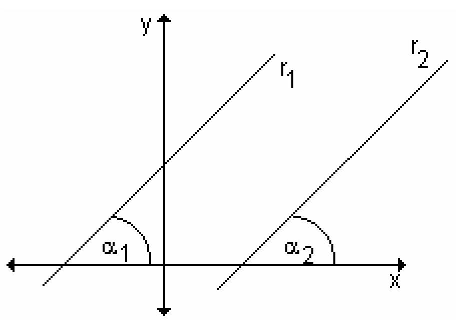
$$\vec{n_1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \perp r_1 ; \; \vec{n_2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \perp r_2$$

$$r_1 // r_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} // \vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1} = k\vec{n_2} ; k \in R \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 = ka_2 \\ b_1 = kb_2 \end{cases} , k \in R \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k ; \; k \in R$$

$$r_1 // r_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k , \; k \in R$$

- Las rectas están dadas en su forma explícita



$r_1: y = m_1x + h_1 \; ; \; m_1 = \text{tg } \alpha_1$

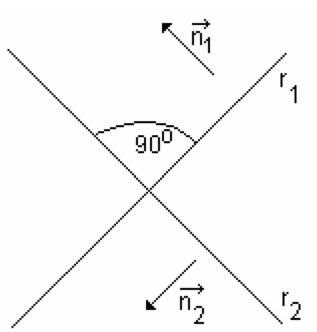
$r_2: y = m_2x + h_2 \; ; \; m_2 = \text{tg } \alpha_2$

$r_1 // r_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \text{tg } \alpha_1 = \text{tg } \alpha_2$

$r_1 // r_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

2) *Rectas perpendiculares*

- Las rectas están dadas en su forma general o implícita.



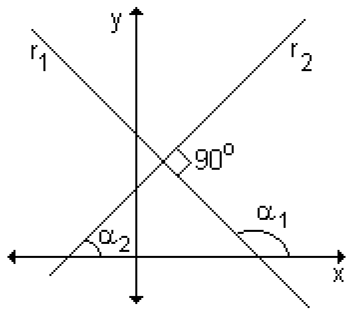
$$r_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0 ; \; \vec{n_1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$r_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0 ; \; \vec{n_2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Leftrightarrow \vec{n_1} . \vec{n_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

- Las rectas están dadas en su forma explícita



r_1: $y = m_1x + h_1$ $\qquad$ r_2: $y = m_2x + h_2$

$r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ no existe y existe $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}} = \frac{1+m_2m_1}{m_2-m_1} = 0 \Leftrightarrow 1+m_2m_1 = 0$$

$$r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow m_1m_2 = -1 \Leftrightarrow m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

3) *Rectas coincidentes*

Si dos rectas son paralelas y tienen un punto en común, son coincidentes.

Sean las rectas $r_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $r_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Si $r_1 // r_2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k,\ k \in R$ (1)

Si r_1 y r_2 tienen un punto en común $P_0(x_0, y_0) \in r_1$ y $P_1(x_1, y_1) \in r_2$

$r_1 : a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0$ (2)

$r_2 : a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 = 0$ (3)

Reemplazando (1) en (2): $\quad ka_2x_0 + kb_2y_0 + c_1 = 0$

Multiplicando (3) por k: $\quad ka_2 x_0 + kb_2y_0 + kc_2 = 0$

Restando miembro a miembro: $c_1 - kc_2 = 0$

$$c_1 = kc_2 \Rightarrow k = \frac{c_1}{c_2},\ k \in R$$

$$r_1 \text{ y } r_2 \text{ coincidentes} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k,\ k \in R$$

EJERCICIOS

1) Determine el ángulo entre las rectas $x - y + 4 = 0$ y $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$.

2) Sean las rectas $r_1 : x + y = 0$ y $r_2 : ax + y + 5 = 0$, calcule el valor de a sabiendo que se cortan formando un ángulo de 45°.

3) Dadas las rectas $-2x + 1 + ay = 0$ e $y = -4x + b$, halle los valores de a y b para que sean:

a) paralelas $\qquad$ **b)** perpendiculares $\qquad$ **c)** coincidentes

4) Encuentre el valor de k para que las rectas $r_1 : y = \dfrac{k}{1-k}x + 2\dfrac{k+2}{k-1}$ y $r_2 : y = \dfrac{k+1}{6}x + 3$ sean perpendiculares. Para dicho valor de k, escriba las ecuaciones de las rectas.

5) Halle la ecuación explícita de la recta que pasa por la intersección de las rectas $x + y - 1 = 0$ y $3x - y = 11$ y es perpendicular a la recta $y = x$.

6) Obtenga la ecuación general de la recta paralela a $y - x = 0$ que pasa por el punto $Q\left(6, \dfrac{9}{4}\right)$.

RESPUESTAS

1) $\alpha = 63^\circ\, 26'\, 6''$ **2)** $a = 0$

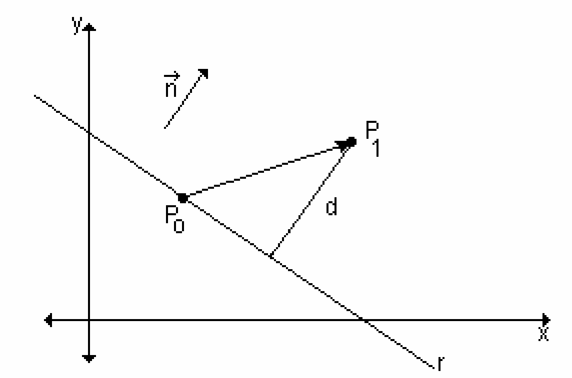
3)a) $a = -\dfrac{1}{2}, \forall b$ **b)** $a = 8, \forall b$ **c)** $a = -\dfrac{1}{2}, b = 2$

4) $k = 3$, $k = 2$; para $k = 3$, $r_1 : y = -\dfrac{3}{2}x + 5$, $r_2 : y = \dfrac{2}{3}x + 3$;

para $k = 2$, $r_1 : y = -2x + 8$, $r_2 : y = \dfrac{1}{2}x + 3$

5) $y = -x + 1$ **6)** $4x - 4y - 15 = 0$

Distancia de un punto a una recta



Datos:
$r : ax + by + c = 0$

$\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ perpendicular a la recta

$P_1(x_1, y_1) \notin r$; $P_0(x_0, y_0) \in r$

Incógnita: $d = \text{distancia}(P_1, r)$

$$d = \left| \text{proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_0P_1} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{n}\right|} \right| = \frac{\left|(x_1 - x_0)a + (y_1 - y_0)b\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{\left| ax_1 - ax_0 + by_1 - by_0 \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left| ax_1 + by_1 + (-ax_0 - by_0) \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Pero como $P_0(x_0, y_0) \in r \Rightarrow ax_0 + by_0 + c = 0 \Rightarrow c = -ax_0 - by_0$.

Por lo tanto la distancia se calcula: $d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Nota: Si $P_1 \in r \Rightarrow d(P_1, r) = 0$

Ejemplo: Dada la recta $r_1 : y = 2x + 1$ y el punto P(–3, 4) calcule la distancia entre el punto y la recta.

La ecuación general de la recta es $2x - y + 1 = 0$ y reemplazando en la fórmula vista obtenemos: $d(P, r_1) = \dfrac{|2.(-3) - 4 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|-6 - 4 + 1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|-9|}{\sqrt{5}} = \dfrac{9}{\sqrt{5}} = \dfrac{9}{5}\sqrt{5}$

La distancia del punto a la recta es de $\dfrac{9}{5}\sqrt{5}$ unidades.

Ejemplo: Sea la recta $4x - 3y - 1 = 0$ y el punto (–1, k). Determine el valor de k de modo que la distancia del punto a la recta sea 2. Para dicho valor de k grafique la situación.

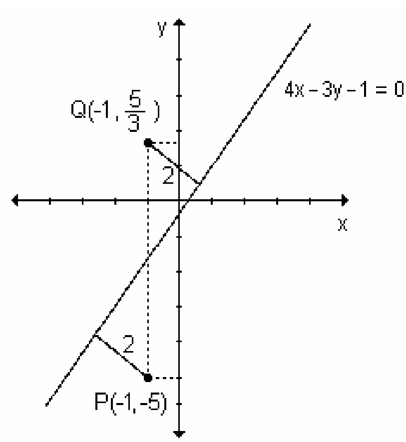
Dada la ecuación general de una recta $ax + by + c = 0$ y el punto $P(x_1, y_1)$ que no le pertenece, la distancia del punto P a la recta se determina mediante la fórmula: $\dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

En el ejemplo, dicha distancia es 2 y por lo tanto: $\dfrac{|4.(-1) - 3.k - 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 2$

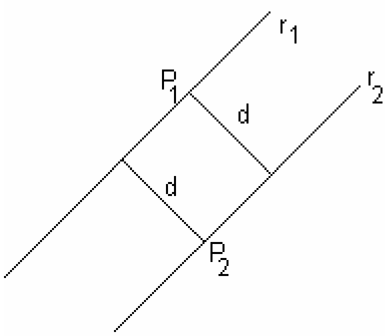
Resolviendo: $\dfrac{|-5 - 3k|}{5} = 2 \Rightarrow |-5 - 3k| = 10 \Rightarrow -5 - 3k = 10$ o $-5 - 3k = -10 \Rightarrow$

$-3k = 15$ o $-3k = -5 \Rightarrow k = -5$ o $k = \dfrac{5}{3}$.

Existen dos puntos de abscisa –1 cuya distancia a la recta dada es 2. Ellos son P (–1, –5) y $Q\left(-1, \dfrac{5}{3}\right)$.



Distancia entre rectas paralelas



Para hallar la distancia entre dos rectas paralelas, se determina un punto que pertenece a una de las rectas y se calcula la distancia desde dicho punto a la otra recta.

$d(r_1, r_2) = d(P_1, r_2) = d(P_2, r_1)$ donde $P_1 \in r_1$, $P_2 \in r_2$.

Ejemplo: Dadas las rectas $r_1 : x + y + 3 = 0$ y $r_2 : 2x + 2y - 5 = 0$, halle la distancia entre ellas.

Observamos que las dos rectas son paralelas ya que sus pendientes son iguales $m_1 = m_2 = -1$. Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas tomamos un punto cualquiera de una de ellas y luego calculamos la distancia de ese punto a la otra recta.
Sea, por ejemplo, $x = -1$ en r_1 entonces resulta que $y = -2$. El punto $P(-1, -2)$ pertenece a r_1. Hallamos la distancia de P a r_2 y obtenemos:

$$d(P, r_2) = \frac{|2.(-1) + 2.(-2) - 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{8}} = \frac{11}{\sqrt{8}} = \frac{11}{2\sqrt{2}} = \frac{11}{4}\sqrt{2}\ .$$

Probemos que se obtiene lo mismo si tomamos un punto de r_2 y luego calculamos la distancia de ese punto a r_1. Sea $x = 0$, por ejemplo; reemplazando en r_2 se obtiene $y = \frac{5}{2}$. El punto $Q\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$ pertenece a r_2 y hallando la distancia de dicho punto a r_1 resulta:

$$d(Q, r_1) = \frac{\left|0 + \frac{5}{2} + 3\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\left|\frac{11}{2}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{11}{2\sqrt{2}} = \frac{11}{4}\sqrt{2}\ .$$

Se puede observar que en ambos casos se obtiene la misma distancia.

EJERCICIOS

1) Halle la distancia entre:

a) la recta $y = 2x + 4$ y el punto $(2, 3)$,

b) la recta $4y - 3x = 0$ y el punto $(-1, 3)$,

c) las rectas $5x - y = 1$ y $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$.

2) Calcule el valor de k para que la distancia del origen de coordenadas a la recta $4x + ky - 5 = 0$ sea 1.

RESPUESTAS

1)a) $d = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ **b)** $d = 3$ **c)** $d = \dfrac{6}{\sqrt{26}} = \dfrac{3\sqrt{26}}{13}$ **2)** $k = 3,\ k = -3$

EJERCICIOS INTEGRADORES
3.2 POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

1) Calcule el ángulo que forman los siguientes pares de rectas, en el orden dado:

a) $3x - y + 2 = 0$, $2x + y = 2$ **b)** $y = 2x + 5$, $y = 2x - 1$ **c)** $y = -x$, $x - y = 0$

2) Determine si los siguientes pares de rectas son paralelas, coincidentes, perpendiculares o concurrentes:

a) $\begin{cases} 3x + 4y - 7 = 0 \\ 9x + 12y - 8 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x - 2 \\ 6y - 3x + 12 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + 5 = 0 \\ 4x - 2y - 7 = 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \\ y = \dfrac{1}{2}x + 2 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 1 = 4x - 2y \end{cases}$

3) Halle el valor de k para que la recta $kx + (k - 1)y - 18 = 0$ sea paralela a la recta $4x + 3y = -7$.

4) Calcule h y k de manera que las rectas de ecuaciones $3x + hy + 4 = 0$ y $2x - 4y + k = 0$ sean:

a) paralelas **b)** perpendiculares **c)** coincidentes

5) Una recta pasa por la intersección de las rectas: $3x + 2y + 8 = 0$ y $2x - 9y - 5 = 0$. Obtenga su ecuación sabiendo que es paralela a la recta $6x - 2y + 11 = 0$.

6) Halle la ecuación general de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $y = -x + 1$ e $y = x + 3$, además es perpendicular a la recta $x + 2y + 4 = 0$.

7) Encuentre la ecuación general de la recta paralela a $3y - x = 3$ que pasa por el punto de intersección de las rectas $r_1 : x + y = 2$ y $r_2 : y = x$.

8) Calcule la distancia de la recta:

a) $12x + 5y - 26 = 0$ al origen de coordenadas,

b) $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-2}$ al origen de coordenadas,

c) $y = -2x + 4$ al punto (3, 2),

d) $2x + 6y - 5 = 0$ a la recta $2x + 6y + 15 = 0$,

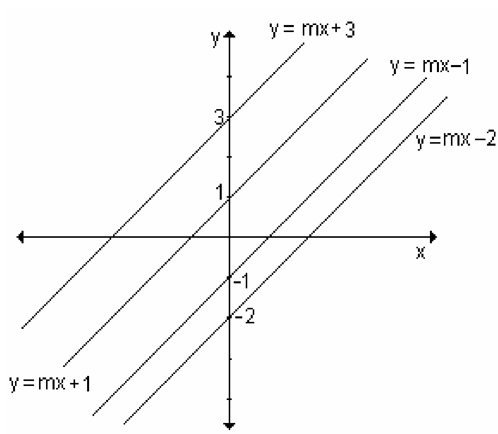
e) $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - t \end{cases}$ a la recta $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 - t \end{cases}$.

3.3 Familia de rectas

Una recta queda determinada por dos condiciones. Si sólo se establece una condición existen infinitas rectas que cumplen con la misma y a esas infinitas rectas se las llama "*familia de rectas que cumplen con una determinada condición*". Estudiaremos distintos tipos de familias de rectas.

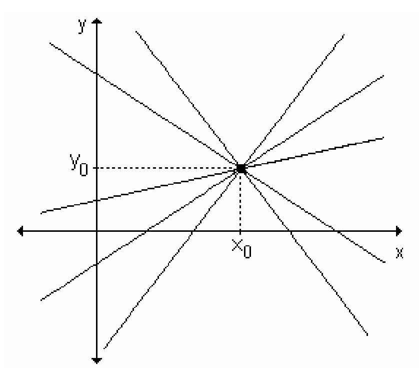
a) Paralelas a una recta dada

La ecuación de la familia de rectas que cumplen con esta condición se escribe $y = mx + h$ donde $h \in R$, $-\infty < h < +\infty$. Para cada valor que le asignemos al parámetro h, obtenemos una recta de la familia, todas las rectas así obtenidas son paralelas dado que tienen la misma pendiente m, variando solamente la ordenada al origen.

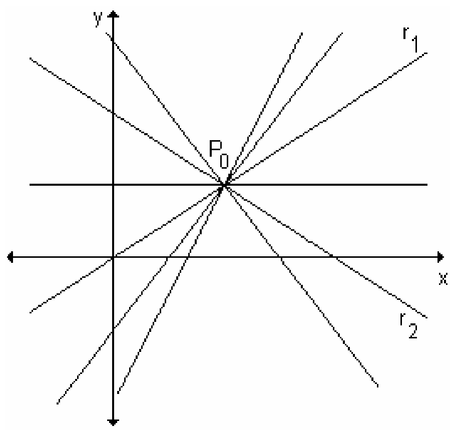


b) Que pasan por un punto

Sea $P_0(x_0, y_0)$ el punto de paso, la familia de rectas que pasa por ese punto se escribe $y - y_0 = m.(x - x_0)$ donde $-\infty < m < +\infty$.



c) Que pasan por la intersección de dos rectas dadas



Sean las rectas

$r_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ y

$r_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ que se cortan en el punto P_0, $P_0 \in r_1$ y $P_0 \in r_2$.

Planteamos una combinación lineal de ambas:

$k_1(a_1 x + b_1 y + c_1) + k_2 (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$. Si $P_0 \in r_1$ y $P_0 \in r_2$ resulta:

$k_1 (a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1) + k_2(a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2) = k_1 . 0 + k_2 . 0 = 0$

Esto nos muestra que sin importar los valores que se les asignen a k_1 y k_2, las rectas de la familia de ecuación $k_1 (a_1 x + b_1 y + c_1) + k_2 (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$ pasan siempre por P_0. Tomamos $k_1 \neq 0$ y dividimos ambos miembros de la ecuación $k_1 (a_1 x + b_1 y + c_1) + k_2 (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$ por k_1.

Resulta: $(a_1 x + b_1 y + c_1) + \dfrac{k_2}{k_1}(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$.

Llamando $k = \dfrac{k_2}{k_1}$ obtenemos:

$(a_1 x + b_1 y + c_1) + k (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$ que es la ecuación de la familia de rectas que pasa por P_0.

Para cada valor real que se le asigna al parámetro k se obtiene una de las infinitas rectas de la familia, a excepción de r_2.

El concepto de familia de rectas es útil en la determinación de la ecuación de una recta particular.

El procedimiento consiste en dos pasos:

a) se escribe la ecuación de la familia de rectas que satisfaga la condición dada,

b) se determina el valor del parámetro desconocido aplicando otra condición establecida.

EJERCICIOS

1) Escriba la ecuación de la familia de rectas que son paralelas a la recta $-x + 3y + 2 = 0$. Dibuje tres elementos de la familia indicando el valor del parámetro.

2) Encuentre la ecuación de la familia de rectas que son perpendiculares a la recta $3x + 2y - 7 = 0$. Dibuje tres elementos de la familia indicando el valor del parámetro.

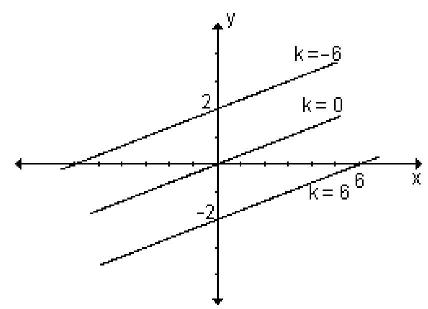
3) Determine la propiedad en común que cumplen todas las rectas de cada una de las siguientes familias:

a) $-3x + 3y + k = 0$ **b)** $y + 2 = k(x - 2)$

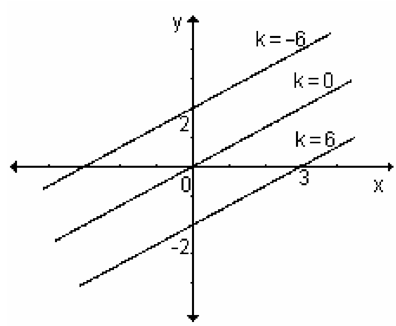
c) $y = kx - 8$ **d)** $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{k} = 1,\ k \neq 0$

RESPUESTAS

1) $-x + 3y + k = 0$



2) $3y - 2x + k = 0$



3)a) La pendiente es 1. **b)** Pasan por el punto (2, –2) .

c) La ordenada al origen es –8. **d)** La abscisa al origen es –2.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE RECTA EN EL PLANO

1) La ordenada al origen h y la abscisa al origen k de la recta $4x + 5y = 20$, respectivamente son:

a) $h = 5;\ k = 4$ **b)** $h = 4;\ k = 5$ **c)** $h = 4;\ k = -5$ **d)** $h = -4;\ k = 5$

2) La ecuación simétrica de la recta a la que pertenecen los puntos P(4, –2) y Q(6, –4) es:

a) $\dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{x+4}{2}$ **b)** $\dfrac{y-2}{2} = \dfrac{x-4}{2}$

c) $\dfrac{y+2}{2} = \dfrac{x-4}{2}$ **d)** $\dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{x-4}{2}$

3) Un vector paralelo a la recta de ecuación $-2x + 3y - 6 = 0$ es:

a) $\vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ **b)** $\vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ **d)** Ninguno de los anteriores

4) Un vector normal a la recta de ecuación $-3x + 2y = 9$ es:

a) $\vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ **b)** $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $\vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ **d)** Ninguno de los anteriores

5) Las rectas $r_1 : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ y $r_2 : 3x - 2y - 4 = 0$ son:

a) paralelas **b)** perpendiculares
c) coincidentes **d)** Ninguna de las anteriores

6) Las rectas $r_1 : -4x + 6y = 2$ y $r_2 : 6x - 9y = 3$ son:

a) paralelas **b)** perpendiculares
c) coincidentes **d)** Ninguna de las anteriores

7) Las rectas $r_1 : y + x + 1 = 0$ y $r_2 : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$ son:

a) paralelas **b)** perpendiculares
c) coincidentes **d)** Ninguna de las anteriores

8) Las rectas $r_1 : 3x + 6y = -12$ y $r_2 : \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ son:

a) paralelas **b)** perpendiculares
c) coincidentes **d)** Ninguna de las anteriores

9) La distancia del punto P(1, –3) a la recta $4y + 3x = 1$ es:

a) $\frac{4}{5}$ **b)** $\frac{8}{5}$ **c)** 2 **d)** 1

10) El ángulo determinado por las rectas $r_1 : y - 2x + 4 = 0$ y $r_2 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ es:

a) 0^{o} **b)** 90^{o} **c)** 45^{o} **d)** 60^{o}

11) Para que la distancia del punto P(1, 1) a la recta r_1: $-8x + 6y = k$ sea $\frac{1}{2}$, el valor de k debe ser:

a) –7 **b)** 3 **c)** –7 o 3 **d)** 7 o –3

GUÍA DE ESTUDIO DE TEORÍA N° 3: RECTA EN EL PLANO

1) Deduzca la ecuación vectorial de la recta determinada por un punto y una dirección.

2) A partir de la ecuación obtenida en **(1)** deduzca la ecuación:

a) paramétrica,
b) canónica,
c) implícita de la recta en R^2 dado un punto que le pertenece y una dirección.

3) Deduzca la ecuación vectorial de la recta determinada por dos puntos.

4) A partir de la ecuación vectorial obtenida en **(3)** deduzca la ecuación:

a) paramétrica,
b) canónica,
c) implícita de la recta en R^2 determinada por dos puntos.

5) ¿Qué representan geométricamente los coeficientes de la ecuación general o implícita de la recta?, ¿por qué?
6) Deduzca la ecuación vectorial de la recta dado un vector normal a la misma y un punto que le pertenece.
7) A partir de la ecuación obtenida en **(6)**, deduzca la ecuación general.
8) Defina:
a) ángulo de inclinación de una recta,
b) pendiente de una recta.

9) Deduzca la ecuación de una recta conocida su pendiente y un punto que le pertenece.
10) Deduzca la ecuación explícita de la recta.
11) ¿Existe alguna restricción que impide que algunas rectas se escriban en forma explícita?, ¿cuál es?, ¿por qué?
12) Deduzca la ecuación segmentaria de la recta.
13) ¿Existe alguna restricción que impida expresar una recta a través de la ecuación segmentaria?, ¿cuál es? Justifique la respuesta.
14) Dada la ecuación general de la recta $ax + by + c = 0$ obtenga a partir de ella la ecuación:
a) explícita,
b) segmentaria.

Justifique todos los pasos.
15) Realice la discusión de la ecuación general de la recta.
16) ¿Cómo se calcula el ángulo entre dos rectas:
a) dadas en forma explícita?,
b) conocidas las pendientes?

17) ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que dos rectas dadas a través de la ecuación implícita sean:
a) paralelas?,
b) perpendiculares?

Justifique la respuesta.
18) ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que dos rectas dadas a través de la ecuación explícita sean:
a) paralelas?,
b) perpendiculares?

Justifique la respuesta.
19) ¿Cuándo dos rectas son coincidentes?
20) ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que dos rectas del plano sean coincidentes? Justifique la respuesta.
21) Deduzca la fórmula para la obtención de la distancia de un punto a una recta.
22) ¿Cómo se calcula la distancia entre dos rectas paralelas?
23) ¿Qué entiende por familia o haz de rectas?
24) ¿Qué tipo de familias de rectas conoce?

AUTOEVALUACIÓN Nº 3: RECTA EN EL PLANO

1)a) Determine la ecuación paramétrica de la recta que es paralela al vector $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ y pasa por el punto (1, 2). Grafique.

b) Halle la ecuación cartesiana simétrica y general de la recta hallada en **(a)**.

2) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos (–1, 2) y (–3, 6). ¿Le pertenece el punto (2, –4)?¿Y el punto (1, 3)?. En caso afirmativo, indique el valor correspondiente del parámetro.

3) Sean las rectas de ecuación $r_1 : 2x + by - 6 = 0$ y $r_2 : \begin{cases} x = -4 - 4t \\ y = t \end{cases}$.

a) Determine el valor de b para que resulten perpendiculares.

b) Para ese valor de b grafique ambas rectas en un mismo sistema.

4) Sea la recta de ecuación $3x + 4y = 6$ y el punto (k, –5), halle el valor de k sabiendo que la distancia entre el punto y la recta es 4.

5)a) Escriba la ecuación de la familia de rectas paralelas a $2x - 3y + 5 = 0$. Dibuje dos elementos de la familia de rectas indicando el parámetro.

b) Escriba la ecuación de la familia de rectas que son perpendiculares a la recta $2x - 3y + 5 = 0$. Dibuje dos elementos de la familia de rectas indicando el parámetro.

6) Calcule el ángulo que forman las rectas $r_1 : 2x - 5 = y$ y $r_2 : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + t \end{cases}$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

1) Halle la ecuación general y grafique la recta que:

a) pasa por los puntos P(–1, 3) y Q(0, –2),

b) es paralela al vector $\vec{u} = \vec{j} - 3\,\vec{i}$ y le pertenece el punto (1, 2),

c) es perpendicular al vector $\vec{r} = \vec{i} - \vec{j}$ y pasa por el punto (–2, 3),

d) determina sobre el semieje positivo de abscisas un segmento de longitud 2 y sobre el semieje negativo de ordenadas un segmento de longitud 3,

e) es paralela a la recta de ecuación $2x + y + 5 = 0$ y pasa por el origen de coordenadas.

2) Determine:

a) la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto (–2, 1) y es paralela al vector $\vec{u} = \vec{i} - 3\,\vec{j}$,

b) qué punto se obtiene si t = 0, t = 1 y t = –2,

c) para qué valor de t se obtiene el punto (2, –11) y para qué valor el punto $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$.

3) Encuentre la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos A(–1, –2) y B(3, 6).
Nota: La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al mismo en su punto medio.

4) Los puntos A(–2, 2), B(3, 0) y C(–3, –2) determinan un triángulo, halle:

a) la longitud de sus lados,
b) las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados,
c) las longitudes de las medianas.

Nota: la mediana correspondiente a cada lado es el segmento que une el punto medio del lado con el vértice opuesto.

5) Sea el triángulo cuyos vértices son P(–5, –2), Q(3, 6) y R(7, –2), obtenga:

a) las ecuaciones de las rectas que incluyen a sus lados,
b) las ecuaciones de las rectas que incluyen a sus alturas.

Nota: la altura correspondiente a un lado es el segmento perpendicular a dicho lado que lo une al vértice opuesto.

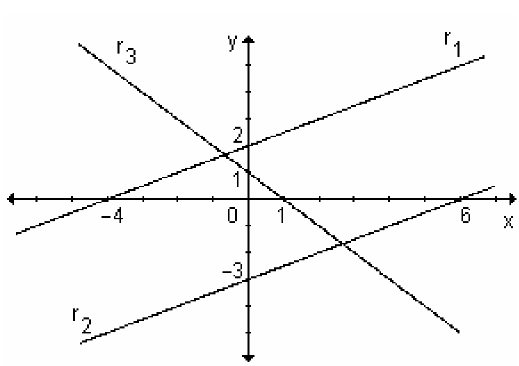
c) el punto donde las rectas obtenidas en **(b)** se cortan. Dicho punto se llama ortocentro.

6) Determine la ecuación simétrica de la recta que es paralela al vector $\vec{v} = 2\vec{j} - \vec{i}$ y pasa por el punto de intersección de las rectas $r_1 : x + 2y - 3 = 0$ y $r_2 : y + 2x - 6 = 0$. Grafique.

7) Encuentre la ecuación segmentaria de la recta que es perpendicular al vector $\vec{n} = 5\vec{i} + \vec{j}$ y pasa por el punto de intersección de las rectas $r_1 : x + y - 2 = 0$ y $r_2 : 3x + y = 0$. Grafique.

8) Complete la siguiente tabla teniendo en cuenta el gráfico:

Recta	Ecuación paramétrica	Ecuación general	Ecuación segmentaria
r_1	....	....	....
r_2	....	....	....
r_3	....	....	....



9) Halle el ángulo que forman las rectas $r_1 : 3x - y = 0$ y $r_2 : x + y + 2 = 0$.

10) Sean las rectas $r_1 : 3x + 5 = 0$ y $r_2 : ax + 2y - 1 = 0$. Determine el valor de a de modo que formen un ángulo de 45°. Para dicho valor de a grafique las rectas.
11) Sea la recta de ecuación $2y + x - 5 = 0$ y el punto $P(k + 1, 2)$. Determine el valor de k de modo que la distancia entre el punto y la recta sea $\frac{4}{\sqrt{5}}$. Grafique.
12) Sea la recta de ecuación $3x - 4y + c = 0$ y el punto $P(1, -2)$. Calcule el valor de c de modo que la distancia entre el punto y la recta sea 3. Grafique.
13) Analice la posición de los siguientes pares de rectas según el valor del parámetro k:

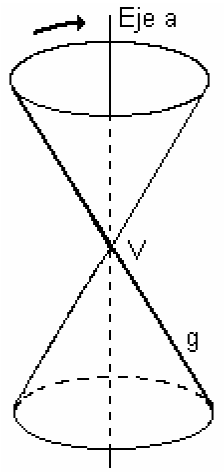
a) $r_1 : (1+k)x + 2y = 3$ y $r_2 : x - y = 1$.

b) $r_1 : 3x - ky = 2$ y $r_2 : kx - 3y = 4$.

4. SECCIONES CÓNICAS

> El enfoque métrico de Apolonio en las secciones cónicas - elipse, hipérbola y parábola - fue uno de los grandes logros matemáticos de la antigüedad. La importancia de las secciones cónicas para las matemáticas puras y aplicadas (por ejemplo, las órbitas de los planetas y de los electrones en el átomo de hidrógeno son secciones cónicas) difícilmente pueden ser sobrestimadas.

Richard Courant y Herbert Robbins

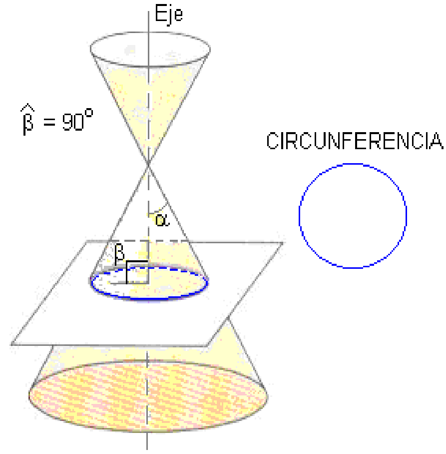


La palabra *cónica* deriva de cono que es una superficie que se obtiene manteniendo fija la recta a, haciendo girar la recta g alrededor de a, manteniendo siempre el punto común V y el ángulo entre a y g. Al conjunto de puntos generados por la recta g se llama cono circular recto. La recta fija a es llamada eje del cono; el punto V es su vértice y las rectas que pasan por V y forman el mismo ángulo que el que determinan a y g reciben el nombre de generatrices del cono. El cono consta de dos partes u hojas que se intersecan en el vértice.
Las curvas que se obtienen al intersecar un cono con un plano se llaman cónicas o secciones cónicas.
Las que estudiaremos son las que se obtienen cuando el plano no contiene al vértice y son: la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola.

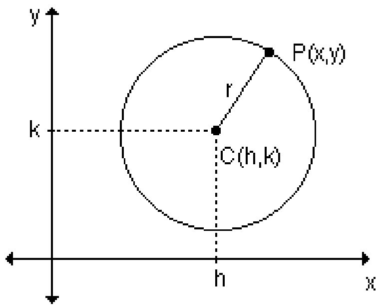
El matemático griego Menecmo descubrió estas curvas y fue el matemático griego Apolonio de Perga el primero en estudiarlas detalladamente y encontrar la propiedad plana que las definía. El estudio de las mismas tiene su origen en su libro Cónicas, en el cual se estudian las figuras que pueden obtenerse al cortar un cono cualquiera por diversos planos.
Si bien no disponía de la geometría analítica todavía, Apolonio hace un tratamiento de las mismas que se aproxima mucho a aquélla. Apolonio descubrió que las cónicas se podían clasificar en tres tipos a los que dio el nombre de: elipses, hipérbolas y parábolas.
Los resultados obtenidos por Apolonio fueron los únicos que existieron hasta que Fermat y Descartes, en una de las primeras aplicaciones de la geometría analítica, retomaron el problema llegando a su casi total estudio, haciendo siempre la salvedad de que no manejaban coordenadas negativas, con las restricciones que esto impone. En el siglo XVI el filósofo y matemático René Descartes (1596-1650) desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones. Este método es la llamada Geometría Analítica. En la Geometría Analítica las curvas cónicas se pueden representar por ecuaciones de segundo grado en las variables x e y. El resultado más sorprendente de la Geometría Analítica es que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan secciones cónicas se lo debemos a Jan de Witt (1629-1672).
Recién después, a comienzos del siglo XVII, se difundieron importantes aplicaciones de las cónicas que hicieron que jugaran un papel muy importante en el desarrollo de nuevas teorías.
La importancia de las cónicas radica en su constante aparición en situaciones reales. Sin lugar a dudas, las cónicas son las curvas más importantes que la geometría ofrece a la física.
Definiremos cada cónica como un conjunto de puntos en el plano que satisfacen determinadas condiciones geométricas. A partir de la definición, se podrá encontrar la ecuación del lugar geométrico descripto y bosquejar su gráfica.

4.1 Circunferencia

La circunferencia se obtiene intersecando un cono con un plano perpendicular al eje que no contiene al vértice.



Definición: La *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia a un punto fijo llamado *centro* se mantiene constante. La distancia de cada punto de la circunferencia al centro se llama *radio*.



Datos: r radio de la circunferencia
P(x, y) punto genérico

Incógnita: ecuación de la circunferencia

$d(C,P) = \text{constante}$

$d(C,P) = +\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$

Elevando ambos miembros al cuadrado resulta la expresión $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ que es la *ecuación ordinaria* de la circunferencia.

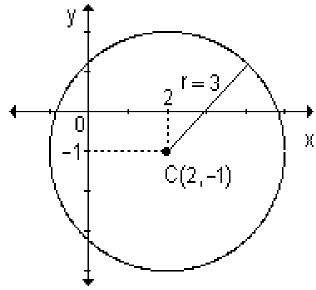
Ejemplo: Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que distan 3 unidades del punto (2, –1). Identifique el lugar geométrico, escriba sus elementos y grafique.

Debemos hallar todos los puntos P(x, y) que distan 3 unidades del punto Q(2, –1).

$d(P,Q) = 3 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-(-1))^2} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2 \Rightarrow$

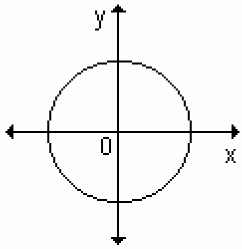
$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$



Se trata de una circunferencia de centro (2, –1) y radio 3.

Posiciones particulares de la circunferencia

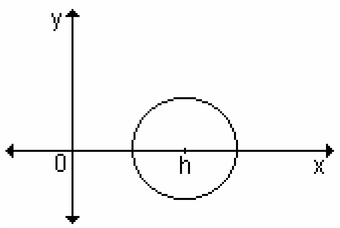
a) El centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas.



Deben ser $h = k = 0$. El centro es $C(0, 0)$.

Se obtiene $x^2 + y^2 = r^2$ que es la *ecuación canónica* de la circunferencia.

b) El centro se encuentra sobre el eje x, por lo tanto debe ser $k = 0$.

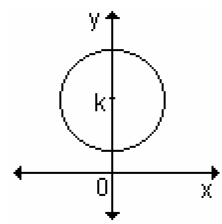


El centro es $C(h, 0)$.

La ecuación de la circunferencia es

$$(x - h)^2 + y^2 = r^2$$

c) El centro se encuentra sobre el eje y; en consecuencia, debe ser $h = 0$.



El centro es $C(0, k)$.

La ecuación resulta $x^2 + (y - k)^2 = r^2$

Discusión de la ecuación canónica de la circunferencia

Sea G la gráfica de la circunferencia.

1) *Intersección con los ejes*

a) $G \cap \text{eje } x \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 = r^2 \Rightarrow x = \pm r \Rightarrow P_1(r, 0)$ y $P_2(-r, 0)$

b) $G \cap \text{eje } y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y^2 = r^2 \Rightarrow y = \pm r \Rightarrow P_3(0, r)$ y $P_4(0, -r)$

2) *Simetrías*

a) *respecto al eje de abscisas*: $y \to -y$

$x^2 + (-y)^2 = x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow$ existe simetría

b) *respecto al eje de ordenadas*: $x \to -x$

$(-x)^2 + y^2 = x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow$ existe simetría

c) *respecto al origen*: $x \to -x \wedge y \to -y$

$(-x)^2 + (-y)^2 = x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow$ existe simetría

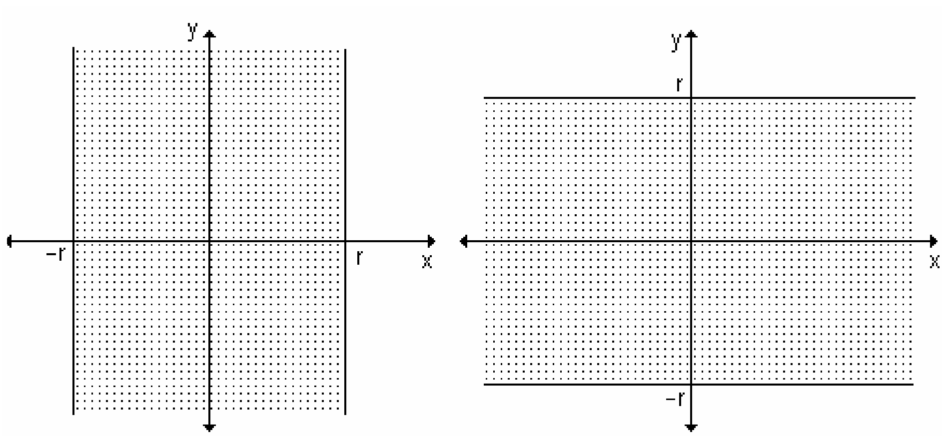
3) *Extensión*

a) *respecto al eje de abscisas*

$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow y \in R \Leftrightarrow r^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow r^2 \geq x^2 \Leftrightarrow |x| \leq r$

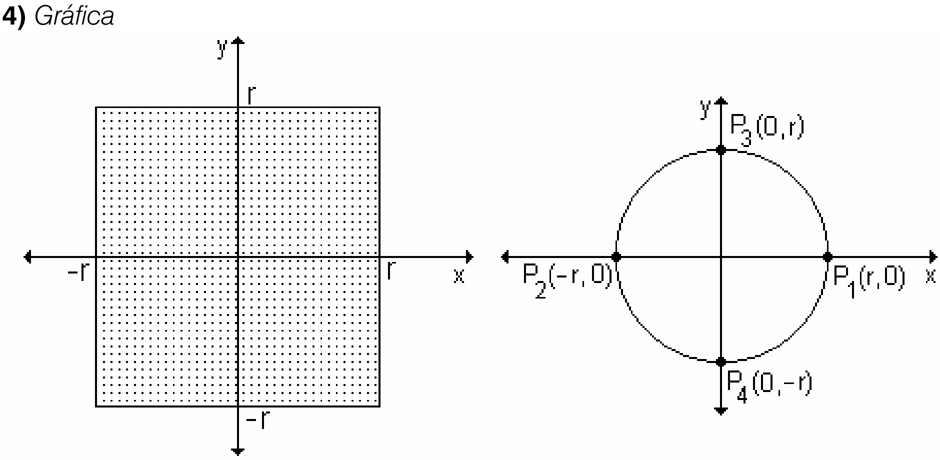
b) *respecto al eje de ordenadas*

$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2} \;\Rightarrow\; x \in R \;\Leftrightarrow\; r^2 - y^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; r^2 \geq y^2 \;\Leftrightarrow\; |y| \leq r$



Extensión sobre el eje x Extensión sobre el eje y

4) *Gráfica*



Sector en el que queda la gráfica

Ejemplo: Halle la ecuación de la circunferencia sabiendo que los puntos (–2, –2) y (6, 4) son extremos del diámetro. Grafique.

Si los puntos dados son los extremos del diámetro, el punto medio del segmento determinado por ellos es el centro.

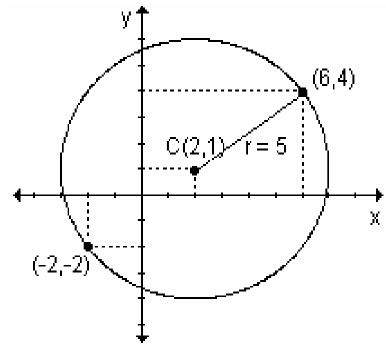
Entonces $P_m\left(\dfrac{-2+6}{2}, \dfrac{-2+4}{2}\right) = P_m\,(2, 1) = C(2, 1)$

La distancia entre el centro y uno cualquiera de los puntos dados es el radio. Calculemos la distancia desde el centro hasta el punto (6, 4):

$r = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \quad \Rightarrow \quad r = 5$

En consecuencia, la ecuación de la circunferencia es: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$

Gráficamente:



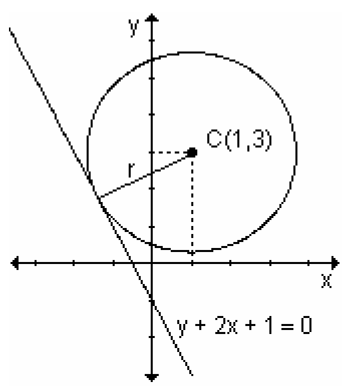
Ejemplo: Determine la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto (1, 3) y es tangente a la recta $y + 2x + 1 = 0$. Grafique la situación planteada.

La distancia desde el centro a la recta tangente es el radio de la circunferencia, es decir:

$$r = \frac{|2.1 + 3 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow r^2 = \frac{36}{5}$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia buscada es:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = \frac{36}{5}$$



EJERCICIOS

1) Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan una unidad del origen.
2) Obtenga la ecuación de la circunferencia de centro en el origen de coordenadas y que pasa por el punto (5, 5).
3) Encuentre la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan 3 unidades del punto (–2, 3).
4) Determine la ecuación de la circunferencia de centro en el punto P(2, –3) y que es tangente al eje x.
5) Halle la ecuación de la circunferencia sabiendo que los puntos P(3, 2) y R(–1, 3) son extremos de su diámetro.

RESPUESTAS

1) $x^2 + y^2 = 1$ **2)** $x^2 + y^2 = 50$ **3)** $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$

4) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$ **5)** $(x-1)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$

Ecuación general completa de segundo grado en dos variables

Se llama así a toda ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ donde}$$

Ax^2, Bxy, Cy^2 : términos de segundo grado.
Dx, Ey: términos de primer grado
Bxy: término rectangular
F: término independiente

A partir de la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se obtienen las ecuaciones generales de las distintas cónicas: circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, imponiendo condiciones a los coeficientes de la misma.
El término rectangular representa curvas cuyos ejes no son paralelos a los ejes coordenados. Estudiaremos curvas cuyos ejes coinciden o son paralelos a los ejes coordenados y por ello hacemos $B = 0$, obteniendo así la *ecuación general incompleta de segundo grado en dos variables* $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.
Analizaremos qué condiciones deben cumplir los coeficientes de la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ para que represente geométricamente una circunferencia.

Condición necesaria para la existencia de circunferencia

Partiendo de la ecuación ordinaria de la circunferencia $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, desarrollando y comparando con la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ podemos obtener la siguiente conclusión.
Conclusión: La condición necesaria para que una ecuación incompleta de segundo grado en dos variables represente una circunferencia es que los coeficientes de las variables de segundo grado sean iguales.

Condición suficiente para la existencia de circunferencia

Si se cumple la condición necesaria, es decir, $A = C \neq 0$, dividimos la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ por A, completamos cuadrados y analizamos la expresión que resulta $(x-h)^2 + (y-k)^2 = M$.

Del valor de M depende qué lugar geométrico representa:

- Si $M > 0$ se obtiene una circunferencia de centro C(h, k) y radio $\sqrt{M}$.
- Si $M = 0$ se obtiene el punto P(h, k).
- Si $M < 0$ resulta ningún lugar geométrico.

Conclusión: La condición necesaria y suficiente para que ecuación

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente una circunferencia es que $A = C \neq 0$ y que el término independiente, luego de completar cuadrados y pasado al segundo miembro, sea mayor que cero.

Ejemplo: Halle la ecuación general incompleta de segundo grado de la circunferencia cuyo centro es el punto C(–1, –2) y pasa por P(–1, 1).

Teniendo en cuenta la ecuación de una circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y sabiendo que el centro es el punto (–1, –2) resulta: $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = r^2$.
Como el punto P(–1, 1) le pertenece debe verificar dicha ecuación, entonces:
$(-1 + 1)^2 + (1 + 2)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad r = 3$
La ecuación es $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$.
Para encontrar la ecuación general incompleta de segundo grado desarrollamos los cuadrados y agrupamos todos los términos en el primer miembro:
$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$

Ejemplo: Dada la circunferencia $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 22 = 0$, determine su centro y su radio.

Para determinar los elementos de la circunferencia completamos cuadrados. En primer lugar pasamos el término independiente al segundo miembro y sacamos factor común 2: $2.\,(x^2 + y^2 - 2x + 4y) = 22$
Dividiendo ambos miembros por 2 resulta: $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 11$
Agrupamos las variables, sumamos y restamos la expresión conveniente para completar los cuadrados: $(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + (y^2 + 4y + 2^2 - 2^2) = 11$
$(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 = 11 \quad \Rightarrow \quad (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 11 + 1 + 4 \quad \Rightarrow$
$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$
De esta manera podemos concluir que el centro es C(1, –2) y el radio r = 4.

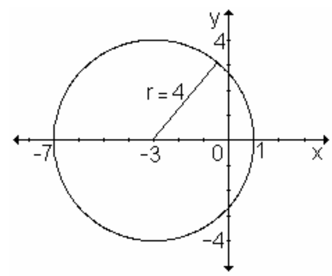
Ejemplo: Escriba la ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$ en coordenadas polares, determine de qué tipo de curva se trata, indique sus elementos y grafique.

Sabemos que: $\rho^2 = x^2 + y^2$; $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho} \quad \Rightarrow \quad x = \rho\cos\theta$;

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{\rho} \quad \Rightarrow \quad y = \rho\operatorname{sen}\theta$

Entonces reemplazando en $x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$ resulta: $\rho^2 + 6\rho\cos\theta - 7 = 0$.
La ecuación general incompleta de segundo grado cumple la condición necesaria para ser una circunferencia (los coeficientes A = B = 1).
Completando cuadrados obtenemos:
$x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 + y^2 = 7 \Rightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 16$.

Es una circunferencia de centro C(–3, 0) y radio r = 4.



EJERCICIOS

1) Reduzca a la forma ordinaria las siguientes ecuaciones, determine cuál es el lugar geométrico obtenido y, de ser posible, determine los elementos:

a) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 12y + 9 = 0$ **b)** $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 6x + 9 = 0$

2) Sea la ecuación $4x^2 - 4x + 4y^2 - k + 20 = 0$, halle el valor de k sabiendo que se trata de una circunferencia de radio tres. Para dicho valor de k, grafique la circunferencia e indique sus elementos.

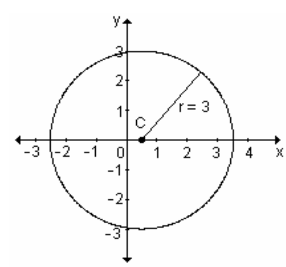
3) Escriba la ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 71 = 0$ en coordenadas polares, determine de qué tipo de curva se trata e indique sus elementos.

RESPUESTAS

1)a) $(x-1)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = 1$ **b)** Ningún lugar geométrico **c)** El punto (–3, 0)

2) $k = 55$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 9$, centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

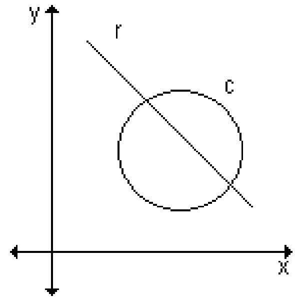


3) $\rho^2 + 2\rho\,(3\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) - 71 = 0$. Circunferencia, centro (–3, 1) y radio 9.

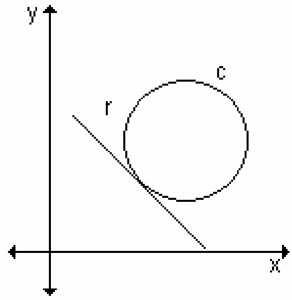
Intersección de recta y circunferencia

Dada una recta y una circunferencia en un plano puede ocurrir:

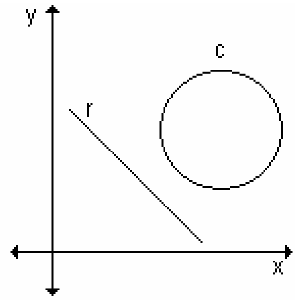
- la recta corta a la circunferencia en dos puntos. La recta es *secante* a la circunferencia.
- la recta y la circunferencia se cortan en un punto. La recta es *tangente* a la circunferencia.
- la circunferencia y la recta no tienen intersección. La recta es *exterior* a la circunferencia.



r : secante



r : tangente



r : exterior

Datos: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ecuación de la circunferencia
$ax + by + c = 0$ ecuación de la recta

Incógnitas: él o los puntos de intersección (si existen)

Se resuelve el sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$

Para ello, despejamos de la ecuación de la recta una de las variables y la reemplazamos en la ecuación de la circunferencia. Obtenemos así una ecuación de segundo grado en una variable que se resuelve a través de la resolvente. En dicha fórmula, el discriminante es: $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$, se obtienen dos soluciones reales y distintas. Por lo tanto existen los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. La recta es secante a la circunferencia.
- Si $\Delta = 0$, se obtienen dos raíces reales e iguales. De esta manera, se obtiene el punto $P_1(x_1, y_1)$. La recta es tangente a la circunferencia.
- Si $\Delta < 0$, las raíces son complejas conjugadas y por lo tanto no existe intersección entre la recta y la circunferencia. La recta es exterior a la misma.

Ejemplo: Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + (y + 3)^2 = 4$ y las rectas $r_1 : y - x - 2 = 0$, $r_2 : x + y + 1 = 0$ y $r_3 : y + 5 = 0$, determine los puntos de intersección entre la cónica y cada una de las rectas. Grafique.

Planteamos en cada caso un sistema de ecuaciones entre la cónica y la recta.

En primer lugar con r_1 el sistema es: $\begin{cases} x^2 + (y+3)^2 = 4 \\ y - x - 2 = 0 \end{cases}$. Lo resolvemos por sustitución, despejando de la segunda ecuación la variable x y reemplazándola en la primera:

$(y - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4 \Rightarrow y^2 - 4y + 4 + y^2 + 6y + 9 - 4 = 0 \Rightarrow 2y^2 + 2y + 9 = 0$

Resolviendo la ecuación cuadrática resulta:

$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.2.9}}{2.2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-68}}{4}$. Como el discriminante es negativo, no existe intersección y la recta r_1 es exterior a la circunferencia.

Para hallar la intersección con r_2 planteamos el sistema $\begin{cases} x^2 + (y+3)^2 = 4 \\ y + x + 1 = 0 \end{cases}$.

Procediendo de manera similar al caso anterior obtenemos:

$(-y-1)^2 + (y+3)^2 = 4 \Rightarrow y^2 + 2y + 1 + y^2 + 6y + 9 - 4 = 0 \Rightarrow 2y^2 + 8y + 6 = 0$

Resolviendo la ecuación cuadrática resulta $y_1 = -1$ o bien $y_2 = -3$.

Reemplazando estos valores en la ecuación de la recta o de la circunferencia obtenemos $x_1 = 0$ o bien $x_2 = 2$.

O sea, los puntos de intersección son P_1 (0, –1) y P_2 (2, –3). La recta r_2 es secante a la circunferencia.

Con r_3 planteamos el sistema

$\begin{cases} x^2 + (y+3)^2 = 4 \\ y + 5 = 0 \end{cases}$.

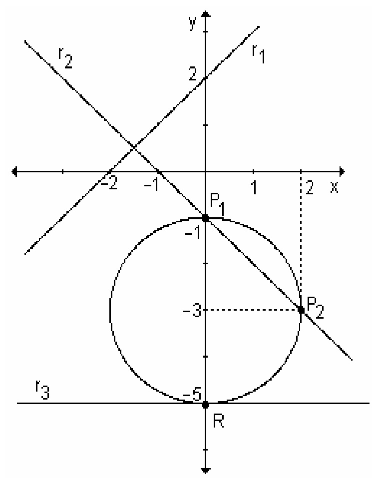
Despejando la variable y de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera

$x^2 + (-5+3)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + 4 = 4 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$.

Entonces el punto de intersección es R(0, –5).

La recta r_3 es tangente a la circunferencia.



EJERCICIOS

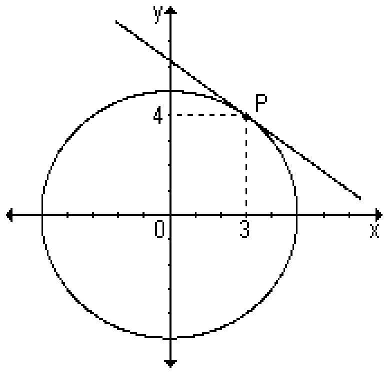
1) Dadas las curvas: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$,

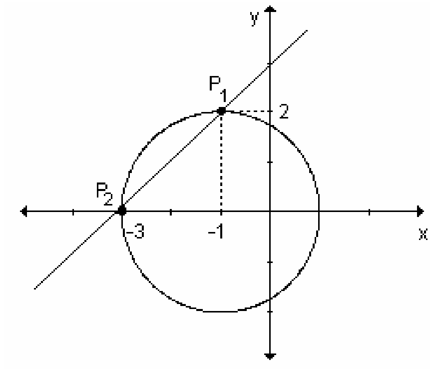
- **a)** Identifíquelas.
- **b)** Obtenga el o los puntos de intersección entre ambas.
- **c)** Grafique todo en un mismo sistema de coordenadas.

2) Halle analítica y gráficamente la intersección entre la recta $y = x + 3$ y la curva $(x+1)^2 + y^2 = 4$.

RESPUESTAS

1)a) Circunferencia y recta **b)** P(3, 4) **2)** P_1 (–1, 2) y P_2 (–3, 0)



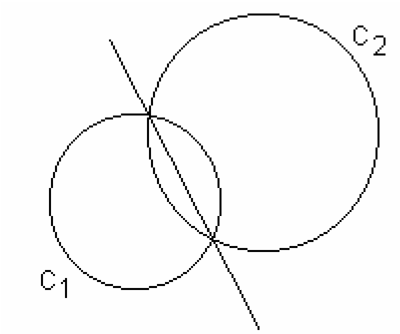


Intersección entre dos circunferencias

Datos: las ecuaciones de las circunferencias

$$C_1: \ x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0$$
$$C_2: \ x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0$$

Incógnita: la intersección entre las circunferencias, $C_1 \cap C_2$.



Para encontrar la intersección entre dos circunferencias se debe resolver un sistema de dos ecuaciones de segundo grado en dos variables.

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0$$

Restando ambas ecuaciones: $\quad (D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0$

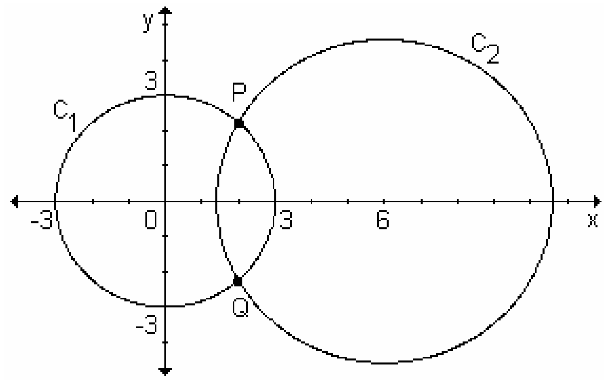
Teniendo en cuenta la condición necesaria de existencia de circunferencia, igualando convenientemente los coeficientes de ambas ecuaciones y restando miembro a miembro, se obtiene una ecuación de primer grado en dos variables que corresponde a la recta que une los puntos de intersección de las circunferencias, llamada *eje radical*.

Luego, se debe resolver el sistema formado por la ecuación de una de las circunferencias y la ecuación del eje radical. Es decir, se debe resolver uno de los sistemas:

$$\begin{cases} C_1 \\ \text{eje radical} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} C_2 \\ \text{eje radical} \end{cases}$$

Ejemplo: Determine analítica y gráficamente la intersección entre las circunferencias C_1 y C_2 si $C_1: x^2 + y^2 = 9$ y $C_2: (x-6)^2 + y^2 = 21$.

La primera es una circunferencia centrada en el origen de radio 3 mientras que la segunda tiene su centro en el punto (6, 0) y radio $\sqrt{21}$. Graficando ambas en un mismo sistema vemos que se intersecan en los puntos P y Q:



La diferencia entre las ecuaciones dadas determina la ecuación de la recta que contiene a la cuerda común entre ambas.

$$
\begin{array}{rll}
 & C_2 : & x^2 - 12x + 36 + y^2 - 21 = 0 \\
- & & \\
 & C_1 : & x^2 + y^2 - 9 = 0 \\
\hline
 & & -12x + 15 + 9 = 0 \;\Rightarrow\; -12x = -24 \;\Rightarrow\; x = 2
\end{array}
$$

Es decir, la recta $x = 2$ es el eje radical.
Para hallar los puntos de intersección resolvemos el sistema que forman la recta $x = 2$ y cualquiera de las circunferencias. Reemplazamos x por 2 en C_1 y obtenemos: $2^2 + y^2 = 9 \;\Rightarrow\; y^2 = 5 \;\Rightarrow\; y_1 = \sqrt{5}$, $y_2 = -\sqrt{5}$.
Los puntos de intersección entre las dos circunferencias resultan: P $(2, \sqrt{5})$ y Q $(2, -\sqrt{5})$.

EJERCICIO

Halle la ecuación y la longitud de la cuerda común de las circunferencias:
$C_1 : x^2 + y^2 - 4 = 0$ y $C_2 : x^2 + y^2 + x + y - 6 = 0$

RESPUESTA
$x + y - 2 = 0$, $L = \sqrt{8}$

Ecuaciones paramétricas
Hasta ahora presentamos la gráfica de un lugar geométrico por medio de una ecuación en dos variables. Existe la posibilidad de introducir una tercera variable

para representar una curva en el plano. Esta forma de expresar lugares geométricos resulta muy útil. Intentamos encontrar la representación analítica de una curva por medio de dos ecuaciones en las cuales cada una de las dos variables está expresada en función de una tercera.

La circunferencia con centro en el origen y radio uno de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ se puede escribir también por medio de las ecuaciones: $\begin{cases} x = \cos\alpha \\ y = \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$, donde α es una variable independiente que admite cualquier valor real. Podemos decir que si a α le asignamos un valor cualquiera se determinan los pares de valores (x, y) que satisfacen la ecuación de la circunferencia dada.

Definición: Sea f(x, y) = 0 la ecuación de un lugar geométrico y cada una de las variables x e y son función de una tercera variable t de tal manera que se puede escribir x = g(t), y = h(t). Si para cualquier valor permitido de la variable independiente t, las expresiones x = g(t), y = h(t) determinan un par de valores (x, y) que satisfacen f(x, y) = 0, entonces las ecuaciones se llaman ecuaciones paramétricas del lugar geométrico y la variable independiente t se llama parámetro. Las ecuaciones $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$ también se llaman *representación paramétrica de la curva.*

Ecuación cartesiana del lugar geométrico	Ecuaciones paramétricas o representación paramétrica
f(x, y) = 0	$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$ t : parámetro

El conjunto de puntos (x, y) = (g(t), h(t)) en el plano constituye la gráfica del lugar geométrico.
Si graficamos una curva dada a través de su expresión paramétrica, marcamos los puntos en el plano de manera tal que cada par de coordenadas (x, y) queda determinado por un valor elegido para el parámetro t.
Si tenemos una curva dada mediante sus ecuaciones paramétricas, también puede expresarse de la forma f(x, y) = 0 eliminando el parámetro t. Para ello, de una de las ecuaciones paramétricas se debe despejar el parámetro t y sustituirlo en la otra, para obtener así la ecuación cartesiana.

Las ecuaciones paramétricas de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ pueden enunciarse $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\operatorname{sen} t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$ ya que:

$x^2 + y^2 = r^2\cos^2 t + r^2\operatorname{sen}^2 t = r^2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = r^2$.

EJERCICIOS INTEGRADORES 4.1 CIRCUNFERENCIA

1) Determine la ecuación de la circunferencia que:

a) es tangente al eje de ordenadas y el centro es el punto de intersección de las rectas $r_1 : x - y + 1 = 0$ y $r_2 : y = 2x$,

b) el centro es el punto medio entre A $(-4, 2)$ y B$(6, -3)$ y su diámetro es 6.

2) Explique por qué las siguientes ecuaciones cumplen la condición necesaria para ser una circunferencia. Obtenga la ecuación ordinaria y determine si cumplen la condición suficiente. De ser posible escriba los elementos.

a) $2x^2 + 2y^2 - 8x + 8y - 2 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10 = 0$

c) $x^2 + y^2 - x + y + 1 = 0$

3) Dadas las circunferencias de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ y $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$, obtenga, si es posible:

a) la ecuación del eje radical.

b) los puntos de intersección.

4) Halle, si es que existen, los puntos de intersección de la recta $y + x = -2$ y la circunferencia $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

GUÍA DE ESTUDIO DE TEORÍA N° 4: CIRCUNFERENCIA

1) Defina circunferencia como lugar geométrico.

2) Obtenga la ecuación ordinaria de la circunferencia.

3) ¿Qué elementos puede distinguir en una circunferencia?

4) ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia si:

a) el centro se encuentra sobre el eje x?

b) el centro se encuentra sobre el eje y?

c) el centro coincide con el origen de coordenadas? ¿Qué nombre recibe esta ecuación?

5) Escriba la ecuación general completa de segundo grado en dos variables.

6) ¿Cómo se obtiene la ecuación general incompleta de segundo grado en dos variables?

7) ¿Qué condiciones debe cumplir la ecuación de segundo grado en dos variables para que represente una circunferencia? ¿Por qué?

8) Obtenga la ecuación de la circunferencia conocidas las coordenadas de tres puntos que le pertenecen.

9) ¿Cuáles son las posiciones relativas entre una recta y una circunferencia?

10) ¿Cómo se obtiene la intersección de una recta con una circunferencia?

11) ¿A qué llamamos eje radical?

12) ¿Qué propiedad relaciona el eje radical con el eje de los centros?

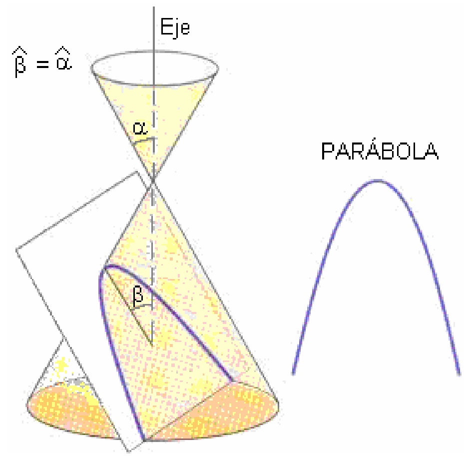
13) ¿Cómo se realiza la intersección entre dos circunferencias?

14) Deduzca las ecuaciones paramétricas de la circunferencia.

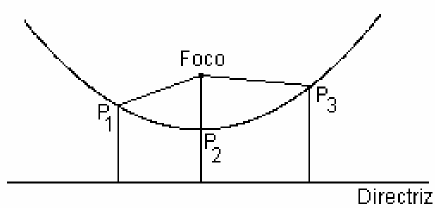
4.2 Parábola

Al igual que procedimos en el caso de la circunferencia, definiremos parábola como lugar geométrico y a partir de la misma encontraremos su ecuación y bosquejaremos su gráfica según las diferentes situaciones.

La parábola se obtiene intersecando un cono con un plano inclinado, paralelo a una generatriz y que sólo interseca a una de las hojas del mismo.

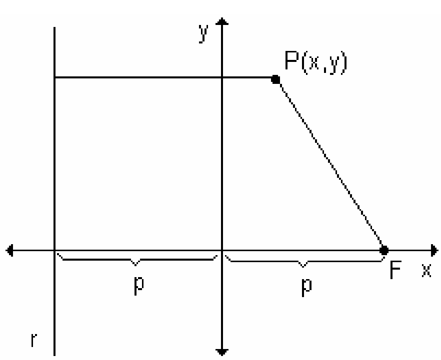


Definición: Dados en un plano una recta (llamada *directriz*) y un punto fijo (llamado *foco*), se denomina *parábola* al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del foco y de la directriz.



Ecuaciones canónicas de la parábola

Primer caso: Consideramos que el foco se encuentra sobre el eje de abscisas a una distancia p del origen, y la directriz es perpendicular al eje de abscisas y se encuentra a una distancia p del origen.



Datos: F(p, 0)

directriz: la recta $x = -p$

P(x, y) punto genérico

Incógnita: ecuación de la parábola

$P(x, y) \in$ parábola si se verifica que

$$d(P, r) = d(P, F)$$

P(x, y) $\in$ parábola $\Leftrightarrow$ $|x+p| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$

$(x + p)^2 = (x - p)^2 + y^2 \Rightarrow \quad x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$

Simplificando obtenemos $y^2 = 4px$ que es *la ecuación canónica* de la parábola con eje focal coincidente con el eje de abscisas.

Discusión de la ecuación de la parábola

Sea G la gráfica de la parábola.

1) *Intersección con los ejes*

a) G $\cap$ eje x $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 4px = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow V(0, 0)$

b) G $\cap$ eje y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow V(0, 0)$

La parábola pasa por el origen de coordenadas. A ese punto se lo llama *vértice* de la parábola.

2) *Simetrías*

a) *respecto al eje de abscisas*: $y \to -y$

$(-y)^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4px \Rightarrow$ existe simetría

b) *respecto al eje de ordenadas*: $x \to -x$

$y^2 = 4p(-x) \Rightarrow y^2 = -4px \Rightarrow$ no existe simetría

c) *respecto al origen*: $x \to -x \wedge y \to -y$

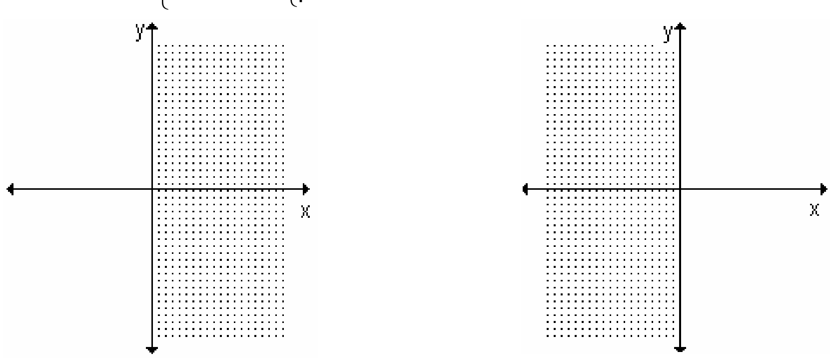
$(-y)^2 = 4p(-x) \Rightarrow y^2 = -4px \Rightarrow$ no existe simetría

3) *Extensión*

a) *respecto al eje de abscisas*

$y = \pm\sqrt{4px} \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{px} \Rightarrow y \in R \Leftrightarrow px \geq 0$

$$y \in R \Leftrightarrow px \geq 0 \begin{cases} px = 0 \Rightarrow x = 0 \\ px > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p > 0 \quad \wedge \quad x > 0 \\ \qquad\quad \vee \\ p < 0 \quad \wedge \quad x < 0 \end{cases} \end{cases}$$



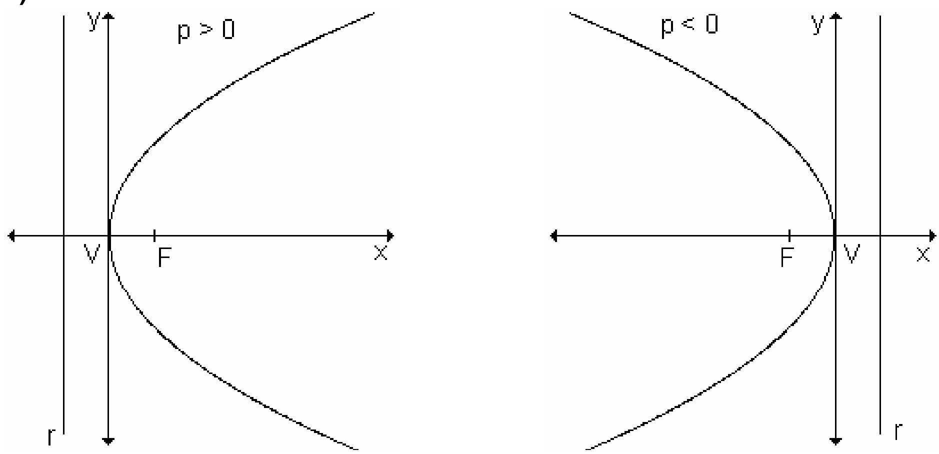
$p > 0$
$x \geq 0$

$p < 0$
$x \leq 0$

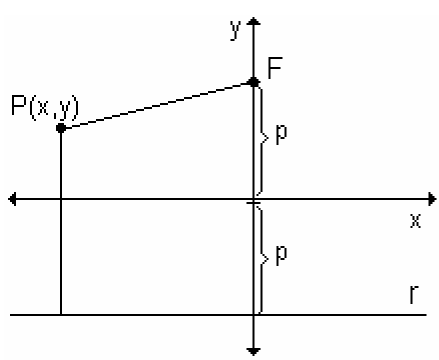
b) *respecto al eje de ordenadas*

$x = \dfrac{y^2}{4p} \Rightarrow x \in R, \forall\, y$ sabiendo que $p \neq 0 \Rightarrow -\infty < y < +\infty$

4) *Gráfica*



Segundo caso: Consideramos que el foco se encuentra sobre el eje de las ordenadas a una distancia p del origen, la directriz es perpendicular al eje de las ordenadas y se encuentra a una distancia p del origen.



Datos: F(0, p)
Directriz: la recta $y = -p$
P(x, y) punto genérico

Incógnita: ecuación de la parábola

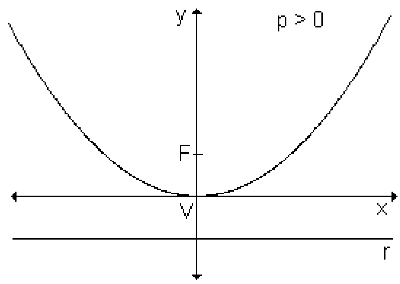
P(x, y) pertenece a la parábola $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ d(F, P) = d(P, r)

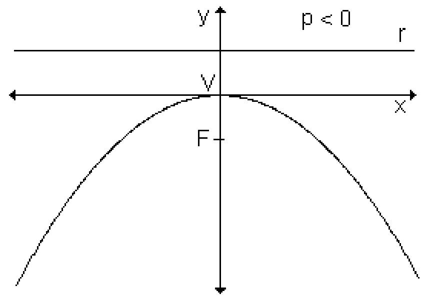
P(x, y) $\in$ parábola $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |\, y + p \,|$

$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$

Simplificando resulta $x^2 = 4py$ que es la ecuación de la parábola con eje focal coincidente con el eje de ordenadas.

Si realizamos la discusión de la ecuación de la parábola (a cargo del lector), resulta:





Observación: En las ecuaciones de la parábola no aparecen las dos variables elevadas al cuadrado y una de ellas tiene exponente uno. Esta variable nos indica sobre qué eje cartesiano está ubicado el foco y, por lo tanto, a qué eje es perpendicular la directriz.

Lado recto de la parábola: Es la cuerda focal perpendicular al eje focal. Su longitud es $|4p|$.

Ejemplo: Determine la ecuación de la parábola sabiendo que tiene vértice en el origen, su eje focal es el eje de abscisas y pasa por el punto $P(-4, 2\sqrt{10})$.

Como su vértice es el origen y el eje focal el eje de abscisas la ecuación es de la forma $y^2 = 4px$.

Como el punto $P(-4, 2\sqrt{10})$ le pertenece, sus coordenadas verifican la ecuación:

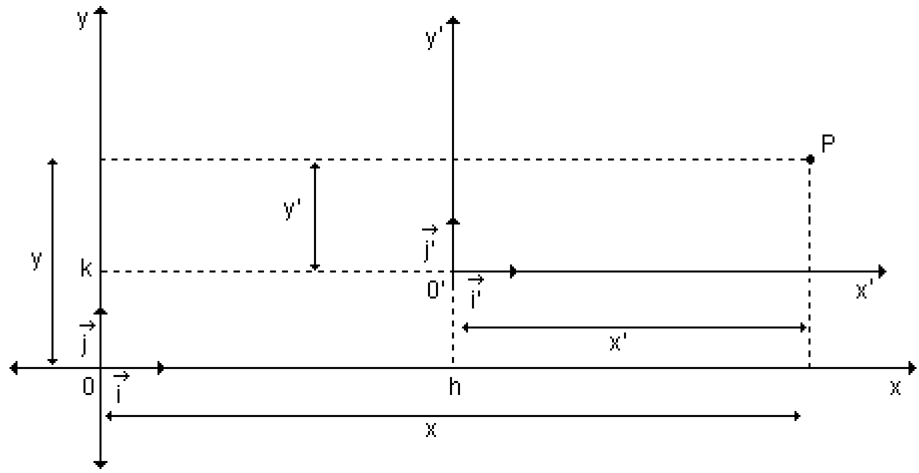
$(2\sqrt{10})^2 = 4p.(-4) \quad \Rightarrow \quad 40 = -16\,p \quad \Rightarrow \quad p = -\dfrac{5}{2}$.

Sustituyendo p en la ecuación resulta $y^2 = 4.\left(-\dfrac{5}{2}\right).x \quad \Rightarrow \quad y^2 = -10x$.

Traslación de ejes

La transformación de coordenadas es la operación por la cual se modifican las coordenadas de un punto que está referido a un cierto sistema coordenado, en las coordenadas del mismo punto pero con referencia a otro sistema. La misma operación se puede realizar con un lugar geométrico que es un conjunto de puntos. La ecuación de un lugar geométrico en un cierto sistema de referencia se transformará en otra ecuación del mismo lugar geométrico pero con respecto a otro sistema de referencia. De las transformaciones posibles, estudiamos sólo la traslación de ejes.

Trasladar un sistema de ejes cartesianos ortonormales $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ significa determinar otro sistema cartesiano ortonormal $\left(0', \vec{i'}, \vec{j'}\right)$ de ejes paralelos e igualmente orientados de los del sistema dado, que tenga por origen el punto 0 de coordenadas (h, k) en el sistema $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Consideremos el punto P referido a uno y otro sistema: P(x, y) en $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ y P(x, y) en $\left(0', \vec{i}', \vec{j}'\right)$.



Observemos las relaciones que se establecen entre las coordenadas de P en uno y otro sistema.

$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$ éstas son las fórmulas de transformación de coordenadas por traslación.

De igual manera podemos hacer una traslación de un lugar geométrico. En este caso, para todos y cada uno de los puntos del lugar geométrico deben verificarse las relaciones dadas.

Ecuaciones ordinarias de la parábola

Primer caso: Consideremos una parábola referida al sistema (0', x', y'),en el que el vértice es 0' y el eje focal el eje x'.

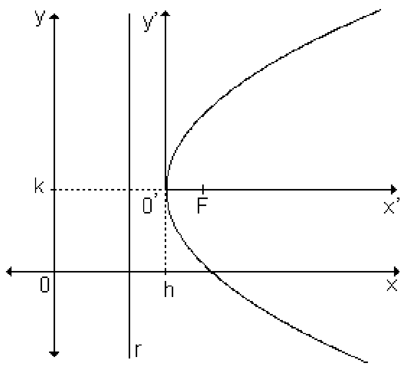
Su ecuación será: $y'^2 = 4px'$. Transformando las coordenadas al sistema de referencia (0, x, y) resulta $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

Esta es la *ecuación ordinaria* de la parábola de vértice V(h, k) y eje focal paralelo al eje de abscisas.

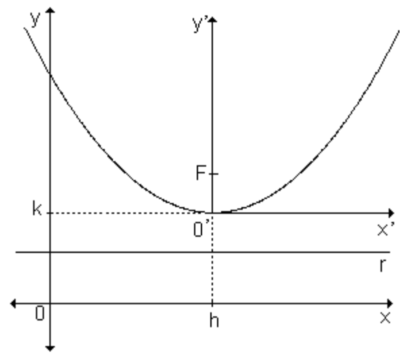
Elementos: vértice V(h, k); foco F(h + p, k); directriz la recta x = h – p.

Segundo caso: Consideramos una parábola referida al sistema (0', x', y') en el que el vértice coincide con 0' y el eje focal coincide con el eje y'. Su ecuación será: $x'^2 = 4py'$, trasladando y transformando las coordenadas en (0, x, y).

La expresión $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ es la *ecuación ordinaria* de la parábola de vértice V (h, k) y eje focal paralelo al eje de ordenadas.
Elementos: vértice V(h, k) ; foco F(h, k + p); directriz la recta $y = k - p$



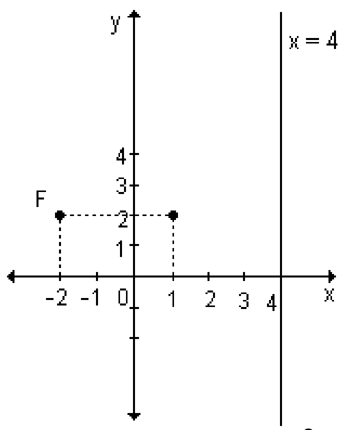
Primer caso



Segundo caso

Ejemplo: Halle la ecuación de la parábola cuyo foco es (–2, 2) y su directriz la recta $x - 4 = 0$.

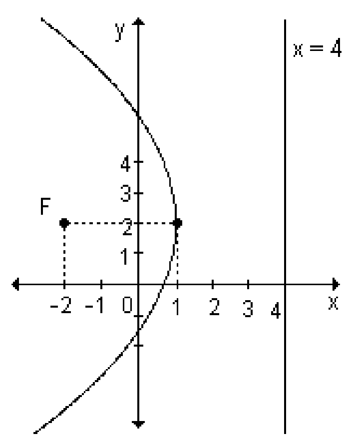
Graficando los datos resulta:



La ecuación buscada es de la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ donde el eje focal es paralelo al eje de abscisas y (h, k) son las coordenadas del vértice.

El punto medio entre el foco y la directriz es el vértice.
Observando el gráfico el punto es (1, 2).
Además, la distancia entre el foco y el vértice es el valor absoluto de p, o sea, $|p| = 3$. Como la parábola abre hacia la izquierda, p es negativo.

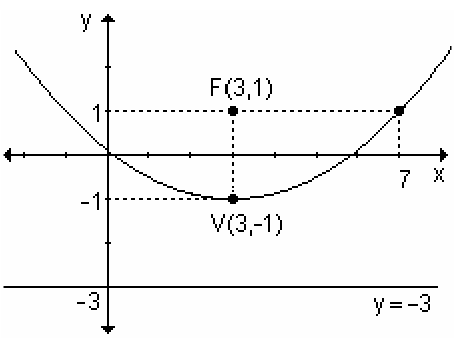
Reemplazando en $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ resulta:
$(y - 2)^2 = 4.(-3).(x - 1)$ y por lo tanto
$(y - 2)^2 = -12.(x - 1)$



Ejemplo: Determine la ecuación de la parábola cuyo eje focal es paralelo al eje de ordenadas, su vértice es el punto de intersección entre las rectas r_1 y r_2 definidas por $r_1: x + y - 2 = 0$ y $r_2: x + 3y = 0$. Además, pasa por el punto (7, 1). Grafique e indique sus elementos.

La ecuación buscada es de la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, donde (h, k) son las coordenadas del vértice. Para calcular las coordenadas del vértice hallamos la intersección de las rectas, resolviendo el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$.

Despejando de ambas ecuaciones x e igualando resulta:
$2 - y = -3y \Rightarrow 2y = -2 \Rightarrow y = -1$.
Reemplazando en la primera ecuación: $x - 1 - 2 = 0 \Rightarrow x = 3$.
El punto (3, –1) es el vértice de la parábola buscada y la recta x = 3 su eje focal.
Sustituyendo en $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ obtenemos $(x - 3)^2 = 4p(y + 1)$.
Además, pasa por (7, 1), por lo tanto, dicho punto satisface la igualdad:
$(7 - 3)^2 = 4p\,(1 + 1) \Rightarrow 4^2 = 4p.2 \Rightarrow 16 = 8p \Rightarrow p = 2$.
La ecuación buscada es $(x - 3)^2 = 8.(y + 1)$.
Su directriz es la recta $y = k - p$, es decir, $y = -3$.
Su foco es el punto $F(h, k+p) = F(3, -1+2) = F(3, 1)$.



En forma práctica, observando el gráfico, puede deducirse que la directriz es la recta perpendicular al eje focal ubicada $|p| = 2$ unidades más abajo del vértice y el foco es el punto ubicado $|p| = 2$ unidades más arriba del vértice sobre el eje focal.

Ejemplo: Encuentre la ecuación de la parábola sabiendo que su vértice es el centro de la circunferencia $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$ y su foco es el punto de intersección de las rectas $r_1: x + y = 0$ y $r_2: y + 2x = 3$. Grafique la curva obtenida.

El centro de la circunferencia, (3, –2), es el vértice de la parábola: V(3, –2).
Para hallar el punto de intersección entre las rectas resolvemos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2x = 3 \end{cases}$, por ejemplo, por sustitución. Despejando la variable x en la primera ecuación resulta $y = -x$ y sustituyendo en la segunda, resulta:

$$-x + 2x = 3 \Rightarrow x = 3$$

Reemplazando en $y = -x$ se obtiene $y = -3$.
Las coordenadas del foco son (3, –3).

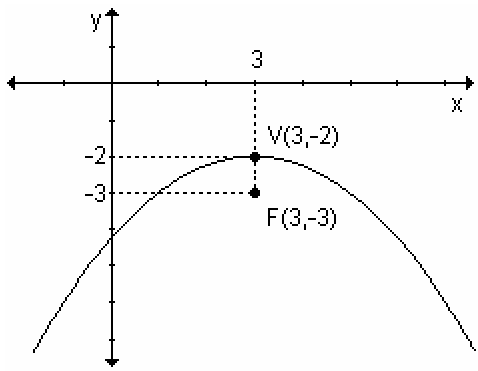
La distancia del foco al vértice es el valor absoluto de p. Es decir:

$|p| = d(F,V) = \sqrt{(3-3)^2 + (-2+3)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad |p| = 1$

La ecuación de la parábola que buscamos es de la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ donde p es negativo y (h, k) son las coordenadas del vértice. Entonces:

$(x - 3)^2 = 4.(-1).(y + 2) \quad \Rightarrow \quad (x - 3)^2 = -4.(y + 2)$

Gráficamente:



Ejemplo: Realice el estudio completo de la ecuación $2x + y^2 - 4 = 0$

Se siguen los pasos enunciados:

- *Intersección con los ejes coordenados*

Intersección con el eje de abscisas: reemplazamos la variable y por cero obteniendo $2x + 0^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Es decir, la gráfica corta al eje de abscisas en el punto P(2, 0).

Intersección con el eje de ordenadas: reemplazamos la variable x por cero y resulta: $2.0 + y^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 2, \quad y_2 = -2$

Es decir, la gráfica corta al eje de ordenadas en los puntos Q (0, 2) y R(0, –2).

- *Simetrías*

Con respecto al eje de abscisas: Reemplazando y por –y resulta:

$2x + (-y)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + y^2 - 4 = 0$ que es igual a la dada.

Por lo tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje de abscisas.

Con respecto al eje de ordenadas:

Reemplazando x por –x resulta: $2.(-x) + y^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x + y^2 - 4 = 0$ que no es igual a la dada. Por lo tanto, la gráfica no es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Con respecto al origen de coordenadas: Reemplazamos x por –x e y por –y resulta: $2.(-x) + (-y)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x + y^2 - 4 = 0$ que no es igual a la dada. Concluimos que la gráfica no es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

- *Extensión*

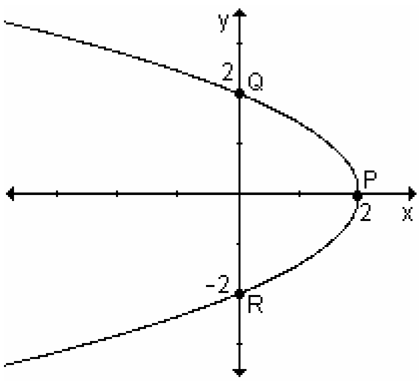
Con respecto al eje de abscisas: despejando la variable y, resulta:

$y = \pm\sqrt{4-2x}$. Para que la raíz sea un número real, el radicando debe ser positivo o nulo. Por lo tanto, $4 - 2x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -2x \geq -4 \quad \Rightarrow \quad x \leq 2$

Con respecto al eje de ordenadas: despejando la variable x, obtenemos:

$x = \dfrac{4-y^2}{2}$. La variable y puede tomar cualquier valor real: $-\infty < y < +\infty$.

- *Gráfica*



Se trata de una parábola de ecuación: $y^2 = -2(x - 2)$ cuyo vértice es el punto V(2, 0) y eje focal coincidente con el eje de abscisas.

EJERCICIOS

1) Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y de la recta $x = -\frac{3}{2}$.

2) Obtenga la ecuación de la parábola de eje focal en el eje de ordenadas, vértice en el origen de coordenadas y tal que el punto $\left(-\frac{3}{2}, -3\right)$ le pertenece.

3) Encuentre la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (–1, 2) y cuyo foco es $\left(-\frac{5}{4}, 2\right)$.

4) Determine la ecuación de la parábola de vértice en el punto (1, –4) y eje de simetría paralelo al eje y. Se sabe además que una de sus intersecciones con el eje x es el punto (5, 0).

5) El foco de una parábola coincide con el centro de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 10y - 75 = 0$ y su lado recto tiene la misma medida que el radio de la circunferencia. Halle la ecuación de la parábola si se sabe que su eje focal es paralelo al eje de abscisas y se abre hacia la derecha. Grafique.

6) Obtenga:

a) la ecuación de la parábola cuyo eje focal es paralelo al eje de ordenadas, su intersección con el eje de ordenadas es 3 y su vértice coincide con el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.

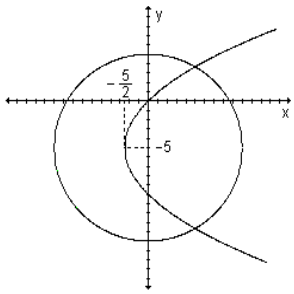
b) la ecuación de la recta que une el vértice de la parábola hallada en **a)** con el punto (2, 4). Grafique la parábola, la circunferencia y la recta en un mismo sistema de coordenadas cartesianas.

RESPUESTAS

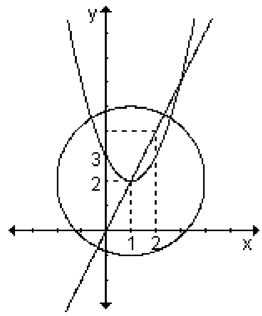
1) $y^2 = 6x$ **2)** $x^2 = -\frac{3}{4}y$ **3)** $(y-2)^2 = -x-1$

4) $(x-1)^2 = 4(y+4)$

5) $(y+5)^2 = 10\left(x+\frac{5}{2}\right)$



6)a) $(x-1)^2 = y-2$ **b)** $y = 2x$



Condición necesaria y suficiente de existencia de parábola

Partiendo de la ecuación ordinaria de la parábola, la desarrollamos y comparamos con una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ para determinar las condiciones que debe cumplir para representar una parábola.

Primer Caso: Eje focal paralelo al eje de abscisas

- *Condición necesaria*: $A = 0$ y $C \neq 0$
- *Condición suficiente*: $D \neq 0$

Si el coeficiente de la variable de primer grado es nulo ($D = 0$), resultan dos rectas paralelas, dos rectas coincidentes ó ningún lugar geométrico.

Segundo Caso: Eje focal paralelo al eje de ordenadas

- *Condición necesaria*: $A \neq 0$ y $C = 0$
- *Condición suficiente*: $E \neq 0$

Si $E = 0$ puede ocurrir que resulten:
- dos rectas paralelas
- dos rectas coincidentes
- ningún lugar geométrico

Conclusión:

La condición necesaria para que la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente una parábola es que uno de los coeficientes de las variables cuadráticas sea nulo y el otro no. La condición suficiente es que el coeficiente de la variable de primer grado que corresponde al coeficiente de la variable cuadrática nula sea distinto de cero.

Ejemplo: Dadas las siguientes ecuaciones incompletas de segundo grado determine a qué lugar geométrico corresponden:

a) $y^2 - 8x - 2y + 25 = 0$

b) $x^2 - 2x - 8y + 25 = 0$
c) $3x^2 + 6x - 9 = 0$
d) $2x^2 + x + 3 = 0$

La condición necesaria para que una ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente una parábola es que A y C no sean simultáneamente nulos pero sí uno de ellos. Completamos cuadrados en cada caso para determinar qué lugar geométrico representan.
En **(a)** resulta: $y^2 - 2y = 8x - 25 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2y + 1^2 - 1^2 = 8x - 25 \quad \Rightarrow$
$(y-1)^2 = 8x - 24 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2 = 8(x-3)$ que es una parábola con eje focal paralelo al eje de abscisas.

En **(b)** obtenemos: $x^2 - 2x = 8y - 25 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 = 8y - 25 \quad \Rightarrow$
$(x-1)^2 = 8y - 24 \Rightarrow \quad (x-1)^2 = 8.(y-3)$ que es una parábola con eje focal paralelo al eje de ordenadas.

En **(c)** se cumple la condición necesaria $A \neq 0$ y $C = 0$ pero no la condición suficiente pues $E = 0$.

Resolviendo se obtiene: $x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.3.(-9)}}{6} = \dfrac{-6 \pm 12}{6}$ de donde resultan las rectas paralelas $x = 1$, $x = -3$.
En **(d)** sucede lo mismo que en el caso anterior. Se verifica la condición necesaria pero no la suficiente ya que $E = 0$.

Resolviendo resulta: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.2.3}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-23}}{4}$.
Como el discriminante es negativo, no representa ningún lugar geométrico.

EJERCICIO
Observando la ecuación general incompleta de segundo grado, determine a qué lugar geométrico puede corresponder. Justifique. Reduzca a la forma ordinaria y, de ser posible, determine los elementos.

a) $y^2 + 4x - 4y + 2 = 0$ **b)** $x^2 - 6x + 8y + 9 = 0$ **c)** $y^2 + 2y - 3 = 0$

RESPUESTA
Las ecuaciones cumplen la condición necesaria para ser una parábola ya que uno de los coeficientes de las variables cuadráticas es nulo y el otro no.

a) La ecuación es $(y-2)^2 = -4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$, parábola de eje focal $y = 2$, vértice $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ y foco $\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$.

b) La ecuación es $(x-3)^2 = -8y$, parábola de eje focal $x = 3$, vértice $(3, 0)$ y foco $(3, -2)$.
c) Como el coeficiente del término lineal que corresponde al coeficiente de la variable cuadrática nulo también es nulo, resultan dos rectas paralelas de ecuación $y = 1$ e $y = -3$.

Intersección entre recta y parábola

Se debe resolver el sistema:
$\begin{cases}(y-k)^2 = 4p(x-h)\\ ax+by+c=0\end{cases}$ o bien $\begin{cases}(x-h)^2 = 4p(y-k)\\ ax+by+c=0\end{cases}$ de la misma manera que se procedió para calcular la intersección entre recta y circunferencia.

Ejemplo: Sea la ecuación de la parábola $y + 3 = x^2$ y las rectas $r_1 : x - y - 1 = 0$, $r_2 : x + y + 4 = 0$ y $r_3 : 2x - y - 4 = 0$. Determine analítica y gráficamente, si existen, los puntos de intersección de la cónica con cada una de las rectas. Grafique.

Planteamos un sistema de ecuaciones de la cónica con cada recta.

Con r_1 resulta: $\begin{cases} y+3=x^2\\ x-y-1=0\end{cases}$. Lo resolvemos por igualación despejando de cada ecuación la variable y: $x^2 - 3 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos: $x_1 = 2$ o $x_2 = -1$.

Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones resulta $y_1 = 1$ o $y_2 = -2$.

Es decir, los puntos de intersección son $P_1\ (2, 1)$ y $P_2\ (-1, -2)$. La recta r_1 es secante a la parábola.

Para hallar la intersección con r_2 planteamos el sistema $\begin{cases} y+3=x^2\\ x+y+4=0\end{cases}$.

Procediendo de manera similar resulta:

$x^2 - 3 = -4 - x \Rightarrow x^2 - 3 = -4 - x \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$

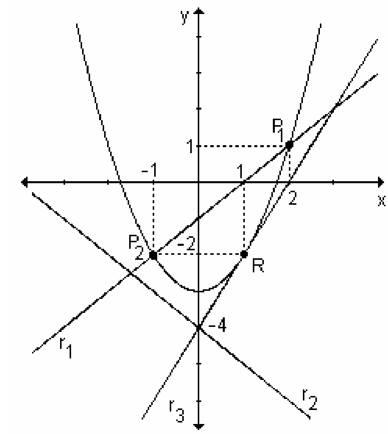
Resolviendo: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.1}}{2.1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

Como el discriminante es negativo, no existe intersección. La recta r_2 es exterior a la parábola.

Para hallar la intersección con r_3 planteamos el sistema $\begin{cases} y+3=x^2\\ 2x-y-4=0\end{cases}$.

Procediendo de manera análoga, resulta: $x^2 - 3 = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$.

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos $x_1 = x_2 = 1$.
Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones resulta $y_1 = y_2 = -2$.
El punto de intersección es R(1, –2).
La recta r_3 es tangente a la parábola.



EJERCICIOS

1) Halle analítica y gráficamente la intersección de la curva $4 - y = (x - 2)^2$ con la recta $x - y = 0$.

2) ¿Para qué valores de k la recta $y = 2x + k$, corta a la parábola $y = x^2 - 4$:

a) en dos puntos?
b) en un solo punto?
c) en ningún punto?

3) Obtenga:

a) la ecuación de la parábola de vértice en el punto (1, –4) y eje de simetría paralelo al eje y. Se sabe además que una de sus intersecciones con el eje x es el punto (5, 0),

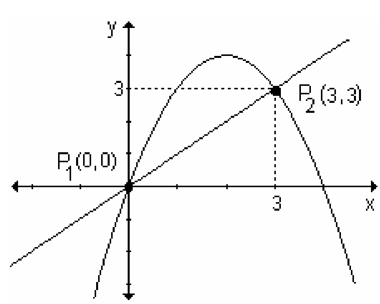
b) la ecuación de la recta paralela a $y - x = 0$ que pasa por el punto $Q\left(6, \frac{9}{4}\right)$,

c) las intersecciones de los lugares geométricos obtenidos en los ítems **a)** y **b)** y represente gráficamente.

4) Una cuerda de la parábola $y^2 = 4x$ pertenece a la recta $x - 2y + 3 = 0$. Calcule la longitud de dicha cuerda.

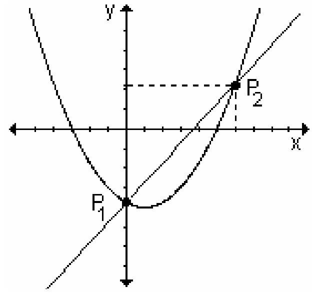
RESPUESTAS

1) $P_1(0, 0)$ y $P_2(3, 3)$



2)a) $k > -5$ **b)** $k = -5$ **c)** $k < -5$

3)a) $(x-1)^2 = 4(y+4)$



b) $4x - 4y - 15 = 0$

c) $P_1\left(0,-\dfrac{15}{4}\right), P_2\left(6,\dfrac{9}{4}\right)$

4) Longitud de la cuerda $= \sqrt{80}$

EJERCICIOS INTEGRADORES 4.2 PARÁBOLA

1) Halle la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos (–4, 3) y (–1, 3), respectivamente. Determine las ecuaciones de la directriz y su eje focal.
2) La directriz de una parábola es la recta $y - 1 = 0$ y su foco es el punto (4, –3). Obtenga la ecuación de la parábola y las coordenadas del vértice.
3) Determine la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (0, 3) y la directriz es la recta $x + 5 = 0$. Escriba las coordenadas del foco y la ecuación del eje focal.
4) Escriba la ecuación ordinaria correspondiente a $y^2 + 2y + 4x - 15 = 0$, determine a qué lugar geométrico corresponde y, de ser posible, los elementos.
5) Encuentre, si es que existe, él ó los puntos de intersección entre la recta $y + 2x = 3$ y la parábola $(y-3)^2 = 8x$.

Ecuaciones paramétricas

Como en el caso de la circunferencia se intenta encontrar un parámetro t que permita expresar cada punto (x, y) de la parábola como función de él. Se buscan las ecuaciones $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$ de manera tal que para cada valor de t se obtenga un par (x, y) que verifique la ecuación de la parábola dada. Si consideramos, por ejemplo, la parábola $y^2 = 4px$ y tomamos una de las variables como parámetro, las ecuaciones $\begin{cases} x = t \\ y^2 = 4pt \end{cases}$ $t \in R$, o bien $\begin{cases} y = t \\ x = \dfrac{t^2}{4p} \end{cases}$ $t \in R$, constituyen la representación paramétrica.

De la misma forma se enuncian para la ecuación $x^2 = 4py$.

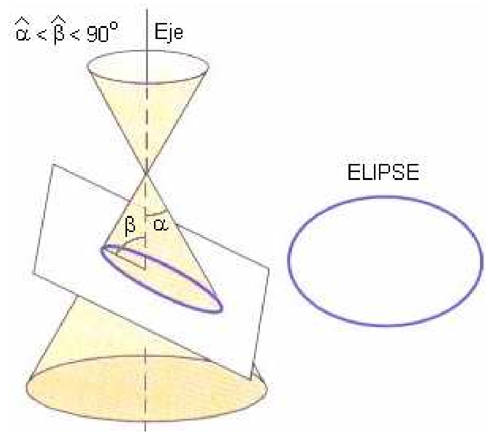
Tomamos una de las variables como parámetro y las ecuaciones $\begin{cases} y = t \\ x^2 = 4pt \end{cases}$, $t \in R$ o bien $\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{4p} \end{cases}$, $t \in R$, constituyen la *representación paramétrica.*

GUÍA DE ESTUDIO DE TEORÍA N° 5: PARÁBOLA

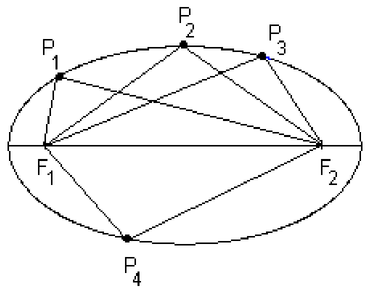
1) Defina parábola como lugar geométrico.
2) Exprese simbólicamente la definición anterior.
3) ¿A qué llamamos ecuaciones canónicas?
4) Deduzca las ecuaciones canónicas.
5) Realice la discusión completa de las ecuaciones deducidas en **(4)**.
6) Defina los elementos de la parábola si:
   a) el eje focal coincide con el eje x,
   b) el eje focal coincide con el eje y.
7) Defina lado recto de la parábola. Obtenga una fórmula para su cálculo.
8) Deduzca la ecuación ordinaria de la parábola si:
   a) el eje focal paralelo al eje x,
   b) el eje focal paralelo al eje y.
9) Determine los elementos de las parábolas deducidas en **(8)**.
10) Enuncie y demuestre:
   a) la condición necesaria,
   b) la condición suficiente para que una ecuación de la forma:
$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente una parábola.
11) ¿Cómo se realiza la intersección de una recta y una parábola?
12) Deduzca las ecuaciones paramétricas de la parábola.

4.3 Elipse

La elipse se obtiene intersecando una de las hojas de la superficie cónica con un plano inclinado.



Definición: Es el lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen con la condición de que la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados *focos* se mantiene constante y mayor que la distancia entre ellos.
El eje que contiene a los focos se llama *eje focal* e interseca a la elipse en dos puntos llamados *vértices principales*.
El punto medio entre los focos es el centro de la elipse. El eje que contiene al centro y es perpendicular al eje focal se llama *eje normal* y corta a la elipse en dos puntos llamados *vértices secundarios*.



$P(x, y) \in$ elipse $\Leftrightarrow d(F_1, P) + d(F_2, P) =$ cte

F_1 y F_2: focos

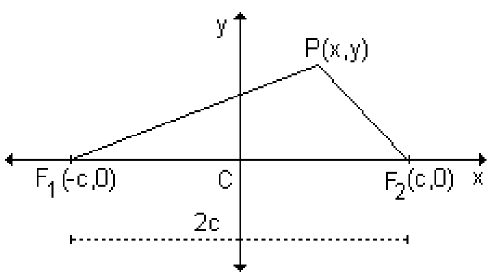
$d(F_1, F_2)$: distancia focal

C: centro de la elipse, punto medio del segmento $\overline{F_1 F_2}$

Ecuaciones canónicas de la elipse

Son aquellas que se obtienen cuando la elipse está referida a un sistema cartesiano ortogonal, su centro coincide con el origen de coordenadas y el eje focal con uno de los ejes coordenados.

Primer Caso:



Datos:
Centro C coincide con el origen.

F_1 y F_2 en el eje x $\Rightarrow$ $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ son los *focos*.

$P(x, y)$ punto genérico de la elipse.

Incógnita: ecuación de la elipse

$P(x, y) \in$ elipse $\Leftrightarrow d(F_1, P) + d(F_2, P) = k = 2a$; $d(F_1, F_2) = 2c$, $2a > 2c \Leftrightarrow a > c$, donde k, a y c son números reales positivos.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado a ambos miembros:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dividiendo ambos miembros por 4, resulta: $xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Elevando al cuadrado: $x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2\left(x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right)$

$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + y^2a^2$
$c^2x^2 - a^2x^2 - y^2a^2 = a^2c^2 - a^4$

Multiplicando ambos miembros por –1: $a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$

Sacando factor común: $x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$

Como $a > c \Rightarrow a^2 > c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 > 0$.

Llamando b^2 a la expresión $a^2 - c^2$ resulta $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ y dividiendo por a^2b^2 obtenemos la expresión $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que es la *ecuación canónica* de la elipse con eje focal coincidente con el eje de abscisas.

Discusión de la ecuación de la elipse

Sea la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y G su gráfica.

1) *Intersección con los ejes*

a) $G \cap$ eje x $\Rightarrow y = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a \Rightarrow \begin{cases} V_1(-a, 0) \\ V_2(a, 0) \end{cases} \text{ Vértices principales}$$

b) $G \cap$ eje y $\Rightarrow x = 0$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm b \Rightarrow \begin{cases} V_3(0, -b) \\ V_4(0, b) \end{cases} \text{ Vértices secundarios}$$

2) *Simetrías*: Como las dos variables están elevadas al cuadrado, la elipse tiene simetría total (con respecto al eje de abscisas, con respecto al eje de ordenadas y con respecto al origen).

3) *Extensión:*

a) *respecto al eje de abscisas*: $y = f(x)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right) \Rightarrow$$

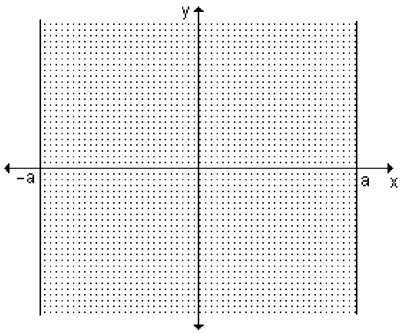
$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Pero $y \in R$ siempre que $a^2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq x^2 \Rightarrow |x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

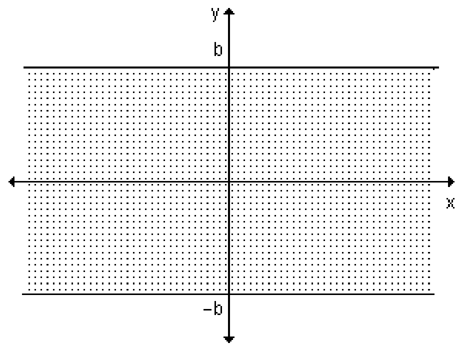
b) *respecto al eje de ordenadas:* $x = f(y)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}=\frac{b^2-y^2}{b^2} \Rightarrow x^2=\frac{a^2}{b^2}\left(b^2-y^2\right) \Rightarrow x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$$

Pero para que $x \in R$ debe ser $b^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 \geq y^2 \Rightarrow |y| \leq b \Rightarrow -b \leq y \leq b$

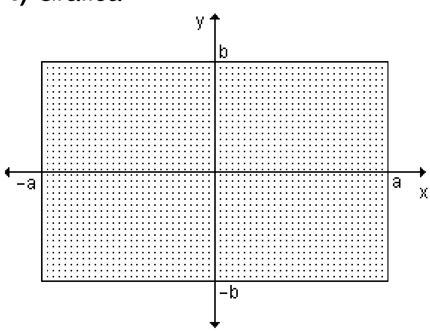


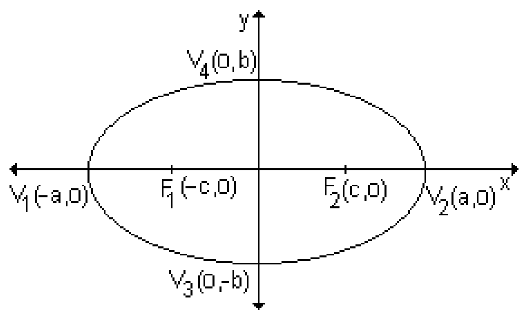
Extensión sobre el eje x



Extensión sobre el eje y

4) *Gráfica*



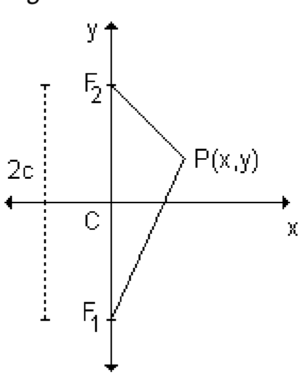


Sector en el que queda la gráfica

Lado recto: se llama así al segmento de cuerda perpendicular al eje focal que contiene a un foco.

La longitud del lado recto se calcula mediante la fórmula $\dfrac{2b^2}{a}$

Segundo Caso:

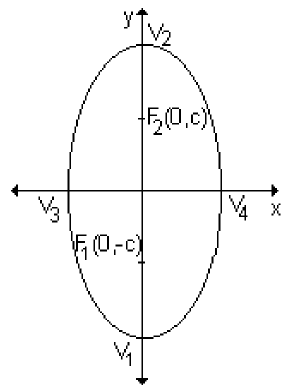


Datos:
Centro C coincide con el origen.
F_1 y F_2 en el eje y $\Rightarrow$ $F_1(0, -c)$ y $F_2(0, c)$ son los *focos*
P(x, y) punto genérico de la elipse.
Incógnita: ecuación de la elipse

$P(x,y) \in$ elipse $\Leftrightarrow d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$

Razonando de manera similar al primer caso, se obtiene: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ que es la *ecuación canónica* de la elipse con eje focal coincidente con el eje de ordenadas.

El estudio completo de la ecuación queda a cargo del lector.



Excentricidad: Es el número que expresa la razón entre la distancia focal y la distancia entre los vértices principales.

La excentricidad se calcula con la fórmula $e=\frac{c}{a}$ y en el caso de la elipse resulta menor que uno.

Ejemplo: Halle la ecuación de la elipse sabiendo que sus focos son los puntos $F_1(-3, 0)$ y $F_2(3, 0)$ y su excentricidad es $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Sabemos que el punto medio entre los focos es el centro, en este caso el centro es el origen y el eje focal es el eje de abscisas, entonces su ecuación es de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. La distancia entre los focos es 2c, en este caso $2c = 6$ entonces $c = 3$. La excentricidad es $e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{a}=\frac{3\sqrt{13}}{13} \Rightarrow 3=\frac{3\sqrt{13}}{13}a \Rightarrow$

$a=\frac{13}{\sqrt{13}}$ y racionalizado es $a = \sqrt{13}$.

Además $c^2 = a^2 - b^2$. Reemplazando se obtiene:

$3^2 = \sqrt{13}^{\,2} - b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 13 - 9 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 4$

Sustituyendo en la ecuación de la elipse resulta $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{4}=1$.

Ejemplo: Dada la ecuación $9\rho^2 (\text{sen}^2\,\theta + 4\cos^2\theta) = 36$ en coordenadas polares, escríbala en coordenadas cartesianas. ¿De qué tipo de curva se trata? Grafique.

Sabemos que: $\rho^2 = x^2 + y^2$

$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \quad \Rightarrow \quad x = \rho\cos\theta$

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{\rho} \quad \Rightarrow \quad y = \rho \text{ sen}\theta$$

Aplicando propiedad distributiva y reemplazando resulta:

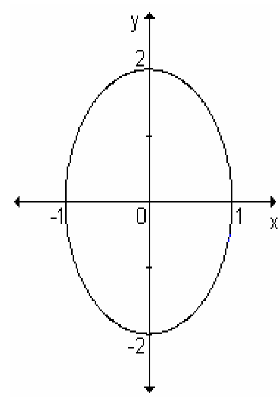
$9\,\rho^2 \text{ sen}^2\,\theta + 36\rho^2 \cos^2\theta = 36$

$9\,y^2 + 36\,x^2 = 36.$

Dividiendo ambos miembros por 36 se obtiene:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

Se trata de una elipse con centro en el origen de coordenadas, con eje focal en el eje de ordenadas.



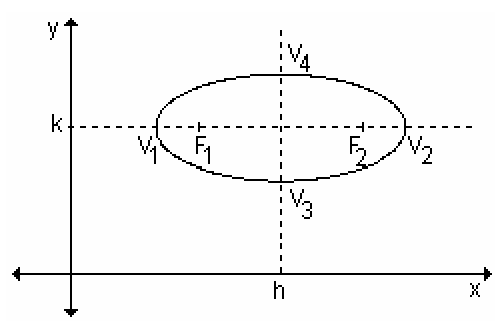
Ecuaciones ordinarias de la elipse

Teniendo en cuenta la traslación de ejes resulta:

Primer Caso

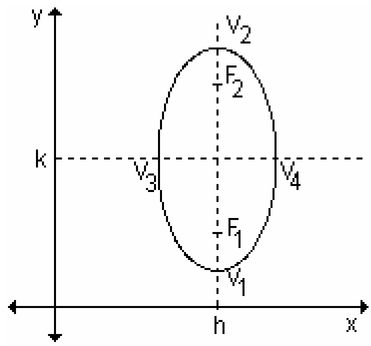
La expresión $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ es la *ecuación ordinaria* de la elipse de centro (h, k) y eje focal paralelo al eje de abscisas.

Elementos:
Centro: C(h, k)
Vértices principales:
$V_1(h - a, k)$ y $V_2(h + a, k)$
Vértices secundarios:
$V_3(h, k - b)$ y $V_4(h, k + b)$
Focos: $F_1(h - c, k)$ y $F_2(h + c, k)$



Segundo Caso

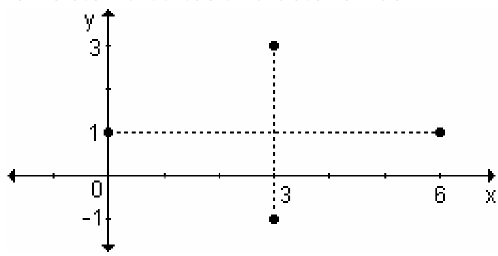
La expresión $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ es la *ecuación ordinaria* de la elipse de centro (h, k) y eje focal paralelo al eje de ordenadas.



Elementos:
Centro: C(h, k)
Vértices principales:
$V_1(h, k - a)$ y $V_2(h, k + a)$
Vértices secundarios:
$V_3(h - b, k)$ y $V_4(h + b, k)$
Focos: $F_1(h, k - c)$ y $F_2(h, k + c)$

Ejemplo: Determine la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (0, 1); (6, 1); (3, –1) y (3, 3). Grafique.

Ubicando los vértices en un sistema cartesiano obtenemos:

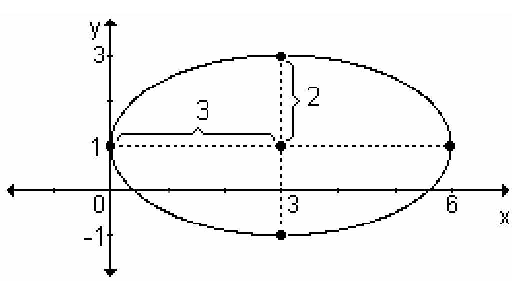


Se trata de una elipse cuyo eje focal es paralelo al eje de abscisas, por lo tanto, su ecuación es de la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, donde (h, k) son las coordenadas del centro.

Los puntos (0, 1) y (6, 1) son sus vértices principales y la distancia entre ellos es 6. O sea $2a = 6 \quad \Rightarrow \quad a = 3$.
Los puntos (3, –1) y (3, 3) son sus vértices secundarios y la distancia entre ellos es 4. Por lo tanto $2b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 2$.
El punto medio entre cada par de vértices es el centro entonces C(3, 1).

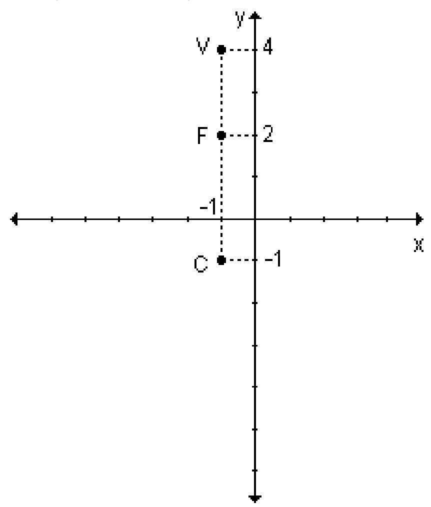
Por lo tanto la ecuación buscada es: $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

Gráficamente:



Ejemplo: Halle la ecuación de la elipse cuyo centro es el punto (–1, –1), uno de sus focos es (–1, 2) y uno de sus vértices es (–1, 4). Grafique.

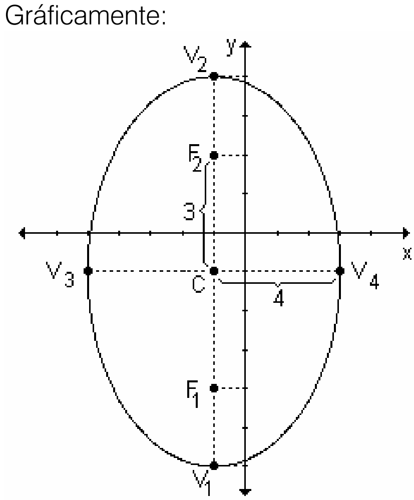
Ubiquemos los puntos dados en un sistema cartesiano.



La ecuación buscada es de la forma $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, donde (h, k) son las coordenadas del centro. Su eje focal, paralelo al eje de las ordenadas, es la recta x = –1.
Sabemos que la distancia entre el centro y cada foco es el valor de c. Por lo tanto, c = 3.
Según la gráfica (–1, 4) es uno de sus vértices principales. La distancia entre cada vértice principal y el centro es el valor de a, entonces a = 5.
Reemplazando los valores de a y c en $c^2 = a^2 - b^2$ resulta: $3^2 = 5^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 25 - 9 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

La ecuación de la elipse es: $\frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$

Gráficamente:



Los demás elementos de la elipse:
V_1 (–1, –6) es el otro vértice principal,
V_3 (–5, –1) y V_4 (3, –1) son los vértices secundarios y F_1 (–1, –4) es el otro foco.

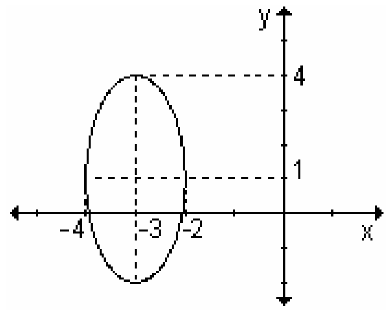
EJERCICIOS

1) Determine la ecuación de la elipse de centro el origen de coordenadas y tal que dos de sus vértices son los puntos $V_1(0, -3)$ y $V_2(2, 0)$.
2) Halle la ecuación de la elipse de centro (0, 0), vértice (–3, 0) y foco (0, 4).
3) Obtenga la ecuación de la elipse de centro en el punto (3, –1) que es tangente a la recta y – 1 = 0 y al eje de ordenadas.

4) Halle la ecuación de la elipse cuyo centro es el punto (1, –1) y es tangente a la recta $y = 3$ y a la recta $x = –1$. Grafique.

5) Encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos P(1, 1) y Q(1, –1) y uno de sus vértices principales es V(1, 4). Grafique.

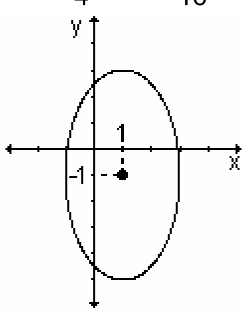
6) Deduzca la ecuación de segundo grado y determine las coordenadas de los focos de la elipse cuya representación gráfica es:

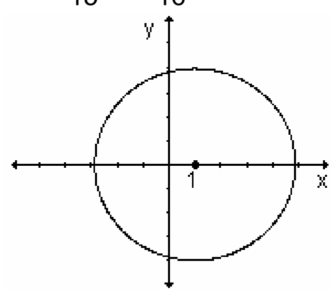


RESPUESTAS

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ **2)** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ **3)** $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

4) $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$ **5)** $\frac{(x-1)^2}{15}+\frac{y^2}{16}=1$





6) $(x+3)^2+\frac{(y-1)^2}{9}=1$; $F_1\left(-3,1-\sqrt{8}\right)$ $F_2\left(-3,1+\sqrt{8}\right)$

Condición necesaria y suficiente de existencia de elipse

Condición necesaria: para determinarla desarrollamos la ecuación

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ y comparamos los valores con los de la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

La condición necesaria para que la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente una elipse es que los coeficientes de las variables cuadráticas sean de igual signo y de distinto valor absoluto.

Condición suficiente: considerando la condición necesaria y completando cuadrados en $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ resulta $A(x-h)^2 + C(y-k)^2 = M$.
Para la condición necesaria, signo A = signo C. Si ambos fuesen negativos, multiplicamos la expresión $A(x-h)^2 + C(y-k)^2 = M$ por (–1), y el primer miembro se transformará en positivo. Analizando el valor de M obtenemos conclusiones respecto al lugar geométrico que representa.

- Si M es positivo representa una elipse.
- Si M es nulo es el punto $\left(-\dfrac{D}{2A}, -\dfrac{E}{2C}\right)$.
- Si M es negativo no representa ningún lugar geométrico.

Conclusión: La condición necesaria y suficiente para que una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente una elipse es que los coeficientes de las variables cuadráticas sean de igual signo (y de distinto valor absoluto) y que el término independiente, luego de completar cuadrados y pasado al segundo miembro, sea mayor que cero (siendo el primer miembro positivo).

Ejemplo: Dadas las siguientes ecuaciones generales incompletas de segundo grado indique qué lugar geométrico representan cada una:

a) $25x^2 + 16y^2 - 64y - 336 = 0$
b) $25x^2 + 16y^2 - 64y + 64 = 0$
c) $25x^2 + 16y^2 - 64y + 100 = 0$

La condición necesaria para que una ecuación $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente una elipse es que el signo de A y de C sean iguales pero A y C sean de distinto valor absoluto.
Para determinar el lugar geométrico que representan completamos cuadrados.
En **(a)** resulta:
$25x^2 + 16(y^2 - 4y) = 336 \Rightarrow 25x^2 + 16(y^2 - 4y + 2^2 - 2^2) = 336 \Rightarrow$
$25x^2 + 16((y-2)^2 - 4) = 336 \Rightarrow 25x^2 + 16(y-2)^2 - 64 = 336 \Rightarrow$
$25x^2 + 16(y-2)^2 = 400$.
Como el término independiente, luego de completar cuadrados, es positivo, la ecuación representa una elipse. Dividiendo a ambos miembros por dicho valor obtenemos que su ecuación es $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1$.
Procediendo de manera similar al caso anterior, en **(b)** resulta:
$25x^2 + 16(y^2 - 4y) = -64 \Rightarrow 25x^2 + 16(y-2)^2 - 64 = -64 \Rightarrow$
$25x^2 + 16(y-2)^2 = 0$.
Como el término independiente, luego de completar cuadrados, es nulo, la ecuación representa el punto P(0, 2).
Y en **(c)** surge:
$25x^2 + 16(y^2 - 4y) = -100 \Rightarrow 25x^2 + 16(y-2)^2 - 64 = -100 \Rightarrow$
$25x^2 + 16(y-2)^2 = -36$

Como el término independiente, luego de completar cuadrados, es negativo, la ecuación no representa ningún lugar geométrico.

EJERCICIO

Explique si las siguientes ecuaciones cumplen la condición necesaria para ser una elipse. Encuentre la ecuación canónica completando cuadrados y determine si verifican la condición suficiente.

a) $3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 4 = 0$

b) $x^2 + 2y^2 + x - 4y + \frac{9}{4} = 0$

RESPUESTA

a) Cumple la condición necesaria pues los coeficientes de los términos cuadráticos son positivos (3 y 4). Completando cuadrados se obtiene la ecuación: $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1$. Se cumple la condición suficiente ya que el término independiente es mayor que 0. Se trata de una elipse.

b) Cumple la condición necesaria pues los coeficientes de los términos cuadráticos son positivos (1 y 2). Completando cuadrados se obtiene la ecuación: $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{2} + (y-1)^2 = 0$. Como el término independiente es cero, la ecuación no cumple la condición suficiente para ser elipse. Se trata del punto $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

Intersección de recta y elipse

Para encontrar las intersecciones debemos trabajar como se hizo con recta y circunferencia.

Ejemplo: Dada la ecuación de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ y de la recta $y = x + k$, determine el ó los valores de k para los cuales la recta es tangente, secante o exterior a la cónica.

Planteamos la intersección entre la recta y la cónica, es decir, el sistema

$$\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 \\ y = x + k \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por sustitución reemplazando en la ecuación de la elipse y por $x + k$: $9x^2 + 4\,(x + k)^2 = 36 \Rightarrow 9x^2 + 4\,(x^2 + 2xk + k^2) = 36 \Rightarrow$
$9x^2 + 4x^2 + 8xk + 4k^2 - 36 = 0 \Rightarrow \quad 13x^2 + 8k\,x + (4k^2 - 36) = 0$

La posición de la recta con respecto a la cónica dependerá del número de soluciones de la ecuación cuadrática obtenida. Planteamos el discriminante:

$\Delta = (8k)^2 - 4.13.\,(4k^2 - 36) \Rightarrow \Delta = 64\,k^2 - 208\,k^2 + 1872 \Rightarrow$

$\Delta = -144\,k^2 + 1872$

Se pueden presentar tres situaciones:

• Si el discriminante es nulo, habrá una única intersección, es decir, la recta será tangente a la elipse.

$\Delta = 0 \Rightarrow -144\,k^2 + 1872 = 0 \Rightarrow k^2 = 13 \Rightarrow k = \sqrt{13}$ ó $k = -\sqrt{13}$

• Si el discriminante es positivo, habrá dos intersecciones, es decir, la recta será secante a la elipse.

$\Delta > 0 \Rightarrow -144\,k^2 + 1872 > 0 \Rightarrow -144\,k^2 > -1872 \Rightarrow k^2 < (-1872):(-144) \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 < 13 \Rightarrow -\sqrt{13} < k < \sqrt{13}$

• Si el discriminante es negativo, no habrá intersección, es decir, la recta será exterior a la elipse.

$\Delta < 0 \Rightarrow -144\,k^2 + 1872 < 0 \Rightarrow -144\,k^2 < -1872 \Rightarrow k^2 > (-1872):(-144) \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 > 13 \Rightarrow k < -\sqrt{13}$ o $k > \sqrt{13}$

Ejemplo: Sea la ecuación de la elipse $\dfrac{(y-3)^2}{16} + (x+2)^2 = 1$ y de las rectas r_1 : $4x + y + 1 = 0$ y r_2 : $x - y - 2 = 0$. Determine los puntos de intersección, si existen, entre la cónica y cada una de las rectas. Grafique.

Planteamos y resolvemos en cada caso un sistema de ecuaciones entre la cónica y la recta.

En primer lugar: $\begin{cases} \dfrac{(y-3)^2}{16} + (x+2)^2 = 1 \\ 4x + y + 1 = 0 \end{cases}$.

Despejamos la variable y de la segunda ecuación: $y = -1 - 4x$, sustituimos en la primera y resolvemos:

$$\frac{(-1-4x-3)^2}{16} + (x+2)^2 = 1 \Rightarrow \frac{(-4-4x)^2}{16} + (x+2)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{16 + 32x + 16x^2}{16} + x^2 + 4x + 4 = 1.$$

Multiplicamos ambos miembros por 16:

$16 + 32x + 16x^2 + 16x^2 + 64x + 64 - 16 = 0 \Rightarrow 32x^2 + 96x + 64 = 0.$

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos que $x_1 = -1$ o $x_2 = -2$.

Reemplazando los valores de x en $y = -1 - 4x$ resulta: $y_1 = 3$, $y_2 = 7$.

Es decir, que r_1 es secante a la elipse pues la corta en dos puntos P_1 $(-1, 3)$ y P_2 $(-2, 7)$.

Para hallar la intersección de la cónica con la otra recta planteamos el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{(y-3)^2}{16} + (x+2)^2 = 1 \\ x - y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x - 2 \end{cases}$$

Para resolverlo procedemos de manera similar, obteniendo:

$$\frac{(x-2-3)^2}{16} + (x+2)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \frac{(x-5)^2}{16} + (x+2)^2 = 1 \;\Rightarrow$$

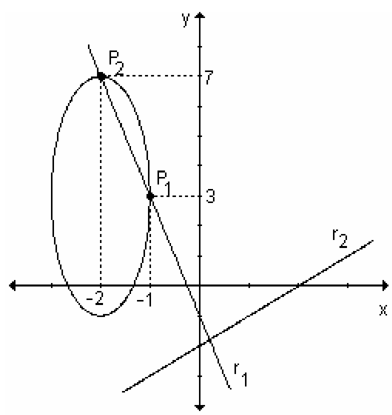
$$\frac{x^2 - 10x + 25}{16} + x^2 + 4x + 4 = 1 \;\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + 16x^2 + 64x + 64 - 16 = 0 \Rightarrow$$

$17x^2 + 54x + 73 = 0$. Resolviendo la ecuación cuadrática resulta:

$$x_{1,2} = \frac{-54 \pm \sqrt{54^2 - 4.17.73}}{2.17} = \frac{-54 \pm \sqrt{-2048}}{34}.$$

Como el discriminante es negativo las raíces son números complejos y, en consecuencia, no existe intersección entre la recta y la cónica. Por lo tanto, la recta es exterior a la elipse.

Gráficamente:



EJERCICIOS INTEGRADORES 4.3 ELIPSE

1) Halle la ecuación de la elipse cuyo centro coincide con el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ y es tangente a la recta $y = 3$ y a la recta $x = -1$.

2) Determine la ecuación de la elipse de eje focal paralelo al eje y, cuyo centro es el punto (–1, 2), la distancia entre los vértices principales es 6 y pasa por el punto R(1, 2).

3) Los vértices principales de una elipse son los puntos (1, –6) y (9, –6) y la longitud de cada lado recto es $\frac{9}{2}$. Obtenga la ecuación de la elipse y su excentricidad.

4) Reduzca la ecuación dada a su forma ordinaria. Determine si corresponde a una elipse y, de ser posible, escriba sus elementos.

a) $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$

b) $3x^2 + 2y^2 - 6x + 9 = 0$

Ecuaciones paramétricas

Como en el caso de la circunferencia se intenta encontrar un parámetro t que permita expresar cada punto (x, y) de la elipse como función de él. Es decir se buscan las ecuaciones $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$ de manera tal que para cada valor de t se obtenga un par (x, y) que verifique la ecuación de la elipse dada.

Si consideramos, por ejemplo, la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, las ecuaciones $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\operatorname{sen} t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$, constituyen la *representación paramétrica*. En efecto $\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t$, $\frac{y^2}{b^2} = \operatorname{sen}^2 t$. Si sumamos miembro a miembro resulta:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, que coincide con la ecuación dada.

GUÍA DE ESTUDIO DE TEORÍA N° 6: ELIPSE

1) Defina elipse como lugar geométrico.

2) ¿A qué llamamos:

- **a)** eje focal?
- **b)** vértices principales?
- **c)** centro?
- **d)** eje normal?
- **e)** vértices secundarios de una elipse?

3) Exprese simbólicamente la definición de la elipse.

4) ¿A qué llamamos ecuaciones canónicas?

5) Deduzca la ecuación canónica de la elipse si:

- **a)** los focos se encuentran sobre el eje x.
- **b)** los focos se encuentran sobre el eje y.

6) Realice la discusión de la ecuación:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **b)** $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

7) Defina los elementos de la elipse si:

- **a)** eje focal coincide con el eje x.
- **b)** eje focal coincide con el eje y.

8) Defina la excentricidad de la elipse. Deduzca una fórmula para su cálculo.

9) Deduzca las ecuaciones ordinarias de la elipse si:

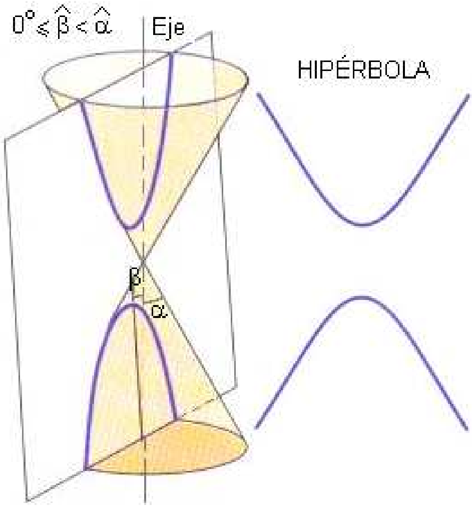
a) eje focal paralelo al eje x.
b) eje focal paralelo al eje y.
10) Defina los elementos de las elipses obtenidas en **(9)**.
11) Enuncie y demuestre la condición

a) necesaria para que una ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente una elipse.

b) suficiente para que una ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente una elipse.

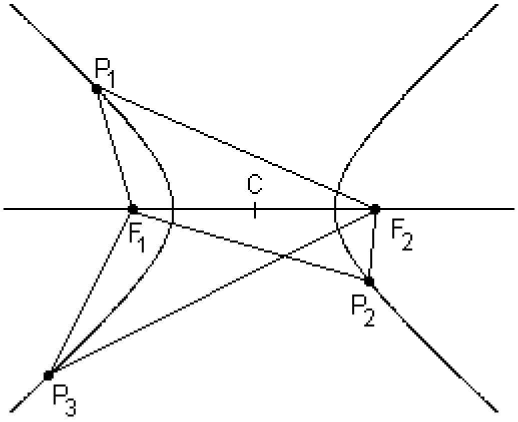
12) Deduzca las ecuaciones paramétricas de la elipse.

4.4 Hipérbola



La hipérbola se obtiene intersecando las dos hojas de la superficie cónica con un plano inclinado que no contiene al vértice del mismo.

Definición: Es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos llamados *focos* se mantiene constante y menor que la distancia entre ellos.



$P \in$ hipérbola $\Leftrightarrow$

$|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = cte$

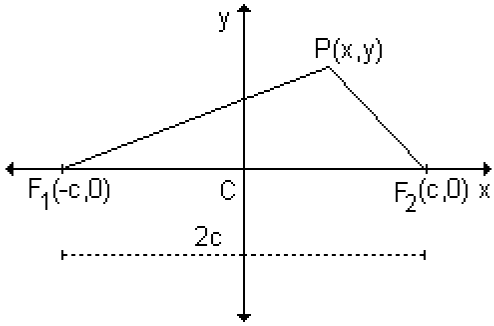
F_1 y F_2: focos

$d(F_1, F_2)$: distancia focal

C: centro de la hipérbola, punto medio del segmento $\overline{F_1 F_2}$

Ecuaciones canónicas de la hipérbola

Primer Caso



Datos:
Eje focal coincide con el eje de abscisas. F_1 y F_2 en el eje x, entonces $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ son los *focos.*
El centro C coincide con el origen de coordenadas.
P(x, y) punto genérico
Incógnita: ecuación de la hipérbola

$P(x, y) \in$ hipérbola $\Leftrightarrow \left| d(F_1, P) - d(F_2, P) \right| = k = 2a$,
$k < 2c \Rightarrow 2a < 2c \Rightarrow a < c$, donde k, a y c son números reales positivos.

$$\begin{cases} d(F_1,P) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ d(F_2,P) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y resolviendo:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dividiendo por 4 ambos miembros: $xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Elevando al cuadrado:
$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2 (x - c)^2 + a^2y^2$
$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$
$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$
$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

Como $a < c$ entonces $a^2 < c^2$ y $c^2 - a^2 > 0$.

Llamamos con b^2 a la expresión $c^2 - a^2$ y sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos $x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Dividiendo por a^2b^2 se llega a la $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ que se conoce como *ecuación canónica* de la hipérbola.

Observación: Si el eje focal coincide con el eje de abscisas entonces el término en x es el positivo.

Observación: Si el eje focal coincide con el eje de abscisas entonces el término en x es el positivo.

Discusión de la ecuación canónica

Sea G la gráfica de $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

1) *Intersecciones con los ejes*

a) $G \cap$ eje x $\Rightarrow$ $y=0$

$\frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a \Rightarrow \begin{cases} V_1(-a,0) \\ V_2(a,0) \end{cases}$ son los *vértices de la hipérbola*

b) $G \cap$ eje y $\Rightarrow$ $x=0$

$-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y^2=-b^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{-b^2}$ absurdo, no existe intersección.

2) *Simetrías*

La hipérbola tiene simetría total dado que en su ecuación las variables se encuentran elevadas al cuadrado. En conclusión la hipérbola tiene dos ejes de simetría y un centro de simetría.

El eje focal se llama también *eje transverso* y el eje perpendicular al mismo que pasa por el centro de la hipérbola, *eje normal o conjugado.*

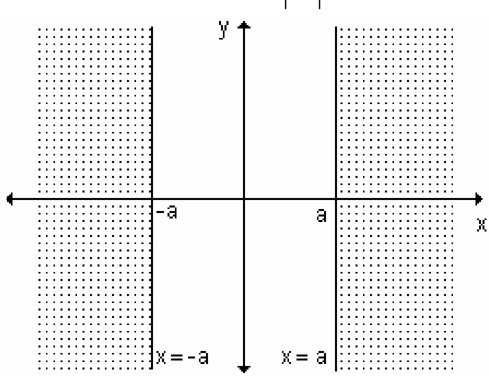
3) *Extensión*

a) *respecto al eje de abscisas*: se escribe $y=f(x)$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2-a^2}{a^2} \Rightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(x^2-a^2\right) \Rightarrow$

$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

Luego, debe ser $x^2-a^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow |x| \geq a \Rightarrow x \geq a \vee x \leq -a$

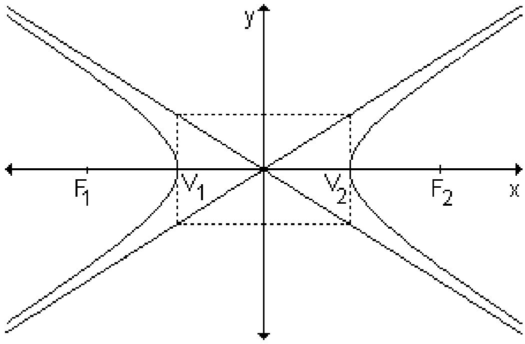


b) *respecto al eje de ordenadas*: se escribe $x=f(y)$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 + y^2\right) \Rightarrow x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$$

$x \in R \Leftrightarrow y^2 + b^2 \geq 0 \;\; \forall y \Rightarrow -\infty < y < +\infty$

4) *Gráfica*



Elementos:

Centro: C(0, 0)

Vértices: $V_1(-a, 0)$ y $V_2(a, 0)$

Focos: $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$

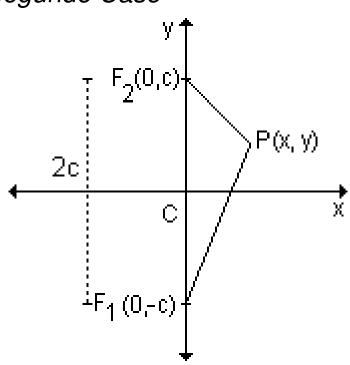
Lado recto: Es el segmento perpendicular al eje transverso que contiene al foco y tiene por extremos los puntos de la hipérbola.

La longitud del lado recto se calcula mediante la expresión $\frac{2b^2}{a}$.

Excentricidad: Es el número que expresa la razón entre la distancia focal y la distancia entre los vértices.

La excentricidad se calcula según la fórmula $\frac{c}{a}$ y en el caso de la hipérbola es mayor que uno.

Segundo Caso



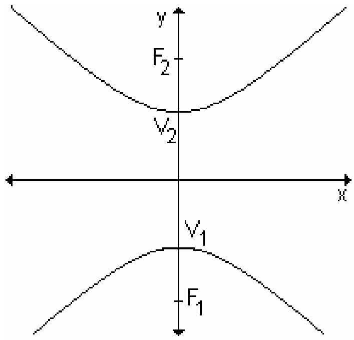
Datos: eje focal coincide con el eje de ordenadas entonces los focos se escriben $F_1(0, -c)$ y $F_2(0, c)$.
Centro coincidente con el origen.
P(x, y) punto genérico

Incógnita: ecuación de la hipérbola

$P(x, y) \in$ hipérbola $\Leftrightarrow \left| d(F_1, P) - d(F_2, P) \right| = k = 2a, \; a > 0$.

Si procedemos como en el primer caso, resulta la expresión $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ que es la *ecuación canónica* de la hipérbola con eje focal coincidente con eje de ordenadas.

Observación. Si el eje focal es coincidente con el eje de ordenadas, entonces el término en y es el positivo.



Elementos:

Centro: C(0, 0)

Focos: $F_1(0, -c)$ y $F_2(0, c)$

Vértices: $V_1(0, -a)$ y $V_2(0, a)$

Ejemplo. Determine la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, eje focal coincidente con el eje de ordenadas y que pase por los puntos P(0,1) y Q(3, $\sqrt{2}$).

Como el eje focal coincide con el eje de ordenadas y el centro es el origen, la ecuación es de la forma $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$.

Como pasa por los puntos P y Q, dichos puntos verifican la ecuación, entonces:

$$\begin{cases} \dfrac{1^2}{a^2} - \dfrac{0^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}^2}{a^2} - \dfrac{3^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a^2} = 1 \\ \dfrac{2}{a^2} - \dfrac{9}{b^2} = 1 \end{cases}$$

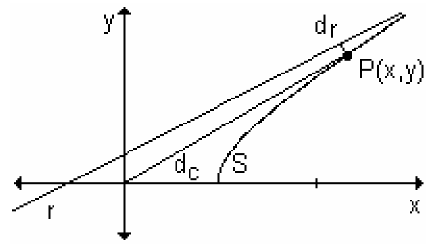
De la primera ecuación deducimos que $a^2 = 1$, sustituyendo en la segunda y despejando b^2 resulta: $2 - \dfrac{9}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 - 1 = \dfrac{9}{b^2} \quad \Rightarrow \; b^2 = 9$.

Por lo tanto la ecuación buscada es $y^2 - \dfrac{x^2}{9} = 1$.

Asíntotas a la gráfica de una curva

Consideremos una curva S abierta con centro C y una recta r. Si el punto P(x, y) se mueve sobre la curva de forma tal que se aleja indefinidamente del centro al mismo tiempo que se acerca indefinidamente a la recta, sin tocarla, a esa recta, si existe, se la llama *asíntota de la hipérbola.* Podemos decir que la curva se acerca indefinidamente a la recta sin llegar a tener ningún punto en común con ella.

Llamamos con d_C a la distancia del punto P al centro de la curva y d_r a la distancia del punto P a la recta r.
r asíntota si: $d_C \to +\infty$, $d_r \to 0$ y $d_r \neq 0$



Asíntotas de la hipérbola: Son un par de rectas a las que la hipérbola se acerca indefinidamente sin tocarlas. Para hallar las ecuaciones de las asíntotas debemos tener en cuenta lo siguiente:

Primer Caso

Consideramos la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Despejando la variable y resulta: $y = \pm \dfrac{b}{a} x \sqrt{1 - \dfrac{a^2}{x^2}}$

Si $x \to +\infty \;\Rightarrow\; \dfrac{a^2}{x^2} \to 0 \;\Rightarrow\; 1 - \dfrac{a^2}{x^2} \to 1$ y de aquí las expresiones:

$y = \dfrac{b}{a} x$; $y = -\dfrac{b}{a} x$ resultan las ecuaciones de las asíntotas.

Segundo Caso

Consideramos la ecuación $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$.

Despejando la variable y resulta: $y = \pm \dfrac{a}{b} x \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{x^2}}$.

Si $x \to +\infty \Rightarrow \dfrac{b^2}{x^2} \to 0 \Rightarrow 1 + \dfrac{b^2}{x^2} \to 1$ y de aquí las expresiones $y = \dfrac{a}{b} x$; $y = -\dfrac{a}{b} x$ son las ecuaciones de las asíntotas.

Método práctico para determinar las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola dada

Mostraremos una forma práctica para calcular las ecuaciones de las asíntotas a una hipérbola según el eje focal coincida con el eje x o con el eje y.

Primer Caso

- En $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ hacemos cero el término independiente y desarrollamos algebraicamente la igualdad que resulta:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \Rightarrow b^2x^2-a^2y^2=0 \Rightarrow (bx-ay).(bx+ay)=0 \Rightarrow \begin{cases} bx-ay=0 \\ bx+ay=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases} y=\dfrac{b}{a}x \\ y=-\dfrac{b}{a}x \end{cases}$ son las ecuaciones de las asíntotas.

Segundo Caso:

- En $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ hacemos cero el término independiente y desarrollamos la igualdad que resulta:

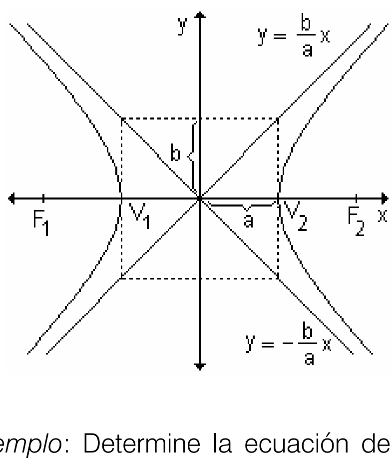
$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=0 \Rightarrow b^2y^2-a^2x^2=0 \Rightarrow (by-ax).(by+ax)=0 \Rightarrow \begin{cases} by-ax=0 \\ by+ax=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\begin{cases} y=\dfrac{a}{b}x \\ y=-\dfrac{a}{b}x \end{cases}$ son las ecuaciones de las asíntotas.

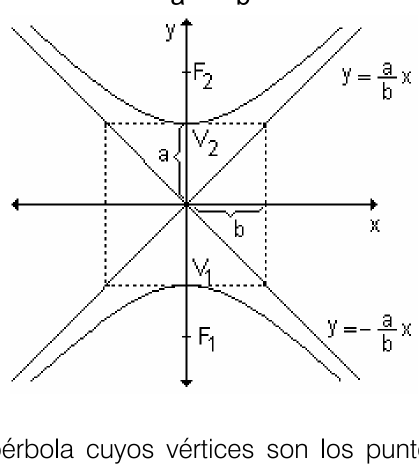
Interpretación geométrica de las asíntotas de la hipérbola

Las asíntotas de la hipérbola son las diagonales de un rectángulo que tiene por centro el centro de la hipérbola y lados de longitud 2a y 2b.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

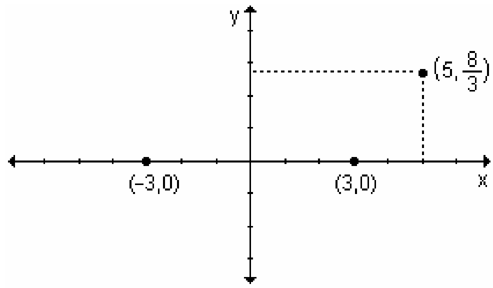


$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$



Ejemplo: Determine la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son los puntos (–3, 0) y (3, 0) y pasa por el punto $\left(5, \frac{8}{3}\right)$. Grafique e indique sus elementos.

Graficamos los puntos dados:



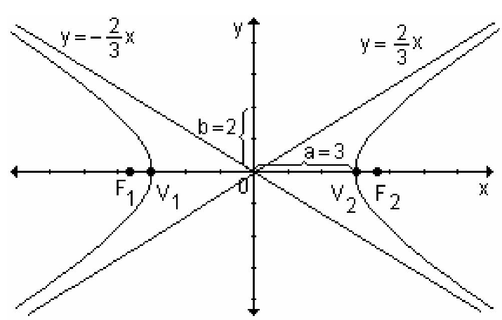
El punto medio entre los vértices es el centro de la hipérbola. Por lo tanto, el centro es el origen de coordenadas. La distancia entre el centro y cada vértice es el valor de a. Por lo tanto, a = 3.
La ecuación que buscamos es de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Con la información obtenida podemos escribir: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

El punto $\left(5, \frac{8}{3}\right)$ pertenece a la hipérbola y por lo tanto verifica su ecuación: $\frac{5^2}{9} - \frac{\left(\frac{8}{3}\right)^2}{b^2} = 1$. Resolviendo: $\frac{25}{9} - \frac{64}{9b^2} = 1 \Rightarrow \frac{25b^2 - 64}{9b^2} = 1 \Rightarrow$
$25b^2 - 64 = 9b^2 \Rightarrow 16b^2 = 64 \Rightarrow b^2 = 4$.

En consecuencia, la ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Teniendo en cuenta que $c^2 = a^2 + b^2$, planteamos: $c^2 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{13}$.
En consecuencia sus focos son los puntos $F_1 (-\sqrt{13}, 0)$ y $F_2 (\sqrt{13}, 0)$.
Para determinar las ecuaciones de las asíntotas igualamos a cero la ecuación y resolvemos: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0 \Rightarrow \frac{4x^2 - 9y^2}{36} = 0 \Rightarrow 9y^2 = 4x^2 \Rightarrow$
$y = \frac{2}{3}x$, $y = -\frac{2}{3}x$ son las ecuaciones de las asíntotas.
El eje focal es el eje de las abscisas que expresamos y = 0 y el eje normal es el de las ordenadas que escribimos de la forma x = 0.
Gráficamente:



Ejemplo: Dada la ecuación $x^2 - y^2 = 1$ determine de qué tipo de curva se trata, indique sus elementos y grafique. Exprese la ecuación en coordenadas polares.

La ecuación corresponde a una hipérbola. En este caso el centro es el origen de coordenadas, su eje focal es el eje de abscisas y su eje normal, el de ordenadas.

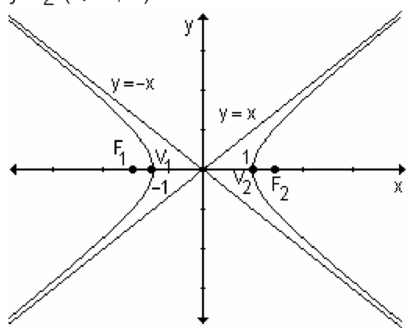
Como $a^2 = 1$, sus vértices son $V_1(-1, 0)$ y $V_2(1, 0)$.

$b^2 = 1$ y como además se verifica que $c^2 = a^2 + b^2$, en el ejemplo obtenemos $c = \pm$. Por lo tanto, sus focos son $F_1(-\sqrt{2}\,, 0)$ y $F_2\,(\sqrt{2}\,, 0)$.

La excentricidad es $e = \dfrac{c}{a}$; reemplazando, resulta $e = \sqrt{2}$.

Para hallar sus asíntotas igualamos a cero la ecuación dada y resulta:

$x^2 - y^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = y^2 \;\Rightarrow\; y = x$ e $y = -x$ son las asíntotas.



Nota: Cuando $|a| = |b|$ se denomina *hipérbola equilátera*.

Para expresar la ecuación dada en coordenadas polares, tenemos en cuenta que

$\rho^2 = x^2 + y^2$, $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho} \;\Rightarrow\; x = \rho\cos\theta$, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{\rho} \;\Rightarrow\; y = \rho\operatorname{sen}\theta$

Reemplazando en $x^2 - y^2 = 1$ obtenemos:

$(\rho\cos\theta)^2 - (\rho\operatorname{sen}\theta)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \rho^2\cos^2\theta - \rho^2\operatorname{sen}^2\theta = 1 \Rightarrow$

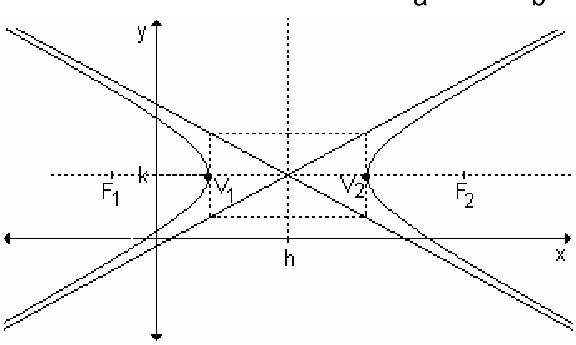
$\rho^2.\,(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 1$ es la ecuación dada en coordenadas polares.

Ecuaciones ordinarias de la hipérbola

Primer Caso

El centro es el punto C(h, k) y el eje focal paralelo al eje de abscisas.

La ecuación es de la forma $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$



Elementos:

Centro C(h, k)

Vértices: $V_1(h - a, k)$ y $V_2(h + a, k)$

Focos: $F_1(h - c, k)$ y $F_2(h + c, k)$

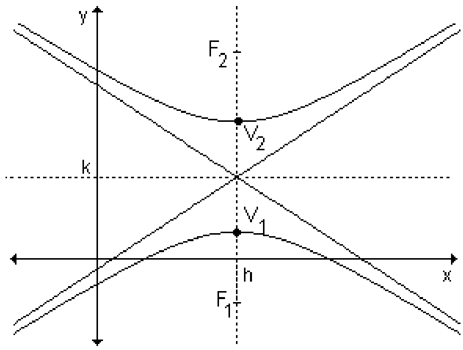
Asíntotas:

$$y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$$

Segundo Caso

El centro es el punto C(h, k) y eje focal paralelo al eje de ordenadas.

La ecuación es $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$



Elementos

Centro C(h, k)

Vértices: V_1(h, k – a) y V_2(h, k + a)

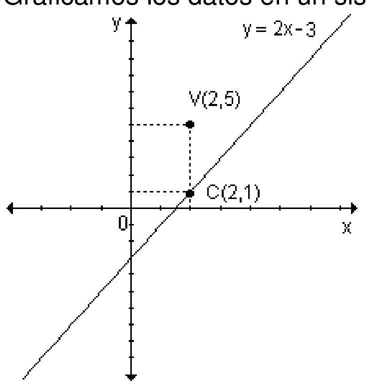
Focos: F_1(h, k – c) y F_2(h, k + c)

Asíntotas: $y - k = \pm\dfrac{a}{b}(x-h)$

Ejemplo: Halle la ecuación de la hipérbola cuyo centro es (2, 1), su eje focal es paralelo al eje de ordenadas, uno de sus vértices es (2, 5) y una de sus asíntotas es la recta $2x - y - 3 = 0$. Grafique.

La ecuación buscada es de la forma $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, pues el eje focal es paralelo al eje de ordenadas y donde (h, k) son las coordendas del centro.

Graficamos los datos en un sistema de coordenadas:



La distancia entre el centro y uno de sus vértices es el valor de a, entonces a = 4. Las pendientes de las asíntotas resultan $m = \pm\dfrac{a}{b}$.

La asíntota dada tiene pendiente 2, por lo tanto: $\dfrac{4}{b} = 2 \Rightarrow b = 2$.

En consecuencia, la ecuación de la hipérbola es: $\dfrac{(y-1)^2}{16} - \dfrac{(x-2)^2}{4} = 1$

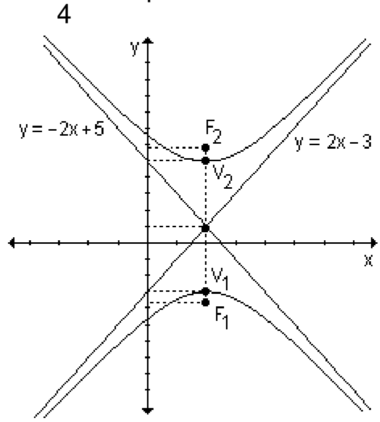
El otro vértice es el punto (2, –3).

El eje focal es la recta x = 2 y el eje normal, la recta y = 1.

La otra asíntota tiene pendiente –2, su ecuación es y = –2x + h. El punto (2, 1) le pertenece, entonces: 1 = –2.2 + h y por lo tanto h = 5. Su ecuación es y = –2x + 5.

De la igualdad $c^2 = a^2 + b^2$ resulta $c = \sqrt{20}$.

Los focos son F_1 (2, $1-\sqrt{20}$) y F_2 (2, $1+\sqrt{20}$).



Ejemplo: Obtenga la ecuación de la hipérbola con eje focal paralelo al eje de ordenadas, cuyo centro es el vértice de la parábola $y^2 - 6x - 18 = 0$ y pasa por los puntos (–3, 4) y $\left(1, \frac{20}{3}\right)$.

Si la hipérbola tiene eje focal paralelo al eje de ordenadas, su ecuación es de la forma: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$.

Hallamos el vértice de la parábola haciendo pasaje de términos y sacando factor común 6: $y^2 = 6x + 18 \;\Rightarrow\; y^2 = 6(x + 3)$.

El vértice de la parábola es V(–3, 0) que coincide con el centro de la hipérbola.

Reemplazando en la ecuación, resulta $\frac{y^2}{a^2} - \frac{(x+3)^2}{b^2} = 1$.

Como los puntos (–3, 4) y (–3, –4) pertenecen a la hipérbola, sus coordenadas verifican la ecuación. Por lo tanto, sustituyendo obtenemos:

$$\frac{4^2}{a^2} - \frac{(-3+3)^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{16}{a^2} = 1 \;\Rightarrow\; a^2 = 16.$$

$$\frac{\left(\frac{20}{3}\right)^2}{16} - \frac{(1+3)^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{25}{9} - \frac{16}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{16}{9} = \frac{16}{b^2} \;\Rightarrow\; b^2 = 9.$$

Entonces la ecuación buscada de la hipérbola es $\frac{y^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$.

EJERCICIOS

1) Halle e identifique el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de las distancias a los puntos P(5, 0) y Q(–5, 0) es 8.

2) Determine la ecuación de la hipérbola de centro el origen de coordenadas, vértice V(–5, 0) y foco F(6, 0).

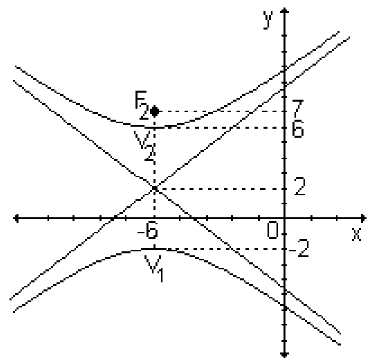
3) Encuentre la ecuación de la hipérbola de eje transverso el eje de abscisas si se sabe que el centro es el punto (0, 0), la distancia entre los vértices es 12 y la recta $y = \frac{5}{3}x$ es una de sus asíntotas.

4) Determine la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, si se sabe que uno de sus vértices es el punto $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$ y un foco es el punto (–4, 0).

5) Obtenga la ecuación de la hipérbola si se conocen sus vértices V_1(–2, –1) y V_2(–2, 3) y la amplitud tomada sobre el eje conjugado es 4.

6) Halle la ecuación de la hipérbola de centro C(–3, –2), eje focal paralelo al eje x, excentricidad $e = \frac{3}{2}$ y la amplitud tomada sobre el eje normal es $2\sqrt{20}$.

7) Deduzca la ecuación del lugar geométrico cuya representación gráfica es:



8) Halle los puntos de intersección de la recta 2x – 9y + 12 = 0 con las asíntotas de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$. Grafique.

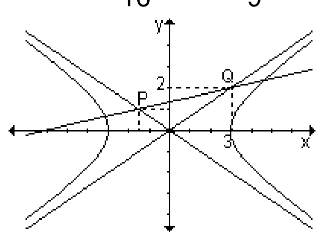
RESPUESTAS

1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, hipérbola; **2)** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$; **3)** $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{100} = 1$

4) $\frac{x^2}{\frac{49}{4}} - \frac{y^2}{\frac{15}{4}} = 1$; **5)** $\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1$

6) $\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{20} = 1$; **7)** $\frac{(y-2)^2}{16} - \frac{(x+6)^2}{9} = 1$

8) $P\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$, Q (3, 2)



Condiciones de existencia de hipérbola

Analizamos las condiciones necesaria y suficiente que debe cumplir una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ para representar una hipérbola.

Condición necesaria

Para que una ecuación del tipo $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente una hipérbola los coeficientes de las variables cuadráticas deben ser de distinto signo.

Condición suficiente

Completamos cuadrados en $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ y resulta:

$A(x - h)^2 + C(y - k)^2 = M$.

Del valor de M depende el lugar geométrico que representa.

- Si $M \neq 0$ y teniendo en cuenta que las expresiones encerradas entre paréntesis y elevadas al cuadrado son positivas y el signo de A es distinto que el signo de C, siempre obtendremos hipérbola.
- Si A y M son positivos, el eje focal es paralelo al eje x.
- Si A es positivo y M negativo, el eje focal es paralelo al eje y.
- Si $M = 0$, la ecuación representa dos rectas que se cortan.

Conclusión: La condición necesaria y suficiente para que la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente una hipérbola es que los coeficientes de las variables cuadráticas tengan distinto signo y que el término independiente luego de completar cuadrados sea distinto de cero.

Ejemplo: Dadas las siguientes ecuaciones generales de segundo grado, determine qué lugar geométrico representan.

a) $16x^2 - 9y^2 + 64x - 80 = 0$

b) $16x^2 - 9y^2 + 64x + 64 = 0$

La condición necesaria para que una ecuación del tipo $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente una hipérbola es que el signo de A sea distinto del signo de B, que se cumple tanto en **(a)** como en **(b)**. Completemos cuadrados para determinar qué lugar geométrico representan.

En **(a)** agrupamos la variable x y sacamos factor común 16:

$16(x^2 + 4x) - 9y^2 = 80$.

Sumamos y restamos 2^2 y resolviendo resulta:

$16(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2) - 9y^2 = 80 \Rightarrow 16((x + 2)^2 - 4) - 9y^2 = 80 \Rightarrow$

$16(x + 2)^2 - 64 - 9y^2 = 80 \Rightarrow 16(x + 2)^2 - 9y^2 = 80 + 64 \Rightarrow 16(x + 2)^2 - 9y^2 = 144$

Como el valor del término independiente, luego de completar cuadrados, es distinto de cero obtenemos una hipérbola. Dividiendo ambos miembros por dicho valor su ecuación es: $\dfrac{(x+2)^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Procediendo de manera similar para **(b)** resulta:

$16(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2) - 9y^2 = -64 \Rightarrow 16((x + 2)^2 - 4) - 9y^2 = -64 \Rightarrow$

$16(x + 2)^2 - 64 - 9y^2 = -64 \Rightarrow 16(x + 2)^2 - 9y^2 = -64 + 64 \Rightarrow 16(x + 2)^2 - 9y^2 = 0$

Como el valor del término independiente, luego de completar cuadrados, es cero, la ecuación representa dos rectas que se cortan. Las ecuaciones de dichas rectas se obtienen de la expresión $16(x+2)^2 - 9y^2 = 0 \Rightarrow 16(x+2)^2 = 9y^2 \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\dfrac{16(x+2)^2}{9}} \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{4}{3}(x+2) \quad , \quad y = -\dfrac{4}{3}(x+2)$.

EJERCICIOS

1)a) Observando la ecuación general incompleta de segundo grado, determine a qué lugar geométrico puede corresponder. Justifique.

b) Reduzca a la forma ordinaria y, de ser posible, determine los elementos.

i) $4x^2 - 16y^2 - 4x + 32y - 31 = 0$

ii) $4x^2 - y^2 - 8x + 4 = 0$

iii) $4y^2 - 9x^2 + 8y - 18x - 5 = 0$

2) Encuentre la ecuación de la elipse que tiene el mismo centro y el mismo eje focal que la hipérbola $9x^2 - 4y^2 + 54x + 8y + 41 = 0$. Se sabe además que la distancia focal es 16 y la distancia entre los vértices secundarios es 12. Bosqueje la elipse indicando sus elementos.

3) El centro de la curva $3x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 25 = 0$ pertenece a la recta de ecuación: $y = mx - 1$.

a) ¿De qué curva se trata?

b) Calcule el valor de m.

c) Para dicho valor de m grafique ambas curvas en un mismo sistema de coordenadas.

RESPUESTAS

1)i)a) Puede corresponder a una hipérbola.

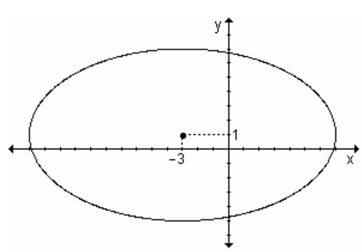
b) $\dfrac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{4} - (y-1)^2 = 1$, hipérbola de centro $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, vértices $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

ii)a) Puede ser una hipérbola; **b)** Dos rectas: $2x - y - 2 = 0$ y $2x + y - 2 = 0$

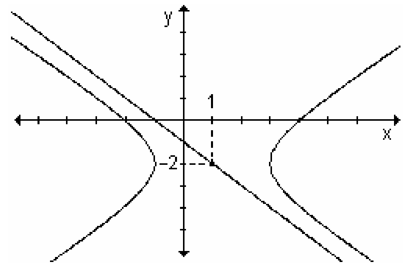
iii)a) Puede corresponder a una hipérbola; **b)** Dos rectas: $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$, $y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$.

2) $\dfrac{(x+3)^2}{100} + \dfrac{(y-1)^2}{36} = 1$,

$V_1(-13, 1)$; $V_2(7, 1)$; $V_3(-3, -5)$; $V_4(-3, 7)$; $F_1(-11, 1)$; $F_2(5, 1)$



3)a) Hipérbola **b)** $m = -1$ **c)**



Intersección de recta e hipérbola

Como en los casos anteriores se debe resolver el sistema formado por las ecuaciones de la hipérbola y de la recta $\begin{cases} \text{ecuación de la hipérbola} \\ \text{ecuación de la recta} \end{cases}$

Ejemplo: Sea la ecuación de la hipérbola $y^2 - 4x^2 - 4 = 0$ y de las rectas $r_1 : y - x = 0$, $r_2 : x - y - 2 = 0$ y $r_3 : y - 2 = 0$. Determine los puntos de intersección entre la cónica y cada una de las rectas. Grafique.

Planteamos en cada caso un sistema de ecuaciones entre la cónica y la recta.

- En primer lugar con r_1 el sistema es: $\begin{cases} y^2 - 4x^2 - 4 = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$.

Lo resolvemos por sustitución, despejamos de la segunda ecuación la variable x y reemplazamos en la primera:

$y^2 - 4y^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; -3y^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; -3y^2 = 4 \;\Rightarrow\; y^2 = \frac{-4}{3}$.

Como no hay un número real que verifique esa ecuación , no existe intersección, la recta r_1 es exterior a la hipérbola.

- Para hallar la intersección con r_2 planteamos el sistema $\begin{cases} y^2 - 4x^2 - 4 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$.

Procediendo de manera similar al caso anterior obtenemos:

$y^2 - 4(y + 2)^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; y^2 - 4(y^2 + 4y + 4) - 4 = 0 \;\Rightarrow\; -3y^2 - 16y - 20 = 0$.

Resolviendo la ecuación cuadrática resulta los valores $y_1 = -\frac{10}{3}$, $y_2 = -2$.

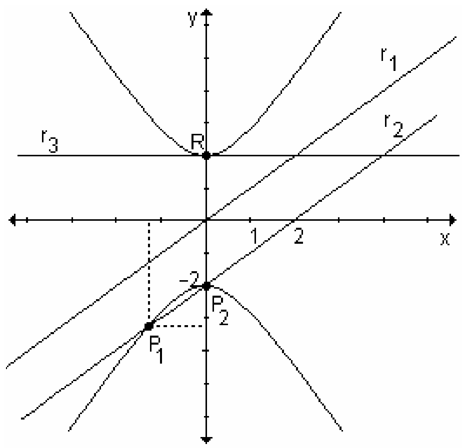
Reemplazando estos valores en la ecuación de la recta o de la hipérbola obtenemos $x_1 = -\frac{4}{3}$ o bien $x_2 = 0$.

Los puntos de intersección son $P_1\left(-\frac{4}{3}, -\frac{10}{3}\right)$ y P_2 (0, –2). La recta r_2 es secante a la hipérbola.

- Con r_3 planteamos el sistema $\begin{cases} y^2 - 4x^2 - 4 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$.

Despejando la variable y de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera resulta: $2^2 - 4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow -4x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$.

El punto de intersección es R(0, 2). La recta r_3 es tangente a la hipérbola.
Gráficamente:

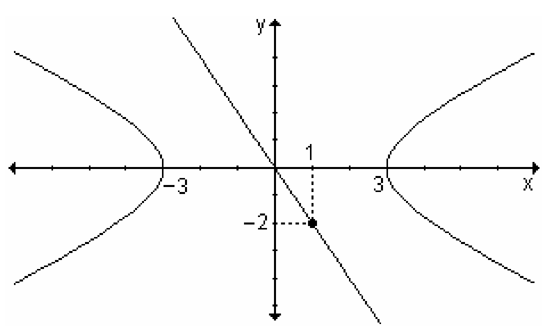


EJERCICIO

Halle analítica y gráficamente la intersección entre la curva $4x^2 - 9y^2 = 36$ y la recta $2x + y = 0$.

RESPUESTA

No existe intersección.



EJERCICIOS INTEGRADORES 4.4 HIPÉRBOLA

1) Halle la ecuación de la hipérbola centrada en el origen sabiendo que la distancia entre sus focos es 6 y uno de sus vértices es A (0,1).

2) Obtenga la ecuación de la hipérbola sabiendo que los puntos C(2, 6); F(2, 3) y V(2, 4) son el centro, un foco y un vértice, respectivamente.

3) Dada la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = 144$ calcule la distancia de cada foco a cada una de sus asíntotas, ¿qué conclusión obtiene?

4) Determine la ecuación de la hipérbola de eje conjugado paralelo al eje de ordenadas, cuyo centro es el vértice de la parábola $y^2 = 2x + 2$; su lado recto mide 8 y pasa por el origen de coordenadas.

5) Reduzca la ecuación dada a la forma ordinaria.

a) $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0$

b) $9x^2 - 4y^2 + 36x + 24y = 0$

Ecuaciones paramétricas

Si analizamos la ecuación paramétrica de la elipse $\begin{cases} x = a.\cos t \\ y = b.\text{sen}t \end{cases}$ recordamos que la propiedad $\cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$ jugó un rol importante en la determinación del parámetro. Para determinar la representación paramétrica de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ debemos buscar dos funciones trigonométricas tales que la diferencia de sus cuadrados sea uno.

Las ecuaciones $\begin{cases} x = a.\sec t \\ y = b.\text{tg}t \end{cases}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ representan los puntos de la hipérbola dado que $\frac{x^2}{a^2} = \sec^2 t$, $\frac{y^2}{b^2} = \text{tg}^2 t$ y de aquí:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \sec^2 t - \text{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\text{sen}^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1 - \text{sen}^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = 1,$$ que coincide con la ecuación dada.

GUÍA DE ESTUDIO DE TEORÍA N° 7: HIPÉRBOLA

1) Defina hipérbola como lugar geométrico.

2) Exprese simbólicamente la definición anterior.

3) Deduzca la ecuación canónica de la hipérbola si:

a) el eje focal coincide con el eje x.

b) el eje focal coincide con el eje y.

4) Realice la discusión de las ecuaciones obtenidas en **(3)**.

5) Defina los elementos de una hipérbola.

6) ¿Cuál es el eje transverso?, ¿y el conjugado?

7) Defina la excentricidad de la hipérbola. Deduzca una fórmula para su cálculo.
8) Defina asíntota.
9) Deduzca las ecuaciones de las asíntotas a la hipérbola dada:

a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **b)** $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

10) ¿Cuál es el método práctico para determinar las ecuaciones de las asíntotas a una hipérbola? Enuncie los pasos a seguir.

11)a) Demuestre que $y = \pm\frac{b}{a}x$ son las ecuaciones de las asíntotas a la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

b) Demuestre que $y = \pm\frac{a}{b}x$ son las ecuaciones de las asíntotas a la hipérbola de ecuación $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

12) ¿Qué representan geométricamente las asíntotas de una hipérbola?
13) Deduzca la ecuación ordinaria de la hipérbola si:
a) eje focal paralelo al eje x.
b) eje focal paralelo al eje y.
14) Enuncie y demuestre la condición:
a) necesaria,
b) suficiente para que una ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente una hipérbola.
15) Defina hipérbola equilátera.
16) ¿Cómo se realiza la intersección de una recta y una hipérbola?
17) Deduzca las ecuaciones paramétricas de una hipérbola.

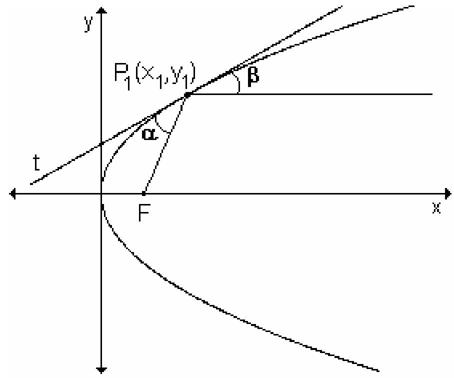
Propiedades y aplicaciones de las cónicas

El haz de luz que emite una lámpara o linterna con pantalla circular es un cono cuyo vértice está en el filamento del foco. Si se proyecta este haz de luz sobre la pared de una habitación oscura, se apreciará una circunferencia, una elipse, una parábola o una de las ramas de una hipérbola, según la inclinación con que se haga la proyección, pues, en definitiva, lo que se está haciendo es cortar un cono (el haz de luz de la lámpara) con un plano (la pared).

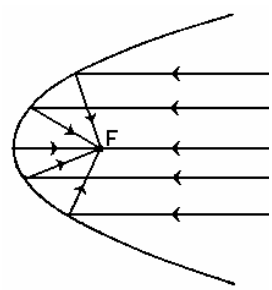
Recordemos que el matemático griego Menecmo descubrió estas curvas, pero fue Apolonio de Perga el primero en estudiarlas detalladamente y encontrar la propiedad que las definía. Quizás, las propiedades más interesantes y útiles que descubrió Apolonio, son las llamadas propiedades de reflexión que son de gran utilidad para la óptica.

Parábola

Sea t la recta tangente a la parábola en un punto P_1 $(x_1,\ y_1)$ cualquiera de la misma.
Los ángulos α y β que dicha recta determina con el segmento $\overline{FP_1}$ y con la recta paralela al eje de simetría que pasa por P_1, son congruentes.
En la gráfica se ha considerado la parábola del tipo $y^2 = 4px$ (con $p > 0$), pero la propiedad es aplicable a cualquiera de las parábolas estudiadas.

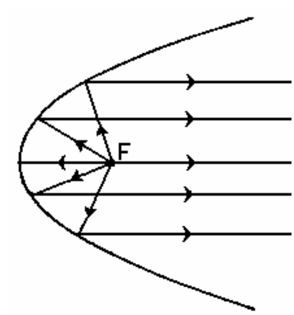


Al hacer girar una parábola en torno a su eje de simetría, se obtiene una superficie llamada paraboloide.



Si se considera la sección transversal de un espejo parabólico, teniendo en cuenta la propiedad de la tangente a la parábola, los rayos de luz que lleguen paralelos al eje de la misma, se reflejarán hacia un solo punto ubicado en el foco de dicho espejo.

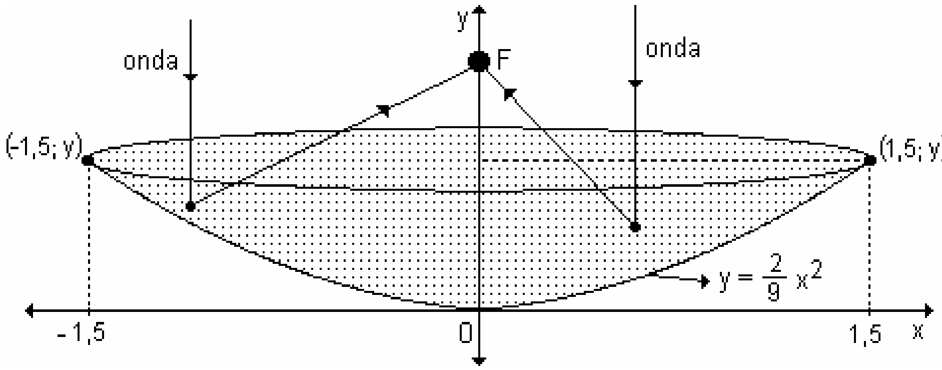
Del mismo modo, si una fuente de luz se coloca en el foco de la parábola, todos los rayos que surjan de allí, se reflejarán en la parábola en dirección paralela al eje de simetría de la misma. En esta propiedad se basa la construcción de faros buscadores, antenas parabólicas, radares aéreos, hornos solares, telescopios, etc.. En estos casos se consigue atraer sobre un punto señales lejanas procedentes de satélites artificiales, rayos solares, etc..



Problema

Una superficie reflectora de una antena de televisión se formó girando la parábola $y = \frac{2}{9}x^2$ alrededor de su eje de simetría considerando el intervalo $-1{,}5 \le x \le 1{,}5$. Suponiendo que las mediciones están expresadas en metros, ¿a qué distancia del fondo de esta antena se debe colocar el receptor?; ¿qué profundidad tiene esta antena?.

Graficando los datos obtenemos:



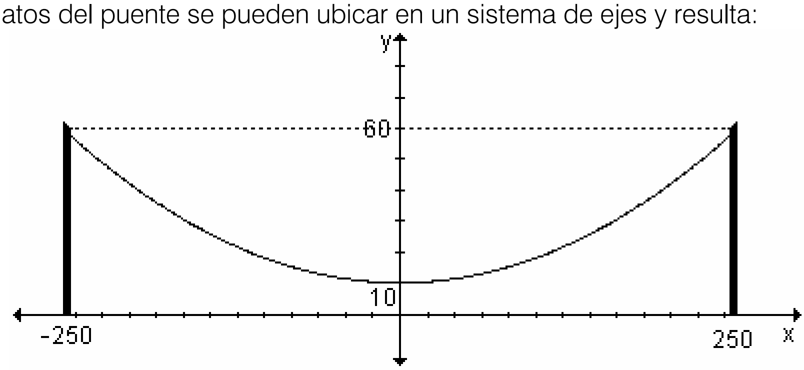
El receptor debe estar en el foco y la distancia del vértice al foco es el valor de p. La ecuación corresponde a una parábola de eje focal coincidente con el eje de ordenadas, centrada en el origen de la forma $x^2 = 4py$.

En este caso $x^2 = \frac{9}{2}y$, entonces $4p = \frac{9}{2}$ y $p = \frac{9}{8} = 1{,}125$. El receptor está a 1,125 metros arriba del vértice. La ordenada correspondiente al valor de la abscisa 1,5 representa la profundidad de la antena. Reemplazando en la ecuación resulta: $y = \frac{2}{9}(1{,}5)^2 \Rightarrow y = 0{,}5$ metros. La profundidad de la antena es de 0,5 metros.

Problema

El cable de suspensión de un puente colgante adquiere la forma de un arco de parábola. Los pilares que lo soportan tienen una altura de 60 metros y están separados 500 metros, quedando el punto más bajo del cable a una altura de 10 metros sobre la calzada del puente. Tomando como eje de abscisas la horizontal que define el puente, y como eje de ordenadas el eje de simetría de la parábola, determine la ecuación de ésta. Calcule la altura de un punto situado a 80 metros del centro del puente.

Los datos del puente se pueden ubicar en un sistema de ejes y resulta:



Según el gráfico, la parábola tiene eje focal coincidente con el eje de ordenadas, el vértice es el punto (0, 10).

La ecuación que corresponde es $(x - h)^2 = 4p(y - k)$. Reemplazando las coor–denadas del vértice obtenemos: $x^2 = 4p(y–10)$.

El punto (250, 60) le pertenece; sustituyendo en $x^2 = 4p(y - 10)$ resulta:

$250^2 = 4p(60 - 10) \Rightarrow 62\,500 = 200\,p \Rightarrow p = 312{,}5$

Entonces la ecuación de la parábola es $x^2 = 1250(y - 10)$.

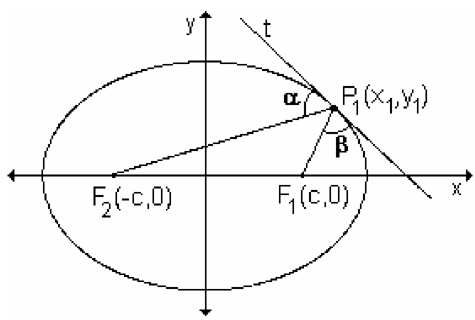
Para determinar la altura de un punto situado a 80 metros del centro reemplazamos x por 80 y obtenemos:

$80^2 = 1250.(y - 10) \Rightarrow 6400 : 1250 = y - 10 \Rightarrow 5{,}12 + 10 = y \Rightarrow y = 15{,}12$.

La altura buscada es de 15,12 metros. El mismo valor se obtiene si consideramos un punto ubicado 80 metros a la izquierda del centro del puente, es decir si reemplazamos en la ecuación por $x = -80$.

Elipse

Sea t la recta tangente a la elipse en un punto $P_1\ (x_1, y_1)$ cualquiera de la misma. Los ángulos α y β que dicha recta forma con los segmentos determinados por el punto P_1 y cada uno de los focos de la elipse, son congruentes.



Por lo tanto, si se coloca una lámpara en el foco F_1 de la elipse de manera tal que el rayo luminoso incida en la elipse en el punto P_1, este rayo será reflejado de manera tal que pasará por el otro foco F_2. Esto se debe a que el ángulo de incidencia β es congruente con el ángulo de reflexión α.

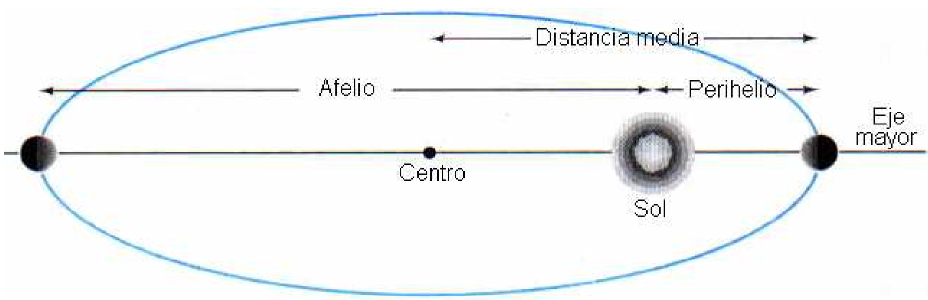
Al hacer girar una elipse en torno a su eje mayor, se obtiene una superficie llamada elipsoide. Si un rayo emana de uno de sus focos y choca contra su superficie, debido a la propiedad de la tangente, éste se refleja hacia el otro foco. Esta propiedad se utiliza para fabricar hornos en los que se desea concentrar el calor en punto determinado, por ejemplo para hacer crecer cristales. Se coloca la fuente de calor en uno de los focos y en el otro, el crisol que se desea calentar.

Las ondas sonoras se reflejan como las luminosas. En algunos museos, la galería de los susurros es una interesante atracción. Su forma es elíptica y si dos personas se sitúan en los focos, pueden susurrar y escucharse claramente, siendo inaudibles los sonidos para aquellas personas que se ubiquen en cualquier otro lugar de la misma.

Una de las principales aplicaciones de la elipse se da en la Astronomía. Apolonio estudió las cónicas, sin sospechar que dichas curvas se ajustaban a

los movimientos de los cuerpos celestes. Durante muchos siglos se consideró que las órbitas de los planetas eran circulares con la Tierra como centro.
Estudiando las observaciones hechas durante mucho tiempo por Tycho Brahe (1546 – 1601) sobre el movimiento del planeta Marte, el astrónomo alemán Johannes Kepler (1570 – 1630) fue quien, al aplicar el modelo de Nicolás Copérnico (1473 – 1543) de órbitas circulares alrededor del Sol, observó que los cálculos discrepaban ligeramente de la posición real del planeta. Intentando ajustar la órbita a otras curvas descubrió que los planetas giran alrededor del Sol describiendo trayectorias elípticas donde el Sol ocupa uno de los focos (el otro permanece vacío y no juega ningún papel en el movimiento de los planetas alrededor del Sol). Kepler descubrió las leyes sobre el movimiento planetario empíricamente, pero fue el matemático y físico inglés Isaac Newton (1642 – 1727) quien utilizando el Cálculo Diferencial que acababa de desarrollar, probó dichas leyes y demostró que la órbita de un cuerpo alrededor de una fuerza de tipo gravitatorio es siempre una cónica.

En la siguiente figura se muestra la trayectoria elíptica de un planeta alrededor del Sol.



El perihelio y el afelio son respectivamente las distancias más cercana y más lejana de un planeta al Sol.
La distancia media de un planeta al Sol es la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica. La unidad de longitud más comúnmente utilizada en astronomía es U.A. (unidades astronómicas). Una unidad astronómica es, por definición, la distancia media de la Tierra al Sol. Así, 1 U.A. ≅ 149 600 000 km.
Los cometas tienen órbitas elípticas más alargadas e, incluso, algunos de ellos, tienen órbitas hiperbólicas.
También podemos destacar que las trayectorias de los electrones en torno al núcleo del átomo son elipses y que existen billares elípticos. Lewis Caroll, el matemático autor de *Alicia en el País de las Maravillas*, construyó una mesa de billar de forma elíptica. En ella, si una bola pasa por un foco, sin efecto, pasará necesariamente por el otro foco después de rebotar. Y así, sucesivamente, hasta que se detenga.

Problema

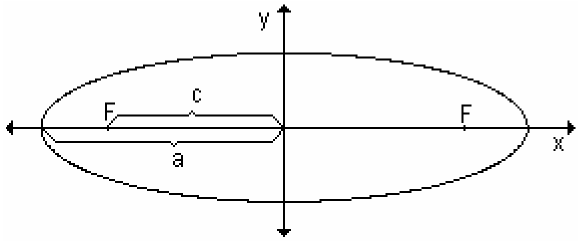
> El cometa Halley tiene una órbita elíptica con diámetros mayor y menor de 36,18 UA y 9,12 UA respectivamente. ¿Cuál es su máximo acercamiento al sol?

El mayor acercamiento del cometa al Sol está dado por la diferencia a – c. Sabiendo que el diámetro mayor es 36,18 UA y el menor es 9,12 UA, obtenemos $a = 18{,}09$ y $b = 4{,}56$.

Conocidos esos valores podemos calcular c:

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 18{,}09^2 - 4{,}56^2 \Rightarrow c \cong 17{,}51.$

El mayor acercamiento al sol será de (18,09 – 17,51) UA, o sea 0,58 UA.



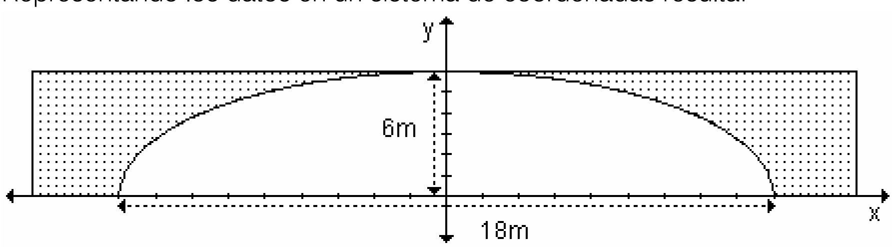
Problema

El ojo de un puente para el paso inferior de una carretera de dos carriles tiene la forma de media elipse. El arco elíptico tiene un ancho total de 18 metros y la altura en el centro es de 6 metros.

a) Determine la ecuación de la elipse que describe este puente.

b) Las orillas de los carriles están señaladas por líneas a 3 metros de los bordes del arco. ¿Cuál es la altura sobre estas líneas?

Representando los datos en un sistema de coordenadas resulta:



Corresponde a una elipse centrada en el origen de coordenadas, con eje focal coincidente con el eje de abscisas, con eje mayor de longitud 18 metros y eje menor de 12 metros. Podemos decir que $a = 9$ y $b = 6$, entonces su ecuación es:

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Si las orillas de los carriles están señaladas a 3 metros de los vértices principales, se encuentran a 6 metros del origen, para hallar la altura sobre esas líneas reemplazamos el valor de x por 6 en la ecuación y obtenemos:

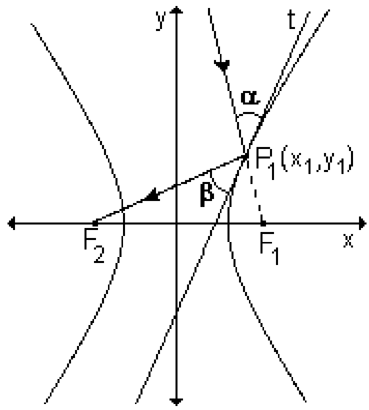
$$\frac{6^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{36} = 1 - \frac{36}{81} \Rightarrow y^2 = \frac{45}{81}.36 \Rightarrow y^2 = 20 \Rightarrow y \approx 4{,}47$$

La altura buscada es 4,47 metros, aproximadamente.

Hipérbola

Las hipérbolas se utilizan en la guerra para localizar la artillería enemiga mediante el ruido de los disparos. Este método se conoce con el nombre de localización acústica.

Si una cantidad varía inversamente con respecto a otra, tal como la presión y el volumen en la ley de Boyle para un gas ideal (P . V = k), la gráfica que corresponde a esta variación es una hipérbola.

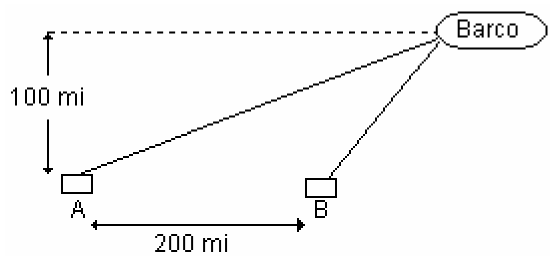


También, la hipérbola posee una propiedad de reflexión.
Sea t la recta tangente a la hipérbola en un punto P_1 (x_1, y_1) cualquiera de la misma.
Si se dirige un haz de luz en dirección de uno de los focos, por ejemplo F_1, se reflejará en el punto P_1 en dirección del otro foco F_2. Esto se debe a que el ángulo de incidencia que forma el rayo con la recta tangente en el punto P_1 es congruente con el ángulo de reflexión formado por dicha recta y el segmento determinado por P_1 y F_2.
Al hacer girar una hipérbola en torno a su eje de simetría, se obtiene una superficie llamada hiperboloide. Si un rayo que se dirige a uno de los focos choca contra su superficie, debido a la propiedad de la tangente, se refleja hacia el otro foco, e inversamente.
Esta propiedad tiene aplicaciones en la fabricación de los telescopios de reflexión en los que se combinan un espejo parabólico y uno hiperbólico.

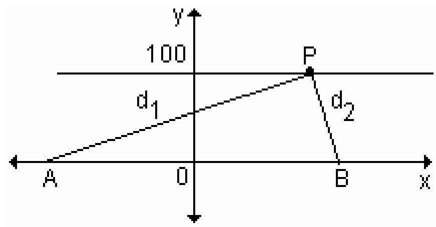
Otra de las aplicaciones recientes de la hipérbola es la del sistema de navegación LORAN (Long Range). En este sistema de navegación, dos estaciones de radio que se encuentran en una costa emiten una señal simultáneamente. Un receptor del barco en alta mar recibe las señales y puede evaluar la diferencia de tiempo en que las recibe. Si el barco se mueve de manera que esta diferencia permanezca constante, estará siguiendo una trayectoria hiperbólica cuyos focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones de radio. Para cada diferencia de tiempo se tiene una trayectoria hiperbólica diferente, la cual conduce al barco a una posición distinta en la costa. Las cartas de navegación muestran las diferentes rutas hiperbólicas correspondientes a distintas deferencias constantes de tiempo.

<u>Problema</u>

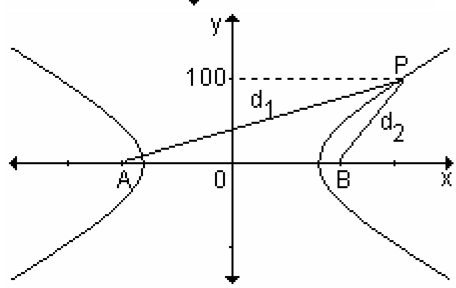
Un barco navega por una ruta a 100 millas de la costa, en dirección paralela a ella. El barco manda una señal de auxilio, que reciben dos estaciones guardacostas, A y B, situadas a 200 millas de distancia entre sí. A partir de la diferencia entre tiempos de recepción de la señal, se calcula que la nave está 160 millas más cerca de B que de A. ¿Dónde está la embarcación?



Introducimos un sistema de coordenadas, como se ve en el gráfico siguiente, estando las estaciones en los puntos A y B del eje x, y el barco en el punto P, en la recta y = 100.



En el momento que manda la señal, el barco se encuentra en la rama derecha de una hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, formada por todos los puntos tales que la diferencia de sus distancias a los focos B y A es $d_1 - d_2$.



Las coordenadas de los focos son (100, 0) y (–100, 0) ya que la distancia entre las estaciones es de 200 millas. Deducimos que c = 100.

Como la nave se encuentra 160 millas más cerca de B que de A, $d_1 - d_2 = 160$.

Al deducir la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, vimos que $d_1 - d_2 = 2a$.

Por lo tanto, para este caso, 2a = 160, o sea a = 80.

Calculamos el valor de b sabiendo que $b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 100^2 - 80^2 = 3600$.

La ecuación de la hipérbola es entonces $\frac{x^2}{6400} - \frac{y^2}{3600} = 1$.

Podemos obtener ahora la ubicación del barco, es decir, las coordenadas del punto P, reemplazando el valor de su ordenada, 100, en la ecuación hallada:

$\frac{x^2}{6400} - \frac{100^2}{3600} = 1$; despejando $x \cong 155{,}5$.

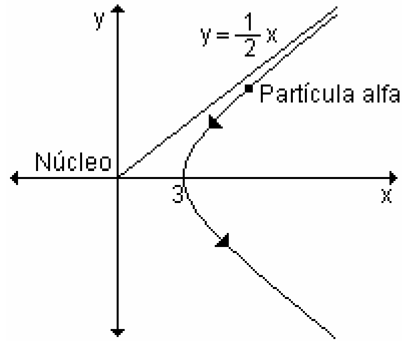
Las coordenadas del barco son, aproximadamente (155,5 ; 100).

Problema

En 1991, el físico Ernest Rutherford (1871-1937) descubrió que si se disparan partículas alfa hacia el núcleo de un átomo, a veces son repelidas y se alejan del núcleo, siguiendo trayectorias hiperbólicas. La figura muestra la trayectoria de una partícula que va hacia el origen por la recta $y = \frac{1}{2}x$ y llega a 3 unidades del núcleo. Deduzca la ecuación de esa trayectoria.

La partícula se desplaza sobre una hipérbola de eje focal coincidente con el eje de abscisas, vértice en el punto (3, 0) y asíntota coincidente con la recta $y = \frac{1}{2}x$.

La ecuación de la hipérbola que corresponde es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Las ecuaciones de las asíntotas de dicha hipérbola son $y = \pm\frac{b}{a}x$. Por lo tanto $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$. Como a = 3, deducimos que $b = \frac{3}{2}$.

La ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$.

La partícula se desplaza sobre la rama positiva de la hipérbola de ecuación $x = \sqrt{9 + 4y^2}$.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN CÓNICAS

1) Una caja rectangular de 1,35 m de alto tiene que ser deslizada a través de una puerta con forma de arco parabólico que tiene 1,80 m de alto en el centro y 0,75 m de ancho en la base. ¿Cuál es el máximo ancho posible que puede tener la caja?

2) La altura de un proyectil disparado desde el nivel del suelo es una parábola abierta hacia abajo. Si la altura máxima alcanzada por el proyectil es de 120 m y su alcance horizontal es de 900 m. ¿Cuál es la distancia horizontal desde el punto de disparo al punto donde el proyectil alcanza por primera vez una altura de 75 m?

3) Los cables que soportan un puente colgante toman la forma de una parábola. Las torres que sostienen sus extremos tienen 200 m de separación y los cables están atados a ellas a 25 m por encima del puente. ¿Qué longitud tiene el tirante que está a 40 m de la torre? (Suponga que el vértice de la parábola está en el piso del puente).

4) La parte inferior de un puente construido en forma de arco parabólico tiene una extensión de 120 m y una altura máxima de 25 m. Seleccione un sistema de coordenadas cartesianas adecuado y determine la altura del arco del puente a 10 m del centro.

5) Un espejo parabólico será utilizado para concentrar los rayos solares en su foco para crear una fuente de calor. Una sección transversal del mismo por su eje de simetría tiene 20 m de diámetro en su abertura y 6 m de profundidad. Seleccione un sistema de coordenadas cartesianas adecuado y determine dónde se concentrará la fuente de calor.

6) Un arco parabólico tiene 150 m de largo y una altura máxima de 11,25 m desde la base del mismo.

a) Determine la ecuación que representa la forma del arco.

b) Calcule la altura del arco estando a 30 m de uno de sus extremos.

7) El arco de forma semielíptica tiene una amplitud en su base de 20 m y la altura en el centro es de 9 m. Seleccione un sistema de coordenadas cartesianas adecuado y determine la altura del arco desde un punto ubicado a 8 m del centro.

8) El arco de un puente tiene forma semielíptica tal que la longitud del eje mayor es 10 m y su altura máxima es 3 m. ¿A qué distancia de cada uno de los extremos debe ubicarse una columna de 1,8 m de alto?

9) Una cúpula tiene una sección vertical semielíptica de 10 m de diámetro mayor y 4 m de altura. ¿A qué altura se encuentra la cúpula si un observador se sitúa en uno de sus focos?

10) Mercurio, como todos los demás planetas, describe una órbita elíptica con el Sol ubicado en uno de sus focos. Se sabe que el afelio es de 69 millones de km y el perihelio de 47 millones de km. Con esta información y considerando el centro de la órbita coincidente con el origen de coordenadas:

a) Determine la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica.

b) Calcule la excentricidad

c) Obtenga la ecuación de la órbita que describe el movimiento de Mercurio alrededor del Sol.

11) Un satélite gira alrededor del planeta Júpiter describiendo una órbita elíptica en la que el centro del planeta ocupa uno de los focos. La longitud del eje mayor de la órbita es 10^9 m y la longitud del eje menor, 6.10^8 m.

a) Determine la distancia mínima entre el satélite y el centro de Júpiter.

b) Calcule la distancia máxima entre ambos.

12) La órbita de la Tierra es tal que el eje mayor de la misma mide 299,2 millones de kilómetros y la excentricidad es 0,017. Determine la ecuación de dicha órbita.

13) Un cometa tiene una órbita elíptica en la cual el Sol ocupa uno de sus focos. Las observaciones determinan que el perihelio y el afelio son respectivamente 0,59 U.A. y 35,28 U.A. Calcule los diámetros mayor y menor de la órbita de dicho cometa.

14) En una galería de los susurros, una persona parada en uno de los focos está ubicada a 4m de la pared más cercana. Una amiga, parada en el otro foco, está situada a 12 m de ella. Calcule:

a) La longitud de la galería.

b) la altura del techo en el centro de la galería.

15) Dos cabinas de transmisión A y B están ubicadas a 160 km de distancia. El piloto de un avión V, a través de señales emitidas por ellas, sabe que en un determinado momento, la diferencia de las distancias de su avión a la cabina A y a la cabina B es de 100 km. Seleccionando un sistema de coordenadas cartesianas de manera tal que las cabinas de transmisión queden ubicadas en el eje horizontal, determine la ecuación de la curva que describe las posibles posiciones del avión.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE DEL CAPÍTULO

1) La ecuación de la circunferencia con centro en el punto C(–2, 3) y radio 2 es:

a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ **b)** $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$

c) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 2$ **d)** $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 2$

2) Si una parábola es tal que su vértice es el origen de coordenadas, el eje focal es el eje x y el punto $A\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ le pertenece, su ecuación es:

a) $y^2 = 8x$ **b)** $y^2 = -8x$ **c)** $x^2 = 8y$ **d)** $x^2 = -8y$

3) La ecuación de la elipse cuyos focos son $F_1(4, 0)$, $F_2(-4, 0)$ y su eje menor tiene longitud 6 es:

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ **b)** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ **d)** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

4) La hipérbola cuyos focos son $F_1(5, 0)$, $F_2(-5, 0)$ y las coordenadas de uno de sus vértices es (–3, 0), tiene por ecuación:

a) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ **b)** $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

c) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ **d)** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

5) La ecuación $9x^2 - 18x - 4y^2 - 16y = 43$ corresponde a:

a) elipse **b)** hipérbola

c) circunferencia **d)** ninguna de las anteriores

6) El vértice y la directriz de la parábola $(x-1)^2 + 8(y+2) = 0$ son:

a) V(1, –2); y = –4 **b)** V(–1, 2); y = 4

c) V(1, –2); y = 0 **d)** V(–1, 2); y = 0

7) Las coordenadas de los focos de $\frac{(y-2)^2}{36} - \frac{(x-4)^2}{64} = 1$ son:

a) $F_1(14, 2)$, $F_2(-6, 2)$ **b)** $F_1(4, 12)$, $F_2(4, -8)$

c) $F_1(12, 4)$, $F_2(-8, 4)$ **d)** $F_1(2, 14)$, $F_2(2, -6)$

8) A una circunferencia con centro en el eje x le pertenecen los puntos P(1, –3) y Q(4, –6). Las coordenadas de dicho centro son:

a) C(0, –7) **b)** C(–7, 0) **c)** C(0, 7) **d)** C(7, 0)

9) La excentricidad de la elipse $\frac{(x+2)^2}{100}+\frac{(y-5)^2}{64}=1$ es:

a) $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{5}{3}$ **d)** $\frac{4}{5}$ **d)** $\frac{5}{4}$

10) La ecuación $5x^2 - 20x + 3y^2 + 5 = 0$ corresponde a:

a) elipse **b)** hipérbola
c) circunferencia **d)** ninguna de las anteriores

11) La ecuación de la hipérbola cuyos vértices son $V_1(2, 0)$, $V_2(-2, 0)$ y asíntotas $y = \pm 4x$, tiene por ecuación:

a) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ **b)** $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{4}=1$

c) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{64}=1$ **d)** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$

12) Los focos de $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ son:

a) $F_1(0, 3)$, $F_2(0, -3)$ **b)** $F_1(3, 0)$, $F_2(-3, 0)$

c) $F_1(0, 9)$, $F_2(0, -9)$ **d)** $F_1(9, 0)$, $F_2(-9, 0)$

13) La ecuación ordinaria de la parábola $x^2 + 4x + 4y - 4 = 0$ es:

a) $(x + 2)^2 = -4(y - 2)$ **b)** $(x + 2)^2 = -4(y + 2)$
c) $(x + 2)^2 = 4(y - 1)$ **d)** $(x + 2)^2 = -4(y + 1)$

14) El diámetro de una circunferencia está determinado por los puntos A(–5, 5) y B(1, –3). La longitud de su radio es:

a) 5 **b)** 10 **c)** 15 **d)** 25

15) La ecuación $x^2 + y^2 + 6y + 18 = 0$ corresponde a:

a) elipse **b)** hipérbola
c) circunferencia **d)** ninguna de las anteriores

16) Una hipérbola tiene su centro en el origen de coordenadas, una de sus focos es F(0, –5) y la longitud del eje conjugado es 6. Su ecuación es:

a) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ **b)** $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

c) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{9}=1$ **d)** $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$

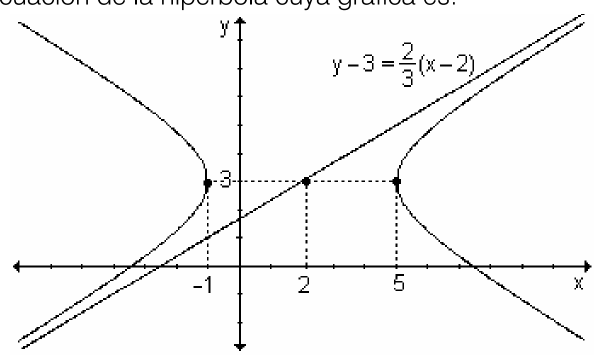
AUTOEVALUACIÓN Nº 4: CÓNICAS

1) Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(0, –2) y B(6, 6), sabiendo que su centro pertenece a la recta $x - y = 1$.

2) Halle la ecuación de la elipse de eje focal paralelo al eje de abscisas y centro coincidente con el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$. Se sabe además que la distancia entre los focos es 8 y entre los vértices secundarios es 6. Calcule las coordenadas de los vértices, focos y grafique.

3) La ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 20 = 0$¿Qué lugar geométrico puede representar? Justifique su respuesta. Complete cuadrados para especificar el lugar geométrico e indique sus elementos.

4) Escriba la ecuación de la hipérbola cuya gráfica es:



5) Encuentre la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto (3, 2) es igual a la distancia a la recta $x + 1 = 0$. Identifique el lugar geométrico, grafique y halle sus elementos.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

1) Escriba la ecuación de la circunferencia que se obtiene con los datos dados en cada caso. Grafique.

a) Centro C(–3, –5) y radio r = 7.

b) Centro C(7, –6) y contiene al punto A(2, 2).

c) Centro C(0, –2) y es tangente a la recta $5x - 12y = -2$.

d) C(–4, –1) y es tangente a $3x + 2y = 12$.

e) Contiene al punto A(7, –5) y el centro es el punto de intersección de las rectas $r_1 : 7x - 9y - 10 = 0$ y $r_2 : 2x - 5y + 2 = 0$.

f) Centro en el eje x y pasa por los puntos A(1, 3) y B(4, 6).

g) Centro C(2, –4) y es tangente al eje de ordenadas.

h) Un diámetro tiene por extremo a $P_1(-4, 5)$ y $P_2(2, -3)$.

i) Pasa por los puntos A(2, 3) y B(–1, 1) y cuyo centro pertenece a la recta $x - 3y - 11 = 0$.

2) Determine analítica y gráficamente la intersección entre la recta y la circunferencia en cada caso. ¿En qué posición se encuentra la recta con respecto a la circunferencia?

a) $(x-1)^2+(y-1)^2=9$; $y=x+3$

b) $x^2+(y-2)^2=16$; $x-y-4=0$

c) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$; $x=1$

3) Halle la ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas y que:

a) está situada en el semiplano derecho, es simétrica respecto al eje de abscisas y $|p|=3$.

b) está situada en el semiplano inferior, es simétrica respecto al eje ordenadas y $|p|=\frac{1}{2}$.

c) es simétrica respecto al eje de abscisas y el punto A(–1, 3) le pertenece.

d) es simétrica respecto al eje de ordenadas y el punto B(1, 1) le pertenece.

e) su directriz es la recta de ecuación $x=-\frac{2}{3}$.

f) su foco es el punto $F\left(0,-\frac{1}{8}\right)$.

4) Obtenga las coordenadas del vértice, foco, ecuaciones del eje focal y de la directriz de las siguientes parábolas:

a) $y^2=4x$ **b)** $x^2=y$ **c)** $y=-\frac{1}{3}x^2$

d) $x^2+2y=0$

5) Halle la ecuación de las siguientes parábolas, represéntelas e indique los elementos que faltan.

a) Foco F(3, 4), directriz $x-1=0$.

b) Vértice V(4, –1), eje focal $y+1=0$ y P(3, –3) le pertenece.

c) Vértice V(2, –3),eje focal $x=2$ y P(4, –7) le pertenece.

d) Vértice V(–2, –2), directriz $y=-\frac{9}{4}$ y eje focal paralelo al eje de ordenadas.

6) Calcule analítica y gráficamente los puntos de intersección de la parábola con la recta. ¿En qué posición se encuentra la recta con respecto a la parábola?

a) $y=x^2$; $y=4x-4$

b) $y^2-6x=0$; $3x-2y+6=0$

c) $y=x^2-5x+6$; $2x+y=4$

7) Encuentre la ecuación de la elipse con los datos que se dan. Grafique.

a) Vértices principales $V_1(0, 6)$ y $V_2(0, -6)$; focos $F_1(0, 3)$ y $F_2(0, -3)$.

b) Focos $F_1(4, 0)$ y $F_2(-4, 0)$, excentricidad $e=\frac{2}{3}$.

c) Eje focal coincidente con el eje de abscisas, la distancia entre los vértices secundarios es 4 y la distancia entre los focos es $2\sqrt{5}$.

d) Centro en el origen de coordenadas, eje normal coincidente con el eje de abscisas. La distancia entre los vértices principales es el doble de la distancia entre los vértices secundarios y que el punto $A\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3\right)$ le pertenece.

8) El centro de una elipse es el punto (–2, –1) y uno de sus vértices principales es V(3, –1). Si la longitud de cada lado recto es 4, halle su ecuación, las coordenadas de sus vértices, de sus focos y su excentricidad.

9) Uno de los vértices secundarios de una elipse es el punto V(3, –1) y sus focos pertenecen a la recta $y + 6 = 0$. Escriba la ecuación de la elipse sabiendo que su excentricidad es $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Grafique e indique las coordenadas de sus vértices y de sus focos.

10) Determine analítica y gráficamente la intersección entre la elipse y la recta. ¿Cuál es la posición de la recta con respecto a la elipse?

a) $x^2 + 4y^2 = 25$; $x + y - 5 = 0$

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; $3x - 4y - 20 = 0$

11) Obtenga la ecuación de la hipérbola con los datos dados. Grafique.

a) Vértices $V_1(5, 0)$ y $V_2(-5, 0)$; focos $F_1(13, 0)$ y $F_2(-13, 0)$.

b) C(0, 0), eje transverso coincidente con el eje de ordenadas, la distancia entre los vértices es 10 y la distancia entre los focos es 12.

c) Centro C(0, 0), eje transverso coincidente con el eje de ordenadas, la distancia entre el centro y cada foco es 5 y la excentricidad es $\frac{5}{3}$.

d) Centro C(0, 0), eje transverso coincide con el eje de abscisas, asíntotas $y = \pm\frac{4}{3}x$ y la distancia focal es 20.

e) Centro C(0, 0), eje focal coincide con el eje de abscisas, el punto $M\left(\frac{9}{2}, -1\right)$ le pertenece y las asíntotas son las rectas $y = \pm\frac{2}{3}x$.

f) Vértices $V_1(-3, 2)$ y $V_2(-3, -2)$ y la amplitud tomada sobre el eje conjugado es 6.

g) Vértices $V_1(3, 3)$ y $V_2(-1, 3)$ y la excentricidad $\frac{3}{2}$.

h) Centro C(4, 5); F(2, 5) es uno de sus focos y la excentricidad 2.

12) Encuentre la ecuación de la hipérbola cuyo eje conjugado es $x = 2$, su eje transverso es $y = 1$, uno de sus vértices V(6, 1) y su excentricidad es 1,25. Grafique e indique los elementos que faltan.

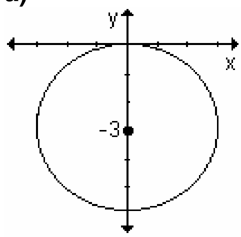
13) Halle analítica y gráficamente los puntos de intersección de las rectas con las hipérbolas:

a) $2x - y - 10 = 0$; $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ **b)** $4x - 3y = 16$; $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

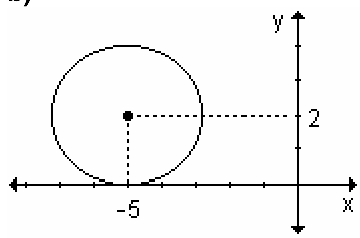
c) $2x - y + 1 = 0$; $4x^2 - 9y^2 = 36$

14) Escriba las ecuaciones correspondientes a las siguientes gráficas:

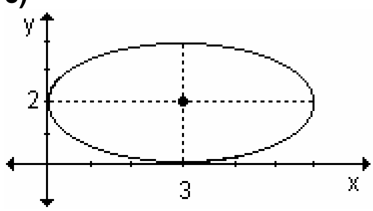
a)



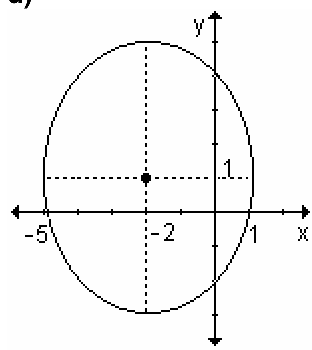
b)



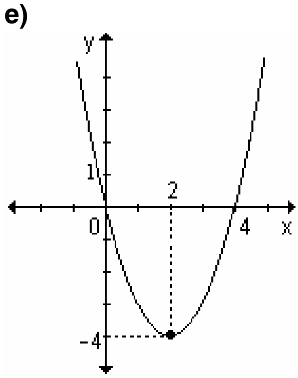
c)



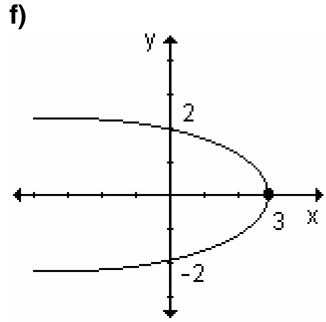
d)



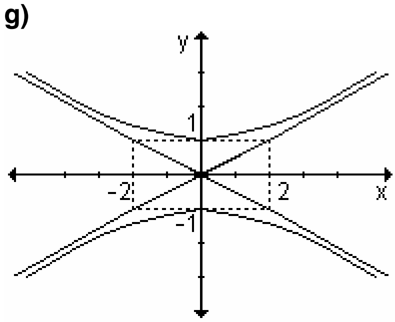
e)



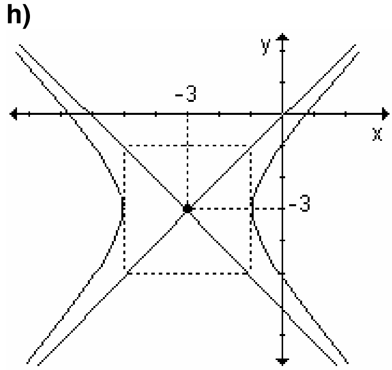
f)



g)



h)



15) Reduzca a la forma ordinaria las siguientes ecuaciones y de resultar un lugar geométrico determine los elementos:

a) $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$ **b)** $y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$

c) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$ **d)** $y^2 - 7x = 14$

e) $4x^2 + 4y^2 + 28x - 8y + 53 = 0$ **f)** $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 29 = 0$

g) $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$ **h)** $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$

i) $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 101=0$ **j)** $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$

k) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y +9 = 0$ **l)** $x^2 - 4y^2 - 2x + 1= 0$

m) $y^2 + 2y -15 = 0$ **n)** $3x^2 + 2x + 5 = 0$

16) Halle la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta $x = 4$ y cuyo vértice coincide con el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$.

17) Determine la ecuación de la circunferencia cuyo centro coincide con el centro de la hipérbola $x^2 + 2x - 2y^2 - 12y - 29 = 0$ y que además es tangente a la recta que une el punto $A(-2, 4)$ con el vértice de la parábola $(x - 2)^2 = 8(y - 1)$.

18) Calcule la longitud de la cuerda focal de la parábola $4y = x^2 - 4x + 4$ paralela a la recta $4y + 3x = 0$.

19) Escriba la ecuación de la circunferencia cuyo centro coincide con el vértice de la parábola $x^2 - 6x - 2y + 11 = 0$ y es tangente a la recta $4x + 3y - 9 = 0$.

20) Calcule la ecuación de la parábola de eje focal paralelo al eje de ordenadas, cuya directriz es $y = -\dfrac{9}{4}$ y cuyo vértice coincide con el centro de la elipse de ecuación $9x^2 + 4y^2 + 36x + 16y +16 = 0$.

21) Halle la longitud del segmento determinado por los puntos de intersección de las circunferencias:

$$C_1 : x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0 \quad \text{y} \quad C_2 : x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$$

22) Una cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ pertenece a la recta de ecuación $x - 7y + 25 = 0$. Calcule su longitud.

23) Dada la recta $y + x - a = 0$ y la parábola $y = x^2 - 6ax + b$,

a) halle el valor de a y b de manera que le punto (1, 0) les pertenezca,

b) grafique ambas curvas en un mismo sistema cartesiano.

24) Dada la ecuación $\dfrac{(x-k)^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ determine el valor de k de modo que la recta $y = 2$ sea tangente en el punto de abscisa 1.

25) ¿Para qué valores de k, la recta $y = kx + 2$:

a) corta a la parábola $y^2 = 4x$? **b)** es tangente a ella? **c)** pasa fuera de ella?

26) Calcule **a)** el valor de a de modo que el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2a + 3 - 2x + 6y = 0$ sea 2.

b) la distancia entre el centro de la circunferencia y la recta de pendiente igual a 1 que pasa por el punto (0, 1).

27) Determine el valor de k para que la ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 10y + k = 0$ represente una circunferencia de radio 7.

5. RECTA Y PLANO EN EL ESPACIO

5.1 Recta en el espacio R^3.

5.2 Plano en el espacio R^3.

5.3 Posiciones relativas entre dos rectas en R^3.

Posiciones relativas entre recta y plano en R^3.

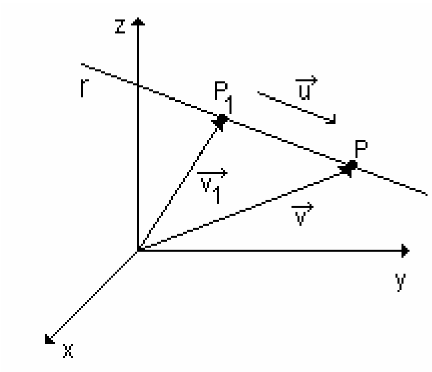
> Estudiar los procedimientos del pensamiento geométrico nos permite alcanzar lo más esencial de la mente humana.

Henri Poincaré

5.1 Recta en el espacio R^3

En el espacio de tres dimensiones R^3 las ideas básicas son las mismas que en el espacio R^2. Dado que dos puntos determinan una recta, podemos calcular su ecuación conociendo esos puntos. También podemos hallarla si conocemos un vector paralelo y un punto que le pertenece.

Ecuación de la recta determinada por un punto y una dirección



Datos: $P_1(x_1, y_1, z_1) \in r$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \ // \ r$$

$P(x, y, z)$ punto genérico de r

Incógnita: ecuación de la recta r

Sea $\vec{v_1}$ el vector posición del punto P_1 y $\vec{v}$ el vector posición del punto P. Como la recta r debe ser paralela a $\vec{u}$ podemos decir que el punto $P(x, y, z)$ pertenece a r si y sólo si $\vec{v} = \vec{v_1} + t\,\vec{u}$, $t \in R$.

La expresión $\vec{v} = \vec{v_1} + t\,\vec{u}$, $t \in R$, se denomina *ecuación vectorial* de la recta r.

Como $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ y $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, reemplazando resulta:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \ t \in R$$

Efectuando operaciones entre vectores:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tu_1 \\ tu_2 \\ tu_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + tu_1 \\ y_1 + tu_2 \\ z_1 + tu_3 \end{bmatrix}$$

Igualando los vectores obtenemos:

$$\begin{cases} x = x_1 + tu_1 \\ y = y_1 + tu_2 \\ z = z_1 + tu_3 \end{cases}, \ t \in R.$$ Esta es la *ecuación paramétrica* de la recta r.

Si $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ y $u_3 \neq 0$ podemos despejar el parámetro t y obtenemos:

$$\frac{x - x_1}{u_1} = t \qquad \frac{y - y_1}{u_2} = t \qquad \frac{z - z_1}{u_3} = t$$

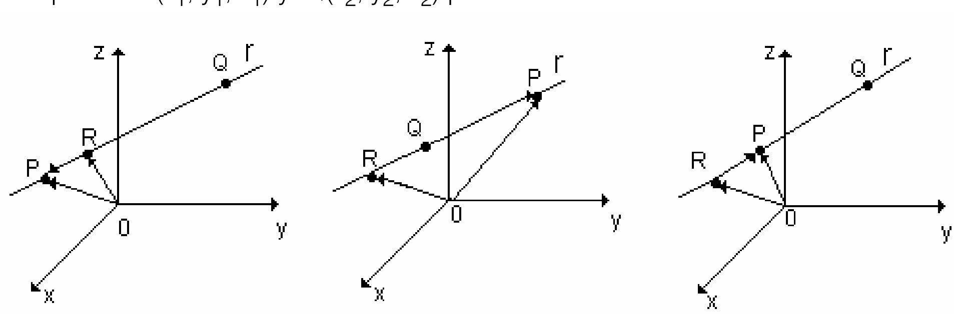
Igualando surge $\frac{x - x_1}{u_1} = \frac{y - y_1}{u_2} = \frac{z - z_1}{u_3}$ conocida como *ecuación simétrica* de la recta r que contiene al punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y es paralela al vector $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ (donde $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ y $u_3 \neq 0$). El vector $\vec{u}$ se llama *vector dirección* de la recta.

Ecuación de la recta determinada por dos puntos no coincidentes

Datos: $R(x_1, y_1, z_1) \in r$, $Q(x_2, y_2, z_2) \in r$ y $P(x, y, z)$ punto genérico

Incógnita: ecuación de la recta r

Los puntos $R(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ pertenecen a la recta.



Podemos determinar un vector paralelo a r, es decir, un vector $\vec{u}$ tal que

$$\vec{u} = \vec{RQ} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}.$$

Ahora tenemos como datos $R \in r$, $Q \in r$ y $\vec{u} \,//\, r$.

Dado que $P(x, y, z)$ es un punto genérico de r, el vector $\vec{RP}$ es paralelo a $\vec{RQ}$ y a su vez paralelo a $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$ de manera que, por paralelismo entre vectores, escribimos $\vec{RP} = t\,\vec{u}$ donde $t \in R$.

Según vemos en la gráfica $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RP}$ y dado que $\overrightarrow{RP} = t\,\overrightarrow{u}$ podemos escribir $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + t\,\overrightarrow{u}$ que es la *ecuación vectorial* de la recta r.

Si expresamos todos los vectores según sus componentes resulta $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$, $t \in R$ y por operaciones e igualdad entre vectores obtenemos $\begin{cases} x = x_1 + t\,(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t\,(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t\,(z_2 - z_1) \end{cases}$, $t \in R$ que son las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a los puntos $R(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$.

De aquí, despejando t de cada una de las ecuaciones, se llega a $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = t$, $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t$, $\dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t$ para $x_2 \neq x_1$; $y_2 \neq y_1$; $z_2 \neq z_1$ pues los puntos R y Q no son coincidentes.

Igualando resulta $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ que es la *ecuación simétrica* de la recta r.

Nota. Debemos tener en cuenta que las ecuaciones estudiadas no son únicas, varían según los puntos de la recta que se elijan.

Si bien el punto $R(x_1, y_1, z_1)$ no puede ser coincidente con el $Q(x_2, y_2, z_2)$ puede ocurrir que una de las componentes sea coincidente, por ejemplo $x_1 = x_2$. En ese caso el vector paralelo resulta $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$. La ecuación paramétrica es

$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$ $t \in R$ y la ecuación simétrica $x = x_1$, $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

De la misma manera si $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ resulta la ecuación paramétrica:

$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$ y la simétrica: $x = x_1$; $y = y_1$; $\dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

La ecuación de una recta en el espacio se obtiene especificando un punto sobre la recta y un vector paralelo a la misma.

Ejemplo.

a) Halle la ecuación paramétrica de la recta paralela al vector $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, que pase por el punto M(2, 0, 3).
b) Encuentre las coordenadas de los puntos que pertenecen a la recta si t = –2 y t = 1.

c) ¿El punto $R\left(3, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ pertenece a la recta?

a) La ecuación paramétrica de la recta es de la forma $\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$ donde

(x_0, y_0, z_0) son las coordenadas de un punto que le pertenece y u_1, u_2 y u_3 son las componentes de un vector paralelo a la recta.

En el ejemplo, el punto es M(2, 0, 3) y $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ es el vector paralelo; así, reemplazando resulta:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 0 + 1t \\ z = 3 + (-1)t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}, \quad t \in R.$$

b) Para calcular las coordenadas del punto que corresponde a un valor particular de t reemplazamos en la ecuación hallada.

Para t = –2: $\begin{cases} x = 2 + 2.(-2) \\ y = -2 \\ z = 3 - (-2) \end{cases}$ obtenemos el punto P(–2, –2, 5).

Para t = 1: $\begin{cases} x = 2 + 2.1 \\ y = 1 \\ z = 3 - 1 \end{cases}$ obtenemos el punto Q(4, 1, 2).

c) Para determinar el valor del parámetro t que corresponde al punto $R\left(3, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ sustituimos sus coordenadas en la ecuación y resulta: $\begin{cases} 3 = 2 + 2t \\ \frac{1}{2} = t \\ \frac{5}{2} = 3 - t \end{cases}$. Despejando de cualquiera de las tres igualdades obtenemos que $t = \frac{1}{2}$ y, por lo tanto, el punto pertenece a la recta.

Ejemplo: Determine la ecuación paramétrica de la recta a la que pertenecen los puntos P(1, –4, 3) y Q(4, 1, 2). Luego escriba la ecuación simétrica de dicha recta.

En primer lugar hallamos un vector paralelo a la recta, $\vec{PQ} = \begin{bmatrix} 4-1 \\ 1-(-4) \\ 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$.

También podría ser su opuesto, $\vec{QP}$ o cualquier vector paralelo a ellos. Con el vector paralelo y uno cualquiera de los puntos (tomamos, por ejemplo, Q) la ecuación paramétrica resulta: $\begin{cases} x = 4+3t \\ y = 1+5t \\ z = 2-t \end{cases}$.

La ecuación simétrica se obtiene despejando el parámetro t e igualando las expresiones: $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-2}{-1}$.

EJERCICIOS

1) Obtenga la ecuación simétrica de las rectas que pasan por P_1 y P_2. Interprete los distintos coeficientes.

a) $P_1(1, -2, 3)$ $\quad$ $P_2(-2, 3, -1)$

b) $P_1(-4, -3, 2)$ $\quad$ $P_2(-5, -3, 1)$

c) $P_1(-2, 3, 5)$ $\quad$ $P_2(3, -1, 2)$

2) Escriba las ecuaciones del ejercicio 1 en la forma paramétrica.

3) Encuentre la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto A y es paralela al vector $\vec{v}$.

a) A(–3, 1, 4) $\quad$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) A(2, 3, 4) $\quad$ $\vec{v} = 3\,\vec{i} + \vec{j}$

c) A(–2, 0, –1) $\quad$ $\vec{v} = -\vec{k}$

RESPUESTAS

1) **a)** $\dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z-3}{-4}$; vector paralelo a la recta $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$

b) $x + 4 = z - 2$; $y = -3$; vector paralelo a la recta $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z-5}{-3}$; vector paralelo a la recta $\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$

2)a) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 5t\,, \ t \in R \\ z = 3 - 4t \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = -4 + t \\ y = -3 \quad , \ t \in R \\ z = 2 + t \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 3 - 4t \quad , \ t \in R \\ z = 5 - 3t \end{cases}$

3)a) $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 + 7t \quad , \ t \in R \\ z = 4 - t \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + t \quad , \ t \in R \\ z = 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \quad , \ t \in R \\ z = -1 - t \end{cases}$

EJERCICIOS INTEGRADORES 5.1 RECTA EN EL ESPACIO R^3

1)a) Escriba la ecuación paramétrica de la recta que pasa por P(–2, 3, 5) y es paralela al vector $\vec{v} = 3\,\vec{j} - \vec{i} + \vec{k}$.

b) Pase dicha ecuación a la forma simétrica.

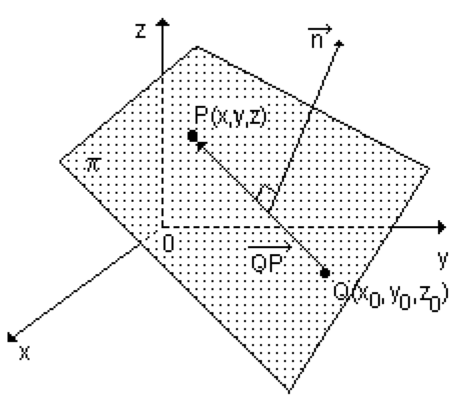
2)a) Escriba la ecuación simétrica de la recta que pasa por los puntos A(–2, 3, 5) y B(–1, 0, 7).

b) Pase a la forma paramétrica.

c) Encuentre otros tres puntos que pertenezcan a la recta.

5.2 Plano en el espacio R^3

Ecuación del plano determinado por un punto y una dirección



Podemos encontrar la ecuación de un plano en el espacio especificando un punto en dicho plano y un vector perpendicular a todos los vectores en el plano. A este vector perpendicular lo llamamos vector normal al plano y lo indicamos $\vec{n}$.

En general el plano se indica π.

Definición: Sea Q un punto en el espacio y $\vec{n}$ un vector distinto del vector nulo.

El conjunto de puntos P para los que $\vec{QP}.\vec{n}=0$ constituye un plano en R^3.

P pertenece al plano π sí y sólo sí $\vec{QP}.\vec{n}=0$ y enunciamos así la *ecuación vectorial* del plano.

Sea $Q(x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo sobre un plano con vector normal $\vec{n}=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}+c\,\vec{k}$. Si P(x, y, z) es un punto genérico del plano entonces $\vec{QP}=(x-x_0)\,\vec{i}+(y-y_0)\,\vec{j}+(z-z_0)\,\vec{k}$.

Como $\vec{QP}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares su producto escalar es nulo, es decir que $\vec{QP}.\vec{n}=0$ y por lo tanto: $(x-x_0).a + (y-y_0).b + (z-z_0).c = 0$

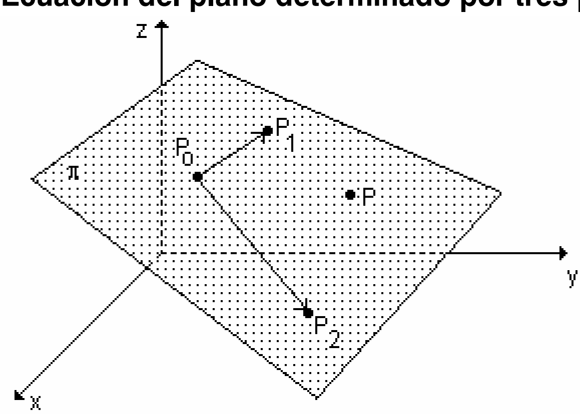
Resolviendo tenemos: $ax - ax_0 + by - by_0 + z - z_0\,c = 0$

$ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0$.

Llamando $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ resulta $ax + by + cz + d = 0$ que es la *ecuación cartesiana* del plano que contiene al punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ y es perpendicular al vector $\vec{n}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

Nota: La ecuación del plano es una ecuación algebraica racional entera de primer grado en tres variables. Los coeficientes de las variables son las componentes de un vector normal al plano.

Ecuación del plano determinado por tres puntos no alineados



Datos:

$P_0\,(x_0, y_0, z_0) \in \pi$,

$P_1\,(x_1, y_1, z_1) \in \pi$,

$P_2\,(x_2, y_2, z_2) \in \pi$

P(x, y, z) punto genérico del plano

Incógnita:
ecuación del plano π

Como los tres puntos están en el plano los vectores formados con ellos $\vec{P_0P_1}$ y $\vec{P_0P_2}$ también pertenecen al plano. Si realizamos el producto vectorial entre ellos logramos un vector perpendicular a los dos vectores determinados y, por lo tanto, perpendicular al plano buscado: $\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} = \vec{n}$.

Hallado el vector o dirección normal, con cualquiera de los puntos que tenemos como dato determinamos la ecuación buscada.

Ejemplo: Determine la ecuación del plano que es perpendicular al vector $\vec{n} = \vec{j} + \vec{k} - 2\,\vec{i}$ y que contiene al punto R(3, 0, 5).

La ecuación cartesiana del plano es $ax + by + cz + d = 0$ donde el vector $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ es perpendicular al mismo. En nuestro caso dicho vector es $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, entonces la ecuación resulta $-2x + y + z + d = 0$.

Como el punto R(3, 0, 5) le pertenece sus coordenadas verifican la ecuación, es decir $-2.3 + 0 + 5 + d = 0 \Rightarrow -6 + 0 + 5 + d = 0 \Rightarrow -1 + d = 0 \Rightarrow d = 1$

La ecuación del plano buscada es $-2x + y + z + 1 = 0$.

Ejemplo: Obtenga la ecuación del plano al que pertenecen los puntos P(–1, 1, 3); Q(1, 2, –1) y R(0, 4, –3).

Si los puntos P, Q y R pertenecen al plano, los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son paralelos al mismo. Realizando entre ellos el producto vectorial obtendremos un vector $\vec{n}$ perpendicular a ambos y, por lo tanto, también perpendicular al plano.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 1-(-1) \\ 2-1 \\ -1-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} 0-(-1) \\ 4-1 \\ -3-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los elementos de la primera línea:

$$\vec{n} = (-6 + 12)\,\vec{i} - (-12 + 4)\,\vec{j} + (6 - 1)\,\vec{k}$$

El vector normal al plano es $\vec{n} = 6\,\vec{i} + 8\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$.

La ecuación cartesiana del plano es ax + by + cz + d = 0 donde el vector $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ es perpendicular al mismo. En nuestro caso reemplazando en la ecuación resulta $6x + 8y + 5z + d = 0$.

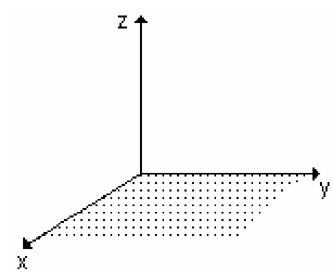
Como los tres puntos pertenecen al plano, sustituyendo las coordenadas de cualquiera de los tres calculamos el valor de d. Elegimos, por ejemplo, el punto R(0, 4, –3) y calculamos:

$6.0 + 8.4 + 5.(-3) + d = 0 \quad \Rightarrow \quad 32 - 15 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad 17 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -17$

La ecuación buscada es $6x + 8y + 5z - 17 = 0$.

Los planos coordenados xy, xz e yz

El plano xy pasa por el origen de coordenadas, es decir, por el punto (0, 0, 0) y cualquier vector sobre el eje z es normal a él. En particular el versor fundamental $\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector normal al plano.

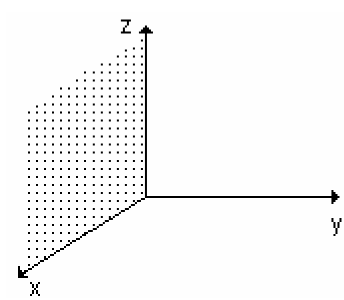


Teniendo en cuenta la ecuación $(x - x_0).a + (y - y_0).b + (z - z_0).c = 0$ resulta:

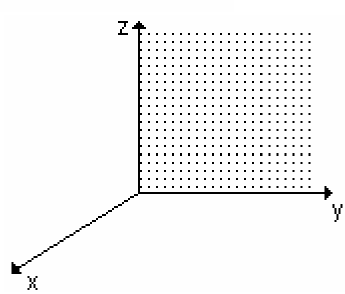
$(x - 0).0 + (y - 0).0 + (z - 0).1 = 0$ y de aquí $z = 0$ es la ecuación del plano xy.

Trabajando de manera similar resulta

$y = 0$ la ecuación del *plano xz*



$x = 0$ representa el *plano yz*

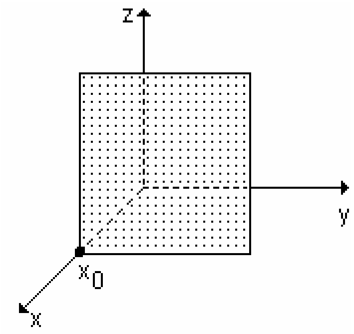


¿Cómo graficamos planos?

Para graficar planos debemos tener en cuenta dos situaciones diferentes:

- *El plano es paralelo a un plano coordenado*

Consideremos un plano paralelo al plano yz que contiene al punto ubicado sobre el eje x de coordenadas $(x_0, 0, 0)$.



Cualquier vector sobre el eje x es perpendicular al plano, y en particular, el versor fundamental $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

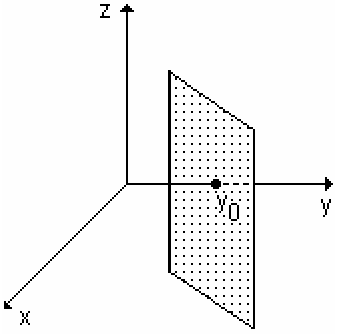
De aquí, teniendo en cuenta la ecuación

$(x - x_0).a + (y - y_0).b + (z - z_0).c = 0$,

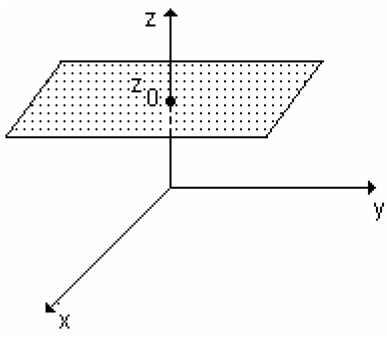
resulta $(x - x_0).1 + (y - 0).0 + (z - 0).0 = 0 \Rightarrow x - x_0 = 0 \Rightarrow x = x_0$ es la ecuación del plano paralelo al plano yz que contiene al punto $(x_0, 0, 0)$.

De la misma forma:

$y = y_0$ es la ecuación del plano paralelo al plano xz que contiene al punto $(0, y_0, 0)$.



$z = z_0$ es la ecuación del plano paralelo al plano xy que contiene al punto $(0, 0, z_0)$.



- *El plano corta a cada eje coordenado*

Supongamos que la ecuación del plano es: $ax + by + cz + d = 0$ con $a, b, c \neq 0$.

Su intersección con el eje x es el punto $\left(-\dfrac{d}{a}, 0, 0\right)$.

Su intersección con el eje y es el punto $\left(0, -\dfrac{d}{b}, 0\right)$.

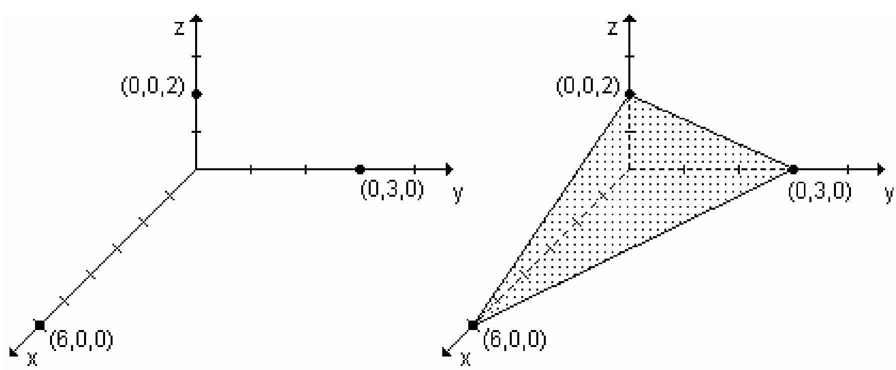
Su intersección con el eje z es el punto $\left(0, 0, -\dfrac{d}{c}\right)$.

Para graficar el plano se siguen los siguientes pasos:

- Se marcan los tres puntos de intersección.
- Se unen los tres puntos de intersección para formar un triángulo.

Ejemplo: Grafique el plano de ecuación $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Para obtener la gráfica del plano buscamos las intersecciones del mismo con cada uno de los ejes coordenados. Para ello anulamos en la ecuación en forma simultánea dos de las variables y obtenemos el valor de la tercera.

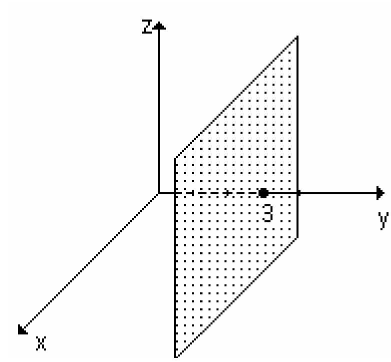


Ejemplo: Determine la ecuación del plano paralelo al plano xz que pasa por el punto E(0, 3, 0). Grafique.

Cualquier vector paralelo al eje y es perpendicular al plano buscado. Por ejemplo elegimos $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ reemplazando en la ecuación cartesiana del plano resulta:

$0.x + 2y + 0.z + d = 0.$

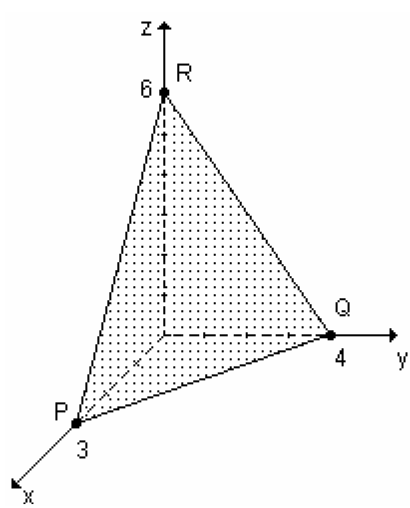
Como el punto E(0, 3, 0) pertenece al plano, sus coordenadas verifican la ecuación: $2.3 + d = 0 \Rightarrow d = -6$.
La ecuación es $2y - 6 = 0$, es decir, $y = 3$.



Ejemplo: Sea la ecuación del plano $4x + 3y + 2z - 12 = 0$, calcule la intersección con los ejes coordenados y grafique.

Para determinar la intersección con el eje x reemplazamos las variables z e y por cero y resulta:
$4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$. El punto de intersección con el eje x es P(3, 0, 0).
Procediendo de manera similar: $x = z = 0 \Rightarrow 3y - 12 = 0 \Rightarrow y = 4$
$x = y = 0 \Rightarrow 2z - 12 = 0 \Rightarrow z = 6$

La intersección con el eje y es Q(0, 4, 0) y con el eje z, R(0, 0, 6).



EJERCICIOS

1) Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto P y es normal al vector $\vec{n}$. En caso de resultar paralelo o coincidente a un plano coordenado, especifique a cuál.

a) $P(-1, -2, -3)$, $\vec{n} = \vec{i}$ **b)** $P(3, 2, -5)$, $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j}$

c) $P(0, 0, 0)$, $\vec{n} = \vec{k}$ **d)** $P(-2, 1, -2)$, $\vec{n} = \vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$

2) Halle la ecuación del plano que contiene a los puntos dados en cada caso. En caso de resultar paralelo o coincidente a un plano coordenado, especifique a cuál. Grafique.

a) $P_1\,(1, 0, -1)$ $P_2\,(2, 0, 1)$ $P_3\,(-3, 0, 0)$

b) $P_1\,(2, -3, 1)$ $P_2\,(0, 0, 1)$ $P_3\,(-1, 2, 1)$

c) $P_1\,(0, 0, 2)$ $P_2\,(1, 0, 0)$ $P_3\,(0, -1, 0)$

RESPUESTAS

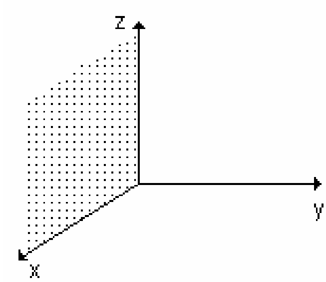
1)a) $x + 1 = 0$ (Plano paralelo al plano yz) **b)** $x + y - 5 = 0$

c) $z = 0$ (Plano coincidente con el plano xy) **d)** $x - 2y + 3z + 10 = 0$

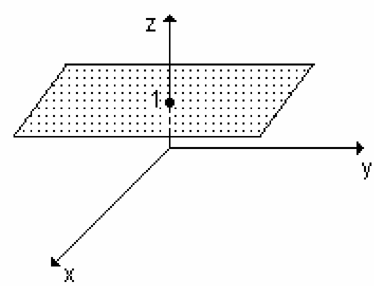
2)a) $y = 0$ (Plano coincidente con el plano xz)

b) $z = 1$ (Plano paralelo al plano xy) **c)** $2x - 2y + z = 2$

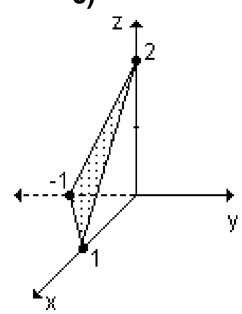
a)



b)



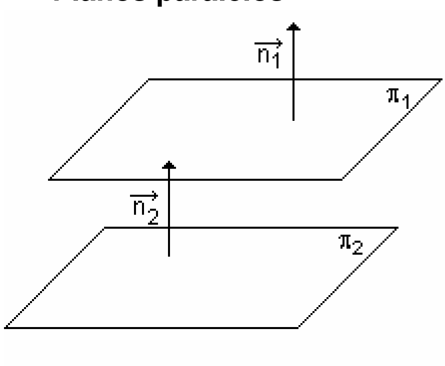
c)



Posiciones particulares entre dos planos en R^3

Los planos pueden cortarse, ser paralelos o coincidir.

- **Planos paralelos**

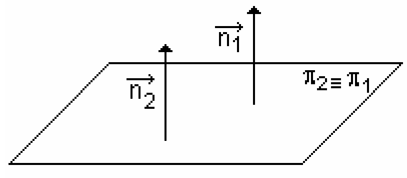


La condición necesaria y suficiente para que los planos sean paralelos es que los vectores normales correspondientes sean paralelos.

$$\pi_1 \ // \ \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \ // \ \vec{n_2} \Leftrightarrow$$

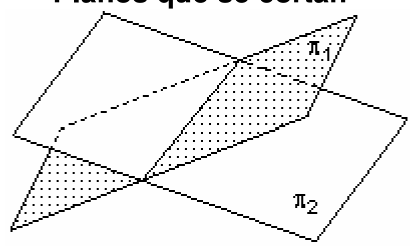
$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

- **Planos coincidentes**



Dos planos son coincidentes sí y sólo sí son paralelos y tienen, además, un punto en común.

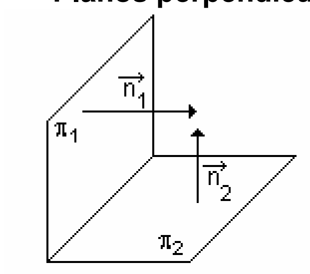
- **Planos que se cortan**



Si los planos no son paralelos ni coincidentes entonces se cortan en una recta.

Un caso especial es cuando los planos son perpendiculares porque se cortan formando un ángulo recto.

- **Planos perpendiculares**

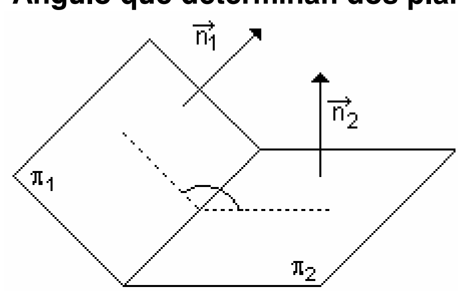


La condición necesaria y suficiente para que dos planos sean perpendiculares es que los vectores normales correspondientes sean perpendiculares.

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

Si no son perpendiculares pero se cortan , podemos calcular el ángulo que ellos determinan.

Ángulo que determinan dos planos



Dados los planos

$\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$ y

$\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$ donde

$$\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \perp \pi_1 \text{ y } \vec{n}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \perp \pi_2$$

El ángulo determinado por los dos planos coincide con el ángulo que forman sus vectores normales. Podemos calcularlo mediante la fórmula que obtuvimos en el primer capítulo cuando estudiamos vectores.

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|}.$$

Ejemplo: Analice la posición relativa entre cada uno de los planos dados. Encuentre el ángulo que determinan.

a) π_1: $3x - 2y - z - 4 = 0$ y π_2: $-x + y + 2z - 3 = 0$

b) π_1: $x - 2y + 3 = 0$ y π_2: $2x + y - 5z - 4 = 0$

c) π_1: $6x - y + 4z - 5 = 0$ y π_2: $-12x + 2y - 8z + 10 = 0$

a) Debemos analizar la posición entre sus vectores normales:

$$\vec{n_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad y \quad \vec{n_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Los vectores no son paralelos pues sus componentes homólogas no son proporcionales $\left(\frac{3}{-1} \neq \frac{-2}{1} \neq \frac{-1}{2}\right)$. Tampoco son perpendiculares pues su producto escalar es distinto de cero: $3.(-1) + (-2).\,1 + (-1)\,.\,2 \neq 0$.

Para calcular el ángulo que determinan, debemos encontrar el ángulo entre los vectores normales.

$$\cos\theta = \frac{3.(-1) + (-2).1 + (-1).2}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}\,.\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{6}} \approx -0{,}76 \Rightarrow$$

$\theta = \arccos(-0{,}76) \Rightarrow \theta = 139^{\circ}\ 47'\ 49''$.

b) Los planos dados son perpendiculares pues sus vectores normales lo son, ya que su producto escalar es cero. El ángulo que determinan es de 90°.

c) Los planos son coincidentes pues observamos que los vectores normales $\vec{n_1} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\vec{n_2} = \begin{bmatrix} -12 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$ son paralelos ya que sus componentes homólogas son proporcionales $\left(\frac{6}{-12} = \frac{-1}{2} = \frac{4}{-8}\right)$ y, además, si tomamos cualquier punto perteneciente a uno de los planos verifica también la ecuación del otro plano. Lo comprobamos buscando un punto perteneciente a π_1. Para ello le damos cualquier valor a x e y, y obtenemos el valor de z. Supongamos $x = 1$, $y = 1$, reemplazando en la ecuación, $z = 0$. O sea que el punto es $(1, 1, 0)$. Lo reemplazamos en la ecuación de π_2 y verificamos $-12 + 2 - 0 + 10 = 0$.

Al ser coincidentes el ángulo que determinan es de 0°.

Ejemplo: Halle la ecuación del plano paralelo al de ecuación $2x + 2y + z - 1 = 0$ y que pasa por el punto (3, 4, 5).

La ecuación buscada es de la forma $ax + by + cz + d = 0$, donde $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ es el vector normal al plano.

Si el plano buscado tiene que ser paralelo al de ecuación $2x + 2y + z - 1 = 0$, sus vectores normales también deben ser paralelos. Por lo tanto el vector normal del plano que debemos hallar debe ser de la forma $\vec{n} = k\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $k \in R$.

Podemos dar a k cualquier valor real, por ejemplo $k = 1$ y considerar como vector $\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

La ecuación es entonces $2x + 2y + z + d = 0$, en la que debemos hallar el valor de d. Para ello reemplazamos las coordenadas del punto (3, 4, 5) perteneciente al plano: $2.3 + 2.4 + 5 + d = 0$.

Despejamos y hallamos $d = -19$. Reemplazamos este valor en la ecuación y resulta la ecuación del plano buscada: $2x + 2y + z - 19 = 0$.

Ejemplo: Calcule el valor de a para que los planos dados $4x - 3y + 2z - 8 = 0$ y $-x - y + a + 2 = 0$ sean perpendiculares.

Para que los planos sean perpendiculares, sus vectores normales también deben serlo. Por lo tanto su producto escalar debe ser cero.

$4.(-1) + (-3).(-1) + 2.a = 0$. Despejamos a y obtenemos $a = \frac{1}{2}$.

Para que los planos sean perpendiculares a debe ser $\frac{1}{2}$.

Ejemplo: Halle el valor de k y de m para que el plano $2x + ky - mz + 7 = 0$ sea paralelo al plano $x + 2y + 4z = 0$. Escriba la ecuación del plano.

Para que los planos sean paralelos sus vectores normales también deben serlo.

O sea $\begin{bmatrix} 2 \\ k \\ -m \end{bmatrix} // \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Para ello las componentes homólogas deben ser proporcionales, $\frac{2}{1} = \frac{k}{2} = \frac{-m}{4}$.

De la igualdad planteada obtenemos $k = 4$ y $m = -8$, que son los valores buscados.

Para esos valores la ecuación del plano es $2x + 4y + 8z + 7 = 0$.

Ejemplo: Determine el valor de t para que los planos dados por las ecuaciones $x + y + tz + 2 = 0$ y $x - ty + z + 1 = 0$ formen un ángulo de 60°. Con el valor obtenido, escriba las ecuaciones de los planos.

Si el ángulo debe ser de 60°, su coseno es $\frac{1}{2}$. Planteamos la fórmula para hallar el coseno del ángulo entre dos vectores y calculamos t.

$$\cos 60^{\circ} = \frac{1.1 + 1.(-t) + t.1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + t^2}.\sqrt{1^2 + (-t)^2 + 1^2}} = \frac{1 - t + t}{\sqrt{2 + t^2}.\sqrt{2 + t^2}}$$

$$\cos 60^{\circ} = \frac{1}{\left(\sqrt{2 + t^2}\right)^2} = \frac{1}{2 + t^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 + t^2 = 2 \Rightarrow t^2 = 0 \Rightarrow t = 0.$$

Para el valor de t obtenido las ecuaciones de los planos son $x + y + 2 = 0$ y $x + z + 1 = 0$.

Dos planos pueden cortarse, ser paralelos o coincidir.
El análisis del sistema formado por sus ecuaciones nos da esta información.

Sean los planos π_1 y π_2 cuyas ecuaciones son: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$

Las matrices asociadas al sistema son: $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$, matriz de los coeficientes y la matriz ampliada es $A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right]$.

Estudiando sus rangos obtenemos información sobre las posiciones, es decir, los puntos comunes a ambos planos.

- Si $r(A) = r(A^*) = 2$, es decir, cuando los coeficientes respectivos (a_1 y a_2, b_1 y b_2, c_1 y c_2) no son proporcionales, el sistema tiene solución, pero los planos no coinciden, ***se cortan en una recta.***

- Si $r(A) = 1$ y $r(A^*) = 2$, es decir, los coeficientes a_1 y a_2, b_1 y b_2, c_1 y c_2 son proporcionales, pero no los términos independientes d_1 y d_2, el sistema no tiene solución. ***Los planos son paralelos.***

- Si $r(A) = r(A^*) = 1$, es decir, todos los coeficientes respectivos son proporcionales, se trata del mismo plano. *Los planos son coincidentes.*

Ejemplo: Determine la posición relativa de los siguientes pares de planos

a) $\begin{cases} x + 4z - 3y = 11 \\ 4x - 12y + 16z = -40 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 6y - 3z - 9 = 0 \\ x + 2y - z - 3 = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - 3y = -1 + 10z \\ 2x + 3y + 7z = 7 \end{cases}$

a) Ordenando el sistema resulta: $\begin{cases} x - 3y + 4z = 11 \\ 4x - 12y + 16z = -40 \end{cases}$

Calculando el rango de la matriz de los coeficientes $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -12 & 16 \end{bmatrix}$ y de la matriz ampliada $A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 11 \\ 4 & -12 & 16 & -40 \end{array}\right]$ obtenemos:

1	–3	4	11	
4	–12	16	–40	$F_2 \to F_2 - 4F_1$
1	-3	4	11	
0	0	0	–84	

El rango de A es 1 y el rango de A^* es 2, por lo tanto, los planos son paralelos.

b) Ordenando el sistema obtenemos: $\begin{cases} 3x + 6y - 3z = 9 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$

Para calcular los rangos planteamos:

3	6	–3	9	$F_1 \to \frac{1}{3}F_1$
1	2	–1	3	
1	2	–1	3	
1	2	–1	3	$F_2 \to F_2 - F_1$
1	2	–1	3	
0	0	0	0	

El rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada.
$r(A) = r(A^*) = 1$

También todos los coeficientes homólogos son proporcionales.
En efecto: $\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{-3}{-1} = \frac{9}{3} = 3$. Es decir, los planos son coincidentes.

c) Ordenando el sistema y calculando los rangos resulta: $\begin{cases} x - 3y - 10z = -1 \\ 2x + 3y + 7z = 7 \end{cases}$

1	–3	–10	–1	
2	3	7	7	$F_2 \to F_2 - 2F_1$
1	–3	–10	–1	
0	9	27	9	

Los rangos son iguales: $r(A) = r(A^*) = 2$ y por lo tanto los planos se cortan determinando una recta.

Armando el sistema equivalente nos queda: $\begin{cases} x - 3y - 10z = -1 \\ 9y + 27z = 9 \end{cases}$.

Como el número de incógnitas es 3, elegimos una incógnita auxiliar. Sea $z = t$, $t \in R$, $\begin{cases} x - 3y - 10t = -1 \\ 9y + 27t = 9 \end{cases}$.

Despejando y de la segunda ecuación: $y = \dfrac{9 - 27t}{9} \Rightarrow y = 1 - 3t$.

Reemplazando en la primera ecuación y despejando x obtenemos:

$x - 3(1 - 3t) - 10t = -1 \Rightarrow x - 3 + 9t - 10\,t = -1 \Rightarrow x = 2 + t$

La solución hallada $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases}$, $t \in R$, es la ecuación paramétrica de la recta intersección de los dos planos.

La ecuación simétrica de dicha recta es: $x - 2 = \dfrac{y - 1}{-3} = z$.

Nota: el estudio de las posiciones relativas de planos entre sí se reduce a la resolución de sistemas de ecuaciones.

EJERCICIO

Analice la posición relativa entre los planos dados. En caso de cortarse, halle la ecuación de la recta que determinan.

a) $\pi_1 : 2x - y + z = 3$; $\pi_2 : -4x + 2y - 2z = -6$

b) $\pi_1 : -x + y + 3z = -1$; $\pi_2 : x - y + 3z = 2$

c) $\pi_1 : -3x + 2y + z = 3$; $\pi_2 : 2x + 2y + 2z = -1$

d) $\pi_1 : -x - y + z = 10$; $\pi_2 : 3x + 3y - 3z = 13$

RESPUESTA

a) Coincidentes

b) Concurrentes, $r : \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} + t \\ y = t \\ z = \dfrac{1}{6} \end{cases}$

c) Perpendiculares, r : $\begin{cases} x = -\frac{4}{5} - \frac{1}{5}t \\ y = \frac{3}{10} - \frac{4}{5}t \\ z = t \end{cases}$ **d)** Paralelos

---

EJERCICIOS INTEGRADORES 5.2 PLANO EN EL ESPACIO R^3

1) Halle la ecuación del plano que cumple con las siguientes condiciones:

a) contiene a P(0, –2, –3) y su vector normal es $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$,

b) contiene a los puntos $P_1(1, -2, 1)$; $P_2(0, 3, -1)$ y $P_3(-1, 1, 2)$,

c) es paralelo al plano coordenado xz y pasa por el punto P(–5, –3, 1),

d) es paralelo al plano z = 2 y pasa por el punto (2, 1, –3).

2) Obtenga la ecuación del plano que contiene a la recta $\frac{x-3}{2} = y - 1 = z$ y al punto (0, 1, –1).

3) Determine la ecuación del plano que contiene a la recta $\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z+3}{-1}$ y es paralelo al vector $\vec{i} - \vec{k}$.

4) Analice la posición relativa entre cada uno de los planos dados. En caso de ser concurrentes encuentre la ecuación de la recta que determinan.

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 8 = 0 \\ x + 3y - z - 5 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y - z + 8 = 0 \\ -x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z - 4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y + 6z - 2 = 0 \\ x - \frac{2}{3}y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

5.3 Posiciones relativas entre dos rectas en R^3. Posiciones relativas entre recta y plano en R^3

Posiciones relativas entre dos rectas en R^3

Dos rectas en el espacio pueden estar o no en un mismo plano.
Dos rectas que están en el mismo plano se llaman coplanares.
En caso contrario se llaman rectas alabeadas o rectas que se cruzan. Analicemos los distintos casos.

- **Rectas coplanares**

Dos rectas que están en el mismo plano pueden ser ***secantes*** (un punto en común) o *paralelas* (ningún punto en común o coincidentes).

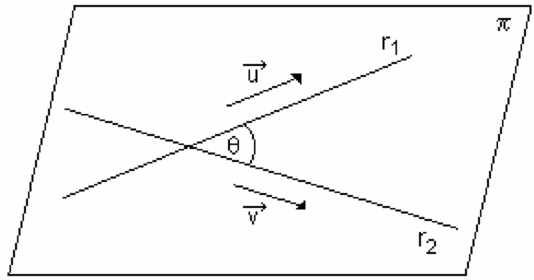
Rectas secantes

Llamamos rectas secantes a aquellas que se cortan en un punto.
Podemos determinar el ángulo que determinan las dos rectas de la siguiente manera:

Sean las rectas

$$r_1 : \frac{x-x_1}{u_1} = \frac{y-y_1}{u_2} = \frac{z-z_1}{u_3},$$

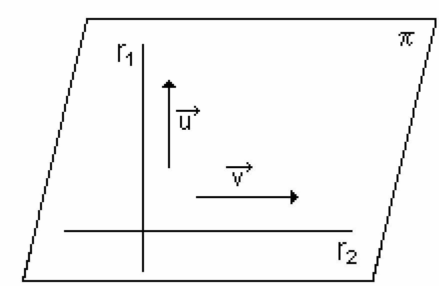
$$r_2 : \frac{x-x_2}{v_1} = \frac{y-y_2}{v_2} = \frac{z-z_2}{v_3}$$



donde $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} // r_1$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} // r_2$

El ángulo que forman las rectas coincide con el que determinan sus vectores paralelos y se obtiene, según vimos en el capítulo referido a vectores, de la siguiente manera: $\cos\theta = \dfrac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}$.

Un caso particular de las rectas secantes son las *rectas perpendiculares*.

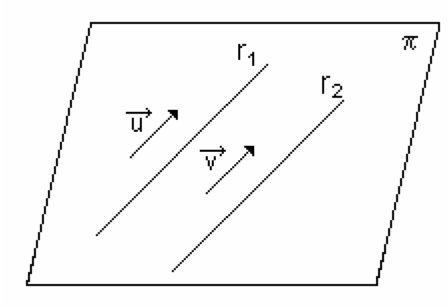


Dos rectas son perpendiculares sí y sólo sí lo son sus vectores dirección.

$r_1 \perp r_2 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$

$r_1 \perp r_2 \iff u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$

Rectas paralelas



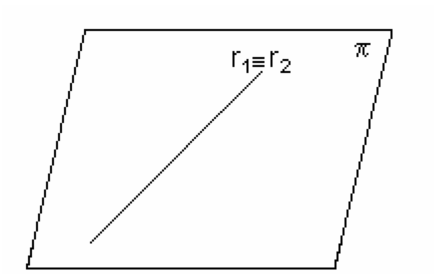
Dos rectas son paralelas si y sólo si sus vectores dirección también lo son.

$$r_1 \,//\, r_2 \iff \vec{u} \,//\, \vec{v} \iff$$

$$\iff \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}.$$

Las rectas paralelas pueden no tener ningún punto en común o ser *coincidentes*.

Rectas coincidentes

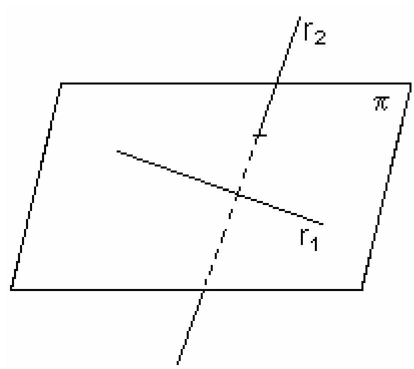


Dos rectas son coincidentes si tienen todos sus puntos en común. Para ello debemos verificar si son paralelas y tienen un punto en común.

- **Rectas alabeadas**

Se dice que dos rectas se cruzan o son alabeadas cuando no existe ningún plano que las contenga simultáneamente.

Las rectas alabeadas no son paralelas y no tienen ningún punto en común.



En general, dadas las ecuaciones de dos rectas, ¿cómo averiguamos la posición relativa entre las mismas?
En un plano, dos rectas distintas se cortan o son paralelas. En el espacio hay una tercera posición: pueden cruzarse.
Primero conviene averiguar si las rectas son paralelas. Para ello analizamos los vectores dirección. Si resultan paralelas, verificamos si son coincidentes eligiendo un punto de una recta y sustituyéndolo en la otra.

Ejemplo: Compruebe que las rectas $r_1: \dfrac{x-6}{2} = y = \dfrac{z+1}{-3}$ y $r_2: \begin{cases} x = -6t \\ y = 1-3t \\ z = 5+9t \end{cases}$, $t \in R$

son paralelas.

Determinamos el vector dirección de cada una de las rectas. Llamamos $\vec{u_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ al vector paralelo a la recta r_1 y $\vec{u_2} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$ al de la recta r_2.

Analicemos si las componentes homólogas son proporcionales.

Como $\dfrac{2}{-6} = \dfrac{1}{-3} = \dfrac{-3}{9}$ los vectores son paralelos y por lo tanto las rectas r_1 y r_2 también lo son.

Ejemplo: Determine la posición entre las rectas $r_1: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-6}{-3} = z+1$ y

$r_2: \begin{cases} x = 4-t \\ y = \dfrac{3}{2}t \\ z = 1-\dfrac{1}{2}t \end{cases}$.

El vector dirección de la recta r_1 es $\vec{u_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y el correspondiente a la recta r_2 es

$\vec{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$. Determinemos si los vectores son o no paralelos: ¿$\dfrac{2}{-1} = \dfrac{-3}{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}}$?

Como $-2 = -2 = -2$ los vectores son paralelos.

Analicemos a continuación si algún punto de una de ellas pertenece o no a la otra. Consideremos el punto Q(4, 0, 1) perteneciente a la recta r_2.

Sustituyendo las coordenadas en la ecuación de la otra recta $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-6}{-3} = z+1$

resulta: $\dfrac{4}{2} = \dfrac{0-6}{-3} = 1+1$. Como $2 = 2 = 2$ el punto elegido de la recta r_2 también verifica la ecuación de la recta r_1. Como las rectas además de ser paralelas tienen un punto en común, decimos que son coincidentes.

Si las rectas no son paralelas, se cortan o se cruzan.

Consideremos las ecuaciones de dos rectas en su forma paramétrica:

$$r_1:\begin{cases} x = x_1 + tu_1 \\ y = y_1 + tu_2 \\ z = z_1 + tu_3 \end{cases},\ t \in R,\ \text{y}\ r_2:\begin{cases} x = x_2 + tv_1 \\ y = y_2 + tv_2 \\ z = z_2 + tv_3 \end{cases},\ t \in R.$$

Una forma de saber si las rectas se cortan es resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + tu_1 = x_2 + sv_1 \\ y_1 + tu_2 = y_2 + sv_2 \\ z_1 + tu_3 = z_2 + sv_3 \end{cases}$$

, en el cual las incógnitas son t y s (observe que al trabajar con las ecuaciones en forma simultánea debemos usar parámetros distintos, aunque en el enunciado se use el mismo parámetro).

Si el sistema tiene solución las rectas se cortan. El valor de t sustituido en r_1 (o el valor de s sustituido en r_2) nos da las coordenadas del punto de corte.
Si el sistema no tiene solución las rectas se cruzan, es decir son alabeadas o no coplanares.

Ejemplo: Demuestre que las rectas $r_1:\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -5 + 4t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$, $t \in R$ y $r_2:\begin{cases} x = 2 + s \\ y = -1 + 3s \\ z = 2s \end{cases}$, $s \in R$ se cruzan, es decir, no son paralelas ni se cortan en un punto.

Las rectas no son paralelas porque sus correspondientes vectores $\vec{u_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\vec{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ no son paralelos ya que sus componentes homólogas no son proporcionales: $\frac{2}{1} \neq \frac{4}{3} \neq \frac{-3}{2}$.

Si r_1 y r_2 tienen un punto en común deben existir valores de t y s que verifiquen:

$$\begin{cases} 4+2t=2+s \\ -5+4t=-1+3s \\ 1-3t=2s \end{cases}$$. Si resolvemos el sistema que forman las dos primeras ecuaciones obtenemos s = –8 , t = –5 y estos valores no satisfacen la tercera ecuación. Por lo tanto las rectas r_1 y r_2 no se intersecan.
Luego, las rectas dadas se cruzan, es decir son alabeadas, no están incluidas en un mismo plano.

Se puede llegar a estas conclusiones de manera más rápida resolviendo el determinante:

$$D=\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1-x_2 \\ u_2 & v_2 & y_1-y_2 \\ u_3 & v_3 & z_1-z_2 \end{vmatrix}$$, es decir el determinante cuya primera y segunda columna son los vectores dirección de las rectas y la tercera columna es el vector que determinan dos puntos pertenecientes uno a cada recta.

Si D = 0 las rectas se cortan y si D ≠ 0 las rectas se cruzan, es decir, son alabeadas.

Ejemplo: Analice la posición relativa entre las rectas $r_1:\begin{cases} x=5-t \\ y=2+t \\ z=t \end{cases}$, $t \in R$, y

$r_2:\begin{cases} x=-2+3t \\ y=9-3t \\ z=7+t \end{cases}$, $t \in R$.

Las rectas no son paralelas pues las componentes de los vectores no son proporcionales: $\frac{-1}{3}=\frac{1}{-3}\neq\frac{1}{1}$. Tomemos un punto de cada recta, por ejemplo los que podemos obtener observando las ecuaciones paramétricas

$P_1(5, 2, 0) \in r_1$ y $P_2(-2, 9, 7) \in r_2$ y formemos el vector $\overrightarrow{P_2P_1}=\begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix}$.

Calculemos el determinante para determinar si las rectas se cortan o se cruzan.

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -7 \\ 1 & 1 & -7 \end{vmatrix}=0.$$ Como el determinante es nulo las rectas se cortan.

Si queremos encontrar el punto de corte igualamos coordenada a coordenada las respectivas ecuaciones paramétricas.

$$\begin{cases} 5 - t = -2 + 3s \\ 2 + t = 9 - 3s \\ t = 7 + s \end{cases}$$, resolviendo el sistema obtenemos s = 0 y reemplazando en r_2

encontramos el punto de corte (–2, 9, 7). También hubiésemos podido reemplazar el valor de t = 7 en r_1 y obteníamos el mismo punto de corte.

Ejemplo: Analice la posición entre las rectas $r_1 : \begin{cases} x = 4t \\ y = 4 \\ z = 1 + 6t \end{cases}$ y $r_2 : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 5t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$, $t \in R$

El vector dirección de la recta r_1 es $\vec{u_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ y de la recta r_2 es $\vec{u_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Como las componentes homólogas no son proporcionales dado que $-\frac{4}{3} \neq 0 \neq 3$, los vectores no son paralelos y, por consiguiente, las rectas tampoco lo son.

Calculamos el determinante $D = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \end{vmatrix}$ y obtenemos que es distinto de cero. Por lo tanto las rectas se cruzan, o sea son alabeadas, no están incluidas en un mismo plano.

Ejemplo: Compruebe que las rectas de ecuación $r_1 :\ 3 - x = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{2}$ y $r_2 : \frac{x+1}{-5} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-9}{4}$ se cortan y calcule el ángulo que determinan.

Calculamos $D = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ y comprobamos que es nulo por lo tanto las rectas se cortan. Para calcular el ángulo que forman entre ellas debemos determinar el ángulo que forman sus vectores dirección.

El vector dirección de r_1 es $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ y el de r_2 es $\vec{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Debemos tener en cuenta que, siendo θ el ángulo determinado por los dos vectores dirección, $\cos\theta = \frac{u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$.

$$\cos\theta = \frac{(-1).(-5)+(-3).2+2.4}{\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+2^2}\sqrt{(-5)^2+2^2+4^2}} = \frac{5-6+8}{\sqrt{14}.\sqrt{45}} = \frac{7}{\sqrt{630}} \approx 0{,}278 \quad \Rightarrow$$

$\theta = \text{arccos }\ 0{,}278 \quad \Rightarrow \quad \theta = 73^{\text{O}}\ 48'\ 22''$

El ángulo entre las rectas es $\theta = 73^{\text{O}}\ 48'\ 22''$.

A modo de resumen: Dadas dos rectas r_1 y r_2 en R^3 puede ocurrir:

Posiciones relativas de dos rectas en el espacio		
Rectas coplanares	Secantes	r_1 y r_2 tienen un punto en común. $r_1 \cap r_2 = \{\ P\}$
	Paralelas	r_1 y r_2 no tienen puntos en común o son coincidentes. $r_1 \cap r_2 = \varnothing$ o $r_1 \equiv r_2$
Rectas no coplanares	Alabeadas	r_1 y r_2 no tienen puntos en común. $r_1 \cap r_2 = \varnothing$

EJERCICIOS

1) Analice la posición entre los siguientes pares de rectas. Si se cortan halle el punto de corte y el ángulo que determinan.

a) $r_1 : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$ $\qquad r_2 : \begin{cases} x = -1+4t \\ y = -3+4t \\ z = -4+4t \end{cases}$

b) $r_1 : \begin{cases} x = 3t \\ y = 1-t \\ z = 2 \end{cases}$ $\qquad r_2 : \begin{cases} x = -2t \\ y = -5t \\ z = 4 \end{cases}$

c) $r_1 : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{1}$ $\qquad r_2 : \begin{cases} x = 1-t \\ y = -2+3t \\ z = -1+t \end{cases}$

d) $r_1 : \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ $\qquad r_2 : \begin{cases} x = 1+6t \\ y = -1-4t \\ z = -2t \end{cases}$

2) Halle la ecuación simétrica de la recta paralela a $\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 3 \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ que pasa por el punto (0, –2, –1).

3) Obtenga la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto (2, –1, 3) y es paralela a $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-2}{3}$, $z = 2$.

RESPUESTAS

1)a) Se cortan en (3, 1, 0) perpendicularmente

b) Se cruzan

c) Se cortan en (1, –2, –1) con un ángulo de $71^{o}\ 11'\ 46''$

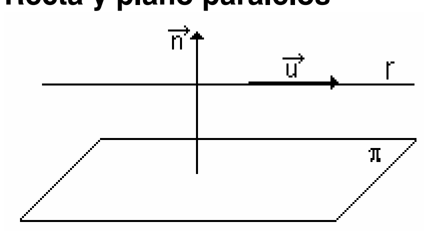
d) Paralelas

2) $x = \dfrac{z+1}{2}$, $y = -2$

3) $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$

Posiciones relativas entre recta y plano en R^3

Recta y plano paralelos



Sean los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} // r$ y $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \perp \pi$ $\pi // r \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u} \Leftrightarrow$

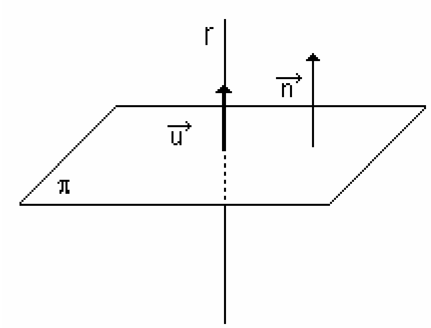
$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$

La condición necesaria y suficiente para que una recta y un plano sean paralelos es que el vector dirección y el normal al plano sean perpendiculares.

Recta incluida en un plano

Una recta está incluida en un plano sí y sólo sí la recta es paralela al plano y un punto de la recta pertenece al plano.

Recta y plano perpendiculares



Sean los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ // r y

$\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \perp \pi$

$$\pi \perp r \iff \vec{n} \,//\, \vec{u} \iff \frac{a}{u_1} = \frac{b}{u_2} = \frac{c}{u_3}$$

La condición necesaria y suficiente para que una recta y un plano sean perpendiculares es que el vector paralelo a la recta y el perpendicular al plano sean paralelos.

Ejemplo: Determine la posición entre la recta $r: \frac{x+1}{2} = -\frac{y}{5} = z - 3$ y el plano $\pi: 4x - 10y + 2z = 7$.

Para analizar la posición entre una recta y un plano determinamos los vectores que surgen de cada una de las ecuaciones y analizamos las posiciones entre ellos.

El vector $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ es paralelo a la recta r y el vector $\vec{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix}$ es perpendicular al plano π.

Realicemos, en primer lugar, el producto escalar entre ellos:

$$\vec{u} \,.\, \vec{n} = 2.4 + (-5).(-10) + 1.2 = 8 + 50 + 2 = 60$$

Como el producto escalar no es nulo, los vectores no son perpendiculares y por eso, la recta no es paralela al plano.

Si los vectores son paralelos sus componentes homólogas deben ser proporcionales. Como $\frac{2}{4} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$ podemos asegurar que los vectores son paralelos.

Como el vector dirección de la recta es paralelo al vector normal al plano concluimos que la recta r y el plano π son perpendiculares.

Ejemplo: Sea la recta $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + 2y + kz - 1 = 0$, calcule el valor de k para que resulten paralelos.

La condición necesaria y suficiente para que una recta y un plano sean paralelos es que el vector dirección de la recta y el normal al plano sean perpendiculares. El producto escalar entre ellos debe ser nulo.

El vector dirección de la recta es $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ y el vector normal al plano es $\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$.

Planteamos el producto escalar entre los dos vectores y lo igualamos a cero.

$\vec{u} \,.\, \vec{n} = (-1).2 + 3.2 + 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad -2 + 6 + 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -2.$

Para que la recta y el plano dados sean paralelos k debe valer –2.

Ejemplo: Halle la posición entre la recta de ecuación $r : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{2} = z - 4$ y el plano $\pi : x - 2y + z - 6 = 0$.

El vector dirección de la recta es $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y el vector normal al plano es $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si realizamos el producto escalar entre ellos resulta $\vec{u} \,.\, \vec{n} = 0$.

Esto nos permite concluir que la recta es paralela al plano. Nos interesa además saber si la recta está incluida en el plano. Para ello debemos ver si un punto de la misma también pertenece al plano.

Elegimos el punto P(0, –1, 4) que pertenece a la recta. Sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación del plano $x - 2y + z - 6 = 0$ vemos que la verifica: $0 - 2\,(-1) + 4 - 6 = 0$.

Como la recta es paralela al plano y además un punto cualquiera de ella también pertenece al plano, la recta r está incluida en el plano π.

Ejemplo: Escriba la ecuación del plano que pasa por el punto P(1, –1, 3) y es perpendicular a la recta $r : \dfrac{x+5}{2} = y = \dfrac{z-1}{-3}$.

El vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ es paralelo a la recta r y, por lo tanto, perpendicular al plano.

En consecuencia, la ecuación cartesiana del plano es $2x + y - 3z + d = 0$.

Como le pertenece el punto P(1, –1, 3) resulta:

$2.1 + (-1) - 3.3 + d = 0 \Rightarrow 2 - 1 - 9 + d = 0 \Rightarrow -8 + d = 0 \Rightarrow d = 8$
De esta manera $2x + y - 3z + 8 = 0$ es la ecuación del plano buscada.

Ejemplo: Halle la ecuación del plano paralelo a las rectas $r_1 : x - 2 = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{4}$ y

$r_2 : \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ y que contiene al punto M(–1, 0, 1).

Los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ son paralelos a las rectas y también paralelos al plano.

Realizando el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ obtendremos un vector perpendicular al plano.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5\,\vec{i} - 11\,\vec{j} + 7\,\vec{k}.$$

La ecuación cartesiana del plano es $5x - 11y + 7z + d = 0$. Como le pertenece el punto M(–1, 0, 1) sustituyendo sus coordenadas en la ecuación resulta:
$5.(-1) - 11.0 + 7.1 + d = 0 \Rightarrow -5 - 0 + 7 + d = 0 \Rightarrow 2 + d = 0 \Rightarrow d = -2$
De esta manera $5x - 11y + 7z - 2 = 0$ es la ecuación del plano.

Ejemplo: Determine la ecuación del plano que contiene a la recta
$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$, $t \in R$, y al punto P(3, 1, 0).

El vector $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, paralelo a la recta, es paralelo al plano. Para obtener otro vector paralelo al plano, usamos el punto dado P(3, 1, 0) y otro punto cualquiera que pertenece al plano. Por ejemplo, el punto puede ser el que se obtiene de reemplazar t = 0 en la recta, obteniendo así el punto Q(1, 0, –1). El vector que determinan los dos puntos es $\vec{QP} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. El vector que surge de realizar el producto vectorial entre los vectores nombrados resulta perpendicular al plano buscado.

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{QP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Resolvemos el determinante planteado y obtenemos $\vec{n} = \vec{i} + 2\,\vec{j} - 4\,\vec{k}$.

La ecuación cartesiana del plano es $x + 2y - 4z + d = 0$.

Reemplazando por las coordenadas de un punto que le pertenece, por ejemplo, $P(3, 1, 0)$ resulta: $3 + 2.1 - 4.0 + d = 0 \;\Rightarrow\; 3 + 2 + d = 0 \;\Rightarrow\; d = -5$.

En consecuencia la ecuación del plano es $x + 2y - 4z - 5 = 0$.

EJERCICIOS

1) Analice la posición relativa entre la recta y el plano dado:

a) $\dfrac{x-6}{1} = \dfrac{y-4}{7} = \dfrac{z+2}{5}$ y $x + 2y - 3z + 8 = 0$

b) $x = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$ y $x - 9y - 17z + 3 = 0$

c) $\dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{-2}$ y $2x - y + z - 4 = 0$

2) Halle la ecuación del plano que es perpendicular a la recta $\dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{3-y}{-1} = \dfrac{z}{2}$ y pasa por el punto $(3,-1,7)$.

RESPUESTAS

1)a) la recta es paralela al plano, **b)** la recta está incluida en el plano, **c)** la recta es perpendicular al plano. **2)** $-3x - y + 2z - 6 = 0$

EJERCICIOS INTEGRADORES 5.3 POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS RECTAS EN R^3. POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTA Y PLANO EN R^3.

1) Determine la posición relativa entre los pares de recta dados. En caso de ser secantes, encuentre el punto de corte.

a) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 \end{cases}$ y $\begin{cases} x = -1 - 6t \\ y = 3 + 3t \\ z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$ y $\begin{cases} x = -3t \\ y = 1 + 9t \\ z = -12t + 2 \end{cases}$

c) $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{4}$ y $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$ **d)** $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$ y $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -1 \\ z = 5 - t \end{cases}$

2) Halle la ecuación de la recta que es perpendicular al plano de ecuación $x - y + z = 5$ y que contiene al punto $(-2, 0, 4)$.

3) Demuestre que la recta $r: \dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-1}{3}$ es paralela al plano $2x - 3y - 6z + 3 = 0$.

4) Demuestre que la recta $r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ y el plano $2z - 4x - 2y = 6$ son perpendiculares.

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE DEL CAPÍTULO

1) La ecuación paramétrica de la recta a la que pertenece el punto P(2, –3, 1) y es paralela al vector $\vec{u} = 2\vec{j} - 3\vec{i} - \vec{k}$ es:

a) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 - 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$

2) La ecuación simétrica de la recta a la que pertenece el punto R(–1, 2, 3) y es paralela al vector $\vec{u} = -\vec{k} + 2\vec{j} + 3\vec{i}$ es:

a) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+3}{3}$ **b)** $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$

c) $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{-1}$ **d)** $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$

3) Si una recta pasa por el punto P(–1, 3, 0) y es paralela al vector $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{k} + 2\vec{j}$, otro punto Q que pertenece a la misma es:

a) Q(–2, –1, –6) **b)** Q(0, 0, 2) **c)** Q(1, 1, –3) **d)** Q(0, 5, –3)

4) La ecuación de la recta a la que pertenece P(–2, 1, 2) y es paralela a $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 3t \end{cases}$ es:

a) $\dfrac{x+2}{-2} = y - 1 = \dfrac{z-2}{3}$ **b)** $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-3}$

c) $\dfrac{x-2}{-2} = y - 1 = \dfrac{z+2}{3}$ **d)** $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+2}{-3}$

5) Una recta paralela al eje de abscisas que contiene al punto P(2, –3, –1) tiene por ecuación:

a) $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$

6) La ecuación del plano que contiene al punto P(2, –1, –2) y es perpendicular al vector $2\vec{j} - \vec{i} - 3\vec{k}$ es:

a) $2x - y - 3z - 11 = 0$ **b)** $2x - y - 3z + 11 = 0$
c) $-x + 2y - 3z - 2 = 0$ **d)** $-x + 2y - 3z + 2 = 0$

7) Un plano contiene a la recta $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ y el vector $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ es perpendicular al mismo. La ecuación de dicho plano es:

a) $2x - y + z - 3 = 0$ **b)** $2x - y + z + 3 = 0$
c) $2x - y + z - 4 = 0$ **d)** $2x - y + z + 4 = 0$

8) La ecuación del plano perpendicular a la recta $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = z - 2$ al que pertenece el punto P(1, 2, –2) es:

a) $-2x + 3y + z - 2 = 0$ **b)** $-2x + 3y + z + 2 = 0$
c) $2x + 3y + z - 2 = 0$ **d)** $2x + 3y + z + 2 = 0$

9) La ecuación del plano que pasa por los puntos P(1, –2, 3), Q(–1, –1, 2) y es perpendicular al plano $3x + y + 2z = 1$ es:

a) $2x - 3y + z = 1$ **b)** $2x - 3y + z = -1$
c) $-3x - y + 5z = 14$ **d)** $-3x - y + 5z = -14$

10) Los planos $4x - 2y + z = 3$, $x + 5y + 6z = -2$ son

a) perpendiculares **b)** paralelos **c)** ninguno de los anteriores

11) Los planos $9x + 3y - 12z = 2$, $-6x - 2y + 4z = 3$ son:

a) perpendiculares **b)** paralelos **c)** ninguno de los anteriores

---

GUÍA DE ESTUDIO DE TEORÍA N° 8: RECTA Y PLANO EN EL ESPACIO

1) Deduzca la ecuación vectorial de una recta en R^3 conocidos un punto que le pertenece y un vector paralelo a la misma.

2) Deduzca la ecuación vectorial de la recta en R^3 conocidos dos puntos que le pertenecen.

3) Encuentre la ecuación paramétrica de la recta en R^3 conocidos un vector paralelo a la misma y un punto que le pertenece.

4) Encuentre la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$.

5) Obtenga la ecuación simétrica de la recta paralela al vector $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ que contiene al punto $P(x_0, y_0, z_0)$.

6) Deduzca la ecuación simétrica de la recta que pasa por los puntos

$R(x_0, y_0, z_0)$ y $Q(x_1, y_1, z_1)$.

7) Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto $R(x_1, y_1, z_1)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$.

8) Indique cómo halla la ecuación de un plano determinado por tres puntos.

9) Obtenga las ecuaciones de los planos coordenados. Grafique.

10) Indique las ecuaciones según las distintas posiciones que puede tener un plano con respecto a los planos coordenados.

11) Indique las ecuaciones según las distintas posiciones que puede tener un plano con respecto a los ejes coordenados.

12) Discuta las situaciones planteadas en la pregunta anterior.

13) Enuncie la condición necesaria y suficiente para que dos planos sean:

- a) paralelos,
- b) perpendiculares,
- c) coincidentes.

14) Determine las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de dos rectas en R^3.

15) Explique cómo se calcula el ángulo entre dos rectas.

16) ¿Cuándo dos rectas son coincidentes?

17) Determine las condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre plano y recta.

18) Indique qué representa la ecuación $ax + by + c = 0$ en R^2 y en R^3.

AUTOEVALUACIÓN Nº 5: RECTA Y PLANO EN EL ESPACIO

1) Determine la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $P(5, -2, 1)$ y $Q(2, 4, 2)$. Encuentre otros tres puntos que le pertenezcan.

2) ¿En qué posición se encuentran la recta que pasa por los puntos $A(1, 4, 7)$ y $B(5, 10, 15)$ y el plano $2x + 3y + 4z = 17$? ¿El punto $(-2, 3, 4)$ pertenece al plano?

3) Halle la ecuación del plano que contiene a los puntos $P(1, 2, 3)$; $Q(3, 2, 1)$ y $R(-1, -2, 2)$.

4) Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto $(2, -1, 3)$ y es perpendicular a la recta $\dfrac{x+1}{3} = y - 2 = \dfrac{z-1}{-3}$.

5) Obtenga la ecuación del plano que contiene al punto $Q(2, -1, 2)$ y a las rectas $r_1: \dfrac{x-2}{-2} = y + 1 = z$ y $r_2: \dfrac{x-1}{-3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z}{-1}$. Grafique el plano obtenido.

6) ¿Qué posición tienen entre sí las rectas de ecuación $r_1: x - 1 = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+3}{3}$ y

$r_2: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + 6t \\ z = 8 + 9t \end{cases}$?

7)a) Calcule la ecuación del plano que contiene al punto P(3, 2, 2) y es paralelo a los vectores $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\vec{v} = 2\vec{j} - \vec{k}$.

b) Encuentre la ecuación de la recta perpendicular al plano que contiene al punto Q(1, –2, 3).

8) Dados los planos π_1 : 5x + by – z = 0 y π_2 : ax + 4y – 2z = 8, encuentre los valores de a y b para que resulten paralelos.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO

1)a) Obtenga la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto P(3, –1, 4) y es paralela al vector $5\vec{j} - \vec{i} + 4\vec{k}$.

b) Pase de la forma paramétrica a la simétrica.

2)a) Halle la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos A(2,–1,3) y B(0, 4, 1).

b) Determine otros dos puntos que pertenezcan a la recta obtenida en **a)**.

3)a) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto R(1, 0, –2) y es paralela al vector $2\vec{k} - \vec{j}$.

b) ¿Para qué valor de t se obtiene el punto S(1, 3, –8)?

4) Determine los valores de a y b para que la recta $x - 3 = \frac{y - a}{2} = \frac{z + 1}{b}$ pase por el punto P(4, –5, 4).

5) Sea la ecuación de la recta $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -3t \end{cases}$. ¿Para qué valores de t le pertenecen los puntos A(0, 5, –3); B(–3, –1, 6) y C(–1, 3, 0)?

6) Una recta pasa por el punto R(3, –1, –1) y contiene al vector $2\vec{j} - \vec{i} - 3\vec{k}$.

a) Halle su ecuación paramétrica.

b) Indique cuáles de los siguientes puntos le pertenecen:

A(2, 1, –4); B(4, 2, 5); C(3, –1, –2); D(4, –3, 2); E(1, 3, –7); E(6, –7, 8).

7) Obtenga la ecuación de la recta paralela al eje z que contiene al punto Q(3, 1, 1).

8) Halle la ecuación de la recta que contiene al punto P(–2, 1, 0) y es paralela a la recta $x - 1 = \frac{y - 2}{3} = z + 4$.

9) Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto R(3, –3, 4) y es perpendicular a la recta $r_1 : \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+2}{5}$ y a la recta $r_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}$.

10) Analice la posición de los siguientes pares de rectas. En caso de ser secantes, encuentre el punto de corte.

a) $r_1 : \dfrac{x+7}{-2} = \dfrac{y-1}{2} = z$; $r_2 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 5 \end{cases}$

b) $r_1 : \begin{cases} x - 1 = t \\ y + 2 = 3t \\ z = -t \end{cases}$; $r_2 : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+1}{-6} = \dfrac{z}{2}$

c) $r_1 : \begin{cases} t = x + 1 \\ 2t = y \\ -t = z - 3 \end{cases}$; $r_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 5t \\ z = t \end{cases}$

d) $r_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{2}$; $r_2 : \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-8}{3} = \dfrac{z-11}{4}$

11) Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto P(3, –1, 2) y es perpendicular al vector $2\vec{i} - \vec{k} + \vec{j}$.

12) Halle la ecuación del plano que contiene a la recta $\dfrac{x-1}{3} = y = \dfrac{z+1}{2}$ y es perpendicular al vector determinado por los puntos R(–1, 2, 0) y S(1, 1, 1).

13) Obtenga la ecuación del plano que pasa por los puntos A(2, 1, –1); B(2, 0, 0) y C(0, 1, 0). Grafique.

14) Halle la ecuación del plano que contiene a los puntos A(1, 1, 1); B(–2, 2, 3) y C(3, 0, 0). Grafique.

15) Determine la ecuación del plano paralelo al plano xz que pasa por el punto P(0, –2, 0).

16) Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto P(2, –1, 3) y es paralelo al plano determinado por las rectas $r_1 : x - 3 = \dfrac{y+1}{-2} = z - 2$ y $r_2 :$

$$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -3 \\ z = 3 - 3t \end{cases}.$$

17) Halle la ecuación del plano que contiene al punto M(–2, 0, 1) y es paralelo al plano x – 2y + 3z + 1 = 0.

18) Encuentre la ecuación del plano paralelo al plano y – x – z + 4 = 0 y que contiene a la recta $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = z - 3$.

19) Calcule el valor de m de modo que el plano $mx + 3y - z = 6$ sea paralelo a la recta r : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = 1 - 3t \end{cases}$.

20) Obtenga la ecuación de la recta perpendicular al plano $2x + y - z = 0$ a la que le pertenece el punto R(3, 2, 1).

21) Analice la posición relativa de los pares de planos dados en cada caso. En caso de cortarse, determine la ecuación de la recta que determinan.

a) $\pi_1 : x + y + z - 2 = 0$; $\pi_2 : 2x + 2y + 2z = 4$

b) $\pi_1 : x - y + z - 3 = 0$; $\pi_2 : -3x + 3y - 3z + 6 = 0$

c) $\pi_1 : 2x - y + z - 3 = 0$; $\pi_2 : x + y - z - 7 = 0$

d) $\pi_1 : 2x - y + z - 3 = 0$; $\pi_2 : x + y + z - 4 = 0$

e) $\pi_1 : 3x - 2y + 7z - 4 = 0$; $\pi_2 : -2x + 4y + 2z = 16$

f) $\pi_1 : x + 2y - z + 4 = 0$; $\pi_2 : x - 3y - z - 1 = 0$

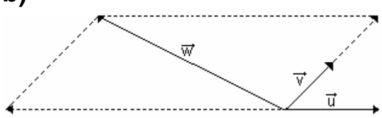
Respuestas a:
Ejercicios Integradores
Problemas de Aplicación
Pruebas de Opción Múltiple
Ejercicios de Repaso

CAPÍTULO 1: VECTORES

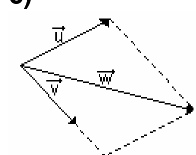
EJERCICIOS INTEGRADORES 1.2 Operaciones entre vectores (página 18)

2)a)

b)



c)



3) $\vec{w} = \frac{1}{2}\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

4)a) $\frac{1}{2}\vec{a}$; **b)** $-2\vec{a}$ **c)** $\frac{1}{3}\vec{a}, -\frac{1}{3}\vec{a}$

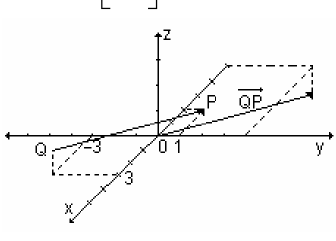
EJERCICIOS INTEGRADORES 1.3 Descomposición de vectores (página 30)

1)a) $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

2)a) $m = 0, m = 2$ **b)** $t = -4, t = -6$

3) $P\left(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}\right)$

4) $\vec{QP} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$



5)a) $\beta = 45°$, $\beta = 135°$

b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 3\sqrt{2} \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -3\sqrt{2} \\ -3 \end{bmatrix}$;

c) $3\vec{i} + 3\sqrt{2}\,\vec{j} - 3\vec{k}$,

$3\vec{i} - 3\sqrt{2}\,\vec{j} - 3\vec{k}$

EJERCICIOS INTEGRADORES 1.4 Operaciones con vectores en función de sus componentes (página 54)

1)a) $5\vec{i} - 2\vec{j}$; **b)** $\vec{i} - 4\vec{j}$;

c) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ **d)** $\alpha = 17° \; 1' \; 26''$

e) $12\vec{i}+5\vec{j}+11\vec{k}$;

f) $\vec{d} \times \vec{e} = -2\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}$

$\vec{e} \times \vec{d} = 2\vec{i}-7\vec{j}+\vec{k}$

2) $x = \frac{11}{5}$ **3)** $z = \frac{6}{5}$

4) a) $\vec{PA} = 3\vec{i}-\vec{j}$;

b) $\pm\frac{3}{\sqrt{14}}\vec{i}\pm\frac{9}{\sqrt{14}}\vec{j}\pm\frac{6}{\sqrt{14}}\vec{k}$;

c) Paralelos

5) $\vec{b} = -2\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}$

6) Volumen $= 6$

7) a) No; **b)** $x = -\frac{1}{2}$

8) $\text{proy}_{\vec{PQ}}\vec{RS} = \frac{17}{5}$ **;**

$\text{proy}_{\vec{RS}}\vec{PQ} = \frac{17}{\sqrt{26}}$

9) $\alpha = -7,\ \alpha = \frac{1}{7}$

10) $\begin{bmatrix}-2\\-2\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$

11) $\begin{bmatrix}\frac{4}{\sqrt{18}}\\-\frac{1}{\sqrt{18}}\\\frac{1}{\sqrt{18}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-\frac{4}{\sqrt{18}}\\\frac{1}{\sqrt{18}}\\-\frac{1}{\sqrt{18}}\end{bmatrix}$

12) $\alpha = 4,\ \beta = 5$; $\alpha = -4,\ \beta = -7$

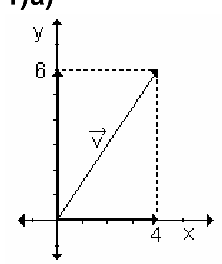
13) $\alpha = 3,\quad \alpha = \frac{7}{6}$

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE Vectores (página 55)

1) b; **2)** c; **3)** d; **4)** a; **5)** c; **6)** b; **7)** d; **8)** c; **9)** a; **10)** d

APLICACIONES DE LOS VECTORES (página 58)

1)a)



b) $\vec{v} = 4\vec{i}+6\vec{j}$; $|\vec{v}| = \sqrt{52}$;

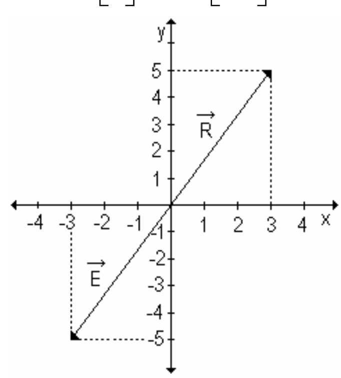
$\alpha = 56° \; 18' \; 35''$; $\beta = 33° \; 41' \; 24''$

2)a) $|\vec{R}| = 2|\vec{F_1}| = 2|\vec{F_2}|$; **b)** $|\vec{R}| = 0$;

c) $|\vec{R}| = \sqrt{2}|\vec{F_1}| = \sqrt{2}|\vec{F_2}|$

3) a) $\vec{F_1} = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}; \vec{F_2} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}; \vec{F_3} = \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$;

b) $\vec{R} = \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$; $\vec{E} = \begin{bmatrix}-3\\-5\end{bmatrix}$



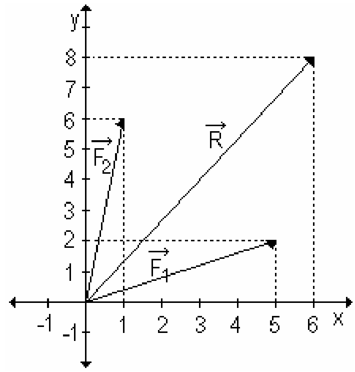
c) $\vec{F_1}$ y $\vec{R}: \alpha_1 = 59^\circ$; $\vec{F_2}$ y $\vec{R}: \alpha_2 = 14^\circ$

$\vec{F_3}$ y $\vec{R}: \alpha_3 = 64^\circ\, 39'$

4)a) $\vec{F_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\vec{F_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\vec{F_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) No

5) a) $\alpha = 58^\circ\, 44'\, 10''$; **b)** $\vec{R} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$



6)a) $\vec{F_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}; \vec{F_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$;

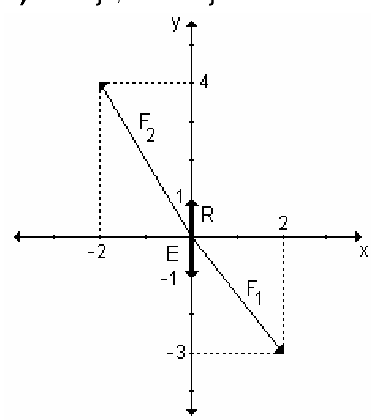
b) $\vec{F_3} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

7) $\vec{a} = 3\,\vec{u} + 3\,\vec{v}$; $\vec{b} = -2\,\vec{u} + 2\,\vec{v}$;

$\vec{c} = -2{,}5\,\vec{u} - 5\,\vec{v}$

AUTOEVALUACIÓN Nº 1. Vectores en el plano y en el espacio (página 60)

1) $R = \vec{j}$, $E = -\vec{j}$



2) $a = -\dfrac{8}{3}$ **3)** $\vec{v} = \vec{u} + 3\,\vec{w}$

4) $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{78}}\begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{78}}\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$

5) $V = 5$

6) $z = 3$, $z = 1$

7) $a = 3$, $a = 2$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO (página 61)

2)a) $-\vec{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $-\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$-\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $-\vec{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ -12 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} -\frac{19}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ **; f)** $\theta = 90°$

g) $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{11}; \cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$;

$\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{11}}; \quad \cos\gamma = \dfrac{-1}{\sqrt{11}}$

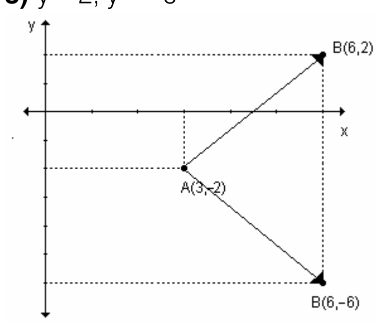
$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{10}; \cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}; \cos\beta = 0;$

$\cos\gamma = \dfrac{-1}{\sqrt{10}}$

$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{6}; \cos\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{6}}; \quad \cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{6}};$

$\cos\gamma = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

3) $y = 2$, $y = -6$



4) $z = 3$, $z = -1$

5) $x = -\dfrac{13}{4}; y = -\dfrac{1}{4}$;

6)a) $\gamma = 60°$ ó $\gamma = 120°$;

b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$ ó $\begin{bmatrix} 2 \\ 2\sqrt{2} \\ -2 \end{bmatrix}$

7)a) $-\dfrac{1}{\sqrt{38}}; \dfrac{5}{\sqrt{38}}$; **b)** $\begin{bmatrix} \pm\frac{8}{\sqrt{66}} \\ \pm\frac{2}{\sqrt{66}} \\ \pm\frac{14}{\sqrt{66}} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} k \\ 5k \\ -7k \end{bmatrix}, k \in R^+$ **8)** $a = -1$

9) $x = 1$, $y = 2$, $y = -2$

10) $\begin{bmatrix} -\frac{9\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ **11)a)** $\begin{bmatrix} \pm 15 \\ \pm 10 \\ \pm 8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -\frac{6}{\sqrt{101}} \\ -\frac{4}{\sqrt{101}} \\ \frac{7}{\sqrt{101}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{101}} \\ \frac{4}{\sqrt{101}} \\ -\frac{7}{\sqrt{101}} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \pm\frac{18}{\sqrt{101}} \\ \pm\frac{12}{\sqrt{101}} \\ \mp\frac{21}{\sqrt{101}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{18}{\sqrt{101}} \\ -\frac{12}{\sqrt{101}} \\ \frac{21}{\sqrt{101}} \end{bmatrix}$

d) $\sqrt{389}$; **e)** $\sqrt{538}$

12)a) Paralelos; **b)** $\theta = 91° \, 46' \, 6''$

c) Perpendiculares;

13)a) $x = -1$; **b)** $x = 5$; **c)** $x = 2$;

14)a) -1; **b)** $13\vec{i} + 29\vec{j} + 2\vec{k}$; **c)** 7;

d) -7; **e)** $\sqrt{1014}$

15)a) No; **b)** Sí **16)** $x = 0$, $x = 4$

17) $w = -4$ **18)** $\dfrac{\sqrt{101}}{2}$

19) 8 **20)** $x = 3$, $x = -\dfrac{15}{7}$

21) 4

22) $\vec{c} = 2\vec{a} + 4\vec{b}; \vec{d} = 2\vec{b} - \vec{a}$

23) $\vec{a} = -5\vec{i} - \vec{j}; \vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j};$

$\vec{c} = -3\vec{j}; \quad \vec{d} = 3\vec{i} + 3\vec{j}; \vec{e} = 3\vec{i}$

24)a) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}; \vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j};$

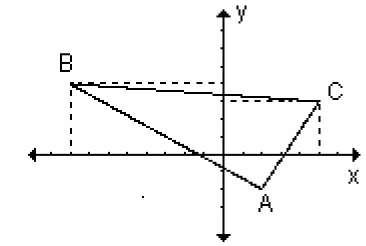
$\vec{c} = 2\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$; **b)** $\alpha = -1,\ \beta = \dfrac{1}{2}$

25) $\alpha = -5,\ \beta = \dfrac{7}{2}$

CAPÍTULO 2: GEOMETRÍA ANALÍTICA

EJERCICIOS INTEGRADORES 2.2 Coordenadas cartesianas (página 69)

1)



2) $x = 5,\ y = -\dfrac{1}{2}$

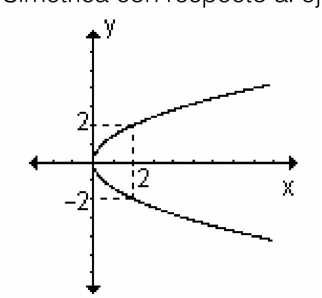
3) $y = 4,\ y = -8$

4) $x = 3,\ x = -\dfrac{35}{3}$

5) $y = 3,\ y = -1$

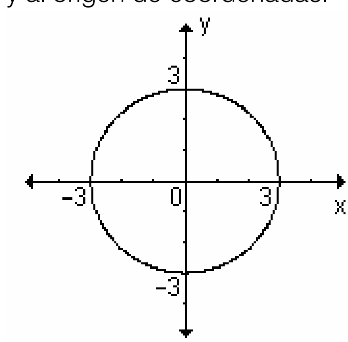
1)a) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$;
b) $2x+3y-9=0$; **c)** $x=-2$; **d)** $x-y=0,\ x+y=0$; **e)** $y-x=0$;
f) $9x^2 - 16y^2 = 144$

2) a) Intersección con los ejes P(0,0).
Extensión con respecto a x: $x \geq 0$, extensión con respecto a y: R.
Simétrica con respecto al eje x.



EJERCICIOS INTEGRADORES 2.3 Lugares geométricos (página 75)

b) Intersección con los ejes: (–3,0); (3,0); (0,–3); (0,3). Extensión con respecto eje x: $-3 \leq x \leq 3$, extensión con respecto eje y: $-3 \leq y \leq 3$.
Es simétrica respecto al eje x, al eje y y al origen de coordenadas.



EJERCICIOS INTEGRADORES 2.4 Coordenadas polares (página 81)

1) a) $P_1\ (\sqrt{8}, 135°)$ o $P_1\ (-\sqrt{8}, 315°)$

b) $P_2\ (4, 0°)$ o $P_2\ (-4, 180°)$

c) $P_3\ (4, 270°)$ o $P_3\ (-4, 90°)$

2) a) $P_1\ (1, \sqrt{3})$; **b)** $P_2\ (1, -\sqrt{3})$

c) $P_3\ (0, -1)$

3)a) $\rho^2 - 2\rho\cos\theta = 0$

b) $\rho.(\text{sen}\theta - \rho.\cos^2\theta) = 0$

4) a) $y = 5$; **b)** $2x - y = 0$

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE Elementos de Geometría Analítica (página 82)

1) c; **2)** b; **3)** d; **4)** a; **5)** b; **6)** d; **7)** b; **8)** a; **9)** c

AUTOEVALUACIÓN Nº 2. Elementos de geometría analítica (página 83)

1) $x^2 + 2x - 8y + 25 = 0$

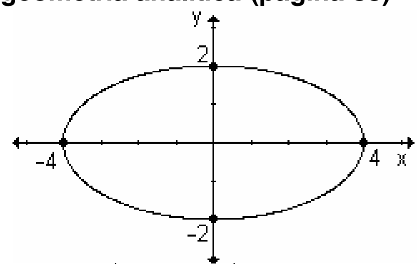
2) Extensión: $x \leq -3$ ó $x \geq 3$, $y \in R$. Tiene simetría total.

3)a) $\rho^2 \cos^2\theta - 8\rho\,\mathrm{sen}\theta = 0$

b) $5\rho\cos\theta + \rho\,\mathrm{sen}\theta = 0$

c) $2\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta - 4 = 0$

4) Tiene simetría total.
Extensión: $-4 \leq x \leq 4$, $-2 \leq y \leq 2$.
Intersección con el eje x: (–4, 0) y (4, 0). Intersección con el eje y: (0, –2) y (0, 2).
Gráfica:



5)a) $P_1\left(\sqrt{18}, 135^\circ\right)$ o $P_1\left(-\sqrt{18}, 315^\circ\right)$

b) $P_2\left(2\sqrt{10},\ 288^\circ 26' 5''\right)$ o $P_2\left(-2\sqrt{10},\ 108^\circ 26' 5''\right)$

c) P_3 (2, 180º) o P_3 (–2, 0º)

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO (página 83)

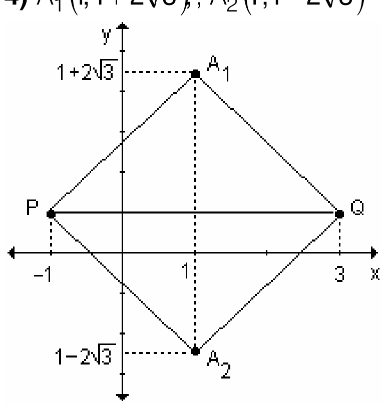
1) $y = 2$, $y = -6$;

2) A(1, 0) y B(0, 3)

3) Lados: 3, 4, 5; Área = 6;

Puntos medios: $\left(\frac{5}{2}, -2\right)$; (4, 0); $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

4) $A_1\left(1, 1+2\sqrt{3}\right)$, $A_2\left(1, 1-2\sqrt{3}\right)$



5) B(1,–2)

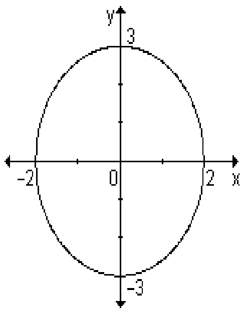
6)a) $5x - 7y - 24 = 0$;

b) $y^2 - 8x + 16 = 0$; **c)** $2y - x + 3 = 0$, $2y + x - 3 = 0$, $2y + x + 3 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$, **d)** $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$

e) $3y^2 - x^2 - 30y + 2x + 26 = 0$,

f) $y^2 - 4y - 4x - 4 = 0$

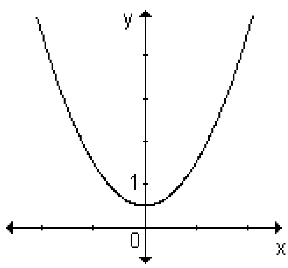
7)a) Intersección eje x: $P_1(2, 0)$ y $P_2(-2, 0)$. Intersección eje y: $Q_1(0,3)$ y Q_2 (0, –3). Simétrica con respecto al eje x y al eje y. Extensión con respecto al eje x: $-2 \leq x \leq 2$.
Extensión con respecto al eje y:
$-3 \leq y \leq 3$



b) No tiene intersección eje x.

Intersección eje y: P $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Simétrica con respecto al eje y pero no con respecto al eje x. Extensión con respecto al eje x: R. Extensión con respecto al eje y: $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$



8)a) $P_1(\sqrt{10}$, 251° 33') o

$P_1(-\sqrt{10}$, 71° 33')

b) $P_2(\sqrt{12}$, 330°) o $P_2(-\sqrt{12}$,150°)

c) $P_3(\sqrt{13}$,33°41´24”) o

$P_3(-\sqrt{13}$,213°41´24”)

d) P_4(1, 90°) o P_4(–1, 270°)

e) P_5(1, 180°) o P_5 (–1, 0°)

9)a) $P_1(2\sqrt{3}, 2)$; **b)** $P_2(0, 3)$;

c) $P_3(3, -3\sqrt{3})$; **d)** $P_4(0, -2)$,

e) $P_5(-4{,}82; -1{,}34)$

10)a) $5\rho \cos\theta - 4\rho \operatorname{sen}\theta + 3 = 0$;

b) $\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta - 4\rho \cos\theta = 0$,

c) $\rho^2 - 2\rho \operatorname{sen}\theta = 0$;

d) $\rho^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta - 2 = 0$

11)a) $y + 2 = 0$; **b)** $x^2 + y^2 - 4x = 0$;

c) $x - y - 2 = 0$; **d)** $y^2 - 8x - 16 = 0$

CAPÍTULO 3: RECTA EN EL PLANO

EJERCICIOS INTEGRADORES 3.1 Ecuación de la recta (página 98)

1) a) $-x + 3y = 0$; **b)** $3x-4y-5=0$

c) $x + y-1=0$; **d)** $2x-3y-6=0$

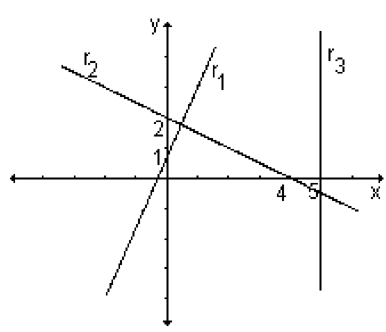
e) $x + 3y + 7 = 0$

2)a) No pertenece; **b)** Sí pertenece

3)a) Están alineados; **b)** k = 6

4)a) $r_1 : \; y = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$;

$r_2 : \; y = -\frac{1}{2}x + 2$



b) $r_1 : \left(-\frac{2}{7}, 0\right); \left(0, \frac{2}{3}\right)$; r_2: (0,2) ; (4,0); r_3: (5,0);

c) r_1: $\vec{n} = \begin{bmatrix} k.7 \\ -k.3 \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} k.3 \\ k.7 \end{bmatrix}$;

r_2: $\vec{n} = \begin{bmatrix} k.1 \\ k.2 \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} -k.2 \\ k.1 \end{bmatrix}$;

r_3: $\vec{n} = \begin{bmatrix} k.1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ k.1 \end{bmatrix}$; $k \in R$.

5)a) $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -1 + t \end{cases}, t \in R$ (paramétrica);

$\frac{x-5}{3} = y + 1$ (simétrica)

$y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$ (explícita)

x –3y–8 = 0 (general)

$\frac{x}{8} + \frac{y}{-\frac{8}{3}} = 1$ (segmentaria)

b) $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + t \end{cases}, t \in R$ (paramétrica);

$\frac{x-2}{-5} = y - 1$ (simétrica)

$y = -\frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$ (explícita)

x + 5y–7=0 (general)

$\frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{5}} = 1$ (segmentaria).

c) $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}, t \in R$ (paramétrica)

$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3}$ (simétrica)

$y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ (explícita)

3x + 2y–7= 0(general)

$\frac{x}{\frac{7}{3}} + \frac{y}{\frac{7}{2}} = 1$ (segmentaria)

6) a = 4, b = 7 **7)** 5x + 3y– 35 = 0
8)a) a = 0, signo b ≠ signo c
b) c = 0, signo a ≠ signo b;
c) c = 0, signo a = signo b
d) signo c = signo a ≠ signo b;
e) signo c = signo a = signo b

EJERCICIOS INTEGRADORES 3.2 Posiciones relativas de dos rectas (página 107)

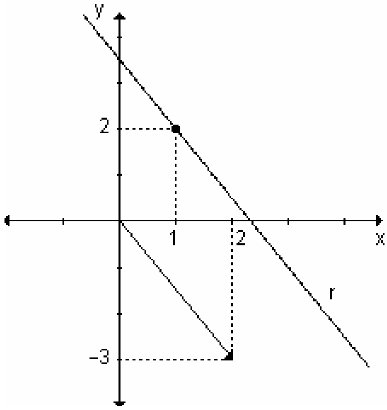
1)a) $\alpha = 45°$; **b)** $\alpha = 0°$; **c)** $\alpha = 90°$
2)a) y **f)** Paralelas, **d)** Perpendiculares; **c)** Coincidentes, **b)** y **e)** Concurrentes
3) k = 4
4)a) h = –6; **b)** $h = \frac{3}{2}$
c) $k = \frac{8}{3}$, h = –6
5) 3x – y + 5 = 0
6) 2x – y + 4 = 0
7) –x + 3y – 2 = 0
8)a)2; **b)** $\frac{1}{\sqrt{13}}$; **c)** $\frac{4}{\sqrt{5}}$;
d) $\sqrt{10}$; **e)** $\sqrt{2}$

PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE Recta en el plano (página 110)

1) b; **2)** d; **3)** a; **4)** c; **5)** b; **6)** a; **7)** c; **8)** d; **9)** c; **10)** a; **11)** c

AUTOEVALUACIÓN Nº 3. Recta en el plano (página 113)

1)a) r : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$



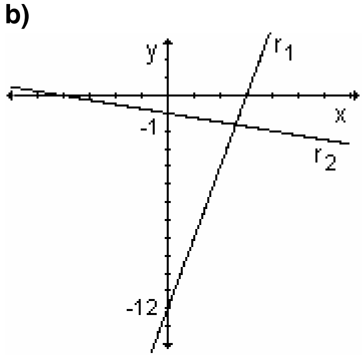
b) r : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-3}$, r : 3x + 2y –7 = 0

2) r : $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$. El punto (2, –4) le pertenece para $t = \dfrac{3}{2}$.

El punto (1, 3) no le pertenece.

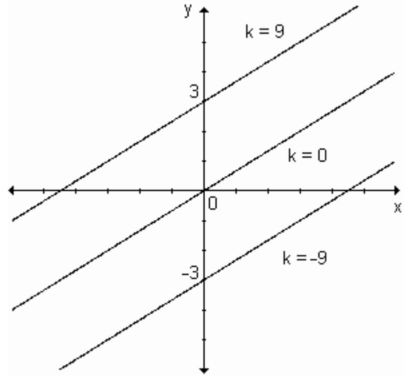
3)a) $b = -\dfrac{1}{2}$

b)

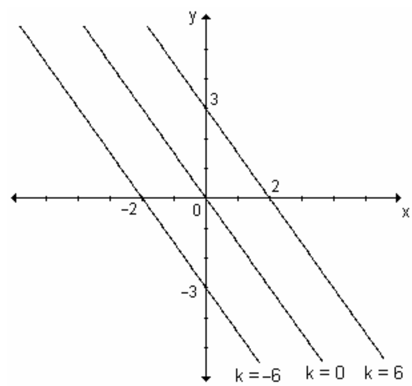


4) $k = 2$, $k = \dfrac{46}{3}$

5)a) 2x – 3y + k = 0



b) 3x + 2y + k = 0



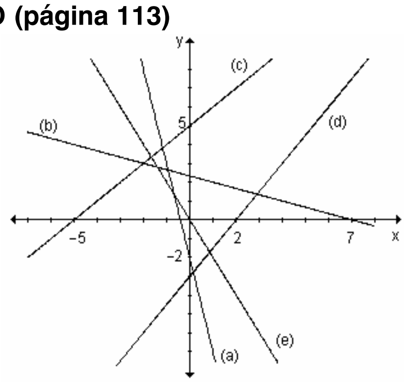
6) $\theta = 71^{o}\ 33'\ 54''$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO (página 113)

1)a) 5x + y + 2 = 0; **b)** x + 3y – 7 = 0

c) x – y + 5 = 0; **d)** 3x – 2y – 6 = 0

e) 2x + y = 0



2)a) $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$;

b) Si $t = 0$: P(–2,1). Si $t = 1$: Q(–1, –2); Si $t = -2$: R(–4, 7);

c) $t = 4$, $t = \frac{1}{3}$

3) $x + 2y - 5 = 0$

4)a) $\overline{AB} = \sqrt{29}$; $\overline{BC} = \sqrt{40}$; $\overline{AC} = \sqrt{17}$

b) $2x+5y-6 = 0$; $x-3y-3 = 0$; $4x-y+10 = 0$

c) $M_A = \sqrt{13}$; $M_B = \frac{11}{2}$;

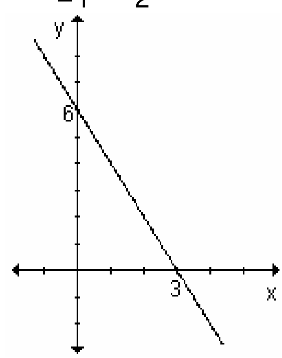
$M_C = \frac{\sqrt{85}}{2}$

5)a) $2x+y-12 = 0$, $x-y+3 = 0$, $y+2 = 0$

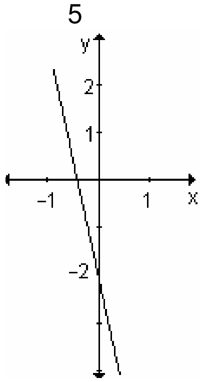
b) $x+y-5 = 0$, $x-2y+1 = 0$, $x-3 = 0$

c) P(3,2)

6) $\frac{x-3}{-1} = \frac{y}{2}$



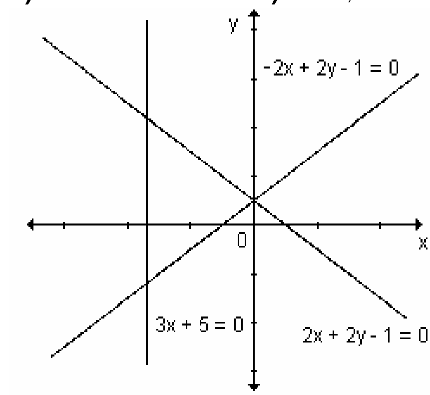
7) $\frac{x}{-\frac{2}{5}} + \frac{y}{-2} = 1$



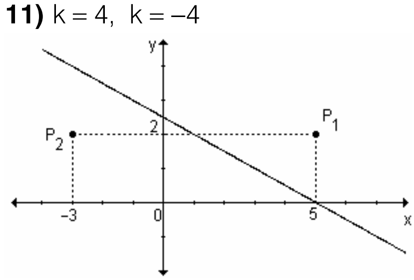
8)

Ecuación paramétrica	Ecuación general	Ecuación segmentaria
$\begin{cases} x = 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$	$x - 2y + 4 = 0$	$\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$
$\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$	$x - 2y - 6 = 0$	$\frac{x}{6} + \frac{y}{-3} = 1$
$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \end{cases}$	$x + y - 1 = 0$	$x + y = 1$

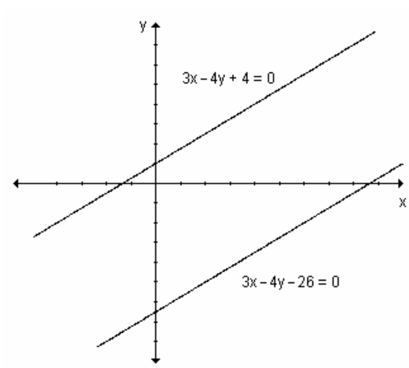
9) $\theta = 63° 26' 6''$ **10)** $a = 2$, $a = -2$



11) $k = 4$, $k = -4$



12) $c = 4$, $c = -26$



13)a) Si $k = -3$ son paralelas.
Si $k = 1$ son perpendiculares.

Si $k \neq -3$ y $k \neq 1$ son concurrentes.
En ningún caso son coincidentes.
b) Si $k = 3$, $k = -3$ son paralelas.
Si $k = 0$ son perpendiculares.

Si $k \neq 3$ y $k \neq -3$ y $k \neq 0$ son concurrentes.
En ningún caso son coincidentes.

CAPÍTULO 4: SECCIONES CÓNICAS

EJERCICIOS INTEGRADORES 4.1 Circunferencia (página 131)

1)a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

b) $(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 9$

2) Las tres ecuaciones cumplen la condición necesaria para ser una circunferencia ya que los coeficientes de los términos cuadráticos son iguales.

a) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 9$, circunferencia de centro $(2,-2)$ y radio 3.

b) El término independiente obtenido luego de completar cuadrados es igual a cero, por lo tanto se obtiene el punto $(-3, 1)$.

c) El término independiente obtenido luego de completar cuadrados es menor a cero, por lo tanto la ecuación no representa lugar geométrico.

3)a) $y = -x + 2$; **b)** $(0, 2)$ y $(2, 0)$

4) $(-1{,}56 ; -0{,}44)$ y $(-5{,}44 ; 3{,}44)$

EJERCICIOS INTEGRADORES 4.2 Parábola (página 145)

1) $(y-3)^2 = 12(x+4)$; eje focal $y = 3$; directriz $x = -7$

2) $(x-4)^2 = -8(y+1)$; vértice $V(4, -1)$

3) $(y-3)^2 = 20x$; eje focal $y = 3$; foco $F(5, 3)$

4) $(y+1)^2 = -4(x-4)$; $V(4, -1)$; parábola de eje focal $y = -1$; $F(3, -1)$; directriz $x = 5$

5) $(0, 3)$ y $(2, -1)$

EJERCICIOS INTEGRADORES 4.3 Elipse (página 158)

1) $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$

2) $\dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

3) $\dfrac{(x-5)^2}{16} + \dfrac{(y+6)^2}{9} = 1$; $e = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

4)a) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$; $C(0,1)$;

$V_1(0, 4)$; $V_2(0, -2)$; $V_3(2,1)$;

$V_4(-2,1)$; $F_1(0, 1+\sqrt{5})$; $F_2(0, 1-\sqrt{5})$

b) No se obtiene lugar geométrico.

EJERCICIOS INTEGRADORES 4.4 Hipérbola (página 175)

1) $y^2 - \dfrac{x^2}{8} = 1$

2) $\dfrac{(y-6)^2}{4} - \dfrac{(x-2)^2}{5} = 1$

3) $d = 4$, los focos se encuentran a la misma distancia de cada una de las asíntotas.

4) $(x+1)^2 - \dfrac{y^2}{4} = 1$

5)a) $\frac{y^2}{3} - (x+5)^2 = 1$

b) $y = \frac{3}{2}x + 6$; $y = -\frac{3}{2}x$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN Cónicas (página 185)

1) El máximo ancho posible es de 0,375 m. **2)** Distancia: 174,43 m.
3) La longitud del tirante es de 9m.
4) La altura del arco es de 24,31 m.
5) La fuente de calor se ubicará a 4, 17 m desde la base sobre el eje de simetría del espejo.
6)a) $(x - 75)^2 = -500(y - 11{,}25)$ (el inicio del arco se considera en el origen de coordenadas);
b) h = 7,2m
7) La altura del arco es 5,4 m.
8) Debe ubicarse a 1 m de cada extremo
9) La altura de la cúpula es 3,2 m
10)a) La longitud del semieje mayor es de 58 millones de km;
b) $e \cong 0{,}19$; **c)** La ecuación de la órbita es $\frac{x^2}{3364} + \frac{y^2}{3243} = 1$
11)a) La distancia mínima entre el satélite y el centro de Júpiter es10^8 m.
b) La distancia máxima entre ambos es 9.10^8 m.
12) La ecuación de la órbita de la Tierra es $\frac{x^2}{22\,380{,}16} + \frac{y^2}{22\,373{,}69} = 1$
13) Diámetro mayor: 35,87 U.A.; diámetro menor: 9,12 U.A.
14)a) La longitud de la galería es de 20m.; **b)** La altura del techo en el centro de la galería es de 8m.
15) La ecuación de la curva que describe las posibles posiciones del avión es $\frac{x^2}{2500} - \frac{y^2}{3900} = 1$.

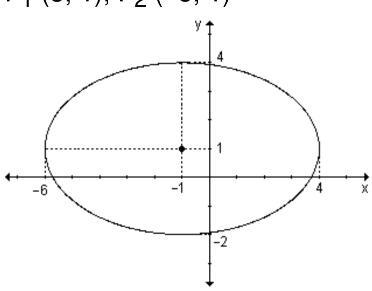
PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE Secciones Cónicas (página 187)

1) b; **2)** b; **3)** c; **4)** d; **5)** b; **6)** c; **7)** b; **8)** d ; **9)** a; **10)** a; **11)** c; **12)** b; **13)** a;**14)** a:**15)** d; **16)** b

AUTOEVALUACIÓN Nº 4: Cónicas (página 189)

1) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

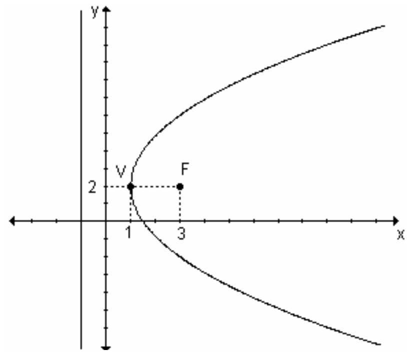
2) $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$, V_1 (4, 1), V_2 (–6, 1), V_3 (–1, 4), V_4(–1, –2), F_1 (3, 1), F_2 (–5, 1)



3) Los coeficientes de las variables de segundo grado son iguales. Se cumple la condición necesaria para que sea la ecuación de una circunferencia.
Completando cuadrados resulta la expresión $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -15$. Como $-15 < 0$, no existe lugar geométrico.

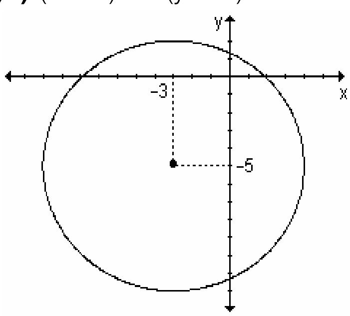
4) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

5) $(y - 2)^2 = 8(x - 1)$ Parábola.
Vértice: V (1, 2). Foco F (3, 2).
Directriz $x = -1$

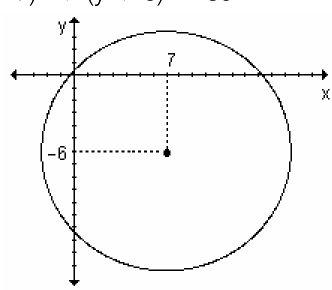


EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO (página 189)

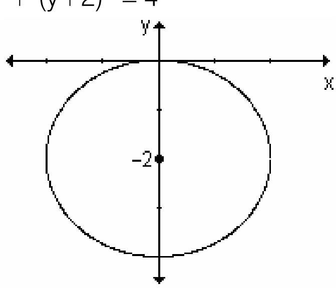
1)a) $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 49$



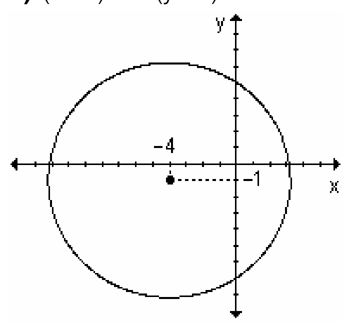
b) $(x - 7)^2 + (y + 6)^2 = 89$



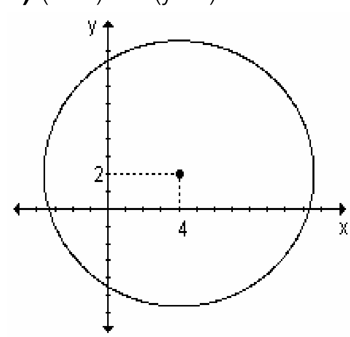
c) $x^2 + (y+2)^2 = 4$



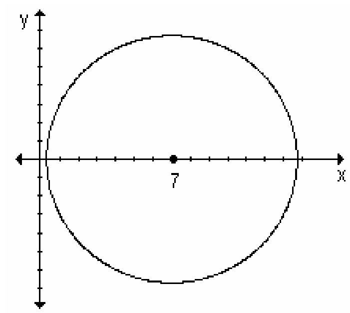
d) $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 52$



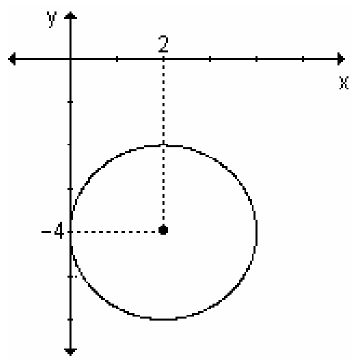
e) $(x -4)^2 + (y -2)^2 = 58$



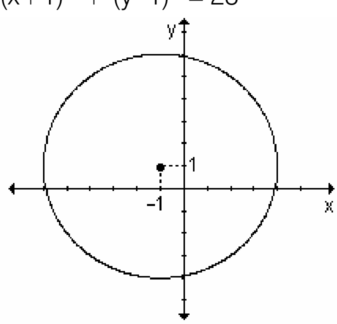
f) $(x - 7)^2 + y^2 = 45$



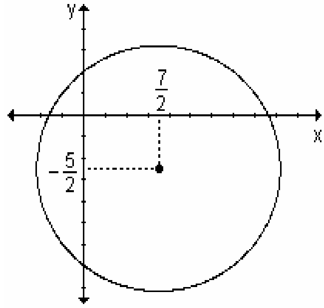
g) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 4$



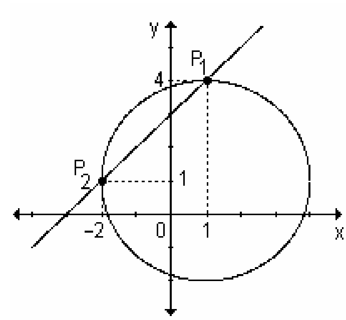
h) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$



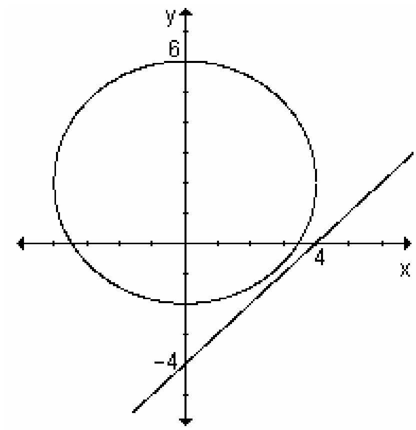
i) $\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{65}{2}$



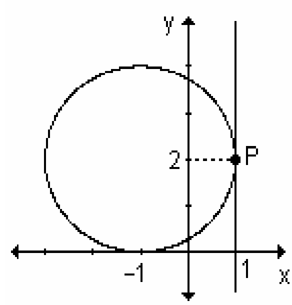
2)a) La recta es secante a la circunferencia: $P_1(1, 4)$ y P_2 $(-2, 1)$



b) La recta es exterior a la circunferencia.



c) La recta es tangente a la circunferencia: P(1, 2)



3)a) $y^2 = 12x$; **b)** $x^2 = -2y$;

c) $y^2 = -9x$; **d)** $x^2 = y$; **e)** $y^2 = \dfrac{8}{3}x$

f) $x^2 = -\dfrac{1}{2}y$

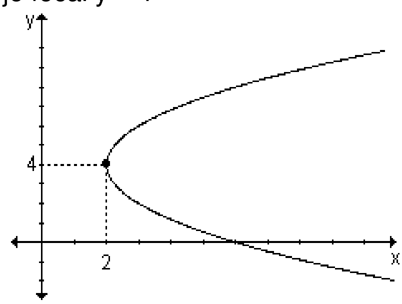
4)a) V(0, 0); F(1, 0); eje focal eje x: $y = 0$; directriz $x = -1$.

b) V(0, 0); F(0, $\frac{1}{4}$); eje focal eje y: x = 0; directriz $y = -\frac{1}{4}$.

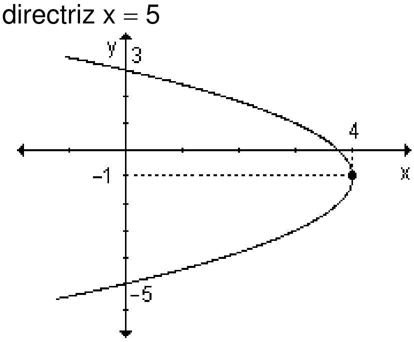
c) V(0, 0); F(0, $-\frac{3}{4}$); eje focal eje y: x = 0; directriz $y = \frac{3}{4}$.

d) V(0, 0); F(0, $-\frac{1}{2}$); eje focal eje y: x = 0; directriz $y = \frac{1}{2}$.

5)a) $(y-4)^2 = 4(x-2)$; V(2, 4); eje focal y = 4

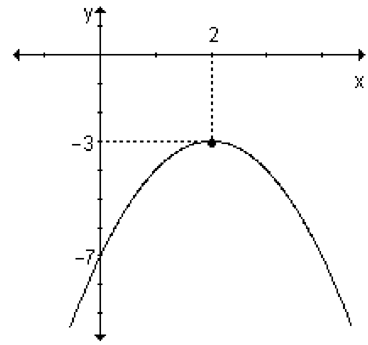


b) $(y + 1)^2 = -4(x-4)$; F(3, –1); directriz x = 5



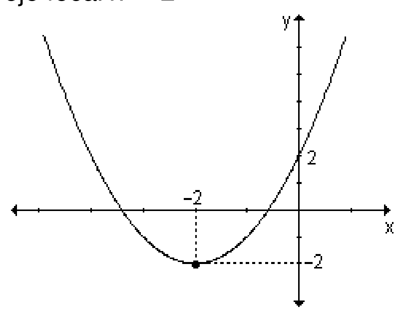
c) $(x-2)^2 = -(y + 3)$; F(2,$-\frac{13}{4}$);

directriz $y = -\frac{11}{4}$

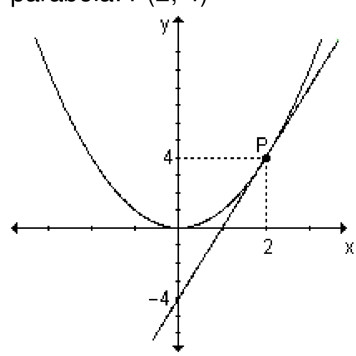


d) $(x + 2)^2 = (y + 2)$; F(–2,$-\frac{7}{4}$);

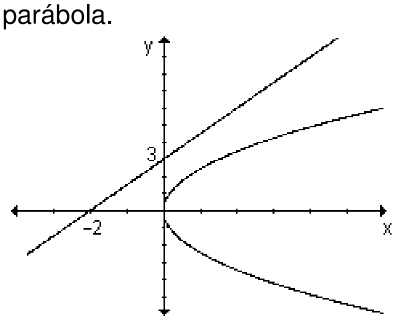
eje focal x =–2



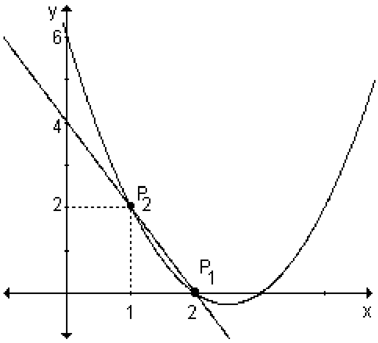
6)a) La recta es tangente a la parábola: P(2, 4)



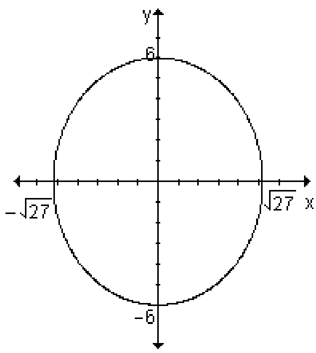
b) La recta es exterior a la parábola.



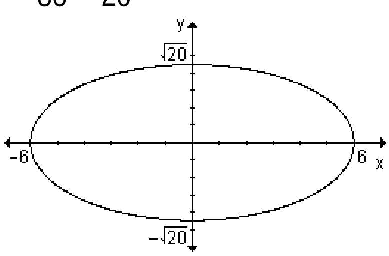
c) La recta es secante a la parábola
$P_1(2, 0)$, $P_2(1, 2)$



7)a) $\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{x^2}{27}=1$

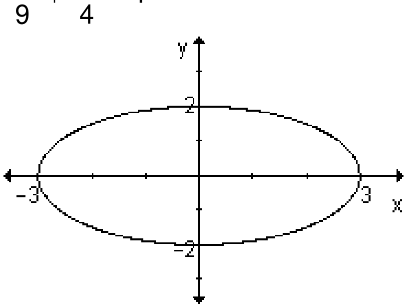


b) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1$

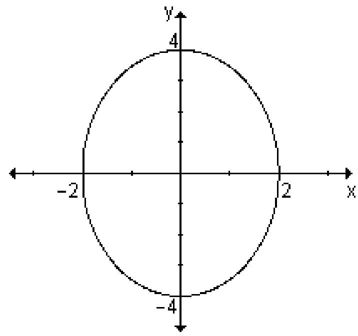


c)

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$



d) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$



8) $\dfrac{(x+2)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{10}=1$,$V_2(-7, -1)$,

$V_3(-2, -1+\sqrt{10}\ )$; $V_4(-2, -1-\sqrt{10}\ )$;

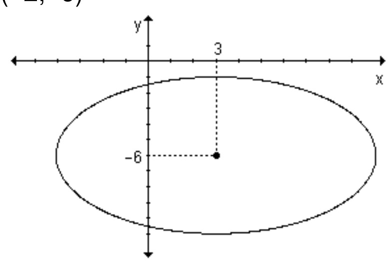
$F_1\ (-2+\sqrt{15}\ , -1)$; $F_2(-2-\sqrt{15}\ , -1)$;

$e = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

9) $\dfrac{(x-3)^2}{50}+\dfrac{(y+6)^2}{25}=1$,

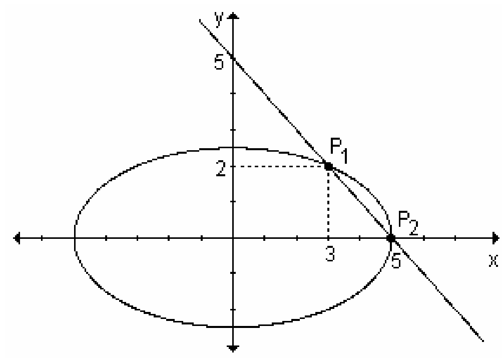
$V_1(3+\sqrt{50}\ ,-6)$; $V_2(3-\sqrt{50}\ ,-6)$;

$V_3(3,-1)$; $V_4(3, -11)$; $F_1(8,-6)$; F_2
$(-2,-6)$

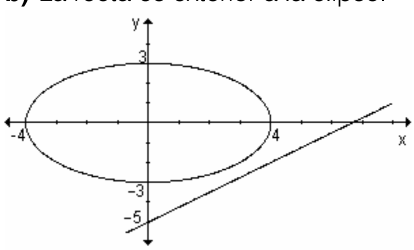


10)a) La recta es secante a la elipse:

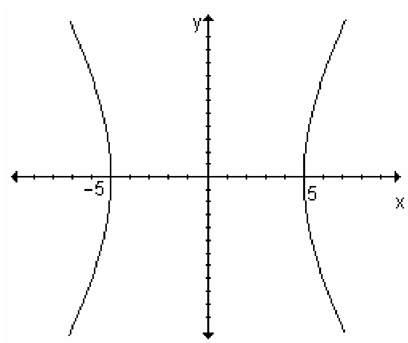
$P_1(3, 2)$ y $P_2(5, 0)$



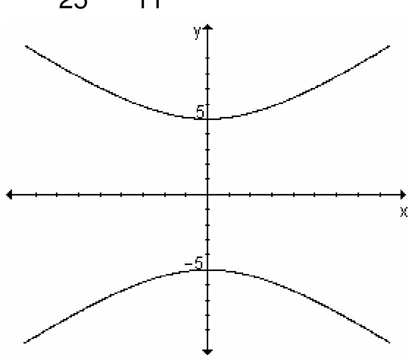
b) La recta es exterior a la elipse.



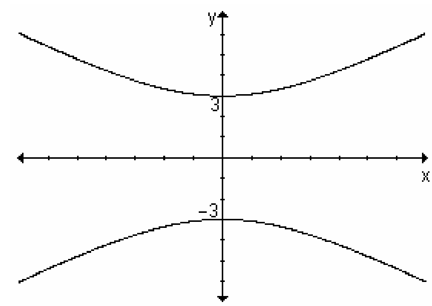
11)a) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{144} = 1$



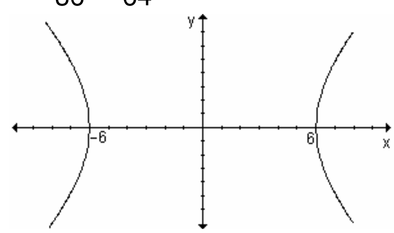
b) $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{11} = 1$



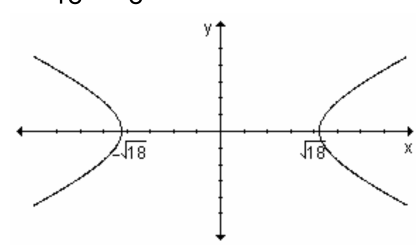
c) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$



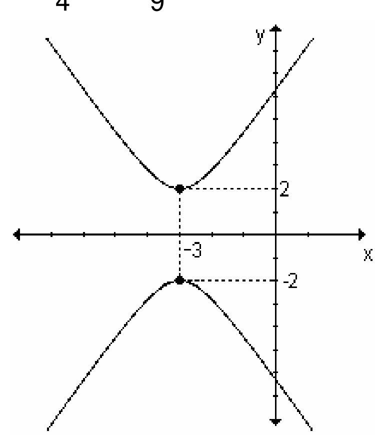
d) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$



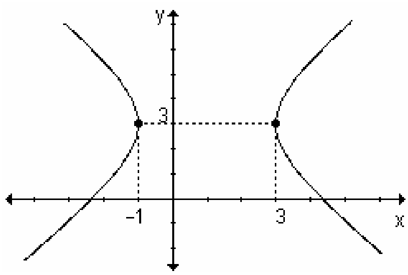
e) $\dfrac{x^2}{18} - \dfrac{y^2}{8} = 1$



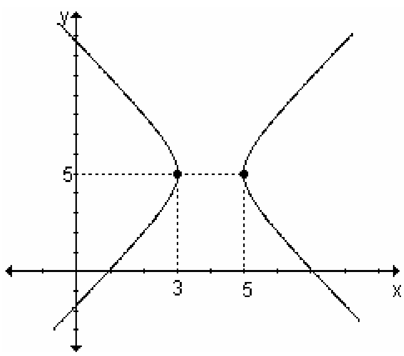
f) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{(x+3)^2}{9} = 1$



g) $\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y-3)^2}{5}=1$



h) $\dfrac{(x-4)^2}{1}-\dfrac{(y-5)^2}{3}=1$

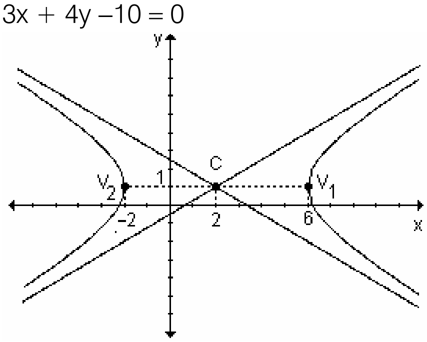


12) $\dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$; C(2, 1);

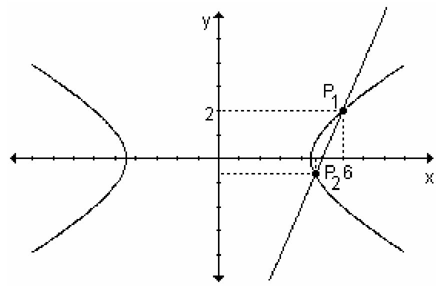
$V_2(-2, 1)$; $F_1(7, 1)$; $F_2(-3, 1)$

Asíntotas: $3x - 4y - 2 = 0$;

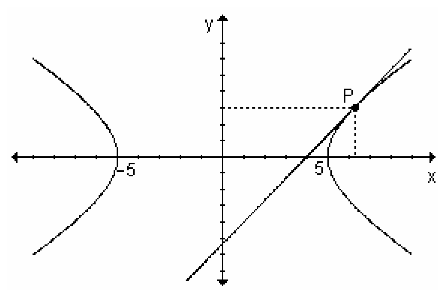
$3x + 4y - 10 = 0$



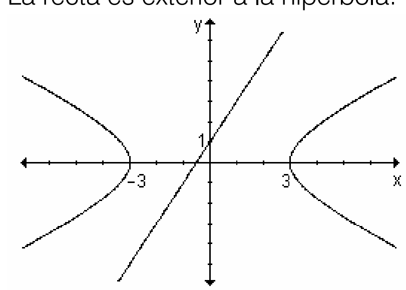
13)a) La recta es secante a la hipérbola: $P_1(6, 2)$ y $P_2\left(\dfrac{14}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$



b) La recta es tangente a la hipérbola: $P\left(\dfrac{25}{4},3\right)$



c) No existe intersección.
La recta es exterior a la hipérbola.



14)a) $x^2 + (y + 3)^2 = 9$

b) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 4$

c) $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

d) $\dfrac{(x+2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$

e) $(x - 2)^2 = (y + 4)$;

f) $y^2 = -\dfrac{4}{3}(x-3)$;

g) $y^2-\dfrac{x^2}{4}=1$

h) $\frac{(x+3)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$

15)a) $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=16$;

$C\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$; $r=4$

b) $(y+1)^2=4(x-5)$; $V(5,-1)$; $F(4,-1)$; directriz: $x=6$

c) $\frac{(x-3)^2}{4}+(y+2)^2=1$; $C(3, -2)$;

$V_1(5, -2)$;$V_2(1,-2)$;$V_3(3,-1)$;$V_4(3, 3)$;

$F_1(3+\sqrt{3},-2)$; $F_2(3-\sqrt{3},-2)$

d) $y^2=7(x+2)$; $V(-2, 0)$; $F\left(-\frac{1}{4},0\right)$;

directriz: $x+\frac{15}{4}=0$;

e) Punto $p\left(-\frac{7}{2},1\right)$;

f) Ningún lugar geométrico.

g) $\left(x+\frac{4}{3}\right)^2=-8y$; $V\left(-\frac{4}{3},0\right)$;

$F\left(-\frac{4}{3},-2\right)$; directriz: $y-2=0$

h) $\frac{(x-2)^2}{9}-(y-2)^2=1$; $C(2, 2)$;

$V_1(5, 2)$; $V_2(-1, 2)$; $F_1(2+\sqrt{10}, 2)$;

$F_2(2-\sqrt{10}, 2)$

i) $\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x+3)^2}{4}=1$; $C(-3, 2)$;

$V_1(-3, 5)$; $V_2(-3,-1)$,

F_1 $(-3, 2+\sqrt{13})$; F_2 $(-3, 2-\sqrt{13})$

j) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=5$;

$C\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$; $r=\sqrt{5}$

k) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1$; $C(3,-1)$;

$V_1(0,-1)$; $V_2(6,-1)$; $V_3(3,-1+\sqrt{5})$;

$V_4(3,-1-\sqrt{5})$; F_1 $(3+\sqrt{14},-1)$;

F_2 $(3-\sqrt{14},-1)$

l) Las rectas $x-2y-1=0$;
$x+2y-1=0$;

m) Las rectas $y-3=0$; $y+5=0$

n) Ningún lugar geométrico.

16) $(y+1)^2=-4(x-3)$

17) $(x+1)^2+(y+3)^2=25$;

18) $d=\frac{25}{4}$

19) $(x-3)^2+(y-1)^2=\frac{36}{25}$

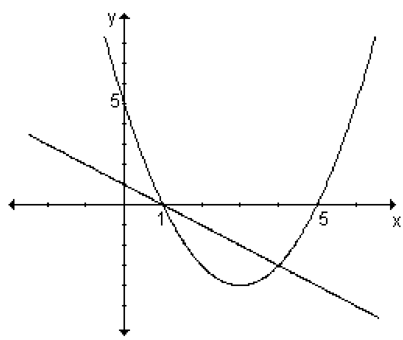
20) $(x+2)^2=(y+2)$

21) 10

22) $d=5\sqrt{2}$

23)a) $a=1$, $b=5$

b)



24) $k=1$

25)a) $k<\frac{1}{2}$; **b)** $k=\frac{1}{2}$; **c)** $k>\frac{1}{2}$

26)a) $a=\frac{3}{2}$; **b)** $d=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

27) $k=-8$

CAPÍTULO 5: RECTA Y PLANO EN EL ESPACIO

EJERCICIOS INTEGRADORES 5.1 Recta en el espacio R^3 (página 201)

1)a) $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 3 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 3t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$

b) $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{3} = z - 5$

2)a) $x + 2 = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z-5}{2}$;

EJERCICIOS INTEGRADORES 5.2 Plano en el espacio R^3 (página 215)

1)a) $-2x + y + 3z + 11 = 0$
b) $11x + 5y + 7z - 8 = 0$
c) $y = -3$; **d)** $z = -3$
2) $x + y - 3z - 4 = 0$
3) $x - y + z + 4 = 0$
4)a) se cortan en la recta

$$\begin{cases} x = \dfrac{29}{7} - \dfrac{8}{7}t \\ y = \dfrac{2}{7} + \dfrac{5}{7}t \\ z = t \end{cases}$$

b) coincidentes. **c)** paralelos.

EJERCICIOS INTEGRADORES 5.3 Posiciones relativas entre recta y plano en R^3 (página 227)

1)a) coincidentes, **b)** paralelas, **c)** se cruzan **d)** se cortan en (3,–1,6)

2) $x + 2 = -y = z - 4$

3) $\vec{u} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ // r

$\vec{n} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$ $\perp$ plano

r // plano $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \perp \vec{n}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 12 + 6 - 18 = 0$. Por lo tanto la recta es paralela al plano.

4) $\vec{u} = 2\vec{i} + 1\vec{j} - 1\vec{k}$ // r

$\vec{n} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ $\perp$ plano

r $\perp$ plano $\Leftrightarrow$ $\vec{u} // \vec{n}$ $\Leftrightarrow$

$\dfrac{u_1}{n_1} = \dfrac{u_2}{n_2} = \dfrac{u_3}{n_3}$ $\Leftrightarrow$

$\dfrac{2}{-4} = \dfrac{1}{-2} = \dfrac{-1}{2}$ Por lo tanto, la recta es perpendicular al plano.

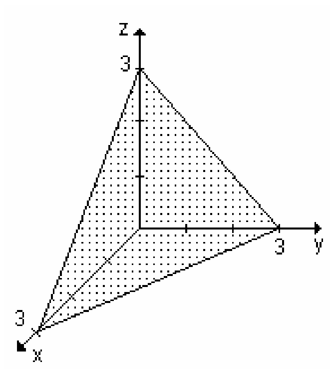
PRUEBA DE OPCIÓN MÚLTIPLE Recta y plano en el espacio (página 228)

1) b; **2)** c; **3)** d; **4)** a; **5)** c; **6)** c; **7)** b; **8)** a; **9)** c; **10)** a; **11)** c

AUTOEVALUACIÓN Nº 5. Recta y plano en el espacio (página 230)

1) $\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -2 - 6t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Otros puntos pueden ser: (11, –14, –1) si $t = 2$; $\left(6, -4, \dfrac{2}{3}\right)$ si $t = \dfrac{1}{3}$; (–1, 10, 3) si $t = -2$.

2) La recta y el plano son perpendiculares. El punto no pertenece al plano pues no verifica su ecuación.
3) $\pi : 4x - 3y + 4z - 10 = 0$
4) $\pi : 3x + y - 3z + 4 = 0$
5) No se puede determinar porque las rectas no son coplanares.



6) Las rectas son paralelas.

7)a) $\pi : 5x - 2y - 4z - 3 = 0$

b) $r : \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{-4}$

8) $a = 10,\ b = 2$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO (página 231)

1)a) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 5t \\ z = 4 + 4t \end{cases}$

b) $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-4}{4}$

2)a) $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 5t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

3)a) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$ **; b)** $t = -3$

4) $a = -7,\ b = 5$

5) $t = 1,\ t = -2,\ t = 0$

6)a) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$

b) Pertenecen los puntos A, D, E y F

7) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$

8) $x + 2 = \dfrac{y-1}{3} = z$

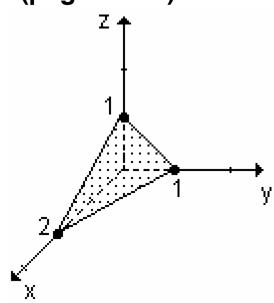
9) $\dfrac{x-3}{-6} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-4}{2}$

10)a) Alabeadas; **b)** Paralelas; **c)** Alabeadas **d)** Se cortan en el punto (3,5,7).

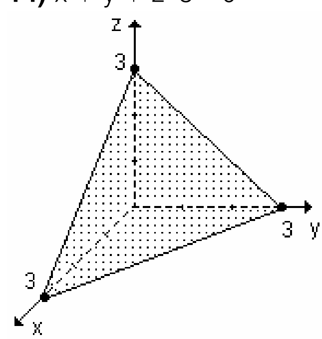
11) $2x + y - z - 3 = 0$

12) $2x - y + z - 1 = 0$

13) $x + 2y + 2z - 2 = 0$



14) $x + y + z - 3 = 0$



15) $y + 2 = 0$

16) $3x + y - z - 2 = 0$

17) $x - 2y + 3z - 1 = 0$

18) $x - y + z - 6 = 0$

19) $m = -\dfrac{3}{2}$

20) $\dfrac{x-3}{2} = y - 2 = \dfrac{z-1}{-1}$

21)a) Coincidentes; **b)** Paralelos

c) Perpendiculares, $r: \begin{cases} x = \dfrac{10}{3} \\ y = \dfrac{11}{3} + t \\ z = t \end{cases}$

d) Concurrentes, $r: \begin{cases} x = \dfrac{7}{3} - \dfrac{2}{3}t \\ y = \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$

e) Perpendiculares, $r: \begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = 7 - \dfrac{5}{2}t \\ z = t \end{cases}$

f) Concurrentes, $r: \begin{cases} x = -\dfrac{14}{5} + t \\ y = -\dfrac{3}{5} \\ z = t \end{cases}$

Bibliografía

Altman, S.; Comparatore, C. y Kurzrok, L.: *Matemática 4. Vectores,* Longseller, Buenos Aires, 2002.

Anton, H.: *Cálculo y Geometría Analítica* , Volumen 1, Limusa, México, 1991.

Anton, H.: *Cálculo y Geometría Analítica*, Volumen 2, Limusa, México, 1997.

Ayra, J. y Larner, R.: *Matemáticas aplicadas a la Administración*, *Economía*, *Ciencias Biológicas y Sociales*, Prentice Hall Hispanoamericana, Méjico, 1992.

Baum, A.; Milles, S. y Schultz, H.: *Cálculo Aplicado*, Limusa, México, 1992.

Budnick, F.: *Matemáticas Aplicadas para Administración*, *Economía y Ciencias Sociales*, Tercera Edición, Mc. Graw Hill, Méjico, 1997.

Burgos, J.: *Geometría en el plano: problemas resueltos y propuestos,* Cuaderno de actividades 6, Mc. Graw Hill, España, 1997.

Burgos, J.: *Geometría en el espacio: problemas resueltos y propuestos*, Cuaderno de actividades 7, Mc. Graw Hill, España, 1997.

Cardus, D.: *Introducción a las Matemáticas para Médicos y Biólogos*, Editorial Vicens Vives, España, 1972.

Douglas Faires, J. y De Franza, J.: *Precálculo*, Segunda Edición, International Thomson Editores, Méjico, 2001.

Engler, A.; Müller, D.; Vrancken, S. y Hecklein, M.: *Matemática Básica - Volumen 3. Vectores y Geometría Analítica*, Centro de Publicaciones. Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, 2002.

Fleming, W. y Varberg, D.: *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Prentice Hall Hispanoamericana, Méjico, 1991.

Goldstein, L.; Lay, D. y Schneider, D.: *Cálculo y sus Aplicaciones*, Cuarta Edición, Prentice Hall, Méjico, 1990.

Goodson, C. y Miertschin, S.: *Álgebra con aplicaciones técnicas*, Limusa, México, 1991.

Grossman, S.: *Álgebra lineal*, 5ta. Edición, Mc. Graw Hill, Méjico, 1995.

Guzmán, M.: *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*, Olimpíada Matemática Argentina, Buenos Aires, 1992.

Guzmán, M. y Colera, J.: *Matemáticas I - C.O.U.*, Grupo Anaya, Madrid, 1989.

Guzmán, M. y Colera, J.: *Matemáticas II - C.O.U.*, Grupo Anaya, Madrid, 1989.

Guzmán, M., Cólera, J. y Salvador, A.: *Matemáticas - Bachillerato 1*, Grupo Anaya S.A., Madrid, 1993.

Guzmán, M., Cólera, J. y Salvador, A.: *Matemáticas - Bachillerato 2*, Grupo Anaya S.A., Madrid, 1993.

Guzmán, M., Cólera, J. y Salvador, A.: *Matemáticas - Bachillerato 3*, Grupo Anaya S.A., Madrid, 1993.

Haeussler, E. y Paul, R.: *Matemáticas para Administración y Economía*, Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico, 1987.

Hoffman,L.; Bradley, G.: *Cálculo para administración, economía, ciencias biológicas y sociales,* Séptima Edición, Mc. Graw Hill, Colombia, 2001.

Hughes–Hallet, D.; Gleason, A.; et al.: *Cálculo*, CECSA, Segunda Edición, Méjico, 2001.

Lang, S.: *Cálculo I*, Fondo Educativo Iberoamericano, Méjico, 1986.

Larson, R.; Hostetler, R.; Edwards, B.: *Cálculo y Geometría Analítica*, Volumen

1, Quinta Edición, Mc. Graw Hill, Méjico, 1995.
Larson, R.; Hostetler, R.; Edwards, B.: *Cálculo y Geometría Analítica*, Volumen 2, Quinta Edición, Mc. Graw Hill, Méjico, 1996.
Leithold, L.: *Cálculo con Geometría Analítica*, Editorial Harla, Méjico, 1987.
Leithold, L.: *El Cálculo*, 7 ed. , Oxford University Press, Méjico, 1999.
Lial, M. y Hungerford, T.: *Matemáticas para administración y economía. En las ciencias sociales, naturales y de administración,* Séptima Edición, Pearson Educación, México, 2000.
Peterson, J.: *Matemáticas básicas. Álgebra, trigonometría y geometría analítica*, CECSA, México,2001.
Phillips, E.; Butts, T.; Shaughnessy, M.: *Álgebra con aplicaciones*, Harla, Méjico, 1988.
Purcell, E. y Varberg, D.: *Cálculo con Geometría Analítica*, Prentice Hall Hispanoamericana, Méjico, 1995.
Purcell, E. y Varberg, D.: *Cálculo Diferencial e Integral*, Sexta Edición, Prentice Hall Hispanoamericana, Méjico, 1993.
Salas, Hille y Etgen: *Calculus. Una y varias variables, Volumen I,* 4ta. Edición, Editorial Reverté. Barcelona, 2002.
Smith, S.; Charles, R.; Dossey, J.; Keedy, M. y Bittinger, M.: *Álgebra y trigonometría*, Addison Wesley Longman, Méjico, 1998.
Smith, R. y Minton, R.: *Cálculo. Tomo 1,* Mc. Graw Hill, Colombia, 2000.
Sobel, M. y Lerner, N.: *Álgebra*, 4ta Edición, Prentice Hall Hispanoamericana, Méjico, 1996.
Stein, S.: *El cálculo con Geometría Analítica*, Mc. Graw Hill, Méjico, 1984.
Stewart, J.: *Cálculo Multivariable*, Tercera Edición, International Thomson Editores, Méjico, 1999.
Stewart, J.; Redlin, L.; Watson, S.: *Precálculo,* Tercera Edición, Thomson Learning, México, 2001.
Sullivan, M.: *Precálculo*, Cuarta Edición, Pearson Educación, Prentice Hall, Addison Wesley, México, 1997.
Swokowski, E. y Cole, J.: *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Tercera Edición, Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico, 1996.
Swokowski, E.: *Introducción al Cálculo con Geometría Analítica*, Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico, 1987.
Tan, S.T.: *Matemáticas para administración y economía,* Segunda Edición, Thomson Learning, Méjico, 2002.
Thomas, G. y Finney, R.: *Cálculo. Varias variables,* 9ª Edición,Pearson Educación, Addison Wesley Longman, Méjico, 1998.
Waner, S. y Costenoble, S.: *Cálculo Aplicado,* Segunda Edición, Thomson Learning, México, 2002.