UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de

Doctor en Matemática

En el campo de: **Análisis**

Título de la tesis:

Aproximación y convergencia de espacios de tipo homogéneo. Problemas analíticos y geométricos

Institución donde se realizó:
Departamento de Matemática – FIQ – UNL
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (IMAL)

Autor:
Marilina Carena

Director de Tesis:
Dr. Hugo Aimar

Codirector de Tesis:
Dra. Bibiana Iaffei

Defendida ante el jurado compuesto por:
Dr. Héctor Cuenya
Dr. Julián Fernández Bonder
Dra. Ursula Molter

Año de presentación: 2007

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a quienes de una u otra manera hicieron posible la realización de esta tesis.

A mis directores Hugo y Bibiana, por su constante apoyo y estímulo, por la dedicación con la que trabajaron en cada detalle de esta tesis. Gracias por permitirme aprender de su forma de plantear, razonar y solucionar los problemas, y sobretodo gracias por la calidez y comprensión que me brindaron desde el comienzo. Los quiero y los admiro muchísimo.

A mis "papis" Sergio y Mabel, porque nada de esto hubiese sido posible sin su apoyo y ayuda incondicional.

A Nico, por todos los buenos momentos, por ayudarme a tener más tiempo para trabajar en esta tesis y por haberme dado a Franco, quien cada día me llena de fuerzas y de felicidad.

Al CONICET que hizo económicamente posible el desarrollo de esta tesis al otorgarme la beca doctoral, brindando también un lugar de trabajo y la infraestructura necesaria. Gracias a Coca y a Marce por su ayuda y buena voluntad, a Alejandro por tanta paciencia, y a todo el IMAL por hacernos parte.

A cada miembro del jurado, por haber aceptado leer este trabajo con tanta buena predisposición, y por sus sugerencias y contribuciones.

A mis compañeros de oficina que me "aguantaron" a lo largo de todo este tiempo, y en especial a Ivana y Nacho por su amistad, porque se alegraron conmigo en los momentos buenos, y me animaron y apoyaron en forma sincera en los no tan buenos.

A mi amiga Karina, por su amistad de tantos años.

Finalmente, quiero darle las gracias al resto de mis familiares y amigos, quienes siempre estuvieron pendientes de mi tarea, y me dieron fuerzas con su afecto.

Índice general

Resumen

El trabajo de tesis se centra en obtener resultados analíticos y geométricos en contextos continuos (espacios de tipo homogéneo generales) a partir de situaciones discretas y aún finitas.

En el espacio euclídeo, un método de discretización para el estudio del tipo débil $(1,1)$ de operadores maximales fue introducido por de Guzmán y Carrillo, y consiste en caracterizar el tipo débil del maximal de operadores de convolución con respecto a la medida de Lebesgue, en términos de su acotación sobre masas puntuales. Nuestro resultado básico en esta dirección es la extensión de este método para ser aplicado al maximal de operadores integrales con núcleos de dos variables actuando en ciertos espacios métricos de medida. Esta discretización del problema se basa en la aproximación de funciones por otras de estructura más simple. Otra técnica de discretización desarrollada en este trabajo consiste en sustituir el espacio físico por otro, discreto, que lo aproxima. En relación al problema mencionado probamos que el tipo débil $(1,1)$ del operador maximal puede garantizarse mediante la validez en forma uniforme de dicha propiedad sobre subconjuntos discretos que aproximan al espacio original.

Para aproximar el espacio por discretizaciones del mismo se introduce una estructura topológica sobre los espacios casi-métricos compactos probabilísticos que contempla la convergencia de Hausdorff de conjuntos y la convergencia débil de medidas. En esta estructura se obtiene una estabilidad en la convergencia de familias que poseen una cota fija para la constante de duplicación. Además se obtienen aproximaciones mediante redes finitas que permanecen de modo *uniforme* en clases de espacios de tipo homogéneo. Esto implica que probar que un operador maximal es de tipo débil $(1,1)$ en un contexto continuo, se reduce a probar que un operador asociado es uniformemente de tipo débil $(1,1)$ sobre contextos finitos uniformemente homogéneos.

Esta estrategia nos condujo a estudiar los análogos de operadores clásicos en contextos finitos. En particular probamos el tipo débil de los operadores maximales de Hardy-Littlewood y de Hilbert definidos sobre conjuntos discretos.

Los fractales construidos por la técnica de iteración de Hutchinson son en general espacios de tipo homogéneo. La herramienta fundamental en el trabajo de Hutchinson es el teorema del punto fijo de Banach. La aplicación de dicho teorema a contracciones actuando sobre el espacio métrico de Hausdorff se basa en la completitud de este espacio. Para los problemas analíticos de

este trabajo exploramos diferentes subconjuntos cerrados $\mathcal{D}$, tales que cada elemento de $\mathcal{D}$ sea un espacio de tipo homogéneo. En particular probamos la completitud de clases de duplicación, de normalidad y de Muckenhoupt. Además se encuentran algunas condiciones en sistemas iterados de funciones de modo que la teoría del punto fijo de Banach puede aplicarse a la transformación inducida por dichos sistemas.

Finalmente se estudia la permanencia de órbitas dentro de clases de duplicación, de normalidad y de pesos de Muckenhoupt. Se muestra que en general las propiedades de duplicación ocurren en el límite pero no necesariamente en los aproximantes. Sin embargo bajo ciertas hipótesis los elementos de la órbita poseen una propiedad que se acerca cada vez más, en un sentido preciso, a la de ser espacios de tipo homogéneo mientras el paso de la iteración crece. También consideramos las órbitas generadas a partir de una masa puntual y probamos la normalidad uniforme de la órbita para ciertos sistemas iterados de similitudes contractivas, lo que implica la normalidad y duplicación del espacio límite. Se muestra además que la permanencia de órbitas en las clases de Muckenhoupt no tiene sólo que ver con los factores de contracción contenidos en el sistema iterado de funciones, sino también con otras propiedades como la orientación.

Introducción

Idea central de la tesis

En los modos clásicos de uso técnico de análisis numérico para aproximar soluciones a problemas continuos, la aproximación de funciones o de dominios se obtiene simplificando las estructuras de aquellas o de éstos. Pero generalmente no se sustituye el espacio físico por otro, discreto, que lo aproxima. Puesto que en el sentido de Hausdorff todo espacio compacto es límite de espacios finitos y que este límite puede tomarse preservando en forma "uniforme" una de las propiedades fundamentales de la estructura: la duplicación, es de esperar que la resolución de problemas discretos o aún finitos de un modo uniforme, induzca la resolución (automática) de los correspondientes problemas continuos en el espacio límite.

En el contexto euclídeo n-dimensional, Miguel de Guzmán y María Teresa Carrillo (ver [**17**] y [**10**]) caracterizan el tipo débil de un maximal de operadores de convolución con respecto a la medida de Lebesgue, en términos de su acotación sobre masas puntuales. Uno de los problemas analíticos abordados en nuestro trabajo consiste en generalizar este resultado a ciertos espacios métricos de medida que incluyen medidas no duplicantes.

Por otro lado, tomando como punto de partida la técnica introducida por J. Hutchinson ([**24**]) para construir conjuntos autosimilares y el método de J. M. Wu ([**37**]) para construir medidas duplicantes en espacios métricos compactos con dimensión de Assouad finita, hemos construido una estructura métrica en la familia de los subespacios homogéneos probabilísticos con constante de duplicación fija dentro de un espacio métrico compacto, de modo que las ϵ-redes finitas son buenas aproximaciones del espacio total. Se obtiene una estabilidad de la propiedad de duplicación para la convergencia en esa estructura métrica. Esta estabilidad geométrica también tiene un correlato analítico en el estudio de la acotación de operadores, ya que permite la resolución de problemas continuos a partir de una resolución estable en contextos discretos.

El primer problema que abordamos en este trabajo es determinar el tipo débil del operador maximal asociado a una sucesión de núcleos definidos sobre espacios métricos de medida reduciendo el estudio de la acción de dicho operador a un conjunto finito. Como ya mencionamos, un método de discretización para el estudio del tipo débil $(1,1)$ de operadores maximales en el espacio euclídeo fue introducido por de Guzmán y Carrillo. Ellos probaron que un operador maximal de convolución es de tipo débil $(1,1)$ si y sólo si es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac concentradas en puntos diferentes de $\mathbb{R}^n$ (ver [**17**] y [**10**]). Nuestro resultado básico en esta dirección, que es usado frecuentemente en el resto del trabajo, consiste en la extensión de este método de discretización para que pueda ser aplicado al operador maximal de operadores integrales definidos mediante núcleos de dos variables actuando en espacios de tipo homogéneo con respecto a medidas no necesariamente duplicantes.

Otro problema central a nuestro objetivo general es probar que el tipo débil $(1,1)$ de un operador maximal puede garantizarse mediante la validez en forma uniforme de dicha propiedad sobre subconjuntos discretos que aproximan al espacio original. Para proceder a aproximar el espacio por discretizaciones del mismo, resulta fundamental contar con una estructura topológica (métrica) básica sobre el conjunto $\mathcal{K} \times \mathcal{P}$ de todos los pares (Y, μ) tales que Y es un subespacio cerrado de un espacio casi-métrico compacto, y μ es una medida de probabilidad Borel regular. Hemos introducido una topología que involucra la convergencia de Hausdorff de conjuntos compactos y la convergencia débil estrella de Kantorovich para las medidas de probabilidad. En esta estructura se obtiene una estabilidad para la propiedad de duplicación en la convergencia de familias que poseen una cota fija para la constante de duplicación. Además se obtienen aproximaciones mediante redes finitas que permanecen de modo *uniforme* en clases de espacios de tipo homogéneo. Esto implica que probar que un operador maximal es de tipo débil $(1,1)$ en un contexto continuo, se reduce a probar que un operador asociado es uniformemente de tipo débil $(1,1)$ sobre contextos discretos uniformemente homogéneos.

Teniendo presente el programa general del trabajo, consistente en obtener resultados analíticos en contextos continuos muy generales a partir de contextos discretos sencillos, y basados en los resultados obtenidos que mencionamos, probamos algunos teoremas básicos de lo que podría llamarse "análisis armónico finito", que consiste en el estudio de los análogos de operadores clásicos del análisis armónico en contextos finitos.

Los resultados probados por Mosco en [**32**] muestran que los fractales construidos por la técnica de iteración introducida por Hutchinson en [**24**], son en general espacios de tipo homogéneo. La herramienta fundamental en el trabajo de Hutchinson es el teorema del punto fijo de Banach. La aplicación de dicho teorema a familias de contracciones actuando sobre el espacio métrico de Hausdorff se basa en la completitud de este espacio. Para los problemas analíticos de este trabajo estamos especialmente interesados en el subconjunto de aquellos pares en $\mathcal{K} \times \mathcal{P}$ que son espacios de tipo homogéneo, el cual no resulta completo y por lo tanto el teorema del punto fijo no puede ser aplicado. Con tal fin exploramos diferentes subconjuntos *cerrados* $\mathcal{D}$ del espacio métrico completo $\mathcal{K} \times \mathcal{P}$ tales que cada elemento de $\mathcal{D}$ sea un espacio de tipo homogéneo. En particular probamos la completitud de clases de duplicación, de normalidad y de Muckenhupt. Luego se encuentran algunas condiciones suficientes de separación en sistemas iterados de funciones de modo que la teoría de punto fijo de Banach puede aplicarse.

Finalmente exploramos la permanencia de órbitas dentro de clases de duplicación, de normalidad y de pesos de Muckenhoupt en algunas situaciones particulares que ponen en evidencia que, en general, las propiedades de duplicación ocurren en el límite, aunque no necesariamente en los aproximantes. Es decir, puede ocurrir para ciertos puntos iniciales que ningún punto de la órbita generada por un sistema iterado de funciones sea un espacio de tipo homogéneo, aún cuando el espacio límite sí lo sea. Con estos ejemplos en mente probamos, bajo ciertas hipótesis, que los elementos de la órbita satisfacen una propiedad que se parece cada vez más a la de duplicación a medida que el paso de la iteración crece, en un sentido preciso. También consideramos las órbitas generadas a partir de una masa puntual y probamos la normalidad uniforme de la órbita, y en consecuencia, la normalidad y duplicación del espacio límite, para ciertos sistemas iterados de similitudes contractivas. Además estudiamos casos particulares en los que los términos aproximantes permanecen uniformemente dentro de una clase de Muckenhoupt.

Distribución del material

El número de capítulos responde a una estrategia de organización de esta tesis en la que los problemas analíticos y geométricos, ambos en sentido amplio, se presentan al principio en forma alternada y luego, en los capítulos finales, en modo conjunto. Los temas están distribuidos en los capítulos siguiendo el esquema básico que aparece a continuación.

Generalidades de análisis y geometría (Capítulo 1)

↓

Análisis (Capítulo 2)

↓

Geometría (Capítulo 3)

↓

Análisis discreto (Capítulo 4)

↓

Análisis (Capítulo 5)

↓

Geometría - Análisis (Capítulo 6)

↓

Geometría (Capítulo 7)

↓

Geometría - Análisis (Capítulo 8)

Más precisamente, en el **Capítulo 1** introducimos definiciones, notación y resultados preliminares necesarios para el desarrollo y comprensión de la tesis. Las Secciones 1 a 6 comprenden conceptos básicos de la teoría de la medida, mientras que las Secciones 7 a 11 contienen resultados más específicos relacionados con espacios de tipo homogéneo.

El objetivo del **Capítulo 2** es probar la extensión mencionada del teorema de M. de Guzmán y M. T. Carrillo a espacios de tipo homogéneo y a contextos no duplicantes construidos sobre aquellos.

En el **Capítulo 3** se introduce la estructura topológica sobre los espacios casi-métricos probabilísticos que involucra la convergencia de Hausdorff de conjuntos y la convergencia débil estrella de medidas. Se prueba la estabilidad de la propiedad de duplicación en esta estructura y se obtienen aproximaciones de espacios de tipo homogéneo por espacios finitos que poseen cota fija para la constante de duplicación.

El **Capítulo 4** provee resultados sobre el tipo débil para dos análogos en contextos finitos de operadores clásicos, como lo son el de Hardy-Littlewood y el de Hilbert.

El **Capítulo 5** está dedicado a dar condiciones necesarias y suficientes en los núcleos y en el espacio en el que están definidos, de modo que sea posible obtener desigualdades de tipo débil sobre contextos continuos a partir de resultados similares sobre contextos discretos, y recíprocamente.

En el **Capítulo 6** se estudian propiedades de completitud de las clases duplicantes, normales y de pesos de Muckenhoupt.

Utilizando los resultados del Capítulo 6, en el **Capítulo 7** se demuestra que una generalización a espacios casi-métricos del teorema del punto fijo de Banach puede probarse y usarse para aquellas clases de duplicación. También se obtienen condiciones suficientes para que los espacios de duplicación mencionados sean invariantes bajo la transformación inducida por un sistema iterado de funciones.

Finalmente, en el **Capítulo 8** se muestran los resultados de la investigación del comportamiento de las órbitas de la tranformación inducida por un sistema iterado de funciones en términos de sus propiedades de duplicación y normalidad. Se muestra también en este capítulo que la permanencia de órbitas en las clases de Muckenhoupt no tiene sólo que ver con los factores de contracción contenidos en el sistema iterado de funciones, sino también con propiedades más finas como la orientación.

CAPíTULO 1

Preliminares

En este capítulo definiremos los conceptos básicos requeridos para la comprensión de esta tesis, y enunciaremos los resultados previos y clásicos que se utilizarán en el desarrollo de la misma.

El propósito de las Secciones 1 a 6 es recordar, y en algunas ocasiones aclarar, qué entendemos por ciertos conceptos relacionados con teoría abstracta de medidas. Si bien no incluiremos aquí las demostraciones de los resultados que mencionaremos, citaremos datos bibliográficos donde las mismas pueden encontrarse.

Las Secciones 7 a 11 contienen resultados y construcciones más específicos sobre espacios de tipo homogéneo.

1. Espacios métricos y casi-métricos

Definición. Sea X un conjunto. Una **casi-métrica** (o casi-distancia) sobre X es una función no negativa ρ definida sobre $X \times X$ tal que

1. $\rho(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ para todo $x, y \in X$;
3. existe una constante $\Lambda \geq 1$ tal que $\rho(x,y) \leq \Lambda\left(\rho(x,z) + \rho(z,y)\right)$ para todo $x, y, z \in X$.

Decimos que el par (X, ρ) es un **espacio casi-métrico** si ρ es una casi-métrica sobre X. Llamaremos a Λ la **constante triangular** para ρ, y cuando $\Lambda = 1$ decimos que ρ es una **métrica** (o distancia) sobre X y que el par (X, ρ) es un **espacio métrico**.

Dado un espacio métrico (X, ρ), si $x \in X$ y $r > 0$, la **bola** (abierta) de centro x y radio r con respecto a la métrica ρ es

$$B_\rho(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}.$$

Cuando no haya posibilidad de confusión sobre la métrica que estamos utilizando para definir la bola, escribiremos simplemente $B(x,r)$. Un subconjunto E de X es **abierto** si para todo $x \in E$ existe $r > 0$ tal que $B_\rho(x,r) \subseteq E$, y es **cerrado** si su complemento $E^c = X - E$ es abierto. Un conjunto E es llamado **entorno** de un punto $x \in X$ si existe alguna bola B de centro x que esté contenida en E. Si $E \subseteq X$, la unión de todos los subconjuntos abiertos de E es llamado el **interior** de E, y lo denotaremos por E^{o}. Además llamaremos **clausura** de E, y denotaremos

$\overline{E}$, a la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a E. La **frontera** ∂E de un conjunto E se define como $\partial E = \overline{E} - E^{\mathrm{o}}$. Si E y A son dos subconjuntos de X, se dice que E es **denso** en A si $\overline{E} = A$. Dado $\varepsilon > 0$ decimos que un subconjunto E de X es **ε-denso** en un conjunto $A \subseteq X$ si para cada $x \in A$ existe $y \in E$ tal que $\rho(x, y) < \varepsilon$, y decimos que E es **ε-disperso** si $\rho(x, y) \geq \varepsilon$ para todo $x, y \in E$ con $x \neq y$. Una **ε-red** en X es un conjunto ε-disperso maximal. Notar que si E es una ε-red en X, entonces E es ε-denso. Dados $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ y una ε-red E en X, puede verse que es posible construir una ε'-red E' en X tal que $E \subseteq E'$.

Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (X, ρ) **converge** a $x \in X$ (simbólicamente: $x_n \to x$ o $\lim x_n = x$) si $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Es sencillo ver que si E es un subconjunto de X y $x \in X$, entonces $x \in \overline{E}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}$ en E que converge a x. Una sucesión $\{x_n\}$ es de **Cauchy** si $\rho(x_n, x_m) \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. Un subconjunto E de X es llamado **completo** si toda sucesión de Cauchy en E es convergente y su límite es un elemento de E. El siguiente resultado relaciona este concepto con el de cerrado, y su demostración puede encontrarse por ejemplo en [**20**].

PROPOSICIÓN 1. *Sea (X, ρ) un espacio métrico. Entonces todo subconjunto completo de X es cerrado, y si X es completo entonces todo subconjunto cerrado de X es completo.*

En un espacio métrico (X, ρ) podemos definir la distancia de un punto a un conjunto y la distancia entre dos conjuntos. Si $x \in X$ y A, E son dos subconjuntos de X, se definen

$$\rho(x, E) = \inf\{\rho(x, y) : y \in E\},$$

$$\rho(A, E) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in E\} = \inf\{\rho(x, E) : x \in A\}.$$

Luego $\rho(x, B) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{B}$. También definimos **diámetro** de un subconjunto E de X como

$$\mathrm{diam} E = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in E\}.$$

Decimos que E es **acotado** si $\mathrm{diam} E < \infty$.

Si $E \subseteq X$ y $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una familia de subconjuntos de X tales que $E \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$, entonces $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es llamado un **cubrimiento** de E, y se dice que E está **cubierto** por los conjuntos V_α. Si el conjunto de índices A es finito, decimos que es un **cubrimiento finito** de E, y si cada V_α es abierto, decimos que la familia es un **cubrimiento abierto**. E es llamado **totalmente acotado** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un cubrimiento finito de E formado por bolas de radio ε, es decir, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $\{x_1, x_2 \ldots, x_n\}$ de puntos de X tal que $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$. Es sencillo ver que todo conjunto totalmente acotado es acotado, sin embargo el recíproco no es cierto en general. Además puede probarse que un subconjunto E de un espacio métrico X es totalmente acotado si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una ε-red maximal *finita* en E. Un conjunto que tiene la propiedad de que de todo cubrimiento abierto se puede seleccionar un subcubrimiento finito se llama **conjunto compacto**. El siguiente resultado es muy conocido y su prueba puede verse por ejemplo en [**7**].

PROPOSICIÓN 2. *Sea (X, ρ) un espacio métrico. Si E es un subconjunto compacto de X, entonces E es cerrado y acotado.*

El recíproco de la proposición anterior es falso en general, aunque es cierto en $\mathbb{R}^n$: todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ es compacto. Sin embargo puede probarse (ver [**7**]) que si (X, ρ) un espacio métrico completo y $E \subseteq X$ es totalmente acotado, entonces $\overline{E}$, la clausura de E, es compacto. Luego todo conjunto cerrado y totalmente acotado en un espacio métrico completo, es compacto.

Enunciaremos ahora un teorema que será una herramienta fundamental en el desarrollo de este trabajo. Para ello recordemos que una función $f : X \to X$ se dice que es una **aplicación contractiva** si existe un número positivo $a < 1$ tal que $\rho(f(x), f(y)) \leq a\rho(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Si ocurre que $\rho(f(x), f(y)) = a\rho(x, y)$ para todo $x, y \in X$, decimos que f es una **similitud contractiva**.

TEOREMA 3 (Teorema del punto fijo de Banach). *Sea (X, ρ) un espacio métrico completo. Si $f : X \to X$ es una aplicación contractiva, entonces f tiene un único punto fijo en X, es decir, existe un único punto $\bar{x} \in X$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.*

Si bien no incluimos la demostración de los resultados de este capítulo, es importante mencionar que en la prueba del teorema anterior se exhibe la forma de hallar el punto fijo $\bar{x}$. Para hacerlo se fija un punto x_0 en X y se construye la sucesión $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ para $n \geq 1$, y se prueba que $\bar{x}$ es el límite de esta sucesión. Notar que el punto de partida x_0 puede ser *cualquier* punto en X.

Diremos que un espacio métrico (X, ρ) tiene la **propiedad de homogeneidad débil (PHD)** si existe un número natural N tal que cada bola $B(x, 2r)$ contiene a lo sumo N puntos de cualquier conjunto A que sea r-disperso en X. El siguiente resultado fue probado por Coifman y Weiss en [**15**].

LEMA 4. *Sea (X, ρ) un espacio métrico que posee la PHD con constante N. Si E es cualquier subconjunto r-disperso de X, entonces para todo $x \in X$, $r > 0$ y $m \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$\operatorname{card}\left(E \cap B\left(x, 2^m r\right)\right) \leq N^m.$$

También puede probarse (ver [**1**]) que si un espacio métrico (X, ρ) tiene la PHD y $E \subseteq X$ es acotado, entonces E es totalmente acotado. Luego si (X, ρ) es completo y tiene la PHD, entonces vale la propiedad de Heine-Borel: un subconjunto E de X es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Si (X_1, ρ_1) y (X_2, ρ_2) son dos espacios métricos, una función $f : X_1 \to X_2$ es llamada **continua en un punto** $x \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ siempre que $\rho_1(x, y) < \delta$, o en otras palabras, tal que $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. Decimos que f es **continua** si es continua es cada $x \in X_1$, y que es **uniformemente continua** si el δ que aparece en la definición de continuidad puede ser elegido sin depender del punto x, es decir, si existe un valor de δ que sirva para todo $x \in X_1$. Es fácil ver que $f : X_1 \to X_2$ es continua si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X_1 para todo subconjunto abierto U de X_2.

Si (X, ρ) es un espacio métrico, una función $f : X \to (-\infty, \infty]$ es llamada **semicontinua inferiormente** si el conjunto $\{x : f(x) > a\}$ es abierto para cada $a \in \mathbb{R}$. Análogamente, una función $f : X \to [-\infty, \infty)$ es llamada **semicontinua superiormente** si el conjunto $\{x : f(x) < a\}$ es abierto para cada $a \in \mathbb{R}$.

Dadas dos casi-métricas ρ y ρ' definidas sobre un espacio X decimos que son **equivalentes** si existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que

$$c_1\rho(x, y) \leq \rho'(x, y) \leq c_2\rho(x, y)$$

para todo $x, y \in X$. Es fácil verificar que métricas equivalentes definen los mismos conjuntos abiertos, cerrados y compactos, que si una sucesión es convergente o de Cauchy con respecto a una de las métricas, entonces lo es con respecto a la otra, y que las funciones continuas y uniformemente continuas son las mismas. Luego, muchos resultados relacionados con espacios métricos no dependen de la métrica en particular sino de la clase de equivalencia a la cual pertenece. Existe un resultado muy conocido de Macías y Segovia (ver [**27**]) que establece que si ρ es una casi-métrica sobre X entonces existen una métrica d sobre X y un número real $\xi \geq 1$ tal que ρ es equivalente a la casi-métrica ρ' definida como $\rho' = d^\xi$. Más precisamente

Teorema 5 (Teorema de Macías-Segovia). *Sea ρ una casi-métrica sobre un conjunto X. Entonces existen una métrica d sobre X y constantes $\xi \geq 1$, c_1 y c_2 tales que las desigualdades*

$$c_1\rho(x, y) \leq d^\xi(x, y) \leq c_2\rho(x, y) \tag{1.1}$$

valen para todo $x, y \in X$.

A lo largo de este trabajo, dado un espacio casi-métrico (X, ρ) con d siempre denotaremos una distancia tal que existen constantes ξ, c_1 y c_2 para las cuales (1.1) vale. La topología que definimos sobre X es la inducida por la métrica d. Por lo tanto todos los conceptos topológicos referidos a un espacio casi-métrico (X, ρ) deben ser entendidos como conceptos métricos asociados a d. La noción de completitud significa la d-convergencia de las sucesiones de Cauchy con respecto a d.

2. Sistemas iterados de funciones

Siguiendo la terminología introducida por Hutchinson en [**24**], presentaremos en esta sección el concepto de sistema iterado de funciones actuando sobre un espacio casi-métrico. Además introduciremos la notación que será utilizada en los últimos capítulos de esta tesis, y probaremos algunos resultados sencillos y conocidos, con el fin de hacer autocontenida la exposición de los temas.

Un **sistema iterado de funciones** (SIF) consiste en una familia de contracciones $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_M\}$ sobre un espacio casi-métrico (X, ρ), donde $M \geq 2$. Esto significa que para cada $i = 1, \ldots, M$ se tiene que $\phi_i : X \to X$ y existe una constante $a_i > 1$ tal que

$$\rho\left(\phi_i(x), \phi_i(y)\right) \leq \frac{1}{a_i}\rho(x, y)$$

para todo $x, y \in X$. Denotamos $a_{\min} = \text{mín}_{1 \leq i \leq M} a_i$.

Dado un sistema iterado de funciones $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_M\}$ y $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, M\}^k$, denotaremos con $\boldsymbol{\phi_i}$ a la composición $\phi_{i_k} \circ \phi_{i_{k-1}} \circ \cdots \circ \phi_{i_2} \circ \phi_{i_1}$. Luego, en el sentido conjuntista, tendremos

$$\boldsymbol{\phi_i}(E) = \left(\phi_{i_k} \circ \phi_{i_{k-1}} \circ \cdots \circ \phi_{i_2} \circ \phi_{i_1}\right)(E),$$

y

$$\boldsymbol{\phi_i}^{-1}(E) = \left(\phi_{i_1}^{-1}\left(\phi_{i_2}^{-1}\left(\ldots\left(\phi_{i_{k-1}}^{-1}\left(\phi_{i_k}^{-1}(E)\right)\right)\right)\right)\right).$$

Decimos que un SIF $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_M\}$ satisface la **condición de conjunto abierto**, que denotaremos **OSC** por sus siglas en inglés "Open Set Condition", si existe un conjunto no vacío abierto y acotado U en X tal que

$$\bigcup_{i=1}^{M} \phi_i(U) \subseteq U,$$

y $\phi_i(U) \cap \phi_j(U) = \emptyset$ si $i \neq j$. Diremos que tal U es un **conjunto para la OSC de** Φ.

Como mencionamos, probaremos a continuación algunos resultados que utilizaremos en las secciones siguientes.

LEMA 6. *Sea $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_M\}$ un SIF con la OSC. Si $\boldsymbol{i} = (i_0, \boldsymbol{i'})$ y U es un conjunto para la OSC de Φ, entonces*

$$\boldsymbol{\phi_i}(U) \subseteq \boldsymbol{\phi_{i'}}(U).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\boldsymbol{i'} = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$. Ya que $\phi_{i_0}(U) \subseteq U$, tenemos que

$$\boldsymbol{\phi_i}(U) = (\phi_{i_k} \circ \cdots \circ \phi_{i_1})(\phi_{i_0}(U)) \subseteq (\phi_{i_k} \circ \cdots \circ \phi_{i_1})(U) = \boldsymbol{\phi_{i'}}(U).$$

$\square$

Lema 7. *Sea $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_M\}$ un SIF con la OSC y tal que cada ϕ_i es inyectiva. Si $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \in \{1, 2, \dots, M\}^k$, $\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}$ y U es un conjunto para la OSC de Φ, entonces*

$$\boldsymbol{\phi_i}(U) \cap \boldsymbol{\phi_j}(U) = \emptyset.$$

Demostración. Sean $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ y $\boldsymbol{j} = (j_1, j_2, \dots, j_k)$ tales que $\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}$. Sea ℓ el máximo índice tal que $j_\ell \neq i_\ell$. Luego $j_m = i_m$ para todo $m > \ell$, y por lo tanto

$$\boldsymbol{\phi_i}(U) = (\varphi \circ \phi_{i_\ell} \circ \cdots \circ \phi_{i_1})(U),$$

$$\boldsymbol{\phi_j}(U) = (\varphi \circ \phi_{j_\ell} \circ \cdots \circ \phi_{j_1})(U),$$

siendo $\varphi = \phi_{i_k} \circ \cdots \circ \phi_{i_{\ell+1}} = \phi_{j_k} \circ \cdots \circ \phi_{j_{\ell+1}}$. Por la OSC sabemos que

$$(\phi_{i_{\ell-1}} \circ \cdots \circ \phi_{i_1})(U) \subseteq U \quad \text{y} \quad (\phi_{j_{\ell-1}} \circ \cdots \circ \phi_{j_1})(U) \subseteq U.$$

Luego

$$\boldsymbol{\phi_i}(U) \subseteq \varphi(\phi_{i_\ell}(U)),$$

$$\boldsymbol{\phi_j}(U) \subseteq \varphi(\phi_{j_\ell}(U)).$$

Ya que $\phi_{i_\ell}(U) \cap \phi_{j_\ell}(U) = \emptyset$ y φ es inyectiva, tenemos que $\varphi(\phi_{i_\ell}(U)) \cap \varphi(\phi_{j_\ell}(U)) = \emptyset$, lo que implica el resultado. □

Lema 8. *Sea $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_M\}$ un SIF con la OSC y tal que cada ϕ_i es inyectiva. Si $\boldsymbol{i} \neq (i_0, \boldsymbol{i'})$ y U es un conjunto para la OSC de Φ, entonces*

$$\boldsymbol{\phi_i}(U) \cap \boldsymbol{\phi_{i'}}(U) = \emptyset.$$

Demostración. Sean $\boldsymbol{i} = (i_0, i_1, \dots, i_k)$, $\boldsymbol{i'} = (j_1, j_2, \dots, j_k)$ tales que $\boldsymbol{i'} \neq (i_1, i_2, \dots, i_k)$. Ya que

$$\boldsymbol{\phi_i}(U) = (\phi_{i_k} \circ \cdots \circ \phi_{i_1} \circ \phi_{i_0})(U) \subseteq (\phi_{i_k} \circ \cdots \circ \phi_{i_1})(U),$$

por el Lema 7 se tiene que $\boldsymbol{\phi_i}(U) \cap \boldsymbol{\phi_{i'}}(U) = \emptyset$. □

Lema 9. *Sea $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_M\}$ un SIF con la OSC y tal que cada ϕ_i es inyectiva. Sea U un conjunto para la OSC de Φ y fijemos un punto $x_0 \in U$. Para cada natural n, sea*

$$X_n = \left\{ \boldsymbol{\phi_j}(x_0) : \boldsymbol{j} \in \{1, 2, \dots, M\}^n \right\}.$$

Entonces

$$\operatorname{card}\left(\boldsymbol{\phi_\ell}(U) \cap X_n\right) = M^{n-k},$$

para todo $k \leq n$ y $\boldsymbol{\ell} \in \{1, 2, \dots, M\}^k$.

Demostración. Sean n y k números naturales tales que $k \leq n$, y sea $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k) \in \{1, 2, \dots, M\}^k$. Si $x \in \boldsymbol{\phi_\ell}(U) \cap X_n$, el Lema 8 implica que $x = \boldsymbol{\phi_i}(x_0)$ para algún $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \dots, i_{n-k}, \boldsymbol{\ell})$. Luego $\operatorname{card}\left(\boldsymbol{\phi_\ell}(U) \cap X_n\right) \leq M^{n-k}$. Por otra parte, el Lema 6 nos dice que si $\boldsymbol{j}$ es cualquier n-upla de la forma $(j_1, j_2, \dots, j_{n-k}, \boldsymbol{\ell})$, entonces $\boldsymbol{\phi_j}(x_0) \in \boldsymbol{\phi_j}(U) \cap X_n$. Además se tiene que $\boldsymbol{\phi_i}(x_0) \neq \boldsymbol{\phi_j}(x_0)$ para todo $\boldsymbol{i} = (\boldsymbol{i'}, \ell)$, $\boldsymbol{j} = (\boldsymbol{j'}, \ell)$, con $\boldsymbol{i'}, \boldsymbol{j'} \in \{1, 2, \dots, M\}^{n-k}$, $\boldsymbol{i'} \neq \boldsymbol{j'}$. Luego $\operatorname{card}\left(\boldsymbol{\phi_\ell}(U) \cap X_n\right) \geq M^{n-k}$, lo que prueba el resultado. □

Lema 10. *Sea $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_M\}$ un SIF con la OSC. Si $\boldsymbol{i} \in \{1, 2, \dots, M\}^n$ y U es un conjunto para la OSC de Φ, entonces*

$$\mathrm{diam}(\boldsymbol{\phi_i}(U)) \leq a_{min}^{-n} \mathrm{diam}(U).$$

Demostración. Sean $x, y \in \boldsymbol{\phi_i}(U)$, y sea $\boldsymbol{i} = (i_1, \dots, i_n)$. Existen $x_0, y_0 \in U$ tales que $x = \boldsymbol{\phi_i}(x_0)$, $y = \boldsymbol{\phi_i}(y_0)$. Luego

$$\rho(x, y) \leq \frac{1}{a_{j_n} \dots a_{j_1}} \rho(x_0, y_0) \leq \frac{1}{a^n} \rho(x_0, y_0).$$

□

3. Espacios de medida

En esta sección introduciremos algunos conceptos, terminología y resultados generales sobre teoría de la medida. Un desarrollo más detallado del tema puede encontrarse por ejemplo en [**20**]. Comenzamos definiendo las familias de conjuntos que luego utilizaremos como dominios de medidas.

Definición. Sea X un conjunto no vacío. Una **$\boldsymbol{\sigma}$-álgebra** de conjuntos de X es una colección no vacía $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X que satisface las siguientes propiedades:

1. si $E \in \mathscr{A}$, entonces su complemento $E^c \in \mathscr{A}$;
2. si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{A}$, entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathscr{A}$.

De la definición anterior se deduce fácilmente que si $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra en X, entonces $X \in \mathscr{A}$, $\emptyset \in \mathscr{A}$ y $\mathscr{A}$ es cerrada bajo intersecciones numerables. También es trivial ver que $\mathcal{P}(X) = \{E : E \subseteq X\}$ y $\{X, \emptyset\}$ son σ-álgebras, y que la intersección de cualquier familia de σ-álgebras en X es una σ-álgebra en X.

Si $\mathcal{E}$ es cualquier subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ existe una única menor σ-álgebra $\mathscr{M}(\mathcal{E})$ contenida en $\mathcal{E}$ (que es la intersección de todas las σ-álgebras contenidas en $\mathcal{E}$). Llamamos a $\mathscr{M}(\mathcal{E})$ la σ-álgebra **generada** por $\mathcal{E}$.

En toda la tesis las medidas que consideraremos estarán relacionadas de diversas maneras con una topología en X. En general esta topología será la inducida por una casi-métrica, o equivalentemente (Teorema 5) por una métrica. Por lo tanto en todos los conceptos que siguen en los que se requiera una relación entre la estructura medible y topológica supondremos, sin aclararlo expresamente, que ésta es un topología métrica.

Si X es cualquier espacio métrico, la σ-álgebra generada por la familia de los conjuntos abiertos de X (o equivalentemente por la familia de los conjuntos cerrados de X), es llamada **$\boldsymbol{\sigma}$-álgebra de Borel** en X y es denotada por $\mathscr{B}_X$. Sus miembros son llamados **borelianos** o

conjuntos de Borel.

Sean X_1 y X_2 dos conjuntos no vacíos. Si $\mathscr{M}_i$ es una σ-álgebra sobre X_i, $i = 1, 2$, entonces la **σ-álgebra producto** sobre $X_1 \times X_2$ es la σ-álgebra generada por $\{E_1 \times E_2 : E_1 \in \mathscr{M}_1, E_2 \in \mathscr{M}_2\}$, y se denota por $\mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2$. Lo anterior se extiende a una cantidad numerable de conjuntos y σ-álgebras.

Veamos ahora qué entenderemos por el término “medida”. Una medida para nosotros será una función de conjuntos no negativa, monótona, numerablemente aditiva y que se anula para el conjunto vacío. Más precisamente.

Definición. Sea X un conjunto equipado con una σ-álgebra $\mathscr{M}$. Una **medida** sobre $(X, \mathscr{M})$ (o simplemente sobre X cuando $\mathscr{M}$ se sobrentienda) es una función $\mu : \mathscr{M} \to [0, \infty]$ tal que

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. Si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos en $\mathscr{M}$, entonces se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

Es inmediato de la condición 2 que toda medida μ es no decreciente, es decir, si $E \subseteq E'$ y $E, E' \in \mathscr{M}$, entonces $\mu(E) \leq \mu(E')$. Si μ es una medida sobre $(X, \mathscr{M})$ decimos que $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es un **espacio de medida**, y los conjuntos en $\mathscr{M}$ son llamados **conjuntos medibles** (o μ-medibles).

Teorema 11 (Continuidad de la medida). *Sea μ una medida sobre $(X, \mathscr{M})$.*

1. *Si $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ es una sucesión creciente de conjuntos en $\mathscr{M}$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_j).$$

2. *Si $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$ es una sucesión decreciente de conjuntos en $\mathscr{M}$ y $\mu(F_1) < \infty$, entonces*

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_j).$$

Diremos que μ es una **medida de Borel** cuando su dominio sea la σ-álgebra de Borel en X, es decir, cuando $\mathscr{M} = \mathscr{B}_X$. Si $\mu(X) < \infty$ decimos que μ es **finita**, y si $\mu(E) < \infty$ para todo conjunto acotado E, entonces μ es llamada **localmente finita**. Si $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, donde $E_j \in \mathscr{M}$ y $\mu(E_j) < \infty$ para todo j, entonces decimos que μ es **σ-finita**, o que el conjunto X es **σ-finito**. Una medida μ sobre X tal que $\mu(X) = 1$ es llamada **medida de probabilidad**.

Sea μ una medida de Borel sobre X y sea E un subconjunto de Borel de X. Decimos que μ es **regular por afuera** sobre E si

$$\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(U) : E \subseteq U,\, U \text{ abierto}\},$$

y que es **regular por adentro** sobre E si

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E,\, K \text{ compacto}\}.$$

Si μ es regular por adentro y por afuera sobre todos los conjuntos de Borel, entonces μ es llamada **regular**. Una **medida de Radon** sobre X es una medida de Borel que es finita sobre compactos, regular por afuera sobre todos los conjuntos de Borel, y regular por adentro sobre todos los conjuntos abiertos.

Un conjunto $E \in \mathscr{M}$ tal que $\mu(E) = 0$ es llamado **conjunto nulo**. Si una propiedad acerca de puntos $x \in X$ es cierta excepto quizás para x en algún conjunto nulo, se dice que vale para **casi todo punto** (abreviada **c.t.p.**), o para **casi todo** x.

El **soporte** de una medida de Borel μ, denotado sopμ, es el complemento del mayor abierto G en X tal que $\int \varphi\, d\mu = 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ con sop$\varphi \subseteq G$, siendo sopφ la clausura del conjunto $\{\varphi \neq 0\}$. Puede verse que si μ es una medida de Radon entonces $\mu(E) = 0$ para todo conjunto medible $E \subseteq (\text{sop}\mu)^c$.

Si μ y ν son medidas sobre $(X, \mathscr{M})$, decimos que ν es **absolutamente continua** con respecto a μ, y lo denotamos $\nu \ll \mu$, si $\nu(E) = 0$ para todo $E \in \mathscr{M}$ tal que $\mu(E) = 0$.

Daremos ahora una lista con algunos ejemplos básicos de medidas:

1. Sea X un conjunto no vacío. Para cada $E \subseteq X$, sea $\mu(E)$ el número de puntos en E (que puede ser infinito). En este caso μ es llamada **medida que cuenta puntos**.
2. Sea X un conjunto no vacío y sea $a \in X$. Para cada $E \subseteq X$, sea $\mu(E) = 0$ si $a \notin E$ y $\mu(E) = 1$ si $a \in E$. Entonces μ es una medida cuyo soporte es $\{a\}$ y nos referimos a μ como la **delta de Dirac** concentrada en el punto a. En este caso suele denotarse a μ como δ_a.
3. Las medidas de Lebesgue y de Hausdorff sobre $\mathbb{R}^n$.

En los capítulos siguientes presentaremos además otras medidas no estándares.

Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{N}, \nu)$ dos espacios de medida. Ya hemos hablado sobre la σ-álgebra producto $\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$ sobre $X \times Y$. Construiremos ahora la medida producto $\mu \times \nu$ sobre $\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$. Sea $\mathcal{A}$ la colección de todas las uniones finitas disjuntas de rectángulos, donde un **rectángulo** en $X \times Y$ es un conjunto de la forma $A \times B$, donde $A \in \mathscr{M}$ y $B \in \mathscr{N}$. Si $E \in \mathcal{A}$ es la unión disjunta de los rectángulos $A_1 \times B_1$, $A_2 \times B_2, \ldots, A_n \times B_n$, y si $C \in X \times Y$, definimos

$$\pi(E) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)\nu(B_j)$$

y

$$\mu \times \nu(C) = \text{ínf}\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \pi(E_j) : E_j \in \mathcal{A},\, C \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}.$$

Entonces $\mu \times \nu$ es una medida sobre $\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$ cuya restricción a $\mathcal{A}$ es π. Más aún, si μ y ν son σ-finitas, entonces $\mu \times \nu$ es la única medida sobre $\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$ tal que $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\mu(B)$ para todos los rectángulos $A \times B$ (ver [**20**]). Llamamos a $\mu \times \nu$ **medida producto** de μ y ν.

4. Integración

La integración de una función f con respecto a una medida μ sobre el espacio de medida (X, μ) se define mediante los pasos usuales, los que pueden encontrarse en detalle en [**20**]. Una **función simple** $f : X \to \mathbb{R}$ es una función de la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}_{E_i}(x),$$

donde $a_1, \ldots, a_k$ son números reales, $E_1, \ldots, E_k$ son conjuntos μ-medibles, y $\mathcal{X}_E$ denota la función característica del conjunto E. Definimos la **integral** de una función simple f con respecto a μ como

$$\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(E_i).$$

La integración de funciones más generales se define mediante la aproximación por funciones simples. Decimos que $f : X \to \mathbb{R}$ es una **función medible** si para todo $c \in \mathbb{R}$ se tiene que el conjunto $\{x \in X : f(x) < c\}$ es un conjunto medible. Notar que, en particular, si μ es una medida de Borel entonces todas las funciones continuas son medibles. Definimos la **integral** de una función medible no negativa como

$$\int f\, d\mu = \sup\left\{ \int g\, d\mu : g \text{ es simple y } 0 \leq g \leq f \right\}.$$

El valor anterior puede ser infinito. Finalmente, para una función medible $f : X \to \mathbb{R}$, definimos su **parte positiva** $f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\}$, y su **parte negativa** $f^-(x) = \text{máx}\{-f(x), 0\}$. Luego la **integral** de f se define como

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu,$$

siempre que ambos valores $\int f^+\, d\mu$ y $\int f^-\, d\mu$ no sean simultáneamente infinito. Decimos que una función f es **μ-integrable** (o simplemente integrable) si $\int |f|\, d\mu = \int f^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu < \infty$, y denotamos el espacio de tales funciones como $L^1(X, \mu)$ (o L^1 cuando el espacio y la medida se sobrentiendan). Si E es un subconjunto medible de X, definimos la **integral de f sobre E**

como $\int_E f\,d\mu = \int f\mathcal{X}_E\,d\mu$.

Todas las propiedades usuales sobre la integral siguen valiendo, por ejemplo

$$\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu, \qquad \text{y} \qquad \int (af)\,d\mu = a\int f\,d\mu$$

para todo número real a.

También valen los siguientes teoremas de convergencia.

Teorema 12 (Lema de Fatou). *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces*

$$\int (\liminf f_n)\,d\mu \le \liminf \int f_n\,d\mu.$$

Teorema 13 (Teorema de la convergencia monótona de Beppo-Levi). *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas tal que $f_j \le f_{j+1}$ para todo j, y $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, entonces*

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Teorema 14 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue). *Sea $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones en L^1 tal que*

i. *$f_n \to f$ en c.t.p.,*
ii. *existe una función no negativa $g \in L^1$ tal que $|f_n| \le g$ en c.t.p. para todo n.*

Entonces $f \in L^1$ y

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

En el Capítulo 3 haremos uso de la siguiente versión del teorema de Fubini-Tonelli que nos permite en ciertos casos intercambiar el orden de integración en una integral doble.

Teorema 15 (Fubini-Tonelli). *Sean $(X,\mathscr{M},\mu)$ e $(Y,\mathscr{N},\nu)$ dos espacios de medida σ-finitos. Entonces*

1. (Tonelli) *Si f es una función medible no negativa sobre $X\times Y$, entonces las funciones $g(x) = \int f(x,y)\,d\nu(y)$ y $h(x) = \int f(x,y)\,d\mu(x)$ son funciones medibles en X e Y respectivamente, y*

$$\int f\,d(\mu\times\nu) = \int \left[\int f(x,y)\,d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int \left[\int f(x,y)\,d\mu(x)\right] d\nu(y). \tag{1.2}$$

2. (Fubini) *Si $f \in L^1(\mu\times\nu)$, entonces $f(x,\cdot) \in L^1(\nu)$ para c.t.p. $x \in X$, $f(\cdot,y) \in L^1(\mu)$ para c.t.p. $y \in Y$, las funciones definidas en c.t.p. $g(x) = \int f(x,y)\,d\nu(y)$ y $h(y) = \int f(x,y)\,d\mu(x)$ están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\nu)$ respectivamente, y valen las igualdades de (1.2).*

Decimos que una función medible $f : X \to \mathbb{R}$ es **localmente integrable** con respecto a una medida de Borel μ si $\int_K |f|\, d\mu < \infty$ para todo compacto $K \subseteq X$. Denotamos el espacio de tales funciones como $L^1_{loc}(X, \mu)$, o simplemente L^1_{loc}. Notar que si μ es localmente finita entonces las funciones constantes están en L^1_{loc}.

Si μ es una medida y f es una función μ-integrable no negativa, la medida ν definida por $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ es absolutamente continua con respecto a μ, y es finita si y sólo si $f \in L^1(\mu)$. Cuando una medida ν está definida de esta forma, llamamos a f la función **densidad** de la medida ν y escribimos

$$d\nu = f\, d\mu.$$

En caso que μ y ν sean dos medidas σ-finitas sobre un espacio medible $(X, \mathscr{M})$ tales que $\nu \ll \mu$, entonces $d\nu = f\, d\mu$ para alguna f. Este resultado es conocido como el **Teorema de Radon-Nikodym**.

5. Teoremas de Arzelà-Ascoli y de Stone-Weierstrass

Esta sección contiene dos teoremas muy clásicos del análisis que serán usados en un capítulo siguiente. El primero de ellos nos provee condiciones suficientes bajo las cuales una sucesión de funciones posee una subsucesión uniformemente convergente, mientras que el segundo nos brinda información precisa acerca de la aproximación por funciones en un álgebra de funciones continuas. Enunciamos aquí sus versiones en espacios métricos generales, cuyas demostraciones pueden hallarse por ejemplo en [**35**].

Antes de enunciar el primer teorema, recordemos las siguientes definiciones referidas a una familia de funciones. Sea (X, ρ) un espacio métrico y $E \subseteq X$. Se dice que una familia $\mathscr{F}$ de funciones de E en $\mathbb{R}$ es **equicontinua** si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x, y \in E$ son tales que $\rho(x, y) \le \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, para toda $f \in \mathscr{F}$. Decimos que la $\mathscr{F}$ es una familia **uniformemente acotada** si existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \le M$ para todo $x \in E$, para toda $f \in \mathscr{F}$. Se dice que una sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathscr{F}$ **converge uniformemente** en E a una función f, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in E$ y todo $n \ge N$.

TEOREMA 16 (Teorema de Arzelà-Ascoli). *Sea (X, ρ) un espacio métrico compacto. Si $\mathscr{F}$ es una familia de funciones de X en $\mathbb{R}$ que es equicontinua y uniformemente acotada, entonces toda sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathscr{F}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente.*

Para el segundo teorema necesitaremos las siguientes definiciones. Dado un espacio métrico compacto (X, ρ), denotemos por $\mathcal{C}(X)$ al conjunto de todas las funciones continuas sobre X con valores reales. Un subconjunto $\mathscr{A}$ de $\mathcal{C}(X)$ es un **álgebra** si es un espacio vectorial de funciones en $\mathcal{C}(X)$ tal que el producto de dos elementos cualesquiera de $\mathcal{A}$ es también un elemento de $\mathcal{A}$. Es decir que $\mathscr{A}$ es un álgebra si para cualesquiera dos funciones f y g en $\mathscr{A}$ y para todo par de números reales a y b se tiene que $af + bg \in \mathscr{A}$ y $fg \in \mathscr{A}$. Se dice que $\mathscr{A}$ **separa puntos** de X si dados dos puntos distintos $x, y \in X$ podemos encontrar una función f en $\mathscr{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

TEOREMA 17 (Teorema de Stone-Weierstrass). *Sean (X, ρ) un espacio métrico compacto y $\mathscr{A}$ un álgebra en $\mathcal{C}(X)$ que separa puntos de X y que contiene a las funciones constantes. Entonces dados $\varepsilon > 0$ y $\varphi \in \mathcal{C}(X)$, existe una función $f \in \mathscr{A}$ tal que $|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$. En otras palabras, $\mathscr{A}$ es denso en $\mathcal{C}(X)$.*

6. Los espacios L^p. Tipo de un operador

Los espacios L^p son espacios de Banach de funciones, en los que la norma está definida en términos de integrales. En esta sección trabajaremos con un espacio de medida $(X, \mathscr{M}, \mu)$ fijo. Si f es una función medible en X y $1 \leq p < \infty$, definimos

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p},$$

y

$$L^p(X, \mathscr{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \|f\|_p < \infty\}.$$

Abreviaremos $L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$, mediante $L^p(\mu)$, $L^p(X)$, o simplemente L^p cuando no haya posibilidad de confusión. Para el caso $p = \infty$ definimos

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\},$$

con la convención que $\inf \emptyset = \infty$. Luego definimos

$$L^\infty = L^\infty(X, \mathscr{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Consideramos que dos funciones definen el mismo elemento en L^p si son iguales en casi todo punto.

Enunciaremos ahora algunos resultados y desigualdades clásicas de la teoría de espacios L^p. Para ello dado $1 < p < \infty$, el número $q = p/(p-1)$, el cual satisface $p^{-1} + q^{-1} = 1$, es llamado **exponente conjugado** de Hölder de p. Si $p = 1$ su exponente conjugado q se define como $q = \infty$, y viceversa.

TEOREMA 18 (Desigualdad de Hölder). *Si $1 \leq p < \infty$ y q es su exponente conjugado, entonces*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

para toda f y g funciones medibles sobre X.

TEOREMA 19 (Desigualdad de Minkowski). *Si $1 \leq p \leq \infty$ y $f, g \in L^p$, entonces*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Esto prueba que $\|\cdot\|_p$ es una norma en L^p cuando $p \geq 1$. Mas aún, puede verse que en tal caso L^p es un espacio completo para todo $p \geq 1$.

Teorema 20 (Desigualdad de Chebyshev). *Si $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, entonces para cada $\alpha > 0$ se tiene que*

$$\mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

Entre los resultados más conocidos de la teoría de espacios L^p, tenemos el siguiente resultado de densidad

Proposición 21. *Para $1 \leq p < \infty$, el conjunto de las funciones simples $f = \sum_1^n a_j \mathcal{X}_{E_j}$ donde $\mu(E_j) < \infty$ para todo j, es denso en L^p.*

Si f es una función medible sobre $(X, \mathscr{M}, \mu)$, definimos la **función de distribución** $\lambda_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$ como

$$\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}).$$

Una variante de los espacios L^p es la siguiente. Si f es una función medible en X y $1 \leq p < \infty$, definimos

$$[f]_p = \left(\sup_{\alpha > 0} \alpha^p \lambda_f(\alpha)\right)^{1/p},$$

y llamamos **espacio L^p débil** al conjunto formado por todas las funciones f que satisfacen $[f]_p < \infty$. Puede verse que $[\cdot]_p$ *no* es una norma, ya que la desigualdad triangular falla. La relación entre L^p y L^p débil es la siguiente

$$L^p \subsetneq \text{débil } L^p \qquad \text{y} \qquad [f]_p \leq \|f\|_p.$$

Introduciremos ahora la definición de tipo fuerte y tipo débil de un operador. Sean $(X, \mathscr{M}, \mu)$ e $(Y, \mathscr{N}, \nu)$ dos espacios de medida y sea $\mathscr{D}$ un espacio vectorial de funciones medibles en $(X, \mathscr{M}, \mu)$. Sea T un mapeo de $\mathscr{D}$ en el espacio de todas las funciones medibles en $(Y, \mathscr{N}, \nu)$. Decimos que T es **sublineal** si

$$|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$$

y

$$|T(cf)| \leq |c|\,|Tf|,$$

para todo $f, g \in \mathscr{D}$ y $c \in \mathbb{R}$. Un operador sublineal T es de **tipo fuerte (p, q)** $(1 \leq p, q \leq \infty)$ si $L^p(\mu) \subseteq \mathscr{D}$, T mapea $L^p(\mu)$ dentro de $L^q(\nu)$, y existe una constante $C > 0$ tal que $\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p$ para toda $f \in L^p(\mu)$. En otras palabras, T es de tipo fuerte (p, q) si es acotado de $L^p(X, \mu)$ en $L^q(Y, \nu)$. Se dice que T es de **tipo débil (p, q)** $(1 \leq p \leq \infty,\ 1 \leq q < \infty)$ si $L^p(\mu) \subseteq \mathscr{D}$, T mapea $L^p(\mu)$ dentro de $L^q(\nu)$ débil, y existe una constante $C > 0$ tal que $[Tf]_q \leq C\|f\|_p$ para toda $f \in L^p(\mu)$, es decir

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \alpha\}) \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\alpha}\right)^q, \tag{1.3}$$

para todo $\alpha > 0$. Para el caso $q = \infty$, decimos que T es de tipo débil (p, ∞) si es un operador acotado de $L^p(X, \mu)$ en $L^\infty(Y, \mu)$, es decir, si es de tipo fuerte (p, ∞). Del Teorema 20 se deduce que el tipo fuerte de un operador implica el tipo débil del mismo.

Cuando la desigualdad (1.3) del tipo débil (p, q) vale para toda f en la clase de las funciones características de conjuntos medibles con medida finita, decimos que el operador es de **tipo débil restringido (p, q)**.

El siguiente teorema muestra que en muchos casos es suficiente obtener el tipo de un operador maximal T^* actuando sobre funciones con una estructura más simple, para entonces obtenerlo sobre un dominio más amplio de funciones. Este resultado será una herramienta importante en el desarrollo de este trabajo. Su demostración puede encontrarse en [**17**]. En el enunciado siguiente $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es un espacio de medida, $\mathfrak{M}(X)$ es el conjunto de las funciones con valores reales (o complejos) medibles sobre X, $\mathfrak{B}$ es un espacio normado de funciones en $\mathfrak{M}(X)$, S es un subespacio denso de $\mathfrak{B}$, y $\{T_k\}_{k=1}^\infty$ una sucesión de operadores sublineales de $\mathfrak{B}$ en $\mathfrak{M}(X)$. Supondremos que cada uno de los operadores T_k es **continuo en medida**, es decir

$$\text{si } f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathfrak{B}} f, \text{ entonces } \mu\left(\{x \in X : |T_k f_n(x) - T_k f(x)| > \varepsilon\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Teorema 22 (Reducción a un subespacio denso). *En la situación descripta arriba, sea T^* el operador maximal de la sucesión $\{T_k\}$, es decir, $T^*(x) = \sup_k |T_k f(x)|$. Para $\lambda > 0$, sean*

$$\phi_S(\lambda) = \sup_{\substack{\|g\|\le 1\\ g\in S}} \mu\left(\{x \in X : T^* g(x) > \lambda\}\right) ,$$

$$\phi(\lambda) = \sup_{\substack{\|f\|\le 1\\ f\in \mathfrak{B}}} \mu\left(\{x \in X : T^* f(x) > \lambda\}\right) .$$

Entonces

1. *$\phi(\lambda) = \phi_S(\lambda)$, para todo $\lambda > 0$;*
2. *en particular, si $\mathfrak{B} = L^p(X, \mu)$ para algún $1 \le p \le \infty$, el tipo débil (p, p) de T^* es equivalente al tipo débil (p, p) sobre S;*
3. *si $\mathfrak{B} = L^p(X, \mu)$ para algún $1 \le p \le \infty$, el tipo fuerte (p, p) de T^* es equivalente al tipo fuerte (p, p) sobre S.*

7. Espacios de tipo homogéneo

Sea X un conjunto no vacío, ρ una casi-métrica sobre X, y μ una medida de Borel sobre X. Decimos que μ satisface la **propiedad de duplicación** con respecto a ρ si las ρ-bolas son conjuntos medibles y existe una constante $A \ge 1$ tal que valen las siguientes desigualdades

$$0 < \mu(B_\rho(x, 2r)) \le A\mu(B_\rho(x, r)) < \infty$$

para todo $x \in X$ y $r > 0$. El papel de la constante 2 como dilatación del radio no es esencial, en el sentido que cualquier número $\alpha > 1$ podría sustituir al 2 si estamos dispuestos a admitir una constante A diferente. Pero, como veremos en el desarrollo de este trabajo, nos interesará cuantificar la cualidad de ser duplicante de un sistema métrica-medida. Por eso generalizaremos la definición para permitir constantes distintas de 2 como factor de dilatación del radio. Seguiremos diciendo que μ satisface la propiedad de duplicación con respecto a ρ si existen constantes $\alpha > 1$ y $A \geq 1$ tales que

$$0 < \mu(B_\rho(x, \alpha r)) \leq A\mu(B_\rho(x, r)) < \infty$$

para todo $x \in X$ y $r > 0$. Llamaremos a las constantes A y α **constantes de duplicación**. Puede probarse que si μ duplica sobre X entonces (X, ρ) tiene la PHD (ver [**15**]). Más aún, la constante N para la PHD sólo depende de las **constantes geométricas** del espacio (X, ρ, μ), es decir, de la constante Λ correspondiente a la desigualdad triangular para ρ, y de las constantes de duplicación A y α. Aunque en varias de las situaciones consideradas en los capítulos siguientes las hipótesis garantizarán la propiedad de regularidad de la medida μ, con el objeto de disponer del teorema de diferenciación de Lebesgue, en todo este trabajo diremos que (X, ρ, μ) es un **espacio de tipo homogéneo** (abreviado **e.t.h.**) si μ es una medida *regular* que satisface la *propiedad de duplicación* sobre X. Si bien en muchos textos no se pide la regularidad de la medida cuando se habla de espacios de tipo homogéneo, como ya mencionamos esta propiedad de la medida está garantizada en muchas situaciones. Es sabido (ver por ejemplo [**8**]) que toda medida de Borel finita en un espacio métrico es regular, en el sentido de la aproximación exterior por abiertos e interior por cerrados. En nuestra definición, en cambio, la regularidad interior está definida, y nos conviene que sea, sobre compactos. Si el espacio métrico o casi-métrico equipado con una medida duplicante finita es completo, entonces todo conjunto cerrado y acotado será compacto (ver [**1**]), y tendremos la regularidad tal como la entendemos en este trabajo.

8. La función maximal de Hardy-Littlewood y el teorema de diferenciación

Comencemos recordando el caso especial $(X, \mathscr{M}) = (\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n})$ y $\mu = m$ la medida de Lebesgue. Dados $f \in L^1_{loc}$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, la función **valor promedio** de f sobre $B(x, r) = \{y : |x - y| < r\}$ se define como

$$A_r f(x) = \frac{1}{m\,(B(x, r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy\,.$$

Puede probarse (ver por ejemplo [**20**]) que si $f \in L^1_{loc}$, entonces $A_r f(x)$ es continua en r para cada x, y continua en x para cada r. Luego si para una función $f \in L^1_{loc}$ dada definimos su **función maximal de Hardy-Littlewood**

$$Mf(x) = \sup_{r>0} A_r|f|(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m\,(B(x, r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy\,,$$

tenemos que Mf es una función medible. Más aún, es de tipo débil $(1,1)$, es decir que existe una constante $C > 0$ tal que para toda $f \in L^1$ y todo número real $\alpha > 0$ se tiene que

$$m(\{x : Mf > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int |f(x)|\, dx\,.$$

Lo anterior junto a la densidad de las funciones continuas e integrables en $L^1(\mathbb{R}^n, m)$ permiten probar que si $f \in L^1_{loc}$, entonces $\lim_{r\to 0} A_r f(x) = f(x)$ para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$, es decir

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} [f(x) - f(y)]\, dy = 0 \quad \text{c.t.p. } x.$$

Más aún, si definimos el **conjunto de Lebesgue** L_f de f como

$$L_f = \left\{ x : \lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(x) - f(y)|\, dy = 0 \right\},$$

entonces se tiene que $m((L_f)^c) = 0$ para toda $f \in L^1_{loc}$. Este resultado es conocido como el **Teorema de diferenciación de Lebesgue** en $\mathbb{R}^n$. En esta sección enunciaremos resultados de este tipo sobre espacios métricos de medida, los cuales fueron probados en [**1**]. Para ello comenzamos definiendo la función maximal de Hardy-Littlewood en este caso. Sea (X, ρ) un espacio casi-métrico, y fijemos d una distancia y ξ un número real positivo tales que ρ es equivalente a $\rho' = d^\xi$ (ver Teorema 5). Sea $\mathscr{M}$ una σ-álgebra sobre X que contiene a las d-bolas, y sea μ una medida sobre $\mathscr{M}$ tal que cada d-bola tiene medida positiva y finita. Dada una función f que sea integrable sobre cada d-bola, presentaremos diferentes versiones de la función maximal de Hardy-Littlewood de f. La **función maximal de Hardy-Littlewood no centrada** de una tal función f se define como

$$Mf(x) = M_{(X,\mu)} f(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)|\, d\mu(y)\,,$$

donde el supremo se toma sobre la familia de todas las d-bolas en X que contienen a x. Notar que Mf es una función semicontinua inferiormente. La **función maximal de Hardy-Littlewood centrada** está dada por

$$M_c f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B_d(x,r))} \int_{B_d(x,r)} |f(y)|\, d\mu(y)\,.$$

Si las ρ-bolas pertenecen a $\mathscr{M}$, obtenemos versiones similares M^ρ y M_c^ρ de estos operadores tomando ρ-bolas en lugar de d-bolas. Se tiene claramente que $M_c f(x) \leq Mf(x)$ para toda x y toda f. En este contexto, en [**1**] se prueba que valen los resultados siguientes.

LEMA 23. *Si (X, ρ, μ) es un espacio de tipo homogéneo, entonces*

1. *las funciones maximales M y M_c son equivalentes;*
2. *M^ρ y M_c^ρ son equivalentes a M y M_c;*
3. *la función maximal $Mf(x)$ es medible para cada f localmente integrable.*

El siguiente resultado establece el tipo débil $(1,1)$ de la función maximal de Hardy-Littlewood.

Teorema 24. *Sea (X,ρ,μ) un espacio de tipo homogéneo tal que las ρ-bolas son conjuntos abiertos. Entonces existe una constante geométrica C tal que la desigualdad*

$$\mu(\{x : M^\rho f(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_{L^1}$$

vale para toda función integrable f y todo $\alpha > 0$.

Sea f una función localmente integrable sobre un espacio de tipo homogéneo (X,ρ,μ). Diremos que x es un **punto de Lebesgue** de f si existe un número real $c(x)$ y una casi-métrica ρ' equivalente a ρ tal que las ρ'-bolas son medibles y

$$\frac{1}{\mu\left(B_{\rho'}(x,r)\right)}\int_{B_{\rho'}(x,r)} |f(y) - c(x)|\, d\mu(y) \to 0$$

cuando $r \to 0$. Un punto clave en la prueba del teorema de diferenciación en el contexto euclídeo es que dicho teorema es cierto sobre un subconjunto denso del espacio de Lebesgue. Recordemos que si μ es una medida de Radon sobre un espacio casi métrico X, entonces las funciones continuas de soporte compacto son densas en L^p para $1 \leq p < \infty$. De la definición de medida duplicante tenemos que si (X,ρ,μ) es un espacio de tipo homogéneo, entonces μ es una medida de Radon. Luego en este caso las funciones continuas con soporte compacto son densas en L^1, lo que permite obtener la siguiente generalización del teorema de diferenciación.

Teorema 25. *Sea (X,ρ,μ) un espacio de tipo homogéneo. Sea f una función localmente integrable definida en X. Entonces casi todo punto $x \in X$ es un punto de Lebesgue para f. Más aún, $c(x) = f(x)$ para casi todo punto x, y*

$$\frac{1}{\mu\left(B_{\rho'}(x,r)\right)}\int_{B_{\rho'}(x,r)} f(y)\, d\mu(y) \to f(x)$$

cuando $r \to 0$ en casi todo punto, para toda ρ' equivalente a ρ tal que las ρ'-bolas sean medibles.

9. Particiones de Christ

Introduciremos la construcción y propiedades de conjuntos de tipo diádico sobre un espacio casi-métrico (X,ρ) que tiene la PHD, dada por M. Christ y G. David (ver [**12**] y [**16**]). Para comenzar con la construcción de estos conjuntos, fijemos un número δ con $0 < \delta < 1$, y para cada $n \in \mathbb{Z}$ sea $\mathcal{N}_n = \{x_{n,k} : k \in K(n)\}$ un conjunto δ^n-disperso maximal en X, donde $K(n)$ denota un subconjunto de $\mathbb{N}$, el cual podría ser todo $\mathbb{N}$. Sea $\mathcal{A} = \{(n,k) : n \in \mathbb{Z},\, k \in K(n)\}$. Para la construcción de las particiones de Christ, comenzamos introduciendo una estructura de árbol sobre $\mathcal{A}$.

Lema 26 ([**12**], Lema 13). *Existe un orden parcial $\preceq$ sobre $\mathcal{A}$ satisfaciendo las siguientes propiedades de árbol:*

1. $(n_1,k_1) \preceq (n_2,k_2)$ *implica* $n_2 \leq n_1$*;*
2. *para todo* $(n_1,k_1) \in \mathcal{A}$ *y todo* $n_2 \leq n_1$*, existe un único* $k_2 \in K(n_2)$ *tal que* $(n_1,k_1) \preceq (n_2,k_2)$*;*
3. *Si* $(n,k) \preceq (n-1,i)$*, entonces* $\rho(x_{n,k}, x_{n-1,i}) < \delta^{n-1}$*;*

4. *Si* $\rho(x_{n,k}, x_{n-1,i}) < \frac{\delta^{n-1}}{2}$, *entonces* $(n,k) \preceq (n-1,i)$.

A partir de este orden, para $(n,k) \in \mathcal{A}$ definimos

$$Q_k^n = \bigcup_{(\ell,i)\preceq(n,k)} B_\rho(x_{\ell,i}, a\delta^\ell)\,,$$

donde a es una constante positiva. Eligiendo a y δ en forma apropiada, la familia $\{Q_k^n : k \in K(n)\}$ satisface propiedades de tipo diádicas (ver [**12**] y [**2**]).

Teorema 27 (Teorema de Christ). *Sea (X,ρ,μ) un espacio de tipo homogéneo. Entonces existen $a > 0$ y $c > 0$ y $0 < \delta < 1$, tales que los conjuntos Q_k^n satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Q_k^n es un conjunto abierto para todo $(n,k) \in \mathcal{A}$;*
2. *$B_\rho(x_{n,k}, a\delta^n) \subseteq Q_k^n$ para todo $(n,k) \in \mathcal{A}$;*
3. *$Q_k^n \subseteq B_\rho(x_{n,k}, c\delta^n)$ para todo $(n,k) \in \mathcal{A}$;*
4. *para todo $n \in \mathbb{Z}$, $Q_k^n \cap Q_i^n \neq \emptyset$ implica $k = i$;*
5. *para todo $(n,k) \in \mathcal{A}$ y todo $\ell < n$ existe un único $i \in K(n)$ tal que $Q_k^n \subseteq Q_i^\ell$;*
6. *si $n \geq \ell$, entonces o bien $Q_k^n \subseteq Q_i^\ell$, o $Q_k^n \cap Q_i^\ell = \emptyset$, para todo $k \in K(n)$, $i \in K(\ell)$;*
7. *$\mu\left(X \setminus \bigcup_{k\in K(n)} Q_k^n\right) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$;*
8. *$\mu(\partial Q_k^n) = 0$, para todo $(n,k) \in \mathcal{A}$, donde ∂Q_k^n denota la frontera de Q_k^n.*
9. *$\mu(Q_k^n) = \sum_{i:Q_i^\ell \subset Q_k^n} \mu(Q_i^\ell)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\ell \geq n+1$ fijo, $k \in K(n)$.*
10. *X es acotado si y sólo si existe $(n,k) \in \mathcal{A}$ tal que $X = Q_k^n$.*

Denotaremos por $\mathcal{D}$ a la colección de todos estos “cubos diádicos”, es decir,

$$\mathcal{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{Q_k^n : k \in K(n)\}.$$

Como ya mencionamos, en un espacio de tipo homogéneo las funciones continuas con soporte compacto es denso en L^1. A partir de este hecho puede probarse el siguiente resultado, el cual será una herramienta fundamental en el próximo capítulo.

Teorema 28. *En un espacio de tipo homogéneo, las combinaciones lineales de funciones características de cubos diádicos son densas en $L^1(X)$.*

En el Capítulo 6 haremos uso de la siguiente propiedad de cubrimiento de abiertos por los conjuntos de Christ. Mencionamos que la propiedad básica en la medida μ que permite probar la propiedad 8 en el Teorema 27 es la duplicación, y que por lo tanto, con cualquier medida duplicante tendremos que los cubos de Christ proveen cubrimientos exactos, salvo medida nula, de abiertos. El resultado siguiente puede encontrarse en [**4**].

Lema 29. *Todo conjunto abierto acotado G de X puede escribirse salvo un conjunto de medida nula como unión disjunta de “cubos” de Christ.*

10. Familias de Wu

Sea (X, ρ) un espacio métrico compacto con la PHD. En [**37**] se prueba que todo espacio métrico compacto que posea la PHD se puede equipar con una medida duplicante no trivial. Para probar este resultado, se construyen "familias" que nosotros utilizaremos para definir un orden que satisface las mismas propiedades de árbol que el orden de Christ, y que por lo tanto podremos utilizar para definir cubos diádicos. Comenzaremos definiendo las familias de la forma que lo hizo Wu en [**37**]. Supongamos por simplicidad y sin pérdida de generalidad que $\operatorname{diam}(X) < 1$. Fijado un número real $0 < \delta < 1$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, sea $S_n = \{x_{n,k} : 1 \leq k \leq K_n\}$ una δ^n-red en X, satisfaciendo

$$S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq S_{n+1} \subseteq \cdots$$

Observar que debido a que $\operatorname{diam}(X) < 1$, la red S_0 tiene un único punto $x_{0,1}$, y que $K_n = \operatorname{card}(S_n) < \infty$ para todo n, donde $\operatorname{card}(A)$ denota la cantidad de elementos del conjunto A.

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, sea $P_n = \{T_{n,k} : 1 \leq k \leq K_n\}$ una partición de S_{n+1} que satisface

$$S_{n+1} \cap B_\rho(x_{n,k}, \delta^n/2) \subseteq T_{n,k} \subseteq S_{n+1} \cap B_\rho(x_{n,k}, \delta^n). \tag{1.4}$$

Llamaremos a los elementos de $T_{n,k}$ **puntos ramificados** de $x_{n,k}$, $x_{n,k}$ se llamará **punto viejo de la ramificación**, y al resto les diremos **puntos nuevos**. Con otra terminología, podríamos pensar en $T_{n,k}$ como la **familia** de $x_{n,k}$ en la generación $n+1$ (o en S_{n+1}), en la que $x_{n,k}$ cumple el rol de **padre**, y el resto de los puntos serían los **hijos** de $x_{n,k}$ (en la generación $n+1$). Observar que en cada familia de S_{n+1} existe un único padre, el cual es un punto de S_n.

Para $\ell \geq n+1$, sea $T^\ell_{n,k}$ la familia formada por todos los descendientes de $x_{n,k}$ hasta la generación ℓ. $T^\ell_{n,k}$ podría definirse en palabras como la gran familia formada por la unión de: la familia de $x_{n,k}$ en S_n, las familias de los hijos de $x_{n,k}$, mirados estos como padres de familias en S_{n+1}, y así sucesivamente hasta llegar a las familias en la generación ℓ, inclusive. Podemos visualizar $T^\ell_{n,k}$ imaginándonos el "árbol familiar"de $x_{n,k}$ y quedándonos con el cono con vértice en este punto y truncado en la generación ℓ. Notar que:

$$T^{n+1}_{n,k} = T_{n,k}\,,$$

$$T^\ell_{n,k} \subseteq T^{\ell+1}_{n,k}\,,$$

$$\{T^\ell_{n,k} : 1 \leq k \leq K_n\} \text{ es una partición de } S_\ell\,.$$

Además

$$T^\ell_{n,k} \subseteq S_\ell \cap B_\rho(x_{n,k}, \delta^n/(1-\delta))\,.$$

En efecto, tomemos $x \in T^\ell_{n,k}$. Siguiendo a través de sus ancestros hasta llegar a $x_{n,k}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\rho(x_{n,k}, x) &\leq \rho(x, x_{\ell-1,i_1}) + \rho(x_{\ell-1,i_1}, x_{\ell-2,i_2}) + \cdots + \rho(x_{n+1,i_{\ell-n-1}}, x_{n,k}) \\
&< \delta^{\ell-1} + \delta^{\ell-2} + \cdots + \delta^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\delta^n - \delta^\ell}{1-\delta} \\ &< \frac{\delta^n}{1-\delta}. \end{aligned}$$

Observamos a continuación que siempre es posible construir particiones de tipo P_n que satisfacen (1.4). En efecto, fijado un número real $0 < \delta < 1$, definamos las particiones $P_n = \{T_{n,k} : 1 \le k \le K_n\}$ de S_{n+1} de la siguiente forma

$$T_{n,1} = S_{n+1} \cap B_\rho(x_{n,1}, \delta^n) - \bigcup_{k=2}^{K_n} B_\rho(x_{n,k}, \delta^n/2),$$

$$T_{n,\ell} = S_{n+1} \cap B_\rho(x_{n,\ell}, \delta^n) - \bigcup_{h=1}^{\ell-1} T_{n,h} - \bigcup_{k=\ell+1}^{K_n} B_\rho(x_{n,k}, \delta^n/2),$$

para $2 \le \ell < K_n$, y

$$T_{n,K_n} = S_{n+1} \cap B_\rho(x_{n,K_n}, \delta^n) - \bigcup_{h=1}^{K_n-1} T_{n,h}.$$

11. Particiones de Christ y familias de Wu en un contexto compacto

En esta breve sección queremos observar que en un contexto compacto toda familia de Wu tiene asociada un partición de Christ, y recíprocamente. Utilizaremos $\mathbb{N}_0$ para denotar el conjunto de los enteros no negativos, es decir, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sea (X, ρ) un espacio métrico compacto con la PHD, y fijemos un número real δ tal que $0 < \delta < 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, sea $S_n = \{x_{n,k} : 1 \le k \le K_n\}$ una δ^n-red en X tal que la sucesión $\{S_n\}$ satisface $S_n \subseteq S_{n+1}$, y sea $P_n = \{T_{n,k} : 1 \le k \le K_n\}$ una partición de S_{n+1} que cumple (1.4). Definimos sobre el conjunto

$$\mathcal{A} = \{(n,k) : n \in \mathbb{N}_0, 1 \le k \le K_n\}$$

un orden parcial $\preceq$ mediante las siguientes reglas:

1. $(n,k) \preceq (n,k)$ para todo $(n,k) \in \mathcal{A}$, y (n,k) no esta relacionado con ningún otro (n,i), $i = 1, 2, \ldots, K_n$, $i \ne k$;
2. $(n+1, q) \preceq (n,k)$ si y sólo si $x_{n+1,q} \in T_{n,k}$;
3. extensión por transitividad de 2: $(\ell, i) \preceq (n,k)$ si y sólo si $\ell \ge n+1$ y existen $i_1, i_2, \ldots, i_{\ell-n-1}$ tales que $(\ell, i) \preceq (\ell-1, i_1) \preceq (\ell-2, i_2) \preceq \cdots \preceq (n+1, i_{\ell-n-1}) \preceq (n,k)$.

Notar que este orden satisface las propiedades de árbol del Lema 26 y que las "familias" $T^\ell_{n,k}$ pueden describirse mediante este orden de la siguiente manera

$$T^\ell_{n,k} = \{x_{\ell,i} : (\ell, i) \preceq (n,k)\}.$$

Con este orden definimos los conjuntos Q_k^n de la siguiente forma:

$$Q_k^n = \bigcup_{(\ell,i)\preceq(n,k)} B_\rho(x_{\ell,i}, \delta^{\ell+1}).$$

Estos conjuntos son los cubos diádicos de Christ pero definidos mediante el orden heredado de la familia P_n, y satisfacen todas las propiedades del Teorema 27, con $a = \delta$ en la propiedad 2 y $c = (1-\delta)^{-1}$ en la propiedad 3.

Recíprocamente, ya que X es compacto para cada $n \in \mathbb{N}_0$ podemos construir una δ^n-red $\mathcal{N}_n = \{x_{n,k} : k \in K(n)\}$ en X tal que

$$\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{N}_n \subseteq \mathcal{N}_{n+1} \subseteq \cdots,$$

donde $K(n) = \{1, 2, \ldots, K_n\}$ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}_0$, ya que puede probarse que cada una de estas redes es finita si y sólo si X es acotado. Luego si (X, ρ, μ) es un espacio de tipo homogéneo compacto podemos construir los "cubos" Q_k^n que satisfacen las propiedades del Teorema 27, pero partiendo de redes $\mathcal{N}_n$ finitas y anidadas. A partir de esto, si definimos

$$S_n = \mathcal{N}_n, \qquad T_{n,k} = Q_k^n \cap S_{n+1},$$

podemos obtener familias que satisfacen las propiedades de las que aparecen en el trabajo de Wu (ver Sección 10).

CAPíTULO 2

Tipo débil $(1,1)$ de operadores maximales I: discretización de $L^1(X,\nu)$

Estamos interesados en facilitar la tarea de determinar el tipo débil del operador maximal asociado a una sucesión de núcleos, reduciendo a un conjunto más pequeño de funciones el estudio de la acción de tal operador. Un resultado previo en esta dirección es el establecido por Moon en [**31**], donde se prueba que el operador maximal asociado a una sucesión de operadores de convolución en $L^1(\mathbb{R}^n)$ es de tipo débil $(1,q)$, $q \geq 1$, si y sólo si es de tipo débil *restringido* $(1,q)$. Esto significa que para garantizar el tipo débil $(1,q)$ de dicho operador es suficiente con chequear su acción sobre la clase de las funciones características de conjuntos medibles en $\mathbb{R}^n$ con medida finita, y ver que vale una desigualdad del tipo débil $(1,q)$. En un contexto discreto este resultado no es válido: en [**5**] se exhibe una familia de operadores de convolución en $\ell^1(\mathbb{Z})$, donde $\mathbb{Z}$ denota el espacio de los enteros equipado con la medida que cuenta puntos, cuyo operador maximal asociado es de tipo débil restringido $(1,1)$ pero no de tipo débil $(1,1)$, dejando en claro que en el resultado de Moon se usa fuertemente la estructura no atómica de la medida de Lebesgue. Este resultado tampoco vale en el caso continuo cuando el operador no es el maximal de una sucesión de operadores de convolución, ya que puede construirse un operador sublineal e invariante por translaciones que es de tipo débil restringido $(1,1)$ pero no de tipo débil $(1,1)$ (ver [**23**]).

Otra técnica consiste en *discretizar* el problema, es decir, formular el problema en forma equivalente al problema continuo pero en base a un conjunto de puntos. Los métodos de discretización para el estudio del tipo débil $(1,1)$ de operadores maximales representan una herramienta muy poderosa para tal fin, y fueron introducidos por Miguel de Guzmán en [**17**], y refinados luego junto a María Teresa Carrillo en [**10**]. Dicho método consiste en reemplazar funciones por sumas finitas de deltas de Dirac en el estudio del operador. Más precisamente, probaron que un operador maximal de convolución es de tipo débil $(1,1)$ si y sólo si es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac concentradas en puntos diferentes de $\mathbb{R}^n$. Una de las principales aplicaciones de este resultado ha estado relacionada con la función maximal de Hardy-Littlewood, como por ejemplo probar su tipo débil $(1,1)$ de una forma bastante sencilla e ingeniosa (ver [**9**]).

Este método ha sido extendido a lo largo del tiempo a situaciones más amplias. Una de las primeras generalizaciones puede encontrarse en [**11**], donde se demuestra que si el operador maximal de convolución asociado a una sucesión de núcleos en $L^1(\mathbb{R}^n)$ es de tipo débil $(1,q)$, $1 \leq q < \infty$, sobre un subconjunto $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ (el espacio de todas la medidas de Borel positivas y finitas sobre $\mathbb{R}^n$, equipado con la topología débil), entonces es de tipo débil $(1,q)$ sobre el cono cerrado en $\mathcal{M}$ generado por $\mathcal{N}$. Como caso particular se obtiene el resultado de M. de Guzmán. En este mismo trabajo puede verse que las técnicas desarrolladas por de Guzmán y Carrillo no son válidas para el tipo débil (p,p) con $p > 1$, ya que se prueba que en este caso la condición suficiente dada por ellos se satisface sólo si todos los núcleos son cero.

Pueden encontrarse también varios trabajos de T. Menárguez y F. Soria referidos al teorema de M. de Guzmán. En [**30**] modifican dicho teorema para obtener un resultado que permite estudiar el valor exacto de las constantes que aparecen en las desigualdades de tipo débil $(1,1)$ para operadores maximales de convolución mediante métodos discretos. La aplicación de este resultado conduce a encontrar la mejor constante en la desigualdad de tipo débil $(1,1)$ para el operador maximal centrado de Hardy-Littlewood (ver [**28**]). Luego Menárguez se ocupa en [**29**] de desarrollar técnicas para probar un teorema como el mencionado para operadores o espacios de medida más generales en los que éste no puede ser aplicado. En [**36**] halla una caracterización del tipo débil $(1,q)$, $q \geq 1$, para el operador maximal de una sucesión de operadores integrales sobre $\mathbb{R}^n$ con respecto a un par de pesos, mediante el correspondiente operador actuando sobre deltas de Dirac.

En un trabajo reciente, Aldaz y Varona complementan el teorema de de Guzmán probando que en el estudio de ciertos operadores de convolución se pueden considerar medidas arbitrarias en lugar de medidas discretas finitas, y el resultado sigue valiendo sin cambiar el tamaño de las constantes que aparecen en las desigualdades de tipo débil $(1,1)$ (ver [**6**]).

Nuestro objetivo en este capítulo es extender el método de discretización de M. de Guzmán para que pueda ser aplicado al operador maximal de una sucesión de operadores integrales definidos mediante núcleos de dos variables actuando en espacios de tipo homogéneo. Una de las herramientas fundamentales que utilizaremos para tal fin será las partición de tipo diádico de Christ del espacio (ver Sección 9, Capítulo 1).

1. Extensión del teorema de M. de Guzmán a espacios métricos con medida

Sea (X,ρ,μ) un espacio casi-métrico de medida, siendo μ una medida de Borel σ-finita sobre X. Consideremos una sucesión de núcleos $\{k_\ell\}$, donde $k_\ell : X \times X \to \mathbb{R}$ son funciones medibles tales que $k_\ell(\cdot,y) \in L^1(X,\mu)$ *uniformemente* en $y \in X$, es decir, para cada ℓ existe $C_\ell < \infty$ tal que

$$\|k_\ell(\cdot,y)\|_{L^1(X,\mu)} \leq C_\ell, \qquad \text{para todo } y \in X.$$

Para $f \in L^1(X)$ definimos

$$K_\ell f(x) = \int_X k_\ell(x,y) f(y)\, d\mu(y),$$

$$K^* f(x) = \sup_\ell |K_\ell f(x)|\,.$$

Notar que por el teorema de Fubini-Tonelli, $K_\ell f(x) \in \mathbb{R}$ para casi todo punto $x \in X$, y en consecuencia $K^* f$ es una función medible definida en casi todo punto de X.

Si $k : X \times X \to \mathbb{R}$ es continua, $x_1, x_2, \ldots, x_H \in X$ son puntos *diferentes* y $\varepsilon > 0$, tomando

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{H} \frac{\mathcal{X}_{B_\rho(x_i,\varepsilon)}(x)}{\mu(B_\rho(x_i,\varepsilon))}$$

tenemos que

$$Kf_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{H} \frac{1}{\mu(B_\rho(x_i,\varepsilon))} \int_{B_\rho(x_i,\varepsilon)} k(x,y)\, d\mu(y).$$

Por ser k continua tenemos que $Kf_\varepsilon(x)$ converge a $\sum_{i=1}^{H} k(x,x_i)$ cuando ε tiende a cero. Por otra parte, en sentido débil, $f_\varepsilon \to f = \sum_{i=1}^{H} \delta_i$ cuando ε tiende a cero, donde δ_i denota la delta de Dirac concentrada en x_i. En este sentido entendemos que la acción del operador K se extiende a este tipo de medidas f y que

$$Kf(x) = \sum_{i=1}^{H} k(x,x_i).$$

Diremos que K es de **tipo débil (1,1) sobre sumas finitas de deltas de Dirac** (en (X,μ)) si existe $C > 0$ tal que para cada $\lambda > 0$ y cada $f = \sum_{i=1}^{H} \delta_i$ tenemos

$$\mu\big(\{|Kf| > \lambda\}\big) \le C\,\frac{H}{\lambda}\,.$$

Notemos que H es la variación total de la medida f.

Diremos que el operador maximal K^* es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac si existe $C > 0$ tal que para cada $\lambda > 0$ y cada $f = \sum_{i=1}^{H} \delta_i$ tenemos

$$\mu\big(\{K^* f > \lambda\}\big) \le C\,\frac{H}{\lambda}\,.$$

Notemos que ambas definiciones pueden escribirse sin mencionar explícitamente la acción de los operadores sobre las deltas de Dirac. En particular, para el caso del operador maximal K^* la condición $\mu\big(\{K^* f > \lambda\}\big) \le C\,\frac{H}{\lambda}$ para toda $f = \sum_{i=1}^{H} \delta_i$ y todo $\lambda > 0$, es equivalente a decir que

$$\mu\left(\left\{x \in X : \sup_{\ell} \left|\sum_{i=1}^{H} k_\ell(x,x_i)\right| > \lambda\right\}\right) \le C\,\frac{H}{\lambda}$$

para toda colección de puntos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_H$ en X, para todo $H \in \mathbb{N}$ y para todo $\lambda > 0$.

Observemos que si las funciones $k_\ell : X \times X \to \mathbb{R}$ son continuas de soporte compacto, por el teorema de Fubini-Tonelli tenemos que $K_\ell f(x)$ está bien definida para todo punto $x \in X$ para toda $f \in L^1(X,\mu)$, y es una función integrable. Más aún, $K_\ell f$ es acotada y tiene soporte compacto. Luego $K^* f$ es una función medible definida en todo punto de X siempre que $f \in L^1(X,\mu)$.

El siguiente resultado extiende el teorema de discretización de Miguel de Guzmán a operadores maximales definidos sobre ciertos espacios casi-métricos con medida no necesariamente duplicantes.

Teorema 30. *Sea (X,ρ,ν) un espacio casi-métrico sin puntos aislados, con una medida ν tal que $d\nu = g\,d\mu$, donde $g \in L^1_{loc}(X,\rho,\mu)$ y (X,ρ,μ) es un espacio de tipo homogéneo. Sea $\{k_\ell\}$ una sucesión de núcleos continuos y con soportes compactos en $X\times X$. Entonces K^* es de tipo débil $(1,1)$ si y sólo si K^* es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac. En otras palabras, K^* es de tipo débil $(1,1)$ si y sólo si existe $C>0$ tal que para cada $\lambda>0$ y cada conjunto finito $x_1,x_2,\dots,x_H \in X$ de puntos distintos,*

$$\nu\left(\left\{x\in X : \sup_\ell \left|\sum_{i=1}^H k_\ell(x,x_i)\right| > \lambda\right\}\right) \le C\,\frac{H}{\lambda}.$$

Demostración. Comenzaremos probando en cuatro pasos que si K^* es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac, entonces K^* es de tipo débil $(1,1)$.

Paso 1. Sabemos que existe $C>0$ tal que para cada conjunto finito de puntos distintos $x_1,x_2,\dots,x_H\in X$ y para todo $\lambda>0$, tenemos

$$\nu\left(\left\{x\in X : \sup_\ell \left|\sum_{i=1}^H k_\ell(x,x_i)\right| > \lambda\right\}\right) \le C\,\frac{H}{\lambda}.$$

Probaremos ahora que para todo conjunto finito de puntos $x_1,x_2,\dots,x_H\in X$ distintos y para todo $\lambda>0$, si $f=\sum_{i=1}^H c_i\delta_i$ con $c_i\in\mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}\nu\left(\{x\in X : K^*f(x)>\lambda\}\right) &= \nu\left(\left\{x\in X : \sup_\ell \left|\sum_{i=1}^H c_i k_\ell(x,x_i)\right| > \lambda\right\}\right)\\ &\le C\,\frac{\sum_{i=1}^H c_i}{\lambda}.\end{aligned}$$

Si para un número natural fijo N llamamos $K_N^*f(x) = \max_{1\le\ell\le N}|K_\ell f(x)|$, es claro que

$$\bigcup_{N=1}^\infty \{x\in X : K_N^*f(x)>\lambda\} = \{x\in X : K^*f(x)>\lambda\},$$

y que $K_N^*\le K_{N+1}^*$, por lo que es suficiente probar que para cada N fijo

$$\nu\left(\{x\in X : K_N^*f(x)>\lambda\}\right) \le C\,\frac{\sum_{i=1}^H c_i}{\lambda}.$$

Tomemos entonces un N fijo. Ya que por hipótesis X no tiene puntos aislados, para cada $x_i\in X$ podemos elegir c_i puntos diferentes $b_i^1,b_i^2,\dots,b_i^{c_i}$ en X suficientemente cerca a x_i como se desee, y de tal forma que $\{b_i^r : 1\le i\le H,\ 1\le r\le c_i\}$ también resulte una colección de puntos todos diferentes entre sí. Para cada ℓ fijo escribimos

$$\begin{aligned}K_\ell f(x) &= \sum_{i=1}^H c_i k_\ell(x,x_i)\\ &= \sum_{i=1}^H\sum_{r=1}^{c_i}[k_\ell(x,x_i)-k_\ell(x,b_i^r)] + \sum_{i=1}^H\sum_{r=1}^{c_i} k_\ell(x,b_i^r).\end{aligned}$$

Luego para cada α tal que $0 < \alpha < \lambda$, tenemos que

$$\begin{aligned}\nu\left(\{x \in X : K_N^* f(x) > \lambda\}\right) &\leq \nu\left(\left\{x \in X : \max_{1\leq \ell\leq N}\left|\sum_{i=1}^{H}\sum_{r=1}^{c_i}[k_\ell(x,x_i) - k_\ell(x,b_i^r)]\right| > \alpha\right\}\right)\\ &+ \nu\left(\left\{x \in X : \max_{1\leq \ell\leq N}\left|\sum_{i=1}^{H}\sum_{r=1}^{c_i}k_\ell(x,b_i^r)\right| > \lambda-\alpha\right\}\right)\\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Sabemos que

$$I_2 \leq C\,\frac{\sum_{i=1}^{H} c_i}{\lambda-\alpha}\,,$$

y para probar el Paso 1, veremos que dado $\varepsilon > 0$ y α tal que $0 < \alpha < \lambda$, podemos elegir los b_i^r tales que $I_1 < \varepsilon$. Sea

$$A^\ell(x) = \sum_{i=1}^{H}\sum_{r=1}^{c_i}[k_\ell(x,x_i) - k_\ell(x,b_i^r)]\,.$$

Luego

$$I_1 = \nu\left(\left\{x \in X : \max_{1\leq \ell\leq N}|A^\ell(x)| > \alpha\right\}\right) \leq \sum_{\ell=1}^{N}\nu\left(\left\{x \in X : |A^\ell(x)| > \alpha\right\}\right)\,.$$

Para cada ℓ fijo, de la desigualdad de Chebyshev tenemos

$$\begin{aligned}\nu\left(\left\{x \in X : |A^\ell(x)| > \alpha\right\}\right) &\leq \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{H}\sum_{r=1}^{c_i}\int_X |k_\ell(x,x_i) - k_\ell(x,b_i^r)|\,d\nu(x)\\ &= \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{H}\sum_{r=1}^{c_i}\int_{F_\ell} |k_\ell(x,x_i) - k_\ell(x,b_i^r)|\,d\nu(x),\end{aligned}$$

donde F_ℓ es la proyección en la primera variable del soporte de k_ℓ, y por lo tanto es un conjunto acotado y de medida finita. Ya que cada k_ℓ es una función continua de soporte compacto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\ell,\varepsilon) > 0$ tal que $|k_\ell(x,y) - k_\ell(x,z)| < \varepsilon$ siempre que $\rho(y,z) < \delta$, *para todo* $x \in X$. Por estar trabajando con una cantidad finita de núcleos, podemos hacer $I_1 < \varepsilon$ mediante una adecuada elección de los b_i^r. Por lo tanto

$$I_1 + I_2 \leq C\,\frac{\sum_{i=1}^{H} c_i}{\lambda-\alpha}\,,$$

y haciendo $\alpha \to 0$ se prueba el Paso 1.

Paso 2. Utilizando el paso anterior probaremos que si $f = \sum_{i=1}^{H} c_i\delta_i$ con $c_i \in \mathbb{R}^+$, entonces para todo $\lambda > 0$ tenemos que

$$\nu\left(\{x \in X : K^* f(x) > \lambda\}\right) \leq C\,\frac{\sum_{i=1}^{H} c_i}{\lambda}\,.$$

Si $c_i \in \mathbb{Q}^+$, escribimos $c_i = n_i/m_i$, con $n_i, m_i \in \mathbb{N}$, y

$$\sum_{i=1}^{H} c_i k_\ell(x,x_i) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{H} m_j}\sum_{i=1}^{H}\widetilde{c}_i k_\ell(x,x_i)\,,$$

con $\widetilde{c_i} = n_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{H} m_j \in \mathbb{N}$. Luego, si $\widetilde{f} = \sum_{i=1}^{H} \widetilde{c_i}\delta_i$, tenemos que

$$\begin{aligned} \nu\left(\{x \in X : K^* f(x) > \lambda\}\right) &= \nu\left(\left\{x \in X : K^*\widetilde{f}(x) > \lambda \prod_{j=1}^{H} m_j\right\}\right) \\ &\leq C\,\frac{\sum_{i=1}^{H}\widetilde{c_i}}{\lambda\prod_{j=1}^{H} m_j} = C\,\frac{\sum_{i=1}^{H} c_i}{\lambda}\,. \end{aligned}$$

Tomemos ahora $c_i \in \mathbb{R}^+$ y escribamos $c_i = d_i + r_i$, con $d_i \in \mathbb{Q}^+$ y $r_i \geq 0$ tan chico como se desee. Entonces podemos tomar $\overline{f} = \sum_{i=1}^{H} d_i\delta_i$, y para todo $0 < \alpha < \lambda$ y N fijo tenemos

$$\begin{aligned} \nu\left(\{x \in X : K_N^* f(x) > \lambda\}\right) &\leq \nu\left(\left\{x \in X : K_N^*\overline{f}(x) > \lambda - \alpha\right\}\right) \\ &+ \nu\left(\left\{x \in X : K_N^*(f - \overline{f})(x) > \alpha\right\}\right) \\ &\leq C\,\frac{\sum_{i=1}^{H} d_i}{\lambda - \alpha} \\ &+ \nu\left(\left\{x \in X : \max_{1\leq \ell\leq N}\left|\sum_{i=1}^{H} r_i k_\ell(x, x_i)\right| > \alpha\right\}\right) \\ &\leq C\,\frac{\sum_{i=1}^{H} c_i}{\lambda - \alpha} + \frac{1}{\alpha}\sum_{\ell=1}^{N}\sum_{i=1}^{H} r_i \int_X |k_\ell(x, x_i)|\,d\nu(x) \\ &= C\,\frac{\sum_{i=1}^{H} c_i}{\lambda - \alpha} + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{H} r_i \sum_{\ell=1}^{N} \|k_\ell(\cdot, x_i)\|_1\,. \end{aligned}$$

Como los r_i pueden elegirse arbitrariamente chicos, tenemos que

$$\nu\left(\{x \in X : K_N^* f(x) > \lambda\}\right) \leq C\,\frac{\sum_{i=1}^{H} c_i}{\lambda - \alpha}$$

para todo $0 < \alpha < \lambda$. Haciendo $\alpha \to 0$ se obtiene la desigualdad deseada.

Paso 3. Probaremos ahora que K^* es de tipo débil $(1,1)$ sobre combinaciones lineales positivas de funciones características de cubos diádicos de Christ (ver Capítulo 1), disjuntos dos a dos. Sea $h = \sum_{i=1}^{H} c_i\mathcal{X}_{Q_i}$, donde $Q_i \in \mathcal{D}$ y $c_i > 0$. Queremos probar que para todo $\lambda > 0$ y para cualquier función h de esta forma,

$$\nu\left(\{x \in X : K^* h(x) > \lambda\}\right) \leq C\,\frac{\|h\|_1}{\lambda} = C\,\frac{\sum_{i=1}^{H} c_i \nu(Q_i)}{\lambda}\,.$$

Como antes, será suficiente probar que para N fijo,

$$\nu\left(\{x \in X : K_N^* h(x) > \lambda\}\right) \leq C\,\frac{\|h\|_1}{\lambda}\,.$$

Observamos primero que si $h = \sum_{i=1}^{H} c_i\mathcal{X}_{Q_i}$ es la función simple dada, y si η es un número real positivo dado, entonces también podemos escribir, salvo en un conjunto de ν-medida nula, $h = \sum_{j=1}^{M} d_j\mathcal{X}_{\widetilde{Q}_j}$, donde $\operatorname{diam}(\widetilde{Q}_j) < \eta$ para todo $j = 1, 2, \ldots, M$, los $\widetilde{Q}_j$ también son cubos de Christ disjuntos dos a dos, y los d_j son positivos (propiedades 3, 4, 6 y 8 del Teorema 27). Por lo tanto seguimos escribiendo $h = \sum_{i=1}^{H} c_i\mathcal{X}_{Q_i}$ y cuando sea necesario supondremos que el diámetro de cada Q_i es tan chico como haga falta.

Sea $f = \sum_{i=1}^{H} c_i \nu(Q_i)\delta_i$, donde δ_i es la delta de Dirac concentrada en x_i, el "centro" de Q_i (ver propiedades 2 y 3 de los cubos de Christ, Teorema 27). Para N fijo y $0 < \alpha < \lambda$ escribimos

$$\begin{aligned}
\nu\left(\{x \in X : K_N^* h(x) > \lambda\}\right) &\leq \nu\left(\{x \in X : K_N^* f(x) > \lambda - \alpha\}\right) \\
&+ \nu\left(\{x \in X : K_N^*(h - f)(x) > \alpha\}\right) \\
&\leq C\,\frac{\|f\|_1}{\lambda - \alpha} + \nu\left(\{x \in X : K_N^*(h - f)(x) > \alpha\}\right) \\
&= C\,\frac{\|h\|_1}{\lambda - \alpha} + \nu\left(\{x \in X : K_N^*(h - f)(x) > \alpha\}\right) .
\end{aligned}$$

Entonces sólo debemos probar que el segundo término en el último miembro puede hacerse arbitrariamente chico mediante una apropiada elección del tamaño de los Q_i. Ya que

$$\begin{aligned}
|K_\ell(h - f)(x)| &= \left|\sum_{i=1}^{H} c_i \int_{Q_i} k_\ell(x, y)\, d\nu(y) - \sum_{i=1}^{H} c_i \nu(Q_i) k_\ell(x, x_i)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{H} c_i \left[\int_{Q_i} k_\ell(x, y)\, d\nu(y) - \int_{Q_i} k_\ell(x, x_i)\, d\nu(y)\right]\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{H} c_i \int_{Q_i} |k_\ell(x, y) - k_\ell(x, x_i)|\, d\nu(y) ,
\end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{N} \nu(\{|K_\ell(h - f)| > \alpha\}) &\leq \sum_{\ell=1}^{N} \frac{1}{\alpha} \int_X |K_\ell(h - f)(x)|\, d\nu(x) \\
&\leq \sum_{\ell=1}^{N} \frac{1}{\alpha} \int_X \left(\sum_{i=1}^{H} c_i \int_{Q_i} |k_\ell(x, y) - k_\ell(x, x_i)|\, d\nu(y)\right) d\nu(x) \\
&= \frac{1}{\alpha} \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{i=1}^{H} c_i \int_{Q_i} \left(\int_{F_\ell} |k_\ell(x, y) - k_\ell(x, x_i)|\, d\nu(x)\right) d\nu(y) .
\end{aligned}$$

Pero sabemos que $Q_i \subseteq B_\rho(x_i, r_i)$, donde supusimos que r_i es tan chico como quisiéramos. Por la continuidad de los núcleos k_ℓ queda probado el Paso 3.

Paso 4. Aplicar los Teoremas 22 y 28 del Capítulo 1 para obtener el resultado.

Supongamos ahora que K^* es de tipo débil $(1, 1)$, y probemos que esto implica que lo es sobre sumas finitas de deltas de Dirac. Para ello sean $x_1, x_2, \ldots, x_H$ puntos distintos en X, y sea $f = \sum_{i=1}^{H} \delta_i$. Si definimos

$$\beta = \text{mín}\{\rho(x_i, x_h) : 1 \leq i, h \leq H,\, i \neq h\} ,$$

se tiene que $\rho(x_i, x_h) \geq \beta > 0$ siempre que $i \neq h$. Sea n tal que $\Lambda^3 c\delta^n < \beta/4$, donde Λ es la constante para la desigualdad triangular de ρ. Para cada $i = 1, 2, \ldots, H$, existe $Q_{j(i)}^n \in \mathcal{D}$ tal que $x_i \in \overline{Q^n_{j(i)}}$. Notar que si $i \neq h$ entonces $Q^n_{j(i)} \cap Q^n_{j(h)} = \emptyset$. En efecto, supongamos que existe $x \in Q^n_{j(i)} \cap Q^n_{j(h)} \subseteq B(x_{n,j(i)}, c\delta^n) \cap B(x_{n,j(h)}, c\delta^n)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\rho(x_i, x_h) &\leq \Lambda^3 \left[\rho(x_i, x_{n,j(i)}) + \rho(x_{n,j(i)}, x) + \rho(x, x_{n,j(h)}) + \rho(x_{n,j(h)}, x_h)\right] \\
&< 4\Lambda^3 c\delta^n \\
&< \beta\,,
\end{aligned}$$

lo cual es absurdo si $i \neq h$. Definamos la función $\overline{f}$ como

$$\overline{f}(y) = \sum_{i=1}^{H} \frac{1}{\nu\left(Q^n_{j(i)}\right)} \mathcal{X}_{Q^n_{j(i)}}(y)\,.$$

Fijados N, $\lambda > 0$ y α tales que $0 < \alpha < \lambda$, escribimos

$$\begin{aligned}
\nu(\{K^*_N f > \lambda\}) &\leq \nu(\{K^*_N \overline{f} > \lambda - \alpha\}) + \nu(\{K^*_N(\overline{f} - f) > \alpha\}) \\
&\leq C\,\frac{\|\overline{f}\|_1}{\lambda - \alpha} + \sum_{\ell=1}^{N} \nu(\{|K_\ell(\overline{f} - f)| > \alpha\}) \\
&= C\,\frac{H}{\lambda - \alpha} + \sum_{\ell=1}^{N} \nu(\{|K_\ell(\overline{f} - f)| > \alpha\}),
\end{aligned}$$

donde, como antes, $K_\ell(\overline{f} - f)(x)$ se entiende como

$$K_\ell(\overline{f} - f)(x) \;=\; \sum_{i=1}^{H} \frac{1}{\nu\left(Q^n_{j(i)}\right)} \int_{Q^n_{j(i)}} [k_\ell(x,y) - k_\ell(x,x_i)]\, d\nu(y)\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{N} \nu(\{|K_\ell(\overline{f} - f)| > \alpha\}) &\leq \sum_{i=1}^{H} \frac{1}{\alpha\nu\left(Q^n_{j(i)}\right)} \sum_{\ell=1}^{N} \int_X \left(\int_{Q^n_{j(i)}} |k_\ell(x,y) - k_\ell(x,x_i)|\, d\nu(y)\right) d\nu(x) \\
&\leq \sum_{i=1}^{H} \frac{1}{\alpha\nu\left(Q^n_{j(i)}\right)} \sum_{\ell=1}^{N} \int_{F_\ell} \left(\int_{Q^n_{j(i)}} |k_\ell(x,y) - k_\ell(x,x_i)|\, d\nu(y)\right) d\nu(x).
\end{aligned}$$

Al igual que antes dado $\varepsilon > 0$ podemos hacer

$$\sum_{\ell=1}^{N} \nu(\{|K_\ell(\overline{f} - f)| > \alpha\}) < \varepsilon$$

mediante una adecuada elección del tamaño de los cubos diádicos, ya que los núcleos k_ℓ son continuos y estamos trabajando con una cantidad finita de ellos. Hemos probado entonces que

$$\nu(\{K^*_N f > \lambda\}) \leq C\,\frac{H}{\lambda}\,,$$

como se deseaba. □

Observando la demostración del Teorema 30 podemos ver que la hipótesis que el espacio no posea puntos aislados se utiliza sólo en el Paso 1, lo que condujo a preguntarnos si ésta era realmente necesaria para el resultado del teorema o si surgía a causa de la forma de probarlo. La respuesta a este planteo la encontramos en un trabajo de Ackoglu, Baxter, Bellow y Jones. En [**5**] ellos exhiben un contraejemplo que muestra que el resultado no es cierto si eliminamos dicha hipótesis aún en el caso de operadores de convolución. Como mencionamos antes, K. H. Moon prueba en [**31**] que el operador maximal asociado a una sucesión de operadores de convolución en $L^1(\mathbb{R}^n)$ es de tipo débil $(1,q)$, $q \geq 1$, si y sólo si es de tipo débil *restringido* $(1,q)$, es decir, si la desigualdad del tipo débil vale para funciones características de conjuntos de medida finita. Buscando la validez de [**31**] para el caso discreto, en [**5**] se estudia la relación entre el tipo débil restringido $(1,1)$ y el tipo débil $(1,1)$ para operadores de convolución en $\mathbb{Z}$. En ese trabajo se considera $\ell^1(\mathbb{Z})$, donde $\mathbb{Z}$ denota el espacio de los números enteros equipado con la medida que cuenta puntos, y se construye un ejemplo que prueba que un resultado análogo al de Moon para el caso discreto es falso. Más precisamente, exhiben una sucesión $\{k_n\} \subset \ell^1(\mathbb{Z})$ de núcleos de convolución no negativos, con la propiedad adicional de que cada uno tiene integral uno con respecto a la medida que cuenta, y tal que el operador maximal asociado K^* es de tipo débil restringido $(1,1)$ pero no de tipo débil $(1,1)$. Sea E un subconjunto finito arbitrario de $\mathbb{Z}$, digamos $E = \{x_1, x_2, \dots, x_H\}$, siendo $x_1, x_2 \dots, x_H$ enteros diferentes. Ya que en este caso

$$K^*\mathcal{X}_E(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}} k_n(x-j)\mathcal{X}_E(j) \right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i=1}^{H} k_n(x-x_i) \right|,$$

el hecho que el operador K^* sea de tipo débil restringido $(1,1)$, equivale a ser de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac. Si fuera posible eliminar la hipótesis de que el espacio del Teorema 30 no tenga puntos aislados, tendríamos finalmente que si K^* es de tipo débil restringido $(1,1)$, entonces es de tipo débil $(1,1)$, lo cual es imposible si pensamos que K^* es el expuesto en [**5**]. Por lo tanto no podemos quitar esta condición. Pero si estamos interesados en obtener un resultado similar para un espacio que sí posee puntos aislados, bastaría con poner una hipótesis que nos permita evitar el Paso 1 de la demostración y comenzar directamente en el Paso 2. Para esto debemos pedir que que K^* sea de tipo débil $(1,1)$ sobre una clase más grande que la clase de las sumas finitas de deltas de Dirac, que es la de las *combinaciones lineales de deltas de Dirac con coeficientes en* $\mathbb{N}$. Esto se logra permitiendo que más de una delta esté concentrada en un mismo punto, es decir, admitiendo que entre los puntos $x_1, x_2 \dots, x_H$ ocurran repeticiones en lugar de exigir que sean todos diferentes entre sí. De esta forma obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 31. *Sea (X,ρ,ν) un espacio casi-métrico con una medida ν tal que $d\nu = g\,d\mu$, donde $g \in L^1_{loc}(X,\rho,\mu)$ y (X,ρ,μ) es un espacio de tipo homogéneo. Sea $\{k_\ell\}$ una sucesión de núcleos continuos y con soportes compactos en $X \times X$. Entonces K^* es de tipo débil $(1,1)$ si y sólo si existe $C > 0$ tal que para cada $\lambda > 0$ y cada conjunto finito $x_1, x_2, \dots, x_H \in X$ de puntos* ***no necesariamente distintos****,*

$$\nu\left(\left\{x \in X : \sup_{\ell} \left| \sum_{i=1}^{H} k_\ell(x,x_i) \right| > \lambda \right\}\right) \leq C\,\frac{H}{\lambda}.$$

En otra dirección, observemos que en el Teorema 30 pedimos que los núcleos k_ℓ sean continuos y con soporte compacto. Esta hipótesis la usamos, en principio, para la buena definición de $K_\ell f$ y K^*f para $f \in L^1(X)$, y luego dentro de la demostración del teorema. Lo primero lo podríamos garantizar también si pedimos, por ejemplo, que cada k_ℓ sea una función medible en $X \times X$ que satisface $k_\ell(\cdot, y) \in L^1(X,\nu)$ *uniformemente* en $y \in X$, es decir, para cada ℓ existe $C_\ell < \infty$ tal que

$$\|k_\ell(\cdot, y)\|_{L^1(X,\nu)} \leq C_\ell, \qquad \text{para todo } y \in X.$$

Por otra parte, si observamos la demostración del teorema, podemos ver que es suficiente con pedir que

$$\int_X |k_\ell(x,y) - k_\ell(x,z)|\, d\nu(x) \to 0$$

cuando $\rho(y,z) \to 0$, para cada ℓ. De esta forma tenemos la siguiente extensión del Teorema 30.

Teorema 32. *Sea (X, ρ, ν) un espacio casi-métrico sin puntos aislados, con una medida ν tal que $d\nu = g\, d\mu$, donde $g \in L^1_{loc}(X, \rho, \mu)$ y (X, ρ, μ) es un espacio de tipo homogéneo. Sea $\{k_\ell\}$ una sucesión de núcleos tal que cada $k_\ell : X \times X \to \mathbb{R}$ es una función medible que satisface*

1. *$k_\ell(\cdot, y) \in L^1(X,\nu)$ uniformemente en $y \in X$,*
2. *$\int_X |k_\ell(x,y) - k_\ell(x,z)|\, d\nu(x) \to 0$ cuando $\rho(y,z) \to 0$.*

Entonces K^* es de tipo débil $(1,1)$ si y sólo si K^* es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac. En otras palabras, K^* es de tipo débil $(1,1)$ si y sólo si existe $C > 0$ tal que para cada $\lambda > 0$ y cada conjunto finito $x_1, x_2, \ldots, x_H \in X$ de puntos distintos,

$$\nu\left(\left\{x \in X : \sup_\ell \left|\sum_{i=1}^{H} k_\ell(x, x_i)\right| > \lambda\right\}\right) \leq C\, \frac{H}{\lambda}.$$

Es claro que también puede demostrarse una extensión del Teorema 31 análoga al teorema anterior.

Queremos observar finalmente que es posible obtener un resultado más "fino" que los precedentes para espacios que no son discretos ni son continuos puramente. Por ejemplo, para el conjunto

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (2n, 2n+1) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{2n + 3/2\} =: X_1 \cup X_2$$

equipado con la distancia usual de $\mathbb{R}$ y la medida que cuenta puntos sobre X_2 y que sobre X_1 mide longitudes, es un espacio de tipo homogéneo (ver casos más generales en [**34**]).

Más aún, Macías y Segovia prueban en [**27**] que el conjunto de puntos que miden positivo (**átomos**) es numerable y coincide con el conjunto de los puntos aislados. Con esta caracterización de los átomos tendremos que K^* será de tipo débil $(1,1)$ si y sólo si existe una constante

C tal que para cada conjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_H\}$ de puntos distintos en X y para cada elección de números naturales $n_1, n_2, \dots, n_H$ que satisfaga $n_i = 1$ cuando $\nu(\{x_i\}) = 0$, vale que

$$\nu\left(\left\{x \in X : \sup_{\ell}\left|\sum_{i=1}^{H} n_i k_\ell(x, x_i)\right| > \lambda\right\}\right) \leq C\,\frac{\sum_{i=1}^{H} n_i}{\lambda}$$

para todo $\lambda > 0$.

2. Aplicación a la maximal de Hardy-Littlewood en un e.t.h.

Sea (X, ρ, ν) un espacio de tipo homogéneo, y fijemos una métrica d y un número real ξ tales que que d^ξ es equivalente a ρ (ver teorema de Macías-Segovia). Denotemos por Mf a la función maximal centrada de Hardy-Littlewood definida con respecto a d, es decir

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\nu(B_d(x,r))} \int_{B_d(x,r)} |f(y)|\, d\nu(y).$$

Es sabido que M resulta equivalente a M^ρ, el operador maximal definido con respecto a ρ (ver Lema 23 del Capítulo 1). Notar que el operador M es el maximal de una familia de operadores k_r indexados por el conjunto no numerable $\{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$. Si bien tenemos caracterizado el tipo débil $(1,1)$ del operador maximal de una sucesión ordinaria de núcleos mediante su tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac, no es posible obtener el mismo resultado cuando los índices de los núcleos pertenecen a una familia A no numerable. Un ejemplo de que esta caracterización falla en dicho caso puede encontrarse en [**17**]. Allí también se muestra que si los núcleos tienen determinadas propiedades, entonces se puede recuperar el mismo tipo de caracterización. Dichas propiedades deben ser las suficientes como para poder obtener que existe una constante C tal que para toda $f \in L^1$ vale la desigualdad

$$\sup_{r \in A} |K_r f(x)| \leq C \sup_{r \in N} |K_r f(x)|,$$

donde N es un subconjunto numerable de A. Este es el caso del operador maximal de Hardy-Littlewood, la transformada de Hilbert, o más generalmente operadores maximales de Calderón-Zygmund, entre otros. Por ejemplo, estudiar el tipo débil de la maximal con radios "continuos" M es equivalente a estudiar el tipo débil de la maximal con radios "diádicos" $\mathcal{M}$ definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{M}f(x) &= \sup_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\nu\left(B_d(x, 2^{-\ell})\right)} \int_{B_d(x, 2^{-\ell})} |f(y)|\, d\nu(y) \\ &= \sup_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_X k_\ell(x,y) |f(y)|\, d\nu(y), \end{aligned}$$

donde

$$k_\ell(x,y) = \frac{1}{\nu\left(B_d(x, 2^{-\ell})\right)} \mathcal{X}_{B_d(x, 2^{-\ell})}(y).$$

La afirmación anterior se deduce fácilmente del hecho que dado $r > 0$ existe un único entero ℓ tal que $2^{-\ell} < r \leq 2^{-\ell+1}$. Ahora $\mathcal{M}$ es el maximal de una sucesión ordinaria de operadores.

Por otra parte, los núcleos k_ℓ para la maximal $\mathcal{M}$ no son continuos ni siquiera en $\mathbb{R}^1$. Si agregamos una hipótesis adicional a la medida es posible obtener la validez de las hipótesis del Teorema 32. En efecto, si queremos chequear que para cada ℓ se tiene que

$$\int |k_\ell(x,y) - k_\ell(x,z)|\, d\nu(x) \to 0$$

cuando $d(y,z) \to 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int |k_\ell(x,y) - k_\ell(x,z)|\, d\nu(x) &= \int \frac{1}{\nu(B_d(x,2^{-\ell}))} \left| \mathcal{X}_{B_d(x,2^{-\ell})}(y) - \mathcal{X}_{B_d(x,2^{-\ell})}(z) \right| d\nu(x) \\
&= \int_X \frac{1}{\nu(B_d(x,2^{-\ell}))} \left| \mathcal{X}_{B_d(y,2^{-\ell})}(x) - \mathcal{X}_{B_d(z,2^{-\ell})}(x) \right| d\nu(x) \\
&= \int_{B_d(y,2^{-\ell}) \triangle B_d(z,2^{-\ell})} \frac{1}{\nu(B_d(x,2^{-\ell}))}\, d\nu(x) \\
&\leq \frac{C}{\nu(B_d(y,2^{-\ell}))}\, \nu\left(B_d(y,2^{-\ell}) \triangle B_d(z,2^{-\ell}) \right),
\end{aligned}$$

donde $A \triangle B$ denota la diferencia simétrica entre los conjuntos A y B, es decir, $A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$. La constante C que aparece arriba proviene de la propiedad de duplicación de ν, ya que $B_d(y,2^{-\ell}) \subseteq B_d(x, 2\Lambda 2^{-\ell})$ para todo x en el dominio de integración. Luego, para que valgan las hipótesis del Teorema 32, será suficiente con pedir que

$$\nu\left(B_d(y,2^{-\ell}) - B_d(z,2^{-\ell}) \right) \to 0$$

siempre que $d(y,z) \to 0$, para cada ℓ. Si bien esta condición vale en muchos casos, existen ejemplos de espacios métricos de tipo homogéneo sin puntos aislados en los que la misma no se cumple. Por ejemplo, consideremos $\mathbb{R}^2$ equipado con la distancia del máximo $\bar{d}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \text{máx}\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$. Sea X el subconjunto definido como

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \bar{d}((x,y),(0,0)) = 2\} \cup \{(x,0) : -1 \leq x \leq 1\}$$

(ver Figura 1) con la medida longitud de arco λ.

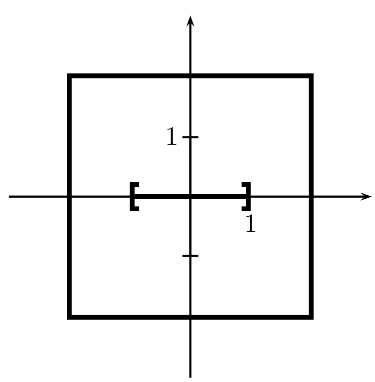


Figura 1: $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \bar{d}((x,y),(0,0)) = 2\} \cup \{(x,0) : -1 \leq x \leq 1\}$

Puede probarse que $(X, \bar{d}, \lambda)$ es un espacio de tipo homogéneo (en [**34**] se consideran varias situaciones más generales). Tomemos la sucesión $\{z_n\}$ en X definida como $z_n = (1/n, 0)$. Esta sucesión converge al punto $z = (0,0)$, y para cada n (ver Figura 2), tenemos

$$B_{\bar{d}}(z_n, 2) - B_{\bar{d}}(z, 2) = \{(2, y) : -2 < y < 2\}.$$

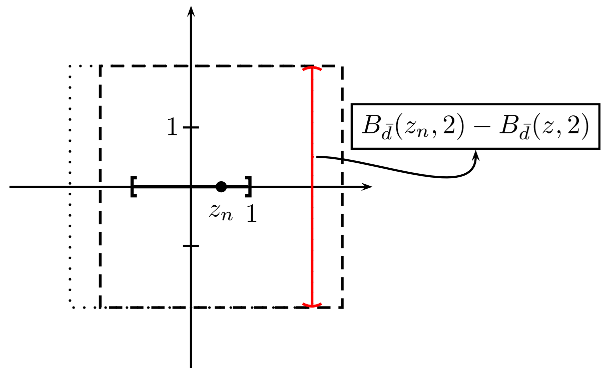


Figura 2: $B_{\bar{d}}(z_n, 2) - B_{\bar{d}}(z, 2) = \{(2, y) : -2 < y < 2\}$

Luego $\lambda(B_{\bar{d}}(z_n, 2) - B_{\bar{d}}(z, 2)) = \lambda(\{(2, y) : -2 < y < 2\}) = 4$ para todo n, por lo que $\lambda(B_{\bar{d}}(z_n, 2) - B_{\bar{d}}(z, 2))$ no tiende a cero cuando n tiende a infinito.

En lugar de pedirle esta hipótesis adicional a la medida, lo que haremos es considerar los núcleos continuos

$$\widetilde{k}_\ell(x, y) = \frac{\varphi\left(2^\ell d(x, y)\right)}{\int \varphi\left(2^\ell d(x, z)\right)\, d\nu(z)},$$

donde φ es la función continua definida sobre los reales no negativos como $\varphi(t) = 1$ para todo t en el intervalo $[0, 1]$, $\varphi(t) = 0$ si $t \geq 2$, y lineal en $[1, 2]$ (ver Figura 3). Para ver que estos núcleos

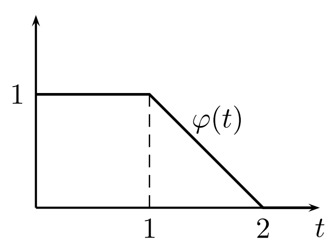


Figura 3: Función φ

son continuos, notar que d lo es por ser una métrica, por lo que $\varphi\left(2^\ell d(x, y)\right)$ es una función continua para cada ℓ. Además el denominador $\psi_\ell(x)$ de $\widetilde{k}_\ell$ nunca se anula por ser ν duplicante, por lo que para obtener la continuidad de $\widetilde{k}_\ell$ sólo resta chequear la continuidad de $\psi_\ell(x)$. En efecto, sean $x, w \in X$. Podemos suponer que $d(x, w) \leq 2^{-\ell}$. Usando el hecho que el soporte de

φ es el intervalo $[0,2]$ obtenemos

$$\begin{aligned}|\psi_\ell(x)-\psi_\ell(w)| &= \left|\int \varphi\left(2^\ell d(x,z)\right)\,d\nu(z)-\int \varphi\left(2^\ell d(w,z)\right)\,d\nu(z)\right|\\ &\le \int_{B_d(x,2^{-\ell+2})}\left|\varphi\left(2^\ell d(x,z)\right)-\varphi\left(2^\ell d(w,z)\right)\right|\,d\nu(z)\\ &\le 2^\ell d(x,w)\int_{B_d(x,2^{-\ell+2})} d\nu(z),\end{aligned}$$

ya que $|\varphi(s)-\varphi(t)|\le|s-t|$. Luego $|\psi_\ell(x)-\psi_\ell(w)|\le 2^\ell d(x,w)\nu(B_d(x,2^{-\ell+2}))\to 0$ cuando $d(x,w)\to 0$ para todo ℓ, con lo que probamos que cada núcleo $\widetilde{k}_\ell$ es continuo.

Veamos ahora que el operador maximal $\mathcal{M}$ asociado a los núcleos k_ℓ es equivalente al operador maximal $\widetilde{\mathcal{M}}$ asociado a los núcleos $\widetilde{k}_\ell$. En efecto, notar que para cada $r>0$ se tienen las siguientes desigualdades

$$\mathcal{X}_{B_d(x,r)}(y)\le\varphi\left(\frac{d(x,y)}{r}\right)\le\mathcal{X}_{B_d(x,2r)}(y),$$

por lo que

$$\nu\left(B_d(x,r)\right)\le\int\varphi\left(\frac{d(x,y)}{r}\right)\,d\nu(y)\le\nu\left(B_d(x,2r)\right).$$

Luego para cada entero ℓ se tiene que

$$\frac{\mathcal{X}_{B_d(x,2^{-\ell})}(y)}{\nu\left(B_d(x,2^{-\ell+1})\right)}\le\widetilde{k}_\ell(x,y)\le\frac{\mathcal{X}_{B_d(x,2^{-\ell+1})}(y)}{\nu\left(B_d(x,2^{-\ell})\right)}.$$

Pero ya que ν duplica, existe una constante $A\ge 1$ tal que $\nu(B_d(x,2^{-\ell+1}))\le A\nu(B_d(x,2^{-\ell}))$ para todo $x\in X$ y todo entero ℓ. Esto implica que

$$\frac{1}{A}k_\ell(x,y)\le\widetilde{k}_\ell(x,y)\le Ak_{\ell-1}(x,y).$$

Por lo tanto podemos concluir que estudiar el tipo débil de $\mathcal{M}$ es equivalente a estudiar el tipo débil de $\widetilde{\mathcal{M}}$, como queríamos ver.

De las observaciones anteriores obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 33. *Sea (X,ρ,ν) un espacio de tipo homogéneo. Entonces una condición necesaria y suficiente para el tipo débil $(1,1)$ del operador maximal de Hardy-Littlewood es que exista una constante $C>0$ tal que para cada $\lambda>0$ y cada conjunto finito $x_1,x_2,\dots,x_H\in X$ de puntos no necesariamente distintos,*

$$\nu\left(\left\{x\in X:\sup_{\ell\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{H}k_\ell(x,x_i)>\lambda\right\}\right)\le C\,\frac{H}{\lambda}.$$

CAPÍTULO 3

Convergencia de espacios casi-métricos de probabilidad

En este capítulo estamos interesados en problemas relacionados con la convergencia de espacios de tipo homogéneo. Con tal fin comenzamos introduciendo una estructura casi-métrica sobre el conjunto de todos los pares (Y, μ) tales que Y es un subespacio cerrado de (X, ρ) y μ es una medida de probabilidad Borel regular sobre X. Una vez definido este espacio casi-métrico, centraremos nuestra atención en el subespacio formado por los espacios de tipo homogéneo (Y, μ) con cota superior uniforme para la constante de duplicación. Como es de esperar esta topología involucra la convergencia de Hausdorff de conjuntos compactos y la convergencia débil estrella de Kantorovich para las medidas de probabilidad.

En el Capítulo 5, como aplicación de los resultados del Capítulo 2, presentaremos un teorema que nos provee el tipo débil $(1, 1)$ del operador maximal de una sucesión de núcleos en términos de su tipo débil $(1, 1)$ sobre subconjuntos discretos que aproximan al espacio original. Entre los resultados de este capítulo se obtienen aproximaciones discretas que permanecen de modo *uniforme* en clases de espacios de tipo homogéneo. Además los resultados de este capítulo constituyen un contexto adecuado para considerar los esquemas iterativos de Hutchinson en el análisis que desarrollaremos en los Capítulos 6 y 8 sobre las diversas propiedades de duplicación de las órbitas.

1. Distancia de Hausdorff

Sea (X, ρ) un espacio casi-métrico. Si $E \subseteq X$ y $\varepsilon > 0$, el **ε-engordado** de E, denotado por $[E]_\varepsilon$, se define por

$$[E]_\varepsilon = \bigcup_{x \in E} B_\rho(x, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, E) < \varepsilon\}.$$

Consideremos el conjunto definido como

$$\mathcal{K} = \{K \subseteq X : K \neq \emptyset, K \text{ compacto}\}.$$

La métrica de Hausdorff compara elementos de $\mathcal{K}$ teniendo en cuenta tanto la "distancia" entre ellos como su "forma". La siguiente definición es una generalización de la clásica al contexto casi-métrico.

Definición. Sean $A, B \in \mathcal{K}$. La **casi-distancia de Hausdorff** entre A y B es

$$\delta_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq [B]_\varepsilon \wedge B \subseteq [A]_\varepsilon\}.$$

Veremos luego que δ_H es una casi-métrica sobre $\mathcal{K}$. Si $\{E_n\}$ es una sucesión de conjuntos en $\mathcal{K}$ y $E \in \mathcal{K}$ son tales que $\delta_H(E_n, E) \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces escribiremos $E_n \xrightarrow{\delta_H} E$.

Sea d una métrica tal que existen constantes $\xi \geq 1$, c_1 y c_2 satisfaciendo

$$c_1\rho(x,y) \leq d^{\xi}(x,y) \leq c_2\rho(x,y),$$

para todo $x, y \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, el ε-engordado de un conjunto E con respecto a d se define por

$$[E]_{\varepsilon,d} = \bigcup_{x\in E} B_d(x,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,E) < \varepsilon\},$$

y la **distancia de Hausdorff** entre A y B es

$$d_H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq [B]_{\varepsilon,d} \wedge B \subseteq [A]_{\varepsilon,d}\},$$

para $A, B \in \mathcal{K}$. Es sabido que si (X,d) es un espacio métrico completo entonces $(\mathcal{K}, d_H)$ también es un espacio métrico completo (ver [**19**]). Usando esto obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 34. *Si (X,ρ) es un espacio casi-métrico completo, entonces $(\mathcal{K}, \delta_H)$ también es un espacio casi-métrico completo.*

Demostración. Ya que para cada $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$[A]_{(c_1\varepsilon)^{1/\xi},\,d} \subseteq [A]_\varepsilon \subseteq [A]_{(c_2\varepsilon)^{1/\xi},\,d}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\delta_H(A,B) &\geq \inf\{\varepsilon > 0 : A \subseteq [B]_{(c_2\varepsilon)^{1/\xi},\,d} \text{ y } B \subseteq [A]_{(c_2\varepsilon)^{1/\xi},\,d}\} \\
&= \frac{1}{c_2}\left[\inf\{(c_2\varepsilon)^{1/\xi} : A \subseteq [B]_{(c_2\varepsilon)^{1/\xi},\,d} \text{ y } B \subseteq [A]_{(c_2\varepsilon)^{1/\xi},\,d}\}\right]^{\xi} \\
&= \frac{1}{c_2}\, d_H^{\xi}(A,B),
\end{aligned}$$

para todo A y B in $\mathcal{K}$. Análogamente se prueba que $\delta_H(A,B) \leq d_H^{\xi}(A,B)/c_1$. Por lo tanto $\delta_H \simeq d_H^{\xi}$, con las mismas constantes c_1 y c_2. Luego δ_H es una casi-métrica sobre $\mathcal{K}$ y $(\mathcal{K}, \delta_H)$ es un espacio casi-métrico completo. □

2. Convergencia débil de medidas

Sea (X,ρ) un espacio casi-métrico *compacto*. Denotamos

$$\mathcal{P}(X) = \{\mu : \mu \text{ es una medida de Borel sobre } X \text{ y } \mu(X) = 1\}.$$

Puede probarse que toda medida μ en $\mathcal{P}(X)$ es regular (ver [**8**]). Sea $\mathcal{C}(X)$ el espacio de las funciones continuas sobre X. Decimos que una sucesión $\{\mu_k\} \subset \mathcal{P}(X)$ **converge débilmente** (o en la topología débil estrella) a una medida μ, y lo denotamos por $\mu_k \xrightarrow{w*} \mu$, si

$$\int_X f\, d\mu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_X f\, d\mu, \qquad \text{para toda } f \in \mathcal{C}(X).$$

Notar que la convergencia débil estrella depende sólo de la topología de X, y no de la métrica o casi-métrica específica que la genere.

El siguiente resultado, que se conoce como teorema de Prohorov (ver por ejemplo [**8**]), nos asegura que $\mathcal{P}(X)$ es **secuencialmente compacto**. Esto significa que para toda sucesión $\{\mu_n\}$ en $\mathcal{P}(X)$ existe una subsucesión $\{\mu_{n_i}\}$ y una medida $\mu \in \mathcal{P}(X)$ tal que $\mu_{n_i} \xrightarrow{w*} \mu$. Esto implica que $\mathcal{P}(X)$ es completo con la topología débil estrella.

TEOREMA 35 (Teorema de Prohorov). *Si X es compacto entonces $\mathcal{P}(X)$ es secuencialmente compacto.*

En realidad lo que se conoce como teorema de Prohorov es un enunciado más general donde la hipótesis de compacidad del dominio puede debilitarse.

En capítulos siguientes haremos uso de las siguientes desigualdades básicas cuya demostración puede verse por ejemplo en [**8**]: si $\{\mu_n\}$ y μ son medidas en $\mathcal{P}(X)$ tal que $\mu_n \xrightarrow{w*} \mu$, entonces

$$\mu(F) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(F), \tag{3.1}$$

$$\mu(G) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(G), \tag{3.2}$$

para todo $F \subseteq X$ cerrado y todo $G \subseteq X$ abierto. Será útil destacar que ninguna de las desigualdades precedentes requiere la compacidad de X (ver teorema de Portmanteau, [**8**], pág. 11).

3. Distancia de Kantorovich-Hutchinson

Sea (X, ρ) un espacio casi-métrico *compacto*. Es posible definir una métrica sobre $\mathcal{P}(X)$ tal que la convergencia de una sucesión con respecto a dicha métrica resulte equivalente a la convergencia débil estrella al mismo límite. Para ello denotemos por Lip_1 al espacio de todas las funciones d-Lipschitz definidas sobre X con constante de Lipschitz igual a uno, es decir $f \in \mathrm{Lip}_1$ si y sólo si $|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)$ para todo $x, y \in X$ ($\rho \simeq d^{\xi}$). La **distancia de Kantorovich-Hutchinson** sobre $\mathcal{P}(X)$ se define como

$$\delta_K(\mu,\nu) = \sup\left\{\left|\int f\, d\mu - \int f\, d\nu\right| : f \in \mathrm{Lip}_1\right\}.$$

Puede verse que δ_K es una métrica sobre $\mathcal{P}(X)$, y además que resulta una métrica adecuada para la convergencia débil estrella.

PROPOSICIÓN 36. *Sean $\mu_1, \mu_2 \dots$ y μ medidas en $\mathcal{P}(X)$. Entonces $\mu_n \xrightarrow{w*} \mu$ si y sólo si $\delta_K(\mu_n, \mu) \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $\mu_n \xrightarrow{w*} \mu$ pero que $\delta_K(\mu_n, \mu) \nrightarrow 0$. Luego de renombrar, existe $\varepsilon > 0$ y funciones $f_n \in \mathrm{Lip}_1$ tales que $|\int f_n\, d\mu_n - \int f_n\, d\mu| \geq \varepsilon$ para todo n. Fijemos $x_0 \in X$ y sea g_n la función definida sobre X como $g_n(x) = f_n(x) - f_n(x_0)$. Entonces

$|\int g_n\,d\mu_n - \int g_n\,d\mu| \geq \varepsilon$ para todo n, y $|g_n(x)| = |g_n(x) - g_n(x_0)| \leq d(x, x_0) \leq \mathrm{diam}(X)$. Por el teorema de Arzelà-Ascoli (Teorema 16) existe una subsucesión de $\{g_n\}$, a la cual podemos renombrar y suponer que es toda la sucesión, tal que $g_n \to g$ uniformemente, para alguna función $g \in \mathcal{C}(X)$. Escribimos

$$\begin{aligned}\int g\,d\mu_n - \int g\,d\mu &= \left(\int g\,d\mu_n - \int g_n\,d\mu_n\right) + \left(\int g_n\,d\mu_n - \int g_n\,d\mu\right)\\ &\quad + \left(\int g_n\,d\mu - \int g\,d\mu\right).\end{aligned}$$

Ya que $g_n \to g$ uniformemente, el primer y tercer términos de esta suma tienden a cero cuando $n \to \infty$, y el valor absoluto del término del medio está acotado por abajo por ε, lo cual contradice que $\mu_n \xrightarrow{w*} \mu$.

Para el recíproco supongamos que $\delta_K(\mu_n, \mu) \to 0$. Ya que X es compacto, la clase $\mathscr{A} = \bigcup_{c>0} \mathrm{Lip_c}$, donde $\mathrm{Lip_c} = \{f : X \to \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq cd(x, y)\}$, es un álgebra en $\mathcal{C}(X)$, es decir, $\mathscr{A}$ es un espacio vectorial de funciones en $\mathcal{C}(X)$ tal que si $f, g \in \mathscr{A}$ entonces $fg \in \mathscr{A}$. Además $\mathscr{A}$ separa puntos; es decir, dados dos puntos distintos x e y en X, podemos encontrar una función f en $\mathscr{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. En efecto, dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, es suficiente con tomar $f(z) = d(x, z)$ para $z \in X$. Ya que además es claro que $\mathscr{A}$ contiene a las funciones constantes, por el teorema de Stone-Weierstrass para espacios métricos compactos (Teorema 17) tenemos que $\mathscr{A}$ es denso en $\mathcal{C}(X)$. Luego dada $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ y $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathrm{Lip}_c$ para algún $c > 0$ tal que $|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ para todo $x \in X$. Sea $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $\delta_K(\mu_n, \mu) < \varepsilon/(3c)$. Luego si $n \geq n_0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\int \varphi\,d\mu_n - \int \varphi\,d\mu\right| &\leq \int |\varphi - f|\,d\mu_n + \left|\int f\,d\mu_n - \int f\,d\mu\right| + \int |\varphi - f|\,d\mu\\ &< 2\varepsilon/3 + c\delta_K(\mu_n, \mu) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu_n \xrightarrow{w*} \mu$. □

Corolario 37. *El espacio métrico $(\mathcal{P}(X), \delta_K)$ es completo.*

4. Casi-métrica de Hausdorff-Kantorovich

Definiremos ahora un espacio casi-métrico cuya estructura y propiedades de convergencia serán de nuestro interés para los objetivos del siguiente capítulo. Sea (X, ρ) un espacio casi-métrico *compacto*, y sea $\mathscr{X}$ el conjunto formado por todos los pares (Y, μ) tales que Y es un subconjunto cerrado de X, y por lo tanto compacto, y μ es una medida de Borel de probabilidad sobre X. Es decir, $\mathscr{X} = \mathcal{K} \times \mathcal{P}$. Dados dos elementos (Y_i, μ_i) en $\mathscr{X}$, $i = 1, 2$, definimos la **casi-métrica de Hausdorff-Kantorovich** como

$$\delta\left((Y_1, \mu_1), (Y_2, \mu_2)\right) = \delta_H(Y_1, Y_2) + \delta_K(\mu_1, \mu_2),$$

por lo que $(\mathscr{X}, \delta)$ es un espacio casi-métrico completo. Consideremos el siguiente subconjunto de $\mathscr{X}$

$$\mathcal{E} = \{(Y, \mu) \in \mathscr{X} : \mathrm{sop}(\mu) \subseteq Y\}.$$

Para este conjunto tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 38. *El conjunto $\mathcal{E}$ es cerrado en $(\mathscr{X}, \delta)$. Por lo tanto $(\mathcal{E}, \delta)$ es un subespacio casi-métrico completo de $(\mathscr{X}, \delta)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{(Y_n, \mu_n) : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en $\mathcal{E}$ tal que $(Y_n, \mu_n) \xrightarrow{\delta} (Y, \mu)$. Ya que $(\mathscr{X}, \delta)$ es completo, sólo debemos probar que $\operatorname{sop}(\mu) \subseteq Y$. Para ello veremos que $\int g\, d\mu = 0$ para toda $g \in \mathcal{C}(X)$ con $\operatorname{sop}(g) \cap Y = \emptyset$. Fijemos $\varepsilon = \rho(\operatorname{sop}(g), Y) > 0$. Notar que $\operatorname{sop}(g) \cap [Y]_\varepsilon = \emptyset$. Pero ya que $Y_n \xrightarrow{\delta_H} Y$, para este valor de ε debe existir $N = N(\varepsilon)$ tal que $Y_n \subseteq [Y]_\varepsilon$ siempre que $n \geq N$. Luego $\operatorname{sop}(g) \cap Y_n = \emptyset$ para todo $n \geq N$, y en consecuencia

$$\int g\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g\, d\mu_n = 0.$$

Por lo tanto $\mathcal{E}$ es cerrado. □

5. Subespacios de $\mathcal{E}$: la propiedad de duplicación

En esta sección definiremos y estudiaremos propiedades de ciertos subconjuntos de $\mathcal{E}$ que serán de nuestro interés. Sea (X, ρ) un espacio casi-métrico compacto tal que las ρ-bolas son conjuntos de Borel. En lo que sigue supondremos que A y α son constantes tales que $A \geq 1$ y $\alpha > 1$. Sea $\mathcal{D}(\alpha, A, \rho)$ el conjunto de todos los pares $(Y, \mu) \in \mathcal{E}$ tales que las desigualdades

$$0 < \mu(B_\rho(y, \alpha r)) \leq A\mu(B_\rho(y, r))$$

valen para todo $y \in Y$ y $r > 0$. Sea d una métrica sobre X tal que existen constantes ξ, c_1 y c_2 satisfaciendo (1.1) en el teorema de Macías-Segovia. Ya que

$$B_\rho(y, r^\xi/c_2) \subseteq B_d(y, r) \subseteq B_\rho(y, r^\xi/c_1),$$

para todo $y \in Y$ y $r > 0$, se tiene que si $(Y, \mu) \in \mathcal{D}(\alpha, A, \rho)$ entonces

$$\begin{aligned} \mu(B_d(y, \alpha r)) &\leq \mu(B_\rho(y, (\alpha r)^\xi/c_1) \\ &\leq A^n \mu(B_\rho(y, r^\xi/c_2)) \\ &\leq A^n \mu(B_d(y, r)), \end{aligned}$$

siendo n un entero positivo grande tal que $\alpha^{n-\xi} \geq c_2/c_1$. Recíprocamente, si (Y, μ) es un elemento en $\mathcal{E}$ tal que para ciertas constantes $A \geq 1$ y $\alpha > 1$ se satisface

$$0 < \mu(B_d(y, \alpha r)) \leq A\mu(B_d(y, r)) \tag{3.3}$$

para todo $y \in Y$ y $r > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mu(B_\rho(y, \alpha r)) &\leq \mu(B_d(y, (c_2 \alpha r)^{1/\xi})) \\ &\leq A^q \mu(B_d(y, (r/c_1)^{1/\xi})) \\ &\leq A^q \mu(B_\rho(y, r)), \end{aligned}$$

donde q es un número natural tal que $\alpha^{q-1} \geq c_2 c_1$. Luego por simplicidad definiremos y trabajaremos con el conjunto $\mathcal{D}(\alpha, A)$ formado por todos aquellos pares $(Y, \mu) \in \mathcal{E}$ para los que (3.3) vale para todo $y \in Y$ y todo $r > 0$. Si $(Y, \mu) \in \mathcal{D}(\alpha, A)$ para algún $A \geq 1$ y $\alpha > 1$ decimos que (Y, μ) es un *espacio de tipo homogéneo* (e.t.h.), o que μ es una *medida duplicante* sobre Y. El término "duplicante" se debe a que en varios textos se toma $\alpha = 2$ en la definición de e.t.h. Notar que para cada $A \geq 1$, si $\alpha \geq 2$ tenemos que

$$\mathcal{D}(\alpha, A) \subseteq \mathcal{D}(2, A) \subseteq \mathcal{D}(\alpha, A^k),$$

si k es un entero tal que $2^k \geq \alpha$. Si $\alpha < 2$ y m es un entero tal que $\alpha^m \geq 2$, entonces

$$\mathcal{D}(\alpha, A^m) \subseteq \mathcal{D}(2, A) \subseteq \mathcal{D}(\alpha, A).$$

Vemos así que el papel del factor α de dilatación del radio no es esencial, si admitimos una constante A posiblemente diferente.

Observar además que si $(Y, \mu) \in \mathcal{E}$ es un espacio de tipo homogéneo, entonces $\mathrm{sop}(\mu) = Y$. En efecto, de la definición de $\mathcal{E}$, tenemos que $\mathrm{sop}(\mu) \subseteq Y$. Para la otra inclusión, si $y \notin \mathrm{sop}(\mu)$ entonces existe un abierto G que contiene a y con $\mu(G) = 0$. Luego existe una bola B en Y para la cual $\mu(B) = 0$, lo cual es imposible.

El siguiente resultado establece que el límite de espacios "uniformemente" de tipo homogéneo conserva la misma propiedad, donde por uniformemente nos referimos a que existe una constante A que vale como constante de duplicación para cada elemento de la sucesión. Más precisamente:

Proposición 39. *Sea $\{(Y_n, \mu_n)\}$ una sucesión en $\mathcal{E}$ tal que $(Y_n, \mu_n) \xrightarrow{\delta} (Y, \mu)$. Si $(Y_n, \mu_n) \in \mathcal{D}(\alpha, A)$ para todo n, entonces existe una constante A' tal que $(Y, \mu) \in \mathcal{D}(\alpha, A')$.*

Demostración. Por la observación hecha luego de la definición de e.t.h., podemos suponer $\alpha = 2$. Sea φ la función continua definida sobre $\mathbb{R}_0^+$ como $\varphi \equiv 1$ en $[0, 1]$, $\varphi \equiv 0$ en $[2, \infty)$, y que es lineal en el intervalo $[1, 2]$. Fijemos $y \in Y$ y $r > 0$. Ya que $Y_n \xrightarrow{\delta_H} Y$, podemos tomar $y_n \in Y_n$ tal que $d(y_n, y) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu(B_d(y, 2r)) &\leq \int \varphi\left(\frac{d(x,y)}{2r}\right) d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \varphi\left(\frac{d(x,y)}{2r}\right) d\mu_n(x) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n\left(B_d\left(y, 4r\right)\right) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n\left(B_d\left(y_n, 5r\right)\right) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} A^4 \mu_n\left(B_d\left(y_n, 5r/16\right)\right) \\
&\leq A^4 \liminf_{n\to\infty} \mu_n\left(B_d\left(y, r/2\right)\right) \\
&\leq A^4 \lim_{n\to\infty} \int \varphi\left(\frac{2d(x,y)}{r}\right) d\mu_n(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= A^4 \int \varphi\left(\frac{2d(x,y)}{r}\right) d\mu(x) \\
&\leq A^4 \mu(B_d(y,r)).
\end{aligned}
$$

□

6. Aproximación uniforme por espacios finitos

Dado un espacio casi-métrico compacto (X,ρ), una métrica d tal que d^ξ es equivalente a ρ para algún número real ξ, y un par $(Y,\mu) \in \mathcal{D}(\alpha, A)$, el objetivo en esta sección es construir una sucesión (S_n, μ_n) de espacios *uniformemente* de tipo homogéneo que converja a (Y,μ) y tal que cada conjunto S_n sea finito. En efecto, denotando

$$\mathcal{F}(\alpha, A) = \{(Y,\mu) \in \mathcal{D}(\alpha, A) : \operatorname{card}(Y) < \infty\},$$

tenemos el siguiente resultado.

Teorema 40. *Dadas constantes $A \geq 1$ y $\alpha > 1$, existe $A' \geq 1$ tal que $\mathcal{F}(\alpha, A')$ es denso en $\mathcal{D}(\alpha, A)$.*

Demostración. Notar primero que es suficiente probar que existe A' tal que $\mathcal{F}(2, A')$ es denso en $\mathcal{D}(2, A)$. Sea entonces $A \geq 1$ dada y fijemos $(Y,\mu) \in \mathcal{D}(2, A)$. Supongamos primero que $\operatorname{diam}(Y) = \sup\{d(x,y) : x, y \in Y\} < 1$. Como μ duplica, (Y,μ) tiene la PHD. Para cada entero no negativo n, sea $S_n = \{x_{n,k} : 1 \leq k \leq K_n\}$ una 10^{-n}-red en Y con respecto a la métrica d, tal que la sucesión $\{S_n\}$ satisface

$$S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq S_{n+1} \subseteq \cdots$$

Sean $P_n = \{T_{n,k} : 1 \leq k \leq K_n\}$ la partición de S_{n+1} y $\preceq$ el orden parcial sobre $\mathcal{A} = \{(n,k) : n \in \mathbb{N}_0, 1 \leq k \leq K_n\}$ definidos como en la Sección 11 del Capítulo 1 con respecto a la métrica d y tomando $\delta = 10^{-1}$. Allí también definimos las familias

$$T^\ell_{n,k} = \{x_{\ell,i} : (\ell, i) \preceq (n,k)\}$$

para $\ell \geq n+1$, y los cubos diádicos

$$Q^n_k = \bigcup_{(\ell,i)\preceq(n,k)} B_d(x_{\ell,i}, 10^{-\ell-1}).$$

En este caso tenemos las siguientes inclusiones

$$S_{n+1} \cap B_d(x_{n,k}, 10^{-n}/2) \subseteq T_{n,k} \subseteq S_{n+1} \cap B_d(x_{n,k}, 10^{-n}), \tag{3.4}$$

y

$$Q^n_k \subseteq T^\ell_{n,k} \subseteq S_\ell \cap B_d(x_{n,k}, 10^{-n+1}/9), \tag{3.5}$$

por lo que la propiedad 3 de los cubos diádicos (Teorema 27) vale con $c = 10/9$.

Construiremos medidas de probabilidad μ_n sobre Y con masa total soportada sobre S_n. Para cada entero no negativo n y cada $1 \leq k \leq K_n$, definimos

$$\mu_n(\{x_{n,k}\}) = \mu(Q_k^n).$$

Notar que de la propiedad 7 de los cubos diádicos podemos concluir que $\mu_n(S_n) = 1$ para todo n. Para ver que $\mu_n \xrightarrow{w*} \mu$, tomemos una función φ continua sobre Y, y sea $\varepsilon > 0$ dado. Por ser Y compacto, φ es uniformemente continua, por lo que existe $\eta > 0$ tal que $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$, para todo $x, y \in Y$ tales que $d(x, y) < \eta$. Por un lado

$$\int_Y \varphi \, d\mu_n = \sum_{k=1}^{K_n} \varphi(x_{n,k})\mu(Q_k^n),$$

y por el otro

$$\int_Y \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^{K_n} \int_{Q_k^n} \varphi \, d\mu.$$

Luego, por la propiedad 3 de los cubos,

$$\left| \int_Y \varphi \, d\mu_n - \int_Y \varphi \, d\mu \right| \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{K_n} \int_{Q_k^n} |\varphi(x_{n,k}) - \varphi(x)| \, d\mu(x) < \varepsilon,$$

eligiendo n suficientemente grande tal que $10^{-n+1}/9 < \eta$.

Por otro lado, es claro que $d_H(S_n, Y) \leq 10^{-n}$, por lo que $S_n \xrightarrow{d_H} Y$. Esto junto a lo anterior implica que $(S_n, \mu_n) \xrightarrow{\delta} (Y, \mu)$.

Sólo resta ver entonces que existe $A' \geq 1$ tal que $(S_n, \mu_n) \in \mathcal{D}(2, A')$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, es decir, que $\{(S_n, \mu_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ es una familia *uniforme* de espacios de tipo homogéneo. Esto será una consecuencia del siguiente lema.

Lema 41. *Sean (X, ρ), d, (Y, μ) y $\{S_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ como antes. Supongamos que para cada n está dada una medida de probabilidad μ_n sobre los borelianos de Y, con soporte S_n. Si la sucesión $\{(S_n, \mu_n) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ satisface*

1. *$\mu_\ell\left(T_{n,k}^\ell\right) = \mu_n(\{x_{n,k}\})$, para todo entero no negativo n, $1 \leq k \leq K_n$ y $\ell \geq n+1$;*
2. *existe una constante C_1 tal que para cada $x_{n,k} \in S_n$ y $x_{n+1,\ell}$ tal que $(n+1, \ell) \preceq (n, k)$, vale que $\mu_n(\{x_{n,k}\}) \leq C_1\mu_{n+1}(\{x_{n+1,\ell}\})$;*
3. *existe una constante C_2 tal que si $x_{n,k}$ y $x_{n,i}$ son puntos en S_n con $d(x_{n,k}, x_{n,i}) < 10^{-n+3}$, entonces $\mu_n(\{x_{n,k})\} \leq C_2\mu_n(\{x_{n,i}\})$,*

entonces existe una constante $\widetilde{A}$ que depende sólo de C_1, C_2 y A, tal que $(S_n, \mu_n) \in \mathcal{D}(2, \widetilde{A})$ para cada entero no negativo n.

Dem. Lema 41. Notar que para $n = 0$, S_0 se reduce al único punto $x_{0,1}$. Luego, ya que μ_0 tiene soporte en S_0, necesariamente se tiene que $\mu_0\left(B_d(x_{0,1}, 2r)\right) = \mu_0\left(B_d(x_{0,1}, r)\right) = \mu_0(\{x_{0,1}\}) = 1$ para todo $r > 0$. Entonces μ_0 es trivialmente duplicante con cualquier $\widetilde{A} \geq 1$.

Para $n \geq 1$, $x \in S_n$, digamos $x = x_{n,k}$ para algún $k = 1, 2, \ldots, K_n$, y $r > 0$, debemos estimar $\mu_n(B_d(x, 2r))$ en términos de $\mu_n(B_d(x, r))$. Observemos que ya que $\operatorname{diam} X < 1$ sólo tenemos que considerar el caso $0 < r < 1$. Dividiremos el análisis en tres casos, de acuerdo con la relación entre r y n:

i. $0 < r \leq 10^{-n}/2$;
ii. $10^{-n}/2 < r \leq 3\,10^{-n+1}$;
iii. $r > 3\,10^{-n+1}$.

Caso i: $0 < r \leq 10^{-n}/2$. Ya que S_n es 10^{-n}-disperso, tenemos que $B_d(x, 2r) \cap S_n = B_d(x, r) \cap S_n = \{x\}$, y cualquier $\widetilde{A} \geq 1$ funciona.

Caso ii: $10^{-n}/2 < r \leq 3\,10^{-n+1}$. Sea $\mathcal{Q}$ el conjunto de índices definido como

$$\mathcal{Q} = \{q \,:\, x_{n-1,q} \in B_d(x, 22r)\}\,.$$

Notar que si $N = N(A)$ es la constante provista por el Lema 4, tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(\mathcal{Q}) &= \operatorname{card}\left(S_{n-1} \cap B_d(x, 22r)\right) \\
&\leq \operatorname{card}\left(S_{n-1} \cap B_d(x, 66\;10^{-n+1})\right) \\
&\leq \operatorname{card}\left(S_{n-1} \cap B_d(x, 2^7 10^{-n+1})\right) \\
&\leq N^7.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ahora probaremos que

$$S_n \cap B_d(x, 2r) \subseteq \bigcup_{q \in \mathcal{Q}} T_{n-1,q}. \tag{3.7}$$

Tomemos $x_{n,i} \in B_d(x, 2r)$, y sea q el único índice en $\{1, 2, \ldots, K_n\}$ tal que $x_{n,i} \in T_{n-1,q}$. Debemos ver que $q \in \mathcal{Q}$. En efecto, de (3.4)

$$\begin{aligned}
d(x_{n-1,q}, x) &\leq d(x_{n-1,q}, x_{n,i}) + d(x_{n,i}, x) \\
&< 10^{-n+1} + 2r \\
&< 20r + 2r \\
&= 22r,
\end{aligned}$$

lo que prueba (3.7). Sea p tal que $x \in T_{n-1,p}$. Si $q \in \mathcal{Q}$, entonces

$$\begin{aligned}
d(x_{n-1,q}, x_{n-1,p}) &\leq d(x_{n-1,q}, x) + d(x, x_{n-1,p}) \\
&< 22r + 10^{-n+1} \\
&< 66\;10^{-n+1} + 10^{-n+1} \\
&< 10^{-n+3},
\end{aligned}$$

y podemos aplicar el Lema 3 para obtener

$$\mu_{n-1}\left(\{x_{n-1,q}\}\right) \leq C_2 \mu_{n-1}\left(\{x_{n-1,p}\}\right), \qquad \text{para todo } q \in \mathcal{Q}.$$

Por lo tanto, usando (3.7), (1), la desigualdad de arriba, (3.6) y (2) en ese orden, obtenemos la desigualdad deseada ya que

$$\begin{aligned}\mu_n(B_d(x,2r)) &\leq \sum_{q\in\mathcal{Q}} \mu_n\left(T_{n-1,q}\right)\\ &= \sum_{q\in\mathcal{Q}} \mu_{n-1}(\{x_{n-1,q}\})\\ &\leq \sum_{q\in\mathcal{Q}} C_2\mu_{n-1}(\{x_{n-1,p}\})\\ &\leq N^7 C_2 \mu_{n-1}(\{x_{n-1,p}\})\\ &\leq N^7 C_2 C_1 \mu_n(\{x\})\\ &\leq N^7 C_2 C_1 \mu_n(B_d(x,r)).\end{aligned}$$

Caso iii: $r > 3\,10^{-n+1}$. Ya que $r<1$, este caso sólo es posible si $n\geq 2$. Sea $0<\ell\leq n-1$ tal que $10^{-\ell} < r/3 \leq 10^{-\ell+1}$, y definamos el conjunto

$$\mathcal{J} = \{j : x_{\ell,j} \in S_\ell \cap B_d(x,3r)\}.$$

Veremos que

$$S_n \cap B_d(x,2r) \subseteq \bigcup_{j\in\mathcal{J}} T^n_{\ell,j}\,.$$

En efecto, tomemos $x_{n,i}\in B_d(x,2r)$ y $x_{\ell,j}$ tales que $x_{n,i}\in T^n_{\ell,j}$. Aplicando (3.5), obtenemos

$$\begin{aligned}d(x_{\ell,j},x) &\leq d(x_{\ell,j},x_{n,i}) + d(x_{n,i},x)\\ &< \frac{10^{-\ell+1}}{9} + 2r\\ &< \frac{10}{27}r + 2r\\ &< 3r,\end{aligned}$$

y así $j\in\mathcal{J}$. Por lo tanto, de (1) tenemos

$$\mu_n(B_d(x,2r)) \leq \sum_{j\in\mathcal{J}} \mu_n\left(T^n_{\ell,j}\right) = \sum_{j\in\mathcal{J}} \mu_\ell(\{x_{\ell,j}\}) = \mu_\ell(B_d(x,3r)). \tag{3.8}$$

Por otro lado,

$$\bigcup_{x_{\ell,i}\in B_d(x,r/2)} T^n_{\ell,i} \subseteq S_n \cap B_d(x,r).$$

En efecto, si $x_{\ell,i}\in B_d(x,r/2)$ y $x_{n,p}\in T^n_{\ell,i}$, entonces aplicando (3.5) nuevamente

$$\begin{aligned}d(x,x_{n,p}) &\leq d(x,x_{\ell,i}) + d(x_{\ell,i},x_{n,p})\\ &< \frac{r}{2} + \frac{10^{-\ell+1}}{9}\\ &< \frac{r}{2} + \frac{10}{27}r\\ &< r.\end{aligned}$$

De la inclusión de arriba obtenemos

$$
\begin{aligned}
\mu_n(B_d(x,r)) &\geq \sum_{x_{\ell,i}\in B_d(x,r/2)} \mu_n\left(T^n_{\ell,i}\right) \\
&= \sum_{x_{\ell,i}\in B_d(x,r/2)} \mu_\ell(\{x_{\ell,i}\}) \qquad (3.9)\\
&= \mu_\ell(B_d(x,r/2)).
\end{aligned}
$$

Luego, de (3.8) y (3.9) el resultado se obtiene con $\widetilde{A} = C_1C_2N^8$ si probamos que

$$\mu_\ell(B_d(x,3r)) \leq C_1C_2N^8\mu_\ell(B_d(x,r/2)). \qquad (3.10)$$

Notar que la situación actual es similar a la considerada en el Caso ii, pero ahora el centro x de la bola no necesariamente pertenece a la red S_ℓ.

Dem. de (3.10). Si definimos

$$\mathcal{Q} = \{q : x_{\ell,q} \in B_d(x,7r)\},$$

$$\mathcal{J} = \{j : x_{\ell-1,j} \in B_d(x,7r)\},$$

tenemos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{card}(\mathcal{Q}) &\leq \operatorname{card}\left(S_\ell \cap B_d(x, 21\,10^{-\ell+1})\right) \\
&\leq \operatorname{card}\left(S_\ell \cap B_d(x, 2^8 10^{-\ell})\right) \\
&\leq N^8.
\end{aligned}
$$

Notar que

$$S_\ell \cap B_d(x,3r) \subseteq \bigcup_{j\in\mathcal{J}} T_{\ell-1,j}.$$

Para probar esta inclusión, tomemos $x_{\ell,i} \in B_d(x,3r)$ y $x_{\ell-1,j}$ tal que $x_{\ell,i} \in T_{\ell-1,j}$. Chequear que $j \in \mathcal{J}$ es equivalente a ver que $x_{\ell-1,j} \in B_d(x,7r)$. En efecto

$$
\begin{aligned}
d(x_{\ell-1,j},x) &\leq d(x_{\ell-1,j},x_{\ell,i}) + d(x_{\ell,i},x) \\
&< 10^{-\ell+1} + 3r \\
&< 7r.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, ya que $x = x_{n,k} \in S_n$, existe un único $p \in \{1,\ldots,K_\ell\}$ tal que $x \in T^n_{\ell,p}$. Con el fin de usar (3) para comparar la medida μ_ℓ de los conjuntos $\{x_{\ell,p}\}$ y $\{x_{\ell,q}\}$ para todo $q \in \mathcal{Q}$, debemos chequear que $d(x_{\ell,p},x_{\ell,q}) < 10^{-\ell+3}$. En efecto, para $q \in \mathcal{Q}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
d(x_{\ell,p},x_{\ell,q}) &\leq d(x_{\ell,p},x) + d(x,x_{\ell,q}) \\
&< \frac{10^{-\ell+1}}{9} + 7r \\
&\leq \frac{10^{-\ell+1}}{9} + 21\,10^{-\ell+1} \\
&< 10^{-\ell+3}.
\end{aligned}
$$

Luego, de (3) obtenemos

$$\mu_\ell(\{x_{\ell,q}\}) \leq C_2\mu_\ell(\{x_{\ell,p}\}), \qquad \text{para todo } q \in \mathcal{Q}.$$

De las consideraciones anteriores, de (1) y de (2), tenemos

$$\begin{aligned}
\mu_\ell(B_d(x,3r)) &\leq \sum_{j\in\mathcal{J}} \mu_\ell\left(T_{\ell-1,j}\right) \\
&= \sum_{j\in\mathcal{J}} \mu_{\ell-1}\left(\{x_{\ell-1,j}\}\right) \\
&\leq C_1 \sum_{q\in\mathcal{Q}} \mu_\ell(\{x_{\ell,q}\}) \\
&\leq C_1C_2 \sum_{q\in\mathcal{Q}} \mu_\ell(\{x_{\ell,p}\}) \\
&= C_1C_2 \operatorname{card}(\mathcal{Q})\mu_\ell(\{x_{\ell,p}\}) \\
&\leq C_1C_2N^8\mu_\ell(\{x_{\ell,p}\}).
\end{aligned}$$

Finalmente, ya que

$$d(x_{\ell,p},x) < \frac{10^{-\ell+1}}{9} < \frac{10}{27}r < \frac{r}{2}$$

tenemos $\mu_\ell(\{x_{\ell,p}\}) \leq \mu_\ell\left(B_d(x,r/2)\right)$, lo que finaliza la demostración de (3.10) y con ello la de lema. $\square$

Resta probar que (S_n,d,μ_n) es una familia uniforme de espacios de tipo homogéneo. Para ello sólo necesitamos chequear que μ_n satisface las condiciones del Lema 41. En efecto, de la propiedad 8 de los cubos diádicos tenemos

$$\mu_\ell(T^\ell_{n,k}) = \sum_{i:x_{\ell,i}\in T^\ell_{n,k}} \mu_\ell(\{x_{\ell,i}\}) = \sum_{i:(\ell,i)\preceq(n,k)} \mu(Q^\ell_i) = \mu_n(\{x_{n,k}\}).$$

para todo n, $1 \leq k \leq K_n$ y $\ell \geq n+1$, y entonces (1) vale.

Para chequear (2), notar que para $x_{n,k} \in S_n$ y $x_{n+1,\ell}$ con $(n+1,\ell) \preceq (n,k)$ se tiene $d(x_{n,k},x_{n+1,\ell}) < 10^{-n}$. Entonces la propiedad 3 de los cubos de Christ implica que $Q^n_k \subseteq B_d(x_{n+1,\ell},10^{-n+1}/4)$. Luego

$$\begin{aligned}
\mu_n(\{x_{n,k}\}) &= \mu(Q^n_k) \\
&\leq \mu(B_d(x_{n+1,\ell},10^{-n+1}/4)) \\
&\leq A^8\mu(B_d(x_{n+1,\ell},10^{-n-2})) \\
&\leq A^8\mu(Q^{n+1}_\ell) \\
&= A^8\mu_{n+1}(\{x_{n+1,\ell}\}),
\end{aligned}$$

y (2) vale con $C_1 = A^8$.

Finalmente, si $x_{n,k}$ y $x_{n,i}$ son puntos en S_n tales que $d(x_{n,k}, x_{n,i}) < 10^{-n+3}$, entonces $Q_k^n \subseteq B_d(x_{n,i}, 101\, 10^{-n+1})$, por lo que

$$\begin{aligned}
\mu_n(\{x_{n,k}\}) &\leq \mu(B_d(x_{n,i}, 101{,}10^{-n+1})) \\
&\leq A^{14}\mu(B_d(x_{n,i}, 10^{-n-1})) \\
&\leq A^{14}\mu(Q_i^n) \\
&= A^{14}\mu_n(\{x_{n,i}\}),
\end{aligned}$$

y obtenemos (3) tomando $C_2 = A^{14}$.

Hemos probado entonces que existe una constante $A' \geq 1$ tal que para todo n vale

$$\mu_n(B_d(x, 2r)) \leq A'\ \mu_n(B_d(x, r)),$$

siempre que $r > 0$ y $x \in S_n$. Por lo tanto $\{(S_n, \mu_n) : n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathcal{F}(2, A')$, lo que termina de probar el resultado cuando $\operatorname{diam}(Y) < 1$. Si $\operatorname{diam}(Y) \geq 1$, definimos $\overline{d} = \frac{d}{2\operatorname{diam}(Y)}$, y aplicamos el razonamiento anterior al espacio $(Y, \overline{d}, \mu)$. □

CAPíTULO 4

Análisis armónico en conjuntos finitos

En el capítulo anterior obtuvimos una forma de aproximarnos a un espacio de tipo homogéneo compacto dado, mediante una sucesión de espacios de tipo homogéneo con constante de duplicación uniforme. Más aún, cada elemento de la sucesión aproximante es un espacio *finito*. En este capítulo centraremos nuestra atención en espacios de este tipo, estudiando problemas clásicos inducidos por el análisis armónico y real. En particular, consideraremos dos operadores básicos: el de Hardy-Littlewood y el de Hilbert. Con los resultados que obtenemos en este capítulo y los del próximo, como aplicación deduciremos las estimaciones conocidas para esos operadores en contextos continuos. Para el caso de la maximal de Hardy-Littlewood discreta, veremos que la técnica usual de cubrimiento se simplifica dado que los procesos de selección involucrados son ahora finitos. Para la transformada de Hilbert usaremos una discretización de un conocido lema de Loomis.

1. Lema de Wiener y la maximal de H-L en conjuntos finitos

Dado $H \in \mathbb{N}$, denotaremos $[1, H]$ al intervalo de los enteros comprendidos entre 1 y H inclusive, es decir, $[1, H] = \{1, 2, \dots, H\}$. Sea ρ una casi-métrica en $[1, H]$ con constante triangular Λ. Como siempre denotaremos con $B_\rho(i, r)$ a la ρ-bola con centro $i \in [1, H]$ y radio $r > 0$, es decir

$$B_\rho(i, r) = \{j \in [1, H] : \rho(i, j) < r\}.$$

Probaremos el siguiente lema de tipo Wiener en este contexto.

LEMA 42 (Lema de Wiener en $(\{1, \dots, H\}, \rho)$). *Sea E un subconjunto de $[1, H]$, y sea $r : E \to \mathbb{R}^+$ una función real positiva en E dada. Entonces existe un subconjunto F de E tal que*

1. $B_\rho(i, r(i)) \cap B_\rho(j, r(j)) = \emptyset$ *para todo $i, j \in F$ con $i \neq j$.*
2. $E \subseteq \bigcup_{i \in F} B_\rho(i, 2\Lambda r(i))$.

DEMOSTRACIÓN. Definamos $E_1 = E$, $r_1 = \max_{i \in E_1} r(i)$, y sea i_1 un punto en el que este máximo se alcanza. Definamos ahora $E_2 = E_1 \backslash B_\rho(i_1, 2\Lambda r(i_1))$. Si $E_2 \neq \emptyset$, sea $r_2 = \max_{i \in E_2} r(i)$ y fijemos un punto i_2 en el que este máximo se alcanza. Notar que $r_2 \leq r_1$. De esta forma construimos inductivamente conjuntos $E_k = E_{k-1} \backslash B_\rho(i_{k-1}, 2\Lambda r(i_{k-1}))$, y si $E_k \neq \emptyset$ elegimos un punto $i_k \in E_k$ tal que $r(i_k) = r_k = \max_{i \in E_k} r(i)$. Notar que $r_j \leq r_k$ si $k \leq j$. El proceso es finito pues E es un conjunto finito. Luego existe un número natural m tal que $E_{m+1} = \emptyset$. Pero por definición $E_{m+1} = E \backslash \bigcup_{k=1}^m B_\rho(i_k, 2\Lambda r_k)$, por lo que se tiene que $E \subseteq \bigcup_{k=1}^m B_\rho(i_k, 2\Lambda r_k)$.

Entonces definiendo $F = \{i_i, i_2, \ldots, i_m\}$, sólo resta probar que para cada elección $i_k, i_j \in F$ tales que $i_k \neq i_j$, se tiene que $B_\rho(i_k, r_k) \cap B_\rho(i_j, r_j) = \emptyset$. En efecto, supongamos que existe un punto $z \in B_\rho(i_k, r_k) \cap B_\rho(i_j, r_j)$, y que k es menor que j. Luego

$$\rho(i_k, i_j) \leq \Lambda(\rho(i_k, z) + \rho(z, i_j)) < 2\Lambda r_k.$$

Pero entonces $i_j \in B_\rho(i_k, 2\Lambda r_k)$, lo cual es absurdo por la definición de E_j. $\square$

Este lema nos permite demostrar una versión discreta del Teorema de Hardy-Littlewood para cualquier medida finita ν definida en las partes de $[1, H]$ para la cual cada punto $i \in [1, H]$ tenga medida $\nu(\{i\}) = \nu_i > 0$. Notemos primero que toda ν de este tipo es duplicante con respecto a las ρ-bolas en $[1, H]$. En efecto, trivialmente

$$\begin{aligned} \nu(B_\rho(i, 2r)) &= \frac{\nu(B_\rho(i, 2r))}{\nu(B_\rho(i, r))}\nu(B_\rho(i, r)) \\ &\leq \frac{\nu([1, H])}{\text{mín}\{\nu_j : j \in [1, H]\}}\nu(B_\rho(i, r)) \end{aligned}$$

Así, hemos probado que el conjunto

$$\mathcal{A} = \{A : \nu(B_\rho(i, 2r)) \leq A\nu(B_\rho(i, r)) \text{ para todo } r > 0 \text{ y todo } i \in [1, H]\}$$

es no vacío.

Sea $f : [1, H] \to \mathbb{R}$ una función (sucesión) cualquiera. Denotamos $f(i)$ como f_i para cada $i \in [1, H]$, y definimos la función (sucesión) maximal de Hardy-Littlewood de f como la aplicación $Mf : [1, H] \to \mathbb{R}$, $Mf = ((Mf)_1, (Mf)_2 \ldots, (Mf)_H)$ dada por

$$(Mf)_j = Mf(j) = \max_{r>0} \frac{\sum_{\{i:\rho(i,j)<r\}} |f_i|\nu_i}{\sum_{\{i:\rho(i,j)<r\}} \nu_i}.$$

Notar que hemos escrito un máximo en la definición anterior ya que el supremo es realmente un máximo, pues la función de r definida para cada j fijo como el cociente, toma un número finito de valores reales no negativos ya que el conjunto de las partes de $[1, H]$, y por consiguiente el de las ρ-bolas, es finito.

Teorema 43 (Hardy-Littlewood en $(\{1, \ldots, H\}, \rho, \nu)$). *Para cada $A \in \mathcal{A}$ se tiene que la desigualdad de tipo débil* $(1, 1)$

$$\sum_{\{j:(Mf)_j>\lambda\}} \nu_j \leq \frac{A^{\ell+1}}{\lambda} \sum_{i=1}^{H} |f_i|\nu_i$$

vale con ℓ tal que $2^\ell \geq \Lambda$, para toda $f : [1, H] \to \mathbb{R}$ y para todo $\lambda > 0$.

Demostración. Fijemos $A \in \mathcal{A}$, $f : [1, H] \to \mathbb{R}$ y $\lambda > 0$. Sea E_λ el subconjunto de $[1, H]$ definido como

$$E_\lambda = \{j \in [1, H] : (Mf)_j > \lambda\}.$$

Notar que a cada $j \in E_\lambda$ le podemos asignar un valor $r_j = r_j(f) > 0$ tal que

$$\sum_{\{i:\rho(j,i)<r_j\}} \nu_i < \frac{1}{\lambda} \sum_{\{i:\rho(j,i)<r_j\}} |f_i|\nu_i.$$

Por el Lema 42 existe un subconjunto $\{j_1, \ldots, j_m\}$ de E_λ tal que las bolas $B_\rho(j_k, r_{j_k})$ son disjuntas dos a dos, para $k = 1, \ldots, m$, y $E_\lambda \subseteq \bigcup_{k=1}^m B_\rho(j_k, 2\Lambda r_{j_k})$. Por lo tanto, si ℓ es un entero positivo tal que $2^\ell \geq \Lambda$, tenemos

$$\begin{aligned}
\nu\left(E_\lambda\right) &\leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{\{i:\rho(j_k,i)<2\Lambda r_{j_k}\}} \nu_i \\
&\leq A^{\ell+1} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\{i:\rho(j_k,i)<r_{j_k}\}} \nu_i \\
&< \frac{A^{\ell+1}}{\lambda} \sum_{k=1}^{m} \sum_{\{i:\rho(j_k,i)<r_{j_k}\}} |f_i|\nu_i \\
&\leq \frac{A^{\ell+1}}{\lambda} \sum_{i=1}^{H} |f_i|\nu_i.
\end{aligned}$$

□

2. El lema de Loomis y la transformada de Hilbert en $\mathbb{Z}$

Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ y denotemos el valor de f en $i \in \mathbb{Z}$ por f_i. Si $f_i = 0$ salvo un número finito de índices $i \in \mathbb{Z}$, definimos la **transformada de Hilbert** de f sobre $\mathbb{Z}$ como

$$(\mathcal{H}f)_j = \mathcal{H}f(j) = \sum_{i \neq j} \frac{f_i}{j-i}\,.$$

En particular, si E es un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$ tendremos que

$$(\mathcal{H}\mathcal{X}_E)_j = \sum_{\substack{i\in E\\ i\neq j}} \frac{1}{j-i}\,.$$

El siguiente resultado establece el tipo débil restringido de $\mathcal{H}$ en $\mathbb{Z}$ equipado con la medida que cuenta puntos, o equivalentemente, muestra que $\mathcal{H}$ es de tipo débil sobre sumas finitas de deltas de Dirac.

LEMA 44. *La transformada de Hilbert sobre $\mathbb{Z}$ es de tipo débil $(1,1)$ restringido con respecto a la medida que cuenta puntos. En otras palabras, existe una constante $C > 0$ tal que para cada conjunto finito de enteros $E = \{k_1, k_2 \ldots, k_H\}$ se tiene que*

$$\operatorname{card}\left(\left\{ j \in \mathbb{Z} : \left| \sum_{\substack{k\in E\\ k\neq j}} \frac{1}{j-k} \right| > \lambda \right\}\right) \leq C\,\frac{H}{\lambda}$$

para todo $\lambda > 0$.

Para demostrar el resultado anterior haremos uso del lema de Loomis ([**25**]) cuya demostración puede hallarse también en [**22**].

Lema 45 (Lema de Loomis). *Sean $m_1, m_2, \ldots, m_H$ constantes positivas y $x_1 < x_2 < \ldots < x_H$ números reales dados. Existe una constante C tal que para todo $\lambda > 0$ la función*

$$g(x) = \sum_{i=1}^{H} \frac{m_i}{x - x_i}$$

satisface

$$m\{x \in \mathbb{R} : |g(x)| > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda} \sum_{i=1}^{H} m_i,$$

donde m denota la medida de Lebesgue.

Dem. del Lema 44. Dado un conjunto finito de enteros $E = \{k_1, k_2 \ldots, k_H\}$, sea $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ definida como $f(j) = \mathcal{X}_E(j)$. Supondremos $k_1 < k_2 < \ldots < k_H$. Dado $\lambda > 0$ llamamos E^1_λ al conjunto $\{j \in \mathbb{Z} : (\mathcal{H}f)_j > \lambda\}$ y E^2_λ al conjunto $\{j \in \mathbb{Z} : (\mathcal{H}f)_j < -\lambda\}$. Por razones de simetría basta probar que

$$\operatorname{card}\left(E^1_\lambda\right) \leq C\,\frac{H}{\lambda}.$$

Por definición de $\mathcal{H}f$ tenemos que $\mathcal{H}f(k_1) = \sum_{i=2}^{H} \frac{1}{k_1 - k_i} < 0$, por lo que si $j \in E^1_\lambda$ debe ocurrir que $j > k_1$. Notemos además que si $j \in E^1_\lambda$ entonces el intervalo $(j-1, j)$ está contenido en el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : g(x) > \lambda\}$, donde $g(x) = \sum_{i=1}^{H} \frac{1}{x - k_i}$. Esta conclusión se sigue de la monotonía de g en cada intervalo (k_i, k_{i+1}), que es también la propiedad fundamental para la prueba del Lema 45, y del hecho que $(j-1, j)$ está contenido en algún intervalo de la forma (k_i, k_{i+1}). Por consiguiente, aplicando el lema de Loomis obtenemos

$$\operatorname{card}(E^1_\lambda) = m\left(\bigcup_{j \in E^1_\lambda} (j-1, j)\right) \leq m\{x \in \mathbb{R} : g(x) > \lambda\} \leq \frac{C}{\lambda} H\,.$$

□

Para $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ que se anula salvo en una cantidad finita de puntos, consideremos ahora la **función maximal de Hilbert truncada** definida en $\mathbb{Z}$ como

$$(\mathcal{H}^* f)(j) = (\mathcal{H}^* f)_j = \sup_{0<a<b<\infty} \left| \sum_{a<|j-i|\leq b} \frac{f_i}{j-i} \right|.$$

En el Capítulo 5 haremos uso del siguiente resultado, el cual establece el tipo débil $(1,1)$ de $\mathcal{H}^*$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en $\mathbb{Z}$ con respecto a la medida que cuenta puntos.

Teorema 46. *Existe una constante $C > 0$ tal que para todo conjunto finito de enteros distintos $k_1, k_2, \ldots, k_H$ y todo $\lambda > 0$ se tiene que*

$$\operatorname{card}\left(\left\{ j \in \mathbb{Z} : \sup_{0<a<b<\infty} \left| \sum_{a<|j-i|\leq b} \frac{\mathcal{X}_E(i)}{j-i} \right| > \lambda \right\}\right) \leq C\,\frac{H}{\lambda},$$

donde $E = \{k_1, k_2, \ldots, k_H\}$.

Antes de probar este resultado, enunciaremos un lema de cubrimiento cuya demostración puede hallarse en el libro de Garsia [**22**].

LEMA 47. *Dada cualquier familia finita $\mathscr{A}$ de intervalos en $\mathbb{R}$, siempre es posible seleccionar una subfamilia $I_1, I_2 \dots, I_n$ de intervalos disjuntos tales que*

$$\mu\left(\bigcup_{I\in\mathscr{A}} I\right) \leq 2\sum_{\ell=1}^{n} \mu(I_\ell),$$

para toda medida μ sobre $\mathbb{R}$.

Utilizaremos el lema anterior para demostrar el Teorema 46, siguiendo la idea de la prueba del Teorema 4.3.1 del libro de Garsia mencionado.

DEM. TEOREMA 46. Notar que es suficiente probar que el resultado vale para la maximal de Hilbert no truncada en el infinito $\widetilde{\mathcal{H}}^*$, definida en $\mathbb{Z}$ como

$$(\widetilde{\mathcal{H}}^* f)(j) = \sup_{a>0}\left|\sum_{|j-i|>a} \frac{f_i}{j-i}\right|,$$

pues para cada entero j se tiene que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{H}^* f)(j) &= \sup_{0<a<b<\infty}\left|\sum_{|j-i|>a} \frac{f_i}{j-i} - \sum_{|j-i|>b} \frac{f_i}{j-i}\right| \\
&\leq \sup_{a>0}\left|\sum_{|j-i|>a} \frac{f_i}{j-i}\right| + \sup_{b>0}\left|\sum_{|j-i|>b} \frac{f_i}{j-i}\right| \\
&= 2(\widetilde{\mathcal{H}}^* f)(j).
\end{aligned}$$

Sean $E = \{k_1, k_2, \dots, k_H\}$ un conjunto finito de números enteros y $\lambda > 0$ dados. Debemos ver que existe una constante C que no depende de E ni de λ tal que

$$\operatorname{card}\left(\left\{j \in \mathbb{Z} : \sup_{a>0}\left|\sum_{|j-i|>a} \frac{\mathcal{X}_E(i)}{j-i}\right| > \lambda\right\}\right) \leq C\,\frac{H}{\lambda}.$$

Notar que podemos suponer que el supremo se toma sobre todos los números naturales. Definimos

$$E^+ = \left\{j \in \mathbb{Z} : \sup_{a\in\mathbb{N}} \sum_{|j-i|>a} \frac{\mathcal{X}_E(i)}{j-i} > \lambda\right\}$$

y

$$E^- = \left\{j \in \mathbb{Z} : \sup_{a\in\mathbb{N}} \sum_{|j-i|>a} \frac{\mathcal{X}_E(i)}{j-i} < -\lambda\right\}.$$

Afirmamos que ambos conjuntos son acotados. En efecto, denotemos por $k_{\text{mín}}$ al elemento mínimo de E y por $k_{\text{máx}}$ al máximo. Entonces $k_{\text{mín}}$ es una cota inferior para E^+, y todo elemento de E^+ debe ser menor que $k_{\text{máx}} + \frac{H}{\lambda}$. Análogamente E^- está contenido en $\left(k_{\text{mín}} - \frac{H}{\lambda}, k_{\text{máx}}\right)$.

Para cada $j \in E^+$ existe $a = a(j) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{|j-i|>a} \frac{\mathcal{X}_E(i)}{j-i} > \lambda.$$

Luego $\mathscr{A} = \{I_{a(j)} = [j - a(j), j + a(j)] : j \in E^+\}$ es un cubrimiento finito de E^+ por intervalos. Por el Lema 47 existe una sublista $\{I_k = I_{a(j_k)} : k = 1, 2, \ldots, n\}$ de intervalos disjuntos tales que

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{j \in E^+} I_{a(j)}\right) \leq 2 \sum_{k=1}^{n} \operatorname{card}(I_k), \tag{4.1}$$

y además satisfacen

$$\sum_{i \in I_k^c} \frac{\mathcal{X}_E(i)}{j_k - i} > \lambda,$$

donde j_k es el centro del intervalo I_k. Definamos sobre $\mathbb{Z}$ las funciones

$$g(j) = \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ i \neq j}} \frac{\mathcal{X}_E(i)}{j-i}, \qquad g_k(j) = \sum_{\substack{i \in I_k \\ i \neq j}} \frac{\mathcal{X}_E(i)}{j-i}\,,$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$. La función

$$g(j) - g_k(j) = \sum_{i \in I_k^c} \frac{\mathcal{X}_E(i)}{j-i}$$

es decreciente en cada I_k, y es mayor que λ en $j = j_k$. Por lo tanto es también mayor que λ en $I_k^- = [j_k - a(j_k), j_k]$, la mitad izquierda del intervalo I_k. Luego

$$I_k^- \subseteq \{j \in I_k : g(j) > \lambda/2\} \cup \{j \in I_k : g_k(j) < -\lambda/2\},$$

para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{card}(I_k^-) \leq \operatorname{card}\left(\{j \in \mathbb{Z} : g(j) > \lambda/2\}\right) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{card}\left(\{j \in \mathbb{Z} : g_k(j) < -\lambda/2\}\right).$$

Aplicando el Lema 44 obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{card}(I_k^-) \leq 2C\frac{H}{\lambda} + \frac{2C}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{card}(E \cap I_k) \leq 4C\frac{H}{\lambda}\,,$$

pues los intervalos I_k son disjuntos. Combinado esta desigualdad con (4.1) obtenemos

$$\operatorname{card}(E^+) \leq 2 \sum_{k=1}^{n} \operatorname{card}(I_k) \leq 4 \sum_{k=1}^{n} \operatorname{card}(I_k^-) \leq 16C\frac{H}{\lambda}\,.$$

De forma análoga obtenemos que

$$\operatorname{card}(E^-) \leq 16C\frac{H}{\lambda}\,,$$

y el resultado se obtiene del hecho que $\operatorname{card}(E) \leq \operatorname{card}(E^+) + \operatorname{card}(E^-)$. □

CAPíTULO 5

Tipo débil $(1,1)$ de operadores maximales II: discretización del espacio

Con el objeto de plantear precisamente el problema considerado en este capítulo y de describir los resultados obtenidos, comencemos estudiando un ejemplo concreto en el que a la discretización de M. de Guzmán se agrega una discretización del espacio. Dicho en forma no rigurosa, este proceso de aproximación del espacio consiste en tomar las combinaciones lineales de deltas de Dirac dentro de redes fijas anidadas y crecientes a todo el espacio X. Consideremos el espacio $(\mathbb{R}, |\cdot|, m)$, donde $|\cdot|$ representa la distancia usual y m la medida de Lebesgue, y las redes $S_j = 2^{-j}\mathbb{Z}$ para $j \in \mathbb{N}_0$. Tomemos ν_0 como la medida que cuenta puntos en S_0 y para $j \geq 1$ y $E \subseteq S_j$, sea $\nu_j(E) = 2^{-j}\nu_0(2^j E)$. Sea φ la función continua que vale constantemente 1 en el intervalo $[-1,1]$, se anula fuera de $[-2,2]$ y se completa en forma lineal en los intervalos $[-2,-1]$ y $[1,2]$. Para cada $\ell \in \mathbb{Z}$ y para $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, definimos

$$k_\ell(x,y) = 2^\ell \varphi\left(2^\ell(x-y)\right).$$

Estos núcleos son continuos pero no tienen soporte compacto. Sin embargo satisfacen las hipótesis del Teorema 32. Además para $f \in L^1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
K^*f(x) &= \sup_{\ell\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} k_\ell(x,y) f(y)\, dy \right| \\
&= \sup_{\ell\in\mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} 2^\ell \varphi\left(2^\ell(x-y)\right) f(y)\, dy \right| \\
&\leq \sup_{\ell\in\mathbb{Z}} 2^\ell \int_{B(x,2^{-\ell+1})} |f(y)|\, dy \\
&\leq C\, Mf(x),
\end{aligned}$$

siendo Mf la maximal de Hardy-Littlewood de f. Para la última desigualdad hemos usado que la maximal de H-L es comparable a la maximal obtenida tomando sólo los radios diádicos. Ya que M es de tipo débil $(1,1)$, se tiene que K^* también lo es. Sin embargo, veremos que K^{j^*} no es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (S_j, ν_j) para ningún j, donde K^{j^*} denota la restricción de K^* a (S_j,ν_j). Más precisamente

$$(K^{j^*} f)(x_{j,n}) = \sup_{\ell} \left| \int_{S_j} k_\ell(x_{j,n}, y) f(y)\, d\nu_j(y) \right|.$$

Comencemos probando que K^{0^*} no es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (S_0,ν_0), es decir, debemos ver que no puede existir una constante C tal que para todo $\lambda > 0$, todo número natural H y todo conjunto $A_H^0 \subseteq S_0$ de cardinal H, se cumpla que

$$\operatorname{card}\left(\left\{n \in \mathbb{Z} : \sup_{\ell} \sum_{m \in A_H^0} k_\ell(n,m) > \lambda\right\}\right) \leq C\,\frac{H}{\lambda}.$$

Fijemos A_H^0. Ya que

$$k_\ell(n,m) \geq 2^\ell \mathcal{X}_{[-2^{-\ell},2^{-\ell}]}(n-m),$$

es suficiente con estudiar

$$\operatorname{card}(\{n \in \mathbb{Z} : g(n) > \lambda\}),$$

siendo

$$g(n) = \sup_{\ell} 2^\ell \sum_{m \in A_H^0} \mathcal{X}_{[-2^{-\ell},2^{-\ell}]}(n-m).$$

Notar que si $n \in A_H^0$ entonces $\sum_{m \in A_H^0} \mathcal{X}_{[-2^{-\ell},2^{-\ell}]}(n-m) \geq 1$ para todo ℓ. Luego $g(n) = \infty$ para todo $n \in A_H^0$ y no puede existir una constante C tal que

$$\operatorname{card}(\{n \in \mathbb{Z} : g(n) > \lambda\}) \leq C\,\frac{H}{\lambda}$$

para todo $\lambda > 0$, pues si una tal C existiera bastaría tomar $\lambda > 2C$ para obtener una contradicción.

El hecho que K^{j^*} no es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (S_j, ν_j) para ningún j se obtiene de la homogeneidad de los núcleos k_ℓ, como lo establece el siguiente resultado.

AFIRMACIÓN 1. *Dado $j > 0$, K^{j^*} es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (S_j, ν_j) si y sólo si K^{0^*} es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (S_0, ν_0).*

DEMOSTRACIÓN. Notar que $x \in S_j$ si y sólo si existe un único $n \in S_0$ tal que $x = 2^{-j}n$. Luego, si A_H^k denota un subconjunto de S_k de cardinal H, para $x \in S_j$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\sup_{\ell} \sum_{y \in A_H^j} k_\ell(x,y) &= \sup_{\ell} \sum_{m \in A_H^0} k_\ell(2^{-j}n, 2^{-j}m) \\
&= 2^j \sup_{\ell} \sum_{m \in A_H^0} k_{\ell-j}(n,m) \\
&= 2^j \sup_{\ell-j} \sum_{m \in A_H^0} k_{\ell-j}(n,m) \\
&= 2^j \sup_{\ell} \sum_{m \in A_H^0} k_\ell(n,m).
\end{aligned}$$

Luego

$$\nu_j\left(\left\{x\in S_j:\sup_\ell\sum_{y\in A_H^j}k_\ell(x,y)>\lambda\right\}\right)=2^{-j}\nu_0\left(\left\{n\in S_0:\sup_\ell\sum_{y\in A_H^j}k_\ell(x,y)>\lambda\right\}\right)$$
$$=2^{-j}\nu_0\left(\left\{n\in S_0:\sup_\ell\sum_{m\in A_H^0}k_\ell(n,m)>2^{-j}\lambda\right\}\right),$$

de lo que se deduce la afirmación. □

El problema en la discretización precedente que impide la validez del tipo débil del operador maximal discreto, está precisamente en que la diagonal $n=m$ mide positivo en el contexto discreto, mientras que esto no ocurre en el contexto continuo al que pretendemos aproximarnos. Esto nos lleva a pensar qué ocurre con la función h definida para $n\in\mathbb{Z}$ como

$$h(n)=\sup_\ell 2^\ell\sum_{\substack{m\in A_H^0\\ m\neq n}}\mathcal{X}_{[-2^{-\ell+1},2^{-\ell+1}]}(n-m).$$

Nos preguntamos si existirá una constante C tal que para todo natural H, A_H^0 y $\lambda>0$ tengamos

$$\operatorname{card}(\{n\in\mathbb{Z}:h(n)>\lambda\})\le C\,\frac{H}{\lambda}\,.$$

En efecto, para n fijo observar que

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m\in A_H^0\\ m\neq n}}\mathcal{X}_{\left[-2^{-\ell+1},2^{-\ell+1}\right]}(n-m)&=\sum_{\substack{m\in A_H^0\\ m\neq n}}\mathcal{X}_{\left[n-2^{-\ell+1},n+2^{-\ell+1}\right]}(m)\\&=\operatorname{card}\Big((A_0^H-\{n\})\cap\Big[n-2^{-\ell+1},n+2^{-\ell+1}\Big]\Big).\end{aligned}$$

Entonces fijado A_H^0 definimos para cada $\lambda>0$

$$E_\lambda=\left\{n\in\mathbb{Z}:\sup_\ell 2^\ell\operatorname{card}\Big((A_0^H-\{n\})\cap\Big[n-2^{-\ell+1},n+2^{-\ell+1}\Big]\Big)>\lambda\right\}.$$

Ya que $[-2^{-\ell+1},2^{-\ell+1}]\subset[-1/2,1/2]$ cuando $\ell\ge 2$, tenemos que en tal caso

$$\sum_{\substack{m\in A_H^0\\ m\neq n}}\mathcal{X}_{\left[-2^{-\ell+1},2^{-\ell+1}\right]}(n-m)=0\,.$$

Esto nos permite escribir

$$E_\lambda=\left\{n\in\mathbb{Z}:\sup_{\ell\le 1}2^\ell\operatorname{card}\Big((A_0^H-\{n\})\cap\Big[n-2^{-\ell+1},n+2^{-\ell+1}\Big]\Big)>\lambda\right\}.$$

Luego para cada $n\in E_\lambda$ existe un entero $\ell(n)\le 1$ tal que

$$2^{\ell(n)}\operatorname{card}\Big((A_0^H-\{n\})\cap\Big[n-2^{-\ell(n)+1},n+2^{-\ell(n)+1}\Big]\Big)>\lambda.$$

La familia $\left\{[n-2^{-\ell(n)+1}, n+2^{-\ell(n)+1}] : n \in E_\lambda\right\}$ es claramente un cubrimiento del conjunto E_λ, y además es finito pues E_λ lo es. Esto se deduce del hecho que

$$\sup_{\ell\leq 1} 2^\ell \mathrm{card}\Big((A_0^H - \{n\}) \cap \Big[n-2^{-\ell+1}, n+2^{-\ell+1}\Big]\Big)$$

tiende a cero cuando $|n| \to \infty$. Entonces por el Lema 47 existe una subfamilia $\{I_{n_j} : j \in J\}$ de intervalos disjuntos tal que

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{n\in E_\lambda}\Big[n-2^{-\ell(n_j)+1}, n+2^{-\ell(n_j)+1}\Big]\right) \leq 2\sum_{j\in J}\mathrm{card}(I_j).$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mathrm{card}(E_\lambda) &\leq 2\sum_{j\in J}\mathrm{card}(I_j) \\
&\leq 2\sum_{j\in J} 1 + 2^{-\ell(n_j)+2} \\
&\leq 12\sum_{j\in J} 2^{-\ell(n_j)} \qquad [\text{ya que } \ell \leq 1] \\
&\leq \frac{12}{\lambda}\sum_{j\in J}\mathrm{card}\Big((A_H^0 - \{n\}) \cap I_j\Big) \\
&\leq \frac{12}{\lambda}\sum_{j\in J}\mathrm{card}\Big(A_H^0 \cap I_j\Big) \\
&\leq 12\,\frac{H}{\lambda},
\end{aligned}$$

que prueba lo que queríamos con $C = 12$. Notar ahora que

$$k_\ell(n,m) \leq 2^\ell \mathcal{X}_{[-2^{-\ell+1}, 2^{-\ell+1}]}(n-m),$$

por lo que para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\sup_\ell 2^\ell \sum_{\substack{m\in A_H^0 \\ m\neq n}} k_\ell(n,m) \leq h(n)\,,$$

y por lo tanto para todo H finito y todo $\lambda > 0$ se tiene que

$$\mathrm{card}\left(\left\{ n\in\mathbb{Z} : \sup_\ell \sum_{\substack{m\in A_H^0 \\ m\neq n}} k_\ell(n,m) > \lambda \right\}\right) \leq 12\,\frac{H}{\lambda}\,,$$

siendo A_0^H cualquier subconjunto de $\mathbb{Z}$ con cardinal H. De la Afirmación 1 se deduce que si $\mathcal{K}^{j^*}$ se define sobre S_j como

$$(\mathcal{K}^{j^*} f)(x) = \sup_\ell \left| \int_{S_j - \{x\}} k_\ell^j(x_{j,n}, y) f(y)\, d\nu_j(y) \right|$$

entonces $\mathcal{K}^{j^*}$ es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (S_j, ν_j) *uniformemente* j. En la Sección 1 nos preguntamos si ésto es suficiente para afirmar que K^* es de tipo débil $(1, 1)$ sobre (X, ν), mientras que es la Sección 2 nos ocupamos de las condiciones necesarias para el tipo débil $(1, 1)$ de K^* cuando las medidas aproximantes ν_j están relacionadas con la medida límite ν como en la Sección 6 del Capítulo 3.

1. Condición suficiente para el tipo débil $(1, 1)$

Sea (X, ρ, ν) es un espacio de medida como en el Teorema 30, es decir, un espacio casi-métrico sin puntos aislados con una medida ν tal que $d\nu = g\, d\mu$, donde $g \in L^1_{loc}(X, \rho, \mu)$ y (X, ρ, μ) es un espacio de tipo homogéneo. Dado $\alpha > 1$ fijo, para cada $j \in \mathbb{N}_0$, sea $S_j = \{x_{j,n} : n \in I_j\}$ una α^{-j}-red en X, tal que sucesión $\{S_j\}$ satisface

$$S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_j \subseteq S_{j+1} \subseteq \cdots ,$$

donde $I_j = \{1, 2, \ldots, i_j\}$ denota un intervalo inicial de $\mathbb{N}$, el cual podría ser todo $\mathbb{N}$. Sea $\{\nu_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de medidas de Borel regulares sobre X tales que $\mathrm{sop}(\nu_j) \subseteq S_j$ y $\nu_j \xrightarrow{w*} \nu$. Para cada j, consideremos ahora a (S_j, ρ, ν_j) como un espacio casi-métrico con medida, denotemos por k^j_ℓ a la restricción de k_ℓ a $S_j \times S_j$, y definamos

$$K^j_\ell f(x_{n,j}) = \int k^j_\ell(x_{j,n}, y) f(y)\, d\nu_j(y)\,,$$

$$(K^{j^*} f)(x_{j,n}) = \sup_\ell \left| K^j_\ell f(x_{n,j}) \right| = \sup_\ell \left| \int k^j_\ell(x_{j,n}, y) f(y)\, d\nu_j(y) \right| .$$

Si $\{k_\ell\}$ una sucesión de núcleos *continuos y con soporte compacto* en $X \times X$, entonces tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 48. *K^* es de tipo débil $(1, 1)$ en (X, ν) si K^{j^*} es de tipo débil $(1, 1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (S_j, ν_j) uniformemente en j. En otras palabras, K^* es de tipo débil $(1, 1)$ en (X, ν) si existe $C > 0$ tal que para cada conjunto finito de puntos distintos $x_{j,n_1}, x_{j,n_2}, \ldots, x_{j,n_H} \in S_j$ y para todo $\lambda > 0$, tenemos*

$$\nu_j \left(\left\{ x_{j,n} \in S_j : \sup_{\ell\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i=1}^{H} k_\ell(x_{j,n}, x_{j,n_i}) \right| > \lambda \right\} \right) \leq C\, \frac{H}{\lambda},$$

para todo j.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 30 del Capítulo 2, basta probar que para todo conjunto finito de puntos distintos $x_1, x_2, \ldots, x_H \in X$ y para todo $\lambda > 0$, si $f = \sum_{i=1}^{H} \delta_i$, entonces

$$\begin{aligned} \nu\left(\{x \in X : K^* f(x) > \lambda\}\right) &= \nu \left(\left\{ x \in X : \sup_{\ell\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i=1}^{H} k_\ell(x, x_i) \right| > \lambda \right\} \right) \\ &\leq C\, \frac{H}{\lambda}\,. \end{aligned}$$

Si para un número natural fijo N llamamos, como en el Capítulo 2, $K^*_N f(x) = \max_{1\leq\ell\leq N} |K_\ell f(x)|$, es suficiente probar que para cada N se tiene que

$$\nu\left(\{x \in X : K^*_N f(x) > \lambda\}\right) \leq C\, \frac{H}{\lambda}\,,$$

donde C no depende de N. Tomemos entonces un N fijo. Ya que X no posee puntos aislados, para cada $x_i \in X$ podemos elegir b_i en $\bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ tan cercano a x_i como se desee, y de tal forma que $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_H\}$ resulte una colección de puntos todos diferentes entre sí. Para cada ℓ fijo escribimos

$$\begin{aligned} K_\ell f(x) &= \sum_{i=1}^{H} k_\ell(x, x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{H} [k_\ell(x, x_i) - k_\ell(x, b_i)] + \sum_{i=1}^{H} k_\ell(x, b_i). \end{aligned}$$

Luego para cada α tal que $0 < \alpha < \lambda$, tenemos que

$$\begin{aligned} \nu\left(\{x \in X : K_N^* f(x) > \lambda\}\right) &\leq \nu\left(\left\{x \in X : \max_{1\leq \ell \leq N} \left|\sum_{i=1}^{H} [k_\ell(x, x_i) - k_\ell(x, b_i)]\right| > \alpha\right\}\right) \\ &+ \nu\left(\left\{x \in X : \max_{1\leq \ell \leq N} \left|\sum_{i=1}^{H} k_\ell(x, b_i)\right| > \lambda - \alpha\right\}\right) \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Veamos primero que

$$I_2 \leq C \, \frac{H}{\lambda - \alpha} \,,$$

para lo que definimos los siguientes conjuntos:

$$E = \left\{x \in X : \max_{1\leq \ell \leq N} \left|\sum_{i=1}^{H} k_\ell(x, b_i)\right| > \lambda - \alpha\right\} ,$$

$$E_j = E \cap S_j = \left\{x_{j,k} \in S_j : \max_{1\leq \ell \leq N} \left|\sum_{i=1}^{H} k_\ell(x_{j,k}, b_i)\right| > \lambda - \alpha\right\} .$$

Lo que debemos ver entonces es que $\nu(E) \leq C \, \frac{H}{\lambda - \alpha}$. En efecto, si j_0 es tal que $b_i \in S_{j_0}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, H$, por hipótesis tenemos que

$$\nu_j\left(E_j\right) \leq C \, \frac{H}{\lambda - \alpha}, \qquad \text{si } j \geq j_0.$$

Por otra parte, por ser E abierto, dado $\varepsilon > 0$ existe $j_1 = j_1(\varepsilon)$ tal que

$$\nu(E) < \nu_j(E) + \varepsilon = \nu_j(E_j) + \varepsilon, \qquad \text{si } j \geq j_1.$$

Luego, eligiendo j suficientemente grande tenemos que

$$\nu(E) < C \, \frac{H}{\lambda - \alpha} + 2\varepsilon,$$

y haciendo $\varepsilon \to 0$ se obtiene la desigualdad deseada. Finalmente, probaremos que dado $\varepsilon > 0$ y α tal que $0 < \alpha < \lambda$, podemos elegir los b_i tales que $I_1 < \varepsilon$. Sea

$$A^\ell(x) = \sum_{i=1}^{H} [k_\ell(x, x_i) - k_\ell(x, b_i)] \,.$$

Luego

$$I_1 = \nu\left(\left\{x \in X : \max_{1\le \ell \le N} |A^\ell(x)| > \alpha\right\}\right) \le \sum_{\ell=1}^{N} \nu\left(\left\{x \in X : |A^\ell(x)| > \alpha\right\}\right).$$

Para cada ℓ fijo, tenemos

$$\begin{aligned}\nu\left(\left\{x \in X : |A^\ell(x)| > \alpha\right\}\right) &\le \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{H}\int_X |k_\ell(x,x_i) - k_\ell(x,b_i)|\, d\nu(x) \\ &= \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{H}\int_{F_\ell} |k_\ell(x,x_i) - k_\ell(x,b_i)|\, d\nu(x),\end{aligned}$$

donde como antes F_ℓ es la proyección en la primera variable del soporte de k_ℓ, y por lo tanto es un conjunto acotado y de medida finita. Por la continuidad de los núcleos k_ℓ y por estar trabajando con una cantidad finita de ellos, podemos hacer $I_1 < \varepsilon$ mediante una adecuada elección de los b_i. Por lo tanto

$$I_1 + I_2 \le C\,\frac{H}{\lambda - \alpha},$$

y haciendo $\alpha \to 0$ se prueba que K^* es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (X,ν). Aplicando el Teorema 30 se obtiene el resultado.

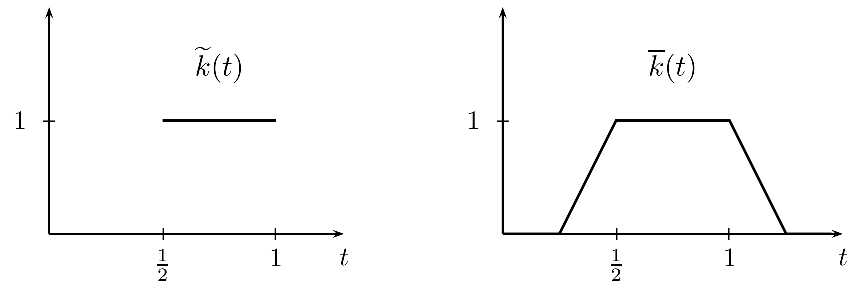
□

En el ejemplo de la introducción del capítulo vemos precisamente que la hipótesis del Teorema 48: *K^{j^*} es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (S_j,ν_j) uniformemente en j* no es válida ni siquiera para una sucesión de núcleos tan sencilla como la allí presentada, aunque el operador continuo asociado K^* es de tipo débil $(1,1)$. Como ya mencionamos, este hecho se debe a que en la estructura discreta la medida está mucho más concentrada en la diagonal que en la estructura continua. Si en cambio tomamos núcleos de convolución con soporte disjunto del origen, o núcleos de dos variables no necesariamente de convolución con soporte fuera de la diagonal, entonces tendremos ejemplos donde la hipótesis del Teorema 48 es posible. Más aún, el maximal K^* asociado a la familia k_ℓ de la introducción está dominado por el maximal correspondiente a la nueva familia generada de la misma manera por $\widetilde{k}$ o $\overline{k}$ (ver Figura 1). Por consiguiente el Teorema 48 aplicado a estos núcleos puede usarse para obtener, a posteriori, el tipo débil de K^*.

Otra alternativa para evitar agregar hipótesis de anulación sobre la diagonal de los núcleos k_ℓ es redefinir la discretización como lo hicimos en la introducción del capítulo, de modo que en los contextos discretos nunca se evalúen los núcleos sobre la diagonal. Para ello definimos

$$(\mathcal{K}^{j^*}f)(x_{j,n}) = \sup_{\ell}\left|\int_{S_j - \{x_{j,n}\}} k_\ell^j(x_{j,n},y) f(y)\, d\nu_j(y)\right|.$$

El siguiente resultado prueba que este modo de discretizar no implica, en el caso no atómico, ninguna pérdida de información sobre el operador K^*.



(a) $\widetilde{k}_\ell(x,y) = 2^\ell \widetilde{k}(2^\ell|x-y|)$ (b) $\overline{k}_\ell(x,y) = 2^\ell \overline{k}(2^\ell|x-y|)$

Figura 1

Teorema 49. *Sea (X,ρ,ν) un espacio casi-métrico sin puntos aislados, con una medida ν tal que $d\nu = g\,d\mu$, donde $g \in L^1_{loc}(X,\rho,\mu)$ y (X,ρ,μ) es un espacio de tipo homogéneo. Sea $\{k_\ell\}$ una sucesión de núcleos continuos y con soportes compactos en $X \times X$. Entonces K^* es de tipo débil $(1,1)$ en (X,ν) si $\mathcal{K}^{j^*}$ es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (S_j,ν_j) uniformemente en j. En otras palabras, K^* es de tipo débil $(1,1)$ en (X,ν) si existe $C>0$ tal que para cada conjunto finito de puntos distintos $x_{j,n_1}, x_{j,n_2}, \dots, x_{j,n_H} \in S_j$ y para todo $\lambda > 0$, tenemos*

$$\nu_j\left(\left\{x_{j,n} \in S_j : \sup_{\ell\in\mathbb{N}} \left|\sum_{\substack{i=1,\dots,H\\ n_i\neq n}} k_\ell(x_{j,n}, x_{j,n_i})\right| > \lambda\right\}\right) \le C\,\frac{H}{\lambda},$$

para todo j.

Demostración. Argumentando como en la prueba del Teorema 48, sólo tenemos que tratar de un modo diferente la estimación para I_2. Para cada j, sea E_j^B el conjunto que contiene los puntos de E_j que sean además elementos de $B = \{b_1, b_2, \dots, b_H\}$, y $E_j^{B^c}$ el que contiene los que no están en B, es decir

$$E_j^B = E_j \cap B, \quad E_j^{B^c} = E_j \cap B^c.$$

Si j_0 es tal que $b_i \in S_{j_0}$ para todo $i = 1, 2, \dots, H$, por hipótesis tenemos que

$$\nu_j\left(E_j^{B^c}\right) \le C\,\frac{H}{\lambda - \alpha}, \quad \text{si } j \ge j_0.$$

Por otra parte, por ser E abierto, dado $\varepsilon > 0$ existe $j_1 = j_1(\varepsilon)$ tal que

$$\nu(E) < \nu_j(E) + \varepsilon = \nu_j(E_j) + \varepsilon, \quad \text{si } j \ge j_1.$$

Ya que $\nu_j(E_j) \le \nu_j(E_j^B) + \nu_j(E_j^{B^c})$ para todo j, se tiene que

$$\nu(E) < \nu_j\left(E_j^B\right) + C\,\frac{H}{\lambda-\alpha} + \varepsilon, \quad \text{si } j \ge \text{máx}\{j_0, j_1\}.$$

Además por ser B compacto existe $j_2 = j_2(\varepsilon)$ tal que

$$\nu_j(B) < \nu(B) + \varepsilon, \quad \text{si } j \ge j_2.$$

Luego

$$\nu_j\left(E_j^B\right) \leq \nu_j(B) < \nu(B) + \varepsilon = \sum_{i=1}^{H} \nu(\{b_i\}) + \varepsilon = \varepsilon, \qquad \text{si } j \geq j_2,$$

ya que X no posee átomos. Resumiendo, eligiendo j suficientemente grande tenemos que

$$\nu(E) < C\,\frac{H}{\lambda - \alpha} + 2\varepsilon,$$

y haciendo $\varepsilon \to 0$ se obtiene la desigualdad deseada. □

El Teorema 48 fue enunciado bajo la hipótesis que X sea un espacio sin puntos aislados. Sin embargo, al igual que en el Capítulo 2, es posible obtener una versión del teorema precedente para espacios que posean puntos aislados pidiendo el tipo débil $(1,1)$ uniformemente en j sobre una clase más amplia, que es la de las combinaciones lineales de deltas de Dirac con coeficientes naturales, lo que es equivalente a permitir la repetición de los puntos en los que se concentran las deltas.

Teorema 50. *Sea (X,ρ,ν) un espacio casi-métrico con una medida ν tal que $d\nu = g\,d\mu$, donde $g \in L^1_{loc}(X,\rho,\mu)$ y (X,ρ,μ) es un espacio de tipo homogéneo. Sea $\{k_\ell\}$ una sucesión de núcleos continuos y con soportes compactos en $X \times X$. K^* es de tipo débil $(1,1)$ en (X,ν) si K^{j^*} es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (S_j,ν_j) uniformemente en j. En otras palabras, K^* es de tipo débil $(1,1)$ en (X,ν) si existe $C>0$ tal que para cada conjunto finito de puntos no necesariamente distintos $x_{j,n_1}, x_{j,n_2}, \ldots, x_{j,n_H} \in S_j$ y para todo $\lambda > 0$, tenemos*

$$\nu_j\left(\left\{x_{j,n} \in S_j : \sup_{\ell\in\mathbb{N}}\left|\sum_{i=1}^{H} k_\ell(x_{j,n}, x_{j,n_i})\right| > \lambda\right\}\right) \leq C\,\frac{H}{\lambda}, \tag{5.1}$$

para todo j.

Una consecuencia directa del Teorema 50 es el siguiente resultado.

Corolario 51. *Sea (X,ρ,ν) un espacio casi-métrico con una medida ν tal que $d\nu = g\,d\mu$, donde $g \in L^1_{loc}(X,\rho,\mu)$ y (X,ρ,μ) es un espacio de tipo homogéneo. Sea $\{k_\ell\}$ una sucesión de núcleos continuos y con soportes compactos en $X\times X$. Si K^{j^*} es de tipo débil $(1,1)$ en (S_j,ν_j) uniformemente en j, entonces K^* es de tipo débil $(1,1)$ en (X,ν).*

Para probar el tipo débil $(1,1)$ de K^{j^*} en forma uniforme en j resultará útil que los espacios aproximantes (S_j,ν_j) sean espacios de tipo homogéneo con constante de duplicación uniforme en j. En el caso que el espacio X sea compacto (en muchas ocasiones será suficiente con que sea localmente compacto), el Teorema 40 del Capítulo 3 nos provee una aproximación con dicha propiedad.

Observación 1. Si en los Teoremas 48 o 50 los núcleos k_ℓ fueran sólo funciones de L^1 en lugar de continuas, el significado de (5.1) no estaría claro, ya que estamos evaluando dichos núcleos en puntos específicos. En el caso que $k_\ell(x,y)$ esté definido para todo $x, y \in X$ y para todo ℓ, el teorema anterior también podría haberse obtenido, al igual que el Teorema 32 del Capítulo 2, debilitando la hipótesis de continuidad sobre los núcleos k_ℓ pidiendo en su lugar que, para cada ℓ, $k_\ell : X \times X \to \mathbb{R}$ sea una función medible que satisface

1. $k_\ell(\cdot, y) \in L^1(X,\nu)$ uniformemente en $y \in X$,
2. $\int_X |k_\ell(x,y) - k_\ell(x,z)|\, d\nu(x) \to 0$ cuando $\rho(y,z) \to 0$.

2. Condición necesaria para el tipo débil $(1,1)$

Obtendremos el recíproco del Teorema 48 con una relación más fuerte entre las medidas aproximantes ν_j y la medida límite ν. Más precisamente, dadas las redes S_j en X, construimos una partición de tipo diádica $\mathcal{D}$ (ver Sección 9, Capítulo 1) y definimos

$$\nu_j(\{x_{j,n}\}) = \nu(Q_n^j)$$

para $x_{j,n} \in S_j$. Entonces $\operatorname{sop}(\nu_j) \subseteq S_j$ y $\nu_j \xrightarrow{w*} \nu$.

Notar que las medidas ν_j que aparecen en el ejemplo considerado al comienzo de este capítulo satisfacen la relación deseada con la medida límite, de manera que, en general, no vale que si K^* es de tipo débil $(1,1)$ sobre (X,ν), entonces K^{j^*} lo es sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (S_j,ν_j) uniformemente en j. En otras palabras, aunque las medidas aproximantes se definan de esta forma, el recíproco del Teorema 48 no vale sin condiciones adicionales sobre los núcleos.

Teorema 52. *Sea (X,ρ,ν) un espacio casi-métrico sin puntos aislados, con una medida ν tal que $d\nu = g\, d\mu$, donde $g \in L^1_{loc}(X,\rho,\mu)$ y (X,ρ,μ) es un espacio de tipo homogéneo. Sea ν_j definida sobre las redes S_j por $\nu_j(\{x_{j,n}\}) = \nu(Q_n^j)$ ($Q_n^j \in \mathcal{D}$). Sea $\{k_\ell\}$ una sucesión de núcleos continuos y con soportes compactos en $X \times X$ tales que existen constantes $M \geq c$ y m satisfaciendo*

$$\int_{\{x:\rho(x,y)\leq M\rho(y,z)\}} \sup_{\ell\in\mathbb{N}} |k_\ell(y,z) - k_\ell(x,z)|\, d\nu(x) \leq m, \tag{5.2}$$

para todo $y, z \in X$, siendo c la constante que aparece en la propiedad 3 del Teorema 27 (Christ). Entonces si K^* es de tipo débil $(1,1)$, se tiene que K^{j^*} es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (S_j,ν_j) uniformemente en j.

Demostración. Supongamos que K^* es de tipo débil $(1,1)$ en (X,ν). Fijemos $\lambda > 0$, $j \in \mathbb{N}$ y $x_{j,n_1}, x_{j,n_2}, \ldots, x_{j,n_H}$ puntos distintos en S_j. Si definimos

$$E_\lambda = \left\{ x \in X : \sup_{\ell\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i=1}^{H} k_\ell(x, x_{j,n_i}) \right| > \lambda \right\},$$

el Teorema 30 nos dice que $\nu(E_\lambda) \leq C\,\frac{H}{\lambda}$. Luego

$$\begin{aligned}
\nu_j\left(\left\{x_{j,n} : \sup_{\ell\in\mathbb{N}}\left|\sum_{i=1}^{H} k_\ell(x_{j,n}, x_{j,n_i})\right| > \lambda\right\}\right) &= \sum_{n\in I_j} \nu_j(\{x_{j,n}\})\mathcal{X}_{E_\lambda}(x_{j,n}) \\
&= \sum_{n\in I_j} \nu(Q_n^j)\mathcal{X}_{E_\lambda}(x_{j,n}) \\
&= \sum_{n\in I_j} \nu\left(Q_n^j \cap E_{\frac{\lambda}{2}}\right)\mathcal{X}_{E_\lambda}(x_{j,n}) \\
&+ \sum_{n\in I_j} \nu\left(Q_n^j \cap E_{\frac{\lambda}{2}}^c\right)\mathcal{X}_{E_\lambda}(x_{j,n}) \\
&\leq 2C\,\frac{H}{\lambda} \\
&+ \sum_{n\in I_j} \nu\left(Q_n^j \cap E_{\frac{\lambda}{2}}^c\right)\mathcal{X}_{E_\lambda}(x_{j,n}).
\end{aligned}$$

Estudiemos entonces

$$\nu\left(\left\{x \in Q_n^j : \sup_{\ell\in\mathbb{N}}\left|\sum_{i=1}^{H} k_\ell(x, x_{j,n_i})\right| \leq \lambda/2\right\}\right),$$

cuando $x_{j,n}$, el "centro" de Q_n^j, es un elemento de E_λ. En este caso, escribimos

$$\begin{aligned}
\sup_{\ell\in\mathbb{N}}\left|\sum_{i=1}^{H} k_\ell(x, x_{j,n_i})\right| &\geq \sup_{\ell\in\mathbb{N}}\left|\sum_{i=1}^{H} k_\ell(x_{j,n}, x_{j,n_i})\right| \\
&- \sup_{\ell\in\mathbb{N}}\sum_{i=1}^{H} |k_\ell(x_{j,n}, x_{j,n_i}) - k_\ell(x, x_{j,n_i})| \\
&> \lambda - \sup_{\ell\in\mathbb{N}}\sum_{i=1}^{H} |k_\ell(x_{j,n}, x_{j,n_i}) - k_\ell(x, x_{j,n_i})|\,.
\end{aligned}$$

Entonces si $x_{j,n} \in E_\lambda$

$$\begin{aligned}
&\nu\left(\left\{x \in Q_n^j : \sup_{\ell\in\mathbb{N}}\left|\sum_{i=1}^{H} k_\ell(x, x_{j,n_i})\right| \leq \lambda/2\right\}\right) \\
&\leq \nu\left(\left\{x \in Q_n^j : \sup_{\ell\in\mathbb{N}}\sum_{i=1}^{H} |k_\ell(x_{j,n}, x_{j,n_i}) - k_\ell(x, x_{j,n_i})| > \lambda/2\right\}\right) \\
&\leq \frac{2}{\lambda}\int_{Q_n^j} \sup_{\ell\in\mathbb{N}}\sum_{i=1}^{H} |k_\ell(x_{j,n}, x_{j,n_i}) - k_\ell(x, x_{j,n_i})|\; d\nu(x) \\
&= \frac{2}{\lambda}\sum_{i=1}^{H}\int_{Q_n^j} \sup_{\ell\in\mathbb{N}} |k_\ell(x_{j,n}, x_{j,n_i}) - k_\ell(x, x_{j,n_i})|\; d\nu(x) \\
&\leq \frac{2}{\lambda}\sum_{i=1}^{H}\int_{\{x:\rho(x,x_{j,n})<c\delta^j\}} \sup_{\ell\in\mathbb{N}} |k_\ell(x_{j,n}, x_{j,n_i}) - k_\ell(x, x_{j,n_i})|\; d\nu(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{2}{\lambda} \sum_{i=1}^{H} \int_{\{x:\rho(x,x_{j,n})<c\rho(x_{j,n_i},x_{j,n})\}} \sup_{\ell\in\mathbb{N}} |k_\ell(x_{j,n}, x_{j,n_i}) - k_\ell(x, x_{j,n_i})| \, d\nu(x) \\ &\leq 2m \, \frac{H}{\lambda} \,. \end{aligned}$$

□

Observemos que la familia de núcleos $k_\ell(x,y) = 2^\ell \varphi(2^\ell(x-y))$ introducidas al inicio de este capítulo no puede satisfacer la hipótesis (5.2). Sin embargo, si se tiene una familia finita $\{k_\ell : \ell = 1, 2 \dots, L\}$ de núcleos de convolución en $L^1(\mathbb{R})$ tales que $|k_\ell(x)| \leq C|x|^{-1}$, entonces (5.2) sí se satisface. En efecto

$$\begin{aligned} \sup_{1\leq\ell\leq L} |k_\ell(u) - k_\ell(x+u)| &\leq \sum_{\ell=1}^{L} |k_\ell(u) - k_\ell(x+u)| \\ &\leq C \, \frac{L}{|u|} + \sum_{\ell=1}^{L} |k_\ell(x+u)| \,. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{|x|\leq M|u|} \sup_{1\leq\ell\leq L} |k_\ell(u) - k_\ell(x+u)| \, dx \leq 2MLC + \sum_{\ell=1}^{L} \|k_\ell\|_{L^1}.$$

Notemos finalmente que si todos los núcleos involucrados son no negativos, entonces bajo la misma hipótesis (5.2) la recíproca del Teorema 49 también vale.

3. Dos ejemplos clásicos

Como aplicación de los resultados obtenidos en este capítulo y en el Capítulo 3, podemos concluir que probar que un operador maximal en un contexto continuo es de tipo débil $(1, 1)$ se reduce a probar que un operador asociado es uniformemente de tipo débil $(1, 1)$ sobre contextos discretos uniformemente homogéneos. Teniendo esto en mente y los resultados del Capítulo 4, presentaremos en esta sección otra forma de probar el tipo débil $(1, 1)$ de dos operadores maximales clásicos: la función maximal de Hardy-Littlewood y el operador maximal asociado a la transformada de Hilbert.

Operador maximal de Hardy-Littlewood. Probaremos el tipo débil $(1, 1)$ de este operador en un espacio de tipo homogéneo completo. Comenzaremos por enunciar y probar un lema que nos permite reducir el problema al caso de un espacio métrico compacto.

Sea (X, ρ) un espacio casi-métrico y ν una medida que duplica sobre X. Como en la Sección 2 del Capítulo 2, denotemos por M a la función maximal centrada de Hardy-Littlewood definida con respecto a d, es decir

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\nu(B_d(x,r))} \int_{B_d(x,r)} |f(y)| \, d\nu(y),$$

donde d es una métrica tal que d^ξ es equivalente a ρ, para algún real positivo ξ. Como ya mencionamos, los operadores M y M^ρ son equivalentes. Además tenemos el siguiente resultado.

Lema 53. *Sea X_m una sucesión creciente de conjuntos medibles cuya unión es X. Supongamos que existe una constante C, independiente de m, tal que*

$$\nu\left(\{x \in X_m : M(f\mathcal{X}_{X_m})(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda}\|f\mathcal{X}_{X_m}\|_1,$$

para toda $f \in L^1(X)$, $\lambda > 0$ y todo m. Entonces M es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a ν sobre X con constante C.

Demostración. Dada una función f definida sobre X, para cada entero no negativo m sea f_m la función definida sobre X como $f_m(x) = |f(x)|\mathcal{X}_{X_m}(x)$. Luego $f_m \leq f_{m+1}$ y $\lim_{m\to\infty} f_m = |f|$. El Teorema 13 de la convergencia monótona nos permite afirmar que

$$\lim_{m\to\infty} \int_{X_m} |f|\, d\nu = \int_X |f|\, d\nu. \tag{5.3}$$

Dado un número real $\lambda > 0$, denotamos

$$E_\lambda = \{x \in X : Mf(x) > \lambda\} \quad \text{y} \quad E_\lambda^m = \{x \in X_m : Mf_m(x) > \lambda\}.$$

Notar que $E_\lambda^m \subseteq E_\lambda^{m+1}$, así que por el Teorema 11 tenemos que

$$\nu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_\lambda^m\right) = \lim_{m\to\infty} \nu\left(E_\lambda^m\right).$$

Por otra parte, para cada $x \in E_\lambda$ existe $r > 0$ tal que

$$\frac{1}{\nu(B_d(x,r))}\int_{B_d(x,r)} |f(y)|\, d\nu(y) > \lambda.$$

Entonces debe existir un m_0 tal que

$$\frac{1}{\nu(B_d(x,r))}\int_{B_d(x,r)} \mathcal{X}_{X_m}|f(y)|\, d\nu(y) > \lambda,$$

siempre que $m \geq m_0$. Además, ya que $x \in X$, existe m_1 tal que $x \in X_m$ para todo $m \geq m_1$. Luego $x \in E_\lambda^m$ para todo $m \geq \max\{m_0, m_1\}$. En otras palabras, $E_\lambda \subseteq \bigcup_{m=1}^\infty E_\lambda^m$. Ya que además es claro que $E_\lambda^m \subseteq E_\lambda$ para todo m, se tiene que $E_\lambda = \bigcup_{m=1}^\infty E_\lambda^m$ y por lo tanto

$$\nu(E_\lambda) = \lim_{m\to\infty} \nu(E_\lambda^m). \tag{5.4}$$

Por hipótesis existe una constante C tal que

$$\nu(E_\lambda^m) \leq \frac{C}{\lambda}\int_{X_m} |f|\, d\nu$$

para toda $f \in L^1(X)$, $\lambda > 0$ y $m \in \mathbb{N}$, tomando límite cuando m tiende a infinito y usando (5.3) y (5.4) tenemos que

$$\nu(E_\lambda) = \nu\left(\{x \in X : Mf(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda}\int_X |f|\, d\nu,$$

par toda $f \in L^1(X)$ y $\lambda > 0$. Luego M es de tipo débil $(1,1)$ en (X,ν). $\square$

Notar que si probamos que el operador maximal de Hardy-Littlewood M_m sobre (X_m, d, ν) es de tipo débil $(1,1)$ uniformemente en m, entonces puesto que

$$\frac{1}{\nu\left(B_d(x,r)\right)}\int_{B_d(x,r)\cap X_m}|f|\,d\nu \leq \frac{1}{\nu\left(B_d(x,r)\cap X_m\right)}\int_{B_d(x,r)\cap X_m}|f|\,d\nu$$

para todo $x \in X_m$ y todo $r > 0$, tenemos que la hipótesis del Lema 53 se verifica.

Observación 2. Si (X,ρ) es un espacio de tipo homogéneo completo y tomamos $X_m = \overline{B_\rho(x_0, m)}$ con $x_0 \in X$ fijo y $m \in \mathbb{N}$, obtenemos una sucesión como la requerida en el lema anterior. Más aún, ya que X_m es un subconjunto cerrado y totalmente acotado de un espacio completo, tenemos que X_m es compacto para todo m. Sin embargo, si quisiéramos aplicar los resultados de aproximación del Capítulo 3, necesitaríamos además que cada X_m sea un espacio de tipo homogéneo, lo cual no es en general cierto aunque X lo sea. En [**26**] Macías y Segovia construyen en cualquier espacio de tipo homogéneo una casi-métrica equivalente a la original de modo que las bolas en la nueva casi-métrica son subespacios de tipo homogéneo con constantes uniformes (independientes del centro y del radio). También los cubos diádicos de Christ son una familia uniforme de subespacios de tipo homogéneo del espacio original. Puesto que por la propiedad 8 del Teorema 27 las fronteras de estos cubos diádicos tienen medida nula, lo mismo vale para $(\overline{Q_k^n}, \rho, \nu)$. Por consiguiente en todo espacio de tipo homogéneo existe una sucesión X_m de compactos crecientes tales que $\{(X_m, \rho, \nu)\}$ es una sucesión uniforme de espacios de tipo homogéneo.

Para el caso de un espacio compacto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 54. *Sea (X,ρ,ν) un espacio de tipo homogéneo compacto. Entonces el operador maximal de Hardy-Littlewood es de tipo débil $(1,1)$. Más aún, la constante C para el tipo débil depende sólo de las constantes geométricas de (X,ρ,ν).*

Demostración. Sean Λ una constante para la desigualdad triangular de ρ, y A la constante de duplicación para ν. Podemos suponer que $\nu(X) = 1$, pues de lo contrario trabajamos con la medida $\nu' = \nu/\nu(X)$, la cual posee la misma constante de duplicación A. Por el Teorema 40 del Capítulo 3 sabemos que existe una sucesión $\{(S_j, \nu_j)\}$ de espacios uniformemente de tipo homogéneo, digamos con constante de duplicación $\widetilde{A} = \widetilde{A}(\Lambda, A)$, tal que $S_j \xrightarrow{\delta_H} X$ y $\nu_j \xrightarrow{w*} \nu$. Además por construcción los conjuntos aproximantes S_j son α^{-j}-redes finitas anidadas con $\alpha > 1$, y cada medida ν_j tiene soporte S_j. Dado un entero no negativo j, sea $J = \operatorname{card}(S_j)$. Para aplicar el Teorema 43 de Hardy-Littlewood en contextos finitos, tomemos en $[1,J]\times[1,J]$ la función $\widetilde{\rho}$ definida por

$$\widetilde{\rho}(k_1, k_2) = \rho(x_{j,k_1}, x_{j,k_2}).$$

Es fácil ver que $\widetilde{\rho}$ es una casi-métrica con constante triangular Λ sobre $[1,J]$. Sea $\widetilde{\nu}(\{k\}) = \nu_j(\{x_{j_k}\})$ para cada $k \in [1,J]$. Notar que $\widetilde{\nu}\left(B_{\widetilde{\rho}}(k,r)\right) = \nu_j\left(B_\rho(x_{j,k}, r)\right)$, por lo que $\widetilde{A}$, la constante uniforme de duplicación para todas las ν_j, pertenece al conjunto $\mathcal{A}$ que definimos antes del enunciado del Teorema 43 asociados a la medida $\widetilde{\nu}$. Más precisamente, $\widetilde{A}$ pertenece al conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ A : \widetilde{\nu}\left(B_{\widetilde{\rho}}(k,2r)\right) \leq A\widetilde{\nu}\left(B_{\widetilde{\rho}}(k,r)\right),\ \text{para todo } r>0,\ k\in[1,J] \right\}.$$

Aplicando entonces dicho teorema tenemos que el operador maximal de Hardy-Littlewood en (S_j,ρ,ν_j) es de tipo débil $(1,1)$ uniformemente en j con constante $C=\widetilde{A}^{\ell+1}$, siendo ℓ tal que $2^\ell \geq \Lambda$. Por el Corolario 51 tenemos que el operador maximal de Hardy-Littlewood en (X,ρ,ν) es de tipo débil $(1,1)$, con constante para la desigualdad del tipo débil que depende sólo de A y de Λ. □

Estamos ahora en condiciones de presentar una prueba del tipo débil $(1,1)$ del operador maximal de Hardy-Littlewood basada en los resultados previos.

Teorema 55. *Sea* (X,ρ,ν) *un espacio de tipo homogéneo completo. Entonces el operador maximal de Hardy-Littlewood es de tipo débil* $(1,1)$.

Demostración. Sea $\{X_m\}$ una sucesión creciente de compactos cuya unión es X, y tal que $\{(X_m,\rho,\nu)\}$ es una familia uniforme de espacios de tipo homogéneo. Por el Teorema 54 se tiene que el operador maximal de Hardy-Littlewood es de tipo débil $(1,1)$ sobre cada $\{(X_m,\rho,\nu)\}$ con constante independiente de m. El Lema 53 termina la demostración del teorema. □

Operador maximal de Hilbert. El segundo ejemplo que consideraremos es el del operador maximal asociado a la transformada de Hilbert en $\mathbb{R}^1$. Para cada par de números racionales positivos a y b con $0<a<b<\infty$ definimos la truncación $k_{a,b}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ del núcleo de Hilbert por

$$k_{a,b}(x,y) = \frac{1}{x-y}\mathcal{X}_{(a,b]}(|x-y|),$$

que está en $L^1(\mathbb{R})$ en la variable x uniformemente en y, y que verifica la propiedad (2) de "continuidad integral" del Teorema 32 (ver Observación 1 en este capítulo). En efecto, en este caso tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |k_{a,b}(x,y)-k_{a,b}(x,z)|\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| k_{a,b}(x,y) - \frac{1}{x-y}\mathcal{X}_{(a,b]}(|x-z|)\right| dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{x-y}\mathcal{X}_{(a,b]}(|x-z|) - k_{a,b}(x,z)\right| dx \\
&= I + II.
\end{aligned}$$

Si denotamos $C_{a,b}(z)$ a la corona en $\mathbb{R}$ con centro en z y radios mayor y menor b y a respectivamente, es decir $C_{a,b}(z)=(z-b,z+b)-[z-a,z+a]$, entonces

$$I = \int_{C_{a,b}(z)\triangle C_{a,b}(y)} \frac{1}{|x-y|}\,dx,$$

y

$$II = \int_{C_{a,b}(z)} \left| \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-z}\right| dx.$$

La primera integral tiende a cero cuando $y \to z$ porque la medida del conjunto de integración tiende a cero y la singularidad está lejos de dicho conjunto. La segunda, en cambio, tiende a cero cuando $y \to z$ porque el integrando tiende uniformemente a cero en un conjunto de medida finita.

Si $|\cdot|$ representa la distancia usual y m la medida de Lebesgue, las aproximaciones discretas de $(\mathbb{R}, |\cdot|, m)$ que mejor se adaptan a estos núcleos son redes escaladas de $\mathbb{Z}$. Más precisamente, tomaremos $S_j = 2^{-j}\mathbb{Z}$ para $j \in \mathbb{Z}$. Sea ν_0 la medida que cuenta puntos en $S_0 = \mathbb{Z}$, y para cada j sea ν_j la medida que cuenta puntos en S_j multiplicada por la escala, más precisamente:

$$\nu_j(E) = 2^{-j}\mathrm{card}(E \cap S_j).$$

La discretización $k_{a,b}^j$ de $k_{a,b}$ al nivel S_j está dada por

$$k_{a,b}^j(2^{-j}n, 2^{-j}m) = k_{a,b}(2^{-j}n, 2^{-j}m) = \frac{2^j}{n-m}\mathcal{X}_{(2^j a, 2^j b]}(|n-m|).$$

En el Teorema 46 del capítulo anterior probamos que K^{0^*} es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (S_0, ν_0), es decir, existe una constante C tal que para todo natural H todo conjunto $A_H^0 \subseteq \mathbb{Z}$ de cardinal H y todo $\lambda > 0$, vale que

$$\mathrm{card}\left(\left\{ n \in \mathbb{Z} : \sup_{a,b}\left|\sum_{m \in A_H^0} k_{a,b}^0(n,m)\right| > \lambda \right\}\right) \leq C\,\frac{H}{\lambda}\,.$$

El siguiente resultado es válido para estos núcleos $k_{a,b}$ y nos permite concluir que K^{j^*} es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (S_j, ν_j) para todo j.

Afirmación 2. *Dado $j > 0$, K^{j^*} es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (S_j, ν_j) si y sólo si K^{0^*} es de tipo débil $(1,1)$ sobre sumas finitas de deltas de Dirac en (S_0, ν_0).*

Demostración. Sean $j > 0$ y A_H^j dados, donde A_H^j denota un subconjunto de S_j con cardinal H. Ya que $x \in S_j$ si y sólo si existe un único $n \in S_0$ tal que $x = 2^{-j}n$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sup_{a,b}\left|\sum_{y \in A_H^j} k_{a,b}^j(x,y)\right| &= \sup_{a,b}\left|\sum_{m \in A_H^0} k_{a,b}^j(2^{-j}n, 2^{-j}m)\right| \\
&= 2^j \sup_{a,b}\left|\sum_{m \in A_H^0} k_{2^j a, 2^j b}^0(n,m)\right| \\
&= 2^j \sup_{2^j a, 2^j b}\left|\sum_{m \in A_H^0} k_{2^j a, 2^j b}^0(n,m)\right| \\
&= 2^j \sup_{a,b}\left|\sum_{m \in A_H^0} k_{a,b}^0(n,m)\right|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\nu_j\left(\left\{x\in S_j:\sup_{a,b}\left|\sum_{y\in A_H^j}k_{a,b}(x,y)\right|>\lambda\right\}\right)\\
&=2^{-j}\mathrm{card}\left(\left\{x\in S_j:\sup_{a,b}\left|\sum_{y\in A_H^j}k_{a,b}(x,y)\right|>\lambda\right\}\right)\\
&=2^{-j}\mathrm{card}\left(\left\{n\in S_0:\sup_{\ell}\left|\sum_{m\in A_H^0}k^0_{a,b}(n,m)\right|>2^{-j}\lambda\right\}\right)\,,
\end{aligned}$$

de lo que se deduce la afirmación. □

Lo anterior junto al Teorema 48 y la Observación 1 implican directamente el siguiente resultado, el cual establece el tipo débil $(1,1)$ de la función maximal de Hilbert truncada en $\mathbb{R}$.

Teorema 56. *La función definida para cada $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ como*

$$\mathcal{H}^*f(x)=\sup_{0<\varepsilon<R<\infty}\left|\int_{\varepsilon<|x-y|\leq R}\frac{f(y)}{x-y}\,dy\right|$$

es de tipo débil $(1,1)$ en $\mathbb{R}$.

Observemos, finalmente, que puesto que estamos en un contexto no atómico la recíproca en el Teorema 32 del Capítulo 2 nos permite concluir del tipo débil de $\mathcal{H}^*$ que el mismo es de tipo débil $(1,1)$ sobre combinaciones lineales con coeficientes naturales de deltas de Dirac. En particular el lema de Loomis (Lema 45) es una consecuencia de esto. Junto con Lema 44 esta observación prueba la equivalencia entre las conclusiones del lema de Loomis y de su versión discreta en el Lema 44.

CAPíTULO 6

Completitud en la métrica de Hausdorff-Kantorovich de familias de espacios de tipo homogéneo

En el trabajo de Hutchinson (ver [**24**]), la aplicación del teorema del punto fijo de Banach a contracciones actuando sobre el espacio métrico de Hausdorff $(\mathcal{K}, d_H)$, formado por los subconjuntos compactos de un espacio métrico fijo y equipado con la distancia de Hausdorff, se basa fuertemente en la completitud de este espacio. En el Capítulo 3 vimos dos maneras de extenderlo: la primera es utilizando una casi-métrica en lugar de una métrica en la definición del espacio, y la segunda considerando el conjunto $\mathcal{K}\times\mathcal{P}$, donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de las medidas de probabilidad sobre X con la distancia de Kantorovich para la convergencia débil estrella. Para los problemas analíticos considerados en este trabajo estamos interesados en subconjuntos de $\mathcal{K}\times\mathcal{P}$ cuyos elementos sean todos espacios de tipo homogéneo. Como veremos luego, la clase de *todos* los espacios de tipo homogéneo en $\mathcal{K}\times\mathcal{P}$ es incompleta con la casi-distancia de Hausdorff-Kantorovich. En este capítulo exploraremos diferentes subconjuntos cerrados $\mathcal{D}$ de $\mathcal{K}\times\mathcal{P}$ tales que cada elemento de $\mathcal{D}$ sea un espacio de tipo homogéneo.

1. Subespacios de $\mathcal{E}$: clases de duplicación

Introduciremos ahora la propiedad de duplicación de una medida sobre un espacio casi-métrico (X,ρ) de varias formas, con el fin de disponer de una relación cuantitativa entre la métrica y la medida. Recordemos que decimos que μ satisface la **propiedad de duplicación** sobre $Y\subseteq X$ con respecto a ρ si las ρ-bolas son conjuntos medibles y existen constantes $\alpha>1$ y $A\geq 1$ tales que

$$0<\mu(B_\rho(y,\alpha r))\leq A\mu(B_\rho(y,r))<\infty \tag{6.1}$$

para todo $y\in Y$ y $r>0$.

Notar que la propiedad de duplicación para una medida sobre un espacio casi-métrico no implica que la frontera de las bolas sean conjuntos de medida nula. Por ejemplo, sea $Y=[-2,2]$ equipado con $\rho(x,y)=\varphi(|x-y|)$, siendo φ la función definida sobre $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ como

$$\varphi(t)=\begin{cases} t & \text{si } 0\leq t\leq 1 \text{ o } t\geq 2,\\ 1 & \text{si } 1\leq t\leq 3/2,\\ 1 & \text{si } 3/2<t<2 \text{ y } t\in\mathbb{R}-\mathbb{Q},\\ 1/2 & \text{si } 3/2<t<2 \text{ y } t\in\mathbb{Q}. \text{ (Ver Figura 1)}\end{cases}$$

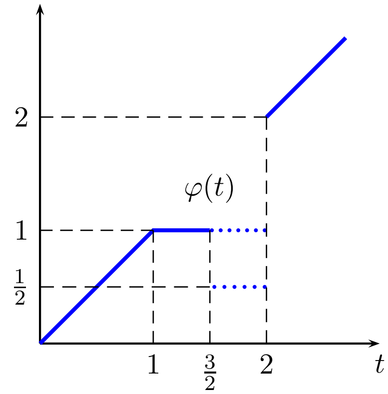


Figura 1: Función $\varphi(t)$

En este caso tenemos que

$$B_\rho(0,1) = (-1,1) \cup \{t \in \mathbb{Q} : |t| \in (3/2, 2)\},$$

$$\overline{B_\rho(0,1)} = [-1,1] \cup [-2,-3/2] \cup [3/2, 2],$$

y

$$\overline{B}_\rho(0,1) = (-2,2),$$

donde $\overline{B_\rho(x,r)}$ denota la clausura topológica de la bola $B_\rho(x,r)$, y $\overline{B}_\rho(x,r)$ es la bola "cerrada" $\{y \in Y : \rho(x,y) \leq r\}$. Ya que $t/4 \leq \varphi(t) \leq t$ para $t \geq 0$, $\rho(x,y) \simeq |x-y|$, y por lo tanto ρ es una casi-métrica sobre Y que genera la topología usual en Y. Así que (Y, ρ, m) es un espacio de tipo homogéneo, siendo m la medida unidimiensional de Lebesgue. Sin embargo $m(B_\rho(0,1)) = 2$, $m(\overline{B_\rho(0,1)}) = 3$ y $m(\overline{B}_\rho(0,1)) = 4$.

Basados en el ejemplo anterior, podemos dar dos definiciones equivalentes de la propiedad de duplicación sustituyendo $\mu(B_\rho(y,r))$ por $\mu(\overline{B_\rho(y,r)})$ y $\mu(\overline{B}_\rho(y,r))$ en el lado derecho de la definición de la propiedad de duplicación. Para nuestros propósitos consideraremos especialmente la última opción.

Sea (X,ρ) un espacio casi-métrico compacto. En X tenemos al menos tres "distancias": $\rho_1 := \rho$ la casi-métrica dada, $\rho_2 := d$ una métrica dada por el teorema de Macías y Segovia, y ρ_3, una potencia de d que es equivalente ρ. Con esta notación definiremos, para constantes $A \geq 1$ y $\alpha > 1$ fijas, las familias con las que trabajaremos luego.

$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{D}_1(\alpha, A, \rho_i)}}$ Decimos que el par $(Y,\mu) \in \mathcal{D}_1(\alpha, A, \rho_i)$ si $(Y,\mu) \in \mathcal{E}$ y

$$0 < \mu(B_i(y, \alpha r)) \leq A\mu(\overline{B}_i(y,r))$$

para todo $y \in Y$ y $r > 0$, donde B_i denota la ρ_i-bola, $i = 1, 2, 3$. Notar que la condición que define a $\mathcal{D}_1(\alpha, A, \rho_i)$ puede reescribirse como

$$0 < \mu(B_i(y, \alpha r)) \leq A\mu(B_i(y, r + \varepsilon))$$

para todo $y \in Y$, $r > 0$ y $\varepsilon > 0$. Definimos $\boldsymbol{\mathcal{D}_1(\rho_i) = \bigcup_{\alpha>1, A\geq 1} \mathcal{D}_1(\alpha, A, \rho_i)}$.

Ya que la convergencia débil estrella de medidas debe ser testeada mediante funciones continuas, nos será de gran utilidad la siguiente variante de $\mathcal{D}_1(\alpha, A, \rho_i)$.

$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{D}_2(\alpha, A, \varphi, \rho_i)}}$ Decimos que el par $(Y, \mu) \in \mathcal{E}$ pertenece a $\mathcal{D}_2(\alpha, A, \varphi, \rho_i)$ si para todo $y \in Y$ y todo $r > 0$ tenemos que

$$0 < \int \varphi_{i,y,\alpha r}(x)\, d\mu(x) \leq A \int \varphi_{i,y,r}(x)\, d\mu(x),$$

donde $\varphi_{i,y,s}(z) = \varphi\left(\frac{\rho_i(y,z)}{s}\right)$ para cada $s > 0$, y φ es una función continua fija no negativa definida sobre $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $\varphi(0) > 0$. Muchas veces usaremos funciones continuas especiales para aproximar funciones características de bolas. Dichas funciones son del siguiente tipo: dado un número real $\gamma > 1$, φ^γ es la función continua definida sobre $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $\varphi^\gamma \equiv 1$ en $[0, 1]$, $\varphi^\gamma \equiv 0$ fuera de $[0, \gamma)$ y φ^γ es lineal en el segmento $[1, \gamma]$ (ver Figura 2). Definimos $\boldsymbol{\mathcal{D}_2(\rho_i) = \bigcup_{\alpha, A, \varphi} D_2(\alpha, A, \varphi, \rho_i)}$.

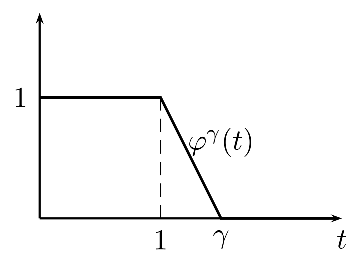


Figura 2: Función φ^γ

En el espacio euclídeo la propiedad de duplicación puede ser detectada mediante el comportamiento de la medida en bolas del mismo radio y con centros a distancias controladas por el radio. Generalizando esta idea definimos una nueva clase de duplicación.

$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{D}_3(\alpha, A, \rho_i)}}$ Diremos que $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_3(\alpha, A, \rho_i)$ si $(Y, \mu) \in \mathcal{E}$ y para toda elección de $y_1, y_2 \in Y$ y $r > 0$ satisfaciendo $\rho_i(y_1, y_2) < \alpha r$, tenemos que

$$\mu(B_i(y_1, r)) \leq A\mu(\overline{B}_i(y_2, r)).$$

Denotamos $\boldsymbol{\mathcal{D}_3(\rho_i) = \bigcup_{\alpha, A} \mathcal{D}_3(\alpha, A, \rho_i)}$.

Los siguientes resultados implican que cada uno de los espacios $\mathcal{D}_j(\rho_i)$ pueden ser pensados como formas diferentes de definir un espacio de tipo homogéneo cuando (X, ρ) tiene la PHD (ver definición en pág. 3), que es una manera de expresar la finitud de la dimensión métrica de X.

TEOREMA 57.

(a) $\mathcal{D}_1(\rho_j) = \mathcal{D}_2(\rho_i)$ *para todo* $j = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$;

(b) $\mathcal{D}_1(\rho_j) \subseteq \mathcal{D}_3(\rho_i)$ *para todo* $j = 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$.

Notar que $X = [0, 1]^n$ con la estructura euclídea y la medida de Lebesgue usuales pertenece a $\mathcal{D}_1(2, 2^n, |\cdot|) \cap \mathcal{D}_3(2, 1, |\cdot|)$. En otras palabras, aún cuando la constante de duplicación A para $\mathcal{D}_3$ permanece acotada cuando n crece, la correspondiente constante para $\mathcal{D}_1$ crece exponencialmente con la dimensión. Para obtener la inclusión recíproca de (b) vamos a requerir que el espacio tenga la propiedad de homogeneidad débil. Por lo tanto, bajo tal hipótesis tenemos que todos los espacios $\mathcal{D}_i$ son equivalentes.

COROLARIO 58. *Si* (X, ρ) *tiene la PHD, entonces todas las familias* $\mathcal{D}_i(\rho_j)$ *coinciden.*

DEM. TEOREMA 57. Comencemos tomando $j = i = 1$. Supongamos que μ satisface (6.1) para todo $y \in Y$ y $r > 0$, para ciertas constantes $\alpha > 1$ y $A \geq 1$. Por la monotonía de la medida es claro que $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_1(\alpha, A, \rho_1)$. Además tenemos que $\varphi_{1,y,s} \geq \mathcal{X}_{B(y,s)}$ y $\varphi_{1,y,s/\alpha} \leq \mathcal{X}_{B(y,s)}$ para toda elección de $y \in Y$ y $s > 0$. Luego si μ satisface (6.1), para todo $y \in Y$ y $r > 0$ tenemos

$$\int \varphi_{1,y,\alpha r}(x)\, d\mu(x) \leq \mu\big(B(y, \alpha^2 r)\big) \leq A^2 \mu\big(B(y, r)\big) \leq A^2 \int \varphi_{1,y,r}(x)\, d\mu(x).$$

Entonces $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_2(\alpha, A^2, \varphi^\alpha, \rho_1)$. Por otro lado, si $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_2(\alpha, C, \varphi^\alpha, \rho_1)$ para ciertas constantes $\alpha > 1$ y $C \geq 1$ entonces

$$\mu\left(B(y, \alpha r)\right) \leq \int \varphi_{1,y,\alpha r}(x)\, d\mu(x) \leq C^2 \int \varphi_{1,y,r/\alpha}(x)\, d\mu(x) \leq C^2 \mu\big(B(y, r)\big),$$

para todo $y \in Y$ and $r > 0$. Luego μ satisface (6.1) sobre Y con $A = C^2$.

Supongamos ahora que $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_1(\alpha, C, \rho_1)$ y fijemos $y \in Y$ y $r > 0$. Si $1 < \theta < \alpha$ es un número fijo, entonces

$$\mu(B(y, \alpha r)) \leq C\mu(\overline{B}(y, r)) \leq C\mu(B(y, \theta r))\,,$$

o equivalentemente

$$\mu(B(y, \alpha r/\theta)) \leq C\mu(B(y, r)).$$

Luego si p es un entero positivo tal que $p - 1 \geq 1 + \log \alpha/(\log \alpha - \log \theta)$, tenemos

$$\mu(B(y, \alpha r)) \leq C^p \mu(B(y, r)).$$

Por lo tanto μ satisface (6.1) sobre Y con constantes α y $A = C^p$.

Hemos probado que si μ duplica sobre Y con respecto a ρ_1, entonces (Y, μ) pertenece a $\mathcal{D}_1(\rho_1) \cap \mathcal{D}_2(\rho_1)$, y que si $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_1(\rho_1) \cup \mathcal{D}_2(\rho_1)$ entonces μ es duplicante sobre Y con respecto a ρ_1. Esto prueba que $\mathcal{D}_1(\rho_1) = \mathcal{D}_2(\rho_1)$, y queda probado (a) cuando $j = i = 1$. De la misma forma podemos probar que $\mathcal{D}_1(\rho_2) = \mathcal{D}_2(\rho_2)$ y $\mathcal{D}_1(\rho_3) = \mathcal{D}_2(\rho_3)$.

Sigamos suponiendo $j = 1$ y probemos (b) en este caso, para $i = 1, 2, 3$. Sea $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_1(\rho_1)$. Entonces existen constantes $\alpha > 1$ y $A \geq 1$ tales que μ satisface (6.1) para todo $y \in Y$ y $r > 0$. Sea Λ la constante para la desigualdad triangular para ρ. Entonces si $y_1, y_2 \in Y$ y $r > 0$ satisfacen $\rho(y_1, y_2) < \alpha r$, para todo entero positivo $n \geq \log_\alpha(\Lambda + \alpha\Lambda)$ tenemos

$$\mu\big(B(y_1, r)\big) \leq \mu\big(B(y_2, \Lambda(\alpha + 1)r)\big) \leq A^n \mu\big(B(y_2, r)\big).$$

Por lo tanto $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_3(\alpha, A^n, \rho_1)$. Además, ya que

$$B_1(y, s/c_2) \subseteq B_3(y, s) \subseteq B_1(y, s/c_1),$$

tomando m tal que $c_2\Lambda(\alpha + 1/c_1) \leq \alpha^m$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(B_3(y_1, r)) &\leq \mu(B_1(y_1, r/c_1)) \\ &\leq \mu(B_1(y_2, \Lambda(\alpha + 1/c_1)r)) \\ &\leq A^m \mu(B_1(y_2, r/c_2)) \\ &\leq A^m \mu(B_3(y_2, r)). \end{aligned}$$

Entonces $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_3(\alpha c_1, A^n, \rho_3)$. Por otra parte, ya que

$$B_2(y, s) = B_3(y, s^\xi), \tag{6.2}$$

es claro que $\mathcal{D}_3(\beta, B, \rho_2) = \mathcal{D}_3(\beta^{1/\xi}, B, \rho_3)$ para todo $\beta > 1$ y $B \geq 1$. Luego $\mathcal{D}_3(\rho_2) = \mathcal{D}_3(\rho_3)$, con lo probamos (b) cuando $j = 1$, para $i = 1, 2, 3$.

Completaremos la prueba de las partes (a) y (b) demostrando que

$$\mathcal{D}_1(\rho_1) = \mathcal{D}_1(\rho_2) = \mathcal{D}_1(\rho_3).$$

En efecto, de (6.2) es claro que $\mathcal{D}_1(\rho_2) = \mathcal{D}_1(\rho_3)$. Tomemos ahora $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_1(\rho_1)$. Entonces existen constantes $\alpha > 1$ y $A \geq 1$ tales que $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_1(\alpha, A, \rho_1)$. Si $1 < \theta < \alpha$, para todo $y \in Y$ y $r > 0$ tenemos

$$\mu(B_1(y, \alpha r)) \leq A\mu(\overline{B}_1(y, r)) \leq A\mu(B(y, \theta r))\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mu(B_3(y, \alpha r)) &\leq \mu(B_1(y, \alpha r/c_1)) \\ &\leq A^m \mu\left(B_1\left(y, \theta^m r/c_1\alpha^{m-1}\right)\right) \\ &\leq A^m \mu\left(B_3\left(y, c_2\theta^m r/c_1\alpha^{m-1}\right)\right). \end{aligned}$$

Eligiendo m tal que $\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^{m-1} \leq \frac{c_1}{c_2\theta}$ tenemos que $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_1(\rho_3)$. De la misma forma podemos probar que $\mathcal{D}_1(\rho_3) \subseteq \mathcal{D}_1(\rho_1)$. $\square$

Dem. Corolario 58. Dado $i = 1, 2, 3$, supongamos que $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_3(\alpha, A, \rho_i)$. Fijados $y \in Y$ y $r > 0$, definimos

$$C_i(y, r) = B_i(y, \alpha r) - B_i(y, r)\,.$$

Sea E_i un subconjunto fijo de $C_i(y,r)$ que sea r-disperso maximal con respecto a ρ_i. Por tener X la PHD, existe un número natural N_0 que no depende de y, i ni r tal que $N = \mathrm{card}(E_i) \leq N_0$, digamos $E_i = \{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$. Afirmamos que

$$C_i(y,r) \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{N} B_i(y_\ell, r)\,.$$

Si esta inclusión no fuera cierta debería existir un punto $z \in C_i(y,r)$ tal que $\rho_i(z, y_\ell) \geq r$ para todo $\ell = 1, 2 \ldots, N$. Pero esto no es posible ya que E_i es un conjunto r-disperso maximal. Ya que para cada $\ell = 1, 2, \ldots, N$ tenemos $\rho_i(y, y_\ell) < \alpha r$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ vale $\mu(B_i(y_\ell, r)) \leq A\mu(B_i(y, r+\varepsilon))$. Luego

$$\begin{aligned} \mu(B_i(y,\alpha r)) &\leq \mu\left(B_i(y,r)\right) + \sum_{\ell=1}^{N} \mu(B_i(y_\ell, r)) \\ &\leq (1 + AN_0)\mu(B_i(y, r+\varepsilon)), \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Entonces $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_1(\rho_i)$. Este hecho y el Teorema 57 implican que $\mathcal{D}_3(\rho_k) = \mathcal{D}_i(\rho_j)$ para todo $i, j, k = 1, 2, 3$, lo que prueba el corolario. $\square$

El resultado anterior muestra que cada $\mathcal{D}_j(\rho_i)$ es una forma diferente de decir que (Y, ρ_i, μ) es un espacio de tipo homogéneo en X. Sin embargo el uso de ρ_2 o ρ_3 tiene ciertas ventajas. La primera es que las funciones $\varphi_{2,y,r}$ y $\varphi_{3,y,r}$ son continuas, y la segunda, como veremos luego en este capítulo, es que $\mathcal{D}_j(\rho_i)$ son subconjuntos cerrados de $\mathcal{E}$ si $j = 1, 2, 3$, $i = 2, 3$.

Notemos también que, por simplicidad en los enunciados, hemos escrito las equivalencias como igualdad de uniones de clases, pero que de las demostraciones siempre podemos estimar los parámetros asociados a una métrica ρ_i y a un modo $\mathcal{D}_j$ de duplicación, en términos de los correspondientes a otra métrica $\rho_{\tilde{i}}$ y a otro modo $\mathcal{D}_{\tilde{j}}$

2. Subespacios de $\mathcal{E}$: clases de normalidad

Muchas veces, como en el caso de los espacios euclideanos, la medida de una bola se comporta como una potencia fija del radio. En [**27**], Macías y Segovia prueban que, hasta donde es posible, éste es siempre el caso en un espacio de tipo homogéneo si estamos dispuestos a cambiar la casi-métrica. Más precisamente, se demuestra que si (Y, ρ, μ) es un espacio de tipo homogéneo, existe una casi-métrica $\tilde{\rho}$ que genera en Y la misma topología que ρ de modo que el espacio $(Y, \tilde{\rho}, \mu)$ satisface que $\mu(B_{\tilde{\rho}}(y,r)) \simeq r$ siempre que $\mu(\{y\}) < r < \mu(Y)$. En [**27**] se le llama *normalidad* a esta propiedad de un espacio de tipo homogéneo.

Por otra parte, algunos fractales autosimilares (ver [**32**] y el Capítulo 7 siguiente) satisfacen, sin cambio de métrica, una propiedad de normalidad dada por un comportamiento potencial de la medida de un bola como función del radio, para radios chicos.

Como nosotros estamos interesados en describir contextos que pueden ser discretos o continuos, introducimos la siguiente definición que se adapta a ambos casos. Dado un espacio casi-métrico (Y, ρ), una medida μ sobre Y tal que las ρ-bolas son medibles y una constante $\beta > 0$, se dice que el espacio (Y, ρ, μ) es **β-normal** si existen dos constantes A_1 y A_2 positivas y finitas, y constantes $0 < K_1 \le 1 \le K_2 < \infty$ tales que si $K_1\mu(\{y\}) < r^\beta < K_2\mu(Y)$, entonces $A_1 r^\beta \le \mu(B_\rho(y, r)) \le A_2 r^\beta$.

Como ya hemos visto en el Teorema 57 de la sección precedente, propiedades de duplicación dadas en términos de medidas de bolas pueden reescribirse en términos de integrales de funciones suaves. Con el objeto de obtener clases cerradas en $\mathcal{E}$ será, también aquí, conveniente escribir la β-normalidad en términos del comportamiento de ciertas integrales de funciones continuas y al mismo tiempo explicitar todos los parámetros que definirán una clase de normalidad.

$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{N}(\beta, \vec{C}, \vec{K}, \rho_i)}}$ Sean $\beta > 0$, $\vec{C} = (C_1, C_2)$ y $\vec{K} = (K_1, K_2)$ con $0 < C_1 \le C_2 < \infty$ y $0 < K_1 \le 1 \le K_2 < \infty$ dados. Decimos que $(Y, \mu) \in \mathcal{N}(\beta, \vec{C}, \vec{K}, \rho_i)$ si $(Y, \mu) \in \mathcal{E}$ y para cada $y \in Y$ y $r > 0$ tales que $K_1\mu(\{y\}) < r^\beta < K_2$, se tiene que

$$C_1 r^\beta \le \int \varphi_{i,y,r}(x)\, d\mu(x) \le C_2 r^\beta,$$

donde $\varphi_{i,y,s}(z) = \varphi\left(\frac{\rho_i(y,z)}{s}\right)$ para $s > 0$, y φ es la función φ^γ con $\gamma = 2$ (ver Figura 3). Denotamos $\boldsymbol{\mathcal{N}(\beta, \rho_i) = \bigcup_{\vec{C}, \vec{K}} \mathcal{N}(\beta, \vec{C}, \vec{K}, \rho_i)}$.

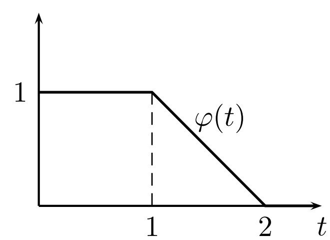


Figura 3: Función φ^γ con $\gamma = 2$

Es fácil ver que la normalidad definida a través de la integración de funciones suaves coincide con la clásica, y que $\mathcal{N}(\beta, \rho_i) = \mathcal{N}(\beta, \rho_j)$, para todo $i, j = 1, 2, 3$.

La siguiente proposición muestra que la normalidad implica la duplicación. Los resultados de la sección siguiente nos mostrarán que la recíproca no es cierta en general.

Proposición 59. *$\mathcal{N}(\beta, \rho_j) \subseteq \mathcal{D}_k(\rho_i)$ para todo $i, j, k = 1, 2, 3$ y $\beta > 0$.*

Demostración. Debido al Teorema 57 es suficiente ver que $\mathcal{N}(\beta, \rho_j) \subseteq \mathcal{D}_2(\rho_j)$ para todo $\beta > 0$ y $j = 1, 2, 3$. Supongamos que $(Y, \mu) \in \mathcal{N}(\beta, \vec{C}, \vec{K}, \rho_j)$, y tomemos $y \in Y$ y $r > 0$. Probaremos que $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_2(A, \rho_j)$ para alguna constante $A \ge 1$. Consideraremos tres casos de acuerdo con la relación entre el radio y la medida del punto. Para ello denotemos

$$r_1 = r(y) = [K_1\mu(\{y\})]^{1/\beta}, \qquad r_2 = K_2^{1/\beta}/2.$$

Supondremos que $r_1 < r_2$, puesto que en caso contrario $\mu(\{y\}) \geq \frac{K_2}{2^\beta K_1}$ y entonces

$$\int \varphi_{j,y,2r}(x)\, d\mu(x) \leq 1 \leq \frac{2^\beta K_1}{K_2} \int \varphi_{j,y,r}(x)\, d\mu(x)$$

para todo $r > 0$, con lo que la desigualdad que buscamos se cumplirá con cualquier $A \geq A_0 = \frac{2^\beta K_1}{K_2}$.

Caso 1. $0 < r \leq r_1/2$. Notar que para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente chico se tiene que

$$\int \varphi_{j,y,2r}(x)\, d\mu(x) \leq \int \varphi_{j,y,r_1}(x)\, d\mu(x) \leq \int \varphi_{j,y,r_1+\varepsilon}(x)\, d\mu(x) \leq C_2(r_1+\varepsilon)^\beta$$

Por consiguiente

$$\int \varphi_{j,y,2r}(x)\, d\mu(x) \leq C_2 r_1^\beta = C_2 K_1 \mu(\{y\}) \leq A_1 \int \varphi_{j,y,r}(x)\, d\mu(x),$$

con cualquier $A_1 \geq C_2 K_1$.

Caso 2. $r_1/2 < r < r_2$. En este caso pueden ocurrir dos posibilidades

$\boxed{\textbf{2.a}}$ **$r_1 < r < r_2$.** Aquí estamos suponiendo que tanto r^β como $(2r)^\beta$ están en el intervalo $(K_1\mu(\{y\}), K_2)$, por lo que

$$\int \varphi_{j,y,2r}(x)\, d\mu(x) \leq A_2 \int \varphi_{j,y,r}(x)\, d\mu(x),$$

siempre que $A_2 \geq \frac{C_2 2^\beta}{C_1}$.

$\boxed{\textbf{2.b}}$ **$r \leq r_1$.** En otras palabras, estamos suponiendo que

$$K_1\mu(\{y\}) < (2r)^\beta < K_2 \quad \text{y} \quad r^\beta \leq K_1\mu(\{y\}).$$

La última desigualdad implica que $r^\beta \leq K_1\mu(B_j(y,r))$. Luego

$$\int \varphi_{j,y,2r}(x)\, d\mu(x) \leq C_2 2^\beta r^\beta \leq A_3 \int \varphi_{j,y,r}(x)\, d\mu(x),$$

con $A_3 \geq C_2 2^\beta K_1$.

Caso 3. $r \geq r_2$. Debemos considerar dentro de este caso dos posibilidades

$\boxed{\textbf{3.a}}$ **$r < 2r_2$.** Por lo tanto $K_1\mu(\{y\}) < r^\beta < K_2 \leq (2r)^\beta$, y

$$\int \varphi_{j,y,2r}(x)\, d\mu(x) \leq 1 \leq \frac{2^\beta r^\beta}{K_2} \leq A_4 \int \varphi_{j,y,r}(x)\, d\mu(x),$$

tomando $A_4 \geq \frac{2^\beta}{K_2 C_1}$.

$\boxed{\textbf{3.b}}$ **$r \geq 2r_2$.** Para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente chico tenemos que

$$\int \varphi_{j,y,r}(x)\, d\mu(x) \geq \int \varphi_{j,y,(K_2-\varepsilon)^{1/\beta}}(x)\, d\mu(x) \geq C_1(K_2-\varepsilon)$$

Por consiguiente

$$\int \varphi_{j,y,r}(x)\, d\mu(x) \geq C_1 K_2.$$

Ya que por otra parte

$$\int \varphi_{j,y,2r}(x)\, d\mu(x) \leq 1 \leq \frac{K_2}{K_1},$$

la desigualdad deseada se cumple en este caso con $A_5 \geq \frac{1}{C_1 K_1}$.

Por lo tanto $(Y,\mu) \in \mathcal{D}_2(A,\rho_j)$ tomando $A = \text{máx}\{A_i : i = 0,1,2,3,4\}$. □

Notar que hemos probado que si $(Y,\mu) \in \mathcal{N}(\beta,\vec{C},\vec{K},\rho_j)$, entonces μ duplica sobre Y con constante de duplicación A que depende sólo de β, $\vec{C}$ y $\vec{K}$.

3. Pesos de Muckenhoupt en espacios de tipo homogéneo

Sea (Y,ρ,μ) un espacio de tipo homogéneo. Llamamos **peso** a toda función w no negativa, no trivial ($w \not\equiv 0$) y localmente integrable definida sobre Y. Dado $1 < p < \infty$, decimos que un peso w satisface la **condición $A_p = A_p(Y,\rho,\mu)$ de Muckenhoupt** si existe una constante C tal que la desigualdad

$$\left(\int_B w\, d\mu\right)\left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\, d\mu\right)^{p-1} \leq C\,(\mu(B))^p$$

vale para toda ρ-bola B en Y. Una referencia que ya es clásica en el tema en el contexto euclídeo es el libro de José García Cuerva y José Luis Rubio de Francia (ver [**21**]). Notemos que si $w \in A_p$ entonces $w^{-\frac{1}{p-1}}$ también es localmente integrable.

La relación básica entre la condición de Muckenhoupt y la propiedad de duplicación está dada en el siguiente resultado.

Proposición 60. *Si w es un peso de A_p en el espacio de tipo homogéneo (Y,ρ,μ) y ν es la medida sobre Y definida como $d\nu = w d\mu$, entonces (Y,ρ,ν) también es un espacio de tipo homogéneo.*

Demostración. Fijemos $y \in Y$, $r > 0$. Sean $\alpha > 1$ y $A \geq 1$ las constantes de duplicación para μ, y C una constante para la condición de Muckenhoupt de w. De la desigualdad de Hölder y la condición de Muckenhoupt tenemos

$$\begin{aligned}
\mu(B_\rho(y,r)) &= \int_{B_\rho(y,r)} w^{\frac{1}{p}} w^{-\frac{1}{p}}\, d\mu \\
&\leq \left(\int_{B_\rho(y,r)} w\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_\rho(y,\alpha r)} w^{-\frac{1}{p-1}}\, d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \nu(B_\rho(y,r))^{\frac{1}{p}} \left(\frac{C}{\int_{B_\rho(y,\alpha r)} w\, d\mu}\right)^{\frac{1}{p}} \mu(B_\rho(y,\alpha r)) \\
&= \left(C\frac{\nu(B_\rho(y,r))}{\nu(B_\rho(y,\alpha r))}\right)^{\frac{1}{p}} \mu(B_\rho(y,\alpha r)).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\nu(B_\rho(y,r))}{\nu(B_\rho(y,\alpha r))} \geq \frac{1}{C}\left(\frac{\mu(B_\rho(y,r))}{\mu(B_\rho(y,\alpha r))}\right)^p \geq \frac{1}{CA^p},$$

y por lo tanto ν es una medida duplicante sobre Y con constante CA^p. □

El principal resultado sobre las clases A_p es un teorema de caracterización debido a Muckenhoupt ([**33**]) que nos dará un punto de vista para la condición A_p que, aunque más abstracto, será más útil a la hora de probar la completitud, ya que se adapta mejor a la convergencia débil estrella de medidas. Escribimos este resultado en dos teoremas separadamente. El primero de ellos se prueba de un modo enteramente similar al caso euclídeo (ver por ejemplo [**14**]). El segundo, el cual establece la validez del recíproco del primero, fue probado por Aimar y Macías en [**3**], extendiendo a espacios de tipo homogéneo generales un resultado de Christ y Fefferman ([**13**]).

Teorema 61. *Sea (Y,ρ,μ) un espacio de tipo homogéneo. Sean $1<p<\infty$ y w un peso en Y tal que el operador maximal de Hardy-Littlewood satisface*

$$\int |Mf|^p\, w\, d\mu \leq C \int |f|^p w\, d\mu$$

para alguna constante C y para toda función $f \in L^1_{loc}$. Entonces $w \in A_p(Y,\rho,\mu)$.

Teorema 62. *Sea (Y,ρ,μ) un espacio de tipo homogéneo y sea $w \in A_p$ para algún p, con $1<p<\infty$. Entonces el operador maximal de Hardy-Littlewood es acotado en $L^p(w)$, es decir*

$$\int |Mf|^p\, w\, d\mu \leq C \int |f|^p w\, d\mu$$

para toda función $f \in L^1_{loc}$, donde C depende sólo de las constantes geométricas, de p y de la constante para la desigualdad de Muckenhoupt de w.

En los dos teoremas anteriores Mf denota la maximal con respecto a ρ asociada a la medida duplicante μ en el espacio (Y,ρ,μ). Mencionamos que el Teorema 61 tiene una formulación aún más fuerte que enunciamos y probamos a continuación.

Teorema 63. *Sea (Y,ρ,μ) un espacio de tipo homogéneo y sea ν una medida de Radon positiva y finita sobre las ρ-bolas. Si existe una constante C y un $1<p<\infty$ de modo que la desigualdad*

$$\int |Mf|^p\, d\nu \leq C \int |f|^p\, d\nu \tag{6.3}$$

vale para toda $f \in L^1_{loc}(Y,\rho,\mu)$, entonces ν duplica sobre Y y $\nu \ll \mu$. Por consiguiente $w = \frac{d\nu}{d\mu} \in A_p(Y,\rho,\mu)$.

Demostración. Sea B una ρ-bola en Y y sea E un boreliano contenido en B. Notar que

$$M\mathcal{X}_E(y) \geq \frac{\mu(E)}{\mu(B)},$$

para todo $y \in B$. Luego tomando $f = \mathcal{X}_E$ en (6.3) podemos concluir que

$$\left(\frac{\mu(E)}{\mu(B)}\right)^p \nu(B) \leq C\nu(E),$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\mu(E)}{\mu(B)} \leq C^{1/p} \left(\frac{\nu(E)}{\nu(B)}\right)^{1/p}.$$

Observar que la última desigualdad implica en particular la duplicación de la medida ν. La desigualdad anterior implica también una similar cambiando bolas por "cubos de Christ". En efecto, dados un cubo de Christ Q y un subconjunto medible E de Q, denotando por B y $\widetilde{B}$ a las bolas provistas por el teorema de Christ (Teorema 27 del Capítulo 1) tales que $B \subseteq Q \subseteq \widetilde{B}$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\mu(E)}{\mu(Q)} &\leq \frac{\mu(E)}{\mu(B)} \\ &\leq A\,\frac{\mu(E)}{\mu(\widetilde{B})} \\ &\leq AC^{1/p} \left(\frac{\nu(E)}{\nu(\widetilde{B})}\right)^{1/p} \\ &\leq AC^{1/p} \left(\frac{\nu(E)}{\nu(Q)}\right)^{1/p}, \end{aligned}$$

donde la constante A proviene de la propiedad de duplicación de μ. Luego, si $\nu(E)/\nu(Q) < \alpha$ para algún $0 < \alpha < 1$, entonces tendremos que $\mu(E)/\mu(Q) < A(C\alpha)^{1/p}$. Si ahora escribimos en lugar de E su complemento relativo al cubo Q, tendremos que

$$1 - \frac{\nu(E)}{\nu(Q)} = \frac{\nu(Q - E)}{\nu(Q)} < \alpha$$

implicará

$$1 - \frac{\mu(E)}{\mu(Q)} = \frac{\mu(Q - E)}{\mu(Q)} < A(C\alpha)^{1/p}.$$

En definitiva

$$\frac{\mu(E)}{\mu(Q)} \leq 1 - A(C\alpha)^{1/p} \Longrightarrow \frac{\nu(E)}{\nu(Q)} \leq 1 - \alpha. \tag{6.4}$$

Fijando $0 < \alpha < \text{mín}\{1, 1/(CA^p)\}$ se tiene que $\beta = 1 - A(C\alpha)^{1/p}$ también satisface $0 < \beta < 1$. Utilizaremos la implicación (6.4) para ver que ν es absolutamente continua con respecto a μ. En efecto, supongamos que existe un boreliano E tal que $\mu(E) = 0$ y $\nu(E) > 0$. Por la regularidad de la medida ν existe un abierto G que contiene a E tal que $\nu(G) < \nu(E)/(1 - \alpha)$. Por el Lema 29 del Capítulo 1, y puesto que tanto μ como ν duplican, tenemos que G es una unión disjunta de cubos de Christ, digamos $G = \bigcup_j Q_j$, salvo conjuntos μ y ν despreciables. Es decir que $\nu(G) = \sum_j \nu(Q_j)$. Ya que para cada j se tiene $0 = \mu(E \cap Q_j) \leq \beta\mu(Q_j)$, debe ocurrir que $\nu(E \cap Q_j) \leq (1 - \alpha)\nu(Q_j)$. Sumando en j tenemos que $\nu(E) \leq (1 - \alpha)\nu(G)$, lo que contradice la elección de G.

Finalmente el teorema de Radon-Nikodym implica que existe una función $w \in L^1_{loc}(Y, \rho, \mu)$ tal que $d\nu = w\, d\mu$, y el Teorema 61 nos permite concluir que $w \in A_p(Y, \rho, \mu)$. □

En la demostración de la completitud de las clases de Muckenhoupt en la Sección 5, será importante la siguiente observación elemental.

Observación 3. La desigualdad (6.3) en la hipótesis del Teorema 63, puede sustituirse por

$$\int \left(\frac{1}{\mu(B_\rho(x,r))} \int_{B_\rho(x,r)} |f(y)|\, d\mu(y) \right)^p d\nu(x) \leq C \int |f(y)|^p\, d\nu(y) \tag{6.5}$$

para todo $r > 0$.

Como siempre, cuando estemos interesados en probar completitud, será conveniente disponer de una versión "suave" de la definición de la clase A_p. Sea (Y, ρ, μ) un espacio de tipo homogéneo y d una distancia en Y tal que $d^\xi \simeq \rho$ para algún $\xi \geq 1$. Usaremos la expresión $f \in \mathrm{Lip}(Y)$ para decir que $|f(x) - f(y)| \leq c d(x,y)$ para todo $x, y \in Y$, es decir $\mathrm{Lip}(Y) = \bigcup_{c>0} \mathrm{Lip}_c$. Dado $1 < p < \infty$ decimos que $\boldsymbol{w \in \mathcal{A}_p = \mathcal{A}_p(Y, \rho, \mu)}$ si w es una función no negativa localmente integrable en Y, y existe una constante $C \geq 1$ tal que la desigualdad

$$\int \left(\frac{1}{\int \varphi_{x,r}(y)\, d\mu(y)} \int |f(y)| \varphi_{x,r}(y)\, d\mu(y) \right)^p w(x)\, d\mu(x) \leq C \int |f(y)|^p w(y)\, d\mu(y)$$

vale para toda función $f \in \mathrm{Lip}(Y)$ y para todo $r > 0$. Aquí $\varphi_{x,r}(y) = \varphi\left(\frac{\rho(x,y)}{r}\right)$ para $r > 0$, y φ es la función φ^γ con $\gamma = 2$ (ver Figura 4).

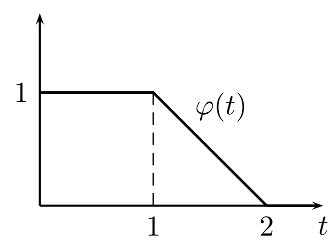


Figura 4: Función φ^γ con $\gamma = 2$

El siguiente resultado establece que esta definición coincide con la clásica.

Proposición 64. *Sea (Y, ρ, μ) un espacio de tipo homogéneo y $1 < p < \infty$. Entonces $A_p(Y, \rho, \mu) = \mathcal{A}_p(Y, \rho, \mu)$.*

Demostración. Comencemos suponiendo que $w \in A_p(Y, \rho, \mu)$. Para cada $x \in Y$, $r > 0$ y $f \in \mathrm{Lip}(Y)$ dados, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\int \varphi_{x,r}(y)\, d\mu(y)} \int |f(y)| \varphi_{x,r}(y)\, d\mu(y) &\leq \frac{1}{\mu(B_\rho(x,r))} \int_{B_\rho(x,2r)} |f(y)|\, d\mu(y) \\ &\leq A \frac{1}{\mu(B_\rho(x,2r))} \int_{B_\rho(x,2r)} |f(y)|\, d\mu(y) \\ &\leq A\, Mf(x), \end{aligned}$$

donde A proviene de la constante de duplicación para μ. Por otra parte, el Teorema 62 nos permite asegurar que

$$\int |Mf|^p w\, d\mu \leq C \int |f|^p w\, d\mu$$

para alguna constante C. Luego

$$\int \left(\frac{1}{\int \varphi_{x,r}(y)\, d\mu(y)} \int |f(y)| \varphi_{x,r}(y)\, d\mu(y) \right)^p w(x)\, d\mu(x) \leq A^p C \int |f|^p w\, d\mu.$$

Recíprocamente, supongamos que $w \in \mathcal{A}_p(Y,\rho,\mu)$. Para ver que esto implica que w pertenece $A_p(Y,\rho,\mu)$, sea $B = B_\rho(z,s)$ una ρ-bola en Y. Si Λ denota la constante para la desigualdad triangular de ρ entonces $B \subseteq B_\rho(x, 2\Lambda s)$ para todo $x \in B$. Por la propiedad de duplicación de μ, existe una constante $A \geq 1$ tal que

$$\int \varphi_{x,2\Lambda s}(y)\, d\mu(y) \leq \mu(B_\rho(x, 4\Lambda s)) \leq A\mu(B),$$

para todo $x \in B$. Luego

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)|\, d\mu(y) \leq A \frac{1}{\int \varphi_{x,4\Lambda s}(y)\, d\mu(y)} \int |f(y)| \varphi_{x,4\Lambda s}(y)\, d\mu(y)$$

para toda $f \in L^1_{loc}$ y todo $x \in B$. De lo anterior y de la hipótesis se deduce que

$$\begin{aligned} \left(\int_B w\, d\mu \right) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f|\, d\mu \right)^p &= \int_B \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f|\, d\mu \right)^p w\, d\mu \\ &\leq A^p C \int |f|^p w\, d\mu, \end{aligned} \tag{6.6}$$

para toda $f \in \mathrm{Lip}(Y)$. En particular tenemos que la desigualdad anterior vale para toda función $g \in \mathrm{Lip}(Y)$ que tenga soporte dentro de B. Por otra parte, la función w_k definida como

$$w_k = \begin{cases} w & \text{si } w \geq \frac{1}{k}, \\ \frac{1}{k} & \text{si } w < \frac{1}{k} \end{cases}$$

también es un peso para cada número natural k. Pero ahora $w_k^{-\frac{1}{p-1}}$ está acotado superiormente y por lo tanto pertenece tanto a $L^1(B, d\mu)$ como a $L^p(B, w d\mu)$. También es claro que $w_{k+1} \leq w_k$ y que $w_k^{-\frac{1}{p-1}}$ crece a $w^{-\frac{1}{p-1}}$ cuando k tiende a infinito. Afirmamos que el conjunto de las todas las funciones en $\mathrm{Lip}(Y)$ con soporte contenido en B es denso en $L^p(B, w d\mu) \cap L^1(B, d\mu)$. Suponiendo que esta afirmación es cierta, para cada k fijo podemos conseguir una sucesión $\{g_n\}$ de funciones en $\mathrm{Lip}(B)$ que converge en las normas de $L^1(B, d\mu)$ y de $L^p(B, w d\mu)$ simultáneamente a $\int_B w_k^{-\frac{1}{p-1}}\, d\mu$ y $\int_B w_k^{-\frac{p}{p-1}} w\, d\mu$ respectivamente. Aplicando (6.6) a esa sucesión $\{g_n\}$ tenemos

$$\left(\int_B w\, d\mu \right) \left(\int_B g_n\, d\mu \right)^p \leq A^p C\, (\mu(B))^p \int g_n^p w\, d\mu,$$

para todo n. Por la convergencia en las dos normas mencionadas se tiene que

$$\left(\int_B w\, d\mu \right) \left(\int_B w_k^{-\frac{1}{p-1}}\, d\mu \right)^p \leq A^p C\, (\mu(B))^p \int w_k^{-\frac{p}{p-1}} w\, d\mu,$$

para cada k. Luego la condición A_p para el peso w se deduce haciendo $k \to \infty$.

Para que el teorema quede demostrado sólo resta probar la afirmación, es decir, probaremos ahora que el conjunto $\{g \in \mathrm{Lip}(Y) : \mathrm{sop}\, g \subseteq B\}$ es denso en $L^p(B, wd\mu) \cap L^1(B, d\mu)$. Para ello seguiremos la idea de construcción expuesta en [**1**]. Comencemos usando un esquema que es habitual en teoría de integración que permite reducir el problema a aproximar funciones características de conjuntos borelianos dentro de la bola B dada. Dado un boreliano $E \subseteq B$ y $\varepsilon > 0$, por la regularidad de la medida μ existen un abierto G y un compacto K tales que $K \subseteq E \subseteq G$ y $\mu(G-K) < \varepsilon$. Por otra parte, si d es una métrica tal que d^ξ es equivalente a ρ para algún número real ξ y $\gamma = d(K, B^c)/2$, entonces $d\left([K]_{\gamma,d}, B^c\right) \geq \gamma > 0$. Sea $\widetilde{G} := [K]_{\frac{\gamma}{2},d} \cap G$. Entonces $\widetilde{G}$ es un abierto con clausura contenida en B, por lo que la función g definida como

$$g(x) = \frac{d(x, \widetilde{G}^c)}{d(x, \widetilde{G}^c) + d(x, K)}$$

tiene soporte en B. Además es Lipschitz por ser el producto de funciones Lipschitz y acotadas (notar que la función $d(x, \widetilde{G}^c) + d(x, K)$ es positiva, pues si se anulara tendríamos $\widetilde{G}^c \cap K \neq \emptyset$, lo cual es absurdo ya que $K \subseteq \widetilde{G}$). Finalmente observemos que $g(x) = \mathcal{X}_E(x)$ para todo $x \in G^c \cup K$, por lo que

$$\int_B |g - \mathcal{X}_E|\, d\mu \leq 2\mu(G-K) < 2\varepsilon,$$

y

$$\int_B |g - \mathcal{X}_E|^p w\, d\mu \leq 2^p \int_{G-K} w\, d\mu.$$

Estas dos desigualdades junto a la absoluta continuidad de la integral con respecto a μ, implican que g está cerca de $\mathcal{X}_E$ simultáneamente en la normas de $L^1(B, d\mu)$ y de $L^p(B, wd\mu)$. $\square$

4. Subespacios de $\mathcal{E}$: clases de Muckenhoupt

Sea (X, ρ) un espacio casi métrico compacto con la PHD, y sea d una distancia en X tal que $d^\xi \simeq \rho$ para algún $\xi \geq 1$. Denotamos como antes $\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = d$ y $\rho_3 = d^\xi$. Para cada $i = 1, 2, 3$, y para $1 < p < \infty$ definimos la siguiente clase en $\mathcal{E}$.

$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A}_p(\rho_i, \mu, C)}}$ Dado $(Y, \mu) \in \mathcal{E}$ con μ duplicante sobre Y, decimos que $(Y, \nu) \in \mathcal{A}_p(\rho_i, \mu, C)$ si $(Y, \nu) \in \mathcal{E}$ y $d\nu = wd\mu$ para algún peso w en Y tal que la desigualdad

$$\int \left(\frac{1}{\int \varphi_{i,x,r}(y)\, d\mu(y)} \int |f(y)| \varphi_{i,x,r}(y)\, d\mu(y) \right)^p w(x)\, d\mu(x) \leq C \int |f|^p w\, d\mu$$

vale para toda función $f \in \mathrm{Lip}(X)$ y para todo $r > 0$, donde $\varphi_{i,x,r}(y) = \varphi\left(\frac{\rho_i(x,y)}{r}\right)$ con φ como en la sección anterior. Denotamos $\boldsymbol{\mathcal{A}_p(\rho_i, \mu) = \bigcup_{C \geq 1} \mathcal{A}_p(\rho_i, \mu, C)}$.

Notemos, en primer lugar, que la validez de la desigualdad precendente para toda $f \in \mathrm{Lip}(X)$ con respecto a $\rho_2 = d$ no es más restrictiva que la necesaria para la definición que dimos de $\mathcal{A}_p$ en la sección precedente: $f \in \mathrm{Lip}(Y)$. En efecto, en [**1**] se prueba un teorema en espacios casi-métricos de orden α que tiene como caso particular el siguiente resultado que se obtiene del método de extensión de Whitney.

Teorema 65. *Sea (X,d) un espacio métrico compacto que posee la PHD. Sea Y un subconjunto cerrado propio de X. Entonces existe un operador de extensión lineal y continuo de* $\mathrm{Lip}(Y)$ *en* $\mathrm{Lip}(X)$.

Los ejemplos más clásicos de pesos A_p en la recta son las potencias del módulo: $w(x) = |x|^\alpha$. Si $-1 < \alpha < p-1$ entonces w está en la clase A_p. Por la Proposición 60 tenemos que $|x|^\alpha dx$ duplica en $\mathbb{R}$ para estos valores de α.

Notemos, de paso, que salvo en el caso $\alpha = 0$ la medida $|x|^\alpha dx$ no define en $\mathbb{R}$ una estructura de espacio β-normal para ningún β. Luego, como observábamos en la Sección 2, existen espacios de tipo homogéneo que no son normales.

La Proposición 60 prueba que $\mathcal{A}_p(\rho_i,\mu,C) \subseteq \mathcal{D}_1(\alpha, CA^p, \rho_i)$, siendo α y A las constantes de duplicación de μ sobre Y. Como consecuencia del Teorema 57 las clases $\mathcal{A}_p$ son subclases de cualesquiera de las $\mathcal{D}_j$. También es cierto, a partir de la Proposición 64, que $\mathcal{A}_p(\rho_i,\mu) = \mathcal{A}_p(\rho_j,\mu)$, para todo $i,j = 1,2,3$.

5. Completitud de la duplicación, de la normalidad y de A_p

Dado un espacio casi-métrico (X,ρ), en esta sección estamos interesados en el subespacio de $\mathcal{E}$ formado por aquellos $(Y,\mu) \in \mathcal{E}$ que son espacios de tipo homogéneo. En general este subespacio de $\mathcal{E}$ no es cerrado y por lo tanto no nos permite la aplicación del teorema del punto fijo de Banach. En efecto, el conjunto $\mathcal{D}_1(\alpha,\infty,\rho) := \bigcup_{A\geq 1} \mathcal{D}_1(\alpha,A,\rho)$ no es cerrado en $\mathcal{E}$. Por ejemplo, consideremos $X = [0,1]$ con ρ la distancia usual. Tomemos $Y_n = [0,1]$ para cada n y μ_n la medida con densidad $f_n(t) = n-1+1/n$ sobre $[0,1/n]$ y $f_n(t) = 1/n$ sobre $(1/n,1]$, es decir, $d\mu_n = f_n dx$. Es fácil ver que $\mu_n \xrightarrow{\delta_K} \delta_0$, y que cada $(Y_n,\mu_n) \in \mathcal{D}_1(2,A_n,\rho)$, con $A_n = 2n(n-1+1/n)$ como una posible constante de duplicación. En realidad es posible ver que A_n no puede ser acotada por arriba, pues tomando las bolas $B(x,r) = B(2/n,1/n)$ vemos que $A_n \geq \frac{n^2-n+4}{2}$. Ya que en cada espacio de tipo homogéneo los átomos (un átomo es un punto con medida positiva) son aislados (ver [**27**]), el espacio $([0,1],|\cdot|,\delta_0)$ no puede ser un espacio de tipo homogéneo.

Al resolver problemas de análisis real en espacios de tipo homogéneo es usual cambiar de una ρ_i a otra según la conveniencia. Éste no es el caso para los resultados de esta sección, por lo que trabajaremos con una fija: la métrica d. Por lo tanto escribiremos $\mathcal{D}_j(\alpha,A)$ para denotar el conjunto $\mathcal{D}_j(\alpha,A,d)$ para $j = 1,3$, y $\mathcal{D}_2(\alpha,A,\varphi) := \mathcal{D}_2(\alpha,A,\varphi,d)$. También omitiremos mencionar la métrica d al referirnos a las clases $\mathcal{N}$ y $\mathcal{A}_p$. Además usaremos la notación B_d en lugar de B_2 para las d-bolas, y $\varphi_{y,r} := \varphi_{2,y,r}$.

Teorema 66. *Sean $A \geq 1$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ y $0 < K_1 \leq 1 \leq K_2 < \infty$ constantes dadas, y sea ϕ una función continua no negativa definida sobre $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que*

$\varphi(0) > 0$. *Entonces* $\mathcal{D}_1(\alpha, A)$, $\mathcal{D}_2(\alpha, A, \phi)$, $\mathcal{D}_3(\alpha, A)$ *y* $\mathcal{N}(\beta, \vec{C}, \vec{K})$ *son subconjuntos cerrados de* $(\mathscr{X}, \delta)$.

Demostración. Debido al Teorema 38, para probar que $\mathcal{D}_1(\alpha, A)$ es cerrado sólo debemos probar que dada una sucesión $\{(Y_n, \mu_n) : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathcal{D}_1(\alpha, A)$ tal que $(Y_n, \mu_n) \xrightarrow{\delta} (Y, \mu)$, se cumple que

$$\mu(B_d(y, \alpha r)) \leq A\mu(B_d(y, r + \varepsilon)),$$

para todo $y \in Y$, $r > 0$ y $\varepsilon > 0$. En efecto, para cada número natural m sea φ^m la función continua definida sobre $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tal que $\varphi^m \equiv 1$ sobre $[0, 1]$, $\varphi^m \equiv 0$ fuera $[0, 1 + 1/m)$ y φ^m es lineal en $[1, 1 + 1/m]$ (es decir, la función φ^γ con $\gamma = 1 + 1/m$, ver Figura 5). Entonces para

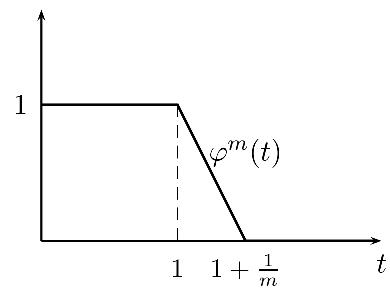


Figura 5: Función φ^m

cada $s > 0$ tenemos que $\varphi^m(d(y, x)/s) = 1$ para todo $x \in B_d(y, s)$, y que el conjunto donde $\varphi^m(d(y, \cdot)/s)$ es distinto de cero está contenido en $B_d(y, s + s/m)$. Además, dado $\eta > 0$ existe N_η tal que para cada $n \geq N_\eta$ podemos elegir $y_n \in Y_n$ satisfaciendo $d(y, y_n) < \eta$. Entonces para todo $s > 0$ y todo $n \geq N_\eta$ tenemos que $B_d(y_n, s) \subseteq B_d(y, s + \eta)$ y $B_d(y, s) \subseteq B_d(y_n, s + \eta)$. Luego para cada $m \geq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu\left(B_d(y, \alpha r)\right) &\leq \int \varphi^m\left(\frac{d(y,x)}{\alpha r}\right) d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \varphi^m\left(\frac{d(y,x)}{\alpha r}\right) d\mu_n(x) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n\Big(B_d\big(y, \alpha r(1 + 1/m)\big)\Big) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n\Big(B_d\big(y_n, \alpha r(1 + 1/m) + \eta\big)\Big) \\
&\leq A \liminf_{n\to\infty} \mu_n\left(B_d\left(y_n, r\left(1 + \frac{1}{m}\right) + \frac{\eta}{\alpha} + \frac{\alpha - 1}{\alpha}\eta\right)\right) \\
&= A \liminf_{n\to\infty} \mu_n\Big(B_d\big(y_n, r(1 + 1/m) + \eta\big)\Big) \\
&\leq A \liminf_{n\to\infty} \mu_n\Big(B_d\big(y, r(1 + 1/m) + 2\eta\big)\Big) \\
&\leq A \liminf_{n\to\infty} \int \varphi^m\left(\frac{d(y,x)}{r(1 + 1/m) + 2\eta}\right) d\mu_n(x) \\
&= A \int \varphi^m\left(\frac{d(y,x)}{r(1 + 1/m) + 2\eta}\right) d\mu(x)
\end{aligned}$$

$$\leq \quad A\mu\Big(B_d\big(y,(1+1/m)[r(1+1/m)+2\eta]\big)\Big)\,,$$

y el resultado se obtiene tomando $m \geq \frac{3r+4}{\varepsilon}$ y $\eta = \frac{1}{m}$.

Para probar que $\mathcal{D}_2(A,\alpha,\phi)$ es cerrado, tomemos una sucesión $\{(Y_n,\mu_n)\}$ en $\mathcal{D}_2(A,\alpha,\phi)$ tal que $(Y_n,\mu_n) \xrightarrow{\delta} (Y,\mu)$ y veamos que

$$\int \phi_{y,\alpha r}(x)\, d\mu(x) \leq A \int \phi_{y,r}(x)\, d\mu(x),$$

para todo $y \in Y$ y $r > 0$. Comencemos observando que si $\{g_n\}$ es una sucesión de funciones continuas sobre X que converge uniformemente a una función continua g, entonces

$$\int [g_n - g]\, d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{6.7}$$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ dado. De la convergencia uniforme de g_n a g tenemos que existe N_ε tal que la desigualdad

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

vale para todo $x \in X$ y todo $n \geq N_\varepsilon$. Entonces si $n \geq N_\varepsilon$ se tiene que

$$\left| \int [g_n - g]\, d\mu_n \right| \leq \int |g_n - g|\, d\mu_n < \varepsilon,$$

pues $\mu_n(X) = 1$ para todo n. Luego (6.7) vale.

Ya que cada $(Y_n,\mu_n) \in \mathcal{D}_2(A,\alpha,\phi)$, para $z \in Y_n$ y $r > 0$, tenemos

$$\int \phi_{z,\alpha r}\, d\mu_n \leq A \int \phi_{z,r}\, d\mu_n.$$

Fijemos $y \in Y$. Debido a que $Y_n \xrightarrow{\delta_H} Y$, existe una sucesión $\{y_n\}$ de puntos tal que $y_n \in Y_n$ y $y_n \to y$. Ya que $|d(y_n,x) - d(y,x)| \leq d(y_n,y)$ y ϕ es uniformemente continua, tenemos que $\phi_{y_n,t}$ converge a $\phi_{y,t}$ cuando $n \to \infty$ uniformemente en X, para cada $t > 0$ fijo. Este hecho y (6.7) implican

$$\int [\phi_{y_n,t} - \phi_{y,t}]\, d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{6.8}$$

Por otra parte, por la convergencia débil estrella de μ_n a μ, tomando $\phi_{y,t}$ como función test tenemos

$$\int \phi_{y,t}\, d\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int \phi_{y,t}\, d\mu. \tag{6.9}$$

Finalmente, para todo $r > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \int \phi_{y,\alpha r}\, d\mu_n &\leq \int [\phi_{y,\alpha r} - \phi_{y_n,\alpha r}]\, d\mu_n + A \int \phi_{y_n,r}\, d\mu_n \\ &= \int [\phi_{y,\alpha r} - \phi_{y_n,\alpha r}]\, d\mu_n + A \int [\phi_{y_n,r} - \phi_{y,r}]\, d\mu_n + A \int \phi_{y,r}\, d\mu_n, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue de (6.8) y (6.9), tomando límite cuando $n \to \infty$.

Veamos ahora que $\mathcal{D}_3(\alpha, A)$ es cerrado. Tomemos $\{(Y_n, \mu_n) : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathcal{D}_3(\alpha, A)$ tal que $(Y_n, \mu_n) \xrightarrow{\delta} (Y, \mu)$. Para probar que $(Y, \mu) \in \mathcal{D}_3(\alpha, A)$, fijemos $y, z \in Y$ y $r > 0$ tales que $d(y, z) < \alpha r$ y $\varepsilon > 0$. Debemos ver que

$$\mu(B_d(y, r)) \leq A\mu(B_d(z, r + \varepsilon)).$$

En efecto, sea $\eta > 0$ fijo y para cada número natural m sea φ^m la función definida al comienzo de la prueba (ver Figura 5). Sea $\varepsilon_0 = \text{mín}\{\frac{\alpha r - d(y,z)}{2}, \eta\} > 0$. Ya que $Y_n \xrightarrow{\delta_H} Y$, existe $N = N(\varepsilon_0)$ tal que $Y \subseteq [Y_n]_{\varepsilon_0, d}$ si $n \geq N$, y por la compacidad para cada $n \geq N$ podemos elegir $y_n, z_n \in Y_n$ tal que $d(y_n, y) < \varepsilon_0$ y $d(z_n, z) < \varepsilon_0$. Entonces $d(y_n, z_n) < \alpha r$ para cada $n \geq N$. Además tenemos que $d(y_n, y) < \eta$ y $d(z_n, z) < \eta$ para todo $n \geq N$, por lo que $B_d(y_n, s) \subseteq B_d(y, s + \eta)$, $B_d(y, s) \subseteq B_d(y_n, s + \eta)$, $B_d(z_n, s) \subseteq B_d(z, s + \eta)$ y $B_d(z, s) \subseteq B_d(z_n, s + \eta)$, para todo $s > 0$. Luego, para $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mu\left(B_d(y, r)\right) &\leq \int \varphi^m\left(\frac{d(y, x)}{r}\right) d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \varphi^m\left(\frac{d(y, x)}{r}\right) d\mu_n(x) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n\Big(B_d\big(y, r(1 + 1/m)\big)\Big) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n\Big(B_d\big(y_n, r(1 + 1/m) + \eta\big)\Big) \\
&\leq A \liminf_{n\to\infty} \mu_n\Big(B_d\big(z_n, r(1 + 1/m) + 2\eta\big)\Big) \\
&\leq A \liminf_{n\to\infty} \mu_n\Big(B_d\big(z, r(1 + 1/m) + 3\eta\big)\Big) \\
&\leq A \liminf_{n\to\infty} \int \varphi^m\left(\frac{d(z, x)}{r(1 + 1/m) + 3\eta}\right) d\mu_n(x) \\
&= A \int \varphi^m\left(\frac{d(z, x)}{r(1 + 1/m) + 3\eta}\right) d\mu(x) \\
&\leq A\mu\Big(B_d\big(z, (1 + 1/m)[r(1 + 1/m) + 3\eta]\big)\Big).
\end{aligned}$$

La desigualdad deseada se obtiene tomando $m \geq \frac{3(r+3)}{\varepsilon}$ and $\eta = \frac{1}{m}$.

Finalmente probemos que $\mathcal{N}(\beta, \vec{C}, \vec{K})$ es cerrado. Sea $\{(Y_n, \mu_n) : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en $\mathcal{N}(\beta, \vec{C}, \vec{K})$ tal que $(Y_n, \mu_n) \xrightarrow{\delta} (Y, \mu)$. Fijemos $y \in Y$ y $r > 0$ tales que $K_1\mu(\{y\}) < r < K_2$. Ya que $Y_n \xrightarrow{\delta_H} Y$, existe una sucesión $\{y_n\}$ de puntos tales que $y_n \in Y_n$ y $y_n \to y$. Puesto que $(Y_n, \mu_n) \in \mathcal{N}(\beta, \vec{C}, \vec{K})$, tenemos para cada $n \in \mathbb{N}$ que

$$C_1 s^\beta \leq \int \varphi_{y_n, s}(x)\, d\mu_n(x) \leq C_2 s^\beta, \tag{6.10}$$

para todo $s > 0$ tal que $K_1\mu_n(\{y_n\}) < s < K_2$. Afirmamos que el r elegido satisface estas desigualdades para todo n suficientemente grande. En efecto, ya que esto es trivial cuando $\mu(\{y\}) = 0$, vamos a suponer $\mu(\{y\}) > 0$. Notar que debido a la Proposición 59 y la completitud de la propiedad de duplicación que acabamos de probar, tenemos que (Y, μ) es un espacio de tipo homogéneo. Luego el punto y debe ser aislado (ver [**27**]). Entonces existe $\eta > 0$ tal que $K \cap Y = \{y\}$, siendo $K = \overline{B(y, \eta)}$. Ya que K es un compacto en X y μ tiene soporte en Y, tenemos que

$$\mu(\{y\}) = \mu(K) \geq \limsup_n \mu_n(K)$$

(ver desigualdad (3.1), pág. 39). Puesto que partimos del supuesto $\mu(\{y\}) < r/K_1$, existe N_0 tal que si $n \geq N_0$ entonces $\mu_n(K) < r/K_1$. Pero ya que $y_n \to y$, sabemos que existe N_1 tal que si $n \geq N_1$ entonces $y_n \in K$, y por lo tanto $\mu_n(\{y_n\}) \leq \mu_n(K)$. Luego $\mu_n(\{y_n\}) < r/K_1$ para todo $n \geq \max\{N_0, N_1\}$, lo que prueba la afirmación. Escribimos

$$\begin{aligned}\int \varphi_{y,r}(x)\, d\mu_n(x) &= \int [\varphi_{y,r}(x) - \varphi_{y_n,r}(x)]\, d\mu_n(x) \\ &\quad + \int \varphi_{y_n,r}(x)\, d\mu_n(x).\end{aligned}$$

Entonces para n suficientemente grande, de (6.10) tenemos que

$$C_1 r^\beta + \int [\varphi_{y,r} - \varphi_{y_n,r}]\, d\mu_n \leq \int \varphi_{y,r}\, d\mu_n \leq \int [\varphi_{y,r} - \varphi_{y_n,r}]\, d\mu_n + C_2 r^\beta,$$

y el resultado se obtiene de (6.8) y (6.9), haciendo tender n a infinito. $\square$

A continuación probaremos una propiedad que en cierto sentido puede interpretarse como la completitud de las clases de Muckenhoupt. Recordemos que en la definición de $\mathcal{A}_p$ estamos fijando ahora la métrica d, es decir, con $\mathcal{A}_p(\mu, C)$ estamos denotando al conjunto $\mathcal{A}_p(d, \mu, C)$.

TEOREMA 67. *Sea (X, ρ) un espacio casi-métrico compacto con la PHD y sean $\{Y_n\}$, $\{\mu_n\}$ y $\{w_n\}$ sucesiones de subespacios, de medidas y de pesos tales que*

(a) *$\{(Y_n, \mu_n)\}$ es una familia uniforme de e.t.h. en $\mathcal{E}$;*
(b) *$(Y_n, \mu_n) \xrightarrow{\delta} (Y, \mu)$;*
(c) *$(Y_n, w_n d\mu_n) \in \mathcal{A}_p(\mu_n, C)$ para todo n;*
(d) *$(Y_n, w_n d\mu_n) \xrightarrow{\delta} (Y, d\nu)$.*

Entonces $(Y, \nu) \in \mathcal{A}_p(\mu, C)$.

DEMOSTRACIÓN. Para abreviar la escritura usaremos, sólo dentro de esta demostración, la notación $\mu_\infty = \mu$. Dados $f \in \mathrm{Lip}(X)$ y $r > 0$ fijos, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definimos para $x \in X$

$$\mathscr{M}_n f(x, r) = \mathscr{M}_{\mu_n} f(x, r) = \frac{1}{\int \varphi_{x,r}(y)\, d\mu_n(y)} \int |f(y)| \varphi_{x,r}(y)\, d\mu_n(y),$$

siempre que el denominador no se anule, y en caso contrario tomaremos $\mathscr{M}_n f(x, r) = 0$. Comenzamos probando que, para cada $r > 0$ fijo, $\mathscr{M}_n f(\cdot, r)$ converge uniformemente a $\mathscr{M}_\infty f(\cdot, r)$ en $[Y]_{r/4}$ cuando $n \to \infty$, donde $[Y]_{r/4}$ denota el $r/4$-engordado de Y con respecto a d. Notemos primero que por la convergencia débil estrella de μ_n hacia μ_∞, para todo $\eta > 0$ existe un número natural $N_1 = N_1(r, \eta)$ tal que

$$\int \varphi_{x,r}(y)\, d\mu_n(y) > \mu_\infty(B_d(x, r)) - \eta,$$

siempre que $n \geq N_1$. Veremos ahora que $\mu_\infty(B_d(x,r))$ está acotada inferiormente como función de x por una constante positiva que puede depender de r, para $x \in [Y]_{r/4}$. En efecto, como X tiene la PHD y es acotado, entonces $[Y]_{r/4}$ es totalmente acotado y por consiguiente puede ser cubierto por un número finito de bolas centradas en $[Y]_{r/4}$ y de radio $r/2$. Es decir $[Y]_{r/4} \subseteq \bigcup_{i=1}^H B_d(x_i, r/2)$, con $x_1, x_2, \ldots, x_H \in [Y]_{r/4}$. Luego dado $x \in [Y]_{r/4}$ existe $i \in \{1, 2, \ldots, H\}$ tal que $B_d(x_i, r/2) \subseteq B_d(x,r)$. Entonces

$$\mu_\infty(B_d(x,r)) \geq \min_{i=1,2,\ldots,H} \mu_\infty(B_d(x_i, r/2)) =: c_r.$$

Basta ver que $c_r > 0$. En efecto, para cada $i = 1, 2, \ldots, H$ fijo, ya que $d(x_i, Y) < r/4$ tendremos que $B_d(y_i, r/4) \subseteq B_d(x_i, r/2)$ para algún $y_i \in Y$. Por consiguiente

$$c_r \geq \min_{i=1,2,\ldots,H} \mu_\infty(B_d(y_i, r/4)) > 0,$$

pues μ_∞ duplica sobre Y. Eligiendo $\eta = c_r/2$ tendremos que existe $N_1 = N_1(r)$ tal que para todo $x \in [Y]_{r/4}$ vale que

$$\int \varphi_{x,r}(y)\, d\mu_n(y) \geq c_r/2 > 0, \tag{6.11}$$

para todo natural $n \geq N_1$ y para $n = \infty$. Con esta estimación estamos en condiciones de probar la convergencia uniforme de $\mathscr{M}_n f(\cdot, r)$ hacia $\mathscr{M}_\infty f(\cdot, r)$ sobre $[Y]_{r/4}$. Para ello escribimos

$$\begin{aligned}
|\mathscr{M}_n f(x,r) - \mathscr{M}_\infty f(x,r)| &\leq \frac{1}{\int \varphi_{x,r}(y)\, d\mu_n(y)} \left| \int |f(y)|\varphi_{x,r}(y)\, d\mu_n(y) - \int |f(y)|\varphi_{x,r}(y)\, d\mu_\infty(y) \right| \\
&+ \left| \frac{1}{\int \varphi_{x,r}(y)\, d\mu_n(y)} - \frac{1}{\int \varphi_{x,r}(y)\, d\mu_\infty(y)} \right| \int |f(y)|\varphi_{x,r}(y)\, d\mu_\infty(y) \\
&= I_n(x) + II_n(x).
\end{aligned}$$

Estimemos el numerador de $I_n(x)$ usando la métrica de Kantorovich. Ya que $f \in \mathrm{Lip_c}(X)$ para algún $c > 0$ y $\varphi_{x,r} \in \mathrm{Lip_{1/r}}(X)$, se tiene que la función g definida sobre X como $g(y) = |f(y)|\varphi_{x,r}(y)$ pertenece a $\mathrm{Lip}_{\tilde{c}}(X)$, con $\tilde{c} = \frac{1}{r}\|f\|_\infty + c$ y $\|f\|_\infty = \sup_{y \in X} |f(y)|$. Notar que $\tilde{c}$ es finito por ser X compacto. Luego

$$\left| \int |f|\varphi_{x,r}\, d\mu_n - \int |f|\varphi_{x,r}\, d\mu_\infty \right| = \left| \int g\, d\mu_n - \int g\, d\mu_\infty \right| \leq \tilde{c} d_K(\mu_n, \mu_\infty).$$

Ya que $\mu_n \xrightarrow{w*} \mu_\infty$, la última desigualdad y (6.11) implican que $I_n(x)$ converge uniformemente a cero en $[Y]_{r/4}$. Por otra parte, si $x \in [Y]_{r/4}$ y $n \geq N_1(r)$ se tiene que

$$II_n(x) \leq \frac{4}{rc_r^2} \|f\|_{L^1(X,\mu_\infty)} d_K(\mu_n, \mu_\infty),$$

lo que prueba que $II_n(x)$ también converge uniformemente a cero en $[Y]_{r/4}$.

Notemos de paso que (6.11) implica que $\mathscr{M}_\mu f(x,r) = \mathscr{M}_\infty f(x,r)$ es continua en $[Y]_{r/4}$ como función de x, pues es cociente de funciones continuas y el denominador nunca se anula allí.

Con las observaciones anteriores, veamos que $(Y,\nu) \in \mathcal{A}_p(\mu, C)$. Para cada n fijo, por la hipótesis (c) sabemos que

$$\int (\mathscr{M}_n f(x,r))^p \, w_n(x) \, d\mu_n(x) \leq C \int |f(y)|^p w_n(y) \, d\mu_n(y),$$

donde C no depende de f, de r ni de n. Por (d), el lado derecho de la desigualdad anterior tiende a

$$C \int |f(y)|^p \, d\nu(y).$$

Por otra parte, ya que $Y_n \xrightarrow{\delta_H} Y$ se tiene que $Y_n \subseteq [Y]_{r/4}$ para todo n suficientemente grande. Puesto que para cada $r > 0$ se tiene que $\mathscr{M}_n f(x,r)$ converge uniformemente en $[Y]_{r/4}$ a $\mathscr{M}_\mu f(x,r)$ cuando $n \to \infty$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon, r, f)$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int (\mathscr{M}_\mu f(x,r))^p \, w_n(x) \, d\mu_n(x) \;&\leq\; \int |(\mathscr{M}_\mu f(x,r))^p - (\mathscr{M}_n f(x,r))^p| \, w_n(x) \, d\mu_n(x) \\ &\quad + \int (\mathscr{M}_n f(x,r))^p \, w_n(x) \, d\mu_n(x) \\ &\leq\; \varepsilon + C \int |f(y)|^p \, d\nu(y). \end{aligned}$$

Como $\mathscr{M}_\mu f(x,r)$ es continua como función de x en $[Y]_{r/4}$, por el teorema de extensión de Tietze-Urysohn es posible definir una función $\phi \in \mathcal{C}(X)$ tal que $\phi(x) = \mathscr{M}_\mu f(x,r)$ para todo $x \in [Y]_{r/8}$. Luego, para todo n suficientemente grande como para que $Y_n \subseteq [Y]_{r/8}$ se tiene que

$$\int (\mathscr{M}_\mu f(x,r))^p \, w_n(x) \, d\mu_n(x) \;=\; \int (\phi(x))^p \, w_n(x) \, d\mu_n(x).$$

Luego

$$\int (\phi(x))^p \, w_n(x) \, d\mu_n(x) \leq \varepsilon + C \int |f(y)|^p \, d\nu(y).$$

Haciendo tender n a infinito en el lado izquierdo de la desigualdad anterior y luego ε a cero, teniendo en cuenta que ν tiene soporte en Y y que sobre Y las funciones ϕ y $\mathscr{M}_\mu f(\cdot, r)$ coinciden, obtenemos

$$\int (\mathscr{M}_\mu f(x,r))^p \; d\nu(x) \leq C \int |f(y)|^p \, d\nu(y). \tag{6.12}$$

De la última desigualdad podemos concluir que existe una constante $\widetilde{C}$ tal que

$$\int \left(\frac{1}{\mu(B_d(x,r))} \int_{B_d(x,r)} |f(y)| \, d\mu(y) \right)^p \, d\nu(x) \leq \widetilde{C} \int |f(y)|^p \, d\nu(y)$$

para todo $r > 0$. Notar además que ν es una medida de Radon, por ser de probabilidad en un espacio compacto con la PHD. Esto junto a la Observación 3 implica que $d\nu = w d\mu$ para algún peso w. Reemplazando en (6.12) se tiene que $(Y,\nu) \in \mathcal{A}_p(\mu, C)$. $\square$

Notar que en el teorema anterior la condición $(Y_n, w_n d\mu_n) \in \mathcal{E}$, contenida en la hipótesis (c), es necesaria. Por ejemplo, tomemos $X = [0,1]$ con la distancia usual y con la medida de Lebesgue, es decir $d\mu = dx$. Para cada n sea $Y_n = X$, $d\mu_n = dx$ y $w_n = 1/n$. Entonces

$(Y_n, w_n d\mu_n) \in A_p(\mu_n; 1)$ para todo n y todo $1 < p < \infty$, y converge débilmente estrella a la medida nula sobre el espacio límite.

El siguiente resultado es una consecuencia directa del teorema anterior, tomando $(Y_n, \mu_n) = (X, \mu)$ para todo n.

Corolario 68. *Sea (X, ρ, μ) un espacio de tipo homogéneo probabilístico compacto. Sea $\{\nu_n\}$ una sucesión de medidas sobre X tal que*

(a) $(X, \nu_n) \in \mathcal{A}_p(\mu, C)$ *para todo n, y*

(b) $\nu_n \xrightarrow{w^*} \nu$.

Entonces $(X, \nu) \in \mathcal{A}_p(\mu, C)$.

Haciendo un abuso de notación justificado por el Teorema 63, denotaremos $\boldsymbol{\mathcal{A}_p(X, \mu, C)}$ al conjunto de todas las medidas $\nu \in \mathcal{P}(X)$ tales que $d\nu = w d\mu$ para algún $w \in \mathcal{A}_p(X, d, \mu)$ (ver definición en página 86) con constante de Muckenhoupt menor o igual que C. Observamos que el resultado anterior puede interpretarse como la completitud de $\mathcal{A}_p(X, \mu, C)$ en $(\mathcal{P}(X), \delta_K)$, para cada $\mu \in \mathcal{P}(X)$ duplicante y cada constante $C \geq 1$ fijas.

CAPÍTULO 7

Duplicación del límite de iteraciones de aplicaciones contractivas

Muchos objetos que aparecen en la naturaleza son *autosemejantes*, en el sentido que su estructura geométrica básica se repite en escalas distintas, por lo que el objeto total puede ser visto como una unión finita de copias de sí mismo en diferentes escalas. Mandelbrot propuso el término “fractal” para describir este tipo de objetos. Una de las formas más conocidas para generar fractales es a través de un *sistema iterado de funciones* (SIF), que consiste en una familia de contracciones $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_M\}$ sobre un espacio métrico (X, d), siendo $M \geq 2$. Si X es completo, la propiedad fundamental de un SIF es que determina un único conjunto compacto no vacío K que satisface $K = \bigcup_{i=1}^{M} \phi_i(K)$, por lo que K es llamado *atractor* o *conjunto invariante* por el SIF. Más aún, el atractor K puede obtenerse como límite en la métrica de Hausdorff d_H de la sucesión $F^n(Y)$, donde Y es un conjunto cualquiera en $\mathcal{K}$ y F^n denota la composición n veces consigo misma de la función F definida sobre $\mathcal{K}$ como

$$F(Y) = \bigcup_{i=1}^{M} \phi_i(Y).$$

Esto fue probado por Hutchinson en [**24**] basado en el teorema del punto fijo y la completitud del espacio $(\mathcal{K}, d_H)$, ya que la aplicación F así definida resulta contractiva. Una versión de este resultado en el contexto de $\mathbb{R}^n$ puede encontrarse también en el libro de Falconer [**18**], Teorema 2.6.

A un SIF $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_M\}$ dado y a una sucesión de probabilidades $\{p_i\}_{i=1}^{M}$ (esto significa que $0 \leq p_i \leq 1$ para todo i y $\sum_{i=1}^{M} p_i = 1$) puede asociarse una noción de medida invariante soportada en el atractor del sistema. Hutchinson probó que dado un SIF con probabilidades asociadas $\{p_i\}$ sobre un espacio métrico compacto (X, d), existe una única medida de Borel de probabilidad μ soportada en el atractor del SIF que satisface

$$\mu(B) = \sum_{i=1}^{M} p_i \mu(\phi_i^{-1}(B \cap \phi_i(X))),$$

para todo boreliano B en X. Esta medida es llamada *medida invariante* para el SIF probabilístico. También puede encontrarse una versión en $\mathbb{R}^n$ de este resultado en [**18**], Teorema 2.8.

Uno de los objetivos de este capítulo es extender los resultados anteriores a espacios casi-métricos y a la vez unificarlos en el contexto de $(\mathcal{E}, \delta)$.

Mientras que las propiedades que definen la clase $\mathcal{E}$ de espacios de medida son en algún sentido cualitativas, las clases de duplicación en cualquiera de sus formas tienen una descripción cuantitativa que refiere a la estructura interna del par (Y, μ), en cuanto a la forma en que la masa μ se distribuye en Y. Esta diferencia es la razón por la cual, como veremos en la Sección 1 del Capítulo 8, es fácil construir ejemplos de transformaciones contractivas en $\mathcal{E}$ que no mapean subespacios de duplicación de $\mathcal{E}$ en sí mismos. Ni siquiera se logra en general que un espacio de Muckenhoupt permanezca duplicante después de la aplicación de una transformación (afín) en el intervalo $[0, 1]$.

Por otra parte, la duplicación y aún normalidad del límite de iteraciones de SIF especiales son resultados conocidos (ver [**32**] y [**38**]). Esto se debe a que en el límite la medida se distribuye con mayor "uniformidad geométrica" que en cualquiera de las aproximaciones. Otro de los objetivos de este capítulo será buscar condiciones suficientes en una aplicación contractiva inducida por un SIF para que ciertas clases de duplicación permanezcan invariantes, con lo cual el teorema del punto fijo podrá aplicarse dada la completitud de esas clases de duplicación probada en el capítulo anterior.

1. Teorema del punto fijo para espacios casi-métricos

Como ya mencionamos, la herramienta básica en el método de Hutchinson para la construcción de fractales autosimilares es el teorema del punto fijo de Banach (ver Teorema 3, Capítulo 1). Sea (X, ρ) un espacio casi-métrico completo con constante triangular $\Lambda \geq 1$. Sea $f : X \to X$ una ρ-contracción con factor de contracción $\lambda \in (0, 1)$, es decir, $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda\rho(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Notemos que si se intenta extender directamente la demostración del teorema del punto fijo de Banach al caso casi-métrico, tenemos inmediatamente la dificultad que en la prueba de la propiedad de Cauchy para la sucesión de iteraciones $f^n(x_0)$ de un punto $x_0 \in X$, la desigualdad triangular para la casi-métrica ρ produce potencias de Λ que restringen los posibles valores del factor de contracción λ. Algo similar ocurre si pretendemos que una ρ-contracción sea también una d-contracción para aplicar directamente el teorema clásico con alguna métrica d en X. Pero si el teorema de Macías-Segovia se aplica en el proceso iterativo, entonces el teorema del punto fijo admite la siguiente extensión.

Teorema 69 (Teorema del punto fijo para espacios casi-métricos). *Sea (X, ρ) un espacio casi-métrico completo, y sea $f : X \to X$ una aplicación contractiva. Entonces f admite un único punto fijo en X. En otras palabras, existe un único punto $x_\infty \in X$ tal que $f(x_\infty) = x_\infty$.*

Demostración. Comencemos fijando un punto cualquiera $x_0 \in X$, y definamos recursivamente la siguiente sucesión

$$x_n = f(x_{n-1})$$

para $n \geq 1$, o equivalentemente

$$x_n = f^n(x_0),$$

donde f^n denota la composición de f consigo misma n veces. La única dificultad en relación con el caso métrico es probar que $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en X con respecto a d, o equivalentemente a ρ. Ya que f es una aplicación contractiva, para cada $n \geq 1$ tenemos

$$\rho\left(f(x_{n+1}), f(x_n)\right) \leq \lambda\rho(x_{n+1}, x_n) = \lambda\rho\left(f(x_n), f(x_{n-1})\right) \leq \cdots \leq \lambda^n \rho(x_1, x_0).$$

Luego, aplicando el Teorema 5 de Macías y Segovia, tenemos que

$$d\left(f(x_{n+1}), f(x_n)\right) \leq \left(\lambda^n \frac{c_2}{c_1}\right)^{1/\xi} d(x_1, x_0).$$

Tomemos $m > n \geq 1$, digamos $m = n + k$ para algún $k \geq 1$. Por la desigualdad triangular de la métrica d tenemos que

$$\begin{aligned} d\left(f(x_n), f(x_m)\right) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} d\left(f(x_{n+i}), f(x_{n+i+1})\right) \\ &\leq \left(\lambda^n \frac{c_2}{c_1}\right)^{1/\xi} d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{i/\xi} \\ &\leq \left[\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{1/\xi} \frac{1}{1-\lambda^{1/\xi}}\, d(x_1, x_0)\right] \lambda^{n/\xi}. \end{aligned}$$

Ya que $0 \leq \lambda < 1$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \lambda^{n/\xi} = 0$ y por lo tanto

$$\lim_{n,m\to\infty} d(f(x_n), f(x_m)) = 0.$$

Ya que X es completo, existe $x_\infty \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty$. Por otra parte, ya que toda contracción es una función continua, tenemos

$$f(x_\infty) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_\infty.$$

Para probar la unicidad del punto fijo, supongamos que x_∞ y $\overline{x}$ son dos puntos fijos. Entonces

$$\rho(x_\infty, \overline{x}) = \rho(f(x_\infty), f(\overline{x})) \leq \lambda\rho(x_\infty, \overline{x}),$$

y ya que $0 \leq \lambda < 1$ podemos concluir que $\rho(x_\infty, \overline{x}) = 0$. Por lo tanto $x_\infty = \overline{x}$. $\square$

Observar además que podemos obtener el punto fijo x_∞ como el límite de la sucesión $\{f^n(x_0)\}$ cuando n tiende a infinito, siendo x_0 un punto arbitrario en X.

2. Contracciones en $(\mathcal{E}, \delta)$

En el Capítulo 3, a partir de un espacio casi-métrico compacto (X, ρ) dado, definimos el conjunto

$$\mathcal{E} = \{(Y, \mu) \in \mathscr{X} : \text{sop}(\mu) \subseteq Y\},$$

donde $\mathscr{X} = \mathcal{K} \times \mathcal{P}$. Probamos en el Teorema 38 que $\mathcal{E}$ es cerrado en el espacio casi-métrico completo $(\mathscr{X}, \delta)$, y en consecuencia $(\mathcal{E}, \delta)$ es un subespacio casi-métrico completo de $(\mathscr{X}, \delta)$. A continuación enunciamos un resultado que se obtiene como una consecuencia directa del teorema del punto fijo en espacios casi-métricos.

Proposición 70. *Si* $T:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ *es un mapeo contractivo y* $(Y_0,\mu_0)\in\mathcal{E}$*, entonces* $(Y_\infty,\mu_\infty)=\text{lím}_{n\to\infty}T^n((Y_0,\mu_0))$ *pertenece a* $\mathcal{E}$*, y es el único elemento de* $\mathcal{E}$ *que satisface* $T((Y_\infty,\mu_\infty))=(Y_\infty,\mu_\infty)$.

Un mapeo contractivo puede estar inducido por sistemas iterados de funciones. Un **sistema iterado de funciones** (SIF) consiste en una familia $\Phi=\{\phi_1,\dots,\phi_M\}$ de contracciones sobre un espacio casi-métrico (X,ρ), donde $M\geq 2$. Es decir que para cada $i=1,\dots,M$ tenemos que $\phi_i:X\to X$ satisface

$$\rho\left(\phi_i(x),\phi_i(y)\right)\leq\frac{1}{a_i}\rho(x,y) \tag{7.1}$$

para todo $x,y\in X$ y todo $1\leq i\leq M$, donde $a_i>1$. Denotamos $a_{\min}=\text{mín}_{1\leq i\leq M}a_i$. Existen clases especiales de SIF, por ejemplo si en (7.1) se da la igualdad para todo i, se dice que el SIF está compuesto por **similitudes contractivas**. Como en el caso métrico, la noción de SIF puede ser extendida para definir medidas invariantes por el sistema. Más precisamente, un SIF $\Phi=\{\phi_1,\dots,\phi_M\}$ sobre X, junto con una colección de números reales $p_1,p_2,\dots,p_M$ tales que $0\leq p_i\leq 1$ y $\sum_{i=1}^M p_i=1$, es llamado **SIF probabilístico**. También se dice que Φ es un SIF con probabilidades asociadas $\{p_i\}$. Dado un SIF probabilístico, definimos la aplicación $T:\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ como $T(Y,\mu)=(T_1Y,T_2\mu)=(Y',\mu')$, siendo

$$Y'=\bigcup_{i=1}^M\phi_i(Y)=:\bigcup_{i=1}^M Y_i',$$

y

$$\mu'(B)=\sum_{i=1}^M p_i\mu\left(\phi_i^{-1}(B\cap Y_i')\right),$$

donde B es un subconjunto de Borel de Y'. Llamamos a la transformación T así definida la **aplicación inducida por el SIF Φ asociada a las probabilidades p_i**. Si no hacemos referencia a dichas probabilidades, supondremos que $p_i=1/M$ para todo i. El siguiente resultado establece que la aplicación inducida por un SIF probabilístico es una contracción en $\mathcal{E}$.

Proposición 71. *Dado un SIF* $\Phi=\{\phi_1,\dots,\phi_M\}$ *en un espacio casi-métrico compacto* (X,ρ)*, la aplicación* T *inducida por* Φ *asociada a cualquier elección de probabilidades* $\{p_i\}$*, mapea* $\mathcal{E}$ *en sí mismo y es una contracción de razón* $1/a_{min}$.

Demostración. Es fácil ver que μ' es una medida de Borel sobre Y'. Por otra parte $\mu'(Y')=\sum_{i=1}^M p_i\mu(Y)=\mu(Y)=1$ y también Y' es compacto ya que Y lo es. Más aún, si $\operatorname{sop}\mu\subseteq Y$ entonces $\operatorname{sop}\mu'\subseteq Y'$. Luego $T:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$. Probaremos ahora que T es una aplicación contractiva con factor de contracción $\lambda=1/a_{\min}$, es decir

$$\delta\big(T\big((Y,\mu)\big),T\big((Z,\nu)\big)\big)\leq\frac{1}{a_{\min}}\delta\left((Y,\mu),(Z,\nu)\right),$$

para todo $(Y,\mu),(Z,\nu)\in\mathscr{X}$. En efecto, por definición tenemos que

$$\delta\big(T\big((Y,\mu)\big),T\big((Z,\nu)\big)\big)=\delta_H(Y',Z')+\delta_K(\mu',\nu'). \tag{7.2}$$

Para el primer término del miembro derecho de (7.2), notar que si $Y \subseteq [Z]_\varepsilon$ y $Z \subseteq [Y]_\varepsilon$, entonces $Y_i' \subseteq [Z_i']_{\epsilon/a_i}$ y $Z_i' \subseteq [Y_i']_{\epsilon/a_i}$ para cada $i = 1, \ldots, M$. Luego

$$\bigcup_{i=1}^{M} Y_i' \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} [Z_i']_{\epsilon/a_i} \subseteq \left[\bigcup_{i=1}^{M} Z_i'\right]_{\epsilon/a_{\min}},$$

y

$$\bigcup_{i=1}^{M} Z_i' \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} [Y_i']_{\epsilon/a_i} \subseteq \left[\bigcup_{i=1}^{M} Y_i'\right]_{\epsilon/a_{\min}},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\delta_H(Y',Z') &= \delta_H\left(\bigcup_{i=1}^{M} Y_i', \bigcup_{i=1}^{M} Z_i'\right)\\ &\leq \frac{1}{a_{\min}}\,\delta_H(Y,Z)\,.\end{aligned}$$

Miremos ahora el segundo término del miembro derecho de (7.2). Para probar que la segunda componente de T es también una contracción con el mismo factor $1/a_{\min}$, procederemos como en la demostración del Teorema 2.8 en el libro de Falconer [**18**]. Por definición

$$\delta_K\left(\mu',\nu'\right) = \sup\left\{\left|\int_{Y'} f\, d\mu' - \int_{Y'} f\, d\nu'\right| : f \in \mathrm{Lip}_1\right\}.$$

Comencemos suponiendo que f es la función característica de un subconjunto E de Y'. Si $\mu_i' = p_i(\mu \circ \phi_i^{-1})$ para $i = 1, 2, \ldots, M$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{Y'} \mathcal{X}_E(z)\, d\mu_i'(z) &= p_i\, \mu\left(\phi_i^{-1}(E \cap Y_i')\right)\\ &= p_i \int_Y \mathcal{X}_{\phi_i^{-1}(E\cap Y_i')}(z)\, d\mu(z)\\ &= p_i \int_Y \mathcal{X}_E\left(\phi_i(z)\right)\, d\mu(z)\,.\end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{Y'} f(z)\, d\mu'(z) = \sum_{i=1}^{M} p_i \int_Y f\left(\phi_i(z)\right)\, d\mu(z)$$

si $f = \mathcal{X}_E$. Luego podemos obtener la misma igualdad si f es una función simple, y por densidad el resultado se extiende a cualquier función integrable f.

Por otra parte, si $f \in \mathrm{Lip}_1$ entonces

$$|f\left(\phi_i(x)\right) - f\left(\phi_i(y)\right)| \leq \rho(\phi_i(x), \phi_i(y)) \leq \frac{1}{a_{\min}}\rho(x,y)\,,$$

para todo $x, y \in X$, $i = 1, 2, \ldots, M$. Por lo tanto $\tilde{f}_i = a_{\min}(f \circ \phi_i) \in \mathrm{Lip}_1$ para $i = 1, 2, \ldots, M$, y

$$\left|\int_{Y'} f\, d\mu' - \int_{Y'} f\, d\nu'\right| \;\leq\; \sum_{i=1}^{M} p_i \left|\int_Y f\left(\phi_i(x)\right)\, d\mu(x) - \int_Y f\left(\phi_i(x)\right)\, d\nu(x)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a_{\min}} \sum_{i=1}^{M} p_i \left| \int_Y \tilde{f}_i(x)\, d\mu(x) - \int_Y \tilde{f}_i(x)\, d\nu(x) \right| \\
&\leq \frac{1}{a_{\min}}\, \delta_K(\mu,\nu).
\end{aligned}
$$

Tomando el supremo sobre $f \in \mathrm{Lip}_1$ obtenemos

$$\delta_K(\mu',\nu') \leq \frac{1}{a_{\min}}\, \delta_K(\mu,\nu).$$

Podemos entonces concluir que

$$\delta\left((Y',\mu'),(Z',\nu')\right) \leq \frac{1}{a_{\min}} \delta\left((Y,\mu),(Z,\nu)\right)\,,$$

para todo $(Y,\mu),(Z,\nu) \in \mathscr{X}$. □

En el caso que ρ sea una métrica, las dos últimas proposiciones unifican en el contexto del espacio $(\mathcal{E},\delta)$ los dos resultados de Hutchinson mencionados en la introducción. Más precisamente, por un lado obtenemos un punto fijo Y_∞ para T_1, el cual es el único subconjunto compacto de X que satisface

$$Y_\infty = \bigcup_{i=1}^{M} \phi_i(Y_\infty).$$

Por otra parte se tiene un punto fijo μ_∞ para T_2 el cual es la única medida probabilística de Borel soportada en Y_∞ tal que

$$\mu_\infty(B) = \sum_{i=1}^{M} p_i \mu_\infty\left(\phi_i^{-1}(B \cap \phi_i(Y))\right),$$

para todo conjunto de Borel B.

Como en el caso métrico, llamaremos a Y_∞ **atractor** (o conjunto invariante) del SIF, y a μ_∞ **medida invariante** por el SIF. Cuando las contracciones que conforman el SIF son todas similitudes, el atractor Y_∞ resultante es llamado **conjunto autosimilar**, y μ_∞ es llamada **medida autosimilar**.

Los ejemplos clásicos de SIF en ambientes euclideanos, y de sus correspondientes conjuntos y medidas invariantes, están dados por las similitudes contractivas de las cuales describimos brevemente su subfamilia más clásica y elemental: la de ciertos conjuntos de Cantor, porque será usada para ilustrar situaciones posteriores. En este caso $X = [0,1]$ con la distancia usual $d(x,y) = |x-y|$. Dado $k > 1$ fijo, sean

$$\phi_1(x) = \frac{1}{k}x, \qquad \phi_2(x) = \frac{1}{k}x + \frac{k-1}{k}\,. \tag{7.3}$$

El mapeo T_c inducido por este SIF sobre $\mathscr{X}$ asigna a cada $(Y,\mu) \in \mathscr{X}$ el par (Y',μ') en $\mathscr{X}$ dado por

$$Y' = \phi_1(Y) \cup \phi_2(Y) =: Y_1' \cup Y_2'\,,$$

y

$$\mu'(B) = p_1\mu\left(\phi_1^{-1}(B \cap Y_1')\right) + p_2\mu\left(\phi_2^{-1}(B \cap Y_2')\right) =: \mu_1'(B) + \mu_2'(B)\,,$$

donde $0 \leq p_i \leq 1$, $p_1 + p_2 = 1$ y B es un subconjunto de Borel de Y'. El conjunto clásico de Cantor C es obtenido cuando $k = 3$ en (7.3) y $p_1 = p_2 = 1/2$. En tal caso es sabido que $Y_\infty = C$ y μ_∞ es la restricción a C de la medida de Hausdorff s-dimensional $\mathcal{H}^s$, con $s = \frac{\log 2}{\log 3}$.

3. Contracciones sobre clases de e.t.h.

Del Teorema 66 de completitud de las clases duplicantes y de normalidad del capítulo anterior, obtenemos en forma directa el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 72. *Sea $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ un mapeo contractivo. Entonces*

1. *si $T : \mathcal{D}_j(\alpha, A) \to \mathcal{D}_j(\alpha, A)$ para ciertos $\alpha > 1$, $A \geq 1$ y $j = 1, 3$, existe un único punto fijo (Y, μ) para T en $\mathcal{D}_j(\alpha, A)$;*
2. *si $T : \mathcal{D}_2(\alpha, A, \varphi) \to \mathcal{D}_2(\alpha, A, \varphi)$ para ciertos $\alpha > 1$, $A \geq 1$ y φ, existe un único punto fijo (Y, μ) para T en $\mathcal{D}_2(\alpha, A, \varphi)$;*
3. *si $T : \mathcal{N}(\beta, \vec{C}, \vec{K}) \to \mathcal{N}(\beta, \vec{C}, \vec{K})$ para ciertos $\beta > 0$, $\vec{C}$ y $\vec{K}$, existe un único punto fijo (Y, μ) para T en $\mathcal{N}(\beta, \vec{C}, \vec{K})$.*

En cuanto a las clases de Muckenhoupt, el último párrafo del capítulo anterior nos permite obtener un resultado parcial relativo a la segunda componente de una contracción T sobre clases de Muckenhoupt con respecto a una medida fija en un espacio fijo. Más precisamente.

PROPOSICIÓN 73. *Sea (X, ρ) un espacio casi-métrico compacto y sea $T_2 : (\mathcal{P}(X), \delta_K) \to (\mathcal{P}(X), \delta_K)$ un mapeo contractivo. Si $T_2 : \mathcal{A}_p(X, \mu, C) \to \mathcal{A}_p(X, \mu, C)$ para cierta $\mu \in \mathcal{P}(X)$ que duplica y cierta constante $C \geq 1$, entonces existe un único punto fijo para T_2 en $\mathcal{A}_p(X, \mu, C)$.*

Si bien las proposiciones anteriores son elementales una vez que están probadas las propiedades de completitud y extendido el teorema del punto fijo, lo que es realmente difícil y, como veremos en el próximo capítulo, a veces imposible, es que una aplicación contractiva en $\mathcal{E}$ deje invariantes espacios de duplicación. Sin embargo, hipótesis de separación adicionales a las usuales en un SIF (OSC y separación fuerte, ver [**18**]) producen contracciones que dejan invariantes clases de duplicación. Presentamos a continuación un resultado en este sentido, relativo a la invariancia de las clases $\mathcal{D}_3(2, A)$.

PROPOSICIÓN 74. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto con* $\operatorname{diam}(X) \leq 1$. *Sea $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_M\}$ una familia finita de similitudes contractivas sobre X:*

$$d\left(\phi_i(x), \phi_i(y)\right) = \frac{1}{a_i} d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$ y todo $1 \leq i \leq M$, donde $a_i > 1$ para $i = 1, \ldots, M$. Sea T el mapeo contractivo sobre $\mathscr{X}$ inducido por Φ, es decir $T(Y, \mu) = (Y', \mu')$, con

$$Y' = \bigcup_{i=1}^{M} \phi_i(Y),$$

$$\mu'(B) = M^{-1} \sum_{i=1}^{M} \mu\left(\phi_i^{-1}(B \cap \phi_i(Y))\right),$$

para todo subconjunto de Borel B de Y'. Si

$$a^{-1} := \max_{i=1,\ldots,M} a_i^{-1} \leq \min_{\substack{1 \leq i,j \leq M \\ i \neq j}} \{d(\phi_i(X), \phi_j(X))\} =: D, \tag{7.4}$$

entonces $T : \mathcal{D}_3(2, A) \to \mathcal{D}_3(2, A)$ para todo $A \geq M$.

Demostración. Como probamos en la Proposición 71, T es una contracción en $\mathscr{X}$ con $\lambda = 1/a$, y además $\mathcal{E}$ es invariante bajo T. Sean $Y_i' = \phi_i(Y)$ y $\mu_i'(B) = \mu(\phi_i^{-1}(B \cap Y_i'))/M$ para $i = 1, 2, \ldots, M$. Probaremos primero que, para $A \geq M$ y para todo $i = 1, 2, \ldots, M$, el espacio $(Y_i', d, \mu_i') \in \mathcal{D}_3(2, A)$ si $(Y, d, \mu) \in \mathcal{D}_3(2, A)$. En efecto, para $(Y, d, \mu) \in \mathcal{D}_3(2, A)$, fijemos $y, z \in Y_i'$ y $r > 0$ tales que $d(y, z) < 2r$. Ya que cada ϕ_i es inyectiva tenemos que $d(\phi_i^{-1}(y), \phi_i^{-1}(z)) = a_i d(y, z) < 2a_i r$, y que $\phi_i^{-1}(B_d(x, r) \cap Y_i') = B_d(\phi_i^{-1}(x), a_i r) \cap Y$ para todo $x \in X$. Luego, para $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
M\mu_i'(B_d(y, r)) &= \mu\left(\phi_i^{-1}\left(B_d(y, r) \cap Y_i'\right)\right) \\
&= \mu\left(B_d(\phi_i^{-1}(y), a_i r)\right) \\
&\leq A\mu\left(B_d(\phi_i^{-1}(z), a_i r + a_i \varepsilon)\right) \\
&= A\mu\left(\phi_i^{-1}\left(B_d(z, r + \varepsilon) \cap Y_i'\right)\right) \\
&= MA\mu_i'(B_d(z, r + \varepsilon)).
\end{aligned}$$

Para probar que (Y', d, μ') pertenece a $\mathcal{D}_3(2, A)$, tomemos ahora $y, z \in Y'$ y $r > 0$ tales $d(y, z) < 2r$, y fijemos $\varepsilon > 0$. Vamos a considerar dos casos:

1) y y z pertenecen al mismo Y_i';
2) $y \in Y_i'$ y $z \in Y_j'$ con $i \neq j$.

Caso 1: Si $B_d(y, r)$ y $B_d(z, r + \varepsilon)$ no intersecan a ningún otro Y_j' con $j \neq i$, podemos usar el hecho que $(Y_i', d, \mu_i') \in \mathcal{D}_3(2, A)$ para obtener la estimación deseada. En otro caso, si $B_d(y, r)$ o $B_d(z, r + \varepsilon)$ intersecan a Y_j' para algún $j \neq i$, necesariamente $r + \varepsilon \geq D$. Ya que estamos suponiendo que $\operatorname{diam}(X) \leq 1$, tenemos que $\operatorname{diam}(Y_i') \leq a_i^{-1} \leq D$, así que $Y_i' \subseteq B_d(z, r + \varepsilon)$ y $\mu'(B_d(z, r + \varepsilon)) \geq 1/M$. Por lo tanto

$$\mu'(B_d(y, r)) \leq 1 \leq M\mu'(B_d(z, r + \varepsilon)) \leq A\mu'(B_d(z, r + \varepsilon)),$$

la cual es la desigualdad deseada.

Caso 2: Podemos suponer $a_i \leq a_j$. Ya que $D \leq d(y,z) < 2r$, se tiene $r \geq D/2$. Si $r + \varepsilon \geq D$ obtenemos fácilmente

$$\mu'(B_d(y,r)) \leq 1 = M\mu'(Y'_j) \leq M\mu'(B_d(z, r+\varepsilon)).$$

Si por el contrario $r + \varepsilon < D$, entonces tenemos

$$\mu'(B_d(y,r)) = \mu'_i(B_d(y,r)) = \mu(B_d(\phi_i^{-1}(y), a_i r))/M,$$

$$\mu'(B_d(z, r+\varepsilon)) = \mu'_j(B_d(z, r+\varepsilon)) = \mu(B_d(\phi_j^{-1}(z), a_j(r+\varepsilon)))/M.$$

Luego, ya que $d(y,z) \leq 1 \leq 2r/D \leq 2a_i r$,

$$\begin{aligned} \mu'\,(B_d(y,r)) &= \mu(B_d(\phi_i^{-1}(y), a_i r))/M \\ &\leq A\mu(B_d(\phi_j^{-1}(z), a_i(r+\varepsilon)))/M \\ &\leq A\mu(B_d(\phi_j^{-1}(z), a_j(r+\varepsilon)))/M \\ &= A\mu'(B_d(z, r+\varepsilon)). \end{aligned}$$

□

Notar que la hipótesis $\operatorname{diam}(X) \leq 1$ no es restrictiva en el sentido que el resultado vale si pedimos $D \geq \operatorname{diam}(X)/a_i$ para todo $i = 1, \ldots, M$.

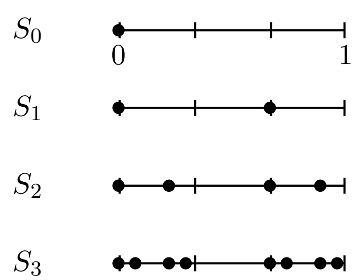
Observar que el SIF de tipo Cantor introducido en la sección anterior satisface las hipótesis de la Proposición 74 para todo $k \geq 3$ cuando $p_1 = p_2 = 1/2$. Para el caso del conjunto clásico de Cantor tenemos

$$\phi_1(x) = \frac{1}{3}x, \qquad \phi_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3},$$

y la aplicación $T_c : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ queda definida como $T_c(Y,\mu) = (Y', \mu')$, siendo

$$Y' = \phi_1(Y) \cup \phi_2(Y), \qquad \mu'(B) = \frac{1}{2}\mu\left(\phi_1^{-1}(B \cap Y'_1)\right) + \frac{1}{2}\mu\left(\phi_2^{-1}(B \cap Y'_2)\right).$$

La proposición anterior implica que el espacio límite $(C, \mathcal{H}^s)$ es un espacio de tipo homogéneo, y que la sucesión $\{(S_n, \mu_n) := T_c^n(\{0\}, \delta_0)\}$ es una familia uniforme de espacios de tipo homogéneo, es decir, existe una $A \geq 1$ tal que μ_n duplica sobre S_n con constante A para todo n.



Notar que $\mu_n(\{x\}) = 2^{-n}$ para todo $x \in S_n$, por lo que μ_n es la medida que cuenta puntos sobre S_n normalizada a una probabilidad, pues $\operatorname{card}(S_n) = 2^n$. De esta forma obtenemos una aproximación del espacio de tipo homogéneo $(C, \mathcal{H}^s)$, $s = \log 2/\log 3$, mediante redes finitas anidadas S_n y por medidas de probabilidad μ_n soportadas en S_n que convergen débilmente estrella a la medida $\mathcal{H}^s$. Esta aproximación es quizás más "regular" que la construída en el Capítulo 3, y también posee la propiedad que $\{(S_n, \mu_n)\}$ es una familia uniforme de espacios de tipo homogéneo.

Para dar un ejemplo de aplicación de la Proposición 74 en dimensiones mayores, recordemos las familias de contracciones de tipo Sierpinski. Para cada $k \geq 1$, sean

$$\begin{aligned} \phi_1(x,y) &= \left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right), \\ \phi_2(x,y) &= \phi_1(x,y) + \left(0, 1 - \frac{1}{k}\right), \\ \phi_3(x,y) &= \phi_1(x,y) + \left(1 - \frac{1}{k}, 0\right). \end{aligned}$$

Sea X el triángulo en $\mathbb{R}^2$ con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Tomando

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \text{máx}\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

como la distancia en X, definimos T_s sobre $\mathscr{X}$ como $T_s(Y,\mu) = (Y', \mu')$ con

$$Y' = \phi_1(Y) \cup \phi_2(Y) \cup \phi_3(Y) := Y_1' \cup Y_2' \cup Y_3',$$

y

$$\mu'(B) = \frac{1}{3}\left(\mu\left(\phi_1^{-1}(B \cap Y_1')\right) + \mu\left(\phi_2^{-1}(B \cap Y_2')\right) + \mu\left(\phi_3^{-1}(B \cap Y_3')\right)\right),$$

para todo subconjunto de Borel B de Y'. Luego por la Proposición 74, para $k \geq 3$ y $A \geq 3$ tenemos que $T_s : \mathcal{D}_3(2,A) \to \mathcal{D}_3(2,A)$. Por lo tanto la órbita completa $\{T_s^n(Y_0,\mu_0) : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión uniforme de espacios de tipo homogéneo para cualquier $(Y_0,\mu_0) \in \mathcal{D}_3(2,A)$. Podemos tomar por ejemplo $Y_0 = X$ y μ_0 dos veces la medida de Lebesgue sobre X. Por supuesto también el límite (Y_∞, μ_∞) es un espacio de tipo homogéneo, ya que (Y_0,μ_0) pertenece a $\mathcal{D}_3(2,8)$.

CAPíTULO 8

Órbitas de contracciones en familias de espacios de tipo homogéneo

Teniendo en cuenta que para muchos de los fractales clásicos producidos por el método de iteración de Hutchinson, sabemos (ver [**32**]) que el espacio límite es un espacio de tipo homogéneo aún cuando el espacio inicial no lo es, en este capítulo exploraremos posibles espacios iniciales sencillos y condiciones sobre las contracciones bajo las cuales la órbita entera se encuentra dentro de algún subespacio cerrado $\mathcal{D}$ de los que definimos en el Capítulo 6. En el Capítulo 7 dimos una condición suficiente para que un sistema iterado de funciones produzca órbitas uniformemente duplicantes a partir de cualquier espacio inicial. En este capítulo daremos ejemplos construidos sobre dos fractales clásicos, el intervalo y el triángulo de Sierpinsky, que muestran que si esa propiedad de separación no se cumple, entonces puede ocurrir que para ciertos puntos iniciales que son espacios de tipo homogéneo, ningún punto de la órbita sea un espacio de tipo homogéneo, aún cuando el espacio límite sí lo sea. Como hemos dicho y visto desde el principio de la tesis, desde el punto de vista analítico nos interesa aproximar al espacio límite por espacios de estructura sencilla que tengan las propiedades "analíticas" del espacio aproximado. Desde esta perspectiva nos importa la existencia de tales aproximaciones más que la cantidad que haya de ellas. En este sentido consideramos la órbita generada a partir de una masa puntual y probamos la normalidad uniforme de la órbita, y en consecuencia, la duplicación uniforme.

Con los ejemplos mencionados en mente, probamos que, bajo ciertas hipótesis, cada espacio de la órbita generada por la aplicación inducida por un SIF satisface una propiedad que se va pareciendo, en un sentido preciso, cada vez más a la duplicación a medida que el paso de la iteración crece.

Finalmente exploramos la permanencia de órbitas en las clases de Muckenhoupt para determinados sistemas iterados de similitudes contractivas, y vimos la influencia de ciertas propiedades del sistema, como la preservación de la orientación.

1. Órbitas no duplicantes con "puntos extremos" duplicantes

Como ya hemos mencionado, los resultados obtenidos por Mosco en [**32**] prueban que los fractales usuales, construidos por la técnica de iteración y punto fijo introducida por Hutchinson en [**24**], son en general espacios de tipo homogéneo. En el capítulo anterior probamos que bajo ciertas condiciones sobre el mapeo T definido mediante M similitudes contractivas, tenemos además que $T : \mathcal{D}_3(2, M) \to \mathcal{D}_3(2, M)$. Por lo tanto comenzando en cualquier punto inicial

$(Y_0, \mu_0) \in \mathcal{D}_3(2, M)$ se genera una **órbita**

$$\mathcal{O}_T(Y_0, \mu_0) = \{T^n(Y_0, \mu_0) : n \in \mathbb{N}_0\}$$

que está completamente contenida en $\mathcal{D}_3(2, M)$. Luego, en estos casos, obtenemos nuevamente el resultado de Mosco, y además que $T^n(Y_0, \mu_0)$ son "buenas" aproximaciones de (Y_∞, μ_∞) en el sentido que pertenecen a una familia uniforme de espacios de tipo homogéneo. Sin embargo, veremos ahora que en dos ejemplos clásicos, T_c y T_s con $k = 2$, puede ocurrir que el único punto en la órbita que satisface la propiedad de duplicación sea (Y_0, μ_0), y por supuesto el espacio límite (Y_∞, μ_∞), pero ningún otro $T^n(Y_0, \mu_0)$, $n \in \mathbb{N}$, sea un espacio de tipo homogéneo. En ambas construcciones usaremos pesos de la clase de Muckenhoupt.

Consideremos T_c con $k = 2$ en (7.3). En otras palabras, $\phi_1(x) = x/2$ y $\phi_2(x) = x/2 + 1/2$. Sea μ la medida definida por $d\mu = \frac{1}{2}w(x)dx$, con $w(x) = x^{-1/2}$ (ver Figura 1). No es difícil ver

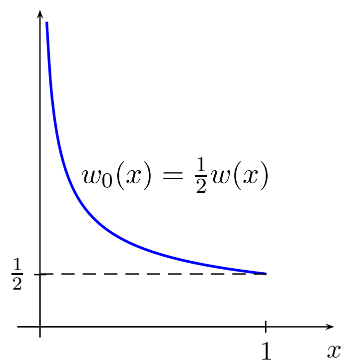


Figura 1: $d\mu_0 = w_0 dx = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx$

que μ es una medida duplicante en $[0, 1]$ con respecto a la distancia usual. Más aún, w es un peso de A_2. En efecto, sean $0 \leq a < b \leq 1$. En caso que $b - a \leq \frac{a}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b w(x)\, dx\right)\left(\int_a^b w^{-1}(x)\, dx\right) &= \left(\int_a^b x^{-1/2}\, dx\right)\left(\int_a^b x^{1/2}\, dx\right) \\
&\leq \left(\frac{b}{a}\right)^{1/2} (b-a)^2 \\
&\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} (b-a)^2.
\end{aligned}$$

Por otra parte, si $b - a \geq \frac{a}{2}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b w(x)\, dx\right)\left(\int_a^b w^{-1}(x)\, dx\right) &\leq \left(\int_0^b x^{-1/2}\, dx\right)\left(\int_0^b x^{1/2}\, dx\right) \\
&= \frac{4}{3}b^2 \\
&\leq 12(b-a)^2.
\end{aligned}$$

Observar que el SIF $\{\phi_1, \phi_2\}$ no satisface la condición (7.4) de la Proposición 74, y que si tomamos el espacio de tipo homogéneo $(Y_0, \mu_0) = ([0,1], \frac{1}{2}w(x)dx)$, entonces $T_c((Y_0, \mu_0))$ *no* es un e.t.h. Para probar la última afirmación, para cada $0 < \varepsilon < 1/4$ fijo definamos $E_\varepsilon = [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}]$ y $F_\varepsilon = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon]$. Ya que $Y_0' = Y_0 = [0,1]$ y que $d\mu_0' = \frac{\sqrt{2}}{4}v(x)dx$ con

$$v(x) = \begin{cases} x^{-1/2} & \text{si } 0 < x < 1/2, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^{-1/2} & \text{si } 1/2 < x < 1, \end{cases}$$

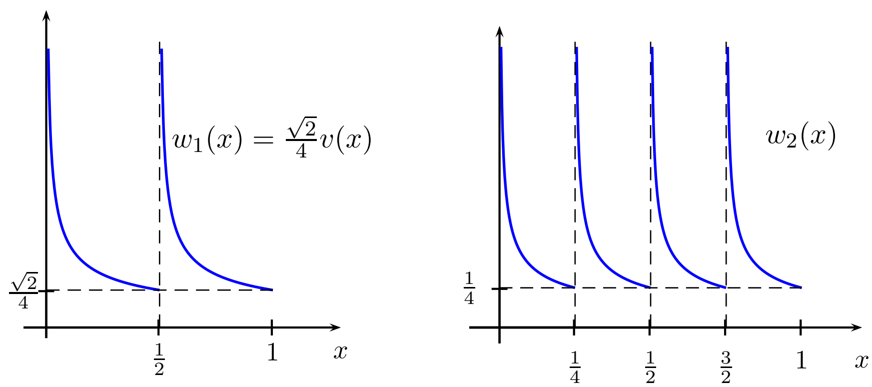


Figura 2: $T_c^n([0,1], \frac{1}{2}wdx) = ([0,1], w_n dx)$

(ver Figura 2), se tiene que $\mu_0'(E_\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon}\right)$ y $\mu_0'(F_\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}/2$. Puesto que E_ε y F_ε son bolas con radios iguales y con intersección no vacía, obtenemos que μ_0' no puede ser duplicante, ya que no satisface una propiedad del tipo $\mathcal{D}_3$ puesto que $\mu_0'(F_\varepsilon)/\mu_0'(E_\varepsilon)$ tiende a infinito cuando ε tiende a cero. Para las demás iteraciones de T_c actuando sobre $([0,1], \frac{1}{2}wdx)$, digamos $T_c^n([0,1], \frac{1}{2}wdx)$, la misma situación aparece en cada punto de la forma $j/2^n$, $j = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ (ver Figura 2). Luego ningún $T_c^n([0,1], \frac{1}{2}wdx)$ es un espacio de tipo homogéneo para $n \in \mathbb{N}$. Pero de la unicidad del teorema del punto fijo

$$\lim_{n\to\infty} T_c^n\left([0,1], \frac{1}{2}wdx\right) = ([0,1], dx),$$

el cual es el ejemplo más elemental de e.t.h.

En el ejemplo precedente conviven varias situaciones especiales. Como ya observamos el contacto entre $\phi_1([0,1])$ y $\phi_2([0,1])$ es importante para construirlo. Otra particularidad del mismo es que el atractor del SIF es el propio conjunto inicial $[0,1]$. El siguiente ejemplo está dado por una construcción similar asociada a la contracción de Sierpinski T_s con $k = 2$ (ver Figura 3), y muestra que el obstáculo para la duplicación está en el contacto y no en la invariancia del conjunto original.

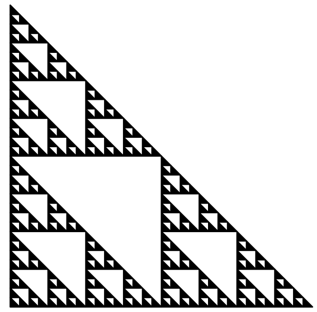


Figura 3: Atractor del SIF de tipo Sierpinski con $k = 2$

Definimos ahora la función peso $\widetilde{w}(x, y)$ sobre el triángulo $X = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$, como $\widetilde{w}(x, y) = \frac{1}{2}w(y)$ donde w es el peso definido sobre $[0, 1]$ por $w(y) = y^{-1/2}$ (ver Figura 4).

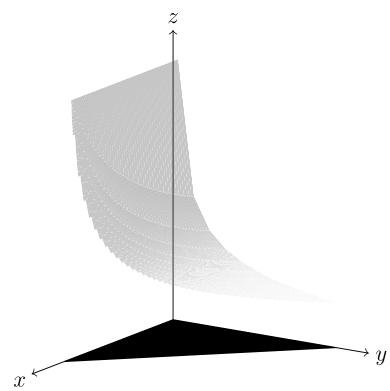


Figura 4: Peso $\widetilde{w}(x, y)$ definido sobre $X = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$

Notar que para $(x, y) \in X$ y $r > 0$ tenemos que $B_d((x, y), \frac{r}{2}) = (I_1 \times I_2) \cap X$, donde $I_1 = (x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2})$ y $I_2 = (y - \frac{r}{2}, y + \frac{r}{2})$. Luego

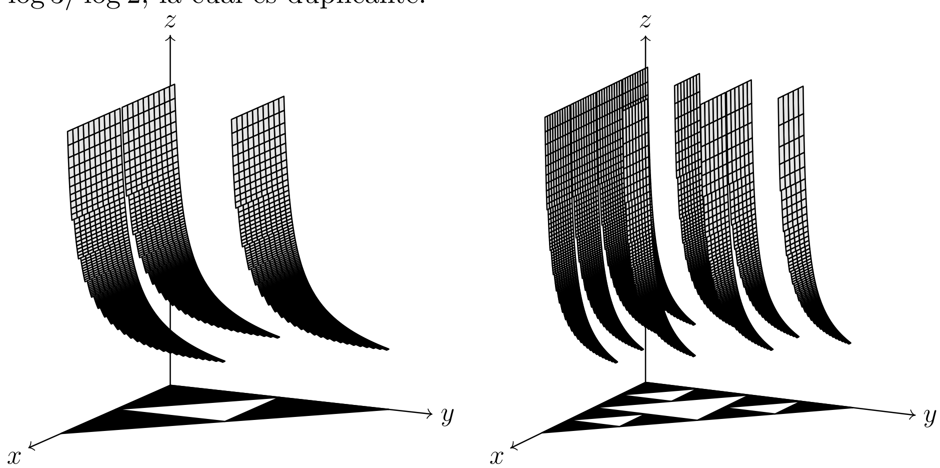
$$\int_{B_d\left((x,y),\frac{r}{2}\right)} \widetilde{w}(x, y)\, dxdy \leq r \int_{I_2} w(y)\, dy,$$

$$\int_{B_d\left((x,y),\frac{r}{2}\right)} \widetilde{w}^{-1}(x, y)\, dxdy \leq r \int_{I_2} w^{-1}(y)\, dy.$$

Multiplicando término a término las desigualdades de arriba y usando el hecho que $w \in A_2([0, 1], dy)$, obtenemos la condición $A_2(X, d, dxdy)$ para $\widetilde{w}$:

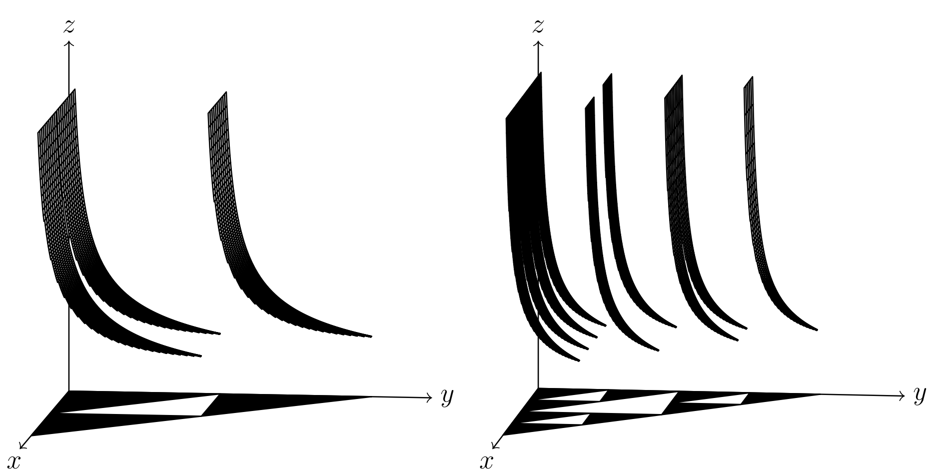
$$\begin{aligned}
&\left(\int_{B_d\left((x,y),\frac{r}{2}\right)} \widetilde{w}(x, y)\, dxdy\right)\left(\int_{B_d\left((x,y),\frac{r}{2}\right)} \widetilde{w}^{-1}(x, y)\, dxdy\right) \\
&\leq r^2 \int_{I_2} w(y)\, dy \int_{I_2} w^{-1}(y)\, dy \\
&\leq \hat{C} r^4 \\
&\leq \widetilde{C}\mu^2\left(B_d\left((x, y), \frac{r}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Entonces, en particular, $(X, d, \widetilde{w}\, dxdy)$ es un espacio de tipo homogéneo. Notar que no se satisface la hipótesis de la Proposición 74, ya que $d(\phi_i(X), \phi_j(X)) = 0$ para todo $i, j = 1, 2, 3$. Tomando $Y_0 = X$, nuevamente $T_s(Y_0, \widetilde{w}\, dxdy)$ no es un espacio de tipo homogéneo ya que precisamente en cada punto de contacto de $\phi_i(X)$ y $\phi_j(X)$ para $i \neq j$, tenemos una singularidad de $\widetilde{w}$ en uno de estos conjuntos, y acotación en el otro (ver Figuras 5(a) y 6(a)). En efecto, si para cada $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4}$ definimos $E_\varepsilon = \left([0, \varepsilon] \times [\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}]\right) \cap \phi_1(X)$ y $F_\varepsilon = [0, \varepsilon] \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon]$, con $d\mu_0 = \widetilde{w}\, dxdy$, tenemos $\mu_0'(E_\varepsilon) = \frac{1}{6}\varepsilon\left(1 - (1 - 2\varepsilon)^{3/2}\right)$ y $\mu_0'(F_\varepsilon) = \sqrt{2}\varepsilon^{3/2}/2$. Lo anterior prueba que $T_s(Y_0, \mu_0)$ no es un espacio de tipo homogéneo, ya que E_ε y F_ε son dos bolas vecinas con el mismo radio y $\mu_0'(F_\varepsilon)/\mu_0'(E_\varepsilon)$ tiende a infinito cuando ε tiende a cero. Al igual que antes ningún $T_s^n(Y_0, \mu_0)$ es un espacio de tipo homogéneo (para $n = 2$, ver Figuras 5(b) y 6(b)) y el espacio límite (Y_∞, μ_∞) es el triángulo de Sierpinski con la restricción de la medida de Hausdorff de dimension $\log 3/\log 2$, la cual es duplicante.



(a) $\widetilde{w}_1(x, y)$ definido sobre Y_1 (b) $\widetilde{w}_2(x, y)$ definido sobre Y_2

Figura 5: $T_s^n(Y_0, \widetilde{w}\, dxdy) =: (Y_n, \widetilde{w}_n dxdy)$



(a) $\widetilde{w}_1(x, y)$ (b) $\widetilde{w}_2(x, y)$

Figura 6: $T_s^n(Y_0, \widetilde{w}\, dxdy)$ desde otro punto de vista

2. Normalidad y duplicación de las órbitas de un SIF que empiezan en una delta de Dirac

Como ya hemos mencionado, nos interesa aproximar el espacio límite (Y_∞, μ_∞) inducido por una aplicación contractiva T sobre $\mathcal{E}$, mediante una sucesión de espacios de estructura más simple. Así, la órbita trivial $\mathcal{O}_T(Y_\infty, \mu_\infty)$ que sólo contiene al espacio límite, no resulta útil. En este sentido podemos más generalmente preguntarnos por la no trivialidad de la clase

$$\mathcal{A} = \{(Y,\mu) \in \mathscr{X} : T^n(Y,\mu) \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{N}_0\} = \{(Y,\mu) \in \mathscr{X} : \mathcal{O}_T(Y,\mu) \subseteq \mathcal{D}\},$$

donde $\mathcal{D}$ es alguna de las clases duplicantes cerradas consideradas antes. Notar que para las similitudes contractivas clásicas en $\mathbb{R}^n$ el espacio límite (Y_∞, μ_∞) pertenece a $\mathcal{A}$. Luego $\mathcal{A}$ es no trivial si existe un $(Y_0, \mu_0) \neq (Y_\infty, \mu_\infty)$ en $\mathcal{A}$. El siguiente teorema contiene un resultado elemental concerniente a estas clases.

Teorema 75. *Sea $T : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ un mapeo contractivo. Sea $\mathcal{D}$ un subconjunto cerrado de $(\mathscr{X}, \delta)$. Entonces $\mathcal{A}$ es cerrado en $(\mathscr{X}, \delta)$ y $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.*

Demostración. Para probar que $\mathcal{A}$ es cerrada, sea $\{(Y_k, \mu_k)\}$ una sucesión en $\mathcal{A}$ tal que $(Y_k, \mu_k) \to (Y, \mu)$. Debemos probar que $(Y,\mu) \in \mathcal{A}$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, la continuidad de T implica que que $T^n(Y,\mu) = \lim_k T^n(Y_k, \mu_k)$. Ya que $T^n(Y_k,\mu_k) \in \mathcal{D}$ para todo k y $\mathcal{D}$ es cerrado, se sigue que $T^n(Y,\mu) \in \mathcal{D}$, como queríamos. Para ver que $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tomemos $(Y,\mu) \in \mathcal{A}$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces $T^n(T(Y,\mu)) = T^{n+1}(Y,\mu) \in \mathcal{D}$, y por lo tanto $T(Y,\mu) \in \mathcal{A}$. □

Luego, si encontramos algún $(Y_0, \mu_0) \in \mathcal{A}$ no trivial, entonces podemos aproximar (Y_∞, μ_∞) por la órbita de (Y_0, μ_0), y si ese espacio inicial tiene estructura sencilla, en general la tendrán los elementos de su órbita. En los ejemplos de la sección anterior la medida μ_0 no es un buen punto inicial para obtener toda la órbita en clases de duplicación. Sin embargo la situación es diferente si tomamos como puntos iniciales a espacios de masas puntuales, para ciertas familias de similitudes contractivas. Esto es consecuencia del siguiente resultado.

Teorema 76. *Sea (X,d) un espacio métrico con la PHD. Sea $\Phi = \{\phi_i : i = 1, \dots, M\}$ una familia de similitudes contractivas sobre X con la OSC y tal que*

$$d(\phi_i(x), \phi_i(y)) = \frac{1}{a} d(x,y)$$

para todo $x, y \in X$ y todo $1 \le i \le M$, donde $a > 1$. Sea T el mapeo contractivo sobre $\mathscr{X}$ inducido por Φ y sea $\beta = \log_a M$. Sean $b > 0$ y U un conjunto para la OSC de Φ. Entonces $\{(X_n, \nu_n) := T^n(\{x_0\}, \delta_{x_0}); n \in \mathbb{N}\}$ es una familia uniformemente β-normal, para todo punto $x_0 \in U - [\partial U]_b$. Esto significa que existen constantes positivas y finitas A_1, A_2, K_1 y K_2 que no dependen de n ni de x_0 tales que

$$A_1 r^\beta \le \nu_n(B_d(x,r)) \le A_2 r^\beta,$$

para todo $x \in X_n$, todo $K_1 \nu_n(\{x\}) < r^\beta < K_2$ y todo número natural n.

Para probar el teorema precedente haremos uso del siguiente resultado, en el que utilizaremos la notación introducida en la Sección 2 del Capítulo 1.

Lema 77. *Con las hipótesis del Teorema 76, dado* $(Y_0, \mu_0) \in \mathcal{E}$ *con* $Y_0 \subseteq U$, *si* (Y_n, μ_n) *denota el espacio* $T^n(Y_0, \mu_0)$ *entonces*

$$\mu_n(\boldsymbol{\phi_i}(Y_0)) = M^{-n},$$

para todo n *y todo* $\boldsymbol{i} \in \{1, 2 \ldots, M\}^n$.

Demostración. Por la definición de T tenemos que

$$Y_n = \bigcup_{\boldsymbol{i} \in \{1,2\ldots,M\}^n} \boldsymbol{\phi_i}(Y_0) =: \bigcup_{\boldsymbol{i} \in \{1,2\ldots,M\}^n} Y_{n,\boldsymbol{i}},$$

y

$$\mu_n(E) = \frac{1}{M^n} \sum_{\boldsymbol{i} \in \{1,2\ldots,M\}^n} \mu_0\left(\boldsymbol{\phi_i}^{-1}(E \cap Y_{n,\boldsymbol{i}})\right).$$

Dado un número natural n, fijemos $\boldsymbol{i} \in \{1, 2 \ldots, M\}^n$. Queremos ver que

$$\mu_n(Y_{n,\boldsymbol{i}}) = M^{-n}.$$

En efecto

$$\begin{aligned} \mu_n(Y_{n,\boldsymbol{i}}) &= M^{-n} \sum_{\boldsymbol{j} \in \{1,2\ldots,M\}^n} \mu_0\left(\boldsymbol{\phi_j}^{-1}(\boldsymbol{\phi_i}(Y_0))\right) \\ &= M^{-n}\mu_0(Y_0) + M^{-n} \sum_{\substack{\boldsymbol{j} \in \{1,2\ldots,M\}^n \\ \boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{i}}} \mu_0\left(\boldsymbol{\phi_j}^{-1}(\boldsymbol{\phi_i}(Y_0)\right). \end{aligned}$$

Ya que $\mu_0(Y_0) = 1$, es suficiente probar que $\boldsymbol{\phi_j}^{-1}(\boldsymbol{\phi_i}(Y_0)) = \emptyset$ para toda elección de $\boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{i}$, pero esto es lo que afirma el Lema 7 del Capítulo 1. □

Dem. Teorema 76. Sea $b > 0$ tal que $U - [\partial U]_b$ es no vacío y tomemos $x_0 \in U - [\partial U]_b$. Luego $b < R := \operatorname{diam}(U)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que $(X_n, \nu_n) = T^n(\{x_0\}, \delta_{x_0})$ se tiene que

$$X_n = \left\{\boldsymbol{\phi_j}(x_0) : \boldsymbol{j} \in \{1, 2, \ldots, M\}^n\right\}.$$

Por lo tanto X_n tiene M^n elementos y $\nu_n(\{x\}) = M^{-n}$ para todo $x \in X_n$. Afirmamos que X_n es ba^{-n}-disperso. En efecto, sean $x, y \in X_n$ puntos distintos tales que $d(x, y) < ba^{-n}$, digamos $x = x_{n,\boldsymbol{j}}$, $y = x_{n,\boldsymbol{i}}$ con $\boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{i}$. Ya que U es abierto se tiene que $B_d(x_0, b) \subseteq U$. Luego

$$B_d(x_{n,\boldsymbol{j}}, ba^{-n}) = \boldsymbol{\phi_j}\left(B_d(x_0, b)\right) \subseteq \boldsymbol{\phi_j}(U),$$

$$B_d(x_{n,\boldsymbol{i}}, ba^{-n}) = \boldsymbol{\phi_i}\left(B_d(x_0, b)\right) \subseteq \boldsymbol{\phi_i}(U),$$

y ya que $\boldsymbol{\phi_j}(U)$ y $\boldsymbol{\phi_i}(U)$ son disjuntos, tenemos que $B_d(x, ba^{-n}) \cap B_d(y, ba^{-n}) = \emptyset$. Esto implica que $d(x, y) \geq ba^{-n}$.

Notar además que si $\boldsymbol{\ell} \in \{1, 2, \ldots, M\}^k$ y $k \leq n$, por el Lema 9 del Capítulo 1, tenemos que

$$\nu_n(\boldsymbol{\phi_\ell}(U)) = M^{-n}\operatorname{card}(\boldsymbol{\phi_\ell}(U) \cap X_n) = M^{-k} = a^{-k\beta}, \tag{8.1}$$

donde $\beta = \log_a M$.

Definimos $K_1 = b^\beta$ y $K_2 = Ra^\beta$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$, $x \in X_n$ y $r > 0$ tal que $K_1 \nu_n(\{x\}) < r^\beta < K_2$. Luego $r > ba^{-n}$. Consideraremos separadamente dos casos:

Caso 1: $ba^{-n} < r \leq Ra^{-n}$. Por un lado tenemos que

$$\nu_n(B_d(x,r)) \geq \nu_n(B_d(x, ba^{-n})) \geq M^{-n} = a^{-n\beta} \geq R^{-\beta} r^\beta,$$

mientras que

$$\begin{aligned} \nu_n(B_d(x,r)) &\leq \nu_n(B_d(x, Ra^{-n+1})) \\ &= M^{-n} \mathrm{card}\left(X_n \cap B_d(x, Ra^{-n+1})\right) \\ &\leq N^\ell a^{-n\beta} \\ &\leq N^\ell b^{-\beta} r^\beta, \end{aligned}$$

donde ℓ es un natural tal que $2^\ell \geq Ra/b$, y N es la constante asociada a la PHD.

Caso 2: $r > Ra^{-n}$. Fijemos $j \leq n$ tal que $Ra^{-j} < r \leq Ra^{-j+1}$. Definimos

$$\mathcal{J} = \{\boldsymbol{j} \in \{1, 2, \ldots, M\}^j : B_d(x,r) \cap X_n \cap \boldsymbol{\phi_j}(U) \neq \emptyset\}.$$

El hecho que $\{\boldsymbol{\phi_j}(U), \boldsymbol{j} \in \{1, 2, \ldots, M\}^j\}$ sea un cubrimiento de X_n implica que

$$B_d(x,r) \cap X_n \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{j} \in \mathcal{J}} \boldsymbol{\phi_j}(U).$$

Por otra parte, si $x = \boldsymbol{\phi_i}(x_0)$, $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ y $\boldsymbol{j} = (i_{n-j+1}, i_{n-j+2}, \ldots, i_n)$, veremos que

$$\boldsymbol{\phi_j}(U) \cap X_n \subseteq B_d(x,r) \cap X_n.$$

En efecto, si $y \in \boldsymbol{\phi_j}(U) \cap X_n$ entonces $y = \boldsymbol{\phi_{i'}}(x_0)$, donde

$$\boldsymbol{i'} = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{n-j}, i_{n-j+1}, i_{n-j+2}, \ldots, i_n),$$

para ciertos $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{n-j} \in \{1, 2, \ldots, M\}$. Luego

$$d(x,y) \leq a^{-j} R < r.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \nu_n(B_d(x,r)) &\leq \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathcal{J}} \nu_n(\boldsymbol{\phi_j}(U)) \\ &= \mathrm{card}(\mathcal{J}) a^{-j\beta} \\ &\leq \mathrm{card}(\mathcal{J}) R^{-\beta} r^\beta, \end{aligned}$$

y para cualquier $\boldsymbol{j} \in \mathcal{J}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \nu_n(B_d(x,r)) &\geq \nu_n(\boldsymbol{\phi_j}(U)) \\ &= a^{-j\beta} \end{aligned}$$

$$\geq \quad (aR)^{-\beta} r^{\beta}.$$

Entonces sólo debemos probar que el cardinal de $\mathcal{J}$ permanece acotado por una constante que no depende de x, de r ni de j. En efecto, identificamos cada índice $\boldsymbol{j} \in \mathcal{J}$ con el punto $\boldsymbol{\phi_j}(x_0) \in \boldsymbol{\phi_j}(U)$, y definimos el conjunto $A = \{\boldsymbol{\phi_j}(x_0) : \boldsymbol{j} \in \mathcal{J}\}$. Ya que los $\boldsymbol{\phi_j}(U)$ son disjuntos para los índices $\boldsymbol{j}$ con igual longitud, tenemos que

$$\operatorname{card}(\mathcal{J}) = \operatorname{card}\{\boldsymbol{\phi_j}(x_0) : \boldsymbol{j} \in \mathcal{J}\} = \operatorname{card}(A).$$

Notar además que el conjunto A es ba^{-j}-disperso por ser un subconjunto de X_j. También $A \subseteq B_d(x, 2r)$, pues si $\boldsymbol{j} \in \mathcal{J}$ entonces existe $y \in B_d(x,r) \cap X_n \cap \boldsymbol{\phi_j}(U)$, y

$$d(\boldsymbol{\phi_j}(x_0), x) \leq d(\boldsymbol{\phi_j}(x_0), y) + d(y, x) < a^{-j}R + r \leq 2r.$$

Luego

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(A) &\leq \operatorname{card}(B_d(x,2r) \cap X_j) \\ &\leq \operatorname{card}(B_d(x, 2Ra^{-j+1}) \cap X_j) \\ &\leq N^{\ell+1}, \end{aligned}$$

con ℓ y N como en el Caso 1.

Así queda probado el teorema con $A_1 = R^{-\beta}$ y $A_2 = N^{\ell+1} b^{-\beta}$. □

Como consecuencia inmediata tenemos el siguiente corolario.

Corolario 78. *Sea (X,d) un espacio métrico con la PHD. Sea $\Phi = \{\phi_i : i = 1, \ldots, M\}$ una familia de similitudes contractivas sobre X con la OSC y tal que*

$$d\left(\phi_i(x), \phi_i(y)\right) = \frac{1}{a} d(x,y)$$

para todo $x, y \in X$ y todo $1 \leq i \leq M$, donde $a > 1$. Sean T el mapeo contractivo sobre $\mathscr{X}$ inducido por Φ, $b > 0$ y U un conjunto para la OSC de Φ. Entonces existe una constante $A = A(b) \geq 1$ tal que para todo punto $x_0 \in U - [\partial U]_b$ tenemos que $\{T^n(\{x_0\}, \delta_{x_0}) : n \in \mathbb{N}\}$ está incluida en $\mathcal{D}(2, A)$.

El teorema anterior, junto al Teorema 75, implican la normalidad de ciertos fractales clásicos, obteniendo en estas ocasiones nuevamente el resultado de Mosco.

Corolario 79. *Sea (X,d) un espacio métrico con la PHD. Sea $\Phi = \{\phi_i : i = 1, \ldots, M\}$ una familia de similitudes contractivas en X con la OSC y tal que*

$$d\left(\phi_i(x), \phi_i(y)\right) = \frac{1}{a} d(x,y)$$

para todo $x, y \in X$ y todo $1 \leq i \leq M$, donde $a > 1$. Sea T el mapeo contractivo sobre $\mathscr{X}$ inducido por Φ. Entonces el espacio límite (Y_∞, μ_∞) es β-normal, siendo $\beta = \log_a M$, y además es límite de espacios discretos autosimilares uniformemente β-normales.

Observamos finalmente que si bien la hipótesis de que cada ϕ_i es una similitud contractiva no es invariante por cambio de métricas equivalentes, y que por lo tanto resultados similares a los tres últimos no pueden deducirse de ellos, las demostraciones pueden rehacerse en el caso general de un espacio casi-métrico. Hemos optado por el contexto métrico por simplicidad en las demostraciones.

3. Toda órbita es gradualmente duplicante

Los resultados de la Sección 1 de este capítulo junto a la Proposición 74 del capítulo anterior sugieren que existe una fuerte relación entre las propiedades de separación del SIF Φ y la conducta de la órbita generada por T a partir de diferentes puntos iniciales. En particular, los ejemplos construidos en la Sección 1 muestran que la propiedad de duplicación puede aparecer "repentinamente" para el espacio límite cuando ningún término de la sucesión tenía esta propiedad.

En esta sección probaremos que, en general, los términos de la sucesión aproximante satisfacen una propiedad que, a medida que la iteración avanza, se parece cada vez más a la duplicación en el sentido que precisaremos a continuación, y que la duplicación del límite, en ese sentido, no es tan "repentina". Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $\varepsilon \geq 0$ y constantes $A \geq 1$ y $\alpha > 1$, decimos que (Y, μ) pertenece a $\mathcal{D}^{\varepsilon}(\alpha, A)$, o que μ es **ε-duplicante** con constantes α y A, si $(Y, \mu) \in \mathcal{E}$ y las desigualdades

$$0 < \mu(B_d(y, \alpha r)) \leq A\mu(B_d(y, r))$$

valen para todo $y \in Y$ y todo $r > \varepsilon$. Cuando $\varepsilon = 0$ escribimos $\mathcal{D}(\alpha, A)$ en lugar de $\mathcal{D}^0(\alpha, A)$ y en este caso (Y, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo.

Notar que al igual que en el caso de la duplicación usual, dados dos números α_1 y α_2 mayores que 1 y $\varepsilon \geq 0$, la existencia de $A_1 \geq 1$ para la cual $(Y, \mu) \in \mathcal{D}^{\varepsilon}(\alpha_1, A_1)$ es equivalente a la existencia de $A_2 \geq 1$ tal que $(Y, \mu) \in \mathcal{D}^{\varepsilon}(\alpha_2, A_2)$. Luego por simplicidad tomaremos $\alpha = 2$.

El siguiente resultado establece que si los términos de una sucesión aproximante son "gradualmente duplicantes" en forma uniforme (es decir, con una constante A de duplicación gradual que vale para todo elemento de la sucesión), entonces el límite es un espacio de tipo homogéneo.

Proposición 80. *Sea (Y_n, μ_n) una sucesión en $\mathcal{E}$ tal que $(Y_n, \mu_n) \in \mathcal{D}^{\varepsilon_n}(2, A)$, con $\varepsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si $(Y_n, \mu_n) \xrightarrow{\delta} (Y, \mu)$ entonces existe $A' \geq 1$ tal que $(Y, \mu) \in \mathcal{D}(2, A')$.*

Demostración. Tomemos $y \in Y$ y $r > 0$. Sea φ la función continua definida sobre $\mathbb{R}_0^+$ como $\varphi \equiv 1$ en $[0, 1]$, $\varphi \equiv 0$ en $[2, \infty)$ y lineal en el intervalo $[1, 2]$. Ya que $Y_n \xrightarrow{\delta_H} Y$, tomemos $y_n \in Y_n$ tal que $d(y_n, y) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Luego, puesto que existe n_0 tal que $y_n \in B_d(y, r/16)$ y $\varepsilon_n < 5r/16$ para todo $n \geq n_0$, tenemos de modo similar a la prueba de la Proposición 39 en el

Capítulo 3, que

$$\begin{aligned}
\mu(B_d(y,2r)) &\leq \int \varphi\left(\frac{d(x,y)}{2r}\right) d\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \varphi\left(\frac{d(x,y)}{2r}\right) d\mu_n(x) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n\left(B_d\left(y,4r\right)\right) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n\left(B_d\left(y_n,5r\right)\right) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} A^4\mu_n\left(B_d\left(y_n,\frac{5r}{16}\right)\right) \\
&\leq A^4 \liminf_{n\to\infty} \mu_n\left(B_d\left(y,\frac{r}{2}\right)\right) \\
&\leq A^4 \lim_{n\to\infty} \int \varphi\left(\frac{2d(x,y)}{r}\right) d\mu_n(x) \\
&= A^4 \int \varphi\left(\frac{2d(x,y)}{r}\right) d\mu(x) \\
&\leq A^4\mu(B_d(y,r)).
\end{aligned}$$

□

El principal resultado de esta sección, contenido en el Corolario 82, es que bajo las condiciones del Teorema 78, para cualquier $(Y_0,\mu_0)\in\mathcal{E}$ con $Y_0\subset U$ la sucesión $\{T^n(Y_0,\mu_0)\}$ se vuelve cada vez más duplicante cuando n crece en forma uniforme, en el sentido que existe $A\geq 1$ tal que para cada $\varepsilon>0$ existe $N=N(\varepsilon,Y_0,\mu_0)$ tal que $T^n(Y_0,\mu_0)\in\mathcal{D}^\varepsilon(2,A)$ para todo $n\geq N$. Trabajaremos en un contexto más general que describimos a continuación.

Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Sea (Y_n,μ_n) una sucesión de espacios en $\mathcal{E}$ con la siguiente estructura especial: cada Y_n puede escribirse como una unión disjunta

$$Y_n=\bigcup_{m=1}^{M_n} Y_n^m$$

de M_n piezas de Borel Y_n^m, tales que $\sup_{m=1,\ldots,M_n}\operatorname{diam}(Y_n^m)=:d_n\to 0$ cuando $n\to\infty$, y $\mu_n(Y_n^m)=M_n^{-1}$.

Diremos que la sucesión (Y_n,μ_n) satisface la **duplicación gradual uniforme (DGU)** si existe $A\geq 1$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $(Y_n,\mu_n)\in\mathcal{D}^{5d_n}(2,A)$.

El resultado del que será consecuencia el Corolario 82 muestra que la DGU se deduce de otra propiedad a la que llamamos **control discreto uniformemente duplicante (CDUD)** de (Y_n,μ_n): existe $A\geq 1$ y para cada n existe un conjunto $X_n\subseteq Y_n$ tal que $\operatorname{card}(X_n\cap Y_n^m)=1$ para todo $m=1,\ldots,M_n$, y $\{(X_n,\nu_n):n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathcal{D}(2,A)$, donde ν_n es la medida que cuenta sobre X_n normalizada a una probabilidad.

Teorema 81. *Si una sucesión (Y_n, μ_n) posee CDUD, entonces satisface DGU.*

Demostración. Fijemos $n \in \mathbb{N}$, $y \in Y_n$ y $r > 5d_n$. Existe un único Y_n^m tal que $y \in Y_n^m$. Llamemos x_m^n al único punto en $X_n \cap Y_n^m$. Luego $d(y, x_n^m) \leq d_n$. Para $s > 2d_n$ denotemos por

$$B^i = B_d(x_n^m, s + (i-2)d_n),$$

$i = 0, 1, 2, 3, 4$. Notar que

$$B^1 \subseteq B_d(y, s) \subseteq B^3,$$

por lo que

$$\mu_n(B^1) \leq \mu_n(B_d(y, s)) \leq \mu_n(B^3).$$

Afirmamos que la relación entre la medida μ_n y la medida ν_n que cuenta (normalizada) sobre X_n es la siguiente

$$\mu_n(B^1) \geq \nu_n(B^0) \quad \text{y} \quad \mu_n(B^3) \leq \nu_n(B^4). \tag{8.2}$$

Si suponemos cierta la afirmación, entonces

$$\nu_n(B^0) \leq \mu_n(B_d(y, s)) \leq \nu_n(B^4)$$

para todo $y \in Y_n^m$ y $s > 2d_n$. Sea $A \geq 1$ la constante para el CDUD, es decir, supongamos que $\{(X_n, \nu_n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{D}(2, A)$. Luego

$$\begin{aligned}
\mu_n(B_d(y, 2r)) &\leq \nu_n(B_d(x_n^m, 2r + 2d_n)) \\
&\leq A^2 \nu_n(B_d(x_n^m, (r + d_n))/2) \\
&\leq A^2 \mu_n(B_d(y, (r + 5d_n)/2)) \\
&\leq A^2 \mu_n(B_d(y, r)),
\end{aligned}$$

y la DGU se obtiene con $A_2 = A^2$. Entonces sólo resta probar las desigualdades que aparecen en (8.2). Para probar la primera definimos el conjunto

$$\mathcal{J} = \{j : Y_n^j \subseteq B^1\}.$$

Notar que si $x_n^j \in B^0 \cap X_n$, entonces $j \in \mathcal{J}$. En efecto, supongamos que $d(x_n^j, x_n^m) < s - 2d_n$. Para ver que $Y_n^j \subseteq B^1$ fijemos $z \in Y_n^j$. Ya que $\operatorname{diam}(Y_n^j) \leq d_n$ tenemos que $d(z, x_n^j) \leq d_n$. Luego

$$\begin{aligned}
d(z, x_n^m) &\leq d(z, x_n^j) + d(x_n^j, x_n^m) \\
&< d_n + s - 2d_n \\
&= s - d_n,
\end{aligned}$$

y por lo tanto $Y_n^j \subseteq B^1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mu_n(B^1) &\geq \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_n(Y_n^j) \\
&= \sum_{j \in \mathcal{J}} M_n^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j\in\mathcal{J}} \nu_n(\{x_n^j\}) \\
&\geq \nu_n(B^0).
\end{aligned}
$$

Para probar la segunda desigualdad definimos ahora el conjunto

$$\mathcal{Q} = \{q : Y_n^q \cap B^3 \neq \emptyset\}.$$

Observar que si $q \in \mathcal{Q}$ entonces $Y_n^q \subseteq B^4$. En efecto, si $q \in \mathcal{Q}$ entonces existe $z_n^q \in Y_n^q \cap B_d(x_n^m, s + d_n)$. Luego para cada $z \in Y_n^q$ tenemos

$$
\begin{aligned}
d(z, x_n^m) &\leq d(z, z_n^q) + d(z_n^q, x_n^m) \\
&< d_n + s + d_n \\
&= s + 2d_n,
\end{aligned}
$$

y por lo tanto $z \in B^4$. Luego

$$
\begin{aligned}
\mu_n(B^3) &\leq \sum_{q\in\mathcal{Q}} \mu_n(Y_n^q) \\
&= \sum_{q\in\mathcal{Q}} \nu_n(\{x_n^q\}) \\
&\leq \nu_n(B^4),
\end{aligned}
$$

como queríamos ver. □

Si bien la conclusión referida a la homogeneidad del espacio límite ya es consecuencia del Corolario 79, el siguiente resultado establece además que la sucesión $(Y_n, \mu_n) = T^n(Y_0, \mu_0)$ que aproxima al espacio límite es gradualmente duplicante en forma uniforme, para muchos espacios iniciales $(Y_0, \mu_0) \in \mathcal{E}$.

Corolario 82. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto con la PHD. Sea $\Phi = \{\phi_i : i = 1, \ldots, M\}$ una familia de similitudes contractivas sobre X con la OSC y tal que*

$$d\left(\phi_i(x), \phi_i(y)\right) = \frac{1}{a} d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$ y todo $1 \leq i \leq M$, donde $a > 1$. Sea T el mapeo contractivo sobre $\mathscr{X}$ inducido por Φ. Si $(Y_0, \mu_0) \in \mathcal{E}$ es tal que $Y_0 \subset U$, donde U es un conjunto para la OSC de Φ, entonces existe $A' \geq 1$ tal que $(Y_n, \mu_n) \in \mathcal{D}^{5a^{-n}}(2, A')$ para todo n, y por lo tanto el espacio límite (Y_∞, μ_∞) es un espacio de tipo homogéneo.

Demostración. Fijemos $(Y_0, \mu_0) \in \mathcal{E}$ con $Y_0 \subset U$, donde U es un conjunto para la OSC de Φ. Sea $x_0 \in Y_0$ fijo. Ya que $d(Y_0, U) > 0$ podemos aplicar el Teorema 78 para obtener una constante $A \geq 1$ tal que $T^n(\{x_0\}, \delta_{x_0}) \in \mathcal{D}_2(2, A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, aplicando el Teorema 81 con

$$M_n = M^n, \quad Y_n = \bigcup_{\boldsymbol{i}\in\{1,\ldots,M\}^n} \boldsymbol{\phi_i}(Y_0), \quad d_n = a^{-n}, \quad (X_n, \nu_n) = T^n(\{x_0\}, \delta_{x_0}),$$

tenemos que $(Y_n, \mu_n) \in \mathcal{D}^{5a^{-n}}(2, A^2)$. Finalmente, por la Proposición 80 existe $A' \geq 1$ tal que $(Y_\infty, \mu_\infty) \in \mathcal{D}(2, A')$. □

La DGU y la CDUD están todavía más estrechamente relacionadas. En efecto, bajo algunas hipótesis adicionales obtenemos el recíproco del Teorema 81.

TEOREMA 83. *Si además de las hipótesis del Teorema 81 tenemos que (X, d) tiene la PHD y que existe una constante $0 < c < 1$ tal que para cada n existe un conjunto $F_n \subseteq Y_n$ que es cd_n-disperso y que contiene al menos un punto de cada Y_n^j, entonces DGU implica CDUD.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \geq 1$ la contante para la DGU. Para cada n, construimos un conjunto X_n tomando exactamente un punto de cada Y_n^j. Antes de probar que existe una constante A' tal que $(X_n, \nu_n) \in \mathcal{D}(2, A')$ para todo n, notemos que para cada $x \in X_n$ y $s > d_n$ se tiene que

$$\mu_n(B_d(x, s - d_n)) \leq \nu_n(B_d(x, s)) \leq \mu_n(B_d(x, s + d_n)). \tag{8.3}$$

Las desigualdades que aparecen en (8.3) se prueban de igual forma que (8.2) en el Teorema 81. Tomemos entonces un número natural n, $x \in X_n$ y $r > 0$. Vamos a considerar tres casos:

Caso 1: $r > 5d_n$. En este caso podemos aplicar (8.3) y la propiedad de duplicación gradual uniforme para obtener

$$\begin{aligned}
\nu_n(B_d(x, 2r)) &\leq \mu_n(B_d(x, 2r + d_n)) \\
&\leq A\mu_n\left(B_d\left(x, r + d_n/2\right)\right) \\
&\leq A\mu_n(B_d(x, 11r/10)) \\
&\leq A\nu_n(B_d(x, 11r/10 + d_n)) \\
&\leq A\nu_n(B_d(x, 3r/2)).
\end{aligned}$$

Caso 2: $r = 5d_n$. Ya que (X, d) tiene la PHD, digamos con constante N, y X_n es cd_n-disperso tenemos que

$$\begin{aligned}
\nu_n(B_d(x, 2r)) &= \nu_n(B_d(x, 10d_n)) \\
&= \frac{1}{M_n} \operatorname{card}\left(X_n \cap B_d(x, 10d_n)\right) \\
&\leq \frac{N^j}{M_n} \\
&\leq N^j \nu_n(B_d(x, r)),
\end{aligned}$$

donde j es un natural tal que $2^j \geq 10/c$.

Caso 3: $r < 5d_n$. En este caso vamos a distinguir todavía dos posibilidades. La primera es suponer que $2r \leq 5d_n$ y la segunda, que $2r > 5d_n$. Supongamos que ocurre lo primero, es decir supongamos que $2r \leq 5d_n$. Entonces

$$\begin{aligned} \nu_n(B_d(x,2r)) &\leq \nu_n(B_d(x,5d_n)) \\ &= \frac{1}{M_n}\text{card}\,(X_n \cap B_d(x,5d_n)) \\ &\leq \frac{N^k}{M_n} \\ &\leq N^k \nu_n(B_d(x,r)), \end{aligned}$$

donde k es un natural tal que $2^k \geq 5/c$. Por otra parte, si $2r > 5d_n$, entonces

$$\begin{aligned} \nu_n(B_d(x,2r)) &\leq \nu_n(B_d(x,10d_n)) \\ \boxed{\text{Caso 2}} \rightsquigarrow &\leq N^j \nu_n(B_d(x,5d_n)) \\ \boxed{\text{Caso 3, Opción 1}} \rightsquigarrow &\leq N^{j+k} \nu_n(B_d(x,5d_n/2)) \\ \boxed{5d_n < 2r} \rightsquigarrow &\leq N^{j+k} \nu_n(B_d(x,r)). \end{aligned}$$

Hemos demostrado así que dado un número natural n, la desigualdad

$$\nu_n(B_d(x,2r)) \leq \tilde{A}\nu_n(B_d(x,3r/2))$$

vale para todo $x \in X_n$ y $r > 0$, donde $\tilde{A} = \max\{A, N^{j+k}\}$ es independiente de n. Luego $(X_n,\nu_n) \in \mathcal{D}(2,\tilde{A}^3)$ para todo n, y queda probado el teorema con $A' = \tilde{A}^3$.

□

4. Órbitas "de Muckenhoupt"

Sea X el intervalo $[0,1]$ con la distancia usual. En la Sección 1 vimos que la función $w(x) = x^{-1/2}$ es un peso en $A_2(X,|\cdot|,dx)$ y por lo tanto la medida de probabilidad μ_0 definida como $d\mu_0 = \frac{1}{2}w(x)dx$, es una medida duplicante en X. Sin embargo, vimos que si T_c es la aplicación inducida por el SIF compuesto por las similitudes

$$\phi_1(x) = x/2, \qquad \phi_2(x) = x/2 + 1/2,$$

entonces $T_c^n((X,\mu_0))$ *no* es un espacio de tipo homogéneo para ningún $n \geq 1$, a pesar de que tanto el espacio inicial (X,μ_0) como el espacio límite (X,dx) lo sean.

Consideremos ahora la aplicación contractiva T asociada al SIF $\{\psi_1,\psi_2\}$, donde

$$\psi_1(x) = x/2, \qquad \psi_2(x) = -x/2 + 1.$$

Probaremos ahora que aún partiendo del mismo espacio inicial (X,μ_0) antes mencionado, la órbita generada por T es ahora una familia *uniforme* de espacios de tipo homogéneo. Para esto demostraremos el siguiente resultado más general.

Proposición 84. *Sea $X = [0,1]$ con la distancia usual. Sea $\Psi = \{\psi_1,\psi_2\}$, con*

$$\psi_1(x) = x/2, \qquad \psi_2(x) = -x/2 + 1,$$

y sea T la aplicación contractiva inducida por Ψ. Sea $w(x) \in A_p(X)$ y μ_0 la medida definida como $d\mu_0 = w(x)dx$. Entonces $(X, \mu_n) := T^n((X, \mu_0))$ satisface que $d\mu_n = w_n(x)dx$, donde la familia $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ está uniformemente *en $A_p(X)$. En otras palabras existe una constante B tal que*

$$\left(\int_a^b w_n(x)\,dx\right)\left(\int_a^b w_n^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right)^{p-1} \leq B(b-a)^p,$$

para todo $0 \leq a < b \leq 1$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Mas aún, si $w \in A_p(X)$ con constante C, entonces $B \leq 3^p C$.

Antes de la demostración probaremos dos lemas que establecen propiedades de los pesos w_n.

Lema 85. *Sea $X = [0,1]$ con la distancia usual. Sea $\Psi = \{\psi_1, \psi_2\}$, con*

$$\psi_1(x) = x/2, \qquad \psi_2(x) = -x/2 + 1,$$

y sea T la aplicación contractiva inducida por Ψ. Dada una función w integrable en X, sea μ_0 la medida definida como $d\mu_0 = w(x)dx$. Si $(X, \mu_n) := T^n((X, \mu_0))$ entonces $d\mu_n = w_n(x)dx$ donde

$$\begin{aligned} w_n(x) \;&=\; \sum_{\substack{j=1,\ldots,2^n \\ j \text{ impar}}} w\left(2^n\left[x - \frac{j-1}{2^n}\right]\right)\mathcal{X}_{(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n})}(x) \\ &\quad + \sum_{\substack{j=1,\ldots,2^n \\ j \text{ par}}} w\left(2^n\left[\frac{j}{2^n} - x\right]\right)\mathcal{X}_{(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n})}(x). \end{aligned} \tag{8.4}$$

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre n. Para $n = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mu_1(E) &= (T_2(\mu_0))(E) \\ &= \frac{1}{2}\mu_0\left(\psi_1^{-1}\left(E \cap (0,1/2)\right)\right) + \frac{1}{2}\mu_0\left(\psi_2^{-1}\left(E \cap (1/2,1)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\psi_1^{-1}[E\cap(0,1/2)]} w(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\psi_2^{-1}[E\cap(1/2,1)]} w(x)\,dx \\ &= \int_{E\cap(0,1/2)} w(\psi_1^{-1}(y))\,dy + \int_{E\cap(1/2,1)} w(\psi_2^{-1}(y))\,dy \\ &= \int_E w(2y)\mathcal{X}_{(0,1/2)}(y)\,dy + \int_E w(2(1-y))\mathcal{X}_{(1/2,1)}(y)\,dy \\ &= \int_E \left[w(2y)\mathcal{X}_{(0,1/2)}(y) + w(2(1-y))\mathcal{X}_{(1/2,1)}(y)\right]\,dy. \end{aligned}$$

Luego $d\mu_1 = w_1(x)dx$, donde $w_1(x) = w(2x)\mathcal{X}_{(0,1/2)}(x) + w(2(1-x))\mathcal{X}_{(1/2,1)}(x)$, lo que prueba el resultado para $n = 1$. Suponiendo que la fórmula (8.4) vale para todo $k \leq n$, probaremos que también vale para $k = n+1$. En efecto

$$\begin{aligned} \mu_{n+1}(E) &= (T_2^{n+1}(\mu_0))(E) \\ &= (T_2(\mu_n))(E) \end{aligned}$$

$$= \int_E \left[w_n(2x)\mathcal{X}_{(0,1/2)}(x) + w_n(2(1-x))\mathcal{X}_{(1/2,1)}(x) \right] \, dx$$
$$= \int_E v_n(x)\, dx.$$

Será suficiente ver entonces que $v_n(x) = w_{n+1}(x)$ para casi todo punto $x \in [0,1]$. En efecto, fijemos $x \in X$ y supongamos que $\frac{j-1}{2^n} < 2x < \frac{j}{2^n}$ para cierto j fijo. Si $x \in (0,1/2)$ entonces

$$v_n(x) = w_n(2x) = \begin{cases} w\left(2^n\left(\frac{j}{2^n} - 2x\right)\right) = w_{n+1}(x), & j \text{ par;} \\ w\left(2^n\left(2x - \frac{j-1}{2^n}\right)\right) = w_{n+1}(x), & j \text{ impar,} \end{cases}$$

ya que $\frac{j-1}{2^{n+1}} < x < \frac{j}{2^{n+1}}$. Análogamente, si $x \in (1/2,1)$ y $\frac{j-1}{2^n} < 2(1-x) < \frac{j}{2^n}$, entonces

$$v_n(x) = w_n(2(1-x)) = \begin{cases} w\left(2^{n+1}\left(\frac{j}{2^{n+1}} - 1 + x\right)\right), & j \text{ par;} \\ w\left(2^{n+1}\left(1 - x - \frac{j-1}{2^{n+1}}\right)\right), & j \text{ impar.} \end{cases}$$

Por otro lado, si denotamos $\widetilde{j} = 2^{n+1} - j + 1$ entonces $\frac{\widetilde{j}-1}{2^{n+1}} < x < \frac{\widetilde{j}}{2^{n+1}}$. Luego

$$w_{n+1}(x) = \begin{cases} w\left(2^{n+1}\left(x - \frac{\widetilde{j}-1}{2^{n+1}}\right)\right), & \widetilde{j} \text{ impar;} \\ w\left(2^{n+1}\left(\frac{\widetilde{j}}{2^{n+1}} - x\right)\right), & \widetilde{j} \text{ par.} \end{cases}$$

Reemplazando $\widetilde{j}$ y teniendo en cuenta que $\widetilde{j}$ es par si y sólo si j es impar, tenemos que

$$w_{n+1}(x) = \begin{cases} w\left(2^{n+1}\left(x - 1 + \frac{j}{2^{n+1}}\right)\right) = v_n(x), & j \text{ par;} \\ w\left(2^{n+1}\left(1 - x - \frac{j-1}{2^{n+1}}\right)\right) = v_n(x), & j \text{ impar.} \end{cases}$$

Hemos probado así que $d\mu_{n+1} = w_{n+1}dx$, y el lema queda demostrado. $\square$

Para visualizar el efecto que produce este SIF, el siguiente gráfico muestra lo que ocurre al ser aplicado al peso $w(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$.

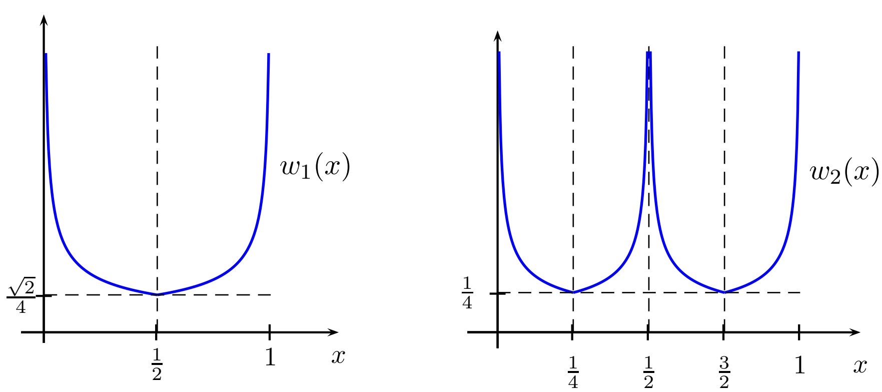


Figura 7: $T^n(X,\mu_0) = (X,\mu_n)$, con $d\mu_n = w_n dx$.

En la figura anterior también pueden observarse propiedades de paridad y periodicidad de cada w_n. Estas propiedades están contenidas en el siguiente resultado.

Lema 86. *Dado $n \in \mathbb{N}$, sea w_n definido como en (8.4). Entonces para cada n fijo, w_n satisface las siguientes propiedades:*

(1) (Paridad) *Para todo $j = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ y todo $0 < a < 2^{-n}$ se tiene que*

$$\int_{\frac{j}{2^n}-a}^{\frac{j}{2^n}+a} w_n(x)\,dx = 2\int_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}+a} w_n(x)\,dx.$$

(2) (Periodicidad) *Para todo $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq 2^n$*

$$\int_{\frac{j_1}{2^n}}^{\frac{j_2}{2^n}} w_n(x)\,dx = (j_2 - j_1)\int_0^{\frac{1}{2^n}} w_n(x)\,dx = \frac{j_2 - j_1}{2^n}\int_0^1 w(x)\,dx.$$

Claramente las mismas propiedades valen para w_n^{-1}.

Dem. Propiedad (1). Si j es par, entonces por (8.4) nos queda

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{j}{2^n}-a}^{\frac{j}{2^n}+a} w_n(x)\,dx &= \int_{\frac{j}{2^n}-a}^{\frac{j}{2^n}} w_n(x)\,dx + \int_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}+a} w_n(x)\,dx \\
&= \int_{\frac{j}{2^n}-a}^{\frac{j}{2^n}} w\left(2^n\left[\frac{j}{2^n} - x\right]\right)\,dx + \int_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}+a} w\left(2^n\left[x - \frac{j}{2^n}\right]\right)\,dx \qquad (8.5)\\
&= 2\int_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}+a} w\left(2^n\left[u - \frac{j}{2^n}\right]\right)\,du,
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = \frac{2j}{2^n} - x$ en la primera integral que aparece en (8.5). Si j es impar se procede de igual forma. □

Dem. Propiedad (2). Para probar la primera igualdad es suficiente ver que

$$\int_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{j+1}{2^n}} w_n(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2^n}} w_n(x)\,dx,$$

para todo j. En efecto, si j es par entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{j+1}{2^n}} w_n(x)\,dx &= \int_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{j+1}{2^n}} w\left(2^n\left[x - \frac{j}{2^n}\right]\right)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2^n}} w(2^n u)\,du,
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = x - \frac{j}{2^n}$. De la misma forma se prueba cuando j es impar.

La segunda igualdad que aparece en (2) es sólo aplicar la definición de w_n que aparece en (8.4) y luego hacer el cambio de variable $u = 2^n x$. □

Dem. Proposición 84. Por hipótesis w es un peso de $A_p(X)$, digamos con constante C. Queremos probar que la familia $\{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ está uniformemente en $A_p(X)$. Para esto fijemos $0 \leq a < b \leq 1$ y $n \in \mathbb{N}$. Sea $I = (a, b)$, y denotemos por $|I|$ a la longitud del intervalo I. Consideremos dos casos:

Caso 1. $\boldsymbol{|I| \leq 2^{-n}}$ En este caso existen dos opciones:

(1.a) Existe un único $j = 1, 2, \ldots, 2^n$ tal que $I \subseteq \left(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)$. Si j es impar, entonces

$$\begin{aligned}
&\left(\int_I w_n(x)\,dx\right)\left(\int_I w_n^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right)^{p-1}\\
&= \left(\int_I w\left(2^n\left[x-(j-1)/2^n\right]\right)\,dx\right)\left(\int_I w^{-\frac{1}{p-1}}\left(2^n\left[x-(j-1)/2^n\right]\right)\,dx\right)^{p-1}\\
&= 2^{-pn}\left(\int_{2^n a-j+1}^{2^n b-j+1} w(u)\,du\right)\left(\int_{2^n a-j+1}^{2^n b-j+1} w^{-\frac{1}{p-1}}(u)\,du\right)^{p-1}\\
&\leq 2^{-pn}C2^{pn}(b-a)^p\\
&= C|I|^p.
\end{aligned}$$

Si j es par se procede en forma análoga.

(1.b) Existe un único $j = 1, 2, \ldots, 2^n$ tal que $\frac{j}{2^n} \in I$. Denotemos por $\widetilde{I}$ al menor intervalo centrado en $\frac{j}{2^n}$ que contenga a I. Es decir, si $m = \max\{b - \frac{j}{2^n}, \frac{j}{2^n} - a\}$, entonces $\widetilde{I} = \left(\frac{j}{2^n} - m, \frac{j}{2^n} + m\right)$. Notar que $I \subseteq \widetilde{I} \subseteq \left(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)$ y $|\widetilde{I}| \leq 2|I|$. Luego por la propiedad (1) del Lema 86 tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_I w_n\,dx\right)\left(\int_I w_n^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} &\leq \left(\int_{\widetilde{I}} w_n\,dx\right)\left(\int_{\widetilde{I}} w_n^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1}\\
&= 2^p\left(\int_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}+m} w_n\,dx\right)\left(\int_{\frac{j}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}+m} w_n^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1}\\
&\leq 2^pC|I|^p.
\end{aligned}$$

Caso 2. $\boldsymbol{|I| > 2^{-n}}$ Sean

$$j_1 = \min\left\{j : \frac{j}{2^n} \in I\right\}, \qquad j_2 = \max\left\{j : \frac{j}{2^n} \in I\right\}.$$

Luego $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq 2^n - 1$, y si definimos

$$\widehat{I} = \bigcup_{j=j_1}^{j_2+1}\left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right]$$

tenemos que $I \subseteq \widehat{I}$. Además $|\widehat{I}| = (j_2 - j_1 + 2)2^{-n} \leq |I| + 2^{-n+1} \leq 3|I|$. Entonces por la propiedad (2) del Lema 86 tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_I w_n\,dx\right)\left(\int_I w_n^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1} &\leq \left(\int_{\widehat{I}} w_n\,dx\right)\left(\int_{\widehat{I}} w_n^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1}\\
&= \left(\frac{j_2-j_1+2}{2^n}\right)^p\left(\int_0^1 w\,dx\right)\left(\int_0^1 w^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1}\\
&\leq 3^pC|I|^p.
\end{aligned}$$

$\square$

Finalmente, observamos que ambos SIF $\Phi = \{\phi_1, \phi_2\}$ y $\Psi = \{\psi_1, \psi_2\}$ poseen el mismo factor de contracción $\frac{1}{2}$ para cada función, y producen el mismo espacio límite $([0,1], dx)$. Sin embargo vimos que existen medidas duplicantes μ_0 tales que los espacios aproximantes $T^n_\Phi([0,1], \mu_0)$ no poseen la propiedad de duplicación para ningún n, mientras que las iteraciones sucesivas de T_Ψ aplicadas al mismo espacio inicial $([0,1], \mu_0)$ generan una familia $\{T^n_\Psi([0,1], \mu_0)\}$ de espacios de tipo homogéneo con cota uniforme para la constante de duplicación. Esto nos permite concluir que la propiedad de duplicación, y la permanencia en una clase de Muckenhoupt, son sensibles a ciertos aspectos físicos del sistema. En este caso la diferencia entre ambos sistemas que produjo conductas tan diferentes en los espacios aproximantes asociados a cada uno de ellos, fue la "orientación". Como puede verse en el siguiente gráfico, el sistema Φ preserva la orientación, mientras que Ψ la invierte.

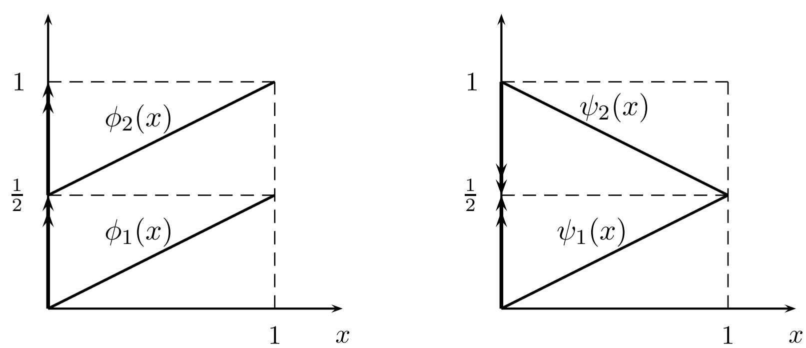


Figura 8: $\Phi = \{\phi_1, \phi_2\}$ y $\Psi = \{\psi_1, \psi_2\}$

Conclusiones generales

- Para estudiar operadores integrales y sus maximales en ciertos espacios abstractos es suficiente obtener acotaciones uniformes de versiones discretas de los mismos en contextos finitos uniformemente homogéneos.

- Las métricas de Hausdorff y de Kantorovich equipan adecuadamente a los espacios de tipo homogéneo probabilísticos compactos en dos sentidos: la completitud de las clases duplicantes y la preservación de propiedades de duplicación en esta métrica.

- La duplicación en sus diversas formas es "predecible" desde discretizaciones adecuadas de medidas.

- Las órbitas de Hutchinson no están generalmente constituidas por espacios de tipo homogéneo, aunque el espacio inicial y su límite lo sean.

- En situaciones bastante generales, es posible elegir espacios iniciales especiales de modo que las órbitas de Hutchinson estén uniformemente en clases de espacios de tipo homogéneo. Para espacios iniciales más generales, una duplicación gradual se revela.

- La simetría implícita en las funciones de un sistema iterado juega un papel relevante en el comportamiento de la órbita generada por la transformación inducida, aunque no en el comportamiento del límite.

Bibliografía

[1] Hugo Aimar. *Distance and Measure in Analysis and PDE*. Birkhäuser Basel. Submitted for publication.

[2] Hugo Aimar, Ana Bernardis, and Bibiana Iaffei. Comparison of Hardy-Littlewood and dyadic maximal functions on spaces of homogeneous type. *J. Math. Anal. Appl.*, 312(1):105–120, 2005.

[3] Hugo Aimar and Roberto A. Macías. Weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator on spaces of homogeneous type. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 91(2):213–216, 1984.

[4] Hugo A. Aimar, Ana Bernardis, and Bibiana Iaffei. Multiresolution approximations and unconditional bases on weigthed Lebesgue spaces on spaces of homogeneous type. *Journal of Approximation Theory*, 148:12–34, 2007.

[5] Mustafa Akcoglu, John Baxter, Alexandra Bellow, and Roger L. Jones. On restricted weak type $(1, 1)$; the discrete case. *Israel J. Math.*, 124:285–297, 2001.

[6] J. M. Aldaz and Juan L. Varona. Singular measures and convolution operators. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 23(3):487–490, 2007.

[7] George Bachman and Lawrence Narici. *Functional analysis*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2000. Reprint of the 1966 original.

[8] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1999.

[9] Hasse Carlsson. A new proof of the Hardy-Littlewood maximal theorem. *Bull. London Math. Soc.*, 16(6):595–596, 1984.

[10] M. T. Carrillo and M. de Guzmán. Maximal convolution operators and approximations. In *Functional analysis, holomorphy and approximation theory (Rio de Janeiro, 1980)*, volume 71 of *North-Holland Math. Stud.*, pages 117–129. North-Holland, Amsterdam, 1982.

[11] Filippo Chiarenza and Alfonso Villani. Weak convergence of measures and weak type $(1, q)$ of maximal convolution operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 97(4):609–615, 1986.

[12] Michael Christ. A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral. *Colloq. Math.*, 60/61(2):601–628, 1990.

[13] Michael Christ and Robert Fefferman. A note on weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal operator. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 87(3):447–448, 1983.

[14] R. R. Coifman and C. Fefferman. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. *Studia Math.*, 51:241–250, 1974.

[15] Ronald R. Coifman and Guido Weiss. *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*. Springer-Verlag, Berlin, 1971. Étude de certaines intégrales singulières, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242.

[16] Guy David. Morceaux de graphes lipschitziens et intégrales singulières sur une surface. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 4(1):73–114, 1988.

[17] Miguel de Guzmán. *Real variable methods in Fourier analysis*, volume 46 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1981.

[18] Kenneth Falconer. *Techniques in fractal geometry*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1997.

[19] Herbert Federer. *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[20] Gerald B. Folland. *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1999.

[21] José García-Cuerva and José L. Rubio de Francia. *Weighted norm inequalities and related topics*, volume 116 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. , Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104.

[22] Adriano M. Garsia. *Topics in almost everywhere convergence*, volume 4 of *Lectures in Advanced Mathematics*. Markham Publishing Co., Chicago, Ill., 1970.

[23] Paul A. Hagelstein and Roger L. Jones. On restricted weak type $(1,1)$: the continuous case. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(1):185–190 (electronic), 2005.

[24] John E. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5):713–747, 1981.

[25] Lynn H. Loomis. A note on the Hilbert transform. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:1082–1086, 1946.

[26] Roberto A. Macías and Carlos Segovia. A well-behaved quasi-distance for spaces of homogeneous type. *Trabajos de Matemática. Serie I.*

[27] Roberto A. Macías and Carlos Segovia. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type. *Adv. in Math.*, 33(3):257–270, 1979.

[28] Antonios D. Melas. The best constant for the centered Hardy-Littlewood maximal inequality. *Ann. of Math. (2)*, 157(2):647–688, 2003.

[29] M. Trinidad Menárguez. On boundedness properties of certain maximal operators. *Colloq. Math.*, 68(1):141–148, 1995.

[30] M. Trinidad Menarguez and Fernando Soria. Weak type $(1,1)$ inequalities of maximal convolution operators. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 41(3):342–352, 1992.

[31] K. H. Moon. On restricted weak type (1, 1). *Proc. Amer. Math. Soc.*, 42:148–152, 1974.

[32] Umberto Mosco. Variational fractals. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 25(3-4):683–712 (1998), 1997. Dedicated to Ennio De Giorgi.

[33] Benjamin Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 165:207–226, 1972.

[34] Liliana Nitti. *Medidas que duplican y propiedades de separación métrica. Extensión de medidas con la propiedad de duplicación*. UNL, 2003. Tesis Doctoral.

[35] H. L. Royden. *Real analysis*. The Macmillan Co., New York, 1963.

[36] M. Trinidad Menárguez. Weak boundedness properties for maximal operators defined on weighted spaces. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 45(3):421–436, 1996.

[37] Jang-Mei Wu. Hausdorff dimension and doubling measures on metric spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126(5):1453–1459, 1998.

[38] Po-Lam Yung. Doubling properties of self-similar measures. *Indiana Univ. Math. J.*, 56(2):965–990, 2007.

Índice alfabético