Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería Química

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de

Doctor en Matemática

En el campo de: **Análisis**

Título de la tesis:

Difusiones no locales y operadores de derivación fraccionaria en espacios métricos de medida

Institución donde se realizó la investigación:

Instituto de Matemática Aplicada del Litoral (CONICET – UNL)

Autor:

Marcelo Actis

Director de Tesis: **Dr. Hugo Aimar**

Defendida ante el jurado compuesto por:

Dr. Pablo De Nápoli

Dra. Eleonor Harboure

Dra. Noemi Wolanski

Año de presentación: **2014**

A mis viejos

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a quienes de una u otra manera hicieron posible la realización de esta tesis.

A Hugo, quién más que un director fue un padre. Por su guía, apoyo y esfuerzo durante todo estos años. Y a Roberto, que aunque no estuvo en el final, mucho tuvo que ver con el camino que elegí.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas que hizo económicamente posible el desarrollo de esta tesis. A la Universisdad Nacional del Litoral y al Instituto de Matemática Aplicada del Litoral por haberme brindado un lugar de trabajo, la infraestructura y el capital humano necesario para haber llevado adelante esta tesis.

A los miembros del jurado, por haber aceptado leer este trabajo con tan buena predisposición, por sus sugerencias y sus contribuciones.

A todos mis compañeros del IMAL y de la FIQ. En especial a Emi, que a pesar de los roces siempre estuvo predispuesta a ayudarme en todo. Y a Will, por sus infaltables mates de las 4 y los debates matemáticos durante toda la «época de tesis».

A Iso y Caro, amigas y compañeras irreemplazables de viajes y congresos.

A la Negra y a Chancho, mi sostén emocional diario. Por dejarme ser parte de su familia, bancarse mis días negros y tratar de hacerlos un poco mejor.

A la Peña y a mis amigos de la vida: Negro, Mati, Lore, Lau, Chaco, Belu, Euge, Echi, Mela, Cande, San, Charly, Nico, Pablo, Fede... Por haber sido mi descarga a tierra, mi desenchufe semanal. Por los viajes, las reuniones, las pescas y salidas. En especial al Rama, Fer y Nati, amigos incondicionales después de tantos años.

A mis viejos, mis hermanos y mi abuela Lola, que me enseñaron todo lo que la academia no te enseña y es imprescindible en la vida.

Resumen

La tesis tiene por objeto central el análisis de difusiones no locales en espacios métricos de medida, que incluyen el contexto euclídeo clásico, variedades, fractales, conjuntos discretos y otras estructuras generales. Las estructuras métricas y de medida están relacionadas de modos cuantitativos que en general producen espacios de tipo homogéneo. En particular espacios normales y Ahlfors regulares.

En este trabajo estudiamos difusiones fraccionarias a través del operador laplaciano fraccionario $(-\Delta)^{s/2}$ y de generalizaciones del mismo a espacios métricos de medida.

Resolvemos un problema de dato inicial para una difusión vinculada a un operador de derivación fraccionaria diádico en $\mathbb{R}^+$. Obtenemos un análisis espectral del operador en términos del sistema de Haar y probamos una acotación puntual del operador maximal de la difusión por el operador maximal diádico de Hardy-Littlewood. Como consecuencia de esto obtenemos la convergencia puntual al dato inicial en los espacios de Lebesgue clásicos.

También extendemos a espacios de tipo homogéneo el operador de derivación fraccionaria diádico. Probamos que este operador tiene por autofunciones al sistema de Haar, los correspondientes autovalores tienen las propiedades de escala adecuadas aunque se manifiestan perturbaciones que son inherentes al contexto general. Extendemos los resultados de existencia de soluciones para los problemas difusivos asociados al operador de derivación fraccionaria diádico.

Además, en el contexto diádico se estudian también problemas de tipo Schrödinger no locales y bajo adecuadas condiciones de regularidad en el dato inicial se prueba la convergencia puntual en el caso abstracto.

Posteriormente probamos, mediante técnicas de punto fijo, existencia y unicidad para problemas de evolución no locales de Cauchy definidos a partir de operadores de núcleo integrable en espacios de medida. Además formulamos algunos principios de comparación y propiedades de dichas soluciones.

Por último, construimos una familia adecuada de problemas con operadores de núcleos integrables indexados por un parámetro de reescalamiento. Probamos que las soluciones de dichos problemas convergen a la solución, cuando exista, del problema de difusión fraccionaria en espacios métricos de medida. Puede esperarse que, aún cuando en un contexto abstracto no haya una prueba anterior de existencia de solución, la convergencia de las soluciones de los problemas reescalados de núcleo integrable hacia una función $u(x,t)$ den a ésta un carácter de solución generalizada del problema difusivo para la derivación fraccionaria espacial en un espacio de tipo homogéneo.

Hacemos notar que en este trabajo sólo nos hemos dedicado a problemas de Cauchy de dato inicial. Los métodos y resultados de esta tesis sugieren que la teoría de wavelets podría ser una herramienta que sustituya adecuadamente a las series y transformadas de Fourier de los contextos clásicos a los espacios abstractos, permitiendo así el abordaje futuro de problemas más complejos.

Índice general

Introducción

Motivación y objetivos

En espacios de tipo homogéneo se han desarrollado muchos resultados clásicos del análisis armónico como la teoría de Calderón-Zygmund, espacios de Hardy e inclusive espacios de Sobolev. No obstante, los avances en temas que puedan asimilarse a problemas de ecuaciones diferenciales en contextos tan desprovistos de estructura están en sus comienzos

Las primeras ideas en esta dirección fueron abordadas desde la teoría de la probabilidad mediante procesos estocásticos (ver [**11**]). Más tarde, J. Kigami en [**37**], desarrolló mediante técnicas del análisis el concepto de funciones armónicas en fractales. Así, desde un enfoque analítico, logró darle solución a la ecuación de Laplace en estos ambientes. Desde entonces, el interés en desarrollar este campo ha ido creciendo, como puede observarse en trabajos como [**43**] (problemas de contorno), [**46**] (propiedades de valor medio), entre otros.

El objetivo general de este trabajo será estudiar difusiones en espacios equipados sólo con una medida y una métrica. La falta de una estructura diferencial en estos contextos deja de alguna manera sólo espacio para un análisis de orden cero o fraccionario. Esto induce a considerar más naturalmente problemas asociados a operadores no locales. Por ejemplo, en [**26**], P. Fife presenta modelos de difusión asociados a operadores no locales de núcleo integrable. Mediante técnicas de punto fijo, C. Cortazar, M. Elgueta, J. Rossi y N. Wolanski en [**21**], lograron darle solución a dichos problemas. Estos modelos y técnicas se adecúan a nuestro contexto, permitiéndonos extender aquí alguno de los resultados.

Si hablamos de difusiones, no podemos dejar de mencionar el problema de Cauchy para la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n$, es decir, $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ en $\mathbb{R}^{n+1}_+$, con $u(x,0) = u_0$ en $\mathbb{R}^n$. El problema anterior admite de alguna manera una generalización inmediata al caso de difusiones no locales. En este caso, el laplaciano en las variables espaciales es sustituido por el operador laplaciano fraccionario de orden s, con $0 < s < 2$, que viene dado por

$$(*) \qquad -(-\Delta)^{s/2} f(x) = c_{n,s}\, v.p. \int \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{n+s}}\, dy,$$

y es una representación del operador *Dirichlet to Neumann* generalizado (ver [**14**]). Esta formulación de convolución un con núcleo distribucional dada por (*) permite extender a $(-\Delta)^{s/2}$ en forma natural a espacios métricos de medida.

Recientes estudios (ver [**36**] y [**12**]) utilizan operadores como el laplaciano fraccionario para modelar procesos de transporte anómalos que resultan en ecuaciones del tipo $u_t = -(-\Delta)^{s/2} u$. Dichos problemas se resuelven utilizando la transformada de Fourier, herramienta de la cual carecemos en nuestro contexto general. Más aún, dado que los núcleos de estos operadores de derivación fraccionarios no son integrables, tampoco pueden ser abarcados dentro de la teoría extendida a partir de [**21**] antes mencionada.

En esta tesis abordaremos los problemas análogos en espacios métricos desde dos técnicas a las que llamaremos «Análisis de Fourier Generalizado» y «Teoría de Punto Fijo». Estas dos estrategias determinan la división de la tesis en dos partes. En la primera de ellas, constituida por los Capítulos 2 al 6, abordaremos con los métodos de Fourier-Wavelets tanto las difusiones como las ondas de Schrödinger. Consideramos el problema con valor inicial y los modos de convergencia al mismo de la solución. En particular nos interesa, desde el análisis armónico estudiar la convergencia puntual. Naturalmente surgen las clases de Lebesgue L^p como las adecuadas para la convergencia puntual al dato inicial en las difusiones y ciertos espacios de Besov en los problemas de tipo Schrödinger. La transición entre la perspectiva frecuencial que brindan los métodos de Fourier y la perspectiva de representación a través de un núcleo distribucional, está hecha en el Capítulo 3. De la mirada de la derivación fraccionaria a través de un núcleo, surge la generalización a espacios métricos. En los siguientes capítulos de la Parte I se explota otra relación intrínseca entre un análisis de Fourier rudimentario —el de Haar— y un núcleo de derivación fraccionaria construido sobre la distancia diádica en $\mathbb{R}$. La construcción de M. Christ de los cubos diádicos en espacios de tipo homogéneo instala las dos teorías, difusión y ondas de Schrödinger en espacios de tipo homogéneo. Esto permite obtener formas explícitas basadas en el análisis espectral de estas derivaciones cuyas autofunciones son precisamente las funciones de Haar.

En la Parte II se retoma la mirada de las derivaciones fraccionarias como límites de reescalamientos de operadores inducidos por núcleos integrables para los que la teoría clásica de C. Cortazar, M. Elgueta, J. Rossi y N. Wolanski — ver [21], [22] y [20]— basada en el Teorema de Punto Fijo de Banach, puede extenderse de una manera natural.

Organización de los capítulos

En el primer capítulo definiremos los conceptos básicos que se utilizarán en el desarrollo de la tesis. En primer lugar expondremos teorías clásicas de espacios de medida y espacios euclídeos. Luego, presentaremos resultados recientes en el contexto de los espacios de tipo homogéneo.

Comenzaremos el Capítulo 2 estudiando una generalización fraccionaria de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n$ a través del operador laplaciano fraccionario $(-\Delta)^{s/2}$ y analizaremos diferentes formas de definir dicho operador. Encontraremos contextos adecuados para la condición inicial para garantizar la existencia de soluciones al problema $u_t = (-\Delta)^{s/2}u$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, con $u(x,0) = u_0$ en $\mathbb{R}^n$.

Esta generalización fraccionaria de la ecuación del calor será extendida a espacios métricos de medida en el Capítulo 3. Para esto, primero presentaremos una formulación del operador laplaciano fraccionario como convolución con un núcleo distribucional adecuado. Ésta nos permitirá conseguir una versión integro-diferencial del problema, la cual será apropiada para extender el mismo a este ámbito.

En el Capítulo 4 resolveremos un problema de dato inicial para una difusión vinculada a un operador de derivación fraccionaria diádico en $\mathbb{R}^+$, el cual fue introducido en [4]. En primer lugar, obtendremos un análisis espectral del operador en términos del sistema de Haar. Luego, probaremos una acotación puntual del operador maximal de la difusión por el operador maximal diádico de Hardy-Littlewood. Como consecuencia de esto obtendremos la convergencia puntual al dato inicial en los espacios de Lebesgue clásicos.

En el capítulo 5 extenderemos a espacios de tipo homogéneo el operador de derivación fraccionaria diádico. Probaremos que este operador sigue teniendo por autofunciones a la base de Haar. Por último, extenderemos los resultados de existencia y unicidad de soluciones obtenidos en el caso unidimensional. Para el caso de medida finita demostraremos la convergencia al dato inicial.

Luego, en el capítulo 6 abordaremos con el mismo tipo de técnicas el análisis de convergencia puntual al dato inicial para soluciones de problemas de Schrödinger no locales. Se probará bajo adecuadas condiciones de regularidad en el dato inicial la convergencia puntual en el caso abstracto. Esta regularidad se mide en términos de normas de Besov-Sobolev. Y es precisamente la caracterización de esta regularidad en términos de los coeficientes relativos al sistema de Haar lo que insume una parte considerable del capítulo.

El estudio de operadores no locales de núcleo integrable en espacios de medida sera introducido en el Capítulo 7. Motivaremos dichos operadores a partir de derivadas variacionales de ciertos funcionales de energía relacionados con la potencia en redes eléctricas. Probaremos asimismo algunas propiedades básicas de estos operadores.

A lo largo del Capítulo 8 estudiaremos problemas de evolución no locales definidos a partir de operadores de núcleo integrable. Extenderemos a espacios de medida modelos de difusión no local y, siguiendo las ideas desarrolladas en [21], [22], [20], [45] y [10], probaremos mediante técnicas de punto fijo existencia y unicidad para dichos problemas. Por último, tomando las ideas presentadas en [20], construiremos en espacios Ahlfors regulares compactos una familia de problemas indexados por un parámetro de reescalamiento cuyas soluciones convergerán a la solución del problema asociado al operador de derivación fraccionario.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo definiremos los conceptos básicos requeridos para la comprensión de esta tesis, y enunciaremos los resultados previos y clásicos que se utilizarán en el desarrollo de la misma. Si bien no incluiremos aquí las demostraciones de los resultados que mencionaremos, citaremos fuentes bibliográficas donde las mismas pueden encontrarse. Además , introduciremos algunos ejemplos que, esperamos, sirvan para aclarar o ilustrar diversas situaciones y resultados a lo largo de la tesis.

El propósito de las Secciones 1.1 a 1.5 es recordar algunos conceptos relacionados con la teoría de la medida e integración y la teoría de distribuciones. En la Sección 1.6 introduciremos los espacios de Banach y repasaremos algunos resultados vinculados a la integral de Bochner. Los temas de esas secciones son clásicos y tienen como propósito convenir notación, en tanto que las secciones que siguen contiene resultados más modernos de lo rudimentos de análisis en espacios de tipo homogéneo. En las Secciones 1.7 a 1.12 introduciremos los espacios casi-métricos, las particiones diádicas de Christ, sistemas de Haar, operadores maximales de Hardy-Littlewood y espacios funcionales de regularidad.

1.1. Medida e integración

En esta sección introduciremos algunos conceptos y resultados sobre teoría de la medida e integración en espacios de medida. Los temas tratados pueden encontrarse en [**27**] o [**54**], entre otros.

Sea X un conjunto no vacío. Una **σ-álgebra** de conjuntos de X es una colección no vacía Σ de subconjuntos de X que satisface las siguientes propiedades:

1. si $E \in \Sigma$, entonces su complemento $E^c \in \Sigma$;
2. si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$, entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \Sigma$.

Si $\mathcal{E}$ es cualquier subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ existe una única menor σ-álgebra $\Sigma(\mathcal{E})$ que contiene a $\mathcal{E}$ (que es la intersección de todas las σ-álgebras que incluyen a $\mathcal{E}$). Llamamos a $\Sigma(\mathcal{E})$ la σ-álgebra **generada** por $\mathcal{E}$. Si X es cualquier espacio métrico (ver Sección 1.7), la σ-álgebra generada por la familia de los conjuntos abiertos de X es llamada **σ-álgebra de Borel** en X, y es denotada por $\mathscr{B}_X$. Sus miembros son llamados **borelianos** o **conjuntos de Borel**.

Sea X un conjunto equipado con una σ-álgebra Σ. Una **medida** sobre (X, Σ) es una función $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ tal que

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. Si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos en Σ, entonces se tiene que
$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

Si μ es una medida sobre (X, Σ) decimos que (X, Σ, μ) es un **espacio de medida**, y los conjuntos en Σ son llamados **conjuntos medibles** (o μ-medibles).

Diremos que μ es una **medida de Borel** cuando su dominio sea la σ-álgebra de Borel en X, es decir, cuando $\Sigma = \mathscr{B}_X$. Si $\mu(X) < \infty$ decimos que μ es **finita**, y si $\mu(E) < \infty$ para todo conjunto acotado E, entonces μ es llamada **localmente finita**. Si $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, donde $E_j \in \Sigma$ y $\mu(E_j) < \infty$ para todo j, entonces decimos que μ es **σ-finita**, o que el conjunto X es **σ-finito**. Una medida μ sobre X tal que $\mu(X) = 1$ es llamada **medida de probabilidad**.

Sea μ una medida de Borel sobre X y sea E un subconjunto de Borel de X. Decimos que μ es **regular por fuera** sobre E si

$$\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(U) : E \subseteq U,\, U \text{ abierto}\},$$

y que es **regular por dentro** sobre E si

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E,\, K \text{ compacto}\}.$$

Si μ es regular por dentro y por fuera sobre todos los conjuntos de Borel, entonces μ es llamada **regular**. Una **medida de Radon** sobre X es una medida de Borel que es finita sobre compactos, regular por fuera sobre todos los conjuntos de Borel, y regular por dentro sobre todos los conjuntos abiertos.

Un conjunto $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) = 0$ es llamado **conjunto nulo**. Si una propiedad acerca de puntos $x \in X$ es cierta excepto quizás para x en algún conjunto nulo, se dice que vale para **casi todo punto**, o para **casi todo** x, y lo denotaremos con μ-c.t.p. en X.

La integración de una función f con respecto a una medida μ sobre el espacio de medida (X, μ) se define mediante los pasos usuales, los que pueden encontrarse en detalle en [27]. Una **función simple** $f : X \to \mathbb{R}$ es una función de la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathcal{X}_{E_i}(x),$$

donde $a_1, \ldots, a_k$ son números reales positivos, $E_1, \ldots, E_k$ son conjuntos μ-medibles, y $\mathcal{X}_E$ denota la función característica del conjunto E. Definimos la **integral** de una función simple f con respecto a μ como

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(E_i).$$

La integración de funciones más generales se define mediante la aproximación por funciones simples. Decimos que $f : X \to \mathbb{R}$ es una **función medible** si para todo $c \in \mathbb{R}$ se tiene que el conjunto $\{x \in X : f(x) < c\}$ es un conjunto medible. Denotaremos al conjunto de las funciones medibles con $\mathscr{M}$. Notar que, en particular, si μ es una medida de Borel entonces todas las funciones continuas son medibles. Definimos la **integral** de una función medible no negativa como

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int g \, d\mu : g \text{ es simple y } 0 \leq g \leq f \right\}.$$

El valor anterior puede ser infinito. Finalmente, para una función medible $f : X \to \mathbb{R}$, definimos su **parte positiva** $f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\}$, y su **parte negativa** $f^-(x) = \text{máx}\{-f(x), 0\}$. Luego la **integral** de f se define como

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu,$$

siempre que ambos valores $\int f^+ \, d\mu$ y $\int f^- \, d\mu$ no sean simultáneamente infinito. Decimos que una función f es **μ-integrable** (o simplemente integrable) si $\int |f| \, d\mu = \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu < \infty$, y denotamos el espacio de tales funciones como $L^1(X, \mu)$ (o L^1 cuando el espacio y la medida se sobrentiendan). Si E es un subconjunto medible de X, definimos la **integral de f sobre E** como

$\int_E f\,d\mu = \int f\mathcal{X}_E\,d\mu$. Decimos que una función medible $f : X \to \mathbb{R}$ es **localmente integrable** con respecto a una medida de Borel μ si $\int_K |f|\,d\mu < \infty$ para todo compacto $K \subseteq X$. Denotamos el espacio de tales funciones como $L^1_{loc}(X,\mu)$, o simplemente L^1_{loc}. Notar que si μ es localmente finita entonces las funciones constantes están en L^1_{loc}.

A continuación enunciaremos algunos teoremas clásicos de teoría de la medida.

Teorema 1.1.1 (Lema de Fatou)**.** *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces*

$$\int (\liminf f_n)\,d\mu \le \liminf \int f_n\,d\mu.$$

Teorema 1.1.2 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Sea $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones en L^1 tal que $f_n \to f$ en c.t.p. Supongamos que existe una función no negativa $g \in L^1$ tal que $|f_n| \le g$ en c.t.p. para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f \in L^1$ y*

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

Teorema 1.1.3 (Fubini-Tonelli)**.** *Sean $(X,\mathscr{M},\mu)$ e $(Y,\mathscr{N},\nu)$ dos espacios de medida σ-finitos. Entonces*

1. (Tonelli) *Si f es una función medible no negativa sobre $X \times Y$, entonces las funciones $g(x) = \int f(x,y)\,d\nu(y)$ y $h(x) = \int f(x,y)\,d\mu(x)$ son funciones medibles en X e Y respectivamente, y*

$$\int f\,d(\mu\times\nu) = \int \left[\int f(x,y)\,d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int \left[\int f(x,y)\,d\mu(x)\right] d\nu(y). \tag{1.1.1}$$

2. (Fubini) *Si $f \in L^1(\mu\times\nu)$, entonces $f(x,\cdot) \in L^1(\nu)$ para c.t.p. $x \in X$, $f(\cdot,y) \in L^1(\mu)$ para c.t.p. $y \in Y$, las funciones definidas en c.t.p. $g(x) = \int f(x,y)\,d\nu(y)$ y $h(y) = \int f(x,y)\,d\mu(x)$ están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\nu)$ respectivamente, y valen las igualdades de (1.1.1).*

1.2. Espacios de Lebesgue

Sea $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espacio de medida. Dada f una función medible en X y $1 \leq p < \infty$, consideremos la función

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

A partir de esta podemos definir los espacios funcionales

$$L^p(X, \mathscr{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \|f\|_p < \infty\}.$$

Abreviaremos $L^p(X, \mathscr{M}, \mu)$, mediante $L^p(X, \mu)$, o simplemente L^p cuando no haya posibilidad de confusión. Para el caso $p = \infty$ definimos

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{a \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\},$$

con la convención que $\text{ínf}\, \emptyset = \infty$. Luego, definimos

$$L^\infty = L^\infty(X, \mathscr{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Consideramos que dos funciones definen el mismo elemento en L^p si son iguales en casi todo punto. El próximo teorema nos permite probar que $\| \cdot \|_p$ es una norma en L^p cuando $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 1.2.1 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Si $1 \leq p \leq \infty$ y $f, g \in L^p$, entonces*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Mas aún, puede verse que en tal caso L^p es un espacio completo respecto a la métrica inducida por $\| \cdot \|_p$. Por lo tanto, L^p resulta ser un espacio de Banach (ver Sección 1.6).

Dado $1 < p < \infty$, el número $q = p/(p-1)$, el cual satisface $p^{-1} + q^{-1} = 1$, es llamado **exponente conjugado** de Hölder de p. Si $p = 1$ su exponente conjugado q se define como $q = \infty$, y viceversa.

Teorema 1.2.2 (Desigualdad de Hölder)**.** *Si $1 \leq p < \infty$ y q es su exponente conjugado, entonces*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

para toda f y g funciones medibles sobre X.

Teorema 1.2.3 (Desigualdad de Chebyshev)**.** *Si $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, entonces para cada $\alpha > 0$ se tiene que*

$$\mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p .$$

Si f es una función medible sobre $(X, \mathscr{M}, \mu)$, definimos la **función de distribución** $\lambda_f : (0, \infty) \to [0, \infty]$ como

$$\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}).$$

Una variante de los espacios L^p es la siguiente. Si f es una función medible en X y $1 \leq p < \infty$, definimos

$$[f]_p = \left(\sup_{\alpha>0} \alpha^p \lambda_f(\alpha)\right)^{1/p},$$

y llamamos **espacio L^p débil** al conjunto formado por todas las funciones f que satisfacen $[f]_p < \infty$. Puede verse que $[\cdot]_p$ *no* es una norma, ya que la desigualdad triangular falla. La relación entre L^p y L^p débil es la siguiente:

$$L^p \subsetneq \text{débil } L^p \qquad \text{y} \qquad [f]_p \leq \|f\|_p.$$

1.3. Funciones de Schwartz y la transformada de Fourier

En esta sección y la siguiente presentaremos notaciones, conceptos y resultados clásicos sobre distribuciones temperadas, espacios de funciones test y comportamientos de los mismos respecto a operaciones como la derivación, la convolución, la transformada de Fourier, etc. Las definiciones y resultados compendiados en esta sección y la 1.4 pueden encontrarse en [**9**], [**31**] y [**51**]. Comencemos con algo de notación.

Sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ denotaremos con $|\alpha|$ a $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ y con $\alpha!$ a $\alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n$. Dado $\beta \in \mathbb{N}^n$, diremos que $\alpha \geq \beta$ si $\alpha_j \geq \beta_j$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Tomando $x \in \mathbb{R}^n$, denotaremos con x^α a $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$. Por último, llamaremos D^β a $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}$.

El **espacio de Schwartz** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, o simplemente $\mathcal{S}$, es el espacio de funciones $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ —funciones cuyas derivadas parciales de cualquier orden existen y son continuas— que satisfacen que para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, existe $C = C(\alpha, \beta)$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \leq C.$$

Llamaremos a las funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ **funciones test** o **funciones de decrecimiento rápido en el infinito**. Diremos que una sucesión $\{\varphi_j\}$ converge a φ en $\mathcal{S}$ si para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, la sucesión $x^\alpha D^\beta \varphi_j$ converge a $x^\alpha D^\beta \varphi$, uniformemente en $\mathbb{R}^n$.

Dada $\varphi \in \mathcal{S}$ denotaremos con $\widehat{\varphi}$ a la **transformada de Fourier** de φ la cual viene dada por

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx. \tag{1.3.1}$$

Por razones de notación en algunos casos utilizaremos $\mathcal{F}\{\varphi\}$ para referirnos a $\widehat{\varphi}$. La transformada de Fourier es un **operador lineal**, es decir, dados $\psi \in \mathcal{S}$ y $b \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$\widehat{\varphi + \psi} = \widehat{\varphi} + \widehat{\psi} \quad \text{y} \quad \widehat{b\varphi} = b\widehat{\varphi}.$$

Dados $y \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ definamos la traslación y la dilatación de φ como

$$\tau_y \varphi(y) = \varphi(x - y) \quad \text{y} \quad \delta_\varepsilon \varphi(y) = \varphi(\varepsilon y),$$

respectivamente. Es sencillo ver que se satisface que

$$\widehat{\tau_y \varphi}(\xi) = e^{-2\pi i y\cdot\xi} \widehat{\varphi}(\xi) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}\{e^{-2\pi i x\cdot y} \varphi(x)\}(\xi) = \tau_y \widehat{\varphi}(\xi),$$

y además

$$\widehat{\delta_\varepsilon \varphi}(\xi) = \varepsilon^{-n} \delta_{\varepsilon^{-1}} \widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^n} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right).$$

Así también, dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se puede probar que

$$\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) \quad \text{y} \quad D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}\{(-2\pi i x)^\alpha \varphi(x)\}(\xi). \tag{1.3.2}$$

Esto permite mostrar que si $\varphi \in \mathcal{S}$ entonces $\widehat{\varphi}$ también pertenece a $\mathcal{S}$. Por otro lado, dadas dos funciones φ y ψ denotaremos con $\varphi * \psi$ su **convolución**, es decir

$$(\varphi * \psi)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y - x)\psi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(y - x) dy.$$

Dadas dos funciones test $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ su convolución $\varphi * \psi$ también pertenece a $\mathcal{S}$. Más aún, $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi}\widehat{\psi}$.

Definamos ahora la **transformada de Fourier inversa** de una función $\varphi \in \mathcal{S}$ como

$$\mathcal{F}^{-1}\{\varphi\}(x) = \varphi^\vee(x) := \widehat{\varphi}(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi.$$

Es inmediato ver que la transformada de Fourier inversa comparte las mismas propiedades que la transforma de Fourier. Además, se satisface que

$$\varphi = \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{\varphi\}\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\varphi\}\},$$

es decir, una es la operación inversa de la otra; y

$$\|\varphi\|_{L^2} = \|\widehat{\varphi}\|_{L^2} = \|\varphi^{\vee}\|_{L^2},$$

en otras palabras, ambas son isometrías respecto a la norma $L^2(\mathbb{R}^n)$. Estas igualdades son conocidas como el **teorema de inversión de Fourier** y la **identidad de Plancherel**.

Una vez definida la transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, podemos extenderla a los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 \leq p \leq 2$. Primero notemos que la definición dada por (1.3.1) tiene sentido para cualquier función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Aún más $\mathcal{F}$ es un transformación lineal y acotada de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, de hecho $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Más aún, $\widehat{f}$ es uniformemente continua. A pesar de no existir ninguna condición simple y satisfactoria que caracterice la transformada de Fourier de una función de $L^1(\mathbb{R}^n)$, el próximo resultado brinda una condición necesaria.

Teorema 1.3.1 (Lema de Riemann-Lebesgue)**.** *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$|\widehat{f}(\xi)| \to 0 \qquad \textit{cuando} \qquad |\xi| \to \infty.$$

Por otro lado, la identidad de Plancherel y la densidad de $\mathcal{S}$ en L^2 permite definir la transformada de Fourier para toda $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|g\|_2 = \|\widehat{g}\|_2$. Más aún, la definición de $\widehat{f}$ dada en L^1 coincide con la dada en L^2 siempre que $f \in L^1 \cap L^2$.

Ahora, para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < 2$, definamos $\widehat{f} := \widehat{f_1} + \widehat{f_2}$, donde $f_1 \in L^1$, $f_2 \in L^2$ y $f = f_1 + f_2$; por ejemplo podemos tomar $f_1 = f\chi_{|f|>1}$ y $f_2 = f\chi_{|f|\leq 1}$. Es sencillo ver que esta definición es independiente de la elección de f_1 y f_2. En el siguiente resultado veremos que la transformada de Fourier es un operador acotado de L^p en $L^{p'}$ con norma a lo sumo 1 cuando $1 \leq p \leq 2$.

Teorema 1.3.2 (Desigualdad de Hausdorff-Young)**.** *Para toda función f en $L^p(\mathbb{R}^n)$ tenemos que*

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}} \leq \|f\|_{L^p}$$

siempre que $1 \leq p \leq 2$.

1.4. Distribuciones de Schwartz

Diremos que un funcional lineal $T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ es una **distribución temperada** si T es continuo en el sentido usual, es decir, $\langle T, \varphi_j \rangle \to 0$ cuando $\varphi_j \to 0$ en $\mathcal{S}$. Al espacio vectorial de todas las distribuciones temperadas lo denotaremos con $\boldsymbol{\mathcal{S}'}$. Algunas funciones pueden ser entendidas como distribuciones temperadas vía la identificación $g \to T_g$, donde T_g es el funcional

$$\langle T_g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi(x)\, dx.$$

Por ejemplo las funciones de L^p, con $1 \leq p \leq \infty$, son distribuciones temperadas. Así también, cualquier medida de Borel finita μ es una distribución temperada vía la identificación

$$\langle T_\mu, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\mu(x).$$

Si $T \in \mathcal{S}'$ y $\varphi \in \mathcal{S}$ su convolución $T * \varphi$ es un funcional definido por

$$\langle T * \varphi, \psi \rangle = \langle T, \widetilde{\varphi} * \psi \rangle,$$

donde $\widetilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$. Se puede probar que $T * \varphi$ es en efecto una función dada por $f(x) = \langle T, \tau_x \widetilde{\varphi} \rangle$, donde τ_x denota al operador traslación por x. Más aún, f pertenece a la clase C^∞ y ella, y todas sus derivadas, son **lentamente crecientes**, es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ y $C = C(k)$ un constante positiva tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x)}{(1 + |x|^2)^k} \right| \leq C.$$

La transformada de Fourier $\mathcal{F}$ y su inversa $\mathcal{F}^{-1}$ son isomorfismos continuos de $\mathcal{S}$ en sí mismo. Esto nos permite definir la **transformada de Fourier de una distribución temperada** como el funcional lineal y continuo cuyos valores para cada $\varphi \in \mathcal{S}$ vienen dados por

$$\langle \widehat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \widehat{\varphi} \rangle.$$

Es inmediato ver a partir de esta definición que los operadores $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ también son isomorfismos continuos de $\mathcal{S}'$ en sí mismo.

Denotemos con $\mathcal{P}$ al conjunto de todos los polinomios de n variables reales con coeficientes complejos. Definamos la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathcal{S}'$ mediante

$$T_1 \sim T_2 \Longleftrightarrow T_1 - T_2 \in \mathcal{P}.$$

Llamaremos a todas las clases de equivalencias resultantes, el espacio de las **distribuciones temperadas módulo polinomios**, y lo denotaremos con $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$.

Sea $\mathcal{S}_\infty$ el espacio de todas la funciones de Schwartz φ tales que

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma \varphi(x)\, dx = 0,$$

para todo $\gamma \in \mathbb{N}^n$. Luego, $\mathcal{S}_\infty$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{S}$ que hereda la misma topología que $\mathcal{S}$ y cuyo dual es $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$, es decir,

$$(\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n))' = \mathcal{S}'/\mathcal{P}.$$

Utilizando la propiedad (1.3.2) de la transformada de Fourier podemos ver que

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^\gamma \varphi(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi i)^\gamma} D^\gamma \widehat{\varphi}(0).$$

Luego podemos escribir que

$$\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) :\ D^\gamma \widehat{\varphi}(0) = 0, \text{ para todo } \gamma \in \mathbb{N}^n\}.$$

La imagen de $\mathcal{S}_\infty$ a través de la transformada de Fourier lo denotaremos con $\mathcal{S}_0$, es decir,

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) :\ D^\gamma \varphi(0) = 0, \text{ para todo } \gamma \in \mathbb{N}^n\}.$$

En el Capítulo 2 nos interesaremos en estas dos subclases particulares del espacio de Schwartz.

A partir de la propiedad (1.3.2) de la transformada de Fourier es fácil ver que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ son isomorfismos continuos de $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ y viceversa. Dado que $\mathcal{S}_0$ también es un subespacio cerrado de S, esto nos permite definir su espacio dual, al que denotaremos con $(\mathcal{S}_0)'$. Extendiendo a estos espacios la definición de la transformada de Fourier dada en $\mathcal{S}'$, es sencillo corroborar que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ son isomorfismos continuos de $(\mathcal{S}_\infty)'$ en $(\mathcal{S}_0)'$ y viceversa.

1.5. Funciones homogéneas

Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **cono** de $\mathbb{R}^n$ si para todo $x \in C$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$ se tiene que $\lambda x \in C$. Dada una función $f : C \to \mathbb{R}$ y $\ell \in \mathbb{R}$, diremos que f es **homogénea de grado ℓ** si

$$f(\lambda x) = \lambda^\ell f(x), \qquad \text{para todo } x \in C \text{ y todo } \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

El conjunto de funciones homogéneas de un mismo grado sobre un mismo cono forman un subespacio vectorial (de dimensión infinita), es decir, si f y g dos funciones homogéneas de grado ℓ con igual dominio, entonces dados $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos que $af + bg$ también es una función homogénea de grado ℓ. Más aún, si h es una función homogénea de grado s con igual dominio que f, luego fh es una función homogénea de grado $\ell + s$. En caso que h no se anule en su dominio, h^{-1} resulta homogénea de grado $-s$ y por lo tanto fh^{-1} es homogénea de grado $\ell - s$. Por último, la composición $f \circ h$ es una función homogénea de grado ℓs siempre que la imagen de h este contenida en el dominio de f.

Una caracterización de las funciones homogéneas que nos será útil en el Capítulo 2 viene dada por la siguiente proposición.

Proposición 1.5.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ una función homogénea de grado ℓ, continua y positiva sobre la cáscara unitaria S^{n-1}. Luego, $f(x) \approx |x|^\ell$, es decir, existen dos constantes C_1 y C_2 tales que*

$$C_1 |x|^\ell \leq f(x) \leq C_2 |x|^\ell, \qquad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

La principal caracterización de las funciones homogéneas fue dada por L. Euler. Aunque no utilizaremos el resultado directamente, lo enunciaremos por ser una herramienta fundamental en la prueba de la Proposición 1.5.3.

Teorema 1.5.2 (Teorema de Euler)**.** *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f \in C^1(D)$ y cuyo dominio D es un cono abierto. Luego, f es una función homogénea de grado ℓ si y sólo si se verifica que*

$$\ell f(x) = \nabla f(x) \cdot x, \qquad \textit{para cada } x \in D.$$

Como consecuencia de este teorema se puede probar que las derivadas parciales de primer orden $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ resultan homogéneas de grado $\ell - 1$. Generalizando este resultado obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.5.3. *Sea $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ una función homogénea de grado ℓ, entonces $D^\gamma f$ es una función homogénea de grado $\ell - |\gamma|$, para todo $\gamma \in \mathbb{N}^n$.*

1.6. Espacios de Banach y la integral de Bochner

En esta sección vamos a estudiar la integral de Bochner, que es la extensión de la integral de Lebesgue al caso de funciones que toman valores en un espacio de Banach, a las cuales llamaremos **funciones vectoriales**. Para un abordaje más detallado del tema se puede consultar [25], [42], [18], entre otros.

Sea $\mathbb{X}$ es un espacio vectorial sobre un subcuerpo $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$. Una **norma** sobre $\mathbb{X}$ es una función $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ no negativa definida sobre $\mathbb{X}\times\mathbb{X}$ que satisface

1. $\|x\|_{\mathbb{X}} = 0$ entonces $x = 0$;
2. $\|x+y\|_{\mathbb{X}} \leq \|x\|_{\mathbb{X}} + \|y\|_{\mathbb{X}}$ para todo $x, y \in \mathbb{X}$;
3. $\|\alpha x\|_{\mathbb{X}} = |\alpha|\,\|x\|_{\mathbb{X}}$ para todo $x \in \mathbb{X}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

Decimos que $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ es una **seminorma** si no satisface la propiedad 1. Si $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ es una norma sobre $\mathbb{X}$ diremos que el par $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ es un **espacio normado**. Toda norma induce una métrica (ver Sección 1.7) sobre $\mathbb{X}$ mediante la fórmula $d(x, y) = \|x-y\|_{\mathbb{X}}$. El espacio normado $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ es un **espacio de Banach** si $(\mathbb{X}, d)$ resulta ser un espacio métrico completo.

Una **base de Schauder** es una sucesión $\{b_n\}$ de elementos de $\mathbb{X}$ tales que para todo elemento $x \in \mathbb{X}$ existe una única sucesión de escalares $\{\alpha_n\}$ en $\mathbb{K}$ tales que

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n b_n,$$

donde la convergencia es entendida con respecto a la norma, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k b_k \right\|_{\mathbb{X}} = 0.$$

Cuando la convergencia es independiente de cualquier reordenamiento de la base, decimos que la base es **incondicional**.

Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios de Banach. Dada una función $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ diremos que es **diferenciable Fréchet** en $x \in \mathbb{X}$ si existe un operador lineal y acotado $A_x : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ tal que

$$\lim_{y\to 0} \frac{\|F(x+y) - F(x) - A_x(y)\|_{\mathbb{Y}}}{\|y\|_{\mathbb{X}}} = 0.$$

Llamaremos a A_x la **derivada Fréchet** de f en x y la denotaremos con $Df(x)$. Si una función diferenciable Fréchet es tal que Df es continua en todo punto de $\mathbb{X}$ entonces diremos que $f \in C^1(\mathbb{X}; \mathbb{Y})$.

Antes de introducir el concepto de integración en espacios de Banach, comencemos definiendo la medibilidad de una función.

Sea (Ω, Σ, ν) un espacio de medida finita y **completa** (esto significa que si $E \in \Sigma$ y $\nu(E) = 0$, entonces todo subconjunto de E pertenece a Σ), y sea $(\mathbb{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}})$ un espacio de Banach real (es decir, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Una función $s : \Omega \to \mathbb{X}$

es llamada **simple** si es de la forma

$$s(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathcal{X}_{E_i}(x),$$

donde $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{X}$ y $E_1, \ldots, E_k \in \Sigma$. Se dice que una función $f : \Omega \to \mathbb{X}$ es **ν-medible** si existe una sucesión $(s_n)_n$ de funciones simples de Ω en $\mathbb{X}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_{\mathbb{X}} = 0 \quad \text{para } \nu\text{-c.t.p. en } \Omega.$$

Diremos que f es **débilmente ν-medible** si para cada $x^* \in \mathbb{X}^*$ se tiene que la función $x^*(f)$ es medible. Aquí $\mathbb{X}^*$ denota el **espacio dual** o **dual topológico** de $\mathbb{X}$, es decir, el conjunto de todas las aplicaciones lineales y continuas de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{R}$. Los elementos $x^* \in \mathbb{X}^*$ son llamados **funcionales lineales** en $\mathbb{X}$.

Es fácil ver que la medibilidad se mantiene bajo sumas, multiplicación por escalares y límites puntuales en casi todo punto. Aún más, reemplazando valor absoluto por normas a través de la prueba usual del teorema de Egoroff, se puede generalizar el resultado al caso vectorial, y así poder demostrar un resultado básico y central en el estudio de funciones medibles.

Teorema 1.6.1 (Egoroff)**.** *Sea $f_n : \Omega \to \mathbb{X}, n \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones ν-medibles, y sea $f : \Omega \to \mathbb{X}$ una función tal que $(f_n)_n$ converge hacia f ν-c.t.p. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe $E \subset \Omega$ con $\nu(E) < \varepsilon$ y tal que $(f_n)_n$ converge hacia f uniformemente en $\Omega \backslash E$.*

Teorema 1.6.2 (Teorema de medibilidad de Pettis)**.** *Una función $f : \Omega \to \mathbb{X}$ es ν-medible si y sólo si*

1. *existe $E \in \Sigma$ con $\nu(E) = 0$ tal que $f(\Omega \backslash E)$ es separable, y*
2. *f es débilmente ν-medible.*

Para introducir el concepto de la integral de Bochner comencemos por las funciones simples. Si $s : \Omega \to \mathbb{X}$ es la función simple $s(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathcal{X}_{E_i}(x)$, su **integral de Bochner** se define como

$$\int_E s \, d\nu = \sum_{i=1}^{k} x_i \nu(E_i \cap E),$$

para cada $E \in \Sigma$. Puede verse que esta definición es independiente de la representación elegida para s y que la integral resulta lineal en el espacio de las funciones simples.

Diremos que una función ν-medible $f : \Omega \to \mathbb{X}$ es **integrable Bochner** si existe una sucesión $(s_n)_n$ de funciones simples de Ω en $\mathbb{X}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|s_n - f\|_{\mathbb{X}}\, d\nu = 0.$$

En tal caso, para cada $E \in \Sigma$ se tiene que la sucesión $\left(\int_E s_n\, d\nu\right)_n$ es de Cauchy en $\mathbb{X}$, así que podemos definir

$$\int_E f\, d\nu := \lim_{n\to\infty} \int_E s_n\, d\nu.$$

Al vector $\int_E f\, d\nu$ se lo llama **integral de Bochner de f sobre E**, y puede verse que su valor es independiente de la sucesión de funciones simples elegida que aproximan a f. Además, el conjunto de las funciones $f : \Omega \to \mathbb{X}$ integrables Bochner es un espacio vectorial.

La integral de Bochner se puede caracterizar por medio de la integral de Lebesgue, como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 1.6.3. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{X}$ una función ν-medible. Entonces son equivalentes:*

1. *f es integrable Bochner;*
2. *$\|f\|_{\mathbb{X}}$ es integrable Lebesgue.*

El siguiente resultado nos será de gran utilidad.

Teorema 1.6.4. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{X}$ una función integrable Bochner.*

1. *Si $\mathbb{Y}$ es otro espacio de Banach y $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ es lineal y continua, entonces $T(f)$ también es integrable Bochner y*
$$T\left(\int_E f\, d\nu\right) = \int_E T(f)\, d\nu, \ \textit{para cada } E \in \Sigma.$$
2. *Para cada $x^* \in \mathbb{X}^*$ la función $x^*(f) \in L^1(\nu)$ y*
$$x^*\left(\int_E f\, d\nu\right) = \int_E x^*(f)\, d\nu, \ \textit{para cada } E \in \Sigma.$$

Este último teorema nos permite demostrar de una forma sencilla muchos resultados ya conocidos en el caso escalar. Enunciaremos algunos de ellos.

Proposición 1.6.5. *Sean f y g son dos funciones integrables Bochner.*

1. *Si para todo* $E \in \Sigma$,

$$\int_E f\, d\nu = \int_E g\, d\nu,$$

entonces $f = g$ *para casi todo punto en* Ω.

2. *Para cada* $E \in \Sigma$ *se tiene que*

$$\left\| \int_E f\, d\nu \right\|_{\mathbb{X}} \leq \int_E \|f\|_{\mathbb{X}}\, d\nu,$$

3. *Si* $(E_n)_n$ *es una sucesión en* Σ *disjunta dos a dos, y* $E = \bigcup E_n$, *entonces*

$$\int_E f\, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\, d\nu,$$

donde la suma es absolutamente convergente.

4. $$\int_E f\, d\nu \to 0 \ \text{cuando}\ \nu(E) \to 0.$$

Un caso de particular importancia es cuando Ω es un intervalo de $\mathbb{R}$. Sean a, b dos números reales extendidos, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Dado un p tal que $1 \leq p < \infty$, denotamos con $L^p([a,b]; \mathbb{X})$ al espacio de las funciones L^p-integrables Bochner de $[a,b]$ en $\mathbb{X}$. Este es un espacio de Banach con la norma

$$\left[\int_a^b \|f(t)\|_{\mathbb{X}}^p\, dt \right]^{1/p}.$$

Llamaremos $L^\infty([a,b]; \mathbb{X})$ al espacio de las funciones esencialmente acotadas de $[a,b]$ en $\mathbb{X}$. Éste también resulta ser un espacio de Banach con la norma

$$\sup_{t \in [a,b]} \text{es}\, \|f(t)\|_{\mathbb{X}}.$$

Por último, denotaremos con $C([a,b]; \mathbb{X})$ al espacio de las funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{X}$. En este caso es necesario que $-\infty < a < b < \infty$ para que resulte un espacio de Banach con la norma

$$\sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|_{\mathbb{X}},$$

en donde el supremo es en efecto un máximo debido a la continuidad.

El teorema de medibilidad de Pettis (Teorema 1.6.2) permite demostrar para $f \in L^1([a,b]; \mathbb{X})$ un equivalente al teorema de diferenciación de Lebesgue para la integral de Bochner.

Teorema 1.6.6. *Sea $f \in L^1([a,b];\mathbb{X})$. Entonces, para casi todo punto $t \in [a,b]$ se tiene que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(s) - f(t)\|_{\mathbb{X}}\, ds = 0.$$

En consecuencia, para casi todo punto $t \in [a,b]$ se satisface que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)\, ds = f(t).$$

Aún más, si $f \in C([a,b];\mathbb{X})$ entonces las igualdades anteriores valen para todo punto $t \in [a,b]$.

Notemos que si consideramos la función $F : [a,b] \to \mathbb{X}$ definida como $F(t) = \int_a^t f(s)\, ds$ y tomamos su derivada Fréchet en $\mathbb{X}$ en un punto $t \in (a,b)$, obtenemos las siguientes proposiciones.

Proposición 1.6.7. *Sean $f \in C([a,b];\mathbb{X})$ y*

$$F(t) = \int_a^t f(s)\, ds.$$

Entonces $f(t) = DF(t)$, donde DF es la derivada Fréchet de F.

Proposición 1.6.8. *Sea $f \in C^1([a,b];\mathbb{X})$. Entonces*

$$\int_{t_1}^{t_2} Df(s)\, ds = f(t_1) - f(t_2).$$

Aunque existen versiones del teorema de Fubini válidos para funciones integrables Bochner, este último resultado que a continuación esbozaremos será suficiente para nuestros propósitos.

Proposición 1.6.9. *Sea $f \in C([a,b];L^1(X,\mu))$. Entonces para todo $t \in [a,b]$ se satisface que*

$$\int_X \int_a^t f(x,s)\, ds\, d\mu(x) = \int_a^t \int_X f(x,s)\, d\mu(x)\, ds.$$

Demostración. Sea $x^* : L^1(X,\mu) \to \mathbb{R}$ tal que $x^*(f) = \int_X f\, d\mu$. Es sencillo ver que $x^* \in (L^1(X,\mu))^*$. Luego, aplicando la parte 2 del Teorema 1.6.4 para $E = [a,t]$ obtenemos la igualdad pretendida. $\square$

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de la parte 2 del Teorema 1.6.5.

Corolario 1.6.10. *Sea $f \in C([a,b]; L^1(X,\mu))$, donde $(X, \mathscr{M}, \mu)$ es un espacio de medida. Entonces, vale que*

$$\int_X \left| \int_a^t f(x,s)\, ds \right| d\mu(x) \leq \int_a^t \int_X |f(x,s)|\, d\mu(x)\, ds,$$

pensando que para un s fijo $f(\cdot, s) \in L^1(X,\mu)$.

1.7. Espacios casi-métricos

Una **casi-métrica** sobre un conjunto X es una función simétrica y no negativa ρ definida sobre $X \times X$ tal que $\rho(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$; y tal que existe una constante $K \geq 1$ tal que

$$\rho(x,y) \leq K\left(\rho(x,z) + \rho(z,y)\right)$$

para todo $x, y, z \in X$. Decimos que el par (X, ρ) es un **espacio casi-métrico** si ρ es una casi-métrica sobre X. Llamaremos a K la **constante triangular** para ρ. Cuando $K = 1$, ρ es una **métrica** sobre X y el par (X, ρ) es un **espacio métrico**.

Dado un espacio casi-métrico (X, ρ), si $x \in X$ y $r > 0$, la **bola** de centro x y radio r con respecto a la casi-métrica ρ es

$$B_\rho(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}.$$

Cuando no haya posibilidad de confusión sobre la casi-métrica que estamos utilizando para definir la bola, escribiremos simplemente $B(x,r)$. Definimos el **diámetro** de un subconjunto E de X como

$$\operatorname{diam} E = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in E\}.$$

Decimos que E es **acotado** si $\operatorname{diam} E < \infty$. Es sencillo ver que los conjuntos acotados son los que están contenidos en alguna bola.

Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos, decimos que una función $f : X \to Y$ es una **aplicación contractiva** si existe un número positivo $C < 1$ tal que $d'(f(x), f(y)) \leq C d(x,y)$ para todo $x, y \in X$. El siguiente teorema nos será de importancia en el Capítulo 8.

Teorema 1.7.1 (Teorema del punto fijo de Banach)**.** *Sea (X, ρ) un espacio métrico completo. Si $f : X \to X$ es una aplicación contractiva, entonces f tiene un único punto fijo en X, es decir, existe un único punto $\bar{x} \in X$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.*

A pesar de no incluir la demostración de este teorema, es importante mencionar que la prueba es de carácter constructivo, es decir, se exhibe la forma de hallar el punto fijo $\bar{x}$. Para hacerlo se fija un punto x_0 en X arbitrario y se construye la sucesión $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ para $n \geq 1$. Luego, se prueba que $\bar{x}$ es el límite de esta sucesión. Puede también estimarse el error de aproximación de $\bar{x}$ por la sucesión x_n. En efecto, $d(x_n, \bar{x}) \leq C^n d(x_0, \bar{x})$, donde C es la razón de contracción de f.

Dadas dos casi-métricas ρ y ρ' definidas sobre un espacio X decimos que son **equivalentes** si existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que

$$c_1\rho(x, y) \leq \rho'(x, y) \leq c_2\rho(x, y),$$

para todo $x, y \in X$. Es fácil verificar que métricas equivalentes definen los mismos conjuntos abiertos, cerrados y compactos, que si una sucesión es convergente o de Cauchy con respecto a una de las métricas, entonces lo es con respecto a la otra, y que las funciones continuas y uniformemente continuas son las mismas. Luego, muchos resultados relacionados con espacios métricos no dependen de la métrica en particular sino de la clase de equivalencia a la cual pertenece. El siguiente teorema (ver [41]) establece que toda casi-métrica es equivalente a una potencia de una métrica.

Teorema 1.7.2 (Teorema de Macías-Segovia)**.** *Sea ρ una casi-métrica sobre un conjunto X. Entonces existen una métrica d sobre X y constantes $\beta \geq 1$, c_1 y c_2 tales que las desigualdades*

$$c_1\rho(x, y) \leq d^\beta(x, y) \leq c_2\rho(x, y) \tag{1.7.1}$$

valen para todo $x, y \in X$.

Este último teorema nos permite definir el «orden» de un espacio casi-métrico. Diremos que (X, ρ) es un **espacio casi-métrico de orden $\boldsymbol{\gamma}$** si

$$\gamma^{-1} = \text{ínf}\{\beta : \text{ existe } d \text{ tal que } (1.7.1) \text{ se satisface}\}.$$

Notar que γ es tal que $0 < \gamma \leq 1$ y sólo se tiene la igualdad $\gamma = 1$ cuando (X, ρ) es métrico.

Dado (X, ρ) un espacio casi-métrico y $\varepsilon > 0$, decimos que un subconjunto E de X es **$\boldsymbol{\varepsilon}$-denso** en un conjunto $A \subseteq X$ si para cada $x \in A$ existe $y \in E$ tal que

$\rho(x,y) < \varepsilon$, y decimos que E es **ε-disperso** si $\rho(x,y) \geq \varepsilon$ para todo $x, y \in E$ con $x \neq y$. Una **ε-red** en X es un conjunto ε-disperso y ε-denso. Diremos que un espacio casi-métrico (X,ρ) tiene la **propiedad de homogeneidad débil (PHD)** si existe un número natural N tal que cada bola $B(x,2r)$ contiene a lo sumo N puntos de cualquier conjunto r-disperso en X. Puede probarse (ver [1]) que si un espacio métrico (X,ρ) tiene la PHD y es completo, entonces vale la propiedad de Heine-Borel: un subconjunto E de X es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. Así también, puede demostrarse la siguiente proposición.

Proposición 1.7.3. *Sea (X,d,μ) es un espacio métrico completo con μ una medida de Borel. Si (X,d) tiene la PHD, entonces la medida μ es de Radon. En consecuencia, las funciones continuas de soporte compacto son densas en $L^p(X,\mu)$, con $1 \leq p < \infty$.*

1.8. Espacios de tipo homogéneo y Ahlfors regulares

Sea X un conjunto no vacío, ρ una casi-métrica sobre X, y μ una medida de Borel sobre X. Decimos que μ satisface la **propiedad de duplicación** con respecto a ρ si las ρ-bolas son conjuntos medibles y existe una constante $A \geq 1$ tal que valen las siguientes desigualdades

$$0 < \mu(B_\rho(x,2r)) \leq A\mu(B_\rho(x,r)) < \infty,$$

para todo $x \in X$ y $r > 0$. Llamaremos a la constante A la **constante de duplicación** . Puede probarse que si μ duplica sobre X entonces (X,ρ) tiene la PHD (ver [19]). Más aún, la constante N para la PHD sólo depende de las **constantes geométricas** del espacio (X,ρ,μ), es decir, de la constante K correspondiente a la desigualdad triangular para ρ, y de la constante de duplicación A. Diremos que (X,ρ,μ) es un **espacio de tipo homogéneo** (abreviado **e.t.h.**) si μ es una medida que satisface la propiedad de duplicación sobre X. Llamemos $\mathcal{A}$ al conjunto de **átomos** de X, es decir $\mathcal{A} := \{x \in X : \mu(\{x\}) > 0\}$. En [41], R. Macías y C. Segovia, prueban que si X es un espacio de tipo homogéneo entonces $\mathcal{A}$ es numerable. Más aún, para cada $x \in \mathcal{A}$ existe $r > 0$ tal que $B(x,r) = \{x\}$, es decir que los elementos de $\mathcal{A}$ son **aislados**. Además todos los puntos aislados son átomos. Cabe destacar que bajo la hipótesis de la duplicación es equivalente que el espacio sea de medida finita o sea acotado.

Diremos que un espacio casi-métrico de medida (X, ρ, μ) es **normal** si existen dos constantes positivas y finitas, satisfaciendo

$$c_1 r \leq \mu(B(x,r)) \leq c_2 r, \tag{1.8.1}$$

para todo $x \in X$ y todo r tal que $\mu(\{x\}) < r < \mu(X)$. No es difícil ver que un espacio casi-métrico (X, ρ) dotado de una medida μ que satisfaga (1.8.1) es un espacio de tipo homogéneo. Sin embargo, no todo espacio de tipo homogéneo es un espacio normal. No obstante, en [**41**] R. Macías y C. Segovia prueban el siguiente resultado en esta dirección.

Teorema 1.8.1. *Se (X, ρ, μ) un espacio de tipo homogéneo con la propiedad que las bolas sean abiertas. Luego, la función $d(x,y)$ definida como*

$$d(x,y) = \text{ínf}\{\mu(B) : B \textit{ es una bola que contiene a } x \textit{ e } y\}$$

si $x \neq y$ y $d(x,y) = 0$ si $x = y$, es una casi-métrica en X. Más aún, (X, d, μ) es un espacio normal y las topologías inducidas en X por ρ y d coinciden.

En otras palabras, en todo e.t.h. existe una casi-métrica que «normaliza» el espacio. Generalizando la propiedad (1.8.1), diremos que un espacio casi-métrico de medida (X, d, μ) es **Ahlfors α-regular**, si existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$c_1 r^\alpha \leq \mu(B(x,r)) \leq c_2 r^\alpha, \tag{1.8.2}$$

para todo $x \in X$ y para todo $0 < r < \text{diam}(X)$. Notar que los espacios Ahlfors 1-regulares y los espacios normales no son exactamente los mismos, ya que la condición (1.8.2) se satisface para todos los radios positivos y no sólo para aquellos mayores que $\mu(\{x\})$. Este hecho implica que los espacios Ahlfors resulten **no atómicos**, es decir no tienen átomos.

La propiedad (1.8.2) es una extensión de la relación que mantiene la medida de Lebesgue, la distancia euclídea y la dimensión n, en el caso de $\mathbb{R}^n$. Es decir,

$$m(B(x,r)) = m(\{y \in R^n : |x-y| < r\}) = Cr^n.$$

Esta relación es la que permite probar que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo R, ε positivos se satisface que

$$\int_{|x-y|\leq R} \frac{1}{|x-y|^{n-\varepsilon}}\, dy + \int_{|x-y|>R} \frac{1}{|x-y|^{n+\varepsilon}}\, dy < C(\varepsilon, R, n).$$

Una propiedad equivalente puede ser demostrada en los contextos Ahlfors.

Proposición 1.8.2. *Sea (X, d, μ) un espacio Ahlfors α-regular, luego para todo $\varepsilon > 0$ y $R > 0$ se satisface que*

$$\int_{B(x,R)} d(x,y)^{-\alpha+\varepsilon}\, d\mu(y) + \int_{B(x,R)^c} d(x,y)^{-\alpha-\varepsilon}\, d\mu(y) < C(\varepsilon, R, \alpha).$$

Demostración. Tomemos $\varepsilon > 0$ fijo, luego

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,R)} d(x,y)^{-\alpha+\varepsilon}\, d\mu(y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-(j+1)}R \leq d(x,y) < 2^{-j}R} d(x,y)^{-\alpha+\varepsilon}\, d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{-(j+1)}R\right)^{-\alpha+\varepsilon} \int_{2^{-(j+1)}R \leq d(x,y) < 2^{-j}R} d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{-(j+1)}R\right)^{-\alpha+\varepsilon} \int_{B(x,2^{-j}R)} d\mu(y) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{j+1}R\right)^{-\alpha+\varepsilon} \mu(B(x, 2^{-j}R)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, haciendo uso de la cota superior de (1.8.2) resulta que

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,R)} d(x,y)^{-\alpha+\varepsilon}\, d\mu(y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{-(j+1)}R\right)^{-\alpha+\varepsilon} c_2 (2^{-j}R)^{\alpha} \\
&= c_2 2^{\alpha-\varepsilon} R^{\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\varepsilon j} \\
&= \frac{c_2 R^{\varepsilon} 2^{\alpha}}{2^{\varepsilon} - 1}.
\end{aligned}$$

En forma análoga se puede probar la otra estimación. □

Como corolario inmediato obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.8.3. *Sea (X, d, μ) un espacio Ahlfors α-regular, luego para toda bola B se tiene que*

$$\int_B \int_B d(x,y)^{-\alpha+\varepsilon}\, d\mu(x) d\mu(y) + \int_B \int_{B^c} d(x,y)^{-\alpha-\varepsilon}\, d\mu(x) d\mu(y) < C(\varepsilon, \alpha, B).$$

Será conveniente tener presentes, en varios puntos de este trabajo, algunos espacios de tipo homogéneo típicos que, aunque todavía lejos de la generalidad del contexto, reflejen las diferencias entre las estructuras y ejemplifiquen los resultados en su diversidad y alcances. Comencemos con algunos ejemplos «continuos»:

Ejemplo 1.8.1. $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual $|x-y|$ y la medida de Lebesgue, es un espacio métrico Ahlfors n-regular.

Ejemplo 1.8.2. X el toro bidimensonal con la distancia geodésica o la que hereda de $\mathbb{R}^3$ y la medida de superficie, es un espacio métrico compacto Ahlfors 2-regular.

Ejemplo 1.8.3. $\mathbb{R}^n$ con la distancia $|x-y|^n$ y m la medida de Lebesgue, es un espacio casi-métrico Ahlfors 1-regular, para todo $n > 1$.

Ejemplo 1.8.4. Sea $w(x) = |x|^{-1/2}$. Dado que w es un peso de la clase A_2 de Muckenhoupt, entonces $(\mathbb{R}^n, |x-y|, \mu)$ con $d\mu = w(x)dx$ es un espacio de tipo homogéneo. Sin embargo, no es Ahlfors α-regular, para ningún $\alpha > 0$. En general, para todo $w \in A_\infty$ se tiene que $(\mathbb{R}^n, |x-y|, \mu)$ con $d\mu = w(x)dx$ es un espacio de tipo homogéneo.

Un caso discreto típico está contenido en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.8.5. $(\mathbb{Z}^n, |\vec{\ell}-\vec{k}|, \#)$ con $n \in \mathbb{N}$ y $\#$ la medida que cuenta la cantidad de elementos del conjunto, es un espacio normal pero no Ahlfors 1-regular.

Los conjuntos autosimilares (fractales) proveen una familia particular y muy rica de ejemplos:

Ejemplo 1.8.6. El conjunto de Cantor con la distancia usual que hereda de $\mathbb{R}$ y la medida de Hausdorff $\alpha = \log_3 2$ dimensional, es un espacio métrico Ahlfors α-regular.

Ejemplo 1.8.7. El triángulo de Sierpinski con la distancia que hereda de $\mathbb{R}^2$ y la medida de Hausdorff $\beta = \log_3 4$ dimensional, es un espacio métrico Ahlfors α-regular.

Hay espacios de tipo homogéneo mucho más «heterogéneos» que los anteriores, como es el caso del siguiente ejemplo donde «conviven» partes de diferentes dimensiones:

Ejemplo 1.8.8. Sean $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ y } 2 \leq x \leq 3\}$ y $P = \{(2,2)\}$. Luego, $X = B \cup S \cup P$ con la distancia usual que hereda de $\mathbb{R}^2$ y la medida $\mu(E) = |E \cap B|_2 + |E \cap S|_1 + \#(E \cap P)$, donde $|\cdot|_2$ y $|\cdot|_1$ son la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^1$ respectivamente, es un espacio de tipo homogéneo pero no es Ahlfors α-regular, para ningún $\alpha > 0$.

La separación entre las componentes de dimensiones distintas del ejemplo anterior no es una condición estrictamente necesaria para que la duplicación se satisfaga. Veamos, por último, un ejemplo de ello:

Ejemplo 1.8.9. Sean $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $\bar{S} = \{(x,y)\mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ y } 1 \leq x \leq 2\}$. Luego, $X = B \cup \bar{S}$ con la distancia usual que hereda de $\mathbb{R}^2$ y la medida $\mu(E) = |E \cap B|_2 + \int_{E \cap S} x - 1\, dx$, es un espacio de tipo homogéneo pero no es Ahlfors α-regular, para ningún $\alpha > 0$.

1.9. Familias diádicas en espacios de tipo homogéneo

En esta sección veremos una nueva versión de los conjuntos de tipo diádico construidos por M. Christ en [17] y G. David en [23], sobre un espacio casi-métrico con la PHD. Estas recientes construcciones (ver [3], [8] y [35]) requieren hipótesis más restrictivas sobre el espacio ambiente, sin embargo esto le brinda a estos conjuntos importantes propiedades que serán utilizadas a lo largo de este trabajo.

Sea (X, ρ, μ) un espacio de tipo homogéneo con constante triangular K y constante de duplicación A. Para comenzar con la construcción de estos conjuntos, fijemos $\theta \in (0,1)$ y dos constantes c_0 y C_0. Construyamos para cada $j \in \mathbb{Z}$ un conjunto $c_0\theta^j$-disperso en X y $C_0\theta^j$-denso en X, el cual denotaremos con $\{x_k^j : k \in \mathcal{K}_j\}$, donde $\mathcal{K}_j$ denota un subconjunto de $\mathbb{N}$, el cual podría ser todo $\mathbb{N}$. A partir de estos conjuntos de puntos se pueden construir familias de conjuntos Q_k^j, $\tilde{Q}_k^j$ y $\bar{Q}_k^j$ —llamadas **cubos diádicos**, **cubos diádicos abiertos** y **cubos diádicos cerrados**, respectivamente— tales que:

$$\tilde{Q}_k^j \subseteq Q_k^j \subseteq \bar{Q}_k^j; \tag{1.9.1}$$

$$\tilde{Q}_k^j \text{ y } \bar{Q}_k^j \text{ son el interior y la clausura de } Q_k^j; \tag{1.9.2}$$

$$\text{si } \ell \geq j, \text{entonces } Q_n^\ell \subseteq Q_k^j \text{ o bien } Q_n^\ell \cap Q_k^j = \emptyset; \tag{1.9.3}$$

$$X = \bigcup_{k \in \mathcal{K}_j} Q_k^j, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z} \text{ (unión disjunta)}; \tag{1.9.4}$$

$$B(x_k^j, c_1\theta^j) \subseteq Q_k^j \subseteq B(x_k^j, C_1\theta^j), \tag{1.9.5}$$

donde $c_1 := (3K^2)^{-1}c_0$ y $C_1 := 2KC_0$;

$$\mu(X \setminus \cup \{\tilde{Q}_k^j : k \in \mathcal{K}_j\}) = 0, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}; \tag{1.9.6}$$

$$X \text{ es acotado si y sólo si existen } j \in \mathbb{Z}, k \in \mathcal{K}_j \text{ tales que } X = Q_k^j. \tag{1.9.7}$$

Para cada $j \in \mathbb{Z}$ denotaremos con $\mathscr{D}^j$ a la colección de todos estos «cubos diádicos», es decir,

$$\mathscr{D}^j = \{Q_k^j : k \in \mathcal{K}_j\}.$$

Denotaremos con $\mathscr{D}$ a la colección de todas las familias $\mathscr{D}^j$, a la cual llamaremos **familia de cubos diádicos**. Diremos que un cubo $Q \in \mathscr{D}$ pertenece al **nivel** o **generación j** si $Q \in \mathscr{D}^j$. Para cada $Q \in \mathscr{D}^j$ llamaremos **hijo de Q** a todo cubo de la generación $j+1$ contenidos en Q. Se puede probar que todo cubo diádico tiene una cantidad de hijos acotada uniformemente en $\mathscr{D}$. Más aún, definiendo los conjuntos de índices

$$\mathcal{L}(Q_k^j) = \mathcal{L}_k^j := \{\ell \in \mathcal{K}_{j+1} : Q_\ell^{j+1} \subseteq Q_k^j\}$$

existe una constante positiva $N = N(A, \theta)$ tal que

$$Q_k^j = \bigcup_{\ell \in \mathcal{L}_k^j} Q_\ell^{j+1} \quad \text{y} \quad 1 \leq \#\mathcal{L}_k^j \leq N, \tag{1.9.8}$$

para todo $j \in \mathbb{Z}$ y todo $k \in \mathcal{K}_j$. Por otro lado, diremos que $J \in \mathscr{D}$ es un **ancestro de Q** si $Q \subseteq J$. Dados Q y Q' en $\mathscr{D}$, diremos que $J \in \mathscr{D}$ es el **primer ancestro común** de Q y Q' si J es un ancestro de ambos Q y Q', y $J \subset J'$ para todo ancestro común de Q y Q'.

El siguiente teorema reúne los resultados mencionados a lo largo de esta sección.

Teorema 1.9.1. *Sea (X, ρ, μ) un espacio de tipo homogéneo con constante triangular K y constante de duplicación A. Dados $\theta \in (0,1)$ y c_0 y C_0 dos constantes satisfaciendo que $12K^3C_0\theta \leq c_0$, podemos construir familias de conjuntos $\tilde{Q}_k^j$, Q_k^j y $\bar{Q}_k^j$ que satisfagan las propiedades* (1.9.2)–(1.9.8).

Por último, sea Q un cubo diádico fijo en $\mathscr{D}$. Denominemos **cuadrante** de X que contiene a Q al conjunto

$$\mathcal{C}(Q) := \bigcup \{Q' \in \mathscr{D} : Q' \supseteq Q\}.$$

La familia de cuadrantes asociadas a una familia diádica de Christ $\mathscr{D}$ satisfacen las siguientes propiedades:

1. para cada cuadrante $\mathcal{C}$ tenemos que $(\mathcal{C}, \rho, \mu)$ es un espacio de tipo homogéneo;
2. si dos cuadrantes se intersecan entonces coinciden;
3. existe un constante geométrica M tal que
$$X = \bigcup_{i=1}^{M} \mathcal{C}_i,$$
con $\mathcal{C}_i$ cuadrantes de X;
4. si $\mu(X) < \infty$, existe un único cuadrante que coincide con un $Q \in \mathscr{D}$ y con X;
5. si $\mu(X) = \infty$, para todo cuadrante $\mathcal{C}$ también se tiene que $\mu(\mathcal{C}) = \infty$.

1.10. Bases de Haar

El propósito de esta sección es construir en un espacio de tipo homogéneo una sucesión de espacios funcionales $\{V^j : j \in \mathbb{Z}\}$ vinculados a una familia diádica, con propiedades similares a las estructuras AMR (análisis de multiresolución) en espacios euclídeos. Luego, introducir a partir de estos espacios $\{V^j : j \in \mathbb{Z}\}$ un sistema de Haar asociado, el cual resultará ser una base incondicional para los espacios de Lebesgue clásicos. Para un estudio exhaustivo del tema puede consultarse bibliografía como [7], [2], [8], entre otros.

Sea (X, ρ, μ) un espacios de tipo homogéneo y $\mathscr{D}$ una familia diádica dada por el Teorema 1.9.1. Para cada $j \in \mathbb{Z}$ definamos V^j como el subespacio cerrado de $L^2(X, \mu)$ dado por

$$V^j := \{f \in L^2(X, \mu) : \, f \text{ es constante en casi todo punto sobre cada } Q_k^j \in \mathscr{D}^j\}.$$

La sucesión $\{V^j : j \in \mathbb{Z}\}$ satisface las siguientes propiedades:

1. para cada $j \in \mathbb{Z}$, $V^j \subseteq V^{j+1}$;
2. $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V^j} = L^2$;
3. $\cap_{j\in\mathbb{Z}} V^j = \{0\}$ si $\mu(X) = \infty$.
4. $\cap_{j\in\mathbb{Z}} V^j$ es el espacio unidimensional de todas las funciones constantes sobre X si $\mu(X) < \infty$.

Con P_j denotaremos el proyector ortogonal de L^2 sobre V^j, es decir

$$P_j f = \sum_{Q \in \mathscr{D}^j} \langle f, \chi_Q \rangle \frac{\chi_Q}{\mu(Q)}, \tag{1.10.1}$$

donde la igualdad es en el sentido de L^2. Notar que para $f \in L^p$, con $1 \leq p < \infty$, los coeficientes $\langle f, \chi_Q \rangle$ están bien definidos ya que cada χ_Q pertenece a L^∞ y tiene soporte acotado. Más aún, $P_j f$ es una función de L^p y $\|P_j f\|_p \leq \|f\|_p$.

Teorema 1.10.1. *Sea $f \in L^p$, con $1 \leq p < \infty$. Entonces $P_j f \to f$ cuando $j \to \infty$ en L^p y en casi todo punto.*

Teorema 1.10.2. *Para cada $f \in L^p$ se satisface que*

1. *si $\mu(X) = \infty$ y $1 \leq p < \infty$, entonces $P_j f \to 0$ cuando $j \to -\infty$ puntualmente;*
2. *si $\mu(X) = \infty$ y $1 < p < \infty$, entonces $P_j f \to 0$ cuando $j \to -\infty$ en L^p;*
3. *si $\mu(X) < \infty$ y $1 \leq p < \infty$, entonces existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $P_j f = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu$ para todo $j \leq j_0$.*

Observemos que en el caso $\mu(X) = \infty$ la convergencia en L^1 de P_j a cero cuando $j \to -\infty$ se satisface sólo cuando $\int f \, d\mu = 0$, ya que para todo $j \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\int P_j f \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Por otra parte, consideremos un par fijo $(j,k) \in \mathcal{A} = \cup_{j \in \mathbb{Z}} (\{j\} \times \mathcal{K}_j)$. Por (1.9.8) existe $\mathcal{L}_k^j \subset \mathcal{K}_{j+1}$ tal que

$$Q_k^j = \bigcup_{\ell \in \mathcal{L}_k^j} Q_\ell^{j+1},$$

con $1 \leq \#\mathcal{L}_k^j \leq N$. Asumamos que $\#\mathcal{L}_k^j > 1$ y tomemos $\Lambda(Q_k^j) = \Lambda_k^j = \mathcal{L}_k^j - \{\ell_0\}$, donde ℓ_0 es el primer elemento de $\mathcal{L}_k^j$. El espacio vectorial V_k^{j+1} de todas las funciones soportadas en Q_k^j que son constantes en cada hijo de Q_k^j, es decir, Q_ℓ^{j+1} con $\ell \in \mathcal{L}_k^j$; tiene a la familia $\{\chi_{Q_k^j}\} \cup \{\chi_{Q_\ell^{j+1}} : \ell \in \mathcal{L}_k^j\}$ como una base. Aplicando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt obtenemos una base ortonormal de V_k^{j+1} dada por

$$\mathcal{B}_k^{j+1} = \left\{ \mu(Q_k^j)^{-1/2} \chi_{Q_k^j} \right\} \cup \{ h_{j,k}^\ell : \ell \in \Lambda_k^j \}.$$

Por otro lado, si $\#\mathcal{L}_k^j = 1$, tenemos que la dimensión de V_k^{j+1} es uno y por lo tanto $B_k^{j+1} = \left\{ \mu(Q_k^j)^{-1/2} \chi_{Q_k^j} \right\}$ es la base ortonormal de V_k^{j+1}. Para $j \in \mathbb{Z}$

definimos

$$W^j := \overline{\text{gen}\{h^\ell_{j,k} : k \in \mathcal{K}_j \text{ con } \#\mathcal{L}^j_k > 1 \text{ y } \ell \in \Lambda^j_k\}}^{L^2}.$$

y como $W^j := \{0\}$ si $\#\mathcal{L}^j_k = 1$ para todo $k \in \mathcal{K}_j$. Denotando con $\mathbb{L}^p$ (para $p \geq 1$) al espacio L^p cuando $\mu(X) = \infty$ y $L^p_0 = \{f \in L^p : \int f\, d\mu = 0\}$ cuando $\mu(X) < \infty$, podemos ver que

$$V^{j+1} = V^j \oplus W^j \quad \text{y} \quad \bigoplus_{j \in Z} W^j = \mathbb{L}^2.$$

Si definimos $\tilde{\mathcal{A}} = \{(j,k) \in \mathcal{A} : \#\mathcal{L}^j_k > 1\}$, entonces diremos que la colección

$$\mathscr{H} := \{h^\ell_{j,k} : (j,k) \in \tilde{\mathcal{A}} \text{ y } \ell \in \Lambda^j_k\}$$

es el **sistema de Haar** inducido en (X, ρ, μ) por la familia diádica $\mathscr{D}$. Así construidas, para cada $(j,k) \in \tilde{\mathcal{A}}$ y cada $\ell \in \Lambda^j_k$ se satisface para cada $h^\ell_{j,k} \in \mathscr{H}$ que

$$Q^{j+1}_\ell \subsetneq \{x \in X : h^\ell_{j,k} \neq 0\} \subseteq Q^j_k; \tag{1.10.2}$$

$$h^\ell_{j,k} \text{ es constante sobre cada hijo } Q^{j+1}_\ell \text{ de } Q^j_k; \tag{1.10.3}$$

$$\int_X h^\ell_{j.k}\, d\mu = 0. \tag{1.10.4}$$

A partir de estas propiedades puede probarse que $\mathscr{H}$ es una base ortonormal de $\mathbb{L}^2$, y por lo tanto se satisface que

$$f \overset{L^2}{=} \sum_{h \in \mathscr{H}} \langle f, h\rangle h \quad \text{y} \quad \|f\|_2^2 = \sum_{h \in \mathscr{H}} |\langle f, h\rangle|^2. \tag{1.10.5}$$

Más aún, en [8] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 1.10.3. *Sean (X, ρ, μ) un espacio de tipo homogéneo, $1 < p < \infty$ y $\mathscr{H}$ un sistema de Haar inducido por una familia diádica $\mathscr{D}$ definida en la Sección 1.9. Luego,*

$$\mathscr{H} \text{ es una base incondicional para } \mathbb{L}^p \tag{1.10.6}$$

y existen constantes C_1 y C_2 tales que para toda $f \in \mathbb{L}^p$ se cumple que

$$C_1\|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_{h \in \mathscr{H}} |\langle f, h\rangle|^2 |h|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_2 \|f\|_p. \tag{1.10.7}$$

Por último, observemos que los operadores de proyección P_j dados en (1.10.1) pueden reescribirse en términos del sistema de Haar de la siguiente forma,

$$P_j f = \sum_{i<j} \sum_{Q\in\mathscr{D}^i} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \langle f, h_Q^\ell \rangle h_Q^\ell,$$

para toda $f \in L^p$. Esta notación será la que adoptaremos a lo largo de esta tesis.

1.11. Operadores maximales de Hardy-Littlewood

Sean (X,μ) e (Y,ν) dos espacios de medida. Denotemos con $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ a los espacios de las funciones medibles de (X,μ) e (Y,ν), respectivamente. Diremos que $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ es un **operador sublineal** si

$$|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg| \quad \text{ y } \quad |T(cf)| \leq |c|\,|Tf|,$$

para toda $f, g \in \mathcal{M}$ y para todo $c \in \mathbb{R}$. Un operador sublineal T es de **tipo fuerte (p,q)**, para $1 \leq p, q \leq \infty$, si T es acotado de $L^p(X,\mu)$ en $L^q(Y,\nu)$, es decir, existe una constante positiva C tal que

$$\|Tf\|_q \leq C\|f\|_p \quad \text{para toda} \quad f \in L^p(X,\mu).$$

Diremos que T es de **tipo débil (p,q)**, para $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q < \infty$, si T es acotado de $L^p(X\mu)$ en $L^q(X,\nu)$ débil, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que

$$[Tf]_q \leq C\|f\|_p \quad \text{para toda} \quad f \in L^p(\mu).$$

En otras palabras,

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \alpha\}) \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\alpha}\right)^q, \tag{1.11.1}$$

para todo $\alpha > 0$. Para el caso $q = \infty$, decimos que T es de tipo débil (p,∞) si es de tipo fuerte (p,∞). Del Teorema 1.2.3 es inmediato que el tipo fuerte de un operador implica el tipo débil del mismo.

Sea (X,ρ) un espacio casi-métrico, y fijemos d una distancia y ξ un número real positivo tales que ρ es equivalente a $\rho' = d^\xi$ (ver Teorema 1.7.2). Sea Σ una σ-álgebra sobre X que contiene a las d-bolas, y sea μ una medida sobre Σ tal que cada d-bola tiene medida positiva y finita. Dada una función f que sea integrable sobre cada d-bola, presentaremos diferentes versiones de la función maximal de

Hardy-Littlewood de f. La **función maximal de Hardy-Littlewood no centrada** de una tal función f se define como

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)|\, d\mu(y)\,,$$

donde el supremo se toma sobre la familia de todas las d-bolas en X que contienen a x. Si las ρ-bolas pertenecen a Σ, obtenemos una versión similar M^ρ de este operador tomando ρ-bolas en lugar de d-bolas. En este contexto, en [1], se prueba el siguiente resultado.

Teorema 1.11.1. *Sea (X, ρ, μ) es un espacio de tipo homogéneo, luego se satisface que*

1. *$Mf(x)$ es medible para cada f localmente integrable.*
2. *M^ρ es equivalente a M.*

Más aún, si las ρ-bolas son conjuntos abiertos, entonces

3. *M^ρ es de tipo débil $(1, 1)$ y de tipo fuerte (p, p), para $1 < p \leq \infty$.*

Siguiendo en el contexto de espacios de tipo homogéneo podemos definir, a partir de una familia diádica $\mathscr{D}$ (ver Sección 1.9), la **función maximal de Hardy-Littlewood diádica** de una función f como

$$M_{dy}f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)|\, d\mu(y)\,,$$

donde el supremo se toma sobre la familia de todos los cubos $Q \in \mathscr{D}$. Es inmediato observar que $M_{dy}f \leq CMf$. Por lo tanto, por el Teorema 1.11.1 tenemos que M_{dy} es de tipo débil $(1, 1)$ y de tipo fuerte (p, p), para $1 < p \leq \infty$. Más aún, si X tiene un único cuadrante entonces M_{dy} es equivalente a M.

1.12. Espacios Lipschitz y Besov en espacios de tipo homogéneo

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo de orden γ. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es **Lipschitz continua de orden r**, si dado $0 < r < \gamma$ existe una constante positiva C tal que para todo $x, y \in X$ tenemos que

$$|f(x) - f(y)| \leq Cd(x, y)^r. \tag{1.12.1}$$

El problema de la existencia de funciones Lipschitz r, para algún $r > 0$ en espacios de tipo homogéneo, es no trivial. La razón para ello es que las casi-métricas al no satisfacer la desigualdad triangular tampoco producen la función Lipschitz básica de los espacios métricos, es decir, $\phi(x) = d(x, x_0)$ para $x_0 \in X$ fijo. El

Teorema 1.7.2 es la prueba de existencia de funciones Lipschitz r no triviales para r suficientemente pequeño.

Denotaremos al espacio de todas las funciones $f : X \to \mathbb{R}$ que satisfacen (1.12.1) con $\dot{\Lambda}_r(X, d)$ y lo llamaremos el **espacio Lipschitz homogéneo de orden r**. En este caso equiparemos al espacio con la seminorma

$$[f]_{\dot{\Lambda}_r} := \sup_{x\in X} \sup_{y\in X\setminus\{x\}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^r}.$$

Observar que $[f]_{\dot{\Lambda}_r}$ coincide con el ínfimo de todas las constantes C que satisfacen (1.12.1). Por otro lado, llamaremos **espacio Lipschitz inhomogéneo de orden r** al espacio de todas las funciones $f \in L^\infty(X, \mu)$ tales que $[f]_{\dot{\Lambda}_r} < \infty$, y lo denotaremos con $\Lambda_r(X, d, \mu)$. Dado que la cantidad

$$\|f\|_{\Lambda_r} := \|f\|_\infty + [f]_{\dot{\Lambda}_r}$$

es una norma y $\Lambda_r(X, d, \mu)$ es un subespacio cerrado de $L^\infty(X, \mu)$, entonces $\Lambda_r(X, d, \mu)$ resulta completo y por lo tanto de Banach.

Supongamos adicionalmente que (X, d, μ) es un espacio Ahlfors α-regular. Para $0 < r < 1$ y $1 \le p < \infty$, definamos el **espacio de Besov inhomogéneo** $B^p_r(X, d, \mu)$ como el conjunto de aquellas funciones $f \in L^p(X, \mu)$ tales que la seminorma

$$[f]_{\dot{B}^p_r} := \left(\int_X \int_X \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d(x, y)^{\alpha+pr}}\, d\mu(x)d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.12.2}$$

resulta finita. Equipando a $B^p_r(X, d, \mu)$ con la norma

$$\|f\|_{B^p_r} := \|f\|_p + [f]_{\dot{B}^p_r},$$

resulta ser un espacio de Banach. En caso que el espacio no necesariamente sea Ahlfors regular, podemos reemplazar la seminorma dada por (1.12.2) por

$$[f]_{\dot{B}^p_r} := \left(\int_X \int_X \frac{|f(x) - f(y)|^p}{\mu(B(x, d(x, y)))d(x, y)^{pr}}\, d\mu(x)d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Existen numerosas definiciones y caracterizaciones para los espacios de Besov en espacios de tipo homogéneo (ver por ejemplo [**33**] y [**30**]). En particular, si nuestro contexto se reduce a $\mathbb{R}^n$, existe una caracterización vía la transformada de Fourier que nos será de utilidad en el Capítulo 2. La misma puede encontrase en [**44**] y brevemente la esquematizaremos a continuación.

Sea $\{\phi_\nu\}_{\nu=-\infty}^{\infty}$ una sucesión de funciones test de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tales que

1. $\widehat{\phi_\nu}(\xi) \neq 0$ si y sólo si $\xi \in R_\nu := \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{\nu-1} < |\xi| < 2^{\nu+1}\}$,
2. $\left|\widehat{\phi_\nu}(\xi)\right| \geq C_\varepsilon > 0$ si $\xi \in R_\nu^\varepsilon := \{\xi \in \mathbb{R}^n : (2-\varepsilon)^{-1}2^\nu \leq |\xi| \leq (2-\varepsilon)2^\nu\}$,
3. $\left|D^\beta \widehat{\phi_\nu}(\xi)\right| \leq C_\beta 2^{-\nu|\beta|}$, para todo $\beta \in \mathbb{N}^n$, y
4. $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \widehat{\phi_\nu}(\xi) = 1$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Sea ϕ una función test de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que

1. $\widehat{\phi}(\xi) \neq 0$ si y sólo si $\xi \in K := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 1\}$, y
2. $\left|\widehat{\phi}(\xi)\right| \geq C_\varepsilon > 0$ si $\xi \in K^\varepsilon := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 1-\varepsilon\}$.

Luego, para $r > 0$, $1 \leq p < \infty$, el espacio $B_r^p(\mathbb{R}^n)$ coincide con el conjunto de todas las $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\|\phi * f\|_{L^p} + \left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (2^{\nu r}\|\phi_\nu * f\|_{L^p})^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Más aún,

$$\|f\|_{B_r^p} \approx \|\phi * f\|_{L^p} + \left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (2^{\nu r}\|\phi_\nu * f\|_{L^p})^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En [28] puede encontrarse la descripción de las familias de espacios funcionales de Triebel-Lizorkin y de Besov en términos de wavelets. Este enfoque permite ver fácilmente que cuando p es 2 las escalas se intersecan y los espacios de Besov pueden verse como espacios de Sobolev. En este trabajo consideraremos el caso $p = 2$ en los Capítulos 2 y 6. Llamaremos espacios de Besov a los espacios involucrados, en lugar de Sobolev, por el tipo de representación de la norma que haremos.

Parte I

Métodos de Fourier

Capítulo 2

Difusiones inducidas por laplacianos fraccionarios en el espacio euclídeo

En este capítulo estudiaremos una generalización fraccionaria de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n$ a través del operador laplaciano fraccionario $(-\Delta)^{s/2}$. Primero repasaremos diferentes formas de definir dicho operador cada una de las cuales pondrá en evidencia diferentes aspectos del mismo. Luego, estudiaremos el problema $u_t = -(-\Delta)^{s/2}u$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, con $u(x,0) = u_0$ en $\mathbb{R}^n$, usando la transformada de Fourier en adecuados espacios de funciones de prueba y en los correspondientes espacios de distribuciones. Encontraremos contextos adecuados para la condición inicial u_0 para garantizar la existencia de soluciones a dicho problema. Aunque la mayoría de los resultados de este capítulo son conocidos, la dispersión bibliográfica en algunos casos y la claridad expositiva en otro, nos lleva a formularlos de un modo unificado en este capítulo.

2.1. Introducción

En los últimos años ha ido creciendo el interés por el estudio de problemas que involucran potencias fraccionarias del operador de Laplace, incluyendo procesos de transporte anómalos [**36**], problema del obstáculo [**50**, **49**], regularidad de soluciones y desigualdades de Harnack [**14**, **52**], entre otros. En todos estos trabajos pueden encontrarse diferentes formas de definir a este mismo operador. Es por esto que comenzaremos reuniendo aquí distintos caminos que arriban de manera natural a una definición de $(-\Delta)^{s/2}$.

Comencemos recordando cómo se puede determinar la raíz cuadrada del laplaciano $(-\Delta)^{1/2}$ como un operador del tipo *Dirichlet-to-Neumann*, es decir, como un operador que mapea un condición de borde del tipo Dirichlet a una condición del tipo Neumann vía un método de extensión.

Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pensemos a f como la condición Dirichlet de un problema para la ecuación de Laplace en el semiespacio superior $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} :$

$x \in \mathbb{R}^n$, $y > 0\}$, es decir,

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } \mathbb{R}^{n+1}_+, \\ u(x,0) = f(x), & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Si definimos el núcleo de Poisson y sus reescalamientos como

$$P(x) = \frac{c_n}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \quad \text{y} \quad P_y(x) = \frac{1}{y^n} P\left(\frac{x}{y}\right),$$

donde c_n es una constante tal que $\widehat{P}(\xi) = e^{-|\xi|}$, entonces la solución a (2.1.1) viene dada por

$$u(x,y) = (P_y * f)(x).$$

Ya calculada su extensión armónica al semiespacio superior podemos utilizar la derivada normal de u para definir un operador T sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como

$$Tf(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,0).$$

Colocando en (2.1.1) como condición de Dirichlet a $-\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)$ en lugar de f, es sencillo comprobar que la solución obtenida es $-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$ en lugar de u. Por lo tanto,

$$T(T(f)) = T\left(-\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)(x,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0).$$

Como $\Delta u = 0$, entonces $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\Delta_x u$. Luego, de la condición de Dirichlet en (2.1.1) obtenemos que

$$T^2(f) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) = -\Delta_x u(x,0) = -\Delta f(x).$$

Como T resulta ser un operador positivo, podemos concluir que $T = (-\Delta)^{1/2}$.

Más aún, en [14], L. Caffarelli y L. Silvestre prueban que toda potencia fraccionaria del operador laplaciano —entre 0 y 2— puede ser determinada como un operador del tipo *Dirichlet-to-Neumann*. Otra manera, tal vez la más directa, de abordar el problema de las potencias fraccionarias de $-\Delta$, es a través de la transformada de Fourier. Recordando que

$$\mathcal{F}(-\Delta f)(\xi) = |\xi|^2 \widehat{f}(\xi),$$

parece razonable intentar obtener una expresión similar para $\widehat{T}$. Para esto, procedamos formalmente en el cálculo de la transformada de Fourier de dicho operador. Notemos en primer lugar que si $u(x, y) = (P_y * f)(x)$, entonces

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{P_y}(\xi)\widehat{f}(\xi) = \widehat{P}(y\xi)\widehat{f}(\xi) = e^{-y|\xi|}\widehat{f}(\xi).$$

Por lo tanto,

$$\widehat{Tf}(\xi) = -\widehat{\frac{\partial u}{\partial y}}(\xi, 0) = -\frac{\partial \widehat{u}}{\partial y}(\xi, y)\bigg|_{y=0} = |\xi| e^{-y|\xi|}\widehat{f}(\xi)\Big|_{y=0} = |\xi|\widehat{f}(\xi).$$

Extrapolando esta misma idea a otras potencias fraccionarias del operador Laplaciano, es decir, para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $0 < s < 2$,

$$\mathcal{F}((-\Delta)^{s/2} f)(\xi) = |\xi|^s \widehat{f}(\xi). \tag{2.1.2}$$

Esta última definición será la que tomaremos durante el resto del capítulo. No obstante, en el siguiente capítulo obtendremos otra perspectiva para dicho operador que pondrá en evidencia su carácter no local. Probaremos que viene dada por

$$(-\Delta)^{s/2} f(x) = C_{n,s} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{n+s}} dy, \tag{2.1.3}$$

donde $C_{n,s}$ es una constante positiva. La representación íntegro-diferencial dada en (2.1.3) nos permitirá extender al operador $(-\Delta)^{s/2}$ a contextos más generales como los espacios métricos de medida, donde careceremos de herramientas como la transformada de Fourier.

Ahora sí estamos en condiciones de formular el problema en el que nos centraremos durante el resto del capítulo. Éste será una modificación al problema del calor clásico, con dato inicial.

Dado un $s \in \mathbb{R}$, tal que $0 < s < 2$, buscaremos soluciones al problema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = -(-\Delta)^{s/2} u(\cdot, t)(x), & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Por medio de la ecuación (2.1.2) podemos reformular el problema anterior como

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(\xi, t) = -|\xi|^s \widehat{u}(\xi, t), & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{u_0}(\xi), & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Esta última formulación nos brinda el beneficio de conocer una solución explícita. La misma viene dada por

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}(\xi). \tag{2.1.6}$$

Si el lado derecho de la igualdad anterior perteneciese a algún espacio de funciones o distribuciones en los que la transformada de Fourier actúe naturalmente, podríamos obtener una solución al problema original (2.1.4) mediante

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}(\xi)\right)(x). \tag{2.1.7}$$

La única libertad sobre el lado derecho de (2.1.6) es la elección del espacio al que u_0 pertenezca. A priori los espacios naturales para esto serían $L^2(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo, en ninguno de estos dos últimos casos la solución dada por (2.1.7) estará siempre bien definida. En efecto, si $\widehat{u_0}$ pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, no podemos garantizar que $e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}$ lo haga, ya que $e^{-|\xi|^s t}$ claramente no es diferenciable en el origen. Por otro lado, si $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{u_0}$ también. Aquí también, en general, $e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}$ no estará bien definida como un distribución de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, puesto que para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ arbitraria se tiene que

$$\left\langle e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}, \varphi\right\rangle = \left\langle \widehat{u_0}, e^{-|\xi|^s t}\varphi\right\rangle, \tag{2.1.8}$$

y al igual que antes, no podemos asegurar que $e^{-|\xi|^s t}\varphi$ pertenezca a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, por lo que (2.1.8) no estará bien definida. Esto nos motiva a encontrar espacios adecuados para la condición inicial u_0 de tal forma que la solución dada por (2.1.7) también pertenezca a dicho espacio. Este será el tema a desarrollar en las próximas secciones.

Por último, a pesar de que si $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ la solución u dada por (2.1.7) sí pertenece a $L^2(\mathbb{R}^n)$, la función $|\xi|^s\widehat{u}(\xi,t)$ no necesariamente. Por lo tanto, $(-\Delta)^{s/2}u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s\widehat{u}(\xi,t))$ podría no estar bien definido. Para esto tendremos que mostrar que si el dato pertenece a $L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces u pertenecerá a un espacio de regularidad (Besov) en el cual el laplaciano fraccionario esté bien definido.

2.2. Solución en el espacio $\mathcal{S}_\infty$

Empecemos recordando (ver Sección 1.4 del Capítulo 1) los espacios

$$\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) :\ D^\gamma\widehat{\varphi}(0) = 0,\ \text{para todo } \gamma \in \mathbb{N}^n\},\ \text{y}$$

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) :\ D^\gamma\varphi(0) = 0,\ \text{para todo } \gamma \in \mathbb{N}^n\},$$

los cuales son subespacios cerrados de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Recordemos también que la transformada de Fourier y su inversa son isomorfismos continuos de $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ y viceversa. El próximo teorema nos muestra que es suficiente tomar la condición inicial en $\mathcal{S}_\infty$ para poder dar una solución al problema (2.1.4).

Teorema 2.2.1. *Sea $0 < s < 2$ y $u_0 \in S_\infty(\mathbb{R}^n)$. Luego, la función u definida en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ por*

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}(\xi)\right)(x),$$

pertenece a $S_\infty(\mathbb{R}^n)$ como función de $x \in \mathbb{R}^n$ para cada $t > 0$; y además resuelve el problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = -(-\Delta)^{s/2}u(x,t), & en\ \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & en\ \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde las igualdades se satisfacen en $S(\mathbb{R}^n)$.

Antes de ver la demostración este teorema presentaremos algunas definiciones y resultados auxiliares que facilitarán la lectura de la misma.

Definición 2.2.2. *Diremos que ψ pertenece al espacio $C_\ell^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ si $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ y para todo $\gamma \in \mathbb{N}^n$ se tiene que*

(i) $|D^\gamma\psi(x)| \leq C_1|x|^{-k_1}$, *para todo $x \in B(0,1)\backslash\{0\}$,*

(ii) $|D^\gamma\psi(x)| \leq C_2|x|^{k_2}$, *para todo $x \in B(0,1)^c$,*

donde C_1, C_2, k_1, k_2 son constantes positivas que pueden depender de γ.

De la definición de C_ℓ^∞ es inmediato ver que dadas dos funciones ψ_1 y ψ_2 de este espacio, su suma $\psi_1 + \psi_2$, su producto $\psi_1\psi_2$, y sus derivadas de cualquier orden $D^\beta\psi_i$ con $\beta \in \mathbb{N}^n$, también pertenecen a dicho espacio. Esta propiedad también se satisface en el caso de funciones de $\mathcal{S}_0$. La siguiente proposición muestra que C_ℓ^∞ es inocuo cuando se enfrenta a $\mathcal{S}_0$.

Proposición 2.2.3. *Sea $\psi \in C_\ell^\infty$ y $\varphi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$. Luego*

$$\phi(x) = \begin{cases} \varphi\psi, & si\ x \neq 0, \\ 0, & si\ x = 0, \end{cases}$$

también pertenece a $\mathcal{S}_0$.

Demostración. Procedamos por inducción. Sea $\gamma \in \mathbb{N}^n$, con $|\gamma| = 1$, es decir $\gamma = \vec{e}_j$, para algún $j = 1, \dots, n$. Luego,

$$D^\gamma \phi(0) = \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\phi(h\vec{e}_j) - \phi(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi\psi(h\vec{e}_j)}{h}. \tag{2.2.1}$$

Dado que $\varphi \in \mathcal{S}_0$, entonces para cualquier $l \in \mathbb{N}$ podemos escribir a $\varphi(h\vec{e}_j)$ como

$$\begin{aligned}\varphi(h\vec{e}_j) &= \phi(0) + h\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(0) + \cdots + \frac{h^{l-1}}{(l-1)!}\frac{\partial^{l-1}\varphi}{\partial x_j^{l-1}}(0) + \frac{h^l}{l!}\frac{\partial^l \varphi}{\partial x_j^l}(z\vec{e}_j) \\ &= \frac{h^l}{l!}\frac{\partial^l \varphi}{\partial x_j^l}(z\vec{e}_j),\end{aligned}$$

donde $0 \le z \le h$. Por las hipótesis en ψ si tomamos $h < 1$ resulta que

$$|\varphi\psi(h\vec{e}_j)| = |\varphi(h\vec{e}_j)|\,|\psi(h\vec{e}_j)| \le \left|\frac{h^l}{l!}\frac{\partial^l \varphi}{\partial x_j^l}(z\vec{e}_j)\right| c_1 |h\vec{e}_j|^{-k_1}.$$

Pero dado que $\varphi \in S$, entonces

$$|\varphi\psi(h\vec{e}_j)| \le \frac{c_1}{l!}\sup_{0 \le z \le 1}\left|\frac{\partial^l \varphi}{\partial x_j^l}(z\vec{e}_j)\right| h^{l-k_1} \le C(\gamma)h^{l-k_1}.$$

Por lo tanto, si elegimos l de tal forma que $l > k_1 + 2$, obtenemos que

$$\left|\frac{\varphi\psi(h\vec{e}_j)}{h}\right| \le C(\gamma)h^{l-(k_1+1)} \le C(\gamma)h.$$

De lo anterior y (2.2.1) tenemos que,

$$D^\gamma \phi(0) = \lim_{h \to 0}\frac{\varphi\psi(h\vec{e}_j)}{h} = 0.$$

Ahora, supongamos que para γ tal que $|\gamma| = k$ tenemos que $D^\gamma \phi(0) = 0$. Tomemos entonces $\bar{\gamma} = \gamma + \vec{e}_j$, es decir que $|\bar{\gamma}| = k + 1$. Luego,

$$D^{\bar{\gamma}}\phi(0) = \frac{\partial}{\partial x_j}D^\gamma \phi(0) = \lim_{h \to 0}\frac{D^\gamma(\varphi\psi)(h\vec{e}_j) - D^\gamma(\varphi\psi)(0)}{h}.$$

Por hipótesis inductiva $D^\gamma(\varphi\psi)(0) = 0$, entonces

$$D^{\bar{\gamma}}\phi(0) = \lim_{h \to 0}\frac{D^\gamma(\varphi\psi)(h\vec{e}_j)}{h} = \sum_{\beta \le \gamma} c_{\beta,\gamma}\lim_{h \to 0}\frac{D^{\gamma-\beta}\varphi D^\beta \psi(h\vec{e}_j)}{h}.$$

Pero observando que una derivada de cualquier orden tanto para φ como para ψ tienen las mismas propiedades que ellas, podríamos repetir el mismo razonamiento hecho en el caso con $|\gamma| = 1$ y así tener que

$$\lim_{h \to 0}\frac{D^{\gamma-\beta}\varphi D^\beta \psi(h\vec{e}_j)}{h} = 0,$$

para todo $\beta \leq \gamma$. Por lo tanto, $D^{\bar{\gamma}}\phi(0) = 0$.

Acabamos de probar que ϕ tiene derivada nula de todos los ordenes en el origen, lo que nos dice inmediatamente que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sólo restaría probar que las seminormas

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\gamma \phi(x)| \leq C(\alpha, \gamma), \tag{2.2.2}$$

para todo $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}^n$. Dado que las derivadas de cualquier orden de ϕ son continuas, entonces

$$\sup_{x \in B(0,1)} |x^\alpha D^\gamma \phi(x)| \leq \sup_{x \in B(0,1)} |D^\gamma \phi(x)| \leq C(\gamma).$$

Ahora, para acotar el supremo fuera de la bola unitaria, recordemos que

$$D^\gamma \phi = D^\gamma(\varphi\psi) = \sum_{\beta \leq \gamma} c_{\beta,\gamma} D^{\gamma-\beta}\varphi D^\beta \psi.$$

Luego, para todo $x \in B^c(0,1)$ resulta que

$$\begin{aligned} |x^\alpha D^\gamma \phi(x)| &\leq \sum_{\beta \leq \gamma} c_{\beta,\gamma} |x|^{|\alpha| + k_2(\beta)} |D^{\gamma-\beta}\varphi| |x|^{-k_2(\beta)} |D^\beta \psi| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \gamma} c_{\beta,\gamma} |x|^{|\alpha| + k_2(\beta)} |D^{\gamma-\beta}\varphi| C_1(\beta) \end{aligned}$$

Llamando $K(\gamma) = \sup_{\beta \leq \gamma} k_2(\beta)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B^c(0,1)} |x^\alpha D^\gamma \phi(x)| &\leq \sum_{\beta \leq \gamma} \tilde{c}_{\beta,\gamma} \sup_{x \in B^c(0,1)} |x|^{|\alpha| + K(\gamma)} |D^{\gamma-\beta}\varphi| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \gamma} \tilde{c}_{\beta,\gamma}\, C(\alpha, \beta, \gamma) \\ &= C(\alpha, \gamma). \end{aligned}$$

Así queda probado (2.2.2), y por lo tanto, $\phi \in \mathcal{S}_0$. □

Lema 2.2.4. *Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ una función homogénea de cualquier grado, continua y positiva sobre la cáscara unitaria S^{n-1}. Luego, $f \in C^\infty_\ell$.*

Demostración. Supongamos que f sea una función homogénea de grado ℓ, siendo ℓ arbitrario. Por la Proposición 1.5.1, $f \approx |x|^\ell$. Luego f satisface las condiciones (i) y (ii) de la Definición 2.2.2 para $\gamma = \vec{0}$. Dado un $\gamma \in \mathbb{N}^n$ arbitrario sabemos por la Proposición 1.5.3 que $D^\gamma f$ es una función homogénea de grado $\ell - |\gamma|$. Aplicando nuevamente la Proposición 1.5.1 tenemos que $D^\gamma f \approx |x|^{\ell - |\gamma|}$. Por lo tanto, $f \in C^\infty_\ell$. □

Por último, previo a la demostración del Teorema 2.2.1, nos será importante poder encontrar alguna estructura a la derivada $D^\beta e^{-|\xi|^s h}$, con $\beta \in \mathbb{N}^n$, en términos de funciones homogéneas. Comencemos suponiendo que $|\beta| = 1$, entonces $\beta = \vec{e_i}$. Luego,

$$D^\beta e^{-|\xi|^s h} = \tfrac{\partial}{\partial \xi_i} e^{-|\xi|^s h} == e^{-|\xi|^s h}(-h)\tfrac{\partial}{\partial \xi_i}|\xi|^s.$$

Ahora bien, si $|\beta| = 2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
D^\beta e^{-|\xi|^s h} &= \tfrac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial \xi_i} e^{-|\xi|^s h} = \tfrac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-|\xi|^s h}(-h)\tfrac{\partial}{\partial \xi_i}|\xi|^s \\
&= -h\tfrac{\partial}{\partial \xi_j} e^{-|\xi|^s h}\tfrac{\partial}{\partial \xi_i}|\xi|^s - he^{-|\xi|^s h}\tfrac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial \xi_i}|\xi|^s \\
&= h^2 e^{-|\xi|^s h}\tfrac{\partial}{\partial \xi_j}|\xi|^s \tfrac{\partial}{\partial \xi_i}|\xi|^s - he^{-|\xi|^s h}\tfrac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial \xi_i}|\xi|^s
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Esta última expresión nos motiva su generalización, la cual sintetizamos en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.5. *Para cada $\beta \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\beta| \geq 2$ se tiene que*

$$D^\beta e^{-|\xi|^s h} = \left(\sum_{k=2}^{|\beta|} h^k f_{ks-|\beta|}\right) e^{-|\xi|^s h} - he^{-|\xi|^s h} D^\beta |\xi|^s,$$

donde f_ℓ representa una función homogénea de grado ℓ tal que $f_\ell \in C(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

Demostración. Procedamos por inducción sobre el módulo de β. El caso inicial, $|\beta| = 2$, se desprende inmediatamente de la ecuación 2.2.3. Supongamos que la ecuación es válida para todo β tal que $|\beta| = m$. Sea $\bar\beta$ tal que $|\bar\beta| = m+1$, entonces notemos que $\bar\beta$ puede escribirse como $\vec{e}_j + \beta$ donde $|\beta| = m$. Así resulta que

$$\begin{aligned}
D^{\bar\beta}\psi_h &= \tfrac{\partial}{\partial \xi_j} D^\beta \psi_h \\
&= \tfrac{\partial}{\partial \xi_j}\left[\left(\sum_{k=2}^{|\beta|} h^k f_{ks-|\beta|}\right) e^{-|\xi|^s h} - he^{-|\xi|^s h} f_{s-|\beta|}\right] \\
&= \left(\sum_{k=2}^{|\beta|} h^k \tfrac{\partial}{\partial \xi_j} f_{ks-|\beta|}\right) e^{-|\xi|^s h} + \left(\sum_{k=2}^{|\beta|} h^k f_{ks-|\beta|}\right) e^{-|\xi|^s h}(-h)\tfrac{\partial}{\partial \xi_j}|\xi|^s \\
&\quad - he^{-|\xi|^s h}(-h)\tfrac{\partial}{\partial \xi_j}|\xi|^s D^\beta |x|^s - he^{-|\xi|^s h}\tfrac{\partial}{\partial \xi_j} D^\beta |x|^s \\
&= \left(\sum_{k=2}^{|\beta|} h^k f_{ks-|\beta|-1}\right) e^{-|\xi|^s h} + \left(\sum_{k=2}^{|\beta|} h^{k+1} f_{ks-|\beta|+s-1}\right) e^{-|\xi|^s h}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ h^2 f_{s-|\beta|+s-1} e^{-|\xi|^s h} - h e^{-|\xi|^s h} D^{\bar\beta}|x|^s \\
= &\left(\sum_{k=2}^{|\beta|} h^k f_{ks-|\bar\beta|}\right) e^{-|\xi|^s h} + \left(\sum_{k=3}^{|\bar\beta|} h^k f_{ks-|\bar\beta|}\right) e^{-|\xi|^s h} \\
&+ h^2 f_{2s-|\bar\beta|} e^{-|\xi|^s h} - h e^{-|\xi|^s h} D^{\bar\beta}|x|^s \\
= &\left(\sum_{k=2}^{|\bar\beta|} h^k f_{ks-|\bar\beta|}\right) e^{-|\xi|^s h} - h e^{-|\xi|^s h} D^{\bar\beta}|x|^s.
\end{aligned}
$$

□

Demostración del Teorema 2.2.1. En primer lugar veamos que para cada $t \in \mathbb{R}^+$ fijo, $u(x,t) \in \mathcal{S}_\infty$. Notemos que por la Proposición 2.2.5 tenemos que $D^\beta e^{-|\xi|^s t}$ no es más que ella misma multiplicada por una suma de funciones homogéneas. Como $|e^{-|\xi|^s t}| \leq 1$ entonces es fácil ver que $e^{-|\xi|^s t}$ también satisface las hipótesis de la Proposición 2.2.3. Luego, como $\widehat{u}_0 \in \mathcal{S}_0$ resulta que $e^{-|\xi|^s t}\widehat{u}_0 \in \mathcal{S}_0$, y por lo tanto $u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-|\xi|^s t}\widehat{u}_0)(x) \in \mathcal{S}_\infty$.

En segundo lugar veamos que para cada $t \in \mathbb{R}^+$ fijo, $(-\Delta)^{s/2}u(x,t) \in \mathcal{S}_\infty$. Esto es equivalente a probar que $\mathcal{F}((-\Delta)^{s/2}u(x,t)) \in \mathcal{S}_0$. Por definición sabemos que $\mathcal{F}((-\Delta)^{s/2}u(x,t)) = |\xi|^s u(\xi,t)$, por lo tanto será suficiente ver que $|\xi|^s u(\xi,t) \in \mathcal{S}_0$. Dado que $|\xi|^s$ es una función homogénea de grado s, entonces por el Lema 2.2.4, $|\xi|^s$ satisface las hipótesis de la Proposición 2.2.3. Por otro lado, dado que ya hemos probado que $u(x,t) \in \mathcal{S}_\infty$, y en consecuencia $\widehat{u}(\xi,t) \in \mathcal{S}_0$, podemos aplicar la proposición antes mencionada y concluir que $|\xi|^s u(\xi,t) \in \mathcal{S}_0$, como queríamos ver.

Continuemos ahora con la prueba de la primer igualdad de (2.1.5), la cual es interpretada como una derivada Fréchet, es decir

$$
\frac{\widehat{u}(\xi,t+h) - \widehat{u}(\xi,t)}{h} - [-|\xi|^s \widehat{u}(\xi,t)] \xrightarrow{\mathcal{S}} 0,
$$

cuando h tiende a 0. De la definición de u tenemos que esto es equivalente a

$$
\frac{\widehat{u}(\xi,t)e^{-|\xi|^s h} - \widehat{u}(\xi,t)}{h} - [-|\xi|^s \widehat{u}(\xi,t)] \xrightarrow{\mathcal{S}} 0,
$$

o bien,

$$
\widehat{u}(\xi,t)\left[\frac{e^{-|\xi|^s h} - 1}{h} + |\xi|^s\right] \xrightarrow{\mathcal{S}} 0,
$$

cuando h tiende a 0. Llamemos $\psi_h(\xi)$ a la función entre corchetes. Recordemos que hemos probado que $\widehat{u} \in \mathcal{S}_0$, y dado que las funciones que intervienen dentro de ψ_h satisfacen las hipótesis de la Proposición 2.2.3, entonces podemos asegurar que para cada h fijo el producto pertenece a $\mathcal{S}_0$. Por lo tanto, $\widehat{u}\psi_h$ y todas sus derivadas son nulas en el origen. Así, sólo resta probar que para todo α y γ en $\mathbb{N}^n$,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} |\xi^\alpha D^\gamma(\widehat{u}(\xi,t)\psi_h(\xi))| \longrightarrow 0, \tag{2.2.4}$$

cuando h tiende a 0.

Por la fórmula de Leibniz $D^\gamma(\widehat{u}\psi_h)$ es igual a $\sum_{\beta\leq\gamma} c_{\gamma,\beta} D^{\gamma-\beta}\widehat{u}D^\beta\psi_h$. Analicemos con mayor profundidad $D^\beta\psi_h$. Aplicando la Proposición 2.2.5 tenemos que

$$\begin{aligned}
D^\beta\psi_h(\xi) &= D^\beta\left[\frac{e^{-|\xi|^s h}-1}{h} + |\xi|^s\right]\\
&= \frac{1}{h}D^\beta e^{-|\xi|^s h} + D^\beta|\xi|^s\\
&= \frac{1}{h}\left[\left(\sum_{k=2}^{|\beta|} h^k f_{ks-|\beta|}\right)e^{-|\xi|^s h} - he^{-|\xi|^s h}D^\beta|\xi|^s\right] + D^\beta|\xi|^s\\
&= \left(\sum_{k=2}^{|\beta|} h^{k-1} f_{ks-|\beta|}\right)e^{-|\xi|^s h} - e^{-|\xi|^s h}D^\beta|\xi|^s + D^\beta|\xi|^s\\
&= \left(\sum_{k=2}^{|\beta|} h^{k-1} f_{ks-|\beta|}\right)e^{-|\xi|^s h} + \left(1-e^{-|\xi|^s h}\right)D^\beta|\xi|^s.
\end{aligned}$$

Llamemos $\psi_h^{1,\beta}$ y $\psi_h^{2,\beta}$ a estos dos últimos términos, es decir

$$\psi_h^{1,\beta} = \left(\sum_{k=1}^{|\beta|-1} h^k f_{(k+1)s-|\beta|}\right)e^{-|\xi|^s h} \quad \text{y} \quad \psi_h^{2,\beta} = \left(1-e^{-|\xi|^s h}\right)f_{s-|\beta|-1}.$$

Luego, podemos decir que

$$\begin{aligned}
\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} |\xi^\alpha D^\gamma(\widehat{u}(\xi,t)\psi_h(\xi))| &\leq C\sum_{\beta\leq\gamma}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\left|\xi^\alpha D^{\gamma-\beta}\widehat{u}(\xi,t)\psi_h^{1,\beta}(\xi)\right|\\
&\quad + C\sum_{\beta\leq\gamma}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\left|\xi^\alpha D^{\gamma-\beta}\widehat{u}(\xi,t)\psi_h^{2,\beta}(\xi)\right|.
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Notemos que para probar (2.2.4) bastaría con ver que los dos términos del lado derecho de (2.2.5) convergen a 0 cuando h tiende a 0. Comencemos observando que para h tal que $|h| \leq 1$ se tiene que

$$\left|\xi^\alpha D^{\gamma-\beta}\widehat{u}(\xi,t)\psi_h^{1,\beta}(\xi)\right| \leq \left|\xi^\alpha D^{\gamma-\beta}\widehat{u}(\xi,t)\left[\left(\sum_{k=1}^{|\beta|-1} h^k f_{(k+1)s-|\beta|}\right) e^{-|\xi|^s h}\right]\right|$$
$$\leq |h| \sum_{k=1}^{|\beta|-1} \left|\xi^\alpha f_{(k+1)s-|\beta|} D^{\gamma-\beta}\widehat{u}(\xi,t)\right|.$$

Ya vimos que una derivada de cualquier orden de una función de $\mathcal{S}_0$ se mantiene en esa clase, por lo tanto $D^{\gamma-\beta}\widehat{u} \in \mathcal{S}_0$. Además, como $\xi^\alpha f_{(k+1)s-|\beta|}$ cumple con las hipótesis del Lema 2.2.3 entonces tenemos que

$$\xi^\alpha f_{(k+1)s-|\beta|} D^{\gamma-\beta}\widehat{u} \in \mathcal{S}_0.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{\beta\leq\gamma} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \left|\xi^\alpha D^{\gamma-\beta}\widehat{u}(\xi,t)\psi_h^{1,\beta}(\xi)\right|$$
$$\leq |h| \sum_{\beta\leq\gamma}\sum_{k=1}^{|\beta|-1} \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \left|\xi^\alpha f_{(k+1)s-|\beta|} D^{\gamma-\beta}\widehat{u}(\xi,t)\right|$$
$$\leq |h| \sum_{\beta\leq\gamma}\sum_{k=1}^{|\beta|-1} C(\alpha,\gamma,\beta,k)$$
$$\leq C(\alpha,\gamma)|h|.$$

Esto prueba que el primer término del lado derecho de (2.2.5) converge a 0 cuando h tiende a 0. Por último, de forma análoga vemos que

$$\left|\xi^\alpha D^{\gamma-\beta}\widehat{u}(\xi,t)\psi_h^{2,\beta}(\xi)\right| \leq \left|\xi^\alpha D^{\gamma-\beta}\widehat{u}(\xi,t)\left(1-e^{-|\xi|^s h}\right) f_{s-|\beta|-1}\right|$$
$$\leq \left|1-e^{-|\xi|^s h}\right| \left|\xi^\alpha f_{s-|\beta|-1} D^{\gamma-\beta}\widehat{u}(\xi,t)\right|.$$

Igual que antes tenemos que $\xi^\alpha f_{s-|\beta|-1} D^{\gamma-\beta}\widehat{u}(\xi,t) \in \mathcal{S}_0$. Tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sabemos que existe $R > 0$ tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n\setminus B(0,R)$,

$$\left|\xi^\alpha f_{s-|\beta|-1} D^{\gamma-\beta}\widehat{u}(\xi,t)\right| \leq \varepsilon,$$

para todo $\beta \leq \gamma$. Luego,

$$\sup_{\xi\in B(0,R)^c} \left|\xi^\alpha D^{\gamma-\beta}\widehat{u}(\xi,t)\psi_h^{2,\beta}(\xi)\right| \leq \sup_{\xi\in B(0,R)^c} \left|1-e^{-|\xi|^s h}\right| \left|\xi^\alpha f_{s-|\beta|-1} D^{\gamma-\beta}\widehat{u}(\xi,t)\right|$$
$$= \sup_{\xi\in B(0,R)^c} \left|\xi^\alpha f_{s-|\beta|-1} D^{\gamma-\beta}\widehat{u}(\xi,t)\right|$$

$$\leq \varepsilon.$$

Por otro lado, existe δ tal que $\left|1 - e^{-R^s h}\right| \leq \varepsilon$, para todo h tal que $|h| < \delta$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\sup_{\xi \in B(0,R)} \left|\xi^\alpha D^{\gamma-\beta} \widehat{u}(\xi,t) \psi_h^{2,\beta}(\xi)\right| &\leq \sup_{\xi \in B(0,R)} \left|1 - e^{-|\xi|^s h}\right| \left|\xi^\alpha f_{s-|\beta|-1} D^{\gamma-\beta} \widehat{u}(\xi,t)\right| \\
&\leq \sup_{\xi \in B(0,R)} \left|1 - e^{-|\xi|^s h}\right| C(\alpha,\gamma,\beta) \\
&= \left|1 - e^{-R^s h}\right| C(\alpha,\gamma,\beta) \\
&\leq \varepsilon C(\alpha,\gamma,\beta),
\end{aligned}$$

para todo h tal que $|h| < \delta$. De este modo, para todo h tal que $|h| < \delta$ resulta que

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta \leq \gamma} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left|\xi^\alpha D^{\gamma-\beta} \widehat{u}(\xi,t) \psi_h^{2,\beta}(\xi)\right| &\leq \sum_{\beta \leq \gamma} \sup_{\xi \in B(0,R)} \left|\xi^\alpha D^{\gamma-\beta} \widehat{u}(\xi,t) \psi_h^{2,\beta}(\xi)\right| \\
&\quad + \sum_{\beta \leq \gamma} \sup_{\xi \in B(0,R)^c} \left|\xi^\alpha D^{\gamma-\beta} \widehat{u}(\xi,t) \psi_h^{2,\beta}(\xi)\right| \\
&\leq \sum_{\beta \leq \gamma} \varepsilon + \sum_{\beta \leq \gamma} \varepsilon C(\alpha,\gamma,\beta) \\
&\leq \varepsilon C(\alpha,\gamma).
\end{aligned}$$

Dada la arbitrariedad de ε, hemos probado que el segundo término del lado derecho de (2.2.5) converge a 0 cuando h tiende a 0. Por consiguiente, queda demostrado (2.2.4) y con ella la primera igualdad de (2.1.5).

Para concluir la demostración del teorema sólo resta probar la convergencia al dato inicial en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Al igual que antes, es sencillo corroborar que esto es equivalente a ver que

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left|\xi^\alpha D^\gamma \left(\widehat{u}_0(\xi) \left[1 - e^{-|\xi|^s t}\right]\right)\right| \longrightarrow 0, \tag{2.2.6}$$

cuando t tiende a 0. Omitiremos aquí la prueba de (2.2.6), ya que el procedimiento sigue las mismas técnicas utilizadas en la demostración de (2.2.4). □

2.3. Solución en el espacio dual $(\mathcal{S}_\infty)'$

En la sección anterior logramos probar existencia para el problema (2.1.5). Sin embargo, la condición inicial debía pertenecer a un espacio muy restrictivo como lo es $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$. Con la intención de agrandar esta clase podemos dualizar el problema y así pensar en una condición inicial $u_0 \in (\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n))'$ (ver Preliminares, Sección 1.4). Esta es la clase más amplia que desarrollaremos en la que podemos tomar la condición inicial. No obstante, el sentido en el que se satisfarán las igualdades y la convergencia al dato inicial serán el más débil.

Teorema 2.3.1. *Sea $0 < s < 2$ y $u_0 \in (\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n))'$. Luego, la función definida en R^+ a valores distribución por*

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}\right),$$

pertenece a $(\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n))'$ para cada $t > 0$; y además resuelve el problema

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial}{\partial t}\langle \widehat{u}(t), \varphi\rangle & = \langle -|\xi|^s \widehat{u}(t), \varphi\rangle, & \textit{para toda } \varphi \in \mathcal{S}_0 \textit{ y todo } t \in (0,\infty), \\ \langle \widehat{u}(t), \varphi\rangle & \to \langle \widehat{u_0}, \varphi\rangle, & \textit{cuando } t \to 0, \ \textit{para toda } \varphi \in \mathcal{S}_0. \end{array}\right. \tag{2.3.1}$$

Demostración. Para probar la primera igualdad debemos ver que para toda $\varphi \in \mathcal{S}_0$ y todo t positivo vale que

$$\left| \frac{\langle \widehat{u}(t+h), \varphi\rangle - \langle \widehat{u}(t), \varphi\rangle}{h} - \langle -|\xi|^s \widehat{u}(t), \varphi\rangle \right| \longrightarrow 0, \qquad \text{cuando } h \to 0. \tag{2.3.2}$$

Para esto notemos que

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\langle \widehat{u}(t+h), \varphi\rangle - \langle \widehat{u}(t), \varphi\rangle}{h} - \langle -|\xi|^s \widehat{u}(t), \varphi\rangle \right| \\
&\qquad = \left| \frac{\langle e^{-|\xi|^s (t+h)}\widehat{u_0}, \varphi\rangle - \langle e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}, \varphi\rangle}{h} - \langle -|\xi|^s e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}, \varphi\rangle \right| \\
&\qquad = \left| \frac{\langle \widehat{u_0}, e^{-|\xi|^s (t+h)}\varphi\rangle - \langle \widehat{u_0}, e^{-|\xi|^s t}\varphi\rangle}{h} - \langle \widehat{u_0}, -|\xi|^s e^{-|\xi|^s t}\varphi\rangle \right| \\
&\qquad = \left| \left\langle \widehat{u_0}, \left[\frac{e^{-|\xi|^s (t+h)} - e^{-|\xi|^s t}}{h} + |\xi|^s e^{-|\xi|^s t}\right]\varphi \right\rangle \right| \\
&\qquad = \left| \left\langle \widehat{u_0}, \left[\frac{e^{-|\xi|^s h} - 1}{h} + |\xi|^s\right] e^{-|\xi|^s t}\varphi \right\rangle \right|.
\end{aligned}$$

Recordemos que en la prueba del Teorema 2.2.1 probamos que para cualquier $\varphi \in \mathcal{S}_0$ y h positivo se tiene que

$$\left[\frac{e^{-|\xi|^s h} - 1}{h} + |\xi|^s\right] e^{-|\xi|^s t}\varphi \in \mathcal{S}_0.$$

Más aún, vimos que tiende a la función nula en S, cuando $h \to 0$. Por lo tanto, dado que $\widehat{u_0} \in (\mathcal{S}_0)'$ es inmediata la validez de (2.3.2).

Resta probar la convergencia al dato inicial. Esto también será una consecuencia inmediata de la convergencia probada en el Teorema 2.2.1. Ahí vimos que para cualquier $\varphi \in \mathcal{S}_0$ resulta que $e^{-|\xi|^s t}\varphi \in \mathcal{S}_0$ y además converge en S a φ cuando t tiende a 0. Por lo tanto,

$$\langle \widehat{u}(t), \varphi \rangle = \langle e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}, \varphi \rangle = \langle \widehat{u_0}, e^{-|\xi|^s t}\varphi \rangle \longrightarrow \langle \widehat{u_0}, \varphi \rangle,$$

cuando t tiende a 0. □

2.4. Solución en espacios de Besov

Como vimos en la Sección 1.12 de los Preliminares, dados $r \in \mathbb{R}$ y $1 \leq p < \infty$, podemos definir los espacios de Besov como

$$B_r^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|\phi * f\|_{L^p} + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (2^{\nu r} \|\phi_\nu * f\|_{L^p}^p)^p \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

donde ϕ y ϕ_ν son funciones test. Más aún,

$$\|f\|_{B_r^p} \approx \|\phi * f\|_{L^p} + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (2^{\nu r} \|\phi_\nu * f\|_{L^p}^p)^p \right)^{1/p}.$$

En esta sección nos situaremos en el caso $p = 2$ y bajo este contexto demostraremos la siguiente versión del problema (2.1.4).

Teorema 2.4.1. *Sean $0 < s < 2$ y $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Luego, la función u definida en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ por*

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}(\xi)\right)(x),$$

pertenece a $B_s^2(\mathbb{R}^n)$ como función de $x \in \mathbb{R}^n$ para cada $t > 0$; y además resuelve el problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -(-\Delta)^{s/2} u(x,t), \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad \text{en } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde las igualdades se satisfacen en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Antes de demostrar este teorema probaremos algunos lemas preliminares.

Lema 2.4.2. *Sean $0 < s < 2$, $r > 0$ y $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces la función $u : [0,\infty) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ dada por*

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|\xi|^s t}\widehat{u_0}(\xi)\right)(x),$$

pertenece a $B_r^2(\mathbb{R}^n)$ *como función de* $x \in \mathbb{R}^n$ *para cada* t *fijo. Más aún,*

$$\|u(\cdot,t)\|_{B_2^r} \leq C(t,r)\|u_0\|_{L^2},$$

donde C *es una constante que tiende a infinito cuando* $t \to 0$ *o cuando* $r \to \infty$.

Demostración. Dado $r > 0$ es fácil comprobar que la función $x^r e^{-x^s t}$ alcanza su máximo en $x = \left(\frac{r}{st}\right)^{r/s}$ y es igual a $\left(\frac{r}{ste}\right)^{r/s}$. Luego, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|\phi_\nu * u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 &= \left\| e^{-|\xi|^s t}\widehat{\phi_\nu}\widehat{u_0}\right\|_{L^2}^2 \\
&= \left\| |\xi|^r e^{-|\xi|^s t}|\xi|^{-r}\widehat{\phi_\nu}\widehat{u_0}\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq \left\| |\xi|^r e^{-|\xi|^s t}\right\|_{\infty}^2 \left\| |\xi|^{-r}\widehat{\phi_\nu}\widehat{u_0}\right\|_{L^2}^2 \\
&\leq \left(\frac{r}{ste}\right)^{2r/s} \left\| |\xi|^{-r}\widehat{\phi_\nu}\widehat{u_0}\right\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}$$

Puesto que $\widehat{\phi_\nu}$ tiene soporte en R_ν entonces $|\xi|^{-r} \leq 2^{-r(\nu-1)}$. Por lo tanto,

$$\|\phi_\nu * u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 \leq \left(\frac{2^s r}{ste}\right)^{2r/s} 2^{-2r\nu} \left\|\widehat{\phi_\nu}\widehat{u_0}\right\|_{L^2}^2 .$$

Nuevamente, escribiendo $\widehat{\phi_\nu}\widehat{u_0}$ como $\mathcal{F}(\phi_\nu * u_0)$ y aplicando el teorema de Plancherel llegamos a que

$$\|\phi_\nu * u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 \leq \left(\frac{2^s r}{ste}\right)^{2r/s} 2^{-2r\nu} \|\phi_\nu * u_0\|_{L^2}^2 .$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t)\|_{B_2^r} &\lesssim \|\phi * u(\cdot,t)\|_{L^2} + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{2\nu r}\|\phi_\nu * u(\cdot,t)\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \\
&\leq \|\phi * u_0\|_{L^2} + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{2\nu r}\left(\frac{2^s r}{ste}\right)^{2r/s} 2^{-2r\nu}\left\|\widehat{\phi_\nu}\widehat{u_0}\right\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left[1 + \left(\frac{2^s r}{ste}\right)^{r/s}\right]\left[\|\phi * u_0\|_{L^2} + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\|\widehat{\phi_\nu}\widehat{u_0}\right\|_{L^2}^2\right)^{1/2}\right] \\
&\lesssim \left[1 + \left(\frac{2^s r}{ste}\right)^{r/s}\right]\|u_0\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.4.3. *Sean* $0 < s < 2$ *y* $r > s$*, entonces* $(-\Delta)^{s/2}$ *es un operador lineal y continuo de* $B^2_r(\mathbb{R}^n)$ *en* $B^2_{r-s}(\mathbb{R}^n)$*. En particular, cuando* $r = s$ *se tiene que*

$$(-\Delta)^{s/2} : B^2_s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Sea $f \in B^2_r(\mathbb{R}^n)$, luego

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B^2_r} &\gtrsim \|\phi * f\|_{L^2} + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{2\nu r}\|\phi_\nu * f\|_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\widehat{\phi}\widehat{f}\|_{L^2} + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{2\nu(r-s)}2^{2\nu s}\|\widehat{\phi_\nu}\widehat{f}\|_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Usando el soporte de cada $\widehat{\phi_\nu}$ y $\widehat{\phi}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B^2_r} &\gtrsim \|\widehat{\phi}|\xi|^s\widehat{f}\|_{L^2} + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{2\nu(r-s)}\|\widehat{\phi_\nu}|\xi|^s\widehat{f}\|_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\phi * (-\Delta)^{s/2}f\|_{L^2} + \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{2\nu(r-s)}\|\phi_\nu * (-\Delta)^{s/2}f\|_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\gtrsim \|(-\Delta)^{s/2}f\|_{B^2_{r-s}}.
\end{aligned}$$

Así queda probado la primera parte del lema. El caso $r = s$ se prueba siguiendo las mismas líneas. □

Ahora sí estamos en condiciones de probar el Teorema 2.4.1.

Demostración del Teorema 2.4.1. Por el Lema 2.4.2 tenemos que para cada $t > 0$ la función $u(\cdot, t) \in B^2_s(\mathbb{R}^n)$, luego por el Lema 2.4.3 $(-\Delta)^{s/2}u(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para cada $t > 0$.

Para demostrar la primera igualdad del problema (2.1.4), comencemos denotando

$$G_h(x,t) := \frac{u(x,t+h) - u(x,t)}{h} + (-\Delta)^{s/2}u(x,t).$$

Queremos probar que $\|G_h(\cdot,t)\|_{L^2} \to 0$ cuando $h \to 0$. En primer lugar recordemos que en la prueba del Teorema 2.2.1 vimos que

$$\widehat{G_h}(\xi,t) = \frac{\widehat{u}(\xi,t+h) - \widehat{u}(\xi,t)}{h} + |\xi|^s\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u_0}e^{-|\xi|^s t}\left[\frac{e^{-|\xi|h} - 1 + |\xi|^s h}{h}\right].$$

Tomando el desarrollo de Taylor de $e^{-|\xi|^s t}$ en función de t alrededor del origen, podemos asegurar que existe $0 \le \theta(h) \le h$ tal que

$$e^{-|\xi|h} = 1 - |\xi|^s h + |\xi|^{2s}e^{-|\xi|^s\theta}h^2.$$

Así, resulta que

$$\frac{e^{-|\xi|h} - 1 + |\xi|^s h}{h} = |\xi|^{2s} e^{-|\xi|^s \theta} h,$$

y por lo tanto,

$$\widehat{G_h}(\xi, t) = \widehat{u_0} e^{-|\xi|^s t} |\xi|^{2s} e^{-|\xi|^s \theta} h.$$

Notemos que $\left\| e^{-|\xi|^s \theta} h \right\|_{L^\infty} = h$ y $e^{-|\xi|^s t} |\xi|^{2s} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Luego, se tiene que

$$\|G_h(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \left\| e^{-|\xi|^s \theta} h \right\|_\infty \left\| e^{-|\xi|^s t} |\xi|^{2s} \right\|_{L^2} \|u_0\|_{L^2} \leq h c_{t,s} \|u_0\|_{L^2},$$

donde $c_{t,s} = \left\| e^{-|\xi|^s t} |\xi|^{2s} \right\|_{L^2}$. En consecuencia hemos probado que $\|G_h(\cdot, t)\|_{L^2} \to 0$, cuando $h \to 0$. De este modo, queda demostrado que u satisface la primera igualdad de (2.1.4) en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Resta probar la convergencia al dato inicial. Para esto tomemos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Dado que $u_0 \in L^2$, denotando con B_ν a $B(0, \nu)$, podemos elegir un $\nu_0 \geq 0$ lo suficientemente grande tal que

$$\left\| \widehat{u_0} \chi_{B^c_{\nu_0}} \right\|_{L^2} < \varepsilon. \tag{2.4.1}$$

Si elegimos $t_0 = -\nu_0^{-s} \log(1 - \varepsilon)$, podemos comprobar que para todo $\xi \in B_{\nu_0}$ se tiene que $0 \leq 1 - e^{-|\xi|^s t} < \varepsilon$, para todo $t < t_0$. Es decir que

$$\max_{\xi \in B_{\nu_0}} |e^{-|\xi|^s t} - 1| < \varepsilon, \qquad \text{para todo } t \in [0, t_0). \tag{2.4.2}$$

Luego, dado un $t < t_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2} &= \|e^{-|\xi|^s t} \widehat{u}_0 - \widehat{u}_0\|_{L^2} \\ &\leq \|(e^{-|\xi|^s t} - 1)\chi_{B_{\nu_0}} \widehat{u}_0\|_{L^2} + \|(e^{-|\xi|^s t} - 1)\chi_{B^c_{\nu_0}} \widehat{u}_0\|_{L^2} \end{aligned}$$

Aplicando (2.4.1) y (2.4.2), llegamos a que

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2} &\leq \varepsilon \|u_0\|_{L^2} + \|u_0 \chi_{B^c_{\nu_0}}\|_{L^2} \\ &\leq \varepsilon \|u_0\|_{L^2} + \varepsilon \end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, esto prueba que

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2} \longrightarrow 0, \qquad \text{cuando } t \to 0^+.$$

$\square$

Notemos que el Lema 2.4.2 prueba que la solución dada por el Teorema 2.4.1 tiene tanta regularidad Besov como se quiera. Repasando la prueba de dicho teorema puede verse que la derivada Fréchet del problema (2.1.4) se satisface no sólo en L^2 sino también en cualquier espacio de Besov $B^2_r(\mathbb{R}^n)$, con $r > 0$. Más aún, si el dato inicial u_0 perteneciese a un espacio de Besov $B^2_l(\mathbb{R}^n)$, para algún $l > 0$, entonces puede probarse que la convergencia al dato inicial se satisface en ese mismo espacio.

Capítulo 3

El laplaciano fraccionario en espacios de tipo homogéneo

En este capítulo extenderemos a espacios métricos de medida la generalización fraccionaria de la ecuación del calor presentada en el capítulo anterior. Para esto, en primer lugar, encontraremos una formulación del operador laplaciano fraccionario en $\mathbb{R}^n$ como un operador de convolución con una distribución radial y homogénea. Mostraremos la equivalencia de dicha definición a la dada en el Capítulo 2 vía la transformada de Fourier. De esta forma, conseguiremos una versión distribucional del problema (2.1.4) que será la apropiada para extender el mismo a estos contextos. Introduciremos una teoría de distribuciones de Schwartz en espacios de tipo homogéneo apta para el cálculo de orden fraccionario. Con esta teoría podemos definir derivadas fraccionarias débiles de distribuciones y espacios de Sobolev adecuados.

3.1. El Laplaciano fraccionario como operador de convolución

En trabajos recientes —como [**14**] y [**52**], entre otros— podemos encontrar una definición alternativa del operador laplaciano fraccionario a la presentada en el capítulo anterior dada por

$$(-\Delta)^{s/2} f(x) := C_{n,s} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{n+s}}\, dy,$$

donde $C_{n,s}$ es una constante de normalización y $0 < s < 2$. Esta definición nos permitirá en la siguiente sección extender el problema (2.1.4) a espacios métricos de medida. En primer lugar veamos que esta nueva formulación es consistente con aquella presentada en el capítulo anterior vía la transformada de Fourier.

Proposición 3.1.1. *Para $0 < s < 2$ sea T_s el funcional dado por*

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(y) - \varphi(0)}{|y|^{n+s}}\, dy. \tag{3.1.1}$$

Luego,

(A) *T_s está bien definido para toda $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ y genera una distribución de $S'(\mathbb{R}^n)$.*

(B) *$\widehat{T_s} = -c_{n,s}|\xi|^s$, donde $c_{n,s}$ es una constante positiva que sólo depende de n y s.*

(C) *para toda $\varphi \in S_\infty(\mathbb{R}^n)$ tenemos que*

$$-(-\Delta)^{s/2}\phi(x) = C_{n,s}(T_s * \phi)(x) = C_{n,s} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{|x-y|^{n+s}}\, dy,$$

donde $C_{n,s} = 1/c_{n,s}$.

Demostración de (A). Dada $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, veamos que $\langle T_s, \varphi\rangle$ está bien definido. Para $\varepsilon > 0$, llamemos

$$I_\varepsilon(\varphi) = \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(y)-\varphi(0)}{|y|^{n+s}} dy.$$

Veamos que $I_\varepsilon(\varphi)$ es finito para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $\varphi \in S$. Dado que $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ entonces $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, luego $|\varphi(y) - \varphi(0)| \leq 2\|\varphi\|_\infty$. Así,

$$\begin{aligned}|I_\varepsilon(\varphi)| &\leq \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{|\varphi(y)-\varphi(0)|}{|y|^{n+s}} dy\\ &\leq 2\|\varphi\|_\infty \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{dy}{|y^{n+s}|}\\ &= C_n \frac{1}{\varepsilon^n}\|\varphi\|_\infty. \qquad (3.1.2)\end{aligned}$$

Esto prueba que $I_\varepsilon(\varphi)$ es finito para todo $\varepsilon > 0$ y para toda $\varphi \in S$. Resta ver $\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon(\varphi)$ existe. Pero esto es equivalente a tomar $0 < \varepsilon < \eta$ y comprobar que $|I_\varepsilon(\varphi) - I_\eta(\varphi)| \to 0$, cuando $\varepsilon, \eta \to 0^+$. Observemos que

$$|I_\varepsilon(\varphi) - I_\eta(\varphi)| = \left|\int_{\eta>|y|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(y)-\varphi(0)}{|y|^{n+s}} dy\right|$$

Por el teorema de Taylor resulta que

$$|I_\varepsilon(\varphi) - I_\eta(\varphi)| = \left|\int_{\eta>|y|\geq\varepsilon} \frac{\nabla\varphi(0)\cdot y + O(|y|^2)}{|y|^{n+s}} dy\right|.$$

Observando que el término $\nabla\varphi(0)\cdot y$ tiene integral nula sobre la corona $\eta > |y| \geq \varepsilon$ obtenemos que

$$|I_\varepsilon(\varphi) - I_\eta(\varphi)| = \left|\int_{\eta>|y|\geq\varepsilon} \frac{O(|y|^2)}{|y|^{n+s}} dy\right|.$$

Recordemos que el teorema de Taylor nos permite asegurar que

$$\left|\frac{O(|y|^2)}{|y|^2}\right| \leq C \sup_{i,j} \left\|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_\infty .$$

Luego,

$$\begin{aligned} |I_\varepsilon(\varphi) - I_\eta(\varphi)| &= \left|\int_{\eta>|y|\geq\varepsilon} \frac{O(|y|^2)}{|y|^2} \frac{1}{|y|^{n-2+s}} dy\right| \\ &\leq C \sup_{i,j} \left\|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_\infty \int_{\varepsilon>|y|\geq\eta} C \frac{1}{|y|^{n-2+s}} dy, \qquad (3.1.3) \end{aligned}$$

que tiende a 0, cuando $\varepsilon, \eta \to 0^+$. Por lo tanto, queda probada la buena definición de T_s

Para concluir la prueba de (A) debemos ver que T_s es una distribución de $S'(\mathbb{R}^n)$. Es inmediato de su definición que el operador resulta lineal. Ahora, supongamos que $\varepsilon < 1$. Como $|I_\varepsilon(\varphi)| \leq |I_\varepsilon(\varphi) - I_1(\varphi)| + |I_1(\varphi)|$, entonces por (3.1.2) y (3.1.3) vemos que

$$\begin{aligned} |I_\varepsilon(\varphi)| &\leq C \sup_{i,j} \left\|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_\infty \int_{1>|y|\geq\varepsilon} C \frac{1}{|y|^{n-2+s}} dy + C\|\varphi\|_\infty \\ &\leq \tilde{C} \sup_{i,j} \left\|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_\infty + C\|\varphi\|_\infty \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$|\langle T_s, \varphi\rangle| = \left|\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon(\varphi)\right| \leq \tilde{C} \sup_{i,j} \left\|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_\infty + C\|\varphi\|_\infty .$$

De este modo, si $\varphi_n \to 0$ en $S(\mathbb{R}^n)$, es inmediato que $|\langle T_s, \varphi_n\rangle| \to 0$, por lo tanto T_s es continuo.

Demostración de (B). Sea $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{T_s}, \varphi \right\rangle = \langle T_s, \widehat{\varphi}\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{\widehat{\varphi}(y) - \widehat{\varphi}(0)}{|y|^{n+s}} dy \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|y|\geq\varepsilon} |y|^{-n-s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-2\pi i y\cdot\xi} - 1\right) \varphi(\xi) d\xi\right) dy. \end{aligned}$$

Cambiando el orden de integración obtenemos que

$$\begin{aligned} &\int_{|y|\geq\varepsilon} |y|^{-n-s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-2\pi i y\cdot\xi} - 1\right) \varphi(\xi) d\xi\right) dy \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \left(\int_{|y|\geq\varepsilon} \left(e^{-2\pi i y\cdot\xi} - 1\right) |y|^{-n-s} dy\right) d\xi \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{S^{n-1}} \left(e^{-2\pi i\rho|\xi| y'\cdot\xi'} - 1 \right) \rho^{-n-s} \rho^{n-1} d\sigma(y') d\rho \right) d\xi,$$

donde en la última igualdad hemos hecho un cambio a coordenadas polares con $|y| = \rho$. Si aplicamos un nuevo cambio de variables dado por $z = \rho|\xi|$ resulta que

$$\begin{aligned}
\int_{|y|\geq\varepsilon} |y|^{-n-s} & \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-2\pi i y\cdot\xi} - 1 \right) \varphi(\xi) d\xi \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \left(\int_{\varepsilon|\xi|}^{\infty} \int_{S^{n-1}} \left(e^{-2\pi i z y'\cdot\xi'} - 1 \right) \left(\frac{z}{|\xi|} \right)^{-s-1} d\sigma(y') \frac{dz}{|\xi|} \right) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s \varphi(\xi) \left(\int_{\varepsilon|\xi|}^{\infty} \int_{S^{n-1}} \left(e^{-2\pi i z y'\cdot\xi'} - 1 \right) z^{-s-1} d\sigma(y') dz \right) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s \varphi(\xi) I(\varepsilon, \xi) d\xi, \qquad (3.1.4)
\end{aligned}$$

donde definimos

$$I(\varepsilon, \xi) := \int_{\varepsilon|\xi|}^{\infty} \int_{S^{n-1}} \left(e^{-2\pi i z y'\cdot\xi'} - 1 \right) z^{-s-1} d\sigma(y') dz.$$

Si pudiésemos probar que $|I(\varepsilon, \xi)| \leq C$ independiente de ε y ξ, entonces $|\xi|^s|\varphi(\xi)I(\varepsilon, \xi)|$ resultaría menor que $C|\xi|^s|\varphi(\xi)|$ que claramente pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Si además, probásemos que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} I(\varepsilon, \xi) = I(0, \xi) = -c_{n,s}$, luego, por el teorema de la convergencia dominada, tendríamos que para toda $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{T_s}, \varphi \right\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s \varphi(\xi) I(\varepsilon, \xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s \varphi(\xi) \lim_{\varepsilon\to 0^+} I(\varepsilon, \xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} -c_{n,s} |\xi|^s \varphi(\xi) d\xi \\
&= \langle -c_{n,s}|\xi|^s, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

Lo cual concluiría la prueba de la parte (B).

Empecemos demostrando que $|I(\varepsilon, \xi)| \leq C$. Dados ε, ξ fijos, supongamos que $\varepsilon|\xi| \geq 1$. Luego,

$$\begin{aligned}
|I(\varepsilon, \xi)| &= \left| \int_{\varepsilon|\xi|}^{\infty} \int_{S^{n-1}} \left(e^{-2\pi i z y'\cdot\xi'} - 1 \right) z^{-s-1} d\sigma(y') dz \right| \\
&\leq \int_{1}^{\infty} \int_{S^{n-1}} \left| e^{-2\pi i z y'\cdot\xi'} - 1 \right| z^{-s-1} d\sigma(y') dz.
\end{aligned}$$

Notemos que $|e^{-2\pi i z y'\cdot\xi'} - 1| \leq 2$, en consecuencia

$$
\begin{aligned}
|I(\varepsilon,\xi)| &\leq \int_1^\infty \int_{S^{n-1}} 2\, d\sigma(y') z^{-s-1} dz \\
&\leq 2\, \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_1^\infty z^{-s-1} dz \\
&= \frac{4\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{s} \qquad (3.1.5)
\end{aligned}
$$

Supongamos que $\varepsilon|\xi| < 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
I(\varepsilon,\xi) = &\int_{\varepsilon|\xi|}^1 \int_{S^{n-1}} \left(e^{-2\pi i z y'\cdot\xi'} - 1\right) z^{-s-1} d\sigma(y') dz \\
&+ \int_1^\infty \int_{S^{n-1}} \left(e^{-2\pi i z y'\cdot\xi'} - 1\right) z^{-s-1} d\sigma(y') dz \\
= &\, I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Al igual que la estimación hecha en (3.1.5) tenemos que

$$
|I_2| \leq \frac{4\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{s}.
$$

Por otro lado, por el teorema de Taylor resulta que

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\varepsilon|\xi|}^1 \int_{S^{n-1}} \left(-2\pi i z y'\cdot\xi' + O(z^2)\right) d\sigma(y') z^{-1-s} dz \\
&= -2\pi i \int_{\varepsilon|\xi|}^1 \left(\int_{S^{n-1}} y'\cdot\xi' d\sigma(y')\right) z^{-s} dz + \int_{\varepsilon|\xi|}^1 \int_{S^{n-1}} O(z^2)\, d\sigma(y') z^{-1-s} dz.
\end{aligned}
$$

Notemos que, para un ξ' fijo, la función $y'\cdot\xi'$ es una función impar sobre la cáscara S^{n-1}, por lo tanto su integral es nula. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\leq \int_{\varepsilon|\xi|}^1 \int_{S^{n-1}} \left|O(z^2)\right| d\sigma(y') z^{-1-s} dz \\
&\leq 2\pi^2 \int_{\varepsilon|\xi|}^1 \int_{S^{n-1}} d\sigma(y') z^{1-s} dz \\
&\leq 2\pi^2 \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^1 z^{1-s} dz \\
&\leq \frac{4\pi^{n/2+2}}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{2-s}.
\end{aligned}
$$

De este modo hemos probado que en el caso en que $\varepsilon|\xi| < 1$ también $I(\varepsilon,\xi)$ está acotado por constantes independientes de ε y ξ. Por consiguiente, sólo resta ver que $I(0,\xi) = -c_{n,s}$. Para ξ fijo, es claro que

$$I(0,\xi) = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \{[\cos(2\pi i z y' \cdot \xi') - 1] + i \sin(2\pi i z y' \cdot \xi')\}\, d\sigma(y') z^{-s-1} dz.$$

Notemos que la integral sobre S^{n-1} es independiente de la dirección ξ' fija. Por lo tanto, podemos escoger ξ' como $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$. Luego, llamando y_1 a la primer coordenada de y' resulta que

$$I(0,\xi) = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \{[\cos(2\pi i z y_1) - 1] + i \sin(2\pi i z y_1)\}\, d\sigma(y') z^{-s-1} dz.$$

Esto demuestra que $I(0,\xi)$ es una constante respecto a la variable ξ. Por otro lado, observemos que la función $\sin(2\pi i z y_1)$ es impar sobre S^{n-1}, por lo tanto su integral resulta nula. De aquí que

$$I(0,\xi) = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} [\cos(2\pi i z y_1) - 1]\, d\sigma(y') z^{-s-1} dz.$$

Como $\cos(2\pi i z y_1) - 1 < 0$ salvo un conjunto de medida nula y $z^{-s-1} > 0$ para todo $z \in \mathbb{R}^+$, es inmediato que $I(0,\xi) < 0$.

Demostración de (C). Si convolucionamos T con una $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ tenemos, por definición, que

$$(T * \phi)(x) = \langle T, \tau_x \tilde{\varphi} \rangle,$$

donde τ_x es una el operador traslación y $\tilde{\varphi}$ es el operador conjugación. Así, se sigue que

$$(T * \phi)(x) = \langle T, \tau_x \tilde{\varphi} \rangle = \langle T, \tilde{\varphi}(\cdot - x) \rangle = \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle.$$

Luego, de la definición de T, resulta que

$$\langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x-y) - \varphi(x)}{|y|^{n+s}}\, dy.$$

Haciendo la sustitución $z = x - y$ llegamos a

$$(T * \phi)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x-z| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{|x-z|^{n+s}}\, dz.$$

Así queda probada la segunda igualdad de (C).

Para probar la primera, como $\mathcal{F}(T * \phi)(\xi) = \widehat{\phi}(\xi)\widehat{T}$, por lo probado en (B), sabemos que $\widehat{T} = -c_{n,s}|\xi|^s$. Por lo tanto, tenemos que

$$\mathcal{F}\left(T * \phi\right)(\xi) = -c_{n.s}|\xi|^s \widehat{\phi}(\xi) = -c_{n,s}\mathcal{F}((-\Delta)^{s/2}\phi)(\xi).$$

En consecuencia, ambos operadores coinciden en espacios para los cuales ambos operadores estén simultáneamente bien definidos, como $S_\infty(\mathbb{R}^n)$ y se satisface que

$$-(-\Delta)^{s/2}\phi(x) = C_{n,s}\,(T * \phi)\,(x),$$

como queríamos probar. □

3.2. Extensión del laplaciano fraccionario a espacios Ahlfors

Antes de comenzar la extensión del operador laplaciano fraccionario notemos que si $0 < s < 1$ y f es de la clase Lipschitz uno y acotada, entonces no es necesaria la forma de valor principal en la definición de $(-\Delta)^{s/2}$, en efecto la integral

$$(-\Delta)^{s/2} f(x) := C_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{n+s}}\, dy, \tag{3.2.1}$$

es absolutamente convergente. Esto se desprende inmediatamente del hecho que el integrando en (3.2.1) está acotado por $|x - y|^{n-(1-s)}$, el cual es en efecto integrable en el origen uniformemente para todo $x \in \mathbb{R}^n$. En el infinito, en cambio, como f es acotada el núcleo se hace cargo de la convergencia.

Una de las formas de regularidades en espacios métricos —ver Preliminares, Sección 1.12— vienen dadas por los espacios Lipschitz Λ_r, cuyo parámetro de regularidad siempre es menor o igual que 1. Así, la definición dada en (3.2.1) será la apropiada para nuestro objetivo. Por último, destaquemos el importante rol que el parámetro de dimensión n desempeña en la definición de $(-\Delta)^{s/2}$, siendo éste la bisagra entre la singularidad y la integrabilidad local del núcleo. Esta propiedad, en el caso de $\mathbb{R}^n$, está fundamentada en la relación que mantiene la medida de Lebesgue, la distancia euclídea y la dimensión n, que viene dada por

$$m(B(x,r)) = m(\{y \in R^n : |x-y| < r\}) = Cr^n.$$

Esta propiedad, que requeriremos en el contexto de los espacios métricos de medida, es conocida como Ahlfors n-regular (ver Capítulo 1, Sección 1.8).

Recordemos que un espacio métrico de medida (X, d, μ) es Ahlfors α-regular, si existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$c_1 r^\alpha \leq \mu(B(x,r)) \leq c_2 r^\alpha, \tag{3.2.2}$$

para todo $x \in X$ y para todo $r < \operatorname{diam}(X)$. La Proposición 1.8.2 pone de manifiesto la similitud entre α y n, dejando en evidencia cómo el parámetro α representa la potencia de quiebre entre la singularidad y la integrabilidad local de la función $d(x,y)$. Para tener en mente un contexto no estándar con todas estas propiedades y α no entero, pensemos en el triángulo de Sierpinski (Ejemplo 1.8.7) o, si se quiere en su construcción no acotada en la que (3.2.2) vale para todo $r > 0$. Así, resulta inmediato y natural la siguiente extensión del operador laplaciano fraccionario. Dado $s \in \mathbb{R}$ tal que $0 < s < 1$, definamos el operador

$$D^s f(x) := \int_X \frac{f(x) - f(y)}{d(x,y)^{\alpha+s}}\, d\mu(y).$$

Este operador está bien definido para toda función f en la clase $\Lambda_r(X,d,\mu)$ para todo $r \in \mathbb{R}$ tal que $s < r < 1$. En efecto, si llamamos $B := B(x,1)$ luego usando la regularidad Lipschitz de f obtenemos que

$$\int_B \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^{\alpha+s}}\, d\mu(y) \le [f]_{\dot{\Lambda}_r} \int_B d(x,y)^{-\alpha+(r-s)}\, d\mu(y).$$

Luego, por la Proposición 1.8.2 tenemos que

$$\int_B \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^{\alpha+s}}\, d\mu(y) \le C[f]_{\dot{\Lambda}_r}. \tag{3.2.3}$$

Para estimar la integral en B^c utilizaremos el hecho que $f \in L^\infty$. Nuevamente por la Proposición 1.8.2,

$$\int_{B^c} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^{\alpha+s}}\, d\mu(y) \le 2\|f\|_{L^\infty} \int_{B^c} d(x,y)^{-\alpha-s}\, d\mu(y) \le C\|f\|_{L^\infty}. \tag{3.2.4}$$

Por lo tanto, de (3.2.3) y (3.2.4) resulta que

$$|D^s f(x)| \le C\|f\|_{\Lambda_r}, \tag{3.2.5}$$

es decir que $D^s f(x)$ resulta finito para todo $x \in X$.

Ya extendido $(-\Delta)^{s/2}$, reformulemos el problema (2.1.4) que nos autoriza la búsqueda de difusiones en el espacio de tipo homogéneo (X,d,μ),es decir

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = -D^s u(\cdot,t)(x), & \text{en } X \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{en } X. \end{cases} \tag{3.2.6}$$

En los próximos capítulos veremos que en contextos particulares el camino apropiado para obtener una solución de (3.2.6) vuelve a ser el de Fourier, entendiéndolo en un sentido amplio y generalizado (wavelets).

La estructura de espacio Ahlfors α-regular es en cierto sentido muy particular, ya que ella automáticamente implica una (casi) autosimilaridad dimensional del espacio, puesto que obliga a que todo los abiertos tengan dimensión de Hausdorff α. Para la definición de $D^s f(x)$ para una función Lipschitz r y acotada en un espacio de tipo homogéneo se podría tomar $\int \frac{f(x)-f(y)}{d(x,y)^{\varepsilon+s}}\, d\mu(y)$, para algún ε muy pequeño. Sin embargo, la heterogeneidad dimensional de un espacio general de «tipo homogéneo» nos induciría a una diferenciación de diversos órdenes —inclusive «integraciones»— en diferentes regiones del espacio. El Ejemplo 1.8.9 con $\varepsilon = 1$ y $s = \frac{1}{2}$ produce un operador de diferenciación en el segmento $\bar{S}$, pero es una integral fraccionaria en la bola B.

Aunque no lo abordaremos en este trabajo, la mirada general puede ser más fructífera si tomamos como punto de partida el proceso de normalización de R. Macías y C. Segovia —ver Teorema 1.8.1— y la «Ahlforización» por eliminación de átomos de H. Aimar, M. Carena y M. Toschi hecha en [6]. Sin embargo, el proceso de normalización del espacio diluye la propiedad métrica de la distancia convirtiendo métricas en casi-métricas, como es el caso de la relación entre los Ejemplos 1.8.1 y 1.8.3. Esto podría presentar un obstáculo si los resultados dependen de dicha estructura métrica. No obstante, en el siguiente capítulo desarrollaremos un contexto de normalización «diádico» que nos permitirá conservar una estructura métrica aunque los conjuntos diádicos provengan de casi-métricas generales.

3.3. Distribuciones y distribuciones de Schwartz en espacios de tipo homogéneo. Espacios de Sobolev

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo de orden γ tal que las funciones continuas de soporte compacto son densas en $L^1(X, \mu)$.

Procedemos ahora a introducir una teoría de distribuciones con pruebas de soporte acotado en espacios de tipo homogéneo siguiendo y detallando en algunos aspectos la idea expuesta por R. Macías y C. Segovia en [40].

En primer lugar necesitamos definir el espacio de las funciones de prueba e introducir en él una topología de tipo límite inductivo que registre convergencia uniforme de la función y, en algún sentido, de las derivadas hasta el orden γ del espacio controlando al mismo tiempo la estabilidad de los soportes. Sea $\mathcal{D}(X, d, \mu)$ el espacio de todas las funciones (test) de soporte acotado que pertenecen a $\dot{\Lambda}_r$

para todo $r < \gamma$. Para darle una topología límite inductivo a $\mathcal{D}$ fijamos $x_0 \in X$ y consideramos para cada $n \in \mathbb{N}$ el subespacio $\mathcal{D}_n$ de $\mathcal{D}$ de aquellas funciones cuyo soporte está contenido en la clausura de la bola $B(x_0, n)$. En $\mathcal{D}_n$ consideramos la topología τ_n inducida por $\|\cdot\|_\infty$ y la familia de seminormas $\{[\cdot]_{\dot{\Lambda}_r} :$ con $0 < r < \gamma\}$. Esta sucesión de subespacios y topologías tiene la siguiente propiedad de estabilidad: τ_{n+1} restringida a $\mathcal{D}_n$ coincide con τ_n. Finalmente la familia $\{(\mathcal{D}_n, \tau_n) : n \in \mathbb{N}\}$ genera en $\mathcal{D}$ la topología τ, límite inductivo estricto. La propiedad fundamental de esta topología en el espacio $\mathcal{D}$ de las funciones test es que sin ser, en general, metrizable, las sucesiones bastan para establecer la continuidad de los funcionales.

Lema 3.3.1. *Sea $T : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ un funcional lineal. Entonces T es continuo si y sólo si para toda sucesión $\{\phi_k\}$ en $\mathcal{D}$ tal que los soportes de las ϕ_k están uniformemente acotados y $\|\phi_k\|_{\Lambda_r} \to 0$ cuando $k \to \infty$ para todo $r < \gamma$, se tiene que la sucesión numérica*

$$\langle T, \phi_k \rangle := T(\phi_k) \to 0,$$

cuando $k \to \infty$.

El espacio dual $\mathcal{D}'(X, d, \mu)$ de $\mathcal{D}$ se llama espacio de las distribuciones en (X, d, μ). El lema precedente prueba que el carácter distribucional de un funcional queda determinado por su continuidad secuencial en $\phi = 0$.

Los resultados clásicos de la teoría de distribuciones, ver [47, Cap. 6], induce análogos útiles en la generalización que estamos considerando. En particular tenemos que la convergencia en la topología de $\mathcal{D}'$ de una sucesión de distribuciones $\{T_k : k \in \mathbb{N}\}$ a una distribución T está dada naturalmente en forma débil por la convergencia de $\langle T_k, \phi \rangle$ a $\langle T, \phi \rangle$ para toda ϕ en $\mathcal{D}$.

Ejemplos de distribuciones (de orden cero) son las funciones localmente integrables (integrables sobre bolas) y las medidas localmente finitas, como la delta de Dirac localizada en algún punto del espacio.

A continuación introduciremos distribuciones de orden «superior», que son la razón principal para el grado de abstracción que hemos asumido.

Sea $x_0 \in X$ fijo. Denotemos con Λ al espacio de todas las funciones que pertenecen a $\dot{\Lambda}_r$ para todo $r < \gamma$. Introduzcamos dos clases de seminormas en Λ. Una que mida el orden de decaimiento en el infinito de las funciones $\phi \in \Lambda$, es decir, para $\beta > 0$ definamos

$$[\phi]_\beta := \sup_{x\in X}(1 + d(x, x_0))^\beta |\phi(x)|,$$

y otra que mida el decaimiento en el infinito de las funciones

$$\sup_{y\in B(x,1)} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{d(x, y)^r}, \tag{3.3.1}$$

es decir, para $\beta > 0$ y $0 < r < \gamma$ definamos

$$[\phi]_{\beta,r} := \sup_{x\in X}(1 + d(x, x_0))^\beta \sup_{y\in B(x,1)} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{d(x, y)^r}.$$

Estás últimas son las análogas a las seminormas de las derivadas de ϕ en estos contextos.

Es sencillo ver que la finitud de estas seminormas no depende del «origen» x_0 elegido (aunque sí, en general, su valor). Definamos así el **espacio de Schwartz**

$$\mathcal{S}(X, d, \mu) = \{\phi \in \Lambda : [\phi]_\beta < \infty \text{ y } [\phi]_{\beta,r} < \infty, \forall\, \beta > 0, \forall\, 0 < r < \gamma\}.$$

Observemos que las seminormas $[\cdot]_\beta$ son monótonas respecto al parámetro β, es decir, si $\beta < \beta'$ entonces $[\phi]_\beta \leq [\phi]_{\beta'}$. A su vez, las funciones dadas por (3.3.1) también satisfacen que

$$\sup_{y\in B(x,1)} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{d(x, y)^r} \leq \sup_{y\in B(x,1)} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{d(x, y)^{r'}}$$

si $r < r'$, por lo cual las seminormas $[\cdot]_{\beta,r}$ resultan monótonas respecto a sus dos parámetros. En consecuencia, podemos sustituir en la definición de $S(X, d, \mu)$ los intervalos $(0, \infty)$ y $(0, \gamma)$ para β y r, respectivamente, por valores discretos y numerables. De hecho, tomemos $\beta_m = m$ y $r_n = \gamma - \frac{1}{n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$ y $n > \lceil \frac{1}{\gamma} \rceil$. Así, obtenemos una familia numerable de seminormas en $\mathcal{S}(X, d, \mu)$ y por lo tanto podemos asignarle la métrica asociada

$$\rho(\phi, \psi) := \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j} \frac{[\phi - \psi]_j}{1 + [\phi - \psi]_j},$$

donde $[\cdot]_j$ es un nueva indexación de las seminormas $[\cdot]_{\beta_m}$ y $[\cdot]_{\beta_m,r_n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$ y $n > \lceil \frac{1}{\gamma} \rceil$. Por lo tanto, dado que $\mathcal{S}(X, d, \mu)$ es metrizable podemos definir su dual topológico, al cual denotaremos con $\mathcal{S}'(X, d, \mu)$.

Observar que en caso que (X, d) sea acotado, $\mathcal{S}(X, d, \mu)$ coincide con el espacio de funciones test $\mathcal{D}$ de Macías-Segovia. De hecho, todas las funciones Lipschitz son acotadas sobre bolas y las funciones $|1 + d(x, x_0)|^\beta$ están acotadas por

$(1 + \text{diam}(X))^\beta$, por lo tanto las seminormas $[\cdot]_\beta$ son finitas para toda $\phi \in \Lambda$. A su vez, las constantes Lipschitz locales están uniformemente acotadas por la constante Lipschitz global, luego las seminormas $[\cdot]_{\beta,r}$ también son finitas para toda $\phi \in \Lambda$. Esto quiere decir que $\Lambda = \mathcal{D} = \mathcal{S}$ en el caso que el espacio sea acotado.

Nos interesa estudiar el decaimiento de $D^s\phi$ cuando ϕ pertenece a $\mathcal{S}(X, d, \mu)$. Para esto precisamos establecer previamente una extensión de la desigualdad de Peetre a espacios casi-métricos.

Lema 3.3.2 (Desigualdad de Peetre)**.** *Sean $a, b, t \in \mathbb{R}$. Luego,*

$$\left(\frac{1 + a^2}{1 + b^2}\right)^t \leq 2^{|t|}(1 + |a - b|^2)^{|t|}$$

Como consecuencia inmediata de este lema tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3.3. *Sea (X, d) un espacio casi-métrico y sea K la constante triangular para d. Tomemos x_0, x e y en X y $t \in \mathbb{R}^+$. Luego,*

$$\left(\frac{1 + d^2(x, x_0)}{1 + d^2(y, x_0)}\right)^{|t|} \leq (2K^2)^{|t|}(1 + d^2(x, y))^{|t|} \tag{3.3.2}$$

Demostración. Notemos primero que

$$\left(\frac{1 + d^2(x, x_0)}{1 + d^2(y, x_0)}\right) \leq K^2 \left(\frac{1 + [K^{-1}d(x, x_0)]^2}{1 + d^2(y, x_0)}\right).$$

Luego, por la desigualdad triangular tenemos que

$$\left(\frac{1 + d^2(x, x_0)}{1 + d^2(y, x_0)}\right) \leq K^2 \left(\frac{1 + [d(x, y) + d(y, x_0)]^2}{1 + d^2(y, x_0)}\right).$$

Elevando ambos miembros a la $|t|$, escogiendo en el lado derecho $a = d(x, y) + d(y, x_0)$, $b = d(y, x_0)$ y aplicando la desigualdad de Peetre, tenemos la desigualdad (3.3.2). $\square$

Dado que nuestra definición de D^s fue dada en espacios Ahlfors regulares, supondremos de aquí en adelante que (X, d, μ) es un espacio Ahlfors α-regular.

Teorema 3.3.4. *Sea $0 < s < \gamma$. Luego son válidas las siguientes afirmaciones:*

(A) *Si $\phi \in \mathcal{S}(X, d, \mu)$ entonces $D^s\phi$ decae en el infinito con orden $\alpha + s$, es decir*

$$[D^s\phi]_{\alpha+s} < \infty;$$

(B) *más aún, si* $\{\phi_k\} \to 0$ *en* $\mathcal{S}(X,d,\mu)$ *cuando* $k \to \infty$ *entonces*

$$[D^s\phi_k]_{\alpha+s} \to 0, \qquad \textit{cuando } k \to \infty,$$

es decir, D^s *es un operador lineal y continuo de* $\mathcal{S}(X,d,\mu)$ *en el espacio de las funciones cuya seminorma* $[\cdot]_{\alpha+s}$ *es finita.*

Demostración del Teorema 3.3.4. Sean $0 < s < \gamma$ y $\phi \in \mathcal{S}(X,d,\mu)$. Comencemos descomponiendo $D^s\phi$ de la siguiente forma

$$D^s\phi(x) = \int_{B(x,1)} \frac{\phi(y)-\phi(x)}{d(x,y)^{\alpha+s}}\,d\mu(y) + \int_{B^c(x,1)} \frac{\phi(y)}{d(x,y)^{\alpha+s}}\,d\mu(y) - \phi(x)\int_{B^c(x,1)} \frac{d\mu(y)}{d(x,y)^{\alpha+s}}$$

Así, resulta que

$$\begin{aligned}(1+d(x,x_0))^{\alpha+s}|D^s\phi(x)| &\le (1+d(x,x_0))^{\alpha+s}\int_{B(x,1)} \frac{|\phi(y)-\phi(x)|}{d(x,y)^{\alpha+s}}\,d\mu(y)\\ &\quad + (1+d(x,x_0))^{\alpha+s}\int_{B^c(x,1)} \frac{|\phi(y)|}{d(x,y)^{\alpha+s}}\,d\mu(y)\\ &\quad + (1+d(x,x_0))^{\alpha+s}|\phi(x)|\int_{B^c(x,1)} \frac{d\mu(y)}{d(x,y)^{\alpha+s}}\,d\mu(y)\\ &=: I(x)+II(x)+III(x). \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Para estimar el término $III(x)$ utilicemos la Proposición 1.8.2, obteniendo así

$$III(x) \le C(1+d(x,x_0))^{\alpha+s}|\phi(x)| = C[\phi]_{\alpha+s}. \tag{3.3.4}$$

Por otro lado, reescribamos $II(x)$ de la siguiente forma,

$$II(x) = \int_{B^c(x,1)} \left(\frac{1+d(x,x_0)}{d(x,y)}\right)^{\alpha+s} |\phi(y)|\,d\mu(y). \tag{3.3.5}$$

Dado que la integral es sobre $B^c(x,1)$, entonces $d(x,y) \ge 1$. Luego, es sencillo corroborar que

$$\left(\frac{1+d(x,x_0)}{d(x,y)}\right)^{\alpha+s} \le C\left(\frac{1+d(x,x_0)}{1+d(x,y)}\right)^{\alpha+s} \le \bar{C}\left(\frac{1+d^2(x,x_0)}{1+d^2(x,y)}\right)^{\frac{\alpha+s}{2}}.$$

Por lo tanto, por la desigualdad (3.3.2) para $t = \frac{\alpha+s}{2}$, tenemos que

$$\left(\frac{1+d(x,x_0)}{d(x,y)}\right)^{\alpha+s} \le \tilde{C}(1+d^2(y,x_0))^{\frac{\alpha+s}{2}} \le \dot{C}(1+d(y,x_0))^{\alpha+s}.$$

Por consiguiente, retomando (3.3.5), resulta que

$$\begin{aligned}
II(x) &\leq \dot{C} \int_{B^c(x,1)} (1 + d(y, x_0))^{\alpha+s} |\phi(y)| \, d\mu(y) \\
&= \dot{C} \int_{B^c(x,1)} \frac{(1 + d(y, x_0))^{2\alpha+\gamma} |\phi(y)|}{(1 + d(y, x_0))^{\alpha+(\gamma-s)}} \, d\mu(y) \\
&\leq \dot{C} [\phi]_{2\alpha+\gamma} \int_{B^c(x,1)} \frac{d\mu(y)}{(1 + d(y, x_0))^{\alpha+(\gamma-s)}}
\end{aligned}$$

Nuevamente la Proposición 1.8.2 nos permite obtener que

$$II(x) \leq \ddot{C} [\phi]_{2\alpha+\gamma}. \tag{3.3.6}$$

Por último, tomemos r arbitrario tal que $s < r < \gamma$. Luego,

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_{B(x,1)} (1 + d(x, x_0))^{\alpha+s} \frac{|\phi(y) - \phi(x)|}{d(x, y)^{\alpha+s}} \, d\mu(y) \\
&= \int_{B(x,1)} (1 + d(x, x_0))^{\alpha+s} \frac{|\phi(y) - \phi(x)|}{d(x, y)^{r}} \frac{d\mu(y)}{d(x, y)^{\alpha-(r-s)}} \\
&\leq [\phi]_{\alpha+s,r} \int_{B(x,1)} \frac{d\mu(y)}{d(x, y)^{\alpha-(r-s)}}
\end{aligned}$$

Una vez más, de la Proposición 1.8.2 se desprende que

$$I(x) \leq C [\phi]_{\alpha+s,r}. \tag{3.3.7}$$

Reuniendo lo obtenido en (3.3.3), (3.3.4), (3.3.6) y (3.3.7) llegamos a que

$$[D^s \phi]_{\alpha+s} \leq C([\phi]_{\alpha+s} + [\phi]_{2\alpha+\gamma} + [\phi]_{\alpha+s,r}).$$

Esta última desigualdad demuestra que $[D^s \phi]_{\alpha+s}$ resulta finita para toda $\phi \in \mathcal{S}(X, d, \mu)$. Más aún, prueba la continuidad del mismo de $\mathcal{S}(X, d, \mu)$ en el espacio de las funciones cuya seminorma $[\cdot]_{\alpha+s}$ es finita. Dado que linealidad del operador de D^s es inmediata, queda así probado el teorema. □

Este último resultado nos permite dar una definición en sentido débil de la derivada fraccionaria para una clase particular de funciones localmente integrables. Sea $f \in L^1_{loc}(X, \mu)$ tal que

$$\int_X \frac{|f(x)|}{(1 + d(x, x_0))^{\alpha+s}} \, d\mu(x) < \infty.$$

Notar que la finitud de la integral es independiente del x_0 elegido. Luego, dada una función g tal que $[\cdot]_{\alpha+s}$ es finita, tenemos entonces que $\int_X fg\,d\mu$ es absolutamente convergente. En efecto,

$$\int_X |f(x)||g(x)|\,d\mu(x) \leq [g]_{\alpha+s} \int_X \frac{|f(x)|}{(1+d(x,x_0))^{\alpha+s}}\,d\mu(x) \leq C[g]_{\alpha+s},$$

Luego, dada $\phi \in \mathcal{S}(X,d,\mu)$ podemos definir

$$\langle D^s f, \phi\rangle := \langle f, D^s\phi\rangle = \int_X f D^s\phi\,d\mu.$$

Por lo tanto, por el Teorema 3.3.4 podemos asegurar no sólo que $D^s f$ está bien definida, sino también que define un funcional lineal y continuo en $\mathcal{S}(X,d,\mu)$, es decir, $D^s f \in \mathcal{S}'(X,d,\mu)$. Este resultado va en concordancia con lo expuesto en el caso euclídeo por L. Silvestre en [50], donde considera a

$$L_s := \left\{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{1+|x|^{n+s}}\,dx < \infty \right\}$$

como el espacio natural para $(-\Delta)^{s/2}$.

Notemos que si $f \in L^p(X,\mu)$, con $1 < p < \infty$,

$$\begin{aligned}\int_X \frac{|f(x)|}{(1+d(x,x_0))^{\alpha+s}}\,d\mu(x) &\leq \left(\int_X |f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad\times \left(\int_X \frac{1}{(1+d(x,x_0))^{(\alpha+s)p'}}\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C\|f\|_{L^p},\end{aligned}$$

y por lo tanto $D^s f \in \mathcal{S}'(X,d,\mu)$. Observar que la misma cota se satisface para el caso $p=1$ y $p=\infty$. De esta manera, podemos dar una definición de espacios de Sobolev en estos contextos. Diremos que una función $f \in L^p(X,\mu)$, con $1 \leq p \leq \infty$, está en el **espacio de Sobolev $\boldsymbol{L^p_s(X,d,\mu)}$** si la derivada débil $D^s f$ es una función de $L^p(X,\mu)$, es decir, si existe $g \in L^p(X,\mu)$ tal que para toda $\phi \in \mathcal{S}(X,d,\mu)$ se tiene que

$$\langle D^s f, \phi\rangle = \int_X g\phi\,d\mu.$$

Dotaremos al espacio con la norma

$$\|f\|_{L^p_s} := \|f\|_{L^p} + \|D^s f\|_{L^p}.$$

Hay otros modos de definir espacios de Sobolev en espacios de tipo homogéneo —ver, por ejemplo, [39], [32], [16] y [48]. El precedente está dándole a los operadores de derivación fraccionaria el rol que le cabe al gradiente en los casos clásicos y, naturalmente, nos devuelve una propiedad trivial pero básica: $D^s : L^p_s(X, d, \mu) \to L^p(X, \mu)$ continuamente. No exploramos aquí la relación de nuestra definición con las de aquellas referencias. Mencionaremos que el estudio de este operador actuando entre espacio de Besov y de Triebel-Lizorkin ha sido considerado en [**34**].

En los próximos capítulos, para casos particulares de espacios Ahlfors 1-regular, obtendremos caracterizaciones de Fourier (generalizadas) de una familia de estos espacios funcionales. Observamos finalmente que la mirada distribucional que hemos introducido permite plantear el problema en contextos más amplios y resolver problemas de difusión en forma débil, con datos iniciales que no sean funciones.

Capítulo 4

Difusiones asociadas a diferenciaciones fraccionarias diádicas: el caso unidimensional

En este capítulo resolveremos un problema de dato inicial para una difusión vinculada a un operador de derivación fraccionaria diádico en $\mathbb{R}^+$. En primer lugar, obtendremos un análisis espectral del operador en términos del sistema de Haar. Luego, probaremos una acotación puntual del operador maximal de la difusión por el operador maximal diádico de Hardy-Littlewood. Como consecuencia de esto obtendremos la convergencia puntual al dato inicial en los espacios de Lebesgue clásicos. Si bien el conjunto subyacente es $\mathbb{R}^+$, la estructura métrica en el espacio no es la usual. En algún sentido este capítulo tiene un propósito introductorio y expositivo, ya que la mayoría de los resultados que aquí probamos son un corolario de los del Capítulo 5.

4.1. Introducción

Comencemos particularizando al caso de $\mathbb{R}^+$ las construcciones hechas en las Secciones 1.9 y 1.10 de los Preliminares.

Sea $\mathscr{D} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathscr{D}^j$ la familia diádica de intervalos en $\mathbb{R}^+$. Si I pertenece a $\mathscr{D}^j$, luego $I = I_k^j = [(k-1)2^{-j}, k2^{-j})$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ y $|I| = 2^{-j}$, donde las barras verticales denotan la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Para cada $I \in \mathscr{D}^j$ existen dos intervalos disjuntos I^- e I^+ en D^{j+1}, ambos contenidos en I, los cuales son precisamente las mitades izquierda y derecha de I, respectivamente.

La distancia diádica $\delta(x, y)$ de x a y, ambos en R^+, se define como cero cuando $x = y$ y como la medida del menor intervalo diádico $J \in \mathscr{D}$ que contiene a ambos x e y. Notemos que para cualesquiera dos puntos x e y en $\mathbb{R}^+$, $\delta(x, y)$ está bien definida ya que para $|j|$ lo suficientemente grande y j negativo, el intervalo $[0, 2^{-j})$ es diádico y contiene a x e y. Con esta métrica y la medida de Lebesgue, $\mathbb{R}^+$ es un espacio Ahlfors 1-regular de medida infinita. En efecto, $B_\delta(x, r)$ es el mayor intervalo diádico I tal que contiene a x con medida menor que r. Por consiguiente, $|B_\delta(x,r)| = |I| < r$. Pero como I es el mayor intervalo diádico conteniendo a x con $|I| < r$, entonces esto significa que $|\widetilde{I}| \geq r$, donde $\widetilde{I}$ es el padre de I. Por lo tanto, $|B_\delta(x,r)| = |I| = \frac{1}{2}|\widetilde{I}| \geq \frac{1}{2}r$. En resumen, $\frac{1}{2}r \leq |B_\delta(x,r)| < r$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ y todo $r > 0$, es decir, $(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$ es Ahlfors 1-regular.

Por otro lado, notemos que a pesar de que $|x-y| \leq \delta(x,y)$, la función $\frac{1}{\delta(x,y)}$ es aún singular, en el sentido que $\int_{\mathbb{R}^+} \frac{dy}{\delta(x,y)} = +\infty$ incluso cuando $\int_{(0,1)} \frac{dy}{\delta(x,y)^{1-\varepsilon}}$ y $\int_{(1,\infty)} \frac{dy}{\delta(x,y)^{1+\varepsilon}}$ son ambas finitas para todo $\varepsilon > 0$ (ver Lema 4.2.2).

Para $I \in \mathscr{D}$ denotaremos con h_I a la función de Haar soportada en I. En otras palabras $h_I = |I|^{-\frac{1}{2}}(\chi_{I^-} - \chi_{I^+})$, donde χ_E denota la función característica del conjunto E. El sistema $\{h_I : I \in \mathscr{D}\}$, conocido como el sistema de Haar, es una base ortogonal del $L^p(\mathbb{R}^+)$ y una base incondicional para $L^p(\mathbb{R}^+), 1 < p < \infty$ (ver Teorema 1.10.3). Con $\langle f, h_I \rangle$ denotaremos el producto interno $\int_{\mathbb{R}^+} f h_I dx$ siempre que esté bien definido.

Tomando $(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$ como nuestro espacios ambiente, la derivada fraccionaria de orden s, con $0 < s < 1$, vendrá dada por

$$D^s f(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(x) - f(y)}{\delta(x,y)^{1+s}}\, dy,$$

siempre que la integral sea absolutamente convergente. Notemos que este es el caso de las funciones acotadas y Lipschitz en el sentido clásico, dado que $|x - y| \leq \delta(x,y)$. En este contexto llamaremos a D^s el **operador de derivación fraccionaria diádico**.

El propósito de este capítulo es estudiar el problema de difusión (3.2.6) presentado en el capítulo anterior, pero asociado en este caso al operador de derivación fraccionaria diádico, es decir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \frac{u(y,t) - u(x,t)}{\delta(x,y)^{1+s}}\, dy, & x \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

En la Sección 4.4 veremos que la condición inicial se satisface puntualmente siempre que u_0 pertenezca a algún $L^p(\mathbb{R}^+)$, para $1 \leq p < \infty$. La herramienta analítica principal involucrada en la demostración será, al igual que en el caso euclídeo con la ecuación del calor, la prueba de la acotación del $\sup_{t>0} |u(x,t)|$ por la función maximal de Hardy-Littlewood (diádica en nuestro caso).

4.2. El operador de diferenciación fraccionaria diádico

La función característica de un intervalo diádico $I \in \mathscr{D}$ es una función Lipschitz con respecto a la distancia δ. De hecho, $|\chi_I(x) - \chi_I(y)| \leq \frac{\delta(x,y)}{|I|}$. Así, para $0 < s < 1$, la integral

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\chi_I(x) - \chi_I(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} dy$$

es absolutamente convergente.

Dado que las combinaciones lineales finitas $S(\mathscr{H})$ del sistema de Haar $\mathscr{H}$ están contenidas en las combinaciones lineales finitas de las funciones características de intervalos diádicos, estamos en posición de definir, para $0 < s < 1$, el operador D^s sobre $S(\mathscr{H})$ como

$$D^s f = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(x) - f(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} dy.$$

En [4] los autores prueban que las funciones de Haar son las autofunciones de D^s. Sin embargo, daremos aquí una prueba alternativa más simple que será fácilmente generalizable al caso de espacios de tipo homogéneo.

Teorema 4.2.1. *Sea $0 < s < 1$. Luego, para cada $h_I \in \mathscr{H}$ resulta que*

$$D^s h_I(x) = b_s |I|^{-s} h_I(x), \tag{4.2.1}$$

con $b_s = 1 + C_s$ y $C_s = \frac{1}{2^{s+1}} \frac{1}{2^s - 1}$.

Antes de comenzar la demostración de este teorema probemos el siguiente resultado auxiliar.

Lema 4.2.2. *Sea $0 < \varepsilon < 1$, y sea I un intervalo diádico en $\mathbb{R}^+$. Entonces, para $x \in I$, tenemos que*

$$\int_I \frac{dy}{\delta(x,y)^{1-\varepsilon}} = c_\varepsilon |I|^\varepsilon \quad y \quad \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} \frac{dy}{\delta(x,y)^{1+\varepsilon}} = C_\varepsilon |I|^{-\varepsilon},$$

donde $c_\varepsilon = \frac{2^{\varepsilon+1}}{2^\varepsilon - 1}$ y $C_\varepsilon = \frac{1}{2^{\varepsilon+1}} \frac{1}{2^\varepsilon - 1}$.

Demostración. Observemos que la bola $B_\delta(x,r)$ es el mayor intervalo diádico I conteniendo x con longitud menor que r. Luego, para $I \in \mathscr{D}^j$ y $x \in I$ tenemos que

$$\int_I \frac{dy}{\delta(x,y)^{1-\varepsilon}} = \int_{B_\delta(x,2^{-j+1})} \frac{dy}{\delta(x,y)^{1-\varepsilon}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=j-1}^{\infty} \int_{\{y:\, 2^{-k-1} \leq \delta(x,y) < 2^{-k}\}} \frac{dy}{\delta(x,y)^{1-\varepsilon}} \\
&= \sum_{k=j-1}^{\infty} |\{y : \delta(x,y) = 2^{-k-1}\}| 2^{-(k+1)(\varepsilon-1)} \\
&= 2 \sum_{k=j-1}^{\infty} 2^{-(k+1)\varepsilon} = \frac{2^{\varepsilon+1}}{2^{\varepsilon}-1} |I|^{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

En forma análoga se prueba la segunda identidad. □

Demostración del Teorema 4.2.1. Comencemos notando que para par de intervalos $I, I' \in \mathscr{D}$, con $I \cap I' = \emptyset$, tenemos que

$$\delta(x,y) = |J|, \quad \text{para todo } x \in I \text{ y todo } y \in I', \tag{4.2.2}$$

donde J es el primer ancestro común entre de I e I'.

Tomemos $h_I \in \mathscr{H}$. Supongamos que $x \notin I$. Dado que h_I está soportada en I, luego $h_I(x) = 0$. Así,

$$\int \frac{h_I(x) - h_I(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} dy = \int_{\mathbb{R}^+ \setminus I} \frac{-h_I(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} dy + \int_I \frac{-h_I(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} dy,$$

La primera integral del lado derecho es cero dado que $h_I(y) \equiv 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^+ \setminus I$. Para la segunda integral, como $x \notin I$ e $y \in I$, podemos aplicar (4.2.2) para obtener

$$\int_I \frac{-h_I(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} dy = -C^{-1-s} \int_I h_I(y) dy = 0.$$

Por lo tanto, hemos probado (4.2.1) para $x \notin I$.

Supongamos ahora que $x \in I$. Denotemos con I^* al hijo de I que contiene a x. Luego,

$$\int_I \frac{h_I(x) - h_I(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} dy = \int_{I^*} \frac{h_I(x) - h_I(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} dy + \int_{I \setminus I^*} \frac{h_I(x) - h_I(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} dy.$$

Como h_I es constante en cada hijo de I, entonces la integral sobre I^* es nula. Observemos que $\delta(x,y) = |I|$ en la integral sobre $I \setminus I^*$, luego

$$\begin{aligned}
\int_{I \setminus I^*} \frac{h_I(x) - h_I(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} dy &= |I|^{-1-s} \int_{I \setminus I^*} h_I(x) - h_I(y) dy \\
&= |I|^{-1-s} \int_I h_I(x) - h_I(y) dy \\
&= |I|^{-1-s} \left[\int_I h_I(x) dy - \int_I h_I(y) dy \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |I|^{-1-s} h_I(x)|I| \\
&= |I|^{-s} h_I(x). \qquad (4.2.3)
\end{aligned}
$$

Finalmente, aplicando el Lema 4.2.2, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^+\setminus I} \frac{h_I(x)-h_I(y)}{\delta(x,y)^{1+s}}dy &= h_I(x)\int_{\mathbb{R}^+\setminus I} \delta(x,y)^{-1-s}dy \\
&= h_I(x) C_s |I|^{-s}, \qquad (4.2.4)
\end{aligned}
$$

donde $C_s = \frac{1}{2^{s+1}}\frac{1}{2^s-1}$. Por lo tanto, de (4.2.3) y (4.2.4) resulta que

$$
\begin{aligned}
D^s h_I &= \int_I \frac{h_I(x)-h_I(y)}{\delta(x,y)^{1+s}}dy + \int_{\mathbb{R}^+\setminus I} \frac{h_I(x)-h_I(y)}{\delta(x,y)^{1+s}}dy \\
&= |I|^{-s} h_I(x) + C_s|I|^{-s} h_I(x) \\
&= (1+C_s)|I|^{-s} h_I(x).
\end{aligned}
$$

Así, hemos probado (4.2.1) para $x \in I$, y la prueba está completa. □

La ecuación (4.2.1) nos permite establecer en el siguiente teorema una definición alternativa de D^s cuando actúa sobre funciones de $L^p_s(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$. Más aún, brinda una caracterización del espacio de Sobolev L^p_s en función del sistema de Haar.

Teorema 4.2.3. *Sea $f \in L^p_s(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$, entonces*

$$
D^s f(x) = \sum_{I\in\mathscr{D}} b_s |I|^{-s} \langle f.h_I\rangle h_I(x). \qquad (4.2.5)
$$

Luego, el espacio $L^p_s(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$ coincide con el conjunto de todas las funciones de $L^p(\mathbb{R}^+)$ tales que

$$
\left(\sum_{I\in\mathscr{D}} |I|^{-2s}|\langle f, h_I\rangle|^2 |h_I|^2\right)^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbb{R}^+).
$$

Más aún,

$$
\|f\|_{L^p} + \left\| \left(\sum_{I\in\mathscr{D}} |I|^{-2s}|\langle f, h_I\rangle|^2 |h_I|^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}
$$

es equivalente a $\|f\|_{L^p_s}$.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que toda $h_I \in \mathscr{H}$ es Lipschitz 1 respecto a δ y tiene soporte acotado. Por lo tanto, $h_I \in S(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$. Luego, si $f \in L^p$ entonces

$$\langle D^s f, h_I \rangle = \langle f, D^s h_I \rangle.$$

Por el Teorema 4.2.1 sabemos que $D^s h_I = b_s |I|^{-s} h_I$, en consecuencia

$$\langle D^s f, h_I \rangle = b_s |I|^{-s} \langle f, h_I \rangle. \tag{4.2.6}$$

Supongamos que $f \in L^p_s(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$, entonces $D^s f \in L^p(\mathbb{R}^+)$. Como $\mathscr{H}$ es una base incondicional de $L^p(\mathbb{R}^+)$ tenemos que

$$\begin{aligned} D^s f(x) &= \sum_{I \in \mathscr{D}} \langle D^s f . h_I \rangle \, h_I(x) \\ &= \sum_{I \in \mathscr{D}} b_s |I|^{-s} \, \langle f . h_I \rangle \, h_I(x), \end{aligned}$$

lo cual prueba (4.2.5). Por otro lado, el Teorema 1.10.3 nos asegura que

$$\|D^s f\|_{L^p} \approx \left\| \left(\sum_{I \in \mathscr{D}} |\langle D^s f, h_I \rangle|^2 |h_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.$$

Por lo obtenido en (4.2.6) resulta que

$$\|D^s f\|_{L^p} \approx \left\| \left(\sum_{I \in \mathscr{D}} |I|^{-2s} |\langle f, h_I \rangle|^2 |h_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}$$

lo cual termina por probar el teorema. □

4.3. Estimaciones para la función maximal de la solución

Los resultados de la sección anterior sugieren —al menos formalmente— que la función

$$u(x,t) := \sum_{I \in \mathfrak{D}} e^{-b_s |I|^{-s} t} \langle u_0, h_I \rangle h_I(x). \tag{4.3.1}$$

resuelve el problema (4.1.1). Para comenzar con el análisis de la forma en que la condición inicial se satisface, en esta sección obtendremos cotas para el operador maximal asociado a $u(x,t)$.

Reescribiendo el producto interno en (4.3.1) como una integral y cambiando el orden de integración obtenemos que

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^+} \left[\sum_{I \in \mathfrak{D}} e^{-b_s |I|^{-s} t} h_I(y) h_I(x) \right] u_0(y) dy.$$

Llamemos $k_t(x,y)$ al núcleo de la ecuación anterior, es decir,

$$k_t(x,y) = \sum_{I\in\mathfrak{D}} e^{-b_s|I|^{-s}t} h_I(y)h_I(x). \tag{4.3.2}$$

Luego, si denotamos con K_t al operador con núcleo k_t, podemos escribir

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^+} k_t(x,y)u_0(y)dy =: K_t u_0(x).$$

El objetivo de esta sección es probar que para toda $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^+)$ se satisface que

$$K^* u_0(x) := \sup_{t>0} |K_t u_0(x)| \leq C M_{dy} u_0(x), \tag{4.3.3}$$

donde M_{dy} es el operador maximal de Hardy-Littlewood diádico, el cual viene dado por

$$M_{dy} f(x) = \sup_{x\in I\in\mathscr{D}} \frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|\, dy,$$

para toda función f definida sobre $\mathbb{R}^+$, localmente integrable. Para lograr esto construiremos una función decreciente $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $\psi \in L^1(0,\infty)$ y

$$|k_t(x,y)| \leq \frac{1}{t^{1/s}}\psi\left(\frac{\delta(x,y)}{t^{1/s}}\right).$$

Comencemos notando que para x e y fijos en $\mathbb{R}^+$, sólo quedan aquellos términos de (4.3.2) en los cuales I contiene a x e y. Llamemos con I^0 al primer ancestro común entre x e y, y sea ℓ tal que $I^0 \in \mathscr{D}^\ell$. También denotemos con I^j el intervalo diádico en $\mathscr{D}^{\ell-j}$ que contiene a I^0. Entonces,

$$\begin{aligned} k_t(x,y) &= \sum_{j\geq 0} e^{-b_s|I^j|^{-s}t} h_{I^j}(y)h_{I^j}(x) \\ &= e^{-b_s|I^0|^{-s}t} h_{I^0}(y)h_{I^0}(x) \\ &\qquad + \sum_{j\geq 1} e^{-b_s|I^j|^{-s}t} h_{I^j}(y)h_{I^j}(x). \end{aligned}$$

Observemos que, para todo $j \geq 1$, x e y pertenecen al mismo hijo de I^j, en consecuencia $h_{I^j}(y) = h_{I^j}(x)$. Más aún,

$$h_{I^j}(y)h_{I^j}(x) = \left|I^j\right|^{-1}.$$

Por consiguiente,

$$k_t(x,y) = e^{-b_s|I^0|^{-s}t} h_{I^0}(y)h_{I^0}(x) + \sum_{j\geq 1} \frac{e^{-b_s|I^j|^{-s}t}}{|I^j|}.$$

Ahora, notemos que $\delta(x,y) = |I^0|$ y que $|I^j| = 2^j|I^0|$. Además, como x e y pertenecen cada uno a un hijo diferente de I^0, resulta que $h_{I^0}(y)h_{I^0}(x) = -|I^0|^{-1}$. De aquí que

$$\begin{aligned}k_t(x,y) &= -e^{-b_s\delta(x,y)^{-s}t}\delta(x,y)^{-1} + \sum_{j\geq 1}\frac{e^{-b_s(2^j\delta(x,y))^{-s}t}}{2^j\delta(x,y)}\\ &= \frac{1}{\delta(x,y)}\left[-e^{-b_s\delta(x,y)^{-s}t} + \sum_{j\geq 1}2^{-j}e^{-b_s(2^j\delta(x,y))^{-s}t}\right].\end{aligned}$$

Por lo tanto, definiendo $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}\left[-e^{-b_s r^{-s}} + \sum_{j\geq 1}2^{-j}e^{-b_s(2^j r)^{-s}}\right],$$

podemos asegurar que

$$k_t(x,y) = \frac{1}{t^{1/s}}\varphi\left(\frac{\delta(x,y)}{t^{1/s}}\right).$$

Notemos que φ es una función continua para todo r positivo y que para r mayores que una constante positiva r_0, $\varphi(r)$ es positiva. Para estos valores de r, dado que $\sum_{j\geq 1}2^{-j} = 1$ y $|e^{-x}| \leq 1$ para $x \in \mathbb{R}^+$, también tenemos que

$$0 \leq \varphi(r) \leq \frac{1}{r}\sum_{j\geq 1}2^{-j}\left[1 - e^{-b_s r^{-s}}\right].$$

Así, utilizando el teorema de Taylor para la función exponencial llegamos a que

$$0 \leq \varphi(r) \leq \frac{1}{r}\sum_{j\geq 1}2^{-j}\left[\frac{b_s}{r^s}\right] = \frac{b_s}{r^{1+s}}.$$

Para $0 < r < 1$, fijemos $0 < \varepsilon < 1$ y definamos $n(r) := \lceil -\varepsilon \log_2 r\rceil$, donde $\lceil\cdot\rceil$ denota la función techo. Luego podemos partir φ de la siguiente forma

$$\varphi(r) = \frac{-e^{-b_s r^{-s}}}{r} + \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{n(r)}2^{-j}e^{-b_s(2^j r)^{-s}} + \frac{1}{r}\sum_{j>n(r)}2^{-j}e^{-b_s(2^j r)^{-s}}. \tag{4.3.4}$$

El valor absoluto del primer término del lado derecho de (4.3.4) está claramente acotado. El segundo término también está acotado dado que para $j \leq n(r)$ tenemos que $e^{-b_s(2^j r)^{-s}} \leq Ce^{-b_s r^{-(1-\varepsilon)s}}$. Luego,

$$\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{n(r)}2^{-j}e^{-b_s(2^j r)^{-s}} \leq \frac{C}{r}e^{-b_s r^{-(1-\varepsilon)s}}\sum_{j=1}^{n(r)}2^{-j} \leq \frac{Ce^{-b_s r^{-(1-\varepsilon)s}}}{r}.$$

Por último, para el tercer término podemos ver que

$$\frac{1}{r}\sum_{j>n(r)} 2^{-j}e^{-b_s(2^j r)^{-s}} \leq \frac{1}{r}\sum_{j>n(r)} 2^{-j} \leq C\frac{1}{r}2^{-n(r)} \leq C\frac{1}{r}r^{\varepsilon} = \frac{C}{r^{1-\varepsilon}}.$$

De este modo, resulta que $|\varphi(r)| \leq \psi(r)$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$ donde

$$\psi(r) = C\begin{cases} r^{1-\varepsilon}, & \text{si } 0 < r < 1, \\ r^{1+s}, & \text{si } r \geq 1, \end{cases}$$

para alguna constante positiva C. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
|K_t u_0(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^+} |k_t(x,y)||u_0(y)|\,dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{t^{1/s}}\psi\left(\frac{\delta(x,y)}{t^{1/s}}\right)|u_0(y)|\,dy \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^{1/s}} \int_{\{y:t^{1/s}2^j \leq \delta(x,y) < t^{1/s}2^{j+1}\}} \psi\left(\frac{\delta(x,y)}{t^{1/s}}\right)|u_0(y)|\,dy \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{j+1}\psi(2^j)\frac{1}{t^{1/s}2^{j+1}} \int_{B_\delta(x,t^{1/s}2^{j+1})} |u_0(y)|\,dy.
\end{aligned}$$

Dado $|B_\delta(x,r)| < r$ y cada B_δ es un intervalo diádico, tenemos que

$$\begin{aligned}
|K_t u_0(x)| &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{j+1}\psi(2^j)\frac{1}{|B_\delta(x,t^{1/s}2^{j+1})|}\int_{B_\delta(x,t^{1/s}2^{j+1})} |u_0(y)|\,dy \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{j+1}\psi(2^j) M_{dy}u_0(x) \\
&= 4M_{dy}u_0(x)\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{\{y:2^{j-1}\leq y<2^j\}} \psi(2^j)\,dy \\
&\leq 4M_{dy}u_0(x)\int_{\mathbb{R}^+}\psi(y)\,dy, \\
&\leq 4\|\psi\|_{L^1} M_{dy}u_0(x).
\end{aligned}$$

Tomando supremo en t obtenemos que

$$\sup_{t>0}|K_t u_0(x)| \leq 4\|\psi\|_{L^1} M_{dy}u_0(x),$$

lo que completa la prueba de (4.3.3).

4.4. Solución por el método de Fourier-wavelets y convergencia puntual al dato inicial

En esta sección enunciaremos y probaremos el teorema central de este capítulo. Valiéndonos de los resultados obtenidos en las secciones anteriores probaremos el siguiente teorema.

Teorema 4.4.1. *Sean $0 < s < 1$, $1 < p < \infty$ y $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^+)$ dados. Luego,*

(A) *la función u definida en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ por*

$$u(x,t) = \sum_{I \in \mathscr{D}} e^{-b_s |I|^{-s} t} \langle u_0, h_I \rangle h_I(x)$$

pertenece a $L^p_s(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$ como función de $x \in \mathbb{R}^+$ para cada $t > 0$;

(B) *la función u resuelve el problema*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -D^s u, & x \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{4.4.1}$$

donde la derivada con respecto a t es una derivada Fréchet de la función definida en $(0, \infty)$ con valores en $L^p(\mathbb{R}^+)$ y la condición inicial se satisface en $L^p(\mathbb{R}^+)$, es decir $\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^p} \to 0$, cuando $t \to 0$;

(C) *existe una constante $C > 0$ tal que*

$$u^*(x) = \sup_{t>0} |u(x,t)| \leq C M_{dy} u_0(x);$$

(D) $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = u_0(x)$ *para casi todo $x \in \mathbb{R}^+$.*

Demostración de (A). Comencemos notando que $|e^{-2b_s|I|^{-s}t}| \leq 1$, entonces por el Teorema 1.10.3 sabemos que

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{I \in \mathscr{D}} |\langle u(\cdot,t), h_I \rangle|^2 |h_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} &= \left\| \left(\sum_{I \in \mathscr{D}} e^{-2b_s|I|^{-s}t} |\langle u_0, h_I \rangle|^2 |h_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\ &\leq \left\| \left(\sum_{I \in \mathscr{D}} |\langle u_0, h_I \rangle|^2 |h_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\ &\leq C \left\| u_0 \right\|_{L^p} < \infty. \end{aligned}$$

Nuevamente por el Teorema 1.10.3, $u(\cdot,t)$ pertenece a L^p y $\|u(\cdot,t)\|_{L^p} \leq \widetilde{C} \|u_0\|_{L^p}$, para todo $t > 0$. Por otro lado, es sencillo ver que

$$0 \leq |I|^{-2s} e^{-2b_s|I|^{-s}t} \leq (eb_s t)^{-2}. \tag{4.4.2}$$

Luego, para cada $t > 0$ fijo

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\sum_{I\in\mathscr{D}} |I|^{-2s} |\langle u(\cdot,t), h_I\rangle|^2 |h_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&\qquad = \left\| \left(\sum_{I\in\mathscr{D}} |I|^{-2s} e^{-2b_s|I|^{-s}t} |\langle u_0, h_I\rangle|^2 |h_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&\qquad \leq C \left\| \left(\sum_{I\in\mathscr{D}} |\langle u_0, h_I\rangle|^2 |h_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&\qquad \leq \widetilde{C}\, \|u_0\|_{L^p} < \infty. \qquad (4.4.3)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Teorema 4.2.3, $u(\cdot,t) \in L^p_s(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$ para cada $t > 0$.

Demostración de (B). Para probar que la ecuación diferencial en (4.4.1) se satisface, comencemos mostrando que para cada $t > 0$ fijo

$$\sup_{I\in\mathscr{D}} \left| \frac{e^{-b_s|I|^{-s}(t+h)} - e^{-b_s|I|^{-s}t}}{h} + b_s|I|^{-s} e^{-b_s|I|^{-s}t} \right| \longrightarrow 0, \qquad (4.4.4)$$

cuando $h \to 0$. Esto es equivalente a que

$$\sup_{I\in\mathscr{D}} \left| \frac{e^{-b_s|I|^{-s}t}}{h} \left[e^{-b_s|I|^{-s}h} - 1 + b_s|I|^{-s}h \right] \right| \longrightarrow 0,$$

cuando $h \to 0$. Usando el teorema de Taylor para la función exponencial obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{e^{-b_s|I|^{-s}t}}{h} \left[e^{-b_s|I|^{-s}h} - 1 + b_s|I|^{-s}h \right] \right| \\
&\qquad \leq \left| \frac{e^{-b_s|I|^{-s}t}}{h} \left[h^2 \max_{0\leq s\leq h} \left| (b_s|I|^{-s})^2 e^{-b_s|I|^{-s}s} \right| \right] \right| \\
&\qquad = \left| \frac{b_s^2}{|I|^{-2s}} e^{-b_s|I|^{-s}t} h \right| \\
&\qquad \leq \left| \frac{b_s^2}{|I|^{-2s}} e^{-b_s|I|^{-s}t} \right| |h| .
\end{aligned}$$

Entonces, para conseguir (4.4.4) es suficiente ver que

$$\sup_{I\in\mathscr{D}} \left| \frac{b_s^2}{|I|^{-2s}} e^{-b_s|I|^{-s}t} \right| < \infty.$$

Como
$$\left|\frac{b_s^2}{|I|^{-2s}} e^{-b_s t|I|^{-s}}\right| \leq 4(te)^{-2},$$
la primera ecuación de (4.4.1) vale.

Ahora, para probar la convergencia al dato inicial en L^p, i.e.

$$u(x,t) \xrightarrow{L^p} u_0(x), \quad \text{cuando } t \to 0, \tag{4.4.5}$$

necesitamos proceder de una forma diferente dado que para cada $t > 0$

$$\sup_{I\in\mathscr{D}} \left|e^{-b_s|I|^{-s}t} - 1\right| = 1.$$

Sin embargo, usaremos el hecho de que para cada $f \in L^p$ el operador proyección

$$P_i f = \sum_{j<i} \sum_{I\in\mathscr{D}^j} \langle f, h_I\rangle h_I$$

converge a f en L^p cuando i tiende a infinito, o equivalentemente,

$$\sum_{j\geq i} \sum_{I\in\mathscr{D}^j} \langle f, h_I\rangle h_I \xrightarrow{L^p} 0,$$

cuando i tiende a infinito.

Dado $\varepsilon > 0$, escojamos ℓ lo suficientemente grande tal que

$$\left\| \left(\sum_{j>\ell} \sum_{I\in\mathscr{D}^j} |\langle u_0, h_I\rangle|^2 |h_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} < \varepsilon. \tag{4.4.6}$$

Observemos que para cada $I \in \mathscr{D}^j$ con $j \leq \ell$ tenemos que $|I| \geq 2^{-\ell}$, entonces podemos elegir t_0 lo suficientemente pequeño tal que

$$|e^{-b_s|I|^{-s}t} - 1| = 1 - e^{-b_s|I|^{-s}t} \leq 1 - e^{-b_s 2^{\ell s} t} < \varepsilon, \tag{4.4.7}$$

para cada $t < t_0$. Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}
\|u - u_0\|_{L^p} &\precsim \left\| \left(\sum_{I\in\mathscr{D}} |e^{-b_s|I|^{-s}t} - 1||\langle u_0, h_I\rangle|^2 |h_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&\leq \left\| \left(\sum_{j\leq\ell} \sum_{I\in\mathscr{D}^j} |e^{-b_s|I|^{-s}t} - 1||\langle u_0, h_I\rangle|^2 |h_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&\quad + \left\| \left(\sum_{j>\ell} \sum_{I\in\mathscr{D}^j} |e^{-b_s|I|^{-s}t} - 1||\langle u_0, h_I\rangle|^2 |h_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (4.4.6) y (4.4.7) llegamos a que

$$\begin{aligned}\|u-u_0\|_{L^p} &\lesssim \varepsilon \left\| \left(\sum_{j\leq \ell} \sum_{I\in\mathscr{D}^j} |\langle u_0, h_I\rangle|^2 |h_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\ &\qquad + 2 \left\| \left(\sum_{j> \ell} \sum_{I\in\mathscr{D}^j} |\langle u_0, h_I\rangle|^2 |h_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\ &\lesssim \varepsilon \|u_0\|_{L^p} + 2\varepsilon,\end{aligned}$$

Luego, (4.4.5) se cumple y así completamos la prueba de (B).

Demostración de (C). Esta parte del teorema ya ha sido probada en la sección 4.3 en la demostración de la estimación (4.3.3).

Demostración de (D). La convergencia puntual al dato inicial, como es usual, es una consecuencia inmediata de la acotación en L^p del operador maximal u^* y la convergencia puntual en un subconjunto denso de L^p. Esquematicemos una pequeña prueba en aras de completitud.

Dado que sabemos que $K_t f \to f$ en L^p cuando $t \to 0^+$, a fin de probar la convergencia puntual, definamos

$$E = \left\{ f \in L^p : \lim_{t\to 0^+} K_t f \text{ existe para casi todo } x \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Notemos que $S(\mathscr{H}) \subseteq E \subseteq L^p$. Como $S(\mathscr{H})$ es denso en L^p, entonces sólo necesitamos probar que E es un subconjunto cerrado de L^p. Sea $\{f_n\}$ una sucesión contenida en E tal que f_n converge en L^p a una función f. Para constatar que $f \in E$ es suficiente probar que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$|E_\varepsilon| := \left| \left\{ x : \limsup_{t\to 0^+} K_t f(x) - \liminf_{t\to 0^+} K_t f(x) > \varepsilon \right\} \right| = 0. \tag{4.4.8}$$

Para cada n escribamos

$$\begin{aligned}|E_\varepsilon| \leq &\left| \left\{ x : \limsup_{t\to 0^+} K_t f_n(x) - \liminf_{t\to 0^+} K_t f_n(x) > \frac{\varepsilon}{3} \right\} \right| \\ &+ \left| \left\{ x : \limsup_{t\to 0^+} K_t (f_n - f)(x) > \frac{\varepsilon}{3} \right\} \right| \\ &+ \left| \left\{ x : \liminf_{t\to 0^+} K_t (f_n - f)(x) > \frac{\varepsilon}{3} \right\} \right|.\end{aligned}$$

El primer término es cero dado que $f_n \in E$. Para acotar los otros dos términos usaremos la acotación en L^p del operador maximal K^* la cual se sigue del ítem (C). Observemos que para cada función g resulta que

$$\left| \limsup_{t \to 0^+} K_t g(x) \right| \le K^* g(x).$$

Luego, como K^* está acotado en L^p y por lo tanto débilmente acotado en L^p, podemos asegurar que

$$\left| \left\{ x : \limsup_{t \to 0^+} K_t(f_n - f)(x) > \frac{\varepsilon}{3} \right\} \right| \precsim \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_{L^p}.$$

Análogamente podemos ver que

$$\left| \left\{ x : \liminf_{t \to 0^+} K_t(f_n - f)(x) > \frac{\varepsilon}{3} \right\} \right| \precsim \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_{L^p}.$$

En consecuencia,

$$|E_\varepsilon| \precsim \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_{L^p}.$$

Así, cuando n tiende a infinito tenemos (4.4.8). Entonces E es cerrado y por lo tanto $E = L^p$. Esto significa que para cada $u_0 \in L^p$ se tiene que

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = \lim_{t \to 0^+} K_t u_0 \quad \text{existe.}$$

Como ya sabemos que $u(x,t) \to u_0(x)$ cuando $t \to 0^+$ en L^p, entonces (D) es inmediato, lo que completa la prueba. □

Por último, notemos que aún cuando en el Teorema (4.4.1) demostramos que la solución u pertenece a $L^p_s(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$ como función de $x \in \mathbb{R}^+$ para cada $t < 0$, puede demostrarse que para todo $t > 0$ la solución u pertenece a $L^p_r(\mathbb{R}^+, \delta, |\cdot|)$ como función de $x \in \mathbb{R}^+$ para todo $r > s$. En efecto, la acotación hecha en (4.4.2) puede generalizarse de la siguiente manera,

$$0 \le |I|^{-2r} e^{-2b_s |I|^{-s} t} \le \left(\frac{r}{esb_s t} \right)^{\frac{2r}{s}}.$$

Luego, la estimación hecha en (4.4.3) resulta

$$\left\| \left(\sum_{I \in \mathscr{D}} |I|^{-2r} |\langle u(\cdot,t), h_I \rangle|^2 |h_I|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} = \qquad \le \widetilde{C} \, \|u_0\|_{L^p} < \infty.$$

Por lo tanto, siguiendo las constantes podemos probar que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p_r} \le \widetilde{C} \left(1 + \frac{C}{t^{r/s}} \right) \|u_0\|_{L^p}.$$

De igual modo, se puede comprobar que la ecuación $u_t = -D^s u$ se satisface en L^p_{r-s}, para todo $r > s$.

Capítulo 5

Difusiones asociadas a diferenciaciones fraccionarias diádicas en espacios de tipo homogéneo

En este capítulo extenderemos a espacios de tipo homogéneo al operador de derivación fraccionaria diádico construido en el capítulo anterior. Probaremos que cada función de la base de Haar es autofunción de dicho operador, como en el caso euclídeo. Luego, extenderemos los resultados de existencia y unicidad de soluciones para los problemas difusivos asociados a dicho operador. Por último, para el caso de medida finita demostraremos nuevamente la convergencia al dato inicial.

5.1. Introducción

Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo no atómico. Denotemos con $\mathscr{D} = \cup_{j\in\mathbb{Z}}\mathscr{D}^j$ a la familia de cubos diádicos de Christ, y supongamos que X consta de un único cuadrante (ver Preliminares, Sección 1.9).

Definamos, al igual que en el caso euclídeo, la distancia diádica δ entre puntos como

$$\delta(x, y) := \inf\{\mu(Q) : \ x, y \in Q \text{ y } Q \in \mathscr{D}\}.$$

Si $x = y$ definimos $\delta(x, x) := 0$. Aquí también es fácil ver que δ es una métrica, más aún es es una ultra-métrica, es decir que satisface una desigualdad del tipo

$$\delta(x, y) \leq \max\{\delta(x, z), \delta(z, y)\}.$$

Análogamente al caso real, se prueba que (X, δ, μ) es un espacio Ahlfors 1-regular, ya que sigue valiendo la propiedad que para todo $Q \in \mathscr{D}$ se satisface que $\mu(Q) \geq C\mu(\widetilde{Q})$, donde $\widetilde{Q}$ es el padre de Q y C una constante positiva independiente de

Q. Luego, el operador D^s también viene dado por

$$D^s f = \int_X \frac{f(x) - f(y)}{\delta(x,y)^{1+s}}\, d\mu(y), \tag{5.1.1}$$

siempre que la integral sea absolutamente convergente. Observemos que en el caso de $\mathbb{R}^n$ la métrica δ acota superiormente a la n-ésima potencia de la distancia euclídea, es decir $|x-y|^n \leq C\delta(x,y)$. Pero ciertamente una desigualdad en el sentido contrario es imposible. En particular, las funciones Lipschitz r usuales de $\mathbb{R}^n$ son de clase Lipschitz $\frac{r}{n}$ con respecto a δ.

Es preciso recordar que la estructura de espacio de tipo homogéneo general tolera notables heterogeneidades dimensionales y de distribución de masa con respecto a la métrica. Pueden existir átomos, que serán aislados y coexistir con otras estructuras continuas del espacio. Así que cuando observamos que $\mathscr{D}^{j+1}$ es un refinamiento de $\mathscr{D}^j$, a diferencia del caso euclídeo, podría ocurrir que $\mathscr{D}^{j+1} = \mathscr{D}^j$ o que $\mathscr{D}^{j+1} \cap \mathscr{D}^j \neq \emptyset$. Incluso que $\mathscr{D}^{j+10} \cap \mathscr{D}^j \neq \emptyset$. Sin embargo, si Q pertenece a dicha intersección puede ocurrir que Q ya no pertenezca a $\mathscr{D}^{j+11}$ porque después de esa «espera de escala» Q tiene que dividirse porque su diámetro es demasiado grande comparado con θ^{j+11}. Si en cambio Q sigue estando en todos los $\mathscr{D}^{j+\ell}$ para todos los $\ell \geq 1$ es porque el «centro» x_k^j de esos cubos diádicos es un átomo y todos los cubos de cada escala mayor que j que contienen a x_k^j se reducen a ese punto. Luego, no hay wavelets de Haar soportada en esos cubos singulares.

En los ejemplos presentados al final de la Sección 1.8 de los Preliminares encontramos arquetipos de este comportamiento. Los Ejemplos 1.8.1, 1.8.2 y 1.8.4 son modelos estándares, donde la proliferación de los cubos es uniforme tanto en el espacio como en todos los niveles. Por otra parte, los Ejemplos 1.8.8 y 1.8.9 representan casos de subdivisión dispar, donde la fragmentación de los cubos se da en mayor o menor medida dependiendo de la dimensión de la componente en la que nos encontramos. Distinto es el caso de los Ejemplos 1.8.6 y 1.8.7, donde encontramos cubos que no se dividen en un nivel y sí lo hacen en el siguiente. Sin embargo, la «espera de escala» sigue un patrón a través de todos los niveles. Aún así, no es difícil imaginar ejemplos donde no haya ningún tipo de regularidad en la partición ni a lo «ancho» del espacio ni a lo «largo» de las escalas.

En general partiremos de $\mathscr{H}$, el sistema de Haar asociado a $\mathscr{D}$ introducido en la Sección 1.10 de los Preliminares. Para cada $h \in \mathscr{H}$ consideremos $Q = Q(h)$ su soporte diádico. Como en Q hay wavelet, Q no es un átomo y por lo tanto tarde o temprano se divide. Algunas veces diremos que $Q \in \mathscr{D}^j$ y que sus hijos pertenecen a $\mathscr{D}^{j+1}$. Es claro que para esos $Q(h)$ siempre hay un j en esas condiciones.

5.2. El operador de diferenciación fraccionaria diádico en espacios de tipo homogéneo

La función característica de un cubo diádico $Q \in \mathscr{D}$ es una función Lipschitz con respecto a la distancia δ. Así, para $0 < s < 1$, la integral

$$\int_X \frac{\chi_Q(x) - \chi_Q(y)}{\delta(x,y)^{1+s}}\, d\mu(y)$$

es absolutamente convergente. Dado que las combinaciones lineales finitas $S(\mathscr{H})$ del sistema de Haar están contenidas en las combinaciones lineales finitas de las funciones características de intervalos diádicos, para cada $f \in S(\mathscr{H})$ y $0 < s < 1$, el operador D^s viene dado por (5.1.1).

Mostraremos a continuación que las funciones del sistema de Haar son autofunciones del operador D^s, extendiendo así el Teorema 4.2.1.

Teorema 5.2.1. *Sea $0 < s < 1$. Para cada $h_Q^\ell \in \mathscr{H}$ tenemos que*

$$D^s h_Q^\ell(x) = m_Q \mu(Q)^{-s} h_Q^\ell(x), \tag{5.2.1}$$

donde $\{m_Q\}_{Q\in\mathscr{D}} \in \ell^\infty$. Más aún,

$$0 < c_m < m_Q < C_m < \infty, \qquad \textit{para todo } Q \in \mathscr{D}. \tag{5.2.2}$$

Demostración. Dados $j, k, i, \ell \in \mathbb{Z}$ tales que $Q_k^j \cap Q_\ell^i = \emptyset$, es inmediato que

$$\delta(x,y) = C(j,k,i,\ell), \qquad \text{para todo } x \in Q_k^j \text{ y todo } y \in Q_\ell^i. \tag{5.2.3}$$

Más aún, la constante $C(j,k,i,\ell) = \mu(\widetilde{Q})$, donde $\widetilde{Q}$ es el primer ancestro común entre Q_k^j y Q_ℓ^i.

Fijemos $h_Q^\ell \in \mathscr{H}$. Veamos que (5.2.1) se satisface. Para esto comencemos suponiendo que $x \notin Q$. Dado que h_Q^ℓ tiene soporte en Q entonces $h_Q^\ell(x) = 0$. Luego, para verificar (5.2.1) bastaría ver que $D^s h_Q^\ell(x) = 0$. Observemos que en este caso podemos escribir

$$D^s h_Q^\ell(x) = \int_{X\setminus Q} \frac{-h_Q^\ell(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} d\mu(y) + \int_Q \frac{-h_Q^\ell(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} d\mu(y). \tag{5.2.4}$$

Dado que $h^\ell_Q(y) \equiv 0$ para todo $y \in X \backslash Q$, el primer término del lado derecho de (5.2.4) es nulo. En el segundo término, como $x \notin Q$ e $y \in Q$ por (5.2.3) tenemos que $\delta(x,y) = C$, luego

$$\int_Q \frac{-h^\ell_Q(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} d\mu(y) = -C^{-1-s} \int_Q h^\ell_Q(y) d\mu(y) = 0.$$

Por lo tanto, queda probado (5.2.1) para $x \notin Q$.

Supongamos ahora que $x \in Q$. Aquí también dividamos

$$D^s h^\ell_Q(x) = \int_Q \frac{h^\ell_Q(x) - h^\ell_Q(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} d\mu(y) + \int_{X\backslash Q} \frac{h^\ell_Q(x) - h^\ell_Q(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} d\mu(y). \tag{5.2.5}$$

Para estimar la primer integral de (5.2.5), llamemos Q^* al cubo hijo de Q al que x pertenece. Luego, escribamos

$$\begin{aligned}\int_Q \frac{h^\ell_Q(x) - h^\ell_Q(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} d\mu(y) &= \int_{Q^*} \frac{h^\ell_Q(x) - h^\ell_Q(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} d\mu(y) \\ &\quad + \int_{Q\backslash Q^*} \frac{h^\ell_Q(x) - h^\ell_Q(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} d\mu(y).\end{aligned}$$

Como h^ℓ_Q es constante sobre cada hijo de Q, así la integral sobre Q^* es nula. Además, para todo $y \in Q\backslash Q^*$ tenemos que $\delta(x,y) = \mu(Q)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_Q \frac{h^\ell_Q(x) - h^\ell_Q(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} d\mu(y) &= \int_{Q\backslash Q^*} \frac{h^\ell_Q(x) - h^\ell_Q(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} d\mu(y) \\ &= \mu(Q)^{-1-s} \int_{Q\backslash Q^*} h^\ell_Q(x) - h^\ell_Q(y) d\mu(y) \\ &= \mu(Q)^{-1-s} \int_Q h^\ell_Q(x) - h^\ell_Q(y) d\mu(y) \\ &= \mu(Q)^{-1-s} \left[\int_Q h^\ell_Q(x) d\mu(y) - \int_Q h^\ell_Q(y) d\mu(y) \right] \\ &= \mu(Q)^{-1-s} \left[h^\ell_Q(x)\mu(Q) - 0 \right] \\ &= \mu(Q)^{-s} h^\ell_Q(x). \qquad (5.2.6)\end{aligned}$$

Resta ver que ocurre con

$$\int_{X\backslash Q} \frac{h^\ell_Q(x) - h^\ell_Q(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} d\mu(y).$$

Dado que $h_Q(y) = 0$ si $y \in X\backslash Q$ entonces

$$\int_{X\backslash Q} \frac{h^\ell_Q(x) - h^\ell_Q(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} d\mu(y) = h^\ell_Q(x) \int_{X\backslash Q} \delta(x,y)^{-1-s} d\mu(y). \tag{5.2.7}$$

Por lo tanto, de (5.2.5), (5.2.6) y (5.2.7) resulta que

$$\begin{aligned} D^s h_Q^\ell &= \int_Q \frac{h_Q^\ell(x) - h_Q^\ell(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} d\mu(y) + \int_{X\setminus Q} \frac{h_Q^\ell(x) - h_Q^\ell(y)}{\delta(x,y)^{1+s}} d\mu(y) \\ &= \mu(Q)^{-s} h_Q^\ell(x) + h_Q^\ell(x) \int_{X\setminus Q} \delta(x,y)^{-1-s} d\mu(y) \\ &= \left[1 + \mu(Q)^s \int_{X\setminus Q} \delta(x,y)^{-1-s} d\mu(y)\right] \mu(Q)^{-s} h_Q^\ell(x) \\ &=: m(x)\mu(Q)^{-s} h_Q^\ell(x) \qquad (5.2.8) \end{aligned}$$

En principio, m definido en (5.2.8) depende de x. Sin embargo, probaremos que m es constante sobre Q. A su vez, mostraremos que dichas constantes, las cuales denotaremos con m_Q, están acotadas por arriba y por abajo uniformemente en Q.

Comencemos estimando la integral

$$\int_{X\setminus Q} \delta(x,y)^{-1-s} d\mu(y).$$

Fijado $Q \in \mathscr{D}^j$ nombremos $Q^{(k)}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, al único cubo diádico del nivel $j-k$ que contiene a Q. Utilizando (5.2.3) es fácil ver que

$$\begin{aligned} \int_{X\setminus Q} \delta(x,y)^{-1-s} d\mu(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q^{(k)}\setminus Q^{(k-1)}} \delta(x,y)^{-1-s} d\mu(y) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\mu\left(Q^{(k)}\right) - \mu\left(Q^{(k-1)}\right)\right] \mu\left(Q^{(k)}\right)^{-1-s} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\mu\left(Q^{(k-1)}\right)}{\mu\left(Q^{(k)}\right)}\right] \mu\left(Q^{(k)}\right)^{-s}. \qquad (5.2.9) \end{aligned}$$

Esto prueba que m es independiente de x en cada cubo, es decir $m(x) = m_Q$, para todo $x \in Q$. Luego, regresando a (5.2.8) queda probado (5.2.1) para $x \in Q$, finalizando la primera parte de la prueba.

Para concluir la demostración sólo queda probar (5.2.2). El Teorema 1.9.1 de los Preliminares nos permite inferir que dados dos cubos, padre e hijo, sus medidas resultan proporcionales independientemente del nivel y el lugar en el espacio en que se encuentren. Esto nos permite concluir que

$$0 < C_1 < \frac{\mu\left(Q^{(k-1)}\right)}{\mu\left(Q^{(k)}\right)} < C_2 < 1,$$

donde C_1 y C_2 son constantes independientes de k y Q. Generalizando la expresión anterior por inducción, deducimos que

$$C_1^k < \frac{\mu(Q)}{\mu\left(Q^{(k)}\right)} < C_2^k. \tag{5.2.10}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{\mu\left(Q^{(k-1)}\right)}{\mu\left(Q^{(k)}\right)}\right]\mu\left(Q^{(k)}\right)^{-s} &< (1-C_1)\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_2^{-k}\mu(Q)\right)^{-s}\\ &= \mu(Q)^{-s}(1-C_1)\sum_{k=1}^{\infty}(C_2^s)^k\\ &= \mu(Q)^{-s}\frac{1-C_1}{C_2^{-s}-1}\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

De forma análoga podemos obtener que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{\mu\left(Q^{(k-1)}\right)}{\mu\left(Q^{(k)}\right)}\right]\mu\left(Q^{(k)}\right)^{-s} > \mu(Q)^{-s}\frac{1-C_2}{C_1^{-s}-1} \tag{5.2.12}$$

Así, de (5.2.9), (5.2.11) y (5.2.12) tenemos que

$$\frac{1-C_2}{C_1^{-s}-1} < \mu(Q)^s\int_{X\setminus Q}\delta(x,y)^{-1-s}d\mu(y) < \frac{1-C_1}{C_2^{-s}-1},$$

y por lo tanto,

$$0 < 1+\frac{1-C_2}{C_1^{-s}-1} < m_Q < 1+\frac{1-C_1}{C_2^{-s}-1} < \infty,$$

lo cual concluye la prueba. □

La ecuación (5.2.1) nos permite establecer en el siguiente teorema una definición alternativa de D^s cuando actúa sobre funciones de $L_s^p(X,\delta,\mu)$. Más aún, brinda una caracterización del espacio de Sobolev L_s^p en función del sistema de Haar.

Teorema 5.2.2. *Si $f \in L_s^p(X,\delta,\mu)$, entonces*

$$D^s f(x) = \sum_{Q\in\mathscr{D}}\sum_{\ell\in\Lambda(Q)} m_Q\mu(Q)^{-s}\left\langle f.h_Q^\ell\right\rangle h_Q^\ell(x). \tag{5.2.13}$$

Luego, el espacio $L_s^p(X,\delta,\mu)$ coincide con el conjunto de todas las funciones de $L^p(X,\mu)$ tales que

$$\left(\sum_{Q\in\mathscr{D}}\sum_{\ell\in\Lambda(Q)}\mu(Q)^{-2s}|\langle f,h_l\rangle|^2|h_Q^\ell|^2\right)^{\frac{1}{2}} \in L^p(X,\mu).$$

Más aún,

$$\|f\|_{L^p} + \left\| \left(\sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \mu(Q)^{-2s} |\langle f, h_l\rangle|^2 |h_Q^\ell|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}$$

es equivalente a $\|f\|_{L^p_s}$*.*

Demostración. Recordemos que toda $h_Q^\ell \in \mathscr{H}$ es Lipschitz 1 respecto a δ y tiene soporte acotado. Por lo tanto, $h_Q^\ell \in S(X,\delta,\mu)$. Luego, si $f \in L^p$ entonces

$$\langle D^s f, h_Q^\ell\rangle = \langle f, D^s h_Q^\ell\rangle.$$

Por el Teorema 5.2.1 sabemos que $D^s h = m_Q \mu(Q)^{-s} h$, en consecuencia

$$\langle D^s f, h_Q^\ell\rangle = m_Q \mu(Q)^{-s} \langle f, h_Q^\ell\rangle. \tag{5.2.14}$$

Supongamos que $f \in L^p_s(X,\delta,\mu)$, entonces $D^s f \in L^p(X,\mu)$. Como $\mathscr{H}$ es una base incondicional de $L^p(X,\mu)$ tenemos que

$$\begin{aligned} D^s f(x) &= \sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \left\langle D^s f. h_Q^\ell \right\rangle h_Q^\ell(x) \\ &= \sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} m_Q \mu(Q)^{-s} \left\langle f. h_Q^\ell \right\rangle h_Q^\ell(x), \end{aligned}$$

lo cual prueba (5.2.13). Por otro lado, el Teorema 1.10.3 nos asegura que

$$\|D^s f\|_{L^p} \approx \left\| \left(\sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} |\langle D^s f, h_Q^\ell\rangle|^2 |h_Q^\ell|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.$$

Incorporando lo obtenido en (5.2.14) resulta que

$$\|D^s f\|_{L^p} \approx \left\| \left(\sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \mu(Q)^{-2s} |\langle f, h_Q^\ell\rangle|^2 |h_Q^\ell|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p},$$

lo cual termina de probar el teorema. □

5.3. Solución de Fourier-wavelets

En esta sección enunciaremos y probaremos el teorema central de este capítulo. El mismo es una generalización del Teorema 4.4.1 a espacios de tipo homogéneo. La demostración sigue las mismas líneas que las del teorema mencionado, aunque con algunas diferencias.

Por otra parte, observemos que en la Sección 1.10 de los Preliminares hemos notado que cuando el espacio es de medida finita el sistema de Haar no alcanza a ser una base de L^2. Sin embargo, con el agregado de las funciones constantes, digamos de la función $\mu(X)^{-1/2}$, se obtiene una base ortonormal de $L^2(X,\mu)$. Para evitar bifurcaciones discursivas un poco irrelevantes, cuando $\mu(X)$ sea finita supondremos que la integral del dato inicial u_0 es nula.

Teorema 5.3.1. *Sean $0<s<1$, $1<p<\infty$ y $u_0 \in L^p(X,\mu)$ dados. Luego,*

(A) *la función u definida en $X \times \mathbb{R}^+$ por*

$$u(x,t) := \sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t}\langle u_0, h_Q^\ell\rangle h_Q^\ell(x),$$

pertenece a $L_s^p(X,\delta,\mu)$ como función de $x\in X$ para cada $t>0$;

(B) *la función u resuelve el problema*

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -D^s u(x,t), \qquad x\in X, t>0,\\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad x\in X,\end{cases} \tag{5.3.1}$$

donde la derivada con respecto a t es una derivada Fréchet de la función definida en $(0,\infty)$ con valores en $L^p(X,\mu)$ y la condición inicial se satisface en $L^p(X,\mu)$, es decir $\|u(\cdot,t)-u_0\|_{L^p}\to 0$, cuando $t\to 0$.

Demostración de (A). Dado que $|e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t}| \le 1$ por ser $m_Q\mu(Q)^{-s}t$ positivo, entonces por el Teorema 1.10.3 resulta que $\|u(\cdot,t)\|_{L^p} \le \|u_0\|_{L^p}$ para todo $t>0$. Por otro lado, recordando que $0<c_m<m_Q$, resulta que

$$0 \le \mu(Q)^{-2s}e^{-2m_Q\mu(Q)^{-s}t} \le \mu(Q)^{-2s}e^{-2c_m\mu(Q)^{-s}t} \le (ec_m t)^{-2}. \tag{5.3.2}$$

Luego, para cada $t>0$ fijo

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \mu(Q)^{-2s}|\langle u(\cdot,t), h_Q^\ell\rangle|^2|h_Q^\ell|^2 \right)^{\frac12} \right\|_{L^p}\\
&\qquad = \left\| \left(\sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \mu(Q)^{-2s}e^{-2m_Q\mu(Q)^{-s}t}|\langle u_0, h_Q^\ell\rangle|^2|h_Q^\ell|^2 \right)^{\frac12} \right\|_{L^p}\\
&\qquad \le C\left\| \left(\sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} |\langle u_0, h_Q^\ell\rangle|^2|h_Q^\ell|^2 \right)^{\frac12} \right\|_{L^p}\\
&\qquad \le \widetilde{C}\,\|u_0\|_{L^p} < \infty. \qquad (5.3.3)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Teorema 5.2.2, $u(\cdot,t) \in L^p_s(X,\delta,\mu)$ para cada $t>0$.

Demostración de (B). Para verificar la primera igualdad de (5.3.1) notemos que basta chequear que para cada t fijo

(5.3.4)
$$\sup_{Q\in\mathscr{D}}\left|\frac{e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}(t+h)}-e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t}}{h}+m_Q\mu(Q)^{-s}e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t}\right|\longrightarrow 0,$$

cuando $h\to 0$. Esto es equivalente a mostrar que

$$\sup_{Q\in\mathscr{D}}\left|\frac{e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t}}{h}\left[e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}h}-1+m_Q\mu(Q)^{-s}h\right]\right|\longrightarrow 0,$$

cuando $h\to 0$. Por el teorema de Taylor, resulta que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t}}{h}\left[e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}h}-1+m_Q\mu(Q)^{-s}h\right]\right|\\
&\qquad\leq\left|\frac{e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t}}{h}\left[h^2\max_{0\leq\zeta\leq h}\left|(m_Q\mu(Q)^{-s})^2e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}\zeta}\right|\right]\right|\\
&\qquad=\left|\frac{m_Q^2}{\mu(Q)^{2s}}e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t}h\right|\\
&\qquad\leq\left|\frac{C_m^2}{\mu(Q)^{2s}}e^{-c_mt\mu(Q)^{-s}}\right||h|\\
&\qquad\leq\left(\frac{2C_m}{c_mte}\right)^2|h|,
\end{aligned}$$

lo cual prueba (5.3.4) y así queda corroborada la primera igualdad de (5.3.1).

Para concluir la demostración de (B) debemos probar la convergencia al dato inicial en L^p, es decir

$$\|u(\cdot,t)-u_0\|_{L^p}\longrightarrow 0,\qquad\text{cuando } t\to 0. \tag{5.3.5}$$

Tomemos $\varepsilon>0$ arbitrario. Comencemos realizando un reordenamiento de la familia diádica $\mathscr{D}$ según la medida de los cubos. Definamos para cada $j\in\mathbb{Z}$ las familias de cubos $\mathscr{D}^j_\mu := \{Q\in\mathscr{D} : 2^{-j}\leq\mu(Q)\leq 2^{-j+1}\}$. Notemos que las familias $\mathscr{D}^j_\mu$ son disjuntas dos a dos y además satisfacen que $\mathscr{D}=\cup_{j\in\mathbb{Z}}\mathscr{D}^j_\mu$. Dado que por el Teorema 1.10.3 sabemos que $\mathscr{H}$ es una base incondicional para L^p, podemos escoger $i \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande para que

$$\left\| \left(\sum_{j>i} \sum_{Q\in\mathscr{D}^j_\mu} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} |\langle u_0, h^\ell_Q\rangle|^2 |h^\ell_Q|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} < \varepsilon. \tag{5.3.6}$$

Observemos que si $Q \in \mathscr{D}^j_\mu$, con $j \leq i$ tenemos que $\mu(Q) \geq 2^{-i}$. De este modo, podemos elegir t_0 suficientemente pequeño tal que

$$|e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t} - 1| = 1 - e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t} \leq 1 - e^{-C_m 2^{-is}t} < \varepsilon, \tag{5.3.7}$$

para cada $t < t_0$, para todo $Q \in \mathscr{D}^j_\mu$, con $j \leq i$. Notemos que

$$\begin{aligned}
&\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^p} \\
&\quad \lesssim \left\| \left(\sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} |e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t} - 1||\langle u_0, h^\ell_Q\rangle|^2 |h^\ell_Q|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&\quad \leq \left\| \left(\sum_{j\leq i} \sum_{Q\in\mathscr{D}^j_\mu} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} |e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t} - 1||\langle u_0, h^\ell_Q\rangle|^2 |h^\ell_Q|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&\qquad\qquad + \left\| \left(\sum_{j>i} \sum_{Q\in\mathscr{D}^j_\mu} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} |e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t} - 1||\langle u_0, h^\ell_Q\rangle|^2 |h^\ell_Q|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, de (5.3.6) y (5.3.7), podemos asegurar que para todo $t < t_0$ se satisface que

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^p} &\lesssim \varepsilon \left\| \left(\sum_{j\leq i} \sum_{Q\in\mathscr{D}^j_\mu} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} |\langle u_0, h^\ell_Q\rangle|^2 |h^\ell_Q|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&\qquad + 2 \left\| \left(\sum_{j>i} \sum_{Q\in\mathscr{D}^j_\mu} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} |\langle u_0, h^\ell_Q\rangle|^2 |h^\ell_Q|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&\lesssim \varepsilon \|u_0\|_{L^p} + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

De este modo queda demostrado (5.3.5) y así completamos la prueba de (B). □

Por último, notemos que al igual que en el caso de $\mathbb{R}^+$ aún cuando el Teorema (5.3.1) demuestra que la solución u pertenece a $L^p_s(X, \delta, \mu)$ como función de $x \in X$ para cada $t < 0$, puede probarse que para todo $t > 0$ la solución u

pertenece a $L^p_r(X,\delta,\mu)$ como función de $x \in X$ para todo $r > s$. En efecto, la acotación hecha en (5.3.2) puede generalizarse de la siguiente manera,

$$0 \leq \mu(Q)^{-2r} e^{-2m_Q\mu(Q)^{-s}t} \leq \left(\frac{r}{esc_m t}\right)^{\frac{2r}{s}}.$$

Luego, la estimación hecha en (5.3.3) resulta

$$\left\| \left(\sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \mu(Q)^{-2r} |\langle u(\cdot,t), h^\ell_Q\rangle|^2 |h^\ell_Q|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leq \widetilde{C} \left\| u_0 \right\|_{L^p}.$$

Por lo tanto, siguiendo las constantes podemos probar que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p_r} \leq \widetilde{C} \left(1 + \frac{C}{t^{r/s}}\right) \|u_0\|_{L^p}.$$

Aquí también se puede comprobar que la ecuación $u_t = -D^s u$ se satisface en L^p_{r-s}, para todo $r > s$.

5.4. Convergencia puntual al dato inicial

En esta sección queremos probar que u converge puntualmente al dato u_0 para casi todo punto de X. En general el procedimiento es similar al presentado en la Sección 4.3 del capítulo anterior. Sin embargo, sólo probaremos el resultado en el caso que $\mu(X) < \infty$.

Teorema 5.4.1. *Sea (X,δ,μ) un espacio de medida finita, $u_0 \in L^p(X,\mu)$, con $1 < p < \infty$ y u definida por*

$$u(x,t) := \sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t} \langle u_0, h^\ell_Q\rangle h^\ell_Q(x). \tag{5.4.1}$$

Luego, $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = u_0(x)$, para casi todo $x \in X$ con respecto a μ.

Demostración. Escribamos el producto interno del lado derecho de (5.4.1) como una integral e intercambiemos el orden de la misma con la serie. Así obtenemos que

$$u(x,t) = \int_X \left[\sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t} h^\ell_Q(y) h^\ell_Q(x) \right] u_0(y) d\mu(y).$$

Si denotamos con $k_t(x,y)$ al núcleo de la expresión anterior, es decir

$$k_t(x,y) = \sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} e^{-m_Q\mu(Q)^{-s}t} h^\ell_Q(y) h^\ell_Q(x), \tag{5.4.2}$$

entonces llamando con K_t al operador que tiene por núcleo a k_t tenemos que

$$u(x,t) = \int_X k_t(x,y)u_0(y)d\mu(y) = K_t u_0(x).$$

Para estimar $k_t(x,y)$ fijemos primero los puntos x e y en X. Observemos que en (5.4.2) sólo sobreviven aquellos términos en los que Q contenga tanto a x como a y. Por lo tanto, denotemos con Q^0 al menor cubo diádico que contiene a x e y. Sea J el nivel al que pertenece dicho cubo y sea Q^j el ancestro del nivel $J-j$ de Q. Luego,

$$k_t(x,y) = \sum_{j\geq 0}\sum_{\ell\in\Lambda(Q^j)} e^{-m_{Q^j}\mu(Q^j)^{-s}t} h^\ell_{Q^j}(y)h^\ell_{Q^j}(x)$$

Dado que $\left|h^\ell_{Q^j}(y)h^\ell_{Q^j}(x)\right| \leq C\mu\left(Q^j\right)^{-1}$, entonces

$$|k_t(x,y)| \leq C\sum_{j\geq 0}\sum_{\ell\in\Lambda(Q^j)} e^{-m_{Q^j}\mu(Q^j)^{-s}t}\mu\left(Q^j\right)^{-1}$$

Es fácil comprobar que existe una constante $A>1$ tal que para todo $Q\in\mathscr{D}$ se tiene que $A\mu(Q)\leq\mu(J)$, donde J es el padre de Q. De este modo, en nuestro caso, $A^j\mu(Q^0)\leq\mu(Q^j)$. Recordemos que m_{Q^j} está acotado inferiormente por una constate positiva c_m. En consecuencia, $e^{-m_{Q^j}\mu(Q^j)^{-s}t} \leq e^{-c_m A^{-js}\mu(Q^0)^{-s}t}$. Por lo tanto,

$$|k_t(x,y)| \leq C\sum_{j\geq 0}\sum_{\ell\in\Lambda(Q^j)} e^{-c_m A^{-js}\mu(Q^0)^{-s}t}A^{-j}\mu\left(Q^0\right)^{-1}$$

Dado que la cantidad de hijos de cada cubo está acotada uniformemente, es decir $\#\Lambda(Q)\leq N$ para todo $Q\in\mathscr{D}$, entonces

$$|k_t(x,y)| \leq \frac{\bar{C}}{\mu\left(Q^0\right)}\sum_{j\geq 0} A^{-j}e^{-c_m A^{-js}\mu(Q^0)^{-s}t}$$

Como Q^0 es el menor cubo diádico que contiene a x e y sabemos que $\delta(x,y) = \mu(Q^0)$, luego

$$|k_t(x,y)| \leq \frac{\bar{C}}{\delta(x,y)}\sum_{j\geq 0} A^{-j}e^{-c_m A^{-js}\delta(x,y)^{-s}t}$$

Por lo tanto, definiendo $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ como

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}\sum_{j\geq 0} A^{-j}e^{-c_m(A^j r)^{-s}},$$

podemos asegurar que

$$|k_t(x,y)| \leq \frac{\bar{C}}{t^{1/s}}\varphi\left(\frac{\delta(x,y)}{t^{1/s}}\right).$$

Observemos que $\delta(x,y) < \mu(X)$ para todo x e y en X. En consecuencia, será suficiente comprobar que φ es integrable en el intervalo $(0, \mu(X))$. Para esto comencemos tomando $0 < r < 1$. Fijemos $0 < \varepsilon < 1$ y definamos $n(r) := \lceil -\varepsilon \log_A r \rceil$. Luego podemos partir φ de la siguiente forma

$$\varphi(r) = \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{n(r)} A^{-j} e^{-c_m (A^j r)^{-s}} + \frac{1}{r}\sum_{j>n(r)} A^{-j} e^{-c_m s (A^j r)^{-s}}. \tag{5.4.3}$$

Dado que para $j \leq n(r)$ tenemos que $e^{-c_m(A^j r)^{-s}} \leq C e^{-c_m r^{-(1-\varepsilon)s}}$. Luego,

$$\frac{1}{r}\sum_{j=0}^{n(r)} A^{-j} e^{-c_m (A^j r)^{-s}} \leq \frac{C}{r} e^{-c_m r^{-(1-\varepsilon)s}} \sum_{j=1}^{n(r)} A^{-j} \leq \frac{\dot{C} e^{-c_m r^{-(1-\varepsilon)s}}}{r} \leq \bar{C}.$$

Por último, para el segundo término del lado derecho de (5.4.3) podemos ver que

$$\frac{1}{r}\sum_{j>n(r)} A^{-j} e^{-c_m (A^j r)^{-s}} \leq \frac{1}{r}\sum_{j>n(r)} A^{-j} \leq C\frac{1}{r} A^{-n(r)} = C\frac{1}{r} r^{\varepsilon} = \frac{C}{r^{1-\varepsilon}}.$$

De este modo, resulta que $\varphi(r) \leq \frac{C}{r^{1-\varepsilon}}$ para todo $r \in (0,1)$. Como $\varphi(r) \leq \frac{\dot{C}}{r}$ podemos asegurar que $\varphi(r) \leq \dot{C}$, para todo $r > 1$. Por consiguiente, φ resulta integrable en el intervalo $(0, \mu(X))$. Procediendo de aquí en adelante como en la página 77 obtenemos que

$$\sup_{t>0} |K_t u_0(x)| \leq C M_{dy} u_0(x),$$

y por lo tanto K^* es un operador acotado en L^p.

La convergencia puntual al dato inicial es, al igual que en el caso euclídeo, una consecuencia inmediata de la acotación en L^p del operador maximal K^* y la convergencia puntual en un subconjunto denso de L^p. $\square$

Capítulo 6

Ecuaciones de tipo Schrödinger no locales

En este capítulo estudiaremos en el contexto diádico problemas asociados a operadores no locales del tipo Schrödinger. El objetivo central será extender los resultados presentados en [4] al contexto más general de espacios de tipo homogéneo. Caracterizaremos las funciones pertenecientes a espacios de Besov diádicos a través de sus coeficientes de Haar. Esto nos permitirá probar, bajo adecuadas condiciones de regularidad Besov en el dato inicial, existencia de soluciones para el problema. Por último, obtendremos la convergencia puntual al dato inicial realizando estimaciones que involucran operadores maximales sharp de tipo Calderón.

6.1. Introducción

Es conocido que el problema de la convergencia puntual al dato inicial para soluciones de la ecuación de Schrödinger $i\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ requiere de algún tipo de regularidad en el dato —ver por ejemplo [15]. En [4], se muestra que este también es el caso en problemas asociados a operadores no locales del tipo Schrödinger. Por ejemplo, consideran el problema

$$\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t} = D^s u, & x \in \mathbb{R}^+, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{6.1.1}$$

donde el operador D^s es el presentado en el Capítulo 4. En este trabajo prueban que la convergencia puntual al dato inicial requiere de algún tipo de regularidad Besov en la condición inicial u_0.

Como vimos en el Capítulo 5, las particiones diádicas introducidas por Michael Christ en [17] en espacios de tipo homogéneo, junto con la generalización de las bases de Haar construida en [2] a partir de estas familias diádicas, permiten extender el operador D^s y su respectivo análisis espectral al contexto de espacios de tipo homogéneo no atómicos. De esta forma, contamos con los ingredientes necesarios para poder generalizar el problema (6.1.1) a nuestro escenario.

El ambiente natural para nuestro dato inicial será el espacio de Besov diádico $B^2_r(X,\delta,\mu)$ —ver Preliminares, Sección 1.12—, el cual es el espacio de las funciones de cuadrado integrable que satisfacen que

$$\int_X\int_X \frac{|f(x)-f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y)<\infty.$$

Dado que nuestro operador D^s puede ser descompuesto en términos de la base de Haar, nuestro primer objetivo será conseguir una caracterización de los espacios de Besov diádicos a partir de $\mathscr{H}$.

6.2. Caracterización de los espacios de Besov diádicos

Dado $r\in(0,1)$ y una función $f\in B^2_r(X,\delta,\mu)$ su norma de Besov diádica viene dada por

$$\|f\|^2_{B^2_r}:=\|f\|^2_{L^2}+\int_X\int_X \frac{|f(x)-f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y).$$

El siguiente teorema da una caracterización del espacio de Besov en función de los coeficientes de Haar de una función.

Teorema 6.2.1. *El espacio $B^2_r(X,\delta,\mu)$ coincide con el conjunto de todas las funciones de $L^2(X,\mu)$ tales que*

$$\sum_{Q\in\mathscr{D}}\sum_{\ell\in\Lambda(Q)}\frac{|\langle f,h^\ell_Q\rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}}<\infty.$$

Más aún,

$$\|f\|^2_{B^2_r}\approx\|f\|^2_{L^2}+\sum_{Q\in\mathscr{D}}\sum_{\ell\in\Lambda(Q)}\frac{|\langle f,h^\ell_Q\rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}}.$$

Antes de demostrar este teorema probaremos algunos resultados auxiliares.

Lema 6.2.2. *Sean $Q,J\in\mathscr{D}$ tales que $Q\neq J$. Luego, para todo $\ell\in\Lambda(Q)$ y todo $\nu\in\Lambda(J)$ tenemos que*

$$\int_X\int_X \frac{[h^\ell_Q(x)-h^\ell_Q(y)][h^\nu_J(x)-h^\nu_J(y)]}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y)=0. \tag{6.2.1}$$

Además, para todo $\upsilon\in\Lambda(Q)$ tal que $\ell\neq\upsilon$ resulta que

$$\int_X\int_X \frac{[h^\ell_Q(x)-h^\ell_Q(y)][h^\upsilon_Q(x)-h^\upsilon_Q(y)]}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y)=0. \tag{6.2.2}$$

Demostración. Antes de demostrar (6.2.1), para facilitar la notación definamos

$$H_Q^\ell(x,y) := [h_Q^\ell(x) - h_Q^\ell(y)] \quad \text{y} \quad H_{Q,J}^{\ell,\nu} = H_Q^\ell H_J^\nu.$$

En el caso que los parámetros ℓ y ν no jueguen ningún rol, omitiremos su notación tanto en las funciones h como en H.

Comencemos considerando tres posibles casos:

(A) $Q \cap J = \emptyset$.

(B) $Q \subsetneq J$.

(C) $J \subsetneq Q$.

Caso (A). Observemos que si $x, y \in X \backslash Q$ entonces $H_Q = 0$ y si $x, y \in X \backslash J$ entonces $H_J = 0$. Luego, como Q y J son disjuntos, tenemos que $H_{Q,J} \neq 0$ si y sólo si $x \in Q$ e $y \in J$, o $x \in J$ e $y \in Q$. Más aún,

$$H_{Q,J}(x,y) = \begin{cases} h_Q(x)h_J(y), & \text{si } x \in Q \text{ e } y \in J, \\ h_J(x)h_Q(y), & \text{si } x \in J \text{ e } y \in Q. \end{cases}$$

Consideremos por simetría sólo el caso $x \in Q$ e $y \in J$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_J \int_Q \frac{H_{Q,J}(x,y)}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) &= \int_J \int_Q \frac{h_Q(x)h_J(y)}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) \\ &= \frac{1}{\delta(Q,J)^{1+2r}} \left(\int_Q h_Q(x)\, d\mu(x)\right)\left(\int_J h_J(y) d\mu(y)\right), \end{aligned}$$

donde $\delta(Q,J)$ es el valor de la constante que toma la función δ según la ecuación (5.2.3). Dado que toda $h \in \mathscr{H}$ tiene promedio nulo, obtenemos (6.2.1) para el Caso (A).

Caso (B). Notemos que si $x, y \in X \backslash Q$ entonces $H_Q = 0$. Así también, recordemos que toda $h \in \mathscr{H}$ es constante sobre cada cubo contenido estrictamente en su soporte. Luego, si ambos, x e y, pertenecen a Q entonces $H_J = 0$. Por lo tanto, uno y sólo uno de ellos debe estar en Q. Bastará por simetría suponer que $x \in Q$ e $y \in X \backslash Q$. En este caso, $h_J(x) = C$ y $\delta(x,y) = \delta(Q,y)$, para todo $x \in Q$. Luego,

$$\int_{X\backslash Q} \int_Q \frac{H_{Q,J}(x,y)}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) = \int_{X\backslash Q} \frac{[C - h_J(y)]}{\delta(Q,y)^{1+2r}} \left(\int_Q h_Q(x)\, d\mu(x)\right) d\mu(y).$$

Una vez más, el promedio nulo de h_Q prueba (6.2.1) para el Caso (B).

Caso (C). Es análogo al Caso (B).

Por último, resta probar (6.2.2). Primero observemos que si ambos x e y pertenecen a $X \backslash Q$ entonces $H_Q = 0$ y por lo tanto $H_{Q,Q}$ también. De aquí en adelante será de importancia el hecho de que $\ell \neq \upsilon$. Si $x \in Q$ e $y \in X\backslash Q$, entonces $H^{\ell,\upsilon}_{Q,Q}(x,y) = h^\ell_Q(x)h^\upsilon_Q(x)$. Luego, tenemos que

$$\int_{X\backslash Q}\int_Q \frac{H^{\ell,\upsilon}_{Q,Q}(x,y)}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) = \int_{X\backslash Q} \frac{1}{\delta(Q,y)^{1+2r}}\, d\mu(y) \int_Q h^\ell_Q(x)h^\upsilon_Q(x)\, d\mu(x).$$

Como h^ℓ_Q y h^υ_Q son ortogonales entre sí, la integral es nula.

De esta forma, sólo queda ver que ocurre cuando x e y pertenecen a ambos a Q. Denotemos con $Q' \prec Q$ si Q' es hijo de Q. Luego, podemos escribir

$$\int_Q\int_Q \frac{H^{\ell,\nu}_{Q,Q}(x,y)}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) = \sum_{Q'\prec Q}\sum_{Q''\prec Q}\int_{Q'}\int_{Q''} \frac{H^{\ell,\nu}_{Q,Q}(x,y)}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y).$$

Notemos que si ambos pertenecen al mismo hijo de Q entonces $h_Q(x) = h_Q(y)$ y por tanto $H_{Q,Q} = 0$. En consecuencia, los términos con $Q' = Q''$ en la sumatoria son nulos. Como además $\delta(x,y) = \mu(Q)$, para todo Q' y Q'' hijos de Q distintos, entonces

$$\begin{aligned}
&\int_X\int_X \frac{H^{\ell,\upsilon}_{Q,Q}(x,y)}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) \\
&\qquad = \frac{1}{\mu(Q)^{1+2r}} \sum_{Q'\prec Q}\sum_{\substack{Q''\prec Q\\ Q''\neq Q'}}\int_{Q'}\int_{Q''} H^{\ell,\upsilon}_{Q,Q}(x,y)\, d\mu(x)d\mu(y) \\
&\qquad = \frac{1}{\mu(Q)^{1+2r}} \int_Q\int_Q H^{\ell,\upsilon}_{Q,Q}(x,y)\, d\mu(x)d\mu(y). \qquad (6.2.3)
\end{aligned}$$

Por consiguiente, para probar (6.2.2) basta ver que

$$\int_Q\int_Q H^{\ell,\upsilon}_{Q,Q}(x,y)\, d\mu(x)d\mu(y) = 0. \qquad (6.2.4)$$

Notemos que

$$H^{\ell,\upsilon}_{Q,Q}(x,y) = h^\ell_Q(x)h^\upsilon_Q(x) - h^\ell_Q(x)h^\upsilon_Q(y) - h^\ell_Q(y)h^\upsilon_Q(x) + h^\ell_Q(y)h^\upsilon_Q(y).$$

Dado que h^ℓ_Q y h^υ_Q son ortogonales entre sí, lo términos $h^\ell_Q(x)h^\upsilon_Q(x)$ y $h^\ell_Q(y)h^\upsilon_Q(y)$ tienen integral nula. Los dos términos restantes son funciones de variables separadas donde cada una de ellas tiene promedio nulo. Así obtenemos (6.2.4) como queríamos. □

Lema 6.2.3. *Sean $Q \in \mathscr{D}$ y $\ell \in \Lambda(Q)$. Luego*

$$c_{Q,r} := \int_X\int_X \frac{[h^\ell_Q(x) - h^\ell_Q(y)]^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y)$$

es una constante independiente de ℓ y además $c_{Q,r} \approx \mu(Q)^{-2r}$.

Demostración. Debemos probar que

$$\int_X \int_X \frac{H_{Q,Q}^{\ell,\ell}(x,y)}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) \approx \mu(Q)^{-2r}.$$

Supongamos que $x, y \in X\backslash Q$. entonces como $H_{Q,Q}^{\ell,\ell} \equiv 0$ resulta que

$$\int_{X\backslash Q} \int_{X\backslash Q} \frac{H_{Q,Q}^{\ell,\ell}(x,y)}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) = 0. \tag{6.2.5}$$

Por otro lado, si $x \in Q$ e $y \in X\backslash Q$ tenemos que δ no depende de x y por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_{X\backslash Q} \int_{Q} \frac{H_{Q,Q}^{\ell,\ell}(x,y)}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) &= \int_{X\backslash Q} \frac{1}{\delta(Q,y)^{1+2r}}\, d\mu(y) \int_Q [h_Q^\ell(x)]^2\, d\mu(x)\\ &= \int_{X\backslash Q} \frac{1}{\delta(Q,y)^{1+2r}}\, d\mu(y).\end{aligned}$$

En la prueba del Teorema 5.2.1 hemos demostrado que para todo $s > 0$ vale que

$$\int_{X\backslash Q} \frac{1}{\delta(x,y)^{1+s}}\, d\mu(y) \approx \mu(Q)^{-s} \qquad \text{para todo } x \in Q.$$

En consecuencia,

$$\int_{X\backslash Q} \int_{Q} \frac{H_{Q,Q}^{\ell,\ell}(x,y)}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) \approx \mu(Q)^{-2r}. \tag{6.2.6}$$

En forma análoga, se prueba que

$$\int_{Q} \int_{X\backslash Q} \frac{H_{Q,Q}^{\ell,\ell}(x,y)}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) \approx \mu(Q)^{-2r}. \tag{6.2.7}$$

Cuando x e y pertenecen ambos a Q, podemos ver al igual que en la ecuación (6.2.3) que

$$\begin{aligned}&\int_{Q} \int_{Q} \frac{H_{Q,Q}^{\ell,\ell}(x,y)}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y)\\ &\qquad = \frac{1}{\mu(Q)^{1+2r}} \int_Q \int_Q H_{Q,Q}^{\ell,\ell}(x,y)\, d\mu(x)d\mu(y).\end{aligned} \tag{6.2.8}$$

Notemos que

$$H_{Q,Q}^{\ell,\ell}(x,y) = [h_Q^\ell(x)]^2 - 2h_Q^\ell(x)h_Q^\ell(y) + [h_Q^\ell(y)]^2.$$

Dado que por un lado tenemos que

$$\int_Q \int_Q [h_Q^\ell(x)]^2\, d\mu(x)d\mu(y) = \int_Q \int_Q [h_Q^\ell(y)]^2\, d\mu(x)d\mu(y) = \mu(Q),$$

y por otro

$$\int_Q \int_Q h_Q^\ell(x) h_Q^\ell(y)\, d\mu(x)d\mu(y) = \int_Q h_Q^\ell(x)\, d\mu(x) \int_Q h_Q^\ell(y)\, d\mu(y) = 0,$$

resulta que

$$\int_Q \int_Q H_{Q,Q}^{\ell,\ell}(x,y)\, d\mu(x)d\mu(y) = 2\mu(Q).$$

Luego, por la ecuación (6.2.8) concluimos que

$$\int_Q \int_Q \frac{H_{Q,Q}^{\ell,\ell}(x,y)}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) = 2\mu(Q)^{-2r}.$$

Por lo tanto, adicionando esta última ecuación y las ecuaciones (6.2.5), (6.2.6) y (6.2.7), obtenemos la prueba de este lema. □

Lema 6.2.4. *Sea* $0 < r < 1$. *Para toda* $\varphi, \psi \in S(\mathscr{H})$ *se satisface que*

$$\int_X \int_X \frac{[\varphi(x) - \varphi(y)][\psi(x) - \psi(y)]}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) = \sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} c_{Q,r} \langle \varphi, h_Q^\ell\rangle \langle \psi, h_Q^\ell\rangle.$$

En particular, si $\phi = \psi$ *resulta que*

$$\int_X \int_X \frac{[\varphi(x) - \varphi(y)]^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) \approx \sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \frac{|\langle \varphi, h_Q^\ell\rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}}.$$

Demostración. Dadas $\varphi, \psi \in S(\mathscr{H})$ notemos que

$$[\varphi(x) - \varphi(y)][\psi(x) - \psi(y)] = \left[\sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \langle \varphi, h_Q^\ell\rangle [h_Q^\ell(x) - h_Q^\ell(y)]\right] \times \left[\sum_{J\in\mathscr{D}} \sum_{\nu\in\Lambda(J)} \langle \psi, h_Q^\ell\rangle [h_J^\nu(x) - h_J^\nu(y)]\right].$$

Dado que cada suma es finita, tenemos que

$$[\varphi(x) - \varphi(y)][\psi(x) - \psi(y)] = \sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \sum_{J\in\mathscr{D}} \sum_{\nu\in\Lambda(J)} \langle \varphi, h_Q^\ell\rangle \langle \psi, h_J^\nu\rangle [h_Q^\ell(x) - h_Q^\ell(y)][h_J^\nu(x) - h_J^\nu(y)].$$

Por lo tanto,

$$\int_X \int_X \frac{[\varphi(x) - \varphi(y)][\psi(x) - \psi(y)]}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) = \sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \sum_{J\in\mathscr{D}} \sum_{\nu\in\Lambda(J)} \langle \varphi, h_Q^\ell\rangle \langle \psi, h_J^\nu\rangle \times$$

$$\int_X \int_X \frac{[h_Q^\ell(x) - h_Q^\ell(y)][h_J^\nu(x) - h_J^\nu(y)]}{\delta(x,y)^{1+2r}} \, d\mu(x) d\mu(y).$$

Por el Lema 6.2.2 resulta que

$$\begin{aligned}
&\int_X \int_X \frac{[\varphi(x) - \varphi(y)][\psi(x) - \psi(y)]}{\delta(x,y)^{1+2r}} \, d\mu(x) d\mu(y) \\
&\qquad = \sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} \langle \varphi, h_Q^\ell \rangle \langle \psi, h_Q^\ell \rangle \int_X \int_X \frac{[h_Q^\ell(x) - h_Q^\ell(y)]^2}{\delta(x,y)^{1+2r}} \, d\mu(x) d\mu(y) \\
&\qquad = \sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} c_{Q,r} \langle \varphi, h_Q^\ell \rangle \langle \psi, h_Q^\ell \rangle,
\end{aligned}$$

lo cual prueba la primera de las igualdades a demostrar. Por último, por el Lema 6.2.3 obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_X \int_X \frac{[\varphi(x) - \varphi(y)]^2}{\delta(x,y)^{1+2r}} \, d\mu(x) d\mu(y) &= \sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} c_{Q,r} |\langle \varphi, h_Q^\ell \rangle|^2 \\
&\approx \sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} \frac{|\langle \varphi, h_Q^\ell \rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}},
\end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. □

Lema 6.2.5. *Si $\psi \in S(\mathscr{H})$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que la función $\psi(x) - \psi(y)$ es nula en un δ-entorno de la diagonal $\Delta_\varepsilon := \{(x,y) \in X \times X : \delta(x,y) < \varepsilon\}$.*

Demostración. Sea $h_Q^\ell \in \mathscr{H}$, entonces $h_Q^\ell(x) - h_Q^\ell(y)$ es nula salvo cuando x e y pertenecen a distintos hijos de Q o alguno de ellos no pertenece a Q y el otro sí. En ambos casos $\delta(x,y) \geq \mu(Q)$. Luego, $h_Q^\ell(x) - h_Q^\ell(y)$ es nula en el conjunto $\{(x,y) \in X \times X : \delta(x,y) < \mu(Q)\}$.

Dada $\psi \in S(\mathscr{H})$ tenemos que

$$\psi = \sum_{h \in \mathscr{F}} a_h h,$$

con $\mathscr{F}$ un subconjunto finito de $\mathscr{H}$. Entonces

$$\psi(x) - \psi(y) = \sum_{h \in \mathscr{F}} a_h [h(x) - h(y)].$$

Tomando $\varepsilon := \min\{\mu(Q) : h_Q^\ell \in \mathscr{F}\}$ tenemos la tesis.

□

En los siguientes lemas se pone de manifiesto que, siendo no homogéneos los espacios de Besov que estamos considerando, es decir que son subespacios de espacios de Lebesgue, la descripción de la regularidad en términos de δ sólo será relevante en δ-entornos de la diagonal. Es importante notar que cuando el espacio original (X, d, μ) no es Ahlfors regular los δ-entornos de la diagonal pueden ser muy distintas de los d-entornos de la diagonal. El Ejemplo 1.8.4 muestra que los δ-entornos son bien diferentes a los d-entornos, dado que conjuntos con el mismo diámetro tienen medida cada vez más pequeña cuando se alejan del origen. En otros términos la propiedad de la duplicación no garantiza uniformidad de la medida para objetos en la misma escala a menos que estos sean «vecinos».

Lema 6.2.6. *Sean $\mathscr{D}_1 := \{Q \in \mathscr{D} : \mu(Q) < 1\}$ y $Q' \in \mathscr{D}_1$ fijo. Sean $f \in L^2(Q', \mu)$ y $\psi \in S(\mathscr{H}_{Q'})$, donde $\mathscr{H}_{Q'} = \{h_Q^\ell \in \mathscr{H} : Q \subseteq Q'\}$. Entonces,*

$$\int_{Q'}\int_{Q'} \frac{[f(x) - f(y)][\psi(x) - \psi(y)]}{\delta(x, y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) = \sum_{Q\in\mathscr{D}_1}\sum_{\ell\in\Lambda(Q)} c_{Q,r}\langle f, h_Q^\ell\rangle\langle\psi, h_Q^\ell\rangle.$$

Demostración. Sean $f \in L^2(Q', \mu)$ y $f_n = \sum_{h\in\mathscr{F}_n}\langle f, h\rangle h$, con $\mathscr{F}_n$ un subconjunto finito de $\mathscr{H}_{Q'}$ tal que $\mathscr{F}_n \nearrow \mathscr{H}_{Q'}$. De este modo, cada f_n pertenece a $S(\mathscr{H}_{Q'})$ y además f_n converge a f en L^2, cuando $n \to \infty$.

Dada $\psi \in S(\mathscr{H}_{Q'})$ fija, sea $\mathscr{F}$ el subconjunto finito de todas las h que construyen a ψ. Aplicando el Lema 6.2.4 para cada f_n obtenemos que

(6.2.9)
$$\int_{Q'}\int_{Q'} \frac{[f_n(x) - f_n(y)][\psi(x) - \psi(y)]}{\delta(x, y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) = \sum_{h\in\mathscr{F}_n} c_{h,r}\langle f_n, h\rangle\langle\psi, h\rangle.$$

Dado que ψ está fija, el lado derecho de (6.2.9) es constante para n lo suficientemente grande como para que $\mathscr{F}_n$ contenga a $\mathscr{F}$. Más aún, para tales n se satisface que

$$\sum_{h\in\mathscr{F}_n} c_{h,r}\langle f_n, h\rangle\langle\psi, h\rangle = \sum_{h\in\mathscr{F}} c_{h,r}\langle f_n, h\rangle\langle\psi, h\rangle = \sum_{h\in\mathscr{H}} c_{h,r}\langle f, h\rangle\langle\psi, h\rangle. \tag{6.2.10}$$

Por otro lado, por el Lema 6.2.5 la función $\psi(x) - \psi(y)$ tiene soporte en un conjunto de la forma $\{(x, y) \in X \times X : \delta(x, y) \geq \varepsilon\}$, para algún $\varepsilon > 0$. Luego, se tiene que

$$\left|\frac{\psi(x) - \psi(y)}{\delta(x, y)^{1+2r}}\right| \leq 2\varepsilon^{-1-2r}\|\psi\|_{L^\infty}.$$

Como $f_n(x)-f_n(y)$ convergen a $f(x)-f(y)$ en $L^2(Q'\times Q',\mu\times\mu)$ y $Q'\times Q'$ tiene medida finita, entonces también lo hacen en $L^1(Q'\times Q',\mu\times\mu)$. Por lo tanto, el miembro izquierdo de (6.2.9) satisface que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{Q'}\int_{Q'}\frac{[f_n(x)-f_n(y)][\psi(x)-\psi(y)]}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y)$$

$$= \int_{Q'}\int_{Q'}\frac{[f(x)-f(y)][\psi(x)-\psi(y)]}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y). \tag{6.2.11}$$

Reuniendo lo obtenido en (6.2.9), (6.2.10) y (6.2.11) queda probado el lema. □

Lema 6.2.7. *Sean $\mathscr{D}_1^* := \{Q\in\mathscr{D}_1 : Q \subsetneq J,$ para cada $J\in\mathscr{D}_1$ distinto de $Q\}$ y $f\in L^2(X,\mu)$. Entonces se satisface que*

(A) $\Delta_1 = \bigcup_{Q\in\mathscr{D}_1^*} Q\times Q$, *donde la unión es disjunta.*

(B) $\displaystyle\iint_{\Delta_1^c}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y)\le C\|f\|_{L^2}.$

(C) $\displaystyle\sum_{Q\in\mathscr{D}\setminus\mathscr{D}_1}\sum_{\ell\in\Lambda(Q)}\frac{|\langle f,h_Q^\ell\rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}}\le\|f\|_{L^2}.$

Demostración. De la definición de Δ_1 sabemos $(x,y)\in\Delta_1$ si y sólo si $\delta(x,y)<1$, es decir que existe $Q\in\mathscr{D}$ tal que $x,y\in Q$ y $\mu(Q)<1$. Equivalentemente podemos decir que $(x,y)\in Q\times Q$, con $Q\in\mathscr{D}_1$. Dado que todo $Q\in\mathscr{D}_1$ está contenido en algún $Q'\in\mathscr{D}_1^*$ y $\mathscr{D}_1^*\subset\mathscr{D}_1$, la parte (A) queda probada.

Por otra parte, notemos que

$$\begin{aligned}\iint_{\Delta_1^c}&\frac{|f(x)-f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y)\\ &\le 2\left[\iint_{\Delta_1^c}\frac{|f(x)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y)+\iint_{\Delta_1^c}\frac{|f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y)\right]\\ &\le 4\int_X|f(x)|^2\left[\int_{\{y:\,\delta(x,y)\ge1\}}\delta(x,y)^{-1-2r}\,d\mu(y)\right]d\mu(x).\end{aligned}$$

Recordemos que (X,δ,μ) es un espacio Ahlfors 1-regular. Luego, como el conjunto $\{y:\,\delta(x,y)\ge1\}$ es igual a $B_\delta(x,1)^c$, por la Proposición 1.8.2 sabemos que

$$\int_{\{y:\,\delta(x,y)\ge1\}}\delta(x,y)^{-1-2r}\,d\mu(y)$$

está uniformemente acotada para todo $x\in X$. Por lo tanto,

$$\iint_{\Delta_1^c}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y)\le C\|f\|_{L^2}$$

lo cual prueba la parte (B).

Por último, notemos que si $Q \in \mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_1$ entonces $\mu(Q) \geq 1$, por lo tanto

$$\sum_{Q \in \mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_1} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} \frac{|\langle f, h_Q^\ell \rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}} \leq \sum_{Q \in \mathscr{D} \backslash \mathscr{D}_1} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} |\langle f, h_Q^\ell \rangle|^2 \leq \|f\|_{L^2}.$$

De este modo queda probado (C), lo cual concluye la demostración. $\square$

Lema 6.2.8. *Sea $f \in L^2(X, \mu)$. Si para todo $Q' \in \mathscr{D}_1^*$ se satisface que*

$$\sum_{Q \in \mathscr{D}_{Q'}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} \frac{|\langle f, h_Q^\ell \rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}} \approx \int_{Q'} \int_{Q'} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}} \, d\mu(x) d\mu(y), \tag{6.2.12}$$

donde $\mathscr{D}_{Q'} := \{Q \in \mathscr{D} : Q \subseteq Q'\}$, entonces

$$\|f\|_{B_r^2}^2 \approx \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} \frac{|\langle f, h_Q^\ell \rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}}.$$

Demostración. Dado que (6.2.12) se satisface para todo $Q' \in \mathscr{D}_1^*$ entonces

$$\sum_{Q' \in \mathscr{D}_1^*} \sum_{Q \in \mathscr{D}_{Q'}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} \frac{|\langle f, h_Q^\ell \rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}} \approx \sum_{Q' \in \mathscr{D}_1^*} \int_{Q'} \int_{Q'} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}} \, d\mu(x) d\mu(y).$$

Dado que $\mathscr{D}_1 = \{Q \in \mathscr{D} : Q \subseteq Q'$ para algún $Q' \in \mathscr{D}_1^*\}$, luego por el ítem (A) del Lema 6.2.7 esto es equivalente a que

$$\sum_{Q \in \mathscr{D}_1} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} \frac{|\langle f, h_Q^\ell \rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}} \approx \iint_{\Delta_1} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}} \, d\mu(x) d\mu(y). \tag{6.2.13}$$

Por los ítems (B) y (C) del Lema 6.2.7 tenemos por un lado que

$$\|f\|_{L^2} + \sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} \frac{|\langle f, h_Q^\ell \rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}} \approx \|f\|_{L^2} + \sum_{Q \in \mathscr{D}_1} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} \frac{|\langle f, h_Q^\ell \rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}},$$

y por otro lado que

$$\|f\|_{L^2} + \int_X \int_X \frac{|f(x) - f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}} \, d\mu(x) d\mu(y) \approx \|f\|_{L^2} + \iint_{\Delta_1} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}} \, d\mu(x) d\mu(y).$$

Por lo tanto, de (6.2.13) podemos concluir que

$$\|f\|_{L^2} + \sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} \frac{|\langle f, h_Q^\ell \rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}} \approx [\|f\|_{L^2} + \int_X \int_X \frac{|f(x) - f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}} \, d\mu(x) d\mu(y),$$

y así finaliza la demostración. $\square$

Establecidos estos lemas, contamos con las herramientas necesarias para demostrar el Teorema 6.2.1.

Demostración del Teorema 6.2.1. Comencemos observando que el Lema 6.2.8 asegura que es suficiente probar que para todo $Q' \in \mathscr{D}_1^*$ se satisface que

$$\sum_{Q\in\mathscr{D}_{Q'}}\sum_{\ell\in\Lambda(Q)}\frac{|\langle f,h_Q^\ell\rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}} \approx \int_{Q'}\int_{Q'}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y).$$

Sean $Q' \in \mathscr{D}_1^*$ fijo y $f \in L^2(X,\mu)$. tales que

$$\sum_{Q\in\mathscr{D}_{Q'}}\sum_{\ell\in\Lambda(Q)}\frac{|\langle f,h_Q^\ell\rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}} < \infty.$$

Sea $\mathscr{F}_n$ una sucesión creciente de subfamilias finitas de $\mathscr{D}_{Q'}$ tales que $\mathscr{F}_n \nearrow \mathscr{D}_{Q'}$. Luego, definiendo

$$f_n := \sum_{Q\in\mathscr{F}_n}\sum_{\ell\in\Lambda(Q)}\langle f,h_Q^\ell\rangle h_Q^\ell,$$

tenemos que $\{f_n\}$ converge converge a f tanto puntualmente como en $L^2(Q',\mu)$. Luego, por el lema de Fatou —Teorema 1.1.1— tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{Q'}\int_{Q'}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y) &= \int_{Q'}\int_{Q'}\lim_{n\to\infty}\frac{|f_n(x)-f_n(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y)\\ &\le \lim_{n\to\infty}\int_{Q'}\int_{Q'}\frac{|f_n(x)-f_n(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y).\end{aligned}$$

Por el Lema 6.2.4 sabemos que

$$\begin{aligned}\int_{Q'}\int_{Q'}\frac{|f_n(x)-f_n(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y) &\le C\sum_{Q\in\mathscr{F}_n}\sum_{\ell\in\Lambda(Q)}\frac{|\langle f_n,h_Q^\ell\rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}}\\ &\le C\sum_{Q\in\mathscr{D}_{Q'}}\sum_{\ell\in\Lambda(Q)}\frac{|\langle f,h_Q^\ell\rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{Q'}\int_{Q'}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y) \le C\sum_{Q\in\mathscr{D}_{Q'}}\sum_{\ell\in\Lambda(Q)}\frac{|\langle f,h_Q^\ell\rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}}.$$

Probemos la desigualdad opuesta en el caso que

$$\int_{Q'}\int_{Q'}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\,d\mu(x)d\mu(y) < \infty.$$

Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de todas la sucesiones de números reales $\{b_Q^\ell : Q \in \mathscr{D}_{Q'}$ y $\ell \in \Lambda(Q)\}$ tales que $b_Q^\ell \neq 0$ si y sólo si $Q \in \mathscr{F} \subset \mathscr{D}_{Q'}$ finito, y además

$$\sum_{Q\in\mathscr{D}_{Q'}}\sum_{\ell\in\Lambda(Q)}[b_Q^\ell]^2 \le 1.$$

Dada $\{b_Q^\ell\} \in \mathcal{B}$, definamos

$$\psi(x) := \sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} b_Q^\ell (c_{Q,r})^{-\frac{1}{2}} h_Q^\ell(x),$$

donde $c_{Q,r}$ son las constantes dadas en el Lema 6.2.3. Como b_Q^ℓ pertenece a $\mathcal{B}$, es inmediato que $\psi \in S(\mathscr{H}_{Q'})$, ya que

$$\langle \psi, h_Q^\ell\rangle = b_Q^\ell (c_{Q.r})^{-\frac{1}{2}}.$$

Además, por el Lema 6.2.4 resulta que

$$\begin{aligned}\int_{Q'}\int_{Q'} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) &\leq C \sum_{Q\in\mathscr{D}_{Q'}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \frac{|\langle\psi, h_Q^\ell\rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}} \\ &= C \sum_{Q\in\mathscr{D}Q'} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \frac{[b_Q^\ell]^2}{c_{Q,r}\mu(Q)^{2r}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, del Lema 6.2.3 se tiene que

$$\int_{Q'}\int_{Q'} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) \leq \widetilde{C} \sum_{Q\in\mathscr{D}Q'} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} [b_Q^\ell]^2 \leq \bar{C}. \tag{6.2.14}$$

Observemos que

$$\sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} b_Q^\ell (c_{Q,r})^{\frac{1}{2}} \langle f, h_Q^\ell\rangle = \sum_{Q\in\mathscr{D}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} c_{Q,r}\langle f, h_Q^\ell\rangle\langle\psi, h_Q^\ell\rangle.$$

Luego, por el Lema 6.2.6, podemos asegurar que

$$\begin{aligned}\sum_{Q\in\mathscr{D}_{Q'}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} b_Q^\ell (c_{Q,r})^{\frac{1}{2}} \langle f, h_Q^\ell\rangle &\leq C \int_{Q'}\int_{Q'} \frac{[f(x)-f(y)][\psi(x)-\psi(y)]}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y) \\ &= C \int_{Q'}\int_{Q'} \frac{[f(x)-f(y)]}{\delta(x,y)^{\frac{1}{2}+r}} \frac{[\psi(x)-\psi(y)]}{\delta(x,y)^{\frac{1}{2}+r}}\, d\mu(x)d\mu(y).\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la ecuación (6.2.14) llegamos a que

$$\sum_{Q\in\mathscr{D}_{Q'}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} b_Q^\ell (c_{Q,r})^{\frac{1}{2}} \langle f, h_Q^\ell\rangle \leq \bar{C} \left[\int_{Q'}\int_{Q'} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(x)d\mu(y)\right]^{1/2}. \tag{6.2.15}$$

Para concluir la demostración basta observar que por dualidad y por el Lema 6.2.3 tenemos que

$$\left[\sum_{Q\in\mathscr{D}_{Q'}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \frac{|\langle f, h_Q^\ell\rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}}\right]^{1/2} \leq \left[\sum_{Q\in\mathscr{D}_{Q'}} \sum_{\ell\in\Lambda(Q)} c_{Q,r}|\langle f, h_Q^\ell\rangle|^2\right]^{1/2}$$

$$= \sup_{\mathcal{B}} \sum_{Q \in \mathscr{D}_{Q'}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} b_Q^\ell (c_{Q,r})^{\frac{1}{2}} \langle f, h_Q^\ell \rangle. \tag{6.2.16}$$

Por lo tanto la desigualdad pretendida es consecuencia inmediata de las ecuaciones (6.2.15) y (6.2.16), lo cual termina la prueba. □

Observemos que la caracterización de los espacios de Sobolev dada por el Teorema 6.2.1 del capítulo anterior coincide cuando $p = 2$ con la caracterización de los espacios de Besov dada por el Teorema 5.2.2. Luego, se sigue en forma inmediata el siguiente resultado:

Corolario 6.2.9. *Sea $0 < r < 1$. Luego, $B_r^2(X, \delta, \mu) = L_r^2(X, \delta, \mu)$.*

Como ya hemos mencionado en la Sección 1.12, a pesar de este último resultado preferiremos la nomenclatura de la escala Besov en vez de la de Triebel-Lizorkin. Esto se debe a que la definición de $B_r^2(X, \delta, \mu)$ se adecúa mejor a los métodos de acotación por maximales de Calderón que usaremos a continuación.

6.3. Existencia y convergencia al dato inicial

Antes de enunciar el teorema central de este capítulo presentemos el operador proyección sobre $\mathscr{D}_1^*$ el cual viene definido para toda $f \in L^2(X, \mu)$ por

$$P^* f(x) := \sum_{Q \in \mathscr{D} \setminus \mathscr{D}_1} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} \langle f, h_Q^\ell \rangle h_Q^\ell(x),$$

es decir, $P^* f$ es una función constante sobre cada cubo de $\mathscr{D}_1^*$.

Teorema 6.3.1. *Sean $0 < s < r < 1$ y $u_0 \in B_r^2(X, \delta, \mu)$ tal que $P^* u_0 = 0$. Luego,*

(A) *la función u definida por*

$$u(x,t) := \sum_{Q \in \mathscr{D}} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} e^{-itm_Q \mu(Q)^{-s}} \langle u_0, h_Q^\ell \rangle h_Q^\ell(x),$$

pertenece a $B_r^2(X, \delta, \mu)$ como función de $x \in X$ para cada $t > 0$;

(B) *la función u resuelve el problema*

$$\begin{cases} u_t(x,t) &= -iD^s u(x,t), \qquad x \in X, t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad x \in X, \end{cases} \tag{6.3.1}$$

donde la derivada con respecto a t es una derivada Fréchet de la función definida en $(0, \infty)$ con valores en $B_{r-s}^2(X, \delta, \mu)$ y la condición inicial se satisface en $B_r^2(X, \delta, \mu)$, es decir $\|u(\cdot, t) - u_0\|_{B_r^2} \to 0$, cuando $t \to 0$;

(C) $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) \to u_0(x)$ *para casi todo* $x \in X$ *con respecto a* μ.

Previo a demostrar este teorema introduzcamos el **operador maximal sharp de Calderón diádico de orden r** definido por

$$M^\sharp_{r,dy} f(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)^{1+r}} \int_Q |f(y) - f(x)|\, d\mu(y).$$

Para el caso $p = 2$ el siguiente lema puede verse como una extensión del resultado dado por R. DeVore y R. Sharpley en [**24**, Corolario 11.6].

Lema 6.3.2. *Si* $f \in B^2_r(X,\delta,\mu)$ *entonces* $\left\| M^\sharp_{r,dy} f \right\|_{L^2} \le \|f\|_{B^2_r}$.

Demostración. Sea $Q \in \mathscr{D}$ y $x \in Q$. Usando la desigualdad de Schwarz y recordando que para $y \in Q$ tenemos que $\delta(x,y) \le \mu(Q)$, luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(Q)^{1+r}} \int_Q |f(y) - f(x)|\, d\mu(y) &\le \frac{1}{\mu(Q)^{1+r}} \left(\int_Q |f(y) - f(x)|^2\, d\mu(y) \right)^{1/2} \mu(Q)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{\mu(Q)^{1+2r}} \int_Q |f(y) - f(x)|^2\, d\mu(y) \right)^{1/2} \\ &\le \left(\int_X \frac{|f(y) - f(x)|^2}{\delta(x,y)^{1+2r}}\, d\mu(y) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre todos los cubos $Q \in \mathscr{D}$, elevando al cuadrado e integrando sobre X obtenemos la tesis. □

Además de $M^\sharp_{r,dy}$ usaremos otros dos operadores asociados a la sumabilidad de la serie que define u. Para $t > 0$ definimos

$$K_t f := \sum_{Q \in \mathscr{D}_1} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} e^{-itm_Q \mu(Q)^{-s}} \langle f, h^\ell_Q \rangle h^\ell_Q,$$

y su operador maximal asociado

$$K^* f := \sup_{t>0} |K_t f|.$$

Lema 6.3.3. *Si* $f \in B^2_r(X,\delta,\mu)$ *con* $0 < r < 1$, *entonces* $\|K^* f\|_{L^2} \le \|f\|_{B^2_r}$.

Demostración. Para $f \in B^2_r(X,\delta,\mu)$ y $h_Q \in \mathscr{H}$ observemos que

$$\begin{aligned} |\langle f, h_Q \rangle h_Q(x)| &= \left| \int_Q f(y) h_Q(y)\, d\mu(y) \right| |h_Q(x)| \\ &= \left| \int_Q (f(y) - f(x)) h_Q(y)\, d\mu(y) \right| |h_Q(x)| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{C}{\mu(Q)} \int_Q |f(y) - f(x)| \, d\mu(y). \tag{6.3.2}$$

Dado $x \in X$ fijo, denotemos con Q_x^0 al único cubo diádico de $\mathscr{D}_1^*$ que contiene a x y j_0 al nivel al que pertenece Q_x^0. Llamemos Q_x^j al único cubo diádico de $\mathscr{D}_1$ de nivel $j_0 + j$ que contiene a x. Luego,

$$\begin{aligned}
|K_t f(x))| &= \left| \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell \in \Lambda(Q_x^j)} e^{-itm_{Q_x^j} \mu(Q_x^j)^{-s}} \left\langle f, h_{Q_x^j}^\ell \right\rangle h_{Q_x^j}^\ell(x) \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell \in \Lambda(Q_x^j)} \left| \langle f, h_{Q_x^j}^\ell \rangle h_{Q_x^j}^\ell(x) \right|.
\end{aligned}$$

De la acotación hecha en (6.3.2) se tiene que

$$\begin{aligned}
|K_t f(x))| &\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell \in \Lambda(Q_x^j)} \mu(Q_x^j)^r \frac{1}{\mu(Q_x^j)^{1+r}} \int_{Q_x^j} |f(y) - f(x)| \, d\mu(y) \\
&\leq \widetilde{C} M_{r,dy}^\sharp f(x) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell \in \Lambda(Q_x^j)} \mu(Q_x^j)^r.
\end{aligned}$$

Sabemos que existe una constante $A > 1$ tal que para todo $Q \in \mathscr{D}$ se tiene que $A\mu(Q) \leq \mu(J)$, donde J es el padre de Q. Además como la cantidad de hijos de cada cubo está acotada uniformemente, es decir, $\#\mathcal{L}(Q) \leq N$ para todo $Q \in \mathscr{D}$, entonces en nuestro caso resulta que $\mu(Q_x^j) \leq A^{-j} \mu(Q_x^0)$. De este modo,

$$\begin{aligned}
|K_t f(x))| &\leq \dot{C} M_{r,dy}^\sharp f(x) \sum_{j=0}^{\infty} [A^{-j} \mu(Q_x^0)]^r \\
&= \ddot{C} \mu(Q_x^0)^r M_{r,dy}^\sharp f(x) \sum_{j=0}^{\infty} A^{-jr}.
\end{aligned}$$

Dado que la constante $A^{-r} < 1$ y que $\mu(Q_x^0) < 1$ por pertenecer Q_x^0 a $\mathscr{D}_1$, entonces

$$|K_t f(x)| \leq \bar{C} M_{r,dy}^\sharp f(x).$$

Como el lado derecho no depende de t, tomando supremo en $t > 0$ obtenemos que

$$K^* f(x) \leq C M_{r,dy}^\sharp f(x).$$

El Lema 6.3.2 permite obtener la acotación pretendida, es decir,

$$\|K^* f\|_{L^2} \leq \|f\|_{B_r^2}.$$

□

Establecidos los lemas previos estamos en condiciones de demostrar el teorema principal.

Demostración del Teorema 6.3.1. Como $P^*u_0 = 0$ entonces

$$u(x,t) = \sum_{Q\in\mathscr{D}_1}\sum_{\ell\in\Lambda(Q)} e^{-itm_Q\mu(Q)^{-s}}\langle u_0, h_Q^\ell\rangle h_Q^\ell(x).$$

Luego, por la caracterización hecha en el Teorema 6.2.1 basta ver que $u \in L^2(X,\mu)$ y que

$$\sum_{Q\in\mathscr{D}_1}\sum_{\ell\in\Lambda(Q)} \frac{|e^{-itm_Q\mu(Q)^{-s}}|^2|\langle u_0, h_Q^\ell\rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}} < \infty. \tag{6.3.3}$$

Observemos que la condición dada en (6.3.3) implica la pertenencia de u a L^2, ya que $\mu(Q) < 1$ para todo $Q \in \mathscr{D}_1$. Dado que $|e^{-itm_Q\mu(Q)^{-s}}| \leq 1$ y que $u_0 \in B^2_r$, entonces (6.3.3) se satisface. Por lo tanto, queda probado (A).

Demostración de (B). Notemos que como $u \in B^2_r(X,\delta,\mu)$ entonces pertenece a $B^2_s(X,\delta,\mu)$. Por el Corolario 6.2.9 tenemos que $u \in L^2_s(X,\delta,\mu)$, es decir que $D^su(\cdot,t)$ pertenece a L^2. Más aún, podemos asegurar que

$$D^su(x,t) = \sum_{Q\in\mathscr{D}_1}\sum_{\ell\in\Lambda(Q)} m_Q\mu(Q)^{-s}e^{-itm_Q\mu(Q)^{-s}}\langle u_0, h_Q^\ell\rangle h_Q^\ell(x).$$

El hecho de que

$$\frac{\left|m_Q\mu(Q)^{-s}e^{-itm_Q\mu(Q)^{-s}}\langle u_0, h_Q^\ell\rangle\right|^2}{\mu(Q)^{2(r-s)}} \leq C_m^2\frac{|\langle u_0, h_Q^\ell\rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}},$$

implica en forma inmediata que $D^su(\cdot,t) \in B^2_{r-s}(X,\delta,\mu)$. Para ver que $u_t = -iD^su$ debemos probar que

$$\left\|\frac{u(\cdot,t+h)-u(\cdot,t)}{h} + iD^su(\cdot,t)\right\|_{B^2_{r-s}} \longrightarrow 0, \tag{6.3.4}$$

cuando $h \to 0$. Observemos que

$$\left|\frac{e^{-i(t+h)m_Q\mu(Q)^{-s}} - e^{-itm_Q\mu(Q)^{-s}}}{h} + im_Q\mu(Q)^{-s}e^{-itm_Q\mu(Q)^{-s}}\right|^2\frac{|\langle u_0, h_Q^\ell\rangle|^2}{\mu(Q)^{2(r-s)}}$$
$$\leq (m_Q)^2|e^{-itm_Q\mu(Q)^{-s}}|\left|\frac{e^{-ihm_Q\mu(Q)^{-s}}-1}{hm_Q\mu(Q)^{-s}} + i\right|^2\frac{|\langle u_0, h_Q^\ell\rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}}$$

$$\leq 2(C_m)^2 \left| \frac{e^{-ihm_Q\mu(Q)^{-s}} - 1}{hm_Q\mu(Q)^{-s}} + i \right|^2 \frac{|\langle u_0, h_Q^\ell \rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}}.$$

Por lo tanto, por la caracterización del Teorema 6.2.1 resulta que

$$\left\| \frac{u(\cdot, t+h) - u(\cdot, t)}{h} + iD^s u(\cdot, t) \right\|_{B^2_{r-s}}$$

$$\leq C \sum_{Q \in \mathscr{D}_1} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} \left| \frac{e^{-ihm_Q\mu(Q)^{-s}} - 1}{hm_Q\mu(Q)^{-s}} + i \right|^2 \frac{|\langle u_0, h_Q^\ell \rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}}. \tag{6.3.5}$$

Por pertenecer u_0 a B^2_r sabemos que los términos $\frac{|\langle u_0, h_Q^\ell \rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}}$ son sumables. Luego, para intercambiar el límite $h \to 0$ con la serie del lado derecho de (6.3.5) basta ver, por el Teorema 1.1.2, que

$$\left| \frac{e^{-ihm_Q\mu(Q)^{-s}} - 1}{hm_Q\mu(Q)^{-s}} + i \right|^2 \leq C. \tag{6.3.6}$$

Dado que las funciones $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ y $\frac{\cos x - 1}{x}$ son funciones acotadas, la ecuación (6.3.6) se satisface y por lo tanto queda probado (6.3.4).

Para concluir la prueba de (B) resta ver que la condición inicial se satisface en B^2_r, es decir

$$\|u(\cdot, t) - u_0(\cdot)\|_{B^2_r} \longrightarrow 0, \tag{6.3.7}$$

cuando $t \to 0$. Notemos que $\left| e^{-itm_Q\mu(Q)^{-s}} - 1 \right| \leq 2$, luego como $u_0 \in B^2_r$ podemos intercambiar el límite $t \to 0$ con la serie

$$\sum_{Q \in \mathscr{D}_1} \sum_{\ell \in \Lambda(Q)} \left| e^{-itm_Q\mu(Q)^{-s}} - 1 \right|^2 \frac{|\langle u_0, h_Q^\ell \rangle|^2}{\mu(Q)^{2r}}.$$

Dado que $\left| e^{-itm_Q\mu(Q)^{-s}} - 1 \right| \to 0$, cuando $t \to 0$, tenemos (6.3.7).

Demostración de (C). La convergencia puntual al dato inicial, como es usual, es una consecuencia inmediata de la acotación en L^2 del operador maximal K^* y la convergencia puntual en un subconjunto denso de L^2.

En (6.3.7) hemos probado que para toda $f \in B^2_r$ se tiene que $K_t f \to f$ en B^2_r cuando $t \to 0^+$, a fin de probar la convergencia puntual, definamos

$$E = \left\{ f \in B^2_r : \lim_{t \to 0^+} K_t f \text{ existe para casi todo } x \in X \right\}.$$

Notemos que $S(\mathscr{H}) \subseteq E \subseteq B_r^2$. Como $S(\mathscr{H})$ es denso en B_r^2, entonces sólo necesitamos probar que E es un subconjunto cerrado de B_r^2. Sea $\{f_n\}$ una sucesión contenida en E tal que f_n converge en B_r^2 a una función f. Para constatar que $f \in E$ es suficiente probar que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$|E_\varepsilon| := \left|\left\{x \in X : \limsup_{t\to 0^+} K_t f(x) - \liminf_{t\to 0^+} K_t f(x) > \varepsilon\right\}\right| = 0. \tag{6.3.8}$$

Para cada n escribamos

$$\begin{aligned} |E_\varepsilon| \leq & \left|\left\{x : \limsup_{t\to 0^+} K_t f_n(x) - \liminf_{t\to 0^+} K_t f_n(x) > \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right| \\ & + \left|\left\{x : \limsup_{t\to 0^+} K_t (f_n - f)(x) > \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right| \\ & + \left|\left\{x : \liminf_{t\to 0^+} K_t (f_n - f)(x) > \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right|. \end{aligned}$$

El primer término es cero dado que $f_n \in E$. Para acotar los otros dos términos usaremos la acotación en L^2 del operador maximal K^* la cual se sigue del Lema 6.3.3. Observemos que para cada función g resulta que

$$\left|\limsup_{t\to 0^+} K_t g(x)\right| \leq K^* g(x).$$

Luego, como $K^*(f_n - f) \in L^2$ podemos por el Teorema 1.2.3 asegurar que

$$\left|\left\{x : \limsup_{t\to 0^+} K_t (f_n - f)(x) > \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right| \leq \frac{C}{\varepsilon^2}\|K^*(f_n - f)\|_{L^2} \leq \frac{\dot{C}}{\varepsilon^2}\|f_n - f\|_{B_r^2}.$$

Análogamente podemos ver que

$$\left|\left\{x \in X : \liminf_{t\to 0^+} K_t (f_n - f)(x) > \frac{\varepsilon}{3}\right\}\right| \leq \frac{\dot{C}}{\varepsilon^2}\|f_n - f\|_{B_r^2}.$$

En consecuencia,

$$|E_\varepsilon| \leq \frac{\bar{C}}{\varepsilon^2}\|f_n - f\|_{B_r^2}.$$

Así, cuando n tiende a infinito tenemos (6.3.8). Entonces E es cerrado y por lo tanto $E = B_r^2$. Esto significa que para cada $u_0 \in B_r^2$ se tiene que

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \lim_{t\to 0^+} K_t u_0 \quad \text{existe.}$$

Como ya sabemos que $u(x,t) \to u_0(x)$ cuando $t \to 0^+$ en B_r^2, entonces (C) es inmediato, lo que completa la prueba. ∎

Parte II

Métodos de punto fijo en e.t.h.

Capítulo 7

Energía y operadores no locales

Este capítulo es una introducción al estudio de operadores no locales en espacios de medida. Motivaremos a dichos operadores a partir de derivadas variacionales de ciertos funcionales de energía. Probaremos así mismo algunas propiedades básicas de estos operadores.

7.1. Introducción

Comenzaremos motivando el modelo matemático desde una situación concreta: energía en redes eléctricas (potencia).

Las tres variables básicas en los circuitos eléctricos elementales son la intensidad de la corriente, el potencial V, o más concretamente las diferencias de potencial $V_2 - V_1$ en dos puntos distintos del circuito y la resistencia R. La relación fundamental entre estas magnitudes está dada por la ley de Ohm que puede enunciarse así: si $V_2 - V_1$ es la diferencia de potencial entre los puntos P_1 y P_2 de un circuito conectados por un conductor con resistencia R_{12}, entonces la intensidad de la corriente de P_1 hacia P_2, la cual denotamos con $I_{1,2}$, satisface que

$$R_{12}I_{12} = V_2 - V_1.$$

Si C_{12} es la conductividad del conductor entonces $C_{12} = \frac{1}{R_{12}}$, es decir, la conductividad es el recíproco de la resistencia. Si denotamos con $J(1,2)$ a C_{12} entonces la ley de Ohm se reescribe en términos de la conductividad como

$$I_{1,2} = J(1,2)(V_2 - V_1) = J(2,1)(V_2 - V_1),$$

puesto que la resistencia y por lo tanto la conductividad son magnitudes adireccionales.

Por otra parte la potencia eléctrica es el producto de la intensidad por la diferencia de potencial, esto es

$$E_{12} = I_{12}(V_2 - V_1).$$

Usando la ley de Ohm tenemos que

$$E_{12} = J(2,1)(V_2 - V_1)^2.$$

Consideremos ahora una red eléctrica con M nodos todos interconectados. Pensaremos que la resistencia R_{ij} es infinita si queremos que la conexión entre los nodos i y j desaparezca. El nodo i está a un potencial V_i y $J(i,j)$ denotará la conductividad del segmento de cable que une el nodo i con el nodo j. El circuito está caracterizado por los nodos y por la matriz $J(i,j)$. El vector $u = (V_1, \dots, V_M)$ de los potenciales en cada nodo es nuestra función variable. Podemos ver a ese vector como la lista de la capacidad de cada nodo para producir-consumir energía eléctrica. La energía total dado u será entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u) &:= \sum_i \sum_j J(i,j)(V_i - V_j)^2 \\ &= \sum_i \sum_j J(i,j)[u(i) - u(j)]^2,\end{aligned}$$

con $u(i) = V_i$.

Consideremos que la red incluye plantas (hidroeléctricas, atómicas, termoeléctricas, solares, eólicas, etc.) generadoras y usuarios (ciudades, industrias, etc.), y que se pretende optimizar la producción de aquéllas para satisfacer requerimientos de éstas. Así se prescriben valores de u en los nodos $\mathscr{U} = \{i : i \text{ es un usuario}\}$ y se intenta buscar u en los nodos $\mathscr{P} = \{i : i \text{ es una planta generadora}\}$ de modo que se minimice $\mathcal{E}(u)$, puesto que se supone también que la minimización de $\mathcal{E}(u)$ representará una minimización de los recursos (naturales) puestos en juego en la producción de cada $u(i)$ en los nodos $\mathscr{P}$.

Supongamos que queremos poner a todos los nodos de $\mathscr{U}$ a un nivel prescripto de necesidad $g(i)$ de u. Es decir, $u(i) = g(i)$ para todo $i \in \mathscr{U}$. El conjunto de funciones admisibles $\mathcal{A} = \{u : u(i) = g(i), \text{ para todo } i \in \mathscr{U}\}$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^M$. Si J es definida positiva (elíptica), entonces $\mathcal{E}(u)$ es una norma asociada al producto interno

$$B(u,v) = \sum_i \sum_j J(i,j)[u(i) - u(j)][v(i) - v(j)].$$

Por consiguiente, existe un único $\bar{u} \in \mathcal{A}$ tal que $d_J(\bar{u}, 0) = d_J(\mathcal{A}, 0)$ y es la proyección ortogonal del origen sobre $\mathcal{A}$, con el producto escalar $B(u,v)$ (ver [38]). Por otra parte si $\bar{u}$ minimiza $d_J(u,0) = \mathcal{E}(u)$, esto significa que si $\varphi_v(t) =$

$\mathcal{E}(\bar{u}+tv)$ con $v|_{\mathscr{U}} \equiv 0$, entonces $\varphi_v'(0) = 0$. En otro términos, para toda v tal que $v|_{\mathscr{U}} \equiv 0$, se satisface que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_i \sum_j J(i,j)[\bar{u}(i) - \bar{u}(j)][v(i) - v(j)] \\
&= \sum_i \sum_j J(i,j)[\bar{u}(i) - \bar{u}(j)]v(i) - \sum_i \sum_j J(i,j)[\bar{u}(i) - \bar{u}(j)]v(j) \\
&= \sum_i \sum_j J(i,j)[\bar{u}(i) - \bar{u}(j)]v(i) + \sum_i \sum_j J(j,i)[\bar{u}(j) - \bar{u}(i)]v(j) \\
&= 2\sum_i \sum_j J(i,j)[\bar{u}(i) - \bar{u}(j)]v(i).
\end{aligned}$$

De otro modo, si $Lu(i) := \sum_j J(i,j)[u(i) - u(j)]$ tenemos que

$$\sum_i L\bar{u}(i)v(i) = 0,$$

para toda v tal que $v(i) = 0$ si $i \in \mathscr{U}$. Tomando para cada $i \in \mathscr{P}$

$$v(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq i, \\ 1 & \text{si } \ell = i, \end{cases}$$

resulta que $L\bar{u}(i) = 0$, para toda $i \in \mathscr{P}$. Podríamos decir que $\bar{u}$ es «armónica» en $\mathscr{P}$. La anulación de $L\bar{u}$ en un nodo es la anulación de las corrientes que llegan a él.

Pensando desde el punto de vista general de espacios métrico de medida que adoptamos en esta tesis, la energía total de la red eléctrica de M nodos

$$\mathcal{E}(u) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} J(i,j)[u(i) - u(j)]^2,$$

puede escribirse como una integral en el espacio discreto X de los M nodos, es decir

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{4}\int_X \int_X J(x,y)[u(y) - u(x)]^2 d\mu(y)d\mu(x), \tag{7.1.1}$$

donde μ es la medida que «cuenta». Por ejemplo, la resistencia entre los puntos (nodos) x e y dada por la función $J(x,y)$ puede pensarse como la recíproca de una métrica. Así, los nodos estarán distantes si la resistencia entre ellos es alta. En este caso la energía vendría dada por

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{4}\int_X \int_X \frac{[u(x) - u(y)]^2}{\rho(x,y)^\beta} d\mu(x)d\mu(y),$$

para algún $\beta > 0$.

La energía dada por (7.1.1) puede pensarse en espacios de medida (X, μ) no necesariamente discretos. Supongamos que μ es una medida σ-finita y $J : X \times X \to \mathbb{R}$ es una función simétrica y positiva. La simetría de J permite probar que la ecuación de Euler-Lagrange para la integral variacional dada por (7.1.1) viene dada por el operador lineal

$$Lu(x) = \int_X J(x,y)[u(y) - u(x)]d\mu(y).$$

En los procesos evolutivos asociados a este funcional de energía, el estado u del sistema cambia con el tiempo y se tiene una función $u : X \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$. El balance energético instantáneo para u plantea entonces la ecuación de difusión

$$u_t(x,t) = -\mathcal{E}'[u] = Lu(x,t),$$

donde $\mathcal{E}'$ es la derivada variacional de $\mathcal{E}$. El primer problema asociado a este modelo es encontrar $u(x,t)$ tal que

$$u_t = Lu, \quad \text{y} \quad u_{t=0} = f \tag{7.1.2}$$

sea un dato del estado inicial del sistema. La existencia y unicidad de soluciones para dicho problema será el tema central del próximo capítulo.

En el caso discreto de las redes eléctricas, problemas como (7.1.2) pueden verse como la evolución de un sistema de oferta y demanda de energía que a partir de una condición inicial f busca su estado estacionario. El problema (7.1.2) luce en este caso de la siguiente forma,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(j,t) = \sum_i J(i,j)[u(i,t) - u(j,t)], \\ u(i,0) = f(i). \end{cases} \tag{7.1.3}$$

Obsérvese que problemas como éste son sistemas autónomos de EDOs que pueden resolverse explícitamente en términos de J y f. Los resultados en [**5**] permiten escribir a los espacios de tipo homogéneo compactos como límites de espacios discretos. Así, débilmente, la solución de (7.1.2) sobre espacios generales puede pensarse como el límite de las soluciones de (7.1.3) asociadas a redes eléctricas. De modo que, no sólo que el caso discreto es bastante ilustrativo de la situación general, sino que podría dar un «método numérico» para aproximar soluciones en el espacio «abstracto». Estas ideas van en concordancia con las técnicas desarrolladas por J. Kigami en [**37**] y más tarde por R. Strichartz en [**53**].

7.2. Consideraciones acerca de $\mathcal{E}$ y J

Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida σ-finita. Sea $\mathscr{M}$ el espacio de las funciones a valores escalares en X que son medibles. Consideremos en $\mathscr{M}$ la topología de la convergencia en medida. Sean $\mathcal{E}$ el funcional de energía dado por (7.1.1) y $J : X \times X \to \mathbb{R}$ una función estrictamente positiva para casi todo punto de $X \times X$, simétrica y medible. Definimos

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(J) := \{f \in \mathscr{M} : \mathcal{E}(f) < \infty\}. \tag{7.2.1}$$

Observemos que $\mathcal{A}(J)$ es un espacio vectorial que contiene a las funciones constantes. Además, notemos que como $J(x, y) > 0$ para casi todo punto de $X \times X$ entonces se tiene que $\mathcal{E}(u) = 0$ si y sólo si u es constante para casi todo punto de X.

El funcional de energía $\mathcal{E}$ induce una seminorma sobre $\mathcal{A}$. De hecho, si definimos $\|u\|_{\mathcal{E}} := \{\mathcal{E}(u)\}^{1/2}$, para todo $u \in \mathcal{A}$, resulta que

(A) $u = 0$ entonces $\|u\|_{\mathcal{E}} = 0$.
(B) $\|\lambda u\|_{\mathcal{E}} = |\lambda|\|u\|_{\mathcal{E}}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y toda $u \in \mathcal{A}$.
(C) $\|u + v\|_{\mathcal{E}} \leq \|u\|_{\mathcal{E}} + \|v\|_{\mathcal{E}}$, para toda $u, v \in \mathcal{A}$.

Las primeras dos propiedades son inmediatas. Para probar la tercera definamos el funcional bilineal $B : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ dado por

$$B(u, v) := \frac{1}{4} \int_X \int_X J(x, y)[u(x) - u(y)][v(x) - v(y)]\, d\mu(x) d\mu(y).$$

Observemos que por definición B resulta simétrico y positivo. Además —por la desigualdad de Schwarz— tenemos que $|B(u, v)| \leq \|u\|_{\mathcal{E}}\|v\|_{\mathcal{E}}$. Ahora bien, dado que $B(u, u) = \mathcal{E}(u) = \|u\|^2_{\mathcal{E}}$, luego

$$\begin{aligned}
\|u + v\|^2_{\mathcal{E}} &= B(u + v, u + v) \\
&= B(u, u) + 2B(u, v) + B(v, v) \\
&\leq \|u\|^2_{\mathcal{E}} + 2\|u\|_{\mathcal{E}}\|v\|_{\mathcal{E}} + \|u\|^2_{\mathcal{E}} \\
&= (\|u\|_{\mathcal{E}} + \|v\|_{\mathcal{E}})^2 ,
\end{aligned}$$

lo cual prueba la propiedad (C). Dado que si u es constante en casi todo punto $\|u\|_{\mathcal{E}} = 0$, el recíproco de la propiedad (A) no se satisface. Es por esto que no podemos asegurar que $\| \cdot \|_{\mathcal{E}}$ sea una norma en $\mathcal{A}(J)$.

Observemos también que $\mathcal{E}$ es un funcional convexo, de hecho, dados $t \in (0,1)$ y $u, v \in \mathcal{A}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[tu+(1-t)v] &= B(tu+(1-t)v, tu+(1-t)v)\\ &= t^2B(u,u)+2t(1-t)B(u,v)+(1-t)^2B(v,v)\\ &= t^2B(u,u)+2t(1-t)B(u,v)+(1-t)^2B(v,v)\\ &\quad + tB(u,u)+(1-t)B(v,v)-tB(u,u)-(1-t)B(v,v)\\ &= tB(u,u)+(1-t)B(v,v)-t(1-t)B(u-v,u-v).\end{aligned}$$

Dado que $t(1-t)B(u-v,u-v) \geq 0$, para todo $t \in (0,1)$ y toda $u, v \in \mathcal{A}$, luego

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(tu+(1-t)v) &\leq tB(u,u)+(1-t)B(v,v)\\ &= t\mathcal{E}(u)+(1-t)\mathcal{E}(v).\end{aligned}$$

Así también podemos deducir la derivada variacional de $\mathcal{E}$, al menos en un sentido débil. Para esto comencemos observando que $\mathcal{E}$ es diferenciable (Gâteaux) en toda $u \in \mathcal{A}$ y en toda dirección $v \in \mathcal{A}$. En efecto,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u+tv)-\mathcal{E}(u) &= B(u+tv, u+tv)-B(u,u)\\ &= 2tB(u,v)+t^2B(v,v).\end{aligned}$$

Luego, es inmediato ver que

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{E}(u,v) := \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{E}(u+tv)-\mathcal{E}(u)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{2tB(u,v)+t^2B(v,v)}{t}\\ &= 2B(u,v).\end{aligned}$$

Además, dado que J es simétrico podemos escribir que

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{E}[u,v] = 2B(u,v) &= \frac{1}{2}\int_X\int_X J(x,y)[u(x)-u(y)][v(x)-v(y)]\,d\mu(x)d\mu(y)\\ &= \frac{1}{2}\int_X\int_X J(x,y)[u(x)-u(y)]v(x)\,d\mu(x)d\mu(y)\\ &\quad -\frac{1}{2}\int_X\int_X J(x,y)[u(x)-u(y)]v(y)\,d\mu(x)d\mu(y)\\ &= \frac{1}{2}\int_X\int_X J(x,y)[u(x)-u(y)]v(x)\,d\mu(x)d\mu(y)\\ &\quad +\frac{1}{2}\int_X\int_X J(y,x)[u(y)-u(x)]v(y)\,d\mu(x)d\mu(y)\end{aligned}$$

$$= \int_X \int_X J(x,y)[u(x) - u(y)]v(x)\, d\mu(x) d\mu(y)$$

$$= \int_X [-Lu(x)]v(x)\, d\mu(x). \tag{7.2.2}$$

Por lo tanto, dado que v era una dirección arbitraria, podemos interpretar —en un sentido débil— al operador $-L$ como la derivada variacional de $\mathcal{E}$.

7.3. Consideraciones acerca de $\mathcal{A}$ y L

Observemos que la cadena de igualdades dadas en (7.2.2) toman por supuesto que el operador

$$Lu(x) = \int_X J(x,y)[u(y) - u(x)]\, d\mu(y),$$

está bien definido para toda $u \in \mathcal{A}$, como así también que

$$\langle -Lu, v\rangle = \int_X [-Lu(x)]v(x)\, d\mu(x)$$

es finito para toda $u, v \in \mathcal{A}$. A pesar de no poder asegurar esto en general, en estos últimos capítulos nos interesaremos en dos clases particulares de núcleos J para los cuales podemos encontrar subespacios adecuados de $\mathcal{A}(J)$ tales que se satisfagan ambas propiedades. La primera de ellas la denotaremos con $\mathcal{J}_1$ y constará de todos los núcleos J positivos, simétricos e integrables en cada una de sus variables tales que

$$\int J(x,y)\, d\mu(x) \leq C, \tag{7.3.1}$$

donde C es una constante positiva independiente de y. Notemos que por ser J simétrico, la propiedad (7.3.1) también se satisface si integramos en la variable y. La segunda clase de núcleos requerirá de una estructura adicional en nuestro espacio de medida: una métrica. Sean (X, d, μ) un espacio métrico α-regular (ver Preliminares, Sección 1.8) y $s \in (0,1)$. Llamaremos $\mathcal{J}_s$ al conjunto de funciones J positivas y simétricas tales que

$$J(x,y) \leq C d(x,y)^{-\alpha - s}. \tag{7.3.2}$$

Hacemos notar que una clase similar ha sido considerada por L. Caffarelli, C. Chan y A. Vasseur en [13], donde se estudian las desigualdades de Harnack y la regularidad Hölder de las soluciones.

Proposición 7.3.1. *Sea $\mathcal{A}_1 = L^1(X,\mu) \cap L^2(X,\mu)$. Luego, se satisface que*

(A) *dados $J \in \mathcal{J}_1$, entonces $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}(J)$;*

(B) *$Lu \in L^1(X,\mu)$, para toda $u \in \mathcal{A}_1$.*

(C) *$\langle Lu, v\rangle$ es finito para toda $u, v \in \mathcal{A}_1$.*

Demostración. Sea $J \in \mathcal{J}_1$ y $u \in \mathcal{A}_1$, luego

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u) &= \frac{1}{4}\int_X\int_X J(x,y)[u(x)-u(y)]^2\,d\mu(x)d\mu(y)\\ &= \frac{1}{4}\int_X\int_X J(x,y)[u^2(x)+u^2(y)-2u(x)u(y)]\,d\mu(x)d\mu(y).\end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned}\int_X\int_X J(x,y)u^2(x)\,d\mu(x)d\mu(y) &= \int_X\left(\int_X J(x,y)\,d\mu(y)\right)u^2(x)\,d\mu(x)\\ &\leq C\int_X u^2(x)\,d\mu(x)\\ &= C\|u\|_2^2,\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}&\left|\int_X\int_X J(x,y)u(x)u(y)\,d\mu(x)d\mu(y)\right|\\ &\qquad = \int_X\int_X |J(x,y)^{1/2}u(x)||J(x,y)^{1/2}u(y)|\,d\mu(x)d\mu(y)\\ &\qquad \leq \left(\int_X\int_X J(x,y)u^2(x)\,d\mu(x)d\mu(y)\right)^{1/2}\\ &\qquad\qquad \times\left(\int_X\int_X J(x,y)u^2(y)\,d\mu(x)d\mu(y)\right)^{1/2}\\ &\qquad = C\|u\|_2^2.\end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{E}(u) \leq \dot{C}\|u\|_2^2 < \infty$. Por consiguiente, $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}(J)$ y así queda probado (A). Por otro lado, observemos que

$$\begin{aligned}\int_X |Lu(x)|\,d\mu(x) &= \int_X\left|\int_X J(x,y)[u(y)-u(x)]\,d\mu(y)\right|d\mu(x)\\ &\leq \int_X\int_X J(x,y)|u(y)| + J(x,y)|u(x)|\,d\mu(y)d\mu(x)\\ &= 2C\|u\|_1,\end{aligned}$$

lo cual prueba (B). Por último, dadas $u, v \in \mathcal{A}_1$ tenemos que

$$\langle Lu, v\rangle = \int_X\int_X J(x,y)[u(x)v(x)-u(y)v(x)]\,d\mu(x)d\mu(y).$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_X\int_X J(x,y)u(x)v(x)\,d\mu(x)d\mu(y)\right| &\le \int_X\left(\int_X J(x,y)\,d\mu(y)\right)|u(x)||v(x)|\,d\mu(x)\\ &\le C\int_X |u(x)||v(x)|\,d\mu(x)\\ &= C\|u\|_2\|v\|_2,\end{aligned}$$

como así también

$$\begin{aligned}&\left|\int_X\int_X J(x,y)u(x)v(y)\,d\mu(x)d\mu(y)\right|\\ &\qquad= \int_X\int_X |J(x,y)^{1/2}u(x)||J(x,y)^{1/2}v(y)|\,d\mu(x)d\mu(y)\\ &\qquad\le \left(\int_X\int_X J(x,y)u^2(x)\,d\mu(x)d\mu(y)\right)^{1/2}\\ &\qquad\qquad\times\left(\int_X\int_X J(x,y)v^2(y)\,d\mu(x)d\mu(y)\right)^{1/2}\\ &\qquad= C\|u\|_2\|v\|_2.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\langle Lu,v\rangle \le 2C\|u\|_2\|v\|_2 < \infty.$$

Por lo tanto, se satisface (C), lo cual concluye la demostración. □

Proposición 7.3.2. *Para cada $r\in(0,1)$ sea $\mathcal{A}_r=\Lambda_r^c(X,d,\mu)$ el espacio de las funciones Lipschitz de regularidad r con soporte compacto. Luego, se satisface que*

(A) *dados $s\in(0,1)$ y $J\in\mathcal{J}_s$, entonces $\mathcal{A}_r\subset\mathcal{A}(J)$, para todo $r\in(s,1)$;*
(B) *$Lu\in L^1(X,\mu)$, para toda $u\in\mathcal{A}_r$;*
(C) *$\langle Lu,v\rangle$ es finito para toda $u,v\in\mathcal{A}_r$.*

Demostración. Sea $J\in\mathcal{J}_s$ y $u\in\mathcal{A}_r$, con $0<s<r<1$. Denotemos con K al $\mathrm{sop}(u)$, entonces la función $[u(y)-u(x)]$ tiene soporte igual a $K\times X\cup X\times K$. Sea B una bola tal que $K\subset B$. Usando la simetría de las funciones J y $[u(x)-u(y)]^2$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u) &\le \frac{1}{2}\int_K\int_X J(x,y)[u(x)-u(y)]^2\,d\mu(x)d\mu(y)\\ &\le \frac{1}{2}\left[\int_B\int_B J(x,y)[u(x)-u(y)]^2\,d\mu(x)d\mu(y)\right.\end{aligned}$$

$$+\int_B\int_{B^c} J(x,y)[u(x)-u(y)]^2\,d\mu(x)d\mu(y)\Big].$$

Dado que $u \in \Lambda_r^c$ entonces por la propiedad (7.3.2) y la Proposición 1.8.3 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_B\int_B J(x,y)[u(x)-u(y)]^2\,d\mu(x)d\mu(y) &\le [u]^2_{\Lambda_r}\int_B\int_B d(x,y)^{-\alpha+(2r-s)}\,d\mu(x)d\mu(y)\\ &\le [u]^2_{\Lambda_r}C(\alpha,2r-s,B),\end{aligned}$$

y así también

$$\begin{aligned}\int_B\int_{B^c} J(x,y)[u(x)-u(y)]^2\,d\mu(x)d\mu(y) &\le 2\|u\|^2_\infty\int_B\int_{B^c} d(x,y)^{-\alpha-s}\,d\mu(x)d\mu(y)\\ &\le 2\|u\|^2_\infty C(\alpha,s,B).\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{E}(u) \le C\|u\|^2_{\Lambda_r}$. En consecuencia $\mathcal{A}_r \subseteq \mathcal{A}(J)$ y queda probado (A). Análogamente, podemos ver que

$$\int_X |Lu(x)|d\mu(x) \le C\|u\|_{\Lambda_r},$$

lo cual prueba la parte (B). Ahora bien, dadas $u, v \in A_r$ es inmediato que

$$\langle Lu, v\rangle \le \|v\|_\infty\|Lu\|_1 \le C\|v\|_\infty\|u\|_{\Lambda_r}.$$

De este modo queda probado (C). □

A continuación mostraremos algunas propiedades básicas del operador L. En el contexto euclídeo bidimensional el análogo a la siguiente proposición puede encontrarse en [**29**],

Proposición 7.3.3. *El operador L satisface las siguientes propiedades:*

(A) *Si $u(x_0) \ge u(x)$, para casi todo $x \in X$, luego $Lu(x_0) \le 0$. Análogamente, si $u(x_1) \le u(x)$, para casi todo $x \in X$, luego $Lu(x_1) \ge 0$.*
(B) *$-L$ es un operador semidefinido positivo, es decir, $\langle -Lu, u\rangle \ge 0$.*
(C) *u es constante si y sólo si $Lu \equiv 0$.*
(D) *L tiene promedio nulo, es decir, $\int_X Lu(x)\,d\mu(x) = 0$.*

Demostración. Dado que J es positivo, la propiedad (A) es inmediata. Para comprobar (B) utilizaremos que J es simétrico, en efecto,

$$\langle -Lu, u\rangle = \int_X\int_X J(x,y)[u(x)-u(y)]u(x)\,d\mu(y)d\mu(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\int_X\int_X J(x,y)[u(x)-u(y)]u(x)\,d\mu(y)d\mu(x)\right.\\
&\qquad \left.+\int_X\int_X J(y,x)[u(y)-u(x)]u(y)\,d\mu(y)d\mu(x)\right]\\
&= \frac{1}{2}\int_X\int_X J(x,y)[u(x)-u(y)]^2\,d\mu(y)d\mu(x)\\
&= 2\mathcal{E}(u)\geq 0.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, si u es constante es inmediato que $Lu \equiv 0$. En cambio, si $Lu \equiv 0$ entonces por la parte (B) sabemos que $0 = \langle -Lu, u\rangle = 2\mathcal{E}(u)$. De este modo, como $\mathcal{E}(u) = 0$ sabemos que u es constante.

Por último, es sencillo probar la propiedad (D) observando que

$$
\begin{aligned}
\int_X Lu(x)\,d\mu(x) = \frac{1}{2}&\left[\int_X\int_X J(x,y)[u(y)-u(x)]\,d\mu(y)d\mu(x)\right.\\
&\left.+\int_X\int_X J(y,x)[u(x)-u(y)]\,d\mu(y)d\mu(x)\right] = 0.
\end{aligned}
$$

□

Capítulo 8

Difusiones no locales asociadas a operadores con núcleos integrables y aproximación de soluciones por reescalamientos de núcleos

En este capítulo estudiaremos problemas de evolución no locales definidos a partir de operadores de núcleos integrables presentados en el capítulo anterior. Siguiendo las ideas desarrolladas en [21], [22], [20], [45] y [10], probaremos mediante técnicas de punto fijo existencia y unicidad para dichos problemas. Luego, formularemos propiedades de dichas soluciones y estableceremos algunos principios de comparación. Por último, construiremos una familia de problemas de este tipo cuyas soluciones convergerán a la solución del problema de difusión asociado al operador de diferenciación fraccionaria presentado en el Capítulo 3.

8.1. Introducción

El campo de aplicación de los problemas de evolución no locales definidos a partir de operadores de núcleos integrables no se limita al expuesto en el capítulo anterior. Como puede observarse en [26] el interés por este tipo de problemas en diversas áreas del conocimiento ha crecido en los últimos años. A modo de ejemplo, siguiendo las ideas allí presentadas, motivaremos nuestro problema de interés extendiendo un modelo de dinámica poblacional distinto al enfoque energético propuesto con anterioridad.

Sea (X, μ) un espacio de medida. Sea $J : X \times X \to \mathbb{R}$ una función positiva, simétrica con $\int_X J(x, y)\, d\mu(y) = \int_X J(x, y)\, d\mu(x) = 1$. Supongamos que tenemos una población de un organismo sobre la región X y sea $u : X \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función tal que $u(x, t)$ represente la densidad de dicha población en cada posición x a un tiempo t. Pensando a $J(x, y)$ como la distribución de probabilidad de que un individuo salte de una posición x a una posición y, entonces $\int_X J(y, x)u(y, t)\, d\mu(y)$ es la tasa a la cual los individuos llegan a la posición x

desde cualquier posición y. Del mismo modo, $\int_X J(x,y)u(x,t)\,d\mu(y)$ representa la tasa con la que abandonan la posición x. Por lo tanto, utilizando la simetría de J podemos asegurar que la tasa neta de incremento de organismos en una posición x a un tiempo t viene dada por

$$\int_X J(x,y)[u(y,t)-u(x,t)]\,d\mu(y).$$

Así, bajo la ausencia de fuentes internas o externas, la dinámica de la población del organismo se puede modelizar por la ecuación

$$u_t(x,t)=\int_X J(x,y)[u(y,t)-u(x,t)]\,d\mu(y).$$

Notar que la hipótesis de simetría sobre J nos proporciona en forma inmediata un principio de conservación de la población total ya que

$$\int_X\int_X J(x,y)[u(y,t)-u(x,t)]\,d\mu(y)d\mu(x)=0.$$

El problema natural del contexto es, entonces, encontrar la densidad $u(x,t)$ en cada instante t a partir de la densidad inicial $u(x,0)$. Esto motiva formular un problema de condición inicial del tipo

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_X J(x,y)[u(y,t)-u(x,t)]\,d\mu(y), & \text{en } X\times(0,\infty),\\ u(x,0) = u_0(x), & \text{en } X. \end{cases} \tag{8.1.1}$$

En el caso euclídeo, uno de los métodos clásicos de la prueba de existencia de soluciones para problemas como éste es la teoría del punto fijo de Banach en adecuados espacios funcionales (ver [**21**]). Aquí probaremos que la teoría se extiende a espacios de medida.

8.2. Existencia y unicidad de soluciones

Para los resultados de esta sección no será necesaria la hipótesis de simetría sobre J, más aún, sólo se requerirá que exista una constante $C>0$ tal que

$$\int_X J(x,y)\,d\mu(x)\le C \quad \text{y} \quad \int_X J(x,y)\,d\mu(y)\le C. \tag{8.2.1}$$

Comencemos llamando $\mathbb{X}_{t_0}$ al espacio de la funciones continuas del $[0,t_0]$ al $L^1(X,\mu)$, es decir

$$\mathbb{X}_{t_0}=C([0,t_0];L^1(X,\mu)).$$

Recordemos que (ver pág. 15) $\mathbb{X}_{t_0}$ es un espacio de Banach con la norma

$$|||w||| = \max_{t\in[0,t_0]} \|w(\cdot,t)\|_{L^1}.$$

Dado $w_0 \in L^1(X,\mu)$ definamos el operador $T : \mathbb{X}_{t_0} \to \mathbb{X}_{t_0}$ como

$$T_{w_0}(w)(x,t) = w_0(x) + \int_0^t \int_X J(x,y)(w(y,s) - w(x,s))\, d\mu(y)\, ds. \tag{8.2.2}$$

Veamos que, en efecto, T mapea $\mathbb{X}_{t_0}$ en $\mathbb{X}_{t_0}$.

Sea $w \in \mathbb{X}_{t_0}$ y sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $0 < t_1 < t_2 \leq t_0$. Luego, por el Corolario 1.6.10 tenemos que

$$\begin{aligned}
&\|T_{w_0}(w)(\cdot,t_1) - T_{w_0}(w)(\cdot,t_2)\|_{L^1} \\
&\qquad \leq \int_X |w_0(x) - w_0(x)|\, d\mu(x) \\
&\qquad\quad + \int_X \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_X J(x,y)[w(y,s) - w(x,s)]\, d\mu(y)\, ds \right| d\mu(x) \\
&\qquad \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_X \int_X J(x,y)|w(y,s) - w(x,s)|\, d\mu(y)\, d\mu(x)\, ds \\
&\qquad \leq \int_{t_1}^{t_2} \int_X \int_X J(x,y)|w(y,s)|\, d\mu(x)\, d\mu(y)\, ds \\
&\qquad\quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_X \int_X J(x,y)|w(x,s)|\, d\mu(y)\, d\mu(x)\, ds \\
&\qquad \leq 2C \int_{t_1}^{t_2} \int_X |w(y,s)|\, d\mu(y)\, ds \\
&\qquad \leq 2C(t_1 - t_2)\, |||w||| \,.
\end{aligned}$$

Por otra parte, si $0 < t \leq t_0$ entonces

$$\begin{aligned}
\|T_{w_0}(w)(\cdot,t) - w_0\|_{L^1} &= \int_X \left| \int_0^t \int_X J(x,y)[w(y,s) - w(x,s)]\, d\mu(y)\, ds \right| d\mu(x) \\
&= \int_0^t \int_X \int_X J(x,y)|w(y,s) - w(x,s)|\, d\mu(y)\, d\mu(x)\, ds \\
&\leq 2Ct\, |||w||| \,.
\end{aligned}$$

Así claramente $T_{w_0}(w) \in \mathbb{X}_{t_0}$.

Lema 8.2.1. *Sean $w_0, z_0 \in L^1(X,\mu)$ y $w, z \in \mathbb{X}_{t_0}$. Entonces*

$$|||T_{w_0}(w) - T_{z_0}(z)||| \leq \|w_0 - z_0\|_{L^1} + 2Ct_0\, |||w - z||| \,.$$

Demostración. Sea $t \in \mathbb{R}$, fijo y tal que $0 < t < t_0$, luego

$$
\begin{aligned}
&\|T_{w_0}(w)(\cdot,t) - T_{z_0}(z)(\cdot,t)\|_{L^1} \\
&\quad \le \int_X |w_0(x) - z_0(x)|\, d\mu(x) \\
&\qquad + \int_X \left| \int_0^t \int_X J(x,y)[w(y,s) - w(x,s) - z(y,s) + z(x,s)]\, d\mu(y)\, ds \right| d\mu(x) \\
&\quad \le \|w_0 - z_0\|_{L^1} \\
&\qquad + \int_0^t \int_X \int_X J(x,y)|w(y,s) - w(x,s) - z(y,s) + z(x,s)|\, d\mu(y)\, d\mu(x)\, ds \\
&\quad \le \|w_0 - z_0\|_{L^1} + \int_0^t \int_X \int_X J(x,y)|w(y,s) - z(y,s)|\, d\mu(x)\, d\mu(y)\, ds \\
&\qquad + \int_0^t \int_X \int_X J(x,y)|w(x,s) - z(x,s)|\, d\mu(y)\, d\mu(x)\, ds \\
&\quad \le \|w_0 - z_0\|_{L^1} + 2C \int_0^t \int_X |w(y,s) - z(y,s)|\, d\mu(y)\, ds \\
&\quad \le \|w_0 - z_0\|_{L^1} + 2Ct\, |||w - z||| \,.
\end{aligned}
$$

Tomando supremo en t miembro a miembro obtenemos la desigualdad pretendida. $\square$

Teorema 8.2.2. *Dada $u_0 \in L^1(X,\mu)$ y J satisfaciendo (8.2.1) existe una única solución $u \in C^1((0,\infty); L^1(X,\mu)) \cap C([0,\infty); L^1(X,\mu))$ del problema*

$$
\left\{
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= \int_X J(x,y)[u(y,t) - u(x,t)]\, d\mu(y), && \text{en } X \times (0,\infty), \\
u(x,0) &= u_0(x), && \text{en } X.
\end{aligned}
\right. \tag{8.2.3}
$$

Cabe destacar que las igualdades de (8.2.3) las entendemos como igualdades en $L^1(X,\mu)$, es decir, la derivada temporal de la primer igualdad es una derivada Fréchet en $L^1(X,\mu)$ (ver Sección 1.6).

Demostración. Elijamos t_0 de tal forma que $2Ct_0 < 1$. Ahora tomemos $z_0 = w_0 = u_0$ en el Lema 8.2.1 y así obtenemos que T_{u_0} es una contracción en $\mathbb{X}_{t_0}$. Luego, por el teorema de punto fijo de Banach sabemos que existe una única $w^0 \in \mathbb{X}_{t_0}$ tal que $T_{u_0}(w^0) = w^0$. Tomemos $u(x,t) := w^0(x,t)$. Dado que $T_{u_0}(u) = u$, es decir

$$
u(x,t) = u_0(x) + \int_0^t \int_X J(x,y)[u(y,s) - u(x,s)]\, d\mu(y)\, ds, \tag{8.2.4}
$$

para todo $t \in [0, t_0]$. Es inmediato ver que u resuelve el problema (8.2.3) para todo t en $[0, t_0]$. En efecto, gracias a la Proposición 1.6.7 obtenemos la primera igualdad con sólo derivar (8.2.4) respecto a t. La condición inicial se satisface como consecuencia del hecho que $u \in \mathbb{X}_{t_0}$, tomando límite para $t \to 0^+$ en (8.2.4).

Para poder extender a u a$[0, \infty)$ debemos tomar a $u_1(x) := u(x, t_0)$ como un nuevo dato inicial. Así, repitiendo el mismo razonamiento antes hecho, obtenemos una nueva solución w^1 tal que $T_{u_1}(w^1) = w^1$. Tomando

$$u(x,t) := w^1(x, t - t_0), \qquad \text{para todo } t \in [t_0, 2t_0],$$

logramos extender u al intervalo $[t_0, 2t_0]$ de tal forma que también satisfaga (8.2.4) para todo $t \in (t_0, 2t_0]$. De hecho,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= w^1(x, t - t_0) \\
&= w^0(x, t_0) + \int_0^{t-t_0} \int_X J(x,y)[w^1(y,s) - w^1(x,s)]\, d\mu(y)\, ds \\
&= u_0(x) + \int_0^{t_0} \int_X J(x,y)[w^0(y,s) - w^0(x,s)]\, d\mu(y)\, ds \\
&\quad + \int_0^{t-t_0} \int_X J(x,y)[w^1(y,s) - w^1(x,s)]\, d\mu(y)\, ds \\
&= u_0(x) + \int_0^{t_0} \int_X J(x,y)[u(y,s) - u(x,s)]\, d\mu(y)\, ds \\
&\quad + \int_0^{t-t_0} \int_X J(x,y)[u(y,s+t_0) - w^1(x,s+t_0)]\, d\mu(y)\, ds \\
&= u_0(x) + \int_0^{t_0} \int_X J(x,y)[u(y,s) - u(x,s)]\, d\mu(y)\, ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \int_X J(x,y)[u(y,s) - w^1(x,s)]\, d\mu(y)\, ds \\
&= u_0(x) + \int_0^{t} \int_X J(x,y)[u(y,s) - u(x,s)]\, d\mu(y)\, ds.
\end{aligned}$$

Dado que se satisface (8.2.4) para todo $t \in [0, 2t_0]$, entonces u resuelve (8.2.3) para todo t en $[0, 2t_0]$. Iterando este proceso para cada $j \in \mathbb{N}$, donde en cada paso definimos $u_j(x) := u(x, jt_0)$, encontramos w^j tal que $T_{u_j}(w^j) = w^j$. Así, definiendo $u(x,t) := w^j(x, t - jt_0)$, para todo $t \in [jt_0, (j+1)t_0]$, conseguimos una solución de (8.2.3) en todo el intervalo $[0, \infty)$, lo cual completa nuestra demostración. $\square$

Observemos que añadiendo la hipótesis de que J sea simétrico, entonces podemos probar que la masa total en X se conserva, es decir

$$\int_X u(y,t)\,d\mu(y) = \int_X u_0(y)\,d\mu(y).$$

De hecho, integrando en x la ecuación (8.2.4) resulta que

$$\begin{aligned}\int_X u(x,t)\,d\mu(x) =& \int_X u_0(x)\,d\mu(x)\\ &+ \int_X \int_0^t \int_X J(x,y)[u(y,s)-u(x,s)]\,d\mu(y)ds\,d\mu(x).\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Fubini-Tonelli para el caso de integrales de Bochner (Proposición 1.6.9) obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_X u(x,t)\,d\mu(x) &= \int_X u_0(x)\,d\mu(x) + \int_0^t \int_X \int_X J(x,y)u(y,s)\,d\mu(y)\,d\mu(x)\,ds\\ &\quad - \int_0^t \int_X \int_X J(x,y)u(x,s)\,d\mu(x)\,d\mu(y)\,ds\\ &= \int_X u_0(x)\,d\mu(x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la masa total en X se mantiene constante para todo tiempo t.

A pesar de haber probado la existencia de soluciones para el problema (8.2.3), no hemos logrado brindar expresiones de la misma. Sin embargo, en la siguiente proposición proporcionaremos una fórmula autorreferente para u, que aunque no explícita, permite lograr mejoras de regularidad en ella.

Proposición 8.2.3. *Supongamos que u es una solución de (8.2.3). Entonces u satisface la siguiente igualdad:*

$$u(x,t) = u_0(x)e^{-A(x)t} + \int_0^t \int_X e^{-A(x)(t-s)} J(x,y)u(y,s)d\mu(y)ds, \tag{8.2.5}$$

donde $A(x) = \int_X J(x,y)d\mu(y)$.

Demostración. Recordemos que u satisface

$$\tfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \int_X J(x,y)[u(y,t)-u(x,t)]\,d\mu(y).$$

Multiplicando ambos miembros por $e^{A(x)t}$ obtenemos que

$$e^{A(x)t}\tfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) = e^{A(x)t}\int_X J(x,y)u(y,t)\,d\mu(y) - e^{A(x)t}A(x)u(x,t),$$

o equivalentemente

$$e^{A(x)t}A(x)u(x,t) + e^{A(x)t}\tfrac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \int_X e^{A(x)t}J(x,y)u(y,t)\,d\mu(y).$$

Notemos que el lado izquierdo de la igualdad no es más que el desarrollo de una derivada de un producto, luego podemos escribirla como

$$\tfrac{\partial}{\partial t}\left(e^{A(x)t}u(x,t)\right) = \int_X e^{A(x)t}J(x,y)u(y,t)\,d\mu(y).$$

Dada la continuidad en la variable temporal podemos integrar ambos miembro entre 0 y t, obteniendo

$$\int_0^t \tfrac{\partial}{\partial s}\left(e^{A(x)s}u(x,s)\right)ds = \int_0^t\int_X e^{A(x)s}J(x,y)u(y,s)\,d\mu(y)ds.$$

En consecuencia,

$$e^{A(x)t}u(x,t) - u(x,0) = \int_0^t\int_X e^{A(x)s}J(x,y)u(y,s)\,d\mu(y)ds.$$

Por lo tanto, despejando en forma adecuada obtenemos (8.2.5). □

La siguiente proposición muestra que la solución del problema (8.2.3) es estable respecto a la condición inicial.

Proposición 8.2.4. *Sean* $u_0, v_0 \in L^1(X,\mu)$ *y* $\varepsilon > 0$ *tales que*

$$\|u_0 - v_0\|_{L^1} < \varepsilon.$$

Si u *y* v *son las soluciones de* (8.2.3) *con condición inicial* u_0 *y* v_0 *respectivamente, entonces dado* $0 < t_0 < \frac{1}{2C}$ *se satisface que*

$$\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1} \le \frac{\varepsilon}{(1-2Ct_0)^k},$$

para todo $t \in ((k-1)t_0, kt_0]$ *y para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Inmediata del Lema 8.2.1 y el Teorema 8.2.2. □

8.3. Principio de comparación y regularidad de soluciones

Dado que en esta sección presentaremos resultados que involucran conceptos como compacidad y continuidad, requeriremos que nuestro espacio ambiente esté dotado de una métrica. Sea (X,d,μ) un espacio métrico compacto de medida. Denotaremos con $C(X)$ al espacio de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$.

Comencemos observando que la solución del Teorema 8.2.2 resultó al menos tan buena como la condición inicial en términos de integrabilidad. El próximo lema muestra que si nuestra condición inicial es continua, entonces la solución hereda dicha regularidad.

Lema 8.3.1. *Sean $u_0 \in C(X)$ y J tal que $\int_X J(x,y)d\mu(y)$ sea continua para toda $x \in X$. Entonces existe una única solución u de (8.2.3) tal que $u \in C^1((0,\infty); C(X)) \cap C([0,\infty); C(X))$.*

Demostración. Repitamos los pasos de la prueba del Lema 8.2.1. Definamos un nuevo espacio de Banach dado por $\mathbb{X}_{t_0} = C([0,t_0]; C(X))$ equipado con la norma

$$|||w||| = \max_{t\in[0,t_0]} \max_{x\in X} |w(x,t)|.$$

Dada $w_0 \in C(X)$, la continuidad de $\int_X J(x,y)d\mu(y)$ permite mostrar que el operador definido en (8.2.2) resulta ser un operador de $\mathbb{X}_{t_0}$ en $\mathbb{X}_{t_0}$. Además, tomando $w_0, z_0 \in C_0(X)$ y $w, z \in \mathbb{X}_{t_0}$, se satisface que

$$|||T_{w_0}(w) - T_{z_0}(z)||| \leq \max_{x\in X} |w_0(x) - z_0(x)| + 2Ct_0 \, |||w - z||| \,. \tag{8.3.1}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
&|T_{w_0}(w)(x,t) - T_{z_0}(z)(x,t)| = \\
&\quad = |w_0(x) - z_0(x)| + \left| \int_0^t \int_X J(x,y)[(w-z)(y,s) - (w-z)(x,s)]d\mu(y)ds \right| \\
&\quad \leq |w_0(x) - z_0(x)| + \left| \int_0^t \int_X J(x,y)(w-z)(y,s)d\mu(y)ds \right| \\
&\qquad + \left| \int_0^t \left[\int_X J(x,y)d\mu(y) \right] (w-z)(x,s)ds \right| \\
&\quad \leq |w_0(x) - z_0(x)| + t \left[\int_X J(x,y)d\mu(y) \right] \max_{s\in[0,t]} \max_{y\in X} |(w-z)(y,s)| \\
&\qquad + t \left[\int_X J(x,y)d\mu(y) \right] \max_{s\in[0,t]} |(w-z)(x,s)|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando máximo tanto en t como en x tenemos (8.3.1).

Procediendo desde aquí en adelante como en el Teorema 8.2.2, obtenemos la solución $u \in C^1((0,\infty); C(X)) \cap C([0,\infty); C(X))$ que buscábamos. □

Veamos ahora un principio de comparación. Diremos que $u \in C([0,T]; C(X))$ es una **supersolución** de (8.2.3) si

$$\begin{cases} u_t(x,t) \geq \displaystyle\int_X J(x,y)[u(y,t)-u(x,t)]\,d\mu(y), & \text{en } X\times[0,T], \\ u(x,0) \geq u_0(x), & \text{en } X. \end{cases}$$

Lema 8.3.2. *Sean $u_0 \in C(X)$, $u_0 \geq 0$ y $u \in C([0,T]; C(X))$ una supersolución de (8.2.3). Entonces $u \geq 0$.*

Demostración. Supongamos que u es negativa en algún punto. Definamos $v(x,t) = u(x,t)+\varepsilon t$, con ε lo suficientemente pequeño para que v sea negativa en algún punto. Luego, si (x_0,t_0) es un punto donde v alcanza su mínimo, entonces $t_0 > 0$ (pues $v(x,0) = u(x,0) \geq 0$) y además

$$\begin{aligned} v_t(x_0,t_0) = u_t(x_0,t_0)+\varepsilon &> \int_X J(x_0,y)[u(y,t_0)-u(x_0,t_0)]d\mu(y) \\ &= \int_X J(x_0,y)[v(y,t_0)-v(x_0,t_0)]d\mu(y) \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $v_t(x_0,t_0) > 0$ lo cual contradice el hecho de que (x_0,t_0) sea un punto donde v alcanza el mínimo. Luego, $u \geq 0$. $\square$

8.4. Aproximación de D^s por reescalamientos de núcleos del L^1

En estas últimas dos secciones trabajaremos con el operador de derivación fraccionaria D^s y el problema de difusión asociado

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = D^s u(\cdot,t)(x), & \text{en } X\times(0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{en } X. \end{cases} \tag{8.4.1}$$

presentados ambos en la Sección 3.2. Es por esto que requeriremos que (X,d,μ) sea además de compacto un espacio Ahlfors α-regular de orden γ. Esta situación, aunque restrictiva, es natural en contextos geométricos clásicos como variedades compactas (Ejemplo 1.8.2) y fractales provenientes de sistemas iterados de funciones (Ejemplos 1.8.6 y 1.8.7).

Observemos que si llamamos k_s al núcleo del operador D^s, es decir $k_s(x,y) = d(x,y)^{-\alpha-s}$, entonces

$$D^s f(x) = \int_X k_s(x,y)[f(y)-f(x)]\,d\mu(y).$$

Esta estructura se asemeja a los operadores no locales tratados en las secciones anteriores. Sin embargo, k_s no es integrable en ninguna de sus dos variables, por lo tanto (8.4.1) no es un problema comprendido en esta teoría. No obstante, encontraremos un camino alternativo al dado en el Capítulo 5 para el caso diádico, para la búsqueda de una solución de (8.4.1). La estrategia es encontrar una familia de núcleos integrables que aproximen débilmente a k_s. Para esto en primer lugar construiremos núcleos que trunquen la singularidad en el origen de k_s. Tomemos $\ell > s$. Sea $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$ tal que

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^\ell, & \text{si } t < 1, \\ 1, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Definamos $\psi = \dfrac{\varphi(t)}{t^{\alpha+s}}$. Notemos que dependiendo de la relación que exista entre ℓ y $\alpha+s$ podemos tener diferentes tipos de comportamiento para $\psi(t)$. Sin embargo, en cualquiera de los casos se tiene que ψ es integrable en el $(0,\infty)$.

Definamos para cada $0 < \varepsilon \leq 1$ un núcleo $J_\varepsilon : X \times X \to \mathbb{R}$ como

$$J_\varepsilon(x,y) := \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\psi\left(\frac{d(x,y)}{\varepsilon}\right).$$

Observemos que cada J_ε es simétrico y positivo, propiedades que hereda de la función ψ y la función distancia $d(x,y)$. Pero aún más, podemos ver que

$$J_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon^{s-\ell}}{d(x,y)^{\alpha-(\ell-s)}}, & \text{si } d(x,y) < \varepsilon, \\ \dfrac{\varepsilon^s}{d(x,y)^{\alpha+s}}, & \text{si } d(x,y) \geq \varepsilon. \end{cases}$$

De este modo, gracias a la Proposición 1.8.2, podemos asegurar que cada J_ε resulta integrable en cada una de sus variables. Además, la continuidad de d y ψ garantizan la continuidad de J en cada una de sus variables y por lo tanto la continuidad de $\int J(x,y)\,d\mu(y)$ para cada x en X.

A partir de cada uno de estos núcleos definamos los operadores

$$L_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\varepsilon^s}\int_X J_\varepsilon(x,y)[f(y)-f(x)]\,d\mu(y).$$

Veamos que los operadores L_ε construidos tienden débilmente al operador D^s cuando $\varepsilon \to 0^+$.

Lema 8.4.1. *Sea $f \in C([0,T];\Lambda_r(X,d,\mu))$ luego*

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\in X}|L_\varepsilon f(x,t) - D^s f(x,t)| = O(\varepsilon^{r-s}),$$

donde los operadores L_ε y D^s están actuando en la primer variable.

Demostración. Dado que $f(\cdot,t) \in \Lambda_r(X,d,\mu)$ para cada $t \in [0,T]$ luego $D^s f(\cdot,t)$ está bien definido. Luego, reescribamos J_ε como

$$J_\varepsilon(x,y) = \varepsilon^s \frac{\varphi\left(\frac{d(x,y)}{\varepsilon}\right)}{d(x,y)^{\alpha+s}}.$$

Así, podemos observar que

$$\begin{aligned} |L_\varepsilon f(x,t) - D^s f(x,t)| &= \left| \int_X \frac{f(y,t)-f(x,t)}{d(x,y)^{\alpha+s}} \left[\varphi\left(\frac{d(x,y)}{\varepsilon}\right) - 1\right] d\mu(y) \right| \\ &\leq \int_{B(x,\varepsilon)} \frac{|f(y,t)-f(x,t)|}{d(x,y)^{\alpha+s}}\, d\mu(y) \\ &\leq 2[f(\cdot,t)]_{\dot\Lambda_r} \int_{B(x,\varepsilon)} d(x,y)^{-\alpha+(r-s)}\, d\mu(y). \end{aligned}$$

Entonces por el Lema 1.8.2 resulta que

$$|L_\varepsilon f(x,t) - D^s f(x,t)| \leq \frac{c_2 2^{\alpha+1}[f(\cdot,t)]_{\dot\Lambda_r}}{2^{r-s}-1} \varepsilon^{r-s}.$$

Dado que $f \in L^\infty((0,T);\Lambda_r(X,d,\mu))$ la conclusión es inmediata. □

8.5. Aproximación de la solución del problema de difusión asociado al operador D^s

En el próximo teorema mostraremos que una familia de soluciones de problemas del tipo (8.2.3) asociados a los operadores L_ε convergen a la solución de (8.4.1).

Teorema 8.5.1. *Sea (X,d,μ) un espacio compacto Ahlfors α-regular de orden γ. Sean $0<s<r<\gamma$ y $v(x,t) \in C([0,T];\Lambda_r(X,d,\mu))$ tal que $\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) = D^s v(x,t)$. Luego, para cada $0<\varepsilon\leq 1$ las soluciones u^ε de los problemas*

$$\text{(8.5.1)} \qquad \begin{cases} u_t(x,t) = L_\varepsilon f(x,t), & \text{en } X\times[0,T], \\ u(x,0) = v(x,0), & \text{en } X. \end{cases}$$

satisfacen que

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in X} |v(x,t) - u^\varepsilon(x,t)| \leq C(T)\varepsilon^{r-s}.$$

Demostración. Dado que cada J_ε satisfice las hipótesis del Lema 8.3.1, entonces para cada $0 < \varepsilon \leq 1$ el problema (8.5.1) tiene una única solución en $C([0,T];C(X))$. Llamémosla u^ε a cada una de estas.

Sea $w^\varepsilon = v - u^\varepsilon$. Observemos que

$$\begin{cases} w_t^\varepsilon(x,t) = L_\varepsilon w^\varepsilon(x,t) + F_\varepsilon(x,t), & \text{en } X \times [0,T], \\ w^\varepsilon(x,0) = 0, & \text{en } X, \end{cases}$$

donde $F_\varepsilon(x,t) = D^s v(x,t) - L_\varepsilon v(x,t)$.

Definamos $\overline{w} = k\varepsilon^{r-s}t + \varepsilon$ y $\overline{z} = \overline{w} - w^\varepsilon$, donde k es una constante que elegiremos más adelante. Veamos que $\overline{z}$ es una supersolución del problema (8.5.1), en efecto

$$\overline{z}_t = \overline{w}_t - w_t^\varepsilon = k\varepsilon^{r-s} - (L_\varepsilon w^\varepsilon + F_\varepsilon).$$

Pero dado que $\overline{w}$ no depende de x, entonces $L_\varepsilon \overline{w} = 0$. Luego,

$$\overline{z}_t = k\varepsilon^{r-s} - F_\varepsilon + L_\varepsilon \overline{w} - L_\varepsilon w^\varepsilon = k\varepsilon^{r-s} - F_\varepsilon + L_\varepsilon \overline{z}.$$

Por el Lema 8.4.1 sabemos que $F_\varepsilon(x,t) = O(\varepsilon^{r-s})$. Escojamos k lo suficientemente grande para que $k\varepsilon^{r-s} - F_\varepsilon \geq 0$. Por lo tanto,

$$\overline{z}_t \geq L_\varepsilon \overline{z}.$$

Por otro lado,

$$\overline{z}(x,0) = \overline{w}(x,0) - w^\varepsilon(x,0) = \varepsilon - 0 = \varepsilon > 0.$$

Así, $\overline{z}$ es una supersolución de (8.5.1). Entonces por el Lema 8.3.2 tenemos que $\overline{z} \geq 0$, para casi todo $x \in X$. En consecuencia, $\overline{w} \geq w^\varepsilon$, para casi todo $x \in X$.

Análogamente, si definimos $\underline{w} = -\overline{w}$ y $\underline{z} = w^\varepsilon - \underline{w}$, repitiendo lo hecho para $\overline{z}$, resulta que $\underline{z}$ es también una supersolución de (8.5.1). Esto implica que $w^\varepsilon \geq \underline{w}$, para casi todo $x \in X$. Por consiguiente, $-\overline{w} \leq w^\varepsilon \leq \overline{w}$, para casi todo $x \in X$. De este modo,

$$|v - u^\varepsilon| = |w^\varepsilon| \leq k\varepsilon^{r-s}t + \varepsilon \leq (kt+1)\varepsilon^{r-s},$$

dado que $r - s > 1$. Por lo tanto, es inmediato que

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in X} |v(\cdot,t) - u^\varepsilon(\cdot,t)| \leq (kT+1)\varepsilon^{r-s},$$

como queríamos demostrar. $\square$

Las hipótesis del Teorema 8.5.1 son ciertamente restrictivas pero hay buenos ejemplos de su ocurrencia. Mencionamos dos. Si bien los resultados del Capítulo 2 valen en el contexto euclídeo no compacto, no es difícil ver que en el toro, el análisis de Fourier clásico (series) permite obtener teoremas de regularidad similares a los allí probados. En particular y por poner un caso extremo, si estamos en el toro unidimensional S^1 y $v(\theta,0)$ es un polinomio trigonométrico $v(\theta,0)=\sum_{|k|\leq N} c_k e^{ik\theta}$ entonces $v(x,t)=\sum_{|k|\leq N} c_k e^{-t|k|^s} e^{ik\theta}$ también lo es y su grado es independiente de t.

El segundo ejemplo es el provisto por los Capítulos 4 y 5. Puesto que cada $h\in\mathscr{H}$ es una función de clase Lipschitz 1 con respecto a la métrica δ tenemos que si $v(x,0)=\sum_{h\in\mathscr{H}_0} c_k h(x)$ con $\mathscr{H}_0\subset\mathscr{H}$ finito, entonces

$$v(x,t)=\sum_{h\in\mathscr{H}_0} c_k e^{-tm_Q(h)\mu(Q(h))^{-s}} h(x)$$

es solución de $v_t = D^s u$ con D^s la derivación considerada en el Capítulo 5 y es de clase Lipschitz 1 con respecto a δ.

Conclusiones generales

✓ La generalización de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n$ a través del operador laplaciano fraccionario $(-\Delta)^{s/2}$ puede ampliarse a espacios Ahlfors regulares.

✓ El operador de derivación fraccionaria diádico D^s tiene por autofunciones al sistema de Haar.

✓ El problema de dato inicial para la difusión vinculada al operador diádico D^s tiene solución tanto en $\mathbb{R}^+$ como en espacios de tipo homogéneo generales.

✓ En $\mathbb{R}^+$ el operador maximal de la difusión asociado al operador diádico D^s está acotado puntualmente por el operador maximal diádico de Hardy-Littlewood. La solución del problema de difusión asociado a D^s converge puntualmente al dato inicial. El mismo resultado es válido en espacios métricos de medida finita.

✓ El operador maximal de las soluciones de ecuaciones de Schrödinger no local en espacios métricos se acota por operadores maximales «sharp» de Calderón diádicos. La convergencia puntual al dato inicial ocurre para datos de tipo Besov-Sobolev como en el caso clásico.

✓ Los problemas de evolución no locales definidos a partir de operadores de núcleos integrables en espacios de medida tienen solución única.

✓ Existe una familia de problemas indexados por un parámetro de reescalamiento cuyas soluciones convergen a la solución del problema antes mencionado cuando el espacio subyacente es Ahlfors regular y compacto.

Bibliografía

1. Hugo Aimar, *Distance and measure in analysis and PDE*, Birkhäuser Basel, Submitted for publication.
2. ______, *Construction of haar type bases on quasi-metric spaces with finite assouad dimension*, Anal. Acad. Nac. Cs. Ex., F. y Nat., Buenos Aires **54** (2002).
3. Hugo Aimar, Ana Bernardis, and Bibiana Iaffei, *Comparison of Hardy-Littlewood and dyadic maximal functions on spaces of homogeneous type*, J. Math. Anal. Appl. **312** (2005), no. 1, 105–120. MR MR2175208 (2006e:42023)
4. Hugo Aimar, Bruno Bongioanni, and Ivana Gómez, *On dyadic nonlocal Schrödinger equations with Besov initial data*, J. Math. Anal. Appl. **407** (2013), no. 1, 23–34. MR 3063102
5. Hugo Aimar, Marilina Carena, and Bibiana Iaffei, *Discrete approximation of spaces of homogeneous type*, J. Geom. Anal. **19** (2009), no. 1, 1–18. MR 2465294 (2010a:28002)
6. Hugo Aimar, Marilina Carena, and Marisa Toschi, *Muckenhoupt weights with singularities on closed lower dimensional sets in spaces of homogeneous type*, J. Math. Anal. Appl. (to appear).
7. Hugo Aimar and Osvaldo Gorosito, *Unconditional haar bases for lebesgue spaces on spaces of homogeneous type*, Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII, SPIE, San Diego (2000).
8. Hugo A. Aimar, Ana Bernardis, and Bibiana Iaffei, *Multiresolution approximations and unconditional bases on weigthed Lebesgue spaces on spaces of homogeneous type*, Journal of Approximation Theory **148** (2007), 12–34.
9. Josefina Álvarez Alonso, *Distribution theory and fourier transform: (a user's manual)*, second ed., Cuadernos de Matemática y Mecánica. Serie Cursos y Seminarios, CIMEC - IMAL, 2005.
10. Fuensanta Andreu-Vaillo, José M. Mazón, Julio D. Rossi, and J. Julián Toledo-Melero, *Nonlocal diffusion problems*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 165, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR 2722295 (2011i:35002)
11. Martin T. Barlow, *Diffusions on fractals*, Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1995), Lecture Notes in Math., vol. 1690, Springer, Berlin, 1998, pp. 1–121. MR 1668115 (2000a:60148)
12. Daniel ben Avraham and Shlomo Havlin, *Diffusion and reactions in fractals and disordered systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. MR 1881970 (2003h:82001)

13. Luis Caffarelli, Chi Hin Chan, and Alexis Vasseur, *Regularity theory for parabolic nonlinear integral operators*, J. Amer. Math. Soc. **24** (2011), no. 3, 849–869. MR 2784330 (2012c:45024)
14. Luis Caffarelli and Luis Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 7-9, 1245–1260. MR 2354493 (2009k:35096)
15. Lennart Carleson, *Some analytic problems related to statistical mechanics*, Euclidean harmonic analysis (Proc. Sem., Univ. Maryland, College Park, Md., 1979), Lecture Notes in Math., vol. 779, Springer, Berlin, 1980, pp. 5–45. MR 576038 (82j:82005)
16. J. Cheeger, *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), no. 3, 428–517. MR 1708448 (2000g:53043)
17. Michael Christ, *A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral*, Colloq. Math. **60/61** (1990), no. 2, 601–628. MR MR1096400 (92k:42020)
18. Donald L. Cohn, *Measure theory*, second ed., Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks], Birkhäuser/Springer, New York, 2013. MR 3098996
19. Ronald R. Coifman and Guido Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Étude de certaines intégrales singulières, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242. MR MR0499948 (58 #17690)
20. Carmen Cortazar, Manuel Elgueta, and Julio D. Rossi, *Nonlocal diffusion problems that approximate the heat equation with Dirichlet boundary conditions*, Israel J. Math. **170** (2009), 53–60. MR 2506317 (2010e:35197)
21. Carmen Cortazar, Manuel Elgueta, Julio D. Rossi, and Noemi Wolanski, *Boundary fluxes for nonlocal diffusion*, J. Differential Equations **234** (2007), no. 2, 360–390. MR 2300660 (2008c:35141)
22. ———, *How to approximate the heat equation with Neumann boundary conditions by nonlocal diffusion problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. **187** (2008), no. 1, 137–156. MR 2358337 (2008k:35261)
23. Guy David, *Morceaux de graphes lipschitziens et intégrales singulières sur une surface*, Rev. Mat. Iberoamericana **4** (1988), no. 1, 73–114. MR MR1009120 (90h:42026)
24. Ronald A. DeVore and Robert C. Sharpley, *Maximal functions measuring smoothness*, Mem. Amer. Math. Soc. **47** (1984), no. 293, viii+115. MR 727820 (85g:46039)
25. J. Diestel and J. J. Uhl, Jr., *Vector measures*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977, With a foreword by B. J. Pettis, Mathematical Surveys, No. 15. MR 0453964 (56 #12216)
26. Paul Fife, *Some nonclassical trends in parabolic and parabolic-like evolutions*, Trends in nonlinear analysis, Springer, Berlin, 2003, pp. 153–191. MR 1999098 (2004h:35100)
27. Gerald B. Folland, *Real analysis*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. MR MR1681462 (2000c:00001)
28. Michael Frazier, Björn Jawerth, and Guido Weiss, *Littlewood-Paley theory and the study of function spaces*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 79, Published for

the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1991. MR 1107300 (92m:42021)

29. Guy Gilboa and Stanley Osher, *Nonlocal linear image regularization and supervised segmentation*, Multiscale Model. Simul. **6** (2007), no. 2, 595–630. MR 2338496 (2008m:68215)
30. Amiran Gogatishvili, Pekka Koskela, and Nageswari Shanmugalingam, *Interpolation properties of Besov spaces defined on metric spaces*, Math. Nachr. **283** (2010), no. 2, 215–231. MR 2604119 (2011j:46053)
31. Loukas Grafakos, *Classical and modern Fourier analysis*, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2004. MR 2449250
32. Piotr Hajłasz, *Sobolev spaces on an arbitrary metric space*, Potential Anal. **5** (1996), no. 4, 403–415. MR 1401074 (97f:46050)
33. Y. S. Han and E. T. Sawyer, *Littlewood-Paley theory on spaces of homogeneous type and the classical function spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **110** (1994), no. 530, vi+126. MR 1214968 (96a:42016)
34. Silvia I. Hartzstein and Beatriz E. Viviani, *Homeomorphisms acting on Besov and Triebel-Lizorkin spaces of local regularity $\psi(t)$*, Collect. Math. **56** (2005), no. 1, 27–45. MR 2131131 (2005m:46054)
35. Tuomas Hytönen and Anna Kairema, *Systems of dyadic cubes in a doubling metric space*, Colloq. Math. **126** (2012), no. 1, 1–33. MR 2901199
36. Sune Jespersen, Ralf Metzler, and Hans C. Fogedby, *Lévy flights in external force fields: Langevin and fractional fokker-planck equations and their solutions*, Phys. Rev. E **59** (1999), 2736–2745.
37. Jun Kigami, *Analysis on fractals*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 143, Cambridge University Press, Cambridge, 2001. MR 1840042 (2002c:28015)
38. David Kinderlehrer and Guido Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Classics in Applied Mathematics, vol. 31, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000, Reprint of the 1980 original. MR 1786735 (2002d:49001)
39. Nicholas J. Korevaar and Richard M. Schoen, *Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets*, Comm. Anal. Geom. **1** (1993), no. 3-4, 561–659. MR 1266480 (95b:58043)
40. Roberto A. Macías and Carlos Segovia, *A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. **33** (1979), no. 3, 271–309. MR 546296 (81c:32017b)
41. ———, *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type*, Adv. in Math. **33** (1979), no. 3, 257–270. MR MR546295 (81c:32017a)
42. Jan Mikusiński, *The Bochner integral*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1978, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Band 55. MR 0492147 (58 #11296)
43. Justin Owen and Robert S. Strichartz, *Boundary value problems for harmonic functions on a domain in the Sierpinski gasket*, Indiana Univ. Math. J. **61** (2012), no. 1, 319–335. MR 3029400

44. Jaak Peetre, *New thoughts on Besov spaces*, Mathematics Department, Duke University, Durham, N.C., 1976, Duke University Mathematics Series, No. 1. MR 0461123 (57 #1108)
45. Mayte Pérez-Llanos and Julio D. Rossi, *Blow-up for a non-local diffusion problem with Neumann boundary conditions and a reaction term*, Nonlinear Anal. **70** (2009), no. 4, 1629–1640. MR 2483584 (2010b:35052)
46. Hua Qiu and Robert S. Strichartz, *Mean Value Properties of Harmonic Functions on Sierpinski Gasket Type Fractals*, J. Fourier Anal. Appl. **19** (2013), no. 5, 943–966. MR 3110587
47. Walter Rudin, *Functional analysis*, second ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc., New York, 1991. MR 1157815 (92k:46001)
48. Nageswari Shanmugalingam, *Newtonian spaces: an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces*, Rev. Mat. Iberoamericana **16** (2000), no. 2, 243–279. MR 1809341 (2002b:46059)
49. Luis Silvestre, *Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator*, Comm. Pure Appl. Math. **60** (2007), no. 1, 67–112. MR 2270163 (2008a:35041)
50. Luis Enrique Silvestre, *Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2005, Thesis (Ph.D.)–The University of Texas at Austin. MR 2707618
51. Elias M. Stein and Guido Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971, Princeton Mathematical Series, No. 32. MR 0304972 (46 #4102)
52. Pablo Raúl Stinga and José Luis Torrea, *Extension problem and Harnack's inequality for some fractional operators*, Comm. Partial Differential Equations **35** (2010), no. 11, 2092–2122. MR 2754080 (2012c:35456)
53. Robert S. Strichartz, *Differential equations on fractals*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006, A tutorial. MR 2246975 (2007f:35003)
54. Richard L. Wheeden and Antoni Zygmund, *Measure and integral*, Marcel Dekker Inc., New York, 1977, An introduction to real analysis, Pure and Applied Mathematics, Vol. 43. MR 0492146 (58 #11295)

Índice alfabético