Matemática

REFLEXIONES ACERCA DE LA ARTICULACIÓN NIVEL MEDIO–UNIVERSIDAD

Elena Fenández de Carrera
Liliana Nitti
(compiladoras)

UNIVERSIDAD NACIONAL
DEL LITORAL

Matemática
Reflexiones acerca
de la articulación
Nivel Medio–Universidad

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

Rector Enrique Mammarella
Director de Planeamiento y Gestión Académica Daniel Comba
Directora Ediciones UNL Ivana Tosti

. . . .

Matemática : reflexiones acerca de la articulación nivel medio?universidad / Liliana Nitti ... [et al.] ; compilado por Liliana Nitti ; Elena Fernández de Carrera ; prólogode Hugo Erbetta. - 1a ed . - Santa Fe : Ediciones UNL, 2020.
Libro digital, PDF - (Cátedra. Interfaces)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-749-208-8

1. Matemática. 2. Educación Universitaria. I. Nitti, Liliana, comp. II. Fernández de Carrera, Elena, comp. III. Erbetta, Hugo, prolog.
CDD 510.7

. . . .

Coordinación editorial
María Alejandra Sedrán
Coordinación diseño
Alina Hill
Producción general
Ediciones UNL

—
editorial@unl.edu.ar
www.unl.edu.ar/editorial

. . . .

Matemática
Reflexiones acerca de la articulación Nivel Medio–Universidad

Elena F. de Carrera
Liliana Nitti
(compiladoras)

Índice

Prólogo
¿Qué se espera de la articulación?

La problemática de la Articulación de Niveles ocupa un lugar central en la Universidad Nacional del Litoral (UNL). Es que entre sus principales políticas académicas, desde el año 1992, se han definido diferentes estrategias para mejorar el acceso a los estudios superiores, las cuales adquieren un nuevo empuje a partir del año 2000, cuando en el marco del Plan de Desarrollo Institucional se definió una agenda de trabajo conjunto con las escuelas medias. La misma incluyó el análisis de las propuestas curriculares de cada nivel, la definición de áreas prioritarias en materia de articulación, la producción de materiales para la enseñanza y la formación docente continua. Su principio orientador constituyó uno de los ejes rectores de aquel Plan: «la formación de ciudadanos libres y aptos para integrarse a una sociedad democrática, con el más alto nivel de calidad, y en toda la diversidad de saberes científicos, técnicos, humanísticos y culturales».

La implementación de la Ley de Educación Nacional, en la cual se extiende la obligatoriedad de la enseñanza hasta el último año de la escuela secundaria, configura un nuevo escenario que requiere el fortalecimiento de estas acciones. Es por eso que en el nuevo Plan de Desarrollo Institucional 2010–2019, «Hacia la Universidad del Centenario», se establece como una de las Líneas de Orientación Principales el afianzamiento de la democratización de la educación superior a través del desarrollo de dispositivos de acceso y permanencia igualadores de oportunidades. Queda claro, entonces, que las estrategias de articulación procuran contribuir, entre otras, a dar respuesta a la problemática de la desigualdad en el acceso a la educación superior.

En la actualidad el Programa de Ingreso a la Universidad Nacional del Litoral, cen-tralizado y dependiente de la Secretaría Académica del Rectorado, contempla un conjunto de acciones progresivas que procuran abordar esta complejidad. La creación de la Serie Interfases dentro de la política editorial de nuestra Universidad, forma parte constitutiva de estas acciones en tanto dichas publicaciones, destinadas a profesores de las escuelas secundarias, procuran problematizar didácticamente algunos contenidos considerados claves en este espacio de articulación de niveles educativos. Esta colección de Ediciones UNL aspira así a promover relaciones fructíferas entre los docentes de las escuelas secundarias, de los institutos de formación docente y de nuestra Universidad.

El nombre elegido para designar esta nueva serie editorial da cuenta del núcleo de significación que la sustenta: la idea de conexión, de interacción y comunicación entre elementos, es decir, un ámbito de contacto y de articulación entre dos espacios con sus propias identidades. En este sentido Reflexiones de acciones de articulación en Matemática: Nivel Medio–Universidad constituye un nuevo aporte a la construcción dinámica y permanente de este espacio complejo y desafiante.

Hugo Erbetta[1]

Nota

1. Ingeniero Agrónomo, Secretario Académico de la Universidad Nacional del Litoral, período 2008–2012. Actual Secretario de Extensión.

Introducción

Este libro pretende acercar al lector ciertas ideas y acciones que guiaron a los actores de un proceso de articulación Escuela Media—Universidad que emprendió la Universidad Nacional del Litoral y que se inició en el año 2004. Si bien el proceso de articulación se realizó en varias áreas, en este libro sólo se tratará de las que correspondieron a Matemática.

Se creyó que valía la pena plasmar estas actividades por escrito debido a la riqueza de las mismas en este accionar conjunto de los profesores del Ciclo Medio y los de la Universidad.

En el capítulo I se indican brevemente las condiciones en que se realizaron las acciones de articulación y la posición filosófica en que se sustentaron. Se sintetiza también la posición pedagógica y didáctica que llevó adelante el equipo encargado de las acciones concretas con los docentes de la escuela media, así como la importante función posterior de éstos de «llevar al aula las acciones y evaluarlas, para señalar las dificultades y logros de los alumnos al realizarlas».

En los capítulos II y III se tratan algunos temas de Matemática que fueron trabajados en los encuentros o jornadas de reflexión realizados y en los que se trató de analizar problemas no habituales, como actividad matemática fundamental. Este material fue preparado por los docentes de la Universidad que figuran como autores.

El capítulo IV, escrito por los docentes que coordinaban cada uno de los encuentros, o docentes tutores, muestra la opinión de los mismos, las dificultades, los logros e inconvenientes con los que se encontraron en sus acciones; o sea, es la evaluación cualitativa de los docentes tutores acerca de lo actuado.

El capítulo V es la opinión de los alumnos que realizaron el curso introductorio de la UNL, en el marco de la articulación realizada por los tutores a cargo de las clases de estos cursos, y es una valiosa evaluación cuali y cuantitativa que se llevó adelante mediante una beca de uno de ellos que coordinó su accionar con otros e hizo que el número de opiniones vertidas por los alumnos fuera representativo.

El capítulo VI está constituido por las herramientas básicas de Estadística para la investigación educativa y que fueron brindadas a los docentes en las jornadas realizadas. Por su importancia actual y las opiniones positivas de los docentes que las aplicaron se consideró incluirlas para que sean empleadas por todos aquellos que necesiten evaluar sus actividades en educación.

El capítulo VII consiste en las reflexiones finales y opiniones personales que esa rica experiencia dejó en uno de los docentes coordinadores.

Elena F. de Carrera

Capítulo I
Una forma de ver la matemática. Ideas para el aula

ELENA F. DE CARRERA Y LILIANA NITTI

I.1. La educación

Si de algo debe convencerse la sociedad es del poder innegable de la educación. De la educación que no es mera información sino formación del ser humano para que pueda vivir libremente en la sociedad, conociendo sus derechos, pero también sus deberes, reconociendo su necesidad de ser respetado y de respetar, de integrarse y de integrar, de compartir similitudes y diferencias, de apreciar la vida, la naturaleza y de amar al prójimo. Esta formación humanista necesita un docente poco inclinado a preconceptos y que «en su práctica sea capaz de apreciar la relación dialéctica entre el hombre y su mundo» (Freire, 1994:123).

Un concepto más restringido es aquel que permite asociar la educación con la formación que brindan los estudios que, si bien no es lo mismo, abre no obstante un panorama inconmensurable para quienes accede a ella.

Vale la pena traer a consideración la experiencia del programa «Educación universitaria en prisiones» de la UNL. En una entrevista realizada a algunos de sus actores, que aparece publicada en el diario *El Litoral* del 11/12/05 bajo el título «Llegar a la Universidad viviendo en la cárcel», se pueden rescatar algunas opiniones que resultan impactantes por su contenido y porque son un signo evidente del valor de la educación. Por ejemplo, uno de los entrevistados afirma al periodista: «¿Sabe qué me llamó la atención? Que aprendí a hablar de muchas cosas, de lo que ignoraba; que aprendí a trabajar *en* grupo. Me está ayudando a vivir». Otras dos opiniones que también vale la pena remarcar, señalan: «Bueno, ahora tendré un título que podré ocuparlo, y as*í podré cambiar mi modo de vida*»; y la otra dice: «Tuve la suerte de ingresar a la Universidad, pero me cuesta bastante, en el sentido de que había muchas cosas que no conocía. Sin embargo, es bueno, porque todos los días voy tomando conocimientos nuevos, y eso te incentiva».

La variedad de la práctica y temas a estudiar (así como el intento de llevar a la vida diaria la construcción interdisciplinaria de los diversos objetos de estudio) evidencia la necesidad de hacer coincidir la producción intelectual y áulica con los problemas más relevantes de la sociedad, en especial de los sectores de más bajos recursos a los que les resulta más difícil la finalización de sus estudios secundarios y, más aún, su ingreso y permanencia en el nivel superior.

Convengamos que educar no es sólo enseñar a leer y a escribir. Es enseñar a vivir en sociedad, a convivir, a tolerar, a ayudar, a ser solidario, a conocer el derecho a la salud, a una vivienda digna y a estar alfabetizado en las ciencias de manera de poder vivir como un ciudadano en la sociedad y no sentirse un excluido.

I.2. La educación matemática

A la luz de estas consideraciones podemos afirmar que es necesario estudiar matemática y preguntarnos: «¿por qué?». En una gran cantidad de carreras, matemática integra su currículo, pero esa no es la única razón. La matemática es la disciplina apropiada por su naturaleza para aprender a plantear y resolver problemas.

La resolución de problemas debe ser una de las actividades fundamentales en nuestras clases de matemática. Los problemas no tienen que ser sólo lo que habitualmente se conoce como tal: un enunciado con algunos datos numéricos y una incógnita para hallar o pregunta para responder. Los problemas pueden ser teóricos o aplicados. La demostración de un teorema, el análisis de una pregunta para encontrar su respuesta, poder enunciar una propiedad que surja como generalización de una serie de ejemplos y que luego haya que demostrar para justificar su validez, constituyen problemas. Además, la solución de un problema permite, por un lado, visualizar nuevos problemas y, por otro, generalmente aportar las herramientas necesarias para resolver otros. Así, un problema y una pregunta pueden integrarse constituyendo nuevos problemas o campo de problemas. El enfrentarse con una pregunta problemática y la consecuente posibilidad de discusión en conjunto e intercambio de ideas, constituye la base sobre la cual es posible construir tanto la reflexión como la optimización de las posibles estrategias de acción.

El trabajo interdisciplinario con las otras materias del currículo hace visible la potencialidad de la matemática. Esta acción permite marcar su fuerte relación con otras disciplinas y su poder de interpretar la realidad en la que nos encontramos. Esto es fundamental no sólo para el estudiante en el nivel superior sino para un simple ciudadano, porque se necesitan resolver, o al menos reconocer, los problemas de origen matemático que se presentan en la vida en sociedad. Para ello es necesario que quienes están comprometidos en su enseñanza, alumnos y profesores, puedan llegar a hacer suyas las palabras de Le Corbusier (1887–1965), una de las figuras más importantes de la arquitectura moderna: «la matemática es el magistral edificio imaginado por el hombre para comprender el Universo. En ella se encuentra lo absoluto y lo infinito, lo prensible y lo inapresable» (1948:64).

La matemática es así la disciplina que nos permite acceder o atisbar en otras, tal es el caso de la arquitectura, la física, los problemas de ingeniería y aun la misma medicina, para mencionar sólo algunas situaciones, sin priorizar su íntima relación con la tecnología; esa tecnología que según Alaine Touraine debe ser prioritaria para América Latina y por la que ésta ha demostrado siempre, salvo Brasil, poca preocupación y que de revertirse traería aparejada una transformación de la educación.

I.3. La matemática en la educación. Programa y propuesta de Articulación de Niveles

I.3.1. Aclaraciones necesarias

En el año 2004 el Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe y la Universidad Nacional del Litoral conjuntamente tomaron la decisión de organizar actividades para favorecer la articulación en los distintos niveles de enseñanza de contenidos teóricos y prácticos de la disciplina.

No fueron pensadas, en esta oportunidad, como simples cursos de capacitación donde se desarrollara algún tema matemático en especial o contenidos de didáctica de la matemática. Se pensó en algo más profundo, más integrador, que enfrentara la diversidad pero, no obstante, la respetara, y que tuviera al docente de Nivel Polimodal o universitario como el principal actor comprometido. Corresponde aclarar que esta denominación «Nivel Polimodal», como la de EGB3 que se usa en distintas páginas de este libro, obedece a que era la que estaba vigente, establecida y avalada por la Ley Federal de Educación, hoy derogada, cuando comenzamos a implementar las propuestas de articulación que se fundamentan y exponen en los apartados del presente libro.

La idea rectora fue la de estructurar las Jornadas de Reflexión, cuyo objetivo era compartir entre colegas algunos temas considerados prioritarios y que a su vez —enfocados desde el análisis, la discusión, el trabajo en el aula y la vuelta a la discusión— sirvieran para reflexionar conjuntamente sobre tres momentos fundamentales en todo proceso educativo: epistemológico, didáctico y evaluativo.

Estas Jornadas de Reflexión propuestas tuvieron por objeto mostrar la importancia de estar comprometidos con los problemas de la realidad, de la vida cotidiana, y es de esta necesidad que surge el ofrecimiento de este tipo de formación interdisciplinaria.

Consecuentemente, los temas matemáticos seleccionados para producir materiales de trabajo se centraron preferentemente en el concepto de *función*, uno de los más difundidos y no obstante de los más controvertidos entre los docentes de la disciplina.

El primer material elaborado llevó como título «La función de las funciones en Educación Polimodal», precisamente porque las funciones matemáticas como objeto de estudio y enseñanza constituyen en la actualidad uno de los pilares principales de las ciencias. Sobre este concepto se sustentan otros de las diversas ciencias, ya sean experimentales, sociales y/o humanas, sin dejar de mencionar la misma matemática. La definición de función no surgió —como todo conocimiento científico— tal como se la conoce hoy, sino que se fue configurando a través de sucesivas aproximaciones desde la observación empírica de la relación entre fenómenos medibles hasta la concepción actual.

Por esa razón en las primeras producciones de Matemática escritas en el marco del Programa de Articulación General y Disciplinar (2004) al que hicimos referencia, se señaló que en la configuración del concepto de función se pueden distinguir tres etapas:

- La primera se extiende desde las expresiones iniciales de correspondencias numéricas o geométricas hasta la Modernidad.
- La segunda en la que Descartes (1596—1650), Newton (1643—1727) y Leibnitz (1646—1727) son los representantes.
- La tercera comienza con la propuesta del problema de la cuerda vibrante, resuelto por D`Alambert (1717—1783) en 1747 y termina a fines del milenio pasado con la definición en términos conjuntistas de este concepto de función. Aparece explícitamente en Leibnitz (1692) y Euler (1707—1783) introdujo en 1734 el símbolo f(x).

En este proceso, los problemas planteados por la física hacen que el lenguaje funcional sea el adecuado para resolverlos y a su vez posibilitan avances decisivos en la gestación del concepto en su forma general.

En esta primera producción también se hizo hincapié en algunos temas vinculados con esta definición de función y que se estudian en el Nivel Secundario (o más precisamente lo que en dicho momento representaban los ciclos EGB3 y Polimodal), pues forman parte de su currículo.

Se discutieron así temas tales como: la función de primer grado, la proporcionalidad y su conexión con el arte, la música, la geometría y la economía, la proporcionalidad inversa, la función cuadrática y sus relaciones con las ecuaciones e inecuaciones.

El material escrito se dividió en dos partes:

- La primera abordó «La función de las funciones en el Polimodal», con los siguientes contenidos: función, función lineal y cuadrática, para profundizar el estudio de las mismas contemplando algunos aspectos particulares. Esto permitió reflexionar e investigar sobre las prácticas docentes, en una interrelación de la ciencia y su didáctica, con la convicción de que el trabajo en las aulas con un profundo conocimiento científico puede ayudar en el diseño de estrategias didácticas tendientes a mejorar el aprendizaje de la Matemática.
- La segunda parte se denominó «Educar matemáticamente». En ella se estudió la realidad educativa desde los aportes de la sociología de la educación, la pedagogía y la didáctica de la Matemática, analizando trozos de algunos ensayos de

autores de relevancia en la actualidad en estos temas, tales como: la necesidad del esfuerzo, como sugiere Jaim Etcheverry (2000); el trabajo en equipo y la interdisciplinariedad según Tedesco (1995); la necesidad de educación a lo largo de toda la vida de Delors; la necesidad de una matemática emotiva de Alsina; el olvidado estudio como el eslabón entre enseñanza y aprendizaje de Chevallard, Bosch y Gascón; las clases sociales y la educación de Bourdieu y Passeron; las consideraciones acerca de qué es la matemática de Santaló, Cañón Loyes y Courant y Robbins.

I.4. Las acciones realizadas

Los contenidos señalados tenían por objetivo realizar y encauzar una reflexión ordenada acerca de la problemática de la educación hoy y, principalmente, sobre la crisis que ésta sufre, para de esta manera poder diseñar prácticas docentes con la idea fundamental de que la educación en su integridad, no parcializada como los contenidos de una asignatura particular, permitirá a nuestro país salir de la profunda crisis social en que se encuentra. Tratar, a su vez, de emerger de la no menos profunda crisis en la que se halla el sistema educativo, que lo ha llevado a una pérdida notoria de su calidad, detectable no sólo en el segmento de articulación Enseñanza Media–Enseñanza Superior, sino en la relación de la educación con el mundo del trabajo. Podemos señalar, coincidiendo con Alicia De Alba, que provienen de una de las «características de este fin de siglo y milenio, la ausencia de proyectos políticos–sociales que sean capaces de responder a los conflictos que vive el hombre hoy en día» (1998:62).

Las actividades del docente participante de estas acciones debían ser permanentemente llevadas al aula y enfocadas a una población adolescente cuyo problema no es sólo elegir una carrera sino entender un mundo cambiante según los tiempos y a los que les cuesta también comprender la incertidumbre, la crisis de valores y su propio futuro.

Ambos apartados estaban diferenciados solamente a los efectos de plantear temáticamente los contenidos, ya que las lecturas se interrelacionaban entre sí a los fines de comprender el trabajo docente en situaciones reales y permitir estudiar los obstáculos sobre el aprendizaje que los propios contenidos acarrean y se proyectan a las actividades áulicas.

Estas experiencias en su relación permanente con el adolescente, como sujeto activo y presente, permitieron una profunda unión de la «matemática y su didáctica».

En ellas, cada docente pudo desplegar su singularidad, además, cada alumno pudo percibir a su docente como aquel sujeto activo que se construye y reconstruye permanentemente y que hace que la escuela, coincidiendo con Duchatzky, «se constituya en núcleo de sentido y que sus actores se perciban reconocidos como sujetos de enunciación» (1995:37). Experiencias que permitieron, además, que el docente asuma y haga asumir a sus alumnos una actitud crítica, aumentando o despertando su curiosidad, creatividad y espíritu investigador.

I.5. La continuación de esas acciones y la transposición didáctica

Los resultados alcanzados y la excelente producción de docentes y alumnos llevaron a pensar una segunda instancia en 2005 que respetara el espíritu y la organización de la anterior. Del material elaborado surgió un libro que continuó teniendo a las funciones como eje, pero ahora y, en especial, a las funciones exponencial y logarítmica, como también a las funciones y su relación con la geometría. Cabe aclarar que estos temas fueron solicitados por los docentes que realizaron los primeros encuentros, cuando respondieron la encuesta final evaluativa que se les entregó para conocer su opinión acerca de la calidad del curso realizado.

De los materiales usados en ambas instancias, así como de las reflexiones y experiencias surgidas durante dichas jornadas, nace este nuevo libro que trata de ser funcional y pragmático: puede seleccionarse la parte que más se desee. Al decir de Deleuze y Guattari: «El libro ha dejado de ser un microcosmos, a la manera clásica o a la manera Europea. El libro no es una imagen del mundo y menos aun un significante. No es una bella totalidad orgánica, no es tampoco una unidad de sentido. Cuando se le pregunta a Michel Foucault qué es para él un libro responde es una caja de herramientas» (1994:38—39).

Por lo tanto, este libro pretende constituir una caja de *herramientas* para el docente articulando los temas de manera tal de poder mostrar la importancia de realizar una enseñanza apropiada que permita lograr aprendizajes significativos. Por ello, sobre todo, es necesario preocuparse por la transposición de los conocimientos. Esta transposición que es didáctica resulta fundamental en la enseñanza y aprendizaje de la matemática y es el nudo de la teoría de Chevallard, quien sustenta que la transposición didáctica es la transferencia del saber científico en un saber posible de ser enseñado.

La importancia de este concepto reside en el quiebre de la ilusión de correspondencia entre el saber que se enseña y el conocimiento específico de la disciplina en el ámbito académico. Esto no es únicamente una preocupación de aquellos que están relacionados con una disciplina tal como la matemática. Así, por ejemplo, Luis Alberto Romero en el prólogo del libro de historia de Rogelio Alaniz señala muy claramente qué es transposición y la importancia de la misma en el cultivo de una disciplina específica, en su caso la Historia. Allí señala que difundir una ciencia «requiere un ejercicio de transposición, lo que primero ha sido escrito para los especialistas debe ser reelaborado para hacerlo comprensible para los legos. Se trata de acercar el saber de los doctos al interés, el tiempo disponible y la capacidad lectora del público». Por ello, en las Jornadas de Articulación se trabajó esta cuestión tan importante de la transposición.

I.6. La matemática y su didáctica

Vale la pena continuar insistiendo, como siempre se ha hecho, que la transposición sólo podrá realizarse si se conoce el saber científico en profundidad. Norberto Fava, matemático de la Universidad de Buenos Aires, en un artículo de Sara Gallardo, recalca «la necesidad de que el docente tenga un conocimiento profundo de la disciplina. Es fundamental que la persona que enseña una disciplina tenga pasión por ella, y por supuesto, un conocimiento profundo». Para terminar subrayando que «se necesita vocación, interés, compromiso y conocimiento. Nadie puede enseñar lo que no conoce».

Chevallard, Bosch y Gascón se refieren precisamente al matemático y al profesor de matemática buscando similitudes y diferencias. Así, se asegura que aunque normalmente sólo se consideran matemáticos aquellos que investigan en matemática y que crean matemáticas nuevas, no son sólo éstos, sino que «matemático» es un término relativo que identificaría a aquel que sabe la matemática necesaria para aportar soluciones correctas a diversos problemas en conexión con las más variadas disciplinas.

El proceso de estudio de la matemática engloba el enseñar y el aprender, el trabajo del alumno, del profesor y el del matemático profesional. Y ese estudio tiene que ver con lo *didáctico*. Por ello «la didáctica de las matemáticas es la ciencia del estudio de las matemáticas» (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997:47).

Surge de la cita que el estudio es una actividad múltiple y compleja, es una tarea no simple y banal, por el contrario difícil. Además, según Paulo Freire, el estudio...

> requiere una actitud crítica, sistemática y una disciplina intelectual que sólo se adquiere con la práctica, (...) estudiar es una forma de re–inventar, re–crear, re–escribir y esta es la tarea de un sujeto activo (...), por encima de todo estudiar es pensar sobre las vivencias, lo cual constituye la mejor manera de pensar adecuadamente. Aquel que estudia jamás debería perder la curiosidad por las otras personas y por la realidad. Hay quienes formulan preguntas, hay quienes tratan de encontrar respuestas y otros que continúan buscando. (1994:29–31)

Sería saludable suponer, luego de estas actividades de articulación, que la falta de interés de los alumnos en la matemática escolar, y en esto se comparte la idea de Chevallard *et. al.*, es debida a múltiples causas.

Una de ellas es la necesidad manifestada en la actualidad de la escuela *fácil*, del *docente facilitador*, que no deja que los alumnos se sumerjan en la dureza de las diversas disciplinas, *impidiéndole* tal vez disfrutar de ellas. No se les muestra, en este caso especial de la matemática, la relación profunda de ésta con las otras ciencias y con la técnica, no sólo con la física y la fisicoquímica, vinculación ya tradicional, sino con la economía, la biología, la transmisión de señales y así un cúmulo de temas en los cuales subyace la matemática, como el arte, la música, la pintura y la arquitectura. Tampoco podemos olvidarnos de los juegos y los pasatiempos, tales como el ajedrez, ciertos juegos de naipes o los ardides supuestamente mágicos de adivinanzas de números.

Por estas razones, tanto en el prólogo del libro de historia citado como en el de Chevallard, ya mencionado, cuando se habla de transposición queda implícito que la misma sólo puede realizarse cuando se conoce el saber de los doctos, de los matemáticos en nuestro caso, o de los expertos de una ciencia o disciplina en particular, dando mayor énfasis a la frase: nadie puede enseñar bien aquello que no sabe bien.

Por ello, es necesario estudiar en profundidad el o los temas a enseñar y luego su didáctica, pero cada docente debe hacer la transposición pensando en el grupo humano que son sus alumnos. En cada región, en cada escuela, en cada aula se van configurando escenarios sociales diversos frente a los cuales no hay una «receta» posible; la diversidad social y cultural no lo permite, cada contexto necesita sus propios recursos pedagógicos, necesarios para alcanzar la equidad.

El mismo Brousseau, uno de los líderes de la investigación en el campo de la didáctica de la matemática, donde sienta las bases para considerar a la misma un genuino campo de investigación, señala que no deben proponerse temas escolares aburridos para el alumno, sino que deben sacárselos del rico ámbito de las actividades técnicas y sociales del entorno natural de este alumno en particular. El autor de la teoría de las situaciones didácticas señala que es allí precisamente donde se integran las dimensiones cognitivas, sociales y epistemológicas de la matemática.

En las jornadas de reflexión realizadas en los años 2004 y 2005 fueron planificadas actividades para llevarlas al aula. Las mismas tenían por objetivo indagar dónde se presentaban los obstáculos epistemológicos (o sea, lo que dificultaba el proceso de construcción de los saberes nuevos). De acuerdo con la concepción de Gastón Bachellard (1884–1962), el conocimiento se construye por la actividaad del propio sujeto y es así necesaria la actividad del alumno para determinar los obstáculos que no favorecen esa construcción e impiden la conformación de un espíritu científico. Los trabajos de los alumnos y las discusiones posteriores en los grupos permitieron en esa oportunidad identificar algunos obstáculos.

Esta es la razón por la cual en las actividades de este libro se continúa sugiriendo lo que se da en llamar «bajarlo al aula»; pero esto no sólo termina allí, sino que se debe continuar con el análisis y discusión posterior con colegas (sólo así se pueden detectar los obstáculos que mencionamos).

También es necesario que cada docente reinvente los problemas que se proponen, de manera tal que resulten atractivos para sus alumnos. Por esta causa, las actividades de trabajo solicitadas en el aula sobre la base del material elaborado por cada docente y los consecuentes resultados de sus respectivos alumnos en cada una de sus evaluaciones, constituyeron un elemento valioso en las Jornadas de Reflexión.

Se intentó presentar una visión de la matemática que trata de mostrar, por qué no, su hermosura: es necesario que el alumno comprenda que, sin perder su seriedad, la matemática es entretenida, a veces se aproxima a un juego, a una historia intrigante, a un motivo para reflexionar. Como asegura Gardner, «la frivolidad mantiene alerta al lector. La seriedad hace que el juego merezca la pena» (1984:81).

Llevada esta visión a la práctica, fue posible observar cómo en algunas clases desarrolladas a nivel universitario, en carreras no precisamente universitarias, una referencia histórica, literaria o actual sirve para «romper» lo que parece indiferencia. También hará que los alumnos, en ese momento o al finalizar la clase, se acerquen al docente para preguntar más sobre el tema que despertó su interés. Por esto mismo creemos que es necesario ir encontrando el o los temas que promuevan en ellos ese entusiasmo.

Capítulo II
Algo más sobre las funciones

PROFESORAS ELENA F. DE CARRERA Y LILIANA NITTI

La importancia de la enseñanza de las funciones radica en que las mismas se encuentran presentes en una variedad de fenómenos del mundo real y de las ciencias. De este modo, constituyen un excelente recurso para formular un modelo matemático para una gran variedad de situaciones acordes al uso que se le puede dar en los últimos años de la enseñanza media.

En el siguiente problema se muestra cómo colocar el énfasis en el tema de la aplicación de la función cuadrática y de otros conceptos que son necesarios para construir un modelo, tales como los de interpolación, ajuste de datos y aproximación, así como el de reconocimiento de dominios entre otros.

II.1. El problema

Situación hipotética: ¿cómo calificar? (Variación de un problema on line)[1]

Alumnos de un cuarto año secundario, ante conflictos suscitados por las notas que puso el profesor en un trabajo de matemática, le solicitaron información sobre su método de calificación. El profesor respondió que el trabajo lo corrigió poniendo puntos de 1 a 100 y la nota la decidió usando una función cuadrática. Les propuso obtener la ley de dicha función, para ello les aclaró que tuvo en cuenta las siguientes premisas:

El alumno aprobará su trabajo con cuatro puntos si obtiene un sesenta por ciento en el mismo. Ed decir que el 60 % equivale a un cuatro.

El que no sepa nada sobre el tema obtiene como puntaje un uno (y no cero).

Es lógico pensar que aquel que responda aproximadamente un ciento por ciento de lo requerido obtenga un diez.

Luego, puntuando entre cero y cien la totalidad del trabajo se puede obtener la tabla II.1:

Tabla II.1. Puntuación del trabajo y su nota correspondiente

Puntos	Nota
0	1
60	4
100	10

Los puntos de la misma nos permiten construir una parábola representada por una función cuadrática del tipo: $n(p)=ap2 - bp + c$, donde p representa la puntuación obtenida por el alumno de 1 a 100 y n el número imagen que corresponde a dicha puntuación.

Conociendo los valores de los coeficientes a, b, y c se podrá ajustar la nota en función de los puntos obtenidos por cada alumno. El desafío está en encontrar dichos valores, los cuales surgirán del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{gathered} 0a + 0b + c = 1 \\ 3600a + 60b + c = 4 \\ 10000a + 100b + c = 10 \end{gathered}$$

Este es un punto en el cual, si el problema se lleva al aula, el docente deberá discutir con los alumnos por qué se puede construir una parábola, cómo surge este sistema de ecuaciones y cuál será el método a utilizar para resolverlo.

Es de destacar, además, que esta instancia se puede aprovechar para realizar distintas conexiones con el tema: sistemas de ecuaciones lineales.

Resolviendo el sistema planteado, se obtiene: $a = 0{,}001$; $b = -\ 0{,}01$; $c = 1$. Por lo tanto, la función cuadrática que buscamos es: $n(p) = 0{,}001p2 - 0{,}01p + 1$.

¿Cuáles son los valores que toma la variable n, de acuerdo con los valores de p? En un análisis de la situación, no será difícil concluir que el conjunto de imágenes para el dominio considerado será el intervalo real [1,10].

Pero he aquí otro planteo: el profesor debe calificar utilizando los números naturales del uno al diez y por lo tanto debe definir qué nota tiene un alumno que saca 55 puntos, o el que saca 48: ¿tendrán el mismo puntaje en la calificación final? ¿Cuánto le corresponde a un alumno que saca 75 puntos? ¿Y el que saca 80? ¿El número n en nuestra función nos dará siempre la calificación final del alumno? Es claro que no, pues como ya se dijo las notas finales de los alumnos son números enteros del 1 al 10.

El profesor explica que se puede calificar utilizando la siguiente función N:

$$N(p) = \begin{cases} n(p) & \text{si } \{n(p) - [n(p)]\} = 0 \\ [\,n(p)] + 1 & \text{si } \{n(p) - [n(p)]\} \geq 0{,}5 \\ [\,n(p)] & \text{si } \{n(p) - [n(p)]\} \leq 0{,}5 \end{cases}$$

La expresión [*n(p)*] significa «parte entera» de *n(p)*. Notemos que la imagen que toma la función N, de acuerdo con los valores de la puntuación p, son los números enteros del 1 al 10.

Con respecto a la función «parte entera» es conveniente que los alumnos reconozcan a esta función, comprendan cómo se define y a qué modelos representa. Por otro lado, una discusión con ellos de por qué se adopta el uso de la misma es beneficiosa para comprender la selección de «estrategias» en la resolución de problemas.

Notar además que la función N es una función definida por tramos que, según se ha detectado en los sucesivos cursos de articulación, a los alumnos les cuesta en general identificar el dominio y graficarla.

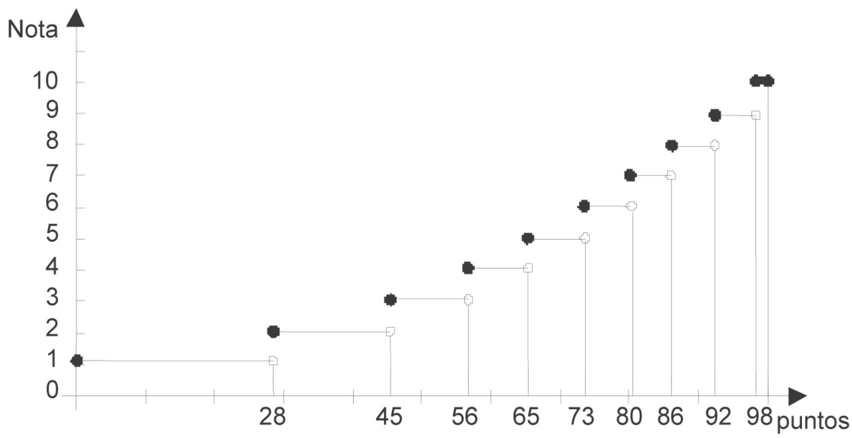
De la expresión planteada para calcular la nota, o sea utilizando la función N, resultan los valores de la tabla II.2:

Tabla II.2. Valores de la función *N* para escala de notas

Puntos		Nota
Desde	**Hasta**	
0	27	1
28	44	2
45	55	3
56	64	4
65	72	5
73	79	6
80	85	7
86	91	8
92	97	9
98	100	10

...que se puede graficar de la siguiente forma:

Gráfico II.1. Función *N* para la escala de notas



Actividad II.1

Es conveniente, luego de que se resuelva el problema, realizar una puesta en común y que los alumnos puedan argumentar respecto de sus respuestas y discutir la validez de las soluciones obtenidas.

¿Qué otras preguntas o cuestiones puede agregar el docente a la actividad anterior?

¿Cómo validar el modelo hallado?

Una vez realizadas las tareas anteriores, el docente debe explicitar el objeto matemático trabajado. Deberá construir junto con los alumnos definiciones, deducir características y fórmulas, proponer representaciones gráficas y hacer un estudio acerca de las funciones trabajadas.

La actividad de evaluación que se debe proponer será tal que en otra situación el alumno pueda reconocer el objeto matemático estudiado. Como la evaluación es una etapa importante en el proceso de aprendizaje es que se hace hincapié en ella.

II.2. Otras propuestas

II.2.1. Algunos problemas integradores

La búsqueda de problemas o situaciones problemáticas es una etapa de mucha riqueza para el docente ya que lo obliga a leer distintos temas, siempre con ojos matemáticos. Pero, por el mismo motivo, esto le demanda excesivo tiempo y a veces con resultados escasos (porque el tema no sirve para los fines, o es complicado en exceso para nuestros alumnos o simplemente se cree que no les interesará). Las actividades en torno a contextos realistas contribuyen a la articulación e integración de los distintos ejes curriculares de la asignatura matemática y, fundamentalmente, al cierre de la brecha entre la matemática escolar y el sentido común.

A continuación se presentan problemas, no muy complicados, que plantean situaciones que permiten trabajar con otras áreas y reforzar distintos conceptos. La interdisciplinariedad permite generar verdaderas situaciones problemáticas y transponer lo aprendido a nuevos hechos.

1. ¿A qué temperatura hierve el agua en la montaña?

A nivel del mar el agua hierve a 100 grados Celsius. A esa temperatura se la llama punto de ebullición. Este punto de ebullición no es constante y cambia a medida que varía la altura, de acuerdo con la siguiente función:

$$T = 100 - 0{,}001h$$

Donde *T* es la temperatura en grados Celsius y *h* es la altura en metros.

a) *Averigua a qué altura está ubicado el Cristo Redentor en la provincia de Mendoza y determina la temperatura a la que hierve el agua en ese lugar.*

b) *Determina cuál es la temperatura a la que hierve el agua en el monte Everest en los Himalaya (8.848 metros sobre el nivel del mar). ¿Y en la cima del Aconcagua?*

c) *Investiga, consultando a tu profesor de física, la razón por la cual el punto de ebullición no es constante*.

2. Viaje al centro de la tierra

El centro de la Tierra es una masa de magma incandescente que hierve a altas temperaturas. Esto lo podemos apreciar directamente a través de la actividad de los volcanes. Por ello, cuando se hacen excavaciones hacia el centro de la Tierra la temperatura aumenta acorde con la profundidad de la excavación, siguiendo aproximadamente la siguiente función: $T = 15 + 0{,}01d$, donde T es la temperatura en grados Celsius y d es la profundidad en metros desde la corteza terrestre.

a) *Calcula la temperatura que se obtiene al alcanzar los 100 metros de profundidad.*

b) *Determina cuántos metros hay que excavar para alcanzar una temperatura de 100 grados.*

c) *¿Cómo crees que afectó este fenómeno a los trabajadores de una mina subterránea como la de Río Turbio, en el sur del país?; ¿y cómo crees que afectó a los mineros de la mina de Copiapó en Chile, en agosto de 2010?, ¿a qué temperatura promedio sobrevivieron estos mineros, luego del derrumbe de la mina, hasta que fueron rescatados?*

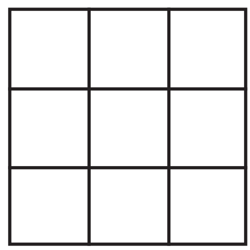
d) *Realiza las averiguaciones que creas necesarias y expone tus puntos de vista.*

3. El cuadrado mágico

Este es un famoso juego de ingenio pero que requiere de algunos conocimientos matemáticos para su solución. *Se trata de ordenar en un cuadrado de 3 x 3 los números* *del 1 al 9, de modo que todas sus filas, columnas y diagonales sumen lo mismo. ¿Te atreves a enfrentar el desafío?*

Sugerencia: a través de una ecuación simple, calcula cuánto es lo que deben sumar las filas, columnas y diagonales para que se cumpla la primera condición del cuadrado mágico y después intenta ordenar los números.

Gráfico II.2. Cuadrado mágico



4. Un problema de decisiones

Una empresa de alquiler de vehículos de la provincia de Córdoba ofrece dos contratos diferentes:

- Contrato A: $ 420 por día y kilometraje ilimitado.
- Contrato B: $ 50 por día y $ 3 por kilómetro recorrido.

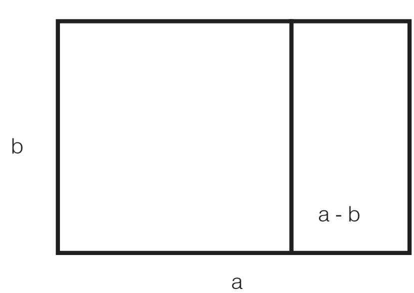
Un turista quiere hacer un viaje de 8 días por las sierras, pero obviamente no sabe cuántos kilómetros va a recorrer, con lo cual no sabe cuál es la oferta que más le conviene.

¿Tú le podrías ayudar a tomar la decisión? ¿Habrá algún punto de equilibrio donde dé lo mismo el tipo de contrato elegido?

Sugerencias: intenta primero hacer algunas pruebas simulando casos concretos, por ejemplo, qué pasa si recorre 100 km; qué pasa si recorre 200 km. Eso te dará una idea aproximada de lo que está ocurriendo.

5. La construcción de un rectángulo áureo

Gráfico II.3. Rectángulo áureo



La proporción áurea o divina proporción, que se trabajó ya en las jornadas de articulación mencionadas, fue muy estudiada por los griegos, quienes le dieron fundamental importancia en sus obras de arte y en su arquitectura, tal como se puede ver en la imagen del Partenón (Figura II.1) en los rectángulos determinados por sus columnas. El nombre de «proporción áurea» o «divina proporción» aparece usado por primera vez en el libro *Summa* publicado en 1509 por un fraile llamado Luca Paccioli (1445−1514), quien estudia detalladamente esta proporción cuya razón es el conocido «número de oro».

El rectángulo, cuyos lados verifican la proporción áurea, se denomina «rectángulo áureo».

Figura II.1. Fachada del Partenón – Acrópolis de Atenas

Se volverá sobre proporciones en el Capítulo 3.

Estos rectángulos áureos tienen la interesante propiedad que al quitar el cuadrado de lado menor, en nuestro caso: *b*, el rectángulo que queda es semejante al dado.

Por propiedad de las figuras semejantes, esto significa que los lados homólogos son proporcionales: $\frac{a}{b} = \frac{b}{?}$

(*Completa recordando qué quiere decir homólogo*).

Si el alumno completa bien y resuelve llegará a una expresión: $(\frac{a}{b})^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$

o sea, una ecuación de segundo grado de la forma z2 – z – 1 = 0. Ésta tiene dos raíces; al hallar la raíz positiva de la ecuación nos da $z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ un número irracional, al que se conoce generalmente como φ. Pero como $z= \frac{a}{b}$ resulta que por eso ésta se llama «razón áurea».

Como se puede observar, el número obtenido es irracional, ¿cómo pueden usarlo los artistas? ¿Necesitan saber mucha matemática? Por suerte existe una sucesión llamada *sucesión de Fibonacci*, debida a Leonardo de Pisa (1170−1250) —no confundir con

Leonardo da Vinci (1452−1519)—, que tiene la propiedad que el cociente de dos números consecutivos se acerca a este φ a medida que los números crecen.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

a) *Prueba esta afirmación haciendo dichos cocientes y compáralo con el valor aproximado de φ.*
b) *Calcula las dimensiones que debe tener una caja rectangular cuyo lado menor está dado y vale 20 cm, para que la sección de dicha caja sea un rectángulo áureo.*
c) *Mide objetos de secciones rectangulares (cajas de zapatos, interruptores de luz, marcos de puertas y ventanas, etc.), anota cuidadosamente sus medidas y comprueba si están o no en proporción áurea. Verifica, además, si aquellos que están aproximadamente en proporción áurea se ven más armoniosos o no.*
d) *Realiza la misma actividad pero con tarjetas de crédito, débito y de obras sociales.*

6. El junquillo Chino

El siguiente problema fue hallado en el capítulo IX del libro chino *Chu Chang Suan Shu* o «Arte Matemático en Nueve Secciones».[2]

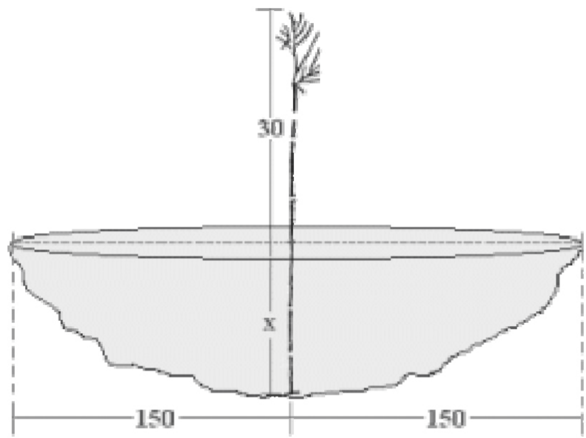
Crece en el medio de una laguna circular de 3 m (300 cm) de diámetro un junquillo que sobresale 30 cm del agua. Cuando se inclina desde su inserción en el fondo hasta que el agua lo cubra alcanza justamente la orilla de la laguna, ¿qué profundidad tiene la laguna?

Este antiguo libro chino data probablemente del siglo II a.C. (Dinastía Han) y contiene 246 problemas divididos en 9 capítulos. El autor es desconocido, y contiene el resumen de todo el conocimiento matemático poseído en China hasta la primera mitad del siglo III d.C. Algunos de estos problemas datan de la Dinastía Qin (221−220 a.C.) y fueron compilados por Zhang Cang (256−152 a.C).

Consideramos la solución del problema propuesto *muy sencilla. La misma puede dar lugar, por parte de docente a otras situaciones.*

Graficamos las condiciones del problema antes de que el junquillo se inclinara:

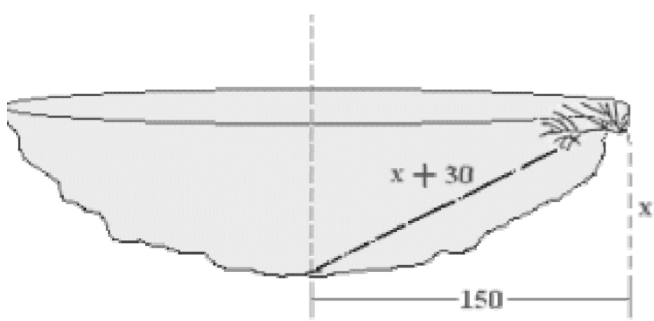
Figura II.2. Esquema correspondiente al problema del junquillo



Como 300 cm es el diámetro de la laguna entonces la distancia del junquillo a la orilla es de 150 cm. Además, la profundidad del agua estará dada por *x*, que es también la longitud de la parte sumergida del junquillo; téngase en cuenta que la longitud total del junquillo es $x + 30$.

Grafiquemos nuevamente la situación, teniendo en cuenta la inclinación del junquillo precisamente cuando su extremo superior alcanza la orilla.

Figura II.3. Esquema correspondiente al problema del junquillo



Por el teorema de Pitágoras:

$$(x + 30)^2 = 150^2 + x^2$$

luego $x = 360\ cm = 3{,}6\ m$

Actividad II.2

¿Qué otras preguntas pueden agregarse a los problemas precedentes, o cómo pueden modificarse, de modo de mostrar con más énfasis las posibilidades de las conexiones tanto internas como externas de la matemática?

II.3. Las demostraciones: ¿cuándo?

Si el aprendizaje de la matemática tiene algo que ver con el descubrimiento en matemática, a los estudiantes se les deberá brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel (Polya).

Por lo tanto en las clases de matemática hay dos aspectos importantes que deben ser estudiados: uno es que se deben hacer demostraciones; y otro, cómo lograr que el estudiante adquiera habilidades en las demostraciones matemáticas. La gran mayoría de los estudiosos del proceso educativo de formación matemática considera importantes, sin lugar a dudas, a las virtudes pedagógicas de las demostraciones matemáticas en la formación del estudiante, algo que no es a veces del todo aprovechado. Esto determina la necesidad de realizar investigaciones que permitan establecer de una forma precisa el peso de la demostración matemática, en lo que compete al aprendizaje de la asignatura y en lo que corresponde a la formación del estudiante. También es necesario investigar qué demostraciones hacer en clases y cómo debe trabajar el estudiante con las mismas para que desarrolle habilidades al respecto.

Actividad II.3

Realizar una lista de las demostraciones que deberían llevarse a cabo en el nivel Secundario, según los temas curriculares a desarrollar. ¿Cuáles no deberían dejar de cumplimentarse y por qué? ¿Cuáles son las que no se realizan? ¿Por qué motivo?

Es importante destacar que en los diversos espacios de intercambio durante el proceso de discusión con los docentes que participaban en los mismos, se han discutido y compartido algunos criterios de acción respecto de cómo llevar a cabo las demostraciones, cuáles y cuándo. Un ejemplo de tales acciones se verá a partir del foro de discusión.

II.4. Las funciones exponenciales y logarítmicas

Siempre decimos los docentes que la motivación es un punto importante en toda situación didáctica para lograr alumnos interesados en el tema. Pero también sabemos que no es fácil encontrar problemas motivadores y que, además, debemos cambiar permanentemente, ya que los intereses de los adolescentes varían a través del tiempo y nosotros debemos acompañar esas variaciones. A continuación, sugerimos un comentario que puede servir para introducir a las funciones exponenciales y, al mismo tiempo, puede dar lugar a plantear tareas integradoras con otras asignaturas. (Como se observará, otra vez proponemos la interdisciplinaridad.)

II.4.1. El esqueleto Lucy, los Beatles y las funciones exponenciales

Lucy es el esqueleto de un prehomínido de 3,5 millones de años, descubierto por el estadounidense Donald Johanson el 24 de noviembre de 1974 a 150 km de Addis-Abeba, Etiopía. Se trata del esqueleto de una hembra de alrededor de 1 metro de altura, de aproximadamente 27 kg de peso (en vida), de unos 20 años de edad (las muelas del juicio estaban recién salidas) y que al parecer tuvo hijos, aunque no se sabe cuántos. En el momento de su descubrimiento sonaba en el equipo de música de los investigadores *Lucy in the Sky with diamonds*, de Los Beatles, por ello los científicos rápidamente la apodaron Lucy. En el hallazgo se encontraron además huesos de al menos cinco o seis individuos, dos de ellos correspondientes a niños de unos cinco años; pero el esqueleto más completo fue el de Lucy, del que se encontró un total de 52 huesos.

¿Cómo se calculó la edad de Lucy?

La datación de muestras minerales de su emplazamiento por el método argón–potasio dio una edad inicial de 3 millones de años con un margen de error de 200 000 años. La datación para el esqueleto de Lucy indicó una edad de 3,5 millones de años. De la misma forma que la datación por carbono 14, este método se basa en el principio de la desintegración radiactiva: en este caso, en la lenta transformación del isótopo radiactivo potasio en el gas inerte argón dentro de las rocas volcánicas. Pero en contraste con la datación por carbono 14, que mide el rango de desaparición del carbono, el de argón–potasio mide la acumulación de argón en un material por la descomposición del potasio. La datación se torna posible a partir de conocer el ritmo de desintegración del potasio.

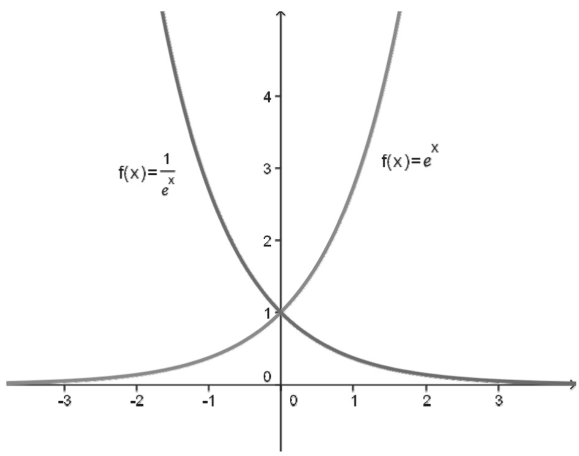
Lo lamentable: la verdadera Lucy de la canción de los Beatles falleció en el mes de junio de 2005 de una enfermedad terminal (Diario *El Litoral* de Santa Fe).

II.4.2. La función exponencial

Es útil recordar que la función: $y = a^x$, siendo $a > 0$ y distinto de 1, se llama función exponencial. El número *a* recibe el nombre de base. El nombre de exponencial proviene del hecho de que la variable figura en el exponente.

Planteamos ahora una cuestión importante referida a esta función. Es claro que su dominio es todo el conjunto de los números reales y cuando los alumnos la grafican, si bien realizan una tabla con algunos puntos que surgen de asignar a la variable valores que implican potencias sencillas de calcular, obtienen como gráfica curvass continuas, como las siguientes.

Gráfico II.2. Gráficos de las funciones $y = a^x$



Pero realizar la gráfica de esta función significa que deben tener sentido algunas potencias que quizás el alumno no las tiene totalmente resueltas en cuanto a su razonamiento y justificación. Por ejemplo, ¿cuál es el significado de $2^{\sqrt{2}}$ o 3^{π}, o más aún, el de e^{π}?

Es claro que por ejemplo, 2^3 significa 2x2x2 y, que $2^{2/3}$ es la raíz cúbica de 2^2. Esto último tiene su justificación. ¿Cuál es? Sería conveniente que lo precisáramos y lo discutiéramos antes de enfrentar el caso del exponente irracional que planteamos.

¿Qué significado tiene $t^{\sqrt{2}}$ para un valor de *t* positivo dado? No se puede decir que es multiplicar el «número *t*» $\sqrt{2}$ veces. Para resolver esta cuestión pensemos en la función $f(t) = t^{\sqrt{2}}$ y consideremos la sucesión de números

$$1;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\dots \text{ (I), la cual converge a } \sqrt{2}.$$

Cada uno de los términos de esta sucesión es un número racional. Por lo tanto para los valores positivos de *t*, tienen sentido cada una de las siguientes potencias de exponentes racionales:

$$t,\ t^{1,4},\ t^{1,41},\ t^{1,414},\ t^{1,4142},\ldots \text{ (II)}$$

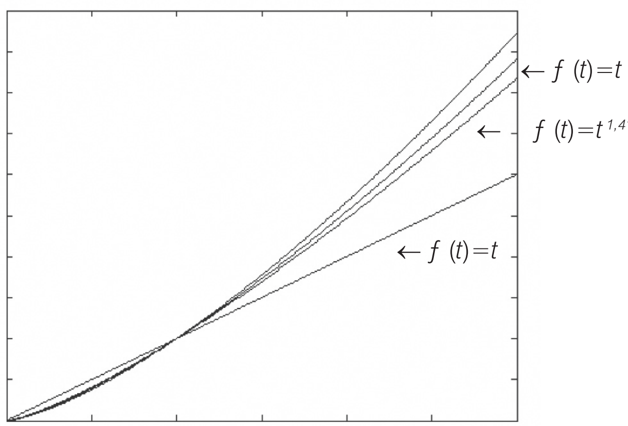
La sucesión anterior también se interpreta como

$$t,\ t^{14/10},\ t^{141/100},\ t^{1414/1000},\ t^{14142/10000},\ldots$$

Observamos que la restricción de que *t* sea positivo es necesaria para que queden bien definidas aquellas raíces de índice par.

Veamos el comportamiento de las gráficas de la sucesión de funciones escritas en (II).

Gráfico II.3. Gráfico de funciones que se aproximan a la función $t^{\sqrt{2}}$



Notemos que en la sucesión (I), a medida que crece el número de términos la diferencia entre los valores de la sucesión expresada en (I) y $\sqrt{2}$ es cada vez más pequeña. Esto hace que las gráficas de las funciones de la sucesión en (II) estén cada vez más próximas entre sí. Esto sugiere la existencia de una función límite que justamente es la función $t^{\sqrt{2}}$.

Por lo tanto para *t* igual al número real *a*, mayor que cero y distinto de uno, $a^{\sqrt{2}}$ debe interpretarse como el límite de la sucesión:

$$a,\ a^{1,4},\ a^{1,41},\ a^{1414}\ldots$$

¿Qué ocurre si a es 1?

A los docentes interesados en profundizar este tema se sugiere la lectura de Salas *et al* (2002).

Es de destacar que la función exponencial tiene mucho que ver con los modelos matemáticos que involucran procesos en que interviene la desintegración radiactiva. Se sabe que mientras un animal o planta esté vivo mantiene en sus tejidos una concentración constante de carbono 14 (radioactivo). Al morir, los tejidos dejan de absorber carbono con lo cual comienza a disminuir su presencia por desintegración radioactiva según el modelo matemático:

$$C(t)=C_0.e^{-0,0001205t},$$

donde *C(t)* es la cantidad restante de carbono después de *t años,* C_0 la cantidad inicial que estaba presente.

Esta expresión responde al modelo general $y(t) = C_0e^{kt}$. Haremos referencia a esta fórmula como la *fórmula de crecimiento* (o *decaimiento*) *exponencial*. Cuando k es positivo, la función es creciente. Cuando k es negativo, la función es decreciente y se acerca cada vez más a cero conforme t aumenta.

En este tipo de modelos es muy usual que la base de la función esté dada por el número *e*. ¿Pero qué sabemos de este número? ¿A qué conjunto numérico pertenece?

La expresión $(1+\frac{1}{n})^n$, en la cual n representa a un número natural, desempeña un papel importante en el estudio del cálculo y tiene mucho que ver con el número *e*. A medida que n toma los valores 1, 2, 3, 4… notaremos que los resultados de $(1+\frac{1}{n})^n$ son números crecientes. Pero, ¿cuánto puede crecer $(1+\frac{1}{n})^n$, a medida que n toma valores cada vez más grandes?

Con ayuda de una calculadora, podemos explorar estos valores y estimar lo que sucede con esta expresión cuando n se hace cada vez más grande. Veamos algunos de ellos en la siguiente tabla:

Tabla II.3. Valores de $(1+1/n)^n$ para distintos n

n	$(1+1/n)^n$
1	2,0000000
10	2,5937425
100	2,7048138
1000	2,7169239
10 000	2,7181459
100 000	2,7182682
1 000 000	2,7182805
10 000 000	2,7182817

De acuerdo con lo que observamos parece natural pensar que los valores obtenidos crecen al crecer n, pero lo llamativo es que no crecen indefinidamente.

En realidad se acercan a un número. ¿Cuál?

Con las herramientas que provee el cálculo infinitesimal podemos demostrar que $(1+1/n)^n$ tiende a un número determinado que se representa mediante la letra e. Este número, al igual que el conocido número π, es un número irracional, y por lo tanto su expresión decimal no puede ser periódica. A continuación lo presentamos con algunas de sus cifras:

$$e = 2{,}7182818284...$$

Pero… ¿cuándo aparece por primera vez este número?

Si bien los trabajos de la época sobre los logaritmos habían estado muy «cerca» de reconocer al número e, la primera vez que éste es «descubierto» no tiene que ver con esta noción. En 1683, Jacobo Bernoulli examinó el problema del interés compuesto en forma continua, y en su procedimiento trató de encontrar el límite de cuando n tiende a infinito. Usó el teorema del binomio para demostrar que el límite tenía que estar entre 2 y 3, por lo que podríamos considerar que ésta es la primera aproximación que se encontró para e. También sería la primera vez en que un número fuera definido mediante un proceso de límite. Hasta donde sabemos, el número e aparece explícitamente en 1690. En ese año, Leibniz le escribió una carta a Huygens en la que usa la notación b para lo que nosotros hoy llamamos e.

II.4.3. La función exponencial y las aplicaciones

Otros ejemplos de problemas en que se utiliza la función exponencial son los de crecimiento de bacterias, crecimiento de poblaciones y en las ciencias económicas. Su importancia amerita que nos detengamos a «modelizar» a los depósitos bancarios con interés compuesto continuo.

Si se tiene un capital de cien mil pesos, y se la deposita en un banco a un interés compuesto del 100 % anual, es claro que al finalizar el año se acumulan doscientos mil pesos.

Pero, ¿qué capital se logra acumular al finalizar el año, si en lugar de tener un interés anual del 100 %, el interés es del 50 % semestral o del 25 % trimestral? Veamos:

Denominemos con *r a la razón anual, y con* C_0 al capital inicial. Entonces, cuando el interés es del 50 % semestral, $r = 50/100 = 1/2$ al finalizar el primer semestre tenemos un capital

$$C = C_0 + C_{o\,1} 1/2 = C_0 (1+1/2);$$

al finalizar el segundo semestre se acumula un capital

$$C = C_0(1+1/2) + C_0(1+1/2)1/2 = C_0(1+1/2)^2$$

Razonando de igual forma para un interés del 25 % trimestral, obtenemos que para el segundo trimestre se tiene un capital acumulado C igual a $C_0(1+1/4)^2$ y para el cuarto trimestre $C = C_0(1+1/4)^4 = 2{,}44 \times 10^5$ pesos.

Es interesante continuar este tipo de cálculos en el aula proponiendo preguntas como la siguiente: *¿qué capital se acumulará si el interés es mensual, diario o por minuto?*

Es importante guiar a los alumnos a reconocer que al realizar los cálculos se obtiene un proceso iterativo en el cual aparecen los términos de una progresión geométrica.

Podemos hacer más preguntas, por ejemplo:

Si el interés se capitaliza n *veces al año, ¿a cuánto ascenderá el capital si el valor de* n *se hace cada vez más grande?*

Como ya se ha visto, los valores de la expresión $(1 + 1/n)^n$, a medida que n aumenta, tienden al número e, por lo tanto aunque el número n de capitalizaciones sea muy grande, siempre el capital se mantendrá inferior a tres veces el capital inicial. *¿Por qué?*

Si la capitalización de los intereses es continua, ¿cuál es el capital acumulado al finalizar el año? ¿Y en x *años?*

Se demuestra que si se deposita un capital de C_0 pesos a una tasa de interés anual r y el interés se capitaliza continuamente, el capital después de x años estará dado por fórmula: $C(x)=C_0 e^{rx}$. *¿Cómo se justifica?*

II.4.4. Algo más…

También el ser humano crece en forma exponencial, pero no siempre, sólo en un periodo de su vida. Sería conveniente que este tema fuera trabajado con el profesor de las asignaturas del área de la biología para que rinda más frutos y encontrar un modelo para el patrón de crecimiento humano. ¿Existe?

II.4.5. La función logaritmo
¿La séptima operación o la octava maravilla del siglo XVII?

Como ya lo anticipáramos, para determinar la edad de una roca la ciencia ha podido desarrollar una técnica basada en la concentración del material radiactivo que pudiera hallarse en su interior. Como la radioactividad va disminuyendo a medida que pasa el tiempo, cuanto más joven es la roca mayor concentración de material radiactivo encontraremos. Una fórmula muy simplificada que puede representar este decrecimiento es: $C(t) = C_0 e^{-t}$, donde $C(t)$ representa la concentración de material radiactivo,

t es el tiempo medido en cientos de años y C_0 la concentración del elemento en el momento de formarse la roca. Por ejemplo: *si* $C_0 = 4500$ *unidades de masa, ¿cuánto tiempo debió haber transcurrido desde su formación para tener una concentración de 500 unidades de masa?*

Esta pregunta nos lleva a plantear la siguiente ecuación: $500 = 4500\, e^{-t}$

Y nuestro problema es encontrar el valor de t. Es decir que debemos hallar el exponente a que está elevado el número e para obtener 500/4500.

Esto nos guía a recordar que la operación «elevar a una potencia» tiene dos operaciones inversas. Esto es, si $a^b = c$, la búsqueda de a conociendo c nos guiará a realizar una de las operaciones inversas de la potenciación: la extracción de raíz. Para hallar la b (como en nuestro problema) pero siempre conociendo c se recurre a la otra operación: la logaritmación.

Más precisamente: si $a^b = c$ diremos que el *número b* respecto de la *base a* (positiva y distinta de uno) *es el logaritmo de un número c* positivo, *si* b *es el exponente al que hay que elevar la base* a *para obtener* c, y lo expresamos como: $log_a c = b$, o sea: $a^b = c$.

De esto es fácil comprender la siguiente propiedad, que es de mucha utilidad en la resolución de ecuaciones logarítmicas: *si la base del logaritmo* a *se eleva a la potencia del logaritmo del número* b *en la misma base* a*, se obtendrá el número* b. Es decir que $a^{log_a b} = b$.

• *Curiosidad*

¿Quiénes y por qué «inventaron» los logaritmos? ¿Cuál es el concepto que los sustenta?

Según lo mencionado en el punto anterior, aparece la «logaritmación» como una de las operaciones inversas de la potenciación, pero ¿cuál es su esencia conceptual?

Aparentemente, fue Michael Stiefel (1487—1567) el primero en notar la correspondencia entre los términos de la sucesión geométrica y aritmética, cuestión que como veremos fue crucial para la creación de los logaritmos; la situación es ésta:

Consideremos, por ejemplo, la progresión geométrica de primer elemento 2 y razón 2 y observemos la Tabla II.4, en la cual n indica el exponente, y $a_{n,}$ el elemento correspondiente de la progresión geométrica.

Un detalle: observemos que los exponentes «n» forman una progresión aritmética.

Tabla II.4. Progresión geométrica de primer elemento 2 y razón 2

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
a_n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	…

Algo notable y que aprovecharon los matemáticos de la época es que, al multiplicarse dos términos de la progresión geométrica, el exponente del nuevo término así formado es la suma de los términos correspondientes en la progresión aritmética. Por ejemplo, si deseamos multiplicar 8 (término nro. 3 de la progresión aritmética) por 256 (término nro. 8) nos bastará con sumar los términos $(3 + 8 = 11)$ y comprobar que el número que le corresponde a la suma es 2048 (8 x 256).

De la misma forma, para multiplicar 16 ($n = 4$) por 128 ($n = 7$) miramos en el término $4 + 7 = 11$ y obtendremos que $16 \times 128 = 2048$.

Como se observa, esto no es más que aplicar la propiedad de que $2^n \times 2^m = 2^{m+n}$.

A los lugares que ocupaban las sucesivas potencias de base 2 se les llamó «logaritmos de base 2».

Estas deducciones las hemos realizado considerando una progresión geométrica de razón 2; pero también podríamos haberlas hecho con la progresión geométrica de razón 3, dando lugar a los logaritmos de base 3. Lo mismo sería con cualquier otra base, positiva y diferente de uno.

Es claro que conociendo los logaritmos de una base no es difícil conocer los logaritmos en cualquier otra. En efecto:

Supongamos que conocemos el *logq x,* $(x > 0)$ y deseamos conocer su expresión en la base *a* (*a, q,* positivos y distintos de 1).

Dado que $\log_a x = \log_a(q^{\log_q x}) = \log_q x \log_a q$, tenemos que: $\log_q x = \log_a x / \log_a q$.

Realmente es un gran alivio sumar en vez de multiplicar, restar en lugar de dividir y multiplicar en vez de elevar a una potencia. El gran problema es que sólo lo podemos realizar con los números que intervienen en la sucesión de potencias utilizadas, en este caso de razón 2, pero ¿cómo multiplicar fácilmente por ejemplo 2147 por 45, que no son potencias de 2?

¿Debemos encontrar una progresión que contuviese a todos los números naturales?

En realidad nos bastaría en principio con calcular los logaritmos de los números primos, pues el logaritmo de un número natural se puede expresar mediante los logaritmos de sus factores primos. Observemos, por ejemplo, el número 36: $\log_2 36 = \log_2(2^2\, 3^2) = \log_2 2^2 + \log_2 3^2 = 2 \log_2 2 + 2 \log_2 3$.

Pensemos en los abrumadores cálculos a los cuales debían enfrentarse los matemáticos del siglo XVII: extensos productos, potencias, cocientes y raíces. La «llegada de los logaritmos», al simplificar el uso de las operaciones, debe haber sido un bálsamo para tan ardua tarea. Por lo tanto, creemos que si bien es la séptima operación, no es exagerado el título de «octava maravilla» para dicho siglo. Esto decía Laplace (1749–1827), físico y matemático francés: «Con la reducción del trabajo de varios meses de cálculo a unos pocos días, el invento de los logaritmos parece haber duplicado la vida de los astrónomos» (Perelman, 1915:210).

Es claro que hoy en día, debido a los avances de la tecnología y al uso de computadoras, la utilización de los logaritmos para el cálculo está en desuso, pero aún así el concepto sigue siendo fundamental en la cultura matemática básica y está presente en todas las disciplinas.

Además, desde el punto de vista metodológico y de la enseñanza de la matemática, es importante que se tenga en cuenta lo que dicho tema lleva implícito conceptualmente, y no caer sólo en la faz calculista. Es así que nuestro recorrido histórico tuvo una finalidad: ver a los «logaritmos» bajo un aspecto más dinámico, y recuperar una buena motivación para la enseñanza de temas que en principio parecen alejados: progresiones y logaritmos.

El tema permite un marco de conexiones conceptuales con las progresiones aritméticas y geométricas que muchas veces son dejadas de lado en la enseñanza media, pero que tienen su importancia en el estudio de la matemática en instancias posteriores. Pero, lo más importante: permite conciliar la matemática «discreta» con la «continua».

El siguiente ejemplo extraído del libro *Cálculo* de Hughes–Hallett (1996) es un problema típico a trabajar en el Nivel Secundario y que se refiere al estudio de poblaciones; su planteo y resolución permite una interacción entre la función exponencial y logarítmica:

> La población de Kenia era de 19,5 millones en 1984 y de 21,2 millones en 1986. Suponiendo que dicha población aumenta exponencialmente, hallar una fórmula para la población de Kenia como función del tiempo y realizar una estimación para el año 2008.

Dado que una función de crecimiento exponencial puede escribirse como $P = P_o e^{kt}$, donde P_0, representa la población inicial y si para nuestro problema medimos la población P en millones, y el tiempo t en años, desde 1984, tenemos que:

$$P(t) = 19{,}5\ e^{kt} \quad (1)$$

Es claro que primero debemos hallar el valor de k. Para ello nos valdremos del hecho de que $P = 21{,}2$; cuando $t = 2$, así que reemplazando en (1): $21{,}2 = 19{,}5\ e^{k2}$, haciendo pasaje de términos y aplicando logaritmos a ambos miembros, nos queda que, $\ln 1{,}087 = \ln e^{2k}$, esto nos lleva a obtener que $0{,}0834 = 2k$, de donde $k \cong 0{,}042$. Utilizando este valor de k en la fórmula (1), nuestro problema queda resuelto reemplazando t por 24.

• *Otra propuesta*

Para motivar y continuar con estas aplicaciones vamos a analizar el «testamento de Benjamín Franklin» extraído del libro de Thomas & Finney (1998:488—489).

Benjamin Franklin (1706—1790), famoso estadista, científico e inventor estadounidense, dejó un testamento original publicado junto con diversas obras suyas. He aquí un fragmento de él:

Dono mil libras esterlinas a los habitantes de Boston. Si las aceptan, estas mil libras, deben ser administradas por los vecinos más distinguidos de la ciudad, que las concederán en préstamo al 5 %, a los artesanos jóvenes. Al cabo de cien años esta suma se elevará a 131 000 libras esterlinas. Deseo que entonces sean empleadas, 100 000 libras en la construcción de edificios públicos, y las 31 000 restantes concedidas en crédito por un plazo de 100 años. Al cabo de este tiempo la suma habrá llegado a 4 061 000 libras esterlinas, de las cuales 1 060 000 dejo a disposición de los vecinos de Boston y 3 000 000, al municipio de Massachusetts. En lo sucesivo no me atrevo a seguir extendiéndome con más disposiciones.

Franklin, que dejó una herencia de 1000 libras, distribuyó muchos millones. Y no se trata de ningún malentendido. El cálculo matemático confirma que las disposiciones del testador son ciertas. Las 1000 libras aumentaron cada año en 1,05 veces y, al cabo de 100 años, se convirtieron en $x = 1000 \times 1{,}05^{100}$ libras.

Calcular x sin contar con la tecnología actual era sumamente complicado, pero utilizando logaritmos se simplificaron los cálculos: $\log x = \log 1000 + 100 \log 1{,}05 = 5{,}11893$; de donde $x = 131\ 000$, de acuerdo a lo que se predijo en el testamento (observar la expresión subrayada). En el segundo siglo las 31 000 llegarán a $y = 31\,000 \times 1{,}05^{100}$; de donde al aplicar los logaritmos o resolviendo directamente con una calculadora se obtiene: $y = 4\ 076\ 500$, suma que se diferencia muy poco de la señalada en el testamento.

¿Puedes justificar de dónde surge el valor 1,05 utilizado?

• *Otras sugerencias*

Las siguientes dos aplicaciones son otras sugerencias que puede el docente utilizar para plantear distintos problemas en relación con muchos temas de la actualidad mundial.

1. Terremotos

Dada la ocurrencia de terremotos de elevada intensidad que han causado destrozos en varios países en los últimos años, como el último de Japón, este es un tema que puede haber despertado el interés de los alumnos.

Por ejemplo, la intensidad de un terremoto se registra en la escala de Richter por medio de la fórmula: $R = log_{10}(a/T) + B$; donde $R = n°$, registrado en la escala de

Richter; *a* es la amplitud del movimiento del suelo en micras, que es medida en la estación receptora; *T*, el período de la onda sísmica en segundos; y *B*, un factor empírico relacionado con el debilitamiento de la onda sísmica por el incremento de la distancia al epicentro del terremoto. Así, para un terremoto a 10 000 km de la estación receptora, $B = 6{,}8$ si el movimiento vertical registrado del suelo es de 10 micras, y el período es $T = 1$ segundo, entonces la magnitud del terremoto es de (reemplazando estos datos en la fórmula) 7,8 en la escala de Ritcher. Un terremoto de esta magnitud provoca muchos daños en zonas cercanas al epicentro. Los daños se inician con magnitud 5, y la destrucción es casi total con magnitud 8.

¿Podríamos investigar la intensidad en escala de Ritcher de la catástrofe asiática del mes de diciembre de 2004? ¿O en el terremoto de Haití el pasado 12 de enero de 2010? ¿Y en el tsunami en Chile ocurrido en febrero del mismo año?

2. El pH

Un tema candente y actual que sirve para motivar a los alumnos es el de la protección del medioambiente. Con él se encuentra íntimamente relacionado el concepto de acidez, tema totalmente vinculado con algunas soluciones químicas, y se mide con la escala *pH*.

El valor *pH* (potencial de hidrógeno) de una solución es el logaritmo decimal del recíproco de la concentración de iones hidronio, o hidrogeniones $[H_3O^+]$, de una solución: $H = \log_{10} 1 / [H_3O^+]$.

La concentración de iones hidronio se mide en moles por litro. El vinagre tiene un *pH* de 3; el amoníaco doméstico, un *pH* de 12. La escala total va de 1 a 14. Las soluciones que no son ácidas, o sea neutras, tienen un $pH = 7$. Cuando el *pH* es menor que 7 la solución es ácida, y cuando es mayor que 7, alcalina.

• *Para conocer*

- Cuando en la perfumería se pide un champú neutro, ¿qué significa esto? El *pH* de un champú neutro es 7, y se adapta mejor al proceso biológico de limpieza del cabello que si es ácido o básico. Los champús suaves tienen $pH = 7$. Notemos que éste es uno de los casos «raros» en el que pedimos una sustancia por su logaritmo.

- El contenido de iones de hidrógeno de la sangre es 4×10^{-8} moles/litro. ¿Es la sangre alcalina, neutra o ácida?

! *Observación*

Hasta ahora, en general, los cálculos planteados nos permitieron usar los logaritmos para hallar exponentes. Pueden existir ecuaciones que sólo se pueden resolver mediante técnicas de cálculo numérico o con ayuda de gráficas, porque contienen términos tanto exponenciales como lineales, como ocurre con la siguiente ecuación: $1 + x = 2^x$.

Es claro que aplicar logaritmos a ambos miembros no nos resuelve nada. Por inspección se ve que $x = 0$ es una solución, pero si nos ayudamos de un gráfico en el que figuren las dos funciones: $1 + x$ y 2^x se podrá observar que hay otra solución a la derecha de $x = 1$. En este punto es interesante que el docente investigue sobre algún método numérico que le permita hallar dicha solución.

Actividad II.4

A modo de breve recordatorio teórico y gráfico sobre el estudio de las funciones exponencial y logarítmica —esta última queda bien definida como inversa de la función exponencial—, se sugiere realizar una tabla comparativa con respecto a ambas funciones, donde se destaque:
a) *El modelo de ambas incluyendo sus restricciones.*
b) *Dominio y conjunto imagen.*
c) *Gráficas aproximadas y propiedades de las mismas.*

Actividad II.5

Para investigar
1. Una función que modela a muchos tipos de poblaciones es la función logística.
Investigar cómo se define esta función, cuáles son sus aplicaciones, compararla con la función exponencial y plantear un problema que la involucre.
2. Un modelo matemático del crecimiento de la población mundial, para períodos cortos de tiempo, está dado por $p = Ae^{rt}$, donde A es la población cuando $t = 0$, r es la tasa de crecimiento en por ciento (%) anual, t es el tiempo en años, p es la población en el tiempo t.
Buscar mediante el último censo cuál es la población actual de nuestro país y cuál es la tasa de crecimiento de acuerdo con el período entre los dos últimos censos. Sobre la base de estos datos y el modelo antes explicitado, decir cuánto tiempo tardará en duplicarse la población actual.
3. Realizar una secuencia didáctica sobre el tema funciones exponenciales y/o logarítmicas y llevarla al aula.

La siguiente lista de preguntas y problemas puede servir como actividad de refuerzos para los contenidos relacionados a la función exponencial y logarítmica:
1. Considerar la función exponencial $y = (1/2)^x$
a) *¿Qué le sucede a* y *conforme* x *crece?*
b. ¿y *puede valer 0? Explicar.*
c) *¿El valor de* y *puede ser negativo? Explicar.*
2. *Considere las funciones* $y = (1/2)^x$ e $y = (1/3)^x$.

a) *¿Sus gráficas tienen la misma intersección con el eje* y*, o ésta es distinta para cada una de ellas? Determine la intersección con el eje* y *en cada caso.*

b. *Compare las gráficas de las dos funciones.*

3) *Como es sabido, para funciones exponenciales* $f(x) = a^x$*, no se considera el valor de* a *igual a 1. Si* x *pertenece a los números reales:*

a) *Cuando* $a = 1$ *¿cómo se ve la gráfica de* $f(x) = ax$*?*

b) *Cuando* $a = 1$ ¿$f(x) = a^x$ *es una función inyectiva? ¿Es sobreyectiva?*

c) *Cuando* $a = 1$ ¿$f(x) = a^x$ *tiene una función inversa? Explique su respuesta.*

4. *La cantidad de miligramos de un medicamento que queda en el organismo de una persona luego de* h *horas de haber sido administrado está dado por la función* $y = 10e^{-0,2h}$.

a) *Graficar la función* y *comentarla.*

b) *Si la cantidad de remedio no puede bajar de 2 mg, ¿cada cuánto tiempo en horas deberá tomar el medicamento?*

5. *Considere la función logarítmica* $y = \log_a x$*.*

a) *¿Qué restricciones hay sobre* a*?*

b) *¿Cuál es el dominio de la función?*

c) *¿Cuál es el rango de la función?*

d) *Hacer el gráfico para* $a > 1$ *y* $0 < a < 1$

6. *Imagine que se utilizó una calculadora para obtener log46,2, y el resultado fue 1,6646. ¿Este valor puede ser correcto?*

7. *Los astrónomos utilizan la siguiente fórmula para determinar el diámetro en kilómetros de planetas menores (también llamados asteroides):* $\log d = 3{,}7 – 0{,}2\ g$*, donde* g *es una cantidad llamada magnitud absoluta del asteroide. Determine el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es el número decimal 11,20 = g).*

Determinar la magnitud absoluta de un asteroide cuyo diámetro mide 5,8 km.

8. *La calificación promedio en un examen es una función del número de horas dedicadas a estudiar para presentarlo. La calificación promedio,* $f(x)$*, en puntos, puede calcularse mediante* $f(x) = \log(0{,}3x + 1{,}8)$*, donde* x *es el número de horas dedicadas a estudiar para presentarlo. La calificación máxima posible en el examen es 4,0. Determinar la calificación que recibe una persona que dedicó al estudio.*

a) *15 horas.*

b) *55 horas*.

II.4.6. Reflexiones sobre algunas cuestiones que surgen al trabajar con desigualdades

Cuando se trabaja con funciones exponenciales o logarítmicas (en realidad cuando se lo hace con cualquier función) es importante saber resolver ecuaciones ya que nos permitirá respondernos cuestiones como: ¿cuál es el valor de *x* para el cual *y* es *k*?, siendo *k* una constante adecuada.

En este caso debemos trabajar con ecuaciones exponenciales o logarítmicas y surgen muchos errores; alguno de ellos son la pérdida de raíces de una ecuación y soluciones erróneas en la resolución de este tipo de inecuaciones.

a) *Soluciones incompletas*

$$\text{Resolver la ecuación: } 3^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+2}} = 6$$

Algunos estudiantes resuelven esta ecuación así:

$$\text{Al escribirla en la forma } 3^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+2}} = 3^1\, 2^1$$

Eligen la raíz *x* de modo que los exponentes, de bases correspondientes, resultan iguales: x=1 , $\frac{3x}{x+2} = 1$

De donde pueden obtener «una solución» $x = 1$.

¿Pero hay más soluciones? En efecto, se ha hallado una sola raíz y no se explicita si hay otras. El problema radica en que se ha utilizado el siguiente razonamiento: «si las bases son iguales los exponentes correspondientes también». Observemos este contraejemplo:

$$\text{La igualdad } 3^1\, 2^1 = 3^2\, 2^{\log_2 2/3}$$

Es válida, pero 1 es distinto de 2, y 1 es distinto de $\log_2 2/3$. Por lo tanto, el razonamiento anterior ¿es incorrecto? No, pero sí incompleto pues, en el caso de una ecuación, puede dar origen a la pérdida de raíces, cosa que ocurre en la ecuación considerada.

Aplicando logaritmos decimales a ambos miembros de la ecuación original se obtiene que mx log3 + $\frac{3x}{x+2}$ log2 = log6 , o bien la siguiente ecuación cuadrática: $x^2\log3 + x(3\log2 + 2\log3 - \log6) - 2\log6 = 0$

Para simplificar el procedimiento de resolución, aprovechamos que 1 es raíz (previa verificación) en la ecuación inicial y por consiguiente satisface la ecuación cuadrática equivalente a la inicial. No es complicado, entonces, hallar la restante que es $x_2 = \frac{-\log 36}{\log 3}$.

b) *Resolución de inecuaciones*

Muchos errores surgen con la resolución de desigualdades. Estos se multiplicarán si estas desigualdades están relacionadas con las funciones exponenciales y logarítmicas, porque se asimilan los procedimientos de las ecuaciones a los de las inecuaciones, y porque no se conocen las propiedades de las funciones que intervienen en estas desigualdades.

Cuando se tiene la siguiente desigualdad $a^x > a^b$ ó $a^x < a^b$ para resolverlas, hay que recordar que las propiedades de una función exponencial son diferentes según la base sea mayor o menor que uno, según se ha analizado anteriormente, y por lo tanto no puede concluirse $x > b$ o $x < b$.

Por ejemplo, cuando se propone a los alumnos resolver: $-1 \leq (1/3)^x < 2$.

Resolver esta desigualdad doble significa hallar todos aquellos valores de x que satisfacen simultáneamente las dos desigualdades: $(1/3)^x \geq -1$ *y* $(1/3)^x < 2$.

Dado que la función exponencial es siempre positiva, la primera de estas dos desigualdades se satisface para cualquier valor de x. Escribimos la segunda desigualdad como: (1/3)x < (1/3)log1/32. ¿Por qué? Al resolver esta desigualdad el error de los alumnos está en que no tienen en cuenta que la función exponencial $y = ax$ es decreciente cuando la base a, siempre positiva, es menor que uno y dan como respuesta $x <$ log1/32, lo que es errónea dado que esta función de base 1/3 es decreciente y por lo tanto la inecuación se verifica para todo número real $x >$ log1/32

Errores similares ocurren cuando la desigualdad es de tipo logarítmico. Es decir que para evitarlos se tiene que tener en cuenta también que las propiedades de dicha función son diferentes según la base sea mayor o menor que uno. Sin embargo, además, en la solución de las mismas también debe considerarse que la función logaritmo está definida para los reales positivos. Al olvidar esto, los estudiantes resuelven, por ejemplo, la desigualdad $log_2 x < 1$ del modo siguiente: «$log_2 x < log_2 2$, por lo tanto la desigualdad se cumple para $x < 2$»; pero esto es incorrecto, ya que al no tener en cuenta que los logaritmos no están definidos para valores de x menores o iguales que cero, la solución está mal expresada pues hemos introducido soluciones que no tienen sentido. El resultado correcto es el conjunto de valores reales que satisfacen las desigualdades: $0 < x < 2$.

Notas

1. http://www.unlu.edu.ar/~mapco/apuntes/360/mapco360.htm
2. http://www.arrakis.es/~mcj/ index.htm

Capítulo III
Las funciones y la geometría

ELENA F. DE CARRERA Y LILIANA NITTI

¡Quién supiera ser a un tiempo clásico y moderno,
breve y completo, claro y oscuro!

P. PUIG ADAM

III.1. Por qué geometría

En materiales elaborados anteriormente, cuando trabajamos con funciones, analizamos distintas definiciones y las condiciones que de ellas se desprenden para que una relación entre conjuntos cualesquiera sea función. Luego se consideraron algunos tipos, como las de proporcionalidad directa e inversa, y mencionamos su relación con la geometría, e hicieron allí su aparición el teorema de Thales. Aparecieron también la sucesión de Fibonacci, el Modulor de Le Corbussier, el número de oro φ y algunos otros temas que por su riqueza, aplicabilidad y por qué no su belleza, deberían ser retomados para que los disfrutemos y poder organizar alguna actividad para nuestros alumnos con ellas.

Además, dada la provisionalidad del conocimiento que, como señalan algunos investigadores, crece a ritmo exponencial, es necesario rever permanentemente lo que se ha estudiado en las carreras de grado. Ningún profesional, incluido el docente, puede quedarse entonces con lo que aprendió en sus estudios de grado, ni aun de posgrado, y necesita la actualización permanente, es decir, una educación a lo largo de la vida.

Este crecimiento del conocimiento constituye un buen ejemplo de función exponencial y más precisamente de cómo la matemática no es sólo el *lenguaje de la naturaleza,* sino también de todas las ciencias, aun las sociales.

Las actividades áulicas que proponemos permiten estudiar los obstáculos sobre el aprendizaje que los propios contenidos acarrean y se proyectan a las actividades seleccionadas para nuestras secuencias didácticas en el aula.

Las experiencias propuestas, en su relación permanente con el adolescente como sujeto activo y presente, permiten en una profunda unión «matemática y su didáctica» en la que cada docente pueda desplegar su singularidad; permiten además que el alumno perciba a «su docente» como aquel sujeto activo que se construye y reconstruye permanentemente y que hace que la escuela sea un circuito con sentido en relación con las acciones de sus autores.

Todos estamos de acuerdo en la importancia de la enseñanza de la geometría en la escuela, ya sea para que el ciudadano pueda lograr diariamente una óptima ubicación espacial y comprenda el proceso de medir; para que el universitario comprenda sus materias experimentales; para que el técnico comprenda y modelice —y construya— el mundo que lo rodea; y por qué no otros. Esta enumeración no es exhaustiva, sólo es eso: una simple enumeración. Existen otros fines tanto o más importantes que los señalados. Pero, ¿se da geometría? Y si se lo hace, ¿qué geometría? Y en última instancia, ¿qué es la geometría?

Esta última es precisamente una pregunta que para ser contestada reflexivamente es bueno enriquecer con la lectura del párrafo siguiente extraído de un libro excelente *Geometría y su didáctica,* de Alsina, Fortuny y Pérez (1997):

> Imaginemos (¡lo estamos deseando!) que un profesor de matemáticas decide dar a su clase la oportunidad de aprender geometría y autoasignarse el placer de enseñarla. Seguramente la primera duda que tendrá será el delimitar lo que realmente «es» Geometría, qué apartados matemáticos merecen el honor de ser denominados geométricos y cuáles no. Para las personas no implicadas en el mundo de las matemáticas la denominación Geométrica no ofrece ningún problema. Buscarían una definición de urgencia en una enciclopedia ilustrada y hallarían una mini–descripción del estilo «parte de las matemáticas basadas en la intuición del espacio» o algo similar. Seguramente empezarían entonces a recordar algunas imágenes muy pulcras que adornaron sus libros de texto, un cono de madera dividido en dos trozos irregulares y, posiblemente, toda una serie de palabras que siempre consideraron propias del argot geométrico: punto, recta, plano, espacio, triángulo, cuadrilátero, polígono, giro, traslación, cubo, perímetro, área, volumen, Pitágoras, (...) Para la mayoría de los mortales que han recibido una educación primaria la Geometría se relaciona con dibujos lineales, formas, figuras, fórmulas, unas pocas transformaciones... y pocas cosas más. En algún caso hay quien recuerda aun con sorpresa aquello de «por dos puntos siempre pasa una línea recta» o «toda recta es paralela a sí misma», sin haber descubierto muchos años después de la memorización de dichas obviedades, el sentido de las mismas. Pasemos al otro extremo. Para las personas comprometidas con el mundo matemático el problema es delimitar lo que no es Geometría. Para ellos el saber geométrico puede estar relacionado con el álgebra lineal, los sistemas de ecuaciones lineales, los determinantes, la geometría diferencial, la topología de variedades, las geometrías finitas, las ecuaciones diferenciales, etcétera.
>
> Entre una geometría raquítica y una Geometría desbordante se impone analizar el problema de lo que es Geometría con una cierta tranquilidad de espíritu y una cierta voluntad de buscar una respuesta positiva. (12)

Pedro Puig Adam sostiene en el prólogo de su libro sobre temas de geometría métrica —que escribió en el año 1947 para los ingresantes en las escuelas o facultades de Ingeniería en España y que aún hoy se emplea como texto en algunas facultades, y por qué no decirlo, donde hemos estudiado Geometría métrica muchos de los que hoy somos profesores— que la enseñanza no puede centrarse en la resolución de un cúmulo de ejercicios y problemas. Por el contrario, «debe volverse por los fueros de la teoría» y que esto debe hacerse para «dar normas seguras a la práctica; recordar la importancia y significado de los principios; reflejar la estructura interna de la ciencia; perfilar sus conceptos y manejar sus métodos para orientar soluciones» (5).

La ciencia del ingeniero, dice él —y nosotros podemos agregar: la del técnico en general—, debe ser práctica pero no empírica. El empirismo termina en rutina y la rutina en ceguera. Y concluye: «no se anheló el rigor para matar la intuición, sino para vigorizarla».

Como vemos, la geometría no es esa cosa simple y estructurada que conocemos como tal. Si a continuación analizamos lo que estos mismos autores señalan como ejemplos de aplicaciones geométricas, nos convenceremos más de su importancia y de la necesidad de incluir la geometría en nuestro currículo real y en nuestras actividades áulicas.

Continuando con el pensamiento de Claudí Alsina y colaboradores en el libro ya señalado, rescatamos el siguiente cuadro donde se dan algunas áreas actuales del conocimiento científico y tecnológico donde se aplica la Geometría:

La palabra «Geometría» esconde multitud de apartados de enorme interés matemático.

Las aplicaciones «geométricas» son cada vez más amplias y versátiles.

– Aplicaciones a la modelización matemática del mundo físico.
– Geodesia y triangulación.
– Aplicaciones en astronomía y mecánica celeste.
– Cartografía (área, satélite, temática,...).
– Cálculos de medidas (áreas, superficies, volúmenes).
– Problemas comerciales (envasado, empaquetado, tallas, patrones,...).
– Estructuras en ingeniería y arquitectura.
– Clasificación de nudos.
– Digitalización y manipulación de imágenes.
– Grafos e investigación operativa.
– Formas y transformaciones al servicio de la creación artística.
– Aplicaciones a la computación y gráficos por ordenador.
– Visualización de datos estadísticos.
– Procesamiento de imágenes, compresión y registro.
– Teoría de barras y engranajes.
– Aplicaciones en óptica, fotografía y cine.

– Elementos multimedia interactivos.
– Codificación, decodificación y criptografía.
– Robóticas: movimientos, visión, tareas automáticas.
– Descripciones criptográficas estáticas y de conocimiento.
– Modelización de procesos dinámicos y caóticos.
– Doblado de papel, origami y empaquetado. (13)

Por lo señalado anteriormente por estos autores, es que resulta imprescindible enseñar geometría en la escuela media. Es necesario que los estudiantes conozcan la geometría; ésta no sólo les será de utilidad, sino que los introducirá en el mundo de la belleza y la proporcionalidad, entre otras, y podrán observar con mirada crítica el mundo que los rodea, ya sea la naturaleza o las construcciones humanas.

Actividad III.1

1. Discutir con un grupo de colegas el significado de la geometría en la enseñanza y las aplicaciones de la misma.
2. Discutir a continuación la afirmación de Puig Adam acerca de la importancia de la teoría y el fundamento que da para sustentar su posición.
3. Analizar cuáles de las aplicaciones geométricas señaladas son tenidas en cuenta en los circuitos de la enseñanza actual de la matemática en todos sus niveles.
4. Con toda honestidad, cada docente debe analizar lo que da de geometría en sus cursos de enseñanza media.
5. Analizar también la causa por la cual sólo da los temas de geometría que ha señalado en el punto 4.

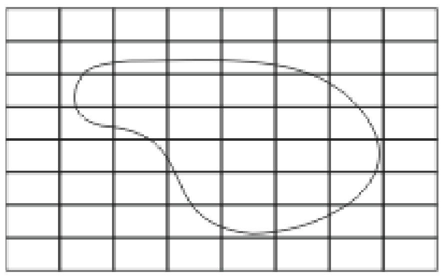
Las nociones de longitud, área y volumen, así como los problemas de medidas a los que pertenecen, ocupan un lugar preponderante en el estudio de la geometría métrica. Además, estos temas motivaron el nacimiento de la geometría empírica; vale recordar la necesidad de contar con la casta de los «cordeleros» en el antiguo Egipto, constituida por hombres preparados para poder limitar nuevamente los terrenos de cada propietario luego de cada inundación anual del Nilo.

En realidad, estas nociones influyen en toda la matemática, pero no solamente en ella, sino que a través de ella lo hacen en otras ramas de la ciencia y de la tecnología según vimos en las afirmaciones de Alsina y colaboradores.

III.2. El problema del área

Entre los temas mencionados en el inciso anterior, la noción de área de figuras planas es tal vez una de las más importantes para todas las aplicaciones. Las áreas de las figuras geométricas irregulares se obtienen de forma aproximada por descomposición de las mismas en paralelogramos y triángulos. A partir de las áreas de estos polígonos conocidos, por simple adición, se calcula el de la primera.

Figura III.1. Esquema para el cálculo aproximado del área encerrada por una curva



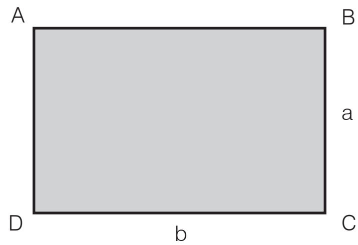
En la Figura III.1 se puede calcular *aproximadamente* el área encerrada por la curva contando los cuadraditos enteros que quedan formados y aproximando el resto por 1/2, 1/4, etc., según la precisión que se quiera dar a nuestro cálculo aproximado. Por ejemplo, podemos contar diez cuadraditos enteros y un valor aproximado del área es 17,75.

Este era el único método empleado para realizar el cálculo de áreas aproximadamente. El advenimiento del cálculo diferencial e integral, en especial la integral de Riemann (1854), permitió generalizar el cálculo de áreas, sobre todo para los casos donde el borde o frontera era conocido.

Pero evidentemente deben conocerse primero las áreas del paralelogramo y de los triángulos que se obtienen a partir de la del rectángulo. Un libro donde el tema del área está tratado de manera excelente es el de Araujo *et al.* (2000) donde el concepto de área de polígonos es el inicio del mismo y sobre ella dicen:

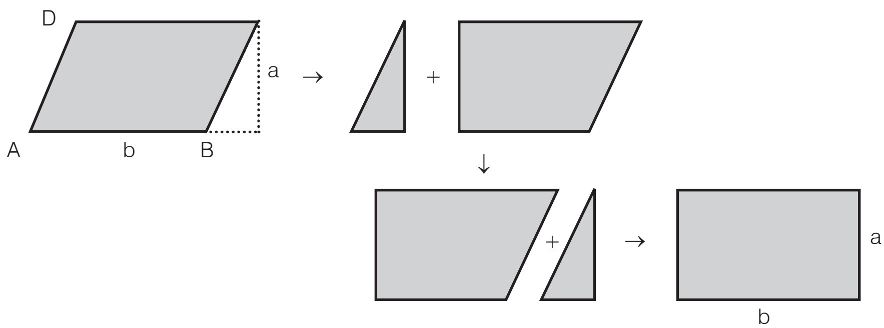
> Comenzamos resolviendo algunos problemas sobre el área de figuras planas aceptando la noción intuitiva de área. Esta encierra, entre otros, el siguiente principio: si una figura se corta en un número cualquiera de piezas que se reacomodan en su totalidad, como un rompecabezas, para formar una nueva figura, el área de ésta es la misma que el área de la primera. También aceptamos el hecho que el área del rectángulo es el producto de los lados o equivalentemente base x altura. Usaremos la notación [S] para indicar el área de la figura S. (1)

Figura III.2. Área del rectángulo



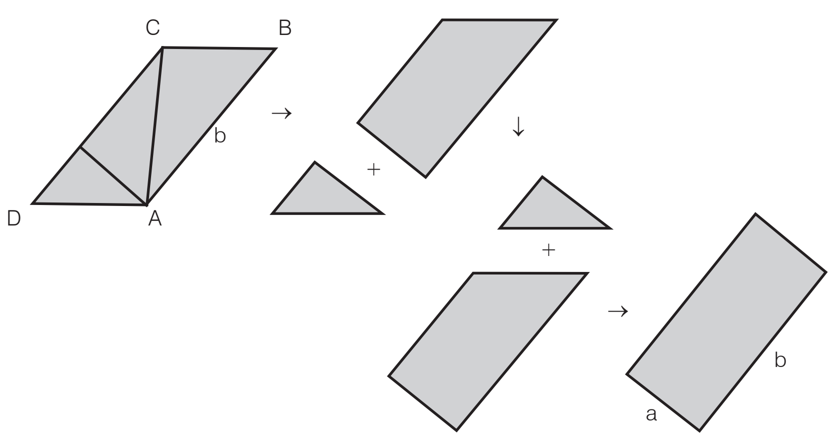
A partir de esto, calculamos el área del paralelogramo: [ABCD] = b x a

Figura III.3. Área del paralelogramo a partir de la del rectángulo



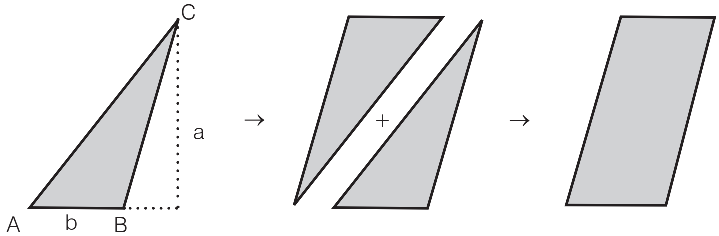
De aquí deducimos que el área del paralelogramo ABCD es igual al área del rectángulo hallado.

Figura III.4. Área del paralelogramo a partir de la del rectángulo



Y el área del triángulo [ABC] = $\frac{b \text{ x } a}{2}$

Figura III.5. Área del triángulo a partir de la del rectángulo



Basándonos en estos principios simples de descomposición de figuras en otras cuya unión —como las piezas de un rompecabezas— sea la original, podemos ir generalizando el cálculo de áreas desde figuras simples a otras más complejas.

Notemos que en este procedimiento está implícito el tema de congruencia de figuras y de movimientos y transformaciones rígidas del plano, temas estos que pueden incluirse si el docente lo desea.

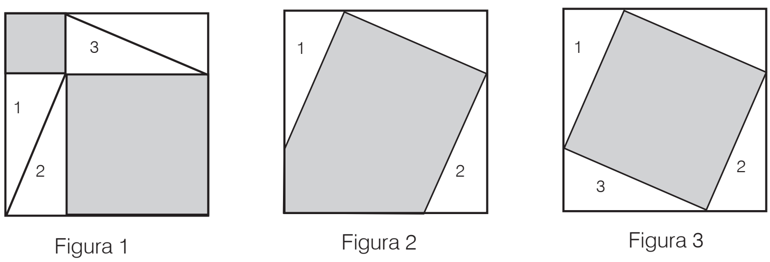
Proponemos una actividad para llevar al aula. Sugerimos que la resuelva primero el docente para indicar dónde él piensa que encontrarán sus alumnos las dificultades y qué transformaciones geométricas se realizarán si este tema ha sido dado. Verificar luego si efectivamente los alumnos tuvieron dificultades donde él señaló. Si se considera que los ejercicios son extensos, seleccionar dos para que sean resueltos por los alumnos para realizar la verificación propuesta.

Actividad III.2

Ejercicio 1

Considerar las figuras siguientes y mostrar mediante cambios sucesivos de los triángulos numerados que las áreas de las figuras sombreadas son iguales en los tres casos. El triángulo 1 puede trasladarse según una dirección vertical y el 2 según una dirección horizontal, el 3 se traslada con ambos movimientos sucesivos.

Figura III.6. Figuras de igual área

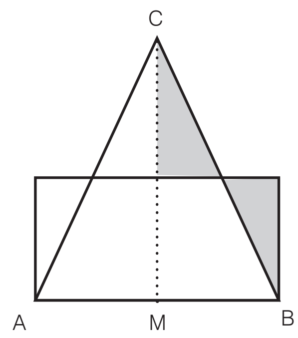


Nota: las figuras 1 y 3 pueden ser usadas para una de las tantas demostraciones que pueden hacerse del teorema de Pitágoras. Acá vale la pena que recordemos la importancia de las demostraciones en la enseñanza media. Pero para eso es bueno leer el capítulo siguiente donde se trata la importancia de esto y cómo se desarrolló en el foro de discusión que en ese momento se habilitó a los efectos en la UNL virtual.

Problemas de este tipo pueden ser empleados para reforzar el tema de transformaciones rígidas en el plano.

Ejercicio 2

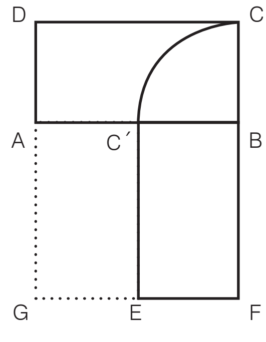
Figura III.7. Esquema correspondiente al ejercicio 2



Para resolver este problema se debe suponer no conocer la fórmula que permite calcular el área de un triángulo y que sólo se sabe que la del rectángulo se puede calcular como base x altura, según ya hemos visto. *Se desea conocer el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$. ¿Cómo puede realizar este cálculo?*

Sugerencia: considerar el rectángulo de igual base que la del triángulo y altura la mitad que la de éste. Aplicar movimientos en el plano adecuados a los triángulos para obtener áreas iguales.

Ejercicio 3

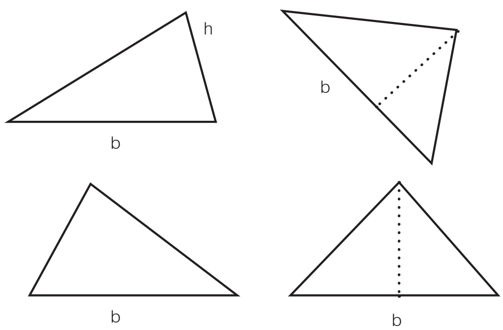


En el rectángulo dado se tiene que: $|AB| = 2\ |AD|$

Demostrar que los rectángulos ABCD y EFBC´ tienen igual área y calcular la de todos los rectángulos que quedan formados. ¿Se pueden ordenar en forma creciente los valores correspondientes a las áreas obtenidas?

Ejercicio 4

Figura III.8. Triángulos de igual base y altura



a. Todos estos triángulos tienen igual base e igual altura. Verificar (para ello es conveniente emplear un compás). ¿Por qué no sugerimos la regla?

b. ¿Tendrán todos igual área? Justificar.

c. Es conveniente discutir la confusión que existe entre área y superficie. Luego precisar ambos conceptos.

! *Observación*

Es conveniente llevar algunos de estos ejercicios al aula y analizar cómo lo resuelven los alumnos. ¿Todos los resuelven por el mismo camino? ¿Es el que eligió el docente? ¿Los alumnos se dieron cuenta enseguida o fueron necesarias otras explicaciones?

III.3. La matemática y los matemáticos

Cuando se habla de matemática y de teoremas generalmente se nos presenta el *teorema de Pitágoras* al que ya hemos hecho referencia.

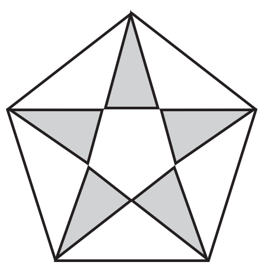
Ya que hablamos de este griego, es interesante contar esta pequeña historia en la que se pretende mostrar una faceta de la matemática y de los matemáticos que no es muy conocida. Tal vez la pretensión oculta sea discutir, desmitificar una imagen de los matemáticos que desde aquella época sigue en vigencia hasta nuestros días.

Quién de los que nos dedicamos a la matemática no hemos oído la expresión ¡matemático! ¡Profesora de matemática! ¡Nunca *pude entenderla!* Dichas estas frases con una mezcla de susto, admiración y por qué no compasión. Esta desmitificación la hacemos a través de alguien muy conocido: ¡Pitágoras!

Pitágoras nació en Samos, una isla Jónica próxima a Mileto, lugar de nacimiento de Tales, en una fecha no uniforme según la bibliografía consultada. Sólo coinciden todas ellas en que fue en algún año entre el 600 y el 500 a.C. Tomaremos como más probable, el 580 a.C., y como año de su muerte el 500 a.C. Su vida, así como las fechas que señalamos, están envueltas por la leyenda, según señala Boyer. El conocer tan poco sobre Pitágoras se debe en gran parte a la pérdida de documentos de la época, pero el otro gran problema es que fundó una orden de tipo comunal y secreta, donde tanto los conocimientos como las propiedades individuales eran de la comunidad y no atribuible a ningún miembro concreto de la orden, por ello más que hablar de Pitágoras hay que hacerlo de los pitagóricos. Uno de lo hechos que vale la pena señalar es que esta secta estaba integrada por hombres y también por mujeres.

Tan cerrada era la orden que se reconocían mediante un símbolo, el pentágono estrellado como el de la figura inferior, y se transmitían sus hallazgos matemáticos bajo juramento.

Figura III.9. Símbolo de la orden de los pitagóricos



Los integrantes de esta orden eran los matemáticos (conocedores) mientras que también existían los *acusmáticos* (oidores), estos últimos no tenían tantas restricciones como los primeros. Sólo participaban de los conocimientos y creencias sin intervenir en profundidad de las acciones de la comunidad.

Los logros de los pitagóricos se dan principalmente en el estudio de matemática, ya sea con propiedades de los números naturales pares, impares, etc., como en el de la geometría. Ha llegado hasta nuestros días el famoso Teorema de Pitágoras. Pero además sus logros en astronomía son importantísimos; fue el primero que afirmó que la Tierra era un globo que gira junto a otros cuerpos celestes alrededor de un fuego central.

Hacia el año 508 a.C. la sociedad pitagórica fue atacada por un vecino de Crotona, llamado Cilón, al que Pitágoras había rechazado como miembro de su grupo. En consecuencia éste debe refugiarse en Metaponto, también en el sur de Italia, donde muere.

Algunos historiadores aseguran que Cilón actuó así porque ya existía descontento en la sociedad porque un matemático de la orden, Hipaso, reveló el secreto de la construcción del dodecaedro regular, aunque también se lo acusó de haber revelado la irracionalidad de ciertos números; por estas razones lo expulsaron de la comunidad. Al poco tiempo, Hipaso muere en un naufragio.

Como vemos, la biografía de Pitágoras lo muestra muy inserto en la realidad política de su tiempo.

Dicen Kasner y Newman que cuando los filósofos griegos descubrieron que la raíz cuadrada de dos no era un número racional, celebraron el descubrimiento sacrificando cien bueyes. ¿Cuál sería el sacrificio que merecería el descubrimiento que π era un número irracional y que el círculo tan inocuo y sencillo tendría un área πr^2 no tan fácilmente calculable?

III.4 La educación como formadora del futuro ciudadano

Las reflexiones que hace el Dr. Jaim Etcheverry[1] sobre temas de actualidad, en especial acerca de la educación y sus conflictos, son publicadas en algunos ejemplares de la revista que acompaña al diario *La Nación* los días domingos. Creemos que la lectura del artículo titulado «Como la hiedra», que apareció en esa revista en el año 2005, resulta muy agradable aunque no por ello banal, y merece ser comentado. Creemos que es bueno detenerse en él en este momento.

> Al admirar la frondosa hiedra que adorna el jardín, comprendemos que ha crecido como lo ha hecho gracias al apoyo firme que le brindó la pared que cubre. A la vez que le proporcionaba sustento, ese muro oponía resistencia a su desarrollo. En otras palabras, al limitar y ordenar el que podría haber sido su crecimiento anárquico, la pared permitió que la hiedra se elevara en lugar de reptar a ras del suelo. Durante su reciente visita a Buenos Aires, Fernando Savater volvió a glosar esa metáfora que, a propósito de la educación, utilizó hace un tiempo en su libro *El valor de educar*. En uno de sus párrafos señala: «Los niños crecen en todas las latitudes como la hiedra contra la pared, ayudándose de adultos que les ofrecen juntamente apoyo y resistencia. Si carecen de esa tutela, no siempre complaciente, pueden deformarse hasta lo monstruoso».
>
> Esta es, tal vez, una de las síntesis más logradas acerca de la esencia de la tarea que enfrenta quien asume la responsabilidad de educar a niños o jóvenes. Lo es porque conjuga los dos elementos que definen toda educación: el apoyo resistente. Apoyo porque educar es, ante todo, alentar, estimular el crecimiento, entusiasmar.
>
> Pero ese apoyo es inseparable de la resistencia que es imprescindible ofrecer para educar, tarea que —como afirma Savater— no siempre complace. Apoyar limitando, estimular guiando, ésas son las condiciones esenciales que debe respetar quien encara las etapas precoces de la educación.

Cuando, como en estos tiempos, aceptamos que los recién venidos al mundo no sólo no requieren apoyo de los adultos, sino que hasta llegamos al absurdo de sostener que somos nosotros quienes debemos aprender de los niños, destruimos el principio mismo de la educación, que consiste, precisamente, en brindarles esa compañía inicial que les permita introducirse en un mundo que ya está allí cuando ellos llegan.

Hoy, la convicción de que el mundo comienza cada día, con cada nueva generación, está haciendo imposible todo esfuerzo serio de enseñar algo.

Por otro lado, se generaliza la idea de que la educación es una imposición intolerable sobre la libertad del otro. En lugar de pensar que constituye un requisito, una etapa para poder ejercer plenamente esa libertad, se sostiene que la coarta. Por eso es que la absurda tolerancia actual, la cómoda resignación ante la dificultad de enseñar, el horror ante la necesidad de hacer respetar reglas, no oponen resistencia alguna a las personas, lo que las deforma hasta lo monstruoso.

Lo mismo que le sucede a la hiedra cuando carece de apoyo y de límites.

Nuestra rápida retirada de la responsabilidad de cumplir la función de adultos —el muro que apoya y limita— es lo que explica mucho de lo que sucede en la sociedad actual.

Creciendo como organismos salvajes, abandonadas, sin reparos firmes, las personas exhiben hasta con orgullo sus deformidades; entre ellas, la ignorancia producto de nuestro desinterés. Ser padre o maestro —en otras palabras, intentar educar— supone estar ahí durante el período de formación; como la pared, apoyar, ejerciendo una resistencia incómoda, antipática, poco agradable. Implica brindar, como también afirma Savater, ese «apoyo resistente, cordial pero firme, paciente y complejo que ha de ayudarlos a crecer rectamente hacia la libertad adulta. En esencia, los mayores representan para los hijos o los jóvenes algo muy simpático que es el tiempo, la necesidad, la tradición. Son testimonio del hecho de que, de alguna manera, nadie viene al mundo a iniciarlo, sino a soportarlo y, si acaso, a intentar mejorarlo. Si puede». Educar a una persona es apostar a que podrá hacerlo.

Actividad III.3

1. Señalar las partes del texto que más lo impactan y discutirlo con sus colegas. Sugerimos que no sean sólo de matemática sino de otras disciplinas.

2. Finalmente debemos analizar: ¿somos la hiedra de nuestros alumnos, en el sentido del autor? Sería importante que seamos sinceros y efectuemos una correcta autoevaluación de esta pregunta.

Ya que hablamos de Fernando Savater en el libro mencionado por el Dr. Jaim Etcheverry, se puede leer un párrafo que por su riqueza y significado vale la pena meditar:

¿sabe cuál es el más notable efecto de la buena educación? Despertar el apetito de más educación de nuevos aprendizajes y enseñanza, el bien educado sabe que nunca lo está del todo pero que lo está lo suficiente para querer estarlo más; quien cree que la educación como tal concluye en la escuela o en la universidad no ha sido realmente «encendido» por el ardor educativo sino sólo «barnizado o decorado por sus tintes menores». (1997:164)

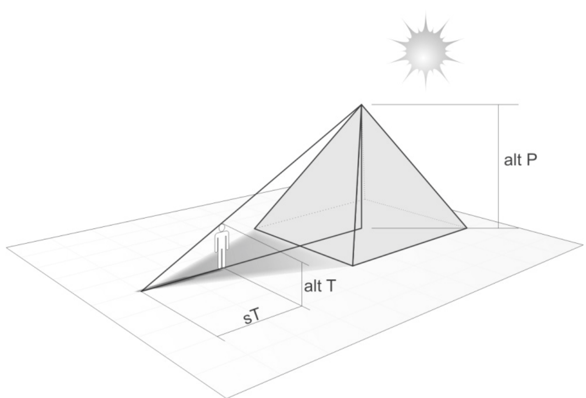
III.5 Áreas y proporcionalidad

Las proporciones nacieron en Grecia hace más de 2000 años. Thales, o simplemente Tales, de quien no existen cifras ciertas respecto de su nacimiento y muerte, pero que podemos ubicar del 636 al 546 a.C., es el creador de la proporcionalidad directa.

Su célebre teorema, inmortalizado por Les Luthiers en una canción, según algunos historiadores se debe en realidad a algunos pitagóricos y otros asignan su nacimiento a un viaje de Tales a Egipto y su interés en medir la altura de la pirámide de Keops. Para concretar su objetivo se le ocurrió, a partir de su propia altura conocida, medir las longitudes de la sombra de la pirámide y de la suya, ambas a la misma hora.

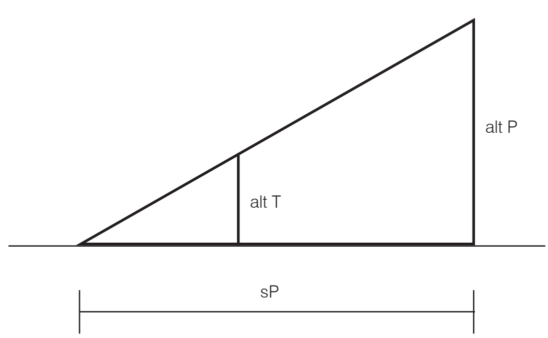
El esquema de esta situación es el siguiente:

Figura III.10. Aplicación del teorema de Thales



De una manera más sintética:

Figura III.11. Esquema de la aplicación del teorema de Thales



Donde:

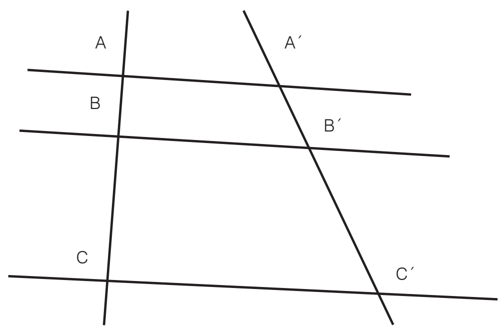
$$\begin{gathered}
\textit{alt } T = \text{altura de Tales} \\
\textit{alt } P = \text{altura de pirámide} \\
sT = \text{sombra se Tales} \\
sP = \text{sombra pirámide}
\end{gathered}$$

De donde obtuvo la proporción:

$$\frac{\text{sT}}{\text{sP}} = \frac{\text{alt T}}{\text{alt P}}$$

De allí al célebre teorema: *si tres o más paralelas son cortadas por transversales, a segmentos proporcionales sobre una de ella corresponden segmentos proporcionales sobre la otra*.

Figura III.12. Esquema del teorema de Thales



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$$

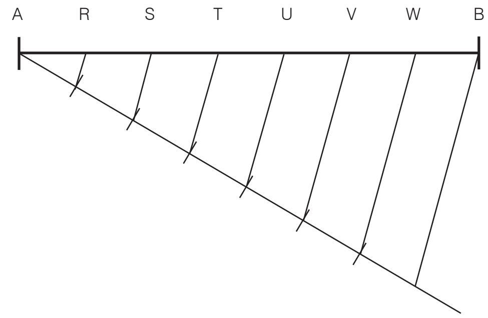
Ya hablamos del teorema de Thales. Una aplicación extra que nos brinda este teorema es la posibilidad de dividir un segmento cualquiera en *k* partes congruentes, sin tener en cuenta la longitud exacta del segmento ni caer en divisiones que nos den como resultados números —racionales o no— de difícil medición y representación.

Supongamos querer dividir el segmento $\overline{AB}$ en 7 partes congruentes:

Figura III.13. División de segmento AB en 7 partes iguales

Una forma de hacerlo es tomando una semirrecta de origen *A*, que forma cualquier ángulo con el segmento $\overline{AB}$, y sobre ésta tomar 7 segmentos congruentes con una longitud cualquiera, unir el último punto con *B* y trazar las paralelas. Cada uno de los segmentos determinados sobre el segmento $\overline{AB}$ tiene la misma longitud.

Figura III.14. Uso del teorema de Thales para la división de segmento $\overline{AB}$ en 7 partes iguales



Actividad III.4

1. Justificar la construcción anterior.

2. Adoptando la expresión $|\overline{AB}|$ para indicar la longitud del segmento $\overline{AB}$, ¿es posible escribir $|\overline{AB}| = 1/7|\overline{AB}|$?

3. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre los segmentos de $\overline{AB}$?

Podemos hablar entonces de una función que asigne a todo segmento otro cuya longitud sea *k* veces la suya.

$$|\overline{AB}| = k \times |\overline{AB}|$$

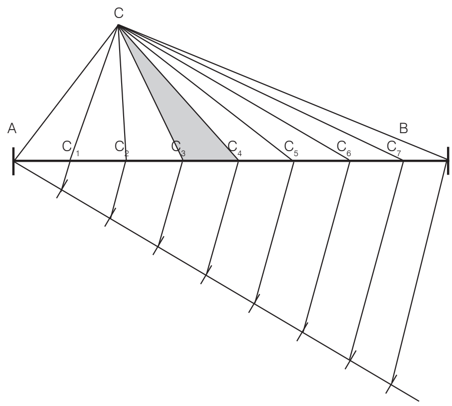
En general si *x* es la longitud de un segmento dado es posible hallar otro cuya longitud *y* sea *kx.*

Esto lo podemos expresar $y = kx$

¡Otra vez aparece la función de proporcionalidad directa!

Ahora bien, esto puede trasladarse a las áreas y así extraer otras conclusiones interesantes.

Figura III.15: aplicación del teorema de Thales



Supongamos tener el $A\overset{\triangle}{B}C$ y se quiere obtener otro de igual altura cuya área sea la octava parte de la del triángulo dado. El gráfico anterior le puede sugerir la respuesta a este interrogante.

Actividad III.5

Pedir a los alumnos que justifiquen, teniendo en cuenta el dibujo anterior, lo que se les solicita en los incisos 1,2 y 3.

1. Probar que $[C_3\overset{\triangle}{C}C_4] = 1/8\ [A\overset{\triangle}{B}C]$
2. Probar lo mismo pero sabiendo que el triángulo ACB (fig. III.15.) es:

a) acutángulo.

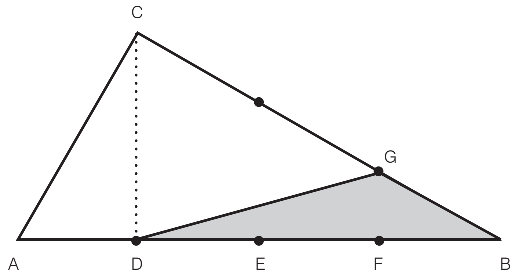
b) obtusángulo.

3. Pintar un triángulo de manera que su área sea $3/8[A\overset{\triangle}{B}C]$

Actividad III.6

Demostrar que es posible calcular el área del triángulo sombreado que queda formado con vértices en los lados del $A\overset{\triangle}{B}C$ en función del $[A\overset{\triangle}{B}C]$, (extraído de Área y Volumen, Araujo *et al*.):

Figura III.16. Esquema de la actividad III.6

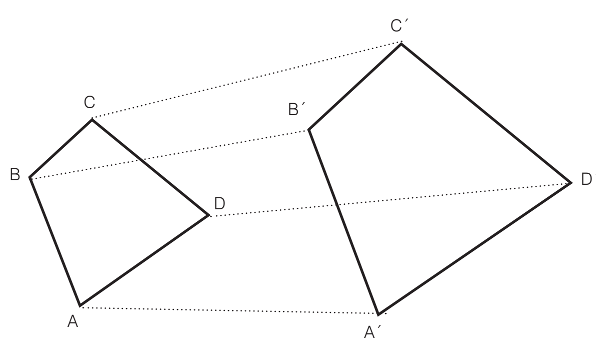


III.6. La semejanza geométrica y la proporcionalidad

Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma. Esta es una idea intuitiva que podemos formalizar de más de una manera. En el caso de los polígonos, tener la misma forma implica que los ángulos correspondientes deben ser iguales y todos los lados ser proporcionales. Es decir, las dimensiones de sus lados o las longitudes de sus lados deben tener el mismo factor de proporcionalidad. Ya que estamos, ¿qué quiere decir ángulos correspondientes?

$$D\hat{A}B = D'\hat{A}'V'$$
$$A\hat{B}C = \text{............}$$
$$B\hat{C}D = \text{............}$$
$$C\hat{D}A = \text{............}$$

Figura III.17. Ejemplo de proporcionalidades



Habitualmente, para la proporcionalidad de los lados anotamos:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A'B'}|} = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{B'C'}|} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{C'D'}|} = \frac{|\overline{DA}|}{|\overline{D'A'}|} = k;$$

pero podemos indicar:

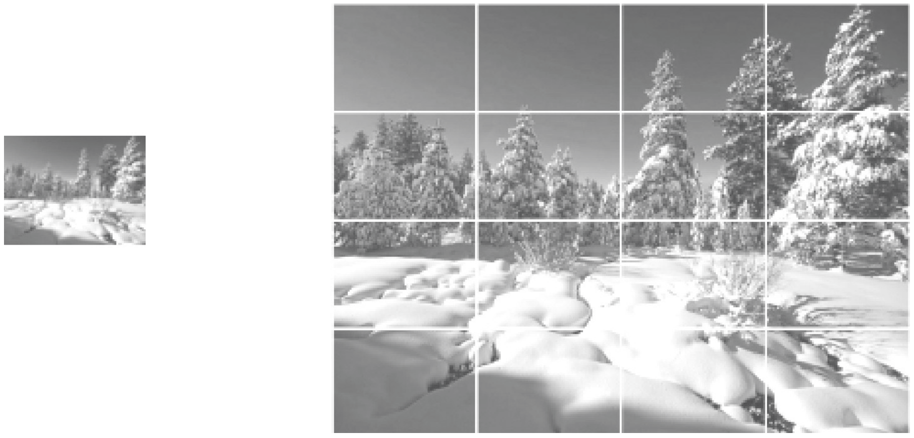
$$|\text{lado de ABCD}| = k\,|\text{lado de A'B'C'D'}|,$$

expresión que responde al modelo: $y = k \times x$.

¡Otra vez la función de proporcionalidad directa!

Esto se aplica a la ampliación de fotos, mapas, etc., y también al proceso inverso, o sea la contracción, al «achicamiento». Se utiliza el mismo factor para afectar las direcciones horizontales, verticales y oblicuas, ya sea para realizar ampliaciones ($k > 1$) o contracciones ($k < 1$). El valor de k, o sea el factor de la función de proporcionalidad, se denomina en general *factor de escala*. Así, cada segmento, cada arco de curva, se transforma en otro cuya longitud es k veces la del original.

Figura III.18. Uso de las proporcionalidades



Por ejemplo, en la foto más grande el factor de escala es 4.

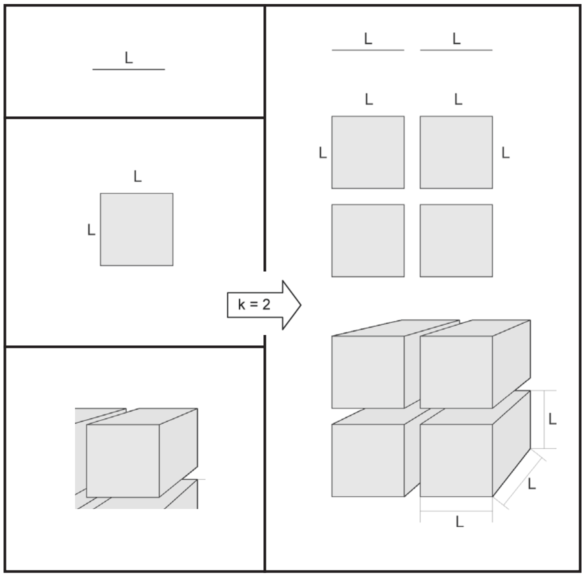
Cada arco de curva, cada segmento en la foto mayor, tiene una longitud 4 veces más grande que la original.

¿Qué pasó con el área? Se puede observar que la foto original ocupa uno solo de los rectángulos en que puede dividirse la ampliada. Luego, el área ha aumentado 16 veces. Es decir, el factor de escala es 4 y el área es 4^2 veces el área de la foto original. Se puede generalizar: si el factor de escala es k el área será k^2 veces la original.

¿Qué pasará con el volumen?

Observemos aplicando el factor de escala 2:

Figura III.19. Factores de escala



Se puede concluir: para las longitudes obtuvimos dos segmentos de longitud igual a la del original; para las áreas cuatro cuadrados de igual área que el primitivo, o sea un cuadrado cuya área es el cuádruple de la original, es decir 2^2. Para el volumen cada *lado l* del cubo se duplica y el volumen del cubo que se obtiene es $2\,l \times 2\,l \times 2\,l$, o sea $2^3 \times l^3$, es decir 8 veces el original.

Si en lugar de $k = 2$ consideramos una k cualquiera, lo que obtendremos es:

$L = k \times l$, donde L es longitud transformada y l es longitud original.
$A = k^2 \times a$, donde A es área transformada y a es área original.
$V = k^3 \times v$, donde V es el volumen transformado y v es el volumen original.

Actividad III.7

1. Pensamos que este tema tiene subyacentes dificultades que es necesario aclarar. Para ello, es conveniente sugerir a los alumnos las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el área del rectángulo de lado 3 cm y altura 2 cm? Realice un dibujo.

b) Si aplica a los lados un factor de escala 1/2 ¿cuál será el área del polígono resultante? Dibújelos.

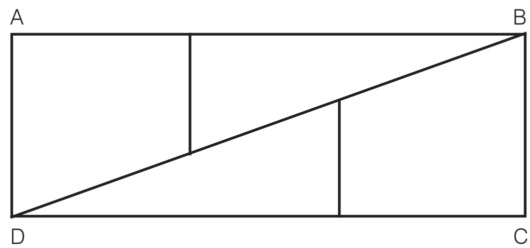
c) ¿Cuáles son las dimensiones de los lados de un rectángulo semejante al dado cuya área es la mitad de la correspondiente a la pregunta a?

2. Releve los errores cometidos por los alumnos y discuta este tema con ellos. Sería conveniente también realizar esta actividad con colegas para poder extraer una conclusión.

Actividad III.8

Se tiene un rectángulo con las siguientes dimensiones: 21 cm x 8 cm. Se realizan en él los siguientes cortes:

Figura III.20. Esquema correspondiente a la actividad III.8



Si es posible, armar con las piezas un cuadrado. Se sugiere trabajar con papel cuadriculado.

a. ¿Cuál es el área del rectángulo original?

b. ¿Cuál sería el área del cuadrado?

c. ¿Cuál es el área de la figura que obtuvo? ¿Obtiene el mismo valor que en *b*?

Actividad III.9

Este trabajo con longitudes, áreas y factores de escala es fundamental, entre otras cosas, para el trabajo con mapas y planos. Así, el cartógrafo, geógrafo, arquitecto, ingeniero, diseñador, mueblero, o un empleado en cualquier empresa que necesite trabajar con ellos, debe saber estos temas de matemática, y no solamente el ingresante a la Universidad.

Por ello, sugerimos lleve al aula la siguiente actividad:

1. Tomar un mapa de la provincia de Santa Fe, calcular sobre el mismo la distancia entre esta ciudad y Rosario. Expresar en cm y mm.

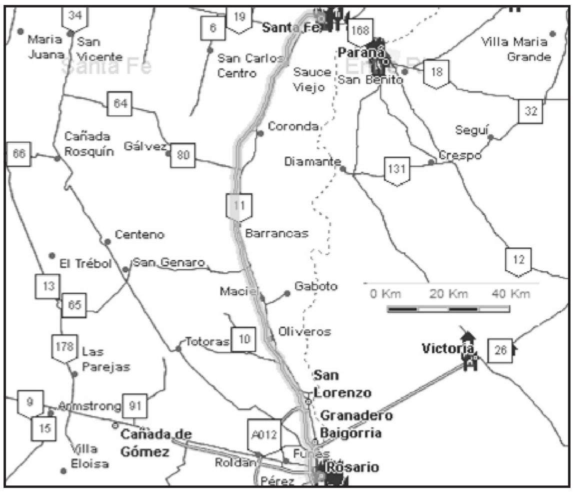
2. Dar la distancia real en km entre ambas localidades teniendo en cuenta la escala que figura en el mapa sobre el cual está trabajando.

3. Determinar como en el inciso 1 la distancia de su localidad a Buenos Aires en un mapa carretero de Argentina.[2]

4. Averiguar la distancia entre ellos en carteles o estaciones de servicio y analizar si el factor de escala del mapa es correcto. ¿Qué puede influir?

También puede trabajar averiguando el factor de escala de una misma letra cuando imprime un trabajo desde una computadora variando el tamaño de fuente, en su procesador de texto; por ejemplo la A, cuando pasa de tamaño 12 a 26.

Figura III.21. Esquema correspondiente a la actividad III.9



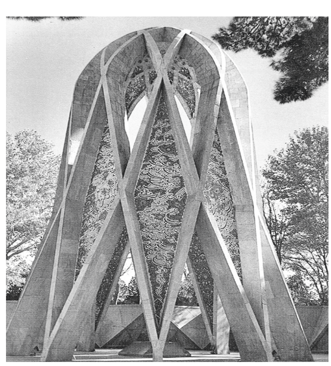
III.7. Las funciones y la relación con la «*x*»

En la función de proporcionalidad $y = kx$ que, según ya hemos visto, modeliza a muchas situaciones y tiene como dominio más amplio posible a todos los números reales, aparece la letra *x* como variable.

A propósito, ¿por qué en todas las funciones no sólo en la de proporcionalidad directa o, para decirlo con más precisión, en casi todas, usamos la *x* como variable independiente?

Como siempre viene bien conocer el origen de ciertas cosas que por costumbre utilizamos.

Figura III.23. Tumba de Omar Jayyam en Nishapur



Un gran matemático, además reconocido astrónomo y genio literario, y que ha trascendido hasta hoy como filósofo, llamado Omar Jayyam, hizo su tesis en matemática en el año 1070 y la denominó *Tesis sobre demostraciones de Álgebra y comparación*, y fue el introductor de la x como incógnita o variable independiente.

Jayyam en sus libros llamaba *cosa* a la incógnita que en árabe se dice *shay*; y cuando se realizó la traducción al castellano se lo hizo como *xay*; y con el paso del tiempo quedó sólo la x perdiendo el resto de las letras. Así, en la expresión $x^2 + 1$, Jayyam escribía: *cosa al cuadrado más uno*. Precisamente el 17 de mayo de 2006 se celebró en la Universidad Complutense de Madrid el primer seminario para la presentación de la vida, pensamiento y obra de la polifacética figura de Omar Jayyam que, tal como decíamos, fue poeta, astrónomo, matemático y filósofo que vivió entre los siglos XI y XII, y más precisamente entre los años 1048 y 1131.

Jayyam fue el primero que describió el desarrollo de la potencia de un binomio con exponente natural, y estableció, por primera vez en la historia de las matemáticas, la idea de que las fracciones podrían constituir un campo numérico con propiedades más amplias que en el campo de los números naturales, único conocido entonces, y que databa desde los griegos.

Lo interesante es ahora conocer un poco de su historia que, si bien es muy antigua, no deja de ser muy actual.

III.8. Una historia antigua, pero... actual

En la segunda mitad del siglo XI, en Khorasan, provincia de Siria, hoy Irán, vivía el Imam Mowaffak de Neishabur, quien dirigía en sus estudios a jóvenes que se destacaban.

Así estudiaron con él tres jóvenes que se hicieron muy amigos, casi inseparables: Abdul Kassem, Hasan Ben Sabbah y Omar Khayyam o al–Jayyam. Existía la creencia que un pupilo del Imam tenía grandes posibilidades de hacer luego fortuna. Hasan, uno de ellos, propuso un día a sus dos amigos hacer un voto: si uno de ellos hacía fortuna o alcanzaba la gloria debía compartirlo con los otros. Sus amigos accedieron y realizaron el voto.

Abdul Kassem fue el primero en triunfar, pasó a ocupar el cargo de gran visir de un sultán y adoptó el nombre de Nizam u'l Mulk. Recordando el juramento realizado con sus amigos les ofreció un cargo a los dos restantes. Omar lo rechazó, sólo le pidió medios para seguir estudiando. Nizam le hizo construir un observatorio y le otorgó una renta.

Hasan, al contrario de Omar, aceptó el cargo y comenzó a conspirar al poco tiempo contra Nizam para quedarse con su puesto. Cuando Nizam se enteró intentó castigarlo y como Omar intercedió Hasan sólo fue desterrado.

Muy enojado, Hasan se convirtió en cabeza de un partido de fanáticos quienes, en el 1090, conquistaron el castillo de Alamunt en el área montañosa al sur del mar Caspio. Usando el castillo como fortaleza y centros de raid, asaltaban las caravanas. Hasan y su banda esparcieron el terror a través del mundo mahometano, por ello fue conocido con el nombre de «Viejo de las Montañas». Se piensa que la palabra «asesino» deriva de su nombre o de *hashish* (el hachís), la hierba que tomaban y bajo la cual la banda cometía sus desmanes.

Entre las incontables víctimas de la banda, se encontró su viejo amigo escolar, Nizam u'l Mulk.

En contraste a la turbulenta y destructiva vida de Hasan, la de Omar fue tranquila y constructiva. Vivió pacíficamente y contribuyó notablemente tanto a la literatura como a la cultura científica de su tiempo.

Entonces, de los tres estudiantes, uno fue un excelente administrador y benefactor, otro un miserable renegado y asesino y el tercero un devoto escolar y creador, el único que trascendió su época y al cual hoy se sigue recordando.

Actividad III.10

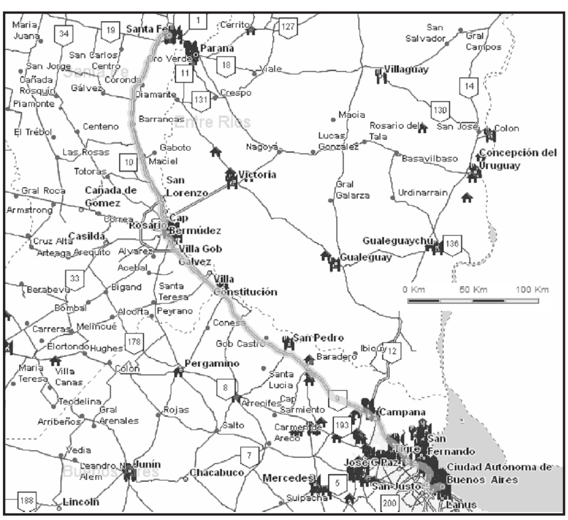
---

1. Discuta con los alumnos esta historia, analice si les gustó oírla, si verdaderamente de ella se puede sacar alguna conclusión para nuestra realidad actual. ¿No es una buena historia para trabajar interdisciplinariamente con el tema de la drogadicción, de la amistad, de la honradez y de la ambición, entre otros?

2. ¿Y qué tal si discutimos un poco la actividad científica y política de Pitágoras?

Ya hemos trabajado con la ampliación de mapas y fotografías, pero... retomemos el tema.

Figura III.22. Esquema correspondiente a la actividad III.10



III.9. La ampliación, la reducción y el porcentaje

Consideremos una fotografía con área de 1 dm^2 y ampliémosla tres veces, o sea su largo y su ancho son tres veces mayores. Su área es ahora de 9 dm^2. Podemos decir con exactitud que el área de la fotografía ampliada es nueve veces mayor que la de la fotografía original, o bien que el área de la fotografía ampliada es 8 dm^2 más grande que la correspondiente a la foto original.

Ahora bien, muchas veces el resultado quiere expresarse como un incremento porcentual. Así, un aumento de 1 a 9 en el área es un incremento del 800 % en la misma, ya que 1 dm^2 es nuestro 100 % inicial y para llegar a 9 dm^2 debió aumentar 8 dm^2, o sea 800 %.

Podemos de manera similar expresar que la primera fotografía de área 1 dm^2 es una reducción de aquélla cuya área era de 9 dm^2. Entonces podemos decir que la fotografía reducida tiene «1/9 del área de la mayor» o que «la reducción del área es del 89 %».

También debe tenerse cuidado con las expresiones como la siguiente: «gracias al descubrimiento de la vacuna específica los casos graves de la enfermedad XX descendieron de un 80 % a un 40 %». La gravedad ha disminuido 40 puntos porcentuales, pero éstos son el 50 % de los 80 originales.

Actividad III.11

Ya que estamos con porcentajes nos interesaría determinar si nos conviene una compra donde nos hacen el 30 % de descuento sobre los precios de oferta «fuera de temporada», que son el 80 % del real, de otra oferta donde debemos pagar el 80 % del producto que está a 30 % de su valor real.

Ahora analizaremos un texto extraído de un libro que, al decir de los alumnos, «no tiene desperdicio» y su nombre es precisamente Las matemáticas en la vida cotidiana de varios autores, donde el director del proyecto que lo produjo era Salomón Garfunkel y que figura en la bibliografía final.

(En 1976, el coste medio de una casa en Madison [Wisconsin] era de 38 323 dólares, aproximadamente un 108 por ciento menos que [en 1990]. [Madison Business (marzo de 1991):38].)

Parece como si el valor de las casas en Madison hubiera subido sustancialmente, pero ¿habría alguna razón para dudar de esta afirmación? ¡Por supuesto! Un lenguaje pobre o impreciso puede tergiversar el significado, y un autor puede querer exagerar o minimizar cierto crecimiento o decrecimiento. (495)

Este es el análisis del autor:

El coste promedio de una casa en Madison en 1976 era de 38 323 dólares, mientras que en 1990 era de 80 500 dólares. Los 80 500 dólares representan el 100 % del coste promedio de una casa. Para obtener el 108 % multiplicamos 1,08 por 80 500 para obtener 86 940 dólares. Por tanto «un 108 % menos» debería ser 86 940 menos que el coste promedio, esto es 80 500 − 86 940 = −6 440 dólares. Esta respuesta no puede ser correcta. El escritor ha usado el lenguaje incorrectamente. ¿Qué debería haber escrito para ser claro y correcto? El coste en 1976, 38 323 dólares, es más o menos 0,48 veces 80 500 (38 323 = 80 500 x 0,48), o el 48 % de 80 500; por tanto el escritor podría haber dicho «alrededor del 48 % de lo que costaban en 1990» o «*aproximadamente el* 52 % menos que en 1990». Si el escritor hubiera querido usar el coste de 1976 como base (esto es, el 100 % para el cálculo)? El precio de 1990 sería alrededor de 2,10 veces el coste de 1976, de manera que el coste de 1990 es «el 210 % del», o «el 110 % más que» el precio de 1976.

Actividad III.12

Es importante que cada docente trabaje con sus alumnos el ejemplo anterior, pero adaptándolo previamente a la realidad de su región teniendo en cuenta la unidad monetaria, la ciudad y los años en que usted decide trabajar y pueda observar y hacer observar lo importante que es la precisión del lenguaje. También puede esta actividad convertirse en un proyecto de investigación con los alumnos, de manera tal que ellos investiguen los precios que se analizarán.

Estos ejemplos de la vida real agudizan en el alumno su poder de observación y le muestran un aspecto muy importante de la matemática, aquel que le permite «entender» la vida diaria, comprender mejor las noticias que lee en los periódicos ¡y por qué no! no dejarse engañar.

III.10. Una geometría no tan conocida

En este libro, en distintos capítulos y tratando diferentes temas, se ha hablado de geometría, números, álgebra, complejidad (educativa, del hombre, de la matemática). Se piensa que tal vez son todos temas distintos, que atañen más bien a situaciones distintas, pero no es así.

En el capítulo V de este libro se habla de Galileo Galilei, físico, matemático y astrónomo del Renacimiento; además es analizada su frase formulada en 1623 que señala a la matemática como la ciencia del gran libro que es el universo. Pero en 1975, o sea 350 años después, un matemático, Benoît Mandelbrot, desarrolló la noción de *fractal*.

Benoît Mandelbrot nació el 20 de noviembre de 1924 en Varsovia, Polonia, y murió en Cambridge, Estados Unidos, el 14 de octubre de 2010. Desarrolló los conjuntos fractales descubiertos por el matemático Gastón Julia. Con el auxilio de las computadoras pudo trazar los más conocidos conjuntos fractales. Luego realizó un master en aeronáutica en el Instituto Tecnológico de California y regresó a París, donde se doctoró en matemática en 1952; ingresó a trabajar en el centro de investigaciones de IBM en EE.UU., fue profesor visitante en las Universidades de Harvard y el Instituto Tecnológico de Massachussets. En 1987 comienza a trabajar como profesor en Yale. Cuando le preguntaban sobre su trayectoria científica, cuya síntesis se presenta aquí, él la comparaba con las líneas de las costas o las nubes, o sea, ella misma era un fractal.

El nombre de fractal se lo dio a una serie de curvas, raras, «mostruosas» como las llamó Stewart (2007) entre las que se encuentran la curva *copo de nieve*, *el tamiz de Sierpinski* y el mismo *conjunto de Mandelbrot*. O sea, todas ellas son fractales. En ese año, 1975, escribió:

> ¿Por qué la geometría a veces se describe como fría y seca? Una razón se encuentra en su poca habilidad para describir la forma de una nube, una montaña, la línea de la costa o un árbol. Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, la línea de la costa no son círculos, y la corteza no es uniforme ni los rayos viajan en una línea recta. La naturaleza no exhibe solamente un grado mas alto pero si un nivel totalmente diferente de complejidad. (Pettgen, Richter:5)

Figura III.24. Conjunto de Mandelbrot

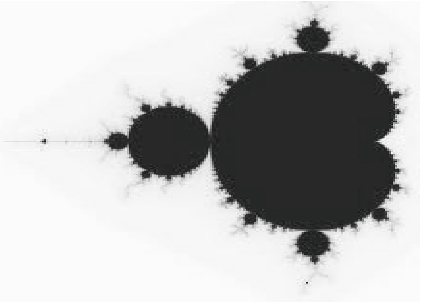
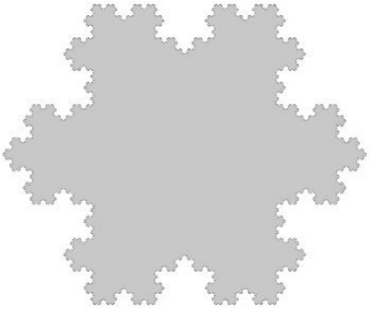


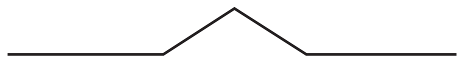
Figura III.25. Curva copo de nieve



¿Cómo se construye esta curva *copo de nieve*?

Muy simple, se toma un segmento, se lo divide en tres partes iguales como el segmento de abajo.

Al segmento central lo sustituimos por dos segmentos iguales a él formando un ángulo.

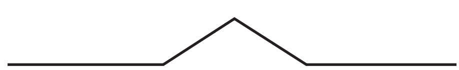


Y eso se repite para cada uno de los cuatro nuevos segmentos.

Figura III.26. Iteraciones que permiten obtener el fractal *copo de nieve*

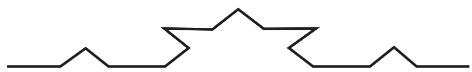
Veamos a continuación qué pasa con la longitud y el área de algunas figuras que se construyen de forma tan especial. Tomemos un segmento y consideremos su longitud 1 para simplificar. Lo dividimos en tres partes iguales, por lo tanto cada parte tiene longitud 1/3.

Sustituyamos el segmento central por otros dos de longitud 1/3 y ubiquémoslo como si fueran los lados de un triángulo equilátero.



La longitud de esta poligonal es $L_1 = 4 \times 1/3$.

Repitamos el procedimiento en cada uno de los cuatro segmentos anteriores; vamos obteniendo poligonales cada vez con más lados, pero siempre con los mismos extremos y cuya longitud va variando. Cada segmento ahora tiene una longitud 1/3 del anterior.



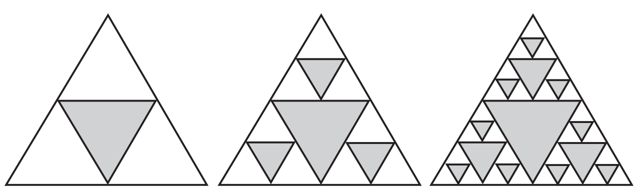
La longitud de esta poligonal es $L_2 = 4 x 1/3x (4 x 1/3) = 4^2 x (1/3)^2$

Así, repitiendo este procedimiento o más precisamente *iterando* al cabo de *n* pasos obtenemos $L_n = 4^n x 1/3^n$

En cada iteración la longitud de la poligonal va creciendo y cuando el número de iteraciones tiende a infinito se obtiene la llamada *curva de Koch*, que es uno de los *fractales* más simples. Si la observamos veremos una curva simple, abierta, no obstante de longitud infinita y que no tiene tangente en ningún punto, ¡un verdadero desorden!

También podemos construir fractales si partimos de áreas, así por ejemplo el llamado *tamiz de Sierpinski* se obtiene extrayendo a un triángulo equilátero otro triángulo equilátero formado por los puntos medios de sus lados y repitiendo este procedimiento en cada uno de los tres triángulos que quedan y así sucesivamente. El área va disminuyendo.

Figura III.27. Tamiz de Sierpinski



Área del triángulo original:

$$A_1 = 3 \text{ x } 1/4$$
$$A_2 = 3^2 \text{ x } 1/4^2$$
En el paso *n* será:
$$A_n = 3^n \text{ x } 1/4^n$$

Nuevamente, como en el caso de la *curva de Koch* cuando el número de iteraciones crece indefinidamente, o sea $n \to \infty$, obtenemos el *tamiz de Sierpinski* cuya área es nula.

Estas curvas y superficies se denominan fractales porque si bien están incluidos en el espacio de dos dimensiones fue necesario inventar un número que «mida» su complejidad y este número se llama «dimensión fractal» porque según varios autores resulta ser fraccionario. No obstante, esta afirmación final será falsa si tenemos en cuenta lo expresado por Mandelbrot, inventor del término «fractal»:

> Una de las características principales de cualquier objeto fractal es su dimensión fractal, que se denotará por *d* y mide su grado de irregularidad o interrupción. No obstante, al contrario de las dimensiones habituales, la dimensión fractal puede muy bien ser fracción simple, como *1/2* ó *5/3*, e incluso un número irracional, como $log4/log3 \approx 1,2618...$ o π. Así, resulta útil decir que para ciertas curvas planas muy irregulares la dimensión fractal está entre *1* y *2*, o decir que para ciertas superficies muy hojaldradas y llenas de convoluciones la dimensión fractal es intermedia entre *2* y *3*, y finalmente definir polvos sobre la recta cuya dimensión fractal está entre *0* y *1*.
>
> En algunas obras matemáticas que se refieren a ellas, se dice que ciertas figuras conocidas, que yo incorporo entre las fractales, tienen «dimensión fraccionaria». Este término, sin embargo, es confuso, pues no suele calificar, por ejemplo, el número π de fracción. Más aún, hay entre las fractales no pocos objetos irregulares o interrumpidos que satisfacen $D = 1$ o $D = 2$, y sin embargo no se parecen en nada a una recta, ni a un plano. Una de las finalidades del término «fractal» es eliminar las dificultades generalmente asociadas al término fraccionario.

Precisamente la dimensión fractal de la *curva de Koch* es: $S = log4/log3 = 1,2619...$

Y la del *tamiz de Sierpinski* es: $S = log\ 3/log2 = 1,5845...$

Estos números son evidentemente no fraccionarios; es más: son irracionales. La forma en que se obtiene esta dimensión y algo más sobre fractales son buenos temas para hacer cursos que permitan actualizar nuestros conocimientos.

• *Para finalizar*

Lo que sigue a continuación es una conferencia acerca de la Geometría que el Dr. Claudí Alsina, catedrático de la Universidad Politécnica de Barcelona, pronunció en una reunión de la Olimpíada Matemática Argentina y que por su belleza vale la pena leer.

III.11. «La Geometría y el asesinato en el “MATHEMATICS EXPRESS”». Conferencia del Dr. Claudí Alsina[3]

«¿Geometría?»

A veces la duda ofende

PRIMERA PARTE

Hércules Poirot pidió una habitación con baño. Luego se aproximó al mostrador del conserje y preguntó si había llegado alguna correspondencia para él. Había un telegrama esperándole. Sus cejas se elevaron alegremente a la vista del telegrama. Era algo inesperado:

«*Sírvase venir en seguida*»

—Si que es una complicación —murmuró Poirot, consultando su reloj—. Tendré que reanudar el viaje por el mundo de la Matemática esta misma noche. ¿A qué hora sale el tren?

—Muy pronto, señor.

Un poco más tarde cuando Poirot llegó a la estación llamó a los mozos e hizo cargar su equipaje en el coche cuyas placas proclamaban su destino: LA MATEMÁTICA DEL 2000.

—Tengo entendido que viaja mucha gente esta noche, ¿es cierto?

—Es increíble señor. ¡Todo el mundo ha elegido esta fecha para viajar!

El «Mathematics Express» iniciaba su viaje en aquel momento. Pronto Poirot penetró en su departamento de indagaciones y se metió en la cama, leyó durante media hora y luego apagó la luz. Se despertó al cabo de un rato al haber frenado el «Mathematics Express» de forma contundente. Poirot salió de su departamento y fue a preguntar el motivo de tan brusca parada.

—Un alud de reformas curriculares y cambios, señor. El tren está detenido y Dios sabe cuánto tiempo estaremos aquí. Recuerdo una vez que estuvimos varias décadas.

—¿En dónde estamos?

—Entre la Matemática algorítmica y la del año 2000, pero aún muy cerca de la Matemática estructural, señor. *Bon soir, monsieur*.

—*Bon soir, mon ami*.

Poirot se acomodó de nuevo en su departamento de indagaciones dispuesto a dormir aunque la falta de vaivén no le ayudara a conciliar el sueño. Pronto fueron a despertarle.

—¡Ah, mi buen amigo! Tenemos necesidad de usted.

—¿De qué se trata? —preguntó Poirot.

—Cosas muy graves, amigo mío. Primero este alud de reformas... esta detención. Y ahora...

Hizo una pausa

—Y ahora la Geometría aparece muerta en este tren...

—¡Bonita situación! —comentó Poirot—. Sí que es una situación difícil.

—Y aún puede empeorar. Aquí le presento al doctor del tren, monsieur Poirot... el doctor opina que la muerte ocurrió hacia la década de los setenta.

—Es difícil puntualizar en estos casos —aclaró el doctor—; pero creo poder decir que la muerte ocurrió entre la década de los setenta y la de los noventa.

—¿Cuándo fue descubierto el crimen? —preguntó Poirot.

—Justo en el momento de detenerse el tren. Fue todo muy confuso —aclaró el inspector ferroviario.

—Y ha sido un crimen tremendo -añadió el doctor- han sido por lo menos trece agresiones... si algo queda claro es que no puede tratarse de un suicidio.

—¡Por lo visto no ha sido un crimen científico! —comentó Poirot.

—Lo más anticientífico que puede imaginarse. Los golpes fueron descargados al azar. Algunos causaron apenas daño. Es como si alguien hubiese cerrado los ojos y luego, en loco frenesí, hubiese golpeado a ciegas una y otra vez.

—Desde el alud de reformas que ha hecho parar el tren —dijo Poirot meditativo— nadie ni nada ha podido escaparse. Así pues el asesino continúa entre nosotros. ¡He de resolver este caso!

Acompañado del doctor, Poirot se dirigió al lugar del crimen para examinar con detalle cualquier pista que pudiera aportar un poco de luz al asunto. Algunos elementos desperdigados por el suelo, constituían posibles pistas: un pañuelo con las iniciales N.B., una regla y un compás, el tratado de álgebra abstracta y un cubo de Rubick. En la pared una pintada en negro realizada con *spray* donde aparecía un diagrama.

Poirot empezó a hablar con repentina nerviosidad.

—¿Y la víctima? ¿Qué papel desempeña en todo esto? ¿Qué hizo? ¿Gritó? ¿Luchó? ¿Pidió ayuda? ¿Se defendió?

En este sentido nadie había oído nada... o al menos, nadie dijo haber oído algo.

Lleno de dudas Poirot decidió interrumpir la búsqueda brevemente y se dirigió con el doctor al vagón restaurante. Entre bocado y bocado Poirot evocó al doctor el recuerdo de un caso muy antiguo donde la Geometría, ahora víctima, había tenido cierto protagonismo.

—Recuerdo —empezó a divagar en voz alta Poirot— que hace muchos años la víctima protagonizó una serie de sucesos singulares. Ella durante siglos y con la ayuda de Euclides había sido la reina de las Matemáticas. Pero con el tiempo empezaron a surgirle alternativas que con su mismo nombre de pila tuvieron apellido diferente. La diferencial, la cartesiana, la proyectiva, la descriptiva, la algebraica, las no–euclídeas, la integral,... hasta Félix Klein intentó salvar la situación a base de ver en las raíces familiares aquello que quedaba invariante. Pero a pesar de este esfuerzo, bien es verdad que al llegar al siglo XX nuestra víctima ya no era ni mucho menos lo que fue durante siglos. Parece que ahora no obstante los acontecimientos se han precipitado y justo cuando estamos ya en el viaje directo al 2000, ella ha sido la gran víctima. Creo que lo mejor que podemos hacer es proceder a interrogar a todo el tren.

SEGUNDA PARTE

El tren seguía parado. Aún no se habían podido esclarecer los efectos del alud de reformas. Mientras tanto Poirot no descansaba, procediendo a interrogar a todos los sospechosos, anotando en sus fichas aquello que le parecía más sobresaliente o posiblemente relevante. Estas fueron sus anotaciones:

1. LA CELESTIAL CORPORATION: Súbdito que vive en el cielo. En su departamento del tren hay ilustres viajeros que no se hablan entre sí, y si se hablan no se entienden.

Móvil: Intereses inconfesables de protagonismo. Solicitudes de becas y ayudas.

Coartada: La víctima fue en origen su propia creación.

Pruebas contra ella: Objetos sospechosos en todo el departamento. Sobredosis de grupos por el suelo. Se reúnen cada cuatro años para conspirar en el Congreso Internacional de Matemáticas.

Opinan que Euclides nunca hubiese ganado la medalla Fields.

2. NICOLÁS BOURBAKI: Súbdito francés, litera número 1, primera clase, en el departamento de Matemática estructural.
Móvil: Posiblemente pudiera derivarse de sus pésimas relaciones con la víctima.
Coartada: Desde la década de los ochenta, no había estado activo ni popular como así lo atestiguaron muchos pasajeros.
Pruebas contra él: el pañuelo con las iniciales N.B.; la ausencia de dibujos en sus libros demostrando, por negativa, un singular desprecio hacia la víctima.
3. FORMALIZACIÓN INC. AND SONS: Súbditos lógicos. Desde que subieron al tren han pretendido ir en el primer vagón.
Móvil: Celos por falta de protagonismo.
Coartada: Siempre estuvieron en muy buenas relaciones con la víctima.
Pruebas contra ellos: A menudo han pretendido esconder a la víctima.
4. «MATHÈMATIQUE MODERNE»: Súbdita universal un tanto pasada de moda.
Móvil: Posible actitud pasional y complejo de inferioridad.
Coartada: Situación decadente.
Pruebas contra ella: Actuación cruel contra la víctima a partir de los años sesenta. Aparentando ayudarla la mantuvo secuestrada.
5. EDUCACIÓN MATEMÁTICA: Súbdita obligatoria. Por su departamento han pasado todos los sospechosos.
Móvil: Posible negligencia.
Coartada: Siempre habían mantenido una buena relación.
Pruebas contra ella: Nerviosismo ante los cambios. Deseos de quedar bien. Incapacidad para presentar a la víctima de forma atractiva.
6. COMPUTER COMPANY: Súbdita cibernética. Constituye el departamento más ruidoso del tren. No han parado de moverse por todos los vagones durante todo el trayecto.
Móvil: Posible oferta de una nueva creación a la cual la víctima podría haber molestado.
Intereses monetarios.
Coartada: Ofrece atractivas visiones de la víctima.
Pruebas contra ella: Incorporación de extraños seres marcianos en sus promociones.
7. EDITORIALES S.A.: Súbdita práctica. En su departamento han aparecido posesiones de la víctima.
Móvil: Posible campaña publicitaria de la marca.
Coartada: Incluye bellas fotos de la víctima.
Pruebas contra ella: Aparición del cubo de Rubick, objeto que ha permitido jugar con la víctima sin entender nada de la misma.
8. RAIMUNDO CRONOPIO: Súbdito universitario, posee una cátedra con el nombre de la víctima.
Móvil: Ninguno. Podría darse un deseo de cambiar de silla.
Coartada: Su situación laboral está ligada a la víctima.
Pruebas contra él: Se le ha visto contar cosas insólitas sobre la víctima en grandes pizarras.
Nunca tuvo en sus manos un poliedro.

9. JOSÉ PÉREZ: Súbdito nacional de enseñanza secundaria.
Móvil: El sospechoso ha dado siempre muestras de nerviosismo e inseguridad ante la víctima en su apretadísimo programa de acelerada impartición.
Coartada: Sigue los libros de texto aprobados oficialmente.
Pruebas contra él: Aparecen miles de testigos dispuestos a declarar su total ignorancia sobre la víctima y su posible secuestro por parte del sospechoso.
10. ANITA CASIOLI: Súbdita en una escuela, maestra de enseñanza primaria.
Móvil: Ninguno.
Coartada: Realmente nunca conoció a la víctima.
Pruebas contra ella: El diagrama aparecido en el lugar de los hechos.
11. AUTORIDADES: Organizadores de los súbditos. De sus departamentos en el tren acostumbran a salir muchos papeles reformadores pero poco papel moneda.
Móvil: Posible desconocimiento de lo que esta haciendo.
Coartada: Ellas sólo organizan. Nunca entran en clase.
Pruebas contra ellas: Confían más en los profesionales de la cola del tren que en los maquinistas.
12. FAMILIA S.L.: Súbditos agresivos muy celosos de su departamento.
Móvil: Posible pánico ante el fracaso escolar.
Coartada: Ellos no saben ni han visto nada.
Pruebas contra ella: No colabora en general con las autoridades.
13. JUANITO GARCÍA: Súbdito escolar. Viaja por obligación. Se apearía a la primera ocasión posible.
Móvil: Tendencia a la ley del mínimo esfuerzo.
Coartada: No sabe nada, nunca tuvo ni idea de nada sobre la víctima.
Pruebas contra él: Se le ha visto arrancar páginas de textos donde aparecían imágenes de la víctima. Cuando se pronuncia el nombre de la interfecta acostumbra a bostezar.
La labor de los interrogatorios había dejado muy fatigado a Poirot. Tomó una cena ligera y se retiró a descansar. Aquella noche no obstante Poirot no podría, como en tantas otras ocasiones, conciliar el sueño.

TERCERA PARTE

A la mañana siguiente Poirot se levantó de buen humor. Sin pérdida de tiempo mandó convocar a todos los del tren en el vagón comedor. Todos llegaron y tomaron asiento en torno a las mesas. Unos más y otros menos tenían la misma expresión: una mezcla de expectación y temor. Poirot se aclaró la garganta.
—*Monsieurs et madames*. Estamos aquí para investigar la muerte de la Geometría. Hay dos posibles soluciones para el crimen. Las expondré a las dos.
Poirot lanzó una significativa mirada a los presentes y prosiguió.
—Hay una primera posible solución al crimen. Seguramente no ha habido tal crimen y se trató sólo de una muerte natural, por simple vejez. Eran muchos siglos de vida intensa, fueron muchos sus enamorados, sus esposos y sus hijos. Seguramente a la geometría le faltó la juventud necesaria para emprender nuevas aventuras. Así el crimen realmente no lo sería.

Se oyó un cierto respiro entre los presentes a la vez que el doctor movía la cabeza, dudando de la solución.

—Pero hay otra solución posible —prosiguió Poirot— y es la siguiente. La idea me vino al final de los interrogatorios. Era una coincidencia muy grande que tantos sospechosos de todas las nacionalidades, clases y edades viajaran hoy, precisamente, en el mismo tren. No podía haber casualidad, sino designio... el asunto se me apareció con una claridad meridiana. Lo vi como un mosaico perfecto en el que cada trozo desempeñaba la parte asignada. Cada parte entró por turno en el mundo de la Geometría y descargó su golpe. Y fueron todos. Los unos con maldad, los otros por simple ignorancia. Así nadie sabría jamás quien fue en realidad el culpable... yo creo que esta segunda solución es la más plausible aunque sugiero que sea la primera solución la que expliquemos al mundo.

- Entonces -dijo Poirot-, como ya he expuesto mi solución ante todos ustedes, tengo el honor de retirarme completamente del caso...

FIN

Agatha Christie gustó siempre acabar sus narraciones con el brillante esclarecimiento de los hechos sobre la base de la sagacidad de Poirot. Pero para nosotros, gente positiva de la Educación Matemática, sería triste acabar aquí. Intentemos dictar unos veredictos y unas sentencias en relación con el caso que nos ocupa.

A la vista de los argumentos aportados por Poirot la primera solución queda desestimada por ingenua. Así pues aceptando la segunda solución como buena queda clara la intervención de todos los sospechosos en la muerte de la Geometría:

1. Se considera a la Celestial Corporation culpable de asesinato con el atenuante de inconsciencia. Se la condena a poner ejemplos concretos de Geometría en todos sus escritos.
2. Se considera a Nicolas Bourbaki culpable de asesinato en primer grado. Queda condenado a reeditar sus libros con dibujos, cómics y chistes.
3. Se considera a la Formalización Inc. and Sons culpable de homicidio. Deberá durante un largo período no inferior a una década, redactar los escritos en verso y en el caso de incluir símbolos, estos deberán ser en colores variados.
4. Se considera a la Mathèmatique Moderne culpable de homicidio. No obstante dada su avanzada edad y drecrepitud se la exime de castigo alguno.
5. Se considera a la Educación Matemática culpable por negligencia. Deberá incluir siempre bellos apartados geométricos en cuanta publicación, congreso o clase organice.
6. Se considera a la Computer Company culpable de homicidio con el agravante de robo. Por ello queda condenada a no poder vender productos que no contengan, en parte, elementos geométricos.
7. Se considera a las Editoriales S.A. culpables de recortes deshonestos. Deberán editar guías geométricas y regalar con cada ejemplar un poliedro arquimediano cuyo diámetro no será inferior a 50 cm.
8. A Raimundo Cronopio se le considera culpable de no hacer una Geometría entendible. Por ello deberá hacer durante un mes de cada curso clase de Geometría en régimen de taller y sin pizarra.

9. Se considera a José Pérez culpable de aceleración y olvido. Deberá dedicar dos meses de cada curso a enseñar Geometría realizando visitas, excursiones y juegos en el patio sin seguir libro de texto alguno.
10. Se considera a Anita Casioli culpable en el sentido de que el desconocimiento de la ley no exime de su cumplimiento. Se la anima a que recupere el tiempo perdido y que se obligue a explicar cuentos geométricos y hacer construcciones manipulativas.
11. Se considera a las Autoridades culpables de homicidio involuntario. Deberán financiar un laboratorio de Geometría en todos los centros bajo su jurisdicción.
12. A la Familia S.L. se la considera culpable por inhibición con el agravante de nocturnidad.
Queda obligada a decorar su biblioteca con figuras de colores.
13. A Juanito García, por ser menor de edad, se le exime de toda responsabilidad. Pero se le anima a que sepa descubrir la belleza geométrica y a que ponga música a cuanto resultado se le aparezca delante.
Todo esto parece ya suficiente.
—Ring, Ring, Ring —suena un teléfono.
—¿Sí? ¿Diga?... ¿Cómo? ¿Que no ha muerto?... ¿Pues dónde está ahora?... Ya, la Geometría está... espere que lo anoto... en nuestros cuerpos, en el paisaje, en nuestras casas,... pero qué alegría me da... ¿y se encuentra bien?... estupendo, mejor que nunca... Ya ha necesitado varios trasplantes... es curioso... le han cambiado letras por dibujos, discursos por talleres... y le han tenido que administrar unos cuantos axiomas con ternura, unos teoremas guapos y unas cuantas demostraciones emocionantes... ¡Gracias por comunicarlo!
Bien, pueden quedarse tranquilos, la Geometría vive... ¡Viva la Geometría!

Actividad III.13

Sugerimos trabajar con los alumnos de los cursos de enseñanza media y con el docente de Lengua esta conferencia. Es un texto de una riqueza, frescura y seriedad muy particular. Tal vez los alumnos se sientan atraídos por él y con esa inventiva que debería ser propia de la juventud puedan representarlo como una obra teatral o tal vez elegir otros temas para este género policial u otro género literario y hacer algo particular.

Actividad III.14

Si las producciones de los alumnos son importantes trate de darlas a conocer como un material propio de su establecimiento.

Notas

1. Guillermo Jaim Etcheverry (Buenos Aires, 31 de diciembre de 1942) médico, científico y académico argentino que fue rector de la Universidad de Buenos Aires (UBA) entre 2002 y 2006.

2. Existe una dirección de Internet donde se puede trabajar con problemas similares a estos, en mapas de todo el mundo: www.maps.google.com

3. Se agradece a la fundación Olimpíada Matemática Argentina la autorización para reproducir en forma completa esta conferencia del Dr. Claudí Alsina, pronunciada en Buenos Aires en 1991.

Capítulo IV
Experiencias. Reflexiones. Debates y propuestas de la coordinadora y algunos tutores

SUSANA FERRERO, BÁRBARA MÁNTARAS, DANIELA MÜLLER, PAULA RICARDI

IV.1. Introducción

En el presente capítulo exponemos y compartimos experiencias de trabajo llevadas a cabo en el marco de acciones de Formación Docente Continua, destinadas a profesores de educación media (Polimodal por aquel entonces) del área Matemática (nivel I y II), durante los años 2004–2005.

Estas acciones se enmarcaron en programas colaborativos entre el Ministerio de Educación de la provincia de Santa Fe, la Universidad Nacional del Litoral (UNL) y a la vez, de ésta con el Ministerio de Educación de la Nación a través de la Secretaría de Políticas Universitarias.

El análisis de las experiencias implementadas en los últimos años (desde 2002 en adelante) respecto de instancias de formación docente dio lugar a algunas indagaciones sobre diversos temas emergentes de la Matemática y de su enseñanza que requerían ser mejorados, con la intención de proponer actividades tendientes a superar inconvenientes detectados en el proceso de articulación.

Los docentes tutores participamos en las sedes de Reconquista, Rafaela, Santa Fe, Gálvez, Emilia y Espín (todas pertenecientes a la zona de influencia de la UNL). Las escuelas involucradas fueron de gestión pública y privada así como modalidades tradicionalmente no incluidas en instancias anteriores: técnicas, agrotécnicas y escuelas de la familia agrícola.

Los encuentros presenciales con los docentes se desarrollaron en Institutos de Formación Docente y en establecimientos escolares que pusieron a disposición sus instalaciones a partir de convenios específicos celebrados para tales fines.

Se estimó la importancia de construir un espacio que posibilitase a los docentes tanto recuperar sus experiencias (socializando y compartiendo las vivencias, ansiedades e inseguridades que enfrentan cotidianamente) como fomentar la reconstrucción de dichas prácticas desde una mirada reflexiva que habilitase la autocrítica procurando integrar el desarrollo de aspectos tanto disciplinares como pedagógicos y didácticos.

IV.2. Las experiencias en contexto: el debate

Cuando se desarrolló el Nivel I, durante el 2do cuatrimestre del año 2004, y como una manera de incentivar a la participación y abrir el debate entre los docentes participantes, se analizaron los siguientes aspectos:

a. Análisis de los errores detectados en la corrección de los ejercicios de los distintos exámenes evaluados, en las instancias de Ingreso a la UNL, de los últimos años, los cuales estuvieron relacionados con:

Números:

- Operatoria con fracciones.
- Operatoria con paréntesis y otros símbolos de agrupación.
- Ecuaciones e inecuaciones simples.

Álgebra Básica:

- Interpretación y aplicación de los resultados obtenidos.
- Factorización de polinomios.

Funciones:

- Resolución de problemas que involucran funciones lineales y cuadráticas.
- El concepto de función y sus aplicaciones.

b. Análisis de otros problemas detectados:

- Falta de hábitos de estudio.
- Poca participación.
- Escaso aprovechamiento de las instancias de consulta para resolver sus dudas.
- Dificultades para identificar sus propios errores.

c. Análisis y reflexión de los docentes:

A tales efectos se les presentó a los docentes tres ejercicios extraídos de algunos exámenes correspondientes a años anteriores para ingresantes a la UNL. Estos constan en la tabla siguiente:

1. a) Resuelve la siguiente inecuación:

$$2(4y + 6) - 15 \leq 5\,(2y + 3) - 15$$

b) Determinar cuál (o cuáles) de los elementos de $S = \{-1, 0, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, 2\}$ satisface (o satisfacen) la desigualdad: $|x-1| > 1$

2. a) Determina la ecuación de la recta que pasa por $(-2, 1)$ y es paralela a $5x + 3y = 15$

b) ¿Cuál de las siguientes es la ecuación de una recta perpendicular a la recta de ecuación $2x - 3y = 6$?

i) $2x + 3y = 6$ ii) $3x + 2y = 6$ iii) $3x - 2y = 6$ iv) $3x - 2y = -6$ v) ninguna de las anteriores.

3. a) Determina las coordenadas del vértice, la ecuación del eje de simetría, las intersecciones con los ejes de coordenadas y la gráfica de:

$$y = -x^2 - 2x - 3$$

b) Desde la azotea de un edificio se lanza un objeto hacia arriba. La distancia d(t), medida en segundos, que hay entre el objeto y el suelo a los t segundos, está dada por:

$$d(t) = -44\,t^2 + 44\,t + 33$$

¿Cuántos segundos demora el objeto lanzado en llegar al suelo?

La actividad por parte de los docentes consistió en leer detenidamente los ejercicios y efectuar un breve análisis individual de los mismos. Luego, para comenzar el debate, se les planteó la siguiente pregunta:

A su criterio, como docente del nivel polimodal: ¿en qué pasos de la resolución de estos ejercicios, sus alumnos cometerían errores y de qué tipo?

Los docentes de las sedes mencionadas, luego de una discusión reflexiva, llegaron a la conclusión de que los alumnos cometerían errores en temas o conceptos tales como:[1]

- Resolución de las desigualdades: pues, consideraron que en general logran un escaso conocimiento de las leyes que rigen a las mismas, como también la no comprensión de la función valor absoluto y sus aplicaciones. Aclararon además que este tema es poco trabajado en la educación media.
- Uso de las nociones geométricas relacionada a la ecuación de la recta y sus posiciones con respecto a otra.
- Función cuadrática, representación gráfica y su relación con la ecuación de segundo grado.
- Consideraron, además, que posiblemente los alumnos tendrían problemas en resolver problemas integrados como los enunciados en la pregunta 3 de la tabla presentada.

Estas reflexiones nos llevaron a proponer nuevas preguntas:

1. Al momento de plantear qué matemática enseñar, nos centramos en ¿los ejercicios, en la teoría, en los problemas?

2. ¿Es suficiente plantear qué enseñar? ¿Qué lugar ocupan el cómo, el para qué y el por qué enseñar matemática?

3. ¿Estos interrogantes bastan para abarcar la problemática?

4. ¿Qué lugar ocupa el contexto sociocultural al que pertenece el alumno en su aprendizaje y de qué modo lo atraviesa?

5. ¿Hay otros aspectos que pueden incidir en la falta de comprensión de los alumnos?

La inclusión de estos interrogantes nos permitió acercar a los docentes a la lectura de textos que integraron la propuesta «Educar matemáticamente»,[2] para contar con mayores herramientas teórico-metodológicas que permitieran analizar prácticas de enseñanza que se desarrollan en las escuelas.

Otro tema que llevó a la reflexión fue el concepto de *Función* en un principio todos los docentes participantes manifestaban manejar en forma cotidiana dicho concepto, pero al enfrentarse con las actividades planteadas comenzaron a surgir debates interesantes, entre los que se puede mencionar:

- La diversidad de opiniones que generó la presentación de distintas definiciones del concepto función (utilizadas en la enseñanza en las últimas cinco décadas).
- Los aspectos que se ligaban con la formación que cada uno poseía.
- La postura teórica de enseñar y de aprender que cada uno sustentaba.

Además, es interesante mencionar el cambio de mirada que provocaron las actividades 5 y 6, páginas 16—17, del libro *Matemática*. (Carrera, Nitti, 2005), en las cuales se trabaja el problema "Pequeño Estudio Matemático" (Chevallard, Bosch y Gascón:291) planteando la racionalización como partida para tratar temas de funciones.

Abierta la discusión con la actividad mencionada, se favoreció el tratamiento de otras cuestiones sumamente interesantes tales como: ¿Qué es la Matemática? ¿Cómo la concebimos? ¿Cuáles son las concepciones que se sustentan sobre su enseñanza?

Las distintas respuestas fueron abordadas desde los materiales compilados en la sección «Educar matemáticamente» del libro citado como base. En él se encuentran textos de los siguientes autores: Guillermo Jaim Etcheverry —un artículo de la revista del diario *La Nación*, ya mencionado en el apartado III.4—, Luis Santaló (*La matemática una filosofía y una técnica*), Cañon Loyes (*La matemática, creación o descubrimiento*).

Proponer la incorporación de Internet como herramienta eductiva nos resultódesafiante. Lo mismo ocurrió con las posibilidades que ofrece para compartir y acceder a la información junto con la oportunidad de que cada vez más población pueda acceder a estas tecnologías.

Algunos docentes se encontraron ante la posibilidad de complementar sus clases ya sea publicando los materiales utilizados o proponiendo algunas actividades complementarias. En la medida en que el desarrollo de Internet fue creciendo, también fue posible agregar otras componentes que brindan la posibilidad de interacción en tiempo real y diferido, incorporar videos, realizar actividades de manera colaborativa, etcétera.

Creímos conveniente generar espacios conjuntos de reflexión sobre contenidos y problemáticas comunes a los profesores de la educación media y de los primeros años de la universidad; además de los encuentros presenciales ya previstos (edición 2004), se incorporó el uso del entorno virtual (edición 2005) como medio de intercambio, enriquecido y potenciado por las diversas experiencias de enseñanza que evocan y comparten entre colegas desde sus propias realidades e idiosincrasias institucionales.

Coincidimos con Barberá y Badía al considerar que es muy positivo que los docentes participen en este tipo de propuestas, pues les permiten conocer cómo funcionan los espacios virtuales que en otro momento podrían ser ambientes en los que les correspondería desempeñarse, ya sea integrándolos como apoyo o complemento de una clase presencial o utilizándolos completamente en forma virtual. En este sentido, consideramos que estas instancias serían una oportunidad para la actualización en contenidos curriculares, el afianzamiento de competencias en el uso de las nuevas tecnologías, el conocimiento y la reflexión sobre nuevas estrategias metodológicas para la enseñanza de los contenidos, y la posibilidad de integrar recursos tecnológicos a sus modos de aprendizaje y de formación a través de entornos virtuales.

Un tiempo importante de los encuentros presenciales se destinó a la entrega y devolución de las actividades que los docentes realizaban en forma grupal. Dicha devolución era acompañada por correcciones y comentarios efectuados en forma individual.

Debemos destacar la disposición y el esfuerzo que realizaron los asistentes para cumplir con las actividades propuestas en estas jornadas, sobre todo teniendo en cuenta que las reuniones se llevaron a cabo los días sábados y que muchos no vivían en el lugar que se establecía como sede. Los trabajos presentados fueron variados y muy ricos en contenido y en diversidad de situaciones planteadas.

Somos conscientes de las distintas situaciones que se producen a diario en las escuelas producto del deterioro de las condiciones de vida y del profundo cambio cultural y social en el que estamos inmersos (los niños y los jóvenes crecen en un mundo cualitativamente distinto del de la infancia de los que hoy somos adultos, las nuevas formas de vinculación que establecen los adolescentes con los adultos nos obligan a generar las condiciones que posibiliten una fluida comunicación para facilitar el aprendizaje que es, sin dudas, el gran reto de estos tiempos).

Aprender es un trabajo, y al revalorizarlo como tal debemos reconocer que la cultura del esfuerzo debe ser uno de los principales componentes de la vida escolar que involucra a instituciones, padres, alumnos y docentes. Entre todos debemos garantizar la formación de jóvenes para una educación a lo largo de la vida, y para esto la función de la escuela debe ser enseñar a aprender.

IV.3. Las experiencias en contexto: el foro de discusión

Los docentes de hoy enfrentamos distintas realidades con las que resulta difícil lidiar; afortunadamente somos muchos quienes buscamos nuevas formas para llegar a nuestros alumnos, para mostrarles que vale la pena el esfuerzo de sentarse a estudiar, de aprender a pensar, de reflexionar junto a sus pares y sentir el placer que produce la búsqueda de estrategias para resolver un problema, descubriendo toda la belleza que encierra la matemática.

La modalidad de implementación de los encuentros entre docentes suscitó interesantes discusiones y la incursión en un entorno educativo virtual generó cierta expectativa y preocupación por parte del equipo de profesores a cargo del desarrollo del curso por cuestiones de diversa índole, fundamentalmente, operativas y didácticas. Las primeras, relacionadas con las dificultades de acceso a la conexión de Internet y la familiarización con el entorno virtual disponible. Las segundas, vinculadas con el esfuerzo de diseñar propuestas que promovieran la participación de los docentes y los animen a un diálogo mediatizado por otros recursos.

Bruner expresa que «una cultura se está recreando constantemente al ser reinterpretada y renegociada por sus integrantes» (2004:128). Según esta perspectiva, una cultura es tanto un *foro* para negociar y renegociar los significados y explicar la acción como un conjunto de reglas y especificaciones para la acción. Si la educación nos prepara para la vida, deberá participar también del espíritu de foro, de negociación, de la recreación del significado. Por todo ello se le asignó gran importancia al foro iniciado con los participantes por internet, porque en él y entre todos, se podían expresar libremente ciertos temas que tenían que ver con los encuentros.

A través del Foro en el Aula Virtual, se concretaron valiosos intercambios que posibilitaron la discusión teórica y la socialización de experiencias. A continuación se transcribe en su totalidad el diálogo entablado en este espacio a partir de la presentación de un tema y de una consigna disparadora para las diversas intervenciones de los participantes.

He aquí la riqueza de las discusiones...

FORO

Tema: *Las demostraciones*

Publicado por DC1

Mensaje:

Considerando del tercer ciclo de la EGB los ejes de contenidos: «Geometría» y «Números y Operaciones»:

1. ¿Qué demostraciones deberían llevarse a cabo? ¿Por qué?

2. ¿Se realizan en el aula esas demostraciones que ha enunciado?

3. Identifique aquellas que no se realizan y señale alguno de los motivos por los que usted supone que ello sucede.

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por Docente participante DP1

Mensaje:

1. De geometría: teoremas como Pitágoras; Thales y propiedades de las figuras de dos y tres dimensiones (semejanza, etc.).

2. No podría generalizar... pero creo que las demostraciones no son habituales en las aulas, y esto depende de nosotros.

3. Las que enuncié en 1 intento hacerlas... no siempre los alumnos pueden seguirlas...

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DC3

Mensaje:

Los alumnos no siguen las demostraciones porque no se han acostumbrado al esfuerzo de retener datos, compaginarlos, hilarlos, ordenar ideas, etc. Pero creo que a veces es porque eso mismo se ha dejado de hacer en el aula, coincido con DP1 al respecto. Demostraciones muy simples como que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 2 rectos, ¿las hacemos en el octavo año, o sólo verificamos la propiedad? Como ese ejemplo hay muchos, no sólo hay que pensar en que no se hacen las demostraciones más complicadas.

Bueno, pero no nos desviemos de la pregunta básica ¿cuáles son las demostraciones que deberíamos dar, aparte de las que mencionó DP1?

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DP2

Mensaje:

1. Creo que las demostraciones sobre ángulos son muy importantes, sobre todo a la hora en que se le solicita al alumno que fundamente sus respuesta. También las demostraciones de las propiedades de la potenciación y de la radicación. Me adhiero a las ya mencionadas y agrego:

a. Las propiedades de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo.

b. Las propiedades de la potenciación y de la radicación. Creo que no hace falta mencionarlas.

2. Desarrollo más las demostraciones del tipo b) supongo que es porque trato más la parte operacional, esto no quiere decir que dejo abandonada la geometría, sólo que quizás no le brindo el mismo espacio, pero desde hace un tiempo a esta parte he ido equilibrando esta cuestión.

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DC3

Mensaje:

Me parece que un tema que se ha dejado de dar en la escuela media y en el que intervienen demostraciones sencillas es circunferencia: ángulos inscriptos, circunscriptos, etc. Además de los puntos notables del triángulo.

En realidad la geometría ha quedado un poco de lado. También me parece que demostrar que la suma de dos impares es par, es sencillo.

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DC4

Mensaje:

Creo que todos damos en octavo año la clasificación y propiedades de los ángulos determinados por dos rectas paralelas cortadas por una secante, pero... ¿nos detenemos para la demostración de por lo menos una de las propiedades?

Además coincido con DC3 en que demostraciones como: «La suma de dos números impares consecutivos es múltiplo de cuatro» son sencillas. Creo también, haciendo un «*mea culpa*», que en parte no damos demostraciones porque nuestra lectura sobre este tema no es muy amplia. Es por ello que busqué en archivos viejos «olvidados» un artículo de Ángel Gutierrez, en que hace referencia a Nicolás Balacheff, que en su tesis doctoral (Balacheff, 1988) introduce una amplia clasificación de las demostraciones, las «pragmáticas», basadas en manipulaciones o en ejemplos concretos, y las «conceptuales», basadas en la formulación abstracta de propiedades matemáticas y de relaciones deductivas entre ellas.

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DP3

Mensaje:

Demostrar las propiedades de las operaciones es muy importante ya que evita que los alumnos aprendan de memoria la forma de cálculo aplicando propiedades, necesitan convencerse de por qué se puede resolver de dos maneras diferentes y por qué no en algunos casos. Particularmente, la propiedad distributiva de la potenciación y radicación, y la no distributiva con respecto a la adición y sustracción, ya que éste es un error tan frecuente que lo siguen cometiendo en cursos superiores.

En cuanto a geometría, las propiedades de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo no son complicadas y se las pueden abordar en 8vo año. A veces se deja de hacerlo por falta de tiempo.

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DC5

Mensaje:

Si reflexionamos acerca de por qué no damos demostraciones en nuestros cursos, sería bueno que intentemos responder por qué no lo hacemos y, además, nos formulemos una serie de cuestionamientos. Por ejemplo:

1. ¿Consideramos demasiado teórica una demostración?

2. ¿Pensamos que debemos privilegiar los problemas dado que «la enseñanza a través de problemas» está tan en boga?

3. De ser así... ¿No podemos pensar que una demostración no es más que un problema sin números y que guiando heurísticamente a nuestros alumnos les estamos enseñando a resolver problemas?

4. ¿Por qué generalmente se hace una separación entre demostraciones, ejercicios y problemas?

5. Un buen ejercicio sería que discutamos cómo resolver como un problema una de las demostraciones que sostenemos que no pueden dejar de darse.

6. Propongo, entonces, que elaboremos una serie de preguntas para que nuestros alumnos sepan deducir como un problema la irracionalidad de raíz de dos.

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DP4

Mensaje:

1. No es que considero demasiado teórica una demostración, más bien observo que cuando a veces intento darle una demostración a los alumnos como ejercicio, ellos ven que hay que trabajar con letras y rechazan de plano el intento. Uno, quizás dos alumnos hacen el intento, se exponen en el pizarrón, pero la mayoría no logra entenderlo o se niega a intentarlo. Supongo que ese desinterés

hace que no proponga muchas demostraciones. Y la mayoría de las veces las hago para que lo comprendan intuitivamente o con ejemplos para que les resulte más sencillo entenderlo.

2. La enseñanza a través de problemas muchas veces es una manera de que los alumnos vean la aplicación del contendido que uno enseñanza, pero también hay negación de los alumnos a resolverlo cuando les parece muy difícil.

3. Es cierto que hay propiedades que son sencillas demostrar en geometría en 8vo año como la que dijo DC4, y admito como DP2 que tiendo a hacerlo en la parte operacional en el polimodal. En 8vo y 9no, si bien trabajo con geometría, me encuentro muchas veces con que los alumnos no manejan los conceptos básicos y estoy, por ejemplo, enseñando cómo usar el transportador, el compás y demás para construir figuras. Por ejemplo, en semejanza de triángulos.

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DC5

Mensaje:

DP4, me parecen muy interesantes tus respuestas. Un tema que sale a la luz es que los alumnos «odian» trabajar con «letras». Sería bueno que se ahondara en el por qué de esto. Si recordás el Módulo I —el material trabajado en el curso el año pasado—, cuando trabajamos con racionalización, uno de los objetivos era mostrar cómo un libro de didáctica con el nivel de Chevallard y los otros autores que lo escriben aun en la ejercitación introducen ejercicios con «letras» para hacer así una «especie de demostración». ¿Deberemos incluir las letras más temprano? ¿Aun en aparentes ejercicios? ¿Tendremos que sacarlos un poco del pensamiento concreto?

Además, en el punto 2 hablás de la enseñanza a través de problemas. Supongo que esos que aparentemente son difíciles son los más parecidos a los problemas de la realidad... ¿creés que hay que seguir insistiendo?

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DC2

Mensaje:

Creo que a veces somos prejuiciosos y creemos que los alumnos «no pueden» y en realidad, si insistimos, podemos tener sorpresas...

Dejo esto picando...

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DC6

Mensaje:

Coincido con DC2, que los alumnos nos dan sorpresa, y más aún cuando trabajamos conceptos que los estudiantes estiman desafiantes y sorprendentes. Y en esto la geometría nos da herramientas fundamentales, porque si bien una de las principales razones por las que, hasta nuestro siglo, se enseñaba geometría era porque su método axiomático favorecía la introducción al razonamiento deductivo, hoy nos podemos plantear: ¿los geómetras clásicos y los modernos usaron métodos menos ortodoxos cuando los consideraron útiles? Y si esto es así, por qué no familiarizarnos, los docentes, con los avances que se han producido en su desarrollo y en el tratamiento de facetas dinámicas de la geometría, y seguramente encontraremos desarrollos que despierten la curiosidad que no logramos desde las demostraciones que tradicionalmente realizamos en las aulas.

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DP5

Mensaje:

Los contenidos de 8vo y 9no son ricos en cuanto a la posibilidad de hacer demostraciones, pero creo que nosotros las dejamos más bien para el nivel polimodal, aunque sabemos que a esa edad pueden comenzar con actividades más formales. Parece que los chicos quedan «pegados» a lo intuitivo, y nosotros nos dejamos vencer por el desgano que manifiestan. Es verdad, cuando ven letras parece que los dispone mal, ¿será que hay que comenzar antes como para que no les produzca rechazo? Personalmente incorporo algunas sencillas: teorema de Pitágoras, ángulos, algunas propiedades de las figuras, propiedades de las operaciones... pero pocas; y creo que a veces los chicos necesitan saber «de dónde salen las cosas».

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DP2

Mensaje:

Más allá de las letras creo que los alumnos le temen a las demostraciones tanto como a las evaluaciones, ya que a mi entender ellos consideran que si no interpretan o «aprenden a raja tabla» las demostraciones, entonces no conseguirán el tan ansiado (por algunos) «aprobado». Todo esto lleva a un desinterés por la clase y por lo tanto nos pone en un terreno poco seguro, con esto no digo que hay que sacar las demostraciones sino que hay que incorporarlas de a poco a través de las consignas o trabajos prácticos en los cuales se vayan generalizando las ideas, como también así introduciendo nuevos temas.

RE: Las demostraciones

Intervenido por DC5

Mensaje:

DP2, tus reflexiones son muy ricas y creo que coinciden con la mías. De ellas deduzco la frase que siempre he escuchado: «las demostraciones hay que estudiarlas de memoria». ¿Por qué? No te preocupes, esto también se observa en la Universidad. Coincidirás que debemos reflexionar sobre nuestras prácticas. Insisto. ¿Los problemas se memorizan? ¿Por qué las demostraciones? Entonces es cierto como decís que hay que ir incorporándolas de a poco y tal vez con una tónica diferente. Como un problema más.

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DP6

Mensaje:

Estamos en foro personalizado (con dos profesoras más) además de este virtual. Coincidimos plenamente con todas las apreciaciones dadas por DP4. En nuestro caso los chicos comienzan a trabajar con letras a partir de 8 y 9 años. Esta forma de trabajo no motiva el interés de los alumnos. La expresión «NO ENTIENDO» comienza a ser cada vez más usada si el docente no guía personalizadamente las actividades propuestas. Al chico no le interesa la abstracción, ni siquiera sabe el significado, sólo trabaja en lo concreto, se niega rotundamente a trabajar de otra manera.

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DP4

Mensaje:

Particularmente preparo alumnos para participar en las olimpiadas, son los alumnos que, claro está, les gusta la matemática. Muchas veces deben demostrar, especialmente en geometría, y de a poco van incorporando las propiedades, haciendo las deducciones y hasta me sorprende en la forma que llegan a ciertas demostraciones.

El CABRI, que es uno de los programas de geometría que se puede utilizar, a veces es otra forma de captar la atención de los alumnos, pero no siempre resulta efectivo.

Nuestros alumnos han nacido en una época donde todo lo solucionan apretando un botón y entonces les resulta bastante abstracto lo que intentamos enseñar. Pero yo recuerdo que cuando iba a la secundaria me aprendía las demostraciones de memoria; recién en la facultad llegué a entenderlas.

No niego que muchas veces los alumnos nos sorprenden, lo que sucede es que uno desea que la mayoría logre desarrollar la creatividad. Pero de alguna manera que no comprendo muchos alumnos tienden a pensar que las matemáticas son para los inteligentes y lleva tiempo hacerles entender que no es así, que si disponen de voluntad y tiempo pueden desarrollar comprendiendo las demostraciones sencillas. Particularmente pienso que los alumnos se niegan porque antes no han construido su pensamiento trabajando con el material concreto, que es lo que luego permite poder visualizar mentalmente los conceptos básicos. Si nunca dibujó, por ejemplo, un trapecio comprendiendo su definición, no podemos pretender que demuestre alguna propiedad. No siempre manejan los contenidos previos, tal vez debemos enseñarles cómo buscar la información que no saben e interpretar lo que leen.

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DC5

Mensaje:

Alejándome del tema aunque no tanto, hoy tuve que explicar en segundo año de Ingeniería Electrónica regresión lineal. La expresión contenía «*x*, *y*, *a* y *b*». Las incógnitas eran «*a* y *b* ¡no *x* e *y*!». Me costó algunos minutos que mis alumnos entendieran el problema que se les presentaba ¡Les había cambiado las letras habituales! Uno de ellos dijo que siempre «*x* e *y*» eran las incógnitas, no habían detectado que en ese momento eran valores medidos, que lo que se quería hallar eran las otras dos letras, ¿son entonces las letras las causantes de tanto problema?, ¿cómo deberíamos proceder?: ¿partir de un caso numérico completo y luego recién generalizar?

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DP7

Mensaje:

DC5, no debés sorprenderte de la respuesta de la recurrencia del uso de la «*x*, *y*,...». Si hacés una exploración sobre la forma de presentación de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas... verás que en toda la bibliografía que existe se usan esas letras. Lo mismo ocurre cuando se empieza a trabajar tempranamente, en EGB 2; con el reconocimiento de la altura de un triángulo... siempre es un isósceles... ¿por qué? Resulta que después cuando aparece un obtusángulo… no saben dónde ubicar la altura. Creo que son presentaciones ostensivas que acarrean muchos inconvenientes. Lo mismo ocurre con la enseñanza de ecuaciones sencillas: si la incógnita siempre aparece de un solo «lado»... ¡cuidado con presentar que ocurra en el otro...! ¡¡¡Profe se equivocó... la puso del otro lado!!!... y yo me quiero suicidar.

Respecto a las demostraciones... debo recurrir a mi lejana y hermosa adolescencia. La primera vez que recuerdo una demostración fue sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Quedé anonadado por tanto orden. Me encantó... tenía 13 años. Creo fui el único que entendió, junto a otra compañera. Es evidente que en el recuerdo que traigo a colación sobre mi primer encuentro con la Matemática no fue ni es transparente para el resto de los alumnos. Hay algo que hace que te «enganche»... pero no sé qué... pues posteriormente me aburrí... algoritmos... algoritmos. Amores y desamores.

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DP8

Mensaje:

Respondiendo al mensaje:

Considero que en el tercer ciclo de EGB deberían realizarse algunas demostraciones como:

* Propiedades de los ángulos alternos internos/externos entre paralelas.

* Propiedades de los ángulos conjugados internos/externos entre paralelas.

* Propiedad de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo.

Es importante trabajar con ellas porque permiten que el alumno pueda encontrar una relación entre lo que sabe y lo que supone, y además, cada propiedad demostrada es una herramienta que será usada en adelante en nuevas demostraciones.

Para llevarlas a cabo es necesario que el grupo de alumnos cuente con hábitos de orden, prolijidad, responsabilidad y estudio, herramientas básicas que le permitan aplicar los conocimientos previos en nuevas demostraciones.

Generalmente se realizan. Si no se dan, es por falta de tiempo o porque el grupo de alumnos no cumple con las condiciones antes mencionadas. Cabe destacar que debido a la etapa de transición por la que está pasando el alumno de este ciclo (lógico–concreto–formal), es necesario el soporte práctico que se logra mediante la demostración en papel y ésta siempre se hace.

Aprovecho para hacer un comentario del curso: está muy lindo y bien organizado. Lástima que a esta altura, los docentes estemos cansados y con tantas pruebas para corregir.

¡FELICITACIONES A LOS DOCENTES!

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DC6

Mensaje:

Quería contarles que el martes pasado, mis alumnos de 3ro polimodal me pidieron que les explicara de dónde salía la fórmula de la resolvente de la ecuación de segundo grado (que ellos usan desde 1ro del poli). Hoy voy a trabajar el tema con ellos igual que si resolviera un problema (como dice DC5). Me sorprendió que la inquietud de un alumno fuera compartida por el resto del curso.

Es cierto que trabajo en una escuela técnica y que algunos chicos ya se están preparando para ingresar a la universidad, pero también es cierto que todos han usado la resolvente sin saber cómo se obtenía durante más de 2 años, y esto no es bueno. Pienso que hay que trabajar más con las demostraciones en el momento en que se introducen nuevos conceptos. Es la oportunidad para acostumbrarlos a operar con letras y para hacer generalizaciones. También es cierto que son muy pocas las demostraciones que se encuentran en los libros de texto actuales, pero... ¿quién no cuenta con algún ejemplar de «las tres señoritas», de Alcántara o de Tapia, por ejemplo?

Desempolvar los viejos libros es volver a las fuentes...

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DC5

Mensaje:

DP7, ¡muy buen observador! Coincido con vos en que son manifestaciones ostensivas. Por ejemplo, deberíamos cambiar las incógnitas usando otras letras, tal vez que hagan mención a datos del problema, demos problemas donde la ecuación que lo resuelve no tenga las incógnitas de un lado sino de los dos, cambiemos el problema para ese fin. Resolvamos problemas que tengan que ver con algún tema y luego demos el teorema, pongamos las letras para poder generalizar, siendo éste un problema más.

¿Podés hacer un ejercicio más de memoria y pensar qué hizo tu profesora para que te enganches? A mí me pasó lo mismo; tuve algunos profesores que me enseñaron a ver mucho más de lo que allí aparecía. Recuerdo uno que con sus preguntas, con su heurística, nos guiaba en el descubrimiento.

Aprovecho este espacio para decirles a todos que la riqueza de estos diálogos virtuales es mayor de la que esperaba.

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DP7

Mensaje:

Gente... he leído todos y cada uno de los mensajes... están muy interesantes. Ahora bien, la cuestión era saber qué hacemos hoy concretamente a la hora de las demostraciones. Al respecto confieso que muy poco en EGB. Claramente coincido con DC6... no existen en la bibliografía corriente... todo es «intuitivo»... todo es «exploración»... ¿de qué?... ¿cómo se explora en matemática?... Si a continuación, en la bibliografía aparece una extensa galería de ejercicios a imitar por el alumno.

Geometría es el ámbito, diría natural, para empezar a hacer demostraciones... pero me parece que lo que hay que atacar es la enseñanza de la ARGUMENTACIÓN... el ¿por qué pensás así? Si el alumno no sabe argumentar... no podrá escribir lo que piensa. Entonces no podrá hacerlo en los cursos universitarios. Quiero decir: primero debe saber argumentar, allí nuestra guía docente es básica, luego debe poder escribir la prueba... para poder llegar al nivel superior que es la demostración.

Pero a las argumentaciones no las pienso en el sentido de los «Elementos» de Euclides, ¿sí?, sino en el de incorporarlas como valor de verdad... en el desarrollo de alguna propuesta. Además pensemos que Euclides no era matemático y su obra es sólo un ejemplo de transposición didáctica de la época... y que fue muy buena... pues muchos aprendimos desde ese espíritu... hasta el lector de estas líneas... ¿no?

Creo que en el nivel polimodal deben estar los orígenes de lo que ya usaron... no importa que lo vean luego; y es más, creo que es una buena oportunidad para abordarlos desde lo histórico, pero no como anecdótico sino como la imposición de una necesidad del hombre ante nuevas preguntas del conocimiento. Les recomiendo la pág. 285 de *Las desventuras del conocimiento científico* de Gregorio Klimovky... está muy bueno; y también *Historia del pensamiento Filosófico y Científico* de Reale, G. y Antiseri, D, el tomo 3... fantástico sobre la geometría no Euclidia.

Para terminar... un mensaje para DC6: ¡¡¡No tengo los libros de las tres señoritas!!!... pues no soy tan jurásico aunque me quiera jubilar.

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DC3

Mensaje:

DP7, ¡¡no cambiás más!! Tenés razón: ¿qué hacemos ahora?

¡¡Coincido con lo de la argumentación!! Tal vez tengamos que pensar en cambiar el tipo de ejercitación que trabajamos con nuestros alumnos. En lugar de que resuelvan, o calculen, pedir que justifiquen; a los de 8vo, con sus palabras, y luego ir exigiendo más rigor, creo que primero tenemos que lograr «hábitos» de análisis, de discusión, de estudio... etc., etc. (que lo fácil es decirlo pero... lograrlo no lo es tanto). De todos modos creo que vale la pena intentarlo.

Luego me parece que las demostraciones serán menos cuestionadas.

RE: *Las demostraciones*

Intervenido por DC6

Mensaje:

Querido DP7, ¡¡¡eso te pasa por ser tan joven!!!

Podemos hacer un trueque, yo te doy los libros de las 3 señoritas (además tengo uno de Cabrera y Médici, para que te mueras de envidia), a cambio de tus jóvenes años...

Ahora en serio, ayer me fue bárbaro con los chicos. Como ves, a punto de jubilarme y todavía me entusiasmo cuando me sale linda una clase...

Volviendo al tema de los libros, en la biblioteca de la escuela seguro que están. Debemos conseguir que nuestros alumnos adquieran capacidades para conjeturar, argumentar y construir sus propias demostraciones. Como dice DC3: «vale la pena intentarlo»...

Decidimos centrarnos en el Foro porque es un espacio que transparenta la modalidad de trabajo y las visiones e intencionalidades que se propuso el equipo al diseñar estas instancias de formación docente continua. En este marco, consideramos que los aportes se pueden sintetizar en los siguientes puntos:

- Discusión sobre la pertinencia de la inclusión de determinados temas, las dificultades con las que se enfrentan o vislumbran podrían suscitarse en el aula.
- Reflexión sobre las estrategias de enseñanza propuestas para el desarrollo de los contenidos. Explicitación de los énfasis, las omisiones, limitaciones —escasez de tiempo, dificultad para realizar recortes.
- Generación de un espacio para la profundización teórica, y compartir materiales de distintos autores.
- Posibilidad de compartir preocupaciones por los prejuicios y representaciones que se evidencian en la práctica educativa a diario tanto en los alumnos como en los docentes y autoridades.

• Intercambio de experiencias, sugerencias u orientaciones para introducir modificaciones tendientes a superar las dificultades relatadas.

El equipo a cargo del desarrollo del curso participó activamente en el diseño de la propuesta didáctica; en el desarrollo de las jornadas de reflexión; en la definición de los contenidos a trabajar a través del aula virtual y en la revisión colectiva de los materiales educativos impresos —elaborados por dos de las siete integrantes del grupo.

En la implementación de las instancias aquí descriptas hubo también algunas dificultades de orden operativo y contextual, como el período del año en que se llevó adelante la experiencia, el corto tiempo en que se produjo la interacción, así como otros inconvenientes atravesados por la conflictiva situación educativa que se enfrentaba a nivel provincial y nacional; no obstante, esos incovenientes se desdibujan a la hora de valorar la cuestiones estrictamente educativas que pretendieron promover lugares comunes para la expresión de las preocupaciones y el desarrollo de líneas de acción consecuentes con las problemáticas identificadas.

IV.4. Reflexiones finales

La producción del equipo, vista hoy a la distancia, exhibe un posicionamiento frente a la educación a partir de explicitar la complejidad del acto educativo entendido como una práctica social y cultural condicionada históricamente, signada por las intencionalidades del educador y de sus alumnos, las teorías pedagógicas en las que se sustentan las prácticas de los docentes. Se entiende a la educación como una tarea dialéctica, conflictiva y contradictoria sobre la que es necesario reflexionar.

La publicación de estas experiencias resultará enriquecedora para la socialización y la difusión de nuevos abordajes en la disciplina. Este esfuerzo de reconstrucción intenta abrir caminos para fomentar una actitud crítica y reflexiva que permita profundizar en los conocimientos y habilitar espacios para la metacognición.

Notas

1. El texto corresponde a los resúmenes de los debates presentados por los docentes.

2. *Articulación General y Disciplinar de Preparación para la continuidad de Estudios Superiores*, Carrera, E.; Nitti, L., MEC–UNL, 2005.

Capítulo V
Un programa con continuidad. Opiniones de los alumnos

ELENA F. DE CARRERA

V.1. Introducción

En el año 2005 se llevaron a cabo estas acciones de articulación con los docentes de las escuelas medias de la zona de influencia de la Universidad Nacional del Litoral, que ya fueron analizadas en capítulos anteriores, y que resultaron de una gran riqueza para ambas partes.

En el año 2006 se desarrolló nuevamente el llamado Curso de Articulación Disciplinar, una de cuyas disciplinas fue precisamente Matemática. Estos cursos fueron y son tomados hasta el presente por alumnos que deseaban y desean ingresar a distintas Facultades o Escuelas de la UNL (estas Unidades Académicas seleccionan las disciplinas que deben repasar sus alumnos en virtud de la carrera en la que se inscriben).

Este curso de Matemática, como curso disciplinar, está acompañado según la carrera elegida de otro también disciplinar, como Química o Contabilidad; no debe olvidarse que la *Matemática es el lenguaje de la Ciencia*, entonces resulta necesaria para todas aquellas carreras de característica científica o tecnológica.

Galileo Galilei (1564–1642), descollante figura del Renacimiento, nació en Pisa y fue el mayor de siete hermanos. Su padre, Vincenzo, fue un músico muy reconocido. Por iniciativa de su padre se matricula en 1581 en la Universidad de Pisa para ser médico, pero es atrapado por el estudio de la matemática y abandona los estudios de medicina. Enseña matemática en Siena y luego en la universidad de Padua. En 1609 construye su propio telescopio, al que va perfeccionando a través del tiempo, dedicándose con ahínco a la astronomía. Gran descriptor del sistema solar defiende a ultranza la teoría del heliocentrismo. Escribe varios libros, enttre ellos *El ensayador* en el que aparece la famosa frase «el universo está escrito en el lenguaje de las matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin los que es humanamente imposible entender una sola palabra de él». Ian Stewart (2008). *Historia de las matemáticas en los últimos 10 000 años*.

En el caso de la Matemática, común a varias carreras, el curso se desarrolló y lo hace actualmente, en la modalidad de clases de consulta a cargo de un tutor contratado a los efectos, con encuentros diarios de dos horas durante dos semanas en el mes de febrero. Estos tutores en general son docentes de la misma Universidad o profesores de Matemática contratados a los efectos. Para realizar sus consultas, el alumno debe concurrir a estas clases especiales para debatir con sus compañeros junto con el tutor sus dificultades y sus dudas sobre el tema de esa clase, lo que implica llevar el material al menos leído.

Uno de los tutores, Matías Gerard, Licenciado en Biotecnología realizó un trabajo con los alumnos en las tutorías: hizo una encuesta —con la colaboración de otros tutores a los que él mismo convocó— a nada menos que 454 alumnos distribuidos en comisiones. Esta encuesta fue luego procesada y el informe pertinente, sumamente exhaustivo y sobre el cual se basa parte de este capítulo, fue entregado a la Secretaría Académica de la Universidad para que sea conocido y utilizado por las autoridades.

Este Curso de Articulación fue seguido por un Curso Remedial, en el transcurso del año 2006, para continuar apoyando a aquellos alumnos que no habían aprobado el primero de ellos en el examen correspondiente del mes de marzo de 2006. Nuevamente es programado como clases de consulta.

Si bien la aplicación de las estrategias mencionadas anteriormente mejoró la inserción académica de los alumnos, siguen existiendo dificultades; por ello se pensó en indagar acerca de éstas a los alumnos a través de una encuesta.

El *objetivo de estas encuestas* fue recabar la opinión de uno de los actores fundamentales de estas acciones de articulación de niveles: los alumnos; para identificar los obstáculos que dificultan su aprendizaje y realizar acciones que optimicen sus estudios y permitan mejorar la retención actuando directamente sobre los factores que desencadenan la deserción, cuyos niveles preocupan tanto que las páginas de los diarios se hacen eco de la misma.

Como consecuencia de lo anterior, se decidió analizar desde la perspectiva de los alumnos qué sucede en ese momento importante de la articulación; conocer no sólo sus opiniones, sino tratar de entender *la realidad compleja* (siguiendo las ideas de Edgard Morin),[1] porque ya sea la realidad o el conocer y el pensar, se sabe que son complejos. No sólo se debe asignar el problema complejo de la articulación y las dificultades de los alumnos a la propiedad exclusiva de la Matemática, aunque es cierto que ella misma es compleja. Pensar lo contrario sería una postura simplista o más bien reduccionista, pues no se debe dejar de pensar que el alumno está inmerso en una época, en una sociedad que lo influye con pautas culturales propias, con las que se puede o no estar de acuerdo, y que actúan sobre él, condicionando su conducta, sus gustos, sus aprendizajes. Además, la época actual es confusa por lo cambiante, donde el futuro no es fácilmente predecible, entonces no queda claro cómo la Educación debe incidir en una generación sujeta a este devenir.

V.2. Resultados de la encuesta en su totalidad

V.2.1. Generales

Con el auxilio de varios tutores convocados, se trató de que la encuesta llegara a alumnos de casi todas las unidades académicas de la Universidad donde la Matemática fuera una de las disciplinas del curso introductorio. Los ingresantes, en el año 2005, fueron 3 949 y se dividieron en comisiones con un número aproximado de entre 30 y 60 alumnos según el turno y la capacidad del aula, entre ciertas consideraciones a tener en cuenta. Cada comisión contó con un docente a cargo —el tutor— y en cada una de ellas hubo alumnos que deseaban ingresar a una sola carrera o a varias.

Teniendo en cuenta que las comisiones se seleccionaron por el tutor que prestó su apoyo a la toma de las encuestas, puede considerarse que el muestreo de los alumnos fue aleatorio. Se seleccionaron así 454 alumnos.

Las facultades elegidas así como la cantidad de alumnos por cada una de ellas se puede observar en la tabla V.1, que a su vez informa cuáles son las Facultades que para el ingreso a alguna de sus carreras selecciona a la Matemática en su faz disciplinar.

Tabla V.1. Composición de la muestra de 454 alumnos discriminados por unidades académicas

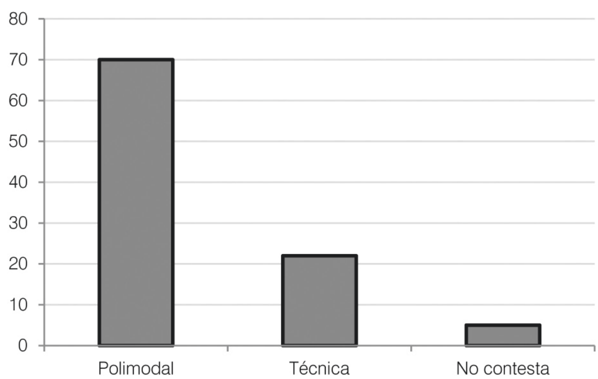
Facultades	Seleccionados	Inscriptos
Arquitectura, Diseño y Urbanismo (FADU)	121	771
Bioquímica y Cs. Biológicas (FBCB)	29	709
Ciencias Agrarias (FCA)	67	225
Ciencias Económicas (FCE)	48	920
Humanidades y Ciencias (FHUC)	19	146
Ingeniería Química (FIQ)	46	454
Ingeniería y Cs. Hídricas (FICH)	48	409
Escuelas		
Superior de Sanidad (ESS)	27	223
Universitaria de Análisis de Alimentos (EUAA)	10	29
Universitaria del Alimento (EUA)	39	63

La justificación de la falta de homogeneidad en la muestra de la cantidad de alumnos por carrera radica en el hecho de que se seleccionaron comisiones enteras accesibles para el tutor donde se podrían recabar opiniones de ingresantes a casi todas las carreras.

También es necesario señalar que la encuesta se entregó en una sola hoja, impresa de ambos lados. Sólo 334 alumnos del total de ingresantes respondieron la encuesta completa. Es decir que el 26 % no dio vuelta la hoja.

En la pregunta donde se le pedía que indicara el tipo de escuela media a la que había concurrido, el 4 % no contestó nada y sólo el 25 % manifestó haber concurrido a una escuela técnica (gráfico V.1). El resto concurrió a una escuela media cuyos dos últimos años constituían lo que en ese momento se llamaba Ciclo Polimodal.

Gráfico V.1. Escuela secundaria a la que concurrieron



De la totalidad de los alumnos encuestados, el 15 % respondió que no era la primera vez que se había inscripto para realizar estudios superiores. De estos 68 alumnos, ya lo habían hecho en una universidad 44 de ellos y otros 24 en institutos terciarios superiores.

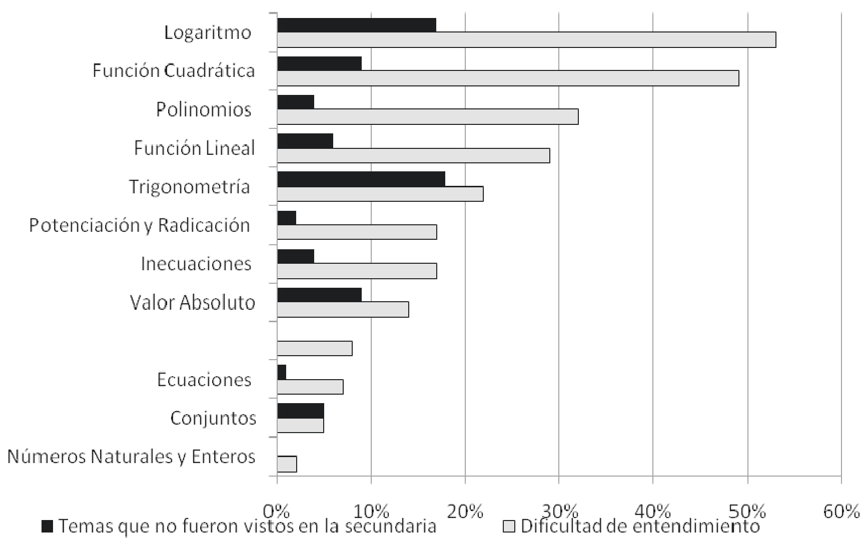
La gran cantidad de respuestas distintas a la pregunta referida al número de años que habían cursado en la institución a la que se habían inscripto previamente para sus estudios superiores, evidenció la necesidad de reformularla por no haber sido entendida.

V.2.2. Respecto de los contenidos

A raíz de la diversidad de terminalidades de los Polimodales en los que habían finalizado su educación media estos alumnos, otra de las preguntas se refería a los temas de matemática que no habían sido incluidos en su currículo. Se les entregaba un listado de temas, de los que debían seleccionar aquellos que cumplían la condición señalada. También se les preguntaba qué temas incluidos en el Curso Introductorio les ofrecieron más dificultades. Se quería indagar acerca de cierta relación posible entre los mismos.

Los resultados de ambas preguntas pueden observarse en el gráfico V.2; además puede verse que los temas que (según los alumnos) no habían sido dados en la escuela media fueron trigonometría (18 %) y logaritmo (17 %). Ahora bien, el tema del Curso Introductorio que presentó más dificultades fue logaritmo (53 %) y función cuadrática (49 %).

Gráfico V.2. Temas abarcados por el Curso de Articulación de Matemática, ordenados en forma creciente según el grado de dificultad. En gris se muestra la dificultad de entendimiento para cada tema; en negro, los temas que no fueron vistos durante la escuela secundaria. Los porcentajes indican la cantidad de veces que se seleccionó el tema.



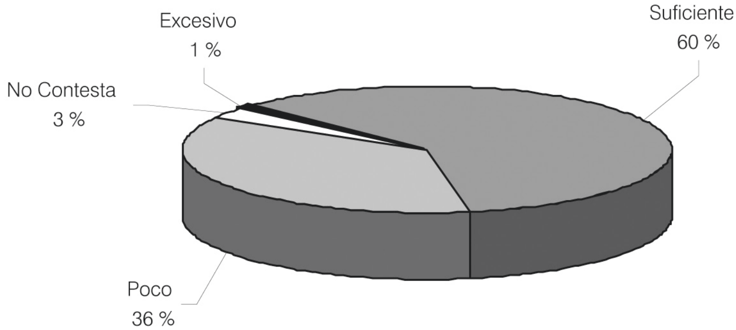
Los temas que figuran en el gráfico anterior son los tratados en el Curso de Articulación de Matemática y están a su vez desarrollados en el material de estudio que se entrega. En algunas encuestas, pero en número no significativo, donde los alumnos habían respondido afirmativamente a la pregunta referida al hecho de haber dado en el Ciclo Secundario estos temas, se señaló que si bien lo dieron no se desarrollaron con la profundidad con que se lo hizo en el Curso Introductorio. Esto nos da la pauta de que deberían tratarse no como una simple revisión sino como temas a aprender.

V.2.3. Respecto del sistema de ingreso

A las tutorías, lo ideal es que concurran con el tema al menos «leído» lo ideal es que los alumnos concurren a las tutorías con el tema al menos para realizar consultas y participar de discusiones de problemas, ejercicios o simplemente de aquello que no hayan entendido del libro.

Indagados respecto de la utilidad de este sistema implementado, el 82 % respondió que le había resultado útil; y en cuanto a la pregunta referida al tiempo, de dos horas semanales, durante dos semanas, el 36 % opinó que era insuficiente (gráfico V.3).

Gráfico V.3. Opinión de los alumnos respecto de las tutorías y el tiempo de duración de las mismas



Sólo el 53 % de los alumnos respondió afirmativamente a la pregunta referida al hecho de concurrir con el tema estudiado, el 5 % directamente no la contestó y el 42 % dijo que no estudian.

Respecto de la pregunta formulada para conocer el tiempo que le destinaban a estudiar el tema diariamente, la diversidad de respuestas fue tan grande que la misma no pudo ser procesada. En una próxima encuesta se la debe reformular con respuestas pautadas para que los alumnos simplemente tengan que seleccionar.

V.2.4. Respecto del material de estudio y de la actividad de los tutores

De este tema se tuvo solamente la opinión de 334 alumnos, dado que esta temática estaba precisamente en la parte de la encuesta que se encontraba al reverso de la hoja.

Ante la pregunta referida al desempeño de los tutores y si respondían a sus requerimientos con buena predisposición, el 81 % dio una respuesta afirmativa, el 13 % los calificó mal y el 6 % no respondió.

Indagados acerca a la temática de los parciales si guardaban relación con lo dado en las tutorías y si el libro les había resultado de fácil lectura, es llamativo que de los 334 alumnos un porcentaje entre el 4 y 8 % no emitió juicio (tabla V.2).

Tabla V.2. Opinión de los encuestados acerca del examen y del material empleado

Pregunta formulada	Sí	No	No Contesta
¿Examen acorde a las tutorías?	65 %	27 %	8 %
¿Libro de fácil lectura?	68 %	27 %	5 %
¿Necesidad de material extra para preparar los temas?	60 %	36 %	4 %

Surge del estudio de las respuestas a la encuesta una serie de preguntas que hace que deba proseguirse el análisis de los datos obtenidos. Por ejemplo, las respuestas con respecto a las dificultades en el estudio de ciertos temas, ¿dependen de la Facultad, o sea, de la carrera a la que se inscribieron? ¿Los temas que dicen no haber estudiado en la enseñanza media guardarán alguna relación con la carrera? O sea, la elección de la carrera ¿influye en los resultados?

¿Cómo es posible que el 8 % no sepa si el examen versó sobre los temas tratados en las tutorías o no?

V.3. Análisis por carrera

V.3.1. Sobre los temas del ingreso y los exámenes

Este análisis se vio un tanto dificultado porque el número de alumnos seleccionados por unidad académica no era homogéneo sino, según la tabla V.1 distintos por cada carrera.

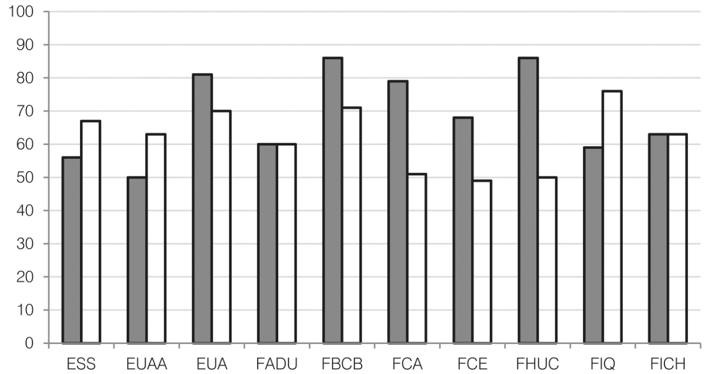
El tema logaritmos resultó el que mayor dificultad ofreció a los alumnos según las opiniones recogidas. El porcentaje de los que aseguraron esto se mantuvo entre el 48 y el 72 % en todas las Facultades y Escuelas, con excepción de la FHUC, donde sólo le resultó difícil al 16 % de los alumnos; vale aclarar que todos los encuestados eran aspirantes a ingresar en el Profesorado de Matemática.

El otro tema donde los alumnos señalaron dificultades fue función cuadrática, el que resultó así para un porcentaje entre 31 y 60 % según la Unidad Académica. Pero el que llama la atención por la dificultad que señalaron los encuestados es función lineal donde ese porcentaje se mantuvo entre el 19 y 42 %.

Además, la comprensión del libro fue un parámetro que nos resultó de mucho interés, al igual que la necesidad del uso de material extra para preparar los temas;esto dan una idea de cuán útil puede resultar el libro.

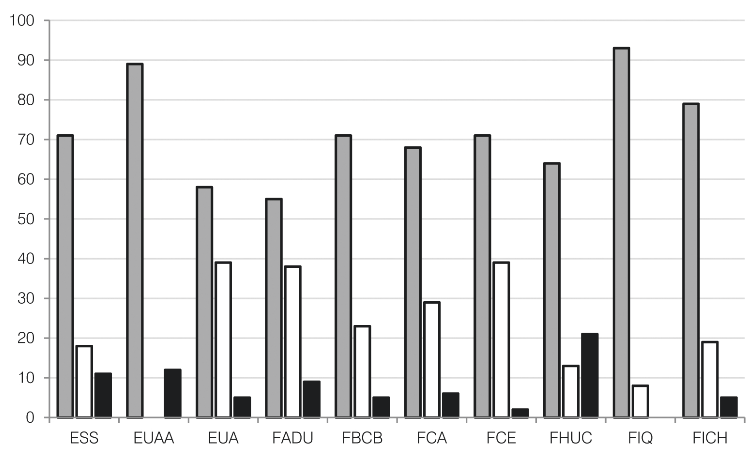
Con referencia a la comprensión del material trabajado, se observa que en todos los casos ésta es superior al 50 %, y no hay diferencias estadísticamente significativas entre facultades, al 5 % ($p = 00,8$). También, al hablar de la necesidad de material extra, estos valores son superiores al 50 % en la mayoría de los casos (gráfico V.4). Estos resultados nuevamente no presentaron diferencias estadísticamente significativas entre las diferentes facultades ($p = 0,24$).

Gráfico V.4. Opinión de los alumnos respecto de la utilidad del libro y a la necesidad de consultar bibliografía extra para prepararse para el examen de ingreso. En blanco, porcentaje de alumnos que opinan que el libro es comprensible. En gris oscuro, porcentaje de alumnos que dicen haber necesitado material extra para preparar los temas



También se observó que en todas las unidades académicas entre un 50 % y un 80 % de los encuestados estuvo de acuerdo en afirmar que el examen se ajustó a los temas desarrollados durante las tutorías de febrero de 2006 (gráfico V.5) y no se hallaron diferencias significativas entre ellos.

Gráfico V.5. Opinión de los alumnos de las distintas unidades académicas con respecto a la dificultad del examen de ingreso. En gris, porcentaje de alumnos que opinan que la dificultad del examen estuvo acorde a las exigencias del curso de articulación. En blanco, alumnos que no están de acuerdo. En negro, alumnos que no dieron su opinión



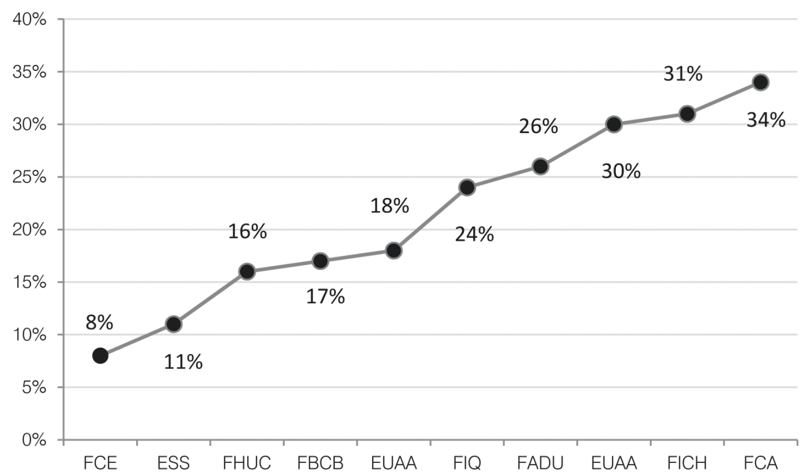
V.3.2. Con respecto a la opinión acerca de las tutorías y del examen de ingreso

Un porcentaje que oscilaba entre el 77 y el 100 % de los inscriptos en las distintas unidades académicas respondió que las tutorías les habían resultado útiles y no hubo diferencias significativas al comparar los distintos institutos.

En general, el tiempo dedicado a dichas tutorías, dos horas todos los días durante dos semanas, resultó insuficiente para un porcentaje que osciló entre el 28 y el 56 %.

También se quería conocer si existía relación entre la elección de una carrera universitaria y el hecho de haber egresado de una Escuela Técnica. El porcentaje de técnicos más elevados entre los inscriptos a las distintas unidades académicas se presentó en la Facultad de Ciencias Agrarias, con un 34 %, y el porcentaje menor se presentó en la Facultad de Ciencias Económicas, con un 8 % (gráfico V.6).

Gráfico V.6. Porcentaje de técnicos que ingresan a cada Facultad.



Nota. Las abreviaturas corresponden a: Escuela Superior de Sanidad (ESS), Escuela Universitaria de Análisis de Alimentos (EUAA), Escuela Universitaria de Alimentos (EUA), Facultad de Arquitectura y Urbanismo (FADU), Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas (FBCB), Facultad de Agronomía (FCA), Facultad de Humanidades y Ciencias (FHUC), Facultad de Ciencias Económicas (FCE), Facultad de Ingeniería Química (FIQ), Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH)

Puede observarse en el gráfico anterior cómo el porcentaje de alumnos con terminalidad técnica en la escuela media crece a medida que las unidades académicas de la Universidad van tomando una orientación hacia las ciencias duras o la tecnología, cosa que era previsible.

V.4. Opinión de los alumnos en el Curso Remedial

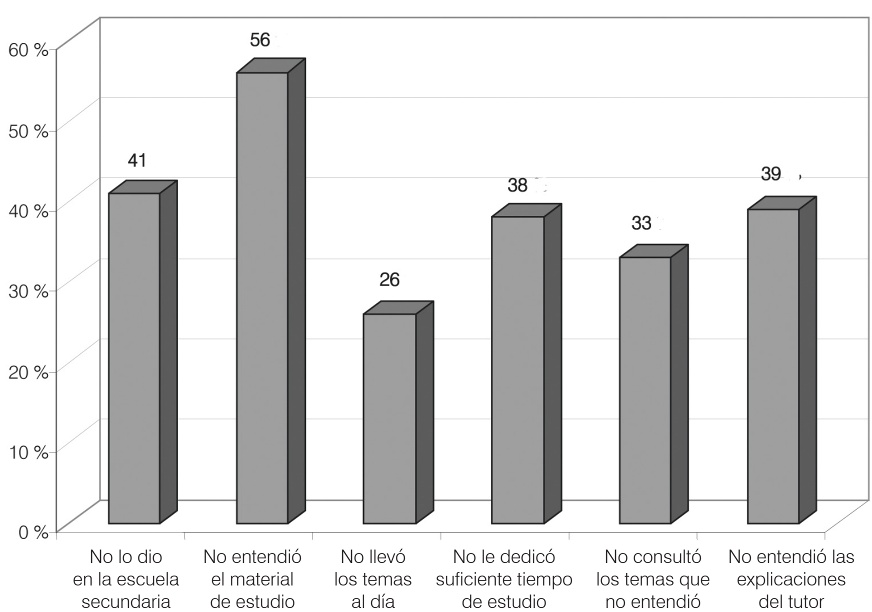
Los alumnos que no aprobaron el examen de ingreso en ninguna de sus instancias desde noviembre 2005 a marzo 2006 y continuaban con su intención de ingresar a la Universidad, tuvieron la posibilidad de cursar en el mes de mayo de 2006 un nuevo Curso disciplinar de Matemática que integra el grupo de los llamados Cursos Remediales de todas las disciplinas que deben cursarse en el ingreso.

Matías Gerard —quien tuvo también a su cargo un curso Remedial— tomó una muestra de 85 alumnos para recabar nuevamente su opinión en algunos temas e intensificar la búsqueda de indicadores en otros, tales como metodología de trabajo, interés por la materia y forma del trabajo en la escuela media, entre otros.

Se les reiteró la pregunta sobre los temas que les habían resultado más difíciles y nuevamente seleccionaron *logaritmo y función cuadrática*.

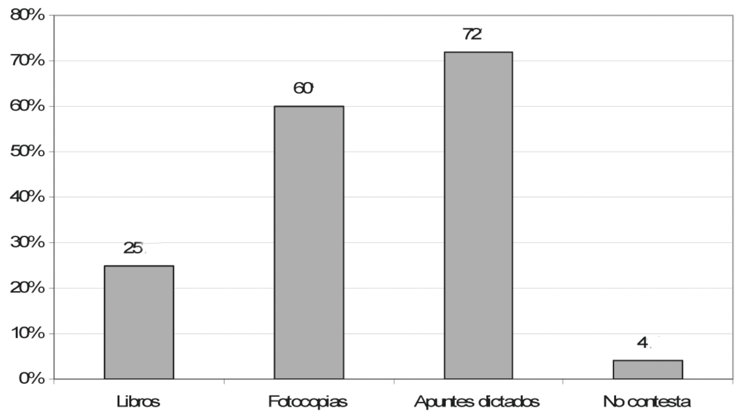
A continuación, se trató de indagar sobre las causas de esa dificultad. Para determinarlas, se les agregó una lista de posibles hechos que ellos debían seleccionar, estando permitidas las respuestas múltiples; se obtuvo así como causa primera la dificultad en el uso del material de estudio (56 %), o sea el libro, seguido por no haberlo dado en la escuela secundaria 41 % (gráfico V.7).

Gráfico V.7. Causas seleccionadas por los alumnos como responsables de su dificultad para aprobar el examen de ingreso



Dada la observación de los tutores referida al hecho de que muchos alumnos no sabían trabajar usando libros y que les costaba familiarizarse con ello, en la pregunta siguiente se les pidió que seleccionaran el material con el que habían trabajado en el ciclo medio, resultó que sólo el 25 % había usado libros, lo más habitual eran los apuntes dictados y el empleo de fotocopias (gráfico V.8).

Gráfico V.8. Material bibliográfico empleado por los alumnos para estudiar matemática durante la escuela secundaria



Finalmente, se evaluó el interés por estudiar matemática y la utilidad que encuentran en hacerlo. El motivo de esta cuestión fue tratar de determinar si las dificultades se relacionaban con una mala predisposición para entender lo explicado.

Los resultados mostraron que al 35 % no le agradaba esta asignatura, pero sin embargo el 88 % le encontraba utilidad. Si se permite una reflexión sutil, el 35 % no es un porcentaje tan elevado considerando el antecedente negativo que tiene la matemática en la opinión de la sociedad.

Lo anteriormente señalado nos da a entender que muchos alumnos estudian esta disciplina sin ganas. Lo más preocupante es que las carreras que requieren matemática en el ingreso luego contienen dentro del programa asignaturas cuyos contenidos están directamente relacionados con los desarrollados en el ingreso; por lo tanto, también les resultarán dificultosas.

Esto puede ser una de las causas por la que hay deserciones en los primeros años de las diferentes carreras. Pero mucho más preocupante es el 42 % de los alumnos que señalaron que no estudian o sea, el 42 % no se esfuerza y está conciente de ello. Vuelve a surgir lo señalado anteriormente: los alumnos son un reflejo de los problemas que aquejan a nuestra sociedad argentina, el creer que las cosas son fáciles, en el reinado del facilismo. Sólo el esfuerzo y el sacrificio permiten los logros. Por supuesto, todo esto si se trabaja con honestidad; de lo contrario, la deshonestidad trae aparejados lo que algunos consideran el «éxito»: la plata fácil y el poder.

La necesidad de apoyo externo obedece en parte a la cultura del profesor particular instaurada en nuestra sociedad, pero también a la dificultad de los temas y a la falta de aprendizaje previo, así como a no haber aprendido a leer un libro de texto debido a que todo se les facilitó a través de la fotocopia o el dictado de apuntes. Es evidente que el esfuerzo en los alumnos no es lo más común y les resulta más fácil concurrir al profesor particular.

V.5. Acciones del año 2007

V.5.1. Consideraciones generales

La modalidad del cursado es la misma de la edición 2005-2006 para el curso disciplinar de Matemática. Nuevamente dos tutores, Guillermo Blasón y Ana Pizarro, en realidad dos becarios de tutoría, dirigidos por Liliana Contini, decidieron tomar una encuesta a 107 alumnos aspirantes a ingresar a la carrera de Nutrición que se cursa en la Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas.

Esta carrera en sus primeros años tiene fuertes contenidos de Matemática, Física, Biología y Química. Pero según puede verse en la tabla V.3 sólo quienes finalizaron una carrera técnica o una terminalidad de su ciclo secundario en el área de la biología tienen materias relacionadas. Estos alumnos son sólo un 34 % de los encuestados (30 % + 4 %), el resto son alumnos que provienen de ciclos polimodales sin ninguna afinidad con la carrera elegida.

Tabla V.3. Tipo de escuela media (%)

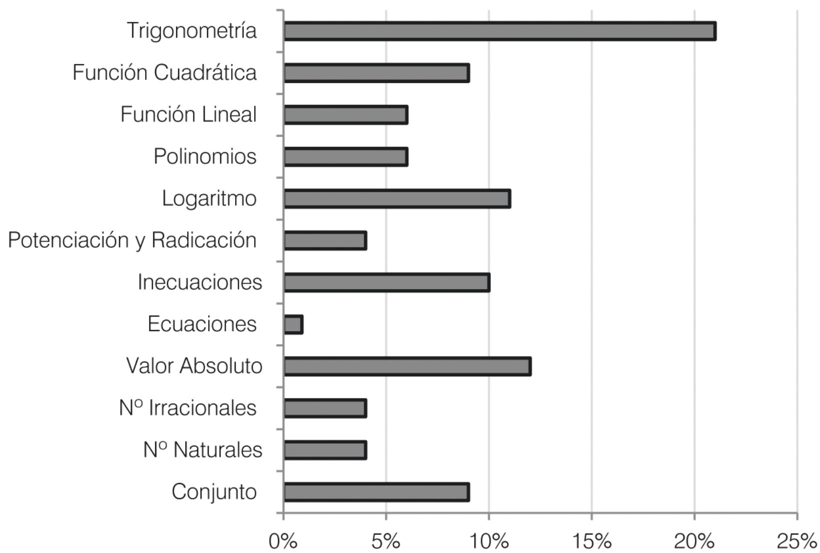
Ciencias naturales	30
Economía y gestión de las organizaciones	28
Humanidades	18
Otras	11
Comunicación, arte y diseño	9

Otro dato interesante es que el 85 % de los alumnos no trabajaba; el motivo por el cual no lo hacía no fue requerido. Sería conveniente en una próxima investigación indagar sobre este tema, pues las respuestas arrojarían luz sobre ciertos comportamientos sociales.

Se le volvió a preguntar a este grupo sobre los temas que le habían resultado más difíciles; nuevamente fueron los mismos que se habían señalado los años anteriores: logaritmo, función cuadrática y trigonometría.

Se volvió a preguntar sobre los temas no dados en la escuela media, y nuevamente marcaron lo señalado en años anteriores: trigonometría registró el mayor porcentaje, 21 % (gráfico V.9).

Gráfico V.9. Porcentaje de temas no estudiados en la escuela media



V.5.2. Acerca del material de estudio

Interesaba especialmente la opinión que tenían los estudiantes sobre el libro de matemática, por el que debían guiarse para el estudio del curso disciplinar en la instancia (es un libro escrito para ellos por docentes de la Universidad, por lo que es fácilmente modificable y contiene todos los temas de este curso disciplinar).

La opinión sobre esta cuestión se obtuvo a partir de dos preguntas: la primera, si los temas del libro en su desarrollo les habían resultado fáciles o difíciles; y la segunda era una calificación sobre el tipo de escritura del material, o sea, si le resultaba entretenida, aburrida, entre otras calificaciones, su lectura.

La primera pregunta tenía dos opciones de respuesta, fácil o difícil. Ahora bien, el 5 % no la contestó; para el 58 % el libro era de fácil lectura y el 37 % restante señaló que le resultaba difícil.

Al calificar el material el resultado fue «confuso» para el 43 % y «claro» para 41 % (tabla V.4).

Tabla V.4. Cómo calificó el alumno el libro con los contenidos de matemática que se desarrollan en el curso

Calificación	Cantidad de alumnos (%)
No contesta	3
Entretenido	6
Aburrido	7
Claro	41
Confuso	43

Vale aclarar que todos eligieron una sola opción en la respuesta, aunque esto no se hubiera señalado, y se ha perdido el saber si era aburrido y confuso o también claro y entretenido, entre otras posibilidades. Pero es importante observar que nuestra Matemática, la siempre cuestionada Matemática, resultó aburrida sólo para el 7 % de los alumnos encuestados, o sea, para 8 alumnos de los 107. Esto... ¿será para sentirse satisfecho? ¿O para pensar que tal vez no entendieron la pregunta?

V.5.3. El aula virtual

Un párrafo aparte merece la pregunta referida al uso del Aula Virtual (instalada en el año 2007) para que los alumnos puedan realizar consultas y acceder a información extra para sus estudios.

Mucho se habla y se escribe sobre la importancia de las TIC's en muchos ámbitos, pero sobre todo en el de la educación, razón por la cual la Universidad puso a disposición de estos cursos todos sus recursos en este campo. Cuando se le preguntó al alumno si había utilizado el Aula Virtual, sólo el 45 % lo había hecho, pero el 14 % no contestó la pregunta ni por sí ni por no.

De ese 45 % que dijo haberla utilizado sólo el 34 % dijo que le fue útil, o sea, sólo un 15 % de los 107 alumnos. También se puede señalar que del 41 % que señaló no haberla utilizado, el 20 %, aproximadamente un 8 % de la muestra original, dijo que fue porque no pudo acceder.

Evidentemente, los temas de la encuestas pueden brindar una información sumamente rica, pero es necesario reformular las preguntas o indagar con mayor profundidad algunos temas para obtener un mejor conocimiento.

Una de las conclusiones que pueden extraerse es la necesidad de reformular la modalidad de las tutorías en ciertos temas, ya sea por no haberse enseñado en la escuela media, o tal vez se dio pero con una orientación distinta de la de este ingreso; por eso sería necesario plantear algunos temas como a enseñar y aprender, y no como revisiones.

Otra conclusión es aumentar el tiempo dedicado a este curso y enseñarles a los alumnos la importancia del Aula Virtual, cómo acceder a ella, cómo manejarla eficientemente, cómo puede ayudarlo con sus estudios.

V.6. Revisiones y reflexiones desde el año 2010

Este año se pensó desde las tutorías en salir de las encuestas, por varios motivos. Uno de ellos es por el hecho de que hace varios años se están tomando, aunque siempre se modifican. Es conocido el problema de la copia en los exámenes, de la acción de los celulares, en especial sus fotos para difundir los temarios; por ello es necesario cambiarlos de un turno a turno. Tal vez las respuestas a las encuestas estén en cierta forma sesgadas por una razón similar, el pasar de boca en boca qué es lo que se contestó en cada pregunta. Además, aquellos docentes que están en temas tan actuales como la evaluación, no sólo exámenes finales, sino cursos, actividades y proyectos, saben la importancia de la evaluación cualitativa.

Uno de los tutores (a quien a propósito no se quiere identificar, que es un buen tutor) muy preocupado con los resultados del primer examen, identificó a tres alumnos de su comisión, a los que se llamará alumnos A, B y C, que no obtuvieron buenos resultados en la evaluación; los trajo para hablar del tema en forma individual y en la conversación se trataron varios temas.

En general, no tenían muchos inconvenientes con el material, sólo que en la escuela no usaban libros; el tutor satisfacía sus reclamos, le entendían y era claro en sus explicaciones. El problema fundamental de la no aprobación del examen final era distinto para cada alumno:

- *Alumno A*: Afirmó que nadie en su casa era universitario, por eso no podía aprobar.
- *Alumno B*: Si bien la terminalidad de su escuela media había sido técnica, lo que más le costaba era «eso de las letras». Cuando se le preguntó si era al momento de operar con ellas o en problemas, dijo que no lo había visto y no lo entendía.
- *Alumno C*: El problema residía en que los chicos de su escuela que no iban a seguir en la universidad lo venían a buscar a cada rato y no tenía tiempo de estudiar.

Se deja al lector que extraiga sus propias conclusiones, pero se cree oportuno señalar algunos hechos que tal vez sean calificados como un poco duros. Respecto del alumno A, ¿cuántas figuras prominentes de la ciencia y la cultura no pertenecen a una familia universitaria? Respecto del alumno C, ¿las obligaciones no existen? ¿sólo existen los derechos? Matemáticamente, sólo me preocupa el alumno B.

Se debe insistir en la resolución de problemas porque eso «de las letras» que dijo B significa la expresión en números y letras de una frase u oración escrita coloquialmente que es necesario expresar simbólicamente para poder resolverla. En síntesis, no puede escribir una expresión algebraica ni simbólica. Además, tiene dificultades para resolver problemas. Pero expresiones algebraicas, ecuaciones, inecuaciones, para señalar sólo algunos temas, forman parte del currículo de matemática, no sólo de las escuelas técnicas, como la del alumno, sino también de la que formaba el llamado polimodal.

También se debe insistir en la necesidad de estudiar; que el 42 % de la muestra de 454 alumnos del año 2005 indicara no haberlo hecho durante el curso introductorio es un dato sumamente preocupante.

Quienes están en educación y especialmente en educación matemática deben preocuparse y trabajar mancomunadamente en pos de un problema que afecta a todos, del que se forma parte y que trasciende a todos, y es el de educar a la próxima generación.

Nota

1. Filósofo y sociólogo francés nacido en 1921 en París. Es uno de los precursores de la epistemología de la complejidad y el pensamiento complejo.

Capítulo VI
La estadística en la investigación educativa

ELENA F. DE CARRERA

Lo escrito a continuación no pretende ser un texto sobre investigación educativa, sino aportar mi experiencia derivada del «hacer profesional» como estadística y educadora. Al igual que aquello sugerido por Batanero (1999) en su publicación, lo hago desde la «educación estadística», entendida como aquel campo del saber que se interesa por la producción de conocimientos estadísticos, su enseñanza, aprendizaje y uso en la resolución de problemas de las más variadas disciplinas.

La investigación educativa, por más simple que sea, y lo mismo sucede en cualquier campo científico, es una actividad imprescindible para marcar el progreso y evolución de las acciones educativas.

En la actividad docente esta investigación lo es, porque hace del educador–investigador una persona preocupada por conseguir que su ciencia, la matemática, la física o la lengua, entre otras, sean comprendidas más y mejor por los estudiantes.

Cuando se decide realizar una investigación educativa, se selecciona un problema que preocupa y luego, siempre es conveniente analizar bibliográficamente si existen indicios de investigaciones sobre problemas similares que puedan aportar luz a aquel que se ha elegido.

Dos características importantes debe poseer el problema seleccionado: claridad y factibilidad. La primera tiene que ver con su enunciación, lo más concisa y breve posible. La segunda refiere a una valoración previa de los medios que se poseen para llevar a cabo la investigación deseada.

VI.1. Perspectiva de investigación

Según el problema a investigar, se lo puede hacer desde diferentes ópticas. Consideremos un caso concreto.

Un profesor de matemática de polimodal ha realizado varios cursos de matemática acerca del tema funciones y algunos de didáctica, y también ha participado de las jornadas de reflexión que en los años 2004 y 2005 realizaron en conjunto docentes de escuela media y de la Universidad. Luego de observar la importancia de la visualización en la enseñanza de la matemática y del estudio de los conceptos matemáticos en su relación con otras ciencias, en las actividades propuestas en las jornadas también ha observado los problemas que se detectaban al llevar al aula algunos temas de función cuadrática. Entonces comienza a pensar que si él enseñara estos temas con una nueva modalidad donde intervenga lo que analizó, los alumnos entenderían mejor «qué son las funciones» y cuál es su importancia.

Organiza así un experimento donde él, en dos escuelas distintas, en cursos del mismo nivel y con rendimientos similares, desarrollará función cuadrática con dos modalidades distintas: una con auxilio de la visualización y otra de forma tradicional. Luego quiere evaluar si ambos métodos de enseñanza logran aprendizajes igualmente efectivos.

Este es un típico caso enmarcado en los llamados estudios comparativos ya que el docente desea evaluar si ambos métodos arrojan o no los mismos rendimientos. Ahora bien, el profesor puede querer sólo describir ambos grupos, no llegar a la comparación, o tal vez luego emitir un juicio acerca de las bondades o no del nuevo método propuesto. O sea un estudio puede ser:

Descriptivo ← Comparativo → Evaluativo

Si el estudio se realiza con datos que ya se poseen, o que se están obteniendo en ese momento, o es una experiencia que se planea realizar a futuro, se clasificará en:

$\boxed{\text{Histórico o retrospectivo}} \rightarrow \boxed{\text{Presente}} \rightarrow \boxed{\text{Futuro o propectivo o experimental}}$

Estas clasificaciones pueden combinarse en una tabla de doble entrada para dar un número elevado de posibilidades.

Actividad VI.1

1. Sería importante deducir la tabla a la que hace referencia el párrafo anterior y visualizar así todos los tipos de estudios posibles.

2. Sobre la base del problema propuesto indique hechos educativos posibles que puedan clasificarse en cada una de las categorías de la tabla anterior. Por ejemplo, un estudio histórico descriptivo sería la descripción de los resultados del aprendizaje de los alumnos de dos años atrás.

VI.2. Niveles de hipótesis

• *Hipótesis teóricas o sustantivas:* son enunciados generales sobre variables que en general no pueden medirse.

Estas variables no observables o no medibles se denominan *constructos*.

Las investigaciones educativas constan generalmente de constructos en sus enunciados teóricos.

En el problema propuesto la hipótesis sustantiva sería «la visualización logra aprendizajes de la matemática más efectivos» donde «aprendizajes más efectivos» son los constructos, ya que así resultan no medibles.

Estas hipótesis sustantivas necesitan concretarse; aparecen así las *hipótesis experimentales*.

• *Hipótesis experimentales:* se formulan ya no sobre constructos sino sobre variables observables en la práctica.

En nuestro ejemplo, podríamos observar «los aprendizajes» indirectamente a través de los resultados de ambos grupos frente a una misma prueba al finalizar la enseñanza de un tema en especial, o a través de entrevistas con alumnos seleccionados de ambos conjuntos, observando su reacción frente a algún tipo de problemas, su comportamiento en un grupo mediante otras actividades que el profesor pueda sugerir.

A partir de estas hipótesis experimentales surgirán las hipótesis estadísticas, que se definen ya en función de la variable de la investigación y no del constructo.

Vale la pena aquí analizar la diferencia entre constructo y variable, para dejar bien aclarada. Según Carmen Batanero:

> Generalmente estamos interesados por estudiar objetos de naturaleza teórica, no directamente observables, como por ejemplo, el nivel de razonamiento probabilístico de un niño, su comprensión de un cierto concepto, su actitud frente a las matemáticas, etc. Los constructos son modelos supuestos, con una estructura y unas funciones, sobre la base de los cuales se pretende explicar determinados fenómenos (Bisquera, 1989). El estudio de los mismos se realiza de una forma indirecta y parcial, a partir del análisis de ciertas variables que son *indicadores empíricos* del constructo, puesto que están relacionados con el mismo. Ejemplos de variables en nuestro campo de investigación serían la estrategia en la solución a un problema probabilístico o el número de problemas resueltos por un alumno en un cierto cuestionario, su puntuación en una escala de actitudes, el número de veces que repite una cierta conducta durante un periodo de observación, etcétera. (2—13)

Retomando la importancia de la formulación clara del constructo a medir, no es menos importante la definición de las variables adecuadas que nos permitan obtener información válida y fiable para evaluar el constructo que nos interesa. También existirá seguramente una gran cantidad de variables que nos pueden dar la información que buscamos acerca de dicho constructo. En el caso de la investigación educativa que estamos analizando, podrían ser actitudes de los alumnos, tipos de problemas relacionados con el tema, situaciones problemáticas asociadas y un cúmulo de posibles variables a elegir. Por ello es necesario, antes de comenzar la experiencia, realizar un diseño de la misma para seleccionar un grupo de tales variables indicadoras que puedan ser seguidas y evaluadas eficientemente en el transcurso de la investigación.

VI.3. Paradigmas de investigación

Una de las principales controversias en investigación educativa es la supuesta antinomia investigación *cuantitativa* versus investigación *cualitativa*. Estos paradigmas de investigación son los dos extremos de un abanico de posibilidades de combinación entre ellos.

1. El paradigma positivista, investigación cuantitativa o proceso–producto emplea los métodos cuantitativos que brinda la estadística tales como diseño experimental, mediciones sistemáticas, estimación de la variabilidad, grados de asociación entre variables, modelos matemáticos, y trata de generalizar a todas las variables en estudio.

2. El paradigma interpretativo, que «busca preferentemente la descripción exhaustiva del proceso de aprendizaje en un número limitado de casos», se denomina también «etnografía educativa» (Batanero:2–13). En general, como el número de casos estudiados es muy pequeño se dificulta la generalización. Ha sido pensado por su expresión de evaluación *cualitativa* como algo anumérico, hecho que debe ser rechazado como lo hace un sinnúmero de autores, entre ellos Kirk y Miller quienes además citan a Batanero. Estos autores incluyen la inducción analítica, el análisis de contenido, la semiótica, las entrevistas en profundidad, el estudio de historias de vida y ciertas manipulaciones de archivos, informáticas y estadísticas, en el rubro evaluación cualitativa.

Cabe señalar que la mayoría de las investigaciones educativas no se encuentran en ninguno de ambos extremos, sino que sus métodos se combinan para aportar resultados complementarios que impulsen el avance científico y educativo.

VI.4. Algo de estadística para la investigación educativa

La estadística es el arte de hacer inferencia y extraer conclusiones desde datos imperfectos. Es indudable su crecimiento en el siglo XX debido a que es una de las ciencias metodológicas fundamentales y base del método científico experimental.

El objetivo prioritario de estas notas es mostrar algunos conceptos fundamentales del análisis estadístico.

Desde hace varios años, parece que las únicas medidas estadísticas que existen son el promedio y el desvío estándar, sobre todo para la enseñanza media o para algunas investigaciones. No obstante, en la estadística actual, y no tan actual, existen otras medidas y, lo más importante, otros recursos que permiten un mejor análisis de los datos que se obtengan. Se pretende integrar la tradicional estadística descriptiva con las más modernas ideas del análisis de datos. La revolución informática —entre otras causas— ha ocasionado avances importantes en técnicas y metodología estadísticas.

En situaciones de la vida diaria las intuiciones en estadística resultan bastante engorrosas y muchas veces falsas; por ello, es necesario analizar los datos exhaustivamente, y esto es válido no sólo en la faz docente, sino también en su aplicación en investigación y en los controles de procesos industriales, así como en economía y en todo lugar donde se aplique.

Los datos, como se ha dicho, reflejan hechos importantes, muestran patrones, tienden a un modelo. Un modelo no es nada más que una representación simplificada de la realidad, pero sin embargo es de suma utilidad para tener una idea aproximada.

Los datos por sí mismos, ya sean numéricos o cualitativos, no nos aportan mayor significado. Son los gráficos, los cuadros y las tablas los que traen a la luz el mensaje que en ellos se oculta. De esta manera, el *análisis exploratorio de datos* toma su propio lugar tanto en el currículo introductorio como en la investigación, no como un capítulo más sino para darle nueva vida y significado a los temas tradicionales.

Es necesario extraer de los datos la máxima información posible. Las posibilidades didácticas del análisis exploratorio de datos se deben a su simplicidad y a la aplicación de conceptos estadísticos fundamentales. Además, al poder visualizar el comportamiento de estos datos, se deja naturalmente de lado la idea generalizada de que *todo es normal y simétrico;* por ende, la media y la desviación estándar son las medidas resúmenes más eficaces, y así se comprende la necesidad de conocer otras. Se desarrolla además la intuición y el deseo de investigar.

El trabajo del aula, teniendo en cuenta la filosofía del análisis exploratorio de datos y el trabajo interdisciplinario con materias, tales como biología, geografía e historia, entre otras, abandona el énfasis en los aspectos teóricos y reivindica la resolución de problemas y el trabajo en grupos. Siempre insistiremos en el trabajo interdisciplinario y cooperativo. Se debe aprender a trabajar con los demás y a compartir. Hoy, los equipos interdisciplinarios invaden las ciencias experimentales, sociales, exactas y también lo tecnológico.

Considerando que la enseñanza de la estadística debe actualizarse y aprovechando las posibilidades de renovación curricular, se debe tratar el análisis de datos desde un punto de vista exploratorio, como el primer contacto con la estadística, disponiendo, si es posible, de las herramientas informáticas.

Se puede presentar y resolver una gran variedad de problemas de estadística orientados por su dificultad y aplicación desde la enseñanza elemental hasta la enseñanza universitaria. Al utilizar las técnicas del Análisis Exploratorio de Datos no se trata solamente de ordenar, calcular y graficar los datos para describir el problema, sino de *ver* más allá de lo que ellos muestren. Lo que se puede llamar *hacer una mirada penetrante* a la estructura de los datos.

Es una ventaja didáctica el presentar los resultados de modo claro y visible; buscar la forma de representar y experimentar hasta que ellos hablen por sí solos. De esta manera, se puede adquirir un significado diferente del problema.

Una de las posibilidades que brinda el Análisis Exploratorio de Datos es la sencillez de los conceptos matemáticos que utiliza; la rigurosidad del concepto estadístico que requiere, además de la inclusión de este tema en la currícula, son importantes por varios motivos:

- Las múltiples representaciones.
- La resolución de problemas que enfrenta al alumno con la realidad y le da la posibilidad de tener perspectiva crítica de la información.
- Las conexiones con otros temas del currículo.
- El trabajo en equipo y la posibilidad de desarrollar sus propias experiencias y proyectos.

En el Análisis Exploratorio de Datos, el trabajo consiste en buscar estructuras no esperadas y lograr ricas descripciones, por medio de resúmenes gráficos, estadística robusta e indicadores de ajuste al modelo.

Los datos que se recolectan se guardan ordenadamente constituyendo *bases de datos*.

VI.5. Diseñando una investigación educativa

Los diseños de investigación educativa y la estadística están íntimamente unidos en este proceso de investigación, al que sintéticamente podemos describir así:

- *Paso1*: toda investigación comienza con una pregunta; por ejemplo: ¿Cuál será el resultado de desarrollar el tema *T* con la metodología *M*? si la formulamos como una afirmación a la que queremos aceptar o rechazar, que recibe el nombre de hipótesis y constituye la hipótesis científica la anterior pregunta podrá enunciarse «la metodología *M* permite mejorar el rendimiento de los alumnos respecto de la que empleábamos antes».
- *Paso 2*: después de formularse la hipótesis se deben buscar antecedentes sobre el tema, o como se dice en general, revisar la teoría existente. La búsqueda o investigación bibliográfica, libros, revistas, publicaciones de todo tipo y el apoyo de Internet para los que pueden acceder a ella son fundamentales. Tal vez esto le sirva para precisar su hipótesis.

Los pasos 1 y 2 están permanentemente relacionados.

• *Paso 3*: el estudio debe ser diseñado. Cuántos grupos van a analizar, cómo va a recolectar los datos, cómo seleccionar un diseño de acuerdo con aquello que quiera medir, así como los datos a obtener y la técnica a aplicar para medirlos.
• *Paso 4*: el estudio debe ser conducido. Salvo situaciones no previstas, tales como alumnos que abandonan, clases que se suspenden o cualquier otra anomalía, la investigación debe llevarse a cabo como se la diseñó.
• *Paso 5*: los datos deben ser analizados. Acá se debe usar la estadística para ordenar, describir y analizar en varias formas la respuesta posible a su pregunta inicial.
• *Paso 6*: los resultados deben ser interpretados, esto no sólo para obtener una respuesta a su pregunta inicial, sino también porque de esa interpretación pueden surgir nuevas cuestiones, nuevas preguntas para investigaciones futuras.

VI.6. La naturaleza de los datos

Cuando se toma una prueba calificamos a nuestros alumnos mediante un número en una escala de 0 a 5 ó de 0 a 10, o cualitativamente, como puede ser bien, mal, regular, muy bien, excelente. También, si en física, físico—química o ciencias naturales en general se habla de combustión, se pueden calificar las sustancias en combustión rápida, lenta y regular, por ejemplo. Se ve así que la estadística no sólo trabaja con datos numéricos o *cuantitativos*; pueden también ser *cualitativos*. Es importante reconocer el tipo de datos que se van a recoger en la experiencia. La naturaleza de la variable a estudiar, si es cuantitativa o cualitativa será determinante para seleccionar las técnicas y métodos para analizarla.

Las variables pueden ser:

CUANTITATIVAS	CUALITATIVAS
Se pueden expresar numéricamente	Son cualidades o atributos

Las variables cuantitativas se clasifican en:

DISCRETAS	CONTINUAS
Se refieren a recuentos, están relacionadas a «número de...»	Toman todos los valores posibles en un cierto intervalo

La estadística no tiene teorías propias de aprendizaje, por ello las tendencias en las teorías del aprendizaje de la estadística se asimilan a las de la Matemática y por lo tanto, debemos apoyarnos en ella. Estas teorías se basan en la actualidad en la filosofía de la construcción del conocimiento o teorías constructivistas. En éstas influyen las teorías del aprendizaje activo de Vygotsky, donde la interacción social es necesaria para alcanzarlo.

Se debe tener en cuenta que en la estadística actual resulta imprescindible la utilización de la informática, y este aspecto debe reflejarse en el accionar del docente.

Los datos que se recolectan se deben guardar ordenadamente constituyendo bases de datos, sin importar si la variable es cuantitativa o cualitativa. Tomemos como ejemplo una base de datos que fue empleada en un curso dado en la reunión anual de la Unión Matemática Argentina realizada en Santa Fe en el año 2002.

Tabla VI.1. Ejemplo de base de datos (este material fue preparado con la colaboración de Stella M. Vaira y Liliana E. Contini)

Alumno	Grupo sanguíneo	Promedio en Matemática	Sexo	Cantidad de hermanos	Mes de nacimiento	Edad de la madre
1	A	9,50	F	2	octubre	27
2	O	9,08	M	1	marzo	32
3	A	9,00	M	0	abril	33
4	A	9,42	M	2	noviembre	36
5	AB	8,83	F	3	junio	34
6	B	9,25	M	2	enero	38
7	B	9,50	F	1	octubre	42
8	O	9,17	F	1	febrero	26
9	O	9,08	F	2	marzo	29
10	A	9,33	M	3	diciembre	30
11	A	8,92	M	4	mayo	37
12	A	9,58	F	6	septiembre	39
13	B	9,42	M	3	noviembre	33
14	AB	9,08	F	2	marzo	39
15	A	9,58	F	1	septiembre	36
16	O	9,42	F	0	noviembre	29
17	B	8,92	F	1	mayo	30
18	A	8,83	M	3	junio	32
19	AB	9,08	F	2	marzo	27
20	A	9,00	M	2	abril	29
21	B	9,33	F	1	diciembre	31
22	O	8,83	F	1	junio	30
23	A	9,67	M	3	agosto	34
24	A	9,50	F	3	octubre	29
25	A	9,17	F	2	febrero	28
26	O	9,08	F	2	marzo	29
27	O	9,50	F	1	octubre	39
28	A	9,25	F	1	enero	30
29	B	9,08	F	2	marzo	33
30	A	9,42	M	1	noviembre	38

Actividad VI.2

---

1. En una investigación programada por un docente, éste estuvo interesado en analizar una serie de datos de sus alumnos: tipo de escuela de la que procede, cantidad de hermanos, peso, altura, si sus abuelos viven con su grupo familiar, las notas alcanzadas en matemática y en lengua en un curso anterior.

Se desea clasificar las variables en cualitativas o cuantitativas.

2. Se propone llevar al aula esta necesidad de contar con bases de datos buscando temas de interés tales como resultados de partidos de fútbol, de básquetbol, peso de las correspondientes pelotas, resultados de carreras de autos, marcas de los mismos automóviles que intervienen, pesos de estos autos, música y todo lo que a ellos les pueda interesar. Recuerde de armar bases de datos: son siempre y a la larga una fuente de información.

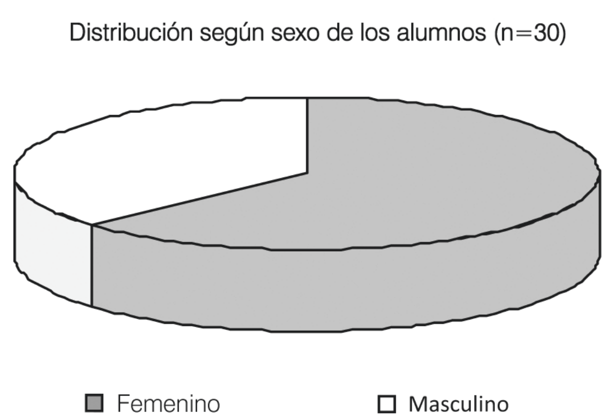
VI.7. Tratamiento de las distintas variables

Para el tratamiento de las *variables cualitativas* los gráficos más utilizados son el diagrama de sectores y el diagrama de barras; además, se pueden fácilmente armar tablas de distribución de frecuencias. Se muestran algunos ejemplos trabajados sobre la base de datos propuesta.

• *Gráfico sectorial*

En él comparan sectores del círculo con porcentajes. Es eficaz mientras el número de sectores sea pequeño.

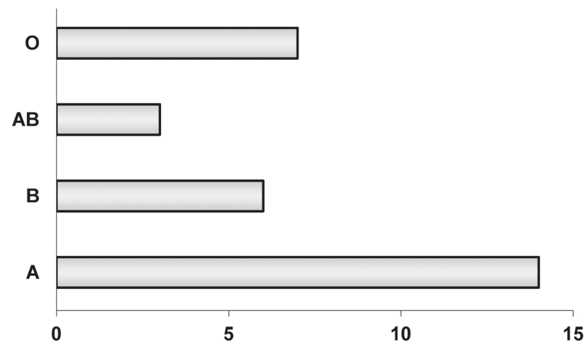
Gráfico VI.1. Gráfico de sectores



• *Gráfico de barras*

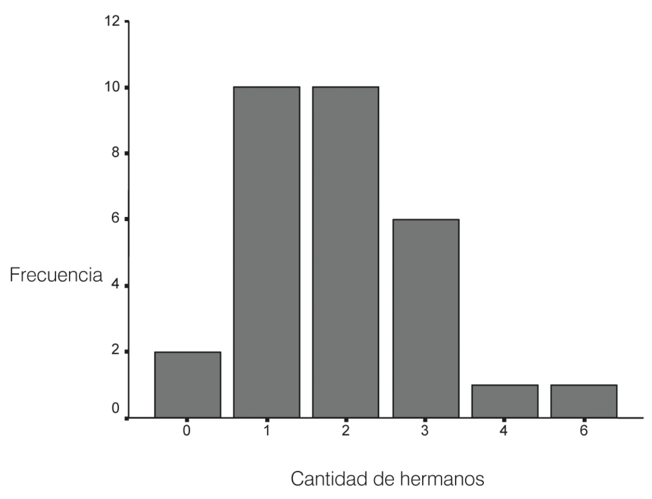
Es útil para comparar datos cualitativos o cuantitativos discretos. Puede usarse en sentido horizontal o vertical. Si las barras se toman del mismo ancho su longitud es proporcional a la frecuencia.

Gráfico VI.2. Gráfico de barras para la variable grupo sanguíneo de los alumnos (n=30)



Si la variable a representar es *cuantitativa discreta* las barras que corresponden a valores de la variable de una misma serie de datos no se tocarán y se representarán todas con el mismo ancho. Construimos un *Diagrama de Barras* para la *variable discreta* «cantidad de hermanos»:

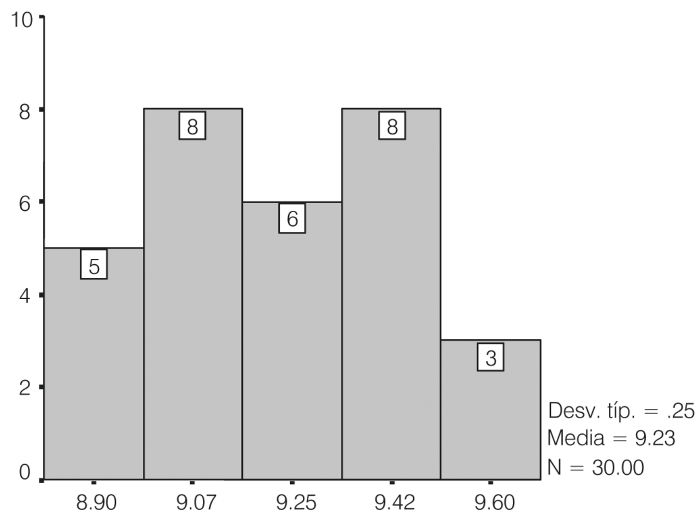
Gráfico VI.3. Gráfico de barras para la variable «cantidad de hermanos» de los alumnos (n=30)



• *Histograma*

Es la adaptación del diagrama de barras a una variable *cuantitativa continua*. Las barras se deben tocar en razón precisamente de esa continuidad. Evidentemente, la amplitud de cada barra se corresponde con la de cada intervalo de clase de la distribución de frecuencias. Las alturas de estas barras o rectángulos, si son de igual ancho, corresponderán a la frecuencia de cada clase.

Gráfico VI.4. Histograma para la variable «edad» (n=30)



Existen otras formas de representar los datos, variadas tablas y gráfico, pero van más allá de los objetivos de este capítulo.

VI.8. Medidas estadísticas más importantes o medidas resúmenes

Primero, diremos que hay tres medidas de tendencia central, llamadas así porque indican el *centro* de la distribución de datos. Estas son:

• *Media aritmética*
• *Mediana*
• *Modo*

Recordemos que el promedio o *media aritmética*, se simboliza $\overline{X}$ y la fórmula para obtenerla es:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

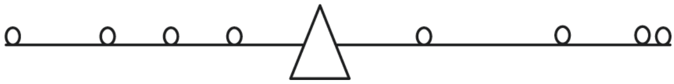
En realidad el símbolo Σ tal vez sea desconocido para el alumno, pero en algunos casos es conveniente discutir su significado ya que los manuales de las calculadoras lo emplean y con dos o tres ejemplos y ejercicios lo aprenden a utilizar rápidamente.

Esta medida $\overline{X}$ presenta algo positivo, el hecho de que se calcula sobre la base de *todos* los valores de la variable estudiada; por ejemplo, las notas obtenidas por los alumnos, todas se deben sumar, pero precisamente por esa razón es una medida que no siempre es representativa del comportamiento *medio* de la variable. Si hay un valor muy grande o pequeño en relación con los restantes la media aritmética se verá afectada.

Así, por ejemplo, si quiere calcular el «sueldo promedio» de una cierta cantidad de personas, entre las cuales hay uno que gana $18 000 mensuales y el resto son docentes, el promedio estará un poco aumentado, sobre todo si en la reunión hay pocas personas. Busque un ejemplo concreto y pruebe.

La *mediana*, tal vez la menos empleada, es aquel valor de la variable que deja el cincuenta por ciento de los datos a cada lado de la misma. Es decir, hay el cincuenta por ciento menor o igual que ella y el cincuenta por ciento mayor o igual que ella. Así, si tenemos ocho datos, cuatro deberán ser menores o iguales y cuatro, mayores o iguales, como se muestra en la figura:

Figura VI.2. Ubicación de la mediana con número de datos par



Evidentemente para poder calcularla los datos deben estar ordenados de menor a mayor o a la inversa. Es notorio que el valor de la variable no interviene en su cálculo, sólo es necesario para establecer el orden.

Volviendo a nuestro ejemplo, si los ocho datos corresponden al tema de los sueldos, ordenados los docentes por antigüedad y cargas familiares incluidas, y el último es el de… (dejamos que usted elija la actividad de esta persona) que gana $18 000, si lo reemplazo por otro que gana $180 000 a la mediana no la va a afectar, pero sí a la media aritmética, ¿no es cierto?

Por eso, en el ejemplo del costo promedio de las casas en Madison, que se analizó en el capítulo de geometría, el autor habla de promedio.

¿Qué significa promedio para él? «Promedio» puede querer decir media o mediana y puede haber una gran diferencia entre las dos cuando se trata del precio de las casas. La mediana es la medida usada generalmente por los estadísticos del gobierno y los economistas para describir el centro de una distribución de costos de casas. También para indicar el ingreso *per cápita* en los diversos países.

Posteriormente, en el artículo del que hemos extraído la cita acerca del precio de las casas en Madison, el autor dice que la mediana del costo de una casa en Madison en 1976 era 34 000 dólares, poniendo de manifiesto que el «promedio» anterior se refería a la media.

Actividad VI.3

---

1. Es importante discutir cuándo se usaría la media aritmética o simplemente media y cuándo la mediana para describir:

a) El resultado de una evaluación realizada a un grupo de alumnos.

b) El ingreso per cápita de los padres de esos alumnos o por qué no de otros alumnos. Tal vez comparar ambas medidas.

c) El placer de cada uno de estos alumnos en estudiar matemática, calificándola de 0 a 3.

2. Se sugiere investigar el ingreso per cápita en cinco países latinoamericanos y cinco europeos. ¿Qué conclusión se puede extraer? Es bueno trabajarlo con algún profesor de Geografía o Economía.

Modo o *moda*, como su nombre lo indica, es el valor de la variable que se repite la mayor cantidad de veces. No es muy usado en investigación educativa, pero ¿qué harían los fabricantes de zapatos, sombreros y autos, entre otros, si no lo conocieran? ¿Qué harían los fabricantes de ropa? ¿Y los productores de televisión? ¿Qué haría el gobierno si no lo buscara en los votos? Es interesante darlo y discutirlo con nuestros alumnos. Si bien no se usa demasiado cuando las variables son cuantitativas continuas, es muy usado para las variables cualitativas.

Deberíamos referirnos a las medidas de dispersión y a las herramientas estadísticas para comparar dos o más cursos, dos o más evaluaciones, dos o más reformas educativas, dos o más salarios de dos grupos distintos de empleados estatales, uno de ellos los docentes, pero esto es tema para un curso de estadística.

Capítulo VII
Reflexiones finales

ELENA F. DE CARRERA

1. He recorrido casi todas las sedes donde los encuentros con los docentes se llevaron a cabo. ¿Qué consecuencias me trajo este hecho aparejado? Fundamentalmente puedo decir que he aprendido mucho y de una forma experimental. He podido comprobar *in situ* lo que es la diversidad, en todos sus aspectos. He podido comprobar la enorme vastedad de esta diversidad, ya sea en la sociedad, en la formación de los docentes, en ellos mismos en cuanto a personas, en sus expectativas, en sus escuelas. Toda esta diversidad no cabría en este breve capítulo final.

Si bien la rápida transformación tecnológica, la globalización y la competencia llevada a su máxima expresión están modificando las modalidades de producción y de organización del trabajo según Tedesco (1995), esto no se evidencia en todos los lugares, no sólo del país, sino de la región centro–norte de la provincia de Santa Fe, pequeña con relación a la extensión del mismo, donde la experiencia de articulación —bajo esta modalidad de Jornadas de Reflexión— se ha llevado a cabo.

2. He podido observar desde el profesor abatido hasta aquel que cree estar de vuelta de todo por el simple hecho de ser profesor, pasando por el que está tremendamente preocupado por los alumnos y por su propia formación y actualización. Ese abatimiento que al primero le hace decir «nuestra función es la de asistentes sociales, de contenedores de una situación familiar y social muy complicada, no la de profesores de matemática». Esa situación familiar y social que es la cara menos agradable de esta crisis de nuestro país, que si bien es por todos conocida y es estructural, no por ello está totalmente dimensionada.

Frente a ella, existe este profesor que baja los brazos agobiado, pero también es posible encontrar a aquel que viaja kilómetros por caminos de tierra, que debe permanecer dos o tres días fuera de su casa para dar clases con ilusión a esos chicos de los cuales dice «son tremendamente respetuosos pero les falta la comida, las familias son sumamente humildes, con pocas posibilidades de acceso previo a la información y a la educación pero increíblemente respetuosas de la figura del profesor, (como sus hijos) y agradecidos», con el agravante de que no pueden aprender demasiado precisamente por la falta de comida. Ponen así en cruda evidencia lo sustentado por Bourdieu y Passeron: «es menos habitual que se perciban ciertas formas ocultas de la diferencia ante la educación, como la relegación de los niños de clases inferiores» (1964:15).

3. A estos docentes, que existen y en número elevado, con quienes compartí una jornada de reflexión en matemática, que se esfuerzan más allá de sus posibilidades o de lo que se considera normal, les rindo mi homenaje, porque aún creen en esta utopía maravillosa de la educación a lo largo de la vida y la hacen posible, sacrificando sus fines de semana y complicando sus días de semana.

4. La innovación y la mejora cotidiana de la oferta educativa son uno de los objetivos permanentes en esta Universidad, ya que la actualización continua del conocimiento se ha convertido en una necesidad en la sociedad actual, a la que se ha dado en llamar precisamente «sociedad del conocimiento». Según Tedesco (2000), «el conocimiento y la información estarían reemplazando a los recursos naturales, a la fuerza y/o al dinero, como variables clave de la generación y distribución del poder de la sociedad» (11—12). Precisamente, es la educación la encargada de incrementar y distribuir el conocimiento, por ello adquiere un valor inédito y una gran importancia. Esta importancia, según el autor, se da en dos sentidos diferentes: uno a nivel político—social y otro desde el punto de vista de los contenidos. En el primero, sugiriendo que en los lugares donde se produce y distribuye el conocimiento será donde se presentarán los mayores conflictos; y el segundo, en el problema de definir los conocimientos y capacidades que exige la formación del ciudadano. Preocupación ésta que está compartida, por ejemplo, por aquellos docentes e investigadores a los que les interesa la educación matemática y la educación estadística en particular.

¿Será este valor político—social de la educación el que llevará conflictos a los lugares donde el conocimiento se genera, lo que ocasionó tal vez la crisis institucional que sufrió y sufre la Universidad de Buenos Aires y sus colegios de nivel secundario? En ella se puso en evidencia la incapacidad para deliberar de sus órganos colegiados o tal vez para dejar que éste —la Asamblea Universitaria— delibere (no se pudo alcanzar un estado de discusión inteligente para lograr un fin común o, en el caso puntual que nos ocupa, una autoridad, el Rector que conforme a todos los estamentos).

Es indudable que la UBA, una de las más prestigiosas universidades de nuestro país, pierde terreno frente a este accionar. En él impera el tomar decisiones sin intercambio de opiniones; es más, el de no aceptar las de los demás, tampoco sus decisiones aunque sean mayoritarias, es ir al conflicto permanente, provocar la fractura total. Las guerras, bajo cualquier apariencia, son una consecuencia de este fundamentalismo sin fundamentos.

5. Es necesario formar al alumno en el trabajo en equipo, en los trabajos en grupos, debe aprender a discutir sus ideas, a defenderlas pero no a imponerlas a cualquier precio. Esto debe aprenderlo desde la escuela, pero también nosotros los docentes debemos saber aceptar el disenso, debemos trabajar en conjunto interactuando con nuestros colegas y así poner en práctica las condiciones inherentes a nuestro hacer docente.

6. Las nuevas tecnologías basadas en la informática permiten que la oferta educativa llegue hasta lugares remotos. Esta razón hizo que en una de las experiencias llevadas a cabo recurriéramos al Centro Multimedial Educativo de la Universidad del Litoral (CEMED). Pero en esta relación de la informática con la información y la formación, también surgen visibles la diversidad y sobre todo la falta de equidad. ¿Cuál es el problema principal? En realidad, no es uno solo, sino que son como mínimo dos. Uno de ellos, las pocas posibilidades de acceso a Internet —los sistemas de banda ancha no son frecuentes en algunas localidades—, donde las horas de acceso son variables, entre otros inconvenientes. Pero el otro problema es que no todos los docentes están familiarizados con este medio de comunicación, ni siquiera con el uso de una PC. No se los ha formado en ello y tener acceso a una no es simple en algunos lugares. Para el grado de desarrollo actual de la informática, también es necesario contar con el «técnico» que puede auxiliarnos con los problemas del *hardware*, con las actualizaciones, con los «virus informáticos», los problemas de *software* y la reposición de insumos, entre otros inconvenientes. No es simple lidiar con todo eso, nos es fácil para nosotros navegar y buscar direcciones de Internet, ¿sabe hacerlo el docente?, ¿dispone de accesos?, y sobre todo, ¿dispone de tiempo?

7. Es muy difícil conocer la realidad, es más fácil legislar en general. Se puede tener una opinión sobre la crisis educativa en Argentina desde un escritorio, o por algunos resultados de evaluaciones de alumnos, o en la época de los exámenes introductorios a las universidades, por algunas noticias de primera plana acerca de los resultados en general calamitosos. Lo que no se puede tener, al menos por ahora, es un diagnóstico ajustado sobre esa realidad. Toda generalización es banal. No se puede pensar en la realidad educativa del país por lo que pasa en Buenos Aires, esto ni siquiera es comparable a Rosario, Córdoba o la misma Santa Fe. Lo que sucede en una ciudad no se reproduce en el interior.

8. Necesitamos un docente que asuma la necesidad de mantenerse permanentemente actualizado y esto no es una afirmación de Perogrullo. Esto es lo que debe pasar si se quiere salir de la crisis. El mundo cambia, la ciencia avanza a pasos agigantados. La información crece exponencialmente. ¿Tenemos previsto nosotros, en tanto Nación, cómo hacer para que estudie el docente con 30, 36, 40 o más horas semanales de clase? Coincido en un todo con Savater cuando afirma que «cualquiera diría que los encargados de esa primera enseñanza de tan radical importancia son los profesionales a cuya preparación se dedica más celo institucional, los mejor remunerados y aquellos que merecen la máxima audiencia en los medios de comunicación». Convencida de que esto no es así, y asegurando que tampoco lo es en mi patria —Argentina— es que creo que debemos exigir, pagar y preocuparnos por preparar y apoyar en todos sus aspectos a nuestros docentes. Esto en pos de la máxima calidad; ellos nos permitirán así contar con una sociedad mejor preparada y esto sí es justicia social.

9. Creo que la política educativa de la Universidad Nacional del Litoral, materializada a través de su preocupación académica por la articulación entre el ciclo medio y el superior de manera que este pasaje sea lo menos traumático posible, es una muestra de lo que entre todos se puede realizar. La universidad debe —así lo hace— salir de sus muros y brindarse a la sociedad en la que se inserta.

Tal vez muchos estén pensando en el hecho de que no todos deben continuar sus estudios superiores, estoy de acuerdo, si esa es su vocación o su gusto, pero a todos debemos brindarle la posibilidad de hacerlo. El ser humano, correctamente formado en lo intelectual y humano, puede decidir en su más completa *libertad* no continuar sus estudios, pero él lo decide; yo, integrante de una sociedad no restrictiva y democrática, no se lo impongo. Sólo puedo intentar ayudarlo a encontrar su camino en ella.

10. Estoy convencida de que este trabajo en conjunto ha permitido mostrar que la universidad no es un bastión inaccesible, que se puede trabajar juntos para mejorar nuestra educación. No sólo que se puede, sino que se lo debe hacer.

Hemos mostrado que se puede dialogar. Es más, el trabajo en equipo y con los alumnos permitió y permitirá identificar los obstáculos que impiden un aprendizaje eficaz, mejorar nuestras investigaciones educativas y además hará que éstos aprendan no sólo a dialogar sino a respetar la diversidad de opiniones y a tener una conducta verdaderamente y no falsamente democrática.

Este libro es una pequeña muestra de lo que se puede lograr trabajando en equipo. He integrado un equipo que verdaderamente lo entendió y al que estoy muy orgullosa de pertenecer.

Un agradecimiento especial a los integrantes del departamento de Matemática de la Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas de la Universidad Nacional del Litoral.

Bibliografía

Alaniz, R. (2005). *Hombres y mujeres en tiempos de revolución: de Vértiz a Rosas*. Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral.

Alsina, C.; Fortuny, J.; Pérez, R. (1997). *¿Por qué geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis.

Alsina, C. (2000). *La matemática hermosa... y otras conferencias*. Buenos Aires: Red Olímpica.

Araujo, J.; Keilehauer, G.; Pietrocola, N.; Vavilov, V. (2000). *Área y volumen en la geometría elemental*. Buenos Aires: Red Olímpica.

Barberá, E; Badía, A. (2004). *Educar con aulas virtuales: Orientaciones para la innovación en el proceso de enseñanza y aprendisaje*. Madrid: Machado.

Batanero, C. (1999). «Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística – Desafios para o Século XXI». *Actas de la Conferencia Internacional*. Florianópolis, Santa Catarina: UFSC.

Bisquera, R. (1989). *Médos de investigación educativa*. Barcelona: Ceac.

Bourdieu, P. y Passeron, J. C. (1964). *Los herederos. Los estudiantes y la cultura*. Buenos Aires: Siglo XXI.

Boyer, C. B. (1996). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (2004). *Introducción al estudio de enseñanza del razonamiento y prueba: paradojas.* En «Proof./Preuve Int. Newsletter». On the Teaching and Learning of matematical Proof. ISSN 1292-8763. Consultado el 12/10/12 en <lettrede-aprouve. it>

Bruner, J. (2004). *Realidad mantel y mundos posibles actos de imaginación que dan sentido a la experiencia*. Barcelona: Gedisa.

Cañon Loyes, C. (1993). *La Matemática, creación y descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontífica Comillas de Madrid.

Carrera, E. F. de; Nitti, L. R. (2005). *Matemática. Programa de Articulación General y Disciplinar de preparación para la continuidad de Estudios Superiores*. Santa Fe: Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe y Universidad Nacional del Litoral.

Chevallard, I.; Bosch, M; Gascón, J. (1997). *Estudiar matemática. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: ICE–Horsori, Universidad de Barcelona.

Chevallard, I. (2000). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Courant, R.; Robbins, H. (1979). *¿Qué es la matemática? Exposición elementos de ideas y métodos.* Madrid: Colección Ciencia y Técnica Aguilar.

De Alba, A. (1998). *Currículo: crisis, mito y perspectivas*. Buenos Aires: Miño y Dávila.

Deleuze, G.; Guattari, F. (1994). *Rizoma*. México: Coyoacán.

Delors, J. (1996). *La educación encierra un tesoro*. Ediciones UNESCO.

Duschatzky, S. (1995). *Indicios sobre el sentido del conocimiento escolar*. Buenos Aires: FLACSO.

Freire, P. (1994). *La naturaleza política de la educación*. Barcelona: Planeta Agostini.

Gallardo, S. (2006). «Cómo enseñar matemática y no morir en el intento». *EXACTAmente* (16), 26 – 29. Consultado El 13/12/2010 en <http://www.fcen.uba.ar/publicac/revexact/exacta16/educa.htm>

Gardner, M. (1984). *Carnaval Matemático*. Madrid: Alianza.

Hughes – Hallett, D; Gleason, A. (1996). *Cálculo*. México: Cecsa.

Jaim Etcheverry, G. (2000). *La tragedia educativa*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Kasner, E; Newman, J. (1987). *Matemáticas e imaginación*. Barcelona: Salvat Editores S.A.

Kirk, J. y Miller, M. (1986). *Reliability, validity and qualitative research*. Beverly Hills: CA, Sage.

Mandelbrot, B. (1987). *Los objetos fractales*. Barcelona: Tusquets.

Peitgen, H.; Richter, P. (1986). *The beauty of Fractals*. Berlin: Springer–Verlag.

Perelman, Y. (1915) Álgebra recreativa. Madrid: Libros Tauro.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Nueva Jersey: Princeton University Press.

Puig Adam, P. (1947). *Curso de Geometría Métrica*. Madrid: Euler.

Salas, S.; Hille, E. (1976). *Cálculo de una y varias variables con geometría analítica.* Barcelona: Reverté.

Salas, S.; Hille, E.; Etgen, G. (2002). *Calculus*, vol. I. Barcelona: Reverté.

Santaló, L. (1994). *La matemática una filosofía y una técnica*. Barcelona: Aries.

Savater, F. (1997). *El valor de educar*. Buenos Aires: Ariel.

Stewart, J. (2007). *Cálculo de una variable trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning/Thomson Internacional.

Tedesco, J. C. (1995*). El nuevo pacto educativo*. Madrid: Grupo Anaya.

———(2000). *Educar en la Sociedad del Conocimiento*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Thomas & Finney (1998). *Cálculo con geometría analítica*, vol. 1. Buenos Airs: Adisson–Wesley Iberoamericana.

Touraine, A. (2006, 27 de febrero). «El país paga caro la falta de gestión». *La Nación*.

Bibliografía consultada

Angel, A. (2004). *Álgebra Intermedia*. México: Pearson. Prentice Hall.

Amster, P. (2004). *La matemática como una de las Bellas Artes*. Buenos Aires: Siglo XXI.

Camilioni, A. R. W. (1997). *Los obstáculos epistemológicos en la enseñanza*. Barcelona: Gedisa.

Davini, M. C. (2005). *La formación docente en cuestión: política y pedagogía.* Buenos Aires: Paidós.

Dorofeiev, G.; Potapov, M. y Rozov, N. (1973) *Temas Selectos de Matemática Elementales*. Moscú: Mir.

Garfunkel, S. (1999). *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Barcelona: Addison–Wesley Iberoamericana.

Grimm, L. G. (1993). *Statiscal Applications for the Behavioral Sciences*. Singapur: John Wiley.

Jaim Etcheverry, G. (2005, 22 de mayo). «Como la Hiedra». *La Nación*.

Le Corbusier, C. (1948). *El Modulor*. Buenos Aires: Poseidón.

Litwin, E. (1997). *Las configuraciones didácticas. Una nueva agenda para la enseñanza superior*. Buenos Aires: Paidós.

Morín, E. (2006). «Complejidad». Conferencia impartida en el Centro de Investigaciones Interdisciplinarias en Ciencias y Humanidades, Ciudad Universitaria. Rosario.

Rey Pastor, J.; Babini, J. (1951). *Historia de la Matemática*. Buenos Aires: Espasa Calpe.

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1964). *Elementos de Geometría Racional.* Madrid: Artes Gráficas.

Ribnikov, K. (1991). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Mir.

Siegel, A. F. (1988). *Statistics and data análisis an introduction*. Canadá: Wiley, John & Sons.

Santaló, L. A. (1993). *La Geometría en la formación de profesores.* Buenos Aires: Red Olímpica.

Tedesco, J. C. (2005). *Opiniones sobre política educativa*, Buenos Aires: Granica.

Vera, F. (1963). *Breve Historia de la Geometría*. Buenos Aires: Losada.

Vilanova y otros (2001). «El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje». *Revista Iberoamericana de Educación* (23), 23–25.

Páginas web consultadas

<http://www.fcen.uba.ar/publicac/revexact/exacta16/exaindex.htm>
<http://www.lanacion.com.ar/cultura/nota.asp?nota_id=784235>
<http://www.unlu.edu.ar/~mapco/apuntes/360/mapco360.htm>
<http://www.arrakis.es/~mcj/index.htm.Consultado el 01/11/2010>
«Se supo quién es la Lucy de Los Beatles». Disponible en:<http://www.ellitoral.com/index.php/diarios/2005/06/19/informaciongeneral/INFO-05.html>

Documentos consultados

«Convocatoria para un Plan de Desarrollo Institucional». Universidad Nacional del Litoral, febrero de 2000.
«Educación y Ciencia como proyecto político» Universidad Nacional del Litoral, octubre de 2005