UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

TESIS PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO ACADÉMICO DE

Doctor en Matemática

EN EL CAMPO DE: **Análisis**

TÍTULO DE LA TESIS:

Espacios de Lipschitz Generalizados y Operadores Invariantes por Traslaciones

INSTITUCIÓN DONDE SE REALIZÓ:
Departamento de Matemática – FIQ
Instituto de Matemática Aplicada del Litoral – IMAL

AUTOR:
Bibiana Iaffei

DIRECTORES DE TESIS:
Dr. Hugo Aimar
Dra. Eleonor Harboure

DEFENDIDA ANTE EL JURADO COMPUESTO POR:
Dr. Roberto Macías.
Dr. Carlos Segovia.
Dr. Felipe Zó.

AÑO DE PRESENTACIÓN: 1996

A la memoria de mi padre,

a quien extraño,

por su ejemplo de esfuerzo que persiste.

A mis hijos: Florencia, Nicolás y Santiago,

a quienes amo inmensamente,

por sus gestos de cariño y apoyo constantes.

A mi madre y mis tías,

a quienes quiero muchísimo,

por su aliento y ayuda incondicional.

A los que con su afecto,

están a mi lado fortaleciéndome.

Agradecimientos

Esta hoja es para ellos, Pola y Hugo, a quienes admiré desde mi banco de alumna, por su manera de hacer y trasmitir Matemática, quienes siguen sorprendiéndome en cada reunión de trabajo por la forma astuta y sutil en que discuten y dan solución a los problemas y a quienes les deseo dar mi profundo agradecimiento por todo lo que me enseñaron y apoyaron. Quiero además agradecer a Pola que fue quien me sugirió el problema, que dio lugar a este trabajo de tesis, el cual me atrapó y apasionó.

Índice general

INTRODUCCIÓN

Los operadores de integración fraccionaria de la teoría de potencial clásica, son operadores de convolución o invariantes por traslaciones que actúan mejorando tanto la regularidad local como la integrabilidad local de las funciones de una manera precisamente determinada por el orden de la integración y por los índices de los dominios. Aunque en principio de naturalezas diferentes, los conceptos de regularidad local e integrabilidad, las dos acciones mencionadas para operadores invariantes por traslaciones, están íntimamente ligadas.

Esta tesis se inserta en la investigación de las propiedades de acotación entre espacios de funciones integrables de operadores invariantes por traslaciones que son lineales y acotados entre espacios de funciones con regularidades locales. De los trabajos pioneros de Taibleson, Stein y Zygmund, se reconocen dos etapas centrales en la resolución de tales problemas:

1. detectar la estructura de convolución con un núcleo suave de los operadores invariantes por traslaciones que preservan regularidades locales y
2. probar que operadores de convolución con núcleos con determinada suavidad preservan clases de Lebesgue de funciones integrables.

Más precisamente, el propósito global de este trabajo es extender el **Teorema S-Z** (de Stein y Zygmund): *Si T es un operador lineal invariante por traslaciones que manda el espacio de las funciones Hölder(Lipschitz) continuas con exponente α, Λ_α, en el espacio Λ_β, para algún α y β, $\beta > \alpha$, entonces T manda L^p en L^q donde $1/q = 1/p - (\beta - \alpha)/n$ con $1 < p, q < \infty$*, a casos en que el control de la regularidad local se tiene a través de módulos de continuidad más generales que potencias y el de la integrabilidad ocurre a la manera de los espacios de Orlicz que generalizan a los espacios L^p clásicos de Lebesgue.

Si bien este problema sirvió de guía, en el desarrollo de su investigación surgieron múltiples aspectos del Análisis Real que abrieron nuevas líneas de trabajo en las que se han logrado resultados interesantes por sí mismos: caracterización de funciones Lipschitz con módulos de continuidad generales, en términos de sus extensiones armónicas; extensión de las clases $\Lambda(\alpha; p, \infty)$

de Taibleson ([Tai64] o también [Ste70]), análisis de su estructura; generalización de los potenciales de Bessel como isomorfismos entre estos espacios de Lipschitz generalizados; estudio de los operadores de convolución entre estos espacios, de las propiedades de suavidad de sus núcleos y de su acción sobre los espacios de Orlicz.

En el **Capítulo 1** se introducen primero los espacios de Lipschitz puntuales (L_η) asociados a módulos de continuidad controlados por funciones η de crecimiento, se estudian sus propiedades básicas y se obtiene una caracterización en términos de extensiones armónicas, generalizando el resultado clásico para Λ_α con $0 < \alpha < 1$. Este punto de vista para los espacios L_η induce, como en el caso de Λ_α, una definición natural de las clases $\Lambda(\eta;\infty)$ cuando el crecimiento de η es por lo menos lineal, en un sentido que se precisa a través de los llamados tipos de η. Se prueba una caracterización puntual en términos de diferencias segundas cuando el crecimiento de la función $\eta(t)$ no supera a t^2. Se obtiene también una descripción a la Sobolev de estos espacios, en el sentido que la pertenencia de una f a $\Lambda(\eta;\infty)$ equivale a la pertenencia de las derivadas de orden k de f a otro espacio de orden menor, $\Lambda(\tilde{\eta};\infty)$, con $\tilde{\eta}(t) = \frac{\eta(t)}{t^k}$. Finalmente se introducen espacios análogos para módulos de continuidad en L^p $(1 \leq p < \infty)$ y se dan algunas de las propiedades más importantes para su uso posterior.

En el **Capítulo 2** introducimos generalizaciones de los potenciales de Bessel a operadores formalmente del tipo $\varphi[(I-\Delta)^{-1/2}]$, donde φ incluye el caso usual de las potencias. Esto se hace introduciendo un multiplicador adecuado a nivel de la transformada de Fourier. Mientras que en el caso clásico los potenciales de Bessel constituyen un semigrupo: $J_{t^\alpha} \circ J_{t^\beta} = J_{t^\alpha t^\beta}$, la composición de dos de los nuevos potenciales induce un producto que en general es diferente del puntual, aunque equivalente, manteniendo en esta clase nueva una estructura similar a la de semigrupo. Uno de los aspectos más importantes de los potenciales de Bessel es que, siendo isomorfismos entre los espacios $\Lambda(\alpha;p,q)$, permiten reducir los problemas al caso en que α está entre cero y uno, donde la descripción de los espacios es más sencilla. El problema central del Capítulo 2 es buscar condiciones, lo más generales posibles, para que los potenciales de Bessel generalizados constituyan isomorfismos entre los espacios $\Lambda(\eta;p)$. Si bien la continuidad y la inyectividad se obtienen bajo condiciones bastante generales; la suryectividad, en cambio, nos ha llevado a restringir los "órdenes de suavidad" de estos potenciales a clases que, sin embargo, resultan suficientemente amplias como para incluir, además de las potencias, funciones tales como $t^\alpha(1+\log^+\frac{1}{t})$, que ya han aparecido repetidas veces en otros contextos. Cabe mencionar que la prueba aquí expuesta se aparta esencialmente de la clásica de las potencias y se basa en un Lema de Wiener [K] del Análisis Funcional.

En el **Capítulo 3** iniciamos el estudio de los operadores invariantes por traslaciones actuando entre los espacios de Lipschitz generalizados obteniéndose en primer término una desigualdad de tipo Young para la convolución, para luego abocarnos al estudio de la extensión del teorema de Taibleson [T2] sobre la caracterización de los núcleos de operadores invariantes por traslaciones. El resultado del Capítulo 2 constituye la herramienta que permite reducir el caso general al estudiado por Taibleson.

En otra dirección y teniendo como objetivo la segunda etapa mencionada para la extensión del resultado de Stein y Zygmund [SZ67], cronológicamente la primera en resolverse, tratamos en el **Capítulo 4** la continuidad en espacios de Orlicz de operadores de convolución cuyos núcleos integrables tienen módulos de continuidad en L^1 controlados por funciones de crecimiento que generalizan a las potencias de exponente menor que uno. Como paso intermedio, se prueba que bajo estas condiciones el núcleo pertenece a una clase de Orlicz débil que nos permite aplicar el resultado de O'Neil [O'N65] para operadores de convolución en espacios de Orlicz.

El **Capítulo 5** a manera de epílogo, reúne los resultados de los anteriores para resolver el problema que hemos enunciado como objetivo de este trabajo :*La extensión del Teorema S-Z a operadores invariantes por traslaciones entre espacios Lipschitz generalizados.*

Un ejemplo que a la vez sirve de modelo para la teoría clásica del tipo de operadores que se estudian en este trabajo, es el de integración fraccionaria I_α, que en el caso periódico satisface las hipótesis del Teorema S-Z. Como una generalización natural en los Capítulos 4 y 5, ilustraremos nuestros resultados con el análisis de operadores de tipo integral fraccionaria con un "orden de suavidad" más general que una potencia. Si bien el caso de estos operadores actuando sobre $\mathbb{R}^n$ no encuadra adecuadamente, ya que los núcleos no son integrables, el esquema se adapta uniformemente para las truncaciones, obteniéndose estimaciones entre espacios de Orlicz con normas independientes de la truncación, que coinciden con las que produce directamente una aplicación del Teorema de O'Neil.

CAPíTULO 1

LOS ESPACIOS LIPSCHITZ GENERALIZADOS

1.1. Las funciones de crecimiento y los espacios de Lipschitz puntuales asociados.

Estamos interesados en estudiar espacios de funciones definidos en términos de sus módulos de continuidad controlados por una función η que generaliza a las potencias; produciendo de este modo extensiones de los espacios Lipschitz-α usuales.

Comenzamos con el caso de η una función positiva definida sobre los reales positivos, no decreciente y que además cumple $\lim_{h\to 0^+} \eta(h) = 0$.

Previamente haremos algunas definiciones acerca de condiciones de crecimiento mediante la noción de tipo.

Definición 1.1. Dos funciones positivas son **equivalentes**($\sim$) si su cociente está acotado por arriba y por abajo.

Definición 1.2. Una función positiva η sobre $\mathbb{R}^+$ es de **tipo inferior** p (**tipo superior** p), si $\eta(st) \leq Cs^p\eta(t)$ para $s \leq 1 (s \geq 1)$.

La función η es de tipo inferior mayor que p si lo es de tipo inferior p_o para algún $p_o > p$, similarmente para tipo superior menor que p. Para una función no decreciente el tipo inferior es 0. Los tipos inferiores forman una semirrecta a izquierda y los superiores una semirrecta a derecha. Todo tipo inferior es menor o igual que todo tipo superior y además los tipos se preservan para funciones equivalentes.

Una condición necesaria y suficiente para la existencia de **tipo superior finito** es que la función satisfaga la propiedad $\mathbf{\Delta_2}$:

$$\eta(2t) \leq A\eta(t)$$

para alguna constante A y todo $t > 0$. Si bien estas funciones pueden no ser suaves es posible definir una equivalente que sea derivable y este proceso puede iterarse para obtener una equivalente con cualquier orden de regularidad, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 1.3. *Si η es no decreciente no negativa, de tipo superior finito, entonces η_ϵ definida por*

$$\eta_\epsilon(t) = t^\epsilon \int_0^t \frac{\eta(s)}{s^{1+\epsilon}} ds$$

siempre que η sea de tipo inferior mayor que ϵ, es derivable y equivalente a η. Para el caso que η tenga un tipo inferior mayor que 0, basta tomar $\epsilon = 0$, en este caso $\eta_0(t) = \int_0^t \frac{\eta(s)}{s} ds$, que denotaremos $\bar{\eta}$.

Demostración. Usando el que η es de tipo inferior a mayor que ϵ tenemos

$$\eta_\epsilon(t) = t^\epsilon \int_0^1 \eta(ut) \frac{1}{(ut)^{1+\epsilon}} t du \leq C t^\epsilon t^{-\epsilon} \eta(t) \int_0^1 u^a u^{-1-\epsilon} du = C \frac{\eta(t)}{a-\epsilon}.$$

La otra desigualdad la obtenemos usando el no decrecimiento de η y que es de tipo superior finito

$$\eta_\epsilon \geq t^\epsilon \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{\eta(s)}{s^{1+\epsilon}} ds \geq t^\epsilon \eta(t/2) \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{1}{s^{1+\epsilon}} ds \geq C\eta(t).$$

$\square$

En este trabajo supondremos que las funciones η satisfacen además la propiedad $\mathbf{\Delta_2}$ y las llamaremos **funciones de crecimiento**. Para una tal función es posible asociarle dos números, el supremo de los tipos inferiores y el ínfimo de los tipos superiores llamados respectivamente **índice inferior** (**i**) y **superior**(**I**)(de Orlicz Maligranda). Por lo anterior, el índice inferior es menor o igual que el superior y pueden o no ser un tipo. Notemos que si una función η tiene índices i e I, las desigualdades de tipo se verifican para $i-\epsilon$ e $I+\epsilon$. Sin embargo, condiciones definidas por desigualdades estrictas para los índices son equivalentes a las análogas para los tipos. Dado que nuestras condiciones sobre las funciones η que usaremos a lo largo de este trabajo son abiertas, serán expresadas en términos de los tipos inferiores y superiores.

Si $\eta_1(t) = t^p$, entonces los tipos inferiores forman el intervalo $(-\infty, p]$ y los superiores el intervalo $[p, +\infty)$, en este caso los índices coinciden. Sin embargo, hay funciones para las cuales los índices coinciden y no son equivalentes a potencias como por ejemplo funciones como $\eta_2(t) = t^\alpha(1 + \log^+ \frac{1}{t})$ cuyos índices coinciden con α, aunque es de tipo inferior $\alpha - \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ y de tipo superior α. Notemos que si tenemos funciones como $\eta_3(t) = \min(t^\alpha, t^\beta)$ o $\eta_4(t) = \max(t^\alpha, t^\beta)$ con $\alpha < \beta$, ambas son de tipo inferior α y superior β sin importar cual de ellos rige el comportamiento en un entorno del origen. Dado que para nosotros las funciones η controlarán módulos de continuidad de funciones acotadas, será solamente relevante el comportamiento de η cerca del origen. Los ejemplos anteriores sugieren que las nociones de tipos y de índices globales dadas anteriormente no resultan adecuadas para describir los espacios de Lipschitz generalizados que vamos a definir, por esta razón introducimos la noción de **tipos locales** que reflejan el comportamiento en el origen de estas funciones η. Para ello observamos que una forma equivalente de decir que η es de tipo inferior a y superior b es la siguiente

$$C_1 s^b \eta(t) \leq \eta(st) \leq c_2 s^a \eta(t)$$

para $0 < s \leq 1$ y para todo $t > 0$. Cuando la segunda desigualdad se satisfaga para $t \leq 1$ diremos que η es de **tipo inferior local** a, mientras que cuando la primera se cumpla para $t \leq 1$ diremos que η es de **tipo superior local** b. De manera natural quedan definidos los **índices inferiores y superiores locales**($\mathbf{i_l}$ e $\mathbf{I_l}$). Notemos que para el caso de las funciones η_3 y η_4 los tipos inferiores locales son ahora los tipos que corresponden a las potencias que rigen el comportamiento en el origen, así tenemos que η_3 tiene índice local inferior y superior igual a β y η_4 igual a α. Finalmente observemos que la semirrecta de los tipos inferiores locales contiene a la semirrecta de inferiores globales y simétricamente la de los tipos superiores locales contiene a la de los tipos superiores globales, de modo que se verifican las desigualdades

$$i \leq i_l \leq I_l \leq I.$$

Dado que la mayoría de las propiedades que probaremos sobre los espacios de Lipschitz generalizados asociados a una función de crecimiento η requerirán que la diferencia entre los índices sea menor que 1, elegiremos entre las funciones η que definen el mismo espacio aquellas cuyos tipos superior e inferior estén más próximos. La última desigualdad muestra que es menor la distancia entre los tipos locales que la que existe entre los tipos globales, esta cuestión junto con lo antes señalado respecto de la relevancia del comportamiento de la función η en el origen nos conducen a elegir dada una función η otra $\tilde{\eta}$ de modo que sus tipos globales sean los locales de η y que como veremos luego ambas funciones producen el mismo espacio.

Proposición 1.4. *Si η es una función de crecimiento de tipos locales a y b, existe una función $\tilde{\eta}$ que coincide con η en $[0,1]$ y $\tilde{\eta}$ tiene tipos globales iguales a los locales de η.*

Demostración. Si definimos $\tilde{\eta}$ como sigue

$$\tilde{\eta}(t) = \begin{cases} \eta(t), & \text{si } t < 1; \\ \frac{1}{\eta\left(\frac{1}{t}\right)}, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

sólo debemos probar que si η tiene tipos locales a y b, $\tilde{\eta}$ tiene tipos globales a y b, pues la recíproca es inmediata por restricción . Comenzamos con el tipo inferior por lo que suponemos $s \leq 1$ y consideramos

- si $t < 1$ es inmediato que $st < 1$ por lo que resulta

$$\tilde{\eta}(st) = \eta(st) \leq c_2 s^a \eta(t) = c_2 s^a \tilde{\eta}(t),$$

- si en cambio es $t \geq 1$ puede ser que $st < 1$ o bien $st \geq 1$, en el primer caso usamos $\eta\left(\frac{1}{t}\right) \leq c_2 \left(\frac{1}{t}\right)^a \eta(1)$ obteniendo

$$\tilde{\eta}(st) = \eta(st) \leq c_2 (st)^a \eta(1) \leq c_2^2 \eta^2(1) s^a \frac{1}{\eta\left(\frac{1}{t}\right)} = c_2^2 \eta^2(1) s^a \tilde{\eta}(t),$$

en el segundo caso utilizamos que $\eta\left(\frac{1}{t}\right) = \eta\left(s\frac{1}{st}\right) \leq c_2 s^a \eta\left(\frac{1}{st}\right)$ logrando

$$\tilde{\eta}(st) = \frac{1}{\eta\left(\frac{1}{st}\right)} \leq c_2 s^a \frac{1}{\eta\left(\frac{1}{t}\right)} \leq c_2 s^a \tilde{\eta}(t).$$

Luego $\tilde{\eta}$ es de tipo inferior a. Seguimos con el tipo superior por lo que suponemos $s \geq 1$ y nuevamente consideramos

- si $t < 1$ puede ser que $st < 1$ o bien $st \geq 1$, en el primer caso empleamos $c_1\left(\frac{1}{s}\right)^b \eta(st) \leq \eta(t) = \eta(st\frac{1}{s})$ obteniendo

$$\tilde{\eta}(st) = \eta(st) \leq \frac{1}{c_1} s^b \eta(t) = \frac{1}{c_1} s^b \tilde{\eta}(t),$$

en el segundo caso usamos $c_1\left(\frac{1}{st}\right)^b \leq \eta(1)\left(\frac{1}{st}\right)$ pues $\frac{1}{st} \leq 1$ y la misma desigualdad pero para la variable t que es menor que 1, esto nos permite lograr

$$\tilde{\eta}(st) = \frac{1}{\eta\left(\frac{1}{st}\right)} \leq \frac{1}{c_1 \eta(1)} s^b t^b \leq \frac{1}{c_1^2 \eta^2(1)} s^b \eta(t) = \frac{1}{c_1^2 \eta^2(1)} s^b \tilde{\eta}(t),$$

- si $t \geq 1$, es inmediato que $st \geq 1$, de modo que utilizando

$$c_1 \left(\frac{1}{s}\right)^b \eta\left(\frac{1}{t}\right) \leq \eta\left(\frac{1}{st}\right)$$

tenemos

$$\tilde{\eta}(st) = \frac{1}{\eta\left(\frac{1}{st}\right)} \leq \frac{1}{c_1} s^b \frac{1}{\eta\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{1}{c_1} s^b \tilde{\eta}(t).$$

Por consiguiente $\tilde{\eta}$ es de tipo superior b. □

Luego de estas definiciones y proposiciones introducimos formalmente los espacios Lipschitz-η puntuales (L_η). Con $\omega_\infty(t)$ denotamos el módulo de continuidad en L^∞ de f: $\|f(x+t) - f(x)\|_\infty$, donde la norma infinito se toma como es usual, en la variable x.([Ste70])

Definición 1.5. Dada una función η no negativa y tal que

$$\lim_{h \to 0^+} \eta(h) = 0,$$

sea

$$L_\eta = \{f : f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{y} \quad \omega_\infty(t) = \|f(x+t) - f(x)\|_\infty \leq A\eta(|t|)\}.$$

La norma L_η está entonces dada por

$$\|f\|_{L_\eta} = \|f\|_\infty + \sup_{|t|>0} \frac{\|f(x+t) - f(x)\|_\infty}{\eta(|t|)}.$$

El próximo resultado muestra, que estos espacios permanecen invariantes si η se sustituye por una función equivalente cerca del origen.

PROPOSICIÓN 1.6. *Si* $\eta \sim \tilde{\eta}$ *en* $[0,1]$, *entonces* $L_\eta = L_{\tilde{\eta}}$ *y sus normas son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Si $f \in L_\eta$ y $\eta \sim \tilde{\eta}$, sigue que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L_{\tilde{\eta}}} &= \|f\|_\infty + \sup_{|t|>0} \frac{\|f(x+t)-f(x)\|_\infty}{\tilde{\eta}(|t|)} \\
&\leq \|f\|_{L_\eta} + \text{máx}\left(c\|f\|_{L_\eta}, \frac{2\|f\|_\infty}{\tilde{\eta}(1)}\right) \\
&\leq \|f\|_{L_\eta} + \text{máx}\left(\left(c, \frac{2\|f\|_\infty}{\tilde{\eta}(1)}\right)\|f\|_{L_\eta}\right) \\
&\leq C\|f\|_{L_\eta}.
\end{aligned}$$

Observemos que la proposición está probada, pues los papeles de η y $\tilde{\eta}$ son intercambiables y las inclusiones siguen de las desigualdades en norma. $\square$

OBSERVACIONES 1.7. *Realizamos algunas observaciones de utilidad en lo que sigue.*

- *Si* η *es una función casi decreciente, es decir si* $\eta(t_1) \leq C\eta(t_2)$ *para* $t_1 < t_2$, *siempre es posible encontrar una función equivalente* $\overline{\eta}$ *no decreciente, tomando por ejemplo* $\overline{\eta} = \sup_{0<s\leq t} \eta(s)$. *Por la propiedad anterior, cada vez que tengamos una función* η *de tipo superior finito y casi creciente, podemos restringirnos a la clase de las funciones de crecimiento.*
- *Sin pérdida de generalidad, podemos considerar los espacios* L_η *asociados a funciones de crecimiento* η *que satisfagan* $\eta(t)\eta\left(\frac{1}{t}\right) = 1$, *en vista del resultado anterior y de la Proposición 1.4.*
- *Como para estas funciones los tipos globales coinciden con los tipos locales, nos referiremos a ellos simplemente como los tipos de las mismas.*

Nuestro próximo paso será probar que las funciones de L_η constituyen un subespacio de las funciones continuas. Más precisamente,

PROPOSICIÓN 1.8. *Toda* $f \in L_\eta$ *coincide con una función continua salvo un conjunto de medida cero.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ϕ una función par de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ e integral 1 soportada en el intervalo [-1,1]. Para $y > 0$ y $f \in L_\eta$ consideramos la convolución de f con ϕ_y, siendo $\phi_y(x) = \frac{1}{y^n}\phi\left(\frac{|x|}{y}\right)$, que produce la regularización de f dada por $v(x,y) = (\phi_y * f)(x)$. La función v está definida en el semiespacio $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}$. Entonces

$$v(x,y) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_y(t)[f(x-t) - f(x)]dt$$

y así usando primero la estimación por η del módulo de continuidad ω_∞ en $-t$, luego escribiendo las integrales en coordenadas polares y considerando el soporte del núcleo ϕ, tenemos

$$\begin{aligned}\|v(x,y)-f(x)\|_\infty &\le \int_{\mathbb{R}^n} \phi_y(t)\omega_\infty(-t)dt \\ &\le A|S^{n-1}|\int_0^y \phi_y(r)\eta(r)r^{n-1}dr\end{aligned}$$

Ahora hacemos el cambio de variables $\frac{r}{y}=s$, como $s<1$ y η una función de crecimiento obtenemos

$$\begin{aligned}\|v(x,y)-f(x)\|_\infty &\le A|S^{n-1}|\int_0^1 \phi(s)\eta(sy)s^{n-1}ds \\ &\le CA|S^{n-1}|\left(\int_0^1 \phi(s)s^{n-1}ds\right)\eta(y) \\ &\le \tilde{C}\eta(y).\end{aligned}$$

Entonces para y_1 e y_2 positivos, tenemos que

$$\begin{aligned}\|v(x,y_1)-v(x,y_2)\|_\infty &\le \|v(x,y_1)-f(x)\|_\infty + \|v(x,y_2)-f(x)\|_\infty \\ &\le \tilde{C}\left(\eta(y_1)+\eta(y_2)\right).\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\{v(x,y) : y>0\}$ es una familia de Cauchy de funciones continuas de x en $\mathbb{R}^n$. Por completitud existe $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|v(x,y)-g(x)\|_\infty \to 0$, cuando $y \to 0$. Finalmente,

$$\|g(x)-f(x)\|_\infty \le \|v(x,y)-g(x)\|_\infty + \tilde{C}\eta(y)$$

para todo y, por lo tanto usando la condición $\lim_{h\to 0^+} \eta(h)=0$ se tiene $f=g$ en L^∞. $\square$

La continuidad de las funciones Lipschitz-η como acabamos de ver, se obtiene de la condición $\lim_{h\to 0^+}\eta(h)=0$. Por otra parte, si $\lim_{h\to 0}\frac{\eta(h)}{h}=0$ el espacio es trivial, en el sentido que sus únicos elementos son las constantes. En efecto, puesto que $\frac{|f(x+he_j)-f(x)|}{h} < \frac{\eta(h)}{h}$, se tiene que cada $\frac{\partial f}{\partial x_j}=0$ y por lo tanto f coincide en casi todo punto con una función constante. En la siguiente proposición se pone de manifiesto la relación que existe entre el comportamiento de η cerca del origen y los tipos de η

Proposición 1.9. *Si η es una función de tipos inferior a y superior b se cumple que*

$$a>\gamma \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\eta(h)}{h^\gamma}=0 \Rightarrow b>\gamma.$$

Demostración. La primera implicación es inmediata de la desigualdad del tipo inferior, pues considerando que nos interesa h pequeño, tenemos

$$\frac{\eta(h)}{h^\gamma} \le Ch^{a-\gamma}\eta(1)$$

y el segundo miembro de la desigualdad tiende a cero con h si $a - \gamma > 0$. Para la segunda tenemos en cuenta que, para $0 < h \leq 1$ vale

$$\eta(1) = \eta\Big(h.\frac{1}{h}\Big) \leq C\Big(\frac{1}{h}\Big)^b \eta(h),$$

o de otro modo $C'h^b \leq \eta(h)$, que junto con la condición del límite dice que debe verificarse que $C'h^{b-\gamma} < \epsilon, \forall\epsilon > 0$ y por consiguiente, debe ser $b - \gamma > 0$. $\square$

Finalmente observemos que para el caso en que η es además una función de tipo superior b menor que 1, L_η es no trivial ya que las funciones $\min(|x|^\alpha, 1)$ con $b \leq \alpha < 1$ están en L_η. Más aún, podemos construir una función f que en algún sentido es extremal dentro de una bola de L_η.

Con el objeto de construir esta f perteneciente a L_η, veremos antes algunas propiedades de las funciones η.

- Observamos en primer lugar que si el tipo superior de η es menor que uno, entonces $\frac{\eta(s)}{s}$ es **casi decreciente**. En efecto, para $s_1 < s_2$ se tiene

$$\eta(s_2) = \eta(\frac{s_2}{s_1}s_1) \leq C\left(\frac{s_2}{s_1}\right)^b \eta(s_1) \leq C\left(\frac{s_2}{s_1}\right)\eta(s_1).$$

- Notemos ahora que toda función casi decreciente puede verse como equivalente a una decreciente, en particular para $\frac{\eta(s)}{s}$ casi decreciente definimos

$$\frac{\overline{\eta}(u)}{u} = \sup_{u<s} \frac{\eta(s)}{s}, \tag{1}$$

que resulta equivalente a $\frac{\eta(u)}{u}$ pues

$$\overline{\eta}(u) = u \sup_{u<s} \frac{\eta(s)}{s} \geq u\frac{\eta(u)}{u} = \eta(u),$$

para la otra desigualdad usamos el casi decrecimiento del cociente $\frac{\eta(s)}{s}$,

$$\overline{\eta}(u) = u \sup_{u<s} \frac{\eta(u)}{u} \leq u \sup_{u<s} C\frac{\eta(u)}{u} = C\eta(u).$$

- Ahora bien toda función η tal que $\frac{\eta(u)}{u}$ es decreciente, es **subaditiva**: $\eta(u+s) \leq \eta(u) + \eta(s)$. Multiplicando ambos miembros de la desigualdad

$$\frac{\eta(s+u)}{s+u} \leq \frac{\eta(s)}{s}$$

por $\theta = \frac{s}{s+u}$ y ambos miembros de

$$\frac{\eta(s+u)}{s+u} \leq \frac{\eta(u)}{u}$$

por $1-\theta$ y luego sumando miembro a miembro las dos desigualdades obtenemos la desigualdad deseada.

- Volvamos ahora a la construcción de la función f. Las observaciones anteriores nos permiten afirmar que si η es de tipo superior menor que uno, existe una equivalente subaditiva que llamaremos $\overline{\eta}$. Más aún si tomamos $\overline{\overline{\eta}}(s)$ igual a $\text{mín}(\overline{\eta}(s), \overline{\eta}(1))$, $\overline{\overline{\eta}}$ resulta también subaditiva y además acotada. De aquí, para $f(x) = \overline{\overline{\eta}}(|x|)$ tendremos que $f \in L_\eta$ ya que es acotada y

$$|f(x+t) - f(x)| = |\overline{\overline{\eta}}(|x+t|) - \overline{\overline{\eta}}(|x|)| \leq C\overline{\overline{\eta}}(|t|) \leq C\eta(|t|).$$

Para funciones η de tipo superior menor que 1 lo observado anteriormente nos conduce a la proposición recíproca de la 1.6.

Proposición 1.10. *Si η es de tipo superior menor que 1 y se tiene que $L_\eta = L_{\tilde{\eta}}$ entonces, η y $\tilde{\eta}$ son equivalentes en el intervalo [0,1].*

Demostración. Según las observaciones anteriores, usando la definición anterior de la función que está en L_η , el hecho que $\eta(0) = 0$ y que los espacios L_η y $L_{\tilde{\eta}}$ coinciden, tenemos

$$\eta(|x|) = |f(x) - f(0)| \leq A\tilde{\eta}(|x|)$$

y puesto que los papeles de η y $\tilde{\eta}$ son intercambiables la prueba está concluída. $\square$

1.2. Caracterización de las funciones de L_η en términos de sus integrales de Poisson

Como se ha visto en la sección anterior, si η es de tipo inferior mayor que 1, el espacio L_η resulta trivial, igual que en el caso de las potencias de exponente mayor que uno. A fin de poder extender esta familia de espacios para funciones η más generales, daremos una caracterización de las funciones de L_η en términos de sus extensiones armónicas, esto es considerando $u(x,y) = (P_y * f)(x)$, donde $P_y(t) = \frac{c_n y}{(|t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}$ es el núcleo de Poisson en $\mathbb{R}^n$. Consideraremos primero, algunas propiedades conocidas del núcleo de Poisson, relevantes para nuestros propósitos.

(P.1) $P(x,y) = P_y(x)$ es una función armónica y homogénea de grado $-n$ como función de (x,y) perteneciente a $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

(P.2) $P_y = P_{y_1} * P_{y_2}, \quad y = y_1 + y_2.$

(P.3) $\int P_y(x)dx = 1$ y

(P.4) $\int \frac{\partial^k P_y}{\partial y^k}(x)dx = 0, \quad k \geq 1.$

(P.5) $|\frac{\partial^k P_y}{\partial y^k}| \leq C' y^{-n-k}$ y

(P.6) $\quad |\frac{\partial^k P_y}{\partial y^k}| \leq C'|x|^{-n-k}$.

(P.7) $\quad \|D^\alpha P_y\|_1 \leq \frac{A}{y^{|\alpha|}}$ donde $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n} \partial y^{\alpha_{n+1}}}$ con $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1}$ y $(x,y) = (x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$

Mientras que (P.1) a (P.4) son bien conocidas (ver [Ste70], [Tai64]), las propiedades (P.5), (P.6) y (P.7) son una consecuencia de la siguiente fórmula para las derivadas de una función homogénea de grado j en $\mathbb{R}^m$

$$\phi_{x_i}^{(k)}(\lambda x) = \lambda^{j-k} \phi {x_i}^{(k)}(x).$$

En efecto, derivando respecto de x_i el primer miembro de la igualdad

$$\phi(\lambda x) = \lambda^j \phi(x)$$

resulta

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi(\lambda x) = \phi_{x_i}(\lambda x) \lambda,$$

haciendo lo mismo en el segundo miembro

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi(\lambda x) = \lambda j \phi_{x_i}(x)$$

e igualando

$$\phi_{x_i}(\lambda x) = \lambda j \phi_{x_i}(x);$$

inductivamente, probado para un orden de derivación, supongamos que vale para el orden $k-1$ y probemos que vale para k; esto es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} \phi(\lambda x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_i^{k-1}} \phi(\lambda x) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\phi_{x_i}^{(k-1)}(\lambda x) \lambda^{k-1} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} [\lambda^{j-(k-1)} \phi_{x_i}^{(k-1)}(x) \lambda^{k-1}] \\
&= \lambda^j \phi_{x_i}^{(k)}(x),
\end{aligned}$$

donde se ha usado la hipótesis inductiva; de un modo similar al caso inicial podemos ver

$$\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} \phi(\lambda x) = \phi_{x_i}^{(k)}(\lambda x) \lambda^k,$$

finalmente igualando se tiene el resultado buscado.

Cabe observar que no presenta dificultad extender este cálculo a cualquier orden de derivación respecto de cualquier variable, para obtener

$$D^\alpha \phi(\lambda x) = \lambda^{j-|\alpha|} D^\alpha \phi(x).$$

Notemos que si ϕ es, además, de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$, entonces para todo multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_o^m$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
|D^\alpha \phi(x)| = \left| D^\alpha \phi\Big(|x| \frac{x}{|x|}\Big) \right| & \\
&= |x|^{j-|\alpha|} \left| D^\alpha \phi\Big(\frac{x}{|x|}\Big) \right| \\
&\leq \frac{C}{|x|^{|\alpha|-j}}, \qquad (2)
\end{aligned}
$$

pues la función $D^\alpha \phi$ es acotado en el compacto S^{m-1} de $\mathbb{R}^m$.

Observemos que pueden aplicarse las propiedades anteriores al núcleo de Poisson, pues es una función homogénea de de grado $-n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
P(x,y) &= \frac{1}{c_n} \frac{y}{(|x|^2 + y^2)^{(n+1)/2}} \\
&= \frac{1}{c_n} \frac{y}{y^2 (\frac{|x|^2}{y^2} + 1)^{(n+1)/2}} \\
&= \frac{1}{c_n} \frac{1}{y_n} \frac{1}{(\frac{|x|^2}{y^2} + 1)^{(n+1)/2}} \\
&= \frac{1}{c_n} \frac{1}{y_n} \varphi\Big(\frac{|x|}{y}\Big).
\end{aligned}
$$

Las estimaciones (P.5) y (P.6) se obtienen directamente de (2) para el núcleo

de Poisson con $m = n+1$, $j = -n$ y $\alpha = (0, 0, \ldots, k)$, teniendo en cuenta que $|x|$ en (2) es ahora $(|x|^2 + y^2)^{1/2}$, que a la vez es mayor o igual a y y $|x|$ en $\mathbb{R}^n$.

Para obtener (P.7) hacemos $\varphi(x,y) = D^\alpha P(x,y)$ y debemos ver que

$$
y^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x,y)| dx < A
$$

con A constante uniforme en y. Haciendo $u = \frac{x}{y}$

$$
y^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(uy, y) y^n du
$$

y usando la homogeneidad de φ tenemos

$$
y^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} y^{-n-|\alpha|} \varphi(u,1) y^n du = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u,1) du.
$$

Para probar la finitud de esta última integral, notemos que la acotación de φ en cualquier compacto garantiza la integrabilidad en la bola unitaria. Para estimar la integral en el complemento, usamos nuevamente la homogeneidad que nos permite expresar

$$\varphi(u,1) = |u|^{-n-k}\varphi\Big(\frac{u}{|u|},\frac{1}{|u|}\Big), \text{ y con esto}$$
$$\int_{|u|>1}\varphi(u,1)du = \int_{|u|>1}|u|^{-n-k}\varphi(1,\frac{1}{|u|})du$$

como φ es C^∞, está acotada en cualquier compacto, en particular $\varphi\Big(\frac{u}{|u|},\frac{1}{|u|}\Big)$, para u tal que $|u| \geq 1$ y como $|u|^{-n-k+n-1}$ resulta integrable en el infinito se tiene el resultado deseado. A continuación, caracterizamos los espacios

L_η a través del comportamiento de su extensión armónica, generalizando el resultado clásico de las funciones Lipschitz α, para α entre cero y uno (ver [Ste70]).

Proposición 1.11. *Supongamos que $f \in L^\infty$ y que η es una función de crecimiento de tipo inferior positivo a y de tipo superior b menor que 1. Entonces, $f \in L_\eta(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si*

$$\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_\infty \leq A\frac{\eta(y)}{y}. \tag{3}$$

Si A_1 es la menor constante A para la cual (3) *vale, entonces*

$$\|f\|_{\eta;\infty} = \|f\|_\infty + A_1 \quad y \quad \|f\|_{L_\eta}$$

son normas equivalentes.

Demostración. La propiedad de cancelación (P.4), nos permite escribir

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \int\frac{\partial P_y}{\partial y}(t)f(x-t)dt = \int\frac{\partial P_y}{\partial y}(t)[f(x-t)-f(x)]dt,$$

y las estimaciones (P.5) y (P.6), nos proveen del resultado deseado, en efecto

$$\begin{aligned}
\|\frac{\partial u}{\partial y}\|_\infty &\leq \|f\|_{L_\eta}\int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial P_y}{\partial y}|\ \eta(|t|)dt \\
&= \|f\|_{L_\eta}\left[\int_{S^{n-1}}\int_0^y + \int_{S^{n-1}}\int_y^\infty\right] |\frac{\partial P_y}{\partial y}| r^{n-1}\eta(r)drd\theta \\
&\leq \|f\|_{L_\eta}C'|S^{n-1}|\left[y^{-n-1}\int_0^y r^n\frac{\eta(r)}{r}dr + \int_y^\infty r^{-n-1}r^{n-1}\eta(r)dr\right] \\
&= \|f\|_{L_\eta}C'|S^{n-1}|\left[y^{-n-1}\int_0^1 y^n s^n\frac{\eta(ys)}{s}ds + \int_1^\infty \frac{1}{ys}\frac{\eta(ys)}{s}ds\right] \\
&\leq \|f\|_{L_\eta}C'|S^{n-1}|\left[y^{-1}\int_0^1 s^{n+a-1}\eta(y)ds + y^{-1}\int_1^\infty \eta(y)s^{b-2}ds\right] \\
&= \|f\|_{L_\eta}C'|S^{n-1}|\frac{\eta(y)}{y}\left[\frac{s^{n+a}}{n+a}\Big|_0^1 + \frac{s^{b-1}}{b-1}\Big|_1^\infty\right] \\
&\leq C\frac{\eta(y)}{y}.
\end{aligned}$$

Las hipótesis sobre los tipos de η aseguran la finitud de la expresión encerrada entre corchetes.

Para probar la recíproca demostramos primeramente el siguiente

Lema 1.12. *Supongamos $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y η de tipo superior menor que 1. Entonces la condición (3) es equivalente con la validez simultánea de las n condiciones siguientes:*

$$\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x_j}\right\|_\infty \leq A'\frac{\eta(y)}{y} \quad j = 1, ..., n. \tag{4}$$

La menor A en (3) es comparable con la menor A' en (4).

Demostración. La propiedad de semigrupo (P.2) del núcleo de Poisson nos permite escribir

$$u(x,y) = P_{y_1} * u(x, y_2)$$

y por lo tanto con $y_1 = y_2 = y/2$ se tiene que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x_j} = \frac{\partial P_{y/2}}{\partial x_j} * \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y/2}.$$

Luego, (P.7) y la suposición $\|\frac{\partial u}{\partial y}\|_\infty \leq A\frac{\eta(y)}{y}$ implican que

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x_j}\right\|_\infty \leq \left\|\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y/2}\right\|_\infty \left\|\frac{\partial P_{y/2}}{\partial y}\right\|_1 \leq A_1\frac{\eta(y)}{y^2}. \tag{5}$$

Sin embargo,

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,y)\right\|_\infty = \left\|\frac{\partial P_y}{\partial x_j} * f\right\|_\infty \leq \left\|\frac{\partial P_y}{\partial x_j}\right\|_1 \|f\|_\infty \leq cy^{-1}\|f\|_\infty,$$

así $\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,y) \to 0$ cuando $y \to \infty$ y por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,y) = -\int_y^\infty \frac{\partial^2}{\partial y' \partial x_j}u(x,y')dy',$$

entonces (5) nos da

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_\infty &\leq A_1 \int_y^\infty \frac{\eta(y')}{y'^2}dy' \\
&\leq A_1 \int_1^\infty \frac{\eta(sy)}{s^2 y}ds \\
&= A_1 \frac{1}{y}\int_1^\infty \frac{\eta(sy)}{s^2}ds \\
&\leq CA_1 \frac{1}{y}\eta(y)\int_1^\infty s^{b-2}ds \\
&\leq A_2 \frac{\eta(y)}{y},
\end{aligned}$$

pues $b < 1$. Inversamente supongamos que (4) se satisface; razonando como antes obtenemos que

$$\|\frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2}\|_\infty \leq A_3 \frac{\eta(y)}{y^2} \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Sin embargo, ya que u es armónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2},$$

luego tenemos $\|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\|_\infty \leq A_4 \frac{\eta(y)}{y^2}$ y un argumento similar de integración muestra que

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_\infty \leq A_5 \frac{\eta(y)}{y},$$

lo que concluye la prueba de (4). □

Prueba de la recíproca en la Proposición 1.11:

Supongamos que $\|\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\|_\infty \leq A\frac{\eta(y)}{y}$. Entonces el lema muestra que

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_j}u(x,y)\right\|_\infty \leq A' \frac{\eta(y)}{y}.$$

Escribimos $f(x+t) - f(x)$ del siguiente modo

$$\{u(x+t,|t|) - u(x,|t|)\} + \{f(x+t) - u(x+t,|t|)\} - \{f(x) - u(x,|t|)\}.$$

Ahora $|u(x+t,|t|)-u(x,|t|)| \leq \int_L |\nabla u(x+s,|t|)|ds$ donde L es el segmento rectilíneo que une x con $x+t$ de longitud $|t|$. Luego

$$|u(x+t,|t|)-u(x,|t|)| \leq |t| \sum_{j=1}^{n} \|u_{x_j}(x,|t|)\|_\infty \leq A_5|t|\frac{\eta(|t|)}{|t|} = A_5\eta(|t|).$$

También

$$f(x+t)-u(x+t,|t|) = \int_0^{|t|} \frac{\partial}{\partial y} u(x+t,y)dy$$

y así

$$|f(x+t)-u(x+t,|t|)| \leq \int_0^{|t|} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_\infty dy \leq C \int_0^{|t|} \frac{\eta(y)}{y} dy.$$

Con un tratamiento similar para $f(x)-u(x,y)$, la prueba de la proposición está concluida puesto que

$$|f(x+t)-f(x)| \leq A_5\eta(|t|) + C\int_0^{|t|} \frac{\eta(y')}{y'}dy' \leq A_6\eta(|t|).$$

□

Cabe observar que si las condiciones en los tipos no se satisfacen, es todavía posible encontrar una estimación del tamaño de $y\|\frac{\partial u}{\partial y}\|_\infty$, por una función de crecimiento de la forma $\int_0^y \frac{\eta(r)}{r}dr + y\int_y^\infty \frac{\eta(r)}{r^2}dr$, que generalmente no es comparable con η.

En la proposición 1.11, para que puedan caracterizarse los espacios L_η en términos de sus integrales de Poisson, se hace uso de que el tipo superior de η es menor que uno; luego, existen espacios que no caen bajo el alcance de esta caracterización. Por lo que esta proposición, nos induce a extender la definición de los espacios para una familia más amplia de funciones η. En lo que sigue extendemos la definición de los L_η imponiendo condiciones de tamaño a derivadas de las integrales de Poisson, con un orden relacionado con el tipo superior de η.

1.3. $\Lambda(\eta;\infty)$ para η de tipo inferior positivo.

Podemos ahora definir el espacio $\Lambda(\eta;\infty)$ para η una función de crecimiento . Supongamos que k es el menor entero mayor que el tipo superior b de η. Hacemos

$$\Lambda(\eta;\infty) = \{f : f \in L^\infty(\mathbb{R}^n) : \left\| \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(x,y) \right\|_\infty \leq A\frac{\eta(y)}{y^k}\}. \tag{6}$$

Si A_k denota la menor de las constantes A que aparecen en la desigualdad en (6), entonces podemos definir una norma en $\Lambda(\eta;\infty)$ por

$$\|f\|_{\eta;\infty} = \|f\|_\infty + A_k. \tag{7}$$

De acuerdo con la proposición 1.11, (6) es la caracterización de L_η cuando η es de tipo inferior positivo y superior menor que 1, con equivalencia de normas. Cabe observar la siguiente cuestión respecto de la condición en (6).

La estimación
$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial y^k}u(x,y)\right\|_\infty \leq A\frac{\eta(y)}{y^k}$$
es de interés sólo para y cerca de cero, ya que la desigualdad $\left\|\frac{\partial^k}{\partial y^k}u(x,y)\right\|_\infty \leq Ay^{-k}$ (la cual es más fuerte lejos de cero) sigue directamente del hecho que $f \in L^\infty$, y de la estimación (P.7) de las derivadas del núcleo. Esto nos dice que también a este nivel, la definición de $\Lambda(\eta;\infty)$ sólo depende del comportamiento local de η en [0,1], obteniéndose un resultado similar al de la Proposición 1.6 y que por lo tanto, podemos suponer como antes, que η satisface la condición de simetría de la función $\tilde{\eta}$ de la Proposición 1.4.

El lema siguiente muestra que también puede reemplazarse la estimación de $\frac{\partial^k}{\partial y^k}u(x,y)$ por la correspondiente para $\frac{\partial^l}{\partial y^l}u(x,y)$ donde l es cualquier entero mayor que el tipo superior b de η.

Lema 1.13. *Supongamos que $f \in L^\infty$, η de tipo superior b positivo. Sean m y l dos enteros mayores que b. Entonces las dos condiciones*
$$\left\|\frac{\partial^m}{\partial y^m}u(x,y)\right\|_\infty \leq A_m\frac{\eta(y)}{y^m} \quad y \quad \left\|\frac{\partial^l}{\partial y^l}u(x,y)\right\|_\infty \leq A_l\frac{\eta(y)}{y^l}$$
son equivalentes. Además las menores constantes A_m y A_l son comparables. En particular, se obtiene que
$$\|f\|_\infty + \sup_{y>0}\left(\frac{y^m}{\eta(y)}\left\|\frac{\partial^m}{\partial y^m}u(x,y)\right\|_\infty\right)$$
define en $\Lambda(\eta;\infty)$ una norma equivalente a $\|f\|_{\eta;\infty}$.

Demostración. Supongamos $m < l$, donde m es por lo menos 1, y que vale $\|\frac{\partial^m}{\partial y^m}u(x,y)\|_\infty \leq A_m\frac{\eta(y)}{y^m}$ probemos que se cumple
$$\left\|\frac{\partial^l}{\partial y^l}u(x,y)\right\|_\infty \leq A_l\frac{\eta(y)}{y^l}.$$
En efecto,
$$\frac{\partial^l}{\partial y^l}u(x,y) = \left(\frac{\partial^m}{\partial y^m}u\right)_{y/2} * \left(\frac{\partial^{l-m}}{\partial y^{l-m}}P_{y/2}\right),$$
por consiguiente
$$\left\|\frac{\partial^l}{\partial y^l}u(x,y)\right\|_\infty \leq \left\|\left(\frac{\partial^m}{\partial y^m}u\right)_{y/2}\right\|_\infty \left\|\left(\frac{\partial^{l-m}}{\partial y^{l-m}}P_{y/2}\right)\right\|_1$$
$$\leq A_m C_{l-m}\eta(y)y^{-l+m}.$$

Ahora suponemos $\|\frac{\partial^l}{\partial y^l}u(x,y)\|_\infty \leq A_l\frac{\eta(y)}{y^l}$ y probamos

$$\|\frac{\partial^m}{\partial y^m}u(x,y)\|_\infty \leq A_m\frac{\eta(y)}{y^m}.$$

Puesto que

$$\|\frac{\partial^n}{\partial y^n}u(x,y)\|_\infty = \left\|\frac{\partial^n}{\partial y^n}P_y * f\right\|_\infty \leq \left\|\frac{\partial^n}{\partial y^n}P_y\right\|_1 \|f\|_\infty$$

$$\leq C_n y^{-n}\|f\|_\infty,$$

se tiene que

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n}u(x,y) \to 0 \quad \text{cuando} \quad y \to \infty,$$

cualquiera sea $n > 0$. Por lo tanto, ya que $l > 1$

$$\frac{\partial^{l-1}}{\partial y^{l-1}}u(x,y) = -\int_y^\infty \frac{\partial^l}{\partial y'^l}u(x,y')dy'.$$

Entonces, la hipótesis nos da

$$\left\|\frac{\partial^{l-1}}{\partial y^{l-1}}u(x,y)\right\|_\infty \leq A_l C_m\frac{\eta(y)}{y^{l-m}}.$$

Iterando $l-m$ veces este procedimiento, obtenemos

$$\left\|\frac{\partial^m}{\partial y^m}u(x,y)\right\|_\infty = \left\|\frac{\partial^{l-(l-m)}}{\partial y^{l-(l-m)}}u(x,y)\right\|_\infty \leq A_m\frac{\eta(y)}{y^m}.$$

□

Los lemas siguientes permiten intercalar a estos espacios Lipschitz-η en la escala de los espacios Λ_α.

Lema 1.14. *Dada η de tipo superior b el espacio Λ_b está continuamente contenido en $\Lambda(\eta;\infty)$.*

Demostración. El espacio $\Lambda(\eta;\infty)$ según hemos definido, es el espacio de las funciones de L^∞ que satisfacen

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial y^k}u(x,y)\right\| \leq A\frac{\eta(y)}{y^k}$$

donde k es el menor entero mayor que el tipo superior de η. La norma de $f \in \Lambda(\eta;\infty)$ está definida como $A_1 + \|f\|_\infty$ donde A_1 es la menor de las constantes A que satisfacen la desigualdad anterior. La expresión

$$\frac{y^k}{\eta(y)}\left\|\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}\right\|_\infty$$

está acotada por un múltiplo de $\|f\|_\infty$, para $y > 1$ en virtud de lo observado respecto de la definición (6). Por consiguiente también está acotada por un múltiplo de $\|f\|_{\Lambda_b}$. Si $y < 1$,

$$\eta(1) = \eta(y\frac{1}{y}) \leq C\left(\frac{1}{y}\right)^b \eta(y),$$

de lo que resulta

$$\eta(y) \geq Cy^b\eta(1)$$

con lo que

$$\frac{y^k}{\eta(y)}\left\|\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}\right\| \leq Cy^{k-b}\left\|\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}\right\|_\infty.$$

Si $f \in \Lambda(b;\infty)$ tenemos la finitud de esta expresión asegurando la pertenencia de f a $\Lambda(\eta;\infty)$. Más aún, se tiene la siguiente desigualdad en norma que asegura que la contención es continua

$$\|f\|_{\eta;\infty} \leq C\|f\|_{\Lambda_b}.$$

$\square$

Lema 1.15. *Dada η de tipo inferior a el espacio $\Lambda(\eta;\infty)$ está continuamente contenido en Λ_a.*

Demostración. Para $f \in \Lambda(\eta;\infty)$, buscamos acotar

$$y^{k-a}\left\|\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}\right\|_\infty$$

donde k es cualquier entero mayor que a, en particular podemos elegir k mayor que el tipo superior de η. Si $y > 1$ la expresión anterior se encuentra acotada por $y^k\left\|\frac{\partial^k}{\partial y^k}u(x,y)\right\|_\infty$ la cual está acotada por una constante veces la norma infinito de f, en virtud de la observación que sigue a la definición (6). Si $y < 1$, usando el tipo inferior de η tenemos

$$\eta(y) \leq Cy^a\eta(1),$$

lo cual permite obtener

$$y^{k-a}\left\|\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}\right\|_\infty \leq C\eta(1)\frac{y^k}{\eta(y)}\left\|\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}\right\|_\infty,$$

expresión que se encuentra acotada pues $f \in \Lambda(\eta;\infty)$ con η de tipo superior menor que k. Igual que en el lema anterior se justifica la contención continua a partir de la siguiente desigualdad en norma

$$\|f\|_{\Lambda_a} \leq C\|f\|_{\eta;\infty}.$$

$\square$

Las definiciones (6) y (7) para $\Lambda(\eta;\infty)$, cuando el tipo superior de η es cualquiera, tienen una apariencia artificial comparada con la dada para el caso del tipo superior menor que uno. Esto es subsanado con las dos proposiciones siguientes que conjuntamente permiten dar una caracterización más natural de los mismos.

PROPOSICIÓN 1.16. *Supongamos que el tipo superior de η es menor que 2. Entonces $f \in \Lambda(\eta;\infty)$ sí y sólo si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\|_\infty \leq A\eta(|t|)$. Más aún la expresión*

$$\|f\|_\infty + \sup_{|t|>0} \frac{\|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\|_\infty}{\eta(|t|)}$$

es equivalente con la norma $\Lambda(\eta;\infty)$.

DEMOSTRACIÓN. Dado que $\frac{\partial^2}{\partial y^2}P_y(t)$ es una función par de la variable t es claro que

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial y^2}P_y(t)f(x-t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial y^2}P_y(t)f(x-t)dt + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial y^2}P_y(-t)f(x+t)dt,$$

y usando el promedio cero de la derivada segunda del núcleo de Poisson, (P.4),

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial y^2}P_y(t)[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]dt.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right\|_\infty &\leq \frac{Ac}{2}\{y^{-n-2}\int_{|t|\leq y}\eta(|t|)dt + \int_{|t|>y}|t|^{-n-2}\eta(|t|)dt\} \\
&\leq A\{y^{-n-2}\int_0^y \eta(r)r^{n-1}dr + \int_y^\infty \eta(r)r^{-n-2}r^{n-1}dr\} \\
&= A'\{y^{-n-2}\int_0^1 \eta(sy)(sy)^{n-1}yds + \int_1^\infty \eta(sy)(sy)^{-3}yds\} \\
&\leq A'\{y^{-n-2}C_a\eta(y)y^n\int_0^1 s^{a+n-1}ds + C_b\eta(y)y^{-2}\int_1^\infty s^{b-3}ds\} \\
&\leq A_1\frac{\eta(y)}{y^2}\left\{\frac{s^{a+n}}{a+n}\Big|_0^1 + \frac{s^{b-2}}{b-2}\Big|_1^\infty\right\} \\
&= A_2\frac{\eta(y)}{y^2}.
\end{aligned}$$

Para probar la recíproca escribimos

$$\Delta_t^2 F(x) = F(x+t)+F(x-t)-2F(x)$$

y observamos que si F tiene derivadas continuas, entonces

$$\begin{aligned}
\Delta_t^2 F(x) &= F(x+t) - F(x) + F(x-t) - F(x) \\
&= \int_0^{|t|} \frac{d}{ds} F(x+st')ds - \int_{-|t|}^{0} \frac{d}{ds} F(x+st')ds \\
&= \int_0^{|t|} \frac{d}{ds} F(x+st')ds + \int_0^{|t|} \frac{d}{ds} F(x-st')ds \\
&= \int_0^{|t|} \Big[\frac{d}{ds} F(x+st')ds - \frac{d}{ds} F(x-st')\Big] ds \\
&= \int_0^{|t|} \Big\{\int_{-s}^{s} \frac{d^2}{d\tau^2} F(x+t'\tau)d\tau\Big\} ds,
\end{aligned}$$

donde $t' = t/|t|$. Se sigue inmediatamente que

$$\left\|\Delta_t^2 F\right\|_\infty \leq |t|^2 \{\sum_{i,j} \left\|\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_\infty\}.$$

En efecto ya que,

$$\frac{dF}{d\tau} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \tau} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} t_i'$$

$$\frac{d^2F}{d\tau^2} = \sum_j \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i F} t_j' t_i'$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\Delta_t^2 F(x) &= \int_0^{|t|} \Big\{\int_{-s}^{s} \frac{d^2}{d\tau^2} F(x+t'\tau)d\tau\Big\} ds \\
&\leq \int_0^{|t|} \Big\{\int_{-s}^{s} \sum_j \sum_i \left\|\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}\right\|_\infty |t_i'||t_j'| d\tau\Big\} ds \\
&= \sum_j \sum_i \left\|\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}\right\|_\infty \int_0^{|t|} \Big\{\int_{-s}^{s} d\tau\Big\} ds \\
&= \sum_j \sum_i \left\|\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}\right\|_\infty \int_0^{|t|} 2s ds \\
&= |t|^2 \Big\{\sum_{i,j} \left\|\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}\right\|_\infty\Big\}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Si $f \in \Lambda(\eta; \infty)$ sabemos que $f \in \Lambda_a$ y éste está siempre contenido en un Λ_α con $0 < \alpha < 1$ cumpliéndose entonces

$$\|u(x,y) - f(x)\|_\infty \to 0 \quad \text{e} \quad y\|u_y(x,y)\|_\infty \to 0 \quad \text{cuando} \quad y \to 0.$$

Estas dos convergencias nos permiten escribir

$$\begin{aligned} y\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) &= \int_0^y \frac{\partial}{\partial y'}(y'\frac{\partial}{\partial y'}u(x,y'))dy' \\ &= \int_0^y y'\frac{\partial^2}{\partial y'^2}u(x,y')dy' + \int_0^y \frac{\partial}{\partial y'}u(x,y')dy' \\ &= \int_0^y y'\frac{\partial^2}{\partial y'^2}u(x,y')dy' + u(x,y) - f(x), \end{aligned}$$

de donde se concluye

$$f(x) = u(x,0) = \int_0^y y'\frac{\partial^2}{\partial y'^2}u(x,y')dy' - y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + u(x,y). \tag{9}$$

Sin embargo, los argumentos de los lemas 1.12 y 1.13 muestran que la desigualdad

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right\|_\infty \leq A\frac{\eta(y)}{y^2}$$

implica las estimaciones

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u\right\|_\infty \leq A'\frac{\eta(y)}{y^2} \qquad \left\|\frac{\partial^3}{\partial y\partial x_i\partial x_j}u\right\|_\infty \leq A'\frac{\eta(y)}{y^3}.$$

Luego, usando (9)

$$f(x+t)+f(x-t)-2f(x) = \int_0^y y'[\frac{\partial^2}{\partial y'^2}u(x+t,y')+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}u(x-t,y')-2\frac{\partial^2}{\partial y'^2}u(x,y')]dy'-$$

$$-y[\frac{\partial}{\partial y}u(x+t,y)+\frac{\partial}{\partial y}u(x-t,y)-2\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)]+u(x+t,y)+u(x-t,y)-2u(x,y),$$

de modo que, por (8)

$$\begin{aligned} \left\|\Delta_t^2 f\right\|_\infty &\leq \int_0^y Ay'\frac{\eta(y')}{y'^2}dy' + y\left\|\Delta_t^2\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_\infty + \left\|\Delta_t^2 u\right\|_\infty \\ &\leq 4A\int_0^y \frac{\eta(y')}{y'}dy' + y^3A'\frac{\eta(y)}{y^3} + y^2A'\frac{\eta(y)}{y^2} \\ &= 4A\int_0^y \frac{\eta(y')}{y'}dy' + A'\eta(y) \leq A''\eta(y), \end{aligned}$$

usando la equivalencia entre $\int_0^y \frac{\eta(y')}{y'}dy'$ y $\eta(y)$, por ser η de tipo inferior positivo. □

PROPOSICIÓN 1.17. *Sea η de tipo inferior $a > 1$. Entonces $f \in \Lambda(\eta;\infty)$ sí y sólo si $f \in L^\infty$ y $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \Lambda(\tilde{\eta};\infty)$ $j = 1,...,n$ con $\tilde{\eta}(h) = \frac{\eta(h)}{h}$. La norma $\|f\|_{\eta;\infty}$ y $\|f\|_\infty + \sum_{j=1}^n \|\frac{\partial f}{\partial x_j}\|_{\tilde{\eta};\infty}$ son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Sean a el tipo inferior de η y b su tipo superior. Supongamos primero que $f \in \Lambda(\eta;\infty)$ y observemos que $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^\infty, j = 1, ..., n;$ esto se debe a la contención continua de $\Lambda(\eta;\infty)$ en Λ_a y a lo que se sabe para los espacios $\Lambda_\alpha, \alpha > 1$. Más aún se tiene la siguiente desigualdad en norma

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_\infty \leq \|f\|_{\eta;\infty}. \tag{10}$$

Para asegurar que $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \Lambda(\tilde{\eta};\infty)$, resta ver que la integral de Poisson de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ satisface para todo j una adecuada desigualdad en norma infinito. Consideremos primero el caso en que el tipo inferior de η está entre 1 y 2; más precisamente $1 < a \leq 2$ y que dista del tipo superior una distancia positiva no mayor que uno. Esto dice que el tipo superior de η es menor que 3 por lo que está asegurada una desigualdad como la siguiente

$$\left\| \frac{\partial^3}{\partial y^3} u \right\|_\infty \leq A \frac{\eta(y)}{y^3},$$

haciendo notar que 3 no es necesariamente el primer entero positivo mayor que el tipo superior de η, pero podemos usar las equivalencias dadas en el Lema 1.13. Esta desigualdad implica, como sabemos

$$\left\| \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x_j} u(x,y) \right\|_\infty \leq A \frac{\eta(y)}{y^3}.$$

En efecto, puesto que

$$\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x_j} u(x,y) = \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x_j} P_y * f \right)(x),$$

tenemos

$$\left\| \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x_j} u(x,y) \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x_j} P_y \right\|_1 \|f\|_\infty \leq C y^{-3} \|f\|_\infty.$$

Como esta expresión tiende a cero cuando $y \to \infty$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x_j} u(x,y) \right\|_\infty &= \left\| - \int_y^\infty \frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x_j} u(x,y') dy' \right\|_\infty \\
&\leq \int_y^\infty \left\| \left(\frac{\partial^3}{\partial y'^3} u \right)_{y'/2} \right\|_\infty \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} P_{y'/2} \right\|_1 dy' \\
&\leq \int_y^\infty A \frac{\eta(y')}{y'^3} C y'^{-1} dy' \\
&= A_1 \int_1^\infty \frac{\eta(uy)}{(uy)^4} y du \\
&\leq A_2 y^{-3} \eta(y) \int_1^\infty u^{b-4} du \\
&= A_3 \frac{\eta(y)}{y^3}
\end{aligned}$$

en la convergencia de la integral se ha usado que b es menor que 3. Puesto que la derivada débil de f respecto de x_j, esto es $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ satisface que su integral de Poisson es $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ pues

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} * P_y \right)(x) = \int \frac{\partial f}{\partial x_j}(x-t) P_y(t) dt$$

que es absolutamente convergente, resultando igual a

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int f(x-t) P_y(t) dt = \frac{\partial}{\partial x_j} u(x,y).$$

Luego la desigualdad

$$\left\| \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x_j} u(x,y) \right\|_\infty \leq A \frac{\eta(y)}{y^3} = A \frac{\eta(y)}{y} y^{-2} \tag{11}$$

dice que $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \Lambda(\tilde{\eta}; \infty)$ con $\tilde{\eta}(h) = \frac{\eta(h)}{h}$ pues el tipo superior de $\frac{\eta(h)}{h}$ es $b - 1 < 3 - 1 = 2$. Además de (10) y (11) se tiene

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{\tilde{\eta};\infty} \leq C_1 \|f\|_{\eta;\infty},$$

y por consiguiente

$$\|f\|_\infty + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{\tilde{\eta};\infty} \leq C_2 \|f\|_{\eta;\infty}.$$

Si el tipo inferior de η es mayor que 2, supongamos para mayor precisión $k < a \leq k+1$, $k > 2$ de modo similar se prueba que

$$\left\| \frac{\partial^{k+2}}{\partial y^{k+1} \partial x_j} u(x,y) \right\|_\infty \leq A \frac{\eta(y)}{y^{k+2}} = A \frac{\tilde{\eta}(y)}{y^{k+1}}$$

donde $\tilde{\eta}(y) = \frac{\eta(y)}{y}$ y $\tilde{\eta}$ de tipo superior menor que $k+1$ de modo que se tiene la pertenencia de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ a $\Lambda(\tilde{\eta};\infty)$.

Respecto de la recíproca, si $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \Lambda(\tilde{\eta};\infty)$ con tipo superior de $\tilde{\eta}$ mayor o igual que k y menor que $k+1$, sabemos que

$$\left\| \frac{\partial^{k+2}}{\partial y^{k+1}\partial x_j} u(x,y) \right\|_\infty \leq A \frac{\tilde{\eta}(y)}{y^{k+1}} = A \frac{\eta(y)}{y^{k+2}}, \tag{12}$$

pero esta desigualdad implica la siguiente

$$\left\| \frac{\partial^{k+2}}{\partial y^{k+2}} u(x,y) \right\|_\infty \leq A \frac{\eta(y)}{y^{k+2}}.$$

En efecto, usando (12) y (P.7) resulta

$$\left\| \frac{\partial^{k+3}}{\partial y^{k+1}\partial x_j^2} u(x,y) \right\|_\infty \leq C_1 A \frac{\eta(y)}{y^{k+3}}.$$

Observemos que $\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}} u(x,y)$ es armónica pues u lo es respecto de las $n+1$ variables; en efecto

$$\begin{aligned}\Delta \frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}} u(x,y) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}} u(x,y) \\ &= \frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}} \Delta u = 0.\end{aligned}$$

Luego tenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}} u(x,y) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}} u(x,y)$$

y por lo tanto,

$$\left\| \frac{\partial^{k+3}}{\partial y^{k+3}} u(x,y) \right\|_\infty \leq C_2 A \frac{\eta(y)}{y^{k+3}},$$

condición que por el Lema 1.13 es equivalente a

$$\left\| \frac{\partial^{k+2}}{\partial y^{k+2}} u(x,y) \right\|_\infty \leq C_2 A \frac{\eta(y)}{y^{k+2}},$$

pues $b < k+2$. Por lo tanto $f \in \Lambda(\eta;\infty)$ y

$$\|f\|_{(\eta;\infty)} \leq C_2 \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{(\tilde{\eta};\infty)} \leq C_2 \left(\|f\|_\infty + \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{(\tilde{\eta};\infty)} \right).$$

□

Cabe observar que, al menos en la demostración precedente, ha sido importante la condición $b - a < 1$. Si, entonces consideramos sólo la clase de las funciones η con $a > 0$ y $b - a < 1$, el estudio de los espacios $\Lambda(\eta;\infty)$

se reduce al caso de $b \leq 1$. En este sentido es que el teorema precedente provee una caracterización de tipo Sobolev para los espacios de Lipschitz generalizados.

1.4. Los espacios $\mathbf{\Lambda}(\eta;p)$

En el estudio de operadores actuando sobre los espacios $\Lambda(\eta;\infty)$ aparecen núcleos que pertenecen a clases de Lipschitz más generales definidas en términos de módulo de continuidad en L^p para $p \geq 1$. En completa analogía con nuestra definición de $\Lambda(\eta;\infty)$ podemos definir los espacios $\Lambda(\eta;p)$, $p \geq 1$; reemplazando la norma ∞ por la norma p. Comenzamos con el caso de una función η de tipo inferior positivo y superior menor que uno. Luego $\Lambda(\eta;p)$ consiste en todas las funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$ para las cuales la norma

$$\|f\|_p + \sup_{|t|>0} \frac{\|f(x+t)-f(x)\|_p}{\eta(|t|)} \tag{13}$$

es finita. Las propiedades de los espacios $\Lambda(\eta;\infty)$ valen con las modificaciones obvias, de modo que tenemos la siguiente caracterización

PROPOSICIÓN 1.18. *Supongamos $f \in L^p$, η de tipo inferior positivo y superior menor que uno. Entonces $f \in \Lambda(\eta;p)$ si y sólo si*

$$\sup_{y>0} \left(\frac{y}{\eta(y)} \left\| \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \right\|_p \right) < \infty. \tag{14}$$

La norma $\Lambda(\eta;p)$ es equivalente con la norma

$$\|f\|_p + \sup_{y>0} \left(\frac{y}{\eta(y)} \left\| \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \right\|_p \right)$$

Procediendo como antes definimos $\Lambda(\eta;p)$ para η de tipo inferior positivo y superior cualquiera a distancia menor que uno de aquél. Sea k el menor entero mayor que el tipo superior de η. Hacemos

$$\Lambda(\eta;p) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : \sup_{y>0} \frac{y^k}{\eta(y)} \left\| \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(x,y) \right\|_p < \infty\} \tag{15}$$

Valen las caracterizaciones análogas a las dadas en las proposiciones 1.16 y 1.17. También vale la generalización de 1.13 para estos espacios, obteniendo normas equivalentes, que para referencia posterior la enunciamos explícitamente en el siguiente

LEMA 1.19. *Supongamos que $f \in L^p$, η de tipo superior b positivo. Sean m y l dos enteros mayores que b. Entonces las dos condiciones*

$$\left\| \frac{\partial^m}{\partial y^m} u(x,y) \right\|_p \leq A_m \frac{\eta(y)}{y^m} \quad \text{y} \quad \left\| \frac{\partial^l}{\partial y^l} u(x,y) \right\|_p \leq A_l \frac{\eta(y)}{y^l}$$

son equivalentes. Además las menores constantes A_m y A_l son comparables. En particular, se obtiene que

$$\|f\|_p + \sup_{y>0} \left(\frac{y^l}{\eta(y)} \left\| \frac{\partial^m}{\partial y^m} u(x,y) \right\|_p \right)$$

define en $\Lambda(\eta;p)$ una norma equivalente a $\|f\|_{\eta;p}$.

Es importante destacar, finalmente que, como en el caso de $\Lambda(\alpha;p,q)$ (ver [Tai64]), los nuevos espacios $\Lambda(\eta;p)$ son espacios de Banach que contienen a las funciones de Schwartz.

CAPíTULO 2

POTENCIALES DE BESSEL GENERALIZADOS

2.1. El núcleo $\mathbf{G}_\eta$ de $\mathbf{J}_\eta$: sus propiedades fundamentales.

Introducimos operadores que generalizan los potenciales de Bessel en el sentido que son operadores del tipo $\varphi[(I-\Delta)^{-1/2}]$ donde φ está en una clase de funciones de una variable que engloba las potencias. En el caso clásico de los Potenciales de Bessel J_α el núcleo tiene la expresión

$$G_\alpha(x) = C\int_0^\infty e^{-\pi\frac{|x|^2}{\delta}} e^{-\frac{\delta}{4\pi}} \delta^{\frac{-n+\alpha}{2}} \frac{d\delta}{\delta}.$$

Dada una función η creciente, con $\eta(0) = 0$ y de tipo superior finito resulta, entonces, natural introducir los núcleos

$$G_\eta(x) = C\int_0^\infty e^{-\pi\frac{|x|^2}{\delta}} e^{-\frac{\delta}{4\pi}} \delta^{-\frac{n}{2}} \eta(\sqrt{\delta}) \frac{d\delta}{\delta}.$$

Como veremos poniendo condiciones sobre η el operador de convolución con G_η que denotamos J_η, a nivel de transformada de Fourier tendrá la expresión

$$(J_\eta(f))\hat{} = \varphi((1+4\pi^2|x|^2)^{-1/2})\hat{f}(x).$$

Es decir, en términos formales

$$J_\eta(f) = \varphi[(I-\Delta)^{-1/2}](f),$$

donde I es el operador identidad, Δ el Laplaciano y la función φ está relacionada con la función η por la siguiente igualdad en términos de la transformada de Laplace $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\eta(\sqrt{\delta})}{\delta}\right](s) = C(\eta)\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi s}}\right). \tag{16}$$

Definición 2.1. Diremos que una función η satisface la propiedad $\mathcal{J}$ o que pertenece a $\mathcal{J}$ si es casi-creciente y no negativa de tipos inferior positivo y superior finito.

De propiedades elementales de la transformada de Laplace resulta que si $\eta \in \mathcal{J}$ la expresión en (16) es finita para todo $s > 0$, decreciente y pertenece a $\mathcal{C}^\infty[(0,\infty)]$, con todas sus derivadas acotadas uniformemente en cualquier semirrecta hacia la derecha con el extremo izquierdo positivo.

Para las funciones de $\mathcal{J}$ se tiene la buena definición del operador J_η ya que la integral que define la Transformada de Laplace es convergente en los extremos. De hecho, el tipo inferior positivo rige el comportamiento en el cero y en el infinito la condición de tipo superior finito garantiza el dominio del orden exponencial negativo asegurando la convergencia de la integral.

Tomando $s = \frac{1+4\pi^2|x|^2}{4\pi}$, con $x \in \mathbb{R}^n$ en (16) se tiene

$$\mathcal{L}\left[\frac{\eta(\sqrt{\delta})}{\delta}\right]\left(\frac{1+4\pi^2|x|^2}{4\pi}\right) = C(\eta)\varphi[(1+4\pi^2|x|^2)^{-1/2}]. \tag{17}$$

Proposición 2.2. *Sea η una función perteneciente a $\mathcal{J}$, entonces*

(G-1) $G_\eta \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

(G-2) $(G_\eta)\hat{}(x) = \varphi[(1+4\pi^2|x|^2)^{-1/2}]$,

(G-3) $(G_\eta)\hat{} \in \mathcal{O}$, *el espacio de las funciones infinitamente diferenciables que tienen todas sus derivadas de crecimiento lento, y*

(G-4) $\frac{1}{(G_\eta)\hat{}} \in \mathcal{O}$.

Demostración. Suponiendo que valen **(G-1)** y **(G-2)** para probar **(G-3)** basta comprobar que $\varphi[(1+4\pi^2|x|^2)^{-1/2}]$ está en $\mathcal{O}$. Una función f es de crecimiento lento si para algún entero k se tiene que $(1+|x|^2)^{-k/2}f(x)$ está acotado. Ahora, dado que la transformada de Fourier de G_η es la transformada de Laplace de $\eta\sqrt{(\delta)}/\delta$ compuesta con $\frac{1+4\pi^2|x|^2}{4\pi}$ y ambas son $\mathcal{C}^\infty$. En virtud de estimar el crecimiento de sus derivadas introducimos la función

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-\delta\frac{1+4\pi^2|x|^2}{4\pi}}\frac{\eta(\sqrt{\delta})}{\delta}d\delta.$$

Ya que que las derivadas de Φ son una combinación lineal de potencias en x por funciones del mismo tipo que el miembro derecho, donde η aparece ahora multiplicada por potencias de δ, y por ser $\mathcal{J}$ una clase cerrada bajo el producto puntual de funciones se concluye que las derivadas tienen a lo sumo crecimiento polinomial.

Para probar **(G-4)** teniendo presente **(G-3)** y puesto que

$$\Phi(x) = C(\eta)\varphi[(1+4\pi^2|x|^2)^{-1/2}]$$

no se anula, sólo resta ver que las potencias negativas de Φ se mantienen acotadas superiormente por polinomios; en efecto, si hacemos $u = \delta(1+4\pi^2|x|^2)$ tenemos

$$\Phi(x) \geq C(\frac{1}{1+4\pi^2|x|^2})^{\frac{b}{2}}\int_0^\infty e^{-u}\frac{\eta(\sqrt{u})}{u}du$$

donde hemos considerado el tipo superior b de η pues, $\sqrt{1+4\pi^2|x|^2}$ es mayor que 1; así, para algún entero m

$$\Phi(x) \geq C(1+4\pi^2|x|^2)^{-b/2} \geq C(1+4\pi^2|x|^2)^{-m}.$$

Las partes **(G-1)** y **(G-2)** de esta proposición pueden obtenerse como un caso particular del siguiente lema válido aún para funciones no necesariamente positivas.

LEMA 2.3. *El operador que aplica la función h de variable real positiva δ en*

$$H(x) = C\int_0^\infty e^{-\pi\frac{|x|^2}{\delta}} e^{-\frac{\delta}{4\pi}} \delta^{-n/2} \frac{h(\sqrt{\delta})}{\delta} d\delta$$

es acotado de $L^1(\mathbb{R}^+)$ con la medida $e^{-u^2}\frac{du}{u}$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$ con la medida de Lebesgue. En otros términos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |H(x)|dx \leq C\int_0^\infty |h(u)|e^{-u^2}\frac{du}{u}.$$

Además, la transformada de Fourier $\hat{H}(\xi)$ de $H(x)$ viene dada por

$$\mathcal{L}\left[\frac{h(\sqrt{\delta})}{\delta}\right]\left(\frac{1+4\pi^2|\xi|^2}{4\pi}\right).$$

DEMOSTRACIÓN. Probamos la primera parte notando que por el Teorema de Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty e^{-\pi\frac{|x|^2}{\delta}} e^{-\frac{\delta}{4\pi}} \delta^{-n/2} \frac{|h(\sqrt{\delta})|}{\delta} d\delta dx = \int_0^\infty \delta^{n/2} e^{-\frac{\delta}{4\pi}} \delta^{-n/2} \frac{|h(\sqrt{\delta})|}{\delta} d\delta$$

ya que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\frac{|x|^2}{\delta}} dx = \delta^{n/2}$ y haciendo $\sqrt{\delta} = u$, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |H(x)|dx \leq C\int_0^\infty |h(u)|e^{-\frac{u^2}{4\pi}}\frac{du}{u}.$$

Esta desigualdad prueba a la vez que $H(x)$ es finita para c.t.x. y que pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$ con desigualdad en normas. La condición de integrabilidad de h respecto de la medida $e^{-u^2}\frac{du}{u}$ puede expresarse en términos de la transformada de Laplace del siguiente modo $\mathcal{L}\left[\frac{|h(\sqrt{\delta})|}{\delta}\right](\frac{1}{4\pi}) < \infty$. Luego se puede elegir la constante C que aparece en la definición de H igual al recíproco de $\mathcal{L}\left[\frac{|h(\sqrt{\delta})|}{\delta}\right](\frac{1}{4\pi})$ para tener $\int_{\mathbb{R}^n} |H(x)|dx = 1$.
Respecto de la prueba de la segunda parte usamos la fórmula de multiplicación para la transformada de Fourier que sabemos vale para funciones de L^1

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\phi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\phi(x)dx.$$

En particular, si $f(x) = e^{-\pi\delta|x|^2}$, $\hat{f}(\xi) = e^{-\pi\frac{|\xi|^2}{\delta}}\delta^{-\frac{n}{2}}$ y considerando ϕ en $\mathcal{S}$, se tiene la siguiente igualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{4\pi}} e^{-\pi|x|^2\delta}\hat{\phi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{4\pi}} e^{-\pi\frac{|x|^2}{\delta}}\delta^{-\frac{n}{2}}\phi(x)dx,$$

válida para todo $\delta > 0$. Integrando ambos miembros respecto de $\frac{h(\sqrt{\delta})}{\delta}d\delta$ variando δ de 0 a ∞ e intercambiando los órdenes de integración, resulta

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(x) \int_0^\infty e^{-\frac{\delta}{4\pi}(1+4\pi^2|x|^2)} \frac{h(\sqrt{\delta})}{\delta} d\delta dx$$

igual a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \int_0^\infty e^{-\frac{\delta}{4\pi}} e^{-\pi\frac{|x|^2}{\delta}} \delta^{-\frac{n}{2}} \frac{h(\sqrt{\delta})}{\delta} d\delta dx,$$

o, en otros términos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(x) \mathcal{L}\left[\frac{h(\sqrt{\delta})}{\delta}\right]\left(\frac{1+4\pi^2|x|^2}{4\pi}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) CH(x) dx,$$

para toda ϕ en $\mathcal{S}$. De aquí que

$$(H)\hat{}(\xi) = \mathcal{L}\left[\frac{h(\sqrt{\delta})}{\delta}\right]\left(\frac{1+4\pi^2|\xi|^2}{4\pi}\right), \tag{18}$$

puesto que $H \in L^1$. Lo que concluye la prueba del Lema 2.3. □

Para terminar la demostración de la Proposición 2.2 resta sólo ver que $G_\eta \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pero, precisamente el Lema 2.3 nos dice que una condición suficiente para esto, es que $\int_0^\infty \eta(u) e^{-u^2} \frac{du}{u}$ sea finita. Nuevamente la integrabilidad en cero está garantizada por el tipo inferior positivo de η y en el infinito el producto $\eta(u)e^{-u^2}$ es todavía integrable, puesto que $\eta(u)$ siendo de tipo superior finito, no crece más que alguna potencia de u. □

Por **(G-1)** de la Proposición 2.2, estamos ahora en condiciones de definir el potencial de Bessel generalizado J_η.

Definición 2.4. Para η en $\mathcal{J}$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$J_\eta(f) = G_\eta * f.$$

Puesto que $G_\eta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la convolución está bien definida y además $\mathcal{J}_\eta$ resulta un operador acotado en L^p para $1 \le p \le \infty$;

$$\|J_\eta(f)\|_p \le \|f\|_p, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Trabajaremos de ahora en más con funciones de $\mathcal{J}$ a las que, eventualmente tendremos que agregar condiciones adicionales.

Proposición 2.5. *Si η es de tipo superior $b < n$, entonces el núcleo G_η satisface la siguiente desigualdad puntual*

$$|G_\eta(x)| \le \frac{\eta(|x|)}{|x|^n}.$$

Las derivadas parciales satisfacen estimaciones similares,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j} G_\eta(x)\right| \le C \frac{\eta(|x|)}{|x|^{n+1}}$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que

$$G_\eta(x) = C(\eta) \int_0^\infty e^{-\pi\frac{|x|^2}{\delta}} e^{-\frac{\delta}{4\pi}} \delta^{-\frac{n}{2}} \eta(\sqrt{\delta}) \frac{d\delta}{\delta},$$

tenemos

$$\begin{aligned}
|G_\eta(x)| &\le C(\eta) \int_0^\infty e^{-\pi\frac{|x|^2}{\delta}} \delta^{-\frac{n}{2}} \frac{\eta(\sqrt{\delta})}{\delta} d\delta \\
&= C(\eta) \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{u}} u^{-\frac{n}{2}} |x|^{-n} \frac{\eta(\sqrt{u}|x|)}{u} du \\
&= C(\eta)|x|^{-n} \left[\int_0^1 e^{-\frac{\pi}{u}} u^{-\frac{n}{2}} \frac{\eta(\sqrt{u}|x|)}{u} du + \int_1^\infty e^{-\frac{\pi}{u}} u^{-\frac{n}{2}} \frac{\eta(\sqrt{u}|x|)}{u} du\right] \\
&\le C \frac{\eta(|x|)}{|x|^n} \left[\int_0^1 e^{-\frac{\pi}{u}} u^{-\frac{n}{2}-1} du + \int_1^\infty e^{-\frac{\pi}{u}} u^{-\frac{n}{2}} \frac{u^{\frac{b}{2}}}{u} du\right] \\
&\le C \frac{\eta(|x|)}{|x|^n},
\end{aligned}$$

donde la penúltima acotación se obtiene usando en la primer integral que η es casi creciente, y en la segunda que η tiene tipo superior b, finalmente en la última desigualdad se usa que $b < n$. De un modo análogo obtenemos las estimaciones para las derivadas parciales de G_η, diferenciando la fórmula de G_η obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial G_\eta}{\partial x_j}\right| &= c|x_j| \int_0^\infty e^{-\pi|x|^2/\delta} e^{-\delta/4\pi} \delta^{\frac{-n-2}{2}} \frac{\eta(\sqrt{\delta})}{\delta} d\delta \\
&\le c|x_j| \int_0^\infty e^{-\pi|x|^2/\delta} \delta^{\frac{-n-2}{2}} \frac{\eta(\sqrt{\delta})}{\delta} d\delta \\
&= c|x_j| \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{u}} u^{\frac{-n-2}{2}} |x|^{-n-2} \eta(\sqrt{u}|x|) \frac{du}{u} \\
&= c|x_j||x|^{-n-2}\eta(|x|) \left[\int_0^1 e^{-\frac{\pi}{u}} u^{\frac{-n-2}{2}-1} du + \int_1^\infty e^{-\frac{\pi}{u}} u^{\frac{-n-2}{2}-1+\frac{b}{2}} du\right] \\
&\le C|x|^{-n-1}\eta(|x|),
\end{aligned}$$

en la primera integral usamos que η es casi creciente y en la segunda que $\frac{-n-2}{2} + \frac{b}{2} < 0$ o sea que $n + 2 > b$. □

PROPOSICIÓN 2.6. *Sea η en $\mathcal{J}$ de tipo superior $b<1$, entonces la integral de Poisson $G_\eta(x,y)=G_\eta * P_y$ del núcleo G_η satisface la siguiente desigualdad en norma 1*

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial y}G_\eta(x,y)\Big\|_1 \leq A\frac{\eta(y)}{y}, \qquad y>0. \tag{19}$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $G_\eta \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la condición (19) vale sii $G_\eta \in \Lambda(\eta;1)$ por la Proposición 1.18 del Capítulo 1. Por definición este espacio consiste en todas las funciones f de $L^1(\mathbb{R}^n)$ para las cuales

$$\sup_{|t|>0}\frac{\|f(x+t)-f(x)\|_1}{\eta(|t|)}<\infty.$$

Probemos que esto se cumple para G_η, esto es debemos ver que

$$\int_{\mathbb{R}^n}|G_\eta(x+t)-G_\eta(x)|dx \leq A\eta(|t|).$$

Escribimos

$$\int_{\mathbb{R}^n}|G_\eta(x+t)-G_\eta(x)|dx \leq \int_{|x|\leq 2|t|}|.|dx+\int_{|x|>2|t|}|.|dx.$$

La primer integral puede ser estimada por

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leq 2|t|}[|G_\eta(x+t)|+|G_\eta(x)|]dx &= \int_{|x|\leq 2|t|}|G_\eta(x+t)|dx+\int_{|x|\leq 2|t|}|G_\eta(x)|dx\\ &= 2\int_{|x|\leq 3|t|}|G_\eta(x)|dx.\end{aligned}$$

Usando la Proposición 2.5 vemos que

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leq 3|t|}|G_\eta(x)|dx &\leq C\int_{|x|\leq 3|t|}\frac{\eta(|x|)}{|x|^n}dx\\ &= C\int_0^{3|t|}\frac{\eta(\rho)}{\rho^n}\rho^{n-1}d\rho\\ &= C\int_0^{3|t|}\frac{\eta(\rho)}{\rho}d\rho\\ &\leq A\eta(|t|).\end{aligned}$$

Para estimar la segunda integral, notemos primero que en virtud de la segunda parte de la Proposición 2.5 y del teorema del valor medio tenemos que

$$|G_\eta(x+t)-G_\eta(x)|\leq C''|t||y|^{-n-1}\eta(|y|),$$

donde y está en el segmento de longitud $|t|$ que une $x+t$ con x. Como $|y|\geq|x|$ se tiene también que

$$|G_\eta(x+t)-G_\eta(x)|\leq C''|t||x|^{-n-1}\eta(|x|),$$

puesto que η tiene tipo superior b menor que uno

$$\eta\Big(\frac{|y||x|}{|x|}\Big) \leq C\Big(\frac{|y|}{|x|}\Big)^b \eta(|x|)$$

se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\eta(|y|)}{|y|^{n+1}} &\leq C\frac{1}{|y|^{n+1}}\frac{|y|^b}{|x|^b}\eta(|x|)\\ &\leq \frac{1}{|y|^{n+1}}\frac{|y|^{n+1}}{|x|^{n+1}}\eta(|x|)\\ &= \frac{\eta(|x|)}{|x|^{n+1}},\end{aligned}$$

donde se ha usado que $\frac{|y|}{|x|} \geq 1$ y $b < n$. En consecuencia, si $|x| > 2|t|$

$$\begin{aligned}\int_{|x|>2|t|} |G_\eta(x+t) - G_\eta(x)|dx &= C\int_{|x|>2|t|} |t||x|^{-n-1}\eta(|x|)dx\\ &\leq C|S^{n-1}|\int_{2|t|}^{\infty} |t|\rho^{-n-1}\rho^{n-1}\eta(\rho)d\rho\\ &\leq C|S^{n-1}||t|\int_{2|t|}^{\infty}\frac{\eta(\rho)}{\rho^2}d\rho\\ &= C|S^{n-1}||t|\int_1^{\infty}\frac{\eta(2|t|.s)}{2|t|s^2}ds\\ &\leq C|S^{n-1}|\frac{1}{2}\eta(2|t|)\int_1^{\infty} s^{b-2}ds\\ &\leq A\eta(|t|),\end{aligned}$$

usando la hipótesis que $b < 1$. $\square$

2.2. Composición de Potenciales Generalizados.

El propósito de esta sección es demostrar que la composición de operadores J_η produce operadores de la misma clase. A diferencia de los potenciales clásicos para los cuales se conoce que la composición es igual a aplicar el potencial que corresponde a la suma de los exponentes de las potencias asociadas a los potenciales que se componen; ahora es preciso detectar y estudiar la operación que al par de funciones de $\mathcal{J}$ dados, le haga corresponder la función asociada al operador compuesto.

$$(J_{\eta_1} \circ J_{\eta_2})(f) = G_{\eta_1} * (G_{\eta_2} * f) = (G_{\eta_1} * G_{\eta_2}) * f$$

si al menos φ_1 o $\varphi_2 \in \mathcal{O}$ donde $(G_{\eta_i})\hat{}(x) = \varphi_i[(1+4\pi^2|x|^2)^{-1/2}]$ $i = 1,2$ y dadas las funciones η_i, las funciones φ_i con $i = 1,2$ son tales que verifican la siguiente igualdad

$$\mathcal{L}\left[\frac{\eta_i(\sqrt{\delta})}{\delta}\right](s) = \varphi_i\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi s}}\right)$$

Queremos caracterizar la composición de dos de estos potenciales como otro potencial del mismo tipo. Como las funciones G_η son radiales también lo es la convolución $G_{\eta_1} * G_{\eta_2}$ y por consiguiente también lo es su Transformada de Fourier, podemos entonces pensar a ésta como una función de la variable $|x|$, así por el teorema de la convolución para la Transformada de Laplace, escribiendo por simplicidad $s = (1 + 4\pi^2|x|^2)^{-1/2}$, se verifica que

$$\begin{aligned}
(G_{\eta_1} * G_{\eta_2})\hat{}(|x|) &= \varphi_1\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi s}}\right)\varphi_2\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi s}}\right)\\
&= \mathcal{L}\left[\frac{\eta_1(\sqrt{\delta})}{\delta}\right](s)\mathcal{L}\left[\frac{\eta_2(\sqrt{\delta})}{\delta}\right](s)\\
&= \mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{\eta_1(\sqrt{\xi})}{\xi}\frac{\eta_2(\sqrt{t-\xi})}{t-\xi}d\xi\right](s)\\
&= \mathcal{L}\left[\frac{\eta(\sqrt{t})}{t}\right](s),
\end{aligned}$$

donde $\frac{\eta(\sqrt{t})}{t} = \int_0^t \frac{\eta_1(\sqrt{\xi})}{\xi}\frac{\eta_2(\sqrt{t-\xi})}{t-\xi}d\xi$, haciendo $s = \sqrt{t}$ resulta

$$\eta(s) = s^2\int_0^{s^2} \frac{\eta_1(\sqrt{\xi})}{\xi}\frac{\eta_2(\sqrt{s^2-\xi})}{s^2-\xi}d\xi$$

$$= 2s^2\int_0^{s} \frac{\eta_1(u)}{u}\frac{\eta_2(\sqrt{s^2-u^2})}{s^2-u^2}du. \tag{20}$$

La función η está definida como un producto especial entre η_1 y η_2 según la expresión (20), lo indicamos del siguiente modo

$$\eta(s) = (\eta_1 \otimes \eta_2)(s)$$

Proposición 2.7. *Si η_1 y η_2 están en $\mathcal{J}$, entonces η definida en* (20) *está en $\mathcal{J}$ y es equivalente al producto $\eta_1\eta_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Haciendo $u = st$ en la expresión de η dada por (20) se tiene

$$\begin{aligned}\eta(s) &= s^2 \int_0^1 \frac{\eta_1(st)}{t} \frac{\eta_2(\sqrt{s^2 - s^2t^2})}{s^2 - s^2t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\eta_1(st)}{t} \frac{\eta_2(s\sqrt{1-t^2})}{1-t^2} dt \\ &\leq C\eta_1(s)\eta_2(s) \int_0^1 t^{a_1-1} \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{a_2-2} dt \\ &\leq C\eta_1(s)\eta_2(s),\end{aligned}$$

en virtud que los tipos inferiores son positivos. Por otro lado

$$\begin{aligned}\eta(s) &= \int_0^1 \frac{\eta_1(st)}{t} \frac{\eta_2(s\sqrt{1-t^2})}{1-t^2} dt \\ &\geq c\eta_1(s)\eta_2(s) \int_0^1 t^{b_1-1} \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{b_2-2} dt \\ &\geq c\eta_1(s)\eta_2(s),\end{aligned}$$

donde b_1 y b_2 son los tipos superiores de η_1 y η_2 respectivamente, ambos positivos por hipótesis. □

OBSERVACIÓN 2.8. La demostración anterior muestra que prescindiendo de las condiciones sobre los tipos, implícitas en la definición de la clase $\mathcal{J}$; la función η definida a través de (20) es equivalente a $\eta_1\tilde{\eta}_2 + \eta_2\tilde{\eta}_1$ donde $\tilde{\eta}_i = \int_0^s \frac{\eta_i(v)}{v} dv$

PROPOSICIÓN 2.9. *Sea η una función tipo superior b e inferior a, tal que $b - a < 1$ que se factoriza en la forma $\eta = \eta_1 \otimes t^\beta$ con η_1 de tipo inferior positivo y superior menor que 1 y β un número positivo, entonces $G_\eta \in \Lambda(\eta; 1)$.*

DEMOSTRACIÓN. La factorización de η como $t^\beta \otimes \eta_1$ nos permite expresar $J_\eta = J_\beta \circ J_{\eta_1}$, esto es como la composición entre un potencial de Bessel y un potencial generalizado de estos que nos ocupan; por lo tanto $G_\eta = G_\beta * G_{\eta_1}$. Consecuentemente $G_\eta(.,y) = G_\beta(.,y_1) * G_{\eta_1}(.,y_2)$, pues $P_y = P_{y_1} * P_{y_2}$ si $y = y_1 + y_2$. Sea ahora l un entero mayor que $b + 1$, como $l - 1 > \beta$, si diferenciamos la relación anterior $l-1$ veces respecto de y_1 y una vez respecto de y_2 y haciendo $y_1 = y_2 = y/2$ aplicando la Proposición 2.6 y la estimación análoga para la integral de Poisson del núcleo G_β (ver [Ste70], [Tai64]), el resultado es

$$\left\|\frac{\partial^l G_\eta}{\partial y^l}(x,y)\right\|_1 \leq A\frac{\eta(y)}{y^l}$$

Esto implica que $G_\eta \in \Lambda(\eta;1)$ por la definición (15) del Capítulo 1. □

2.3. Acción de $\mathbf{J}_\eta$ sobre los espacios $\mathbf{\Lambda}(\psi,\mathbf{p})$, $1 \leq p \leq \infty$.

Los operadores de convolución con núcleos en L^1 preservan los espacios Lipschitz. Si bien los operadores J_η están asociados a núcleos de L^1 la estructura particular de los mismos permite obtener resultados mejores en cuanto al incremento de suavidad.

Definición 2.10. Diremos que una $\mathcal{J}$-function η pertenece a $\mathcal{J}_o$ si es de tipo inferior positivo y superior menor que uno.

Teorema 2.11. *Sea $\psi \in \mathcal{J}$ y $\eta \in \mathcal{J}_o$, entonces J_η aplica continua e inyectivamente $\Lambda(\psi;p)$ en $\Lambda(\eta\psi;p)$ con $1 \leq p \leq \infty$.*

Demostración. Hacemos $u = P_y * f$ y $U = P_y * G_\eta * f$, por lo tanto $U(x,y) = G_\eta(x,y) * f(x)$ donde $G_\eta(x,y)$ es la integral de Poisson de $G_\eta(x)$. Para $m \geq 1$ vale

$$\left\|\frac{\partial^m G_\eta}{\partial y^m}(x,y)\right\|_1 \leq A\frac{\eta(y)}{y^m}, \tag{21}$$

en virtud de la Proposición 2.6 y del Lema 1.19 del Capítulo 1, para $l = 1$ y $p = 1$. Sin embargo, sabemos que $P_{y_1+y_2} = P_{y_1} * P_{y_2}$, $y_1 > 0$, $y_2 > 0$; consecuentemente

$$U(x, y_1 + y_2) = P_{y_1+y_2} * G_\eta * f = P_{y_1} * G_\eta * P_{y_2} * f = G_\eta(x,y_1) * u(x,y_2).$$

Si k es el menor entero mayor que el tipo superior de ψ, y diferenciamos en la expresión anterior l veces respecto de y_1 y k veces respecto de y_2. Resulta

$$\frac{\partial^{k+l}U(x,y)}{\partial y^{k+l}} = \frac{\partial^l}{\partial y^l}G_\eta(x,y_1) * \frac{\partial^k}{\partial y^k}u(x,y_2), \quad y = y_1 + y_2.$$

Luego en vista de (21), con $y_1 = y_2 = \frac{y}{2}$, para $l \geq 1$ y del hecho que $f \in \Lambda(\psi;p)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial^{k+l}U(x,y)}{\partial y^{k+l}}\right\|_p &\leq \left\|\frac{\partial^l}{\partial y^l}G_\eta(x,y_1)\right\|_1 \left\|\frac{\partial^k}{\partial y^k}u(x,y_2)\right\|_p \\ &\leq A_1\frac{\eta(y/2)}{y^l}A'\frac{\psi(y/2)}{y^k} \\ &\leq C\|f\|_{\eta,p}\frac{(\eta\psi)(y)}{y^{l+k}}. \qquad (22)\end{aligned}$$

Puesto que $f \in L^p$, $J_\eta(f) \in L^p$ en virtud que $\|G_\eta * f\|_p \leq \|G_\eta\|_1 \|f\|_p \leq C\|f\|_{\psi;p} < \infty$, como $\eta\psi$ es de tipo superior menor que $k+l$ se tiene entonces que $J_\eta(f) \in \Lambda(\eta\psi; p)$, la prueba anterior también muestra que

$$\|J_\eta(f)\|_{\eta\psi;p} \leq C\|f\|_{\psi;p},$$

que es la continuidad del mapeo. Probamos ahora que es inyectivo, mostrando que si $J_\eta(g_1) = J_\eta(g_2)$ entonces $g_1 = g_2$. Primero observemos que si $\phi \in \mathcal{S}$ entonces $\hat{\mathcal{J}}_\eta(\varphi) \in \mathcal{S}$ en virtud de **(G-3)** de la Proposición 2.2 y por lo tanto $\mathcal{J}_\eta(\phi) \in \mathcal{S}$. Por otra parte, si $\phi \in \mathcal{S}$ tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(g_1)(x)\phi(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} G_\eta(x-y)g_1(y)dy\phi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g_1(y)\int_{\mathbb{R}^n} G_\eta(y-x)\phi(x)dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g_1(y)J_\eta(\phi)(y)dy.\end{aligned}$$

Repitiendo lo mismo para $J_\eta(g_2)$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} J_\eta(g_2)(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g_2(y)J_\eta(\phi)(y)dy,$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^n} [J_\eta(g_1)(x) - J_\eta(g_2)(x)]\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (g_1-g_2)(y)J_\eta(\phi)(y)dy$$

y usando la hipótesis

$$\int_{\mathbb{R}^n} (g_1-g_2)(y)J_\eta(\phi)(y)dy = 0 \qquad \forall\phi \in \mathcal{S}.$$

Para concluir que $g_1 = g_2$ basta ver que $J_\eta(\phi)$ es cualquier función de $\mathcal{S}$; en efecto, supongamos $\nu \in \mathcal{S}$ y por lo tanto, $\hat{\nu} \in \mathcal{S}$ entonces tomando

$$\hat{\phi}(x) = \frac{\hat{\nu}(x)}{\varphi[(1+4\pi^2|x|^2)^{-1/2}]}$$

se tiene usando **(G-4)** de la Proposición 2.2 que $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$, entonces $\phi \in \mathcal{S}$ y además, $\hat{\nu}(x) = \hat{\phi}(x)\varphi[(1+4\pi^2|x|^2)^{-1/2}]$, o bien

$$\hat{\nu}(x) = \hat{\phi}(x)(G_\eta)\hat{\ }(x) = (G_\eta * \phi)\hat{\ }(x) = \hat{J}_\eta(\phi).$$

Entonces $\nu = J_\eta(\phi)$, con lo cual probamos que J_η es un mapeo de $\mathcal{S}$ sobre sí mismo y la prueba de la inyectividad está completa. $\square$

Si $\eta = t^\beta$, se tienen los ya conocidos Potenciales de Bessel que como se sabe son isomorfismos naturales entre espacios Lipschitz-α, más precisamente J_β es un isomorfismo de Λ_α en $\Lambda_{\alpha+\beta}$ para α y β reales. El teorema siguiente muestra que este resultado puede extenderse al caso en que la función que genera el espacio de partida no necesariamente es una potencia.

TEOREMA 2.12. *Para $\beta > 0$ y $\Psi \in \mathcal{J}_o$, los potenciales de Bessel J_β son isomorfismos entre los espacios $\Lambda(\psi;p)$ y $\Lambda(\psi t^\beta;p)$.*

DEMOSTRACIÓN. Si β fuese menor que uno, la continuidad e inyectividad sería un caso particular del Teorema 2.11. Para cualquier β sabemos que la integral de Poisson de los núcleos G_β de los potenciales de Bessel satisface una desigualdad como la (21), con $\eta(y) = y^\beta$, esto es para m cualquier entero mayor que β, se tiene

$$\left\| \frac{\partial^m G_\eta}{\partial y^m}(x,y) \right\|_1 \leq A \frac{y^\beta}{y^m},$$

así análogamente a lo hecho en (22) se tiene para U la integral de Poisson de $G_\eta * f$, k el menor entero mayor que el tipo superior de ψ y $l \geq \beta$ que

$$\left\| \frac{\partial^{k+l} U(x,y)}{\partial y^{k+l}} \right\|_p \leq C \|f\|_{\beta;p} \frac{y^\beta \psi(y)}{y^{l+k}}.$$

Puesto que para $f \in L^p$, $J_\beta(f) \in L^p$ y como $t^\beta \psi$ es de tipo superior menor que $k+l$ se tiene entonces que $J_\beta(f) \in \Lambda(t^\beta \psi;p)$, también se obtiene que

$$\|J_\beta(f)\|_{t^\beta \psi;p} \leq C \|f\|_{\psi;p},$$

lo que muestra la continuidad del mapeo. La prueba que es inyectivo es idéntica a la hecha en el Teorema 2.11. En consecuencia, J_β aplica continuamente e inyectivamente $\Lambda(\psi;p)$ en $\Lambda(t^\beta \psi;p)$, resta ver que esta aplicación es sobre. Similarmente a lo que se hace para los espacios Lipchitz veamos que J_2 es sobre. Observamos que si $f \in \Lambda(\psi t^2;p)$ entonces $f \in \Lambda(\psi;p)$ pues si $f \in \Lambda(\psi t^2;p)$ entonces para k cualquier entero mayor que el tipo superior de ψt^2 se tiene

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial y^k} u(x,y) \right\|_p \leq A \frac{\psi(y)}{y^k},$$

pero k es mayor que el tipo superior de ψ entonces la desigualdad anterior junto con el hecho que $f \in L^p$ dice que $f \in \Lambda(\psi;p)$. Por otro lado, $\Delta f \in \Lambda(\psi;p)$ ya que $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \Lambda(\psi t;p)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \in \Lambda(\psi;p)$. Luego $(I - \Delta) f \in \Lambda(\psi;p)$. Sin embargo, $J_2[(I - \Delta) f] = f$. Para probar esta identidad es suficiente verificar que para $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (J_2(I - \Delta) f) \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (J_2(I - \Delta) f) \varphi dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (I - \Delta) f J_2(\varphi) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f (I - \Delta) J_2(\varphi) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx. \end{aligned}$$

Con lo cual resulta

$$\begin{aligned}(I-\Delta)J_2\varphi &= J_2\varphi - \Delta J_2\varphi\\ [(I-\Delta)J_2\varphi]\hat{} &= [J_2\varphi - \Delta J_2\varphi]\hat{}\\ &= (1+4\pi^2|x|^2)^{-1}\hat{\varphi} + (4\pi^2|x|^2)[J_2\varphi]\hat{}\\ &= \frac{\hat{\varphi}}{(1+4\pi^2|x|^2)} + \frac{4\pi^2|x|^2}{(1+4\pi^2|x|^2)}\hat{\varphi} = \hat{\varphi}.\end{aligned}$$

La prueba sigue igual al caso de los potenciales de Bessel actuando sobre los espacios Lipchitz, (ver [Ste70]). □

COROLARIO 2.13. *Si* $\eta = \eta_1 \otimes t^\beta$ *donde* $\eta_1 \in \mathcal{J}_o$, *entonces* J_η *aplica continua e inyectivamente* $\Lambda(\psi;p)$ *en* $\Lambda(\eta\psi;p)$

DEMOSTRACIÓN. La prueba sigue luego de observar que J_η es composición de J_{η_1} y J_β dos operadores inyectivos y continuos, en virtud de los Teoremas 2.11 y 2.12 respectivamente. □

Nuestro propósito es ahora extender el Teorema 2.12 a ciertos potenciales J_η más generales para ello comenzamos probando los siguientes lemas:

LEMA 2.14.
a) Una función $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *define un operador de convolución continuo en* $\Lambda(\psi;p)$, *es decir*

$$\|K * f\|_{\psi;p} \leq \|K\|_1 \|f\|_{\psi;p}.$$

b) Si además $\hat{K}$ *es de clase* C^∞ *se tiene que*

$$(K * f)\hat{} = \hat{K}.\hat{f}$$

en el sentido de $\mathcal{S}'$.

DEMOSTRACIÓN.
a) Para $f \in \Lambda(\psi;p)$ se tiene que

$$\|f\|_{\psi;p} = \|f\|_p + A$$

donde A es la menor constante A_k tal que

$$\|\frac{\partial^k}{\partial y^k}u(x,y)\|_p \leq A_k \frac{\psi(y)}{y^k}$$

donde u es la integral de Poisson de la f y k es el menor entero mayor que el tipo superior de ψ. Ahora usando la desigualdad de Young puede escribirse

$$\|K * f\|_p = \|K\|_1 \|f\|_{\psi;p}, \tag{23}$$

por otro lado, llamando $U(x,y) = (P_y * f) * K = (u * K)(x,y)$, se tiene

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial^k}{\partial y^k}U(x,y)\|_p &\leq \|\frac{\partial^k}{\partial y^k}u(x,y)\|_p\|K\|_1\\ &\leq \|f\|_{\psi;p}\frac{\psi(y)}{y^k}\|K\|_1,\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{y^k}{\psi(y)}\|\frac{\partial^k}{\partial y^k}U(x,y)\|_p \leq \|f\|_{\psi;p}\|K\|_1$$

y en consecuencia, $K * f \in \Lambda(\psi;p)$, además esta última desigualdad con (23) permite concluir que

$$\|K * f\|_{\psi;p} \leq \|f\|_{\psi;p}\|K\|_1.$$

b) Puesto que $K * f \in \Lambda(\psi;p)$ se tiene que $K * f \in L^p$, y por consiguiente define una distribución de $\mathcal{S}'$

$$< (K * f)\hat{}, \varphi >=< K * f, \hat{\varphi} >= \int_\xi (K * f)(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi$$

donde hemos usado la representación integral de la distribución $K * f$. Comprobemos ahora que esta última expresión puede calcularse intercambiando los órdenes de integración; en efecto,

$$\begin{aligned}\int_\xi \left|\int_x K(\xi - x)f(x)dx\right||\hat{\varphi}(\xi)|d\xi &\leq \|\hat{\varphi}\|_\infty \int_\xi |(K * f)(\xi)|d\xi\\ &= \|\varphi\|_\infty\|K\|_1\|f\|_p < \infty,\end{aligned}$$

pues $K \in L^1$ y $f \in L^p$. Luego,

$$\int_\xi \left(\int_x K(\xi - x)f(x)dx\right)\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \int_x f(x)\int_\xi K(\xi - x)\hat{\varphi}(\xi)d\xi dx$$

El Teorema de Fubini asegura la integrabilidad respecto de x de esta última expresión, y permite escribirla como

$$\lim_{N\to\infty}\int_{|x|<N} f(x)\int_\xi K(\xi - x)\hat{\varphi}(\xi)d\xi dx, \tag{24}$$

respecto de la integral en ξ tenemos

$$\int_\xi K(\xi - x)\hat{\varphi}(\xi)d\xi dx = \int_\xi K(\xi - x)\int_t e^{-2\pi it}\varphi(t)dtd\xi.$$

Comprobemos que aquí también es posible intercambiar los órdenes de integración,

$$\begin{aligned}\int_\xi \left|K(\xi - x)\int_t e^{-2\pi it}\varphi(t)dt\right|d\xi &\leq \int_\xi |K(\xi - x)|\int_t |e^{-2\pi it}||\varphi(t)|dtd\xi\\ &= \|\varphi\|_\infty\int_\xi |K(\xi - x)|d\xi < \infty.\end{aligned}$$

Usamos esto en (24) y pasando la transformada de Fourier a K se tiene,

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\int_{|x|<N} f(x)\int_{\xi}[K(x-\xi)]\hat{}\varphi(\xi)d\xi dx &= \lim_{N\to\infty}\int_{|x|<N} f(x)\int_{\xi}\hat{K}(\xi)e^{-x\xi}\varphi(\xi)d\xi dx\\ &= \lim_{N\to\infty}\int_{\xi}\hat{K}(\xi)\varphi(\xi)\int_{|x|<N} f(x)e^{-x\xi}d\xi dx\\ &= \lim_{N\to\infty}\int_{\xi}\hat{K}(\xi)\varphi(\xi)\hat{f}_N(\xi)d\xi,\end{aligned}$$

pero $\hat{K}(\xi)\varphi(\xi)=\psi\in\mathcal{S}$ pues como $\hat{K}\in\mathcal{C}^\infty$ y $\varphi\in\mathcal{S}$, el producto está en $\mathcal{S}$. Luego,

$$<(K*f)\hat{},\varphi>=\lim_{N\to\infty}<\hat{f}_N,\hat{K}\varphi>=<\hat{K}\hat{f},\varphi>$$

donde el límite se ha tomado en el sentido de $\mathcal{S}'$ y se ha usado el producto de una distribución por una función de C^∞. $\square$

El siguiente lema es el punto clave para encontrar condiciones sobre η bajo las cuales J_η resulta un isomorfismo. La prueba de este hecho en el caso de las potencias se basa como vimos en el Teorema 2.12 en usar que J_2 es un isomorfismo. En este lema mostramos que para una "perturbación" adecuada de $\rho(t)=t^2$, es decir $\eta(t)=t^2h(t)$ con h equivalente a una constante, J_η es también un isomorfismo. Sin embargo, para obtener este resultado necesitamos agregar condiciones adicionales a la función h. La prueba se basa en una aplicación del Teorema de Wiener sobre álgebra de funciones.

Lema 2.15. *Sea $h(t)$ una función de clase $\mathcal{C}^1[(0,\infty)]$ entre dos constantes positivas tal que $h'(t)$ es absolutamente integrable en un entorno del origen, entonces $\eta(t)=h(t)t^2\in\mathcal{J}$ y J_η es un isomorfismo de $\Lambda(\psi;p)$ en $\Lambda(\psi t^2;p)$; más aún*

$$J_\eta=J_2\circ T$$

donde T es un operador de convolución que es un isomorfismo en $\Lambda(\psi;p)$ y es tal que su multiplicador tiene la forma $m(x)=K+C(\bar{H})\hat{}(x)$ donde K y C son constantes y $\bar{H}$ es la función integrable que el Lema 2.3 le asocia a la función $\bar{h}(t)=th'(t)$.

Demostración. De la expresión $\eta(t)=h(t)t^2$ y del hecho que h se encuentra entre dos constantes positivas surge que η es equivalente con t^2 y si consideramos los operadores J_η y J_2, es simple ver que los respectivos multiplicadores $\hat{G}_\eta$ y $\hat{G}_2$ también lo son ya que la transformada de Laplace conserva equivalencias. Esto último puede expresarse del siguiente modo

$$\hat{G}_\eta=m\hat{G}_2,$$

con m una función de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ entre constantes positivas. Las condiciones sobre h nos permiten estudiar la estructura de m.

$$\begin{aligned} m(x) = \left(\frac{\hat{G}_\eta}{\hat{G}_2}\right)(x) &= C\frac{\mathcal{L}[h(\sqrt{\delta})](\frac{1+4\pi^2|x|^2}{4\pi})}{(1+4\pi^2|x|^2)^{-1}} \\ &= C(1+4\pi^2|x|^2)\int_0^\infty e^{-(\frac{1+4\pi^2|x|^2}{4\pi})\delta}h(\sqrt{\delta})d\delta \\ &= -C\int_0^\infty \left[-\frac{(1+4\pi^2|x|^2)}{4\pi}e^{-(\frac{1+4\pi^2|x|^2}{4\pi})\delta}\right]h(\sqrt{\delta})d\delta \\ &= -C\int_0^\infty \frac{d}{d\delta}\left[e^{-(\frac{1+4\pi^2|x|^2}{4\pi})\delta}\right]h(\sqrt{\delta})d\delta. \end{aligned}$$

Como h' es integrable en un entorno a la derecha del origen, entonces existe el límite de $h(t)$ cuando $t \to 0^+$ que llamamos κ, con $\kappa > 0$. Siendo h absolutamente continua también lo es $h(\sqrt{\delta})$, y como la exponencial es suave y decae en el infinito, podemos integrar por partes para obtener

$$\begin{aligned} m(x) &= C\left[\kappa + \int_0^\infty e^{-(\frac{1+4\pi^2|x|^2}{4\pi})\delta}\bar{h}(\sqrt{\delta})\frac{d\delta}{\delta}\right] \\ &= C\left[\kappa + \hat{\bar{H}}(x)\right], \end{aligned}$$

donde $\bar{H}$ es la función integrable que el Lema 2.3 le asocia a la función $\bar{h}(t) = th'(t)$. Dado que $\bar{H}$ está en L^1 y $\hat{\bar{H}}$ es $\mathcal{C}^\infty$, el Lema 2.14 nos permite escribir en el sentido de $\mathcal{S}'$

$$m\hat{f} = c_1\hat{f} + c_2\hat{\bar{H}}\hat{f} = [(c_1\delta + c_2\bar{H}) * f]\hat{}$$

o equivalentemente

$$Tf = (c_1\delta + c_2\bar{H}) * f.$$

La parte a) del mismo Lema prueba que T es un operador continuo en $\Lambda(\psi;p)$. Como m no se anula y es $\mathcal{C}^\infty$ resulta que T también es inyectivo. Más todavía un resultado de Wiener ([Kat76]), nos permite asegurar que el inverso multiplicativo de m tiene la misma estructura esto es

$$\frac{1}{m} = c + \hat{k} \quad \text{con} \quad K \in L^1.$$

Por consiguiente, $\frac{1}{m}$ induce un operador de convolución que resulta ser el operador inverso T^{-1} sobre $\Lambda(\psi;p)$, que es continuo nuevamente por el Lema 2.14 Hemos probado por lo tanto que T es un isomorfismo de $\Lambda(\psi;p)$ en $\Lambda(\psi;p)$ y por consiguiente J_η es un isomorfismo de $\Lambda(\psi;p)$ en $\Lambda(t^2\psi;p)$ puesto que el Teorema 2.12 asegura que J_2 es un isomorfismo de $\Lambda(\psi;p)$ en $\Lambda(t^2\psi;p)$. $\square$

Observemos ahora que dada η perteneciente a $\mathcal{J}_o$ la función $\eta_1 = t\otimes\frac{t}{\eta}\otimes\eta$ es equivalente a t^2. En el próximo resultado analizamos bajo qué condiciones adicionales sobre η es posible aplicarle el lema anterior.

Lema 2.16. *Sea ψ en $\mathcal{J}$, si $\eta \in \mathcal{J}_o \cap \mathcal{C}^2((0,\infty))$ y la derivada de $\frac{s\eta'(s)}{\eta(s)}$ es absolutamente integrable en un entorno del origen. Entonces para η_1 igual al producto $t \otimes \frac{t}{\eta} \otimes \eta$, el operador J_{η_1} es un isomorfismo entre $\Lambda(\psi, p)$ y $\Lambda(t^2\psi; p)$ y más aún $J_\eta \circ J_{\frac{t}{\eta}}$ es un isomorfismo de $\Lambda(\psi; p)$ en $\Lambda(t\psi; p)$.*

Demostración. Mostraremos que η_1 satisface las condiciones requeridas para η en el lema anterior. Comenzamos expresando $\eta_1 = \eta_2 \otimes \eta$ con η_2 equivalente a $\frac{t^2}{\eta}$ o de otro modo $\eta_2 = \frac{t^2}{\bar\eta}$ donde $\bar\eta$ es equivalente a η y satisface $\bar\eta = \frac{t^2}{\eta_2}$ o sea $\bar\eta = \frac{t^2}{t\otimes\frac{t}{\eta}}$. Por otra parte, del hecho que η_1 es el producto entre η_2 y η, de (20) se tiene

$$\eta_1(t) = 2t^2 \int_0^t \frac{\eta(u)}{u} \frac{\eta_2(\sqrt{(t^2-u^2)})}{t^2-u^2} du,$$

de modo que podemos ver que $\eta_1(t) = 2h(t)t^2$ donde

$$h(t) = \int_0^t \frac{\eta(u)}{u} \frac{\eta_2(\sqrt{(t^2-u^2)})}{t^2-u^2} du,$$

con h entre dos constantes positivas pues η_1 resulta equivalente a t^2 por Proposición 2.7 ya que el tipo inferior de $\frac{t^2}{\eta}$ es positivo pues el tipo superior de η es menor que 1. Además $h \in \mathcal{C}^1(0,\infty)$ debido a que $\eta \in \mathcal{C}^1(0,\infty)$. Nos queda por estudiar la absoluta integrabilidad de $h'(t)$. Sustituyendo η_2 por $\frac{t^2}{\bar\eta}$ se tiene

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_0^t \frac{\eta_2(u)}{u} \frac{\eta(\sqrt{t^2-u^2})}{t^2-u^2} du \\
&= \int_0^t \frac{u}{\bar\eta(u)} \frac{\eta(\sqrt{t^2-u^2})}{t^2-u^2} du \\
&= \int_0^1 \frac{v}{\bar\eta(tv)} \frac{\eta(t\sqrt{1-v^2}}{1-v^2} dv \\
&= \int_0^1 \frac{\eta(t\sqrt{1-v^2})}{\bar\eta(t\sqrt{1-v^2})} dv \\
&= \int_0^1 v\frac{\eta(t\sqrt{1-v^2})}{t^2v^2} (t\otimes\frac{t}{\eta})(tv) \frac{dv}{1-v^2} \\
&= \int_0^1 v\frac{\eta(t\sqrt{1-v^2})}{t^2v^2} 2t^2v^2 \int_0^{tv} \frac{\sqrt{t^2v^2-u^2}}{\eta(\sqrt{t^2v^2-u^2})} \frac{du}{t^2v^2-u^2} \frac{dv}{1-v^2}
\end{aligned}$$

$$= 2\int_0^1 v\eta(t\sqrt{1-v^2})\int_0^1 \frac{\sqrt{1-u^2}}{\eta(tv\sqrt{1-u^2})}\frac{du}{1-u^2}\frac{dv}{1-v^2}$$

$$= 2\int_0^1\int_0^1 \frac{\eta(t\sqrt{1-v^2})}{\eta(tv\sqrt{1-u^2})}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\frac{vdv}{1-v^2}$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{\eta(tv)}{\eta(t\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2})}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\frac{vdv}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Finalmente, haciendo $v = \text{sen }\theta$ y $u = \text{sen }\varphi$ resulta

$$h(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta(t\text{sen }\theta)}{\eta(t\text{cos }\theta\text{cos }\varphi)}d\varphi d\theta.$$

Así

$$h'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta(t\text{sen }\theta)}{\eta(t\text{cos }\theta\text{cos }\varphi)}d\theta d\varphi.$$

Analizamos la convergencia de la integral que resulta de derivar dentro del signo integral, la derivada del integrando resulta

$$\frac{\text{sen }\theta\eta'(t\text{sen }\theta)\eta_1(t\text{cos }\theta\text{cos }\varphi) - \text{cos }\theta\text{cos }\varphi\eta(t\text{sen }\theta)\eta'(t\text{cos }\theta\text{cos }\varphi)}{\eta^2(t\text{cos }\theta\text{cos }\varphi)}.$$

Veamos que cada término está acotado por una función integrable, respecto del primero resulta igual a

$$\frac{\text{sen }\theta\eta'(t\text{sen }\theta)}{\eta(t\text{cos }\theta\text{cos }\varphi)},$$

usando los tipos de η resulta menor o igual que

$$C\frac{\text{sen }\theta(\text{sen }\theta)^{a-1}\eta'(t)}{(\text{cos }\theta\text{cos }\varphi)^b\eta(t)}$$

pues,

$$\eta(t) \le \eta(t\text{cos }\theta\text{cos }\varphi\frac{1}{\text{cos }\theta\text{cos }\varphi}) \le C\left[\frac{1}{\text{cos }\theta\text{cos }\varphi}\right]^b\eta(t\text{cos }\theta\text{cos }\varphi).$$

Respecto de θ debemos integrar $\frac{(\text{sen }\theta)^a}{(\sqrt{1-\text{sen}^2\theta})^b}$ de 0 a $\frac{\pi}{2}$; dividiendo la integral en dos partes resulta

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\text{sen }\theta)^a}{(\sqrt{1-\text{sen}^2\theta})^b}d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\text{sen }\theta)^a}{(\sqrt{1-\text{sen}^2\theta})^b}d\theta$$

$$\le \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\text{sen }\theta)^a}{(\frac{1}{2})^{b/2}}d\theta + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{(\sqrt{1-u^2})^{a-1}}{u^b}du$$

$$\le 2^{b/2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\text{sen }\theta)^a d\theta + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^{-b}du,$$

resultando integrables pues $b < 1$. Para estudiar la segunda integral respecto de φ hacemos $\cos\varphi = u$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(\cos\,\varphi)^b} &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}u^b} \\ &= \int_0^{1/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}u^b} + \int_{1/2}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}u^b} \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{1/2} \frac{du}{u^b} + 2^b \int_{1/2}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.\end{aligned}$$

La segunda integral es finita mientras que la primera sólo exige $b > 0$. Ahora comprobamos que las condiciones sobre η aseguran la integrabilidad en el origen de $h'(t)$ esto es la finitud de la siguiente expresión, en la que hemos hecho, solamente a los efectos de simplificar notación, $A = \text{sen}\,\theta$, $B = \cos\,\varphi\cos\theta$, $\phi(s) = \frac{\eta'(s)}{\frac{\eta_1(s)}{s}}$ resultando

$$\int_0^{\epsilon} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta(tA)}{\eta(tB)} \frac{\phi(tA) - \phi(tB)}{t} d\theta d\varphi \right| dt$$

lo que resulta menor o igual que

$$\int_0^{\epsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\eta(tA)}{\eta(tB)} \frac{1}{t} [\phi(tA) - \phi(tB)] \right| d\theta d\varphi dt,$$

observando que η es positiva y conservando el módulo en el resto, vale Tonelli de modo que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\epsilon} \frac{\eta(tA)}{\eta(tB)} \left| \frac{\phi(tA) - \phi(tB)}{t} \right| dt d\theta d\varphi.$$

Primero acotemos $\frac{\eta(tA)}{\eta(tB)}$, puesto que η es creciente si $A \leq B$ se tiene $\frac{\eta(tA)}{\eta(tB)} \leq 1$, si en caso contrario, esto es si $A > B$

$$\frac{\eta(tA)}{\eta(tB)} = \frac{\eta(tB\frac{A}{B})}{\eta(tB)} \leq C(\frac{A}{B})^b$$

donde se ha usado el tipo superior b de η. Luego,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\epsilon} \left[1 + \left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\varphi\cos\,\theta} \right)^b \right] \left| \frac{\int_{At}^{Bt} \phi'(s)}{t} \right| dt d\theta d\varphi.$$

Hagamos $\epsilon = 1/10$ e intercambiamos el orden de integración entre t y s

$$\begin{aligned}
&\int_0^{(A\wedge B)} \frac{1}{10}|\varphi'(s)| \int_{(A\vee B)^{-1}s}^{(A\wedge B)^{-1}s} \frac{dt}{t} ds + \int_{(A\wedge B)\frac{1}{10}}^{(A\vee B)\frac{1}{10}} |\varphi'(s)| \int_{(A\vee B)^{-1}s}^{\frac{1}{10}} \frac{dt}{t} ds \\
&\qquad = \int_0^{(A\wedge B)\frac{1}{10}} |\varphi'(s)|[\log \frac{s}{(A\wedge B)} - \log \frac{s}{(A\vee B)}] ds \\
&\qquad + \int_{(A\wedge B)\frac{1}{10}}^{(A\vee B)\frac{1}{10}} |\varphi'(s)|[\log \frac{1}{10} - \log \frac{s}{(A\vee B)}] ds \\
&\qquad = \int_0^{(A\wedge B)\frac{1}{10}} |\varphi'(s)| \log \frac{(A\vee B)}{(A\wedge B)} ds \\
&\qquad + \int_{(A\wedge B)\frac{1}{10}}^{(A\vee B)\frac{1}{10}} |\varphi'(s)| \log \frac{(A\vee B)}{s10} ds \\
&\qquad \leq \log\left(\frac{(A\vee B)}{(A\wedge B)}\right)|\varphi'(s)| ds,
\end{aligned}$$

expresión que resulta finita pues φ' es absolutamente integrable en un entorno del origen. $\square$

Las funciones del lema anterior desempeñan un papel fundamental en la prueba del teorema del isomorfismo entre espacios Lipschitz generalizados, por esta razón damos una caracterización de esta clase de una manera que facilita la construcción de ejemplos no triviales.

Puesto que denotamos $\varphi(s)$ a $\frac{\eta_1'(s)}{\frac{\eta_1(s)}{s}}$ se tiene que

$$\frac{\varphi(s)}{s} = (\log \eta_1(s))'$$

o bien

$$\log \eta_1(1) + \int_1^s \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau = \log \eta_1(s),$$

que en términos de la función exponencial es

$$\eta_1(1) e^{\int_1^s \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau} = \eta_1(s).$$

Todo esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 2.17. Denotamos con $\mathcal{M}_o$ la clase de funciones que pueden escribirse en la forma

$$\eta(s) = \eta(1) e^{\int_1^s \frac{\phi(\tau)}{\tau} d\tau}$$

con ϕ que satisface

i) $0 < c_1 \leq \phi \leq c_2 < 1$,
ii) $\phi \in \mathcal{C}^1((0,\infty))$ y
iii) ϕ' absolutamente integrable en un entorno del origen.

La clase $\mathcal{M}_o$ coincide salvo equivalencia con la clase de funciones del lema anterior; para la prueba de esto es suficiente probar el mismo tipo de equivalencia para las clases siguientes.

$$\mathcal{A} = \{\eta/\eta(s) = \eta(1)e^{\int_1^s \frac{\phi(\tau)}{\tau}d\tau} \text{ con } 0 < c \leq \phi \leq C < 1\}$$

$$\mathcal{B} = \{\eta/\eta \text{ es de tipo inferior positivo y superior menor que uno}\}$$

Lema 2.18. *$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ y para toda η de $\mathcal{B}$ existe una función equivalente a η que está en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sea η_1 en $\mathcal{A}$ para probar que $\eta_1 \in \mathcal{B}$ debemos ver que η_1 es de tipo inferior positivo y superior menor que 1. En efecto, para $s < 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\eta_1(st) &= \eta(1)e^{\int_1^{st} \frac{\phi(\tau)}{\tau}d\tau} \\
&= \eta(1)e^{\int_1^{t} \frac{\phi(\tau)}{\tau}d\tau + \int_t^{st} \frac{\phi(\tau)}{\tau}d\tau} \\
&= \eta(t)e^{\int_1^{s} \frac{\phi(ut)}{u}du} \\
&= \eta(t)e^{-\int_s^{1} \frac{\phi(ut)}{u}du} \\
&\leq \eta_1(t)e^{-c(\log 1 - \log s)} \\
&= \eta_1(t)s^c,
\end{aligned}$$

lo que dice que η_1 es de tipo inferior c con constante 1, por lo tanto de tipo inferior positivo, de igual modo puede verse que η_1 es de tipo superior C con constante 1 y por consiguiente de tipo superior menor que 1. Ahora nos interesa ver que para toda $\eta_1 \in \mathcal{B}$ existe una función equivalente que pertenece a $\mathcal{A}$. Sea η_1 tal que es de tipo inferior positivo a y tipo superior b menor que 1, esta condición sobre el tipo superior permite asegurar que $\frac{\eta_1(s)}{s^{1-\epsilon}}$ es casi decreciente, esto hace aparecer una constante que no es 1. Por ello antes de regularizar consideramos el procedimiento, ya usado en el Capítulo 1, que permite pasar de una función casi decreciente a una decreciente y más aún la función $\tilde{\eta}_1$ definida por la propiedad que $\frac{\tilde{\eta}_1(s)}{s^{1-\epsilon}}$ es decreciente resulta equivalente con η_1. Definimos

$$\frac{\tilde{\eta}_1(s)}{s^{1-\epsilon}} = \sup_{t \geq s} \frac{\eta_1(t)}{t^{1-\epsilon}}.$$

Primero probamos que $\frac{\tilde{\eta}_1(s)}{s^{1-\epsilon}}$ es decreciente, para ello suponemos $u < s$

$$\frac{\tilde{\eta}_1(s)}{s^{1-\epsilon}} = \sup_{t \geq s} \frac{\eta_1(t)}{t^{1-\epsilon}} \leq \sup_{t \geq u} \frac{\eta_1(t)}{t^{1-\epsilon}} = \frac{\tilde{\eta}_1(u)}{u^{1-\epsilon}}.$$

Ahora comprobemos que $\tilde{\eta}_1$ es equivalente con η_1

$$\tilde{\eta}_1(s) = s^{1-\epsilon} \sup_{t \geq s} \frac{\eta_1(t)}{t^{1-\epsilon}} \geq s^{1-\epsilon}\frac{\eta_1(s)}{s^{1-\epsilon}} = \eta_1(s).$$

Respecto de la otra desigualdad, para alguna elección de ϵ tal que $0 < \epsilon < 1$, en virtud del tipo superior resulta.

$$\tilde{\eta}_1(s) = s^{1-\epsilon} \sup_{t \geq s} \frac{\eta_1(t)}{t^{1-\epsilon}} \leq s^{1-\epsilon} \sup_{t \geq s} \frac{C\eta_1(s)}{s^{1-\epsilon}} = C\eta_1(s),$$

donde hemos usado que es casi decreciente para $\epsilon > 0$. Dada η_1 de tipo inferior positivo a y superior $b < 1$ y tal que $\frac{\eta_1(s)}{s^{1-\epsilon}}$ es decreciente, se tiene que la función

$$\eta_1^\alpha(s) = s^\alpha \int_0^s \frac{\eta_1(t)}{t^{1+\alpha}} dt$$

con $\alpha < a$, resulta equivalente con η_1 y además verifica

$$\alpha \frac{\eta_1^\alpha(s)}{s} \leq (\eta_1^\alpha)'(s) \leq (1-\epsilon) \frac{\eta_1^\alpha(s)}{s}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \eta_1^\alpha(s) &= s^\alpha \int_0^s \frac{\eta_1(t)}{t^{1+\alpha}} dt = s^\alpha \int_0^s \frac{\eta_1(t)}{t^{1-\epsilon+\epsilon+\alpha}} dt \\ &\geq s^\alpha \frac{\eta_1(s)}{s^{1-\epsilon}} \int_0^s \frac{dt}{t^{\epsilon+\alpha}} = s^\alpha \frac{\eta_1(s)}{s^{1-\epsilon}} \frac{s^{-\epsilon-\alpha+1}}{1-\epsilon-\alpha} \\ &= \frac{\eta_1(s)}{1-\epsilon-\alpha}, \end{aligned}$$

lo que da lugar a $\eta_1(s) \leq \eta_1^\alpha(s)(1-\epsilon-\alpha)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\eta_1^\alpha(s) &= \alpha s^{\alpha-1} \int_0^s \frac{\eta_1(t)}{t^{1+\alpha}} dt + s^\alpha \frac{\eta_1(s)}{s^{1+\alpha}} \\ &= \alpha \frac{1}{s} s^\alpha \int_0^s \frac{\eta_1(t)}{t^{1+\alpha}} dt + \frac{\eta_1(s)}{s} \\ &= \alpha \frac{\eta_1^\alpha(s)}{s} + \frac{\eta(s)}{s}, \end{aligned}$$

de donde junto con las cotas anteriores resulta

$$\begin{aligned} (\eta_1^\alpha)'(s) &\leq \alpha \frac{\eta_1^\alpha(s)}{s} + \frac{\eta_1^\alpha(s)}{s}(1-\epsilon-\alpha) \\ &= \frac{\eta_1^\alpha(s)}{s}(1-\epsilon) \end{aligned}$$

y de la definición de η_1^α se tiene $(\eta_1^\alpha)'(s) \geq \alpha \frac{\eta_1^\alpha(s)}{s}$. De modo que

$$\alpha \leq \frac{(\eta_1^\alpha)'(s)}{\frac{\eta_1^\alpha(s)}{s}} \leq 1-\epsilon,$$

donde α se puede elegir tan próximo como se quiera al tipo inferior para que resulte positivo y $\epsilon > 0$ tal que $1-\epsilon < 1$. Hemos probado entonces que dada η_1 con tipos entre 0 y 1 es posible hallar una equivalente a ella para la cual ϕ está entre dos constantes próximas a los tipos de η_1. □

Puesto que funciones η de tipo superior mayor o igual que uno e inferior a distancia menor que uno de aquél, resultan equivalentes a funciones que se obtienen como producto $\otimes$ de potencias positivas de exponente mayor o igual que 1 con funciones de tipo inferior positivo y superior menor que 1, damos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.19. Denotamos con $\mathcal{M}$ la clase de funciones que se obtiene como producto $\otimes$ de las funciones de $\mathcal{M}_o$ por t^β, con $\beta > 0$. Esto es

$$\mathcal{M} = \mathcal{P} \otimes \mathcal{M}_o$$

donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de las funciones potenciales con exponente positivo.

TEOREMA 2.20. *Sean φ y ψ dos funciones en $\mathcal{J}$ tales que $\frac{\psi}{\varphi}$ es equivalente a $\eta \in \mathcal{M}$ entonces J_η define un isomorfismo de espacios de Banach entre $\Lambda(\varphi; p)$ y $\Lambda(\psi; p)$*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $\eta \in \mathcal{M}$ puede factorizarse como $\eta_1 \otimes t^\beta$ y por consiguiente J_η es la composición de $J_{\eta_1} \circ J_\beta$, por el Teorema 2.12 sabemos que J_β es un isomorfismo entre $\Lambda(\varphi; p)$ y $\Lambda(\varphi t^\beta; p)$, afirmamos que J_{η_1} es un isomorfismo de $\Lambda(\varphi t^\beta; p)$ en $\Lambda(\varphi t^\beta; p)$, luego debido a que $\varphi t^\beta \eta_1$ es equivalente a ψ se tiene que los espacios $\Lambda(\varphi t^\beta \eta_1; p)$ y $\Lambda(\psi; p)$ son los mismos la prueba está completa. Probamos ahora nuestra afirmación, en virtud del Teorema 2.11 sabemos que J_{η_1} aplica continua e inyectivamente $\Lambda(\varphi t^\beta; p)$ en $\Lambda(\varphi t^\beta \eta_1; p)$; veamos que es sobre, para lo cual expresamos $J_{\eta_2} = J_{\eta_1} \circ J_{(\frac{t}{\eta_1} \otimes t)}$ con $\eta_2 = \eta_1 \otimes \frac{t}{\eta_1} \otimes t$ es decir, η_2 es equivalente con t^2, la pertenencia de η_1 a $\mathcal{M}_o$ permite usar el Lema 2.16 y asegurar que J_{η_2} es un isomorfismo de $\Lambda(\varphi t^{\beta-2}; p)$ en $\Lambda(\varphi t^\beta; p)$, y puesto que $J_{(\frac{t}{\eta_1} \otimes t)} = J_{\frac{t}{\eta_1}} \circ J_t$ aplica continua e inyectivamente $\Lambda(\varphi t^{\beta-2}; p)$ en $\Lambda(\varphi \frac{t^\beta}{\eta_1}; p)$ por ser composición de dos operadores de este tipo que satisfacen las hipótesis del Teorema 2.12; luego necesariamente debe ser J_{η_1} sobre. Finalmente, utilizando el teorema de la aplicación abierta se concluye que J_{η_1} es un isomorfismo de $\Lambda(\varphi t^\beta; p)$ en $\Lambda(\varphi t^\beta \eta_1; p)$. $\square$

De manera similar a la prueba del Lema 2.18 , se puede definir la clase $\mathcal{N}$ de funciones que resultan equivalentes a las funciones de $\mathcal{M}$.

DEFINICIÓN 2.21. Decimos que una función η pertenece a la clase $\mathcal{N}$ si se puede escribir en la forma

$$\eta(s) = \eta(1) e^{\int_1^s \frac{\phi(\tau)}{\tau} d\tau},$$

con ϕ que satisface

I) $0 < c_1 \leq \phi \leq c_2 < \infty$ con $0 \leq c_2 - c_1 < 1$,
II) $\phi \in \mathcal{C}^1((0, \infty))$ y
III) ϕ' absolutamente integrable en un entorno del origen.

Resulta inmediato el siguiente corolario del Teorema 2.20.

COROLARIO 2.22. *Sean φ y ψ de clase $\mathcal{C}^2((0,\infty))$ tales que la función $\eta = \frac{\psi}{\varphi} \in \mathcal{N}$ entonces el operador J_η es un isomorfismo de espacios de Banach entre $\Lambda(\varphi;p)$ y $\Lambda(\psi;p)$.*

Concluimos el capítulo con algunas observaciones acerca de la clase $\mathcal{N}$.

($\mathcal{N}$-1) Veamos que las funciones ϕ que dan lugar a las de $\mathcal{N}$ son tales que tienen un comportamiento local en el origen bien definido y que puede expresarse como sigue: existe $\lim_{t\to 0}\phi(t)$ y además "localmente en 0 " los índices coinciden y son $\phi(0)$; en efecto, puesto que para $s<t$ se tiene

$$|\phi(t)-\phi(s)| \leq \int_s^t |\phi'(x)|dx,$$

en virtud de la integrabilidad de ϕ' en el origen se deduce que $\lim_{t\to 0}\phi(t)$ existe. Además, si suponemos $s<1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\eta_1(st) &= \eta_1(1)\eta_1^{st}\frac{\phi(\tau)}{\tau}d\tau \\
&= \eta_1(1)e^{[\int_1^t \frac{\phi(\tau)}{\tau}d\tau+\int_t^{st}\frac{\phi(\tau)}{\tau}d\tau]} \\
&= \eta_1(1)e^{[\int_1^t \frac{\phi(\tau)}{\tau}d\tau+\int_t^{st}\frac{\phi(\tau)}{\tau}d\tau]} \\
&\leq \eta_1(1)e^{-\int_{st}^t \frac{\phi(0-\epsilon)}{\tau}d\tau} \\
&= \eta_1(1)e^{-(\phi(0)-\epsilon)(\log t-\log(st))} \\
&= \eta_1(1)e^{-(\phi(0)-\epsilon)\log\frac{1}{s}} \\
&= \eta_1(1)e^{(\phi(0)-\epsilon)\log s} \\
&= \eta_1(1)s^{\phi(0)-\epsilon}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\eta_1(st) \leq \eta_1(t)s^{\phi(0)-\epsilon}$ para $s<1$ y $t<\delta(\epsilon)$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\eta_1(st) &\geq \eta_1(1)e^{-(\phi(0)+\epsilon)(\log t-\log(st))} \\
&= \eta_1(1)e^{(\phi(0)+\epsilon)\log s} \\
&= \eta_1(1)s^{\phi(0)+\epsilon},
\end{aligned}$$

para $s<1$ y $t<\delta(\epsilon)$. Estas desigualdades pueden leerse conjuntamente, como condiciones de tipos locales

$$\eta_1(1)s^{\phi(0)+\epsilon} \leq \eta_1(st) \leq \eta_1(1)s^{\phi(0)-\epsilon},$$

si $s<1$ y $t<\delta(\epsilon)$. Así, "en el origen " los índices inferior y superior de nuestras funciones η de $\mathcal{N}$ coinciden entre sí y con $\phi(0)$.

($\mathcal{N}$-2) Es claro que cuando la función ϕ es constante, digamos $\phi(t) = \phi(0) = \alpha$, $\eta(t)$ es la función t^α y el operador J_η es el clásico operador J_α de Bessel que, de acuerdo al Teorema (3.4), resulta isomorfismo entre estos espacios Lipschitz generalizados.

($\mathcal{N}$-3) Es igualmente claro de la definición, que si η y β es positivo, entonces $t^\beta \eta(t) \in \mathcal{N}$, y si α es positivo y menor que el tipo inferior de η, también $t^{-\alpha}\eta(t) \in \mathcal{N}$.

($\mathcal{N}$-4) Mostraremos, finalmente, algunos ejemplos no triviales abarcados por esta nueva clase de funciones construidos, como es usual en el contexto de los espacios de Orlicz, produciendo modificaciones logarítmicas a las potencias, es preciso notar que para estas funciones el ímfimo de los tipos superiores coincide con el supremo de los inferiores, de otro modo el índice inferior y superior coinciden. En efecto, dado $\alpha > 0$, las funciones que en un pequeño entorno del origen tienen las formas

a) $\eta_1(t) = t^\alpha \log \frac{1}{t}$,

b) $\eta_1(t) = t^\alpha \frac{1}{\log \frac{1}{t}}$,

c) $\eta_1(t) = t^\alpha \log(\log \frac{1}{t})$,

u otras similares pertenecen a la clase $\mathcal{N}$, pues en todos los casos se tiene que

$$\phi(t) = \alpha + g(t)$$

donde g es una función monótona cuyo lía mite $g(0^+)$ es igual a cero y por consiguiente ϕ' resulta absolutamente integrable en un entorno del origen.

CAPíTULO 3

OPERADORES INVARIANTES POR TRASLACIONES EN ESPACIOS LIPSCHITZ GENERALIZADOS

3.1. Desigualdad tipo Young.

TEOREMA 3.1. *Si $f \in \Lambda(\eta;p)$ y $g \in \Lambda(\zeta;r)$ con $1 \leq p, r$; η y $\zeta \in \mathcal{J}$ y $0 \leq \frac{1}{u} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1 \leq 1$, entonces $f * g \in \Lambda(\eta\zeta;u)$. Además,*

$$\|f * g\|_{\eta\zeta;u} \leq M\|f\|_{\eta;p}\|g\|_{\zeta;r}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $f \in \Lambda(\eta;p)$ significa por un lado que $f \in L^p$ y por otro que $\frac{y^l}{\eta(y)}\|\frac{\partial^l}{\partial y^l}f(x,y)\|_p < A,\ y > 0$; de igual modo del hecho que $g \in \Lambda(\zeta;r)$ se tiene que $g \in L^r$ y que $\frac{y^m}{\zeta(y)}\|\frac{\partial^m}{\partial y^m}g(x,y)\|_r < A',\ y > 0$, donde l y m son cualquier número entero mayor que el tipo superior de η y ζ, respectivamente. Si llamamos h a la convolución de f con g, esto es $h = f*g$ se tiene por un lado, utilizando la desigualdad de Young en espacios L^p que

$$\|h\|_u \leq \|f\|_p\|g\|_r < \|f\|_{\eta;p}\|g\|_{\zeta;r} \tag{25}$$

por otro lado, si formamos la integral de Poisson de h y la derivamos k veces respecto de y, donde $k = l + m$ se tiene la siguiente desigualdad en norma

$$\|\frac{\partial^k}{\partial y^k}h(x,y)\|_u \leq \|\frac{\partial^l}{\partial y^l}f(x,y/2)\|_p\ \|\frac{\partial^m}{\partial y^m}g(x,y/2)\|_r,$$

de donde

$$\begin{aligned}\frac{y^k}{\eta(y)\zeta(y)}\|\frac{\partial^k}{\partial y^k}h(x,y)\|_u &\leq \frac{y^l}{\eta(y)}\|\frac{\partial^l}{\partial y^l}f(x,y/2)\|_p\ \frac{y^m}{\zeta(y)}\|\frac{\partial^m}{\partial y^m}g(x,y/2)\|_r \\ &\leq M\|f\|_{\eta;p}\|g\|_{\zeta;r}.\end{aligned} \tag{26}$$

Luego de (25) y (26)

$$\|h\|_{\eta\zeta;u} = \|f * g\|_{\eta\zeta;u} \leq M\|f\|_{\eta;p}\|g\|_{\zeta;r}.$$

□

Así, en particular, un núcleo $k \in \Lambda(\eta; 1)$ induce un operador acotado de $\Lambda(\Psi, \infty)$ en $\Lambda(\eta\Psi, \infty)$.

3.2. Caracterización del núcleo de un operador invariante por traslaciones.

A continuación nos ocupamos del proceso inverso esto es caracterizar los núcleos de operadores acotados, lineales e invariantes por traslaciones que actúan sobre los espacios Lipschitz-η. La caracterización que obtenemos es una generalización de los resultados de Taibleson puesto que probamos que los operadores lineales, continuos e invariantes por traslaciones que actúan sobre espacios Lipschtitz generalizados resultan ser de convolución con un núcleo en uno de estos espacios, dando una especie de recíproco del Teorema 3.1. Esta cuestión que constituye el objetivo central de este capítulo queda expresada en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.2. *Si η y Ψ son dos funciones de la clase $\mathcal{N}$ y T es un operador lineal, continuo e invariante por traslaciones de $\Lambda(\eta; p)$ en $\Lambda(\eta\Psi; p)$, $p = 1$ o $p = \infty$. Entonces, T coincide sobre $\mathcal{S}$ con un operador de convolución con un núcleo $K \in \Lambda(\Psi; 1)$. En particular, si el tipo superior de Ψ es menor que uno, entonces $K \in L^1$ y satisface*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(x-y) - K(x)| dx \leq c\Psi(|y|) \tag{27}$$

OBSERVACIÓN 3.3. En todo lo que resta del capítulo las funciones Ψ y η serán como en el enunciado del Teorema 3.2, de la clase $\mathcal{N}$. Una particularidad de esta clase es la de ser cerrada para el producto y aún para cocientes por potencias de órdenes adecuados de magnitud (ver observación **($\mathcal{N}$-3)** del Capítulo 2) y otra es la de ser una fuente de funciones para las cuales el potencial generalizado asociado a ellas resulta un isomorfismo entre estos espacios de Lipschitz generalizados de acuerdo al Corolario 2.22 del Capítulo 2. La condición de suavidad exigida en ese resultado puede alcanzarse por funciones equivalentes, de acuerdo a la Proposición 1.3 del Capítulo 1, a las que seguimos llamando η y Ψ, sin modificar el dominio y la imagen del operador T resultando ambos con normas equivalentes a las originales, según lo observado después de (15) del Capítulo 1, lo que preserva la continuidad de T.

Antes de demostrar el teorema enunciaremos y demostraremos algunos resultados que usaremos en la prueba.

LEMA 3.4. *Para $f \in \mathcal{S}$ se tiene que $J_\eta^{-1}(f) \in \mathcal{S}$ más aún $J_\eta^{-1}(f) = D * f$, $D \in \mathcal{S}'$ y $\hat{D} = \frac{1}{(G_\eta)\hat{}}$.*

Demostración. La prueba se basa esencialmente en el uso de las propiedades de los núcleos dadas en la Proposición 2.2 del Capítulo 2, así por **(G-3)** sabemos que $(G_\eta)\hat{} \in \mathcal{O}$ lo que nos permite asegurar que $(G_\eta)\hat{}.\hat{f}$ está en $\mathcal{S}$ y más todavía que el operador de multiplicación por $(G_\eta)\hat{}$ define un operador continuo sobre $\mathcal{S}$, de modo que el operador J_η envía funciones de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$ isomórficamente; y podríamos decir lo mismo para un operador de convolución cuya transformada de Fourier sea $\frac{1}{(G_\eta)\hat{}}.\hat{f}$, pues por **(G-4)** de la misma proposición sabemos que $\frac{1}{(G_\eta)\hat{}} \in \mathcal{O}$. Es inmediato que la transformada de Fourier de la composición de dos operadores tales da la identidad y por ser $\hat{}$ un isomorfismo en $\mathcal{S}$ hemos encontrado un operador inverso para J_η, que denotamos J_η^{-1}, el cual es la convolución con una distribución D que está en $\mathcal{S}'$, puesto que $\mathcal{O} \subset \mathcal{S}'$ y $\hat{}$ es también un isomorfismo en $\mathcal{S}'$. $\square$

Observamos que este lema muestra que los J_η son isomorfismos sobre $\mathcal{S}$, aún para funciones η más generales, basta que η pertenezca a la clase $\mathcal{J}$, pues sólo usamos la Proposición 2.2; en contraste, con el problema más delicado resuelto en el Capítulo 2, donde se probó que J_η es un isomorfismo entre los espacios Lipschitz generalizados para una clase especial de funciones η.

A continuación vemos, como un corolario del siguiente Teoma de Taibleson, que un operador que actúa sobre espacios de Lipschitz generalizados "queda caracterizado" por su acción sobre $\mathcal{S}$ en el sentido que su restricción a $\mathcal{S}$ determina un única distribución en $\mathcal{S}'$ aunque, como es claro, no existe un argumento de densidad que lo justifique. Más adelante veremos que esta distribución es una función de una clase de Lipschitz adecuada para la aplicación de la desigualdad de Young desarrollada en el comienzo del capítulo.

Teorema 3.5 (Teorema I de Taibleson I). *([Tai65]) Si A es un operador acotado, lineal, invariante por traslaciones de $\Lambda(\alpha; p, q; E_n)$ en $\Lambda(\beta; p, q; E_n)$, α, β reales, $1 \leq p, q, r, s \leq \infty$ entonces existe una única distribución temperada $T_A \in \mathcal{S}'$ tal que $Ag = T_A * g$, para toda $g \in \mathcal{S}$.*

Como consecuencia obtenemos

Teorema 3.6. *Si A es un operador lineal, acotado invariante por traslaciones de $\Lambda(\eta; p)$ en $\Lambda(\zeta; p)$ entonces existe un única distribución $T_A \in \mathcal{S}'$ tal que $Ag = T_A * g$, para toda $g \in \mathcal{S}$.*

Demostración. Denotamos con a_η y a_ζ los tipos inferiores de η y ζ respectivamente y análogamente con b_η y b_ζ los tipos superiores respectivos; probamos en los Lemas 1.14) y 1.15 del Capítulo 1 las siguientes inclusiones continuas

$$\Lambda(b_\eta; p) \subset \Lambda(\eta; p) \subset \Lambda(a_\eta; p)$$

$$\Lambda(b_\zeta;p) \subset \Lambda(\zeta;p) \subset \Lambda(a_\zeta;p)$$

Consideremos ahora la restricción de T a $\Lambda(b_\eta;p)$, que denotamos con $\overline{T}$ y que manda $\Lambda(b_\eta;p)$ en $\Lambda(a_\zeta;p)$, la linealidad y la invariancia por traslaciones es obvio que se preservan; respecto de la continuidad, para $f \in \Lambda(b_\eta;p)$ tenemos

$$\|\overline{T}(f)\|_{a_\zeta;p} \leq \|\overline{T}(f)\|_{\zeta;p} = \|T(f)\|_{\zeta;p} \leq C\|f\|_{\eta;p} \leq C\|f\|_{b_\eta;p}.$$

Este operador está en las hipótesis del Teorema I de Taibleson, de modo que existe una única distribución temperada $A_{\overline{T}} \in \mathcal{S}'$ tal que $\overline{T}g = A_{\overline{T}} * g$, $\forall g \in \mathcal{S}$. Puesto que $\mathcal{S} \subset \Lambda(b_\eta;p)$, se tiene que los operadores $\overline{T}$ y T sobre $\mathcal{S}$ coinciden y la prueba está completa. □

Finalmente, antes de proceder a la prueba del Teorema 3.2, enunciamos los siguientes resultados de Taibleson que usaremos en la demostración.

Teorema 3.7 (Teorema II de Taibleson). *([Tai65]) Supongamos que T es un operador lineal, acotado e invariante por traslaciones de $\Lambda(\alpha;p,\infty)$ en sí mismo, para algún α y $p=1$ o $p=\infty$. Entonces existe $k \in \Lambda(0;1,\infty)$ tal que $Tf = k * f$, para toda f perteneciente a $\mathcal{S}$.*

Teorema 3.8 (Teorema III de Taibleson). *([Tai64]) Para α y β números reales, $1 \leq p,q \leq \infty$, J_β transforma $\Lambda(\alpha;p,q)$ isomórficamente $\Lambda(\alpha+\beta;p,q)$.*

Demostración del Teorema 3.2. Puesto que η y Ψ están en $\mathcal{N}$, lo observado en **($\mathcal{N}$-4)** del Capítulo 2, puede aplicarse para suponer en lo que sigue, que η y Ψ son tales que su producto también pertenece a $\mathcal{N}$. Sean α positivo y menor que el tipo inferior de η y β menor que el tipo inferior de η más el tipo inferior de Ψ, con $\beta > \alpha$, que J_{η/t^α} es un isomorfismo entre $\Lambda(t^\alpha;p)$ y $\Lambda(\eta;p)$ y que $J_{\eta\Psi/t^\beta}$ lo es entre $\Lambda(t^\beta;p)$ y $\Lambda(\eta\Psi;p)$, de acuerdo a la observación hecha luego del enunciado del teorema. La idea de la prueba es hacer intervenir potenciales generalizados apropiados, precisamente J_{η/t^α} y $J_{\eta\Psi/t^\beta}$, para factorizar el operador T en términos de ellos y sus inversos y de un operador $\overline{T}$ lineal, continuo e invariante por traslaciones que actúa sobre los espacios Lipschitz-α y que, utilizando los Teoremas II y III de Taibleson, se puede expresar como la convolución con un núcleo que pertenece a un espacio $\Lambda(\delta;1)$, para un δ apropiado que revela el grado de suavidad alcanzado por el operador. Con este propósito escribimos

$$Tf = [J_{\eta\Psi/t^\beta} \circ (J_{\eta\Psi/t^\beta})^{-1} \circ T \circ J_{\eta/t^\alpha} \circ (J_{\eta/t^\alpha})^{-1}](f)$$

o bien

$$Tf = [J_{\eta\Psi/t^\beta} \circ \bar{T} \circ (J_{\eta/t^\alpha})^{-1}](f)$$

donde $\bar{T} = (J_{\eta\Psi/t^\beta})^{-1} \circ T \circ J_{\eta/t^\alpha}$. □

Gráficamente la situación para $p = \infty$ es como sigue

$$\begin{tikzcd}
\Lambda(\eta;\infty) \arrow[r, "T"] & \Lambda(\eta\psi;\infty) \arrow[d, "\left(J_{\eta\Psi/t^{\beta}}\right)^{-1}"] \\
\Lambda_{\alpha} \arrow[u, "J_{\eta/t^{\alpha}}"] & \Lambda_{\beta} \arrow[l, "\bar{T}"']
\end{tikzcd}$$

Afirmación: El operador $\bar{T}$ de $\Lambda(t^{\alpha};p)$ en $\Lambda(t^{\beta};p)$, $p = 1$ o ∞, es lineal, continuo e invariante por traslaciones y se puede expresar como la convolución con un núcleo k que pertenece al espacio $\Lambda(\delta;1)$ siendo $\delta = \beta - \alpha > 0$. En particular, para $f \in \mathcal{S}$, se tiene que $\bar{T}f \in L^{\infty} \cap \mathcal{C}^{\infty}$.

En efecto, el operador $\bar{T}$ envía el espacio $\Lambda(t^{\alpha};p)$ en $\Lambda(t^{\beta};p)$ ya que los potenciales generalizados que intervienen están bien definidos como isomorfismos entre los espacios correspondientes, además es lineal, continuo e invariante por traslaciones por ser composición de operadores de este tipo. Componiendo $\bar{T}$ con el potencial de Bessel $J_{-\delta}$, $\delta = \beta - \alpha$, nos da un operador en las condiciones del Teorema II de Taibleson, luego recuperamos $\bar{T}$ componiendo con J_{δ}, el hecho que el núcleo de este potencial está en $\mathcal{O}$ nos garantiza que la convolución es asociativa y debido a la acción de los potenciales de Bessel, Teorema III de Taibleson, podemos concluir que el núcleo de $\bar{T}$ está en $\Lambda(\delta;1)$.

Para $f \in \mathcal{S}$, podemos expresar Tf como un operador de convolución de cuatro factores, más precisamente

$$\begin{aligned}
[J_{\eta\Psi/t^{\beta}} \circ \bar{T} \circ (J_{\eta/t^{\alpha}})^{-1}](f) &= J_{\eta\Psi/t^{\beta}}[\bar{T}[(J_{\eta/t^{\alpha}})^{-1}(f)]] \\
&= \big(G_{\frac{\eta\Psi}{t^{\beta}}} * (k * (D * f))\big),
\end{aligned}$$

con $D \in \mathcal{S}'$ por el Lema 3.4, así todos los factores, excepto posiblemente k, son tales que su transformada de Fourier está en $\mathcal{O}$, esto permite conmutar y asociar la convolución de los factores obteniendo

$$\begin{aligned}
[J_{\eta\Psi/t^{\beta}} \circ \bar{T} \circ (J_{\eta/t^{\alpha}})^{-1}](f) &= (G_{\frac{\eta\Psi}{t^{\beta}}} * (D * k)) * f \\
&= J_{\eta\Psi/t^{\beta}}[(J_{\eta/t^{\alpha}})^{-1}(k)] * f \\
&= K * f.
\end{aligned}$$

Usando los resultados del Capítulo 2, puesto que $k \in \Lambda(\delta;1)$, se tiene que $(J_{\eta/t^{\alpha}})^{-1}(k) \in \Lambda(t^{\beta}/\eta;1)$ y también que

$$K = J_{\eta\Psi/t^{\beta}}[(J_{\eta/t^{\alpha}})^{-1}(k)] \in \Lambda(\Psi;1),$$

de modo que nuestro operador T coincide sobre $\mathcal{S}$ con el operador $\tilde{T}(f) = K * f$, $K \in \Lambda(\Psi;1)$, quedando demostrado el teorema.

COROLARIO 3.9. *Sea* $\eta \in \mathcal{N}$ *y* T *un operador lineal, acotado e invariante por traslaciones de* $\Lambda(\eta; p)$ *en* $\Lambda(\eta; p)$, $p = 1$ o $p = \infty$. *Entonces,* T *sobre* $\mathcal{S}$ *coincide con un operador de convolución con un núcleo* k *que pertenece al espacio* $\Lambda(0, 1, \infty)$ *de Taibleson.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\alpha > 0$, entonces el operador

$$\bar{T} = J_\alpha \circ T \ : \Lambda(\eta; p) \longrightarrow \Lambda(\eta t^\alpha; p)$$

es lineal, acotado e invariante y se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.2. Por lo tanto, $\bar{T}$ es la convolución con un núcleo $h \in \Lambda(t^\alpha; 1)$. Además como $T = J_{-\alpha}\bar{T}$, T es la convolución con $k = J_{-\alpha}(h)$, que por el Teorema III de Taibleson está en la clase $\Lambda(0; 1, \infty)$. $\square$

CAPíTULO 4

OPERADORES DE CONVOLUCION ENTRE ESPACIOS DE ORLICZ

4.1. Las funciones de Young y los espacios de Orlicz.

DEFINICIÓN 4.1. Llamamos a A **una función de Young**, si es una función no negativa, creciente, convexa en $[0, \infty]$ con $A(0) = 0$, $A(\infty) = \infty$ y no idénticamente cero o infinito en $(0, \infty)$. Puede tener un salto infinito en algún punto $x_1 > 0$, pero debe ser $\lim_{x \to x_1^-} A(x) = \infty$ y para $x \geq x_1$, $A(x) = \infty$. Bajo estas condiciones la función inversa A^{-1} está bien definida y es también creciente y continua.

DEFINICIÓN 4.2. Para una función de Young A, definimos el **espacio de Orlicz** L_A como el espacio lineal de todas las funciones medibles para las cuales existe un número K positivo tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} A\left(\frac{|f(x)|}{K}\right) dx \leq 1.$$

Hemos escrito las condiciones para que una función A sea de Young en forma más general que la que usaremos, pues para nuestros propósitos será suficiente considerar funciones a valores finitos.

Con $\mu_f(t)$ denotamos la función distribución de la función $|f|$. La reordenada no creciente de $|f|$ es la inversa de $\mu_f(t)$, más precisamente

$$f^*(s) = \inf\{t : \mu_f(t) \leq s\}$$

donde $s \geq 0$. Indicamos con f^{**} el promedio integral

$$f^{**}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f^*(t)dt, & x > 0; \\ f^*(0), & x = 0. \end{cases}$$

DEFINICIÓN 4.3. Para A una función de Young, siguiendo por ejemplo a [O'N65], indicamos con M_A al espacio lineal de todas las funciones f tales que

$$f^{**}(x) \leq \lambda A^{-1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

para λ suficientemente grande y x positivo. Se define la norma $\|f\|_{M_A}$ como el ínfimo de aquellos λ; esto es

$$\|f\|_{M_A} = \sup_{s>0} \frac{f^{**}(s)}{A^{-1}(1/s)} \quad .$$

El espacio M_A se conoce usualmente como el **espacio de Orlicz débil** asociado a la función de Young A.

Para nosotros será importante contar con otra versión de los espacios de Orlicz débiles, que generaliza a los espacios L^p_*, para $p \geq 1$.

Definición 4.4. Diremos que una función f pertenece $\mathcal{M}_A$ si $A(t)\mu_f(t)$ es una función acotada de la variable positiva t.

En [Iaf96] se obtienen condiciones necesarias y suficientes en la función A para la coincidencia de estas dos clases débiles.

4.2. Acotación de operadores de convolución entre espacios de Orlicz.

En el artículo "Boundedness of translation invariant operators on Hölder spaces and L^p spaces" Stein y Zygmund prueban que en el caso en que T es un operador lineal invariante por traslaciones que manda el espacio de las funciones Hölder(Lipschitz) continuas con exponente α, Λ_α, en el espacio Λ_β, para apropiados $\beta > \alpha$, entonces T manda L^p en L^q donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{(\beta-\alpha)}{n}$ con $1 < p, q < \infty$. La prueba esencialmente se basa en que un operador invariante por traslaciones que transforma un espacio Lipschitz en otro, es un operador de convolución tal que, si $\delta = \beta - \alpha$ que da el grado de suavidad logrado por el operador y $0 < \delta < 1$; su núcleo satisface las siguientes propiedades:

1) $\int_{\mathbb{R}^n} |k(x)|dx < \infty$

2) $\int_{\mathbb{R}^n} |k(x-y) - k(x)|dx \leq A|y|^\delta$

Estas propiedades del núcleo son precisamente, las que permiten obtener estimaciones respecto de la función distribución del núcleo, y a partir de ellas lograr la acotación buscada en los espacios L^p. Si reemplazamos el segundo miembro de la propiedad **2)** por $A\varphi(|y|)$, incluyendo al caso anterior cuando $\varphi(t) = t^\delta$ con δ menor que 1, obtenemos un operador de convolución que por el Teorema 3.1 del Capítulo 3 aplica el espacio $\Lambda(\psi; p)$ en el espacio $\Lambda(\Psi; p)$, con $\Psi = \varphi\psi$, dando entonces la función φ el "orden de suavidad" que produce el operador. El objeto de este capítulo es probar que bajo estas condiciones modificadas sobre el núcleo se obtiene acotación del operador asociado en espacios de Orlicz relacionados a través de la función φ. Este resultado se enuncia en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.5. *Sea $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y)f(y)dy$, donde el núcleo k satisface las dos condiciones siguientes:*

1) $\int_{\mathbb{R}^n} |k(x)|dx < \infty$,

2) $\int_{\mathbb{R}^n} |k(x-y) - k(x)|dx \leq A\varphi(|y|)$,

donde φ es una función positiva, no decreciente de tipo inferior positivo a y de tipo superior $b < 1$. Entonces para toda función de Young Θ, que verifica

$$r\Theta(x) \leq x\Theta'(x), \quad r > 1$$

y

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t^{-1/n})\Theta^{-1}(t)}{t} dt < \infty,$$

se tiene que el operador T es un operador lineal y acotado de L_Θ en L_Ω donde

$$\Omega^{-1}(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t^{-1/n})\Theta^{-1}(t)}{t} dt$$

y se verifica

$$\|Tf\|_\Omega \leq C\|f\|_\Theta,$$

con C independiente de la norma L^1 de k.

Al Teorema 4.5, eje central de este capítulo, lo probaremos mostrando primero que un núcleo con las propiedades antes mencionadas admite una partición en dos funciones una de las cuales está en L^1 y la otra en L^∞. Es esto, lo que permite estimar el tamaño de la función distribución del núcleo, para asegurar su pertenencia a un Orlicz débil determinado. Esta parte de la demostración la haremos en una situación un poco más general debilitando la exigencia de tipo inferior positivo de la función φ.

LEMA 4.6. *Sea φ de crecimiento, tipo superior menor que 1 y tal que $\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t} dt < \infty$. Supongamos que k satisface las condiciones **1)** y **2)** anteriores, entonces dado cualquier $\alpha > 0$, existe una partición $k(x) = k_1(x) + k_\infty(x)$ de modo que*

a) $|k_\infty(x)| \leq \alpha$ *para todo* x,

b) $\int_{\mathbb{R}^n} |k_1(x)| \leq C \int_0^{\psi(\alpha)} \frac{\varphi(s)}{s} ds$,

donde ψ es la inversa de $\eta(t) = C \int_t^\infty \frac{\varphi(s)}{s^{n+1}} ds$ y la constante C no depende de la norma L^1 de k.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la integral de Poisson $k(x,t) = P_t(x) * k(x)$ y mostremos cómo de las desigualdades **1)** y **2)** se deducen las siguientes:

I) $\int_{\mathbb{R}^n} |k(x,t)|dx < \infty$

II) $\int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial}{\partial t} k(x,t)|dx \leq C \frac{\varphi(t)}{t}$

con C independiente de la norma uno de k. En efecto,

I) $\int_{\mathbb{R}^n} |k(x,t)|dx = \|P_t * k\|_1 \leq \|P_t\|_1 \|k\|_1$

Usando el hecho que el nucleo de Poisson tiene norma 1 igual a 1 y la hipótesis **1)** se completa la prueba.

Aunque en el Capítulo 1 hemos enunciado un resultado, Proposición 1.18, en la que se afirma que **1)** y **2)** implican **II)**, ahora las condiciones en φ son más débiles ya que no se requiere el tipo inferior positivo.

II)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial}{\partial t} k(x,t)|dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} P_t(y) k(x-y) dy \right| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} P_t(y)\ (k(x-y) - k(x)) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial}{\partial t} P_t(y) \right| |k(x-y) - k(x)| dy dx \\ &\leq A \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial}{\partial t} P_t(y) \right| \varphi(|y|) dy.\end{aligned}$$

Si escribimos esta integral en coodenadas polares y usamos las estimaciones **(P.5)** y **(P.6)** del Capítulo 1, para $\rho < t$ y $\rho > t$, respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned}&\leq AC'|S^{n-1}| \left\{ \int_0^t t^{-n-1} \varphi(\rho) \rho^{n-1} d\rho + \int_t^\infty \rho^{-n-1} \varphi(\rho) \rho^{n-1} d\rho \right\} \\ &= AC'|S^{n-1}| \left\{ \int_0^1 u^{n-1} \frac{\varphi(tu)}{t} du + \int_1^\infty \frac{u^{n-1}}{u^{n+1}} \frac{\varphi(tu)}{t} \right\},\end{aligned}$$

el crecimiento de φ cuando $u < 1$ y su tipo superior b, cuando $u \geq 1$, dan lugar a

$$\leq AC'|S^{n-1}| \frac{\varphi(t)}{t} \left\{ \int_0^1 u^{n-1} du + \int_1^\infty u^{-2} u^b du \right\}$$

$$\begin{aligned}&\leq A|S^{n-1}| \frac{\varphi(t)}{t} \left\{ \frac{1}{n} + \int_1^\infty u^{b-2} du \right\} \\ &= A \frac{\varphi(t)}{t},\end{aligned}$$

donde se ha usado $b < 1$.

Puesto que $k(x,t)$ es la integral de Poisson de una función en L^1,

$$\lim_{t \to 0} k(x,t) = k(x) \qquad \text{para c.t.p. } x$$

y podemos escribir

$$k(x,t) - k(x) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} k(x,s) ds$$

y de esto

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |k(x,t)-k(x)|dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}k(x,s)ds\right| dx\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^t \left|\frac{\partial}{\partial s}k(x,s)ds\right| dx\\ &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial}{\partial s}k(x,s)\right| dxds\\ &\leq \int_0^t C\frac{\varphi(s)}{s}ds.\end{aligned}$$

La finitud de la última expresión es una consecuencia de la condición

$$\int_0^1 \frac{\varphi(s)}{s}ds < \infty.$$

Ahora de

$$k(x,t) = P_t(x) * k(x)$$

se obtiene

$$\sup_x |k(x,t)| \leq \sup_x P_t(x) \int_{\mathbb{R}^n} |k(x)|dx \leq At^{-n}$$

y debido a que la última expresión tiende a cero cuando $t \to \infty$ podemos escribir

$$k(x,t) = -\int_t^\infty \frac{\partial}{\partial s}k(x,s)ds.$$

Por otro lado, de la igualdad siguiente

$$\frac{\partial}{\partial t}k(x,t) = P_{\frac{t}{2}} * \frac{\partial}{\partial t}k(x,\frac{t}{2})$$

se tiene

$$\sup_x \left|\frac{\partial}{\partial t}k(x,t)\right| \leq \sup_x \left|P_{\frac{t}{2}}(x)\right| \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial}{\partial t}k(x,\frac{t}{2})\right| dx,$$

y de esto

$$\sup_x \left|\frac{\partial}{\partial t}k(x,t)\right| \leq Ct^{-n}\frac{\varphi(t)}{t},$$

y así

$$\begin{aligned}\sup_x |k(x,t)| &= \sup_x \left|-\int_t^\infty \frac{\partial}{\partial s}k(x,s)ds\right|\\ &\leq \sup_x \int_t^\infty \left|\frac{\partial}{\partial s}k(x,s)\right| ds\\ &\leq \int_t^\infty \sup_x \left|\frac{\partial}{\partial s}k(x,s)\right| ds\\ &\leq C\int_t^\infty \frac{\varphi(s)}{s^{n+1}}ds.\end{aligned}$$

En definitiva, hemos obtenido que

$$\sup_x |k(x,t)| \leq \eta(t)$$

donde $\eta(t) = C\int_t^\infty \frac{\varphi(s)}{s^{n+1}}$ y puesto que se trata de una función estrictamente decreciente existe su inversa. Ahora escribimos

$$k(x) = [k(x) - k(x,t)] + k(x,t) = k_1(x) + k_\infty(x)$$

y elegimos t de modo que

$$|k_\infty(x)| \leq \alpha \qquad \text{para todo } x$$

esto es, t tal que $\alpha = \eta(t)$, tendremos así que $t = \psi(\alpha)$ con ψ la inversa de η y

$$\int_{\mathbb{R}^n} |k_1(x)|dx \leq C\int_0^{\psi(\alpha)} \frac{\varphi(s)}{s}ds,$$

con lo cual el lema está probado. □

Teorema 4.7. *Sea φ una función de crecimiento con tipo superior menor que 1 y tal que $\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t}dt < \infty$. Si k es un núcleo que satisface las propiedades **1)** y **2)**, entonces k pertenece a un espacio de Orlicz débil asociado a la función de Young $\tilde{\rho}$ ($k \in \mathcal{M}_{\tilde{\rho}}$) es decir,*

$$\tilde{\rho}(\alpha)m(\{x : |k(x)| > \alpha\}) \leq C$$

para alguna constante C que no depende de la norma L^1 de k y donde $\tilde{\rho}$ es equivalente a la función ρ definida por

$$\rho(\alpha) = \frac{\alpha}{\int_0^{\psi(\alpha)} \frac{\varphi(s)}{s}ds}$$

y ψ es la función inversa de $\eta(t) = C\int_t^\infty \frac{\varphi(s)}{s^{n+1}}ds$.

Demostración. Dado $\alpha > 0$ aplicamos el lema anterior partiendo el núcleo respecto de este α. Podemos escribir

$$m\{x : |k(x)| > 2\alpha\} \leq m\{x : |k_1(x)| > \alpha\} + m\{x : |k_\infty(x)| > \alpha\}.$$

En virtud de las acotaciones anteriores, la medida del segundo conjunto es cero y respecto de la medida del primero tenemos

$$\begin{aligned} m\{x : |k_1(x)| > \alpha\} &\leq \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |k_1(x)|dx \\ &\leq C\frac{1}{\alpha}\int_0^{\psi(\alpha)} \frac{\varphi(s)}{s}ds. \end{aligned}$$

Finalmente entonces,

$$m\{x : |k(x)| > 2\alpha\} \leq C\frac{1}{\alpha}\int_0^{\psi(\alpha)} \frac{\varphi(s)}{s}ds.$$

Recordando que

$$\rho(\alpha) = \frac{\alpha}{\int_0^{\psi(\alpha)} \frac{\varphi(s)}{s} ds}$$

el teorema estará probado si vemos que ρ es equivalente a una función $\tilde{\rho}$ de Young a valores finitos: $\tilde{\rho}$ es convexa, no decreciente, no idénticamente nula en $[0, \infty)$ y $\rho(0) = 0$. Mostraremos que la ρ misma tiene estas propiedades, excepto posiblemente la convexidad, pero luego, en los Lemas 4.8, 4.9 y 4.10 siguientes, veremos que hay una función $\tilde{\rho}$ convexa equivalente a ρ. Como todas las otras propiedades requeridas a $\tilde{\rho}$ se preservan por equivalencia, tendremos el resultado.

I) Probaremos que $\rho(0) = 0$ mostrando que

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} \int_0^{\psi(\alpha)} \frac{\varphi(s)}{s} ds = \infty.$$

Se deduce de ser $b < 1$ que $\frac{\varphi(s)}{s}$ es casi decreciente, en efecto, si suponemos sin pérdida de generalidad que $s > t$ resulta

$$\frac{\varphi(s)}{s} = \frac{\varphi(\frac{s}{t}t)}{\frac{s}{t}t} \leq \frac{\left(\frac{s}{t}\right)^b}{\frac{s}{t}} \frac{\varphi(t)}{t} = C\left(\frac{s}{t}\right)^{b-1} \frac{\varphi(t)}{t}.$$

Ahora usando el hecho anterior podemos escribir

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^{\psi(\alpha)} \frac{\varphi(s)}{s} ds \geq C \frac{1}{\alpha} \frac{\varphi(\psi(\alpha))}{\psi(\alpha)} \psi(\alpha) = C \frac{\varphi(\psi(\alpha))}{\alpha}.$$

El segundo miembro en términos de $t = \psi(\alpha)$, resulta

$$C \frac{\varphi(t)}{\eta(t)} = C \frac{\varphi(t)}{\int_t^\infty \frac{\varphi(s)}{s^{n+1}} ds}.$$

Puesto que $\eta(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ bastará probar que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\varphi(t)}{\int_t^\infty \frac{\varphi(s)}{s^{n+1}} ds} = \infty,$$

lo cual equivale a probar que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\int_t^\infty \frac{\varphi(s)}{s^{n+1}} ds}{\varphi(t)} = 0.$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to \infty} \frac{\int_t^\infty \frac{\varphi(s)}{s^{n+1}} ds}{\varphi(t)} &= \lim_{t \to \infty} \int_1^\infty \frac{\varphi(st)}{\varphi(t)} \frac{1}{t^{n+1} s^{n+1}} t ds \\
&\leq \lim_{t \to \infty} C \frac{1}{t^n} \int_1^\infty s^{\beta - n - 1} ds \\
&= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t^n} \lim_{b \to \infty} \left[\frac{s^{\beta - n}}{\beta - n} \right]_1^b \\
&= 0.
\end{aligned}$$

II) La prueba de que ρ es no decreciente es inmediata y más aún resulta estrictamente creciente, en efecto; sean α_1, α_2 tales que $\alpha_1 < \alpha_2$, en este caso $\psi(\alpha_1) > \psi(\alpha_2)$ (ψ es la inversa de una función estrictamente decreciente)

$$\int_0^{\psi(\alpha_1)} \frac{\varphi(s)}{s} ds > \int_0^{\psi(\alpha_2)} \frac{\varphi(s)}{s} ds$$

entonces

$$\rho(\alpha_1) < \rho(\alpha_2).$$

III) ρ es una función a valores finitos pues $\psi(\alpha)$ es finita y

$$0 < \int_0^{\psi(\alpha)} \frac{\varphi(s)}{s} ds < \infty.$$

IV) ρ no es idénticamente nula en $[0, \infty]$ en virtud de la finitud de $\int_0^{\psi(\alpha)} \frac{\varphi(s)}{s} ds$ y más aún es mayor que cero siempre.

$\square$

Los tres lemas siguientes nos permiten probar que existe una función $\tilde{\rho}$ convexa equivalente a ρ, en las condiciones del teorema precedente

Lema 4.8. *Sea ω una función de tipo superior finito m tal que $\frac{\omega(s)}{s}$ es no decreciente. Entonces valen las siguientes propiedades:*

$$m \geq 1, \tag{28}$$

$$\frac{\omega(s)}{s^p} \quad \text{es casi creciente para} \quad p \geq m, \tag{29}$$

y

$$\widetilde{\omega}(t) = \int_0^t \frac{\omega(s)}{s} ds \tag{30}$$

es una función convexa equivalente a ω.

Demostración. Ya que $\frac{\omega(s)}{s}$ es no decreciente y $\omega(s)$ es de tipo superior m, si suponemos $s \geq 1$ se cumple que:

$$\omega(1) \leq \frac{\omega(s)}{s} = \frac{\omega(s{,}1)}{s} \leq Cs^m \frac{\omega(1)}{s} = Cs^{m-1}\omega(1)$$

desigualdad que sólo se satisface si $m - 1 \geq 0$ y vale (28).

De la propiedad de tipo superior de ω y de considerar $s \geq t$ y $p \geq m$, obtenemos

$$\frac{\omega(s)}{s^p} = \frac{\omega\left(\frac{s}{t}t\right)}{s^p} \leq C\frac{\left(\frac{s}{t}\right)^m}{s^p}\omega(t) = Cs^{m-p}\frac{\omega(t)}{t^m} \leq C\frac{\omega(t)}{t^m}$$

y vale (29).

La equivalencia en (30) se deduce de la Proposición 1.3 del Capítulo 1 ya que si $s < 1$, por ser $\frac{\omega(t)}{t}$ no decreciente, $\omega(st) \leq s\omega(t)$ y entonces ω tiene tipo inferior 1 y podemos tomar ϵ igual a cero en aquella proposición. $\square$

Nos interesa comprobar que ρ satisface las hipótesis del Lema 4.8. Como trivialmente se cumple que $\frac{\rho(\alpha)}{\alpha}$ es no decreciente, resta analizar la cuestión de la finitud del tipo superior de ρ, para lo cual necesitamos probar una propiedad del tipo Δ_2 para las funciones decrecientes, ahora para la ψ que es estrictamente decreciente.

LEMA 4.9. *Si φ es una función creciente que tiene un tipo superior b menor que n y ψ es la inversa de*

$$\eta(t) = C \int_t^\infty \frac{\varphi(s)}{s^{n+1}},$$

entonces ψ satisface la siguiente desigualdad: existe una constante C tal que para cada $u > 1$,

$$\psi(u\alpha) \geq C u^{-\frac{1}{n-b}} \psi(\alpha) \tag{31}$$

para todo α.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que ψ es estrictamente decreciente y es la inversa de η, bastará comprobar una desigualdad del tipo siguiente

$$u\eta(t) \leq \eta(At), \quad \text{con} \quad A = Cu^{-\frac{1}{n-b}} \tag{32}$$

pues, aplicando ψ obtenemos (31); en efecto,

$$\psi(u\eta(t)) \geq \psi(\eta(At)) \geq At,$$

puesto que si $\eta(t) = \alpha$ y $t = \psi(\alpha)$ resultará

$$\psi(u\alpha) \geq A\psi(\alpha).$$

Verifiquemos (32)

$$\begin{aligned}
\eta(t) &= C \int_t^\infty \frac{\varphi(w)}{w^{n+1}} dw \\
&= C \int_{At}^\infty \frac{\varphi\left(\frac{s}{A}\right)}{\left(\frac{s}{A}\right)^{n+1}} \frac{1}{A} ds \\
&= CA^n \int_{At}^\infty \frac{\varphi\left(\frac{s}{A}\right)}{s^{n+1}} ds \\
&\leq CA^n \left(\frac{1}{A}\right)^b \int_{At}^\infty \frac{\varphi(s)}{s^{n+1}} ds \\
&= CA^{n-b} \eta(At) \\
&= Cu^{-1} \eta(At).
\end{aligned}$$

$\square$

LEMA 4.10. *La función ρ es de tipo superior finito y mayor que uno.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $u > 1$ y $\alpha > 0$, si $A = Cu^{-\frac{1}{n-b}}$ es como en el Lema 4.9, tenemos que $A < 1$ y, por consiguiente,

$$\begin{aligned}\rho(u\alpha) &= \frac{u\alpha}{\int_0^{\psi(u\alpha)} \frac{\varphi(s)}{s} ds} \leq \frac{u\alpha}{\int_0^{A\psi(\alpha)} \frac{\varphi(s)}{s} ds} \\ &\leq \frac{u\alpha}{\int_0^{\psi(\alpha)} \frac{\varphi(As)}{s} ds} \leq \frac{u\alpha}{A^b \int_0^{\psi(\alpha)} \frac{\varphi(s)}{s} ds} \\ &= \frac{u}{A^b}\rho(\alpha).\end{aligned}$$

Ya que $A = Cu^{-\frac{1}{n-b}}$, tenemos que

$$\frac{u}{\left(Cu^{-\frac{1}{n-b}}\right)^b} = Cu^{1+\frac{b}{n-b}} = Cu^{\frac{n}{n-b}}.$$

Luego ρ tiene un tipo superior igual a $\frac{n}{n-b}$ que es mayor que 1 si b es positivo. □

En consecuencia existe $\tilde{\rho}$ dada por el Lema 4.8 que es equivalente a ρ y tal que

$$\frac{d}{d\alpha}\tilde{\rho}(\alpha) = \frac{\rho(\alpha)}{\alpha};$$

de modo que $\tilde{\rho}$ es convexa, quedando así completa la prueba del Teorema 4.7.

Con estos resultados el Teorema 4.5 será una consecuencia inmediata del siguiente que aparece en el trabajo de Richard O'Neil, "Fractional Integration in Orlicz Spaces", [O'N65].

TEOREMA 4.11 (FRACTIONAL INTEGRATION FOR ORLICZ SPACES.). *Si A,B son funciones de Young tales que*

$$\int_0^1 \frac{A^{-1}(t)B^{-1}(t)}{t^2} dt < \infty$$

$$pB(x) \leq xb(x), \quad p > 1$$

donde $\int_0^x b(t)dt = B(x)$ *y la función de Young C definida por*

$$C^{-1}(x) = \int_0^x \frac{A^{-1}(t)B^{-1}(t)}{t^2} dt$$

y si además $f \in M_A$, $g \in L_B$ *y* $h = T(f,g)$ *donde T es un operador de convolución, entonces* $h \in L_C$ *y*

$$\|h\|_C \leq 4p'\|f\|_{M_A}\|g\|_B.$$

Por razones técnicas enunciaremos una leve modificación a este teorema, aparentemente más fuerte, pero que en realidad puede obtenerse como corolario.

Teorema 4.12. *Si ρ es una función creciente tal que $\rho^{-1}(t)/t$ es no creciente y si $k^{**}(x) \leq C\rho^{-1}(1/x)$. Entonces, para Θ función de Young que satisface*

$$q\Theta(x) \leq x\Theta'(x), \quad q > 1$$

y

$$\int_0^1 \frac{\rho^{-1}(t)\Theta^{-1}(t)}{t^2} dt < \infty,$$

el operador $T(g) = k * g$ es acotado de L_Θ en L_Ω donde Ω es la función de Young dada por

$$\Omega^{-1}(x) = \int_0^x \frac{\rho^{-1}(t)\Theta^{-1}(t)}{t^2} dt.$$

Demostración del Teorema 4.5. Dado que φ tiene tipo inferior positivo, $\varphi(t)/t$ es integrable en el origen y podemos aplicar el Teorema 4.7 para obtener,

$$\rho(\alpha) m(\{|k(x)| > \alpha\}) \leq C.$$

Esta desigualdad en general no es equivalente a

$$k^{**}(x) \leq C\rho^{-1}(1/x),$$

que aparece en el Teorema de O'Neil 4.12 pero, como se prueba en [Iaf96], una condición necesaria y suficiente para la equivalencia es que, ρ sea de tipo inferior mayor que 1. Sin embargo, bajo nuestras hipótesis sobre φ, se puede demostrar que ρ satisface esta condición y que, más aún,

$$\rho^{-1}(t) \sim t\varphi(t^{-1/n}).$$

En realidad que ρ tiene tipo inferior mayor que uno es consecuencia de esta equivalencia. En efecto, basta probar que $t\varphi(t^{-1/n})$ tiene tipo superior menor que uno: si $s > 1$ y a es el tipo inferior de φ, se tiene

$$st\varphi(st^{-1/n}) = st\varphi(s^{-1/n}t^{-1/n}) \leq Cs^{1-a/n}t\varphi(t^{-1/n}).$$

Para probar la equivalencia comenzamos observando que la hipótesis del tipo superior menor que 1 de φ en la expresión de η dada por el Teorema 4.7, nos permite obtener

$$\eta(t) = \int_t^\infty \frac{\varphi(s)}{s^{n+1}} ds = \int_1^\infty t\frac{\varphi(ut)}{(ut)^{n+1}} \leq C\frac{\varphi}{t^n} \int_1^\infty u^{b-n-1} du.$$

Luego, como $b < 1 \leq n$, tenemos $\eta(t) \leq C_1 \frac{\varphi(t)}{t^n}$. Por otro lado, si usamos que φ es creciente, resulta $\varphi(s) \geq \varphi(t)$ para $t < s$, desigualdad que reemplazada en la expresión de η da lugar a $\eta(t) \geq C_2 \frac{\varphi(t)}{t^n}$. En consecuencia,

$$\eta(t) \sim \frac{\varphi(t)}{t^n}. \tag{33}$$

Puesto que ψ es la inversa de η, si consideramos la composición de ρ con η obtenemos las siguientes desigualdades, por un lado,

$$\rho(\eta(t)) = \frac{\eta(t)}{\int_0^t \frac{\varphi(s)}{s} ds} \leq \frac{\eta(t)}{\int_{\frac{t}{2}}^t \frac{\varphi(s)}{s} ds} \leq \frac{\eta(t)}{\varphi(\frac{t}{2}) \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{ds}{s}} \leq C_3 \frac{\eta(t)}{\varphi(t)}$$

y por el otro,

$$\rho(\eta(t)) = \frac{\eta(t)}{\int_0^t \frac{\varphi(s)}{s} ds} \geq \frac{\eta(t)}{t \int_0^1 \frac{\varphi(ut)}{ut} du} \geq \frac{\eta(t)}{\varphi(t) \int_0^1 u^{a-1} du},$$

ahora usamos la hipótesis del tipo inferior de φ positivo y obtenemos

$$\rho(\eta(t)) \geq C_4 \frac{\eta(t)}{\varphi(t)}.$$

Considerando las desigualdades obtenidas vale la siguiente equivalencia

$$\rho(\eta(t)) \sim \frac{\eta(t)}{\varphi(t)},$$

ahora aplicamos (33), obteniendo

$$\rho(\eta(t)) \sim \frac{1}{t^n},$$

expresión en la que hacemos $s = \eta(t)$

$$\rho(s) \sim \frac{1}{\eta^{-1}(s)^n},$$

o bien

$$\eta^{-1}(s) \sim \frac{1}{(\rho(s))^{1/n}}.$$

Sustituyendo $\rho(s)$ por u y usando que η tiene tipo inferior $a - n$, como se deduce de (33), resulta

$$s = \rho^{-1}(u) \sim \eta(u^{-1/n})$$

usando nuevamente (33)

$$\rho^{-1}(u) \sim \frac{\varphi(u^{-1/n})}{\frac{1}{u}} = u\varphi(u^{-1/n}). \quad \square$$

Observación 4.13. Con el objeto de aplicar el Teorema de O'Neil, en la prueba del Teorema 4.5 hemos usado el tipo inferior positivo de la función φ, para obtener una desigualdad en teŕminos de la función k^{**}, cuando vale una desigualdad del tipo débil como la del Teorema 4.7. En lo que sigue, veremos que una condición integral sobre φ, más débil que el tipo inferior positivo, es todavía suficiente para tener resultados de acotación entre espacios de Orlicz, del operador de convolución con el núcleo k.

En general, vale que si $\int_0^1 A^{-1}(1/t)dt < \infty$, entonces se tiene que

$$\mathcal{M}_A \subset M_{\bar{A}}, \tag{34}$$

donde

$$\bar{A}^{-1}(t) = t\int_0^{1/t} A^{-1}(1/s)ds. \tag{35}$$

En efecto, supongamos que $f \in \mathcal{M}_A$, que en otros términos significa que

$$f^*(s) \le \lambda A^{-1}(1/s).$$

Entonces,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \le \lambda\frac{1}{t}\int_0^t A^{-1}(1/s)ds = \lambda\bar{A}^{-1}(1/t).$$

En virtud del crecimiento de A, la función $\bar{A}^{-1}$ resulta cóncava, pues, su derivada es la función

$$\int_0^{1/t} A^{-1}(1/s)ds - \frac{1}{t}A^{-1}(t),$$

cuyo decrecimiento sigue de observar que para $t_1 < t_2$, integrando primero por partes en el sentido de Riemann-Stieltjes, tenemos

$$\int_{1/t_2}^{1/t_1} A^{-1}(1/s)ds - \frac{1}{t_1}A^{-1}(t_1) + \frac{1}{t_2}A^{-1}(t_2) = -\int_{1/t_2}^{1/t_1} s\ dA^{-1}(1/s)$$

y finalmente, el crecimiento de A asegura que el miembro derecho es no negativo.

Dado que el Teorema 4.7 se probó con una hipótesis más general que el tipo inferior positivo de φ, la finitud de la integral entre cero y uno de $\frac{\varphi(s)}{s}$, cabe preguntarse también si con una condición más débil que el tipo inferior positivo de φ, podría obtenerse la integrabilidad para ρ suficiente para la inclusión de las clases débiles dada por (34). Con la hipótesis

$$\int_0^1 |\log s|\frac{\varphi(s)}{s}ds < \infty, \tag{36}$$

que es más débil que el tipo inferior positivo, pero que implica la integrabilidad en el origen de $\frac{\varphi(s)}{s}$, resulta que el núcleo $k \in M_{\bar{\rho}}$, donde $\bar{\rho}$ se define a través de (35) con A igual a ρ. Ahora, si aplicamos el Teorema de O'Neil, tenemos que el operador T es acotado de L_Θ en L_Ω, donde Θ satisface

$$q\Theta(x) \le x\Theta'(x), \quad q > 1$$

y

$$\int_0^1 \frac{\bar{\rho}^{-1}(t)\Theta^{-1}(t)}{t^2}dt < \infty$$

y la inversa de Ω es

$$\Omega^{-1}(x) = \int_0^1 \frac{\bar{\rho}^{-1}(t)\Theta^{-1}(t)}{t^2}dt.$$

Veamos que bajo la condición (36) para φ, obtenemos la integrabilidad en

[0,1] de $\rho^{-1}(1/t)$, suficiente para la validez de (34). Expresamos $\int_0^1 \rho^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) dt$, usando la función distribución de $\rho^{-1}(1/t)$ sobre el intervalo [0,1],

$$m(\{t \in [0,1] : \rho^{-1}(1/t) > \alpha\}) = m(\{t \in [0,1] : t < 1/\rho(\alpha)\}),$$

que vale $1/\rho(\alpha)$ si $\alpha \geq \rho^{-1}(1)$ y 1 si $\alpha < \rho^{-1}(1)$. Entonces,

$$\int_0^1 \rho^{-1}(1/t)dt = \int_0^{\rho^{-1}(1)} d\alpha + \int_{\rho^{-1}(1)}^{\infty} \frac{1}{\rho(\alpha)} d\alpha$$

y así, la finitud de $\int_0^1 \rho^{-1}(1/t)dt$ equivale a la de $\int_{\rho^{-1}(1)}^{\infty} \frac{1}{\rho(\alpha)} d\alpha$. La definición de ρ dada en el Teorema 4.7 y el Teorema de Tonelli dan

$$\begin{aligned}\int_{\rho^{-1}(1)}^{\infty} \frac{1}{\rho(\alpha)} d\alpha &= \int_0^{\psi(\rho^{-1}(1))} \frac{\varphi(s)}{s} \left\{ \int_{\rho^{-1}(1)}^{\eta(s)} \frac{1}{\alpha} d\alpha \right\} ds \\ &= \int_0^{\psi(\rho^{-1}(1))} \frac{\varphi(s)}{s} \log \frac{\eta(s)}{\rho^{-1}(1)} ds.\end{aligned}$$

El hecho que $\eta(s) \leq Cs^{-n}$, en virtud que φ es de tipo superior menor que 1, y la condición $\int_0^1 |\log s| \frac{\varphi(s)}{s} ds < \infty$, aseguran la validez de (34) en este caso.

Finalmente observamos que para una función φ que cerca del origen se comporta como $(\log(1/t))^{-2-\epsilon}$ se satisface la condición de integrabilidad requerida, aunque no tiene tipo inferior positivo, pero siendo monótona creciente es de tipo inferior cero. También puede verse que la función definida como $(\log(1/t))^{-1-\epsilon}$ no satisface (36) pero, sí cumple la condición de integrabilidad exigida en el Teorema 4.7. Es decir, (36) es una hipótesis intermedia entre el tipo inferior positivo y la integrabilidad en el origen de $\frac{\varphi(s)}{s}$.

4.3. Ilustración.

A manera de ilustración del resultado principal de este capítulo, el Teorema 4.5, introducimos la siguiente generalización del operador de integración fraccionaria. Sea φ una función cóncava de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$, de tipo inferior positivo a. Si bien la concavidad es suficiente para garantizar que su tipo superior es menor o igual que uno, requeriremos además que φ sea de tipo superior estrictamente menor que uno. Definimos

$$I_\varphi f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(|x-y|)}{|x-y|} f(y)dy,$$

que, cuando $\varphi(t) = t^\alpha$, con $0 < \alpha < 1$ reproduce el operador de integración fraccionaria de orden α, I_α. Si en lugar de considerar el operador I_φ definido sobre $\mathbb{R}$, pensamos el mismo en un contexto de medida finita, por ejemplo sobre la circunferencia unitaria, entonces, la hipótesis 1) en el Teorema 4.5 es satisfecha por el núcleo $k_\varphi(t) = \frac{\varphi(|t|)}{|t|}$ en virtud de la condición de tipo inferior positivo requerida a φ. No ocurre lo mismo en el contexto de medida infinita; k_φ no es integrable sobre $\mathbb{R}$. No obstante, el Teorema 4.5 asegura que la norma del operador I_φ entre espacios de Orlicz no depende de la norma L^1 del núcleo, sino sólo de la constante A en la hipótesis **2)**. La hipótesis **1)** se logra, naturalmente, truncando el núcleo sobre un intervalo. El hecho destacable es que este procedimiento de truncación produce núcleos $k_{\varphi,N} = k_\varphi \chi_{[-N,N]}$, que admiten una constante A en 2) que es uniforme en N. En efecto, vamos a verificar primero que k_φ satisface la propiedad **2)** del Teorema 4.5, es decir

$$\int_{\mathbb{R}} |k_\varphi(x-y) - k_\varphi(x)|dx \leq A\varphi(|y|).$$

Con el objeto de probar esto dividimos el dominio

$$\int_{|x|<2|y|} |k_\varphi(x-y) - k_\varphi(x)|dx + \int_{|x|\geq 2|y|} |k_\varphi(x-y) - k_\varphi(x)|dx = I \ + \ II$$

En I acotamos el integrando por la suma de los módulos de minuendo y sustraendo, luego de mayorar considerando el dominio de integración, usamos la condición de tipo inferior positivo y la propiedad Δ_2.

$$\begin{aligned} I \ &\leq \int_{|x|<2|y|} |k_\varphi(x-y)| + \int_{|x|<2|y|} |k_\varphi(x)|dx \\ &\leq \int_{|x-y|<3|y|} |k_\varphi(x-y)| + \int_{|x|<3|y|} |k_\varphi(x)|dx \\ &= 2\int_{|z|<3|y|} \frac{\varphi(|z|)}{|z|}dz \\ &= 4\int_0^{3|y|} \frac{\varphi(t)}{t}dz \\ &\leq C\varphi(|y|). \end{aligned}$$

En II usamos que φ es cóncava de clase $\mathcal{C}^1$, obteniendo

$$\begin{aligned} II \ &= \int_{|x|\geq 2|y|} |\phi(|x-y|) - \phi(|x|)|dx \\ &\leq |y| \int_{|x|\geq 2|y|} |\phi'(\xi)|dx, \end{aligned}$$

donde $\phi(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$ y ξ está entre $|x|$ y $|x-y|$. Por otra parte, $\phi'(t) = \frac{t\varphi'(t)-\varphi(t)}{t^2}$, de modo que, por la concavidad de φ que implica la desigualdad $\varphi'(t) \leq \frac{\varphi(t)}{t}$, tendremos $|\phi'(\xi)| \leq 2\frac{\varphi(\xi)}{\xi^2}$. Puesto que $|x|$ es comparable con $|x-y|$, también lo es con $|\xi|$ y dado que φ satisface la propiedad Δ_2, tenemos

$$II \ \leq |y| \int_{|x|\geq 2|y|} \frac{\varphi(|x|)}{|x|^2} dx \leq C|y| \int_{2|y|}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \leq C\varphi(|y|) \int_1^{\infty} v^{b-2} dv.$$

Comprobemos ahora que también las truncaciones $k_{\varphi,N}$ del núcleo satisfacen la propiedad 2), pero de manera uniforme en N.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |k_{\varphi,N}(x-y) - k_{\varphi,N}(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}} |k_\varphi(x-y) - k_\varphi(x)| \chi_{[-N,N]}(x) dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}} |k_\varphi(x-y)| |\chi_{[-N,N]}(x-y) - \chi_{[-N,N]}(x)| dx \\ &\leq A\varphi(|y|) + \int_{\Delta_{N,y}} |k_\varphi(x-y)| dx,\end{aligned}$$

donde $\Delta_{N,y} = [-N,N] \triangle [-N+y, N+y]$, pues $|\chi_{[-N,N]}(x-y) - \chi_{[-N,N]}(x)|$ vale uno si y sólo si x está en $[-N,N]$ y no está en $[-N+y, N+y]$ o x está en $[-N+y, N+y]$ y no en $[-N,N]$, cualesquiera sean N e y. Probemos, finalmente que $\int_{\Delta_{N,y}} |k_\varphi(x-y)| dx$ se puede también estimar por $\varphi(|y|)$. Consideramos dos casos en la relación entre N y $|y|$, si $|y| > N/4$, entonces $\Delta_{N,y} \subset [-N,N] \cup [-N+y, N+y]$ y podemos acotar la integral por

$$\begin{aligned}&\int_{-N}^{N} \frac{\varphi(|x-y|)}{|x-y|} dx + \int_{-N+y}^{N+y} \frac{\varphi(|x-y|)}{|x-y|} dx \\ &\leq 4 \int_0^{5|y|} \frac{\varphi(t)}{t} dt \leq C\varphi(|y|),\end{aligned}$$

donde nuevamente hemos usado la condición de tipo inferior positivo y la condición Δ_2. Si ahora es $|y| \leq N/4$, en este caso es $\Delta_{N,y} = [-N,N] \cup [-N+y, N+y]$ si $y > 0$ (si $y < 0$ se trata de manera similar). Basta estimar entonces,

$$\begin{aligned}&\int_{-N}^{-N+y} \frac{\varphi(|x-y|)}{|x-y|} dx + \int_{N}^{N+y} \frac{\varphi(|x-y|)}{|x-y|} dx \\ &\qquad = \int_{N-y}^{N+y} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\ &\qquad = \int_{N-y}^{N+y} \frac{\varphi\left(\frac{t}{|y|}|y|\right)}{t} dt \\ &\qquad \leq C\varphi(|y|) \frac{1}{|y|^b} \{(N+y)^b - (N-y)^b\} \\ &\qquad \leq C\varphi(|y|) \frac{1}{|y|^b} \{((N-y)+2y)^b - (N-y)^b\} \\ &\qquad \leq C\varphi(|y|) \frac{1}{|y|^b} \{(N-y)^b + (2y)^b - (N-y)^b\},\end{aligned}$$

pues $b < 1$. Así, el Teorema 4.5 se aplica para obtener estimaciones sobre espacios de Orlicz de I_φ. Cabe mencionar que también el Teorema de O'Neil puede aplicarse para obtener el mismo resultado, ya que, como tampoco es difícil verificar

$$\rho(\alpha)m(\{k_\varphi > \alpha\}) \leq C,$$

y las propiedades de φ nos permiten usar el resultado en [I] para obtener la estimación en términos de k_φ^{**}, que es la hipótesis del Teorema de O'Neil.

Por supuesto, con alguna complicación geométrica mayor, pueden obtenerse estas estimaciones para operadores similares definidos en $\mathbb{R}^n$ por

$$I_\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(|x-y|)}{|x-y|^n} f(y)dy,$$

con φ en las mismas condiciones que en el caso unidimensional.

CAPíTULO 5

ACOTACIÓN EN ESPACIOS DE ORLICZ DE OPERADORES INVARIANTES POR TRASLACIONES ENTRE ESPACIOS DE LIPSCHITZ GENERALIZADOS

Los resultados de los Capítulos 3 y 4 permiten probar el siguiente teorema que resuelve el problema central de esta tesis.

Teorema 5.1. *Si T es un operador lineal e invariante por traslaciones que aplica $\Lambda(\eta;p)$ continuamente en $\Lambda(\eta\Psi;p)$, $p=1$ o $p=\infty$ con η y Ψ en $\mathcal{N}$ y el tipo superior de Ψ es menor que n, entonces T también aplica el espacio de Orlicz L_Θ en L_Ω; donde Θ es una función de Young que satisface las dos condiciones siguientes*
i)

$$q\Theta(x)\le x\Theta'(x),\quad q>1,$$

ii)

$$\int_0^1 \frac{\Psi(t^{-1/n})\Theta^{-1}(t)}{t}dt<\infty,$$

y la inversa de Ω es

$$\Omega^{-1}(x)=\int_0^x \frac{\Psi(t^{-1/n})\Theta^{-1}(t)}{t}dt. \tag{37}$$

Además se tiene que

$$\|Tf\|_\Omega\le C\|f\|_\Theta.$$

A continuación damos dos lemas que sirven de herramientas para la prueba de este teorema.

Lema 5.2. *Sea $0<\delta<1$, β no creciente y $\beta(s)s^{-\delta}$ integrable en cero; entonces, existe $\alpha<1$, dependiendo sólo de δ, tal que $x^{-\delta}\int_0^x\beta(s)ds\le\alpha\int_0^x\beta(s)s^{-\delta}ds$.*

Demostración. Si llamamos $f(x)$ al primer miembro de la desigualdad a probar y $g(x)$ a la función del segundo miembro que se halla multiplicada por α; la desigualdad es inmediata para $\alpha=1$ ya que, $0\le s\le x$ implica $x^{-\delta}\le s^{-\delta}$, que junto con la supuesta integrabilidad en cero de $\beta(s)s^{-\delta}$ permiten concluir que $f(0)$ es finito y más aún $f(0)=0=g(0)$; esto último muestra que probar la desigualdad equivale a probar que $f-\alpha g$ es decreciente para algún $\alpha < 1$, en otros términos

$$f'(x) - \alpha g'(x) \leq 0,$$

o, equivalentemente

$$-\delta x^{-\delta-1}\int_0^x \beta(s)ds + x^{-\delta}\beta(x) - \alpha\beta(x)x^{-\delta} \leq 0,$$

que es lo mismo lograr la desigualdad

$$\beta(x) \leq \frac{\delta}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x}\int_0^x \beta(s)ds\right),$$

para algún $0 < \alpha < 1$. Puesto que el último factor es un promedio de β en $[0,x]$ y β es decreciente, basta elegir $\alpha = 1-\delta$, recordando que δ es menor que uno. □

La definición que sigue tiene por objeto agilizar la notación del próximo lema.

Definición 5.3. Si A y B son funciones no negativas tales que satisfacen

$$\int_0^1 \frac{A(t)B(t)}{t^2}dt < \infty \tag{38}$$

definimos la siguiente función asociada a este par

$$[A,B](x) = \int_0^x \frac{A(t)B(t)}{t^2}dt.$$

Observamos que esta nueva función resulta creciente y preserva la no negatividad de A y B, además si $\frac{A(t)}{t}$ y $\frac{B(t)}{t}$ son no crecientes, entonces $\frac{[A,B](x)}{x}$ también lo es y más aún $[A,B]$ es cóncava. Probamos a continuación algunas cuestiones generales sencillas que permiten deducir que las hipótesis de no crecimiento de los cocientes de las funciones involucradas por la definición, se obtienen si se sabe que las mismas son cóncavas.

En primer lugar destacamos que si φ es tal que $\varphi(0) = 0$ y es una función cóncava (esto es $\varphi((1-t)x+ty) \geq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y)$, para todo x, y en el dominio de φ y para todo $t \in (0,1)$), entonces para $0 < s_1 < s_2$ tenemos

$$\begin{aligned}\varphi(s_1) &= \varphi((1-\frac{s_1}{s_2}),0 + \frac{s_1}{s_2}.s_2)\\ &\geq (1-\frac{s_1}{s_2})\varphi(0) + \frac{s_1}{s_2}\varphi(s_2)\end{aligned}$$

es decir $\frac{\varphi(s_1)}{s_1} \geq \frac{\varphi(s_2)}{s_2}$.

Ahora observamos que si A y B son además cóncavas crecientes en la Definición 5.3, por un lado se tiene asegurada su continuidad en un entorno del origen y por otro, la condición (38) afirma que el $\lim_{t\to 0} A(t).B(t) = 0$ lo cual implica $A(0) = 0$ o $B(0) = 0$. En realidad estas condiciones aseguran que A y B valen 0 en 0; en efecto, si usamos el crecimiento de B y suponemos que $A(0)=0$, con lo cual $\frac{A(t)}{t}$ es no creciente tenemos

$$\int_0^1 \frac{A(t)B(t)}{t^2} \geq A(1)B(0)\int_0^1 \frac{dt}{t}$$

luego de (38) sigue que $B(0)$ debe ser 0, si A es no trivial.

LEMA 5.4. *Si A y B son funciones no negativas tales que $\frac{A(t)}{t}$ y $\frac{B(t)}{t}$ son no crecientes y para $0<\epsilon<1$ satisfacen*

$$\int_0^1 \frac{A(t)}{t^{2+\epsilon}}B(t)dt < \infty. \tag{39}$$

Entonces,

$$[t^{1-\epsilon},[A,B]] \sim [At^{-\epsilon},B].$$

DEMOSTRACIÓN. Llamamos C a $[t^{1-\epsilon},[A,B]]$ y sustituimos $[A,B]$ por su expresión obteniendo

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x \frac{t^{1-\epsilon}\int_0^t \frac{A(s)B(s)}{s^2}ds}{t^2}dt \\ &= \int_0^x \frac{A(s)B(s)\int_s^x t^{-1-\epsilon}dt}{s^2}ds \\ &= -\epsilon\int_0^x \frac{A(s)B(s)}{s^2}[x^{-\epsilon}-s^{-\epsilon}]ds \\ &= \epsilon\int_0^x \frac{A(s)B(s)}{s^2}s^{-\epsilon}ds - \epsilon x^{-\epsilon}\int_0^x \frac{A(s)B(s)}{s^2}ds. \end{aligned}$$

La primer integral es $[At^{-\epsilon},B](x)$ que podemos llamar $\tilde{C}(x)$, como el término que se resta es positivo es inmediato que $C(x)$ es menor o igual que $\epsilon\tilde{C}(x)$. La otra desigualdad que falta para la equivalencia, se obtiene si probamos que el segundo término de la última expresión de $C(x)$ es menor o igual que una fracción del primero, pero observemos que esta desigualdad es la tesis del Lema (1.3) para $\beta(s)=\frac{A(s)B(s)}{s^2}$ y $\delta=\epsilon$, si se satisface que β es no creciente y $\beta(s)s^{-\epsilon}$ es integrable en el origen, lo cual se cumple en virtud de (1.7) de la hipótesis. Con respecto a la primera condición, como $\beta(s)$ puede expresarse como $\frac{A(s)}{s}\frac{B(s)}{s}$ resulta no creciente. □

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5.1. *Primer Caso: El tipo superior de Ψ es menor que 1.* Por el Teorema 3.2 del Capítulo 3 sabemos que si η y Ψ son dos funciones de la clase $\mathcal{N}$ y T es un operador lineal, continuo e invariante por traslaciones de $\Lambda(\eta;p)$ en $\Lambda(\eta\Psi;p)$, $p=1$ o $p=\infty$; entonces, T es un operador de convolución con un núcleo $K \in \Lambda(\Psi; 1)$. En particular si el tipo superior de Ψ es menor que uno entonces $K \in L^1$ y satisface

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(x-y) - K(y)|dy \leq c\Psi(|y|)$$

En el Teorema 4.5 del Capítulo 4 se probó que un operador de convolución con un núcleo que satisface estas propiedades aplica el espacio L_Θ en L_Ω en las condiciones aquí enunciadas, quedando demostrado el teorema en este caso.

Segundo Caso: El tipo superior de Ψ es mayor o igual que 1. La prueba de este caso se obtiene a partir del resultado de la primera parte y factorizando el operador con potenciales adecuados; más precisamente, si indicamos con a el tipo inferior positivo de Ψ y b su tipo superior, elegimos k el primer entero positivo tal que $\frac{1}{k} < 1-(b-a)$ y un entero positivo r de manera que $\frac{r}{k} < a \leq \frac{r+1}{k}$, luego escribimos

$$T = \overbrace{J_{1/k} \circ J_{1/k} \circ \ldots \circ J_{1/k}}^{r} \circ ((J_{r/k})^{-1} \circ T).$$

En virtud de lo estudiado respecto de los potenciales de Bessel sobre los espacios Lipschitz generalizados, la expresión anterior dice que T es un operador que es composición de operadores de convolución cada uno con "orden de suavidad" menor que 1; en efecto, para los últimos r operadores, el orden de suavidad es de $\frac{1}{k}$, mientras que para el primero el "orden de suavidad"es $\Psi t^{-r/k}$, que es de tipo inferior positivo y superior es menor que 1. La elección de r y k junto con las hipótesis sobre T, nos aseguran que el operador $((J_{r/k})^{-1} \circ T)$ manda $\Lambda(\eta; p)$ en $\Lambda(\frac{\eta\Psi}{t^{r/k}}; p)$ continuamente. Comprobemos que este operador satisface las hipótesis del teorema con un orden de suavidad que está comprendido en el primer caso. Puesto que $\frac{\Psi}{t^{r/k}}$ pertenece a la clase $\mathcal{N}$ en virtud que Ψ lo está y que nuestra elección de r y k asegura que $a - \frac{r}{k} > 0$, según lo observado en **($\mathcal{N}$-3)** del Capítulo 2, se tiene que $\frac{\Psi}{t^{r/k}}$ es creciente pero con tipo superior menor que 1. Además, como esta función evaluada en $t^{-1/n}$ es menor que $\Psi(t^{-1/n})$ en el intervalo (0,1), cumple la condición ii) para las funciones Θ de la hipótesis. Luego, por lo demostrado en el primer caso, este operador manda L_Θ en L_{Ω_1}, donde Ω_1 es tal que

$$\Omega_1^{-1}(x) = \int_0^x \frac{\Psi(t^{-1/n}) t^{\frac{r}{nk}+1} \Theta^{-1}(t)}{t^2} dt.$$

o bien de acuerdo con la Definición 5.3,

$$\Omega_1^{-1} = [\Psi(t^{-1/n}) t^{\frac{r}{kn}+1}, \Theta^{-1}].$$

El operador $J_{1/k}$ aplica el espacio $\Lambda(\frac{\eta\Psi}{t^{r/k}}; p)$ en $\Lambda(\frac{\eta\Psi}{t^{(r-1)/k}}; p)$ como $\frac{1}{k}$ es menor que 1 por elección, entonces por el primer caso de la prueba, $J_{1/k}$ también aplica L_{Ω_1} en L_{Ω_2} donde Ω_2 viene dado por

$$\Omega_2^{-1}(x) = [(t^{1-\frac{1}{kn}}), \Omega_1^{-1}](x),$$

pues la condición ii) implica la correspondiente en este caso:

$$\int_0^1 \frac{t^{1-\frac{1}{kn}}[\Psi(t^{-1/n})t^{\frac{r}{kn}+1},\Theta^{-1}](t)}{t^2}dt < \infty. \tag{40}$$

En efecto,

$$\int_0^1 \frac{\Psi(t^{-1/n})t^{\frac{r}{kn}+1}t^{-\frac{1}{kn}}\Theta^{-1}(t)}{t^2}dt \leq \int_0^1 \frac{\Psi(t^{-1/n})\Theta^{-1}(t)}{t}dt,$$

pues como $\frac{r}{kn} - \frac{1}{kn} \geq 0$ vale la condición (39) con $A(t) = \Psi(t^{-1/n})t^{\frac{r}{kn}+1}$, $B(t) = \Theta^{-1}(t)$ y $\epsilon = \frac{1}{kn}$ que es menor que 1 en virtud que el tipo superior de Ψ es menor que n ; entonces la prueba del Lema 5.4 asegura que

$$[t^{1-\frac{1}{kn}}, [\Psi(t^{-1/n})t^{\frac{r}{kn}+1}, \Theta^{-1}]](1) \leq \frac{1}{kn}[\Psi(t^{-1/n})t^{\frac{r}{kn}+1}t^{-\frac{1}{kn}}, \Theta^{-1}]](1)$$

con lo cual la expresión (40) es finita. Si repetimos $r-1$ veces este proceso de aplicar $J_{1/k}$, tendremos que el espacio de Orlicz de llegada es Ω_{r+1} dado por

$$\Omega_{r+1}^{-1}(x) = [(t^{1-\frac{1}{kn}}), \Omega_r^{-1}]](x),$$

pues usando r veces la prueba del Lema (1.6) se puede ver igual que antes, que la condición ii) implica la correspondiente en este caso pues uno tiene para $i = 1, 2, \ldots, r$ que

$$\int_0^1 \frac{\Psi(t^{-1/n})t^{\frac{r}{kn}+1}t^{-\frac{i}{kn}}\Theta^{-1}(t)}{t^2}dt \leq \int_0^1 \frac{\Psi(t^{-1/n})\Theta^{-1}(t)}{t}dt$$

pues $\frac{r}{kn} - \frac{i}{kn} \geq 0$ e $\frac{i}{kn} < 1$ por ser el tipo superior menor que n. Como en cada iteración la desigualdad anterior muestra que se satisfacen las condiciones de las hipótesis del Lema 5.4 se puede concluir que Ω_{r+1}^{-1} es equivalente con $[\Psi(t^{-1/n})t, \Theta^{-1}] = \Omega^{-1}$, cuya concavidad se deduce del hecho de ser Θ^{-1} la inversa de una función de Young y del no crecimiento de $\Psi(t^{-1/n})$. Como por otra parte, funciones de Young equivalentes dan lugar a los mismos espacios de Orlicz se tiene la tesis de este teorema. □

Cabe observar que la hipótesis sobre el tipo superior de Ψ menor que n también asegura que existen Θ que satisfacen las condiciones de la hipótesis, en efecto basta tomar $\Theta(t) = t^\alpha$ con α tal que $\frac{b}{n} < \frac{1}{\alpha} < 1$.

Mencionemos, finalmente, que para el caso del operador I_φ que sirvió de ilustración de los resultados del Capítulo 4, el mismo tipo de estimaciones que las hechas allí permiten estudiar sin dificultad la continuidad de I_φ entre espacios de Lipschitz generalizados. Si además, se observa que en el Teorema 5.1, la norma del operador entre los espacios de Orlicz no depende de la parte L^∞ de las normas Lipschitz, se obtiene la acotación del operador de integracion fraccionaria generalizado entre espacios de Orlicz, para $\varphi \in \mathcal{N}$, como corolario del Teorema 5.1. De todos modos, la importancia de este teorema no reside en su aplicación específica a este operador particular, sino más bien, en mostrar cómo bajo condiciones mucho más generales, estos operadores comparten con I_φ las mismas propiedades de acotación entre espacios de Orlicz.

CAPíTULO 6

UN RESULTADO DE WIENER

Teorema 6.1. *Sean $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \neq 0$ tales que $\hat{\phi}_1(x)+1$ no se anula, entonces existe una función $\phi_2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $(\hat{\phi}_1(x)+\lambda)^{-1} = \hat{\phi}_2(x)+1/\lambda$*

Demostración. Definimos como $\mathcal{A}$ la clase de las medidas de Borel complejas μ sobre $\mathbb{R}^n$ de la forma

$$\mu = f + \lambda\delta$$

donde $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, δ es la medida de Dirac sobre $\mathbb{R}^n$ y λ es un escalar. Probemos que $\mathcal{A}$ es un álgebra con identidad para el producto de convolución. Observemos que $\mathcal{A}$ puede verse como $L^1 \oplus \mathbb{R}$. Es claro que $\mathcal{A}$ es cerrada para la suma,

$$\begin{aligned}(\mu_1+\mu_2)(A) &= \int_A f_1 dx + \lambda_1\delta(A) + \int_A f_2 dx + \lambda_2\delta(A)\\ &= \int_A (f_1+f_2)dx + (\lambda_1+\lambda_2)\delta(A),\end{aligned}$$

y puesto que L^1 es un espacio vectorial, f_1+f_2 es una función de L^1, lo que da lugar a una medida del mismo tipo. Ahora comprobamos que es cerrada para el producto,

$$\mu_1 * \mu_2 = (f_1+\lambda_1\delta)*(f_2+\lambda_2\delta) = f_1*f_2 + \lambda_1\delta*f_2 + f_1*\lambda_2\delta + \lambda_1\lambda_2\delta*\delta,$$

como δ es la unidad para el producto de convolución y por Young la convolución de dos funciones de L^1 está en L^1, los tres primeros términos dan una función de L^1. Haciendo $f \equiv 0$ y $\lambda = 1$, es inmediato que $\delta \in \mathcal{A}$. Sabemos que toda funcional lineal multiplicativa sobre $L^1(\mathbb{R}^n)$ tiene la forma $f \to \hat{f}(\xi_o)$ para algún $\xi_o \in \mathbb{R}$([K], p. 203); como un corolario de esto podemos obtener que toda funcional multiplicativa sobre $\mathcal{A}$ es también una evaluación de la transformada de Fourier. En efecto, sea S una funcional no trivial multiplicativa sobre $\mathcal{A}$, si la restringimos a L^1, y llamamos T a esta restricción, suponiendo que sea no trivial, sabemos que $T(f) = \hat{f}(\xi_o)$ para algún ξ_o. Ahora si $\mu \in \mathcal{A}$,

$$S(\mu) = S(f) + \lambda S(\delta) = T(f) + \lambda S(\delta) = \hat{f}(\xi_o) + \lambda S(\delta).$$

Pero,

$$S(\delta) = S(\delta * \delta) = S(\delta).S(\delta),$$

entonces $S(\delta) = 1$ y luego $S(\mu) = \hat{f}(\xi_o) + \lambda$. Si la restricción de S a L^1 es trivial, entonces $S(\mu) = \lambda$. De esta forma quedan identificadas todas las funcionales lineales multiplicativas no triviales sobre $\mathcal{A}$, sea ahora μ como en la hipótesis: $\mu = \phi_1 + \lambda\delta$ con $\phi_1 \in L^1$, $\lambda \neq 0$ y $\hat{\phi}_1(\xi) + \lambda \neq 0$, para todo ξ. Aplicando la caracterización de las funcionales multiplicativas sobre $\mathcal{A}$ resulta que bajo estas condiciones $S(\mu) \neq 0$ para toda S; y esta es una condición necesaria y suficiente para que $\phi_1 + \lambda\delta$ sea invertible en $\mathcal{A}$(ver [Kat76], corolario en p.202). Luego existen $\phi_2 \in L^1$ y un número c tales que

$$(\phi_2 + c\delta) * (\phi_1 + \lambda\delta) = \delta.$$

Tomando transformada de Fourier

$$(\hat{\phi}_2 + c).(\hat{\phi}_1 + \lambda) = 1,$$

haciendo tender ξ a infinito se tiene que c debe ser tomado igual a $1/\lambda$, de donde

$$(\hat{\phi}_2 + \frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{(\hat{\phi}_1 + \lambda)}.$$

□

Bibliografía

[Iaf96] Bibiana Iaffei, *Comparison of two weak versions of the Orlicz spaces*, Rev. Un. Mat. Argentina **40** (1996), no. 1-2, 191–202. MR **MR1450837 (98i:**46023)

[Kat76] Yitzhak Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, second ed., Dover, 1976.

[O'N65] Richard O'Neil, *Fractional integration in Orlicz spaces. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1965), 300–328. MR MR0194881 (33 #3087)

[Ste70] Elias M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970. MR MR0290095 (44 #7280)

[SZ67] E. M. Stein and A. Zygmund, *Boundedness of translation invariant operators on Hölder spaces and L^p-spaces*, Ann. of Math. (2) **85** (1967), 337–349. MR MR0215121 (35 #5964)

[Tai64] Mitchell H. Taibleson, *On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space. I. Principal properties*, J. Math. Mech. **13** (1964), 407–479. MR MR0163159 (29 #462)

[Tai65] ———, *On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space. II. Translation invariant operators, duality, and interpolation*, J. Math. Mech. **14** (1965), 821–839. MR MR0180857 (31 #5087)