UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

Tesis presentada como parte de los requisitos de la Universidad Nacional del Litoral para la obtención del Grado Académico de

Magíster en Matemática

En el campo de: **Análisis Armónico**

Título de la tesis:

El operador maximal generalizado M_Φ actuando sobre medidas.

Institución donde se realizó:
Facultad de Ingeniería Química (UNL)

Autora:
Lic. Julieta Bonazza

Directora de Tesis:
Dra. Marilina Carena

Codirectora de Tesis:
Dra. Marisa Toschi

Defendida ante el jurado compuesto por:
Dra. Isolda Cardoso
Dra. Estefanía Dalmasso
Dr. Oscar Salinas

Año de presentación: 2021

Índice general

Resumen

Para el desarrollo de esta tesis comenzamos estudiando los promedios de Luxemburg y las maximales generalizadas actuando sobre funciones en espacios de tipo homogéneo, así como también diversos resultados asociados con la clase de pesos de Muckenhoupt y su relación con la función maximal de Hardy-Littlewood.

Esto nos condujo a realizar un estudio análogo considerando medidas en lugar de funciones, esto es, definir promedios de Luxemburg de una medida para luego estudiar sus propiedades y el operador maximal generalizado M_Φ correspondiente. Luego, definimos y demostramos el tipo débil con y sin pesos para este operador, extendiendo a este nuevo contexto resultados ya conocidos. Además, el tipo débil nos permitió probar una desigualdad de tipo Kolmogorov y esta, a su vez, demostrar que ciertas potencias del operador maximal actuando sobre una medida pertenece en la clase de Muckenhoupt A_1, generando así pesos en la clase A_p a través del teorema de factorización de Jones.

Introducción

La clase de pesos de Muckenhoupt $A_p(\mathbb{R}^n)$ es una herramienta fundamental en el análisis real y armónico. Estos pesos pueden verse como las densidades de las medidas que preservan la acotación de operadores básicos del análisis armónico, como el operador maximal de Hardy-Littlewood y los operadores integrales singulares. Algunas de las referencias clásicas son [10] y [6].

En particular, los pesos pertenecientes a la clase de Muckenhoupt son de gran relevancia desde el punto de vista de la aplicación a ecuaciones diferenciales. Esto se debe a que, si bien los espacios de Sobolev sin pesos se presentan como los espacios adonde pertenecen las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales tanto elípticas como parabólicas, para aquellas ecuaciones que sean degeneradas, es decir, con diferentes tipos de singularidades en los coeficientes, es natural buscar soluciones en espacios de Sobolev con pesos. En especial, en espacios de Sobolev con pesos pertenecientes a la clase de Muckenhoupt, ya que en ellos se han demostrado teoremas de inmersión y desigualdades de tipo Poincaré (ver [5]).

En problemas clásicos de ecuaciones diferenciales, el comportamiento de la función involucrada cerca de la frontera F del dominio puede ocasionar que el problema no tenga solución en el espacio de Sobolev clásico. Es intuitivo, entonces, preguntarse sobre pesos que involucren al conjunto F y las condiciones sobre dicho conjunto que garanticen su pertenencia a la clase de Muckenhoupt. En esa dirección se prueba el resultado contenido en [1], donde los autores trabajan con pesos de la forma $d^\beta(x,F)$, siendo $d(x,F)$ la distancia del punto x al conjunto F. Más precisamente, prueban que para valores adecuados de β, el peso $d^\beta(x,F)$ pertenece a la clase de Muckenhoupt A_p, extendiendo resultados conocidos al contexto de un espacio de tipo homogéneo (X,d,μ), donde d es una casi-distancia y μ una medida de Borel sobre X que satisface la propiedad de duplicación.

La técnica allí utilizada consiste en garantizar, en un espacio de tipo homogéneo general y bajo ciertas condiciones para una medida de Borel ν, que $(M\nu)^\beta$ pertenece a la clase de Muckenhoupt $A_1(X, d, \mu)$, teniendo así, por la propiedad de factorización, una familia de pesos en la clase $A_p(X, d, \mu)$. La demostración de dicho resultado se basa en la desigualdad de Kolmogorov, siguiendo las ideas dadas en [4] para el caso $\mathbb{R}^n$ y ν absolutamente continua, y en [6] para una ν general en $\mathbb{R}^n$. Con este resultado se encuentra una familia de pesos en la clase de Muckenhoupt a partir del comportamiento de la función maximal aplicada a una medida ν asociada directamente con el conjunto F.

Por otra parte, el resultado demostrado en [4] sobre la pertenencia de potencias del operador maximal clásico a la clase A_1, fue extendido por Cruz-Uribe, Martell y Pérez en [3] para el caso del operador maximal M_Φ aplicado a una función localmente integrable f.

Como objetivo general nos planteamos analizar qué resultados pueden obtenerse a partir de esto en el contexto de espacios métricos de medida más generales, como los espacios de tipo homogéneo. Para ello necesitaremos, previamente, lograr una definición del operador maximal M_Φ actuando sobre medidas, que extienda a las definiciones conocidas, el cual no se encuentra analizado aún. Una vez que se dispone de esta definición, se puede avanzar en dirección a identificar el efecto de dicho operador y su relación con alguna clase de pesos apropiada.

La tesis se desarrolló teniendo presente este objetivo. Resumimos a continuación los contenidos de los dos capítulos que la componen.

En el Capítulo 1 repasamos algunos conceptos y resultados importantes sobre espacios de tipo homogéneo, funciones de Young y promedios de Luxemburg clásicos. A continuación, presentamos el operador maximal generalizado y algunos resultados conocidos, como una desigualdad de tipo débil modular con pesos y su relación con la clase A_1 de Muckenhoupt. Sobre esta familia de pesos enunciamos una herramienta clásica como el teorema de factorización de Jones y una consecuencia que nos permite generar pesos en A_p a partir de pesos en A_1.

En el Capítulo 2 extendemos los conceptos y resultados mencionados considerando medidas en lugar de funciones. Más precisamente, en la Sección 1 comenzamos dando una definición promedios de Luxemburg para una medida de Borel ν, de manera análoga a la dada para funciones. Luego, establecemos una caracterización que nos permite dejar de lado el ínfimo de la definición original, la cual involucra la inversa generalizada de la función de Young asociada al promedio de Luxemburg. Luego, en la Sección 2 probamos que estos promedios satisfacen propiedades análogas a las dadas para funciones en el capítulo anterior.

En la Sección 3 definimos el operador maximal generalizado M_Φ actuando sobre medidas. A continuación, logramos establecer qué se entiende por su tipo débil $(1,1)$, con y sin pesos, de modo que extienda lo conocido para el operador maximal clásico cuando $\Phi(t) = t$. Probamos que M_Φ satisface las desigualdades correspondientes en los Teoremas 50 y 51, respectivamente.

Como mencionamos anteriormente, el tipo débil $(1,1)$ con un peso de la maximal generalizada actuando sobre funciones es equivalente a que el peso esté en la clase A_1. Para el caso de las maximales generalizadas actuando sobre medidas, demostramos que el tipo débil correspondiente es una condición suficiente para la pertenencia a dicha clase de Muckenhoupt. Este resultado está contenido en el Teorema 52.

El tipo débil $(1,1)$ demostrado para M_Φ nos permite obtener una desigualdad de tipo Kolmogorov para este operador, la cual se establece en el Teorema 53. Con esta desigualdad, probamos, siguiendo las líneas de [1] para el caso de la maximal clásica sobre medidas, que $(M_\Phi \nu)^\gamma \in A_1(X, d, \mu)$ para $0 \leq \gamma < 1$ (Teorema 54). Como consecuencia de este resultado y del teorema de factorización de Jones, tenemos que dado $1 < p < \infty$, $(M_\Phi \nu)^\beta \in A_p(X, d, \mu)$ para todo $1 - p < \beta < 1$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, incluimos definiciones de conceptos básicos necesarios para comprender el contexto en el que trabajamos, y resultados conocidos, algunos de los cuales logramos extender en el Capítulo 2, y otros que utilizamos para desarrollar esta tesis.

1. Espacios de tipo homogéneo

DEFINICIÓN 1. Dado un conjunto X, una función no negativa d definida sobre $X \times X$ se denomina **casi-métrica sobre** X si satisface

(a) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$, para todo x, y en X;
(b) $d(x, y) = d(y, x)$, para todo x, y en X;
(c) existe una constante $K \geq 1$, que llamaremos **constante triangular**, tal que para todo x, y, z en X se tiene que

$$d(x, y) \leq K\,(d(x, z) + d(z, y)) \,. \tag{1.1}$$

DEFINICIÓN 2. Un **espacio casi-métrico** es un par (X, d), donde X es un conjunto y d es una casi-métrica sobre X.

Dadas dos casi-métricas d y d' sobre un conjunto X decimos que son **equivalentes** si existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que

$$C_1 d(x, y) \leq d'(x, y) \leq C_2 d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$. Es sencillo verificar que métricas equivalentes definen los mismos conjuntos abiertos, cerrados y compactos, que si una sucesión es convergente o de Cauchy con respecto a una de las métricas, entonces lo es con respecto a la otra, y que las funciones continuas y uniformemente continuas son las mismas. Por otro lado, existe un resultado muy conocido de Macías y Segovia (ver [9]) que establece que si d es una casi-métrica sobre X entonces existen una métrica ρ sobre X y un número real $\xi \geq 1$ tal que d es equivalente a la casi-métrica d' definida como $d' = \rho^{\xi}$.

A lo largo de este trabajo, la topología que definimos sobre X es la inducida por la métrica ρ. Por lo tanto todos los conceptos topológicos referidos a un espacio casi-métrico (X, d) deben ser entendidos como conceptos métricos asociados a ρ.

Definición 3. Dados un conjunto X, una casi-métrica d sobre X y una medida positiva μ definida sobre la σ-álgebra de subconjuntos de X generada por la familia $\{B(x,r) : x \in X \text{ y } r > 0\}$, donde $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$, diremos que μ es una **medida duplicante** si existe una constante $A \geq 1$ tal que

$$0 < \mu\left(B(x,2r)\right) \leq A\mu\left(B(x,r)\right) < \infty. \tag{1.2}$$

Definición 4. Dados un espacio casi-métrico (X, d), un subconjunto Y de X, una medida de Borel μ con soporte en Y y $\alpha > 0$, diremos que (Y, d, μ) es **$\boldsymbol{\alpha}$-Ahlfors** si existe una constante $C \geq 1$ que satisface

$$\frac{r^{\alpha}}{C} \leq \mu\left(B(x,r)\right) \leq Cr^{\alpha}, \tag{1.3}$$

para todo $x \in Y$ y todo $r > 0$.

Definición 5. Un **espacio de tipo homogéneo** es una terna (X, d, μ), donde X es un conjunto, d una casi-métrica sobre X y μ es una medida duplicante.

Como es sabido, el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ equipado con la distancia usual y la medida de Lebesgue es un espacio de tipo homogéneo. Otro ejemplo son los fractales autosemejantes clásicos obtenidos como puntos fijos de sistemas iterados de funciones (conjunto de Cantor, triángulo y carpeta de Sierpinski) equipados con la medida invariante correspondiente en cada caso.

De hecho, todos estos espacios son casos particulares del siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Todo espacio (X, d, μ) que sea α-Ahlfors es un espacio de tipo homogéneo con constante de duplicación de μ dependiente solo de α y de la constante de la definición de dicho espacio. En efecto, tomemos $x \in X$ y $r > 0$ fijos. Es claro que la condición 1.3 implica que todas las bolas tienen medida positiva y finita.

Además

$$\mu\left(B(x,2r)\right) \leq C(2r)^\alpha = 2^\alpha C^2 \frac{r^\alpha}{C} \leq 2^\alpha C^2 \mu\left(B(x,r)\right),$$

por lo que μ duplica con constante $A = 2^\alpha C^2$.

El siguiente lema de cubrimiento, cuya demostración se encuentra en [2], será de utilidad en la prueba de los resultados.

LEMA 6. *Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo y sea E un subconjunto acotado de X. Si $\{B(x,r_x) : x \in E\}$ es un cubrimiento por bolas centradas en cada punto de E, entonces existe una sucesión de puntos $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en E tal que*

(i) $B(x_i, r_{x_i}) \bigcap B\left(x_j, r_{x_j}\right) = \emptyset$, si $i \neq j$,

(ii) $E \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} B(x_i, 4Kr_{x_i})$, donde K es la constante triangular de d.

En lo que resta de este trabajo supondremos siempre que estamos en el contexto de un espacio de tipo homogéneo, y nos referiremos a las constantes de duplicación y triangular como las **constantes del espacio**. Además, dados una bola $B = B(x,r)$ y un número positivo c, usaremos cB para denotar la bola $B(x,cr)$.

2. Funciones de Young

DEFINICIÓN 7. Una función $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ se denomina **función de Young** si cumple las siguientes condiciones:

(i) es convexa, es decir, $\Phi(c\,t_1 + (1-c)\,t_2) \leq c\,\Phi(t_1) + (1-c)\,\Phi(t_2)$, para todo $c \in [0,1]$, para todo $t_1, t_2 \in [0,\infty)$;
(ii) es no decreciente;
(iii) $\Phi(0) = 0$;
(iv) $\Phi(t)/t \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

Un hecho conocido es que toda función de Young es continua, lo cual es consecuencia directa de su convexidad. Otra consecuencia inmediata de ello es el siguiente lema técnico.

LEMA 8. *Sea $F\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función convexa tal que $F(0) = 0$, entonces $F(c\,t) \leq c\,F(t)$, para todo $t \geq 0$ y todo número real $c \in [0,1]$.*

Demostración. Sea $0 \leq c \leq 1$. Por definición de convexidad con $t_1 = t$ y $t_2 = 0$, se tiene que

$$F(c\,t) = F\,(c\,t + (1-c)\,0) \leq c\,F(t) + (1-c)\,F(0) = c\,F(t) + (1-c)\,0 = c\,F(t). \quad \blacksquare$$

Las funciones de Young satisfacen la siguiente propiedad de no decrecimiento.

Lema 9. *Si Φ es una función de Young, entonces $\Phi(t)/t$ es no decreciente.*

Demostración. Sean $c \in (0,1]$ y $t > 0$. Por el Lema 8, $\Phi(c\,t) \leq c\,\Phi(t)$, luego

$$\frac{\Phi(c\,t)}{c\,t} \leq \frac{\Phi(t)}{t}. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2. Los siguientes son ejemplos clásicos de funciones de Young:

(a) $\Phi(t) = t^p$, con $p > 1$ $t \geq 0$,

(b) $\Phi(t) = e^{t^p} - 1$, con $p > 0$, $t \geq 0$,

(c) funciones de tipo $L^p(\log L)^q$, es decir, $\Phi(t) = t^p(\log^+ t + 1)^q$, con $p \geq 1$ y $q \geq 0$, donde $\log^+(t) = \text{máx}\{\log(t), 0\}$ y $t \geq 0$.

Observación 1. Si en el inciso (a) del ejemplo anterior tomamos $p = 1$ obtenemos la función $\Phi(t) = t$, que no es de Young, pues como $\Phi(t)/t = t/t = 1$ para todo t, no es cierta la condición (iv) de la definición. Sin embargo, los resultados que siguen son válidos para esta función. Se dejará explícitamente en claro cuando esto no suceda.

Definición 10. Sean Φ_1, Φ_2 funciones de Young. Diremos que:

- Φ_1 es **equivalente** a Φ_2, denotado $\Phi_1 \approx \Phi_2$, si existen constantes positivas C_1 y C_2, y $t_0 > 0$ tales que $C_1\Phi_1(t) \leq \Phi_2(t) \leq C_2\Phi_1(t)$, para todo $t \geq t_0$;
- Φ_2 **domina** a Φ_1, denotado $\Phi_1 \preceq \Phi_2$, si existen una constante positiva C y $t_0 \geq 0$ tales que $\Phi_1(t) \leq C\,\Phi_2(t)$, para todo $t \geq t_0$.

El siguiente resultado establece que la función identidad es dominada por cualquier función de Young.

Proposición 11. *Sea Φ una función de Young. Entonces $t \preceq \Phi(t)$. Más aún, existe $t_0 > 0$ tal que $t \leq \Phi(t)$, para todo $t \geq t_0$.*

Demostración. Dado que Φ es una función de Young, por la condición (iv) de la Definición 7, existe $t_0 > 0$ tal que $\Phi(t)/t \geq 1$, siempre que $t \geq t_0$. Así, si $t \geq t_0$, se tiene que $t \leq \Phi(t)$, como queríamos ver. ■

A continuación enunciamos y ejemplificamos algunas definiciones relacionadas a los contenidos de este trabajo.

Definición 12. Diremos que una función $F\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ es **casi creciente** si existe una constante $C > 1$ tal que $F(t) \leq CF(s)$, siempre que $t < s$. Análogamente, diremos que es **casi decreciente** si existe $C > 1$ tal que $F(s) \leq CF(t)$, siempre que $t < s$.

Definición 13. Una función F se dice **duplicante**, o que cumple la **condición $\boldsymbol{\Delta_2}$**, si existe una constante positiva C tal que

$$F(2t) \leq CF(t),$$

para todo número real $t \geq 0$.

Definición 14. Una función F se dice **casi-submultiplicativa** si existe una constante positiva C tal que

$$F(st) \leq CF(s)F(t),$$

siempre que s, $t > 0$. Si la desigualdad anterior vale con $C = 1$, entonces diremos que F es **submultiplicativa**.

Ejemplo 3. Si $\Phi(t) = t^r$, con $r \geq 1$ y $t \geq 0$, entonces Φ es claramente submultiplicativa.

Ejemplo 4. Si $\Phi(t) = t^a(\log(e + t))^b$, con $a \geq 1$ y $t \geq 0$, entonces Φ es duplicante. Si además $b \geq 0$, entonces Φ resulta además casi-submultiplicativa.

En efecto, para ver que Φ es duplicante, fijemos $t > 0$ y supongamos primero que $b \geq 0$. Como el logaritmo es creciente y $e + 2t \leq 2(e + t) \leq (e + t)^2$, tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi(2t) &= 2^a t^a \left(\log(e + 2t)\right)^b \\ &\leq 2^a t^a \left(\log(e + t)^2\right)^b\end{aligned}$$

$$= 2^{a+b}t^a \left(\log(e+t)\right)^b$$
$$= C_1\Phi(t),$$

donde $C_1 = 2^{a+b}$. Si $b < 0$, puesto que $e+t < e+2t$, se tiene $\left(\log(e+t)\right)^b > \left(\log(e+2t)\right)^b$, y en consecuencia

$$\Phi(2t) = 2^a t^a \left(\log(e+2t)\right)^b \le C_2\Phi(t),$$

con $C_2 = 2^a$. Por lo tanto, Φ es duplicante.

Veamos ahora que es casi-submultiplicativa cuando $b \ge 0$. Para ello consideremos la función

$$\log^+(t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \le t \le 1 \\ \log(t), & \text{si} \quad t > 1. \end{cases}$$

Afirmamos que $\Phi(t) = t^a(\log(e+t))^b$ y $\phi(t) = t^a(1+\log^+(t))^b$ son equivalentes para todo $t \ge 0$. Suponiendo que esta afirmación es cierta, tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(s)\phi(t) &= s^a \left(1+\log^+(s)\right)^b t^a \left(1+\log^+(t)\right)^b \\ &= (st)^a \left(1+\log^+(s)+\log^+(t)+\log^+(s)\log^+(t)\right)^b \\ &= (st)^a \left(1+\log^+(st)+\log^+(s)\log^+(t)\right)^b \\ &\ge (st)^a \left(1+\log^+(st)\right)^b \\ &= \phi(st). \end{aligned}$$

Por lo tanto ϕ es submultiplicativa. Ahora bien, como ϕ y Φ son equivalentes, existe una constante positiva C tal que

$$\frac{1}{C}\Phi(st) \le \phi(st) \le \phi(s)\phi(t) \le C^2\Phi(s)\Phi(t),$$

y en consecuencia, Φ es casi-submultiplicativa.

Veamos ahora que es válida la afirmación. Para ello, es suficiente ver que la función $f(t) = \log(e+t)$ es equivalente a $g(t) = 1+\log^+(t)$ para todo $t \ge 0$. Consideremos primero $t > 1$. En este caso, tenemos que $e+t < et+et = 2et$, y así

$$\begin{aligned} \log(e+t) \le \log(2et) &= \log(2e) + \log(t) \\ &\le \log(e^2) + \log(t) \\ &\le 2\left(1+\log^+(t)\right). \end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$\log\left((e+t)^2\right) - \log(e) - \log(t) = \log\left(\frac{(e+t)^2}{et}\right) > 0,$$

tenemos que

$$2\log(e+t) \geq \log(e) + \log(t) = 1 + \log^+(t).$$

Si ahora $0 \leq t \leq 1$, entonces $\log^+(t) = 0$ y

$$1 < \log(e+t) \leq \log(e+e) = \log(2e) = \log(2) + 1 \leq 2\left(1 + \log^+(t)\right) = 2.$$

Así, $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq 2g(t)$ para todo $t \geq 0$, como puede verse en el gráfico de la Figura 1. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\phi(t) \leq \Phi(t) \leq 2\phi(t),$$

para todo $t \geq 0$.

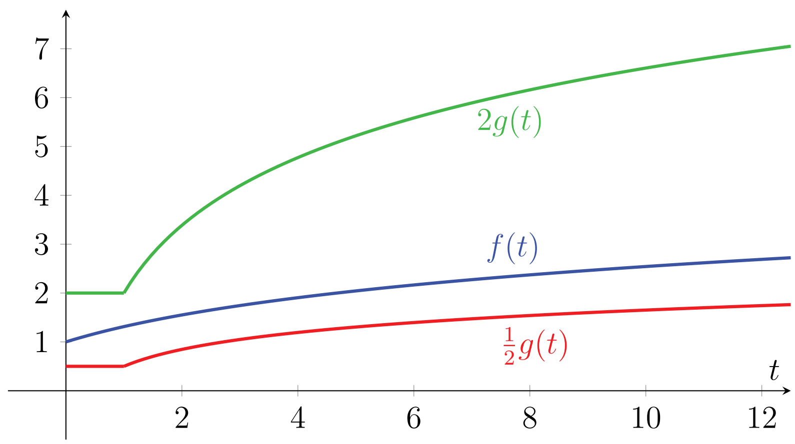

FIGURA 1. $f(t) = \log(e+t)$ es equivalente a $g(t) = 1+\log^+(t)$, $t \geq 0$.

DEFINICIÓN 15. Dada una función no decreciente $F : [0,\infty) \to [0,\infty)$, definimos su **inversa generalizada**, como $F^-(t) = \inf\{s \geq 0 : F(s) > t\}$.

PROPOSICIÓN 16. *Dada una función no decreciente $F : [0,\infty) \to [0,\infty)$, su inversa generalizada F^- es no decreciente.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty$, entonces

$$\{s \geq 0 : F(s) > t_2\} \subseteq \{s \geq 0 : F(s) > t_1\}.$$

luego se tiene que

$$F^-(t_1) = \inf\{s \geq 0 : F(s) > t_1\} \leq \inf\{s \geq 0 : F(s) > t_2\} = F^-(t_2).$$ ■

En el próximo capítulo resultará de utilidad el siguiente resultado.

LEMA 17. *Sea F una función continua por derecha tal que $F(0) = 0$. Si $t > 0$ entonces $F^{-}(t) > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe $t > 0$ tal que $F^{-}(t) = 0$. Por ser un ínfimo, para cada entero positivo n existe un número s_n tal que

$$0 \leq s_n < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad t < F(s_n).$$

Por ser F continua por derecha se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} F(s_n) = F(0) = 0$$

lo que, junto a la desigualdad anterior, implica $t \leq 0$, contradiciendo la hipótesis. Así, $F^{-}(t) > 0$. ∎

PROPOSICIÓN 18. *Sea $F : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función no decreciente. Entonces, para cada $t \geq 0$, se tiene que:*

i) $t \leq F^{-}(F(t))$;

ii) si F es continua por izquierda y $F(0) = 0$, entonces $F(F^{-}(t)) \leq t$.

DEMOSTRACIÓN. Para probar el inciso i), fijemos $t \geq 0$. Luego, si $F(s) > F(t)$, por ser F no decreciente se tiene que $s > t$. Entonces

$$\{s \geq 0 : F(s) > F(t)\} \subseteq \{s \geq 0 : s > t\}.$$

Tomando ínfimo de ambos conjuntos se tiene que $t \leq F^{-}(F(t))$.

Supongamos ahora que la desigualdad enunciada en ii) no es cierta, es decir, supongamos que existe $t_0 \geq 0$ tal que $F(F^{-}(t_0)) > t_0$. Si $F^{-}(t_0) = 0$, entonces $F(F^{-}(t_0)) = F(0) = 0 \leq t_0$, por lo que debe ser $F^{-}(t_0) > 0$. Luego, puesto que F es continua por izquierda, existe $\delta > 0$ tal que $F^{-}(t_0) - \delta > 0$ y $F(F^{-}(t_0) - \delta) > t_0$. En consecuencia, $s_0 = F^{-}(t_0) - \delta$ es uno de los elementos del conjunto sobre el que tomamos ínfimo en la definición de $F^{-}(t_0)$, de donde se concluye que $F^{-}(t_0) \leq F^{-}(t_0) - \delta$, lo cual es absurdo. ∎

OBSERVACIÓN 2. Si F es continua y estrictamente creciente, como consecuencia directa de la proposición anterior se tiene que F^{-} coincide con F^{-1}.

LEMA 19. *Sean Φ y Ψ funciones de Young.*

(a) Para cada $0 < c \leq 1$ se tiene que $\Phi^{-}(ct) \geq c\,\Phi^{-}(t)$, para todo $t \geq 0$.

(b) Si $\Phi \preceq \Psi$, entonces $\Psi^{-} \preceq \Phi^{-}$.

DEMOSTRACIÓN. Para el primer inciso notar que, por ser Φ una función de Young, podemos aplicar el Lema 8 y así, $\Phi(cs) \leq c\,\Phi(s)$, para todo $s \geq 0$ y todo $0 < c \leq 1$. Luego, para $t \geq 0$ fijo, si $s \geq 0$ satisface que $\Phi(s) > c\,t$ entonces

$$\Phi\left(\frac{s}{c}\right) > t.$$

Luego, por ser un ínfimo, $\Phi^{-}(t) \leq \frac{s}{c}$. Esto significa que el número $c\,\Phi^{-}(t)$ es una cota inferior para el conjunto

$$\{s \geq 0 : \Phi(s) > ct\},$$

y puesto que el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores, podemos concluir que $c\,\Phi^{-}(t) \leq \Phi^{-}(c\,t)$.

Para el segundo inciso, si $\Phi \preceq \Psi$, entonces existen una constante positiva C y $t_0 > 0$ tales que $\Phi(s) \leq C\,\Psi(s)$ para todo $s \geq t_0$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $C \geq 1$. Luego, para cada $t \geq \Phi(t_0)$, se tiene que

$$\{s \geq 0 : \Phi(s) > t\} \subseteq \left\{s \geq 0 : \Psi(s) > \frac{t}{C}\right\},$$

por lo que $\Psi^{-}(\frac{t}{C}) \leq \Phi^{-}(t)$, y aplicando el inciso (a), se tiene $\Psi^{-}(t) \leq C\,\Phi^{-}(t)$, lo que prueba (b). ■

3. Promedios de Luxemburg

El objetivo de esta sección es presentar la definición de promedios de Luxemburg de una función así como algunos resultados conocidos respecto de los mismos.

DEFINICIÓN 20. Sean (X, μ) un espacio de medida, Φ una función de Young y $E \subset X$ con $0 < \mu(E) < \infty$. Definimos el **promedio de Luxemburg** de una función f sobre E asociada a Φ como

$$\|f\|_{\Phi,E} = \text{ínf}\,\Lambda_{\Phi,E}(f),$$

donde

$$\Lambda_{\Phi,E}(f) = \left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\mu(E)} \int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu(x) \leq 1\right\}.$$

A lo largo de todo el trabajo en cada aparición de un promedio $\|f\|_{\Phi,E}$ supondremos las condiciones E y Φ dadas en la definición anterior, así como la condiciones necesarias de integrabilidad de f para que esté bien definido.

A continuación se prueba que estos promedios extienden a los promedios en L^p.

LEMA 21. *Si* $\Phi(t) = t^p$ *con* $1 \leq p < \infty$*, entonces* $\|f\|_{\Phi,E} = \|f\|_{p,E}$*, donde*

$$\|f\|_{p,E} = \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

DEMOSTRACIÓN. En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\Phi,E} &= \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{\mu(E)} \int_E \frac{|f(x)|^p}{\lambda^p} \, d\mu \leq 1 \right\} \\
&= \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f(x)|^p \, d\mu \leq \lambda^p \right\} \\
&= \inf \left\{ \lambda > 0 : \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \lambda \right\} \\
&= \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E |f(x)|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \|f\|_{p,E}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

El siguiente resultado establece que el promedio de Luxemburg asociado a Φ de una función f sobre un conjunto E satisface la condición requerida para pertenecer a $\Lambda_{\Phi,E}(f)$.

LEMA 22. *Si* $\Phi(t)$ *es una función de Young, entonces*

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,E}} \right) d\mu(x) \leq 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $\|f\|_{\Phi,E} = \inf \Lambda_{\Phi,E}(f)$, existe una sucesión $\{\lambda_n\}$ de números reales postivos en $\Lambda_{\Phi,E}(f)$ que converge a $\|f\|_{\Phi,E}$. Por la continuidad de Φ y el lema de Fatou, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(E)} \int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,E}} \right) d\mu(x) &= \frac{1}{\mu(E)} \int_E \liminf_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda_n} \right) d\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\mu(E)} \int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda_n} \right) d\mu(x) \\
&\leq 1. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

El siguiente resultado es una herramienta útil para simplificar el trabajo.

PROPOSICIÓN 23. *Sea Φ una función de Young y E un conjunto μ-medible, con medida positiva y finita. Si existen constantes positivas C y λ tales que*

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu(x) \leq C,$$

entonces $\|f\|_{\Phi,E} \leq \lambda \max\{1, C\}$.

DEMOSTRACIÓN. Si $0 < C \leq 1$, la conclusión es inmediata debido a la definición de $\|f\|_{\Phi,E}$. Si $C > 1$, por el Lema 8 se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda C}\right) d\mu(x) \leq \frac{1}{C}\frac{1}{\mu(E)}\int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu(x) \leq 1,$$

por lo que $\lambda C \in \Lambda_{\Phi,E}(f)$. Por ser $\|f\|_{\Phi,E}$ el ínfimo de este conjunto, se concluye que $\|f\|_{\Phi,E} \leq \lambda C$. ■

LEMA 24. *Sean Φ una función de Young y r una constante positiva. Si definimos $\Psi(t) = \Phi(t^r)$, entonces $\|f^r\|_{\Phi,E} = \|f\|^r_{\Psi,E}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea E un conjunto. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|f\|^r_{\Psi,E} &= \left(\inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\mu(E)}\int_E \Psi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) d\mu(x) \leq 1\right\}\right)^r \\
&= \left(\inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\mu(E)}\int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|^r}{\lambda^r}\right) dx \leq 1\right\}\right)^r \\
&= \left(\inf\left\{\lambda^{1/r} > 0 : \frac{1}{\mu(E)}\int_E \Phi\left(\frac{|f(x)|^r}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\}\right)^r \\
&= \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{1}{\mu(E)}\int_E \Phi\left(\frac{|f^r(x)|}{\alpha}\right) d\mu(x) \leq 1\right\} = \|f^r\|_{\Phi,E}.
\end{aligned}$$ ■

El siguiente resultado establece una relación entre el promedio de Luxemburg de una función sobre una bola y su dilatada. Como mencionamos en la introducción, supondremos que (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo, y denotaremos con A a la constante de duplicación para μ.

LEMA 25. *Si Φ es una función de Young, entonces*

$$\|f\|_{\Phi,B} \leq A^n \|f\|_{\Phi,\tau B},$$

para toda constante $\tau > 1$ para toda bola B, donde n denota un número natural tal que $2^n \geq \tau$, para toda función f. Además, si $\Phi(t)/t^p$ es casi creciente, $\|f\|_{\Phi,B} \leq CA^{n/p}\|f\|_{\Phi,\tau B}$, donde C es la constante asociada a la condición de f de ser casi-creciente.

Demostración. Fijemos una bola B y $\tau > 1$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $A > 1$. Por la propiedad de duplicación, si n es un número natural tal que $2^n \geq \tau$, se tiene que

$$\mu(\tau B) \leq A^n \mu\left(\frac{\tau}{2^n}B\right) \leq A^n \mu(B).$$

Luego, por convexidad de Φ podemos aplicar el Lema 8, y así

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(B)}\int_B \Phi\left(\frac{|f(x)|}{A^n\|f\|_{\Phi,\tau B}}\right) d\mu(x) &\leq \frac{1}{\mu(B)}\int_{\tau B} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{A^n\|f\|_{\Phi,\tau B}}\right) d\mu(x)\\ &\leq \frac{1}{A^n\mu(B)}\int_{\tau B} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,\tau B}}\right) d\mu(x)\\ &\leq \frac{1}{\mu(\tau B)}\int_{\tau B} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,\tau B}}\right) d\mu(x) \leq 1,\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe al Lema 22. Así, $A^n\|f\|_{\Phi,\tau B} \in \Lambda_{\Phi,B}(f)$ y, por lo tanto, $\|f\|_{\Phi,B} \leq A^n\|f\|_{\Phi,\tau B}$.

Supongamos ahora que $\Phi(t)/t^p$ es casi creciente. Tomando $t = \frac{|f(x)|}{A^{n/p}\|f\|_{\Phi,\tau B}}$ y $s = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,\tau B}}$, para cada x en τB, tenemos que $t < s$ porque $A^{n/p} > 1$. Luego, por definición de función casi creciente, se tiene que

$$\frac{\Phi(t)}{t^p} \leq C\frac{\Phi(s)}{s^p},$$

siendo $C > 1$. Luego,

$$\Phi\left(\frac{|f(x)|}{A^{n/p}\|f\|_{\Phi,\tau B}}\right) \leq \frac{C}{A^n}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,\tau B}}\right).$$

Usando esto, con el mismo razonamiento que en el paso anterior, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(B)}\int_B \Phi\left(\frac{|f(x)|}{CA^{n/p}\|f\|_{\Phi,\tau B}}\right) d\mu(x) &\leq \frac{1}{C\mu(B)}\int_{\tau B} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{A^{n/p}\|f\|_{\Phi,\tau B}}\right) d\mu(x)\\ &\leq \frac{C}{CA^n\mu(B)}\int_{\tau B} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,\tau B}}\right) d\mu(x)\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\mu(\tau B)} \int_{\tau B} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{\Phi,\tau B}}\right) d\mu(x)$$
$$\leq 1,$$

y, por lo tanto, $\|f\|_{\Phi,B} \leq C A^{n/p} \|f\|_{\Phi,\tau B}$. ■

A continuación se establece una monotonía con respecto a los promedios de Luxemburg, para una función f dada y un conjunto E fijo.

Lema 26. *Si Φ_1, Φ_2 son funciones de Young y $\Phi_1 \preceq \Phi_2$, entonces existe una constante positiva C, que depende de Φ_1 y Φ_2, tal que*

$$\|f\|_{\Phi_1,E} \leq C \|f\|_{\Phi_2,E},$$

para todo conjunto E tal que $0 < \mu(E) < \infty$, para toda función f.

Demostración. Por hipótesis, existen constantes positivas t_0 y C tales que $\Phi_1(t) \leq C\,\Phi_2(t)$, para toda $t \geq t_0$. Dada f, $\lambda > 0$ y un conjunto E con $\mu(E) > 0$, sean

$$E_1 = \{x \in E : |f(x)| \leq t_0\lambda\}, \qquad E_2 = \{x \in E : |f(x)| > t_0\lambda\}.$$

Entonces

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E \Phi_1\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_{E_1} \Phi_1\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu + \frac{1}{\mu(E)} \int_{E_2} \Phi_1\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu$$
$$\leq \Phi_1(t_0) + \frac{C}{\mu(E)} \int_E \Phi_2\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu.$$

Tomando $\lambda = \|f\|_{\Phi_2,E}$, por el Lema 22 se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E \Phi_1\left(\frac{|f|}{\|f\|_{\Phi_2,E}}\right) d\mu \leq \Phi_1(t_0) + c,$$

y el resultado se concluye aplicando la Proposición 23. ■

Como consecuencia directa del resultado anterior se tiene que si dos funciones de Young son comparables para valores grandes de t, entonces sus promedios de tipo Luxemburg sobre un conjunto E también lo son. Esto es, los valores que toma una función para valores pequeños de t no afectan a dichos promedios.

Corolario 27. *Sean Φ_1 y Φ_2 dos funciones de Young tales que $\Phi_1 \approx \Phi_2$. Entonces $\|\cdot\|_{\Phi_1,E}$ es equivalente a $\|\cdot\|_{\Phi_2,E}$.*

4. Operador maximal generalizado

DEFINICIÓN 28. Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y sea Φ una función de Young. Para cada $x \in X$, definimos el **operador maximal generalizado** asociado a Φ como

$$\mathcal{M}_{\Phi} f(x) = \sup_{B \ni x} \|f\|_{\Phi, B}, \tag{1.4}$$

donde f es una función localmente integrable definida en X, y el supremo se toma sobre todas las bolas $B \subset X$ que contienen a x.

OBSERVACIÓN 3. Si μ es la medida de Lebesgue y Φ es la identidad, se tiene, por Lema 21 que $\mathcal{M}_{\Phi}$ es la clásica **función maximal de Hardy-Littlewood**, i.e.

$$\mathcal{M} f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy, \tag{1.5}$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas B que contienen a x.

DEFINICIÓN 29. Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo. Una función w definida en X y positiva en casi todo punto se denomina **peso** si es localmente integrable respecto de μ.

Dados un peso w y un conjunto μ-medible E, denotamos

$$w(E) = \int_E w(x) d\mu(x).$$

En [8], Kanashiro demuestra que el operador maximal generalizado $\mathcal{M}_{\Phi}$ satisface una desigualdad de tipo débil con peso que involucra a la función Φ, como enuncia el siguiente teorema.

TEOREMA 30. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, Φ una función de Young y w un peso. Entonces, existe una constante positiva C tal que el operador maximal $\mathcal{M}_{\Phi}$ satisface*

$$w\left(\{x \in X : \mathcal{M}_{\Phi} f(x) > t\}\right) \leq C \int_X \Phi\left(\frac{f(x)}{t}\right) \mathcal{M} w(x) d\mu(x),$$

para todo t positivo, para toda f no negativa y para todo peso w, siendo $\mathcal{M}$ el operador maximal de Hardy-Littlewood.

Definición 31. Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo. Dado $1<p<\infty$, diremos que un peso w satisface la **condición $\boldsymbol{A_p(X,d,\mu)}$ de Muckenhoupt** o que está en la clase de pesos de Muckenhoupt $A_p(X,d,\mu)$, si existe una constante C tal que

$$\left(\int_B w(x)d\mu(x)\right)\left(\int_B (w(x))^{-\frac{1}{p-1}}\,d\mu(x)\right)^{p-1}\leq C\,(\mu(B))^p\,,$$

para toda bola B en X.

Definición 32. Sea (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo. Diremos que un peso w pertenece a la **clase $\boldsymbol{A_1(X,d,\mu)}$ de Muckenhoupt** si existe una constante C tal que

$$\frac{w(B)}{\mu(B)}=\frac{1}{\mu(B)}\int_B w(y)d\mu(y)\leq Cw(x), \tag{1.6}$$

para toda bola B en X y para μ-casi todo $x\in B$.

El siguiente resultado prueba que el tipo débil $(1,1)$ con un peso de la maximal generalizada es equivalente a que el peso esté en clase $A_1(X,d,\mu)$, y su prueba puede encontrarse en [8].

Teorema 33. *Sean (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo y w un peso. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(a) $w\in A_1(X,d,\mu)$;

(b) existe una constante positiva C tal que el operador maximal $\mathcal{M}_\Phi$ satisface

$$w\left(\{x\in X:\mathcal{M}_\Phi f(x)>t\}\right)\leq C\int_X \Phi\left(\frac{f(x)}{t}\right)w(x)d\mu(x),$$

para todo t positivo y para toda f no negativa.

Una herramienta fundamental para el trabajo en las clases de Muckenhoupt es el conocido teorema de factorización de Jones probado en [7], que establece que un peso $w\in A_p(X,d,\mu)$ si y sólo si puede reescribirse como $w=w_0w_1^{1-p}$, con w_0 y w_1 en $A_1(X,d,\mu)$. Si bien en la literatura se menciona que este resultado es válido también en el contexto de espacios de tipo homogéneo, la prueba no se encuentra escrita hasta donde sabemos. Puesto que en esta tesis utilizaremos solamente la implicación más sencilla de esta equivalencia, la enunciamos y demostramos a continuación en espacios de medida generales.

Teorema 34. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y sea w un peso que puede factorizarse como $w = w_0 w_1^{1-p}$, con w_0 y w_1 en $A_1(X, d, \mu)$, para algún $1 < p < \infty$. Entonces $w \in A_p(X, d, \mu)$.*

Demostración. Sean $1 < p < \infty$ y w_0, w_1 en $A_1(X, d, \mu)$ fijos. Sea $w = w_0 w_1^{1-p}$ y sea B una bola en X. Entonces,

$$\left(\int_B w\, d\mu\right)\left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\, d\mu\right)^{p-1} = \left(\int_B w_0 w_1^{1-p}\, d\mu\right)\left(\int_B w_1 w_0^{-\frac{1}{p-1}}\, d\mu\right)^{p-1}.$$

Pero $1 - p < 0$ y $w_1 \in A_1(X, d, \mu)$, por lo que de (1.6) obtenemos

$$(w_1(x))^{1-p} \leq C_1 \left(\frac{w_1(B)}{\mu(B)}\right)^{1-p},$$

para μ-casi todo x en B. Análogamente, como $\frac{1}{1-p} < 0$ y $w_0 \in A_1(X, d, \mu)$, se tiene

$$(w_0(x))^{-\frac{1}{p-1}} \leq C_0 \left(\frac{w_0(B)}{\mu(B)}\right)^{-\frac{1}{p-1}},$$

para μ-casi todo x en B. Así,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_B w\, d\mu\right)\left(\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}\, d\mu\right)^{p-1} \\
&\qquad \leq C \left(\frac{w_1(B)}{\mu(B)}\right)^{1-p} \left(\int_B w_0\, d\mu\right)\left(\left(\frac{w_0(B)}{\mu(B)}\right)^{-\frac{1}{p-1}} \int_B w_1\, d\mu\right)^{p-1} \\
&\qquad = C\,(\mu(B))^p\, w_0(B)\,(w_0(B))^{-1}\,(w_1(B))^{1-p}\,(w_1(B))^{p-1} \\
&\qquad = C\,(\mu(B))^p,
\end{aligned}$$

lo que prueba que $w \in A_p(X, d, \mu)$. ■

Observar que en la prueba del teorema anterior no se utiliza la propiedad de duplicación de μ. Es suficiente pedir que las bolas tengan medida positiva y finita.

Finalizamos esta sección con una consecuencia del teorema de factorización de Jones que resultará de utilidad más adelante.

Proposición 35. *Sea $1 < p < \infty$. Si $w^\gamma \in A_1(X, d, \mu)$ para todo $0 \leq \gamma < 1$, entonces w^β pertenece a la clase $A_p(X, d, \mu)$, para todo $1 - p < \beta < 1$.*

Demostración. Fijado $1 - p < \beta < 1$, sea $\gamma = \frac{\beta - 1 + p}{p}$. Entonces $0 < \gamma < 1$. Luego, $w_0 = w^\gamma$ y $w_1 = w^{1-\gamma}$ pertenecen a A_1 por hipótesis. Por el Teorema 34 se tiene que $w_0 w_1^{1-p} \in A_p$. Pero:

$$w_0 w_1^{1-p} = w^\gamma w^{(1-\gamma)(1-p)} = w^{1-p+\gamma p} = w^\beta,$$

lo que prueba el resultado. ■

Capítulo 2

El operador maximal generalizado para una medida

El objetivo de este capítulo es extender los conceptos y resultados dados en el capítulo previo, de modo que sean aplicados a medidas de Borel en lugar de funciones. Para ello, definimos los promedios de Luxemburg de una medida y, asociados a ellos, el operador maximal generalizado correspondiente.

De aquí en adelante, ν siempre denotará una medida de Borel no negativa en X tal que $\nu(F) < \infty$ para todo conjunto acotado F. Lo mismo supondremos cuando usemos ν_1 o ν_2, o cualquier otro símbolo que represente una medida sobre la que actúa el operador maximal.

1. Promedios de Luxemburg para una medida

Definición 36. Sean (X, μ) un espacio de medida, Φ una función de Young y E una subconjunto medible de X, con $0 < \mu(E) < \infty$. Definimos el **promedio de Luxemburg de una medida $\boldsymbol{\nu}$** sobre E asociado a Φ como

$$\|\nu\|_{\Phi,E} = \operatorname{ínf} \Lambda_{\Phi,E}(\nu),$$

donde

$$\Lambda_{\Phi,E}(\nu) = \left\{ \lambda > 0 : \frac{\Phi\left(\frac{\nu(E)}{\lambda}\right)}{\mu(E)} \leq 1 \right\}.$$

El siguiente lema técnico será de utilidad para resultados posteriores, y es análogo al Lema 22. Asumiremos de aquí en más E como en la definición anterior.

Lema 37. *Sea Φ una función de Young. Entonces*

$$\frac{\Phi\left(\frac{\nu(E)}{\|\nu\|_{\Phi,E}}\right)}{\mu(E)} \leq 1. \tag{2.1}$$

Demostración. Por definición de $\|\nu\|_{\Phi,E}$, existe una sucesión decreciente $\{\lambda_n\}$ de números reales positivos tal que λ_n converge a $\|\nu\|_{\Phi,E}$, y $\Phi\left(\frac{\nu(E)}{\lambda_n}\right) \leq \mu(E)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por la continuidad de Φ tenemos que $\Phi\left(\frac{\nu(E)}{\|\nu\|_{\Phi,E}}\right) \leq \mu(E)$. ■

La Definición 36 para los promedios de Luxemburg de una medida fue dada como una analogía natural con los promedios de Luxemburg para funciones. A continuación se presenta una caracterización que, en algunas ocasiones, puede resultar más conveniente.

Lema 38. *Sea Φ una función de Young. Entonces*

$$\|\nu\|_{\Phi,E} = \frac{\nu(E)}{\Phi^{-}\left(\mu(E)\right)},$$

donde Φ^{-} es la inversa generalizada de Φ.

Demostración. Antes que nada, observar que estamos suponiendo $\mu(E) > 0$. Luego, el Lema 17 implica que el denominador $\Phi^{-}\left(\mu(E)\right)$ no se anula. Si $\nu(E) = 0$, no hay nada que probar. Supongamos entonces que $\nu(E) > 0$, y consideremos

$$\lambda_0 = \frac{\nu(E)}{\Phi^{-}\left(\mu(E)\right)} > 0.$$

Notar que

$$\Phi\left(\frac{\nu(E)}{\lambda_0}\right) = \Phi\left(\Phi^{-}\left(\mu(E)\right)\right) \leq \mu(E),$$

debido al inciso ii) del Lema 18. Así, por ser un ínfimo, se tiene que

$$\|\nu\|_{\Phi,E} \leq \lambda_0 = \frac{\nu(E)}{\Phi^{-}(\mu(E))}.$$

Por otro lado, sea $\lambda > 0$ tal que $\Phi\left(\frac{\nu(E)}{\lambda}\right) \leq \mu(E)$. Por ser Φ no decreciente, por la Proposición 16, Φ^{-} también lo es, y aplicando ahora el inciso i) del Lema 18 tenemos que

$$\frac{\nu(E)}{\lambda} \leq \Phi^{-}\left(\Phi\left(\frac{\nu(E)}{\lambda}\right)\right) \leq \Phi^{-}(\mu(E)).$$

Por lo tanto

$$\left\{\lambda > 0 : \Phi\left(\frac{\nu(E)}{\lambda}\right) \leq \mu(E)\right\} \subseteq \left\{\lambda > 0 : \frac{\nu(E)}{\lambda} \leq \Phi^{-}(\mu(E))\right\},$$

por lo que

$$\text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \Phi\left(\frac{\nu(E)}{\lambda}\right) \leq \mu(E)\right\} \geq \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \frac{\nu(E)}{\lambda} \leq \Phi^{-}\left(\mu(E)\right)\right\},$$

es decir, $\|\nu\|_{\Phi,E} \geq \frac{\nu(E)}{\Phi^{-}(\mu(E))}$. Esta desigualdad, junto a la anterior, completa la prueba. ■

Observación 4. Otra forma de demostrar el resultado anterior es notar que, de hecho, los dos conjuntos involucrados en la prueba son iguales. En efecto, si $\lambda > 0$ es tal que

$$\frac{\nu(E)}{\lambda} \leq \Phi^{-}\left(\mu(E)\right),$$

por la Proposición 16 Φ es no decreciente, luego aplicando el inciso ii) del Lema 18 tenemos que

$$\Phi\left(\frac{\nu(E)}{\lambda}\right) \leq \Phi\left(\Phi^{-}\left(\mu(E)\right)\right) \leq \mu(E).$$

Cuando Φ es invertible el resultado anterior es directo y, en dicho caso, tenemos que

$$\|\nu\|_{\Phi,E} = \frac{\nu(E)}{\Phi^{-1}(\mu(E))}.$$

Observación 5. Una consecuencia directa del Lema 38 es que si $\nu_1(E) \leq \nu_2(E)$ entonces $\|\nu_1\|_{\Phi,E} \leq \|\nu_2\|_{\Phi,E}$.

Con el siguiente teorema demostramos que los promedios cumplen propiedades similares a las de una norma, a excepción de la homogeneidad. La homogeneidad positiva es suficiente en el contexto en el que trabajamos, pues no tendría sentido tomar la constante negativa en el inciso (ii) del teorema enunciado a continuación, por ser Φ una función de Young, y para que $c\nu$ sea una medida no negativa.

Teorema 39. *Sean Φ una función de Young. Entonces*

(i) Si $\|\nu\|_{\Phi,E} = 0$, se tiene que $\nu(E) = 0$.

(ii) Si $c > 0$, entonces $\|c\nu\|_{\Phi,E} = c\,\|\nu\|_{\Phi,E}$, es decir, $\|\cdot\|_{\Phi,E}$ definida para medidas es homogénea positiva de grado 1.

(iii) Sean ν_1 y ν_2 dos medidas y Φ una función de Young. Entonces

$$\|\nu_1 + \nu_2\|_{\Phi,E} = \|\nu_1\|_{\Phi,E} + \|\nu_2\|_{\Phi,E}.$$

Demostración. Los incisos (i) y (ii) se obtienen de manera inmediata a partir de la caracterización dada en el Lema 38. También (iii) es consecuencia directa de la misma, ya que

$$\begin{aligned}
\|\nu_1 + \nu_2\|_{\Phi,E} &= \frac{(\nu_1+\nu_2)(E)}{\Phi^{-}(\mu(E))} \\
&= \frac{\nu_1(E)}{\Phi^{-}(\mu(E))} + \frac{\nu_2(E)}{\Phi^{-}(\mu(E))} = \|\nu_1\|_{\Phi,E} + \|\nu_2\|_{\Phi,E}.
\end{aligned}$$

■

2. Propiedades de los promedios de Luxemburg

En esta sección nos ocuparemos de probar algunas propiedades de los promedios de Luxemburg para medidas definidos en la sección previa. Estas propiedades son las análogas a las enunciadas en el capítulo anterior para promedios de Luxemburg sobre funciones. Aunque algunas no serán utilizadas en forma directa aquí, las incluimos por la importancia de obtener lo esperado cuando se plantea una nueva definición. En este caso, evidencian que las propiedades de estos promedios para una función se conservan para medidas, de acuerdo a la definición dada en este trabajo. Recordemos que para $\|\nu\|_{E,\Phi}$ siempre supondremos que E es un subconjunto medible de X con $0 < \mu(E) < \infty$.

LEMA 40. *Sean Φ una función de Young y E un conjunto μ-medible, con medida positiva y finita. Si existen constantes positivas C y λ tales que*

$$\frac{1}{\mu(E)}\Phi\left(\frac{\nu(E)}{\lambda}\right) \leq C,$$

entonces $\|\nu\|_{\Phi,E} \leq \lambda \max\{1, C\}$.

DEMOSTRACIÓN. Si $0 < C \leq 1$, la conclusión es inmediata debido a la definición de $\|\nu\|_{\Phi,E}$. Si $C > 1$, por el Lema 8 y aplicando la hipótesis, se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)}\Phi\left(\frac{\nu(E)}{\lambda C}\right) \leq \frac{1}{C\mu(E)}\Phi\left(\frac{\nu(E)}{\lambda}\right) \leq 1,$$

luego, $\lambda C \in \Lambda_{\Phi,E}(\nu)$ y por ser $\|\nu\|_{\Phi,E}$ el ínfimo de dicho conjunto, $\|\nu\|_{\Phi,E} \leq \lambda C$. ■

LEMA 41. *Sean Φ una función de Young y r una constante positiva. Si definimos $\Psi(t) = \Phi(t^r)$, entonces $\|\nu^r\|_{\Phi,E} = \|\nu\|^r_{\Psi,E}$.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado es consecuencia directa de la definición de promedio de Luxemburg:

$$\begin{aligned}
\|\nu\|^r_{\Psi,E} &= \left(\inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{\mu(E)}\Psi\left(\frac{\nu(E)}{\lambda}\right) \leq 1\right\}\right)^r \\
&= \left(\inf\left\{\lambda^{1/r} > 0 : \frac{1}{\mu(E)}\Phi\left(\frac{[\nu(E)]^r}{\lambda^r}\right) \leq 1\right\}\right)^r \\
&= \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{1}{\mu(E)}\Phi\left(\frac{[\nu(E)]^r}{\alpha}\right) \leq 1\right\} \\
&= \|\nu^r\|_{\Phi,E},
\end{aligned}$$

como se quería probar. ■

Lema 42. *Sea (X, d, μ) es un espacio de tipo homogéneo. Si Φ es una función de Young, entonces*

$$\|\nu\|_{\Phi,B} \leq A^n \|\nu\|_{\Phi,\tau B},$$

para toda constante $\tau > 1$ y para toda bola B, donde n denota un número natural tal que $2^n \geq \tau$ y A es la constante de duplicación para μ.

Demostración. Fijemos una bola B y una constante $\tau > 1$. Sea n cualquier entero positivo tal que $\tau \leq 2^n$. Así, se tiene que

$$\mu(\tau B) \leq A^n \mu\left(\frac{\tau}{2^n} B\right) \leq A^n \mu(B).$$

Como Φ es no decreciente y haciendo uso, además, del Lema 8, se tiene que

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{\nu(B)}{A^n \|\nu\|_{\Phi,\tau B}}\right) &\leq \Phi\left(\frac{\nu(\tau B)}{A^n \|\nu\|_{\Phi,\tau B}}\right) \\
&\leq \frac{1}{A^n} \Phi\left(\frac{\nu(\tau B)}{\|\nu\|_{\Phi,\tau B}}\right) \\
&\leq \frac{1}{A^n} \mu(\tau B) \\
&\leq \mu(B).
\end{aligned}$$

Luego, por el Lema 37 se tiene que $\|\nu\|_{\Phi,B} \leq A^n \|\nu\|_{\Phi,\tau B}$. ■

El siguiente lema es el resultado análogo a la monotonía establecida en el Lema 26 para el caso de funciones. Observar que, a diferencia de dicho lema, para el caso de medidas, el comportamiento de las funciones para valores pequeños de t sí importa. Sin embargo, para dichos valores también podemos obtener una cota que nos permite controlar los promedios, dependiendo de la medida de cada conjunto. Más precisamente:

Lema 43. *Sean Φ_1, Φ_2 funciones de Young. Si $\Phi_1 \preceq \Phi_2$, entonces existen constantes positivas C y t_0, que dependen de Φ_1 y Φ_2, tales que*

$$\|\nu\|_{\Phi_1,E} \leq C \|\nu\|_{\Phi_2,E},$$

para toda medida ν y para todo E con $\mu(E) \geq t_0$. Además, si $\mu(E) < t_0$, entonces $\|\nu\|_{\Phi_1,E} \leq C \frac{t_0}{\mu(E)} \|\nu\|_{\Phi_2,E}$.

Demostración. Por el inciso (b) del Lema 19 sabemos que que $\Phi_2^- \preceq \Phi_1^-$, por lo que existen constantes positivas $\widetilde{C}$ y t_0 tales que $\Phi_2^-(t) \leq \widetilde{C}\,\Phi_1^-(t)$, para todo $t \geq t_0$. Luego, si $\mu(E) \geq t_0$, se tiene que

$$\|\nu\|_{\Phi_1,E} = \frac{\nu(E)}{\Phi_1^-(\mu(E))} \leq \widetilde{C}\frac{\nu(E)}{\Phi_2^-(\mu(E))} = \widetilde{C}\,\|\nu\|_{\Phi_2,E}\,.$$

Por otro lado, si $\mu(E) < t_0$, aplicando ahora el inciso (a) del lema mencionado con $c = \mu(E)/t_0$, se tiene que

$$\|\nu\|_{\Phi_1,E} = \frac{\nu(E)}{\Phi_1^-(c\,t_0)} \leq \frac{\nu(E)}{c\,\Phi_1^-(t_0)} \leq \frac{\nu(E)}{c\,\widetilde{C}^{-1}\Phi_2^-(t_0)} \leq \frac{\widetilde{C}}{c}\frac{\nu(E)}{\Phi_2^-(\mu(E))} = \frac{\widetilde{C}\,t_0}{\mu(E)}\,\|\nu\|_{\Phi_2,E}\,,$$

como queríamos ver. ■

3. Operadores maximales para medidas

En esta sección extenderemos la definición de los operadores maximales de Hardy-Littlewood y generalizados para medidas, a partir de los promedios de Luxemburg para medidas. Probaremos la validez de ciertos resultados conocidos para el operador maximal sobre funciones, extendidos a este nuevo contexto.

Definición 44. Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y sea Φ una función de Young. Definimos el **operador maximal de Hardy-Littlewood** actuando sobre una medida ν como

$$M\nu(x) = \sup_{B \ni x} \frac{\nu(B)}{\mu(B)},$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas $B \subset X$ que contienen a x.

En [6] se considera este operador maximal y se establece su tipo débil, es decir, que satisface que

$$\mu\left(\{x \in X : M\nu(x) > t\}\right) \leq C\,\frac{\nu(X)}{t}, \tag{2.2}$$

para todo $t > 0$ y toda medida ν, donde C depende solamente de las constantes geométricas del espacio. Además, se prueba que si $M\nu(x) < \infty$ para μ-casi todo punto x, entonces $w(x) = (M\nu(x))^\gamma$ es un peso de $A_1(X, d, \mu)$ para cada $0 < \gamma < 1$. Es claro que $M\nu$ es finita cuando ν es una medida finita. En [1] se trabajan otras condiciones sobre ν que implican que $M\nu$ es finita en casi todo punto. Nuestro objetivo será extender la definición de la maximal actuando sobre medidas, y obtener algunos resultados en relación a dicho operador.

Definición 45. Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y sea Φ una función de Young. Definimos el **operador maximal generalizado para una medida $\boldsymbol{\nu}$** asociado a Φ como

$$M_\Phi \nu(x) = \sup_{B \ni x} \|\nu\|_{\Phi,B},$$

donde $x \in X$ y el supremo se toma sobre todas las bolas que contienen a x.

Observación 6. Notar que si $\Phi(t)$ es la identidad, entonces $M_\Phi \nu(x) = M\nu(x)$. Además, cuando $\Phi(t) = t^s$, por el Lema 41 tenemos que $M_\Phi \nu = (M\nu^s)^{1/s}$.

Un resultado que es de gran utilidad para generar pesos en la clase $A_p(X, d, \mu)$ es el siguiente teorema, cuya prueba puede encontrarse en 1.

Teorema 46. *Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y sea ν una medida de Borel tal que $M\nu(x) < \infty$ para μ-casi todo $x \in X$. Entonces $(M\nu)^\gamma \in A_1(X, d, \mu)$ para toda $0 \leq \gamma < 1$.*

Definición 47. Sea (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y sea Φ una función de Young. Definimos el **operador maximal generalizado centrado para una medida $\boldsymbol{\nu}$** asociado a Φ como

$$\widetilde{M}_\Phi \nu(x) = \sup_{r>0} \|\nu\|_{\Phi,B(x,r)}. \tag{2.3}$$

Ejemplo 5. En un espacio de tipo homogéneo (X, d, μ), consideremos δ_0, la delta de Dirac concentrada en un punto $x_0 \in X$. Sean $x \neq x_0$ en X y $B = B(x,r)$ la bola centrada en x de radio $r > 0$. Por el Lema 38, es claro que si $x_0 \notin B$, entonces $\|\delta_0\|_{\Phi,B} = 0$. Ahora, si $x_0 \in B$, usando nuevamente el Lema 38, se tiene que $\|\delta_0\|_{\Phi,B} = \frac{1}{\Phi^-(\mu(B))}$, y así

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_\Phi \delta_0(x) &= \sup_{r>0} \|\delta_0\|_{\Phi,B} \\
&= \sup_{r>d(x,x_0)} \frac{1}{\Phi^-(\mu(B))} \\
&= \frac{1}{\text{ínf}_{r>d(x,x_0)} \Phi^-(\mu(B))}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Phi^{-}\left(\mu\left(\overline{B}(x, r_0)\right)\right)},$$

donde $r_0 = d(x, x_0)$ y $\overline{B}(x, r_0) = \{y \in X : d(y, x) \leq r_0\}$.

Lema 48. *Los operadores maximales generalizados definidos para medidas centrado y no centrado son equivalentes, es decir, existe una constante positiva C_0 tal que para cada $x \in X$*

$$\widetilde{M}_{\Phi}\nu(x) \leq M_{\Phi}\nu(x) \leq C_0 \widetilde{M}_{\Phi}\nu(x).$$

Demostración. Sea $x \in X$ fijo. Dado que $\{B(x, r) : r > 0\}$ es un subconjunto del conjunto de bolas que contienen a x, es claro que $\widetilde{M}_{\Phi}\nu(x) \leq M_{\Phi}\nu(x)$.

Para probar la segunda desigualdad, fijemos una bola $B = B(y, s)$ que contenga a x. Basta ver que existe una constante positiva C_0 tal que $\|\nu\|_{\Phi,B} \leq C_0 \|\nu\|_{\Phi,B(x,r)}$, para algún $r > 0$, pues tomando supremos allí obtenemos el resultado.

Para ver la desigualdad mencionada, notar que $B \subset B(x, 2Ks) \subset B(y, 3K^2 s)$, donde K la constante triangular del espacio. Así, tomando $r = 2Ks$, $B_x = B(x, r)$ y $C_0 \geq 1$ a elegir luego, por convexidad de Φ y aplicando el Lema 37, tenemos que

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{\nu(B)}{C_0 \|\nu\|_{\Phi,B_x}}\right) &\leq \Phi\left(\frac{\nu(B_x)}{C_0 \|\nu\|_{\Phi,B_x}}\right) \\
&\leq \frac{1}{C_0}\Phi\left(\frac{\nu(B_x)}{\|\nu\|_{\Phi,B_x}}\right) \\
&\leq \frac{1}{C_0}\mu(B_x) \\
&\leq \frac{1}{C_0}\mu(B(y, 3K^2 s)) \\
&\leq \frac{A^n}{C_0}\mu(B),
\end{aligned}$$

donde A es la constante de duplicación del espacio y n un entero positivo tal que $2^n \geq 3K^2$. Luego, tomando $C_0 = A^n$, se tiene que $C_0 \|\nu\|_{\Phi,B(x,r)} \in \Lambda_{\Phi,B}(\nu)$ y, por lo tanto, $\|\nu\|_{\Phi,B} \leq C_0 \|\nu\|_{\Phi,B(x,r)}$. ■

Definición 49. Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y Φ una función de Young. Diremos que M_{Φ} es de **tipo débil $(1, 1)$** si existen constantes positivas

c_0 y C tales que

$$\mu\left(\{x \in X : M_\Phi \nu(x) > t\}\right) \leq C\,\Phi\left(c_0 \frac{\nu(X)}{t}\right), \tag{2.4}$$

para todo $t > 0$ y toda medida ν.

Observar que cuando $\Phi(t) = t$, la condición (2.4) se convierte en (2.2), por lo que la definición anterior extiende el tipo débil de la maximal M sobre medidas al operador generalizado M_Φ.

Teorema 50. *Dados (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo y Φ una función de Young, M_Φ es de tipo débil* $(1, 1)$.

Demostración. Si $\nu(X) = \infty$, no hay nada que probar, así que podemos suponer $\nu(X)$ finita. Fijemos $t > 0$ y sea $E_t = \{x \in X : M_\Phi \nu(x) > t\}$. Si E_t es vacío, el resultado es trivial, por lo que consideraremos el caso E_t no vacío.

Por el Lema 48, existe una constante positiva c_0 tal que $M_\Phi \nu(x) \leq C_0 \widetilde{M}_\Phi \nu(x)$, para todo $x \in X$ y entonces se tiene que

$$E_t \subset \left\{ x \in X : \widetilde{M}_\Phi \nu(x) > \frac{t}{C_0} \right\}.$$

Por definición de maximal generalizada centrada, para cada $x \in E_t$ existe una bola $B_x = B\left(x, r(x)\right)$ tal que $\|\nu\|_{\Phi, B_x} > t/C_0$.

Supongamos primero que E_t es acotado. Como $\{B_x\}_{x \in E_t}$ es un cubrimiento de E_t, por el Lema 6, existe una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ en E_t tal que $E_t \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \widetilde{B}_i$ y $B_i \cap B_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, donde $B_i = B\left(x_i, r(x_i)\right)$ y $\widetilde{B}_i = B\left(x_i, 4Kr(x_i)\right)$, siendo K la constante triangular de d.

Por homogeneidad positiva del promedio se tiene que $\left\|\frac{C_0}{t}\nu\right\|_{\Phi, B_i} > 1$, para cada i. Luego,

$$1 \notin \left\{ \lambda > 0 : \frac{\Phi\left(\frac{C_0 \nu(B_i)}{t\lambda}\right)}{\mu(B_i)} \leq 1 \right\}$$

y, en consecuencia, tenemos que

$$1 < \frac{1}{\mu(B_i)} \Phi\left(\frac{C_0 \nu(B_i)}{t}\right).$$

Así, si A es la constante de duplicación de μ y n un entero positivo tal que $2^n \geq 4K$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mu(E_t) &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(\widetilde{B}_i) \\
&\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\mu(\widetilde{B}_i)}{\mu(B_i)} \Phi\left(\frac{C_0\nu(B_i)}{t}\right) \\
&\leq A^n \sum_{i\in\mathbb{N}} \Phi\left(\frac{C_0\nu(B_i)}{t}\right) \\
&= A^n \sum_{i\in\mathbb{N}} \Phi\left(\frac{C_0\nu(B_i)\nu(X)}{t\nu(X)}\right) \\
&\leq A^n \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\nu(B_i)}{\nu(X)} \Phi\left(C_0\frac{\nu(X)}{t}\right) \\
&\leq A^n \Phi\left(C_0\frac{\nu(X)}{t}\right) \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\nu(B_i)}{\nu(X)} \\
&\leq A^n \Phi\left(C_0\frac{\nu(X)}{t}\right), \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

donde hemos usado, nuevamente, el Lema 8 con $c = \frac{\nu(B_i)}{\nu(X)}$ que resulta menor o igual que 1 para cada $i \in \mathbb{N}$ y, luego, el hecho que las bolas B_i son disjuntas dos a dos. Finalmente, si E_t es no acotado, podemos aplicar lo demostrado previamente al conjunto $E_t \cap B_0$, para alguna bola B_0 tal que $E_t \cap B_0 \neq \emptyset$, y tomando el límite cuando el radio de B_0 tiende a infinito tendremos (2.4). ■

A continuación demostraremos que el operador maximal generalizado definido sobre medidas, M_Φ, satisface una desigualdad de tipo débil con peso, lo que representa el análogo al Teorema 30 para el caso de las medidas.

Teorema 51. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, Φ una función de Young y w un peso. Entonces existen constantes positivas C y c_0 tales que*

$$
w\left(\{x \in X : M_\Phi\nu(x) > t\}\right) \leq C\Phi\left(c_0\frac{\nu(X)}{t}\right)\frac{1}{\nu(X)}\int_X \mathcal{M}w(x)d\nu(x), \qquad (2.6)
$$

para toda $t > 0$ y toda medida ν tal que $\nu(X) < \infty$, donde $\mathcal{M}$ es el operador maximal de Hardy-Littlewood clásico.

Demostración. La prueba es análoga a la del Teorema 50 hasta la estimación (2.5) de la medida de E_t. Notar, además, que

$$\frac{w(\widetilde{B}_i)}{\mu(\widetilde{B}_i)} \leq \mathcal{M}w(x),$$

para cada $x \in \widetilde{B}_i$, debido a la definición de función maximal de Hardy-Litllewood. En particular, vale para cada x en B_i. Luego,

$$\begin{aligned}
w(E_t) &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} w(\widetilde{B}_i) \\
&\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{w(\widetilde{B}_i)}{\mu(B_i)}\Phi\left(\frac{c_0\nu(B_i)}{t}\right) \\
&\leq A^n \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{w(\widetilde{B}_i)}{\mu(\widetilde{B}_i)}\Phi\left(\frac{c_0\nu(B_i)}{t}\right) \\
&= A^n \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{w(\widetilde{B}_i)}{\mu(\widetilde{B}_i)}\Phi\left(\frac{c_0\nu(B_i)\nu(X)}{t\nu(X)}\right) \\
&\leq A^n \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{w(\widetilde{B}_i)}{\mu(\widetilde{B}_i)}\frac{\nu(B_i)}{\nu(X)}\Phi\left(c_0\frac{\nu(X)}{t}\right) \\
&= A^n \Phi\left(c_0\frac{\nu(X)}{t}\right)\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{w(\widetilde{B}_i)}{\mu(\widetilde{B}_i)}\frac{\nu(B_i)}{\nu(X)} \\
&= A^n \Phi\left(c_0\frac{\nu(X)}{t}\right)\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu(X)}\int_{B_i}\frac{w(\widetilde{B}_i)}{\mu(\widetilde{B}_i)}d\nu(x) \\
&\leq A^n \Phi\left(c_0\frac{\nu(X)}{t}\right)\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu(X)}\int_{B_i}\mathcal{M}w(x)d\nu(x) \\
&\leq A^n \Phi\left(c_0\frac{\nu(X)}{t}\right)\frac{1}{\nu(X)}\int_{X}\mathcal{M}w(x)d\nu(x),
\end{aligned}$$

como queríamos ver. ■

Como mencionamos anteriormente, en [8] se prueba que el tipo débil $(1,1)$ con un peso de la maximal generalizada actuando sobre funciones es equivalente a que el peso esté en la clase $A_1(X,d,\mu)$. El siguiente resultado muestra que, para el caso de las maximales generalizadas actuando sobre medidas, el tipo débil correspondiente es una condición suficiente para la pertenencia a la clase de Muckenhoupt.

Teorema 52. *Sean (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo, Φ una función de Young submultiplicativa y w un peso. Si existen constantes positivas C y c_0 tales que*

$$w\left(\{x\in X : M_\Phi\nu(x)>t\}\right)\le C\,\Phi\left(c_0\frac{\nu(X)}{t}\right)\frac{1}{\nu(X)}\int_X w(x)d\nu(x), \tag{2.7}$$

para todo $t>0$ y toda medida ν tal que $\nu(X)<\infty$, entonces $w\in A_1(X,d,\mu)$.

Demostración. Fijemos una bola $B\subset X$. Afirmamos que existe una constante positiva C tal que

$$\frac{w(B)}{\mu(B)}\le C\frac{w(S)}{\mu(S)},$$

para todo subconjunto S de B de medida positiva. Supongamos que esta afirmación es cierta, y definamos $a=\operatorname{ess\,inf}_{x\in B}w(x)$. Luego, para cada $\varepsilon>0$ existe $S_\varepsilon\subseteq B$ tal que $\mu(S_\varepsilon)>0$ y $w(x)<a+\varepsilon$ para todo $x\in S_\varepsilon$. Por la afirmación, resulta que

$$\begin{aligned}\frac{w(B)}{\mu(B)}&\le C\frac{w(S_\varepsilon)}{\mu(S_\varepsilon)}\\&=C\frac{1}{\mu(S_\varepsilon)}\int_{S_\varepsilon}w(x)d\mu(x)\\&\le C(a+\varepsilon).\end{aligned}$$

Puesto que esto vale para todo $\varepsilon>0$, podemos concluir que

$$\frac{w(B)}{\mu(B)}\le C\operatorname*{ess\,inf}_{x\in B}w(x),$$

es decir,

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B w(y)d\mu(y)\le Cw(x)$$

para μ-casi todo punto $x\in B$, como queríamos ver.

Para probar la afirmación, sea ν la restricción de μ sobre S multiplicada por $\frac{1}{c_0}$, esto es,

$$\nu(E)=\frac{1}{c_0}\mu(E\cap S),$$

de modo que $\nu(X)<\infty$. Sea $0<t<\|\nu\|_{\Phi,B}$ fijo. Así, $B\subseteq\{x\in X : M_\Phi\nu(x)>t\}$, y aplicando la hipótesis se obtiene que

$$\begin{aligned}w(B)&\le w\left(\{x\in X : M_\Phi\nu(x)>t\}\right)\\&\le C\Phi\left(\frac{c_0\nu(X)}{t}\right)\frac{1}{\nu(X)}\int_X w(x)d\nu(x)\end{aligned}$$

$$= C\Phi\left(\frac{\mu(S)}{t}\right)\frac{1}{\mu(S)}w(S),$$

por la definición de ν. Finalmente, aplicamos la desigualdad obtenida tomando $t = \frac{1}{2}\|\nu\|_{\Phi,B}$ y, a continuación, la igualdad dada en el Lema 38, para obtener

$$\begin{aligned} w(B) &\leq C\,\Phi\left(\frac{2\mu(S)}{\|\nu\|_{\Phi,B}}\right)\frac{1}{\mu(S)}w(S)\\ &= C\,\Phi\left(\frac{2\mu(S)\Phi^{-}\left(\mu(B)\right)}{\nu(B)}\right)\frac{1}{\mu(S)}w(S)\\ &= C\,\Phi\left(\frac{2c_0\,\mu(S)\Phi^{-}\left(\mu(B)\right)}{\mu(S)}\right)\frac{1}{\mu(S)}w(S)\\ &\leq C\,\Phi\left(\Phi^{-}\left(\mu(B)\right)\right)\frac{1}{\mu(S)}w(S)\\ &\leq C\,\mu(B)\frac{1}{\mu(S)}w(S), \end{aligned}$$

donde en los tres últimos pasos aplicamos la definición de la medida ν, que Φ es submultiplicativa y el inciso ii) del Lema 18, respectivamente, completando así la prueba. ■

Un resultado muy utilizado en el análisis, el cual satisfacen los operadores de tipo débil, es la desigualdad de Kolmogorov. A continuación establecemos la desigualdad análoga para el caso del tipo débil (2.4) definido en este trabajo.

Teorema 53 (Desigualdad de Kolmogorov para M_Φ). *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, Φ una función de Young y $0 < \alpha < 1$. Entonces existe una constante C_α tal que*

$$\int_E |M_\Phi\nu(x)|^\alpha\,d\mu(x) \leq C_\alpha\,\mu(E)\,\|\nu\|_{\Phi,E}^\alpha\,,$$

para toda medida ν, siendo E cualquier conjunto medible que contenga al soporte de ν.

Demostración. Sea ν una medida y sea E como en la hipótesis del teorema. Por ser M_Φ de tipo débil $(1,1)$, existen constantes positivas C y c_0 tales que

$$\mu\left(\{x \in X : M_\Phi\nu(x) > t\}\right) \leq C\,\Phi\left(c_0\frac{\nu(X)}{t}\right) = C\,\Phi\left(c_0\frac{\nu(E)}{t}\right),$$

para todo $t > 0$. Sea $t_0 = \frac{1}{2} \|c_0\nu\|_{\Phi,E}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_E |M_\Phi \nu(x)|^\alpha \, d\mu(x) = \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} \mu\left(\{x \in E : M_\Phi \nu(x) > t\}\right) dt \\
&\leq C\alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} \min \left\{ \mu(E), \Phi\left(c_0 \frac{\nu(E)}{t}\right)\right\} dt \\
&= C\alpha \int_0^{t_0} t^{\alpha-1} \min \left\{ \mu(E), \Phi\left(c_0 \frac{\nu(E)}{t}\right)\right\} dt \\
&\quad + C\alpha \int_{t_0}^{2t_0} t^{\alpha-1} \min \left\{ \mu(E), \Phi\left(c_0 \frac{\nu(E)}{t}\right)\right\} dt \\
&\quad + C\alpha \int_{2t_0}^{\infty} t^{\alpha-1} \min \left\{ \mu(E), \Phi\left(c_0 \frac{\nu(E)}{t}\right)\right\} dt \\
&= I + II + III.
\end{aligned}$$

Estimamos cada integral por separado. Para la primera, si $t \leq t_0$, entonces $t < \|c_0\nu\|_{\Phi,E}$. Por ser un ínfimo, se tiene que $\Phi\left(c_0 \frac{\nu(E)}{t}\right) > \mu(E)$ y luego

$$I = C\alpha \int_0^{t_0} t^{\alpha-1} \mu(E) \, dt = C\mu(E) t_0^\alpha = C_\alpha \mu(E) \|\nu\|_{\Phi,E}^\alpha ,$$

donde hemos usado el inciso (ii) del Teorema 39. Para la segunda, notar que

$$II \leq C\alpha\mu(E) \int_{t_0}^{2t_0} t^{\alpha-1} = C\mu(E)(2^\alpha t_0^\alpha - t_0^\alpha) = C_\alpha \mu(E) \|\nu\|_{\Phi,E}^\alpha .$$

Finalmente, si $t \geq 2t_0$ entonces $\|c_0\nu\|_{\Phi,E} \leq t$, por lo que, aplicando el Lema 8 se tiene

$$\begin{aligned}
\Phi\left(c_0 \frac{\nu(E)}{t}\right) &= \Phi\left(\frac{\|c_0\nu\|_{\Phi,E}}{t} \frac{c_0\nu(E)}{\|c_0\nu\|_{\Phi,E}}\right) \\
&\leq \frac{\|c_0\nu\|_{\Phi,E}}{t} \Phi\left(\frac{c_0\nu(E)}{\|c_0\nu\|_{\Phi,E}}\right) \\
&\leq \frac{\|c_0\nu\|_{\Phi,E}}{t} \mu(E).
\end{aligned}$$

Así,

$$III \leq C\alpha \|c_0\nu\|_{\Phi,E} \mu(E) \int_{2t_0}^\infty t^{\alpha-2} dt = C_\alpha \|\nu\|_{\Phi,E} \mu(E) \|\nu\|_{\Phi,E}^{\alpha-1} = C_\alpha \mu(E) \|\nu\|_{\Phi,E}^\alpha ,$$

lo que completa la prueba. ∎

La desigualdad de Kolmogorov permite probar que $(M_\Phi \nu)^\gamma$ es un peso perteneciente a la clase $A_1(X,d,\mu)$ para $0 \leq \gamma < 1$, como se muestra en el siguiente teorema.

TEOREMA 54. *Sean (X,d,μ) un espacio de tipo homogéneo, Φ una función de Young y ν una medida de Borel tal que $M_\Phi\nu(x) < \infty$ μ-casi todo $x \in X$. Entonces $(M_\Phi\nu)^\gamma \in A_1(X,d,\mu)$ para $0 \leq \gamma < 1$.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue las líneas generales de la demostración dada en [1], donde el resultado es probado para la maximal $M\nu$ y está basada en la desigualdad de Kolmogorov. Debemos ver que

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B (M_\Phi \nu)^\gamma \, d\mu \leq C \left(M_\Phi \nu(x)\right)^\gamma , \tag{2.8}$$

para toda bola B en X y μ-casi todo $x \in B$. Para ello, fijamos $B = B(x_0, r_0)$ y escribimos $\nu = \nu_1 + \nu_2$, donde ν_1 es la restricción de ν a la bola $B^* = B(x_0, 2Kr_0)$, $\nu_2 = \nu - \nu_1$ y K denota la constante triangular de d. Luego, para $0 \leq \gamma < 1$ se tiene

$$(M_\Phi\nu(x))^\gamma \leq (M_\Phi\nu_1(x))^\gamma + (M_\Phi\nu_2(x))^\gamma ,$$

por lo que es suficiente probar (2.8) con ν_1 y ν_2 del lado izquierdo de la desigualdad. Para analizar $M_\Phi\nu_1$, por el Teorema 53, tenemos que existe una constante C_γ tal que

$$\int_B (M_\Phi\nu_1)^\gamma \, d\mu \leq \int_{B^*} (M_\Phi\nu_1)^\gamma \, d\mu \leq C_\gamma \mu(B^*) \left\|\nu_1\right\|_{\Phi,B^*}^\gamma \leq \tilde{C}_\gamma \mu(B) \left\|\nu_1\right\|_{\Phi,B^*}^\gamma ,$$

donde hemos usado la duplicación de μ en la última desigualdad. Entonces, por la Observación 5, tenemos que

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B (M_\Phi\nu_1(x))^\gamma \, d\mu(x) \leq \tilde{C}_\gamma \left\|\nu_1\right\|_{\Phi,B^*}^\gamma \leq \tilde{C}_\gamma \left\|\nu\right\|_{\Phi,B^*}^\gamma \leq C_\gamma \left(M_\Phi\nu(x)\right)^\gamma .$$

Para estimar $M_\Phi\nu_2$, notar que si $y \in B$ y $B_1 = B(x_1, r_1)$ es cualquier bola conteniendo a y tal que $\nu_2(B_1) > 0$, entonces $r_1 > \frac{1}{2K} r_0$.
En efecto, si $z \in B_1 \cap (X \setminus B(x_0, 2Kr_0))$ entonces

$$2Kr_0 \leq d(z, x_0) \leq K(d(z,y) + d(y,x_0)) < K(2Kr_1 + r_0),$$

de lo que se deduce que $r_0 < 2Kr_1$, como queríamos ver. En consecuencia, se tiene que $B \subseteq B(x_1, 5K^3 r_1)$. Para ver esto, notar que si $x \in B$ se tiene que

$$d(x, x_1) \leq K^2(d(x, x_0) + d(x_0, y) + d(y, x_1)) < K^2(2r_0 + r_1),$$

por lo que $x \in B(x_1, 5K^3 r_1) = \widetilde{B}_1$, como afirmamos previamente. Luego, si A denota la constante de duplicación para μ y n es un número natural satisfaciendo $2^n \geq 5K^3$, tenemos que

$$\mu(\widetilde{B}_1) \leq A^n \mu(B_1).$$

Ahora, si tomamos $\lambda_0 = A^n \|\nu_2\|_{\Phi,\widetilde{B}_1}$, puesto que $B_1 \subseteq \widetilde{B}_1$ y $A^n \geq 1$, aplicando el Lema 8 tenemos que

$$\frac{1}{\mu(B_1)}\Phi\left(\frac{\nu_2(B_1)}{\lambda_0}\right) \leq \frac{\mu(\widetilde{B}_1)}{\mu(B_1)}\frac{1}{\mu(\widetilde{B}_1)}\frac{1}{A^n}\Phi\left(\frac{\nu_2(\widetilde{B}_1)}{\|\nu_2\|_{\Phi,\widetilde{B}_1}}\right) \leq \frac{1}{\mu(\widetilde{B}_1)}\Phi\left(\frac{\nu_2(\widetilde{B}_1)}{\|\nu_2\|_{\Phi,\widetilde{B}_1}}\right) \leq 1.$$

Entonces, como $x \in \widetilde{B}_1$,

$$\|\nu_2\|_{\Phi,B_1} \leq \lambda_0 = A^n \|\nu_2\|_{\Phi,\widetilde{B}_1} \leq A^n M_\Phi \nu(x).$$

Como B_1 es una bola arbitraria que contiene a y, se tiene que $M_\Phi \nu_2(y) \leq A^n M_\Phi \nu(x)$, e integrando respecto de y se obtiene

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B (M_\Phi \nu_2)^\gamma d\mu \leq A^n M_\Phi \nu(x)^\gamma,$$

lo que completa la prueba. ■

Del teorema anterior y la Proposición 35 se obtiene de forma directa el siguiente corolario.

Corolario 55. *Sean (X, d, μ) un espacio de tipo homogéneo, $1 < p < \infty$, Φ una función de Young y ν una medida de Borel tal que $M_\Phi \nu(x) < \infty$ para μ-casi todo $x \in X$. Entonces $(M_\Phi \nu)^\beta \in A_p(X, d, \mu)$ para todo $1 - p < \beta < 1$.*

Finalizamos la sección con una aplicación de estos últimos resultados a un caso particular.

Ejemplo 6. Retomemos el caso considerado en el Ejemplo 5 de la medida δ_0, la delta de Dirac concentrada en un punto $x_0 \in X$, en un espacio de tipo homogéneo

(X, d, μ), y sea $1 < p < \infty$. De lo obtenido en dicho ejemplo, el teorema anterior y el Lema 48, tenemos que

$$\left(\frac{1}{\Phi^{-}\left(\mu\left(\overline{B}\left(x, d(x_0, x)\right)\right)\right)}\right)^{\gamma} \in A_1(X, d, \mu),$$

para todo $0 \leq \gamma < 1$. Consecuentemente,

$$\left[\Phi^{-}\left(\mu\left(\overline{B}(x, d(x_0, x))\right)\right)\right]^{\beta} \in A_p(X, d, \mu),$$

para todo $-1 < \beta < p-1$. Si (X, d, μ) es α-Ahlfors, entonces

$$\mu\left(\overline{B}(x, d(x_0, x))\right) \simeq d(x_0, x)^{\alpha},$$

por lo que

$$\left[\Phi^{-}\left(d(x_0, x)^{\alpha}\right)\right]^{\beta} \in A_p(X, d, \mu),$$

para todo $-1 < \beta < p-1$.

Trabajo a futuro. En [1] se prueban los resultados contenidos en el Teorema 54 y en el Corolario 55 para el caso $\phi(t) = t$. Luego, se estudia el comportamiento de $M_{\Phi}\nu$ en dicho caso, cuando (X, d, μ) es un espacio α-Ahlfors y ν es una medida soportada en $F \subset X$, tal que (F, d, ν) es un espacio s-Ahlfors con $0 \leq s < \alpha$. En estas condiciones se obtiene que:

- $M_{\Phi}\nu(x) < \infty$ para μ-casi todo punto $x \in X$;
- $M_{\Phi}\nu(x) \simeq d(x, F)^{s-\alpha}$.

Por lo tanto, se concluye que $w(x) = d(x, F)^{\beta} \in A_p(X, d, \mu)$ para todo β satisfaciendo $-(\alpha - s) < \beta < (\alpha - s)(p-1)$, donde $1 < p < \infty$. Como trabajo a futuro nos proponemos analizar el comportamiento de $M_{\Phi}\nu$ para ciertas funciones Φ y medidas ν en contextos geométricos adecuados.

Conclusiones generales

En este trabajo definimos y estudiamos propiedades del operador maximal generalizado M_Φ, en espacios de tipo homogéneo (X, d, μ), actuando sobre medidas,

$$M_\Phi \nu(x) = \sup_{B \ni x} \|\nu\|_{\Phi,B}\,,$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas que contienen a x, siendo Φ una función de Young y

$$\|\nu\|_{\Phi,B} = \text{ínf}\left\{\lambda > 0 : \frac{\Phi\left(\frac{\nu(B)}{\lambda}\right)}{\mu(B)} \leq 1\right\} = \frac{\nu(B)}{\Phi^{-}(\mu(B))}.$$

Demostramos que estos promedios de Luxemburgo para medidas satisfacen propiedades análogas a las de los definidos sobre funciones y probamos resultados referidos a este operador maximal, que extienden los conocidos para el caso $\Phi(t) = t$. Más precisamente, en los Teoremas 50 y 51, obtuvimos el tipo débil $(1, 1)$, con y sin pesos respectivamente, para M_Φ:

- Existen constantes positivas c_0 y C tales que

  $$\mu(\{x \in X : M_\Phi \nu(x) > t\}) \leq C\,\Phi\left(c_0\,\frac{\nu(X)}{t}\right),$$

  para todo $t > 0$ y toda medida ν.
- Si w es un peso, existen constantes positivas C y c_0 tales que

  $$w(\{x \in X : M_\Phi \nu(x) > t\}) \leq C\Phi\left(c_0\,\frac{\nu(X)}{t}\right)\frac{1}{\nu(X)}\int_X \mathcal{M}w(x)\,d\nu(x),$$

  para todo $t > 0$ y toda medida ν tal que $\nu(X) < \infty$, siendo $\mathcal{M}$ la función maximal de Hardy-Littlewood definida sobre funciones.

Además, obtuvimos que la desigualdad del tipo débil para M_Φ es condición suficiente para que el peso w esté en la clase A_1, como se demuestra en el Teorema 52:

- Si existen constantes positivas C y c_0 tales que
$$w\left(\{x \in X : M_\Phi \nu(x) > t\}\right) \leq C\Phi\left(c_0\,\frac{\nu(X)}{t}\right)\frac{1}{\nu(X)}\int_X w(x)\,d\nu(x),$$
para todo $t > 0$ y para toda medida ν tal que $\nu(X) < \infty$, entonces $w \in A_1(X,d,\mu)$.

El hecho de que M_Φ sea de tipo débil $(1,1)$ nos permitió probar una desigualdad de tipo Kolmogorov para este operador, lo que está contenido en el Teorema 53:

- Para cada $0 < \alpha < 1$ existe una constante C_α tal que
$$\int_E |M_\Phi \nu(x)|^\alpha d\mu(x) \leq C_\alpha\, \mu(E)\, \|\nu\|^\alpha_{\Phi,E}\,,$$
para toda medida ν, siendo E cualquier conjunto medible que contenga al soporte de ν.

Usando la desigualdad de Kolmogorov demostramos el Teorema 54:

- Si ν es una medida de Borel tal que $M_\Phi\nu(x) < \infty$ para μ-casi todo $x \in X$, entonces $(M_\Phi\nu)^\gamma \in A_1(X,d,\mu)$, para $0 \leq \gamma < 1$.

Como consecuencia del resultado anterior y del teorema de factorización de Jones, probamos el Corolario 55:

- Sea ν una medida de Borel tal que $M_\Phi\nu(x) < \infty$ para μ-casi todo $x \in X$. Entonces $(M_\Phi\nu)^\beta \in A_p(X,d,\mu)$ para todo $1-p < \beta < 1$.

Trabajo a futuro. En [1] se prueban los resultados contenidos en el Teorema 54 y en el Corolario 55 para el caso $\phi(t) = t$. Luego, se estudia el comportamiento de $M_\Phi\nu$ en dicho caso, cuando (X,d,μ) es un espacio α-Ahlfors y ν es una medida soportada en $F \subset X$, tal que (F,d,ν) es un espacio s-Ahlfors con $0 \leq s < \alpha$. En estas condiciones se obtiene que:

- $M_\Phi\nu(x) < \infty$ para μ-casi todo punto $x \in X$;
- $M_\Phi\nu(x) \simeq d(x,F)^{s-\alpha}$.

Por lo tanto, se concluye que $w(x) = d(x,F)^\beta \in A_p(X,d,\mu)$ para todo β satisfaciendo $-(\alpha - s) < \beta < (\alpha - s)(p-1)$, donde $1 < p < \infty$. Como trabajo a futuro nos proponemos analizar el comportamiento de $M_\Phi\nu$ para ciertas funciones Φ y medidas ν en contextos geométricos adecuados.

Índice alfabético

Bibliografía

[1] H. Aimar, M. Carena, R. Durán, and M. Toschi. Powers of distances to lower dimensional sets as Muckenhoupt weights. *Acta Math. Hungar.*, 143(1):119–137, 2014.

[2] Ronald R. Coifman and Guido Weiss. *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogénes.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. Étude de certaines intégrales singulièeres.

[3] David V. Cruz-Uribe, José Maria Martell, and Carlos Pérez. *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia*, volume 215 of *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[4] Javier Duoandikoetxea. *Fourier analysis*, volume 29 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe.

[5] E. B. Fabes, M. V. Safonov, and Yu Yuan. Behavior near the boundary of positive solutions of second order parabolic equations. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(12):4947–4961, 1999.

[6] José García-Cuerva and José L. Rubio de Francia. *Weighted norm inequalities and related topics*, volume 116 of *North-Holland Mathematics Studies.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. Notas de Matemática (Mathematical Notes), 104.

[7] Peter W. Jones. Factorization of A_p weights. *Ann. of Math. (2)*, 111(3):511–530, 1980.

[8] Ana María Kanashiro. Acotaciones con pesos del operador maximal generalizado M_Φ en espacios de tipo homogéneo. Tesis de maestría, Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral, 2009.

[9] Roberto A. Macías and Carlos Segovia. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type. *Adv. in Math.*, 33(3):257–270, 1979.

[10] Benjamin Muckenhoupt. Weighted reverse weak type inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function. *Pacific J. Math.*, 117(2):371–377, 1985.