Universidad Nacional del Litoral.
Facultad de Humanidades y Ciencias
Maestría en Didácticas Específicas

Dificultades en la determinación de extremos relativos, concavidades e inflexiones en puntos de discontinuidad de funciones reales de variable real

Alumna: Prof. Ma. Angélica Zurbriggen

Director: Magister Mario Garelik

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi familia, a Jonatan, Fran y Feli, por el cariño brindado y aliento.

A mis compañeros de trabajo, en especial de la FICH, por su apoyo y colaboración con el trabajo, a mi director Mario, por la paciencia y dedicación.

A mis compañeros de estudio, en especial a Cin y Pachi por las horas dedicadas al estudio y tantas charlas compartidas.

A mis alumnos, en particular los que forman parte de esta investigación, que me estimulan a mejorar día a día y crecer en esta profesión.

A todos los que de alguna u otra forma colaboraron, muchas gracias.

Índice

1. ORIGEN DEL PROBLEMA

1.1 Aspectos contextuales

Desde hace varios años, se observa que los conocimientos matemáticos con que ingresan los estudiantes a la Universidad están lejos de ser los esperados.

Los alumnos presentan carencias respecto a conceptos y competencias matemáticas, debido, probablemente, a cuestiones sociales, educativas, políticas y económicas, como plantea Pierella (2011), quien analiza cómo la brecha entre dos culturas institucionales diferentes, escuela media y universidad redunda, también**,** en la falta de disposición o la dificultad de los estudiantes para adaptarse a las nuevas condiciones.

Esta realidad cobra relevancia al momento del ingreso de un alumno a la vida universitaria, influyendo en el modo de llevar adelante su nueva trayectoria estudiantil, dado que esta ausencia o precariedad de conocimientos y habilidades matemáticas previas, incide desfavorablemente en la futura adquisición de nuevos saberes, lo que, en muchas ocasiones, favorece el rezago, la repetición de cursados, los bajos índices de retención del primer año, los magros aprendizajes de las primeras asignaturas en términos de significación y hasta el abandono de la carrera. Así, la complejidad de la situación propone un merecido abordaje desde la educación matemática.

La Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral no es ajena a esta situación, que se refleja en los informes institucionales de los resultados obtenidos en las diversas instancias de evaluación de los estudiantes de las asignaturas de matemática del primer año de las carreras, en tanto dan cuenta que la cantidad de alumnos libres excede la suma de promocionados más regulares.

Lo expuesto anteriormente genera una lógica preocupación en los docentes a cargo de las materias del primer año, y motiva a pensar nuevas estrategias y prácticas de enseñanza que favorezcan la adquisición de buenos aprendizajes por parte de los estudiantes.

Tal es el caso de Cálculo I, asignatura que se dicta en el segundo cuatrimestre del primer año de las carreras de Ingeniería en Informática, Ingeniería en Recursos Hídricos e Ingeniería Ambiental y que, dada su ubicación primaria en sus currículos, es escenario de los problemas descriptos anteriormente.

1.2 Problemas de enseñanza y de aprendizaje

En la práctica docente cotidiana las dificultades planteadas en la sección anterior se manifiestan con considerable frecuencia.

De manera particular, en Cálculo I, lo expuesto se evidencia en el tema *Análisis completo de la gráfica de una función*. Este trabajo se focaliza en la determinación de la monotonicidad, extremos relativos, concavidades e inflexión en puntos de discontinuidad.

Cabe aclarar que en la mayoría de los libros de texto se realiza el tratamiento del tema considerando sólo funciones continuas, por lo que resulta de interés incorporar en las prácticas áulicas una mirada más global y general. Esto permite al estudiante un razonamiento crítico y reflexivo, ya que, en primer lugar, lo conduce a verificar las condiciones para utilizar las diversas herramientas del cálculo y, en segundo lugar, lo involucra en la toma de decisiones.

A partir de la observación y revisión de las producciones de los alumnos tanto en las evaluaciones escritas como en sus desempeños en las intervenciones en el aula, se evidencian problemas de aprendizaje que, enmarcados en lo expuesto precedentemente, se relacionan con conflictos de diversa índole, entre los cuales resultan de interés:

● *Confusión entre el concepto de un cierto objeto matemático y su método de cálculo a través de un determinado modelo*, esto es, no logran incorporar con significación el proceso de identificación o determinación de una característica al concepto previamente visto y, en ocasiones, el mecanismo de cálculo se propone como sustituto de aquél. Por ejemplo, ante la consigna *definir concavidad de una función en un intervalo*, es común encontrarse con que los alumnos recurren al criterio de la segunda derivada para la determinación de concavidades. Igual situación se da al momento de requerir, por ejemplo, la *definición de extremos relativos de una función*.

● *Dificultad para generalizar o abstraer ideas.* Probablemente originada en la decisión docente de facilitar la comprensión por parte del alumno y recurriendo a ejemplos de funciones elementales conocidas, se genera involuntariamente el problema en el mismo estudiante al momento de generalizar la situación o pensar otros ejemplos. Esta situación se refleja, por ejemplo, cuando se pide analizar si el criterio de la primera derivada es aplicable para cualquier función. En general, en clases, se trabaja el tema utilizando funciones continuas, corriendo el riesgo, que los alumnos no den cuenta de la necesidad de esta condición para utilizar dicho criterio.

● *Falencias en la interpretación de consignas e identificación de características funcionales*. En varias ocasiones, se puede ver cómo la utilización de los distintos criterios de las derivadas primera y segunda para la determinación de atributos funcionales como la monotonicidad, extremos, concavidades e inflexiones en el plano analítico, no ofrece mayores inconvenientes. Sin embargo, al momento de enfrentarse con la consigna en el registro gráfico, donde a partir de la gráfica de la derivada, se les propone concluir sobre las mencionadas características de la gráfica de la función, generalmente emergen diversos tipos de dificultades.

● *Conocimientos previos erróneamente adquiridos*. Esta falencia se manifiesta, por ejemplo, al momento de tratar con asíntotas horizontales y oblicuas, en donde sólo conciben como tales a rectas de aproximación indefinida *siempre y cuando no existan puntos de corte con la función*, dando así lugar a conflictos cuando deben incorporar a su esquema cognitivo otro tipo de comportamiento asintótico que implique intersecciones entre la curva y la asíntota, tan típicos de funciones trascendentes que involucran, por ejemplo, a trigonométricas.

A partir de las dificultades observadas y en la exploración de los posibles orígenes de las mismas, se pueden mencionar como posibles factores, entre otros, a:

* *Las espirales didácticas elegidas desde la enseñanza.*

Un punto de interés para este trabajo lo constituye el análisis de los conflictos relacionados con la elección de las espirales didácticas desarrolladas durante la clase.

En tal sentido, Jerome Bruner (1966), sostiene que resulta fundamental el papel que desempeña una buena elección de espiral didáctica que se recorra desde lo abstracto a lo particular, y viceversa, de manera que el alumno no pierda, por un lado, la posibilidad de alcanzar abstracción en su aprendizaje, pero, por otro, el acceso al caso particular, al ejemplo visualizador.

Esto está íntimamente ligado a los procesos de contextualización de los aprendizajes matemáticos, en el que muchas veces el procedimiento de contextualizar un concepto no está referido a ubicarlo en un plano de la realidad palpable, sino que radica en insertarlo en aspectos de la matemática misma que resulten familiares a los alumnos.

En este sentido, el contexto matemático y la situación en el que se manifiesta un determinado concepto puede influir en la interpretación del mismo. De hecho, investigadores como, Sadovsky (2006), Núñez y Font (1995), Díaz Barriga Arceo (2003) y Crawford (2004) observan que, aun cuando un problema se construye de manera isomórfica en diferentes ámbitos, se afecta indefectiblemente la manera en la que se concibe el mismo.

* *Los obstáculos para el aprendizaje.*

Bachelard (1938) y Brousseau (1989) introducen la noción de obstáculos y la idea de conocer siempre *en contra* de un conocimiento anterior, conjuntamente con una categorización de los mismos en psicogenéticos, epistemológicos y didácticos, siendo estos últimos de interés particular para la investigación, en tanto inciden de manera directa en el aprendizaje.

Como se mencionó anteriormente, en el análisis completo de funciones reales, la mayor parte de la bibliografía y práctica áulica ejemplifica, analiza y propone consignas utilizando funciones que cumplen con las condiciones de los criterios establecidos, sin análisis previo de ello. Esto conduce a que el estudiante al enfrentarse, con una función discontinua, encuentra eventualmente obstáculos ligados a estas carencias.

* *El ensamble "no fluido" de aprendizajes nuevos a los anteriores.*

Si bien se considera que en el nivel educativo medio y en el curso de ingreso a la universidad el estudiante ha aprendido a analizar ciertas funciones elementales desde su gráfica y, en algún caso particular, mediante la observación de algunas características especiales a partir de su expresión algebraica, es al inicio del trabajo con funciones más generales cuando se le torna necesario modificar su estructura cognitiva al interactuar con el nuevo conocimiento.

Artigue (1995) plantea que si bien los estudiantes, en ocasiones, resuelven en forma mecánica algunos cálculos y problemas estándar, al enfrentarse con desafíos nuevos, que implican la puesta en acción de saberes anteriores, enfrentan ciertas dificultades para alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento propios del ámbito matemático.

Según Ausubel (2002),

> … la esencia del aprendizaje significativo es que nuevas ideas expresadas de una manera simbólica (la tarea de aprendizaje) se relacionan de una manera no arbitraria y no literal con aquéllas que ya sabe el estudiante (su estructura cognitiva en relación con un campo particular) y que el producto de esta interacción activa e integradora es la aparición de un nuevo significado que refleja la naturaleza sustancial y denotativa de este producto interactivo. (p. 122)

* *Problemas de lectocomprensión.*

La problemática de la lectocomprensión en la universidad es reconocida por la comunidad académica como una realidad evidente y preocupante que incide de manera directa en la adquisición de aprendizajes a lo largo del currículum.

Desde una perspectiva general, en los últimos informes de las Pruebas Aprender en Argentina, los datos no son alentadores en este sentido, en tanto dan cuenta que, de cada 100 chicos, 60 dejan la escuela, y de los 40 restantes, 20 tienen problemas para comprender textos y hacer cálculos.

Esta situación, claramente, tiene repercusión en el ámbito de nuestras facultades. Al respecto, Guillermo Jaim Etcheverry[1](citado en el diario *El día*), sostiene que: "… estas falencias que fueron detectadas en los alumnos argentinos no sólo se notan cuando emprenden una carrera en la universidad, sino que además se pueden ver en las decisiones que se toman en la vida cotidiana" (2017, p.1).

Vaccaro (2012) plantea que "…cada vez resulta más dificultoso para los alumnos interpretar correctamente las consignas dadas por el docente" (p.3).

A su vez, Gordillo Alfonso y Restrepo Becerra (2012) sostienen que gran parte de los estudiantes presentan dificultades para comprender los registros de representación en los que se presentan los contenidos matemáticos, específicamente, los registros lingüísticos y simbólicos de los textos de esta disciplina.

De manera específica, los docentes de la asignatura Cálculo I, quienes tienen a cargo la elaboración de los textos en las distintas instancias de evaluación, reconocen que la interpretación por parte de los alumnos plantea dificultades importantes, identificándose problemas en tres etapas bien definidas y relacionadas entre sí:

1. Interpretación de consignas,
2. Implementación de las tareas de resolución y
3. Elaboración del informe correspondiente.

Una posible razón de esta situación se vincula con el formato de los textos. Autores como Montino, Petrucci, Ure, Aleman, y Pérez (2011) señalan que el formato tradicional de los textos instructivos para la implementación de trabajos prácticos en el nivel universitario, a los que un alumno ingresante no está acostumbrado a enfrentarse, no favorecen aprendizajes sólidos, mientras que el reconocimiento del objetivo desde el comienzo de la práctica permite ver, por un lado, el dispositivo como un medio y no como un fin en sí mismo, y, por otro, su descripción más ligada a representaciones conceptuales que meramente visuales o gestuales.

Cabe señalar que este trabajo no contempla un análisis desde la lingüística de este problema, el que sólo se menciona en términos de la confusión por parte de los estudiantes de los conceptos y estrategias propios de la disciplina, tal como se refiere en la sección (1.4).

* *La incidencia de los registros de representación.*

Como una cuestión transversal, inherente tanto a la enseñanza como al aprendizaje del tema, merecen mencionarse las contingencias vinculadas a los registros semióticos de representación.

[1] Médico y científico argentino, rector de la Universidad de Buenos Aires en el período 2002 - 2006

Duval (1999) hace referencia a las dificultades que evidencian los alumnos para relacionar los diferentes registros semióticos, lo cual resulta esencial en la búsqueda de una comprensión cabal de la nueva noción abordada. Al respecto sostiene que "… la conversión de registros de representación constituye una variable que se revela fundamental en didáctica porque facilita considerablemente el aprendizaje ya que ofrece distintos procedimientos de interpretación" (p.59).

Desde otra perspectiva, Douady (1984, 1992) expone la importancia de establecer un *juego de marcos*, que permita un cambio de enfoques con el objeto alcanzando, un nuevo ingreso a la solución del problema que favorezca la resolución y apropiación de conceptos.

En tal sentido, Artigue (1998) establece como una de las problemáticas más frecuentes en los estudiantes las relacionadas tanto con los procesos de traducción entre los diferentes registros semióticos que permiten representar y trabajar con funciones, como con el empleo simultáneo de informaciones que vinculan nociones distintas dentro de un mismo registro.

* *Ritmo intenso de dictado y cronogramas ajustados.*

El cursado de la asignatura se ve afectado por un sobredimensionamiento de la cantidad de temas del currículum a dictarse en un cronograma ajustado en los tiempos. Los temas de la materia se desarrollan en torno a los ejes: Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Sucesiones y Series Numéricas y de Potencias. Para el tratamiento de los mismos se dispone de 75 horas cuatrimestrales, distribuidas en 15 semanas, con clases de dos horas semanales en las que se presentan los conceptos teóricos y clases de tres horas en las que se resuelven ejercicios y problemas de aplicación.

El cronograma establecido carece de la holgura necesaria para desarrollar cada tema con la profundidad deseada. Debido a esto, muchos estudiantes se sienten desbordados por la cantidad de contenidos presentados en poco tiempo, lo que implica un impedimento para lograr asimilarlos adecuadamente: la enseñanza *intensiva* parece conspirar en contra de los buenos aprendizajes, en tanto, se ven limitadas sus posibilidades para reconocer y corregir sus dificultades en la disciplina.

Por último, puede considerarse la influencia de la presión de sentirse evaluado, como una dificultad interviniente al momento de dar cuenta de sus saberes. Frecuentemente, los alumnos centran su atención en la evaluación y la presión auto exigida por esa responsabilidad que sobredimensiona el problema, convirtiéndolo en un verdadero obstáculo para el proceso de aprendizaje, hasta el extremo de erigirse prácticamente en su única preocupación. Sin embargo, este aspecto escapa a los alcances de este trabajo y no se profundizará en ello.

1.3 Preguntas de investigación

En función de lo expuesto y considerando que este trabajo se enfoca en una materia de primer año de carreras de ingeniería de la facultad, pueden formularse ciertos puntos de análisis para su abordaje.

Los sujetos de estudio son estudiantes que inician la vida universitaria, lo que genera inquietudes que se relacionan, por un lado, con la capacidad para asimilar y madurar conceptos de naturaleza más compleja a los que se enfrentaban hasta el momento en el nivel educativo secundario y, por otro, las competencias cognitivas que les permitan comprender cabalmente aspectos fundamentales de la disciplina como la diferencia entre objeto y su representación, concepto y modelo de cálculo, entre otros.

Lo anterior da lugar a las preguntas de la investigación, que inician con:

- ¿Presentan los estudiantes antes del desarrollo del tema los conocimientos previos (que luego se recuperan) ligados al estudio de funciones?
- ¿Reconocen conceptos de monotonía, extremos, concavidad e inflexiones de una función con la mera observación de su gráfica?
- ¿Qué tipo de actividades o estrategias podrían implementarse para contribuir a mejorar las falencias relacionadas con la confusión que evidencian los alumnos al momento de distinguir entre un concepto de una determinada característica funcional y su herramienta o modelo de cálculo?

En relación a lo anterior y abocados en la implicancia del uso y conversión de los diferentes registros de representación:

- El análisis desde diferentes registros de representación,
    - ¿Favorece la comprensión de las condiciones requeridas para utilizar conceptos y/o criterios? De manera específica, ¿permite al estudiante entender y relacionar el uso de herramientas del cálculo en funciones discontinuas definidas por tramos?
    - ¿Con qué registro se desempeña con mayor familiaridad?
    - ¿En qué medida ayuda al alumno a distinguir entre concepto y herramienta de cálculo?
    - ¿Los estudiantes logran realizar el *tratamiento*, *conversión*, interpretación y relación de un concepto en diferentes registros de representación?

Por último, y con el objeto de contribuir a la mejora del proceso de enseñanza de *Análisis de funciones* se plantea:

- ¿Qué acciones pueden llevarse a cabo desde la práctica docente para favorecer la comprensión del tema y el alcance de aprendizajes satisfactorios en términos de significación?

1.4 Objetivos de investigación

Las preguntas de investigación delimitan los objetivos que se trazan en el presente trabajo. En tal sentido, la investigación aspira a:

- Determinar el alcance de aprendizajes significativos y comprensión de los conceptos involucrados.
- Identificar y clasificar los errores que cometen los estudiantes, tanto en sus producciones escritas como en sus intervenciones informales en el aula, en el análisis de funciones.
- Detectar los eventuales problemas de interpretación (en lo disciplinar) de las consignas por parte de los alumnos referidas al tema. Cabe aclarar que, tal como se señaló en (1.2) no es objeto de análisis en este trabajo las posibles fallas en la interpretación de consignas atribuibles a la lingüística.
- Identificar en las producciones de los estudiantes indicadores de la correspondencia que se evidencia en situaciones propias del análisis de funciones reales en el tránsito de un registro de representación semiótica a otro.
- Reflexionar en torno a las estrategias didácticas y pedagógicas utilizadas, para en un futuro diseñar otras, que empleen diferentes registros de representación tendientes a favorecer el alcance de aprendizajes satisfactorios en términos de significación.

1.5 Antecedentes sobre el tema

Ante la necesidad de indagar y profundizar acerca de los posibles problemas de enseñanza y de aprendizaje de los estudiantes, a partir de un estudio exploratorio en términos de las problemáticas planteadas y que tiene por objeto la consideración de elementos teóricos relevantes para la investigación, se pueden mencionar diversas investigaciones de interés.

En primer término, Ramos y Font (2006) presentan algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática para reflexionar sobre dos usos del término "contexto". Explican que uno de ellos consiste en tener en cuenta el contexto como un ejemplo particular de un objeto matemático, mientras que el otro refiere a la necesidad permanente de consideración del entorno físico, social y cultural. En esta investigación se focaliza el análisis en el primero de ellos.

Núñez y Font (1995) exponen dos alternativas para atender a las dificultades de los estudiantes para la comprensión de conceptos matemáticos: la primera, predominante en las matemáticas modernas, consiste en la presentación descontextualizada de los conceptos, y la segunda, propone trabajar los conceptos en diferentes contextos concretos a fin de, por una parte, conseguir su significación y funcionalidad y, por otra, facilitar los procesos de abstracción y generalización. En esta última, enfatizan en presentar los conceptos en contextos concretos que permitan a los alumnos darles sentido. Consideran la idea de representación cognitiva de Bruner, los principios para el diseño de secuencias propuesto por Dienes y el desarrollo de las capacidades intelectuales de los alumnos, partiendo de la acción para luego alcanzar la abstracción.

En este sentido, Sadovsky (2006) propone a la modelización como actividad vertebradora de la enseñanza matemática, y recupera como condiciones para su desarrollo el análisis del papel de las representaciones en el trabajo matemático, la incidencia del posicionamiento y creencias del alumno frente a la disciplina como ejes del sentido de los problemas a enseñar.

En relación a lo anterior, Díaz Barriga Arceo (2003) describe los principios del paradigma de la cognición situada vinculado al enfoque sociocultural vigotskiano que afirma que el conocimiento es situado, es decir, forma parte y es producto de la actividad y de la cultura. Propone un conjunto de estrategias basadas en una enseñanza situada y experiencial que favorezcan la incorporación de conocimientos con significación.

En el estudio de Crawford (2004) se observa que los profesores de matemática que logran involucrar activamente a los estudiantes en el proceso de aprendizaje, desarrollan prioritariamente en los alumnos el entendimiento de conceptos fundamentales, por sobre la memorización de hechos, definiciones y métodos, utilizando para ello estrategias de enseñanza contextual (relación, experimentación, aplicación, cooperación y transferencia), de las cuales se describe y se brinda ejemplos de cada una de ellas.

El artículo de Guilar (2009) profundiza en las ideas de Bruner y describe las nociones de *currículo en espiral*, *andamiaje*, y *reforma educativa* o *enseñanza recíproca*.

En lo concerniente a las dificultades que ocasiona la carencia de significación en los aprendizajes, resultan de interés para esta investigación trabajos como los de Cantoni (2007), en donde se desarrolla una conceptualización general de la teoría de aprendizaje significativo desarrollada por Ausubel (2002), Díaz Barriga Arceo y Hernández Rojas (2002), Díaz Barriga Arceo (2003), en el que se da cuenta de un conjunto de elementos conceptuales y estrategias para el aula que, centrados en el marco constructivista de los procesos de enseñanza y aprendizaje, consideran las interrelaciones entre los distintos actores y los elementos centrales para alcanzar significación en los aprendizajes e involucran para tal fin actividades e instrumentos de reflexión.

En el marco de la significación de los aprendizajes, los conocimientos previos desempeñan, claramente, un importante rol. Precisamente, en los procesos de enseñanza y aprendizaje cobra relevancia el concepto de *obstáculo*.

En este sentido, Páez Murillo (s.f.) sostiene que estos conocimientos anteriores funcionan localmente y pueden, dependiendo de la situación, resolver un problema o bien promover el error, y propone ejemplos concretos de cada una de estas situaciones.

Sastre, Cañibano y D´Andrea (2014) enfatizan la importancia de cómo el modelo didáctico al cual adhiere el docente incide en la elección de las estrategias didácticas que utilizará. En particular, focalizan en los conceptos y concepciones latentes acerca de obstáculo epistemológico y error.

El trabajo de Barrantes (2006) propone que los obstáculos no necesariamente surgen en forma explícita ni son difíciles de franquear y propone como estrategia fundamental para ello, identificar el dominio de validez del obstáculo y aquél en el cual no es válido. El autor sostiene que la enseñanza que considera el estudio del "… desarrollo de los conocimientos en términos de obstáculos difiere sensiblemente de la concepción clásica, sobre todo en lo que concierne al rol y a la organización de situaciones problema. Aquí el problema va a jugar un papel fundamental" (p.4). En este sentido establece la importancia de proponer *situaciones problema* en las que el estudiante afronte una serie de cambios relativos a una misma cuestión que es un obstáculo para él y sobre la que se va a apoyar para apropiarse o construir un conocimiento nuevo.

En particular, ligado a dificultades propias del Cálculo, resultan de interés los aportes de Artigue (1995, 1998), quien realiza un recorrido de investigaciones didácticas que reflejan las dificultades que los estudiantes presentan al introducirse en el campo conceptual del Análisis Matemático, con el consecuente desánimo e insatisfacción que tal situación genera en ellos.

En esta misma línea, Hitt (2003) presenta ciertos problemas de aprendizaje en temas propios del Cálculo, inherentes tanto a profesores de matemática como a estudiantes. El autor plantea que los alumnos que cursan por primera vez una materia que involucra temas referidos a esta área de la matemática han tenido, a lo más, un acercamiento intuitivo al concepto de infinito -de aparición frecuente en el estudio de funciones-, sin haber contado, con anterioridad, con el debido espacio para la formalización y reflexión sobre aspectos propios del mismo concepto, lo que dificulta en cierta medida su comprensión en el ámbito matemático. Propone, además, una enseñanza no restringida a mecanicismos y cuestiones puramente algebraicas, sino que, en cambio, brinde una mirada más profunda sobre lo conceptual, en interacción permanente con la práctica, que favorezca el alcance de buenos aprendizajes.

Investigaciones como la de Yam (2009) evidencia que muchos estudiantes presentan diversos obstáculos en la adquisición de un nuevo conocimiento. Se centra en particular en las funciones definidas por tramos como foco de obstáculos que inciden en la posterior adquisición de conceptos ligados al cálculo como los de límite, continuidad y derivada.

Profundizando en lo anterior, Hitt (1998) plantea la importancia de la visualización en matemática, que requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro. Sostiene que la comprensión del rol que desempeñan tales registros resulta de incuestionable ayuda para entender el modo en que los estudiantes construyen conceptos matemáticos. En este sentido, la visualización matemática tiene que ver con una visión global, integradora, holística, que articule, libre de contradicciones, representaciones de varios sistemas.

Siempre con relación al papel que juegan las diferentes representaciones semióticas, Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen y Gorrochategui (2012) presentan el rol de los distintos registros semióticos de representación en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, destacándose, además, la importancia del dominio de los mismos, el uso de más de un registro de representación semiótica y la relevancia de la creación y desarrollo de sistemas nuevos como fundamentales para afianzar conocimientos.

Desde esta perspectiva los trabajos de Ospina García (2012), Guzmán (1998), Camargo (2013), Diaz Lozano, Haye, Montenegro y Córdoba (2013), Prietto y Vicente (2006), Zúñiga López (2009), González Chica (2011), presentan experiencias realizadas con estudiantes, posicionados desde la Teoría Semiótica de las Representaciones de Raymond Duval. En particular, Saa Vernaza y Trochetz Tapia (2013), Ordoñez Montañez y Diaz Villegas (2018), exponen situaciones en las que se aborda el concepto de función definida por tramos, utilizando diferentes registros de representación semiótica: lenguaje natural, tabular, algebraico y gráfico.

Otro aspecto a considerar, lo expone Deriard (2018) en la reconstrucción de los recorridos históricos que condujeron a la escritura de la tesis doctoral de Regine Douady, donde se manifiestan sus ideas acerca de la influencia del juego de marcos en la dialéctica Objeto-Instrumento que favorece un aprendizaje con sentido de matemática.

En la investigación de Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006) se analizan y comparan distintos aspectos de las teorías de situaciones didácticas, antropológica de lo didáctico y de los campos conceptuales. En particular, resultan de interés los aportes que refieren a la dialéctica objeto-instrumento de Douady y a la teoría de representaciones semióticas de Duval, quienes expresan los puntos favorables y limitaciones subyacentes referidas a las representaciones de los conceptos y su incidencia en el proceso de aprendizaje por parte del alumno.

Por otra parte, si bien se ha mencionado anteriormente (Sección 1.2) que este trabajo no se centrará en problemas relacionados con la lingüística, sí se consideran brevemente algunos aspectos ligados a la interpretación de textos y consignas, ya que resultan de importancia para el alcance de la comprensión de los conceptos involucrados.

Con respecto a ello, Vaccaro (2012), en una investigación con estudiantes del nivel primario, aborda las dificultades en la comprensión lectora tanto en la pedagogía como en la lingüística, implicando investigaciones más generales acerca de cómo comprende el sujeto y un análisis de las transposiciones didácticas necesarias en el aula para optimizar el abordaje de la lecto-escritura.

Gordillo Alfonso y Restrepo Becerra (2012) indagan sobre los niveles de comprensión en la lectura y las concepciones que tienen estudiantes universitarios sobre las ecuaciones algebraicas. En estos términos consideran a los registros semióticos de representación y las concepciones previas en matemáticas como elementos asociados e influyentes en el entendimiento de lo que se lee.

Por último, resulta de interés los aportes de Solé (1996), quien sostiene que la comprensión lectora resulta de una interacción continua entre el texto y el lector, a partir de sus conocimientos previos, los objetivos propuestos y sus capacidades de razonamiento le otorga sentido y elabora una comprensión y entendimiento coherente del contenido. A su vez, enfatiza que la lectura se relaciona con el contexto social y resalta la importancia de considerar los propósitos, para leer focalizándose en lo que se desea obtener.

1.6 Justificación del estudio

De lo expuesto anteriormente se aprecian condiciones poco alentadoras para lograr buenos aprendizajes por parte de los estudiantes en los contenidos de Cálculo I, en particular en *Análisis de extremos locales, puntos de inflexión, monotonía y concavidad de funciones definidas por tramos discontinuas.*

En este sentido, se abordan las posibles dificultades ligadas a la carencia de significación de aprendizajes, en términos de Ausubel, al momento de incorporar nuevos conocimientos a otros adquiridos con anterioridad.

En virtud de ello, este estudio pretende realizar un análisis de factores de distinta índole que pueden incidir en la problemática.

Así, desde la teoría de las representaciones semióticas desarrollada por el profesor Raymond Duval (1999) se advierten los posibles aportes de la creación, tratamiento y conversión de diferentes registros de representación en el aprendizaje de los conceptos matemáticos involucrados.

De este modo, se espera hacer valer las potencialidades de un proceso de enseñanza que, apoyado en la alternancia de diferentes representaciones, contribuya a la obtención de aprendizajes dotados de significación, dada la importancia que tiene el tema objeto del presente trabajo en el decurso de las carreras de ingeniería, en tanto surge, de manera recurrente, en asignaturas posteriores.

Por último, este estudio aspira poder contribuir a una disminución del desgranamiento de matrícula en el primer año, dado que Cálculo I es una de las asignaturas del segundo cuatrimestre, antecorrelativa de la mayoría de las materias que conforman el currículum de carreras de la facultad, por lo que un mal desempeño académico en ella causa demoras importantes, o hasta el abandono mismo de la carrera.

Por lo expuesto, se espera que la investigación sirva de propuesta válida y disparador para nuevas investigaciones y, a la vez, constituya una herramienta para los docentes de matemática, que contribuya a enriquecer las prácticas de enseñanza.

2. MARCO TEÓRICO

La presente investigación procura adoptar ciertos elementos teóricos que permitan una aproximación a dilucidar el modo en que el alumno construye el conocimiento.

En primer lugar, y con el objeto de lograr un esquema de vínculos entre los conceptos, resulta pertinente considerar los aportes de Jerome Bruner (1966), quien propone que el docente debe motivar a los estudiantes para que sean ellos mismos los que descubran relaciones entre conceptos y construyan conocimientos. Además, la información o contenidos de aprendizaje se deben presentar de una forma adecuada a la estructura cognitiva (el modo de representación) del aprendiz y, por último, asegura que el currículo, debe organizarse de forma espiral, es decir, trabajar los mismos contenidos, ideas o conceptos, cada vez con mayor profundidad. El estudiante modificará, entonces, sus representaciones mentales a medida que desarrolla su capacidad de conceptualizar y representar el mundo.

En función de lo expuesto, resulta importante recuperar las ideas de obstáculos expuestas por Gastón Bachelard (1938) y Guy Brousseau (1989).

Bachelard (1938) introduce la noción de obstáculo sosteniendo que se conoce en contra de un conocimiento previamente adquirido. El conocimiento científico avanza a través de continuas rupturas epistemológicas. Es decir, de graduales rectificaciones de errores precedentes superando los esquemas teóricos convencionalmente aceptados.

En este sentido, Sastre et al. (2014) afirman que en el proceso de adquisición de nuevos conocimientos se producen quiebres con las concepciones previas, las cuales muchas veces son falsas o incompletas. Sin embargo, estos conocimientos anteriores que en algún momento funcionaban, no desaparecen, sino que se integran al nuevo conocimiento. Así, los errores que persisten evidencian la inadaptación del conocimiento, provocado por la presencia de obstáculos. Los errores son expresiones observables del desempeño de los individuos, y pueden ser útiles para determinar el tipo de comprensión que han alcanzado. Las respuestas incorrectas contribuyen a la confección de un diagnóstico para establecer las formas específicas de uso de un conocimiento.

Brousseau (1989) plantea que las dificultades que no se logran superar, se convierten en obstáculos dado que impiden la construcción del nuevo conocimiento. Establece una clasificación de los mismos en:

- *Ontogenéticos,* relacionados con las limitaciones de las capacidades cognitivas del sujeto.
- *Epistemológicos*, relacionados intrínsecamente con el concepto y su desarrollo histórico. y

● *Didácticos*, adquiridos y detectados en la práctica pedagógica, resultan de las elecciones didácticas hechas para establecer la situación de enseñanza.

Teniendo en cuenta, por una parte, el papel preponderante que el error y los aprendizajes previos juegan en la adquisición de conocimientos y, por otra, la pertinencia para esta investigación, sólo se abordará la última categoría.

En particular, es de interés considerar lo planteado por Yam (2009), quien expone que el planteo y tratamiento que se le otorga en general a la noción de función definida por tramos se reduce a pensar en una función cuyo dominio aparece "fraccionado" y sólo se presentan algunos casos particulares y especiales. Así, si el aprendizaje de esta noción se da de manera débil o inadecuada, se convierte, probablemente, en un obstáculo para la adquisición de nuevos conocimientos, en especial, los ligados con límite, continuidad, derivada, extremos, monotonicidad, concavidad, puntos de inflexión, entre otros, que son el foco de interés de este trabajo.

Por otra parte, Sastre et al. (2014) plantean que en general los docentes revisan las producciones de sus alumnos de acuerdo a lo que ellos esperan que respondan o creen que deberían saber, es decir, sólo se evalúa lo correcto y lo incorrecto, y no se analiza el origen ni las posibles causas de sus respuestas.

> Una enseñanza que tenga como finalidad lograr que los alumnos construyan sus aprendizajes, debe basarse en la comprensión de los razonamientos de los estudiantes y de las causas de sus dificultades [...] Desde esta perspectiva se puede afirmar que enseñar consiste básicamente en ayudar a los alumnos a superar sus errores. (p.230)

Así, se considera importante que para adquirir un nuevo concepto es necesario realizar diversas actividades, en las que posiblemente surjan errores. Estos errores aparecen al utilizar alguna estrategia que para el alumno tiene cierta significación, por lo que corregir sin justificar adecuadamente, será un acto carente de significado para él. Si se espera lograr un aprendizaje significativo "... es necesario confrontar al estudiante con la insuficiencia de sus argumentos y las contradicciones en que incurre, es decir instarlo a someter a crítica el conocimiento erróneo y contemplar qué elementos faltan o deben modificarse" (Sastre et al., 2014, p. 231).

En este sentido, Ausubel, Novak y Hanesian (1986) abordan acerca de la importancia de las concepciones previas, debido a su carácter estable y resistente al cambio.

Por lo tanto, resulta necesario rescatar algunos de los lineamientos de la Teoría del Aprendizaje Significativo de David Ausubel (2002), quien sostiene que el aprendizaje de nuevos conceptos depende de la estructura cognitiva que posee el sujeto, y el modo que se relaciona con la nueva información. Plantea que una condición vital para que el aprendizaje sea significativo es que pueda relacionarse, de modo no arbitrario y sustancial, con lo que el alumno ya sabe. Esto implica que se construye sobre la base del saber que se ha constituido hasta el momento y de las estructuras mentales alcanzadas. De esta manera, se logra trascender el aprendizaje memorístico para alcanzar otro, rico en significado[2] y sentido.

En este sentido, se pretende que el *significado potencial o lógico*, es decir el significado inherente que posee el material simbólico, se convierta en *significado real o psicológico*, al transformarse en un contenido nuevo, diferenciado e idiosincrático dentro un individuo en particular (Díaz Barriga Arceo y Hernández Rojas, 2002).

Por tanto, para alcanzar un aprendizaje significativo es necesario que el estudiante presente una actitud de aprendizaje significativa, es decir, la predisposición de relacionar el nuevo material con su estructura de conocimiento en forma no arbitraria y no literal. A su vez, desde el docente, es esencial conocer al sujeto que aprende, indagar en su estructura cognitiva, e identificar los elementos internos que le permitirán integrar y elaborar *lo nuevo* para pasar a un nivel superior.

Desde esta perspectiva, se considera que la búsqueda constante de aprendizajes con éxito en términos de significación lleva a considerar como fundamental un proceso de enseñanza de la matemática basada en la *contextualización.*

En esta investigación, la contextualización de un determinado tema remite a relacionar al mismo con aspectos de la matemática que resulten familiares al estudiante, y acordes a su estructura cognitiva, de modo que le permita vincular ese nuevo saber con otros anteriormente adquiridos, para integrarlos y generar nuevos conocimientos.

En esta línea, Godino, Batanero y Font (2003) consideran que la *práctica matemática* involucra acciones que permiten explorar, formular conjeturas y justificar resultados sobre distintos contenidos matemáticos y diferentes niveles de complejidad. De este modo, los estudiantes podrán apreciar que las matemáticas tienen sentido, pero alcanzar este tipo de razonamiento es un hábito, y como todos los hábitos se debe desarrollar mediante un uso consistente en diversos contextos, ya sean extra o intramatemáticos.

Otro foco de interés para este trabajo lo constituyen, las imágenes mentales, también

[2] Se entiende por significado al producto del aprendizaje significativo, es decir, el contenido diferenciado que evoca un símbolo o conjunto de estos luego de ser aprendido.

denominadas representaciones mentales o representaciones internas, que han sido estudiadas desde la psicología cognitiva por numerosos autores, y dan cuenta de la importancia y complejidad de las mismas.

Al respecto, el psicólogo francés Raymond Duval (2006) plantea que como los objetos matemáticos no son objetos reales, resulta necesario recurrir a sus diversas representaciones, fracciones, gráficos, tabulaciones, etc., como modo de acceso a los mismos.

Duval (1999) sostiene que una representación es la forma bajo la cual puede describirse una información y tomarse en cuenta en un sistema de transformación y plantea que "…todo acceso a los objetos matemáticos (números, funciones…) pasa necesariamente por las representaciones semióticas. Sin embargo, no se puede confundir nunca un objeto matemático y su representación, el objeto puede tener otras tantas representaciones diferentes de las que uno ve" (p. 52).

Respecto de las diferencias entre las representaciones mentales y las representaciones semióticas. Ospina (2012) expresa que:

> Las representaciones mentales están conformadas por todo el conjunto de concepciones o imágenes mentales que un individuo tiene acerca de un objeto y las representaciones semióticas son las producciones constituidas por el empleo de signos, no son más que el medio por el cual disponen los individuos para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles y accesibles a otros. (p. 34)

Según Duval, la actividad ligada a la producción de una representación la denomina *semiosis*, mientras que a la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos la denota *noesis*. A su vez, plantea que cada registro de representación semiótica, presentan tres actividades cognitivas, a saber:

- *Formación*: "son las representaciones de un registro semiótico particular, la cual constituye un conjunto de marcas perceptibles e identificables que permiten expresar o evocar un objeto como una representación de alguna cosa en un sistema determinado" (Ospina, 2012, p. 35).
- *Tratamiento:* refiere a las transformaciones de la representación dentro del mismo registro donde se ha formado según las reglas propias del sistema, de manera que a partir de éstas se logren otras representaciones que generen un avance de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales.
- *Conversión*: "es la transformación de una representación dada en un registro, en

> otra representación en un registro diferente, que conserva parte del significado de la representación inicial, pero al mismo tiempo da otras significaciones al objeto representado” (Ospina, 2012, p. 36).

Existen diversos registros de representación semiótica, a continuación, se definen los que se utilizan en este estudio:

- **Registro de representación gráfico:** se entiende por todo lo que refiere al comportamiento de la gráfica, lecturas de representaciones gráficas. En el marco de esta investigación, este registro se corresponde con el reconocimiento de extremos locales, monotonicidad, puntos de inflexión y concavidad de una función por tramos discontinua en un punto, dada por su gráfica.
- **Registro de representación analítico:** se vincula con la formulación y generalización simbólica de expresiones. En particular, en este trabajo, el registro remite a la expresión de una función por tramos discontinua en un punto representada a través de una *expresión matemática, algebraica o fórmula* y a la determinación analítica de los atributos funcionales antes mencionados.

Lo expuesto hace pensar en la posibilidad de que el aprendizaje de un concepto matemático a partir de un registro pueda obstaculizar la transferencia del mismo a otra de sus representaciones. En este sentido, una adecuada elección de un determinado tipo de representación puede resultar clave para facilitar la comprensión de un objeto matemático.

Desde esta perspectiva, Duval sostiene que el tratamiento de un concepto en un registro y la constante conversión de la representación a otra en un nuevo registro resultan fundamentales para una aprehensión conceptual de los objetos (matemáticos) y concluye que, en una fase de aprendizaje, la conversión juega un papel esencial en la conceptualización.

Resulta así necesaria una coordinación interna entre los diversos sistemas de representación semióticos posibles por los que se pueda optar y utilizar (Duval, 2000). De este modo, la comprensión de un concepto surge de la habilidad de alcanzar el desarrollo de esta coordinación. En este sentido, resulta de gran importancia lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar diversas maneras de representar los contenidos matemáticos.

Al respecto, Camargo (2013) refiere a las categorías de las tareas que deberían ser propuestas a los estudiantes por parte del docente, a saber:

> las de “*aprehensión de las representaciones semióticas*”, que apuntan a la formación de registros; las de “*tratamientos propios de una categoría de registro*”, en las que el estudiante o bien debe aplicar tratamientos cuasi-instantáneos, como operaciones

> realizadas mecánicamente o en las que el tratamiento es intencional, pero siempre trabajando en un mismo registro de representación; y las de "*producción de representaciones complejas*" que implican necesariamente conversión entre registros. (p. 1843)

Por último, Godino, Batanero y Font (2003) consideran que al conocimiento matemático se le confiere un carácter distintivo dado su enorme poder como instrumento de comunicación, conciso y sin ambigüedades, con una amplia utilización de diferentes sistemas de notación simbólica (números, letras, tablas, gráficos, etc.) que permiten representar de forma precisa informaciones de naturaleza muy diversa.

Desde otra perspectiva, se puede vincular lo planteado por Duval, con las ideas de Douady (1984). Esta autora propone en primer lugar distinguir, en todo concepto matemático, el *objeto* del *instrumento*. Según Douady (citado por Godino et al., 2006) el objeto se refiere a una construcción cultural, impersonal e intemporal, que se visualiza en definiciones y propiedades características; en cambio, el instrumento, es lo que permite a alguien hacer uso del concepto para resolver una actividad.

En segundo lugar, sugiere la enseñanza de la matemática a partir de un *juego de marcos o encuadres*. Un *marco* está formado por objetos de un campo de la matemática, por las relaciones entre ellos, como así también, por sus formulaciones eventualmente diferentes y por las imágenes mentales asociadas a esos objetos y a esas relaciones (Douady, 1992). Así, mediante un juego de marcos:

> (…) se permite un cambio de enfoques con el objeto logrando que este nuevo ingreso a la solución del problema permita el uso de instrumentos no utilizables en un encuadre anterior. Los cambios de encuadres pueden ser espontáneos por iniciativas de los alumnos o previstos por el docente en la planificación de la clase. Un juego de encuadres, entonces, consiste en trabajar una misma cuestión matemática en dos dominios diversos, permitiendo pasar de un encuadre a otro, facilitando así la resolución del problema, volviendo al encuadre original luego de ser resuelto. (Deriard, 2018, p. 1099)

Sin embargo, tal grado de especificidad y claridad en el uso de los simbolismos propios de la disciplina, no obstan para el surgimiento de dificultades relacionadas con la lectocomprensión de textos, en particular, son evidentes los problemas de los alumnos para comprender las consignas que forman parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular, al trabajar determinadas características en funciones discontinuas definidas por tramos.

Bazerman et al. (2005) sostiene que cada disciplina genera nuevas formas de ver el mundo, de pensar sus problemáticas y de actuar en él. Esto naturalmente se debe a que cada una de ellas atiende a diferentes problemas, a disímiles evidencias y se basa en distintas teorías. El lenguaje que hace posible la comunicación de las ideas que se generan dentro de cada campo se conforma en función de ello, de allí que no se puede pensar en una competencia general sino en desarrollar las habilidades para la comprensión de cada campo del conocimiento en particular.

> La problemática de la comprensión lectora resulta importante en la matemática en particular en un doble sentido: por un lado, es preciso escribir y leer para aprender, ya que estas prácticas sirven como instrumento privilegiado para explorar y aprehender aquellos contenidos disciplinares. (Carlino, 2004, p.8)

Por otro, es preciso aprender para escribir y leer, ya que los contenidos y conocimientos se enseñan, aprenden, negocian y evalúan según rasgos retóricos específicos en cada disciplina (Rose y Martin, 2012; Nesi y Gardener, 2012).

3. METODOLOGÍA

3.1 Características generales

En función de los objetivos propuestos y la problemática planteada, se desarrolla esta investigación, de encuadre descriptivo y exploratorio, y carácter combinado entre cualitativa y cuantitativa. Esta decisión se enmarca en lo que plantea Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio (2014), quienes sostienen que "… la meta de la investigación mixta no es reemplazar la investigación cuantitativa ni la cualitativa, sino utilizar las fortalezas de ambos tipos de indagación, combinándolas y tratando de minimizar sus debilidades potenciales" (p. 544). Estos métodos mixtos, intentan realizar una "… integración sistemática de los métodos cuantitativo y cualitativo en un solo estudio con el fin de obtener una *fotografía* más completa del fenómeno" (Hernández Sampieri et al., 2014, p. 546).

En la misma línea, diversos autores resaltan la importancia del uso de una metodología mixta: Sautu afirma que: "Aunque los estudios de casos podrían eventualmente dar lugar a investigaciones cuantitativas, en general utilizan métodos cualitativos; sin embargo, no se descarta que en algunos estudios de casos se incluyan datos estadísticos para complementar algunos aspectos del estudio…" (Sautu, 2003, p. 78).

Por su parte, Quecedo y Castaño (2002) resaltan que el estudio cualitativo "… facilita una recogida de datos empíricos que ofrecen descripciones complejas de acontecimientos, interacciones, comportamientos, pensamientos que conducen al desarrollo o aplicaciones de categorías y relaciones que permiten la interpretación de los datos" (p.12) y establecen el contrapunto que se da en el hecho de que mientras

> … el diseño cualitativo, está unido a la teoría, en cuanto a que se hace necesario una teoría que explique, que informe e integre los datos para su interpretación […] los estudios cuantitativos, buscan la verificación o comprobación deductiva de proposiciones causales elaboradas fuera del lugar en el que se realiza la investigación. (Quecedo y Castaño, 2002, p. 12)

Esta investigación se contextualiza desde dos planos, por una parte, en lo espacio-temporal, en tanto trata con alumnos que cursan las asignaturas iniciales de las distintas carreras de ingeniería de la facultad y, por otra, abordando la temática específica de ciertas características funcionales en funciones reales de una variable real.

3.2 Diseño de la investigación

La organización del trabajo contempla diferentes etapas: indagación preliminar y diagnóstico de dificultades, trazado de líneas de acción y elaboración de instrumentos de recolección de datos y fase experimental o de desarrollo.

El diseño de la investigación se enmarca en lo que Hernández Sampieri y Mendoza (citados en Hernández Sampiere et al. (2014)) definen como *modalidad derivativa*, consistente en realizar, en primera instancia, una recolección y análisis de datos cualitativos, y a partir de ellos, en una segunda etapa, elaborar instrumentos de recolección y análisis de datos cuantitativos. “La mezcla mixta ocurre cuando se conecta el análisis cualitativo de los datos y la recolección de datos cuantitativos” (Hernández Sampiere et al., 2014, p. 586).

3.2.1 Indagación preliminar e identificación de dificultades

En una primera instancia, se realizó una investigación consistente en la búsqueda, selección y análisis de información referida a las dificultades observadas en los temas monotonicidad, extremos, concavidades e inflexión de funciones reales de variable real.

El corpus previsto para el análisis estuvo dado por las instancias de evaluaciones escritas de distintos años de cursado de la asignatura Cálculo I.

En esta etapa inicial, de carácter exploratorio y descriptivo se buscó recabar datos referidos a los problemas evidenciados por los alumnos en el estudio de las características funcionales antes descriptas, particularmente los que se manifiestan con mayor frecuencia, y aproximar una clasificación de las mencionadas dificultades.

3.2.2 Trazado de líneas de acción y elaboración de instrumentos de recolección de datos

A partir de los errores detectados en la fase anterior se consideró pertinente diseñar actividades a proponer a los alumnos de la cohorte del año siguiente, que permitieran obtener producciones escritas sobre los temas específicos de interés para esta investigación.

Se elaboraron entonces dos cuestionarios (que constan en el Anexo I) y entrevistas (Anexo II) que tuvieron por objeto focalizar los esquemas de razonamiento de los alumnos en estos temas y sirvieron, a su vez, como instrumento para la recolección de información.

En este sentido, Sabino (citado por Niño Rojas, 2011) plantea que un instrumento de recolección de datos es, en principio, cualquier recurso del que pueda valerse el investigador para acercarse a los fenómenos y extraer de ellos información de la realidad estudiada, con la finalidad de verificar el alcance de los objetivos de la investigación, medir las variables y validar las hipótesis.

De manera adicional, se utilizó la observación participativa, considerada como una estrategia de valía para la investigación cualitativa, en tanto, por una parte, permite la obtención de información etnográfica, recogiendo datos de registros de participaciones informales, propios de la dinámica áulica y, por otra, "...su objetivo traspasa la simple descripción de los componentes de la situación, permitiendo la identificación del sentido, la orientación y dinámica de cada instante" (Fagundes et al., 2014, p. 76).

3.2.3 Fase de desarrollo

3.2.3.1 Conjeturas guía

En esta etapa, y en función de las precedentes, se elaboraron conjeturas acerca de la incidencia del uso de diferentes registros de representación para la comprensión de conceptos ligados al análisis de funciones.

La decisión se enmarca en lo que sostiene Izura: "Cuando el investigador cualitativo formula su problema de investigación, y establece sus objetivos, puede adelantar posibles respuestas a los interrogantes. Estas guiarán luego su trabajo de campo en las fases iniciales" (s.f., p.3).

En este aspecto en particular, la presente investigación no recurre a la formulación de *hipótesis,* propia del paradigma cuantitativo, con énfasis en el enfoque deductivo y atomista de los hechos, sino al planteo de conjeturas, definida como "...una inferencia basada en pruebas incompletas o no concluyentes, la cual es revisada o elaborada a lo largo del proceso de investigación" (Molina González, 2006, p. 285).

Es importante el carácter *dinámico* de las conjeturas, en tanto permite que un cierto grado de insatisfacción por parte del investigador acerca de los resultados de sus prácticas pueda dar lugar a un replanteo del modo en que se abordan tanto el contenido como las cuestiones pedagógicas asociadas.

A partir de lo expuesto en las secciones anteriores y en lo que respecta al tema de interés de esta investigación, se pudo obtener información relevante, que condujo a conjeturar:

- En general, los estudiantes darán muestra de un uso no acompañado de la correspondiente reflexión de los criterios de determinación de las características funcionales de monotonicidad, extremos relativos, concavidades y puntos de inflexión, desde dos puntos de vista: por un lado, el abordaje de manera mecánica sin detenerse en la verificación de las condiciones para su correcta aplicabilidad en cada registro y, por otro, la utilización de los mismos como sustitutos posibles del concepto matemático en estudio .

- Es probable que el estímulo a la implementación de la alternancia de diferentes registros de representación contribuya a la comprensión de conceptos y herramientas de cálculo y a la correcta distinción entre los mismos por parte de los alumnos.

A partir de lo expuesto, se diseñaron líneas de acción para el trazado de estrategias de enseñanza que favorezcan la transferencia de una representación semiótica a otra.

Por último, de carácter experimental, se llevaron a cabo actividades que permitieron corroborar o rechazar las conjeturas formuladas.

Los lineamientos establecidos guiaron el diseño, y ejecución de acciones específicas que permitieron obtener producciones escritas estudiantiles en las que fue posible, por un lado, identificar las concepciones de los alumnos referidas a los conceptos involucrados y, por otro, poner a prueba la transferencia de un registro de representación a otros, posibilitando la comprensión de los conceptos en estudio.

3.2.3.2 Cuestionarios implementados

El *cuestionario* es la técnica más universal y de mayor uso para la recolección de datos durante el trabajo de campo de la investigación social.

Distintas investigaciones como Chávez de Paz (s. f) y Meneses y Rodríguez Gómez (2011) dan cuenta, referido a la modalidad, de diferentes tipos de cuestionarios: *estructurado* o con preguntas cerradas, *no estructurado,* o con preguntas abiertas y *mixto*, que incluye una combinación de los dos tipos anteriores.

Referido a lo anterior, en el cuestionario estructurado el informante cuenta, para cada pregunta con alternativas de respuesta prediseñadas, mientras que en el no estructurado goza de total libertad para expresar su propia respuesta a cada interrogante.

En el análisis de ventajas y desventajas de uno por sobre otro, por un lado, Chávez de Paz sostiene que el cuestionario estructurado

> … tiene el riesgo de no captar toda la información que el entrevistado pueda dar, sobre todo si las alternativas de respuesta no se adecuan al conocimiento del informante. De

allí que la lista de alternativas de respuesta debe incluir la categoría *otra respuesta* […]. La principal ventaja de este tipo de pregunta es que facilita su procesamiento y análisis estadístico. (s.f., p. 15)

Por otra parte, Meneses y Rodríguez Gómez (2011) sostienen que, si bien "...las preguntas abiertas, en principio, nos ofrecerían la posibilidad de captar la respuesta de los participantes en toda su complejidad, por ejemplo, utilizando sus palabras, en los términos que consideren más adecuados y sin condicionamientos previos (p. 14)", rescatan el valor de los cuestionarios estructurados, sosteniendo que el tipo de preguntas cerradas brinda mayor precisión de lo que los participantes informan. Por una parte, permite reducir los errores de comprensión sobre la pregunta y, por otra parte, "… al ofrecer un conjunto determinado de alternativas, las preguntas cerradas contribuyen también a la reducción de su singularidad, controlando la dispersión que podría hacer inviable el tratamiento significativo de las respuestas" (Meneses, y Rodríguez Gómez, 2011, p. 14).

Niño Rojas (2011), sostiene que para elaborar un cuestionario es necesario considerar, además del tipo de preguntas que conforman el instrumento (forma), los aspectos que se desean averiguar, los cuales también determinan el tipo de preguntas (contenido). En tal sentido, el contenido de las preguntas "… debe estar acorde con la cultura y formación de los sujetos informantes, pues muchas veces. [...] es necesario conocer muy de cerca a los informantes antes de componer las preguntas" (Niño Rojas, 2011, p. 89).

A partir de las consideraciones anteriores, se elaboraron dos cuestionarios (Anexo I) con temas diferentes por cada turno (mañana y tarde), presenciales y escritos, de tipo mixto, con preguntas que, además de ofrecer alternativas de respuesta a los estudiantes, les requerían que argumentaran su elección, desarrollando y exponiendo sus modos de razonar, haciendo uso de las herramientas teóricas que consideraran pertinentes para brindar y justificar su respuesta.

Para el diseño de las tareas se consideraron las categorías mencionadas por Duval, en particular, en esta instancia, las referidas a la *aprehensión de las representaciones semióticas* y *tratamientos propios de una categoría de registro*.

Las preguntas se diseñaron acordes al tema de interés, utilizando los registros de representación mencionados, planteando consignas que resultaran isomórficas en cuanto a la propuesta de problemas, interrogantes y opciones de respuesta que coincidían en su significado entre ambos cuestionarios, el primero desde un registro analítico, y el segundo desde uno más bien gráfico, de modo de favorecer la comparación de respuestas, análisis ligados a la comprensión de un concepto presentado en ámbitos diferentes y a la cultura y formación de los estudiantes. Cabe aclarar que si bien, cada cuestionario se fundamenta con diferentes herramientas teóricas, el foco se encuentra en el contraste de los distintos registros y la reflexión por lado, de las condiciones para el uso de definiciones y criterios, y por otro, la importancia de la utilización y alternancia de diferentes modos de representación, de manera de beneficiar el aprendizaje.

En cuanto al tipo de funciones utilizadas, se optó por funciones definidas por tramos, discontinuas en el punto de bifurcación, para confrontar al estudiante con casos particulares (no generales) que le exijan reflexionar sobre la necesidad de revisar previamente el cumplimiento de determinadas condiciones para utilizar ciertas definiciones y herramientas del cálculo. Cabe aclarar que para cada turno se expuso la misma función, pero en diferentes registros, con la finalidad de que los alumnos logren realizar un *tratamiento* y/o *conversión* en cada uno, para luego reflexionar y comparar la información obtenida en cada caso, y contrastar, en instancias posteriores, con sus ideas previas, sus errores (si se presentan) para revisarlos y avanzar en la adquisición de nuevos aprendizajes.

A su vez, es importante mencionar que, para la confección de la actividad, y teniendo en cuenta el tema en observación, se adoptó como referencia el material de estudio utilizado para la cátedra, cuyo texto es *Cálculo Esencial* de Larson, Hostetler y Edwards (Cengage Learning, México, 2010), por lo que las premisas se ciñeron a las definiciones y terminología expresadas en él.

De manera específica, cabe resaltar que algunas definiciones que consideran los autores difieren de otros libros de cálculo. Así, por ejemplo, se define como concavidad en un intervalo: "Sea f una función derivable en un intervalo abierto I. La gráfica de f es cóncava hacia arriba en I si $f\,'$es creciente en ese intervalo y es cóncava hacia abajo en I si $f\,'$ es decreciente en ese intervalo" (Larson et al., 2010, p. 180).

También, un *punto de inflexión* se define como sigue:

> Sea f una función que es continua en un intervalo abierto y sea c un punto en ese intervalo. Si la gráfica de f tiene una recta tangente en este punto (c, f(c)), entonces este punto es un punto de inflexión de la gráfica de f si la concavidad de f cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo (o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba) en ese punto. (Larson et al., 2010, p. 182)

Es evidente que ambas definiciones, concavidad y punto de inflexión, transitan los ámbitos analítico y geométrico. Se espera que esta situación favorezca, por un lado, la adquisición de un aprendizaje consistente por parte del alumno, y, por otro, lo estimule a la minuciosa revisión y reflexión sobre las condiciones involucradas en ambos conceptos al momento del estudio.

Por otra parte, resulta necesario recalcar que en la mayoría de los libros de texto de Cálculo y en la bibliografía utilizada en particular, se proponen definiciones, criterios y ejemplos para el estudio de funciones, en su mayoría, continuas en sus dominios, sin contemplar una estrategia que conduzca al análisis en situaciones de discontinuidad.

A partir de lo anterior, en general, los estudiantes suelen resolver las actividades de manera mecánica, sin detenerse en la comprobación de condiciones, en especial las que exigen continuidad y existencia de recta tangente en un punto. Esto motivó la elección *ad hoc* de funciones que contemplaran esta situación en las actividades propuestas.

Si bien en clases previas al tema en cuestión se abordan actividades que plantean como necesaria la implementación de estrategias para este tipo de situaciones de manera de salvar la omisión mencionada en el texto, resulta, en ocasiones, complicado para los estudiantes la revisión de las condiciones exigidas en los criterios y definiciones y la puesta en juego del conjunto de acciones necesarias para la resolución con éxito de la situación planteada.

Respecto de la forma de distribuir los cuestionarios, se adoptó la modalidad personalizada, a cargo del docente, ya que cuenta como ventajas evitar la pérdida de información, hecho habitual en otros modos de entrega de las herramientas de recolección de datos como resulta, por ejemplo, el envío postal, y también el poder contar con la información en el tiempo previsto, sin dilaciones de ningún tipo. Por contrapartida, cuenta con la desventaja de, quizás por su rigidez, incidir de manera negativa en el estudiante, provocando cierta intimidación en él. En este sentido: “Conseguir las mejores condiciones para suscitar las respuestas de nuestros informadores, buscando su complicidad y atendiendo a sus peculiaridades, es el objetivo principal” (Meneses, y Rodríguez Gómez, 2011, p.19).

El procesamiento de las respuestas brindó datos estadísticos, cuyo tratamiento permitió, por un lado, obtener la información necesaria acerca de los focos de problematicidad que los estudiantes evidenciaban en el tema y, por otro, delinear posteriores líneas de acción, *las entrevistas*, que complementaron los insumos obtenidos con los cuestionarios.

3.2.3.3 Entrevistas

Procesados los cuestionarios, se realizaron entrevistas que tuvieron como fin complementar la información obtenida previamente.

Según Niño Rojas (2011), la entrevista presenta ciertas ventajas con respecto a otros instrumentos, entre ellas las siguientes:

> a) permite recoger información que de pronto un individuo no estaría en condiciones de proporcionar por otro medio, por ejemplo, el escrito; b) por la entrevista, podemos penetrar en el mundo interior del ser humano y conocer sus sentimientos, su estado anímico, sus ideas, sus creencias y conocimientos; c) ocasionalmente proporciona la comodidad para responder, pues a muchos les gusta más hablar que escribir, por ejemplo una encuesta; d) le facilita al investigador asegurar la participación, aclarar o pedir aclaraciones, verificar las respuestas, ampliar, sondear y hasta animar al entrevistado; e) al entrevistador le es fácil detectar y valorar signos paraverbales, como la mirada, el tono de la voz, las reacciones, las pausas, etcétera, lo ayudará a comprender el sentido de la respuestas. (Niños Rojas, 2011, p. 65)

Lo anterior se inscribe en lo que Jean Piaget (1984) define como el *Método Clínico*, en tanto no se busca conseguir que haya una respuesta, sino hacer hablar libremente y descubrir las tendencias que surgen de manera espontánea, en vez de canalizarlas y ponerles diques.

En lo que refiere a la modalidad en que se selecciona la muestra de estudiantes para entrevistar, Martínez (2006) sostiene:

> En la muestra intencional se elige una serie de criterios que se consideran necesarios o altamente convenientes para tener una unidad de análisis con las mayores ventajas para los fines que persigue la investigación. [...] Es decir, se trata de buscar una muestra que sea comprehensiva y que tenga, a su vez, en cuenta los casos negativos o deviantes, pero haciendo énfasis en los casos más representativos y paradigmáticos y explotando a los informantes clave (personas con conocimientos especiales, estatus y buena capacidad de información). En conclusión, el investigador tratará de imitar al buen fotógrafo, que busca los mejores ángulos para capturar la mayor riqueza de la realidad que tiene delante. (p. 137)

A partir de lo anterior, en el presente trabajo se implementó la modalidad *intencional*, no probabilística, de selección de la muestra: una vez, analizadas las respuestas de los estudiantes a los cuestionarios, se eligieron aquellas producciones que se consideraron más representativas por evidenciar contradicciones en los razonamientos según el registro utilizado.

Posteriormente, se entrevistó de manera individual a cada uno de esos alumnos, con el objeto de profundizar en los procedimientos y análisis por ellos realizados.

Respecto del tipo de entrevista, se optó por un carácter semiestructurado para las mismas, adoptando la forma coloquial, ya que "… el contexto verbal permite, asimismo, motivar al interlocutor, elevar su nivel de interés y colaboración, reconocer sus logros" (Martínez, 2006, p.139).

En este marco, a pesar de ajustarse a una guía de puntos a abordar (previamente elegidos por el docente) durante el encuentro, se dejó libertad para repreguntas y comentarios extras que facilitaron la empatía con el entrevistado.

Referido a este aspecto, Niño Rojas (2011) sostiene que para realizar una "… entrevista se recomienda planificar previamente la misma, precisando el objetivo de la entrevista, tema, tipo de entrevista, entrevistador y entrevistado, fecha, hora y lugar en que se desarrollará, etcétera" (p. 66).

3.2.3.4 Análisis de la información

3.2.3.4.1 De los cuestionarios

Para realizar el análisis, se seleccionaron las respuestas a los cuestionarios que correspondían a estudiantes que participaron en ambas instancias en el mismo turno, de modo de poder comparar sus afirmaciones según el tipo de registro.

En este aspecto, Sabino (citado por Niño Rojas, 2011) plantea que, una vez finalizadas las tareas de recolección, el investigador contará con una cantidad de datos, a partir de los cuales podrá obtener conclusiones generales que intenten aclarar el problema formulado en los inicios de la investigación.

> Pero esa masa de datos por sí sola, no nos dirá nada, no nos permitirá obtener ninguna síntesis de valor si previamente no ejercemos sobre ella una serie de actividades tendientes a organizarla, a poner orden en todo su conjunto. Estas acciones son las que integran el procesamiento de datos. El procesamiento de los datos exige como mínimo realizar las tareas de organización, codificación y tabulación. (Niño Rojas, 2011, p. 100)

Según el mismo autor, los datos numéricos se procesan, para su organización, de acuerdo con los principios y criterios aportados por la estadística, no necesitan una codificación, pero sí se tabulan y disponen, eventualmente, en cuadros y gráficas. En cambio, los datos verbales deben transformarse y codificarse como datos numéricos, para así poder tabularlos y presentarlos en cuadros; o bien, de manera alternativa, puede conservarse su carácter verbal, y ordenarlos, reducirlos y presentarlos en forma conceptual.

> Los datos cualitativos, si bien son mucho más difíciles de procesar, aportan más significado a la investigación. Esto da a entender que no se debe menospreciar o desechar, así de primeras, cualquier información recogida. Sin duda alguna, aquí toma valor el principio de que todo dato por pequeño que sea puede tener gran significado para la investigación. (Niño Rojas, 2011, p. 101)

A su vez, Martínez (2006) sostiene que si la información "… que constituye el material primario o protocolar, es lo más completa y detallada posible, la etapa de la categorización o clasificación exige una condición previa: el esfuerzo de *sumergirse* mentalmente, del modo más intenso posible, en la realidad ahí expresada" (p. 140).

En este sentido, Romero (2005) considera que el proceso de categorización permite identificar regularidades, de modo de clasificar, conceptuar o codificar expresiones de manera clara, ubicando a cada unidad de análisis en una categoría.

Desde esta perspectiva, se dispuso a organizar los datos cualitativos, mediante una categorización y codificación para lograr transformarlos en datos de tipo numérico, y llevarlos a un formato tabular que permitiera la construcción de cuadros de distribución de frecuencias para sintetizar y analizar la información.

En primera instancia, se realizó un análisis de las respuestas de cada estudiante, uno por uno, emparejando los dos cuestionarios (analítico y gráfico). De esta manera, se descartaron de la consideración los estudiantes que se presentaron sólo a una instancia o resolvieron ambas, pero en diferentes turnos, dado que las preguntas resueltas respondían a características funcionales distintas.

Posteriormente, se clasificaron las respuestas en cada tipo de registro, en cada turno.

En segunda instancia, se compararon y contrastaron las respuestas de cada estudiante en cada registro, de modo de poder establecer eventuales contradicciones entre los razonamientos realizados y dificultades en el tratamiento y conversión entre los distintos ámbitos de representación.

Para ello, se realizaron nuevas categorías que ampliaron las anteriores, se construyeron nuevas tablas y cuadros estadísticos y se lograron obtener algunas conclusiones.

3.2.3.4.2 De las entrevistas

Como se explicó anteriormente, tiempo después de procesados los cuestionarios, se llevaron a cabo las entrevistas en la modalidad descripta, que permitieron un análisis más profundo de la información de interés.

El clima cálido y ameno generado en los encuentros, permitió que los alumnos entrevistados expusieran con total libertad sus pensamientos y enfoques. Las respuestas dadas en los sucesivos diálogos y la exposición de sus esquemas de razonamiento permitieron obtener información de importancia que fue clasificada en función de los tópicos de relevancia para la investigación.

Determinados aspectos considerados en el análisis de los cuestionarios y vinculados con la relación y eventual incidencia de los registros en que eran presentadas las consignas se hicieron también presentes en las entrevistas.

Se enfrentó a los alumnos con sus respuestas a los cuestionarios para que contrastaran sus afirmaciones en diferentes ámbitos de representación de un mismo concepto y fueran testigos de las eventuales incoherencias e inconsistencias entre ellas. De esta manera, mediante el uso y alternancia de diferentes registros de representación se esperaba que logren revisar sus concepciones previas, reflexionar y avanzar para construir nuevos conocimientos, a partir de la confrontación de sus producciones.

Las entrevistas permitieron tener la posibilidad de medir, por un lado, el grado transitabilidad entre los distintos registros semióticos de un mismo concepto y, por otro, la coherencia de respuestas dadas en planos diferentes.

4. DESARROLLO

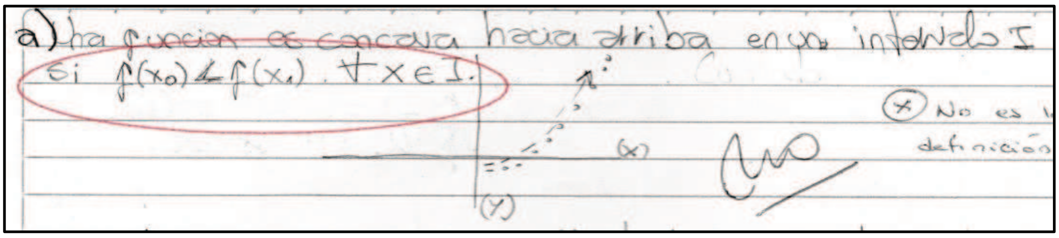
En este apartado se expone el modo en que se implementó la recolección y posterior análisis de datos, en concordancia con las características del diseño de investigación descripto en la sección anterior.

4.1 Indagación preliminar y diagnóstico de dificultades

Como se mencionó en la etapa correspondiente al diseño de investigación (sección 3.2.1), en este trabajo se adoptó como corpus para la primera instancia, las evaluaciones finales y parciales de alumnos de Cálculo I del último año (2016-2017), correspondiente a todos los turnos y llamados del ciclo lectivo, donde se incluye el tema de interés.

En total se analizaron 120 exámenes, lo que permitió obtener información acerca de las diversas dificultades que los alumnos evidencian en el aprendizaje del análisis de la gráfica de una función.

Entre los errores detectados más comunes, podemos mencionar el que refiere a la incorrecta interpretación de una determinada definición. Por ejemplo, ante la consigna: *Defina función cóncava hacia arriba en un intervalo I*, resultaron típicas respuestas como las que se muestran a continuación:



En la imagen se observa que el estudiante altera la definición de concavidad de una función, tal como se vio en las clases, siguiendo los lineamientos del texto de cabecera, confundiendo el crecimiento de la derivada con el crecimiento de la función.

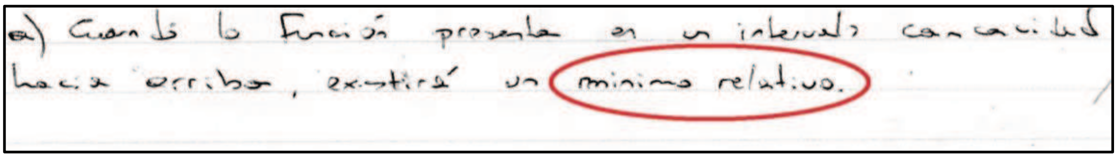
El origen del problema radica, posiblemente, en el trabajo cognitivo ligado a la *semiosis,* donde utiliza lenguaje simbólico, coloquial y gráfico transfiriendo sus representaciones mentales asociadas a sus concepciones de la definición en la formación y conversión de diferentes registros, pero no alcanza una comprensión del concepto (*noesis*). Claramente se manifiesta una falta de congruencia semántica entre la definición del concepto, sus ideas y representaciones semióticas de ellas en los términos de Duval.

También este inconveniente podría asociarse con problemas vinculados a dificultades de lectocomprensión e interpretación de definiciones de la disciplina.

Este problema, frecuente en los alumnos ingresantes a la universidad y común en la mayoría de las disciplinas, se manifiesta, en particular, en las asignaturas de matemática.

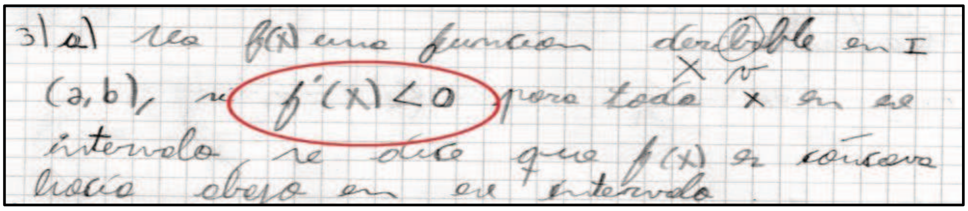
En este sentido, y en pos de dar cuenta del inconveniente, Rose y Martin (2012) sostienen que es fundamental el rol del docente, tornándose necesario que en las clases se incluyan fundamentos sólidos sobre el lenguaje utilizado, que se desarrolle un metalenguaje áulico operativo y que se enseñen contenidos lingüísticos de forma explícita.

Vinculado a la misma consigna, fue común observar respuestas como la que sigue:


a) Cuando la función presenta en un intervalo concavidad hacia arriba, existirá un mínimo relativo.

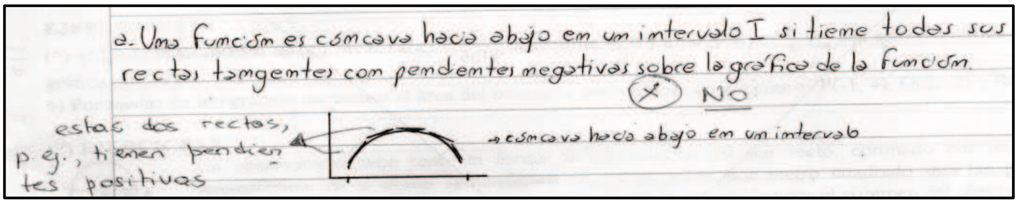
En esta imagen se observan errores de distinta índole: por un lado, y posiblemente relacionado con fallas de lectocomprensión, la definición solicitada se sustituye con el intento de establecer una condición para la concavidad, y, por otro, una confusión entre dos objetos matemáticos distintos como son el concepto de concavidad y el de mínimo relativo, lo cual, probablemente, puede explicarse a partir de la concepción de obstáculo didáctico de Brousseau: el estudiante explicita su estructura cognitiva vinculando a una propiedad conocida de los extremos relativos de funciones cuadráticas a partir de su concavidad que, al extenderse a funciones más generales, lo conducen a error.

De manera similar, una situación comúnmente observada fue la que devino de las respuestas dadas ante la consigna: *"Defina función cóncava hacia abajo en un intervalo I"*, en donde se dieron respuestas como las siguientes:


3) a) sea $f(x)$ una función derivable en I (a,b), si $f'(x) < 0$ para todo x en ese intervalo se dice que $f(x)$ es cóncava hacia abajo en ese intervalo

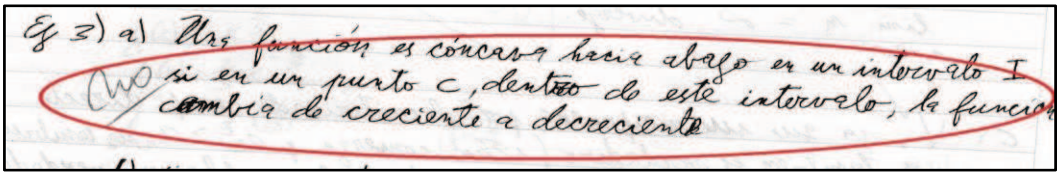
Se observa una situación similar a la del primer caso presentado en la manifestación de indicios de confusión en la definición, probablemente atribuibles a que en la misma se menciona el signo de la función derivada y no su monotonicidad en el intervalo. Esto sugiere un posible error ligado a la lectocomprensión donde relaciona un criterio para determinar el decrecimiento de la función con la definición de concavidad hacia abajo que refiere a decrecimiento de la función derivada.

Otras respuestas frecuentes para la misma consigna fueron del tipo que se exhiben a continuación:



Esta respuesta, evidencia un error que obedece a dos planos de análisis: por un lado, en la interpretación de la definición y, por otro, la incongruencia de sus afirmaciones según los registros semióticos utilizados: al momento de explicitar en el registro analítico como condición de concavidad que las pendientes de las rectas tangentes deben ser negativas, pero contraponiendo otra situación en el gráfico. En este sentido, Duval (2006) expresa que una de las mayores dificultades con las que se encuentran los estudiantes para alcanzar la comprensión es la posibilidad de *transferir* lo que sabe a otros ámbitos, y esto siempre implica la conversión de representación y la capacidad para relacionar un mismo concepto en diversos registros.

Ante la misma consigna, varios alumnos recurrieron a argumentaciones como la que muestra la siguiente imagen:

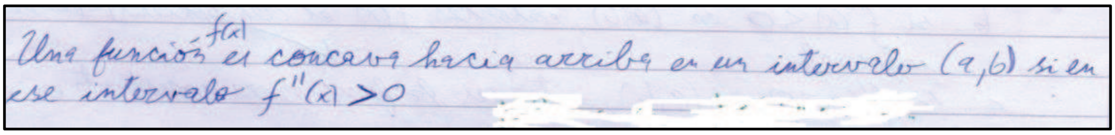


Podría inferirse que el estudiante generaliza situaciones propias de algunas funciones particulares, lo que conduce a pensar en la presencia de un obstáculo didáctico en términos de Brosseau, donde el estudiante no logra desprenderse de algunos ejemplos conocidos (funciones cuadráticas) que le impiden avanzar en su aprendizaje e incorporar funciones más generales que, en general, no verifican lo expresado en su respuesta.

Desde otro punto de vista, la respuesta puede relacionarse también, con lo que expresa Bruner (1966), con el papel primordial que desempeña una buena elección de espiral didáctica que se recorra desde lo abstracto a lo particular, y viceversa, de manera que el alumno no pierda, por un lado, la posibilidad de alcanzar abstracción en su aprendizaje, pero, por otro, el acceso al caso particular, al ejemplo visualizador.

En el caso de este tipo de respuestas puede inferirse que lo aprendido para el caso particular (funciones cuadráticas) le imposibilita la abstracción y posterior reinversión de sus saberes a un dominio de validez más amplio, con funciones más diversas para las que sus afirmaciones no son ciertas. Esto puede atribuirse a que, en ocasiones, en su intento por presentar ejemplos en contextos cercanos al estudiante, el docente propone casos particulares y obstaculiza la posibilidad de generalizar y visualizar otro tipo de comportamientos.

Otra respuesta común, que resulta de interés es la siguiente:


Una función $f(x)$ es concava hacia arriba en un intervalo (a,b) si en ese intervalo $f''(x)>0$

Se puede observar el uso del criterio para determinar la concavidad como sustituto del concepto. Esta situación, en términos de las ideas de Douady, plantea la sustitución del aspecto *objeto* con el aspecto *instrumento* del concepto involucrado. En otras palabras, el estudiante intenta definir, a partir de la utilidad práctica para resolver actividades, un objeto cultural matemático.

A partir del diagnóstico realizado en la etapa preliminar, se decidió indagar sobre las posibles causas de los problemas observados.

Se dispuso entonces estudiar en los alumnos cursantes de la asignatura Cálculo I, al momento del dictado de los temas objeto de análisis del presente trabajo, la persistencia de las dificultades observadas, esto es, aquellas relacionadas con los procesos de lectocomprensión ligados a cuestiones matemáticas (no provenientes de la lingüística), descontextualización, confusión entre el concepto de un cierto objeto matemático y su método de cálculo a través de un determinado modelo, la presencia de obstáculos didácticos, la incidencia de los registros de representación en el aprendizaje.

Para tal fin se elaboraron instrumentos de recolección de datos, implementándose la toma de dos cuestionarios escritos, cuyos detalles se analizan en la sección siguiente.

4.2 Los cuestionarios

4.2.1 Implementación

Considerando lo planteado en la etapa del diseño metodológico (sección 3.2.3.2) se decidió implementar dos cuestionarios presenciales escritos, a todos los estudiantes que cursaron la asignatura Cálculo I en el segundo cuatrimestre del año 2017.

En lo que refiere al procedimiento de implementación, los cuestionarios fueron distribuidos y recolectados por el mismo docente en dos clases de práctica de la asignatura Cálculo I, con el grupo total de cursantes de la materia, en días previamente pautados.

El primer cuestionario se realizó el día 6 de septiembre de 2017 durante los últimos quince minutos de una clase de práctica donde se abordó el tema de interés (Semana 1). El segundo, en los primeros quince minutos de la clase de práctica siguiente, el día 13 de septiembre de 2017, una semana después (Semana 2).

La actividad de la primer semana incluyó consignas formuladas en el registro analítico mientras que en la correspondiente a la segunda se abordaron consignas en el registro gráfico que eran isomórficas a las primeras.

Dado que se cuenta con un total de seis comisiones de práctica de la materia, repartidas en dos turnos, tres durante la mañana y tres durante la tarde, se decidió elaborar temas diferentes en cada turno.

Los cuestionarios de los cursantes del turno matutino referían a *monotonicidad y extremos relativos de una función discontinua definida por tramos según un punto de bifurcación*, y los del turno vespertino, a *concavidad y puntos de inflexión de una función* del mismo tipo.

Del total de alumnos inscriptos a la materia, sólo trabajaron en la Semana 1 66 alumnos durante el turno mañana y 65 durante la tarde, en tanto que en la Semana 2, realizaron la actividad 61 alumnos en el turno matutino y 58 en el vespertino. De los alumnos *matutinos*, 49 realizaron los dos cuestionarios en el mismo turno, mientras que los estudiantes *vespertinos* participaron 46 en ambas actividades.

De acuerdo con los objetivos de investigación propuestos, se decidió, sólo analizar las respuestas de estos alumnos que respondieron ambos cuestionarios en el mismo turno, de modo de poder comparar y contrastar sus respuestas.

La información se sintetiza en la siguiente tabla:

	Cuestionario analítico	Cuestionario gráfico
Turno mañana	49	49
Turno tarde	46	46

Tabla 1. *Alumnos que respondieron ambos cuestionarios.*

4.2.2 Objetivos

En tanto instrumentos de recolección de datos, con los cuestionarios se buscó obtener diferentes insumos referidos a los modos en que razonan los alumnos según el registro de representación en que se les plantea las consignas.

Los objetivos propuestos de los cuestionarios son:

- Inferir cuál de los dos registros les estimula mayormente la comprensión de las consignas para poder así dar cuenta de ellas.
- Analizar las respuestas en términos de coherencia de los planteos para un mismo desafío planteado en dos ámbitos de representación distintos.
- Detectar eventuales contradicciones entre las respuestas a ambos cuestionarios a través de la contrastación según el tipo de registro utilizado.

4.2.3 Estructura y expectativa de respuestas

La configuración de los cuestionarios consistió en un encabezado, donde se identificaba el turno en que se realizó el mismo (mañana o tarde), seguido del pedido de datos personales, de modo de poder contactarlos posteriormente a una posible entrevista: nombre y apellido, correo electrónico y carrera.

En cuanto a la composición de cada actividad se plantearon, en cada una de ellas, dos preguntas abiertas, en las que el estudiante debía utilizar sus conocimientos del tema y/o desarrollar algunos cálculos para dar sus respuestas.

Los instrumentos diseñados, presentaron la particularidad que cada una de las preguntas se correspondía con su similar en el otro registro. El primer cuestionario se desarrolló en un registro analítico mientras que el segundo en uno gráfico, con el tema propuesto correspondiente según el turno.

A continuación, se exponen, según el tipo de registro, el turno en los que fueron presentados y los procedimientos esperados en cada uno:

Cuestionario analítico - Turno Mañana

Dada la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2-1 & \text{si x} < 1\\ 5-2x & \text{si x} \geq 1\end{cases}$$

Responde, justificando cada respuesta:

1) ¿En qué intervalo/s f es creciente y decreciente?
2) ¿Qué extremos relativos tiene f? ¿Qué herramienta teórica usó para determinarlos?

En este cuestionario se espera que los estudiantes determinen, en primer lugar, los puntos críticos: valores donde la derivada se hace cero o no existe, decidir si los valores obtenidos son pertinentes en cuanto a su correspondencia con el dominio del tramo en cuestión, y analizar la continuidad y derivabilidad en el punto de bifurcación. En particular, se pretende que la detección de la discontinuidad en tal punto sea especialmente considerada, dada su incidencia en la aplicación de los criterios involucrados.

De esta manera, el estudiante debería enfocarse en un *tratamiento* dentro del registro analítico utilizando las herramientas alternativas trabajadas en clase referidas a la metodología posible de aplicar para casos en los que el criterio de la primera derivada para determinación de monotonicidad y extremos locales no es aplicable: análisis e interpretación de los límites laterales en el punto de bifurcación, definición y monotonicidad a ambos lados del mismo. Es posible que, en algunos casos, opten por una *conversión* al registro gráfico para el abordaje de la actividad.

Cuestionario analítico - Turno Tarde

Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} -(x-1)^2+2 & \text{si x} < 1 \\ x^3-2x & \text{si x} \geq 1 \end{cases}$$

Responde, justificando cada respuesta:

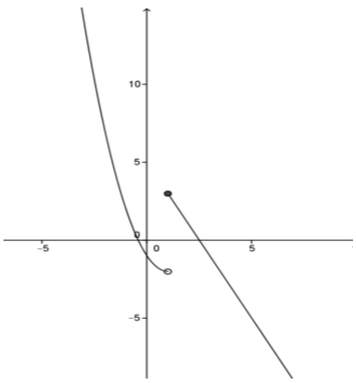
1) ¿f presenta cambio de concavidades?
2) ¿f presenta puntos de inflexión? ¿Cuáles son?

De manera similar, en este cuestionario se espera que, en primer lugar, hallen los posibles puntos de inflexión: valores donde la segunda derivada no existe o se hace cero, decidan si éstos son pertinentes en relación a su correspondencia con el dominio del tramo en cuestión, analicen la continuidad en el punto de bifurcación e identifiquen concavidades en cada tramo. Se pretende, particularmente, que la detección de la discontinuidad en tal punto sea especialmente considerada, en tanto es un requisito fundamental para determinar que el punto analizado no es de inflexión.

De esto modo, se espera que recurran a un *tratamiento* en el registro analítico e interpreten la información obtenida, contrasten con la definición y respondan en función de ello. Es posible que algunos, decidan realizar una *conversión* al registro gráfico y resolver las consignas dentro del mismo.

Cuestionario gráfico - Turno Mañana

Dada la siguiente gráfica de una función. Responde, justificando cada respuesta:



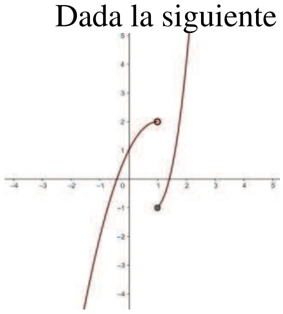
1) ¿En qué intervalo/s f es creciente y en cuáles decrece?

2) ¿Qué extremos relativos tiene f? ¿El criterio de la primera derivada resulta útil en este caso? ¿Por qué?

Se espera que los estudiantes identifiquen gráficamente, en primer lugar, que la función decrece en los intervalos de interés. En segundo lugar, que visualicen que a pesar de no existir cambio en la monotonicidad, existe un extremo relativo. Para ello, deberían invocar la definición y no el criterio de la primera derivada, advirtiendo que el mismo no es aplicable en cualquier intervalo que contenga a x=1. De esta manera, al enfrentarlo con situaciones *no generales* se desea generar una reflexión en torno al uso de criterios, la necesidad de verificar condiciones de aplicación y considerar procedimientos alternativos, favoreciendo así una construcción de conocimientos consistentes sobre el tema.

Cuestionario grafico - Turno Tarde

Dada la siguiente gráfica correspondiente a función f, definida en*R*



Responde, justificando cada respuesta:

1) ¿f presenta cambio de concavidades?

2) ¿f presenta puntos de inflexión? ¿cuáles son?

En cuanto a este cuestionario, se pretende, en la primera pregunta, que a partir de la visualización de la gráfica reconozcan el cambio de concavidad de la función. En la segunda consigna, se espera que, a pesar de presentarse concavidades distintas, concluyan que no existe punto de inflexión, argumentando que el punto (1,-1) no cumple las condiciones de la definición, dada la inexistencia de la recta tangente en él. De esta manera, se busca generar una reflexión, en la que consideren la necesidad de verificar las condiciones exigidas, en contraposición con la realización de cálculos mecánicos

4.2.4. Análisis de respuestas de los cuestionarios

Como se ha expresado anteriormente en la fase de *Análisis de la información* del diseño metodológico (sección 3.2.3.4), el interés en esta etapa se centró, por un lado, en observar los razonamientos y enfoques de los estudiantes en torno al tema en cuestión y, por otro, en analizar la conversión y tránsito entre diferentes representaciones semióticas del mismo concepto con las posibles consecuencias que estos procesos implican en relación, tanto a las eventuales contradicciones que se generan según el registro utilizado como a la construcción de significado.

En virtud de lo anterior se revisaron, en primera instancia, alumno por alumno, las respuestas correspondientes a los ámbitos analítico y gráfico con el objeto de comparar lo razonado en cada tipo de registro.

Como se explicitó en la sección (4.2.1) sólo se consideraron para el análisis las respuestas de los alumnos que respondieron ambos cuestionarios en el mismo turno.

Por otro lado, es importante aclarar que, si bien se evidenciaron errores algebraicos, los mismos no fueron tenidos en cuenta cuando resultaban menores, y no afectaban la naturaleza de la función en estudio ni sus características, en tanto no es la dirección a la que se enfoca el análisis de este trabajo, que considera la coherencia en respuestas y la comprensión de los conceptos puestos en juego.

4.2.4.1 Análisis de respuestas al cuestionario analítico

Dada la expresión de una función por partes se realizaron dos preguntas referidas al tema de interés, que se detallan a continuación, por turno y por pregunta.

La consideración del enfoque de corrección es la explicitada al final del apartado anterior.

Turno Mañana

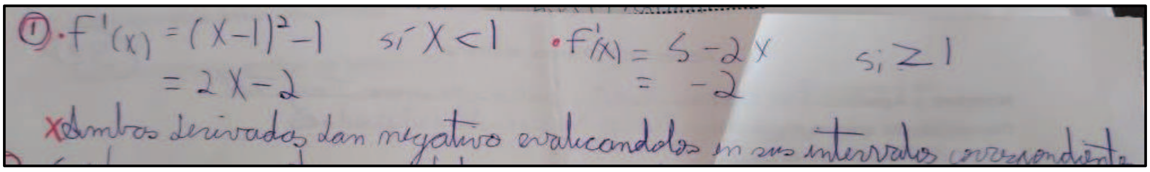
La consigna 1 indicaba:

¿En qué intervalo/s f es creciente y decreciente?

Ante esta pregunta, un 67% de los estudiantes identificó correctamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función dada, reconociendo y utilizando la prueba de la primera derivada para determinar la monotonicidad en los intervalos.

El resto de los encuestados, presentaron dificultades, ya sea porque no lograron determinar dichos intervalos o porque dieron respuestas poco claras. En esta última situación, se contaron a aquellos estudiantes que realizaron algunos de los cálculos esperados para determinar los intervalos solicitados, pero no concluyeron en sus respuestas.

Por ejemplo, se observaron varios casos en los que derivaron la función, determinaron diferentes intervalos y analizaron el signo de la derivada en ellos, pero no concluyeron si en esos intervalos la función es decreciente o creciente, como se aprecia en la figura adjunta, donde la estudiante realiza el *tratamiento* dentro del registro analítico:



① $\cdot f'(x) = (x-1)^2 - 1$ si $x < 1$ $\cdot f'(x) = 5 - 2x$ si ≥ 1

$= 2x - 2$ $= -2$

×Ambos derivadas dan negativo evaluandolos en sus intervalos correspondientes

Resolución de Bárbara G.

Esta situación condujo a considerar la posibilidad de una resolución *mecánica*, pero carente de la debida interpretación y conclusión a partir de lo obtenido.

En tal sentido, en términos de Ausubel, podría significar un indicador de cierta ausencia de significación en los aprendizajes, en tanto no ensambla lo obtenido con lo previamente alcanzado, lo que obstaculiza el alcance de un *significado real* como evolución del *significado potencial* del concepto. También podría vincularse, incluso, a cierto problema relacionado con la distracción al momento de la lectura de las consignas, que lo llevan a omitir la conclusión, o la posibilidad de considerar que *no resultaba necesario* explicitar con palabras, asumiendo que era suficiente exponer el signo de la derivada obtenido en cada intervalo, dando por sobreentendida así la monotonicidad de la función.

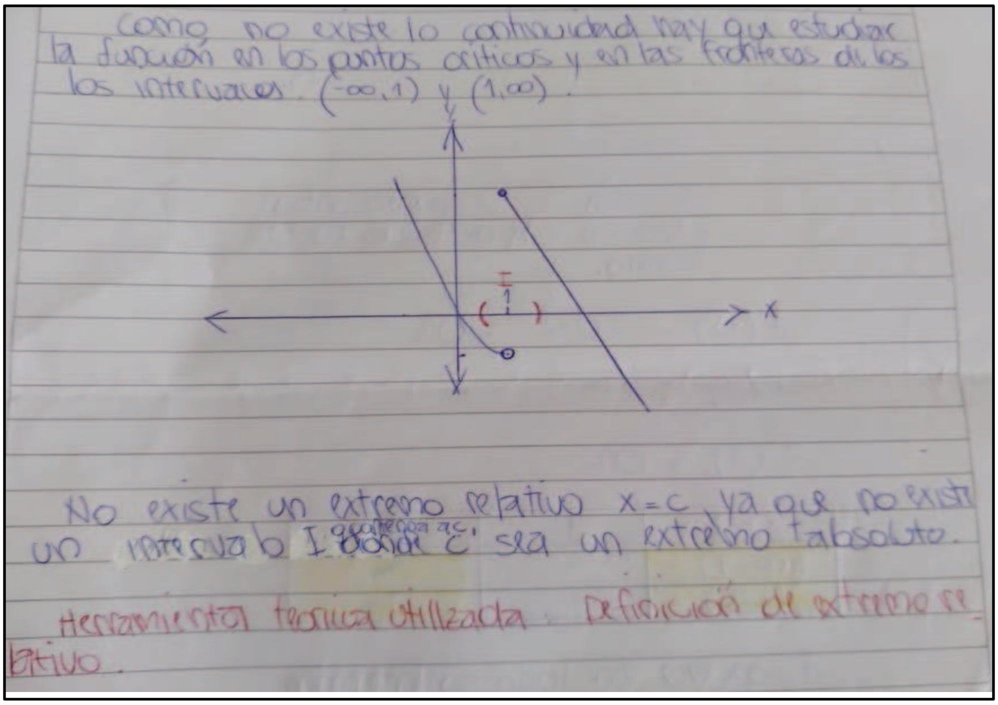
La consigna 2 se constituía por dos preguntas. La primera de ellas expresaba:

¿Qué extremos relativos tiene f?

En este caso, 29 de los 49 estudiantes respondieron correctamente, mientras que 20 no reconocieron los extremos relativos de la función.

Si bien se aprecia que más de la mitad respondió satisfactoriamente, resulta llamativo, en la comparación con las respuestas correctas de la primer pregunta, que varios de los estudiantes que reconocieron los intervalos de crecimiento y de decrecimiento no lograron determinar los extremos relativos. Esto condujo a inferir la presencia de un posible indicador *dual*, en el sentido de alumnos que si bien parecen reconocer el concepto requerido en la consigna, no alcanzan a vincularlo con la herramienta que posibilita su identificación o bien no llegan a comprender cabalmente los alcances del mismo.

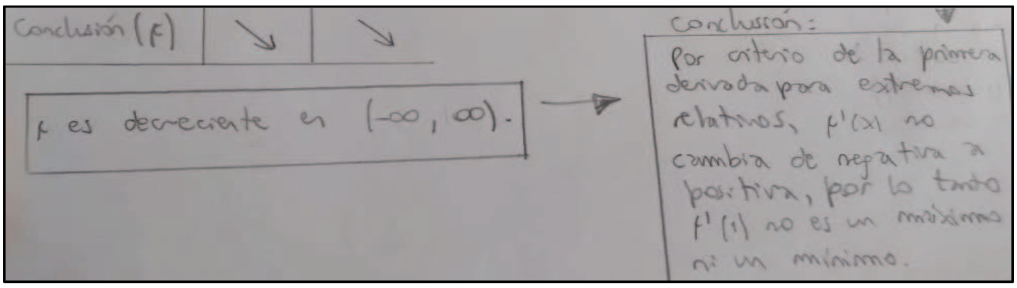
Esta situación puede visualizarse en el siguiente fragmento



Resolución de Francisco G.

En el caso anterior, se reconoce que el estudiante logra determinar la imposibilidad de utilizar el criterio de la primera derivada, realizando una *conversión* congruente del registro analítico al registro gráfico. Si bien evidencia una correcta comprensión de la definición de extremo relativo, niega la existencia del mismo en el punto considerado, lo que conduce a pensar en un posible problema para diferenciar entre forma y contenido de una representación semiótica. (Duval, 1999)

Por otra parte, una falencia subyacente en la mayoría de los casos revisados se evidencia en la aplicación del criterio de la primera derivada, sin la necesaria comprobación previa de las condiciones para su aplicación, conduciéndolos, en la mayoría de los casos, a una respuesta incorrecta, como se observa en la siguiente resolución:



Resolución de Sofía Z.

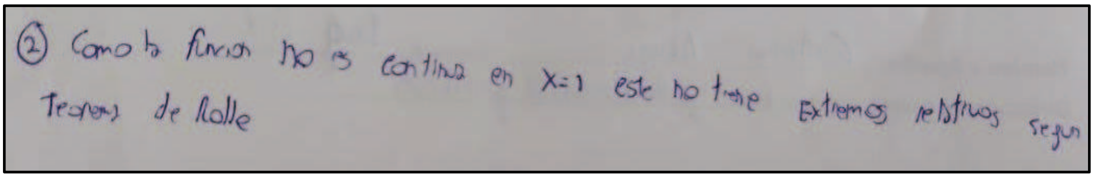
En este caso, además, se aprecia cómo concluye acerca de la presencia de extremos en la función derivada y no en la función original, confusión posiblemente debida a algún grado de ausencia de significación en la asimilación del criterio: el análisis se realiza en el ámbito de la derivada pero las conclusiones no se trasladan al de la función.

La segunda pregunta decía:

¿Qué herramienta teórica usó para determinarlos?

Se observó que sólo 14 de los 49 encuestados utilizaron de manera apropiada los distintos conceptos y propiedades del cálculo. Más específicamente, 30 estudiantes no aplicaron adecuadamente las herramientas teóricas y 5 no justificaron sus afirmaciones.

Esto puede evidenciarse en la siguiente respuesta:


(2) Como la funcion no es continua en $x=1$ este no tiene Extremos relativos segun Teorema de Rolle

Resolución Francisco F.

Si bien evidencia que reconoce la discontinuidad en la función, llega a una conclusión errónea en la que utiliza argumentos inconexos como justificación. Una posibilidad es que, independientemente del error en el argumento utilizado (Teorema de Rolle), el estudiante, en términos de Douady, no identifica el aspecto *objeto* del concepto involucrado. También se percibe cierta dificultad al ensamblar la definición de extremo relativo con el Teorema de Rolle, evidenciando una ausencia de significación con los conceptos en cuestión.

Por otra parte merece señalarse que sólo 9 de los 14 mencionados revisaron que se cumplieran las condiciones requeridas para usar el criterio de la primera derivada en la determinación de extremos relativos.

Los restantes 5 de los 14, si bien arrastraron errores algebraicos, sus respuestas y justificaciones fueron correctas y coherentes.

Una considerable cantidad de alumnos que respondieron incorrectamente podría representar un indicador de cierta falta de comprensión de los conceptos involucrados. Como sostiene Artigue (1995), muchos alumnos logran resolver mecánicamente pasos algebraicos y responder satisfactoriamente algunas preguntas, pero no involucrarse y comprender los conceptos utilizados.

Lo expuesto hasta aquí referido al análisis del cuestionario analítico del primer turno, puede resumirse en el siguiente gráfico:

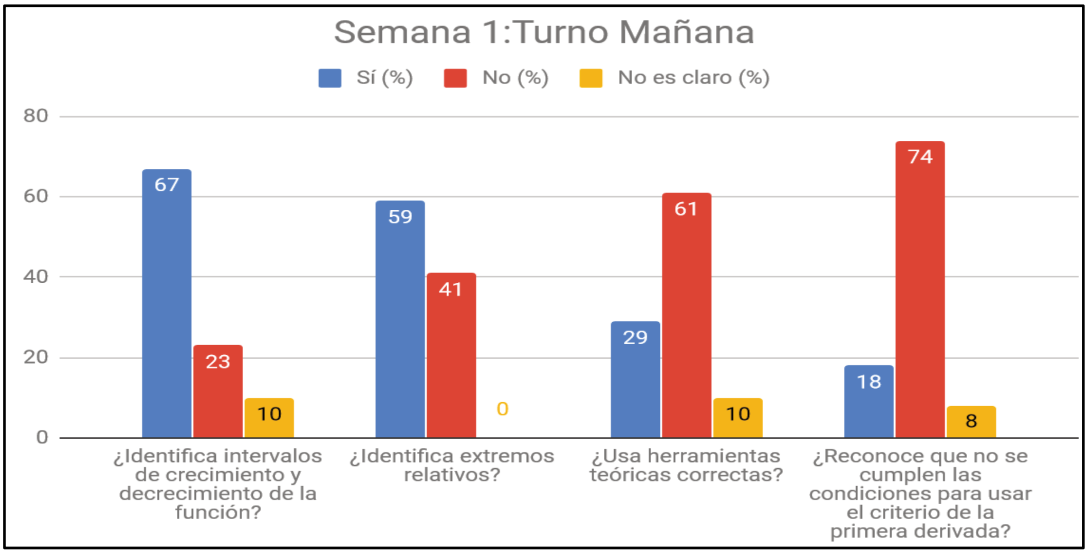


Gráfico 1: *Respuestas en el Registro Analítico. Turno Mañana*

Turno Tarde

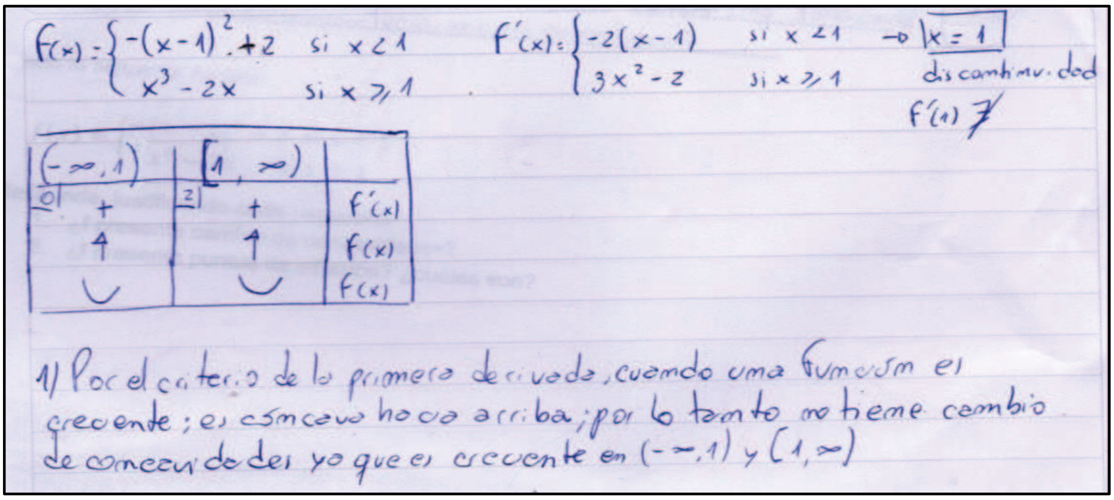
En el turno tarde, la primer consigna se refería a una función por partes *f*, y expresaba:

¿f presenta cambio de concavidades?	$f(x)=\begin{cases} -(x-1)^2+2 & \text{si x} < 1 \\ x^3-2x & \text{si x} \geq 1 \end{cases}$

Ante la misma, un 56 % de los estudiantes respondió correctamente. Al igual que en el análisis del turno mañana, en este porcentaje se encuentran incluidos estudiantes que presentaron errores algebraicos en sus respuestas pero que, en tanto coherentes a lo obtenido en sus cálculos, se consideraron satisfactorias. El resto de los alumnos no logró identificar los cambios de concavidades, o brindó explicaciones carentes de claridad y con cierto grado de incongruencia en las argumentaciones.

Esto último, se evidenció en algunos casos en los que, si bien realizaron correctamente los cálculos de la segunda derivada, y la determinación del signo de ella en cada intervalo, no lograron concluir en sus respuestas el significado de sus cálculos en la determinación de la concavidad. De la misma manera que lo analizado para el turno mañana, el origen de esta ambivalencia de corrección en el procedimiento, pero no en su correspondiente significación relativa a la característica funcional estudiada, podría atribuirse a la ausencia de vinculación entre la herramienta (criterio para la concavidad) que permite la identificación del concepto en cuestión y el concepto mismo (concavidad).

Otra situación que se presentó en varias oportunidades, tal como se mencionó en el análisis preliminar (4.1), es la alteración de la definición de concavidad, confundiendo el crecimiento de la derivada, con el crecimiento de la función, lo que conduce a obtener conclusiones equívocas. A continuación, se aprecia un ejemplo de ello:



$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 2 & \text{si } x < 1 \\ x^3 - 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} -2(x-1) & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ $\rightarrow \boxed{x = 1}$ discontinuidad $f'(1) \nexists$

$(-\infty, 1)$	$[1, \infty)$	
+	+	$f'(x)$
↑	↑	$f(x)$
∪	∪	$f(x)$

1) Por el criterio de la primera derivada, cuando una función es creciente; es cóncava hacia arriba; por lo tanto no tiene cambio de concavidades ya que es creciente en $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$

Resolución Lucía R.

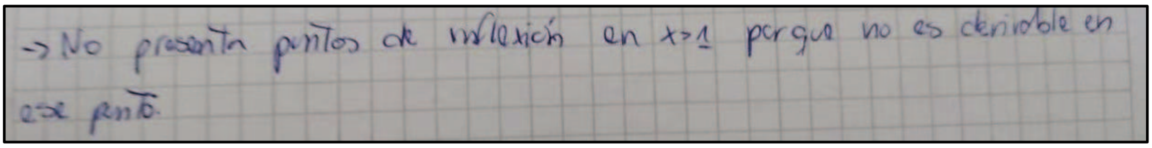
En ambas situaciones podría asociarse, según Douady, con dificultades en la distinción de los aspectos *objeto* e *instrumento* de los conceptos involucrados. Por otra parte, es posible inferir, la eventual presencia de problemas de significación en los aprendizajes en términos de Ausubel. Esto es, en particular, en el último caso, no logra asimilar y ensamblar la idea del crecimiento de la derivada, con el signo de la segunda derivada, y de este modo, determinar la concavidad de la función, trasladando características erróneas.

Ante las siguientes preguntas, vinculadas entre sí:

¿f presenta puntos de inflexión? ¿cuáles son?

20 de los 46 estudiantes reconocieron que no hay punto de inflexión en la función dada, pero sólo 6 de ellos justificaron correctamente empleando las herramientas teóricas pertinentes, argumentando que no se presentaron las condiciones para la existencia de punto de inflexión.

Cabe señalar que se observaron algunas fundamentaciones confusas, cuando no incoherentes, que proponían requisitos adicionales a los explicitados en el criterio para la determinación de punto de inflexión, que si bien funcionaban, en particular, para la función de la consigna, no ocurría lo mismo en casos más generales, originando de esto modo no sólo un posible obstáculo didáctico, sino también el impedimento de aplicar la estrategia de resolución a situaciones más generales, propias de eventuales elecciones de espirales didácticas que involucren un ámbito más general. Por ejemplo, en la siguiente imagen se puede apreciar la exigencia de la existencia de la derivada, excluyendo la posibilidad de funciones que tienen rectas tangentes verticales:


-> No presenta puntos de inflexión en x>1 porque no es derivable en ese punto.

Resolución Camila M.

Estos conteos podrían considerarse como un indicador de que la mayoría de los alumnos no lograron dar una respuesta satisfactoria, y menos aún justificar debidamente, expresando con claridad las condiciones para la existencia de dicho punto de inflexión. Esto último parece manifestar, similarmente al turno mañana, que muchos estudiantes realizaron algunos cálculos correctos desde la mecánica, pero sin hacer el correspondiente análisis reflexivo sobre ellos que les permita responder de manera satisfactoria la consigna.

A modo de síntesis, se presenta el siguiente gráfico:

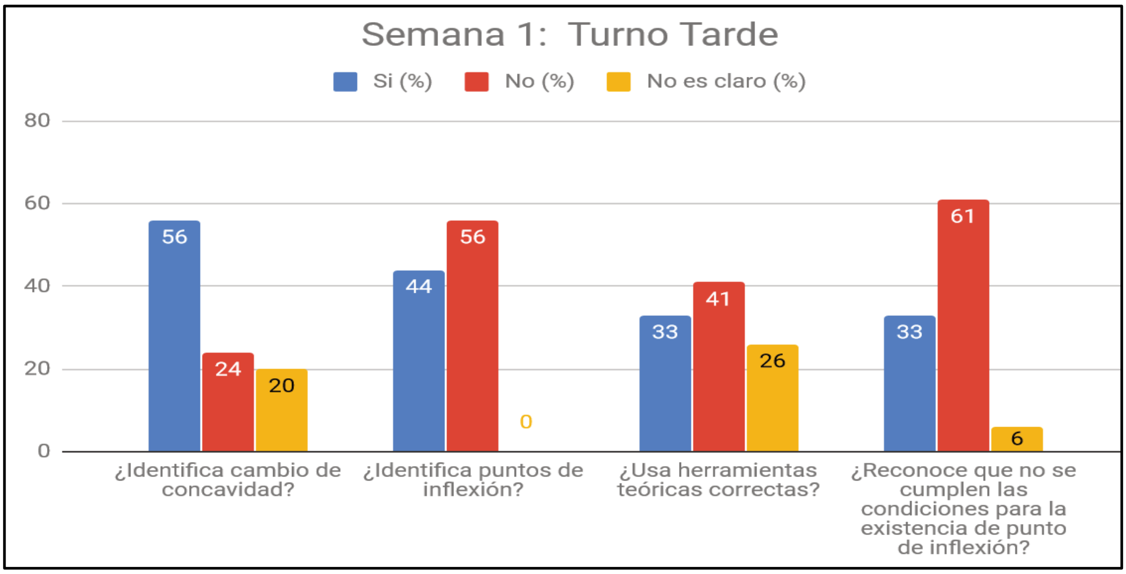


Gráfico 2: *Respuestas en el Registro Analítico. Turno Tarde*

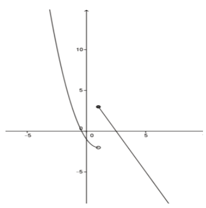
4.2.4.2 Análisis de respuestas al cuestionario gráfico

Dada la gráfica de una función por partes se realizaron dos preguntas referidas al tema de interés, que se detallan a continuación, por turno.

Turno Mañana

La consigna 1 indicaba:

¿En qué intervalo/s f es creciente y en cuáles decrece?



Ante esta pregunta, 44 de los 49 estudiantes identificaron correctamente que la gráfica de la función dada es decreciente en cada intervalo definido del dominio, es decir, sólo 5 alumnos no lograron responder correctamente.

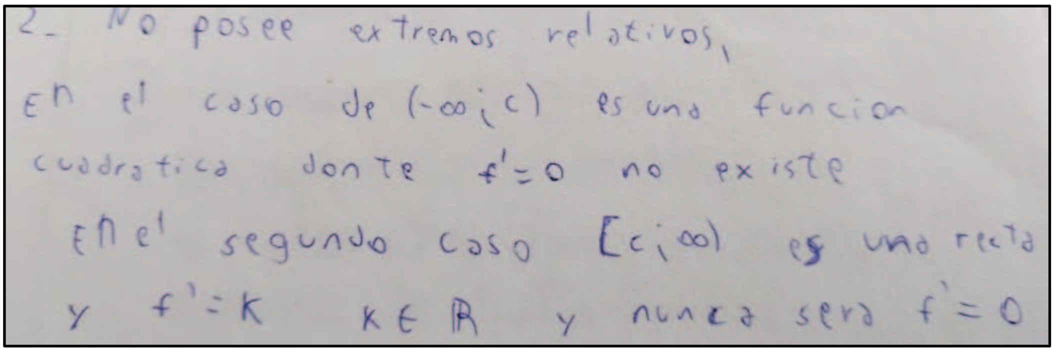
Sin embargo, cabe consignar que sólo 15 de las 44 respuestas correctas expresaron la notación adecuada de los intervalos de decrecimiento, mientras que los 29 restantes evidenciaron ciertas incongruencias, del tipo: "la función es decreciente en todos los reales", sin tener en cuenta que en intervalos donde se incluye el punto de salto puede no cumplir con la definición de decrecimiento. Este tipo de falencias podría atribuirse a cuestiones de naturaleza diversa, entre las que cabe mencionar falta de significatividad en el aprendizaje del concepto de monotonicidad (no contemplan analizar las discontinuidades para la aplicabilidad o no del criterio apropiado), dificultad en el avance de la espiral didáctica al pretender reinvertir una estrategia aprehendida en un plano en particular (la continuidad en el dominio) a otro más general, generando así el surgimiento de posibles obstáculos didácticos.

Podría también atribuirse como posible origen del problema a la incidencia del registro gráfico, dado que la función propuesta exhibe, salvo en el punto de discontinuidad una *forma o estética* que podría inducir a verla, en tanto decreciente en cada tramo, como decreciente en su dominio global.

La consigna 2 consistió en dos preguntas, la primera solicitaba lo siguiente:

¿Qué extremos relativos tiene f?

En este caso, 37 estudiantes respondieron correctamente, mientras que sólo 12 no reconocieron el extremo relativo de la función. Si bien resulta considerable que la mayoría respondió correctamente, se puede apreciar, relacionando con la respuesta anterior, que algunos de los que lograron reconocer los intervalos de decrecimiento no identificaron el extremo relativo, como puede observarse en la siguiente imagen:


2_ No posee extremos relativos,
En el caso de $(-\infty; c)$ es una funcion
cuadratica donte $f'=0$ no existe
En el segundo caso $[c; \infty)$ es una recta
y $f'=k$ $k \in \mathbb{R}$ y nunca sera $f'=0$

Resolución Nahuel G.

Esta situación podría adjudicarse a cierta falta de significación en la incorporación de los nuevos conceptos involucrados. Tal es la situación al momento de expresar condiciones no exigibles (la continuidad) para la existencia del extremo o utilizar el criterio de la primera derivada, sin revisar previamente si estaban dadas las condiciones para su aplicabilidad en el dominio de la función, lo que los condujo a asegurar la inexistencia de extremo relativo. A su vez, nuevamente podría asociarse a la falta de distinción entre los aspectos *objeto* e *instrumento* del concepto propuestos por Douady, donde prevalece el uso de la herramienta por encima de la definición.

La segunda pregunta de la consigna 2 fue:

¿El criterio de la primera derivada resulta útil en este caso? ¿Por qué?

En ella se observó que 43 de los 49 alumnos reconocieron que no es posible utilizar dicho criterio y justificaron adecuadamente, mientras que sólo 5 no reconocieron las condiciones.

Estos resultados pueden considerarse alentadores, ya que la mayoría de estudiantes respondieron correctamente esta consigna. A su vez, permiten considerar que el trabajo desde el registro gráfico contribuyó a comprender el uso del criterio de la primera derivada para determinar extremos relativos.

La información puede sintetizarse en el siguiente gráfico:

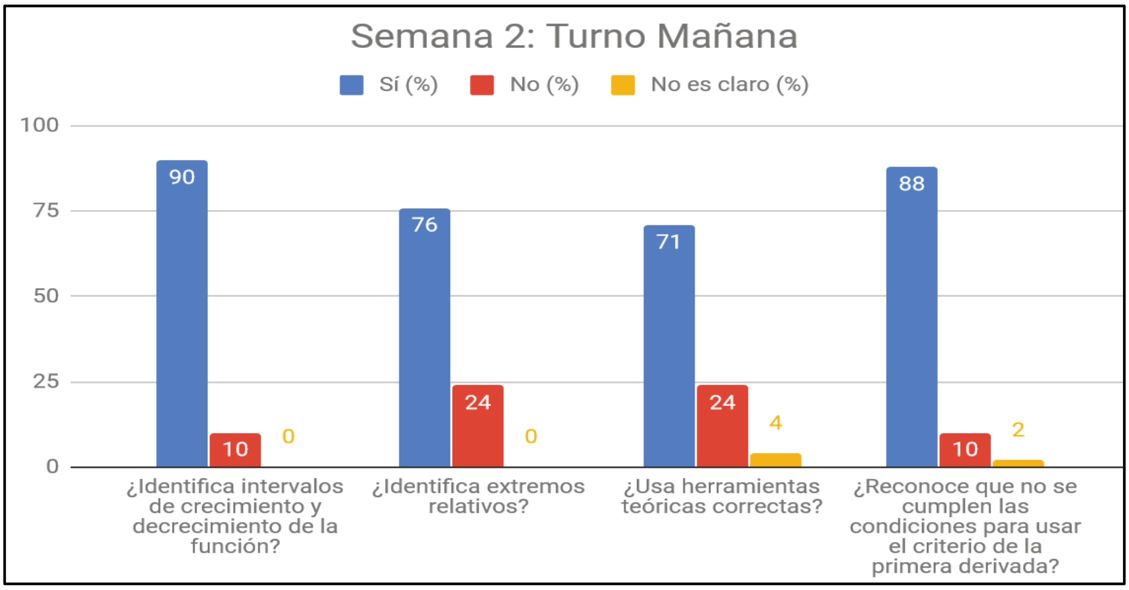
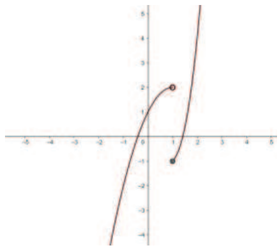


Gráfico 3: *Respuestas en el Registro Gráfico. Turno Mañana*

Turno Tarde

En el turno tarde, ante la primer consigna:



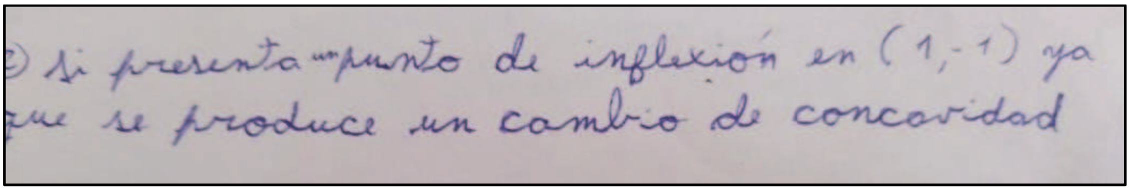
¿f presenta cambio de concavidades?

43 de 46 estudiantes respondieron correctamente, lo que permite suponer que el concepto de concavidad no presenta, al menos desde el registro gráfico, mayor conflictividad.

La segunda consigna expresaba:

¿f presenta puntos de inflexión? ¿cuáles son?

En este caso, se detectaron 34 respuestas correctas al determinar que la función no presenta punto de inflexión. El resto respondió de manera equivocada, no concluyente o poco clara. Dentro de estos últimos, se detectan casos como el que se presenta a continuación:



2) Si presenta un punto de inflexión en (1,-1) ya que se produce un cambio de concavidad

Respuesta de Criselma M.

En el fragmento anterior se evidencia cierta falta de interpretación o reconocimiento de las condiciones exigidas para la existencia de punto de inflexión, lo que conduce a pensar en alguna dificultad en la significación del aprendizaje del concepto, jerarquizando la condición del cambio de concavidad por sobre la continuidad en el punto.

Además, cabe resaltar que 33 de ellos justificaron adecuadamente, haciendo uso de las herramientas teóricas pertinentes y aclarando que no se daban las condiciones para que exista punto de inflexión.

El conteo parece confirmar lo que sostiene Duval (1999), acerca de la importancia de la alternancia de registros, en el sentido que el trabajo en el registro gráfico, como alternativa al analítico, colabora para que los estudiantes indaguen sobre las condiciones requeridas para la aplicación de una determinada herramienta y favorezca de este modo la comprensión del concepto de punto de inflexión.

A continuación, se presenta un gráfico que resume la información expuesta para la segunda semana del turno tarde:

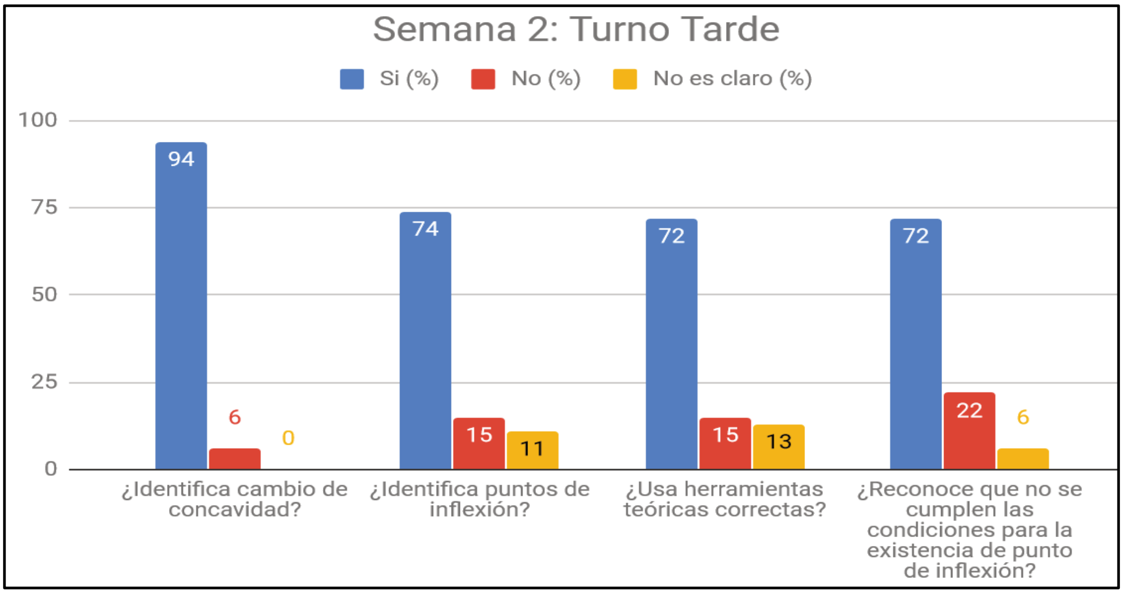


Gráfico 4: *Respuestas en el Registro Gráfico. Turno Tarde*

4.2.4.3 Análisis comparativo registro analítico - registro gráfico

El análisis de la información obtenida a partir de los cuestionarios en cada registro, como se detalló en los apartados (3.2.3.4.1) y (3.2.3.4.2), permitió conformar una primera noción acerca del estado de situación de cómo los alumnos distinguen, en caso de que lo hagan, las características funcionales como concepto de las herramientas que permiten su identificación o cálculo, constatar la realización o no de la verificación previa de las condiciones de aplicabilidad de las mismas e indagar acerca de los errores típicos de los estudiantes en el tema, tanto sean de orden conceptual como operativos.

Lo anterior dio lugar a una segunda fase, de análisis comparativo, alumno por alumno, consigna a consigna, entre aquéllas que se correspondían exactamente. A partir de ésto, y teniendo en consideración las distintas argumentaciones dadas por los estudiantes, fue factible obtener indicadores sobre cuestiones de importancia para la presente investigación, como:

- La contrastación de respuestas de los alumnos bajo distintos registros de formulación de una misma consigna como medida del grado de coherencia de las mismas.
- La determinación de la incidencia o no del registro gráfico en el esquema de razonamiento de los alumnos como alentador de una buena conceptualización en los temas referidos a las características funcionales en estudio.

- La posible puesta en crisis de conocimientos adquiridos con anterioridad, a partir de una mirada analítica, que se relaciona de manera directa con la noción de obstáculo.

Cabe recordar, tal como se señaló en (4.2.1) que sólo se contabilizaron las producciones provenientes de los alumnos que respondieron ambas consignas en el mismo turno, para poder comparar sus respuestas, lo que significó un total de 49 alumnos del turno de la mañana y 46 del vespertino.

Cabe recordar que, tal como se explicó en el desarrollo de (4.2.4), si bien algunos estudiantes presentaron errores algebraicos menores, de escritura y de notaciones, el interés del análisis no radica en ellos, sino en la comprensión de los conceptos y la coherencia de sus respuestas a preguntas isomórficas realizadas en distintos ámbitos de representación.

En una primera comparación general, considerando cada uno en su totalidad, esto es, sin analizar consigna a consigna, se observó que casi un 70% de estudiantes en ambos turnos logró interpretar y responder correctamente el cuestionario de la semana 2 (registro gráfico), mientras que en el cuestionario de la semana 1 (registro analítico) sólo alrededor de un 20% lo logró, observándose, en ambos turnos dificultades de diversa naturaleza.

Además, merece consignarse que, en el análisis de respuestas alumno por alumno, se observó que en el turno mañana 20 de los 39 (el 79.59%) que respondieron erróneamente en el registro analítico, lo hicieron satisfactoriamente en el registro gráfico, lo que representa que un 51% de estos alumnos interpretaron diferente la consigna según el tipo de registro empleado, siendo favorable el gráfico o visual.

Lo anterior parece confirmarse en el turno tarde: de los 38 (82.61%) que respondieron incorrectamente en la primer semana, 24 de ellos respondieron adecuadamente en la segunda semana, lo cual podría interpretarse como que este porcentaje de 63% de estudiantes que modificó su interpretación lo hizo en virtud de la incidencia del registro semiótico utilizado en su esquema de razonamiento.

Lo expuesto hasta el momento, puede sintetizarse en los siguientes gráficos, que ilustran, de manera general, considerando las tres consignas en conjunto, lo observado en cada semana, en cada turno:

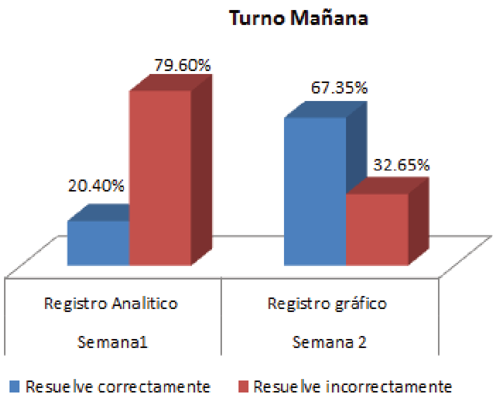


Gráfico 5: *Turno Mañana*

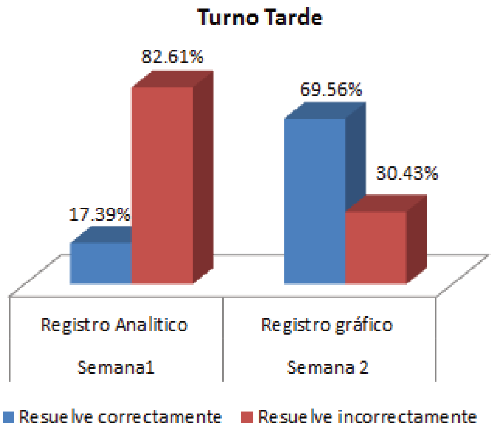


Gráfico 6. *Turno Tarde*

En una segunda mirada, más minuciosa se compara consigna por consigna las respuestas de cada alumno, diferenciando el tipo de registro utilizado y el turno en el que ha respondido.

A continuación se detalla, el análisis comparativo realizado por turno.

Turno Mañana

Ante la consigna 1 que indicaba:

¿En qué intervalo/s f es creciente y en cuáles decrece?

Se observó que casi un 70% de los estudiantes respondieron correctamente en el registro analítico (ver gráfico 1), mientras que casi un 90 % logró respuestas satisfactorias en el registro gráfico (ver gráfico 3).

Estos porcentajes muestran, que si bien la mayoría de los estudiantes logran identificar los intervalos de monotonicidad en ambos registros s de representación, se aprecia en el gráfico una mejoría en las respuestas que podría resultar un indicador favorable para este registro en términos de la comprensión de los conceptos en juego.

La consigna 2 se conformaba por dos preguntas. La primera de ellas expresaba:

¿Qué extremos relativos tiene f?

En este caso, se observó que 29 de los 49 estudiantes, interpretaron correctamente los cálculos realizados en el registro analítico, mientras 37 de ellos respondieron satisfactoriamente en el registro gráfico.

Cabe señalar que, si bien estos datos muestran una mejoría en las respuestas dadas en la semana 2 (registro gráfico), se observa, sin embargo, que se presentaron más errores ante esta pregunta en ambos cuestionarios que en la primer consigna. La probable causa podría atribuirse a cierta falta de significación en el aprendizaje de los conceptos, dado que a pesar de la estrecha relación existente entre las características funcionales de monotonicidad y extremos relativos, no logran vincularlas satisfactoriamente.

La segunda pregunta de la consigna, en la semana 1 fue:

¿Qué herramienta teórica usó para determinarlos?

mientras que en la semana 2:

¿El criterio de la primera derivada resulta útil en este caso? ¿Por qué?

En las respuestas, sólo en 14 de los 49 alumnos se observó el adecuado uso de las herramientas teóricas para contestar en el registro analítico, mientras que, en el registro gráfico, 35 respondieron correctamente lo cual representa un avance alentador en tanto más del doble de los estudiantes lograron dar argumentos adecuados en el cuestionario de la segunda semana.

Por otra parte, en la consigna analítica más de un 73% no reconoció que no se cumplían las condiciones para el uso del criterio de la primera derivada, mientras que, al observar el gráfico, casi un 88% sí adujo que no era posible usar dicha propiedad.

Estos datos permiten una interpretación según dos planos de análisis: por un lado, evidencian que el trabajo en el registro gráfico parece favorecer el reconocimiento de condiciones para emplear una determinada herramienta de cálculo, pero, por otro, aún en el mismo plano, casi un 25% (de los 43 alumnos que se percataron en el registro gráfico de la no aplicabilidad del criterio por no cumplirse sus hipótesis) no logró identificar correctamente los extremos relativos de la función.

En la exploración de las posibles causas de este hecho, podríamos conjeturar que, probablemente, el trabajo en el ámbito gráfico permite determinar la característica de monotonicidad funcional *a simple vista*, con independencia del uso de una propiedad teórica relativa al tema, pero resultaría, a la vez, insuficiente para la determinación de otros atributos (extremos) para los cuales no se puede prescindir y, en términos del mismo Duval, es altamente aconsejable no hacerlo, del libre tránsito dentro y entre registros, poniendo así de relieve la necesidad de la alternancia de planos de representación para la adquisición de aprendizajes satisfactorios. Otra posible causa de esta falencia estaría dada en la ausencia o insuficiencia de conceptualización en el aprendizaje de extremo relativo, en donde los estudiantes parecen sólo necesitar del conocimiento de la monotonicidad antes y después del punto en cuestión, haciendo caso omiso a, precisamente, el comportamiento funcional en dicho punto incluso podría inferirse que algunos consideran a la continuidad local como condición necesaria para la existencia de un extremo.

A modo de resumen, se aprecia a continuación una tabla que da cuenta de lo mencionado en el análisis comparativo del primer turno:

Turno Mañana												
	Semana 1: Registro Analítico (49 alumnos)						**Semana 2: Registro Gráfico (49 alumnos)**					
¿Identifica intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función?	Sí	%	No	%	No es claro	%	Sí	%	No	%	No es claro	%
	33	67,3	11	22,4	5	10,2	44	89,8	5	10,2	0	0
¿Identifica extremos relativos?	Sí	%	No	%			Sí	%	No	%		
	29	59,2	20	40,8	0	0	37	75,5	12	24,5	0	0
¿Usa herramienta teórica?	Bien	%	Mal	%	No Usa	%	Bien	%	Mal	%	No Usa	%
	14	28,6	30	61,2	5	10,2	35	71,4	12	24,5	2	4,1
¿Reconoce que no se cumplen las condiciones para usar el criterio de la primera derivada?	Sí	%	No	%	No es claro	%	Sí	%	No	%	No es claro	%
	9	18,4	36	73,5	4	8,1	43	87.8	5	10,2	1	2

Tabla 2*: Respuestas a las consignas en ambos registros: turno mañana*

Turno Tarde

La primer consigna:

¿f presenta cambio de concavidades?

En los conteos en el registro analítico, mostró que un 56% respondió correctamente mientras que en el registro gráfico, casi la totalidad de alumnos, un 93%, reconoció que hubo cambio de concavidades. Estos datos parecen indicar una mejor interpretación de los datos para determinar concavidades cuando el estudiante puede responder a partir de la observación de la gráfica.

La segunda consigna decía:

¿f presenta puntos de inflexión? ¿cuáles son?

En este caso, se observó que 20 de los 46 estudiantes lograron responder correctamente según los cálculos que realizaron en el cuestionario de la semana 1, mientras que 34 contestaron de manera acertada con la visualización de la gráfica, lo cual representa una diferencia sensible.

Por otra parte, 15 estudiantes usaron correctamente las herramientas teóricas para justificar sus respuestas en el registro analítico, mientras que en el gráfico, lo hicieron 33 alumnos.

Además, un 65% no verificó el cumplimiento de las condiciones de existencia impuestas en la definición de punto de inflexión en la consigna analítica, pero casi un 72% logró reconocerlas mediante la observación de la gráfica.

Estos datos podrían revelar que, en el registro analítico, muchas veces, los estudiantes usan las herramientas sin hacer la debida comprobación previa de hipótesis o condiciones para el correcto uso de una definición, criterio o teorema, remitiéndose sólo a la aplicación de un proceso mecánico para dar una respuesta. En cambio, el trabajo en el registro gráfico parece colaborar con que el estudiante logre, *a simple vista*, comprender que no se dan las condiciones, y reflexionar sobre las herramientas teóricas abordadas, permitiendo razonar el uso de otros conceptos que resulten viables para el abordaje de su situación problema.

En la siguiente tabla, se sintetiza la información expuesta de la comparación según el tipo de registro en el turno tarde:

Turno Tarde												
	Semana1: Registro Analítico (46 alumnos)						**Semana 2: Registro Gráfico (46 alumnos)**					
¿Identifica cambio de concavidad?	Si	%	No	%	No es claro	%	Si	%	No	%	No es claro	%
	26	56,5	11	23,9	9	19,6	43	93,5	3	6,5	0	0
¿Identifica puntos de inflexión?	Si		No				Si		No		No responde	
	20	43,5	26	56,5			34	73,9	7	15,2	5	10,8
¿Usa alguna herramienta teórica?	Bien		Mal		No usa		Uso Correcto		Uso incorrecto		No usa	
	15	32,6	19	41,3	12	26,1	33	71,7	7	15,2	6	13,1
¿Reconoce que no se cumplen las condiciones para la existencia de punto de inflexión?	Si		No		Confuso		Si		No		Confuso	
	15	32,6	28	60,8	3	6,5	33	71,7	10	21,7	3	6,5

Tabla 3: *Respuestas a las consignas en ambos registros: turno tarde*

4.3 Las entrevistas

4.3.1 Implementación

Las entrevistas se llevaron a cabo aproximadamente veinte días después de procesados los cuestionarios de ambos turnos.

Tal como se detalló en la sección (3.2.3.3), la selección de la muestra de alumnos a entrevistar fue *intencional*, teniendo en cuenta los focos más importantes a los fines de este estudio, surgidos de sus producciones en los cuestionarios. Se basó en dos criterios: la contrastación, en ambos cuestionarios, de las respuestas referidas a la identificación de las características funcionales objeto de la investigación (monotonicidad, extremos, concavidades e inflexión de funciones reales de variable real) y los comentarios surgidos a partir del pedido de justificación en la determinación de las mismas, que pudieran dar lugar a un análisis más profundo.

Así, de entre los 49 alumnos del turno mañana y los 46 del turno tarde que respondieron los dos cuestionarios, se seleccionaron 12 (doce), y se los contactó por correo electrónico.

De los 12 (doce) seleccionados, solo se concretaron 8 (ocho) entrevistas, ya que, con los restantes 4 (cuatro) estudiantes, no fue posible coordinar un horario para el encuentro.

En aquellos casos que no respondieron el correo, se los contactó luego del dictado de clase, de manera más informal. En ambas situaciones se les comunicó que el motivo era el de realizarles una entrevista, y se les explicó el objetivo de la misma y la importancia de sus respuestas para el desarrollo de la investigación. La reacción espontánea de los alumnos se caracterizó por la natural curiosidad que les despertaba, pero siempre estuvo presente la mejor voluntad de colaborar.

Se les propuso un encuentro presencial e individual, en aulas solicitadas previamente, en día y hora consensuados de modo que ninguno de los convocados tuviera que concurrir de exprofeso a la cita ni se le superpusiera con horarios de actividades académicas programadas. Una vez acordado el encuentro se dio inicio a la entrevista, considerando y atendiendo a los cuatros momentos propuestos por Niño Rojas (2011): una primera etapa, correspondiente a la entrada, que consiste en saludo y ambientación, luego el inicio de la entrevista, donde se plantea el tema y primeras preguntas. Como tercer momento se presenta el cuerpo de la entrevista, formado por preguntas y el diálogo central y, por último, el cierre, donde se realizan preguntas, aclaraciones finales y el agradecimiento.

Se presupuestó, inicialmente, media hora reloj para cada entrevista, aunque la duración de la misma se planteó como una cuestión no determinante, en el sentido de disponer de una eventual flexibilidad por caso hiciera falta tiempo extra para conversar sobre alguna cuestión puntual, sólo atendiendo, en caso de extensión, a avisar al alumno que estaba en espera de ser entrevistado. Así, ante el típico "... a ver, déjamelo pensar un poquito…" no hubo reparo alguno en acceder.

Las entrevistas tuvieron una duración total de dos semanas, a razón de dos entrevistados por día, en dos días a la semana.

Al inicio mismo de cada entrevista, se explicó nuevamente a cada alumno el objetivo de la misma y se remarcó que las preguntas que se realizarían no formaban parte de una instancia de evaluación, sino que sirven para el desarrollo de una investigación, por lo que resultan de vital importancia sus respuestas. De este modo, se logró generar un clima ameno y cordial, confiable, con intercambios de ideas que, a la vez de generar un ámbito agradable, permitió, por un lado, que el estudiante no se sienta intimidado y, por otro, la obtención de registros de valía para la investigación, como, por ejemplo, conocer más de cerca las estrategias de razonamiento que emplean para resolver situaciones con cierto grado de dificultad, los puntos en los que focalizan su atención una vez dada la consigna, etc.

Las entrevistas fueron grabadas en formato digital (audio), lo cual fue comunicado a cada entrevistado sin que ninguno de ellos mostrara reparo alguno. Es destacable la naturalidad con la que se expresaron a pesar de saberse en la situación de interpelados.

Con el fin de poder analizar la información con mayor precisión y profundidad, las mismas fueron desgrabadas (los registros completos se exhiben en el Anexo II).

4.3.2 Objetivos

Según Hernández Sampiere et al. (2014) el propósito de las entrevistas es conocer e indagar sobre un tema de interés en los términos, lenguaje y perspectiva del entrevistado ("en sus propias palabras"), por lo que es vital que el entrevistador escuche con atención y cuidado, y lograr un ambiente natural, espontáneo y amplitud de respuestas.

En particular para este estudio el interés de las entrevistas radica en:

- Comprender y profundizar en los razonamientos de los estudiantes que, oportunamente, originaron sus respuestas en los cuestionarios.

- Enfrentar a los alumnos con las contradicciones detectadas según el registro de representación utilizado en cada cuestionario para indagar sobre el origen de las mismas.
- Determinar la incidencia del uso de la alternancia de los registros de representación en la comprensión de cada concepto en estudio.
- Detectar la presencia de obstáculos didácticos, problemas de ausencia o insuficiencia de significación en aprendizajes, de comprensión en la lectura.

4.3.3 Estructura

Como se mencionó en la sección (3.2.3.3), referida al diseño**,** se decidió elaborar entrevistas semiestructuradas, en el sentido que, si bien se trazó una línea directriz para las preguntas y eventuales planteos, cada encuentro tuvo su propio matiz, su tinte particular en relación a las respuestas dadas por los estudiantes, la exposición de sus planteos y conjeturas, todo enriquecido con la posibilidad de repreguntar.

Cabe señalar que, en cada entrevista, quedaron delineadas tres etapas:

La primera, conformada por preguntas relacionadas al primer cuestionario (registro analítico), la segunda etapa referida a preguntas ligadas al segundo cuestionario (registro gráfico) y, por último, se presentaba al entrevistado las contradicciones e incongruencias detectadas en sus respuestas y se proponían preguntas que buscaban indagar sobre los razonamientos con el fin de rescatar insumos de utilidad para esta investigación. En esta última etapa, se intenta también, impulsar acciones en torno a la *conversión* en diferentes registros, de modo de esbozar tareas ligadas a la *producción de representaciones complejas* (Camargo, 2013).

A continuación, se expone la estructura general de la entrevista diseñada (flexible a cambios durante el desarrollo de la misma), que sirvió de guía para el entrevistador:

Primera etapa

Se le entregará al entrevistado la resolución realizada en la consigna analítica para que observe su producción, luego se realizará preguntas entorno a las siguientes:

1. ¿Cómo resolviste la actividad? ¿Qué conceptos y/o propiedades utilizaste para resolverla?

2. ¿Qué dificultades se presentaron en la resolución? ¿Cómo las superaste?

Segunda etapa

Se le entregará al entrevistado la resolución realizada en la consigna gráfica para que observe su producción, luego se realizará preguntas entorno a las siguientes:

1. *¿Cómo resolviste la actividad? ¿Qué conceptos y/o propiedades utilizaste para resolverla?*
2. *¿Qué dificultades se presentaron en la resolución? ¿Cómo las superaste?*

Tercera etapa

Antes de continuar con las preguntas se le hará notar al entrevistado las contradicciones en sus respuestas para que luego responda entorno a lo siguiente:

1. *¿Te diste cuenta de que era la misma pregunta formulada desde dos abordajes diferentes?*
2. *Ambas actividades podían responderse con las mismas herramientas teóricas y obtener la misma conclusión, sin embargo, tus respuestas fueron diferentes. ¿A qué crees que se debe?*
3. *¿Qué registro(analítico o gráfico) te resultó más cómodo? ¿Por qué?*

4.3.4 Análisis de las entrevistas

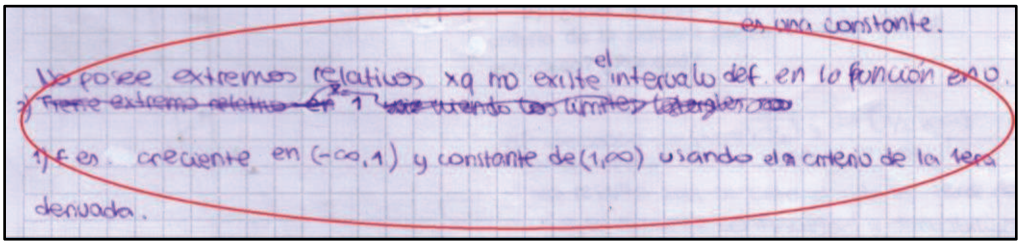
Como se mencionó anteriormente, luego de realizadas las entrevistas, se procedió a desgrabarlas (los registros completos se encuentran en el Anexo 2).

Posteriormente, y a partir de un minucioso análisis de las mismas, se obtuvo información de importancia para este trabajo.

Fue posible entonces profundizar en focos de interés para el trabajo como son los referidos a los registros de representación semiótica, dificultades de lectoescritura y comprensión de consignas, obstáculos didácticos, adquisición de aprendizajes satisfactorios en términos de significación. Las respuestas dadas por los alumnos en los diálogos y la exposición de sus esquemas de pensamiento fueron entonces organizadas según los puntos detallados previamente. Se muestra a continuación un detalle de la clasificación realizada.

- *Confusión de roles entre una función y su derivada para la determinación de atributos de la gráfica.*

En varias respuestas se advirtió que para determinar la monotonicidad (concavidad) en los intervalos, los estudiantes atribuyeron características de la función derivada (o segunda derivada) a la función original, como lo muestra el siguiente fragmento, en el que una alumna asigna la característica de constante a la función en el intervalo, en tanto lo es la función derivada:



Emilia R. Consigna Analítica

Durante la entrevista se le pregunta con respecto a lo realizado en el registro analítico y responde de la siguiente manera:

Entrevistador (E): - Entonces ¿Qué pasa en ese intervalo? Acá escribiste que la función es constante ¿Por qué lo decís?

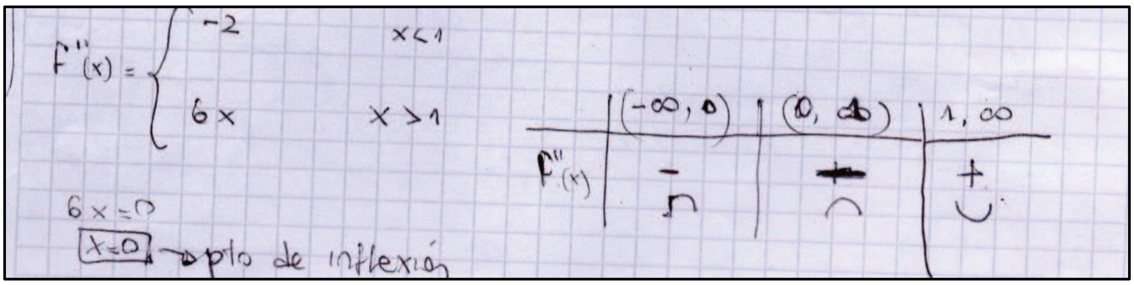
Alumno (A): - Porque la derivada me dio constante… si me hubiera dado algo con "x" … yo habría visto que tenía alguna pendiente. (Emilia R.)

Puede observarse cómo, en ocasiones, realizan mecánicamente ciertos cálculos, en este caso, los de las derivadas, pero no aportan la conceptualidad necesaria para una adecuada interpretación del criterio.

Una situación similar se presenta en la siguiente conversación:

A: - Humm... y acá (señala el primer tramo de la segunda derivada) es lineal, así que no tiene concavidad, y acá (señalando la segunda parte de la misma función) también es lineal, entonces ... acá no es continua (refiriéndose al punto de bifurcación de la función a trozos dada), acá la segunda derivada es… constante (vuelve a ver la primera ley de la segunda derivada). (Yamila Ch.)

Y otra alumna, en su resolución analítica expresa:



Luciana B. Consigna Analítica

Durante la entrevista, cuando se le pregunta al respecto, responde como sigue:

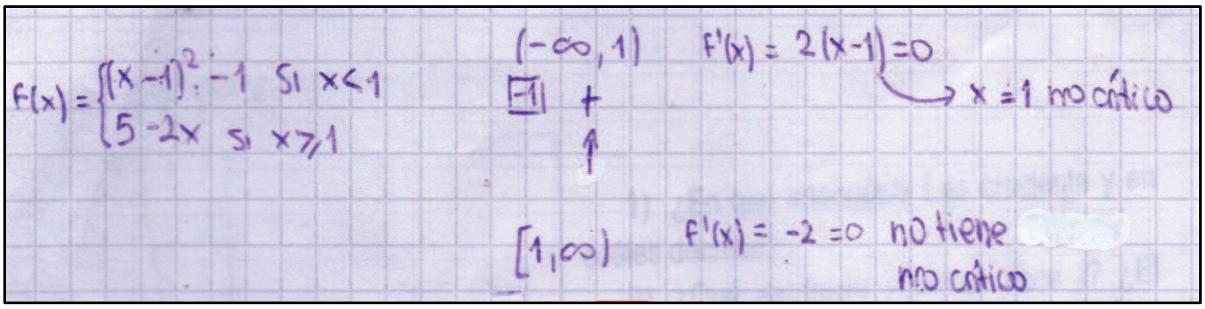
"la segunda derivada me da negativa, después me da positivo en el intervalo y por eso cambia de concavidad, pero igual es constante y después es lineal [...] no tiene concavidad si es constante" (Luciana B.).

En la última respuesta se aprecia que la estudiante conoce, al menos parcialmente, la relación entre la segunda derivada y la concavidad de una función. Sin embargo, al momento de expresar una conclusión, analiza la concavidad de la segunda derivada, advirtiendo características de su gráfica, que luego traslada a la de la función original.

Nuevamente, la mecanización de cálculos actúa de manera desfavorable para una significación en el aprendizaje del concepto que permita una buena articulación con los saberes previos.

Por otro lado, se observa que, a pesar de realizar adecuadamente la *formación* y *tratamiento* de representaciones en el ámbito analítico, una confusa interpretación, dificulta la *conversión* de lo obtenido al registro coloquial. En este sentido, Duval (2004) sostiene que todo discurso o texto abarca dos aspectos: uno vinculado con la redacción y el otro con los objetos de conocimiento, por lo que para comprender lo expresado en el registro verbal (definición, propiedad, teorema, etc.), requiere realizar un tratamiento que facilite tal adecuación.

Otro caso que refleja lo planteado se presentó cuando, ante la pregunta *¿en qué intervalos es f creciente y decreciente?,* algunos estudiantes, señalaron erróneamente el signo de la derivada en los intervalos de estudio, por consecuencia de errores de cálculo (que no son de interés para este trabajo) o bien por haber escogido a la función original, y no a la primera derivada, para realizar el análisis. Esta situación queda evidenciada al momento de confrontar al entrevistado con su producción:



$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 1 & \text{si } x<1 \\ 5-2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$(-\infty, 1)$ $f'(x) = 2(x-1) = 0 \to x = 1$ no crítico

$\boxed{f1}$ + ↑

$[1, \infty)$ $f'(x) = -2 = 0$ no tiene no crítico

Emilia R. Consigna Analítica

El diálogo transcripto a continuación refleja cierta confusión en sus respuestas dadas en el cuestionario:

E: - Y acá cuando decís que la función es creciente desde menos infinito a 1. ¿Por qué decís eso?

A: - (lee) y.... porque lo habré evaluado ... seguramente lo evalué en ésta (señala la primera de las ramas de la función original), me dio positivo, por el criterio, me da que es creciente. (Emilia R.)

Como se puede apreciar, una vez elegido el punto de prueba, la alumna traslada su análisis a la función original, no a su derivada, interpretando incorrectamente el criterio.

El estado de situación cambió en el registro gráfico, donde sí consiguieron, en su gran mayoría, identificar acertadamente la monotonicidad en los intervalos.

En el caso anterior, la misma alumna, al momento de enfrentarse a las contradicciones presentadas en ambos registros de representación, reflexionó:

A: - [...] Digamos ... acá (señala lo analítico) creo que tomé mal el valor de prueba, capaz.

E: - Si..., puede ser.

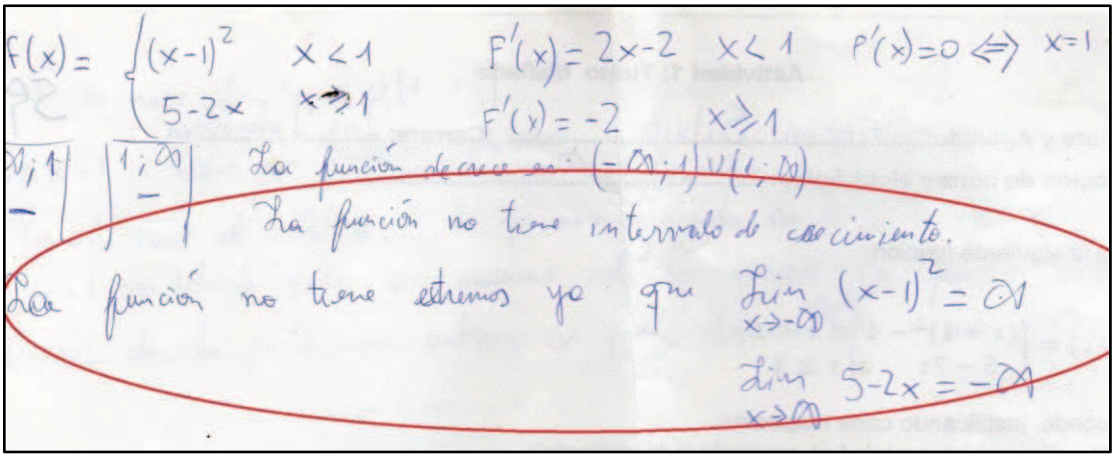
A: - ¿Por qué me dio positivo?, no sé por qué no me dio negativo. ¿Qué hice? Si yo lo reemplazo en éste (señala uno de los tramos de la derivada) me da negativo... no se qué puse (ríe) ... interpreté mal todo... son errores que cometo, que si los vuelvo a ver me doy cuenta, pero esto lo habré hecho mal porque lo hice rápido. Ahora lo veo bien. (Emilia R.)

Como se evidencia, al enfrentar a la alumna con sus producciones y apelando a la alternancia de análisis en diferentes registros de representación, pudo contrastar sus razonamientos realizados en cada uno, revisar los procedimientos, dar cuenta de los errores cometidos, y de ese modo, evolucionar favoreciendo la comprensión de los conceptos involucrados. En este sentido Duval (2006) plantea que la comprensión de un contenido conceptual se apoya en la coordinación de al menos dos registros de representación y ésta se percibe en la celeridad y naturalidad de la acción cognitiva de conversión.

- *Implementación de procedimientos ineficientes para el análisis de extremos relativos.*

Se observaron distintos casos en que los alumnos hallaron intervalos de monotonicidad de la función correctamente, pero concluyeron erróneamente acerca de la ausencia de extremos locales, adjudicándola a la no existencia de cotas para la función.

Un ejemplo de ello puede apreciarse en el siguiente fragmento:



$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x<1\\ 5-2x & x\geq 1\end{cases}\qquad f'(x)=2x-2 \quad x<1 \qquad f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$f'(x)=-2 \quad x\geq 1$$

$-\infty;1$	$1;\infty$
$-$	$-$

La función decrece en: $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$

La función no tiene intervalo de crecimiento.

La función no tiene extremos ya que $\lim_{x\to-\infty}(x-1)^2=\infty$

$\lim_{x\to\infty} 5-2x=-\infty$

Silvio S. Consigna analítica

La confusión entre los conceptos de *extremo relativo y absoluto* apoyada, precisamente, en la consideración de los límites en el infinito en vez de los laterales en el punto de bifurcación se refleja también en el siguiente extracto, que procuraba indagar sobre este aspecto:

E: - Con respecto a los extremos ¿Presenta extremos relativos? ¿Hay algún número crítico?

A: - (piensa) No había extremos relativos porque calculé los límites en el infinito y vi que siempre decrece, entonces no puede tener un máximo." (Silvio S.).

El estudiante reafirma lo realizado en el escrito, evidenciando no comprender las definiciones de los conceptos involucrados y sus diferencias. En este sentido, recurrir al comportamiento de la función en el infinito como herramienta idónea para la determinación de extremos locales resulta, al menos, ineficiente.

Sus respuestas en el registro gráfico fueron, en cambio, correctas. Al momento de confrontar sus contradicciones, el estudiante respondió:

E: - Bien, acá decís que decrece en ambos intervalos y que hay un extremo relativo ¿Cómo lo sabés?

A: - Y, en el gráfico se ve. [...]

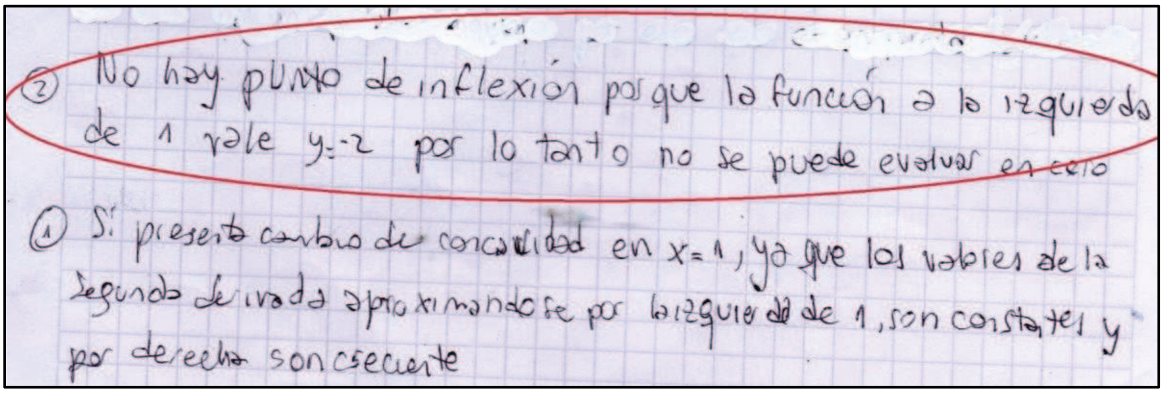
E: - Bien, recién vimos la contradicción que planteaste en una y otra actividad ¿Por qué crees que pasó esto? ¿Por qué crees que acá respondes de una manera y en la otra actividad diferente?

A: - Porque, cuando acá (en el analítico) usé el criterio de la primera derivada, lo hice por partes, y acá (en el gráfico) pude ver la función en su conjunto. (Silvio S.)

Como se puede observar, en el registro gráfico, el estudiante logró determinar el extremo relativo, sin ser este absoluto. Sin embargo, lo expuesto refleja un error en la elección de las herramientas de cálculo a utilizar, no logrando escoger la más apropiada para dar respuesta a la consigna. Al contrastar sus respuestas en diferentes registros de representación logró visualizar sus errores reflexionando en torno a ellos, mediante la revisión de sus planteos e interpretaciones.

- *Dificultades en competencias básicas y obstáculos.*

En varias respuestas, se detectaron dificultades ligadas a conceptos previos, que interfirieron en la resolución y alcance de las conclusiones esperadas. Entre ellas, se advirtieron inconvenientes para hallar la imagen de una función constante, que obstaculizaron el poder concluir de manera acertada una vez aplicado el criterio correspondiente.


(2) No hay punto de inflexión porque la función a la izquierda de 1 vale $y=-2$ por lo tanto no se puede evaluar en cero

(1) Sí presenta cambio de concavidad en $x=1$, ya que los valores de la segunda derivada aproximandose por la izquierda de 1, son constantes y por derecha son creciente

Luciana B. Consigna Analítica

El inconveniente se evidenció, por ejemplo, en expresiones del tipo *"no se puede evaluar en una función constante"*. Durante las entrevistas se obtuvieron respuestas como la que se muestra en la siguiente conversación:

E: - Hay algo que escribiste, que en -2 no se puede evaluar. ¿Qué quisiste expresar con eso?

A: - Porque es una constante, por lo tanto, no podés evaluar en 0, igual no hay punto de inflexión." (Luciana B.)

E: - Entonces ¿Qué pasa en ese intervalo? Acá escribiste que la función es constante ¿Por qué lo decís?

A: - Porque la derivada me dió constante… si me hubiera dado algo con "x" … yo habría visto que tenía alguna pendiente. (Emilia R.)

Como se puede observar, el surgimiento del obstáculo radica en la ausencia de la variable en la expresión de la función, lo que conduce a la alumna a resultados equívocos.

Otras situaciones que se manifestaron con cierta frecuencia están vinculadas a la determinación de la continuidad en un punto. En algunos casos, y aún ante la corrección de los cálculos en la comprobación del mencionado atributo funcional, no lograron concluir exitosamente, mostrando que si bien tienen una apreciación inicial acerca del tema que están analizando no alcanzan un aprendizaje acabado, con significación. El siguiente párrafo, que corresponde a un fragmento del encuentro con un estudiante, ilustra esta situación:

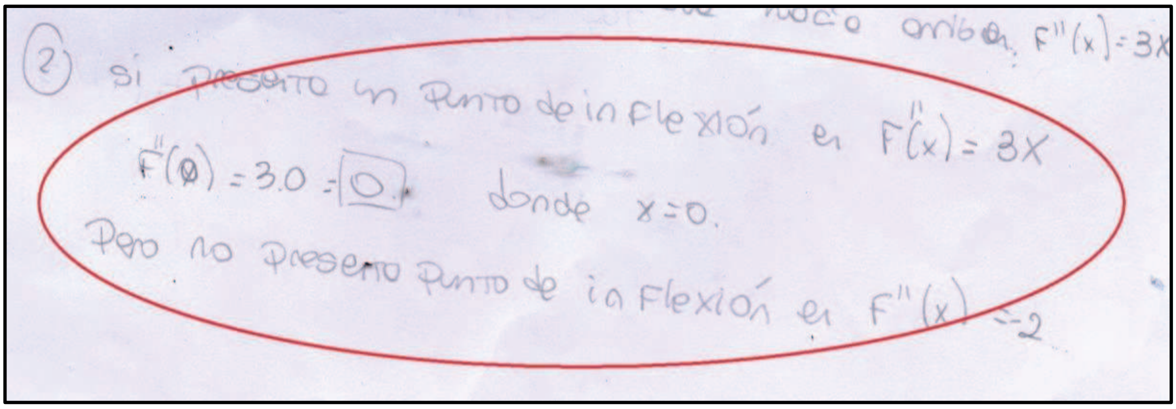
A: - Es más, yo me acuerdo de que lo había graficado, ahora bien, no sé si me dio bien… ah acá hice un límite (señala lo escrito en su hoja) ... y me había dado que no era continua....

E: - Pero acá habías puesto que lo era. (interrumpe)

A: - Sí, ya sé, … no me hagas caso…. O sea, eso lo puse al principio, y después dije: no, acá hay algo raro... y creo que aparte la grafiqué (duda y piensa) …. bueno no es difícil graficarla (mira la expresión de la función) ... y me puse a mirar e hice los límites laterales y no me daban. (Luciana B.)

Como se puede notar, la estudiante reconoció haber cometido un error al escribir que la función es continua, sin embargo, y a pesar de establecer que "había algo raro", no hizo referencia a los límites laterales diferentes que había calculado en su desarrollo.

En producciones de otros alumnos se percibieron problemas vinculados con la comprensión de funciones por partes o de continuidad lateral que, en tanto fallas en conocimientos adquiridos con anterioridad, se mostraban como obstaculizantes para la incorporación de nuevos aprendizajes. Así lo refleja el siguiente fragmento:



Antonela R. Consigna Analítica

Durante la entrevista, indagando sobre sus razonamientos se obtuvieron las siguientes respuestas:

A: - [...] No sabía tampoco si considerar este punto (señala en el gráfico el punto de discontinuidad) si era de inflexión, está acá pero, o sea es continua, es continua en este punto pero no en el de acá arriba (señala primero el punto cerrado, es decir la imagen de x=1 y luego el punto abierto), entonces como que tenía dudas en eso. [...]

A: - No sé, si tiene que ser toda continua o continua sólo en ese punto... y tener un cambio de concavidad.

E: - ¿Qué sería esto de que sea continua? ¿Qué estás queriendo decir?...

A: - Claro ... porque acá tiene un cambio de concavidad, pero está definido acá (señala el punto cerrado, donde se produce el cambio de ramas de la función) y no acá arriba (señala el punto abierto) entonces no sabía si esto era o no un punto de inflexión.

E: - ¿Qué tendría que pasar para haya punto de inflexión?

A: - Cambio de concavidad y tiene que existir el punto, o tiene que ser continua ... pero no sé si el continuo es de toda la función digamos. (Antonela R.).

Se puede advertir que sólo se toma en cuenta la continuidad lateral de cada tramo funcional que, a su vez, es percibido como una función en sí misma, independiente. También, subyace la *confusión* en el concepto de continuidad, asumiendo como suficiente para el mismo el hecho que la función esté definida en el punto.

Como se ve, persisten y se revelan errores en conocimientos previos que no permiten una incorporación adecuada de los nuevos saberes.

- *Extensión incorrecta del dominio de validez de una propiedad.*

En el desarrollo de las entrevistas se notó la falta de verificación por parte de los alumnos de las condiciones requeridas para la aplicación de una determinada propiedad o teorema. En tal sentido, y si bien en el registro gráfico las conclusiones fueron acertadas, evidencian no tener incorporado en su esquema mental la comprobación de las hipótesis, por lo que la herramienta se aplica, aunque, eventualmente, no esté en su dominio de validez.

Al presentar el problema, confrontando sus respuestas en ambos registros, un alumno expresó:

E: - [...] En el analítico usas el criterio de la primera derivada y en el gráfico decís que no podés usar ese criterio. ¿Por qué crees que acá (en el analítico) lo usaste?

A: -Con el criterio de la primera derivada, si lo pienso para sacar máximos y mínimos, obtengo también un punto en que no existe la derivada. Pero claro, si después evalúo ese punto en la función, me tiene que dar un valor más alto que los otros, puede ser máximo y si es menor puede ser mínimo. En lo analítico lo usé (al criterio) como estrategia porque no tenía la gráfica ni nada, lo más fácil sería usar el criterio de la primera derivada. (Esteban A.)

Se puede observar cómo, por *instinto* inicial, en el registro analítico, el estudiante selecciona el criterio acorde para resolver la consigna, pero sin la revisión previa de sus condiciones para ser aplicado, proceder que lo conduce a utilizarlo fuera del ámbito de validez del mismo. Al ser confrontado con su respuesta en el registro gráfico, reflexionó y se percató de su error.

- *La incorporación de hipótesis adicionales erróneas.*

De manera complementaria a la categoría que exponía la falta de verificación de hipótesis previo a la aplicación de un criterio, se pudo observar el surgimiento de inconvenientes relacionados con requerimientos equivocados a la hora de aplicar una determinada herramienta. Así, por ejemplo, en el siguiente diálogo:

"para que sea punto de inflexión, tenía que haber cambio de concavidad, tenía que haber recta tangente horizontal y existir la primera derivada" (Luciana B).

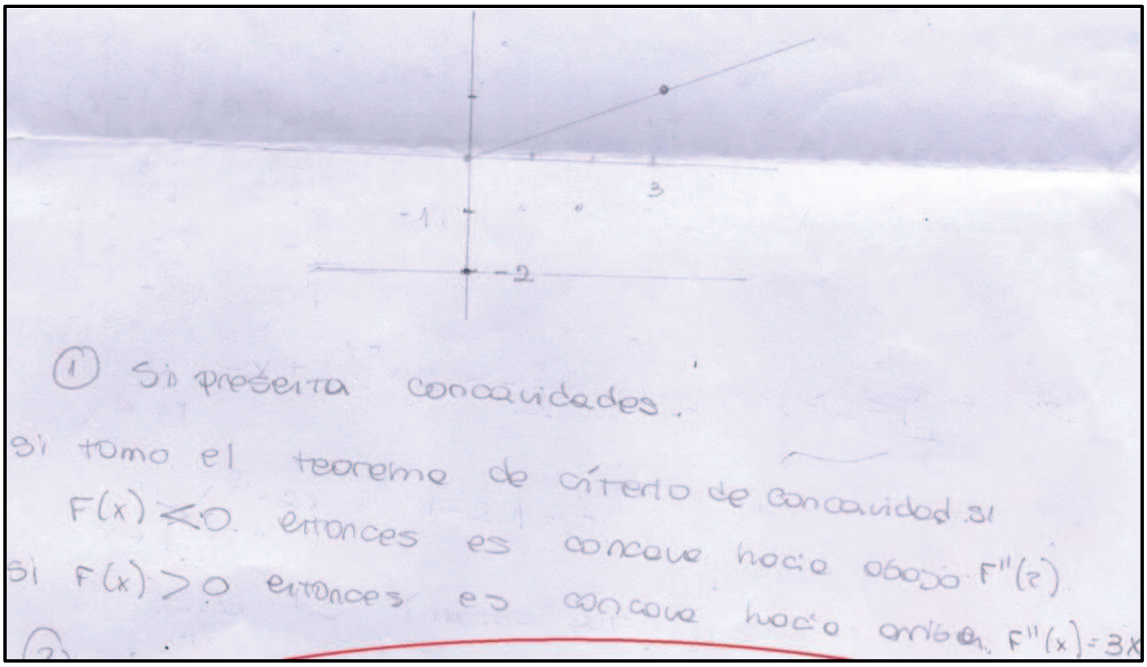
Se puede advertir que la alumna, ratificando lo que respondió en el cuestionario analítico, considera para la existencia de punto de inflexión, el requerimiento adicional de ser derivable en él, obviando así la existencia de funciones que no son derivables en un punto y sin embargo tienen en él inflexión en su gráfica.

- *La natural preferencia de un registro por sobre otro*

La mayoría de los entrevistados mostró, de manera explícita o implícita, su inclinación por un determinado registro de representación al momento de dar cuenta de las consignas. Cabe señalar que para esta investigación esta preferencia resulta de interés dada la temática abordada, pero no es señalada como un error o procedimiento inadecuado por parte de los estudiantes.

Así, muchas respuestas en el registro analítico se apoyaban en gráficas de la primera o segunda derivada, realizadas en el momento de responder, para sus argumentaciones, recurriendo así a un plano de representación distinto al que había sido formulada la consigna. De esta manera, se evidencia un trabajo no sólo de *tratamiento* en un registro, sino también de una *conversión* entre diferentes registros de representación.

El siguiente fragmento ilustra el instante en el que una estudiante era enfrentada a su respuesta en el cuestionario analítico:



Antonela R. Cuestionario Analítico.

E: - Graficaste las derivadas.

A: - Si, grafiqué las segundas derivadas, y después de eso planteé las partes de concavidades. (Antonela R.)

En su respuesta a la inquietud planteada por el entrevistador acerca de que se valía de gráficas para responder en un entorno algebraico, la alumna demostró una valoración positiva del entorno visual para poder resolver las consignas.

Esta situación resulta interesante por lo no convencional de su procedimiento, si bien Duval enfatiza la necesidad de la alternancia entre distintos registros de representación para la consolidación de aprendizajes ricos en términos de significación.

Otro fragmento de entrevista, que refleja lo planteado en esta categoría es el siguiente:

E: - Pero ¿cuál sería la concavidad entonces?

A: - Y ésta es una lineal (señala el primer tramo de la segunda derivada) pero no, tengo que ver la función…. (observa las partes de la función) ésta es cúbica …. La verdad… tendría que graficarla ¿sería? [...]

E: - Bueno, pero sin graficarla ¿Podrías determinar la concavidad de la función?

A: - Humm... y acá (señala el primer tramo de la segunda derivada) es lineal, así que no tiene concavidad, y acá (señalando la segunda parte de la misma función) también es lineal, entonces ... acá no es continua (refiriéndose al punto de bifurcación de la función a trozos dada), acá la segunda derivada es… constante (vuelve a ver la primera rama de la segunda derivada) ... no sé cómo ... ¿Qué se puede ver?

E: - Bueno, a mí algo que me llamó la atención de lo que escribiste: es que no hay cambio de concavidad, pero en ningún momento mencionás cuál es la concavidad o cómo te das cuenta. Por eso, te pregunto ¿Cuál sería la concavidad? [...]

A: - La verdad que en ese momento ni pensé en la gráfica.

E: - Está bien, pero más allá de lo gráfico, sin pensar en la gráfica ¿Qué podrías decir de la concavidad?

A: - ... No hay punto de inflexión, pero sí cambia la concavidad

E: - ¿Por qué?

A: - Ehh, ..., no sé, no me acuerdo, pero sé qué cambia la concavidad… Primero no es continua, sé que tiene concavidades opuestas, y como no es continua, no tiene recta tangente y por lo tanto no tiene punto de inflexión. (Yamila C.)

Como se nota, si bien la alumna manifiesta tener algún conocimiento del tema, recurre sistemáticamente a esbozos de la gráfica de la función (que no tiene), como medio para dar respuesta a las preguntas planteadas. Por último, el siguiente fragmento muestra, si se quiere, una postura en *sentido inverso* a las anteriores:

---

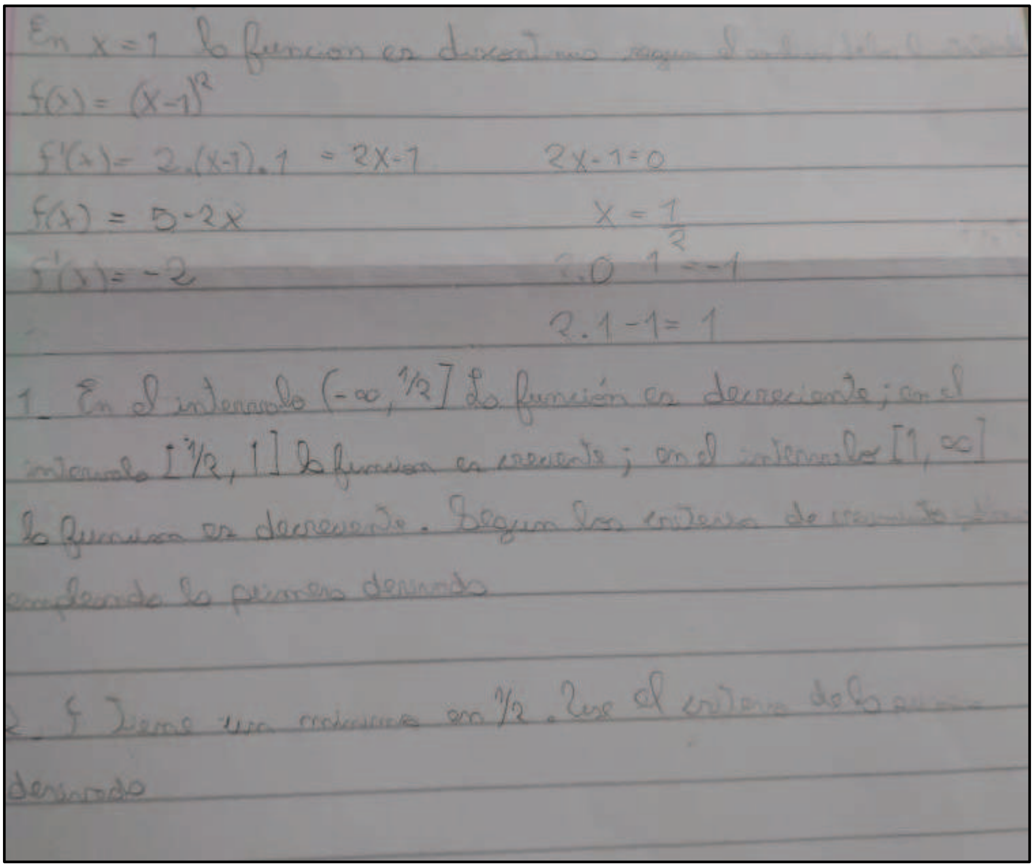
*A: - En éste (*señala su respuesta en la actividad gráfica*) no estaba segura si estaba bien, porque directamente dije las concavidades, pero sin aplicar las derivadas así que… no sé. (Antonela R.)*

La alumna manifiesta cierta inseguridad en sus respuestas e interpretaciones por haber fundado su análisis desde lo gráfico, y no haber utilizado o manipulado los típicos mecanismos del cálculo diferencial.

Este cierto grado de ambigüedad en su postura, se plasma en el reconocimiento de que, si bien el ámbito visual le resulta de ayuda no le otorga la seguridad de los mecanismos algorítmicos propios de la disciplina.

- *Análisis no rigurosos.*

La omisión del punto de bifurcación de la función como posible punto de inflexión o punto crítico en el registro analítico, condujo a los alumnos, en varias ocasiones, a conclusiones que ocasionaron ciertas omisiones, como se aprecia en la siguiente resolución:



Joaquín N. Consigna Analítica.

En la entrevista expresa lo siguiente al respecto:

A: -Mmm, no… lo que no consideré es en x=1.

E: - ¿Por qué no lo consideraste?

A: - Se me pasó. [...]

E: - ¿Por qué crees que lo resolviste diferente en el gráfico, si la función era la misma?

A: - Y porque al ver la función, uno no se pone a pensar analíticamente. (Joaquín N.)

Si bien el alumno detecta su error al comparar sus respuestas en ambos planos, adujo haber cometido algún descuido, pero no profundizó demasiado en ello y sí, en cambio, en valorar positivamente sobre el uso del registro gráfico que le permitió alcanzar una respuesta acertada.

- *Dificultades de expresión.*

La mayoría de los entrevistados evidenció serias deficiencias de expresión que, si bien no son el foco del presente trabajo, no pueden soslayarse al momento de las desgrabaciones y el posterior análisis.

Explicitada en una muy precaria oralidad, cuyos orígenes son de la más variada índole, la marcada deficiencia en el manejo del lenguaje cobra relevancia al momento de tener que expresar en términos *naturales* un razonamiento matemático. El siguiente extracto lo refleja con claridad:

A: - Y acá no, no estaría, ehh, ¿cómo es? el coso , ... no ... sí claro (Esteban A.)

A: Después me di cuenta cuando fui a una consulta de Cálculo, y bueno, ¿cómo es?... ahí vi verdaderamente cuándo hay punto de inflexión y punto crítico. (Antonela R.)

A: - Entonces, yo vi esto y dije esto va de -1 va para allá (señala una de las partes de la función) y lo otro para allá (señalando el otro tramo) [...] pero igual, yo como que ahí, la interpreté re mil mal. [...] bueno, en el parcial yo me sentí más segura, porque bueno, puedo aplicar todos los criterios, digamos. (Emilia R.)

5. CONCLUSIONES

Las conclusiones de la investigación remiten a tres planos de análisis: los objetivos que oportunamente se trazaron, las conjeturas que sirvieron de guía para la investigación y las limitaciones presentadas.

5.1 Conclusiones referidas a los objetivos

Los objetivos planteados para el presente trabajo fueron:

- Determinar el alcance de aprendizajes significativos y comprensión de los conceptos involucrados.
- Identificar y clasificar los errores que cometen los estudiantes, tanto en sus producciones escritas como en sus intervenciones informales en el aula, en el análisis de funciones.
- Detectar los eventuales problemas de interpretación (en lo disciplinar) de las consignas por parte de los alumnos referidas al tema. Cabe aclarar que, tal como se señaló en (1.2) no es objeto de análisis en este trabajo las posibles fallas en la interpretación de consignas atribuibles a la lingüística.
- Identificar en las producciones de los estudiantes indicadores de la correspondencia que se evidencia en situaciones propias del análisis de funciones reales en el tránsito de un registro de representación semiótica a otro.
- Reflexionar en torno a las estrategias didácticas y pedagógicas utilizadas, para en un futuro diseñar otras, que empleen diferentes registros de representación tendientes a favorecer el alcance de aprendizajes satisfactorios en términos de significación

Durante la fase de indagación preliminar se analizaron producciones de los alumnos y se detectaron errores como los siguientes:

- Alteración de definiciones ligados a posibles problemas de interpretación de consignas.
- Utilización de criterios de determinación y herramientas de cálculo como sustitutos de la definición, plasmado en la dificultad para diferenciar entre los aspectos *objeto* e *instrumento* de un concepto.
- Incongruencias al momento de enunciar definiciones y conclusiones.
- Confusión entre los roles de las distintas funciones involucradas en la resolución de consignas.

- Apego a funciones típicas o simplificadas que dificultan la abstracción a situaciones generales.

Posteriormente, durante la fase de desarrollo, se observaron fallas del mismo tenor, se detectaron otras, que se sintetizan a continuación:

- Contradicciones en las respuestas según el tipo de registro utilizado.
- Confusión de roles entre una función y su derivada para la determinación de atributos de la gráfica.
- Implementación de procedimientos ineficientes para el análisis de extremos locales.
- Dificultades en competencias básicas y obstáculos.
- Extensión incorrecta del dominio de validez de una propiedad.
- La incorporación de hipótesis adicionales erróneas.
- Análisis no rigurosos.
- Dificultades de expresión.

Los errores detectados pueden entenderse como consecuencia de, entre otros motivos, la presencia de diversos obstáculos didácticos ligados a conceptos previos y también a cierta falta de significación en el aprendizaje de los temas abordados.

Por otro lado, el trabajo con diferentes registros de representación resultó en indicadores que muestran la mejora en la comprensión de los conceptos trabajados, permitiendo generar una reflexión sobre el uso de definiciones y criterios y estimulando la generación de nuevas actividades que involucren su aplicación.

En este sentido, tal como sostiene Duval (2006), la importancia de trabajar actividades que impliquen una *conversión* en diferentes registros radica en el estímulo de la comprensión conceptual. Cualquier dificultad es un indicativo de conceptos erróneos, por lo que el autor sugiere favorecer el uso de al menos dos registros de representación semiótica y promover la conversión entre diversos sistemas.

No obstante lo anterior, pudo comprobarse la natural preferencia de un registro de representación por sobre otro, no sólo por las expresiones informales al respecto por parte de los mismos estudiantes en las entrevistas, sino también en el hecho de acudir sistemáticamente al registro visual como estrategia para argumentar sus afirmaciones dadas en otro ámbito.

5.2 Conclusiones referidas a las conjeturas

Las conjeturas planteadas en este trabajo fueron:

- En general, los estudiantes darán muestra de un uso no acompañado de la correspondiente reflexión de los criterios de determinación de las características funcionales de monotonicidad, extremos relativos, concavidades y puntos de inflexión, desde dos puntos de vista: por un lado, por el abordaje de manera mecánica sin detenerse en la verificación de las condiciones para su correcta aplicación en cada registro y, por otro, por la utilización de los mismos como sustitutos posibles del concepto matemático en estudio .
- Es probable que el estímulo a la implementación de la alternancia de diferentes registros de representación contribuya a la comprensión de conceptos y herramientas de cálculo y a la correcta distinción entre los mismos por parte de los alumnos.

A partir de lo observado en las diferentes etapas de este trabajo las conjeturas expuestas parecen confirmarse. En cuanto a la primera, se han presentado durante la fase preliminar y la de desarrollo diversas situaciones que lo manifiestan, como es el caso de un proceder sin el acompañamiento de la debida reflexión sobre la factibilidad de aplicación de las herramientas que involucraban y, en ocasiones, la no distinción entre la concepción *objeto* y la concepción *instrumento* de un concepto, fundamentales según la teoría de Douady.

Con respecto a la segunda, se ha evidenciado en la fase de desarrollo y, en particular en las entrevistas, la positiva influencia de la alternancia de los diferentes registros y cómo la confrontación entre ellos estimula el análisis y la reflexión en el tratamiento de los diversos conceptos involucrados. Además, se manifestaron casos donde los estudiantes no sólo han transitado por al menos dos registros de representación semiótica, sino que también han realizado conversiones de un registro a otro, incluso cuando la consigna no lo solicitaba, evidenciando así el uso de estrategias que les permitieron desarrollar razonamientos y concepciones complementarias para abordar el tema en cuestión.

5.3 Otras conclusiones

Se brinda a continuación un breve detalle y comentarios complementarios sobre algunas observaciones y limitaciones que se presentaron a lo largo del trabajo.

5.3.1 Referidas a cuestiones temporales

Debe consignarse, que debido a lo numeroso de las matrículas fue posible realizar un análisis que resultó representativo, en tanto alcanzó a la mayoría de los estudiantes, pero, a la vez, implicó un retardo en el procesamiento e interpretación de los datos.

Por otro lado, se dispuso de poco tiempo por parte de los estudiantes para resolver las actividades y asistir a las entrevistas, debido a la superposición de horarios con el cursado de otras asignaturas. Es por ello, que las actividades de los cuestionarios y las preguntas de las entrevistas fueron específicas y concretas, procurando un acercamiento y profundización a tópicos puntuales de los conceptos abordados y, si bien primó cierta flexibilidad para los encuentros, se buscó evitar dilaciones innecesarias.

5.3.2 Referidas a la modalidad de las entrevistas

En cuanto a lo referido a las entrevistas, debe aclararse que no se contaban con recursos como una filmadora, lo que podría favorecer un mejor análisis y detalle de lo sucedido, aunque, el uso de ella podría haber generado un clima menos ameno, generando algún tipo de incomodidad en el entrevistado.

Por otro lado, no se contaba con un lugar propio para este tipo de actividades, sino que se realizó en aulas de la facultad, lo que generaba algunas interrupciones y, por lo tanto, distracciones durante el desarrollo de las mismas.

5.3.3 Referidas a las herramientas disponibles en cada registro de representación

Es preciso aclarar que, si bien la relevancia del trabajo reside en hacer reflexionar las condiciones y usos de definiciones y criterios puntuales, se observa una limitación en las herramientas teóricas a utilizar en cada tipo de cuestionario. Se aprecia que a pesar de presentarse preguntas isomórficas, al momento de responder debían recurrir a diferentes conceptos, lo que podría conducir a respuestas distintas según el tipo de registro y residir en ello la contradicción. De todos modos, como se expresó anteriormente, lo central del trabajo reside en la reflexión generada en torno a los temas tratados, y al tránsito y alternancia entre los diferentes registros de representación.

5.3.4 Referidas a lo restrictivo de los contenidos

Se debe mencionar como limitación la restricción en los contenidos abordados, ya que sólo se enfatizó en dos conceptos del cálculo, cuando se podría haber involucrado otros, aunque de haber sido así, hubiera resultado más difícil y tardío el procesamiento y análisis de datos.

5.3.5 Referidas al diseño de los instrumentos

Una limitación en el diseño de los instrumentos es que al presentar cuestionarios por registro, y con diferencia de una semana, los saberes de los estudiantes podían haberse modificado e influido en la modificación de sus respuestas. Hubiera sido interesante plantear un cuestionario con dos partes (una analítica y otra gráfica), pero esto, implicaba el riesgo que los estudiantes cambien sus respuestas en uno de los registros, obstaculizando la determinación de contradicciones y la reflexión y análisis que interesa en este trabajo.

5.3.6 Referidas al estado del arte

Hoy en día, la explosión y auge de las comunicaciones debidas a internet, hace que la cantidad de artículos, publicaciones en general y material de investigación resulte considerable. De este modo, el estado del arte crece y se nutre constantemente de nuevas producciones, de una manera dinámica e incesante lo que posibilita abrevar en él en la permanente búsqueda de resultados actualizados sobre el tema de este trabajo.

En investigaciones sucesivas a partir de la presente, serán seguramente tenidos en cuenta para enriquecer y profundizar en las líneas de estudio y enfoques que se propongan.

5.3.7 Referidas a la socialización de resultados y validación por expertos

Como una manera de someter esta investigación a la mirada de expertos en el tema, avances de la misma fueron expuestos en el XIII CONGRESO ARGENTINO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, organizados por la Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM), y que tuvo como sede la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, del 11 al 13 de octubre de 2018.

También fue presentado en distintas Jornadas de difusión de investigaciones, organizadas por la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral.

En ambos casos, los respectivos auditorios presentes mostraron positiva receptividad del estudio y alentaron a continuar con la línea de investigación iniciada.

5.4 Perspectivas a futuro

Acorde a las consideraciones teóricas, los resultados obtenidos en este trabajo y las conclusiones expuestas anteriormente, existe la necesidad de promover los diferentes tipos de representación para analizar los procesos de adquisición de conocimientos matemáticos, en particular los abordados en este estudio.

Se aprecia, en particular que la alternancia en el uso de los distintos registros de representación favorece la comprensión y reflexión de los conceptos del cálculo. En especial, tal como plantea Duval, se considera pensar propuestas que impliquen no sólo un tratamiento en diversos ámbitos, sino también una conversión de un registro en otro, de modo de alcanzar una comprensión real del concepto.

Cabe señalar, que la incorporación de tecnologías a los procesos de enseñanza actuales, ofrecen variada gama de herramientas que estimulan el trabajo en clases desde distintos planos. En el caso particular de la enseñanza de Cálculo I en la facultad, la disponibilidad del software libre Geogebra resulta en un beneficio de consideración para estas prácticas.

Por ello, se pretende a futuro, implementar estrategias que incorporen en la enseñanza la producción de un concepto en un registro, la alternancia y la conversión de registros, favoreciendo la consolidación de saberes ricos en significación, la internalización de los contenidos y la reflexión, de modo de atenuar el uso de mecanicismos carentes de significados. En otras palabras, se considera incorporar tareas enmarcadas en las tres categorías planteadas por Camargo (2013) como necesarias para presentar a los estudiantes, las de "*aprehensión de las representaciones semióticas*", de "*tratamientos propios de una categoría de registro*" y de "*producción de representaciones complejas*".

Además, se pretende continuar con el análisis, estudio y profundización de lo desarrollado.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R. y Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 97-140. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1 (1), 40-55.

Ausubel, D. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*. Barcelona: Editorial Paidós.

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1986). *Psicología educativa* (3ra ed.) México: Editorial Trillas.

Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI Editores. Republicado en 1979.

Barrantes, H. (2006). Los obstáculos epistemológicos. *Cuadernos De Investigación Y Formación En Educación Matemática*. 1 (2). Recuperado de http://www.unsj.edu.ar/unsjVirtual/diplomatura_educacionNuevasTecnologias/wp-content/uploads/2015/08/GenesisdelosObst%C3%A1culos-EjemploMatem%C3%A1tica-1.pdf.

Bazerman, C., Little, J., Bethel, L., Chavkin, T., Fouquette, D., y Garufis, J. (2005). *Reference guide to Writing Across the Curriculum.* West Lafayette, Indiana: The WAC Clearinghouse Parlor Press.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologuiques et la didactique des mathématiques. *Construction des savoirs,* 41-63.

Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction.* Cambridge Mass: Harvard University Press.

Carlino, P. (2004). El proceso de escritura académica. Cuatro dificultades de la enseñanza universitaria. *Revista Educere*. 8(26), 321-327.

Camargo, A. (2013). El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo. Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Montevideo, Uruguay.

Cantoni, A. (2007). El aprendizaje significativo. *Ciencia y poder aéreo*. 2 (1).

Recuperado de: https://www.publicacionesfac.com/index.php/cienciaypoderaereo/article/view/71/16.

Chávez de Paz, D. (s. f.). Conceptos y técnicas de recolección de datos en la investigación jurídico social.

Crawford, M. (2004). *Enseñanza Contextual. Investigación, Fundamentos y Técnicas para Mejorar la Motivación y el Logro de los Estudiantes en Matemática y Ciencias,* México: Cord.

Deriard, A. (2018). La historia detrás de los constructos de Dialéctica instrumentos Objeto y Juego de marcos. Acta Scientiae, 20 (6).

Díaz Barriga Arceo, F. y Hernández Rojas, J (2002) *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. 2da edición, México: McGraw- Hill.

Díaz Barriga Arceo, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 5 (2). Recuperado de: http://redie.ens.uabc.mx/vol5no2/contenido-arceo.htm.

Diaz Lozano, M., Haye, E., Montenegro, F. y Córdoba, L. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. En I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe, Santo Domingo, República Dominicana.

Douady, R. (1984) Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire, Tesis Doctoral. IREM, Paris: Universidad de Paris.

Douady, R. (1992) Des apports de la didactique des mathematiques à l`enseignement. Repères, IREM, París: Universidad Paris VII.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*, traducido por Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. En: T. Naka-hara and M. Koyama (Eds.), Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education I, Hiroshima University.

Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano. Colombia: Universidad del Valle. Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME.* 9 (1),´ 143–168.

Fagundes, K., Magalhães, A., Campos, C., Alves, C., Ribeiro, P., Mendes, M.A. (2014). Hablando de la Observación Participante en la investigación cualitativa. En el proceso salud-enfermedad. *Index Enferm* (Gran); 23 (1-2), 75-79.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. En Godino, J.D (2003). *Matemáticas y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada: Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumatmaestros.

Godino, J, Font,V., Contreras, A., y Wilhelmi, M. (2006) Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 9 (1), 117-150.

González Chica, G. (2011). Tratamiento *de las representaciones semióticas de la función cuadrática* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Manizales, Colombia.

Gordillo Alfonso, A. y Restrepo Becerra, J. (2012). Comprensión lectora y concepciones de estudiantes universitarios sobre enunciados matemáticos. *Zona Próxima,* 17, julio-diciembre, 2-23. Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia.

Guilar, M. (2009). Las ideas de Bruner: "de la revolución cognitiva" a la "revolución cultural". *Educere*, 13 (44), 235-241, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1 (1), 5-21.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, M. P. (2014). *Metodología de la Investigación*. 6ta Edición. México: McGraw Hill.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Revista Educación Matemática*, 10 (1), 23-45.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Décimo Primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México.

Izura, T. (s. f.). Las hipótesis en la investigación científica: Una mirada desde el diseño metodológico.

Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo Esencial*. México: Cengage Learning.

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa. *Revista IIPSI. Facultad de Psicología*. 9 (1), 123-146.

Meneses, J. y Rodríguez Gómez, D. (2011). *El cuestionario y la entrevista*. Universitat Oberta de Calantuya.

Montino, M., Petrucci, D., Ure, J. E., Aleman, A, y Pérez, S. (2011). Una propuesta de trabajos prácticos de laboratorio que favorece el aprendizaje de conceptos. *Ciencia & Educación*. 17 (4), 823-833.

Molina González, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. (Tesis Doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada. Granada, España.

Niño Rojas, V. (2011). *Metodología de la investigación. Diseño y ejecución*. Bogotá: Ediciones de la U.

Núñez, J.M. y Font, V. (1995). Aspectos ideológicos en la contextualización de las matemáticas. Una aproximación histórica. *Revista de Educación*, 306, 293-314.

Ordoñez Montañez, C. y Diaz Villegas, R. (2018). *Comprensión de la noción función por tramos mediante el tránsito de registros de representación semiótica en estudiantes del ciclo I de contabilidad* (Tesis de maestría). Universidad Nacional del Cañete, Perú.

Ospina García, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal* (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Manizales, Colombia.

Oviedo, L., Kanazhiro, A., Bzaquen, M. y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria* 13, 29-36.

Páez Murillo, R. (s. f.). Reconstrucción del concepto de límite: estudio de un caso. Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta, Colombia.

Piaget, J. (1984). *La representación del mundo en el niño*. 6ta Edición. Madrid: Ediciones Morata.

Pierella, M. (2011). El ingreso a la Universidad como experiencia subjetiva y cultural en estudiantes de la Universidad Nacional de Rosario. *Revista Argentina de Educación Superior*. 3. (3), pp. 26-48.

Prietto, F. y Vicente, S. (2006). Análisis de registros semióticos en actividades de ingresantes a la facultad de Ingeniería. En I Reunión Pampeana de Educación

Matemática, Santa Rosa, La Pampa.

Quecedo, R.; Castaño, C. (2002). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. *Revista de Psicodidáctica*, 14, 5-39. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=17501402.

Ramos, A.B. y Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiótica. *La Matematica e la sua didattica.*, 20 (4) 535-556

Romero, Ch (2005). La categorización un aspecto crucial en la investigación cualitativa. En Revista *Cesmag.* Facultad de Educación. Bogotá.

Rose, D. y Martin, J. (2012). *Learning to Write, Reading to Learn: Genre, Knowledge and Pedagogy of the Sydney School*. London: Equinox Publishing.

Saa Vernaza, A. y Trochetz Tapia, A. (2013) *Una propuesta de enseñanza de la función de por tramos usando el periódico y GeoGebra.* (Tesis de Licenciatura). Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Área de Educación Matemática. Santiago de Cali, Colombia.

Sadovsky, P. (2006). *Enseñar matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del zorzal.

Sastre Vázquez, P., Cañibano, A. y D´Andrea, R. (2014) ¿Errores u obstáculos epistemológicos? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME)*, 27 227-233

Sautú, R. (2003). *Todo es teoría.* Buenos Aires: Lumiere Ediciones.

Solé, I. (1996). *Estrategias de lectura.* Barcelona: Graó.

Vaccaro, M. (2012). Dificultades en la comprensión de consignas en el área Matemática: ¿Por qué se originan? En Congreso Iberoamericano de las Lenguas en la Educación y en la Cultura y IV Congreso Leer.es Salamanca, España.

Yam Huh, E. (2009). Función definida por partes. Un análisis histórico – didáctico referente a su tratamiento escolar. (Tesis de licenciatura). Universidad Autónoma de Yucatán, México

Zúñiga López, M. (2009). *Un estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización. En alumnos de un curso de Cálculo I* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras.

Si se relaciona la deserción escolar y las Prueba Aprender, la situación es grave. (22 de marzo de 2017), *Diario El Día*. Recuperado de www.eldia.com.

Anexos

Anexo I: Cuestionarios.

Cuestionarios Analíticos. Semana 1.

Turno Mañana.

Nombre y Apellido:.. Carrera:...........................

Dirección de correo electrónico:..

Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 1 & si\ x < 1 \\ 5 - 2x & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Responde, justificando cada respuesta:

1. ¿En qué intervalo/s f es creciente y decreciente?
2. ¿Qué extremos relativos tiene f? ¿Qué herramienta teórica usó para determinarlos?

Turno Tarde.

Nombre y Apellido:.. Carrera:...........................

Dirección de correo electrónico:..

Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 2 & si\ x < 1 \\ x^3 - 2x & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Responde, justificando cada respuesta:

1. ¿f presenta cambio de concavidades?
2. ¿f presenta puntos de inflexión? ¿cuáles son?

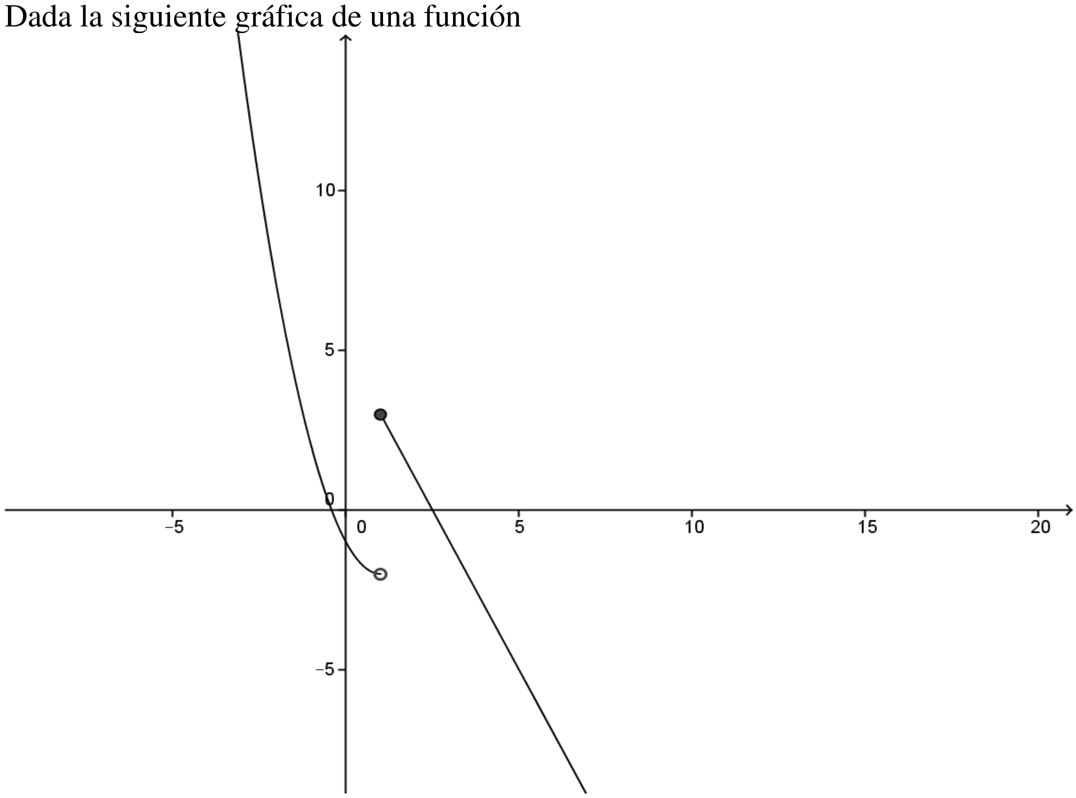
Cuestionarios Gráficos. Semana 2.

Turno Mañana.

Nombre y Apellido:.. Carrera:..........................

Dirección de correo electrònico:...

Dada la siguiente gráfica de una función



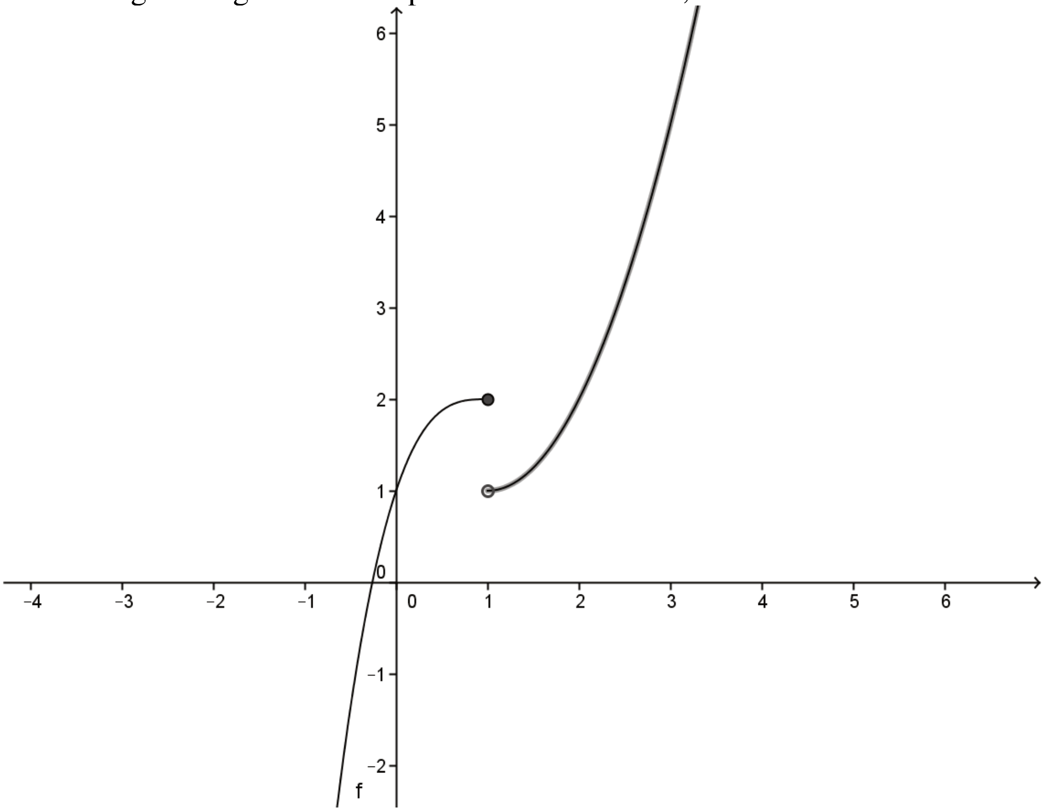
1. ¿En qué intervalo/s f es creciente y en cuáles decrece?
2. ¿Qué extremos relativos tiene f? ¿El criterio de la primera derivada resulta útil en este caso? ¿Por qué?

Turno Tarde.

Nombre y Apellido:... Carrera:...........................

Dirección de correo electrónico:...

Dada la siguiente gráfica correspondiente a función f, definida en *R*



Responde, justificando cada respuesta:

1. ¿f presenta cambio de concavidades?
2. ¿f presenta puntos de inflexión? ¿cuáles son?

Anexo II: Entrevistas.

<u>Entrevista: Luciana B.</u>

Entrevistador (E): - Como te decía Luciana, la entrevista forma parte de un trabajo de tesis, así que quédate tranquila, yo no estoy evaluando ni juzgando (se ríe nerviosa Luciana), sólo quiero hacerte unas preguntas para comprender mejor los razonamientos que realizaste en las consignas que se te había pedido. En primer lugar, te voy a mostrar la actividad analítica que realizaste, para que recuerdes lo que habías escrito, y luego te voy a hacer algunas preguntas con respecto a lo que escribiste. (Se le entrega la producción analítica)

Alumno (A): - Es más, yo me acuerdo que, lo había graficado, ahora bien, no sé si me dio bien… ah acá hice un límite (señala lo escrito en su hoja) ... y me había dado que no era continua....

E: - Ah, pero acá habías puesto ... (interrumpe)

A: - Sí, ya sé, ... no me hagas caso.

E: - No importa, pero ... ¿por qué habías escrito que era continua?

A: - O sea, eso lo puse al principio, y después dije, no, acá hay algo raro ... y creo que aparte la grafiqué (duda y piensa) …. bueno no es difícil graficarla (mira la expresión de la función) ... y me puse a mirar e hice los límites laterales y no me daban.

E: - Ajá

A: - Pero, no sé por qué lo puse. (piensa).... es más, creo que cualquier cosa puse.

E: - ¿Por qué decís que pusiste cualquier cosa?

A: - Porque me acuerdo, lo de las cosas de punto de inflexión ... eh ... tampoco había tocado nada todavía de teoría, y después cuando me puse a estudiar bien y sabía ... eh o sea que cambio de concavidad no implica que hay punto de inflexión, y yo pensaba lo contrario.

E: - ¿Que habías puesto vos ahí?

A: - Ehh …

E: - Fíjate, revísalo, … míralo, para recordar un poco lo que habías pensado en ese momento...

A:-(Revisa): ¿Cuándo tenías en este caso, cuando tenías que derivarlo? ¿derivás esto y lo pones así (señala las derivadas) y derivás el otro y lo pones así? (Vuelve a señalar) ... (silencio)

E: - (Hace gesto de duda y no responde)

A: - Ah bueno, para mí es así.

E: - Y luego volviste a derivar allá (señalando en el escrito la segunda derivada) ... y acá pusiste x=0 es punto de inflexión... y luego pusiste que no había punto de inflexión. (Mostrando en el escrito)

A: - (Se ríe)

E: - ¿Por qué?, ¿qué pasó? ¿Qué te hizo cambiar ahí?

A: Porque no es continua…, pará, ... porque todo esto lo había hecho en función de que era continua y había puesto que no era continua por los límites laterales, yo misma me confundí. … Pará, acá escribí que no hay punto de inflexión porque la función a la izquierda de 1 vale.

E: - ¿Cómo?

A: - (Piensa) Encima acá me da una constante (refiriéndose a la segunda rama de la segunda derivada) … (piensa) ... pará, para que sea punto de inflexión, tenía que haber cambio de concavidad, tenía que haber recta tangente horizontal y existir la primera derivada….

E.- ¿Qué conceptos utilizaste?

A: - Punto de inflexión….

E: - ¿Qué otro concepto usaste para saber si había concavidad o como es la concavidad?

A: -Según lo que puse acá, puse que en la segunda derivada me da negativa después me da positivo en el intervalo y por eso cambia de concavidad ... pero igual es constante y después es lineal.

E: - Ajá ... claro, vos pusiste si presenta cambio de concavidad en x = 1, a la izquierda de 1 es creciente y a la derecha es constante... ¿Qué quisiste expresar con eso? ¿Te acordás lo que pensaste ahí?

A:-(Piensa, se ríe) ... no ni idea… no tiene concavidad si es constante….

E: - No sé, si te acordás... cuando estabas resolviendo la actividad, ¿se te presentó alguna dificultad?

A: -Los conceptos, el de punto de inflexión y punto crítico…. Y, además, no sabía qué hacer en el procedimiento, evalué que no era continua y luego me contradije… y no sabía cómo seguir.

E: - ¿Y luego qué hiciste? Porque luego pudiste continuar…

A: - ¿Esto lo habíamos hecho al final de la clase o al principio?

E: - Al final de la clase.

A: - Claro, yo me había guiado con lo que más o menos habíamos hecho en la clase, hice la primera derivada, y la segunda ... pero ahí había algo raro (refiriéndose a la función) y de ahí traté llegar a una conclusión… de ahí a que esté bien es otra cosa.

E: - Bien, bueno, porque la otra actividad que les di fue ésta (Mostrando y entregando la actividad gráfica), mírala para recordar lo que habías hecho.

A: -Mmm, sí, (mirando de su producción) ajá ... está bien ... no?

E: - ¿Cómo resolviste esta actividad?

A: - Mmmm (señala la gráfica) es cóncava hacia abajo desde menos infinito a 1 y luego es cóncava hacia arriba desde 1 a infinito… cambia la concavidad (con tono seguro)

E: - Ajá, o sea que contestaste mirando la gráfica… ¿Y en cuanto al punto de inflexión, que pusiste?

A: - Y que no es continua, y para que tenga punto de inflexión, tenía que haber recta tangente horizontal, tiene que existir la derivada…

E: - Bueno ...

A: - Y ésta no es continua y no tiene derivada.

E: - ¿Qué conceptos usaste para poder responder?

A.- Mmm me acordaba que en el punto de inflexión es porque había cambio de concavidad, no me acordaba lo de la recta tangente... eso sí, te soy sincera y ... sabía que el punto de inflexión se evaluaba con la segunda derivada, y si no es continua la función, no es derivable, me guie en eso.

E: - Bueno, ... ¿tuviste alguna dificultad con esta actividad?

A.- No, con ésta no.

E: - Bueno, no sé si te diste cuenta de que ambas actividades representan la misma función, pero una en regsitro analítico y el otro gráfico.…

A: - En serio!! ... a ver (compara las funciones) ... claro ... (compara sus producciones) claro, hasta ahí está bien.

E: - Y las preguntas, también eran las mismas, digamos ... pero, sin embargo, fíjate que respondiste diferente, en uno y en otro. Incluso fíjate que en éste (señala el analítico) mencionas un posible punto de inflexión en x=0, hiciste un análisis a partir de ahí y pero acá (señala el gráfico) no lo consideraste a ese punto de inflexión, por ejemplo.

A:-(Se ríe)

E: - Bueno, no importa ... pero ¿por qué crees que pasó esto?

A: - Igual, no sé por qué puse punto de inflexión, porque en una sí y en la otra no (señala en el escrito analítico, cada ley involucrada en la función por partes) ... tiene que ser en ambas.

E: - Ah, bueno.… entonces acá (señala el analítico) ¿qué usaste para determinar la concavidad en cada intervalo?

A: - Mmm claramente con el 6x (segunda derivada de una de las ramas) ... con el -2 no ...

E: - ¿Por qué con el -2 no?

A: - ¿Por qué no lo tomé?

E: - Ajá ... Si, vos, hay algo que escribiste también, que en -2 no se puede evaluar, ¿Que quisiste expresar con eso?

A: - Porque es una constante, por lo tanto, no podés evaluar en 0, igual no hay punto de inflexión, pero eso no sería la ...mmm

E: - Entonces, ¿por qué sería?

A: - (Piensa)mmm no sé …

E: - Bueno, ahora sabés que las dos representan la misma función.

A: - Mmm ésta no hay punto de inflexión porque no es continua.

E: - ¿Y por qué crees que respondiste diferente?

A: - ¿Esto (señala la actividad gráfica) fue una semana después?

E: - Si.

A: - Ahh, por eso, porque ahí ya había estudiado más, y tenía una idea. Es más, con una compañera, ella tenía un resumen y nos sentamos a estudiar, porque sabíamos que alguna pregunta más iba a venir (se ríe) lo presentimos ... y conocimiento tenía...pero acá (señala el analítico) estaba media perdida…, eso por empezar a estudiar tarde.

E: - Y ¿En qué regsitro te resultó más cómodo el trabajo? ¿En el analítico o en el gráfico?

A: - Es que ... bueno, lo gráfico es más fácil para mí, pero como no tenía los conocimientos (se refiere a lo analítico), capaz, ahora que tengo los conocimientos frescos, te lo hago.

E: - ¿Por qué crees que es más fácil lo gráfico?

A: - Para mí es más fácil, no sé por qué, además, te das cuenta de que no es continua, además porque el cambio de concavidad.

E: Bueno, está bien, muchas gracias Luciana, por tu tiempo y tu predisposición.

Entrevista: Antonela R.

E: -En principio te daré la primer parte que es la actividad analítica, que fue la que ustedes hicieron, para que la revises y más que nada para recordar lo que habías hecho. (Se le entrega la producción escrita)

A: - Si ...

E: - Te lo dejo un ratito, luego te haré algunas preguntitas al respecto.

A: - Ajá ... por suerte tengo memoria, así que medianamente me acuerdo (se ríe)

E: - Bueno.

A: - (Lo mira)

E: - ¿Te acordás cómo resolviste la actividad?

A: -Sí, yo lo hice con respecto a lo que es la parte de la segunda derivada de concavidad, directamente, pero le erré en la parte de punto de inflexión, porque supuestamente tiene que ser continua, puse que tenía punto de inflexión y me dí cuenta que no tiene punto de inflexión.

E: - ¿Cuándo te diste cuenta de eso?

A: - Cuando salí de esto.

E: - Ah, ... cuando saliste ... ¿Qué conceptos estuviste usando para responder?

A: - La parte que si la segunda derivada es mayor a cero es cóncava hacia abajo, digo, hacia arriba, y si es menor es cóncava hacia abajo.

E: - Ajá

A: - Y después el de punto de inflexión, que tiene que haber cambio de concavidad y tiene que ser continua, esas dos usé del libro…

E: - Ahaa ... y vos pusiste ahí.

A: - (Interrumpe) si, puse que ahí había punto de inflexión, pero estaba mal en realidad…

E: - ¿Te diste cuenta después de eso?

A: - Si, cuando lo empecé a pensar bien, yo ... en los parciales también… me guardo el ejercicio, cuando salgo lo empiezo a analizar y ahí me doy cuenta. (se ríe)

E: - ¿Se presentó alguna dificultad cuando lo estuviste haciendo? ¿Alguna duda?

A: -La dificultad que tengo yo es más que nada la interpretación o el razonamiento, por eso me cuesta mucho Cálculo. Más de todo en esto o en interpretar una función que ya está derivada, me cuesta bastante, pero después no se me complicó por los teoremas y las definiciones.

E: - Bien, de todas formas, vos pudiste hacer algo ¿Cómo fue que lo pudiste superar?

A: - Primero estuve un buen tiempo pensando que iba a hacer, porque no … como que no captaba la idea. Después cuando vi que estaba dando acá (señala la función expresada en forma analítica) derivé ambas partes y las grafiqué.

E: - Graficaste las derivadas.

A: - Si, grafiqué las segundas derivadas, y después de eso planteé las partes de concavidades.

E: - O sea, ¿Analizaste las concavidades mirando las gráficas de las segundas derivadas?

A: - Claro, sí.

E: - Bueno, después hicieron esta actividad (presentando la actividad gráfica). A ver, revísala un ratito, más que nada para que puedas recordar lo que hiciste.

A: - (Revisa y piensa): Si.

E: - ¿Qué pasó con esta actividad? ¿Pudiste resolverla? ¿Qué conceptos usaste?

A:- En este no estaba segura si estaba bien, porque directamente dije las concavidades, pero sin aplicar las derivadas así que… no sabía tampoco si considerar este punto (señala en el gráfico el punto de discontinuidad) si era de inflexión, está acá pero, o sea es continua , es continua en este punto pero no el de acá arriba (señala el primero el punto cerrado , es decir la imagen de x=1 y luego el punto abierto, donde hace la bifurcación), entonces como que tenía dudas en eso.

E: - Ajá,

A: - No sé, si tiene que ser toda continua o continua sólo en ese punto… y tener un cambio de concavidad.

E: - ¿Qué sería esto de que sea continua? ¿Qué estás queriendo decir?... ¿Qué esté definido?

A: - Claro ... porque acá tiene un cambio de concavidad, pero está definido acá (señala el punto cerrado de la bifurcación) y no acá arriba (señala el punto abierto) entonces no sabía si esto era o no un punto de inflexión.

E: - ¿Qué tendría que pasar para haya punto de inflexión?

A: - Cambio de concavidad y tiene que existir el punto, o tiene que ser continua… pero no sé si el continuo es de toda la función digamos, (se queda esperando una respuesta)

E: - Bueno, yo ahora no puedo contestarte, si querés luego lo charlamos, pero a mí ahora me interesa saber lo que ustedes pensaron.

A: - Sí

E: -Bueno, no sé si te diste cuenta que ambas actividades representan la misma función, y preguntaban lo mismo, nada más que uno era desde lo gráfico y el otro desde lo analítico. Entonces, por ejemplo, vos acá pusiste que tenía punto de inflexión (señala lo analítico) y acá (señala lo gráfico) pusiste que no.

A: - Ahhh ... me contradije

E: - ¿Por qué pensás que pasó eso?

A: - Y lo que pasa es que no tenía, ... me costó un poco la definición de punto de inflexión. Después me di cuenta cuando fui a una consulta de Cálculo, y bueno, ¿cómo es?... ahí vi verdaderamente cuando hay punto de inflexión y punto crítico. Entonces ahí me di cuenta del error que había hecho porque en ambas me había como contradicho.

E: - Bien, entonces ¿Qué podés decir? ¿Hay o no un punto de inflexión en esa función?

A: - Para mí, no hay punto de inflexión, porque tomó lo que dice la definición que tiene que ser continua en todo el intervalo, donde hay un cambio de concavidad.

E: - ¿En cuál de las actividades te resultó más fácil? ¿Con cuál te sentiste más cómodo para plantear y resolver?

A: - Me fue más fácil en ésta (señala lo gráfico)

E: - ¿Por qué pensás que te resultó más fácil lo gráfico?

A: -No sé, si me resulta más fácil interpretar la gráfica, pero me resultó mucho más fácil esta que la forma analítica. En este (señala lo analítico) veía la función y decía como lo planteo como lo hago. Me costó un poco más pensarlo a éste (al analítico)

E: - Bueno, eso es todo. Gracias Antonela.

Entrevista: Esteban A.

E: - Primero te voy a dar la actividad analítica para que la revises, la mires así te acordás lo que estuviste pensando, como lo hiciste, ya que pasaron algunos días. Fíjate lo que contestaste y después te voy a hacer algunas preguntas acerca de eso. (se le entrega la resolución analítica)

A: -Bueno (mira y piensa)

Luego de unos minutos

E: - Bueno, ¿pudiste verlo?

A: - Si, la verdad no me acuerdo que hice, puse cualquier cosa ... (se ríe)

E: - Bueno, ¿cómo lo resolviste? ¿Te acordás?

A: - Para hallar el crecimiento y decrecimiento, primero iguale la función y buscando algún valor en se anule.

E: - Vos pusiste que habías números críticos en 1 y en -2. ¿Por qué en x=-2?

A: - Si, en x=-2, porque justamente, supuestamente en la primer parte, se me anula en x=-2.

E: - ajá

A: - Sí, mmm … pero no sé porque lo hice, pero bueno, lo que estoy viendo que no sé .. ah...en x=1 cambia la parte, por eso tomé en x=1.

E: - Claro, cambia el tramo de la función.

A: - Claro… y bueno evalué un punto dentro del intervalo.

E: - ¿Qué conceptos usaste ahí para resolverlo?

A: -Eh mm usé el criterio de la primera derivada ... mmm elegí intervalos desde menos infinito a más infinito con los puntos donde la derivada se anula o no existe, y bueno eligiendo un x dentro de esos intervalos, evalué si me daba positivo la función es creciente, y si me daba negativo la función decrece.

E: - Bien, yo te hago una pregunta, que me quedé pensando en lo que escribiste ... eso último que escribiste: “Según mis cálculos la función es decreciente desde -2 a 1, y creciente de menos infinito a -2 y de 1 a más infinito, aunque si evalúo en x=3 debería decrecer…” ¿te acordás que quisiste expresar allí?

A: - Claro, se ve que no cerraban los cálculos (se ríe), entonces claro, se ve que habrá algún otro punto donde se anule o no existe la función, porque claro cambia de crecimiento, termina siendo negativa en esa parte de la función. Tendría que ser (piensa) …en x=2,5 se anularía, no lo tome a ese valor… lo pensé sólo con los valores enteros

E: - Ajá ... me dijiste que usaste el criterio de la primera derivada. ¿Te acordás que es lo que plantea este criterio?

A: - Y que la función tiene que ser continua y derivable en, …, continua en un intervalo cerrado y derivable en el abierto, cosa que no considera los extremos, o sea, los laterales, y bueno si la derivada se anula, existe un máximo o un mínimo relativo dentro la función, pero también puede existir el caso en que no exista y tenga un máximo o un mínimo, si la función no es continua.

E: - ¿Cómo determinarías ese máximo o mínimo?

A: -Evaluando la función en ese punto, y comparando, ehh, sí, evaluando la función en ese punto y con otros, y si ese el máximo valor es un máximo y si es el valor más chico es un mínimo.

E: - ¿Se presentó alguna dificultad cuando lo resolviste?

A: - Sí, no sabía cómo empezarlo, por eso todo tachado ahí en la hoja. Lo pensé al principio evaluando los límites, pero se ve que era un quilombo, así que dije no puede ser tanto para responder dos preguntas, entonces me puse a pensar un poco más y me acordé.

E: - O sea, que lo pudiste superar y realizar la consigna. Bueno, ya ahora te voy a entregar esta actividad que resolviste. (se le entrega la resolución gráfica)

A: - (Lo revisa y mira) listo

E: - Bueno, ¿cómo lo resolviste en esta parte?

A: - Bueno, mirando en la gráfica, te das cuenta que toda la función es decreciente y podes responder la primera pregunta, donde querés saber sobre los intervalos de decrecimiento y crecimiento. Aunque tiene un salto, la función sigue decreciendo.

E: - Bien, y la otra pregunta, ¿para determinar los extremos...?

A: -Bueno, supuse que en x=1 había un máximo, porque el punto ahí era cerrado, supuestamente está dentro del dominio de la función, eso por derecha, por izquierda está abierto.

E: - Entonces, ¿Por qué hay un extremo?

A: - Ehhmm. Porque está definido por la función y tiene a su derecha y a su izquierda valores más chicos ... y en esa no se puede usar el criterio de la primera derivada porque no es continua.

E: - Bueno, ¿Acá, se presentó alguna dificultad?

A: - No, en este no, la verdad que no.

E: - Bien,

A: - Justo estaba estudiando para el parcial y me acordé de eso.

E: -Bueno, ¿Te diste cuenta que ambas actividades te preguntaban lo mismo de la función? La diferencia es que en una expresa la forma analítica y la otra gráfica.

A: - No …

E: - Fíjate que algunas cosas que escribiste acá (señala el analítico) y acá (señala el gráfico) contéstate diferente. Por ejemplo, en lo analítico consideraste algunos puntos críticos y en la resolución gráfica no lo mencionaste. Después también, de lo que decís de los intervalos de crecimiento y decrecimiento, en lo analítico cambiaron los intervalos y en el gráfico no. También en uno decís que hay un mínimo relativo y en el otro que hay un máximo relativo.

A: - Ajá. (se ríe) … Claro pero acá (señala lo gráfico) está definido en el uno por derecha.

E: - ¿Y acá? (haciendo referencia al analítico)

A: - Y acá no, no estaría, ehh ¿cómo es?, el coso… no … si claro

E: - ¿Por qué crees que tus respuestas fueron diferentes?

A: - Y acá, tenés la gráfica ya hecha, tenés las cosas como son. Acá (en el analítico) tengo que hacer las cosas yo, seguro le erré en los cálculos, no sé.

E: - Fíjate otra cosa, se podía responder usando los mismos conceptos teóricos. Y vos en el analítico usas el criterio de la primera derivada y en lo gráfico decís que no podés usar ese criterio. ¿Por qué crees que acá (en el analítico) lo usaste?

A: -Con el criterio de la primera derivada, si lo pienso para sacar máximos y mínimos, obtengo también un punto en que no existe la derivada. Pero claro, si después lo evalúo en ese punto en la función, me tiene que dar un valor más alto que los otros, puede ser máximo y si es menor puede ser mínimo. En lo analítico lo usé (al criterio) como estrategia porque no tenía la gráfica ni nada, lo más fácil sería usar el criterio de la primera derivada.

E: - ¿Con cuál de las dos actividades te sentiste más cómodo? ¿Por qué?

A: - Y con la segunda (la gráfica) y no sé, esa la hice rápido y sabía y no sé.

E: - ¿Por qué crees que te resultó más fácil?

A: - (se ríe) creo que porque justo estaba estudiando para el parcial, más que otra cosa.

E: - ¿Hay algún otro motivo que crees que puede haber influido?

A: - Y sí, si tenés la gráfica ahí, se ve, te da las cosas ya hecha. Si lo sabes interpretar ya está. En el primero (analítico) tenés que hacer todos los cálculos para saber cada cosa.

E: - Bueno, muchas gracias por todo.

Entrevista a Yamila C.

E: - Bueno, como primera instancia te voy a entregar la primera actividad que realizaron, la parte analítica, para que la mires y la revises y recuerdes lo que fuiste haciendo.

A: - Sí, sí, de este me acuerdo. (lo mira y revisa)

E: - ¿Cómo resolviste esa actividad?

A: -Como siempre hago, rápido y después me doy cuenta, lo pienso… o sea lo sé a esto, llevaba al día la práctica.

E: - ¿Cómo planteaste? ¿Qué contestaste? ¿Cuál es la concavidad?

A: - Ehh. Planteé que no había punto, que no había cambio de concavidad, no la vi como por partes, no analicé la gráfica sería…. Lo vi a lo último y que no había recta tangente creo, no lo, puse que no había cambio de concavidad, pero si había.

E: - ¿Por qué decís que había?

A: - Porque había cambio de concavidad, creo que era algo así la función (marca con el dedo la forma de la gráfica). Había una discontinuidad, no era continua, pero había cambio de concavidad.

E: - ¿Y acá lo podés ver a eso que decís que es discontinua (indica lo realizado analíticamente)?

A: - Emmm, (piensa) … ahora no me acuerdo....

E: - ¿Hallaste la segunda derivada…?

A: - Claro, ... y no tengo ninguno el uno acá (indicando las partes de la segunda derivada de la función) … y acá va a ser un valor constante (señala uno de los trozos de la segunda derivada de la función).

E: - Bien ... Acá hallaste la segunda derivada e igualaste a cero y como no pertenecía a ninguno, de los intervalos, decís que no hay ningún punto y planteas que no hay cambio de concavidad. ¿Pero cuál sería la concavidad entonces?

A: - Y ésta es una lineal (señala el primer tramo de la segunda derivada) pero no tengo que ver la función…. (observa las leyes de la función) ésta es cúbica …. La verdad… tendría que graficarla ¿sería?

E: - No ... no sé. Lo que vos pienses…

A: -…. Algo que me cuesta un montón es graficar… en el examen no lo hice, hice lo analítico, la gráfica me cuesta un montón, estoy tres horas hasta hacer el gráfico.

E: - Bueno, pero sin graficarla ¿Podrías determinar la concavidad de la función?

A: - Humm... y acá (señala el primer tramo de la segunda derivada) es lineal, así que no tiene concavidad, y acá (señalando la segunda parte de la misma función) también es lineal, entonces ... acá no es continua (refiriéndose al punto de bifurcación de la función a trozos dada), acá la segunda derivada es… constante (vuelve a ver la primera ley de la segunda derivada) ... no sé cómo ... ¿Qué se puede ver?

E: - Bueno, a mi algo que me llamó la atención de lo que escribiste: que no hay cambio de concavidad, pero en ningún momento mencionas cual es la concavidad. Por eso, te pregunto ¿Cuál sería la concavidad?

A: - Claro

E: - No te acordás ... ¿Qué pensaste en ese momento?

A: -La verdad que en ese momento ni pensé en la gráfica.

E: - Está bien, pero más allá de lo gráfico, sin pensar en la gráfica ¿Qué podrías decir de la concavidad?

A: - … No hay punto de inflexión, pero sí cambia la concavidad

E: - ¿Por qué?

A: - Ehh, no sé, no me acuerdo, pero sé qué cambia la concavidad… Primero no es continua, sé que tiene concavidades opuestas, y como no es continua, no tiene recta tangente y por lo tanto no tiene punto de inflexión.

E: - Bueno, ¿Qué conceptos usaste?

A: - La segunda derivada, y lo iguale a cero. Ahí me debería dar el punto de inflexión. Me da cero, pero no pertenecía al intervalo.

E: - Bueno, yo ahora te voy a mostrar lo que resolviste gráficamente, que por lo que me dijiste, estuviste apuntando bastante a lo gráfico. Acá, pusiste que no tiene punto de inflexión y presenta cambio de concavidades, pero no lo justificaste. ¿Podés decirme porque escribiste esto?

A: - Porque no es continua, hay salto, no tiene recta tangente vertical, pero gráficamente cambia la concavidad.

E: - ¿Se te presentó alguna dificultad en alguna de las dos actividades?

A: - En este no (señalando la actividad gráfica), pero en este sí (señalando la actividad analítica).

E: - ¿Te habías dado cuenta que ambas actividades representan la misma función?

A: - Si

E: - Bien. Como puedes ver, pusiste cosas diferentes en una y en otra, en esta (la analítica) decís que no hay cambio de concavidad, y en ésta (la gráfica) que si presenta cambio de concavidad. ¿Por qué crees que tus respuestas fueron diferentes?

A: - Porque si yo hubiese tenido la gráfica, lo habría hecho, pero me cuesta muchísimo graficar.

E: - Entonces, ¿Cuál de las actividades te resultó más cómodo para resolver?

A: - Ésta (indicando la actividad gráfica)

E: - ¿Por qué crees que te resultó más cómodo?

A: - Y porque lo puedo ver a simple vista, se me hacía bastante obvio.

E: - Bueno, muchas gracias Yamila por tu tiempo.

Entrevista a Emilia R.

E: - Bueno, la primer parte lo que voy a hacer es entregarte la actividad analítica que habías hecho, para que la revises, la mires y recuerdes lo que hiciste. Entonces, después te voy a preguntar algunas cosas de las que escribiste. (se le entrega el escrito)

A: - (Mira y revisa) Yo sé que en ésta me había confundido, porque había visto como que, no sé porque vi que era un menos uno. (señala el valor donde cambia la ley)

E: - Ahh

A: - Entonces la tomé que iba de 1 y después de x=-1, por eso tomé dije que no tenía punto de inflexión.

E: - Ajá ...

A: - Entonces, yo vi esto y dije esto va de -1 va para allá (señala una de las partes de la función) y lo otro para allá (señalando el otro tramo)

E: - Ajá, entonces, ¿por eso pusiste acá que al 1 no lo considerabas número crítico?

A: - Claro, porque fue un error mío de ver mal, de interpretar mal consigna.

E: - Entonces, ¿también por eso decís después que no posee extremo relativo?

A: -Claro, porque no está ... no existe en ese intervalo

E: - Ajá, ¿Y acá cuando decís que la función es creciente desde menos infinito a 1 y constante desde 1 a infinito? ¿Por qué decís eso?

A: - (Lee) y porque lo habré evaluado ... seguramente lo evalué en ésta (señala el primer trozo de las leyes de la función) me dió positivo, por el criterio, me da que es creciente, y después constante … claro porque vi esto como que no tenía …. No tiene número crítico. Claro, porque yo a ésta (señala el segundo tramo de la derivada) yo la derivé, me dió -2 =0, entonces dije no tiene número crítico.

E: - Entonces ¿Qué pasa en ese intervalo? Acá escribiste que la función es constante ¿Por qué lo decís?

A: - Porque la derivada me dió constante… si me hubiera dado algo con “x” … yo habría visto que tenía alguna pendiente.

E: - ¿Cómo hubieses determinado si era creciente o decreciente? ¿Si tendría cómo me decís algo con “x”?

A: -Evaluando en la función con algún valor dentro del intervalo y según lo que me da ese valor, hubiera visto. (Se interrumpe unos segundos la entrevista por la consulta de un estudiante, enseguida se retoma.)

E: - Bueno, entonces, me decías que evaluabas la función en algún punto. ¿Y entonces?

A: - En algún punto del intervalo que corresponda.

E: - ¿Entonces qué sucede? ¿Qué podrías determinar según lo que obtenido?

A: - Si, era positivo, o sea, no tomaba el valor justo, sólo el signo, eso lo que interesa.

E: - Bueno, yo ahora te muestro esta actividad, que es la segunda parte, donde tenías la gráfica de la función. Te dejo para que la revises y recuerdes lo que hiciste.

A: - Claro, está la había hecho bien, bah, creo… ésta (señala la gráfica) ¿era la derivada?

E: - No, es la función.

A: - Claro, la función, como la función decrece, digamos, la derivada va a ser negativa.

E: - Bien, ¿Vos decís que tiene un extremo ahí?

A: - Claro, acá graficaste ya sabía que decrecía.

E: - Claro, … ¿Tiene un extremo?

A: - Ehh ... (mira y piensa) en este sí tiene un extremo relativo (señala en la gráfica el punto extremo).

E: - ¿Cómo sabés que tiene un extremo?

A: - Porque sé que en este intervalo es el mayor de todos.

E: - Vos escribiste que no resulta útil el criterio de la primera derivada ¿Por qué?

A: - Claro, porque requiere continuidad y derivabilidad.

E: - Bueno. ¿Te diste cuenta de que en ambas actividades las funciones eran las mismas? ¿Sólo que una se presenta desde lo gráfico y otro desde lo analítico?

A: - Sí ...

E: - Bien, y ¿te das cuenta que diste respuestas diferentes ante las mismas preguntas?

A: - Sí,

E: - ¿Por qué crees que pasó esto? Por ejemplo, acá decís (señalando el analítico) que la función crece y luego es constante, y acá (en el gráfico) que decrece. ¿Por qué crees que pasó eso?

A: - (Silencio) ... y porque en la gráfica se interpreta mejor. En cambio, acá (analítico) con la función tenés que imaginarte la gráfica y después de ahí... pero igual, yo como que ahí, la interpreté re mil mal.

E: ¿Por qué decís eso?

A: - Porque sí, sí ... no sé, capaz que la quise hacer rápido, entonces vi los extremos mal… yo acá había dicho que era un número crítico (señala lo analítico), digamos… acá (señala lo analítico) creo que tomé mal el valor de prueba, capaz.

E: - Si, ¿puede ser?

A: - Porque me dio positivo, no sé por qué no me dió negativo. ¿Qué hice? Si yo lo reemplazo en éste (señala uno de los tramos de la derivada) me da negativo… no sé qué puse (ríe) ... interpreté mal todo... son errores que cometo, que si los vuelvo a ver me doy cuenta, pero esto lo habré hecho mal porque lo hice rápido. Ahora lo veo bien.

E: - Claro. ¿Con cuál de las dos actividades te sentiste más cómoda para resolver? ¿Con el gráfico o con el analítico?

A: - Y yo me sentí más segura con el gráfico.

E: - ¿Por qué?

A: - Y porque con el gráfico, cuando Mario nos daba una gráfica de una derivada, bueno, en el parcial yo me sentí más segura, porque bueno, puedo aplicar todos los criterios, digamos. En cambio, en el analítico, capaz que tenés algún error, y vos decís esto me dio creciente, como me pasó en la actividad, entonces yo, estoy viendo todo mal, estoy arrastrando errores.

E: - Bueno, esto es todo. Te agradezco que te hayas quedado este tiempo.

Entrevista a Silvio S.

E: - Primero te voy a entregar la actividad analítica, para que la mires y la revises, y recuerdes lo que pensaste en ese momento. Después, te voy a hacer algunas preguntas con respecto a eso, ¿sí? (se le entrega la producción escrita)

A: - (Mira, piensa, se escuchan murmullos del pasillo) Sí.

E: - Bueno, ¿te acordás cómo resolviste la actividad?

A: - Sí, derivé ambas partes de la función, y con eso usé, … como si fuera una función normal, y ahí calculé, probando en cada intervalo y me dió que no tenía crecimiento, que en ambos intervalos decrecía.

E: - ¿A qué te referís con función normal?

A: - Mmmm, claro, una función que sea continua.

E: - ¿Con respecto a los extremos? ¿Presenta extremos relativos? ¿Hay algún número crítico?

A: - (Piensa) no había extremos relativos porque calculé los límites en el infinito y vi que siempre decrece, entonces no puede tener un máximo.

E: - Bueno, ya ahora te muestro la otra actividad, la actividad gráfica, para que la revises y recuerdes lo que contestaste. (se le entrega la producción escrita)

A: - (mira y piensa) bueno.

E: - Bien, ¿Cómo resolviste?

A: - Bueno, ahí me di cuenta que el criterio de la primera derivada no es útil, por eso, yo me había dado cuenta que era la misma función en ambas.

E: - Ah ... ¿Te diste cuenta?

A: -Sí. Cuando la leí y me di cuenta de que era la misma que la anterior, cuando vi el gráfico.

E: - Bien, acá decís que decrece en ambos intervalos y que hay un extremo relativo ¿Cómo lo sabés?

A: - Y, en el gráfico se ve.

E: - Me estás diciendo que te diste cuenta que era la misma función, pero acá (en el analítico) me dijiste que no había extremo relativo. ¿Por qué?

A: - Sí, creo que fue en ese momento cuando ustedes nos explicaron que podía haber un problema con el criterio de la primera derivada.

E: - ¿Cuándo no se puede utilizar este criterio?

A: - En estos casos.

E: - ¿Cuál sería este caso? ¿Qué pasa?

A: - Es discontinua.

E: - Bueno, recién vimos la contradicción que planteaste en una y otra actividad ¿Por qué crees que pasó esto? ¿Por qué crees que acá respondes de una manera y la otra actividad diferente?

A: - Porque, cuando, acá (en el analítico) usé el criterio, lo hice por partes, y acá (en el gráfico) pude ver la función en su conjunto.

E - ¿Y acá (analítico) en el x= 1, no consideraste que podía pasar?

A: - No, no tuve en cuenta, que podía pasar ahí.

E: - ¿Con qué actividad te sentiste más cómodo, te resultó más sencillo pensar?

A: - El gráfico, ya ves la función, es más fácil.

E: - ¿Qué herramientas utilizaste en cada actividad? ¿Usaste las mismas?

A: -En el primero, usé el criterio de la primera derivada, y en el segundo usé… la vista, con el gráfico.

E: - Pero ¿planteaste algún concepto también?

A: - Si, acá usé y porque acá no.

E: -Acá (en el analítico) ¿Te diste cuenta de que era discontinua?

A: - Si, me di cuenta que había un a discontinuidad, creo que lo que podría haber hecho para saber era calcular cuánto vale en ese punto la función, probablemente uno no se da cuenta.

E: - Pero, sin embargo, usaste igual el criterio, el criterio de la primera derivada.

A: - Si.

E: - Bueno, está bien Silvio, te agradezco mucho por tu tiempo.

Entrevista Joaquín N.

E: - Bueno Joaquín, yo te voy a mostrar la actividad analítica que habíamos hecho, ¿te acordás? (Se le entrega la resolución analítica).

A: - Sí.

E: - Bien, así la miras, y recordás lo que escribiste e hiciste.

A: - (Mira y piensa unos minutos)

E: -Bueno, ¿pudiste verlo?

A: - Si, no me acuerdo si era éste o en el otro donde había metido la pata.

E: - Bueno, ¿Cómo resolviste esta actividad? ... ¿Qué pensaste?

A: -... Primero me fijé cómo era la función por partes, los separé y saqué el límite de uno por un lado y por el otro, y me fijé que era discontinua.

E: - ¿Veías que había una discontinuidad ahí?

A: - Si… .no, no era discontinua.… Saqué los límites, la derivada y me fijé donde se hacía cero…

E: - Vos acá planteas que x=1/2 es un punto crítico. ¿Por qué en x=1/2?

A: - ... No sé (mira y piensa) de acá (señala en el escrito) saqué el ½. … ah la derivada de esto (señala una de las ramas de la función) me da 2x-1 e igualando a cero, me da x= ½.

E: - Y luego determinaste los intervalos de crecimiento y decrecimiento ¿Qué conceptos usaste para ello? ... ¿Qué herramientas teóricas usaste?

A: - (Piensa) y… bueno acá … usé la derivada y busqué un valor menor a un medio, y uno mayor, y ahí salta de positivo a negativo.

E: - ¿Y qué determinaste? ¿Tiene extremo esa función?

A: (Piensa)- y acá me dio que tiene un mínimo en x=1/2.

E: - ¿Qué usaste para determinar eso?

A: - El criterio de la derivada, que si cambia de negativa a positiva, hay un mínimo, porque pasa de decreciente a creciente.

E: - Bien, y hubo ¿alguna dificultad que se te presentó cuando resolviste? ¿Te acordás?

A: -Mmm, no, … lo que no consideré es en x=1.

E: - Ajá, ¿y por qué no lo consideraste?

A: - Se me pasó.

E: - Bueno, fíjate, ahora la otra actividad, que se presenta el gráfico. Revísalo, míralo enseguida… así recordás lo que escribiste. (Se le entrega la resolución gráfica)

A: -Ya está.

E: - Bueno, ¿Cómo lo resolviste? ¿Cómo hiciste para contestar las preguntas?

A: - Para ver si es creciente o decreciente miré la gráfica.

E: - Ajá, ¿y qué obtuviste?

A: - Que decrece.

E: - Ajá, ¿Y tiene algún extremo esa función?

A: - Si, en x=1.

E: - Ajá, ¿Qué usaste? ¿Qué concepto utilizaste?

A: - Y analicé el límite por izquierda… no lo pensé analíticamente, pero viendo a que se acerca la función por izquierda y por derecha.

E: - Eh. ¿Se podía usar el criterio de la primera derivada para hallar extremos?

A: - No, porque saltaría, por discontinuidad.

E: - Bien, ¿Te diste cuenta que ambas actividades representan la misma función? Solo que una se expresa en forma analítica y la otra gráfica.

A: - No, no me di cuenta.

E: - Y además, pregunta lo mismo.

A: - Sí.

E: - Entonces, fíjate que en la primera actividad (analítica) decís que es discontinua, y que hay un extremo y te basas en el criterio para determinarlo, y acá (actividad gráfica) decís que hay un extremo, pero decís que no podés usar el criterio porque no es continua. Además, en la primera no evalúas en 1 y en la segunda sí. ¿Por qué crees que lo resolviste diferente, si la función era la misma?

A: - Y porque al ver la función, uno no se pone a pensar analíticamente.

E: - Bueno, otra cosa, en la actividad analítica dijiste que x=1/2 es número crítico. ¿Qué pasa con ese valor en la actividad gráfica? ¿Lo consideraste?

A: - (mira la gráfica y piensa) … no creo que x=1/2 sea mínimo.

E: - Claro, pero en el analítico tenía extremo. ¿Por qué pensás que uno te dio mínimo y en el otro no?

A: - (Mira en el analítico y piensa) no ... ah no ser que haya derivado mal…

E: - ¿Vos decís que es algún error analítico, digamos?

A: - Sí.

E: -Bueno, en función de esto ¿Qué registro te resultó más sencillo, o más cómodo para responder?

A: - Pienso, que cuando uno tiene que resolver en forma analítica uno tiene más posibilidad de errores, en los cálculos. En el analítico tenés que pensar más y en gráfico no te equivocas en detalles.

E: - ¿Por qué crees eso?

A: - Bueno, en mi caso particular soy despistado, si tengo que resolverlo, soy…. Tengo más chance de equivocarme. Además, el gráfico lo resolví más rápido, porque tuve que desarrollarme menos.

E: -Bien, muy bien Joaquín, gracias por tu tiempo.

Entrevista a Franco T.

E: - Bueno, Franco, yo en la primer etapa te voy a entregar la actividad analítica que resolviste, más que nada para que la puedas revisar y recuerdes lo que habías pensado, ya que pasaron algunos días. Te lo doy, para lo que vuelvas ver, ¿sí? Después, te voy a hacer algunas preguntas respecto a ello. (Se le entrega la producción) Bueno, esto es lo habías escrito vos.

A: - Si, ¿esta era la primera?

E: - Si, esta era la primera.

A:(revisa y piensa)- sí.

E: - Bueno, ¿Te acordás, cómo resolviste esta actividad?

A: - Eh, sí. Lo primero que busqué, fue hallar el dominio de la función. A partir de ahí, como era una función por partes, hallé su respectiva derivada a cada parte, digamos. Y después, cuando ya lo terminé de hacer y había terminado la clase, me había puesto a pensar un poco y me había dado cuenta, que cuando se hallaba la derivada en una función partes, me parece los límites ahí… digamos, por ejemplo, este es x mayor o igual a 1, no era, sería, solamente quedaba el mayor, no mayor o igual. ¿Era algo así? ... Entonces ahí me di cuenta de que como que había planteado mal esta parte, a lo que responde al dominio de cada función por parte.

E: - Ah, Es decir, ¿en el dominio de la derivada?

A: - Claro.

E : - Bien, y vos acá hiciste la gráfica de…

A:(Interrumpe): - Claro, yo cuando hallé la segunda derivada, llegué a este resultado (señala la función de la segunda derivada), traté de graficarla, para interpretarlo ... para verlo más… con imágenes digamos, al resultado y llegué a esto (señala la gráfica realizada).

E: - Ajá, ... y después de ahí. ¿Pudiste plantear los intervalos de concavidad?

A: - Claro.

E: - ¿Que planteaste?

A: - Eh ... ya acá me equivoqué (señala en la segunda derivada en el punto de bifurcación) acá también sería vacío, ¿o no? (mira buscando respuesta) ... entonces como la segunda derivada es negativa, del menos infinito hasta el uno, … yo había puesto que es cóncava hacia abajo. Del 1 al más infinito era cóncava hacia arriba. Y bueno, por el criterio.

E: -Ah, por el criterio.

A: - Si.

E: - Entonces, después dijiste que había un punto de inflexión

A: - Si, ahí, yo puse que sí, mmmm. Eso no estaba seguro del todo. Había puesto que no, taché y puse que sí.

E: - ¿Por qué no estabas seguro? ¿Te acordás? ¿Qué te hizo dudar?

A: - ... ahí no existía la segunda derivada en el punto, digamos, en el 1 no existe la segunda derivada, pero... No me acuerdo, porque no era, porque lo había planteado así. (silencio)

E: - O sea, ¿Ahí hay un cambio de concavidad?

A: - Si, hay cambio de concavidad, pero no existía la segunda derivada. Tenía que cumplir los tres requisitos.

E: - ¿Qué tres requisitos?

A: - Que separe concavidades, que sea continua y que … que esté definida en ese punto en realidad, ... no me acuerdo si era que este definida o que sea continua en ese punto; y que exista la recta tangente en ese punto.

E: - ¿Y existe la recta tangente?

A: - Y acá, no existe la recta tangente. Y yo terminé poniendo que sí, pero ahí me confundí.

E: - Bueno, ahora te voy a mostrar la otra actividad, la actividad gráfica, para que la veas y revises y recuerdes lo que habías planteado. (Silencio, ruidos de martillos y máquinas de afuera)

A: - Claro, acá sería la respuesta correcta que tendría que haber dado, en el parcialito anterior. Porque acá en la gráfica de la función podemos ver el punto, si, el punto (1,-1) si cumple con la condición de que separa concavidades, pero con las otras dos no.

E: - Claro, vos acá lo expresaste bien a eso. ¿Qué usaste acá? ¿Qué conceptos o que herramientas teóricas usaste?

A: - Acá, visualice que la función, era creciente y cóncava hacia abajo, las rectas están por encima de las gráficas. Entonces ahí deduje que del menos infinito al uno es cóncava hacia abajo, era negativa la segunda derivada y que del 1 al más infinito con las rectas tangentes están por debajo de la función, la segunda derivada iba a ser positiva, entonces es cóncava hacia arriba.

E: - ¿Y veías que no hay punto de inflexión ahí?

A: - Claro, en la gráfica se podía ver que no era de inflexión, porque no era continua en ese punto, además no existe la recta tangente.

E: - Bueno, ¿te diste cuenta que las funciones eran las mismas? Está expresada en forma analítica y esta gráfica (señalando en cada consigna)

A: - Digamos, está por parte es esta (señala la función analítica y la gráfica correspondiente)

E: - Ajá. ¿Te habías dado cuenta?

A: - Veía, que eran como trabajos inversos, pero no sabía que justamente eran las mismas.

E: - Sí, bueno, un poco ya charlamos también, que hubo algunas contradicciones. A ver, las concavidades estuvieron bien planteadas en las dos, pero más que nada esto del punto de inflexión, ¿no? Acá (señala el registro analítico) decís que había punto de inflexión, y acá (señala registro gráfico) decís que no hay. ¿Por qué crees que pasó esto?

A: - Para mí, como al no verlo tan claro, como era la función real, y al estar trabajando con la segunda derivada solamente, ahí me parece que surgió la contradicción que en la gráfica en sí de la función, se podía ver claramente que no había punto de inflexión, pero al verlo analítico, me parece que, tuve el error de no poder visualizarlo.

E: - Bien, ¿con cuál de los regsitros te sentiste más cómodo?

A: - Con lo gráfico me pareció más … que lo podía ver mejor y trabajar mejor.

E: - ¿Por qué pensás que pasa eso?

A: - Y ... lo gráfico te permite ver el comportamiento total de la función, como es, en casi todo su dominio, que, por ahí en lo analítico, si no estás bien atento o sino empezás hacer un trabajo específico sobre la función, como por ejemplo de sacar la segunda derivada y esas cosas, no lo ves claramente. Para mí, hay está la diferencia, que acá (señala lo gráfico) sin hacer ningún cálculo, ya podés interpretarlo, bastante mejor con la gráfica que en forma analítica, aunque en realidad, deberías llegar al mismo resultado, pero me resultó un poco más comprensible la gráfica.

E: - Bueno, Franco, eso era todo. Muchas Gracias.