



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química

**Análisis multifractal basado en
coeficientes ondita líderes:
selección automática del rango de escalamiento,
formalismo multifractal basado en p -líderes y
aplicación a señales biomédicas.**

Roberto Fabio Leonarduzzi

Tesis remitida al Comité Académico del Doctorado
como parte de los requisitos para la obtención
del grado de
DOCTOR EN INGENIERIA
Mención Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas
de la
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

2014

Comisión de Posgrado, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Ciudad Universitaria,
Paraje "El Pozo", S3000, Santa Fe, Argentina.

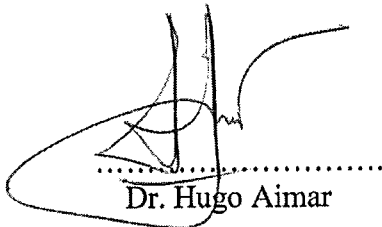


UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

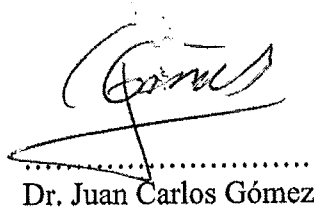
Santa Fe, 3 de noviembre de 2014.

Como miembros del Jurado Evaluador de la Tesis de Doctorado en Ingeniería titulada "*Análisis multifractal basado en onditas líderes: selección automática del rango de escalamiento, formalismo multifractal basado en p-líderes y aplicación a señales biomédicas*", desarrollada por el Bioing. Roberto Fabio LEONARDUZZI en el marco de la Mención "Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas", certificamos que hemos evaluado la Tesis y recomendamos que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor en Ingeniería.

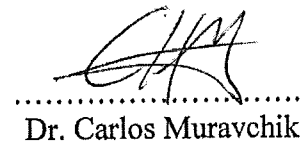
La aprobación final de esta disertación estará condicionada a la presentación de dos copias encuadernadas de la versión final de la Tesis ante el Comité Académico del Doctorado en Ingeniería.



Dr. Hugo Aimar



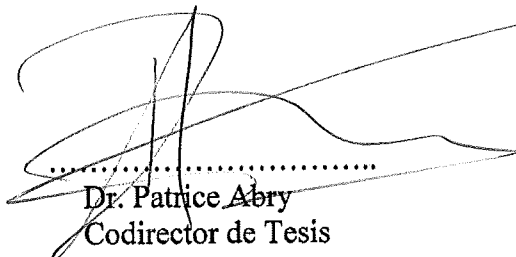
Dr. Juan Carlos Gómez



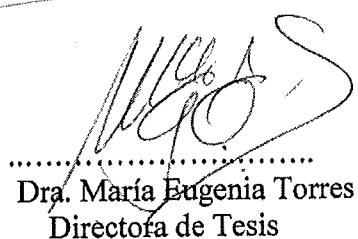
Dr. Carlos Muravchik

Santa Fe, 3 de noviembre de 2014

Certifico haber leído la Tesis, preparada bajo mi dirección en el marco de la Mención "Inteligencia Computacional, Señales y Sistemas" y recomiendo que sea aceptada como parte de los requisitos para la obtención del título de Doctor en Ingeniería.



Dr. Patrice Abry
Codirector de Tesis



Dra. María Eugenia Torres
Directora de Tesis

Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y
Ciencias Hídricas

Secretaría de Posgrado

Ciudad Universitaria
C.C. 217
Ruta Nacional N° 168 - Km. 472,4
(3000) Santa Fe
Tel: (54) (0342) 4575 229
Fax: (54) (0342) 4575 224
E-mail: posgrado@fich.unl.edu.ar

ANÁLISIS MULTIFRACTAL BASADO EN ONDITAS LÍDERES:
SELECCIÓN AUTOMÁTICA DEL RANGO DE ESCALAMIENTO,
FORMALISMO MULTIFRACTAL BASADO p -LÍDERES Y
APLICACIÓN A SEÑALES BIOMÉDICAS.

Resumen. En la actualidad, el análisis multifractal y la invarianza a la escala constituyen paradigmas relevantes y populares para el análisis, modelado y caracterización de señales irregulares, con aplicaciones en un creciente número de campos. Esencialmente, su uso consiste en la identificación del decaimiento según una ley de potencias de una cantidad multirresolución adecuada, y en la medición del exponente que lo gobierna.

A pesar de su amplio uso en la práctica, su aplicación todavía presenta ciertas dificultades. En primer lugar, requiere de la cuidadosa selección del *rango de escalamiento*, es decir, el intervalo de escalas en el que se observan las leyes de potencias. Dicha selección se realiza en forma visual por el practicante, en una labor tediosa y propensa a errores, sin resultados teóricos que sirvan de guía en la elección. Por otro lado, las cantidades multirresolución utilizadas actualmente, basadas en el exponente de Hölder, no pueden ser aplicadas a señales caracterizadas por la existencia de *regularidad negativa*, o a señales que no estén localmente acotadas. La solución actual a estas limitaciones consiste en recurrir a una integración fraccionaria de los datos que, sin embargo, puede conducir a estimaciones erróneas en presencia de singularidades oscilantes.

Las contribuciones del presente trabajo de tesis apuntan a las problemáticas mencionadas. El primer aporte es un algoritmo que permite la selección adecuada del rango de escalamiento, en forma no paramétrica, automática y no supervisada, a partir de una única realización de los datos. Validamos al método mediante simulaciones numéricas sobre procesos multifractales sintéticos y señales de frecuencia cardíaca reales. Mostramos que el algoritmo selecciona rangos correctos, y además permite obtener estimadores con error cuadrático cercano al óptimo. Por otro lado, ilustramos cómo el algoritmo propuesto se adapta a desviaciones en el escalamiento causadas por la contaminación por ruido u otros fenómenos espurios.

La segunda contribución de este trabajo es la propuesta y desarrollo de un formalismo multifractal basado en una nueva cantidad multirresolución, los coeficientes ondita p -líderes, que permite analizar en forma natural señales con regularidad negativa. Ilustramos mediante simulaciones numéricas su desempeño, y mostramos que además permite la obtención de estimadores con mejor calidad estadística que los disponibles actualmente. Discutimos también cómo la variación del parámetro p permite analizar con más profundidad el comportamiento singular de los datos. Utilizamos esta información para proponer una nueva clasificación de singularidades. También establecemos una relación explícita entre este nuevo formalismo y la técnica de análisis de fluctuaciones sin tendencias multifractal (MFDFFA), un algoritmo *ad hoc* ampliamente utilizado en la práctica. Dicha conexión nos permite brindar un sustento teórico a MFDFFA, así como establecer el exponente de regularidad que verdaderamente mide. Finalmente, ilustramos la aplicación de la técnica a la detección de acidosis a partir de la frecuencia cardíaca fetal.

WAVELET LEADER BASED MULTIFRACTAL ANALYSIS:
AUTOMATED SCALING RANGE DETECTION,
 p -LEADER BASED MULTIFRACTAL FORMALISM AND
APPLICATION TO BIOMEDICAL SIGNALS.

Abstract. Nowadays, multifractal analysis and scale invariance are popular and relevant paradigms used for the analysis, modelling and characterization of irregular signals, with a growing number of applications in many different fields. Essentially, their use amounts to the identification of a power-law decay of a suitable multiresolution quantity, and the measurement of the exponent that characterizes such behavior.

Despite its widespread use, the application of multifractal analysis still suffers from some difficulties. On the one hand, it requires a careful selection of the *scaling range*, which is the interval of scales where the power law behavior is seen. To perform such selection, the practitioner typically resorts to visual inspection, a tedious and error-prone activity, with few theoretical guidelines to assist him. On the other hand, multiresolution quantities in use today are based on the measurement of the Hölder exponent, and therefore can not be used on data which show *negative regularity*, or on data which are not locally bounded. The current solution to this limitation is to perform a fractional integration on the data prior to the analysis. This procedure, however, can lead to inaccurate estimations in the presence of oscillating singularities.

The contributions of this work aim to aid in the resolution of the two limitations discussed above. The first contribution is an algorithm that allows an appropriate selection of the scaling range from a single realization of data, in a non-parametric, automated and unsupervised way. We validate the proposed method by means of numerical simulations on synthetic multifractal processes and real heart rate data. We show that the algorithm accurately selects the scaling range, and allows to perform estimations with close to optimal mean squared error. Further, we illustrate how the algorithm adapts to departures from scaling caused by noise or other spurious phenomena.

The second contribution of this work is the proposition and development of a multifractal formalism based on a novel multiresolution quantity, the wavelet p -leaders, which allow to naturally analyze data with negative regularity. We illustrate this technique's performance by means of numerical simulations, and we show that it provides better estimates than state-of-the-art approaches. We also discuss how the possibility of changing the parameter p provides further information on the singular behavior of data. We use this information to propose a new classification of singularities. We also establish an explicit connection between this novel method with multifractal detrended fluctuation analysis (MF DFA), an *ad hoc* algorithm widely used in applications. This connection enables us to provide theoretical support to MF DFA, as well as to shed light on the regularity exponent it actually measures. Finally, we illustrate the application of the proposed technique to acydosis detection from fetal heart rate data.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi directora, María Eugenia Torres, por haberme iniciado en este apasionante tema, por haberme guiado a lo largo de estos años, por haberme dado la oportunidad de conocer a las personas que conocí, por haberme permitido realizar los viajes fruto de los cuales esta tesis se gestó y creció, y por un largo etcétera. Muchas gracias por todo.

Agradezco muy especialmente a Patrice Abry por su dedicada guía, por su ayuda generosa y desinteresada, que modificó mi forma de percibir la investigación. Le agradezco por haberme aceptado para trabajar con él, y por sus invitaciones a visitar el laboratorio de Lyon, que significaron un enorme crecimiento personal y científico (y gastronómico). En último lugar, pero no por eso con menor intensidad, le quiero agradecer por constituir con su trabajo el objetivo al que aspiro llegar en mi carrera científica.

Agradezco a Stéphane Jaffard y a Herwig Wendt por aceptarme en el círculo de los *p*-líderes, por sus consejos, explicaciones y guía, que significaron para mí un enriquecimiento que no puedo dejar de destacar. Mi forma de trabajar no sería la misma de no haberlos conocido. Además agradezco a Herwig por todo lo que hizo durante mi visita a Toulouse, y por mostrarme que no hay límites en la sofisticación de las figuras que se pueden lograr con Matlab.

Finalmente, agradezco a Gastón Schlotthauer por su constante ayuda y consejos, por su siempre buena predisposición, y por haberme reclutado para incorporarme al laboratorio y dedicarme a la investigación.

Índice general

1. Introducción	1
2. Marco teórico	5
2.1. Introducción	7
2.2. Invarianza a la escala	7
2.3. Análisis multifractal	8
2.3.1. Exponente de Hölder y regularidad local	9
2.3.2. Análisis multifractal y espectro multifractal	10
2.4. Formalismo multifractal	11
2.5. Cantidades multirresolución	14
2.5.1. Propiedades generales	14
2.5.2. Incrementos	16
2.5.3. Oscilaciones	16
2.5.4. Coeficientes ondita discretos	17
2.5.5. Coeficientes ondita líderes	20
2.5.6. Otras cantidades multirresolución	21
2.5.7. Comparación de formalismos multifractales	23
2.6. log-cumulantes	24
2.7. Estimación práctica	26
2.7.1. Rango de escalas	26
2.7.2. Regresiones lineales	27
2.8. Regularidad negativa e integración fraccionaria	29
2.8.1. Exponente de Hölder uniforme	29
2.8.2. Integración fraccionaria	30
2.9. Bootstrap para análisis multifractal	31
2.9.1. Bootstrap no paramétrico	32
2.9.2. Bootstrap por bloques	32
2.9.3. Bootstrap en el plano tiempo escala	33
2.9.4. Distribuciones empíricas de los estimadores	36
2.9.5. Intervalos de confianza y test de hipótesis	36
2.10. Implementación numérica	37
2.11. Comentarios finales	37
3. Procesos multifractales	39
3.1. Introducción	41
3.2. Clasificación de procesos	41
3.2.1. Procesos autosimilares con incrementos estacionarios	41

3.2.2.	Procesos monofractales y multifractales	42
3.2.3.	Invarianza a la escala	42
3.2.4.	Relación entre las clasificaciones	43
3.3.	Movimiento browniano fraccionario	44
3.4.	Proceso α -estable de Lévy	44
3.5.	Movimiento aleatorio multifractal	45
3.6.	Cascadas canónicas de Mandelbrot	46
3.6.1.	CMC log-normal	47
3.6.2.	CMC log-Poisson	47
3.7.	Cascadas de Poisson compuestas	47
3.7.1.	CPC log-normal	49
3.7.2.	CPC log-Poisson	49
3.8.	Procesos auto-similares en tiempo multifractal	50
3.8.1.	CPC-fBm-MF log-normal	51
3.8.2.	CPC-fBm-MF log-Poisson	52
3.9.	Cascadas de onditas aleatorias	52
3.9.1.	RWC con multiplicadores log-normales	53
3.9.2.	RWC con multiplicadores log-Poisson	54
3.10.	Cascadas de onditas determinísticas	54
3.11.	Series de onditas aleatorias	55
3.11.1.	Definición	55
3.11.2.	RWS invariantes a la escala	57
3.11.3.	Singularidades oscilantes	57
3.11.4.	Síntesis a partir de una RWC	57
3.11.5.	RWS a partir de una RWC log-normal	58
3.12.	Series ondita lacunares	58
3.13.	Implementación numérica	59
3.14.	Comentarios finales	59
4.	Selección automática del rango de escalamiento	61
4.1.	Introducción	63
4.2.	Determinación del rango de escalas	63
4.2.1.	Trabajos relacionados	64
4.3.	Selección automática del rango de escalas	65
4.3.1.	Estimación basada en bootstrap	67
4.3.2.	Algoritmo	68
4.3.3.	Costo computacional	69
4.4.	Evaluación del desempeño	70
4.4.1.	Metodología y experimentos numéricos	70
4.4.2.	Procesos multifractales	72
4.4.3.	Ruptura inferior del escalamiento y robustez al ruido	76
4.4.4.	Ruptura superior del escalamiento	79
4.4.5.	Rupturas inferior y superior del escalamiento	81
4.4.6.	Existencia de diferentes regímenes de escalamiento	83
4.5.	Variabilidad de la frecuencia cardíaca	84
4.5.1.	Invarianza a la escala en la variabilidad de la frecuencia cardíaca	84
4.5.2.	Selección del rango de escalas y estimación de parámetros	84

4.6. Comentarios finales	87
5. Análisis multifractal basado en p-exponentes y p-líderes	89
5.1. Introducción	91
5.2. Exponentes de regularidad puntual	92
5.2.1. Regularidad puntual de Hölder	92
5.2.2. Espacios de regularidad p	92
5.2.3. p -exponentes	93
5.2.4. Polinomio de Taylor	93
5.2.5. Propiedades de los p -exponentes	94
5.3. Caracterización mediante coeficientes ondita	95
5.3.1. Hipótesis de regularidad globales	95
5.3.2. Coeficientes ondita p -líderes	96
5.3.3. Caracterización del p -exponente	97
5.3.4. Extensión al caso $p < 1$	97
5.4. Análisis multifractal basado en p -exponentes	98
5.4.1. p -espectro multifractal	98
5.4.2. Formalismo multifractal basado en p -líderes	99
5.4.3. Cumulantes basados en p -líderes	99
5.5. Clasificación de singularidades	99
5.5.1. Singularidades <i>cusp</i> y singularidades <i>oscilantes</i>	100
5.5.2. p -exponentes y lacunaridad	102
5.5.3. Regularidad negativa	103
5.6. Estimación a partir de datos con resolución finita	107
5.6.1. Modelo basado en cascadas de onditas determinísticas	108
5.6.2. Modelo basado en cascadas de onditas aleatorias	111
5.6.3. Conclusiones	117
5.7. Relación con MF DFA	117
5.7.1. MF DFA	118
5.7.2. p -exponentes y MF DFA	118
5.7.3. Conclusiones	122
5.8. Simulaciones numéricas	122
5.8.1. Procesos con p -espectro multifractal prescrito	122
5.8.2. Corrección del efecto de resolución finita	126
5.8.3. p -espectros p -invariantes y regularidad negativa	129
5.8.4. p -espectro y singularidades lacunares	135
5.9. Aplicación a frecuencia cardíaca fetal	137
5.9.1. Análisis de la frecuencia cardíaca fetal	137
5.9.2. Base de datos	138
5.9.3. Análisis multifractal basado en p -líderes de la FHR	139
5.9.4. Conclusiones	142
5.10. Comentarios finales	143
6. Conclusiones y trabajos futuros	147

A. Demostraciones	151
A.1. Introducción	151
A.2. Demostración del teorema 5.2.1	151
A.3. Demostración de la condición óptima del Teorema 5.2.1	152
A.4. Demostración de la proposición 5.5.1	155
A.5. Demostración del teorema 5.5.1	156
A.6. Demostración de la proposición 5.4.1	158
B. Transformación de Legendre	161
B.1. Introducción	161
B.2. Transformación de Legendre	161
B.2.1. Transformación de Legendre para funciones cóncavas	162
B.2.2. Transformación de Legendre para funciones no cóncavas	164

Índice de figuras

2.1. Esquema de la estimación de parámetros multifractales.	28
2.2. Esquema de la estimación de parámetros multifractales con intervalos de confianza provistos mediante bootstrap.	34
4.1. Detección de la escala de corte inferior	75
4.2. Detección de la escala de corte superior	76
4.3. Escalamiento perfecto	77
4.4. Desviación del escalamiento en escalas finas	78
4.5. Desviación del escalamiento en escalas finas	79
4.6. Desviación del escalamiento en escalas finas	80
4.7. Desviación del escalamiento en escalas toscas	81
4.8. Desviación del escalamiento en escalas toscas	82
4.9. Desviación del escalamiento en escalas toscas y finas	83
4.10. Estimaciones en HRV	85
5.1. Ilustración de funciones <i>cusp</i>	101
5.2. Función lacunar $F_{\alpha,\gamma}$	104
5.3. Primitivas de la función lacunar $F_{\alpha,\gamma}$	105
5.4. Clasificación de singularidades	106
5.5. Funciones <i>cusp</i> y <i>chirp</i>	107
5.6. Espectro multifractal a partir de espectro de grandes desviaciones . .	125
5.7. Espectro multifractal de las series onditas lacunares	125
5.8. Factor de corrección en $MRW^{(\nu)}$	127
5.9. Factor de corrección en Lévy $^{(\nu)}$	128
5.10. p -espectros multifractales y MFDFA en $MRW^{(\nu)}$	130
5.11. p -espectros multifractales y MFDFA en Lévy $^{(\nu)}$	131
5.12. Calidad de las estimaciones en $MRW^{(\nu)}$	133
5.13. Calidad de las estimaciones en Lévy $^{(\nu)}$	134
5.14. Calidad de las estimaciones en $MRW^{(\nu)}$ con tendencias	136
5.15. Estimaciones dependientes de p en series de onditas lacunares	137
5.16. Frecuencia cardíaca fetal: p -espectros	141
5.17. Frecuencia cardíaca fetal: $c_1^{(p)}$ y $c_2^{(p)}$	141
5.18. Frecuencia cardíaca fetal: clasificación	143
5.19. Frecuencia cardíaca fetal: clasificación conjunta	143

Índice de tablas

4.1. Escalamiento perfecto: rangos de escala seleccionado y MSE-óptimo	73
4.2. Escalamiento perfecto: rangos de escala seleccionado y MSE-óptimo	74
4.3. Escalamiento perfecto: rangos seleccionados y MSE mínimo	77
4.4. Desviación del escalamiento en escalas finas	78
4.5. Desviación del escalamiento en escalas toscas	81
4.6. Desviación del escalamiento en escalas toscas y finas	83
4.7. Datos de HRV	85
4.8. Datos de HRV	86
5.1. Frecuencia cardíaca fetal: dependencia respecto a p	142
5.2. Frecuencia cardíaca fetal: calidad de la clasificación	142

Acrónimos

En el presente documento, utilizaremos los acrónimos correspondientes a las expresiones en idioma inglés, por ser la forma más difundida en la bibliografía.

CWT	Transformada ondita continua
DWT	Transformada ondita discreta dinámica
WTMM	Módulos máximos de la transformada ondita
MF DFA	Análisis de fluctuaciones sin tendencias multifractal
fBm	Movimiento Browniano fraccionario
fGn	Ruido Gaussiano fraccionario
MRW	Movimiento aleatorio multifractal
CMC	Cascadas canónicas de Mandelbrot
CPC	Cascadas de Poisson compuestas
CPC-fBm	fBm en tiempo multifractal basado en CPC
RWC	Cascadas de onditas aleatorias
DWC	Cascadas de onditas determinísticas
RWS	Serie de onditas aleatorias
LWS	Serie de onditas lacunares
STD	Desviación estándar
MSE	Error cuadrático medio
RMSE	Raíz del error cuadrático medio
MAD	Mediana de las desviaciones absolutas
HR	Frecuencia cardíaca
FHR	Frecuencia cardíaca fetal
HRV	Variabilidad de la frecuencia cardíaca

Notación

$\lambda = \lambda_{j,k}$	Intervalo diádico a la escala j y posición k .
$\lambda_j(x_0)$	Intervalo diádico de escala j que contiene al punto x_0 .
Λ_j	Conjunto de todos los intervalos diádicos en la escala j .
$d_\lambda = d(j, k)$	Coefficientes ondita
$L_\lambda = L(j, k)$	Coefficientes onditas líderes
$\ell_\lambda = \ell(j, k)$	Coefficientes ondita pseudo líderes
$F(j, k)$	Cantidad multirresolución involucrada en MFDFA.
$D(h)$	Espectro multifractal
$S_T(j, q)$	Funciones de estructura basadas en la cantidad multirresolución T
$\zeta_T(q)$	Función de escalamiento basada en la cantidad multirresolución T
$\mathcal{L}_T(q)$	Espectro de Legendre basado en la cantidad multirresolución T
$\zeta_d(q)$	Función de escalamiento basada en coeficientes ondita
$X^{(\nu)}$	Derivada fraccionaria de X de orden ν
$X^{(-\nu)}$	Integral fraccionaria de X de orden ν
$\hat{\theta}$	Estimador del parámetro θ
$\hat{\theta}^*$	Replicación de bootstrap de $\hat{\theta}$
$\hat{\theta}^X$	Estimador del parámetro θ calculado a partir de la señal X .
$\mathbb{E}[W]$	Valor esperado de la variable aleatoria W
$f(x) \sim g(x)$	$\exists K \in \mathbb{R}^+ : \liminf_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq K$

Capítulo 1

Introducción

‘Where shall I begin, please your Majesty?’ the White Rabbit asked.

‘Begin at the beginning’ the King said gravely, ‘and go on till you come to the end: then stop.’

ALICE’S ADVENTURES IN WONDERLAND
Lewis Carroll

El paradigma tradicional en el procesamiento de señales consistió en la identificación de una *escala característica* (temporal, espacial, etc) en la que se observa en forma predominante el fenómeno bajo estudio. Por ejemplo, en procesamiento de señales típicamente se estudia la potencia del espectro en una cierta banda de frecuencias, en el análisis de imágenes se buscan estructuras con un cierto tamaño, etc. Por el contrario, en el paradigma de la *invariancia a la escala*, o *escalamiento*, se toma el punto de vista opuesto: se considera que ninguna escala juega un rol preponderante en la descripción de la dinámica de la señal bajo estudio, sino que, por el contrario, todas ellas juegan un rol igualmente importante. Por lo tanto, el objetivo bajo este nuevo paradigma es la identificación de los mecanismos que regulan la relación entre los comportamientos observados en distintas escalas.

La forma más habitual de invarianza a la escala que ha sido estudiada toma la forma de leyes de potencias. Sea $T(a)$ la cantidad dependiente de la escala utilizada, que puede ser un estimador espectral (en este caso la escala a está relacionada con la inversa de la frecuencia), la autocorrelación (en este caso la escala a es el retardo), los momentos de alguna cantidad multirresolución, etc. Entonces, la forma que toma el escalamiento es $T(a) \sim a^\alpha$. Entonces, el objetivo del análisis en este nuevo paradigma es la identificación del exponente α que controla dicha ley de potencias. Si la invarianza a la escala se observa en las escalas más grandes, el comportamiento en ley de potencias está relacionado con la aparición de correlaciones de largo plazo entre los datos. Por el contrario, si dicho comportamiento se observa en las escalas más finas, está relacionado con la regularidad local de la señal.

Por otro lado, el análisis multifractal es una técnica que permite describir señales altamente irregulares; en forma más precisa: señales que son irregulares en casi todo punto. Dicha técnica provee una descripción global de la distribución de las singularidades presentes en la señal estudiada mediante el *espectro multifractal*. Por lo tanto, es una herramienta idónea para el análisis y la caracterización de señales en las que la información de interés está codificada en el comportamiento irregular.

El análisis multifractal está íntimamente relacionado con el análisis de la invarianza a la escala a través de lo que se conoce como formalismo multifractal. Esta técnica permite obtener el espectro multifractal a partir de los exponentes que caracterizan el comportamiento invariante en las escalas. Por lo tanto, la información provista por ambas técnicas es, en cierta medida, equivalente. Tanto el análisis multifractal como el análisis de invarianza a la escala han sido ampliamente utilizados en la práctica en los últimos años, en diferentes dominios de aplicación, entre los que destacan por ejemplo, el estudio de la turbulencia [14, 124], el clima [60, 104], la hidrología [125, 160], la economía [38, 75], la investigación histórica del arte [15, 92], el tráfico en redes [128, 159], la bioinformática [26, 136], y el análisis de numerosas señales biomédicas, como las imágenes infrarrojas [65], el electroencefalograma [145], la resonancia magnética funcional [48], y la frecuencia cardíaca [54, 102, 108]. Por lo tanto, se puede ver que ambas técnicas son sumamente relevantes en la práctica actual.

El formalismo multifractal se basa en el estudio de los momentos de orden q de una cantidad multirresolución debidamente escogida. En el caso de señales altamente irregulares, dichos momentos muestran propiedades de invarianza a la escala en forma de leyes de potencia. Los exponentes que caracterizan dicho comportamiento son conocidos como exponentes de escalamiento.

La estimación de los exponentes de escalamiento se realiza mediante regresiones lineales en diagramas logarítmicos. Para ello, es necesario determinar previamente el rango de escalas en el que se observa el fenómeno de escalamiento. A pesar de que desde un punto de vista teórico el escalamiento se debe observar en todas las escalas registradas, en la práctica dicho fenómeno está restringido a un rango de escalas finito. Esto puede obedecer a diversas causas, entre las que cabe destacar la presencia de ruido en ciertas escalas, la ruptura natural del escalamiento debido a que los mecanismos que lo generan dejan de actuar en determinadas escalas (por ejemplo, la “escala integral” en el estudio de la turbulencia), etc.

La determinación del rango de escalas sobre el que se deben realizar las regresiones lineales es problemático en la práctica. Por lo general, se realiza ya sea mediante argumentos fundamentales, o mediante la observación empírica. En el primer caso, el practicante sabe, debido a su conocimiento del dominio del problema, el rango de escalas en el que el escalamiento se debería verificar y, por lo tanto, realiza las regresiones lineales en dicho rango. Este procedimiento conlleva el riesgo de que la presencia de ruido u otros fenómenos espurios que contaminen dichas escalas puede introducir errores en las estimaciones. En el segundo caso, el practicante inspecciona visualmente los diagramas logarítmicos para determinar el rango de escalas en el que se comportan en forma aproximadamente lineal. Este método es, por supuesto, tedioso y propenso a errores, además de estar afectado por la subjetividad del practicante y, por consiguiente, ser poco reproducible.

Por otro lado, la elección de la cantidad multirresolución en la que se basa el método es crucial. En primer lugar, desde un punto de vista teórico, dicha elección establece la definición de regularidad utilizada en el análisis multifractal para medir la “fuerza” de las singularidades. Además, sus características determinan el rango de órdenes estadísticos en el que el formalismo multifractal es válido y relevante. Desde un punto de vista práctico, la cantidad multirresolución debe permitir la

eliminación de tendencias suaves superpuestas a los datos y medir, por lo tanto, sólo el comportamiento irregular.

Una limitación importante de las cantidades multirresolución utilizadas en la práctica consiste en estar basadas en una definición de regularidad que sólo permite la medición de *regularidad positiva* o, equivalentemente, sólo permite el análisis de funciones que sean localmente acotadas. Para poder analizar señales que no cumplan con este requisito, se debe recurrir a la integración de los datos como etapa de preprocesamiento. Este procedimiento no está, sin embargo, exento de riesgos. En las señales habitualmente analizadas en la práctica, el uso de datos previamente integrados produce estimaciones equivalentes a las que se hubieran obtenido sin integrar. Sin embargo, si los datos sufren de la superposición de ciertos tipos de singularidades, llamadas oscilantes, los resultados obtenidos sobre los datos integrados son erróneos.

Dada la situación descrita, el presente trabajo de tesis tiene dos objetivos principales. El primero de ellos es el desarrollo y la implementación de un algoritmo que permita la detección automática del rango en el que se observa el fenómeno de escalamiento, a partir de una única señal bajo estudio. Por otro lado, el segundo objetivo es el desarrollo y la evaluación de un formalismo multifractal basado en una cantidad multirresolución novedosa, que permita en forma natural la medición de regularidad negativa en señales que no sean localmente acotadas.

Para ello, comenzamos brindando una revisión del conocimiento actual sobre análisis multifractal en los capítulos 2 y 3. En primer lugar, en el capítulo 2 realizamos una descripción de los conceptos y métodos involucrados en dicha técnica. Además, discutimos con profundidad las diversas cantidades multirresolución existentes y comparamos los formalismos multifractales basados en ellas. Finalizamos con una descripción de los esquemas de bootstrap no paramétrico aplicados al análisis multifractal, recientemente propuestos, que tendrán una importancia central en los capítulos posteriores. A continuación, en el capítulo 3 describimos a los diversos procesos multifractales existentes, y que serán extensivamente utilizados en las simulaciones numéricas de los capítulos siguientes.

El capítulo 4 trata sobre la primera de las contribuciones desarrolladas en el marco de este trabajo de tesis. Proponemos, desarrollamos y evaluamos un algoritmo automático que permite la determinación del rango en el que se observa el fenómeno de escalamiento a partir de una única realización del proceso bajo estudio. Debido a la complejidad de la mayor parte de los procesos multifractales, habitualmente basados en cascadas multiplicativas, así como a las transformaciones no lineales involucradas en las cantidades multirresolución, la manipulación en forma cerrada de las distribuciones marginales no puede ser realizada con suficiente generalidad. Por lo tanto, basamos el algoritmo en el uso del bootstrap no paramétrico para cuantificar la bondad de ajuste en los distintos rangos posibles y seleccionar el mejor. Además, validamos el algoritmo mediante simulaciones numéricas sobre numerosos procesos multifractales, tanto en la situación en que el escalamiento es perfecto como cuando éste se pierde en las escalas inferiores o superiores. Mostramos que en todos los casos el algoritmo selecciona rangos correctos y cercanos al rango óptimo desde el punto de vista del error cuadrático medio. Finalmente, ilustramos la aplicación del algoritmo a señales reales de variabilidad de la frecuencia cardíaca.

En el capítulo 5 desarrollamos la segunda contribución de esta tesis. Proponemos,

desarrollamos y validamos un formalismo multifractal basado en una nueva cantidad multirresolución: los coeficientes ondita p -líderes. Dicha cantidad mide la regularidad en términos de un nuevo exponente, el p -exponente, no analizado en la práctica hasta ahora. La principal virtud de estas nuevas definiciones es que permiten medir la regularidad negativa en forma natural, evitando la necesidad de realizar una integración previa. También mostramos la forma en que el uso de los p -exponentes permite refinar la clasificación de singularidades. En relación a esta característica ilustramos una segunda ventaja del uso del formalismo basado en p -líderes: el uso de distintos valores de p permite revelar estructuras y singularidades que no podían ser medidas con las herramientas disponibles hasta este momento. Analizamos también la estimación de los p -líderes a partir de datos de resolución finita, y proponemos factores para corregir los efectos que se producen. Un resultado de particular importancia en este capítulo es la relación entre el formalismo propuesto y la técnica de análisis de fluctuaciones sin tendencias multifractal (MF DFA). Esta técnica es ampliamente utilizada en la práctica, pero originalmente fue propuesta en forma *ad hoc*. En el capítulo 5 mostramos que MF DFA puede ser interpretada en términos de los p -exponentes, y, de esta forma, ser sustentada teóricamente. A continuación, validamos numéricamente el formalismo propuesto, verificando la posibilidad de medir regularidad negativa y analizando la calidad de las estimaciones que permite obtener. Finalmente, ilustramos el uso del formalismo basado en p -líderes en una aplicación biomédica concreta: la detección de acidosis en fetos a partir de la frecuencia cardíaca fetal.

Finalmente, en el capítulo 6 presentamos las conclusiones del presente trabajo, e indicamos las perspectivas y trabajos futuros.

Capítulo 2

Marco teórico

“Look through the peephole and you’ll see patterns as pretty as can be.”

RAYUELA
Julio Cortázar

Contenidos

2.1. Introducción	7
2.2. Invarianza a la escala	7
2.3. Análisis multifractal	8
2.3.1. Exponente de Hölder y regularidad local	9
2.3.2. Análisis multifractal y espectro multifractal	10
2.4. Formalismo multifractal	11
2.5. Cantidades multirresolución	14
2.5.1. Propiedades generales	14
2.5.2. Incrementos	16
2.5.3. Oscilaciones	16
2.5.4. Coeficientes ondita discretos	17
2.5.5. Coeficientes ondita líderes	20
2.5.6. Otras cantidades multirresolución	21
2.5.7. Comparación de formalismos multifractales	23
2.6. log-cumulantes	24
2.7. Estimación práctica	26
2.7.1. Rango de escalas	26
2.7.2. Regresiones lineales	27
2.8. Regularidad negativa e integración fraccionaria	29
2.8.1. Exponente de Hölder uniforme	29
2.8.2. Integración fraccionaria	30
2.9. Bootstrap para análisis multifractal	31

2.9.1. Bootstrap no paramétrico	32
2.9.2. Bootstrap por bloques	32
2.9.3. Bootstrap en el plano tiempo escala	33
2.9.4. Distribuciones empíricas de los estimadores	36
2.9.5. Intervalos de confianza y test de hipótesis	36
2.10. Implementación numérica	37
2.11. Comentarios finales	37

2.1. Introducción

El elemento conceptual central en el análisis multifractal es la relación entre el estudio de la invarianza a la escala y el análisis de la regularidad local de una función. Por lo tanto, comenzaremos este capítulo introduciendo algunas nociones de invarianza a la escala en la Sec. 2.2, siguiendo con las definiciones fundamentales del análisis multifractal en la Sec. 2.3. A continuación, en la Sec. 2.4 describimos el formalismo multifractal, que vincula los conceptos analizados en las secciones anteriores. En la práctica, los formalismos multifractales están basados en diversas cantidades multirresolución. Algunas de ellas son utilizadas debido a que presentan ventajas de índole práctica o teórica, mientras que otras siguen siendo utilizadas por razones históricas. En cualquier caso, en la literatura actual sobre el análisis multifractal conviven publicaciones en las que se utilizan varias de ellas. Por tal razón, en la Sec. 2.5 brindamos una exposición detallada de las diversas cantidades multirresolución utilizadas en la actualidad, así como una comparación entre ellas. En la Sec. 2.6 presentamos los log-cumulantes, coeficientes que sintetizan la información multifractal y son muy utilizados en la práctica. A continuación, en la Sec. 2.7 indicamos la forma en que los diversos atributos multifractales presentados en las secciones anteriores son estimados en la práctica, y discutimos ciertas condiciones que hay que tener en cuenta al aplicar esta técnica. Luego, en la Sec. 2.8 discutimos una limitación de las técnicas descritas: la imposibilidad de medir regularidad negativa, así como ciertos esquemas de integración que se pueden aplicar para sortear este obstáculo. Trataremos este tema con más profundidad en el capítulo 5, en el que introduciremos nuevas cantidades multirresolución que permiten caracterizar este comportamiento. Finalmente, en la Sec. 2.9 presentamos esquemas de bootstrap no paramétrico desarrollados para el análisis multifractal. Estos esquemas sirven de base al algoritmo propuesto en el capítulo 3.

En todo el desarrollo de este capítulo, $\{X(x), x \in \mathbb{R}\}$ denotará a la función o a la realización de un proceso aleatorio motivo de análisis.

2.2. Invarianza a la escala

Históricamente, el uso de procesos invariantes a la escala en procesamiento de señales surgió en el estudio de los procesos estocásticos con un comportamiento espectral del tipo $1/f$. Este tipo de procesos se caracterizan por el hecho de que su densidad espectral de potencia S decae como una ley de potencias en un determinado rango de frecuencias:

$$\hat{S}(\omega) = \gamma|\omega|^{-\alpha}, \quad \omega \in [\omega_l, \omega_h], \quad (2.1)$$

en donde $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, y \hat{S} denota a algún estimador de la densidad espectral de potencia.

La ec. (2.1) indica que ninguna frecuencia tiene un rol preponderante en la descripción del espectro. De hecho, el comportamiento en ley de potencias asegura que el espectro es invariante a la escala, ya que una dilatación $\lambda \in \mathbb{R}$ produce un escalamiento del espectro original: $\hat{S}(\lambda\omega) = \lambda^{-\alpha}\hat{S}(\omega)$.

Dependiendo del rango de frecuencias $[\omega_l, \omega_h]$ en el que se observa dicho decaimiento espectral, las propiedades imprimidas por la invarianza a la escala serán

distintas. Si dicho comportamiento se observa en las frecuencias bajas, se dice que el proceso tiene dependencia de largo rango (en inglés, *long range dependence*). Por el contrario, si se observa en las frecuencias altas, la invarianza a la escala describe la regularidad local del proceso y su naturaleza fractal [62].

Esta caracterización mediante el decaimiento espectral resulta insuficiente para numerosos procesos observados en la práctica. Al estar basado en estimadores espectrales sufre de la desventaja de ser inadecuada para el estudio de procesos no estacionarios. Además, el análisis espectral de la ec. (2.1) sólo caracteriza el segundo momento estadístico de los datos. Para superar estas limitaciones, numerosos autores (cf. e. g. [8, 62, 146] y las referencias allí indicadas) propusieron reemplazar el uso de estimadores espectrales mediante el estudio de los momentos de *cantidades multirresolución* (en inglés, *multiresolution quantities*) elegidas adecuadamente. En forma poco rigurosa, una cantidad multirresolución $T(a, x)$ brinda información sobre el comportamiento de la señal X en una vecindad de tamaño a del punto x ; es decir, brinda información localizada en el tiempo (o espacio) del comportamiento de la función en distintas escalas de análisis $a \in \mathbb{R}$.

La invarianza a la escala se define, entonces, en forma operacional, como el decaimiento en ley de potencias, con respecto a la escala a , de los momentos de una cantidad multirresolución T :

$$\frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} |T(a, k)|^q \sim c_q a^{\zeta(q)}, \quad a \in [a_m, a_M], \frac{a_M}{a_m} \gg 1.$$

Aquí, la escala de análisis a puede ser asociada cualitativamente como la inversa de la frecuencia.

Esta nueva caracterización enriquece la provista por estimadores espectrales tradicionales. En primer lugar, el uso de una cantidad multirresolución permite tomar en cuenta el posible carácter no estacionario de las señales. En segundo lugar, el análisis se extiende del segundo orden involucrado en los estimadores espectrales a todo un rango de órdenes estadísticos $q \in \mathbb{R}$, en donde q puede ser tanto positivo como negativo. El uso de una colección de órdenes estadísticos permite distinguir entre distintos tipos de comportamiento presentes en una señal.

De este modo, el objetivo del análisis de escalamiento es identificar los exponentes $\zeta(q)$ que caracterizan el decaimiento de los momentos de la cantidad multirresolución. Estos exponentes son utilizados luego para describir a la señal X en tareas de clasificación, detección, identificación, etc. En la práctica, los exponentes se miden mediante regresiones lineales en gráficos logarítmicos. Esta metodología, así como su relación con el análisis multifractal, será discutida con mayor detalle en la Sec. 2.4.

2.3. Análisis multifractal

En esta sección, definiremos los conceptos teóricos que constituyen la base del análisis multifractal: la regularidad local, el exponente de Hölder y el espectro multifractal.

2.3.1. Exponente de Hölder y regularidad local

Supongamos que X es una función localmente acotada, es decir, que pertenece localmente a $L^\infty(\mathbb{R})$.

Definición 2.3.1. Regularidad local

Sea $\alpha \geq 0$. Se dice que la función X pertenece a $C^\alpha(x_0)$ en la posición $x_0 \in \mathbb{R}$ si existen una constante positiva K y un polinomio P_{x_0} con grado menor a α , tal que:

$$|X(x_0 + a) - P_{x_0}(x_0 + a)| \leq K|a|^\alpha, \quad a \rightarrow 0^+. \quad (2.2)$$

El polinomio P_{x_0} generaliza al polinomio de Taylor para funciones en C^N y, por lo tanto, se lo suele denominar *polinomio de Taylor de orden α* [1, 10]. Es importante notar que dicho polinomio depende de la posición x_0 y, por lo tanto, puede cambiar de un punto a otro, tanto en su orden como en los valores de sus coeficientes. Esta dependencia representa una dificultad práctica para su estimación, que será salvada mediante el uso de coeficientes ondita como se verá más adelante.

Los espacios C^α , denominados *espacios de Hölder locales*, permiten caracterizar la regularidad local de una función. Resulta claro a partir de la definición 2.2 que si $X \in C^\alpha(x_0)$, entonces también se cumple que $X \in C^{\alpha'}(x_0)$, para $0 \leq \alpha' \leq \alpha$. El exponente de Hölder, definido a continuación, informa sobre el mayor grado de regularidad de la función en torno a un punto.

Definición 2.3.2. Exponente de Hölder

El exponente de Hölder $h_X(x_0)$ de X es

$$h_X(x_0) = \sup\{\alpha : X \in C^\alpha(x_0)\}. \quad (2.3)$$

Es importante destacar que, por definición, $h_X(x) \geq 0$. El exponente de Hölder caracteriza la regularidad local de X en una vecindad de x_0 : mientras mayor sea el valor de $h_X(x_0)$, más regular y suave será X alrededor de x_0 . En particular, el caso en que $h_X(x_0) = 1$ es equivalente a decir que X es derivable en x_0 (es decir, que X es C^1 localmente). De la misma forma, la condición $h_X(x_0) \geq 0$ es equivalente a decir que X es continua en x_0 . Por lo tanto, el exponente de Hölder brinda una descripción fina de la regularidad local de una función, permitiendo cuantificar los cambios de regularidad que se producen entre los conceptos de “continua” y “diferenciable” (y, en caso de que $h_X(x_0) > 1$, entre los distintos órdenes de diferenciabilidad).

Cuando $0 \leq h_X(x_0) < 1$, el polinomio de Taylor se reduce a una constante: $P_{x_0} = X(x_0)$. En este caso, las ecs. (2.2) y (2.3) sugieren caracterizar el exponente de Hölder mediante un decaimiento según una ley de potencias de los incrementos de la función:

$$|X(x_0 + a) - X(x_0)| \leq K|a|^{h_X(x_0)}, \quad a \rightarrow 0^+. \quad (2.4)$$

Esta observación brinda sustento al uso de los incrementos de la función como cantidad multirresolución para su estudio, como discutiremos en forma más detallada en la Sec. 2.5.

2.3.2. Análisis multifractal y espectro multifractal

Como discutimos en la Sec. 2.3.1, el exponente de Hölder es una cantidad *local*, que puede cambiar drásticamente de un punto a otro. De hecho, el análisis de numerosos modelos utilizados como referencia de funciones y procesos multifractales indica que la función h_X puede llegar a ser extremadamente errática, altamente irregular y discontinua en casi todo punto [62]. Por este motivo, tanto su estimación práctica como su interpretación presentan dificultades prácticas. Por esta razón, el objetivo del análisis multifractal es proveer una descripción global de las fluctuaciones del exponente de Hölder, en lugar de una estimación de h_X en todo su dominio. Esto se logra mediante el concepto de *espectro multifractal* $D(h)$, también llamado espectro de singularidades, definido a continuación [88].

Definición 2.3.3. Conjunto iso-Hölder

Los conjuntos iso-Hölder son los conjuntos de nivel de la función h_X :

$$E_X(h) = \{x \in \mathbb{R} : h_X(x) = h\}. \quad (2.5)$$

En señales multifractales, los conjuntos E_X típicamente poseen una estructura compleja, que no puede ser caracterizada completamente mediante las dimensiones euclídeas. Por esta razón, su caracterización requiere del uso de dimensiones fractales. En particular, para la definición del espectro de singularidades se utiliza la dimensión de Hausdorff Dim_H , definida a continuación [135, 146].

Definición 2.3.4. Medida de Hausdorff

Sea S un conjunto en un espacio métrico. Sea $U_\epsilon(S)$ un recubrimiento de S mediante conjuntos u_n de diámetro $|u_n| \leq \epsilon$. Finalmente, sea Υ_ϵ la colección de todos los recubrimientos $U_\epsilon(S)$ posibles. La medida de Hausdorff de S se define como:

$$M_H^\delta(S) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \inf_{U_\epsilon(S) \in \Upsilon_\epsilon} \sum_{u_n \in U_\epsilon(S)} |u_n|^\delta. \quad (2.6)$$

Se puede demostrar que existe un valor crítico δ_c tal que $M_H^\delta(S) = 0$ si $\delta < \delta_c$, y $M_H^\delta(S) = \infty$ si $\delta > \delta_c$. La dimensión de Hausdorff de S se define como dicho valor δ_c [135]:

Definición 2.3.5. Dimensión de Hausdorff La dimensión de Hausdorff del conjunto métrico S se define como:

$$\text{Dim}_H(S) = \inf \left(\delta \geq 0 : M_H^\delta(S) = 0 \right) = \sup \left(\delta \geq 0 : M_H^\delta(S) = \infty \right). \quad (2.7)$$

Además, por convención $\text{Dim}_H(\emptyset) = -\infty$.

En el cálculo de la dimensión de Hausdorff se consideran todos los posibles recubrimientos del conjunto en cuestión y se elige el mejor de ellos (es decir, aquel con menor “tamaño”), para luego estudiar la forma en que evoluciona la medida al disminuir la escala ϵ .

Habiendo introducido estos conceptos, estamos en condiciones de presentar al espectro multifractal, que se define asignando a cada valor h del exponente de Hölder la dimensión de Hausdorff del conjunto iso-Hölder correspondiente:

Definición 2.3.6. Espectro multifractal

El espectro multifractal $D(h)$ de una función X se define como la dimensión de Hausdorff de sus conjuntos iso-Hölder $E_X(h)$:

$$D(h) = \text{Dim}_H(E_X(h)). \quad (2.8)$$

Los conjuntos $E_X(h)$ consisten en los subconjuntos del dominio de X en los que h_X toma un valor h determinado. Por lo tanto, brindan una descomposición del soporte de X según los exponentes de Hölder de sus singularidades [126]. Por otro lado, el espectro multifractal informa el “tamaño” de dichos conjuntos. El concepto de tamaño está formalizado mediante la dimensión de Hausdorff [126, 135]. En forma poco rigurosa, podemos decir que $D(h)$ informa sobre la *proporción* de puntos del dominio de X en donde la regularidad local es h . El caso extremo en que $D(h) = 0$ corresponde a la situación en que las irregularidades de valor h están “aisladas”¹. El otro caso extremo, en donde $D(h) = 1$, ocurre cuando el exponente de Hölder h_X es constante en un intervalo.

La definición presentada del espectro multifractal provee una descripción *global* del comportamiento singular de los datos. Sin embargo, es importante mencionar que en [33] se realiza una extensión *local* en las definiciones del espectro, así como de todas las cantidades involucradas en su estimación, que permite el estudio de la evolución con el tiempo o la posición de las características multifractales.

La estimación práctica del espectro multifractal no puede ser realizada a partir de su definición. El primer problema es que el cálculo de la dimensión de Hausdorff involucra la consideración de infinitos recubrimientos del dominio de la señal, y es por lo tanto imposible de obtener en las aplicaciones. El segundo problema, y el más importante, radica en el hecho de que, en la práctica, es necesario trabajar con versiones muestreadas de las funciones, y con resolución finita. Una función multifractal presenta irregularidades de distinto exponente de Hölder en todo punto [62, 109]. Por lo tanto, en el proceso de muestreo necesariamente se destruye información valiosa sobre el comportamiento irregular de la función. De hecho, cada muestra corresponde a una especie de valor “promedio” de las irregularidades que ocurrieron durante un período de muestreo. Esto imposibilita la determinación de los conjuntos $E_X(h)$ a partir de las muestras.

El primer problema podría ser salvado mediante el uso de una dimensión fractal alternativa que provea una estimación a la dimensión de Hausdorff. Por ejemplo, podría utilizarse la dimensión *box-counting* [103, 146]. Sin embargo, esto seguiría estando sujeto a los errores provenientes de la segunda limitación.

La resolución de ambos problemas consiste en utilizar un método que permite estimar el espectro multifractal a partir del comportamiento de escalamiento de la función. Este método se conoce como *formalismo multifractal*, que presentamos en la siguiente sección.

2.4. Formalismo multifractal

Como mencionamos en la Sec. 2.3.2, la estimación práctica del espectro multifractal presenta dificultades. Para sortearlas, se recurre a un *formalismo*

¹Formalmente, $D(h) = 0$ indica que E_h es un conjunto contable.

multifractal, el cual permite estimar dicho espectro a partir de cantidades globales fácilmente calculables e íntimamente ligadas con las propiedades de invarianza a la escala.

Un formalismo multifractal está asociado con una elección particular de una *cantidad multirresolución* $T_X(a, x)$. En términos generales, se puede definir a $T_X(a, x)$ como el resultado de una comparación de X con un patrón de referencia, con soporte compacto, dilatado con un factor de escala $a > 0$ y trasladado a una posición x [9]. Un ejemplo clásico está dado por los incrementos $T_X(a, x) = X(x+a) - X(x)$, o por sus coeficientes ondita. En la Sec. 2.5 desarrollaremos diversas cantidades multirresolución utilizadas para constituir formalismos multifractales.

El requisito principal que debe cumplir una cantidad multirresolución para que se pueda basar un formalismo multifractal en ella es que su decaimiento local con las escalas reproduzca al exponente de Hölder:

$$|T_X(a, x_0)| \leq K a^{h_X(x_0)}, \quad a \rightarrow 0^+, \quad K > 0. \quad (2.9)$$

Es decir, el comportamiento local de la magnitud de $T_X(a, x_0)$, a medida que la escala a se hace más finas, debe estar caracterizado por una ley de potencias gobernada por el exponente de Hölder.

El primer paso del formalismo multifractal consiste en estudiar el comportamiento de los momentos de $|T_X(a, x_0)|$, llamados en este contexto *funciones de estructura* $S_T(q, a)$, definidas por:

$$S_T(q, a) = \frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} |T_X(a, x_k)|^q, \quad (2.10)$$

en donde hicimos explícito el hecho de que analizamos las muestras de X : $\{(X(x_k), k \in \mathbb{N})\}$. n_a denota la cantidad de coeficientes $T_X(a, x_0)$ disponibles en la escala a .

Si X muestra propiedades de invarianza a la escala, entonces las funciones de estructura siguen un decaimiento en ley de potencias:

$$S_T(q, a) \sim a^{\zeta_T(q)}, \quad a \rightarrow 0^+. \quad (2.11)$$

El exponente $\zeta_T(q)$ que caracteriza esta ley de potencia se conoce como *exponente de escalamiento*. Debido a que depende del orden q , también se lo llama *función de escalamiento*. Puede ser calculado como:

$$\zeta_T(q) = \liminf_{a \rightarrow 0^+} \frac{\log(S_T(q, a))}{\log(a)}. \quad (2.12)$$

En la práctica, $\zeta_T(q)$ puede ser estimado mediante una regresión lineal de $\log(S_T(q, a))$ en función de $\log(a)$.

El exponente de escalamiento caracteriza, entonces, el comportamiento de invarianza a la escala de X , íntimamente relacionado con su regularidad local. De hecho, si consideramos el efecto de variar el orden q , a partir de la ec. (2.10) vemos que valores positivos y altos de q resaltarán los coeficientes $T_X(a, x_k)$ de mayor valor absoluto, correspondientes a las regiones más irregulares de X . Por el contrario, los valores negativos de q resaltarán aquellos coeficientes más cercanos a 0, caracterizando las regiones más suaves y regulares de X [126]. Resulta claro

de este análisis que para la caracterización completa de la regularidad de la señal mediante la función de escalamiento es necesario considerar todos los valores de q , tanto positivos como negativos, y tanto enteros como fraccionarios [151].

A partir del análisis anterior se puede notar que tanto el espectro multifractal como la función de escalamiento brindan una descripción global de los valores que toma el exponente de Hölder. El formalismo multifractal brinda una relación explícita entre estas dos funciones mediante el concepto de espectro de Legendre, definido a continuación [84, 89].

Definición 2.4.1. Espectro de Legendre

El espectro de Legendre de X se define como la transformación de Legendre² de su función de escalamiento $\zeta_T(q)$:

$$\mathcal{L}_T(h) = \inf_q (1 + qh - \zeta_T(q)). \quad (2.13)$$

Hay que destacar que la función $\zeta_T(q)$ es necesariamente cóncava por construcción [89]. Por lo tanto, la transformación en la ec. (2.13) es biyectiva y no se produce una pérdida de información.

Finalmente, el formalismo multifractal brinda una relación entre los espectros $D(h)$ y $\mathcal{L}_T(h)$.

Definición 2.4.2. Formalismo multifractal

Se dice que el formalismo multifractal se cumple si se satisface la relación:

$$D(h) = \mathcal{L}_T(h). \quad (2.14)$$

En caso contrario, sólo se puede decir que

$$D(h) \leq \mathcal{L}_T(h). \quad (2.15)$$

Dicha relación fue desarrollada a partir de argumentos heurísticos basados en ideas de la física estadística por Parisi y Frisch en su artículo fundacional [116]. Reproducimos este argumento a continuación, en el contexto de una cantidad multirresolución arbitraria $T_X(a, x)$. Para mayores detalles, se refiere al lector a e. g. [89].

Demostración heurística del formalismo multifractal. En primer lugar, las propiedades de invarianza a la escala de X se manifiestan en las funciones de estructura según lo indicado por la ec (2.11): $S_T(q, a) \sim a^{\zeta_T(q)}$, $a \rightarrow 0^+$. Consideremos, entonces, la contribución a $S_T(q, a)$ de los puntos x en los que el exponente de Hölder vale h . En primer lugar, la cantidad de coeficientes $T_X(a, x_k)$ típicamente disminuye con la escala como $n_a \sim a^{-1}$ (al menos este es el caso para las cantidades multirresolución consideradas en este trabajo). De todas formas, si esta relación no se cumpliera las modificaciones al argumento serían triviales. En segundo lugar, si hay una singularidad con exponente h en x_0 , se sabe por la ec. (2.9) que $|T_X(a, x_0)| \sim a^h$. Finalmente, por la definición de dimensión fractal, la cantidad de tales puntos es $\sim a^{-D(h)}$. Agrupando las tres cosas, se tiene que:

$$S_T(q, a) \sim a a^{qh} a^{-D(h)} = a^{1+qh-D(h)}. \quad (2.16)$$

² En el apéndice B brindamos detalles sobre la transformación de Legendre.

Cuando $a \rightarrow 0^+$, la contribución dominante proviene del exponente más pequeño. Por lo tanto, se tiene que $S_T(q, a) \sim a^{\inf_q(1+qh-D(h))}$. De lo cual se puede concluir que

$$\zeta_T(q) = \inf_q (1 + qh - D(h)), \quad (2.17)$$

es decir, que $\zeta_T(q)$ se obtiene mediante una transformación de Legendre de $D(h)$. La aplicación de la transformación inversa no brinda necesariamente el espectro multifractal $D(h)$, sino el espectro que definimos como espectro de Legendre:

$$\mathcal{L}_T(h) = \inf_h (1 + qh - \zeta_T(q)). \quad (2.18)$$

Hay que notar que, debido a que $\zeta_T(q)$ es, por construcción, una función cóncava [126, 142], $\mathcal{L}_T(h)$ siempre se puede calcular según la ec. (2.18) y siempre será una función cóncava. Sin embargo, sólo cuando $D(h)$ también sea una función cóncava se cumple que $\mathcal{L}_T(h) = D(h)$. Es decir, X cumple con el formalismo multifractal sólo cuando su verdadero espectro multifractal $D(h)$ es convexo. En el caso en que $D(h)$ no sea convexo, el formalismo multifractal no se cumple y sólo se puede asegurar que el espectro de Legendre es el cascarón convexo del verdadero espectro multifractal³ [142]:

$$D(h) \leq \mathcal{L}_T(h). \quad (2.19)$$

□

2.5. Cantidades multirresolución

En esta sección discutimos las propiedades que debe tener una cantidad multirresolución para que se pueda construir un formalismo multifractal a partir de ellas. A continuación, se describen diversas cantidades multirresolución a partir de las cuales se puede basar un formalismo multifractal.

2.5.1. Propiedades generales

Una cantidad multirresolución debe cumplir con las siguientes condiciones para que se pueda basar un formalismo multifractal exitoso en ellas.

Caracterización del exponente de Hölder local. El decaimiento de la cantidad multirresolución a medida que las escalas se hacen más finas debe estar regido por el exponente local de Hölder de manera tal que [84, 89]:

$$|T_X(a, x_0)| \sim a^{h(x_0)}, \quad a \rightarrow 0^+. \quad (2.20)$$

Como vimos en la Sec. 2.4, esta relación juega un papel crucial en la justificación heurística del formalismo multifractal.

³ Para más detalles, cf. Apéndice B.

Jerarquía. La cantidad multirresolución debe ser *jerárquica*, en el sentido de la definición 5 de [89], reproducida a continuación.

Definición 2.5.1. Función de conjunto jerárquica

Una función f con valores reales y definida en una colección de conjuntos es llamada *jerárquica* si es no negativa y creciente, es decir, si satisface:

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \leq f(B). \quad (2.21)$$

En el caso de las cantidades multirresolución, la jerarquía debe ser interpretada según las escalas. Es decir, considerando x_0 fijo y dadas dos escalas a y a' , se debe cumplir:

$$a < a' \Rightarrow T_X(a, x_0) \leq T_X(a', x_0). \quad (2.22)$$

El hecho de que la cantidad multirresolución deba ser jerárquica está íntimamente relacionado con la posibilidad de recobrar fácilmente el exponente de Hölder. En caso de que esto no se cumpla, la caracterización es todavía posible pero no se puede garantizar que se cumpla en todos los casos [84, 89].

Robustez a tendencias suaves. Esta condición no es obligatoria, pero sí es deseable desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas. Dado que el análisis multifractal mide la regularidad local de las funciones, es deseable que la cantidad multirresolución pueda medir sólo la componente regular, haciendo caso omiso de cualquier comportamiento suave que la función pueda tener. Este hecho está relacionado con la definición de la regularidad local en la ec. (2.2), donde se observa que el exponente α caracteriza la diferencia entre la señal y una aproximación polinomial suave. Por ello, la cantidad multirresolución debería medir precisamente esta diferencia. Todas las cantidades multirresolución que serán presentadas en esta sección hacen uso de distintos mecanismos para brindar esta robustez a las tendencias suaves.

2.5.1.1. Notación: intervalos diádicos

Antes de continuar, indicamos la siguiente notación que será en la definición de las cantidades multirresolución basadas en coeficientes ondita que daremos luego.

Definición 2.5.2. Intervalos diádicos.

Un intervalo diádico de escala j y en la posición k es un intervalo de la forma [84, 89]:

$$\lambda = \lambda_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right). \quad (2.23)$$

Cada punto $x_0 \in \mathbb{R}$ está incluido en un único intervalo de escala j , denotado $\lambda_j(x_0)$.

Dado un número $C > 0$, el intervalo $C\lambda$ es aquel que está centrado en el mismo punto que λ pero que es C veces más ancho.

Finalmente, denotamos con Λ_j al conjunto de todos los intervalos diádicos de escala j .

2.5.2. Incrementos

El formalismo multifractal original, desarrollado por Parisi y Frisch [116] en el contexto del análisis de la turbulencia, estuvo basado en el uso de los incrementos de la función como cantidad multirresolución.

Definición 2.5.3. Cantidad multirresolución I: incrementos

Los incrementos $\mathcal{I}_X(a, x)$ de la función X se definen como:

$$\mathcal{I}_X(a, x) = X(x + a) - X(x). \quad (2.24)$$

Haciendo $T_X(a, x) = \mathcal{I}(a, x)$ se puede definir un formalismo multifractal basado en incrementos [116]:

Definición 2.5.4. Formalismo multifractal basado en incrementos

Sea $X \in L^\infty(\mathbb{R})$, con $h_{max} = \sup_{x \in \mathbb{R}}(h_X(x)) < 1$. Las funciones de estructura basadas en incrementos son:

$$S_{\mathcal{I}}(q, a) = \frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} |\mathcal{I}(a, x_k)|^q. \quad (2.25)$$

La correspondiente función de escalamiento es:

$$\zeta_{\mathcal{I}}(q) = \liminf_{a \rightarrow 0^+} \frac{\log(S_{\mathcal{I}}(q, a))}{\log a}, \quad q \geq 1. \quad (2.26)$$

Sea q_0 tal que cumpla con la condición $\zeta_{\mathcal{I}}(q_0) = q_0$. Entonces el espectro de Legendre basado en incrementos es [10]:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}}(h) = \inf_{q > q_0} (1 + hq - \zeta_{\mathcal{I}}(q)). \quad (2.27)$$

Si la función que se analiza es suave, se deben usar incrementos de orden superior: sea h_{max} el mayor exponente de Hölder observado en X , entonces se deben usar incrementos de orden $n > \lfloor h_{max} \rfloor$ [10].

Un problema que sufre esta cantidad multirresolución es que, a pesar de que la ec. (2.4) parece indicar que el decaimiento de los incrementos permite caracterizar $h(t)$ localmente, este no es el caso para todas las funciones X , cf. e. g. [89] para ver un ejemplo de función en la que esto no se cumple. Esta limitación está relacionada con el hecho de que los incrementos no son una cantidad jerárquica. Una tercera limitación es que el formalismo basado en incrementos no permite caracterizar la función de escalamiento en todo su dominio, sino sólo para $q \geq 1$. Esto hace que la cota superior a $D(h)$ provista por $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}(h)$ esté lejos de ser óptima, incluso para señales sencillas como el movimiento fraccionario browniano (cf. Sec. 3.3).

2.5.3. Oscilaciones

Las oscilaciones se pueden considerar como una cantidad multirresolución jerárquica basada en los incrementos.

Definición 2.5.5. Oscilación de una función

Sea f una función continua. Sea el conjunto $A \subset \text{supp}(f)$. La oscilación de f en el conjunto A , denotada $\mathcal{O}_f(A)$, se define como:

$$\mathcal{O}_f(A) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x). \quad (2.28)$$

Las oscilaciones son una cantidad jerárquica. Se ve claramente a partir de su definición que:

$$A \subset B \Rightarrow \mathcal{O}_f(A) \leq \mathcal{O}_f(B). \quad (2.29)$$

Por lo tanto, se puede deducir el exponente local de Hölder a partir de, por ejemplo, una colección de cubos diádicos [10, 89]:

$$h(x_0) = \liminf_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log(\mathcal{O}_f(3\lambda_j(x_0)))}{\log(2^j)}. \quad (2.30)$$

Entonces, se está en condiciones de definir un formalismo multifractal basado en oscilaciones, usando como cantidad multirresolución $T_X(2^j, x_k) = \mathcal{O}_X(3\lambda_j(x_k))$:

Definición 2.5.6. Formalismo multifractal basado en oscilaciones

Sea $X \in L^\infty(\mathbb{R})$, con $h_{max} = \sup_{x \in \mathbb{R}}(h(t)) < 1$. Las funciones de estructura basadas en oscilaciones son:

$$S_{\mathcal{O}}(q, j) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |\mathcal{O}_X(3\lambda_j(x_k))|^q. \quad (2.31)$$

La correspondiente función de escalamiento es:

$$\zeta_{\mathcal{O}}(q) = \liminf_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log(S_{\mathcal{O}}(q, a))}{\log 2^j}. \quad (2.32)$$

El espectro de Legendre basado en oscilaciones es [89]:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{O}}(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}} (1 + hq - \zeta_{\mathcal{O}}(q)). \quad (2.33)$$

Al igual que con los incrementos, este formalismo es válido sólo si $h_{max} < 1$. En caso contrario, se deben utilizar oscilaciones de orden superior, definidas e. g. en [10, 84].

A diferencia de $\zeta_{\mathcal{I}}$, la cantidad $\zeta_{\mathcal{O}}$ está definida para todo q . En consecuencia, $\mathcal{L}_{\mathcal{O}}(h)$ provee una mejor cota superior de $D(h)$ que $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}(h)$. Sin embargo, este formalismo no es utilizado en la práctica. Esto se debe principalmente a su comportamiento frente a tendencias suaves. En este caso se debe aumentar el orden de las oscilaciones, lo que incrementa la complejidad de su cálculo y genera fuertes inestabilidades en presencia de ruido [89]. Es oportuno mencionar que en [71] se propone un método similar a las oscilaciones que permite estimar las funciones de estructura para todo q , realizando una selección de los incrementos con mayor magnitud.

2.5.4. Coeficientes ondita discretos

Es ampliamente reconocido que los coeficientes ondita constituyen cantidades ideales para estudiar la regularidad de las funciones [84, 87, 89, 126]. Son más robustos que los incrementos y las oscilaciones, tanto desde un punto de vista práctico como teórico. En esta sección indicamos los conceptos principales de la transformada ondita discreta necesarios para el análisis de regularidad. Posteriormente, introduciremos el formalismo multifractal basado en coeficientes ondita. Esta sección se centra en la transformada ondita discreta; un desarrollo similar basado en ideas de la transformada ondita continua se tratará en la Sec. 2.5.6.2.

Bases de onditas. Sea $\psi_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que el conjunto

$$\left\{ \psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi_0(2^{-j}x - k), \quad j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}, \quad (2.34)$$

formado por versiones trasladadas y escaladas de ψ_0 , sea una base ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$ [109]. ψ_0 se denomina *ondita madre*, y es una función oscilante, con decaimiento rápido, y con buena localización conjunta en el plano tiempo-frecuencia.

Transformación ondita discreta. Los coeficientes ondita discretos corresponden a la expansión de X en dicha base:

$$d_X(j, k) = \int_{\mathbb{R}} X(x) 2^{-j} \psi_0(2^{-j}x - k) dx. \quad (2.35)$$

Hacemos notar la elección de una normalización en L^1 para los coeficientes ondita. Esta elección se ajusta mejor a las necesidades del estudio de la regularidad local, y permite obtener los exponentes regularidad correctos sin necesidad de recurrir a factores de corrección [10, 84].

Debido a que el conjunto (2.34) es una base ortogonal, se tiene que $\forall X \in L^2(\mathbb{R})$ se cumple:

$$X(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{N}} d_X(j, k) \psi_0(2^{-j}x - k). \quad (2.36)$$

Para más detalles sobre la transformación ondita, consultar e. g. [49, 109].

Intervalos diádicos. Al igual que en el caso de las oscilaciones, es conveniente indexar los coeficientes ondita usando intervalos diádicos. Ya que cada intervalo λ está íntimamente asociado a una escala j y una posición $2^j k$, denotamos $\psi_\lambda(x) = \psi_0(2^j x - k)$, y $d_\lambda = d_X(j, k)$. Hacemos notar que el índice λ brinda información sobre la localización del coeficiente ondita correspondiente. En efecto, si ψ_0 tiene soporte compacto, entonces existe una constante C tal que $\text{supp}(\psi_\lambda) \subset C\lambda$. En forma poco rigurosa, esto quiere decir que la ondita ψ_λ está localizada esencialmente sobre el cubo λ . Finalmente, recordamos que Λ_j denota al conjunto de todos los intervalos con ancho 2^j .

Momentos nulos. La ondita madre está caracterizada por un número entero $N_\psi \geq 1$, llamado *número de momentos nulos* tal que ψ_0 es ortogonal a polinomios de orden menor a N_ψ :

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \psi_0(x) dx = 0, \quad k = 1, \dots, N_\psi - 1, \quad (2.37)$$

pero

$$\int_{\mathbb{R}} x^{N_\psi} \psi_0(x) dx \neq 0. \quad (2.38)$$

Esta característica de la transformación ondita es sumamente útil en el análisis de regularidad, ya que permite a los coeficientes ondita “ignorar” las componentes más suaves de una función y medir sólo las componentes correspondientes al comportamiento irregular.

Bancos de filtros. En lugar de ser calculados mediante las sumas de la ec. (2.35), los coeficientes ondita pueden ser obtenidos en forma eficiente mediante un algoritmo basado el uso de bancos de filtros adecuados. Brevemente diremos que, dicho algoritmo se basa en la determinación de una función de escala ϕ_0 , a partir de la cual se obtiene la ondita madre ψ_0 , y en el uso de sendos filtros en cuadratura h y g que caracterizan a ambas. Los coeficientes ondita se calculan mediante la aplicación en cascada de los filtros h y g , utilizando submuestreos de la señal para obtener los coeficientes en escalas diferentes. Para más detalles sobre el algoritmo, consultar e. g. [109, 138]. Este algoritmo permite calcular los coeficientes ondita de una señal de longitud N con $O(N)$ operaciones.

Análisis de regularidad. Los coeficientes ondita discretos satisfacen la condición de regularidad indicada en la siguiente proposición [84]:

Proposición 2.5.1. *Sea $\alpha > 0$. Si X es $C^\alpha(x_0)$ entonces existe $C > 0$ tal que:*

$$d_X(j, k) \leq C 2^{j\alpha} (1 + |2^{-j}x_0 - k|^\alpha). \quad (2.39)$$

Esta proposición permite definir un formalismo multifractal basado en los coeficientes ondita haciendo $T_X(2^j, 2^j k) = d_X(j, k)$:

Definición 2.5.7. Formalismo multifractal basado en coeficientes ondita discretos

Sea X tal que $h_{max} = \sup_{x \in \mathbb{R}}(h(t)) < N_\psi$. La función de estructura basada en coeficientes ondita es:

$$S_d(q, j) = \frac{1}{n_j} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |d_\lambda|^q, \quad q \geq 0. \quad (2.40)$$

La correspondiente función de escalamiento es:

$$\zeta_d(q) = \liminf_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log S_d(q, j)}{\log 2^j}, \quad q \geq 0. \quad (2.41)$$

El espectro de Legendre basado en coeficientes ondita es [89]:

$$\mathcal{L}_d(h) = \inf_{q \geq 0} (1 + hq - \zeta_d(q)). \quad (2.42)$$

Como se puede ver, este formalismo multifractal se puede aplicar independientemente del valor de h_{max} , bajo la condición de que la cantidad de momentos nulos N_ψ sea lo suficientemente alta. Además, la función de escalamiento $\zeta_d(q)$, y por lo tanto $\mathcal{L}_d(h)$, es independiente de la ondita madre utilizada, suponiendo que la cantidad de momentos nulos es adecuada [84, 89].

Este formalismo multifractal también presenta diversos problemas [89]. En primer lugar, los coeficientes ondita pueden ser muy pequeños. Este hecho genera una limitación práctica en la estimación de la función de escalamiento para $q < 0$, debido a que el cálculo se vuelve numéricamente inestable. En segundo lugar, la caracterización de la regularidad local brindada por la ec. (2.39) sólo puede interpretarse como un decaimiento de los coeficientes ondita según $2^{j\alpha}$ si la señal bajo estudio contiene sólo singularidades del tipo *cusp* (es decir, singularidades de

la forma $|x - x_0|^\alpha$; para más detalles cf. Sec. 5.5). En este caso, los coeficientes dominantes se encuentran en el cono de influencia de x_0 . Por el contrario, si la señal contiene singularidades con oscilaciones fuertes en la vecindad de x_0 , existen coeficientes de elevada magnitud fuera del cono de influencia, y el decaimiento es mucho más rápido dentro del cono [89, 91, 109]. Ambos problemas están relacionados con el hecho de que los coeficientes ondita, al igual que los incrementos, no son una cantidad jerárquica [89].

2.5.5. Coeficientes ondita líderes

Los coeficientes ondita líderes (en inglés, *wavelet leaders*; cuando no haya riesgo de confusión, nos referiremos a estos coeficientes en forma sintética como *líderes*) son una cantidad multirresolución jerárquica basada en los coeficientes ondita, propuesta en [84] para resolver las limitaciones indicadas en la Sec. 2.5.4.

Definición 2.5.8. Coeficientes ondita líderes

Sea $X \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$ una función localmente acotada. Las coeficientes ondita líderes de X se definen como [84]:

$$L_\lambda = L_X(j, k) = \sup_{\lambda' \subset 3\lambda} |d_{\lambda'}|. \quad (2.43)$$

Es decir, el líder correspondiente al punto (k, j) del plano tiempo-escala se construye tomando el coeficiente ondita de mayor magnitud, buscado en una vecindad temporal del punto $2^j k$, para todas las escalas $j' < j$ más finas.

Los líderes permiten medir la regularidad local debido a la siguiente propiedad de decaimiento, demostrada en [84], equivalente a la ec. (2.39).

Proposición 2.5.2. Sea $X \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $\alpha > 0$. Si X es $C^\alpha(x_0)$ entonces existe $C > 0$ tal que:

$$L_{\lambda_j(x_0)} \leq C 2^{j\alpha}. \quad (2.44)$$

Por lo tanto, los líderes también son capaces de caracterizar al exponente de Hölder en forma local. Esta caracterización es válida incluso si existen oscilaciones fuertes en la vecindad de x_0 [89]. Además, debido a que están conformadas por los coeficientes ondita de mayor magnitud, las funciones de estructura basadas en líderes no sufrirán los problemas de inestabilidad numérica para q negativo que sí sufren aquellas basadas en los coeficientes ondita. Estas ventajas están íntimamente relacionadas con el hecho de que los líderes son una cantidad jerárquica.

Esta nueva cantidad multirresolución permite definir un formalismo multifractal haciendo $T_X(2^j, 2^j k) = L_X(j, k)$:

Definición 2.5.9. Formalismo multifractal basado en coeficientes ondita líderes

Sea $X \in L^\infty$ tal que $h_{max} = \sup_{x \in \mathbb{R}} (h(x)) < N_\psi$. La función de estructura basada en líderes es:

$$S_L(q, j) = \frac{1}{n_j} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} L_\lambda^q. \quad (2.45)$$

La correspondiente función de escalamiento es:

$$\zeta_L(q) = \liminf_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log S_L(q, j)}{\log 2^j}. \quad (2.46)$$

El espectro de Legendre basado en coeficientes ondita es [89]:

$$\mathcal{L}_L(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}} (1 + hq - \zeta_L(q)). \quad (2.47)$$

2.5.6. Otras cantidades multirresolución

2.5.6.1. Análisis de fluctuaciones sin tendencias multifractal

Análisis de fluctuaciones sin tendencias. El análisis de fluctuaciones sin tendencias (en inglés, *detrended fluctuation analysis*, DFA) es una técnica propuesta originalmente en [118] para la estimación del parámetro de auto-similaridad en movimiento browniano fraccionario (cf. Sec. 3.3). En esencia, depende de la hipótesis de que el exponente de Hölder es constante: $h(t) \equiv H$. La cantidad multirresolución utilizada por el método surge naturalmente a partir de la ec. (2.2):

$$T_X^{(DFA)}(a, x) = |X(x) - P_{x,a,N_p}(x)|, \quad (2.48)$$

en donde el polinomio de Taylor teórico de la ec. (2.2) es reemplazado por P_{x,a,N_p} , un polinomio de orden N_p , prescrito *a priori*, y ajustado localmente en un intervalo de ancho a centrado en x . La varianza de $T_X^{(DFA)}(a, x)$ en cada escala cumple:

$$F^2(a) = \frac{1}{n_a} \sum_k \left(T_X^{(DFA)}(a, x_k) \right)^2 \sim a^H \quad (2.49)$$

y es usada para estimar H . Para más detalles sobre esta técnica, consultar [118, 119].

Extensión multifractal. Intuitivamente, la extensión directa de DFA al análisis multifractal hubiera sido usar cantidad multirresolución de la ec. (2.48) para armar las funciones de estructura, generalizando la ec. (2.49) para órdenes $q \neq 2$:

$$S(q, a) = \frac{1}{n_a} \sum_k \left(T_X^{(DFA)}(a, x) \right)^q. \quad (2.50)$$

A continuación, esta cantidad podría haber sido usada para estimar las funciones de escalamiento y el espectro. Sin embargo, este formalismo habría brindado una estimación pobre del espectro multifractal. Una razón para esto es similar a lo ya discutido en el caso de los incrementos y los coeficientes ondita: $T_X^{(DFA)}(a, x)$, al no ser ésta una cantidad jerárquica, tendría valores concentrados cerca de 0 y esto generaría inestabilidad numérica para $q < 0$.

Por lo tanto, y a la luz de lo discutido en la Sec. 2.5.3, la extensión natural de DFA al caso multifractal debería haber sido basada en un concepto similar al de las oscilaciones, pero en este contexto. Sin embargo, en [93] se propuso construir una cantidad multirresolución original en la cual se basó el formalismo multifractal propuesto en dicho trabajo:

$$F(a, k) = \sqrt{\frac{1}{a} \sum_{i=1}^a |X(ak + i) - P_{k,a,N_P}(i)|^2}, \quad k = 1, \dots, \frac{N}{a}, \quad (2.51)$$

en donde N es la cantidad de muestras disponibles y P_{k,a,N_P} es el polinomio de ajuste local usado en DFA, con orden N_P fijado *a priori* y que depende de k y de a . Por simplicidad suponemos que $N/a \in \mathbb{N}$.

Utilizando la cantidad multirresolución $T_X(a, x_k) = F(a, k)$ se puede definir un formalismo multifractal, dando lugar al método llamado DFA multifractal (MF DFA).

Definición 2.5.10. Formalismo multifractal basado en MF DFA

La función de estructura de MF DFA es:

$$S_F(q, a) = \frac{a}{N} \sum_{k=1}^{N/a} F(a, k)^q. \quad (2.52)$$

La correspondiente función de escalamiento es:

$$\zeta_F(q) = \liminf_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log S_F(q, a)}{\log a}. \quad (2.53)$$

El espectro de Legendre basado en coeficientes ondita es:

$$\mathcal{L}_F(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}} (1 + hq - \zeta_F(q)). \quad (2.54)$$

Nótese que en este formalismo no se impone condición alguna sobre X , al contrario de lo que ocurre, por ejemplo, en el caso de los líderes, en donde se requiere que $X \in L^\infty(\mathbb{R})$. En la propuesta original [93] se indica, sin embargo, la necesidad de integrar la función X antes de aplicar el método. Esta integración debe realizarse ante la eventualidad de que no se cumpla una condición similar a $X \in L^\infty(\mathbb{R})$. Sin embargo, esta recomendación es brindada en [93] en forma heurística y sin mayores justificaciones. La condición exacta que se necesita para aplicar MF DFA será desarrollada en el capítulo 5 de este trabajo. La razón por la que la integración afecta a la regularidad mínima será desarrollada en la Sec. 2.8.

A pesar de carecer de fundamentos teóricos, este espectro de Legendre de MF DFA fue comparado extensivamente con el espectro provisto por el formalismo basado en módulos máximos de la transformada ondita (cf. Sec. 2.5.6.2) [64, 115] y, en forma más limitada, con los coeficientes ondita líderes [132]. Se encontró que posee un desempeño satisfactorio, al menos en el caso de los procesos analizados en dichos trabajos. De esta forma se justifica, *a posteriori* la elección de la cantidad multirresolución en la contribución original [93]. Debido probablemente a lo sencillo de su implementación, MF DFA ha sido ampliamente utilizado en las aplicaciones [139, 147, 147], en particular en el área de las señales biomédicas [76, 121, 134].

En el capítulo 5 volveremos sobre MF DFA para analizarla a la luz de un nuevo exponente de regularidad local, el exponente p , y brindaremos un fundamento teórico a la elección de F en la ec. (2.51) como cantidad multirresolución. Además, realizaremos una comparación numérica extensiva del desempeño de MF DFA frente a los coeficientes ondita líderes.

2.5.6.2. Módulos máximos de la transformada ondita

El formalismo multifractal basado en módulos máximos de la transformada ondita (en inglés, *wavelet transform modulus maxima*, WTMM) fue introducido en la década de 1990 por Arneodo y colaboradores [32, 113], y es pionero en el uso de la transformada ondita en análisis multifractal. No entraremos en detalles sobre este formalismo, y lo mencionaremos sólo brevemente por razones de completitud.

Esta versión del formalismo multifractal es en cierta manera similar al basado en líderes, pero la principal diferencia radica en estar basada en la transformada ondita continua (CWT) en lugar de la DWT. En este caso, los coeficientes ondita son calculados como [109]:

$$c_X(s, u) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi\left(\frac{x-u}{s}\right) dx, \quad (2.55)$$

con $s, u \in \mathbb{R}$ y $s > 0$. Es decir, los coeficientes ondita son calculados para todas las escalas s y posiciones temporales u , a diferencia de la DWT en donde se utiliza un esquema diádico: $s = 2^j$ y $u = 2^j k$.

La técnica consiste en calcular, para cada escala s , los máximos locales de las funciones $x \mapsto c_X(s, u)$. Luego, dichas posiciones son unidas a través de las escalas para formar las *líneas de módulos máximos*. A continuación, en cada punto (u, s) perteneciente a una línea de máximo se reemplaza el coeficiente allí presente con el supremo de los coeficientes ondita en dicha línea de máximo, buscado en las escalas más finas $s' < s$. Finalmente, las funciones de estructura son armadas a partir de los coeficientes que quedaron en las líneas de máximo, y las funciones de estructura y el espectro de singularidades son obtenidos como en los demás formalismos. Para más detalles sobre esta técnica, remitimos al lector a e. g. [21, 32, 109, 113, 114].

Cabe destacar la similitud entre este formalismo multifractal y aquel basado en líderes. De hecho, ambas técnicas otorgan resultados similares [9, 89, 100]. Ambos métodos permiten obtener resultados correctos para valores de q negativos. Sin embargo, el estar basado en una representación redundante como la provista por la CWT, hace que el tratamiento teórico de WTMM sea más dificultoso. De hecho, hasta el momento no existen resultados teóricos relativos a la independencia de la ondita utilizada, o la validez de la transformación de Legendre de ζ [89]. Por otro lado, desde un punto de vista práctico, este método presenta un elevado costo computacional. Al cálculo de la transformada ondita continua completa se suma el costo de encontrar sus máximos locales, armar las líneas de máximos y luego “podar” las líneas espurias. Esto hace que el método sea inconveniente de aplicar en señales de longitud elevada.

2.5.7. Comparación de formalismos multifractales

En esta sección compararemos a los formalismos multifractales presentados, haciendo énfasis en aspectos relativos a su aplicación práctica.

Tanto el formalismo basado en incrementos (Sec. 2.5.2) como el basado en coeficientes ondita (Sec. 2.5.4) no permiten caracterizar el espectro multifractal completo, ya que las funciones de escalamiento no están definidas para todo q . Por lo tanto, ambos formalismos no son utilizados en la práctica en situaciones en las que se requiere una descripción completa del comportamiento multifractal. Por otro lado, el formalismo basado en oscilaciones (Sec. 2.5.3), a pesar de que brinda una buena estimación del espectro, presenta dificultades a la hora de tratar con las tendencias suaves presentes en la señal. Esta limitación es sumamente importante al trabajar con señales reales, y por esta razón este método no es utilizado en la práctica.

Por lo tanto, en las aplicaciones típicamente se encuentra el uso de los formalismos basados en líderes, WTMM y MF DFA. Estos tres métodos fueron

comparados en forma independiente en [3, 4, 9, 64, 89, 100, 115, 132], y se concluyó que los tres brindan estimaciones de similar calidad. En el Cap. 5 comparamos en forma exhaustiva a los formalismos basados en MFDFA y líderes, y brindamos comentarios adicionales sobre las virtudes y deméritos de cada uno. Con respecto al formalismo basado en WTMM, a pesar de que brinda buenas estimaciones del espectro, presenta una limitación que reduce su aplicación práctica: su elevado costo computacional. Su uso requiere del cálculo de la transformada ondita continua, con un elevado costo tanto en tiempo como en memoria. Además, se debe realizar el proceso de búsqueda y podado de las líneas de módulos máximos, con un costo computacional adicional no despreciable.

Otra ventaja del formalismo basado en líderes consiste en su sencilla extensión a dimensiones altas, por ejemplo para el análisis de imágenes. Tanto el cálculo de la transformación ondita bidimensional como de los líderes son directos y no incrementan significativamente el costo computacional [153]. Por el contrario, a pesar de que existen versiones bidimensionales del formalismo basado en WTMM [24, 51], adolecen del problema de que tanto la definición como el cálculo de las líneas de máximos se vuelven complicados, incrementando el costo computacional. Con respecto a MFDFA, existen intentos de extender la técnica al análisis de imágenes [73, 133, 134]. Dichas propuestas presentan dificultades en la definición del polinomio de ajuste que permite la remoción de las tendencias suaves.

Por lo mencionado en los párrafos anteriores, consideramos que el formalismo multifractal basado en líderes es el mejor de los presentados, ya que muestra un buen desempeño en todas las propiedades analizadas. Por lo tanto, lo adoptaremos con método de referencia en lo que resta de este documento, y descartaremos el subíndice L en todas las cantidades involucradas en el formalismo.

2.6. log-cumulantes

Desde un punto de vista práctico, las funciones ζ y \mathcal{L} pueden resultar difíciles de manipular. Por tal razón, en ciertas situaciones resulta provechoso obtener una aproximación polinomial de $\zeta(q)$ alrededor de $q = 0$:

$$\zeta(q) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{q^m}{m!}, \quad (2.56)$$

y así reemplazar la determinación de la función ζ completa por la estimación de un conjunto de coeficientes $\{c_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ que sinteticen la información importante de la función. Notablemente, como se demostró en [39, 41, 52] y fue reformulado en el contexto de los coeficientes ondita líderes en [149], no es necesario hacer un ajuste *a posteriori* de la función ζ sino que los coeficientes c_m pueden ser estimados directamente a partir de los cumulantes de la cantidad multirresolución utilizada.

Los cumulantes C_m de una variable aleatoria Y son los coeficientes de la expansión polinomial alrededor del origen de su segunda función característica:

$$\log \mathbb{E} \left(e^{qY} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \frac{q^m}{m!}. \quad (2.57)$$

Las funciones de estructura $S_L(q, j)$ pueden ser interpretadas como estimadores muestrales de los momentos poblacionales $\mathbb{E}\{L_X(j, \cdot)^q\}$. Por lo tanto, la ec. (2.11)

puede ser rescrita, en este contexto, como:

$$\mathbb{E}\{L_X(j, \cdot)^q\} = K_q 2^{j\zeta(q)}. \quad (2.58)$$

o, equivalentemente,

$$\log \mathbb{E}\{L_X(j, \cdot)^q\} = \log K_q + \zeta(q) \log(2^j). \quad (2.59)$$

Por otro lado,

$$\log \mathbb{E}\{L_X(j, \cdot)^q\} = \log \mathbb{E}\{e^{q \log L_X(j, \cdot)}\}, \quad (2.60)$$

es decir, $\log \mathbb{E}\{L_X(j, \cdot)^q\}$ puede ser interpretado como la segunda función característica de la variable aleatoria $\log L_X(j, \cdot)$. Por lo tanto, admite una expansión polinomial de la forma:

$$\log \mathbb{E}\{L_X(j, \cdot)^q\} = \log \mathbb{E}\{e^{q \log L_X(j, \cdot)}\} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(j) \frac{q^m}{m!}. \quad (2.61)$$

Comparando las ecs. (2.59) y (2.61), vemos que

$$\log K_q + \zeta(q) \log(2^j) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(j) \frac{q^m}{m!}. \quad (2.62)$$

Para que esta relación se cumpla, $C_m(j)$ debe satisfacer:

$$C_m(j) = c_{0,m} + c_m \log(2^j). \quad (2.63)$$

Efectivamente, de esta forma

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m(j) \frac{q^m}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} c_{0,m} \frac{q^m}{m!} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{q^m}{m!} \right) \log(2^j), \quad (2.64)$$

de donde se reconoce que

$$\log K_q = \sum_{m=1}^{\infty} c_{0,m} \frac{q^m}{m!}, \quad (2.65)$$

$$\zeta(q) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{q^m}{m!}. \quad (2.66)$$

Es decir, los coeficientes de la expansión polinomial de $\zeta(q)$ alrededor de 0 se pueden obtener a partir de los cumulantes de la variable aleatoria $\log L_X(j, \cdot)$ mediante una regresión lineal, de $C_m(j)$ en función de $\log(2^j)$. Estos coeficientes c_m se conocen como *log-cumulantes* (en inglés, *log-cumulants*).

Debido a las propiedades de los cumulantes, se tiene que si $c_{m'} = 0$, entonces $c_m = 0, \forall m > m'$ [94]. Además, la concavidad de $\zeta(q)$ implica que $c_2 \leq 0$ [151].

Estimación. Los cumulantes $C_m(j)$ pueden ser estimados a partir de los estimadores muestrales tradicionales (cf. e. g. [94]). Además, en [152] se propuso un método bayesiano para la estimación de c_2 en ciertos tipos de procesos multifractales, y se demostró que tiene un buen desempeño para tamaños de muestra pequeños.

Aplicación. Como se mencionó, el uso de los coeficientes c_m en lugar de las funciones $\zeta(q)$ o $\mathcal{L}(h)$ es ventajoso desde el punto de vista práctico, en particular para la realización de tareas de clasificación o análisis, ya que concentran la información sobre el comportamiento multifractal de una función en unos pocos coeficientes. Por ejemplo, la discriminación entre una función monofractal y una multifractal puede hacerse en forma sencilla mediante un test con la hipótesis nula $H_0 : c_2 = 0$.

Expansión del espectro multifractal. Aplicando la transformación de Legendre a la ec. (2.66) se puede obtener una expresión para \mathcal{L} , alrededor de su máximo, en términos de los log-cumulantes [153], bajo la condición de que $c_2 \neq 0$:

$$\mathcal{L}(h) = 1 + \frac{c_2}{2!} \left(\frac{h - c_1}{c_2} \right)^2 + \frac{-c_3}{3!} \left(\frac{h - c_1}{c_2} \right)^3 + \frac{-c_4 + 3c_3^2/c_2}{4!} \left(\frac{h - c_1}{c_2} \right)^4 + \dots \quad (2.67)$$

de donde se puede obtener una interpretación de los parámetros c_m . En efecto, c_1 es la posición del máximo del espectro, c_2 está relacionado con su ancho, c_3 con su asimetría, etc.

2.7. Estimación práctica

2.7.1. Rango de escalas

La medición de la regularidad local y el análisis multifractal requieren, en forma teórica, el estudio del decaimiento de las cantidades multirresolución en el límite de las escalas infinitamente finas (cf. Sec. 2.3 y Sec. 2.4). Por supuesto, no es posible cumplir este requerimiento en la práctica. De hecho, en las aplicaciones se trabaja con una secuencia finita de mediciones tomadas con una resolución finita. Su tamaño determina la mayor escala observada, y la resolución limita la escala más fina medida. Todas las escalas obtenidas mediante el análisis multirresolución necesariamente se encuentran entre estos dos extremos. Aún más, puede ocurrir que la señal bajo estudio esté contaminada por algún ruido que enmascare el comportamiento invariante a la escala en algún subconjunto de las escalas disponibles.

Por lo tanto, en la práctica la ec. (2.11) toma la forma:

$$S_T(q, a) \sim a^{\zeta_T(q)}, \quad a \in [a_m, a_M], \quad (2.68)$$

en donde el límite $a \rightarrow 0^+$ fue reemplazado por el rango de escalas $[a_m, a_M]$ en donde se observa el decaimiento en ley de potencias.

Entonces, el mecanismo práctico para obtener las estimaciones consiste en los siguientes pasos:

1. Determinar el rango de escalas $[a_m, a_M]$ en el que el modelo de la ec. (2.68) se cumple.
2. Ajustar un modelo de ley de potencias en dicho rango de escalas, y usar el modelo para ajustado extrapolar el comportamiento que debería ocurrir en el límite de las escalas infinitamente finas.

Habitualmente el primer paso se realiza mediante inspección visual: se grafica $\log S(q, a)$ en función de $\log(a)$ y se observa el rango de escalas en el que el comportamiento es lineal. En el capítulo 4 se discutirá sobre este punto en mayor profundidad, y se propondrá un algoritmo que permite estimar este rango de escalas en forma automática.

En lo que sigue supondremos, sin pérdida de generalidad, que utilizamos un formalismo basado en líderes o coeficientes ondita discretos. Por tal razón, utilizaremos escalas diádicas de la forma $a = 2^j$ y utilizaremos logaritmos en base 2 por conveniencia.

2.7.2. Regresiones lineales

A partir de la ec. (2.68), o su equivalente para los diferentes formalismos presentados, se puede ver que los exponentes de escalamiento $\zeta(q)$ se pueden estimar a través de regresiones lineales de $\log_2 S(q, a)$ con respecto a $\log_2(2^j) = j$, con $j \in [j_m, j_M]$:

$$\hat{\zeta}(q) = \sum_{j=j_m}^{j_M} w_j \log_2 S(q, j), \quad (2.69)$$

donde los coeficientes w_j deben satisfacer las restricciones $\sum_{j=j_m}^{j_M} j w_j = 1$ y $\sum_{j=j_m}^{j_M} w_j = 0$, y se obtienen como:

$$w_j = b_j \frac{S_0 j - S_1}{S_0 S_2 - S_1^2}, \quad \text{en donde} \quad S_i = \sum_{j=j_m}^{j_M} j^i b_j. \quad (2.70)$$

Los pesos b_j reflejan la confianza que se brinda a cada medición, y deben ser ajustados en caso de que la varianza de $\log_2 S(q, j)$ no sea constante con las escalas. La elección $b_j \equiv 1$ corresponde a la regresión lineal ordinaria. Una elección usada en la práctica al trabajar con coeficiente ondita es $b_j = 2^{-j}$, es decir, se da menos peso a las escalas toscas debido que los coeficientes ondita tienen una mayor varianza en ellas [62].

Los cumulantes $\hat{C}_m(j)$ se obtienen a partir del estimador muestral de cumulantes aplicado a la variable aleatoria $\log L_X(j, \cdot)$ [94]:

$$\hat{C}_m(j) = \hat{\mu}_m(j) - \sum_{n=1}^{m-1} \binom{m-1}{n-1} \hat{C}_n(j) \hat{\mu}_{m-n}(j), \quad (2.71)$$

en donde $\hat{\mu}_m(j) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \log L(j, k)^m$ es el estimador muestral del m -ésimo momento (no central) de $\log L(j, k)^m$.

Siguiendo la ec. (2.63), los log-cumulantes se estiman a partir de regresiones lineales de $(\log_2 e) \hat{C}_p(j)$ con respecto a $\log_2(2^j) = j$:

$$\hat{c}_m = (\log_2 e) \sum_{j=j_m}^{j_M} w_j \hat{C}_m(j). \quad (2.72)$$

Finalmente, para evitar el cálculo numérico de la transformación de Legendre (no trivial), el espectro multifractal se estima recurriendo a un método propuesto originalmente en [47] y luego desarrollado en [149, 151] en el contexto de los

coeficientes ondita líderes. El método obtiene una estimación paramétrica de $\mathcal{L}(h)$ a través de las funciones $h(q)$ y $\mathcal{L}(q)$. En primer lugar se calculan las funciones auxiliares:

$$U(q, j) = \sum_{k=1}^{n_j} R^q(j, k) \log_2 R^q(j, k) + \log_2 n_j, \quad (2.73)$$

$$V(q, j) = \sum_{k=1}^{n_j} R^q(j, k) \log_2 L(j, k), \quad (2.74)$$

$$(2.75)$$

en donde

$$R(q, j) = \frac{L(j, k)^q}{\sum_{k=1}^{n_j} L^q(j, k)}. \quad (2.76)$$

Finalmente, las funciones paramétricas $h(q)$ y $\mathcal{L}(q)$ se estiman como:

$$\hat{h}(q) = \sum_{j=j_m}^{j_M} w_j U(q, j), \quad (2.77)$$

$$\hat{\mathcal{L}}(q) = \sum_{j=j_m}^{j_M} w_j V(q, j). \quad (2.78)$$

En la Fig. 2.1 se representa el proceso de estimación práctica del formalismo multifractal.

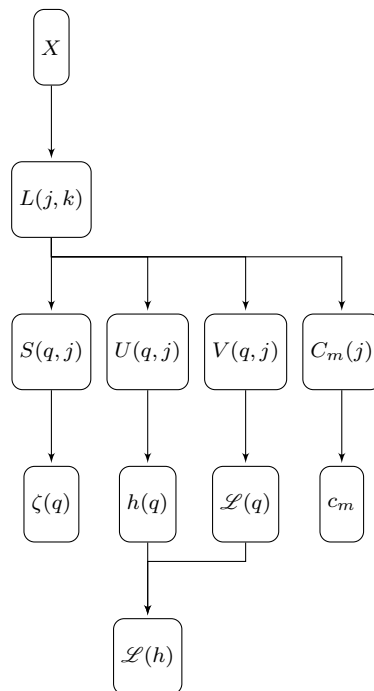


Figura 2.1: Esquema de la estimación de parámetros multifractales.

2.8. Regularidad negativa e integración fraccionaria

2.8.1. Exponente de Hölder uniforme

Como se vio en la Sec. 2.5, los formalismos multifractales basados en oscilaciones, coeficientes ondita líderes y módulos máximos requieren que la función bajo estudio sea localmente acotada, es decir, $X \in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R})$. En un análisis superficial de la situación práctica, este requisito puede parecer trivial. De hecho, en las aplicaciones se trabaja con señales discretizadas con una resolución finita, es decir con secuencias acotadas. Por lo tanto, se podría cometer el error de considerar que dicha hipótesis se cumple trivialmente en la práctica.

Por lo anterior, el problema que hay que analizar es si la secuencia de muestras de las que se dispone corresponden a una función localmente acotada o no. La respuesta a esta pregunta debe buscarse en las propiedades de invarianza a la escala de la señal. En lugar de analizar lo que ocurre en la escala más fina disponible, se debe redefinir el problema en términos de las propiedades de escalamiento sobre un rango de escalas determinado. Es decir, se debe determinar si los exponentes de escalamiento observados son compatibles con una función acotada o no [86, 88].

Si el análisis de las propiedades de escalamiento indican que las muestras corresponden a una función localmente acotada, ese resultado debería ser interpretado en el sentido de que la invarianza a la escala se sigue manteniendo en todas las escalas menores a la más fina que fue medida. Es decir, si se pudiera continuar adquiriendo datos a escalas infinitamente más finas, el comportamiento de invarianza a la escala observado sería el mismo, y el resultado convergería a una función que no sería localmente acotada.

El exponente de escalamiento que permite determinar si una función es localmente acotada o no es el exponente de Hölder uniforme, definido a continuación [24, 86, 88, 153].

Definición 2.8.1. Exponente de Hölder uniforme. *El exponente uniforme de Hölder h_{min}^X de una función o distribución X es*

$$h_{min}^X = \liminf_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log(\sup_k |d_X(j, k)|)}{\log(2^j)}. \quad (2.79)$$

Como caracterización alternativa, el exponente de Hölder uniforme coincide con el extremo izquierdo del soporte del espectro multifractal:

$$h_{min}^X = \inf\{h : D(h) > -\infty\}, \quad \text{si } h_{min}^X > 0. \quad (2.80)$$

La definición 2.8.1 brinda una caracterización práctica del exponente de Hölder uniforme, así como una forma sencilla de calcularlo a partir de una regresión lineal sobre los coeficientes ondita máximos. La definición formal de dicho exponente se basa en la pertenencia a ciertos espacios de Lipschitz, y puede encontrarse en [86, 88].

Los valores que toma el exponente de Hölder uniforme tienen la siguiente interpretación [88]:

- Si $h_{min}^X > 0$ entonces X es una función localmente acotada.

- Si $h_{min}^X < 0$ entonces X no es localmente acotada.

Esto significa que para calcular los líderes es necesario verificar *a priori* que $h_{min}^X > 0$. Sin embargo, un problema más importante desde un punto de vista teórico es que si la función no es localmente acotada entonces *no está definido el exponente de Hölder*. En efecto, en la Sec. 2.3.1 se vio que un requisito para la definición es que la función sea localmente acotada; por otro lado, el exponente de Hölder sólo puede ser positivo dado que se define como el supremo de un conjunto de números positivos. Por lo tanto, en la hipotética situación en la cual se analice una señal X para la que se verifique $h_{min}^X < 0$, y se aplique un formalismo multifractal como el basado en coeficientes ondita o en MF DFA, que no requieren que $X \in L^\infty(\mathbb{R})$, el espectro de Legendre que se obtiene no estará dado en términos del exponente de Hölder. Este problema será analizado con más detalle en el Cap. 5, en donde se definirá un exponente correcto que permitirá caracterizar la regularidad negativa.

2.8.2. Integración fraccionaria

En las aplicaciones prácticas es común que $h_{min}^X < 0$ [15, 24, 88]. Sin embargo, esto no quiere decir que no se pueda aplicar el formalismo multifractal basado en líderes para analizar dichas señales. Por el contrario, una solución clásica a este problema consiste en realizar una integración de la señal X : si $-1 < h_{min}^X \leq 0$ entonces $h_{min}^Y = h_{min}^X + 1 > 0$, en donde $Y(x) = \int_{-\infty}^x X(t)dt$ [88]. Debido principalmente a que esta integración es difícil de realizar en señales de dimensiones mayores, también se propuso [24, 153] usar una integración fraccionaria de orden γ (notar que la integración tradicional es un caso particular para $\gamma = 1$). Existen numerosas definiciones de la integración fraccionaria; a continuación reproducimos la basada en la transformada de Fourier, que sirve de inspiración al método que presentaremos a continuación. Para más detalles sobre la integración fraccionaria, cf. e. g. [122].

Definición 2.8.2. Integración fraccionaria basada en la transformada de Fourier

Sea X una distribución temperada, que por lo tanto tiene una transformada de Fourier \mathcal{X} . La integral fraccionaria de orden γ de X , está definida como la función $X^{(-\gamma)}$ cuya transformada de Fourier es [86, 122]:

$$\mathcal{X}^{(-\gamma)}(\omega) = (1 + |\omega|^2)^{-\gamma/2} \mathcal{X}(\omega). \quad (2.81)$$

La integración fraccionaria también es difícil de implementar numéricamente, debido principalmente a los efectos de borde inherentes al trabajo con señales finitas. Además, la extensión a altas dimensiones requiere del cálculo de una DFT multidimensional que también presenta dificultades algorítmicas (en comparación con el método sencillo que se propone luego). Por lo tanto, tomando como inspiración de los análisis hechos en [24], en [86, 88, 153] se propuso el uso de una integración pseudo-fraccionaria sobre los coeficientes ondita, definida a continuación.

Definición 2.8.3. Integración pseudo-fraccionaria

Sea X una función o distribución con coeficientes ondita d_λ , calculados a partir de una ondita madre ψ_0 . La integral pseudo-fraccionaria de orden γ de X , denotada

con $I^\gamma(X)$, es la función cuyos coeficientes ondita $d_\lambda^{(-\gamma)}$ (usando la misma ondita madre) son [88]:

$$d_\lambda^{(-\gamma)} = 2^{-j\gamma} d_\lambda. \quad (2.82)$$

Antes de continuar introducimos la siguiente notación: θ^X indica que la cantidad θ es calculada a partir de la función X . La siguiente proposición [86–88] muestra que esta operación afecta a la regularidad local y a las propiedades multifractales de la misma forma que la integración fraccionaria de la Def.2.8.2.

Proposición 2.8.1. *Sea X una distribución temperada. Entonces:*

$$\forall \gamma \in \mathbb{R}, \begin{cases} \forall q > 0, \zeta_d^{X^{(-\gamma)}}(q) = \zeta_d^{I^\gamma(X)}(q) = \zeta_d^X(q) + \gamma q, \\ h_{min}^{X^{(-\gamma)}} = h_{min}^{I^\gamma(X)} = h_{min}^X + \gamma. \end{cases} \quad (2.83)$$

Además, el exponente de Hölder local satisface

$$h^{X^{(-\gamma)}}(x) = h^{I^\gamma(X)}(x), \quad \forall \gamma > -h_{min}^X, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.84)$$

La demostración de la Proposición 2.8.1 requiere de la introducción de numerosos conceptos adicionales, y escapa al alcance de este trabajo de tesis. El lector interesado puede consultar e. g. [86].

La implementación práctica de la integración pseudo-fraccionaria es trivial y no agrega complejidad computacional al cálculo de los coeficientes ondita. Además, a la luz de la proposición 2.8.1 brinda los mismos resultados (y, si se considera $\gamma = 1$, también es equivalente a la integración ordinaria). Por esta razón, la integración pseudo-fraccionaria es preferida sobre los otros métodos. Además, incluso en el caso de señales unidimensionales, es preferible el uso de la integración pseudo-fraccionaria en lugar de la integración tradicional, ya que permite ajustar el orden γ y evitar así una integración excesiva que pueda acarrear la necesidad de incrementar la cantidad de momentos nulos empleados en el análisis.

2.9. Bootstrap para análisis multifractal

En la aplicación práctica del análisis multifractal o de cualquier otra técnica de procesamiento de señales, los valores que toman los estimadores son tan importantes como el conocimiento de su distribución. De poco sirve conocer un estimador sin un intervalo de confianza adecuado, o sin la posibilidad de realizar un test de hipótesis para tomar una decisión práctica. Sin embargo, los métodos tradicionales para obtener este tipo de información estadística se basan en la suposición de que los datos siguen una distribución determinada. De hecho, en la mayoría de los casos la hipótesis subyacente es que dicha distribución es gaussiana. Este tipo de métodos no son útiles en el caso de los procesos multifractales típicos, debido a las formas complejas que toman las distribuciones de sus coeficientes. La razón de esta complejidad se encuentra en los procesos multiplicativos involucrados en su construcción (cf. capítulo. 3), [151]. Por otro lado, suponiendo que pudiera conocerse analíticamente la distribución de los coeficientes de una señal y de sus coeficientes ondita, el uso del análisis multifractal basado en líderes, que involucran

una transformación no lineal de los coeficientes onditas, presenta una dificultad adicional para la obtención de intervalos de confianza paramétricos.

Tomando como motivación las dificultades mencionadas, en [148, 149, 151, 156] se propuso un método basado en bootstrap no paramétrico en el plano tiempo escala para la construcción de intervalos de confianza y test de hipótesis en el caso de los formalismos multifractales basados en coeficientes ondita y en líderes. El uso de esta técnica no paramétrica permite la obtención de la información estadística deseada imponiendo hipótesis mínimas sobre los coeficientes de la cantidad multirresolución, a expensas de un incremento del costo computacional.

En esta sección, describimos los esquemas de bootstrap propuestos en [148, 149, 151, 156]. El uso de este método es central en el desarrollo del capítulo 4, una de las contribuciones de este trabajo.

2.9.1. Bootstrap no paramétrico

El ahora clásico bootstrap, propuesto originalmente en [57], consiste en un procedimiento de remuestreo aleatorio para estimar la distribución de una población a partir de la muestra utilizable.

Supóngase el siguiente problema. Sea $\{X_k\}_{k=1,\dots,N}$ el conjunto de muestras independientes del que se dispone, y sea $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_N)$ un estimador del parámetro poblacional θ . Se desea estimar la función de distribución acumulada de θ , denotada F_θ , para calcular intervalos de confianza o realizar tests de hipótesis. Como ya se mencionó, la obtención en forma cerrada de esta distribución puede ser difícil, e incluso imposible, dependiendo de las distribuciones marginales de las muestras y de la forma del estimador $\hat{\theta}$.

Bajo la hipótesis de que las muestras X_k son independientes, el método de bootstrap no paramétrico permite obtener una estimación \hat{F}_θ de F_θ mediante el siguiente procedimiento [57, 58, 162]:

1. Obtener una *muestra de bootstrap* $\{X_k^*\}_{k=1,\dots,N}$ a partir de un muestreo independiente de $\{X_k\}_{k=1,\dots,N}$. Es decir, cada muestra X_k^* se toma del conjunto $\{X_k\}_{k=1,\dots,N}$ con la misma probabilidad.
2. A partir de la muestra de bootstrap, construir la *replicación de bootstrap* del estimador: $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}(X_1^*, \dots, X_N^*)$; es decir, consiste en el valor del estadístico calculado a partir de la muestra de bootstrap.
3. Repetir los pasos anteriores B de veces. De esta forma, se obtiene la colección de replicaciones $\{\hat{\theta}^{*(b)}, b = 1, \dots, B\}$.
4. Usar la colección $\{\hat{\theta}_k^{*(b)}\}$ para estimar \hat{F}_θ , y con ella calcular el error estadístico, intervalos de confianza o distribuciones nulas de $\hat{\theta}$.

2.9.2. Bootstrap por bloques

La hipótesis fundamental en el funcionamiento del remuestreo involucrado en el método de bootstrap es la independencia de los datos $\{X_k\}_{k=1,\dots,N}$. En el caso que nos interesa en este trabajo, dicha muestra es una realización del proceso aleatorio

X . En esta circunstancia, la hipótesis de independencia habitualmente no se cumple y, por lo tanto, el esquema de bootstrap tradicional no se puede aplicar. Sin embargo, se puede imponer una hipótesis menos fuerte, la *dependencia débil* del proceso, y aplicar una versión modificada del bootstrap conocida como *bootstrap por bloques móviles* [50, 162]. En forma poco rigurosa, el concepto de dependencia débil indica que dos muestras X_k y $X_{k'}$ del proceso serán prácticamente independientes si están lo suficientemente alejadas.

El principio del bootstrap por bloques móviles consiste en remuestrear bloques contiguos de muestras en lugar de muestras individuales. Para una señal de longitud N , se seleccionan al azar bloques de longitud W (posiblemente solapados) que luego son concatenados para formar cada replicación bootstrap [50, 162]. Una variación conocida como *bootstrap por bloque circular* permite que los bloques que ubicados al final de la muestra contengan elementos del principio [162].

La longitud de los bloques utilizados debe ser lo suficientemente larga para mantener la mayor parte posible de la información de dependencia presente en los datos, pero no lo suficiente grande como para que la cantidad de bloques sea muy baja [162]. Existen algunos trabajos, e. g. [74, 99, 123], que ilustran sobre la forma más conveniente de seleccionar la longitud del bloque. Sin embargo, este es un área todavía abierta y la selección de este parámetro sigue siendo un factor importante en la utilización del método.

2.9.3. Bootstrap en el plano tiempo escala

El bootstrap por bloques provee una alternativa para aplicar el método de bootstrap en series temporales que, a pesar de no ser independientes, muestran alguna forma de dependencia débil. Sin embargo, este no es el caso en los procesos multifractales típicos. De hecho, este tipo de procesos habitualmente no son estacionarios. Además, la existencia de regímenes de escalamiento en las escalas más toscas de un proceso evidencia la presencia de correlaciones de largo plazo entre las muestras. Por lo tanto, este tipo de procesos no cumplen con la hipótesis de dependencia débil. En conclusión, el método de bootstrap por bloques tampoco puede ser aplicado en forma directa para el estudio estadístico de este tipo de procesos.

Para evitar estas limitaciones, en [120, 130] se propuso realizar el bootstrap por bloques sobre los coeficientes DWT en lugar de sobre las muestras del proceso. Esta idea se basa en el hecho de que la DWT tiene un “efecto descorrelacionador” [62, 120]. Es decir, mientras que la serie temporal puede exhibir un alto nivel de autocorrelación, sus coeficientes ondita pueden ser considerados como descorrelacionados. Esta observación está basada en trabajos como [8, 61, 62, 70] en donde se demuestra que en el caso de ciertos procesos autosimilares con incrementos estacionarios⁴, los coeficientes ondita son estacionarios y débilmente correlacionados.

La técnica de aplicar el bootstrap a los coeficientes ondita, denominada *wavestrapping* en [120], consiste entonces en realizar el bootstrap por bloques móviles a los coeficientes DWT, independientemente para cada escala [120, 130]. En estos trabajos, el *wavestrapping* se propuso para realizar replicaciones (*surrogates*) de la

⁴Estos conceptos serán tratados en la Sec. 3.2.1.

serie temporal, para lo cual en primer lugar se replican los coeficientes ondita y luego se reconstruye la replicación de la señal mediante la transformación inversa.

En [149–151, 153] se adapta la idea del wavestrapping a la obtención de intervalos de confianza y la realización de test de hipótesis sobre atributos multifractales. En lugar de realizar una reconstrucción con los coeficientes ondita replicados, en dichos trabajos se propone aplicar el formalismo multifractal a cada una de las replications del plano tiempo-escala. Este procedimiento, ilustrado en la Fig. 2.2 permite obtener replications de cada uno de los atributos multifractales, que luego son utilizadas para la confección de los intervalos de confianza o la realización de los tests de hipótesis.

Existen dos formas de realizar el bootstrap por bloques en el plano tiempo-escala, que serán detalladas a continuación. En lo que resta de esta sección, denotaremos con $T(j, k)$ a los coeficientes ondita o a los líderes. A pesar de que estos esquemas de bootstrap fueron propuestos para los formalismos multifractales basados en coeficientes ondita o en líderes, podrían ser adaptados para funcionar con las otras cantidades multirresolución descritas en este capítulo. Sin embargo, según nuestro conocimiento, la validez de esta afirmación sigue sin ser estudiada. Por lo tanto, en esta sección sólo consideramos a las cantidades multirresolución derivadas de los coeficientes ondita.

2.9.3.1. Bootstrap en bloques de tiempo

El bootstrap en bloques de tiempo corresponde al esquema original utilizado en [120, 149, 151]. En este esquema, los coeficientes $T(j, k)$ son considerados en forma independiente para cada escala.

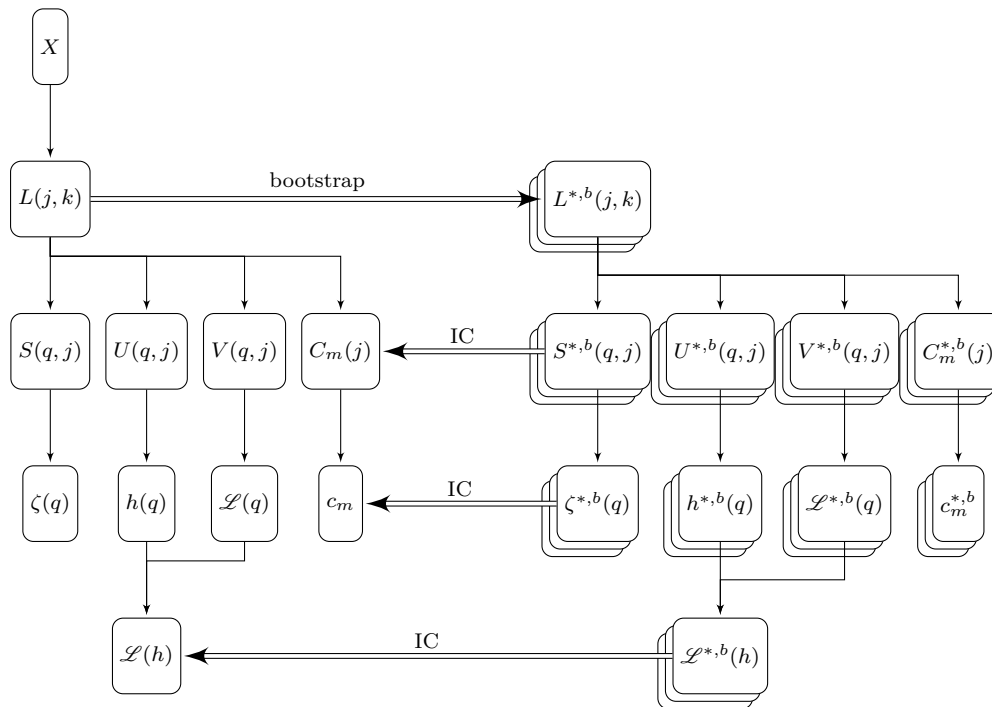


Figura 2.2: Esquema de la estimación de parámetros multifractales con intervalos de confianza provistos mediante bootstrap.

Sea $(T(j, 1), \dots, T(j, n_j))$ el vector con los coeficientes disponibles en la escala j . Se define al k -ésimo bloque circular de longitud W_j como:

$$\mathfrak{B}_{j,k} = (T(j, k), \dots, T(j, k + W_j - 1 \bmod n_j)). \quad (2.85)$$

Supongamos por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, que la cantidad de bloques es $M_j = N/W_j \in \mathbb{N}$. La replicación bootstrap se obtiene concatenando M_j bloques, tomados en forma aleatoria y con igual probabilidad del conjunto de bloques disponibles $\{\mathfrak{B}_{j,1}, \dots, \mathfrak{B}_{j,M_j}\}$:

$$(T^*(j, 1), \dots, T^*(j, n_j)) = \mathfrak{B}_{j,R_1} \parallel \mathfrak{B}_{j,R_2} \parallel \dots \parallel \mathfrak{B}_{j,R_{M_j}} \quad (2.86)$$

en donde el símbolo \parallel indica la concatenación de dos bloques. Los números $R_i \in \mathbb{N}$, con $i = 1, \dots, M_j$, son aleatorios con distribución uniforme.

Una replicación completa del plano tiempo-escala se obtiene repitiendo dicho procedimiento, en forma independiente, para todas las escalas $1 \leq j \leq J$.

2.9.3.2. Bootstrap en bloques de tiempo-escala

La principal limitación del bootstrap por bloques de tiempo descrito en la sección 2.9.3.1 consiste en que rompe la dependencia que pudiera existir entre los coeficientes en distintas escalas. Además de la dependencia de este tipo que pudiera existir naturalmente debido a las características propias del proceso analizado, también puede ser introducida por la cantidad multirresolución utilizada. Por ejemplo, en el caso de los líderes se produce naturalmente este fenómeno al buscar los coeficientes supremos en diferentes escalas [150].

En [150] se propone una variante en la que los bloques son tomados como franjas completas del plano tiempo escala. La idea detrás de este procedimiento es que dentro de cada bloque se reproduzca la dependencia entre escalas existente en el proceso.

En este caso, los bloques se definen como la colección de coeficientes ubicados en una franja del plano tiempo-escala de ancho W y centrada en la muestra k [150]:

$$\mathfrak{B}_k = \{T(j', k') : |k - k'2^{j'}| \leq W, 1 \leq j' \leq J\} \quad (2.87)$$

La replicación bootstrap de las cantidades multirresolución se obtiene concatenando $M = N/W$ bloques tomados en forma aleatoria de la colección de bloques disponibles $\{\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_M\}$:

$$\left\{ T^*(j, k), 1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq n_j \right\} = \mathfrak{B}_{R_1} \parallel \mathfrak{B}_{R_2} \parallel \dots \parallel \mathfrak{B}_{R_M} \quad (2.88)$$

en donde el símbolo \parallel indica la concatenación de dos bloques. Los números $R_i \in \mathbb{N}$, con $i = 1, \dots, M$, son números aleatorios con distribución uniforme.

El uso de bloques de tiempo-escala brinda intervalos de confianza con mejor cobertura que aquellos obtenidos usando bloques temporales [150]. Sin embargo, la diferencia no es elevada. Por otro lado, el costo computacional de la obtención de las replicaciones es mucho mayor en el caso de los bloques de tiempo-escala. Por esta razón, en la práctica se suelen usar los bloques temporales a pesar de que tienen un desempeño ligeramente inferior.

2.9.4. Distribuciones empíricas de los estimadores

A partir de las replicaciones $\{T^{*(b)}(j, k)\}_{b=1, \dots, B}$ se obtienen las replicaciones de las funciones de estructura $S^{*(b)}(j, k)$, $C_m^{*(b)}(j)$, $U^{*(b)}(j, k)$ y $V^{*(b)}(j, k)$. Finalmente se realizan las regresiones lineales sobre dichas cantidades para obtener las replicaciones de los atributos multifractales $\zeta^{*(b)}(q)$, $D^{*(b)}(q)$, $h^{*(b)}(q)$, $c_m^{*(b)}$. El procedimiento se encuentra esquematizado en la Fig. 2.2. Las replicaciones son utilizadas para la estimación empírica de la distribución de cada atributo.

2.9.5. Intervalos de confianza y test de hipótesis

Las distribuciones empíricas de los estimadores obtenidas mediante bootstrap, son utilizadas para construir los intervalos de confianza y las regiones de aceptación de los tests de hipótesis.

2.9.5.1. Intervalos de confianza percentiles

El intervalo de confianza bilateral $(1-\alpha)$ para el parámetro $\theta \in \{\zeta(q), D(q), h(q), c_m\}$ está definido como [151]:

$$\left[\hat{\Theta}_{\frac{\alpha}{2}}^*, \hat{\Theta}_{1-\frac{\alpha}{2}}^* \right], \quad (2.89)$$

en donde $\hat{\Theta}_{\alpha}^*$ es el cuantil α de la distribución empírica de $\hat{\theta}$, estimada mediante bootstrap.

2.9.5.2. Test de hipótesis percentiles

La metodología descripta permite realizar test de hipótesis sobre el valor que toman determinados atributos multifractales de la forma:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0, \\ H_1 : \theta \neq \theta_0, \end{cases} \quad (2.90)$$

en donde $\theta \in \{\zeta(q), D(q), h(q), c_p\}$ es algún atributo multifractal. El test se basan en uso del estadístico de prueba [151]:

$$\hat{t} = \hat{\theta} - \theta_0. \quad (2.91)$$

Un test con una significancia de $(1 - \alpha)$ rechaza la hipótesis nula H_0 si la probabilidad de observar un valor determinado \hat{t} es menor a $(1 - \alpha)$. Se puede definir la región de aceptación $\mathfrak{T}_{1-\alpha}$ como $\Pr(\hat{t} \in \mathfrak{T}_{1-\alpha} | \theta = \theta_0) \geq 1 - \alpha$, es decir, el conjunto de valores del estadístico para los cuales es la hipótesis nula no es rechazada, en la situación en que la hipótesis nula es cierta.

La región de aceptación es estimada en forma no paramétrica mediante las distribuciones empíricas de $\{\hat{t}^{*(b)} = \hat{\theta}^{*(b)} - \hat{\theta}\}_{b=1, \dots, B}$ [151]. La región de aceptación se construye como [151]:

$$\mathfrak{T}_{1-\alpha} = \left[\hat{\mathcal{T}}_{B\frac{\alpha}{2}}^*, \hat{\mathcal{T}}_{B(1-\frac{\alpha}{2})}^* \right], \quad (2.92)$$

en donde $\hat{\mathcal{F}}_\alpha^*$ es el cuantil α de la distribución empírica del estadístico de prueba obtenida a partir de sus replicaciones bootstrap.

Las modificaciones necesarias para realizar tests con hipótesis alternativas diferentes a la utilizada en la ec. (2.90) son directas y no serán tratadas en este documento.

2.10. Implementación numérica

En las simulaciones numéricas realizadas en este trabajo, utilizamos las implementaciones de las técnicas aquí descritas realizadas en lenguaje Matlab por diferentes miembros del grupo Signaux, Systèmes et Physique del Laboratoire de Physique, Ecole Normale Supérieure de Lyon. En particular, la herramienta `MF_BS_tool`, disponible en <http://www.irit.fr/~Herwig.Wendt/software.html>, implementa los formalismos basados en coeficientes ondita y líderes, así como las técnicas de bootstrap descritas. La excepción la constituye la técnica MF DFA, que implementamos de forma tal de poder ser incorporada a `MF_BS_tool`.

2.11. Comentarios finales

En este capítulo brindamos una descripción del análisis de escalamiento. En este paradigma, ninguna escala juega un papel preponderante en la descripción de la señal bajo estudio. Por lo tanto, para su caracterización debe estudiarse la forma en que distintas escalas se relacionan entre sí. A continuación, describimos el análisis multifractal, que permite analizar una señal en función de los tipos de singularidades que posee. El formalismo multifractal une los dos conceptos anteriormente expuestos, permitiendo la estimación del espectro multifractal a partir de las propiedades de escalamiento presentes en los datos.

Un formalismo multifractal debe estar basado en alguna cantidad multirresolución, es decir, una cantidad que depende conjuntamente del tiempo y de la escala. El exponente de Hölder puede ser medido a partir del decaimiento de dicha cantidad. Describimos diferentes cantidades multirresolución, con características diversas, y realizamos una comparación entre ellas. Es importante enfatizar que un formalismo multifractal puede basarse en cualquier cantidad multirresolución, basta que cumpla las propiedades indicadas en la Sec. 2.5. La elección de la más adecuada estará guiada por razones de índole teórica (e. g. los coeficientes ondita permiten trabajar en una base ortogonal) o práctica (e. g. robustez ante tendencias suaves, eficiencia computacional, etc). Indicamos también que el formalismo basado en coeficientes ondita líderes muestra excelentes propiedades en ambas categorías.

Acto seguido se describieron los log-cumulantes, atributos multifractales muy utilizados en la práctica que permiten resumir la información multifractal de una señal en pocos coeficientes. A continuación discutimos la forma en que las cantidades involucradas en el formalismo son estimadas en la práctica. Enfatizamos la necesidad de determinar un rango de escalas en el que se observa el fenómeno de escalamiento. La detección automática de dicho rango es una de las contribuciones de este trabajo de tesis, y será presentada en el capítulo 4.

También discutimos el problema de la estimación en señales con regularidad negativa. En esta situación se encuentran dificultades tanto de índole teórica (indefinición del exponente de Hölder) como práctica (indefinición de cantidades multirresolución como los coeficientes ondita líderes). Indicamos un procedimiento para detectar esta situación mediante el estudio de los coeficientes ondita. Asimismo, presentamos el método de la integración pseudo-fraccionaria, que permite la aplicación del formalismo multifractal basado en coeficientes ondita líderes en estos casos. Retomaremos este tema en el capítulo 5, en el que presentaremos otra de las contribuciones de este trabajo de tesis: el estudio de los exponentes p , que permiten el análisis de la regularidad negativa.

Finalmente, presentamos esquemas de bootstrap desarrollados para el análisis multifractal. Estos métodos permiten obtener intervalos de confianza y realizar tests de hipótesis sobre todos los atributos multifractales a partir de una única realización de datos. Utilizaremos estos esquemas en el capítulo 4 como base para el algoritmo propuesto allí.

Capítulo 3

Procesos multifractales

“Maga, vamos componiendo una figura absurda, dibujamos con nuestros movimientos una figura idéntica a la que dibujan las moscas cuando vuelan en una pieza, de aquí para allá, bruscamente dan media vuelta, de allá para aquí, eso es lo que se llama movimiento browniano, ¿ahora entendés?, un ángulo recto, una línea que sube, de aquí para allá, del fondo al frente, hacia arriba, hacia abajo, espasmódicamente, frenando en seco y arrancando en el mismo instante en otra dirección, y todo eso va tejiendo un dibujo, una figura, algo inexistente como vos y como yo, como los dos puntos perdidos en París que van de aquí para allá, de allá para aquí, haciendo su dibujo, danzando para nadie, ni siquiera para ellos mismos, una interminable figura sin sentido. ”

RAYUELA
Julio Cortázar

Contenidos

3.1. Introducción	41
3.2. Clasificación de procesos	41
3.2.1. Procesos autosimilares con incrementos estacionarios	41
3.2.2. Procesos monofractales y multifractales	42
3.2.3. Invarianza a la escala	42
3.2.4. Relación entre las clasificaciones	43
3.3. Movimiento browniano fraccionario	44
3.4. Proceso α-estable de Lévy	44
3.5. Movimiento aleatorio multifractal	45
3.6. Cascadas canónicas de Mandelbrot	46
3.6.1. CMC log-normal	47
3.6.2. CMC log-Poisson	47
3.7. Cascadas de Poisson compuestas	47
3.7.1. CPC log-normal	49

3.7.2. CPC log-Poisson	49
3.8. Procesos auto-similares en tiempo multifractal	50
3.8.1. CPC-fBm-MF log-normal	51
3.8.2. CPC-fBm-MF log-Poisson	52
3.9. Cascadas de ondas aleatorias	52
3.9.1. RWC con multiplicadores log-normales	53
3.9.2. RWC con multiplicadores log-Poisson	54
3.10. Cascadas de ondas determinísticas	54
3.11. Series de ondas aleatorias	55
3.11.1. Definición	55
3.11.2. RWS invariantes a la escala	57
3.11.3. Singularidades oscilantes	57
3.11.4. Síntesis a partir de una RWC	57
3.11.5. RWS a partir de una RWC log-normal	58
3.12. Series onda lacunares	58
3.13. Implementación numérica	59
3.14. Comentarios finales	59

3.1. Introducción

En este capítulo describimos diversos procesos estocásticos y funciones con comportamiento multifractal, que serán utilizados en las simulaciones numéricas de los capítulos posteriores. Comenzamos con una discusión de ciertas clasificaciones de procesos en la Sec. 3.2. La finalidad de esta sección es introducir la nomenclatura necesaria para el desarrollo de las secciones siguiente. Además, se busca brindar una definición precisa de ciertos conceptos que a menudo son utilizados en forma confusa en la práctica. Cada una de las últimas secciones trata sobre un tipo distinto de proceso o función con diferentes características multifractales.

3.2. Clasificación de procesos

Discutiremos aquí diferentes formas de clasificar los procesos que manifiestan alguna forma de invarianza a la escala. Existen en la literatura diferentes formas de clasificar y referirse a ellos. Incluso, muchos de los términos aquí presentados suelen ser utilizados en forma intercambiable y, en algunos casos, confusa. Un ejemplo claro es el uso de la palabra *monofractal*. Por lo tanto, el objetivo de esta sección es presentar la definición aquí adoptada para cada una de categorías comúnmente utilizadas, así como la relación entre dichos conceptos.

3.2.1. Procesos autosimilares con incrementos estacionarios

Tanto por su importancia histórica como por su utilización en la práctica, los procesos H -autosimilares con incrementos estacionarios (en inglés *H -self-similar with stationary increments, H -sssi*) ocupan un lugar predominante.

Definición 3.2.1. *Proceso autosimilar*

Se dice que un proceso X es autosimilar con parámetro de autosimilaridad $H > 0$ (H -ss) si, para cualquier $c \in \mathbb{R}$, satisface [62, 131]:

$$\{X(x), x \in \mathbb{R}\} \stackrel{d}{=} \{c^{-H}X(cx)\}, \quad (3.1)$$

en donde el símbolo $\stackrel{d}{=}$ significa igualdad de las distribuciones de probabilidad.

De acuerdo con esta definición, no se puede distinguir estadísticamente al proceso cuando es observado con distintos factores de escala c . Como consecuencia de la definición, un proceso H -ss es necesariamente no estacionario. Por otro lado, los momentos del proceso siguen una ley de potencias con respecto a la escala, como se verá en la sección 3.2.3.

En la práctica, la no estacionariedad de los procesos H -ss es problemática, tanto para el análisis como para la modelización. Por lo tanto, se suele considerar al subconjunto de los procesos H -autosimilares con incrementos estacionarios (H -sssi).

Definición 3.2.2. *Proceso con incrementos estacionarios*

Un proceso X tiene incrementos estacionarios si la distribución de su proceso de incrementos:

$$\{X_\tau(x) := X(x + \tau) - X(x), x \in \mathbb{R}\}$$

no depende de τ [62, 131].

Un proceso es H -sssi si es autosimilar con parámetro de autosimilaridad H , y además tiene incrementos estacionarios. La autosimilaridad del proceso se traslada a sus incrementos.

El ejemplo paradigmático de procesos H -sssi es el movimiento Browniano fraccionario, el único proceso H -sssi gaussiano [112] (cf. sección 3.3). Otros ejemplos de este tipo de procesos son el proceso de Rosenblatt [11], no considerado en este trabajo, y el proceso α -estable de Lévy (cf. sección 3.4).

3.2.2. Procesos monofractales y multifractales

Otra forma de clasificar los procesos es según la forma que adopta el espectro multifractal.

Definición 3.2.3. *Proceso monofractal*

Un proceso X es monofractal si su exponente de Hölder es constante en todo punto: $h_X(t) \equiv H$. Por lo tanto, su espectro de singularidades se reduce a un único punto:

$$D(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = H, \\ -\infty & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Definición 3.2.4. *Proceso multifractal*

Un proceso X es multifractal si el soporte de su espectro de singularidades no se reduce a un único punto: $\text{supp}(D) = [h_{\min}, h_{\max}]$, con $h_{\max} > h_{\min}$.

En los procesos monofractales, el exponente de Hölder es una función constante: $h_X(t) \equiv H$. Por el contrario, en los procesos multifractales la función h_X es habitualmente una función altamente oscilatoria, en donde el exponente de Hölder cambia drásticamente de punto a punto.

3.2.3. Invarianza a la escala

Como ya se mencionó en la Sec. 2.2, el primer paradigma utilizado para modelar funciones o procesos con invarianza a la escala fue el de los modelos auto-similares. De hecho, numerosos procesos H -sssi, muestran la siguiente forma de invarianza a la escala [43, 62]:

$$\mathbb{E}[|\mathcal{I}_X(a, \cdot)|^q] \sim |a|^{qH}, \quad (3.3)$$

es decir, los momentos de los incrementos del proceso decaen con las escalas según una ley de potencias. Además, existe una relación lineal entre el decaimiento en los distintos órdenes q , gobernada por el parámetro de Hurst H . Este tipo de comportamiento está íntimamente relacionado con la naturaleza aditiva de estos procesos [62, 135].

El hecho de que el comportamiento de los diferentes momentos esté gobernado por un único parámetro es a menudo restrictivo en la práctica [62]. Un primer nivel de generalización puede lograrse al permitir que los exponentes de las leyes de potencia

sigan una relación no lineal con el orden q . Esta elección corresponde al paradigma de los procesos multifractales [62]. En este caso se tiene [62]:

$$\mathbb{E}[|\mathcal{I}_X(a, \cdot)|^q] \sim |a|^{\zeta(q)}, \quad (3.4)$$

en donde se puede ver que el comportamiento auto-similar es un caso particular de este paradigma que corresponde a la elección $\zeta(q) = qH$. La dependencia no lineal entre los decaimientos de los momentos está relacionada con la naturaleza multiplicativa involucrada en la construcción de estos procesos [62, 135].

A pesar del mayor nivel de generalidad que proveen, los procesos multifractales siguen manifestando una invarianza a la escala en forma de leyes de potencia. Se logra un segundo nivel de generalización al permitir que este decaimiento tome otras formas. Esta situación corresponde al paradigma de las *cascadas infinitamente divisibles*, en donde se tiene [62]:

$$\mathbb{E}[|\mathcal{I}_X(a, \cdot)|^q] \sim \exp\left(\eta(a)H(q)\right). \quad (3.5)$$

Se puede ver que el paradigma de los procesos multifractales es un caso particular, que corresponde a la elección $\eta(a) = \log(a)$. Las cascadas infinitamente divisibles fueron introducidas originalmente en [39, 40] en el estudio de los fenómenos de turbulencia, y estudiadas posteriormente en [30, 43–45]. Sin embargo, este tipo de procesos no es habitualmente utilizado en la práctica debido a la dificultad de desarrollar un algoritmo para su síntesis numérica.

3.2.4. Relación entre las clasificaciones

El caso paradigmático de un proceso H -sssi es el movimiento browniano fraccionario (cf. sección 3.3 para su definición). Este proceso es además monofractal, de acuerdo con la definición 3.2.3, y tiene una función de escalamiento lineal $\zeta(q) = qH$. Por lo tanto, un único parámetro H controla las propiedades de escalamiento, regularidad local y autosimilaridad del proceso.

Debido a que el movimiento browniano fraccionario es considerado el proceso de referencia para modelar la invarianza a la escala [154], habitualmente se identifica en forma heurística que las tres propiedades son equivalentes: H -sssi, monofractalidad y función de escalamiento lineal. Un contraejemplo de esta situación es el proceso α -estable de Lévy [154], que es H -sssi pero multifractal en el sentido de la definición 3.2.4. Además, su función de escalamiento es lineal a tramos.

Habitualmente, la distinción entre un proceso multifractal y uno monofractal se hace en términos del segundo log-cumulante c_2 . El caso $c_2 = 0$ habitualmente se consideró una característica de procesos monofractales y con una función de escalamiento lineal [149, 156]. Sin embargo, como c_2 sólo mide el comportamiento de $\zeta(q)$ en una vecindad de $q = 0$, este coeficiente no puede medir desviaciones de la monofractalidad en las que la función de escalamiento es lineal a tramos [154]. Por lo tanto, las conclusiones que se extraigan a partir del estudio de c_2 deberían realizarse con cautela. Además, estas reflexiones resaltan la importancia de realizar el análisis multifractal con un rango amplio de valores de q .

En general, se pueden realizar las siguientes afirmaciones sobre un proceso X con propiedades de escalamiento:

1. Si es monofractal entonces su función de escalamiento es lineal para todo q . Esto es una consecuencia de la definición de ζ como la transformación de Legendre de D .
2. Si la función de escalamiento es no lineal, entonces el proceso es multifractal.
3. Si X es H -sssi, su función de escalamiento es lineal por tramos y necesariamente se comporta como $\zeta(q) = qH$ en una vecindad de $q = 0$ [154].

3.3. Movimiento browniano fraccionario

El movimiento browniano fraccionario $B_H(x)$ (en inglés, *fractional Brownian motion*, fBm) es el proceso de referencia para el análisis de la invarianza a la escala. Fue estudiado originalmente por Kolmogorov en el estudio de la turbulencia [98], y reintroducido por Mandelbrot en [112]. Es el único proceso gaussiano invariante a la escala y con incrementos estacionarios [62].

Está definido mediante la integración fraccionaria de un ruido gaussiano $dB(s)$ [154]:

$$B_H(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, u) dB(u), \quad \text{con} \quad f(x, u) = (x - u)_+^{H-1/2} - (-u)_+^{H-1/2}, \quad (3.6)$$

en donde $(x)_+$ denota al máximo entre x y 0. Su único parámetro es $H \in [0, 1]$. En [89] se demuestra que la función de escalamiento es estrictamente lineal:

$$\zeta(q) = qH, \quad \forall q \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

y que su espectro multifractal consiste en un único punto:

$$D(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = H, \\ -\infty & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Por lo tanto, sus log-cumulantes satisfacen:

$$c_1 = H, \quad (3.9)$$

$$c_m = 0, \quad \forall m \geq 2. \quad (3.10)$$

El proceso formado por los incrementos de B_H se conoce como ruido Gaussiano fraccionario (en inglés, *fractional Gaussian noise*, fGn). Tiene la misma estructura multifractal que el fBm, pero con exponente $h = H - 1$. Por lo tanto, este proceso no está localmente acotado y su regularidad local es negativa.

3.4. Proceso α -estable de Lévy

El proceso α -estable de Lévy, L_α , es construido a partir de una medida simétrica y α -estable $dM(u)$ de la siguiente forma [131]:

$$L_\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, u) dM(u), \quad \text{con} \quad f(x, u) = \mathbb{1}(x - u > 0) - \mathbb{1}(-u > 0), \quad (3.11)$$

en donde $1(A)$ es la función característica del conjunto A . Su único parámetro es $\alpha \in [0, 2]$ y controla todas sus propiedades multifractales, como fue estudiado en detalle en [80]. Además, L_α es H -sssi con parámetro de autosimilaridad $H = \frac{1}{\alpha}$.

La función de escalamiento está dada por [56, 80]:

$$\zeta(q) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}q & \text{si } -\infty < q \leq \alpha, \\ 1 & \text{si } q > \alpha \end{cases} \quad (3.12)$$

y su espectro multifractal es [56, 80]:

$$D(h) = \begin{cases} h\alpha & \text{si } 0 \leq h \leq \frac{1}{\alpha}, \\ -\infty & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.13)$$

Por lo tanto, sus log-cumulantes satisfacen:

$$c_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad (3.14)$$

$$c_m = 0, \quad \forall m \geq 2. \quad (3.15)$$

Cabe destacar que los coeficientes c_m son nulos para $m \geq 2$ a pesar de que la función $\zeta(q)$ no es lineal en todo su dominio. Esto se debe a que los log-cumulantes son los coeficientes de la expansión polinomial de $\zeta(q)$ alrededor de $q = 0$. Por lo tanto, el hecho de que $c_2 = 0$ no implica que el proceso sea monofractal. De hecho, como indica la ec. (3.13), su espectro tiene un soporte amplio: $\text{supp}(D) = [0, \frac{1}{\alpha}]$. Para más detalles cf. [154].

Es interesante notar que el proceso de Lévy fue el primer proceso multifractal “natural” en ser identificado [80, 126]. El término “natural” significa que el escalamiento no es inyectado en el proceso mediante la construcción multiplicativa (como en el caso de las cascadas en las secciones 3.6, 3.7 y 3.9) [127]. Sin embargo, a pesar de que está soportado por un rango no trivial de exponentes de Hölder, su espectro es degenerado en el sentido de que es lineal [126].

3.5. Movimiento aleatorio multifractal

El movimiento aleatorio multifractal (en inglés, *multifractal random walk*, MRW) fue introducido en [29] como una variante multifractal del fBm. Está definido como:

$$M(k) = \sum_k G_H(k) \exp(\omega_\lambda(k)), \quad (3.16)$$

en donde G_H consiste en los incrementos de fBm con parámetro $H > \frac{1}{2}$, y ω_λ es un proceso gaussiano, independiente de G_H , con la siguiente covarianza estructura de covarianza [29]:

$$\text{cov}(\omega_\lambda(k_1), \omega_\lambda(k_2)) = \begin{cases} \lambda^2 \log \frac{L}{|k_1 - k_2| + 1} & \text{si } |k_1 - k_2| \leq L, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Esta estructura de covarianza fue escogida arbitrariamente para imitar el decaimiento logarítmico de la covarianza observado en las cascadas multifractales utilizadas para modelar series financieras [25].

Su función de escalamiento es [29]:

$$\zeta(q) = \left(H + \frac{\lambda^2}{2} \right) q - \frac{\lambda^2}{2} q^2, \quad (3.18)$$

y su espectro multifractal es:

$$D(h) = 1 - \frac{\left(h - H - \frac{\lambda^2}{2} \right)^2}{2\lambda^2}. \quad (3.19)$$

Los log-cumulantes se obtienen a partir de la ec. (3.18) y son:

$$c_1 = H + \frac{\lambda^2}{2}, \quad (3.20)$$

$$c_2 = -\lambda^2 \quad (3.21)$$

$$c_m = 0, \quad \forall m \geq 3. \quad (3.22)$$

3.6. Cascadas canónicas de Mandelbrot

Las cascadas multiplicativas fueron originalmente introducidas en hidrodinámica como modelos de turbulencia, y luego fueron reintroducidas por Mandelbrot y unificadas en el paradigma de las martingalas multiplicativas [110]. En este trabajo nos referiremos a ellas como cascadas canónicas de Mandelbrot (en inglés, *Canonical Mandelbrot Cascades*, CMC).

Estas cascadas se definen mediante un algoritmo iterativo de tipo *dividir y multiplicar* en el intervalo [110, 126, 127]. Ejemplificaremos la construcción para el caso de una cascada binaria. Se comienza ubicando una masa unitaria en el intervalo $[0, 1]$. A continuación, el intervalo se subdivide en los subintervalos $[0, 1/2)$ y $[1/2, 1]$; si la cascada fuera n -aria en lugar de binaria, la subdivisión se haría en n intervalos. A continuación, la masa de cada subintervalo es multiplicada por las variables aleatorias iid $W_{1,1}$ y $W_{1,2}$, respectivamente. Luego, este proceso es repetido recursivamente en cada uno de los subintervalos.

Sean $W_{j,k}$, $k = 1, \dots, 2^j$, los multiplicadores involucrados en la j -ésima iteración. Nótese también que cada uno de los subintervalos en la construcción binaria es un intervalo diádico $\lambda = \lambda_{j,k}$; recuérdese de la Sec. 2.5.1.1 que cada punto $x \in [0, 1]$ está incluido en un único intervalo diádico de ancho 2^j . Finalmente, sea J el número de iteraciones empleadas en el procedimiento constructivo. Entonces, la cascada canónica de Mandelbrot $Q_J(x)$, en el caso binario, se define como:

$$Q_J(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ k: x \in \lambda_{j,k}}}^J W_{j,k}. \quad (3.23)$$

Los multiplicadores $W_{j,k}$ deben ser estrictamente positivos. Para garantizar la convergencia de la cascada, deben estar normalizados de forma tal que $\mathbb{E}[W] = 1$.

La función de escalamiento $\zeta(q)$ está dada por [126, 127] :

$$\zeta(q) = -\log_2 \mathbb{E}[W^q]. \quad (3.24)$$

Es decir, la distribución de los multiplicadores controla la función de escalamiento y, por lo tanto, las propiedades multifractales de la cascada. A continuación, indicaremos las propiedades multifractales de las CMC habitualmente utilizadas en la práctica. Las expresiones fueron obtenidas por el autor.

3.6.1. CMC log-normal

Los multiplicadores se eligen como $W = 2^{-X}$, en donde X sigue una distribución normal con media μ y varianza σ^2 . Se utiliza esta definición no convencional en base 2 debido al logaritmo que debe ser tomado al aplicar la ec. (3.24). La restricción $\mathbb{E}[W] = 1$ hace que los parámetros μ y σ^2 no se puedan escoger independientemente, sino que deban satisfacer $\sigma^2 = 2\mu/\log(2)$. A partir de la ec. (3.24), los atributos multifractales son:

$$\zeta(q) = \mu q(1 - q), \quad (3.25)$$

$$D(h) = 1 - \frac{(h - \mu)^2}{4\mu}, \quad (3.26)$$

$$c_1 = \mu, \quad (3.27)$$

$$c_2 = -2\mu \quad (3.28)$$

$$c_m = 0, \quad \forall m \geq 3. \quad (3.29)$$

Como se puede ver, esta cascada es un modelo sencillo en el que las propiedades multifractales están controladas por un único parámetro μ , y en el que $c_m = 0 \forall m \geq 3$.

3.6.2. CMC log-Poisson

En este caso, los multiplicadores se eligen como $W = 2^\gamma \exp(\log(\beta)K)$, en donde K sigue una distribución de Poisson con parámetro λ . La restricción $\mathbb{E}[W] = 1$ hace que el parámetro λ no se pueda escoger libremente, sino que tenga que satisfacer $\lambda = -\gamma \log(2)/(\beta - 1)$. A partir de la ec. (3.24), los atributos multifractales son:

$$\zeta(q) = -\gamma q + \frac{\gamma(\beta^q - 1)}{\beta - 1}, \quad (3.30)$$

$$D(h) = 1 + \frac{\gamma}{\beta - 1} + \frac{h + \gamma}{\log \beta} \left[\log \left(\frac{(h + \gamma)(\beta - 1)}{\gamma \log \beta} \right) - 1 \right], \quad (3.31)$$

$$c_1 = -\gamma + \frac{\gamma \log \beta}{\beta - 1}, \quad (3.32)$$

$$c_m = \frac{\gamma(\log \beta)^m}{\beta - 1}, \quad \forall m \geq 2. \quad (3.33)$$

3.7. Cascadas de Poisson compuestas

Las cascadas de Poisson compuestas (en inglés, *compound Poisson cascades*, CPC) son un caso particular de cascadas infinitamente divisibles. Fueron introducidas originalmente en [34], y luego estudiadas extensivamente en [30, 31, 43–45]. Su

construcción es similar a las de CMC, en el sentido en que se basan en la ubicación de multiplicadores aleatorios en el plano tiempo-escala, y en la posterior multiplicación de todos aquellos que estén una vecindad del punto x . La diferencia radica en que en las CPC los puntos (x_i, a_i) en los que se ubican los multiplicadores son a su vez variables aleatorias provenientes de un proceso planar de Poisson con medida de control $dm(x, a)$. Esta geometría poissoniana permite la multiplicación continua y, por lo tanto, la obtención de leyes de escalamiento arbitrarias [44]. Los multiplicadores se escogen como variables aleatorias iid y positivas, e independientes del proceso de Poisson. Entonces, la cascada $Q(x)$ se genera mediante el producto de todos los multiplicadores incluidos en un *cono de influencia* $\mathcal{C}_a(x)$ del punto x :

$$Q_a(x) = \exp[(1 - \mathbb{E}[W])m(\mathcal{C}_a(x))] \prod_{\mathcal{C}_a(x)} W_i, \quad (3.34)$$

en donde

$$m(\mathcal{C}_a(x)) = \int_{\mathcal{C}_a(x)} dm(x, a). \quad (3.35)$$

El factor de normalización delante del producto en la ec. (3.34) hace que el proceso tenga media unitaria [43]. El proceso $Q_a(x)$ definido de esta forma es estacionario [43].

Si se define un cono de influencia triangular como [43, 44, 111]:

$$\mathcal{C}_a(x) = \left\{ (x', a') : a' > a \wedge |x - x'| < \frac{a'}{2} \right\}, \quad (3.36)$$

y una medida de control separable como [43, 44, 111]:

$$dm(x, a) = \begin{cases} \frac{c}{a^2} da dx, & \text{si } 0 < a \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.37)$$

se obtiene una CPC en la que el decaimiento de los momentos con las escalas toma la forma de una ley de potencias [43, 44, 111]:

$$\mathbb{E}[(Q_a(x))^q] \sim a^{\zeta(q)}. \quad (3.38)$$

La función de escalamiento está dada por [43, 44, 111]:

$$\zeta(q) = c(1 - \mathbb{E}[W^q] - q(1 - \mathbb{E}[W])), \quad (3.39)$$

en donde c es una constante arbitraria. Es decir, las propiedades de invarianza a la escala están controladas únicamente por la distribución de los multiplicadores, mientras que el proceso de Poisson está involucrado sólo en la determinación de la forma en que se produce el escalamiento.

A continuación, analizamos las propiedades multifractales de las versiones de esta cascada implementadas en el software utilizado.

3.7.1. CPC log-normal

En este caso, los multiplicadores se eligen como $W = e^X$, en donde X sigue una distribución normal con media μ y varianza σ^2 . A partir de la ec. (3.39), la función de escalamiento es:

$$\zeta(q) = c \left[1 - \exp\left(\mu q + \frac{\sigma^2}{2} q^2\right) - q + q \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \right]. \quad (3.40)$$

Mediante la aplicación de la transformación de Legendre se obtiene el espectro multifractal, en forma paramétrica:

$$h(q) = c \left[\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) - 1 - (\mu + \sigma^2 q) \exp\left(\mu q + \frac{\sigma^2}{2} q^2\right) \right], \quad (3.41)$$

$$D(q) = 1 - c + (1 - \mu q - \sigma^2 q) \exp\left(\mu q + \frac{\sigma^2}{2} q^2\right). \quad (3.42)$$

$$(3.43)$$

Los log-cumulantes son:

$$c_1 = -c \left[\mu + 1 - \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \right], \quad (3.44)$$

$$c_2 = -c(\sigma^2 + \mu^2), \quad (3.45)$$

$$c_3 = -c(3\mu\sigma^2 + \mu^3), \quad (3.46)$$

$$c_4 = -c \left(\frac{5}{2} \sigma^4 + 6\mu^2 \sigma^2 + \mu^4 \right). \quad (3.47)$$

El espectro multifractal se presenta en forma paramétrica debido a la imposibilidad de invertir la ec. (3.41). Los log-cumulantes para órdenes mayores a $m = 4$ son no nulos, pero no son reportados aquí.

3.7.2. CPC log-Poisson

En este caso, los multiplicadores se eligen como $W = 2^\gamma \exp(\log(\beta)K)$, en donde K sigue una distribución de Poisson con parámetro λ . A partir de la ec. (3.39), la función de escalamiento es:

$$\zeta(q) = 2^\gamma e^{\lambda(\beta-1)} q - 2^{\gamma q} e^{\lambda(\beta^q-1)} - q + 1. \quad (3.48)$$

Mediante la aplicación de la transformación de Legendre se obtiene el espectro multifractal, en forma paramétrica:

$$h(q) = 2^\gamma e^{\lambda(\beta-1)} - \log(2) \gamma 2^{\gamma q} e^{\lambda(\beta^q-1)} - \log(\beta) \lambda 2^{\gamma q} \beta^q e^{\lambda(\beta^q-1)} - 1, \quad (3.49)$$

$$D(q) = -2^{\gamma q H} e^{\lambda(\beta^{qH}-1)} \left(\gamma \log(2) q H + \beta^{qH} \lambda \log(\beta) q H - 1 \right). \quad (3.50)$$

$$(3.51)$$

Los log-cumulantes son:

$$c_1 = 2^\gamma e^{\lambda(\beta-1)} - \log(2)\gamma - \log(\beta)\lambda - 1, \quad (3.52)$$

$$c_2 = -\log(2)^2 \gamma^2 - \log(4) \log(\beta) \gamma \lambda - \log(\beta)^2 \lambda^2 - \log(\beta)^2 \lambda, \quad (3.53)$$

$$c_3 = -\log(2)^3 \gamma^3 - 3 \log\left(\beta^{\log(2)^2}\right) \gamma^2 \lambda - \log(8) \log(\beta)^2 \gamma \lambda (1 + \lambda) - \lambda^3 \log(\beta)^3 - 3\lambda^2 \log(\beta)^3 - \lambda \log(\beta)^3, \quad (3.54)$$

$$c_4 = -\lambda^4 \log(\beta)^4 - \lambda^3 \left(6 \log(\beta)^4 + 4\gamma \log(2) \log(\beta)^3\right) - \lambda^2 \left(6 \log(2)^2 \gamma^2 \log(\beta)^2 + 12 \log(2) \gamma \log(\beta)^3 + 7 \log(\beta)^4\right) - \lambda \left(4 \log(2)^3 \gamma^3 \log(\beta) + 6 \log(2)^2 \gamma^2 \log(\beta)^2 + 4 \log(2) \gamma \log(\beta)^3 + \log(\beta)^4\right) - \gamma^4 \log(2)^4. \quad (3.55)$$

3.8. Procesos auto-similares en tiempo multifractal

Las cascadas aleatorias tratadas anteriormente (cf. secciones 3.6 y 3.7) sólo permiten la modelización de *medidas* con propiedades multifractales. Dichas cascadas tienen la propiedad distintiva de ser positivas. Esta característica es deseada en ciertos dominios de aplicación. Por ejemplo, los campos de disipación de energía en el flujo turbulento [110] o el flujo de datos en redes TCP/IP [67] fueron exitosamente modelados con cascadas de este tipo.

Sin embargo, en ciertos casos se desea modelar cantidades que deben tomar valores tanto positivos como negativos. Siguiendo en el contexto de la turbulencia, la modelización de cantidades directamente observables como los campos de velocidad o de temperatura requieren el uso de funciones en lugar de medidas [22]. Este tipo de aplicaciones requieren la creación de *funciones* multifractales.

Una primera idea es utilizar las funciones de distribución obtenidas al integrar las medidas. Sea Q una CMC o CPC. Su función de distribución es [43, 126]:

$$A(x) = \int_{-\infty}^x Q(s) ds. \quad (3.56)$$

La medida Q se suele denominar *ruido*, mientras que la función de distribución A se suele llamar *movimiento*.

Mediante este procedimiento se obtiene una función con las mismas propiedades multifractales que la medida (salvo un desplazamiento del espectro multifractal, cf. Sec. 2.8). Sin embargo, este tipo de funciones siguen siendo limitadas y poco útiles en la práctica. Principalmente, son estrictamente crecientes (sus incrementos son positivos).

Para obtener un proceso más general, se puede pensar en reemplazar la integral determinística de la ec. (3.56) por una integral estocástica, usando un proceso H -sssi como medida de integración [43–45]:

$$V(x) = \int_0^x \sqrt{Q(s)} dB_H(s), \quad (3.57)$$

en donde B_H es un proceso H -sssi. La opción más difundida es utilizar un movimiento fraccionario browniano [43, 126]. Por lo tanto, en lo que resta de este trabajo supondremos que B_H es fBm con parámetro H .

Hay que destacar que la formulación brindada por la ec. (3.57) es equivalente a la realización de un *warp* temporal sobre B_H [43, 126, 127]:

$$V_H(x) = B_H(A(x)). \quad (3.58)$$

Por esta razón, el proceso V_H es llamado *movimiento fraccionario browniano en tiempo multifractal* (CPC-fBm-MF) [126], o *movimiento de cascada* [45].

Este tipo de procesos tienen propiedades interesantes. En primer lugar, sus distribuciones marginales están controlados por la distribución del proceso B . En el caso en que B_H es fBm, las distribuciones marginales son gaussianas. En segundo lugar, el proceso V_H hereda las propiedades multifractales de A (y por lo tanto de la cascada Q). Sean $\zeta_Q(q)$ y $\zeta_V(q)$ las funciones de escalamiento de la cascada Q y del fBm en tiempo multifractal V_H , respectivamente. En [44, 45, 126, 127] se demuestra que:

$$\zeta_V(q) = \zeta_Q(qH) + qH. \quad (3.59)$$

El espectro multifractal de V_H se obtiene mediante la transformación de Legendre de $\zeta_V(q)$. Los log-cumulantes de V_H se obtienen derivando la ec. (3.59) y son

$$c_1^V = H(1 + c_1^Q), \quad (3.60)$$

$$c_m^V = H^m c_m^Q, \quad \forall m \geq 2. \quad (3.61)$$

3.8.1. CPC-fBm-MF log-normal

En esta sección desarrollaremos los atributos multifractales del proceso que se obtiene subordinando fBm con parámetro H a una CPC con distribución log-normal. A partir de las ecs. (3.59) y (3.40), la función de escalamiento es:

$$\zeta(q) = c \left[1 - \exp\left(\mu qH + \frac{\sigma^2}{2}(qH)^2\right) - qH + qH \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \right] + qH. \quad (3.62)$$

El espectro multifractal es:

$$h(q) = H + cH \left[\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) - 1 - (\mu + \sigma^2 qH) \exp\left(\mu qH + \frac{\sigma^2}{2} H^2 q^2\right) \right], \quad (3.63)$$

$$D(q) = 1 - c + c(1 - \mu qH - \sigma^2 H^2 q^2) \exp\left(\mu qH + \frac{\sigma^2}{2}(qH)^2\right). \quad (3.64)$$

Los log-cumulantes son:

$$c_1 = H \left\{ 1 - c \left[\mu + 1 - \exp \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right] \right\}, \quad (3.65)$$

$$c_2 = -H^2 c(\sigma^2 + \mu^2), \quad (3.66)$$

$$c_3 = -H^3 c(3\mu\sigma^2 + \mu^3), \quad (3.67)$$

$$c_4 = -H^4 c \left(\frac{5}{2}\sigma^4 + 6\mu^2\sigma^2 + \mu^4 \right). \quad (3.68)$$

3.8.2. CPC-fBm-MF log-Poisson

En esta sección desarrollaremos los atributos multifractales del proceso que se obtiene subordinando fBm con parámetro H a una CPC con distribución log-Poisson. A partir de las ecs. (3.59) y (3.48), la función de escalamiento es:

$$\zeta(q) = 2^\gamma e^{\lambda(\beta-1)} q^H - 2^{\gamma q H} e^{\lambda(\beta^{qH}-1)} + 1. \quad (3.69)$$

El espectro multifractal y los log-cumulantes son:

$$h(q) = H \left(2^\gamma e^{\lambda(\beta-1)} - \log(2)\gamma 2^{\gamma q H} e^{\lambda(\beta^{qH}-1)} - \log(\beta)\lambda 2^{\gamma q H} \beta^{qH} e^{\lambda(\beta^{qH}-1)} \right), \quad (3.70)$$

$$D(q) = -2^{\gamma q} e^{\lambda(\beta^q-1)} \left(\gamma \log(2)q + \beta^q \lambda \log(\beta)q - 1 \right). \quad (3.71)$$

$$c_1 = H \left[2^\gamma e^{\lambda(\beta-1)} - \log(2)\gamma - \log(\beta)\lambda \right], \quad (3.72)$$

$$c_2 = H^2 \left[-\log(2)^2 \gamma^2 - \log(4) \log(\beta) \gamma \lambda - \log(\beta)^2 \lambda^2 - \log(\beta)^2 \lambda \right], \quad (3.73)$$

$$c_3 = H^3 \left[-\log(2)^3 \gamma^3 - 3 \log(\beta^{\log(2)^2}) \gamma^2 \lambda - \log(8) \log(\beta)^2 \gamma \lambda (1 + \lambda) - \lambda^3 \log(\beta)^3 - 3\lambda^2 \log(\beta)^3 - \lambda \log(\beta)^3 \right], \quad (3.74)$$

$$c_4 = H^4 \left[-\lambda^4 \log(\beta)^4 - \lambda^3 \left(6 \log(\beta)^4 + 4\gamma \log(2) \log(\beta)^3 \right) - \lambda^2 \left(6 \log(2)^2 \gamma^2 \log(\beta)^2 + 12 \log(2) \gamma \log(\beta)^3 + 7 \log(\beta)^4 \right) - \lambda \left(4 \log(2)^3 \gamma^3 \log(\beta) + 6 \log(2)^2 \gamma^2 \log(\beta)^2 + 4 \log(2) \gamma \log(\beta)^3 + \log(\beta)^4 \right) - \gamma^4 \log(2)^4 \right]. \quad (3.75)$$

3.9. Cascadas de onditas aleatorias

Las cascadas aleatorias tratadas anteriormente (Sec. 3.6 y 3.7) sólo permiten la creación de *medidas* con propiedades multifractales. Como se mencionó en la

Sec. 3.8, para obtener funciones a partir de estas medidas se las debe integrar o se debe realizar un *warping* de un proceso H -sssi con ellas. Por el contrario, las cascadas de onditas aleatorias (en inglés, *random wavelet cascades*, RWC), introducidas en [22], permiten crear funciones multifractales en forma directa.

La construcción de las RWC está basada en el procedimiento de las cascadas de Mandelbrot. En lugar de redistribuir una medida en subintervalos, su construcción se basa en la determinación de los coeficientes ondita mediante un proceso multiplicativo con multiplicadores aleatorios [22]. A partir de los coeficientes, se puede obtener una función multifractal mediante una transformación ondita inversa.

El proceso de construcción de las RWC, descrito en [22], es como sigue. El coeficiente de aproximación d_ϕ se escoge como una variable aleatoria arbitraria. Sea 2^J la mayor escala en la que se construye la realización. Los coeficientes $d_X(j, k)$ son definidos en forma recursiva a partir de los coeficientes en la octava más tosca $j + 1$ según la siguiente relación [22]:

$$\begin{cases} d_X(J, 1) = 1, \\ d_X(j, 2k) = W_{j,k}^l d_X(j + 1, k), \\ d_X(j, 2k + 1) = W_{j,k}^r d_X(j + 1, k), \end{cases} \quad (3.76)$$

para $1 \leq j < J$ y $1 \leq k \leq 2^{J-j}$. Los pesos $W_{j,k}^l$ y $W_{j,k}^r$ son variables aleatorias iid positivas; por esta razón, utilizaremos el nombre genérico W para referirnos a esas variables.

La función multifractal X correspondiente a la RWC se obtiene mediante la IDWT de los coeficientes dados por la ec. (3.76). En [22] se demuestra la convergencia de dicha transformación. Las propiedades de X están completamente determinadas por la distribución de W , así como por la regularidad de la ondita ψ utilizada en la síntesis. En particular, la función de escalamiento depende únicamente de la distribución de los multiplicadores [22]:

$$\zeta(q) = -\log_2 \mathbb{E}[|W|^q]. \quad (3.77)$$

Debido a que los multiplicadores W son positivos, los coeficientes ondita también lo son. Sin embargo, desde el punto de vista de la modelización es deseable que los coeficientes ondita tengan signos tanto positivos como negativos. Como la definición de la función de escalamiento depende únicamente del valor absoluto de los coeficientes ondita (cf. Sec. 2.5.4), en la práctica se suele asignar a cada coeficiente un signo en forma aleatoria [100].

Es importante mencionar que la forma en que la cascada es construida imprime una fuerte dependencia a los coeficientes ondita en las distintas escalas. En [22] se realiza un estudio de la covarianza entre dos coeficientes ondita de una RWC.

3.9.1. RWC con multiplicadores log-normales

Los multiplicadores se escogen como $W = 2^{-X}$, en donde X sigue una distribución normal con media μ y varianza σ^2 . A partir de la ec. (3.77), la función de escalamiento, espectro de singularidades y log-cumulantes son:

$$\zeta(q) = \mu q - \frac{\sigma^2 \log(2)}{2} q^2. \quad (3.78)$$

Aplicando la transformación de Legendre se obtiene el espectro multifractal:

$$D(h) = 1 - \frac{(h - \mu)^2}{2 \log(2) \sigma^2}. \quad (3.79)$$

Los log-cumulantes son:

$$c_1 = \mu, \quad (3.80)$$

$$c_2 = \sigma^2 \log(2), \quad (3.81)$$

$$c_m = 0, \quad m \geq 3. \quad (3.82)$$

3.9.2. RWC con multiplicadores log-Poisson

Los multiplicadores se eligen como $W = 2^\gamma \exp(\log(\beta)K)$, en donde K sigue una distribución de Poisson con parámetro λ . A partir de la ec. (3.77), la función de escalamiento es:

$$\zeta(q) = \gamma q + \frac{\lambda(\beta^q - 1)}{\log(2)}. \quad (3.83)$$

Aplicando la transformación de Legendre se obtiene el espectro multifractal:

$$D(h) = 1 - \frac{\lambda}{\log(2)} + \left(\frac{h}{\log(\beta)} - \frac{\gamma\lambda}{\log(2)} \right) \left(\log \left(\frac{h}{\lambda \log_2(\beta)} - \gamma \right) - 1 \right). \quad (3.84)$$

Los log-cumulants son:

$$c_1 = \gamma + \frac{\lambda \log(\beta)}{\log(2)}, \quad (3.85)$$

$$c_m = \frac{\lambda \log(\beta)^m}{\log(2)}, \quad m \geq 3. \quad (3.86)$$

3.10. Cascadas de onditas determinísticas

Las cascadas de onditas determinísticas (DWC) se obtienen en forma similar a las RWC, pero reemplazando los multiplicadores aleatorios W por multiplicadores determinísticos w_0 y w_1 , con $0 < w_0 < w_1$. Sea 2^J la mayor escala en la que se construye la realización. Los coeficientes $d_X(j, k)$ son definidos en forma recursiva a partir de los coeficientes en la octava más tosca $j + 1$ según la siguiente relación :

$$\begin{cases} d_X(J, 1) = 1, \\ d_X(j, 2k) = w_0 d_X(j + 1, k), \\ d_X(j, 2k + 1) = w_1 d_X(j + 1, k). \end{cases} \quad (3.87)$$

La DWC se obtiene realizando una transformación ondita inversa con los coeficientes dados por la ec. (3.87). Claramente, la DWC es acotada si $w_1 < 1$.

Las propiedades multifractales pueden ser obtenidas en forma sencilla a partir de la definición de sus coeficientes. En primer lugar, hay que notar que en cada octava j hay 2^{J-j} coeficientes que toman los valores:

$$d_X(j, k) \in \{w_0^n w_1^{J-j-n}, n = 0, \dots, J-j\}. \quad (3.88)$$

Analizando la estructura en árbol de los coeficientes ondita, se nota que la cantidad de coeficientes que toman el valor $w_0^n w_1^{J-j-n}$ está dada por:

$$N_j = \#\{k : d_X(j, k) = w_0^n w_1^{J-j-n}\} = \binom{J-j}{n}, \quad n = 0, \dots, j. \quad (3.89)$$

Entonces, las funciones de estructura se calculan mediante la aplicación del teorema binomial:

$$S_d(q, j) = 2^{j-J} \sum_{k=1}^{2^{j-J}} |d_X(j, k)|^q = 2^{j-J} \sum_{n=0}^{J-j} \binom{J-j}{n} w_0^n w_1^{J-j-n} = \left(\frac{w_0^q + w_1^q}{2}\right)^j. \quad (3.90)$$

Ya que $S_d(q, j) \sim 2^{j\zeta(q)}$, la función de escalamiento está dada por:

$$\zeta(q) = 1 - \log_2(w_0^q + w_1^q). \quad (3.91)$$

El espectro multifractal se obtiene, sólo en forma paramétrica, mediante la aplicación de la transformación de Legendre en la ec. (3.91):

$$h(q) = -\frac{\log_2(w_0)w_0^q + \log_2(w_1)w_1^q}{(w_0^q + w_1^q)}, \quad (3.92)$$

$$D(q) = \log_2(w_0^q + w_1^q) - q \frac{w_0^q \log_2(w_0) + w_1^q \log_2(w_1)}{w_0^q + w_1^q}. \quad (3.93)$$

Los primeros cuatro log-cumulantes, obtenidos a partir de la ec. (3.91), son:

$$c_1 = -\frac{\log_2(w_0) + \log_2(w_1)}{2}, \quad (3.94)$$

$$c_2 = -\frac{(\log_2(w_0) - \log_2(w_1))^2}{4}, \quad (3.95)$$

$$c_3 = 0, \quad (3.96)$$

$$c_4 = \frac{(\log_2(w_0) - \log_2(w_1))^4}{8}. \quad (3.97)$$

3.11. Series de onditas aleatorias

3.11.1. Definición

Las RWC son atractivas ya que permiten especificar las propiedades multifractales de una función directamente a partir de sus coeficientes ondita. Sin embargo,

la dependencia estadística entre los coeficientes, introducida por el proceso de construcción basado en una cascada multiplicativa, es a menudo demasiado restrictiva. Por tal razón, Aubry y Jaffard estudiaron en [27] los casos en los que se puede sintetizar una función multifractal especificando la pdf de sus coeficientes ondita, pero con el requerimiento adicional de que dichos coeficientes sean independientes entre las escalas. Las funciones así obtenidas se conocen como series de onditas aleatorias (en inglés, *random wavelet series*, RWS).

Es importante mencionar que se pueden sintetizar funciones con los mismos histogramas de coeficientes ondita en cada escala, pero que tengan espectros multifractales distintos [79]. Es decir, no sólo importa el valor que tome un coeficiente, sino que también es importante su ubicación y la relación que tenga con los coeficientes ondita de otras escalas en la misma posición temporal.

Las RWS se obtienen, entonces, especificando la pdf de los coeficientes ondita en cada escala y asignando a cada coeficiente una variable aleatoria independiente con dicha distribución. Formalmente, una función X es una RWS si sus coeficientes ondita $d_X(j, k)$ satisfacen [27, 28]:

1. Para todas las escalas j , los coeficientes $d_X(j, k)$, $k = 1, \dots, 2^j$, son variables aleatorias iid. La distribución de probabilidad de $\log_2(|d_X(j, k)|)/j$, denotada con ρ_j , está definida en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
2. Los coeficientes $d_X(j, k)$, $j \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, 2^j$, son independientes.
3. Existe $\xi > 0$ tal que

$$\rho(\gamma) = \inf_{\epsilon > 0} \limsup_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log_2(2^{-j} \rho_j([\gamma - \epsilon, \gamma + \epsilon]))}{-j} \quad (3.98)$$

es estrictamente negativo para $\gamma < \xi$.

La tercera condición es necesaria para asegurar que la serie sea convergente [28]. La cantidad $\rho(\gamma)$ se conoce como espectro de grandes desviaciones (en inglés, *large deviation spectrum* LDS).

El espectro multifractal de la RWS depende de las distribuciones de los coeficientes ondita [27, 28]. El soporte del espectro, $\text{supp}(D) = [h_{min}, h_{max}]$, está dado por:

$$h_{min} = \inf \{ \gamma : \rho(\gamma) > 0 \}, \quad (3.99)$$

$$h_{max} = \left(\sup_{\gamma > 0} \frac{\rho(\gamma)}{\gamma} \right)^{-1}. \quad (3.100)$$

$$(3.101)$$

El espectro multifractal es:

$$D(h) = \begin{cases} h \sup_{\gamma \in (0, h]} \frac{\rho(\gamma)}{\gamma} & \text{si } h \in [h_{min}, h_{max}], \\ -\infty & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.102)$$

3.11.2. RWS invariantes a la escala

Esta definición permite sintetizar un proceso multifractal con una distribución compleja de singularidades controlada por la ec. (3.102). Sin embargo, esto no significa que la RWS sintetizada tenga propiedades de invarianza a la escala. Es decir, el formalismo multifractal no se cumple necesariamente en una RWS. Para que el proceso muestre invarianza a la escala, las distribuciones ρ_j no pueden ser escogidas en forma arbitraria en cada escala, sino que se deben imponer restricciones adicionales que controlen la forma en que se relacionan para distintos j .

Para lograr este efecto, se debe utilizar un *propagador* $G_{j,j'}$ que controle la deformación de las distribuciones ρ_j en diferentes escalas:

$$\rho_j = G_{j,j'} * \rho_{j'}, \quad (3.103)$$

donde el propagador $G_{j,j'}$ se obtiene como:

$$G_{j,j'} = G_0^{*(j'-j)}, \quad (3.104)$$

en donde la notación f^{*n} significa la convolución de f n veces consigo misma. Por lo tanto, la elección de la distribución ρ_0 y el propagador G_0 iniciales determinan completamente una RWS con propiedades multifractales y de escalamiento controladas [28, 100].

3.11.3. Singularidades oscilantes

Una propiedad importante de las RWS es el hecho de que sus realizaciones contienen singularidades oscilatorias [27] (para más detalles sobre este tipo de singularidades, cf. Sec. 5.5). Aún más, estas singularidades no están aisladas: los conjuntos de puntos en los que existe una singularidad oscilantes en una realización de RWS tienen una dimensión de Hausdorff no nula. De hecho, en [27] se define un espectro de singularidades oscilantes para este proceso. El estudio de la estimación del exponente de singularidad oscilante, así como el espectro de singularidades correspondiente, está fuera del alcance de este trabajo. Sin embargo, utilizaremos el hecho de que este proceso posea singularidades oscilantes para estudiar su efecto en el exponente p en el capítulo 5.

3.11.4. Síntesis a partir de una RWC

En la práctica, existe un método sencillo para obtener una RWS sin la necesidad de recurrir a la simulación de variables aleatorias con distribuciones dadas por la ec. (3.103). Dicho mecanismo consiste en obtener, en primer lugar los coeficientes ondita de una RWC según la ec. (3.76). A continuación, para eliminar la dependencia entre los coeficientes ondita y así cumplir con las condiciones impuestas por la definición de las RWS, los coeficientes $d_X(j, k)$ en cada escala son permutados aleatoriamente [100]. Este procedimiento destruye la dependencia entre los coeficientes en distintas escalas debido a que dicha dependencia se transmite en forma localizada en el tiempo.

Este procedimiento corresponde a la síntesis de una RWS en donde el propagador G_0 es un kernel gaussiano, y ρ_0 es la distribución que siguen los multiplicadores de la RWC [100].

3.11.5. RWS a partir de una RWC log-normal

Si la RWS se obtiene por el procedimiento descrito en la Sec. 3.11.4 a partir de una RWC con multiplicadores log-normales, el espectro de singularidades es [28, 100]:

$$D(h) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\log(2)} \frac{(h-\mu)^2}{2\sigma^2} & \text{si } h \in [h_{min}, h_c], \\ \frac{h}{h_{max}} & \text{si } h \in (h_c, h_{max}], \\ -\infty & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.105)$$

en donde $h_c = \sqrt{\mu^2 - 2 \log(2) \sigma^2}$.

3.12. Series ondita lacunares

Las series lacunares de onditas (en inglés, *lacunary wavelet series*, LWS) son un caso particular de RWS. Las LWS son construidas a partir de sus coeficientes ondita mediante un esquema sencillo controlado por sólo dos parámetros: α y η , con $\alpha, \epsilon \in \mathbb{R}$ [81]. Sea 0 la escala más tosca que será sintetizada. En cada escala 2^j , $-\infty \leq j \leq 0$, se escogen en forma aleatoria $2^{-\eta j}$ posiciones $k \in \{1, \dots, 2^{-j}\}$; a cada uno de estos coeficientes se le asigna el valor $2^{\alpha j}$, mientras que al resto de los coeficientes en dicha escala se les asigna el valor 0. Las posiciones de los coeficientes no nulos son elegidas en forma independiente para cada escala 2^j . Esta definición del proceso cumple con las condiciones de una RWS indicadas en la sección 3.11.4.

A pesar de la aparente simplicidad en su definición, las LWS son irregulares en casi todo punto. Además, su comportamiento es multifractal. El parámetro η caracteriza la lacunaridad de la serie, mientras que el parámetro α controla su regularidad. Además, al igual que las RWS, las realizaciones de una LWS contienen singularidades oscilantes. Esto será analizado con mayor detalle en el capítulo 5.

El espectro multifractal se puede obtener a partir de la ec. (3.102), válida para todas las series de onditas aleatorias. En primer lugar, notamos que los coeficientes ondita en cada escala sólo pueden tomar el valor $2^{\alpha j}$ con probabilidad $2^{(1-\eta)j}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \rho(\alpha) &= \limsup_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log_2(2^{-j} \rho_j(\alpha))}{-j} \\ &= \limsup_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log_2(2^{-\eta j})}{-j} \\ &= \eta. \end{aligned}$$

Entonces, el LDS es:

$$\rho(\gamma) = \begin{cases} \eta & \text{si } \gamma = \alpha, \\ -\infty & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.106)$$

Utilizando esta expresión en la ec. (3.102), vemos que

$$\sup_{\gamma \in (0, h]} \frac{\rho(\gamma)}{\gamma} = \begin{cases} -\infty & \text{si } h < \alpha, \\ \frac{\eta}{\alpha} & \text{si } h \geq \alpha. \end{cases}$$

Además, el extremo derecho del soporte del espectro es (ec. (3.100))

$$h_{max} = \left(\sup_{\gamma > 0} \frac{\rho(\gamma)}{\gamma} \right)^{-1} = \frac{\alpha}{\eta}.$$

Finalmente, el espectro multifractal de una LWS es [81]:

$$D(h) = \begin{cases} \frac{\eta}{\alpha} h & \text{si } h \in \left[\alpha, \frac{\alpha}{\eta} \right], \\ -\infty & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.107)$$

3.13. Implementación numérica

En las simulaciones numéricas realizadas en este trabajo con los procesos descritos en esta sección, se utilizaron las implementaciones realizadas en lenguaje Matlab por diferentes miembros del grupo Signaux, Systèmes et Physique del Laboratoire de Physique, Ecole Normale Supérieure de Lyon.

3.14. Comentarios finales

En este capítulo brindamos una descripción de diversos procesos multifractales utilizados en la práctica. Comenzamos introduciendo la terminología necesaria para clasificar estos procesos. Además, discutimos las diferencias entre los conceptos de proceso monofractal, multifractal e invariante a la escala.

A continuación discutimos las definiciones de numerosos procesos con diversas características. En cada caso, se brindaron las expresiones de las funciones de escalamiento, el espectro multifractal y los cuatro primeros log-cumulantes. En el caso de todos los procesos basados en cascadas, la deducción de las expresiones para las distintas selecciones de multiplicadores fueron realizadas por el autor.

Comenzamos con la descripción de procesos gaussianos autosimilares monofractales (fBm) y multifractales (MRW). Continuamos con el proceso de Lévy, un proceso multifractal “natural”. A continuación describimos las cascadas multiplicativas, procesos en los que el carácter multifractal se inyecta a través del producto de los detalles en diferentes escalas. Abordamos las versiones en que el proceso multiplicativo sigue un esquema diádico (CMC) y aquellas en las que está determinado por un proceso planar de Poisson (CPC). Debido a que estas cascadas modelan medidas, discutimos el método de *warping* temporal para obtener funciones a partir de ellas. Finalmente, analizamos las cascadas de onditas y los procesos que surgen a partir de ellas. Esta familia de procesos es construida a partir de la determinación de sus coeficientes ondita.

Este capítulo constituye, entonces, una recopilación amplia de numerosos procesos utilizados habitualmente en la literatura y en la práctica. Los procesos

descriptos en esta sección serán utilizados en las simulaciones numéricas de los capítulos siguientes.

Capítulo 4

Selección automática del rango de escalamiento

¿Intelectuales? ¿Por qué no? Pero nunca virtuosos de la inteligencia. La inteligencia ha de servir siempre para algo, aplicarse a algo, aprovechar a alguien. Si averiguásemos que la inteligencia no servía para nada, mucho menos entonces la exhibiríamos en ejercicios superfluos, deportivos, puramente gimnásticos.

JUAN DE MAIRENA
Antonio Machado

Contenidos

4.1. Introducción	63
4.2. Determinación del rango de escalas	63
4.2.1. Trabajos relacionados	64
4.3. Selección automática del rango de escalas	65
4.3.1. Estimación basada en bootstrap	67
4.3.2. Algoritmo	68
4.3.3. Costo computacional	69
4.4. Evaluación del desempeño	70
4.4.1. Metodología y experimentos numéricos	70
4.4.2. Procesos multifractales	72
4.4.3. Ruptura inferior del escalamiento y robustez al ruido	76
4.4.4. Ruptura superior del escalamiento	79
4.4.5. Rupturas inferior y superior del escalamiento	81
4.4.6. Existencia de diferentes regímenes de escalamiento	83
4.5. Variabilidad de la frecuencia cardíaca	84
4.5.1. Invarianza a la escala en la variabilidad de la frecuencia cardíaca	84
4.5.2. Selección del rango de escalas y estimación de parámetros	84

4.6. Comentarios finales	87
---	-----------

4.1. Introducción

Como discutimos en el capítulo 2, la selección del rango de escalas en las que se observa el fenómeno de escalamiento es un paso fundamental en la aplicación práctica del análisis multifractal, y determina la calidad de los estimadores obtenidos. A pesar de su importancia, la selección de dicho rango suele realizarse recurriendo a la inspección visual de los datos y a la experiencia del practicante para decidir cuáles escalas son adecuadas y cuáles no.

En este capítulo presentamos la primera contribución novedosa de este trabajo de tesis: un algoritmo automático que permite obtener el rango de escalamiento adecuado a partir de sólo una realización de datos, sin realizar hipótesis alguna sobre sus distribuciones marginales. Para ello, el algoritmo hace uso del bootstrap no paramétrico en el plano tiempo-escala. El funcionamiento de dicho algoritmo es ejemplificado mediante un extensivo conjunto de simulaciones numéricas. Dichas simulaciones muestran la eficiencia del algoritmo propuesto, y asimismo arrojan luz sobre aspectos que deben ser tenidos en cuenta incluso en una selección manual del rango de escalamiento.

Este capítulo está organizado como sigue. En la Sec. 4.2 introducimos el problema de la determinación del rango de escalas, y brindamos una revisión de la literatura en esta temática. A continuación, en la Sec. 4.3 se propone un algoritmo automático basado en bootstrap para la detección automática del rango de escalas. A continuación, en la Sec. 4.4.2 describimos las simulaciones numéricas propuestas para evaluar el algoritmo y discutimos los resultados. Finalmente, en la Sec. 4.5 analizamos la aplicación del algoritmo a señales de variabilidad de la frecuencia cardíaca.

4.2. Determinación del rango de escalas

Como discutimos en la Sec. 2.7, la aplicación práctica del formalismo multifractal consiste en la estimación de los exponentes de escalamiento a partir de las funciones de estructura mediante la siguiente relación:

$$\log S_X(q, a) = K_q + \zeta(q) \log(a), \quad a_1 \leq a \leq a_2, \quad \frac{a_2}{a_1} \gg 1. \quad (4.1)$$

Denominaremos *rango de escalamiento* al intervalo $[a_1, a_2]$ en el que se observa el fenómeno de escalamiento. Alternativamente, como indicamos en la Sec. 2.6, en lugar de los exponentes de escalamiento $\zeta(q)$ se pueden estimar los cumulantes directamente mediante la relación

$$C_m(a) = c_{0,m} + c_m \log(a), \quad a_1 \leq a \leq a_2, \quad \frac{a_2}{a_1} \gg 1. \quad (4.2)$$

Es decir, tanto el logaritmo de las funciones de estructura como los cumulantes de la cantidad multirresolución muestran un comportamiento lineal sobre el rango de escalamiento. Por lo tanto, ambas cantidades de interés pueden ser estimadas mediante regresiones lineales (cf. Sec. 2.7).

Sin importar el procedimiento particular empleado para la estimación, las ecs. (4.1) y (4.2) indican que la estimación práctica depende fuertemente de la elección del rango de escalamiento en el que se observa el comportamiento lineal.

La hipótesis teórica de que la señal X es exactamente auto-similar implicaría un rango de escalas infinito: $a_1 \rightarrow 0$ y $a_2 \rightarrow +\infty$. Sin embargo, en la práctica el rango de escalamiento está limitado debido a diversas razones. Desde un punto de vista teórico, los modelos usados para describir los datos a menudo sólo consideran comportamientos en ley de potencias asintóticos. Por ejemplo, la construcción basada en cascadas multiplicativas (la base de los modelos multifractales más empleados) sólo implica que $a_1 \rightarrow 0$ [126], mientras que los procesos con memoria de largo plazo sólo implican $a_2 \rightarrow +\infty$ [131]. Por otro lado, desde un punto de vista práctico, un rango de escalamiento finito puede ser la consecuencia de mecanismos físicos cuya dinámica involucre un conjunto largo pero acotado de escalas, mientras que otros mecanismos competidores se vuelven dominantes a escalas más finas o toscas (e. g. disipación en la turbulencia [63] o la naturaleza del intervalo entre latidos en el caso de la variabilidad de la frecuencia cardíaca [96]). Por otro lado, las señales analizadas en la práctica son digitalizadas con una frecuencia de muestreo determinada, con la consecuencia de que el muestreo necesariamente destruye los comportamientos en ley de potencia en las escalas más finas. De la misma forma, la necesaria duración finita de los registros destruye el comportamiento invariante a la escala en las escalas toscas. También puede ocurrir que ruido de algún tipo se encuentre superpuesto a los datos, corrompiendo algunas escalas en las que en condiciones normales debería observarse el comportamiento invariante a la escala de los datos.

Estos diferentes mecanismos implican, por lo tanto, que, en la práctica, la invarianza a la escala se manifiesta sólo en un conjunto potencialmente grande pero finito de escalas, acotado tanto en forma inferior como superior por escalas de corte de diferente naturaleza.

Por otro lado, desde un punto de vista estadístico, la estimación de los exponentes de escalamiento $\zeta(q)$ requiere una selección cuidadosa del rango de escalas en el que se deben realizar las regresiones. Esencialmente, la estrategia para realizar dicha selección se encuentra guiada por la clásica relación de compromiso entre sesgo y varianza. Por un lado, un rango de escalamiento amplio permite reducir la varianza de los estimadores, al riesgo de introducir sesgo debido a la posible inclusión de escalas en las que la invarianza a la escala no se manifieste en forma correcta. Por el otro lado, un rango de escalas estrecho, centrado sobre las escalas en las que la invarianza a la escala se manifiesta, reduce el sesgo pero al precio de un aumento en la varianza, debido al hecho de que se incluyen menos datos en la regresión.

4.2.1. Trabajos relacionados

A pesar de que la mayoría de los practicantes del análisis multifractal son perfectamente conscientes del impacto crucial de la selección del rango de escalas en la calidad de las estimaciones, así como de las dificultades que plantea su selección objetiva y automática, este tema permanece poco abordado en la literatura científica. Esencialmente, el rango de escalas ha sido seleccionado ya sea mediante argumentos *fundamentales* relacionados con los procesos físicos o fisiológicos que subyacen los datos analizados (e. g. la disipación de Kolmogorov en la turbulencia hidrodinámica [63], o la separación en bandas de las modulaciones simpáticas y parasimpáticas en

la variabilidad de la frecuencia cardíaca [17]), o mediante un análisis empírico de los datos.

Desde este último punto de vista, la práctica dominante consiste en la inspección visual y el uso de la experiencia empírica del practicante para juzgar la adecuación de un rango de escalamiento. Este es, por supuesto, un procedimiento tedioso y propenso a errores, particularmente cuando se analizan bases de datos grandes. En este caso, cada señal debe ser inspeccionada ya que el rango de escalamiento puede ser distinto en cada una de ellas debido a contaminación por ruido, variabilidad inter-paciente, etc.

Entre los escasos intentos de abordar este problema en forma automática, en [144] y [117] se propusieron y estudiaron métodos basados en estadísticos χ^2 y F , respectivamente, para obtener la escala de corte inferior en el análisis de procesos Gaussianos con dependencia de largo rango. En [158] se hizo un intento de relajar la hipótesis de normalidad de las distribuciones marginales mediante el uso de un estadístico basado en el coeficiente de Theil.

Estas estrategias no pueden ser extendidas en forma simple ni relevante al análisis multifractal, en el que nos concentramos en este trabajo, debido a las siguientes razones:

- La hipótesis de normalidad de los datos es inválida en el caso de los procesos multifractales. La construcción basada en cascadas multiplicativas de la mayoría de ellos hace que las distribuciones marginales estén alejadas de la gaussiana.
- El uso de los coeficientes ondita líderes como cantidad multirresolución, que consiste en una transformación no lineal de los coeficientes ondita, aleja aún más las distribuciones marginales de la normalidad.
- A diferencia de los procesos con dependencia de largo rango, en los que sólo existe una escala de corte inferior del comportamiento invariante a la escala, en los procesos multifractales generales existen escalas de corte tanto inferiores como superiores.
- Para el análisis de procesos gaussianos, como el abordado en los trabajos citados, es suficiente el estudio de estadísticos de segundo orden. Sin embargo, en el análisis multifractal se estudian diversos órdenes q , tanto positivos como negativos.

En este contexto, en el presente capítulo de este trabajo de tesis proponemos un algoritmo efectivo en la práctica para la detección automática del rango de escalamiento en el marco del análisis multifractal basado en coeficientes ondita líderes. Dicho algoritmo no hace hipótesis alguna sobre la distribución marginal de la cantidad multirresolución usada y será presentado en la sección siguiente.

4.3. Selección automática del rango de escalas

Notación. Para discutir tanto la estimación de $\zeta(q)$ y de c_p en un único marco, utilizaremos la siguiente notación:

- $\theta = \theta(m, \underline{j})$ se refiere ya sea a $\zeta(q = m)$ o a c_m , estimados usando el rango de escalamiento \underline{j} .
- El índice m se refiere ya sea al orden estadístico q de las función de estructura o al orden m del log-cumulante considerados.
- $M(m, j)$ representa ya sea a $\log_2 S(m, j)$ o a $(\log_2 e) C_m(j)$.
- Las ecuaciones (4.1) y (4.2) sugieren el comportamiento genérico: $M(m, j) = \theta(m, \underline{j})j + \varphi(m, \underline{j})$, en donde $\varphi(m, \underline{j})$ es la ordenada al origen de la regresión lineal correspondiente.
- $\underline{j} = [j_1, j_2]$ es el rango de octavas en el que se supone el comportamiento invariante a la escala.

Utilizando esta notación podemos escribir la estimación de θ (y de φ) mediante regresiones lineales de la forma:

$$\hat{\theta}(m, \underline{j}) = \sum_{j \in \underline{j}} w_j M(m, j), \quad \hat{\varphi}(m, \underline{j}) = \sum_{j \in \underline{j}} v_j M(m, j), \quad (4.3)$$

en donde los pesos w_j y v_j deben ser seleccionados según lo detallado en la Sec. 2.7.2.

Hacemos notar que en la ec. (4.3) hacemos explícita la dependencia de $\hat{\theta}$ con el rango de escalas \underline{j} escogido.

Algoritmo. Motivados por la situación encontrada con mayor frecuencia en el análisis de datos reales, suponemos en este trabajos que el conjunto \mathcal{V} de rangos de escalamiento \underline{j} válidos forma un continuo de octavas contiguas: $\underline{j} = [j_1, j_2]$. Además, consideramos $\mathcal{V} = \{(j_1, j_2) : 1 \leq j_1 < j_2 \leq J, j_1 < j_2 - 1, j_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2\}$, en donde J es el número de octavas disponibles a partir de los datos. La restricción $j_1 < j_2 - 1$ asegura que al menos 3 octavas están involucradas en la regresión, requiriendo de esta forma que la invarianza a la escala se manifiesta al menos a lo largo de 2 octavas.

La selección del rango de escalamiento requiere del uso de una medida de la bondad de ajuste. Siguiendo el desarrollo de [144], utilizamos el error cuadrático

$$R(m, \underline{j}) = \sum_{j \in \underline{j}} \left[M(m, j) - \left(\hat{\theta}(m, \underline{j})j + \hat{\varphi}(m, \underline{j}) \right) \right]^2. \quad (4.4)$$

En [144] se justifica que, cuando $R(m, \underline{j})$ está debidamente normalizado por las varianzas $\sigma_{m, \underline{j}}^2$ de $M(m, j)$, y cuando es aplicado en el caso $m = 2$ para los coeficientes ondita de un proceso Gaussiano, $R(m = 2, \underline{j})$ sigue una distribución χ^2 con $j_2 - j_1 + 1$ grados de libertad.

En nuestro contexto, debido a que, como ya mencionamos, i) consideramos procesos multifractales que típicamente son no Gaussianos, ii) utilizamos los coeficientes ondita líderes como cantidad multirresolución, y iii) consideramos valores de m no restringidos a $m = 2$, no hay ninguna razón por la que $R(m, \underline{j})$, aún debidamente normalizado, deba seguir una distribución χ^2 . Denotaremos con $F_{m, \underline{j}}$ la distribución de probabilidad acumulada (CDF) de $R(m, \underline{j})$, que *a priori* es desconocida. Entonces, la cantidad

$$\Lambda(m, \underline{j}) = 1 - F_{m, \underline{j}}(R(m, \underline{j})), \quad (4.5)$$

propvee al practicante de una medida conveniente de la bondad del ajuste de $M(m, \underline{j})$ con $\hat{\theta}(m, \underline{j})j + \hat{\varphi}(m, \underline{j})$ a lo largo del rango de escalas \underline{j} . El estadístico Λ toma valores en el intervalo $[0, 1]$. Un valor de Λ cercano a 1 sugiere que el rango \underline{j} propuesto es adecuado; la situación contraria ocurre para valores de Λ cercanos a 0.

Como se discutió en la Sec. 4.2, el análisis multifractal requiere, en teoría, que el rango de escalas sea el mismo para todos los órdenes m . Por lo tanto, el rango de escalas óptimo \underline{j}^D puede ser definido como aquel que maximiza el promedio de $\Lambda(m, \underline{j})$ para todos los órdenes m :

$$\underline{j}^D = \arg \max_{\underline{j}} \sum_m \Lambda(m, \underline{j}), \quad (4.6)$$

en donde la suma se realiza sobre los órdenes estadísticos m . Sin embargo, a menudo en la práctica ocurre la situación de que, ya sea debido a contaminación por ruido, o porque los datos siguen la invarianza a la escala en forma aproximada, puede resultar de utilidad estimar los rangos independientemente para cada orden m y analizar el grado en el que coinciden. Esta es una situación frecuente en la estimación de c_1 y c_2 (cf. e.g. Sec. 4.5). Esto se puede lograr en forma sencilla midiendo \underline{j}^D independientemente para diferentes m :

$$\underline{j}_m^D = \arg \max_{\underline{j}} \Lambda(m, \underline{j}). \quad (4.7)$$

Las ecuaciones (4.6) y (4.7) implican, sin embargo, la necesidad de conocer explícitamente $\Lambda(m, \underline{j})$, ec. (4.5), lo que, a su vez, implica la estimación de las distribuciones $F_{m, \underline{j}}$. El uso combinado de los líderes, que conllevan una transformación no lineal de los coeficientes ondita, de varios órdenes estadísticos m , y el hecho de que los datos pueden ser *a priori* no Gaussianos, impiden obtener una expresión analítica de $F_{m, \underline{j}}$ para todo m y \underline{j} . Por ello, proponemos el uso de bootstrap no paramétrico en el dominio tiempo-escala para lograr una estimación efectiva, como se detalla en la sección siguiente.

4.3.1. Estimación de $F_{m, \underline{j}}$ y $\Lambda(m, \underline{j})$ basada en bootstrap

La estimación basada en bootstrap de $F_{m, \underline{j}}$ y $\Lambda(m, \underline{j})$ puede llevarse a cabo como sigue. Un número grande B de réplicas bootstrap de los líderes, denotadas $L_X^{*,b}(j, k)$, $b = 1, \dots, B$, son formadas mediante las técnicas de bootstrap en el plano tiempo-escala, con bloques temporales o de tiempo-escala, como mencionamos en la Sec. 2.9.

Para cada b se calculan, a partir de $L_X^{*,b}(j, k)$, las réplicas $M^{*,b}(m, j)$ de las funciones de estructura o cumulantes. A continuación, se llevan a cabo las regresiones lineales para obtener los estimadores $(\hat{\theta}^{*,b}(m, \underline{j}), \hat{\varphi}^{*,b}(m, \underline{j}))$ (cf. ec. (4.3)), y los errores cuadráticos $R^{*,b}(m, \underline{j})$ (cf. ec. (4.4)). Todas las estimaciones se realizan para cada rango posible $\underline{j} \in \mathcal{V}$. Estas réplicas bootstrap del error cuadrático son utilizadas para obtener una estimación de $F_{m, \underline{j}}$ mediante la distribución acumulada empírica:

$$\hat{F}_{m, \underline{j}}(x) = \frac{\#\{b : R^{*,b}(m, \underline{j}) < x\}}{B}, \quad \hat{\Lambda}(m, \underline{j}) = 1 - \hat{F}_{m, \underline{j}}(R(m, \underline{j})). \quad (4.8)$$

El estimador del estadístico de bondad de ajuste Λ se obtiene mediante el uso del estimador \hat{F} en la ec. (4.5):

$$\hat{\Lambda}(m, \underline{j}) = 1 - \hat{F}_{m, \underline{j}}(R(m, \underline{j})).$$

Finalmente, la selección del rango de escalas resulta del uso de las ecs. (4.6) o (4.7) con $\hat{\Lambda}(m, \underline{j})$.

4.3.2. Algoritmo

El algoritmo completo para la selección del rango automático de escalamiento, y para la estimación de parámetros multifractales, se encuentra resumido a continuación:

INICIO DEL ALGORITMO

Calcular $L_X(j, k)$.

for j, m **do**

 Calcular $M(m, j)$.

end for

for $\underline{j} \in \mathcal{V}$ **do**

 Estimar $\hat{\theta}(m, \underline{j})$, $\hat{\varphi}(m, \underline{j})$ (ecs. (4.3)).

 Calcular $R(m, \underline{j})$ (ec. (4.4)).

end for

COMENZAR REGIÓN PARALELA

for b en $1, \dots, B$ **do**

 Bootstrap $L_X^{*,b} \leftarrow L_X$.

for j, m **do**

 Calcular $M^{*,b}(m, j)$.

end for

for $\underline{j} \in \mathcal{V}$ **do**

 Estimar $\hat{\theta}^{*,b}(m, \underline{j})$, $\hat{\varphi}^{*,b}(m, \underline{j})$ (ecs. (4.3)).

 Calcular $R^{*,b}(m, \underline{j})$ (ec. (4.4)).

end for

end for

FIN REGIÓN PARALELA

for $\underline{j} \in \mathcal{V}$ **do**

 Estimar $\hat{F}_{m, \underline{j}}$ a partir de $\{R^{*,b}(m, \underline{j})\}_{b=1, \dots, B}$ (ec. (4.8)).

 Calcular $\hat{\Lambda}(m, \underline{j})$ (ec. (4.8)).

end for

Resolver $\underline{j}^D \leftarrow \arg \max_{\underline{j}} \sum_m \Lambda(m, \underline{j})$ (ec. (4.6)).

Salida: \underline{j}^D , $\hat{\theta}(m, \underline{j}^D)$, $\hat{\varphi}(m, \underline{j}^D)$

FIN DEL ALGORITMO

El algoritmo propuesto fue implementado por el autor en lenguaje Matlab, de forma tal de permitir una interacción sencilla con la herramienta `MF_BS_tool` utilizada para la estimación de los atributos multifractales. Dicho código, libremente disponible para su uso, consiste en uno de los principales aportes de este trabajo de tesis.

4.3.3. Costo computacional

El costo computacional para calcular el estimador θ puede ser dividido en tres componentes:

1. Cálculo de la DWT. Este paso puede realizarse mediante el algoritmo piramidal de Mallat en $O(N)$ operaciones [109, 138].
2. Cálculo de los líderes. L_λ puede ser calculado eficientemente en $O(1)$ operaciones como $\max\{L_{\lambda'_1}, L_{\lambda'_2}, d_\lambda\}$, en donde λ'_1 y λ'_2 son los dos intervalos diádicos de escala $j - 1$ incluidos en λ . Por lo tanto, todos los coeficientes ondita líderes pueden ser calculados en $O(N)$.
3. Cálculo de las regresiones lineales en $O(J)$ operaciones, en donde $J = \log_2(N)$.

Por lo tanto, el costo total para la obtención del estimador θ es $O(2N) + O(\log_2(N)) = O(2N + \log_2(N)) = O(N)$.

El costo para la obtención de las replicas bootstrap de los líderes, usando un esquema de bootstrap por bloques, con bloques temporales, es del orden de $O(BN)$, en donde B es la cantidad de replicas deseada.

En el procedimiento de selección del rango de escalamiento se incurre en tres costos adicionales:

1. Las regresiones lineales deben ser llevadas a cabo para cada replicación bootstrap, es decir, B veces.
2. Las regresiones lineales deben ser repetidas para todos los rangos posibles $\underline{j} \in \mathcal{V}$. Dado que el tamaño de V es $\#V = O(J^2)$, el costo parcial es $O(J^3)$.
3. El problema de optimización en las ecs. (4.6) o (4.7) puede ser resuelto mediante una búsqueda exhaustiva a través de todos los rangos $\underline{j} \in \mathcal{V}$ con un costo de $O(J^2)$.

Por lo tanto, el costo total C es:

$$\begin{aligned}
 C &= O(N + J) + O(B(N + J^3)) + O(J^2) \\
 &= O(B(N + J^3)) \\
 &= O(B(N + \log_2^3(N))) \\
 &= O(BN)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

en donde en la primera línea usamos el hecho de que el primero y el tercer término son despreciables, asintóticamente, frente al segundo. Se puede ver que el costo total se mantiene perfectamente aceptable en la práctica. Además, el cálculo sobre las replicas bootstrap es trivialmente paralelizable. Por esta razón, una implementación en paralelo podría reducir el costo computacional a $O\left(\frac{B}{P}N\right)$, en donde P es la cantidad de unidades de procesamiento utilizadas.

4.4. Evaluación del desempeño

Con el fin de estudiar el desempeño del algoritmo propuesto, así como para mostrar su adaptividad e ilustrar su robustez, realizamos una serie de simulaciones de Monte Carlo. Dichas simulaciones están basadas en el uso de un número elevado de copias independientes de realizaciones de procesos estocásticos sintéticos, cuyas características fueron seleccionadas para reproducir una variedad de situaciones comunes en la práctica, que van desde la invarianza a la escala pura hasta los datos corrompidos por ruido, ya sea en las escalas finas, toscas, o ambas.

En lo que resta de esta sección describimos las características de las simulaciones y procesos utilizados, así como las cantidades escogidas para la evaluación del desempeño, y presentamos y discutimos los resultados obtenidos.

4.4.1. Metodología y experimentos numéricos

4.4.1.1. Evaluación del desempeño

Utilizamos un número grande N_{MC} de realizaciones de un proceso multifractal con invarianza a la escala perfecta (es decir, que se manifiesta en todas las escalas disponibles) y controlada. Para cada realización, seleccionamos el rango de escalamiento mediante el algoritmo propuesto y, a continuación, lo utilizamos para estimar los parámetros multifractales $\zeta(q)$ o c_m , arbitrariamente denotados como θ .

Para evaluar la calidad del algoritmo para la selección del rango de escalamiento con respecto a la estimación de atributos multifractales, comparamos el desempeño contra el obtenido mediante el rango de escalamiento MSE -*óptimo* \underline{j}^M , es decir, el rango que produciría el estimador $\hat{\theta}$ con mínimo error cuadrático medio (MSE):

$$\underline{j}^M = \arg \min_{\underline{j} \in \mathcal{V}} \langle (\theta(\underline{j}) - \hat{\theta}(\underline{j}))^2 \rangle_{N_{MC}}, \quad (4.10)$$

en donde $\langle \cdot \rangle_{N_{MC}}$ indica el promedio sobre realizaciones independientes. Cabe destacar que calculamos dicho promedio en forma exhaustiva para todos los rangos posibles $\underline{j} \in \mathcal{V}$.

Un segundo conjunto de simulaciones involucra el caso más realista en el cual el escalamiento no es perfecto, sino que se encuentra corrompido ya sea en las escalas finas o toscas. Simulamos esta situación mediante la adición de ruido Gaussiano, que contamina las escalas finas, o mediante la aplicación de un filtro pasa-altos, que rompe el escalamiento en las escalas toscas. Estas simulaciones permiten mostrar que el algoritmo propuesto es capaz de escoger rangos de escalamiento que excluyan las escalas corrompidas.

4.4.1.2. Notación

Para reportar los resultados, introducimos la siguiente notación:

- $\underline{j}^M = [j_1^M, j_2^M] = \arg \min_{\underline{j} \in \mathcal{V}} MSE(\underline{j})$: rango de escalamiento que produce el mínimo MSE para $\hat{\theta}$, obtenido a partir de copias independientes del proceso, y por lo tanto considerado como el objetivo a lograr por el procedimiento propuesto.

- $\underline{j}^D = [j_1^D, j_2^D]$: rango seleccionado automáticamente.
- $\langle \underline{j}^D \rangle = [\text{med}(j_1^D), \text{med}(j_2^D)]$ y $\text{mad}(\underline{j}^D) = [\text{mad}(j_1^D), \text{mad}(j_2^D)]$, en donde $\text{med}(X)$ y $\text{mad}(X)$ son la mediana y la mediana de las diferencias absolutas de X , calculadas sobre realizaciones independientes.
- $\text{MSE}_{j_1}(j_2) = \min_{j_1} \text{MSE}(j_1, j_2)$ y $\text{MSE}_{j_2}(j_1) = \min_{j_2} \text{MSE}(j_1, j_2)$.

4.4.1.3. Procesos multifractales sintéticos

En las simulaciones realizados en este capítulo, utilizamos algunos de los procesos multifractales del capítulo 3. A continuación indicamos cuáles son los seleccionados, así como sus parámetros y la notación utilizadas para referirnos a ellos en el presente capítulo.

Cascadas canónicas de Mandelbrot. En esta sección utilizamos la versión de este proceso con multiplicadores log-Poisson. En este caso, sus propiedades multifractales están controladas por los parámetros β y γ (cf. Sec. 3.6). Durante el resto de este capítulo, este proceso será denotado como $\text{CMC}(\beta, \gamma)$.

Procesos α -estables de Lévy. Sus propiedades multifractales están controladas únicamente por el parámetro α (cf. Sec. 3.4). Durante el resto de este capítulo, este proceso será denotado como $\text{Lévy}(\alpha)$.

Multifractal random walk. Las propiedades multifractales de este proceso están controladas por los parámetros H y λ (cf. Sec. 3.5). Durante el resto de este capítulo, este proceso será denotado como $\text{MRW}(H, \lambda)$.

Movimiento fraccionario browniano en tiempo multifractal. En este capítulo usamos la versión de este proceso basada en cascadas de Poisson compuestas, con multiplicadores log-normales con media $\mu_M = 0$ y varianza σ_M^2 (cf. Sec. 3.9.1). Durante el resto de este capítulo, este proceso será denotado como $\text{CPC-fBm}(H, \sigma_M^2)$.

4.4.1.4. Configuración de las simulaciones

Para las simulaciones numéricas, consideramos los tamaños de muestra $N \in \{2^{15}, 2^{18}\}$. Los parámetros de síntesis utilizados para los diferentes procesos son:

- $\text{CMC}(\beta, \gamma)$: $\beta = 2/3$, $\gamma \in \{1/3; 2/3\}$.
- $\text{Lévy}(\alpha)$: $\alpha \in \{0,6; 1,6\}$.
- $\text{MRW}(H, \lambda)$: $H = 0,8$, $\lambda \in \{\sqrt{0,03}; \sqrt{0,08}\}$.
- $\text{CPC-fBm}(H, \sigma^2)$: $H = 0,5$, y $\sigma_M^2 \in \{0,01; 0,1\}$.

Para el análisis, se usó una ondita ortogonal de Daubechies con $N_\psi = 3$ momentos nulos, suficiente para analizar los procesos mencionados en los que la regularidad máxima h_{max} en ningún caso es superior a 2. Para la estimación, se usaron regresiones lineales no pesadas (cf. Sec. 2.7.2).

La cantidad de replicaciones bootstrap se fijó en $B = 500$. Se escogió un esquema de bootstrap en el dominio ondita, con bloques temporales. El tamaño de bloque se fijó en $W = 2 N_\psi$.

4.4.2. Procesos multifractales

4.4.2.1. Selección automática contra selección MSE-óptima

En primer lugar, examinamos el desempeño para la situación nominal de un proceso con escalamiento perfecto. Las tablas 4.1 y 4.2 muestran el rango seleccionado automáticamente $\langle \underline{j}^D \rangle$ y el rango MSE-óptimo \underline{j}^M , en el caso de los log-cumulantes y las funciones de estructura, respectivamente. Se observa una similitud satisfactoria entre ambas cantidades. Las diferencias entre $\langle \underline{j}^D \rangle$ y \underline{j}^M que se pueden observar en las tablas 4.1 y 4.2, son bajas (una o dos octavas en la mayoría de los casos) y de poco impacto en la práctica. De hecho, las Figs. 4.1 y 4.2 (líneas negras sólidas) muestran claramente, para los diversos procesos estudiados, que el MSE es relativamente plano alrededor de su valor mínimo. Por lo tanto, un rango de escalamiento que difiera en una o dos octavas del rango óptimo no provoca un aumento significativo en el MSE y es, en consecuencia, una elección aceptable en la práctica. Además, dichas figuras también muestran la mediana de la estimación del MSE mediante bootstrap (línea azul a trazos), en la que el algoritmo está basado. Se puede ver que dicha estimación muestra una excelente similitud con el MSE (oráculo) obtenido a partir del promedio de realizaciones independientes. En particular, la posición del mínimo MSE coincide en ambos casos.

Por otro lado, ambas figuras muestran los histogramas de las octavas de corte seleccionadas, j_1^D y j_2^D . Se puede ver que la moda de \underline{j}^D coincide con el mínimo MSE e, incluso, que el MSE permanece plano en el intervalo que incluye la mayor parte de los valores seleccionados. En todos los casos, el aumento en el MSE coincide con una disminución del número de selecciones.

En conclusión, las tablas 4.1 y 4.2, así como las Figs. 4.1 y 4.2, sugieren que, para una gran variedad de procesos multifractales, el algoritmo propuesto selecciona satisfactoriamente rangos de escalamiento que permiten realizar estimaciones de parámetros multifractales con MSE cercano al óptimo. Estos resultados dan lugar a una serie de comentarios que serán detallados en las secciones siguientes.

4.4.2.2. Selección automática *versus* práctica habitual

Los resultados discutidos en la sección anterior arrojan una luz interesante sobre la práctica habitual en el análisis multifractal de datos reales. Comúnmente, el practicante selecciona el rango de escalas *más grande* en el que se observa un escalamiento visualmente aceptable. Esta práctica se basa en la intuición subyacente de que mientras más largo es el rango de escalas, mejores serán las estimaciones. En el ejemplo ilustrado en la Fig. 4.3, dicha práctica resultaría en la elección del rango $\underline{j} = [2, 11]$ (línea roja a trazos). Sin embargo, las tablas 4.1 y 4.2 sugieren que el rango óptimo es, de hecho, significativamente más estrecho: $\underline{j} = [4, 9]$ (líneas verdes mixtas). En este caso, la mediana del rango detectado muestra una notable similitud con el óptimo: $\underline{j} = [3, 9]$ (líneas azules verticales).

Por lo tanto, el uso del algoritmo propuesto lleva a la obtención de mejores estimaciones, incluso en el caso *simple* de procesos con escalamiento perfecto (en los que, *a priori*, cualquier rango de escalamiento debería brindar un resultado correcto). Esto se debe a que el algoritmo es capaz de controlar la relación de compromiso entre sesgo y varianza de una mejor manera que la intuición o la inspección visual.

Tabla 4.1: **Escalamiento perfecto: rangos seleccionado y MSE-óptimo: c_1 y c_2 .**

		c_1		c_2		$c_1 \& c_2$	
		j_1	j_2	j_1	j_2	j_1	j_2
CMC(2/3, 1/3)	j^M	2	4	2	5	2	4
	$\langle j^D \rangle$	2	8	2	8	2	9
	$\text{mad}(j^D)$	1	1	0	2	0	1
CMC(2/3, 2/3)	j^M	2	10	2	5	2	5
	$\langle j^D \rangle$	2	6	2	7	2	8
	$\text{mad}(j^D)$	0	1	0	1	0	1
Lévy(0,6)	j^M	4	6	1	4	2	5
	$\langle j^D \rangle$	4	8	2	6	4	9
	$\text{mad}(j^D)$	1	1	1	1	1	1
Lévy(1,6)	j^M	3	5	2	4	2	5
	$\langle j^D \rangle$	3	8	2	7	3	8
	$\text{mad}(j^D)$	1	1	0	1	1	1
MRW(0,8, $\sqrt{0,03}$)	j^M	1	5	2	8	2	8
	$\langle j^D \rangle$	3	9	3	8	3	9
	$\text{mad}(j^D)$	1	1	1	2	1	1
MRW(0,8, $\sqrt{0,08}$)	j^M	2	5	1	9	2	5
	$\langle j^D \rangle$	2	8	2	8	2	8
	$\text{mad}(j^D)$	1	1	0	1	0	1
CPC-fbm(0,5, 0,01)	j^M	1	6	3	10	4	10
	$\langle j^D \rangle$	4	9	4	9	4	9
	$\text{mad}(j^D)$	2	2	1	2	1	1
CPC-fbm(0,5, 0,1)	j^M	1	11	3	8	4	9
	$\langle j^D \rangle$	2	8	3	8	3	8
	$\text{mad}(j^D)$	1	2	1	1	1	1

4.4.2.3. Estimación contra análisis

Según los requerimientos teóricos del análisis multifractal, el rango de escalamiento debe ser el mismo para todos los órdenes m . En la práctica, la estrategia habitual consiste en inspeccionar visualmente, y en forma independiente, los cumulantes $C_1(j)$ y $C_2(j)$ (o las funciones de estructura). Cuando los rangos observados en ambos casos coinciden, esto se considera una evidencia satisfactoria que soporta la relevancia del paradigma multifractal para describir los datos analizados. Por el contrario, discrepancias significativas sugieren que un modelo multifractal es inadecuado para describir a los datos.

El hecho de que el algoritmo propuesto pueda ser aplicado a todos los órdenes en forma conjunta (cf. ec. (4.6)) o independientemente para cada orden (cf. ec. (4.7)) permite analizar esta situación en la práctica. Dada la señal bajo estudio, se aplica la detección del rango de escalamiento tanto en forma conjunta como independiente. Si las estimaciones independientes coinciden entre sí, y también lo hacen con la estimación conjunta, se considera relevante el modelo multifractal (cf. e. g. Sec. 4.5). La tabla 4.1 muestra excelentes coincidencias entre los rangos seleccionados

Tabla 4.2: Escalamiento perfecto: rangos seleccionado y MSE-óptimo: $\zeta(q)$.

	q	-2		-1		1		2		All qs	
		j_1	j_2	j_1	j_2	j_1	j_2	j_1	j_2	j_1	j_2
CMC(2/3, 1/3)	j^M	2	11	5	11	1	3	1	3	2	11
	$\langle j^D \rangle$	3	9	2	8	1	8	1	8	2	10
	$\text{mad}(j^D)$	1	2	0	2	0	1	0	2	0	2
CMC(2/3, 2/3)	j^M	2	10	5	13	1	3	1	12	2	11
	$\langle j^D \rangle$	4	10	2	8	2	7	1	8	3	10
	$\text{mad}(j^D)$	2	2	0	2	0	1	0	2	1	2
Lévy(0,6)	j^M	3	8	5	9	3	12	2	8	4	8
	$\langle j^D \rangle$	4	9	4	9	2	6	1	5	4	10
	$\text{mad}(j^D)$	2	2	1	1	1	1	0	1	1	1
Lévy(1,6)	j^M	2	6	4	6	8	12	2	8	4	10
	$\langle j^D \rangle$	3	9	3	9	3	7	2	6	3	9
	$\text{mad}(j^D)$	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1
MRW(0,8, $\sqrt{0,03}$)	j^M	2	8	2	4	2	4	2	6	2	4
	$\langle j^D \rangle$	3	9	3	9	3	8	3	8	3	9
	$\text{mad}(j^D)$	1	2	1	2	2	1	1	2	1	1
MRW(0,8, $\sqrt{0,08}$)	j^M	2	7	2	4	9	11	1	4	2	4
	$\langle j^D \rangle$	2	9	2	8	2	8	1	8	2	9
	$\text{mad}(j^D)$	0	2	0	2	1	1	0	1	0	1
CPC-fbm(0,5, 0,01)	j^M	1	11	1	11	1	4	4	9	4	10
	$\langle j^D \rangle$	4	9	4	9	4	9	4	9	4	9
	$\text{mad}(j^D)$	1	1	1	1	2	2	1	2	1	1
CPC-fbm(0,5, 0,1)	j^M	2	4	1	11	1	8	1	3	4	9
	$\langle j^D \rangle$	3	8	3	8	3	8	3	8	3	9
	$\text{mad}(j^D)$	1	1	1	1	1	2	1	2	1	1

automáticamente, tanto en forma independiente como conjunta, para $C_1(j)$ y $C_2(j)$. Este resultado es esperable dado que los procesos analizados son multifractales.

4.4.2.4. Importancia de las escalas de corte inferior y superior

Las Figs. 4.1 y 4.2 (y posteriormente las Figs. 4.5 y 4.8) muestran que los histogramas correspondientes a j_2^D son significativamente más anchos que los correspondientes a j_1^D . Esto es una consecuencia directa del hecho de que las funciones de estructura tienen, en sí mismas, una mayor varianza en las escalas toscas que en las finas. Esto se debe, principalmente, a que el número de líderes decrece exponencialmente a medida que la escala crece. Por lo tanto, el acierto en la elección de j_1 tiene un impacto en la calidad de las estimaciones mucho mayor que la elección de j_2 . Esto es otro hecho crucial al cual los practicantes deberían atender, y que constituye un claro resultado de las simulaciones y análisis realizados aquí.

4.4.2.5. Influencia del tamaño de muestra

Para estudiar la influencia del tamaño de las realizaciones en el desempeño de las estimaciones, estudiamos MRW con parámetros $H = 0,8$ y $\lambda = \sqrt{0,08}$, y de

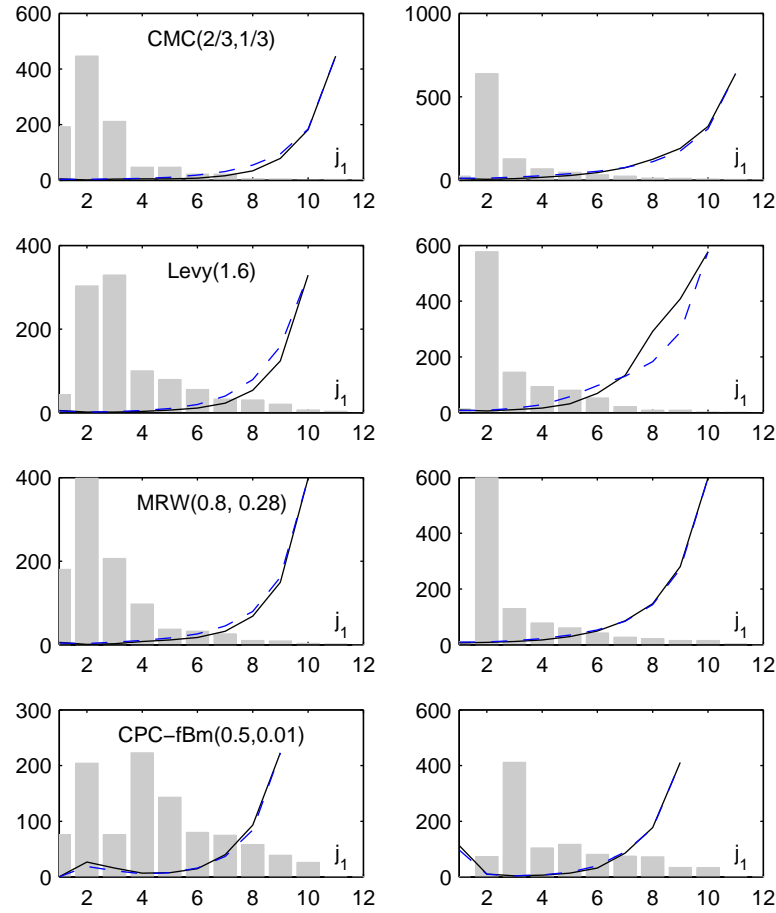


Figura 4.1: j_1^D **seleccionado**. Histogramas de las octavas de corte inferior j_1^D para CMC(2/3, 1/3) (fila superior), Lévy(1,6) (segunda fila), MRW(0,8, $\sqrt{(0,08)}$) (tercera fila) y CPC-fBm(0,5, 0,01) (fila inferior), y para los estimadores \hat{c}_1 (columna izquierda) y \hat{c}_2 (columna derecha). Líneas negras sólidas: $\text{MSE}_{j_1}(j_2)$ calculado a partir de realizaciones Monte Carlo. Líneas azules a trazos: mediana de $\text{MSE}_{j_1}(j_2)$ calculado a partir de las replicaciones bootstrap para cada realización. $\text{MSE}_{j_1}(j_2)$ se muestra en unidades arbitrarias.

longitud $N \in \{2^{10}, 2^{12}, 2^{14}, 2^{16}, 2^{18}\}$. La tabla 4.3 reporta las estadísticas de los rangos detectados en todos los casos.

Se pueden apreciar excelentes coincidencias entre el rangos seleccionado automáticamente $\langle j^D \rangle$ y el rango MSE-óptimo j^M , para todos los tamaños de muestra. La tabla 4.3 muestra mayores discrepancias entre $\langle j^D \rangle$ y j^M para tamaños de muestra grandes. Este fenómeno es una consecuencia directa del hecho de que el MSE es más plano alrededor de su mínimo, y por lo tanto el algoritmo dispone de una mayor cantidad de rangos de escalamiento “buenos” de los cuales puede escoger. Por el contrario, se puede ver que las similitudes entre los rangos detectado y óptimo son incluso mayores para tamaños de muestra pequeños. Este interesante fenómeno

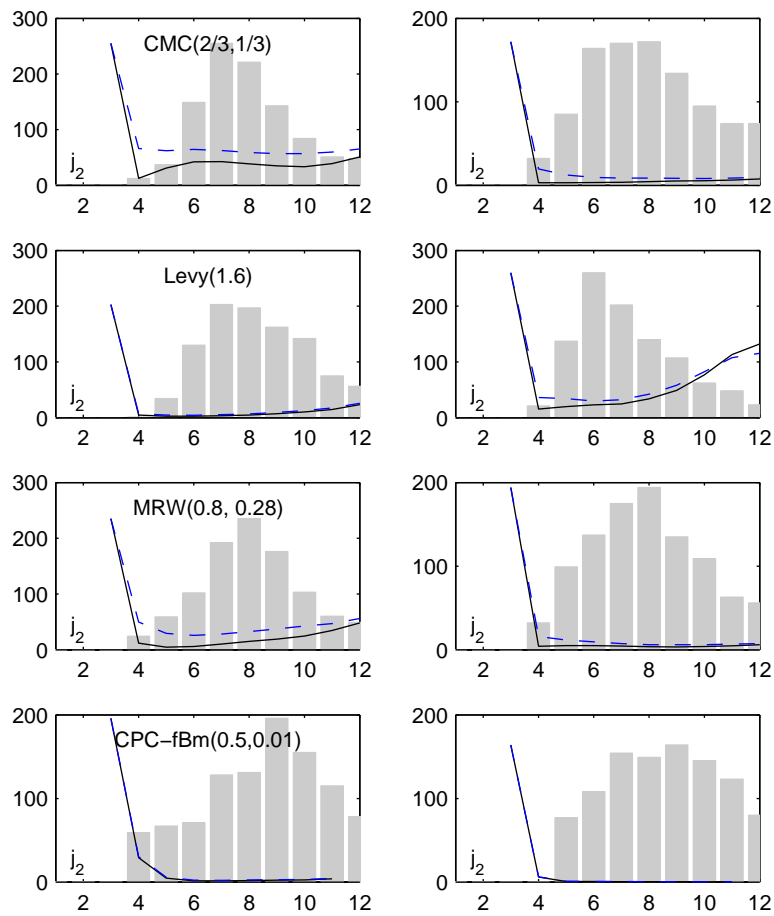


Figura 4.2: j_2^D seleccionado. Histogramas de las octavas de corte superior j_2^D para CMC(2/3, 1/3) (fila superior), Lévy(1,6) (segunda fila), MRW(0,8, $\sqrt{(0,08)}$) (tercera fila) y CPC-fBm(0,5, 0,01) (fila inferior), y para los estimadores \hat{c}_1 (columna izquierda) y \hat{c}_2 (columna derecha). Líneas negras sólidas: $MSE_{j_1}(j_2)$ calculado a partir de realizaciones Monte Carlo. Líneas azules a trazos: mediana de $MSE_{j_1}(j_2)$ calculado a partir de las replicaciones bootstrap para cada realización. $MSE_{j_1}(j_2)$ se muestra en unidades arbitrarias.

se debe a que, en este caso, las variaciones del MSE alrededor del mínimo son más pronunciadas.

4.4.3. Ruptura inferior del escalamiento y robustez al ruido

Con el objetivo de estudiar la robustez del método propuesto y su capacidad para posibilitar estimaciones correctas en situaciones en la que no se tiene un escalamiento perfecto a lo largo de todas las escalas, analizamos en primer lugar la situación en la que dicho comportamiento se pierde en las escalas más finas. La desviación del escalamiento perfecto en las escalas finas se puede lograr en forma sencilla mediante la adición de ruido blanco gaussiano, con una relación de señal a ruido (SNR)

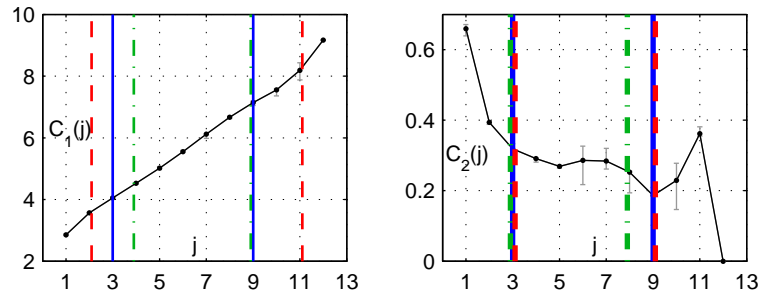


Figura 4.3: **Escalamiento perfecto.** Diagrama *log-log* para un proceso con escalamiento perfecto (línea negra), así como los rangos de escalamiento detectado (línea azul vertical), MSE-óptimo (línea verde a trazos vertical) y aceptable a partir de la inspección visual (línea roja a trazos vertical), para $C_1(j)$ (izquierda) y $C_2(j)$ (derecha).

Tabla 4.3: **Escalamiento perfecto: rangos seleccionados y MSE-óptimo:** influencia de la longitud de los datos en los rangos seleccionados a partir de $\text{MRW}(0,8, \sqrt{0,08})$ para c_1 y c_2 .

$\log_2(N)$		c_1		c_2		$c_1 \& c_2$	
		j_1	j_2	j_1	j_2	j_1	j_2
10	j^M	2	5	2	6	2	5
	$\langle j^D \rangle$	2	5	2	5	2	5
	$\text{mad}(j^D)$	1	1	1	1	1	1
12	j^M	2	6	2	7	2	6
	$\langle j^D \rangle$	2	7	2	6	2	6
	$\text{mad}(j^D)$	1	1	0	1	0	1
14	j^M	2	7	2	7	2	7
	$\langle j^D \rangle$	2	7	3	7	2	7
	$\text{mad}(j^D)$	1	1	1	1	0	1
16	j^M	2	8	2	8	2	8
	$\langle j^D \rangle$	3	9	3	8	3	9
	$\text{mad}(j^D)$	1	1	1	1	1	1
18	j^M	3	6	2	10	2	9
	$\langle j^D \rangle$	4	10	4	10	3	10
	$\text{mad}(j^D)$	1	2	2	2	1	2

controlada. El efecto del ruido blanco en un proceso multifractal se ilustra en la Fig. 4.4. El rango de escalas finas contaminado por el ruido depende de la SNR y puede, por lo tanto, ser expresado como $[1, j_N(\text{SNR})]$, en donde $j_N = j_N(\text{SNR})$ es una función monótonamente decreciente de la SNR.

La Fig. 4.4 muestra $C_1(j)$ y $C_2(j)$, promediados sobre realizaciones de Monte Carlo, comparando el escalamiento perfecto (línea azul con marcador “+”) con el caso que sufre superposición de ruido (línea negra con marcador *). La corrupción en las escalas finas es fácilmente apreciable. En dicha figura también se muestran el rango MSE-óptimo j^M (línea negra a trazos) y la mediana de los rangos seleccionados $\langle j^D \rangle$ (línea roja mixta), ambos obtenidos a partir de los datos ruidosos. Nuevamente se observa una coincidencia satisfactoria entre ambos rangos. Esta apreciación se

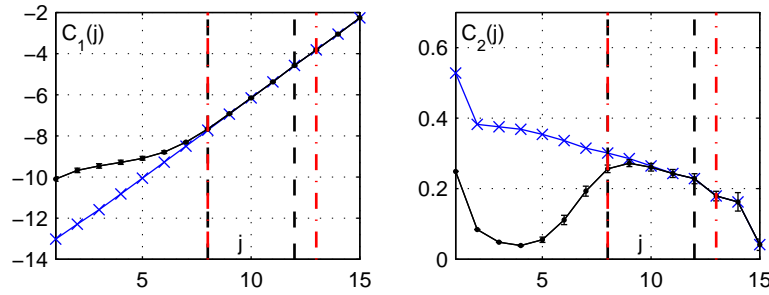


Figura 4.4: **Desviación del escalamiento en escalas finas:** Diagramas *log-log* (línea negra sólida) para $C_1(j)$ (izquierda) y $C_2(j)$ (derecha), promediados sobre todas las realizaciones Monte Carlo, de CPC-fBm corrompido con ruido blanco usando $j_N = 6$. Se muestran también el rango MSE-óptimo (línea vertical roja mixta) y la mediana de los rangos seleccionados (línea vertical negra a trazos). La línea azul sólida con cruces muestra el caso sin ruido.

encuentra respaldada por los resultados reportados en la tabla 4.4 para diferentes SNR, $j_N(\text{SNR}) \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$. En estas simulaciones se usó un tamaño de muestra elevado, $N = 2^{18}$, para asegurar que se disponen de suficientes escalas para hacer una buena estimación a pesar del ruido.

La Fig. 4.5 muestra los histogramas de las escalas de corte seleccionadas, j_1^D y j_2^D , para tres SNR diferentes. Las modas de las distribuciones de j_1^D se mueven hacia las escalas más toscas a medida que la SNR aumenta. Además, los histogramas son sumamente estrechos, evidenciando una alta concentración de las detecciones alrededor de la moda. Esto significa que el algoritmo es altamente eficiente en la detección de la corrupción de las escalas finas. Curiosamente, también se puede ver que los histogramas de j_2^D también se desplazan hacia las escalas más toscas con el aumento de la SNR. Esto se debe a que el algoritmo intenta compensar la pérdida de escalas finas para obtener una mayor calidad en las estimaciones. Por lo tanto, la Fig. 4.5 ilustra claramente la forma en que el método propuesto se adapta, en forma no supervisada, al nivel de ruido presente en las escalas finas, seleccionando escalas de corte j_1^D y j_2^D mayores.

Tabla 4.4: **Desviación del escalamiento en escalas finas:** escalas de corte inferior seleccionadas j_1^D para \hat{c}_1 y \hat{c}_2 .

		j_N				
		4	5	6	7	8
c_1	j_1^M	5	6	7	8	9
	$\langle j_1^D \rangle$	6	6	7	7	9
	$\text{mad}(j_1^D)$	1	1	1	1	1
c_2	j_1^M	5	6	6	7	9
	$\langle j_1^D \rangle$	6	6	7	7	8
	$\text{mad}(j_1^D)$	1	1	1	1	1
$c_1 \& c_2$	j_1^M	5	6	7	8	9
	$\langle j_1^D \rangle$	5	6	6	7	9
	$\text{mad}(j_1^D)$	1	1	1	1	1

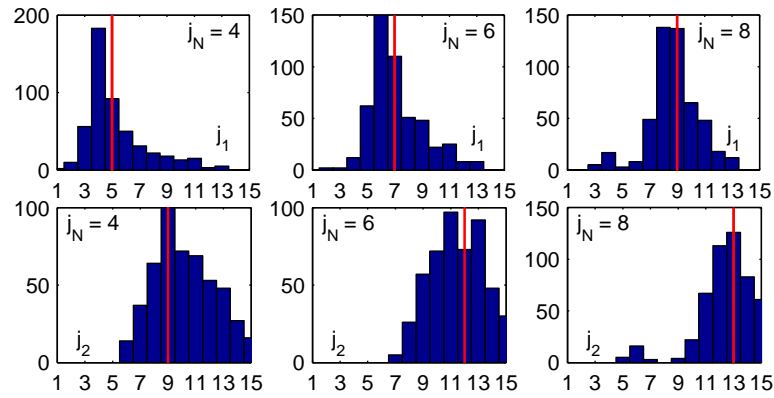


Figura 4.5: **Desviación del escalamiento en escalas finas:** histogramas de las escalas de corte seleccionadas j_1^D (fila superior) y j_2^D (fila inferior) para $C_1(j)$, para CPC-fBm corrompido con ruido blanco, $j_N = 4$ (izquierda), $j_N = 6$ (medio) and $j_N = 8$ (derecha). Las líneas rojas verticales indican j_1^M .

La Fig. 4.6 (fila superior) ilustra la calidad de las estimaciones en función de la SNR, comparándola con la obtenida en el caso con escalamiento perfecto (SNR = $+\infty$), usando un rango de escalamiento fijo $\underline{j} = [3, 15]$ (F), y también un rango detectado automáticamente (situación indicada como $j_N = 0$). Por el contrario, la Fig. 4.6 (fila inferior) muestra la calidad de las estimaciones usando el rango de escalamiento fijo $\underline{j} = [3, 15]$ para todas las SNR. En conjunto, la Fig. 4.6 muestra claramente que el uso del método propuesto permite evitar el importante sesgo que se observa al usar el rango fijo. También se observa, al usar el método propuesto, un esperado aumento en la varianza debido a que a medida que aumenta la SNR: 1) hay menos octavas limpias disponibles para la estimación, y 2) el algoritmo es forzado a seleccionar escalas toscas, cuyos coeficientes tienen en sí mismos una mayor varianza.

El análisis realizado en esta sección lleva a la conclusión de que el rango de escalas es detectado en forma correcta, automática y adaptativa para asegurar robustez al ruido y estimaciones con MSE cercano al óptimo.

4.4.4. Ruptura superior del escalamiento

Estudiaremos aquí el caso en que la invarianza a la escala deja de cumplirse en las escalas toscas. En las aplicaciones, esta situación ocurre naturalmente cuando los mecanismo físicos o fisiológicos que producen la invarianza a la escala dejan de actuar en las escalas toscas. Este es el caso, por ejemplo, en la turbulencia hidrodinámica, en dónde los mecanismos que permiten la inyección de energía en flujos están acotados superiormente por la llamada *escala integral* (cf. e.g. [63]).

Para producir la ruptura del escalamiento en forma controlada, las realizaciones de CPC-fBm(0,5;0,01) con $N = 2^{15}$ fueron filtradas con un filtro pasa-altos. La respuesta en frecuencia del filtro se escogió de tal manera que su escala de corte varíe como 2^{j_C} , con $6 \leq j_C \leq 10$. Se escogió una configuración de filtro FIR de orden 300, diseñado mediante el método de la ventana, usando una ventana de Chebyshev con 100 dB de amplitud en el lóbulo principal.

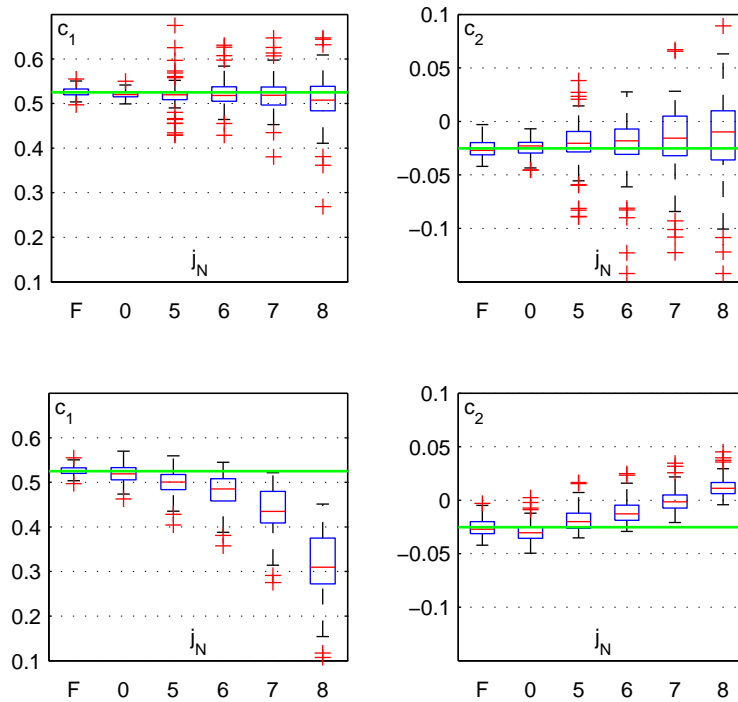


Figura 4.6: **Desviación del escalamiento en escalas finas:** gráficos de caja para \hat{c}_1 (izquierda) y \hat{c}_2 (derecha) para SNR crecientes, usando los rangos de escalamiento seleccionados (fila superior) y el rango fijo $j = [3, 15]$ (fila inferior). La línea verde horizontal indica el valor teórico. F y $j_N = 0$ indican el caso sin ruido, analizado usando un rango fijo y los rangos seleccionados, respectivamente.

La Fig. 4.7 compara $C_1(j)$ y $C_2(j)$, promediados sobre realizaciones de Monte Carlo, en los casos filtrado (línea negra sólida) y con escalamiento perfecto (línea azul sólida). La corrupción en las escalas toscas es fácilmente apreciable. La figura también ilustra el rango MSE-óptimo \underline{j}^M (líneas verticales negras a trazos) y la mediana de los rangos seleccionados $\langle j^D \rangle$ (líneas verticales azules mixtas), en ambos casos obtenidas a partir de los datos filtrados. Nuevamente se puede observar una calidad aceptable en los rangos obtenidos por el método propuesto, que selecciona rangos que difieren en una o dos escalas del óptimo pero que siempre se encuentran dentro de la región de escalamiento. Esta observación es validada por los resultados mostrados en la tabla 4.5 para diferentes escalas de corte (correspondientes a $j_C \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$). Sin embargo, la tabla 4.5 muestra que, para c_2 , la similitud entre \underline{j}^M y $\langle j^D \rangle$ es menor. La Fig. 4.7 provee una explicación potencial: la corrupción de las escalas toscas, lograda mediante un filtrado lineal, parece tener una intensidad mucho menor en $C_2(j)$ que la que tiene en $C_1(j)$.

La Fig. 4.8 muestra los histogramas de las escalas de corte seleccionadas j_1^D y j_2^D . Como es de esperar, el valor de j_2^D es mayor a medida que aumenta la escala de corte del filtro 2^{j_C} . Por el contrario, el algoritmo propuesto mayormente selecciona $j_1^D = 2$ en el extremo izquierdo, dado que el escalamiento en las escalas finas no se encuentra alterado y el uso de las escalas más finas siempre lleva a una menor varianza en las estimaciones. Nuevamente, estos resultados ilustran la habilidad

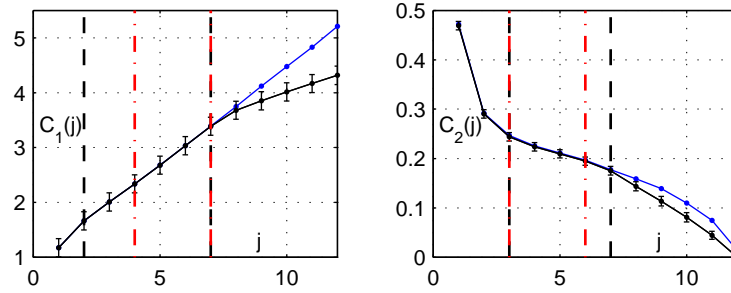


Figura 4.7: **Desviación del escalamiento en escalas toscas:** Diagramas *log-log* (línea negra sólida) para $C_1(j)$ (izquierda) y $C_2(j)$ (derecha), promediados sobre todas las realizaciones Monte Carlo, de CPC-fBm filtrado mediante un filtro pasa-altos con octava de corte $j_C = 8$. Se muestran también el rango MSE-óptimo (línea vertical roja mixta) y la mediana de los rangos seleccionados (línea vertical negra a trazos). La línea azul sólida con cruces muestra el caso sin filtrar.

Tabla 4.5: **Desviación del escalamiento en escalas toscas:** j_2^D seleccionados para \hat{c}_1 y \hat{c}_2 .

		j_C				
		6	7	8	9	10
c_1	j_2^M	4	6	7	7	8
	$\langle j_2^D \rangle$	5	6	7	7	7
	$\text{mad}(j_2^D)$	0	1	1	1	1
c_2	j_2^M	5	7	6	8	8
	$\langle j_2^D \rangle$	10	9	9	9	9
	$\text{mad}(j_2^D)$	0	1	1	1	1
$c_1 \& c_2$	j_2^M	5	6	7	8	8
	$\langle j_2^D \rangle$	6	6	7	8	8
	$\text{mad}(j_2^D)$	1	0	1	1	1

del método propuesto para adaptarse en forma no supervisada a los desvíos de la invarianza a la escala perfecta.

4.4.5. Rupturas inferior y superior del escalamiento

Analizaremos en esta sección un caso representativo de la situación encontrada en la práctica real, en la que los practicantes habitualmente analizan un conjunto de datos grande, que consiste en numerosas series temporales. En estos casos, la desviaciones de la invarianza a la escala pueden ocurrir simultáneamente en las escalas finas y toscas, y típicamente puede variar entre un sujeto y otro. Este es notablemente el caso en las aplicaciones biomédicas como, por ejemplo, la descrita en la Sec. 4.5, en dónde los mecanismos fisiológicos responsables del escalamiento o el efecto de tendencias periódicas pueden variar entre sujetos, modificando así las escalas de corte superiores. Además, el nivel de ruido puede cambiar de un sujeto a otro, modificando por lo tanto la escala de corte inferior.

Enfrentados a tales situaciones, los practicantes tienen dos opciones. La primera de ellas consiste en realizar una verificación sistemática del rango de escalamiento

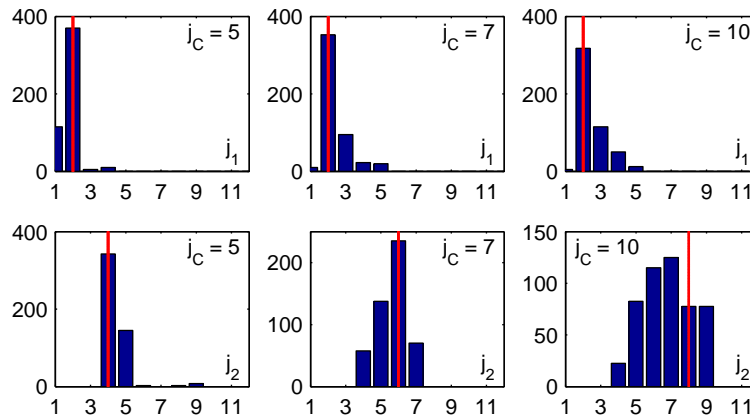


Figura 4.8: **Desviación del escalamiento en escalas toscas:** histogramas de las escalas de corte seleccionadas j_1^D (fila superior) y j_2^D (fila inferior) para $C_1(j)$, para CPC-fBm filtrado con filtros pasa-altos con octavas de corte $j_C = 6$ (izquierda), $j_C = 7$ (medio) and $j_C = 10$ (derecha). Las líneas rojas verticales indican j_1^M .

para todos los sujetos. La segunda consiste en adoptar un rango fijo para todos los sujetos, obtenido a partir de la inspección de un grupo seleccionado de casos representativos. A pesar de que asegura estimaciones correctas, la primera opción es laboriosa, tediosa y requiere mucho tiempo; por lo tanto, la probabilidad de cometer errores humanos aumenta con el tamaño de la base de datos. Por otro lado, la segunda opción puede llevar a una baja calidad en las estimaciones, con sesgos altos para determinados sujetos o una varianza global alta. Además, ambas soluciones pueden sufrir errores debidos a la subjetividad del practicante.

Para reproducir esta situación y explorar el beneficio del método de selección automática propuesto, consideramos un número elevado N_{MC} de realizaciones independientes de un proceso multifractal. Corrompimos cada una de ellas con ruido blanco aditivo, con una SNR (y por lo tanto j_N) escogida en forma aleatoria y equiprobable del conjunto $j_N = \{2, 3, 4\}$. Luego, filtramos cada realización ruidosa con un filtro pasa-altos con una octava de corte superior elegida en forma aleatoria y equiprobable del conjunto $j_C = \{7, 8, 9\}$. Para cada realización, realizamos la estimación de los atributos multifractales en tres escenarios:

1. utilizando el rango de escalas seleccionado por el método propuesto,
2. utilizando un rango de escalas fijo *conservador*, $\underline{j} = (4, 6)$ (FC), seleccionado cuidadosamente de forma tal que asegura estar dentro de la zona de escalamiento en todas las realizaciones,
3. utilizando un rango de escalas fijo *no conservador*, $\underline{j} = (3, 9)$ (FNC), seleccionado como el rango de escalamiento más grande observado a partir de todas las realizaciones.

El escenario 2 representa la situación en la que toda la base de datos es analizada sistemáticamente para seleccionar un rango de escalamiento válido para todas ellas. Por el contrario, el escenario 3 representa el caso en que el practicante analiza sólo

un conjunto poco representativo de señales y escoge un rango fijo demasiado grande que resulta inadecuado para otras señales no inspeccionadas.

La Fig. 4.9 muestra que las estimaciones obtenidas utilizando el algoritmo propuesto son de una calidad notablemente superior a las obtenidas utilizando el rango no conservador, que sufre tanto de un sesgo elevado como una varianza alta y es, por lo tanto, inútil en la práctica. Además, la Fig. 4.9 y la tabla 4.6 muestran que el uso de los rangos seleccionados automáticamente permite estimaciones con una calidad ligeramente superior a la obtenida mediante el uso del rango conservador. Este resultado ilustra un punto clave de la aplicabilidad del algoritmo propuesto en la práctica: permite obtener estimaciones comparables a las obtenidas con el *mejor* rango de escalamiento que puede ser aplicado a *todas* las señales, pero sin el tedioso y lento proceso de tener que hacer una selección manual de dicho rango. Además, la ligera mejora en la calidad de las estimaciones obtenidas ilustra la adaptabilidad del método propuesto: cuando los datos lo permiten, se utiliza un mayor número de escalas (y por lo tanto disminuye la varianza), y, por el contrario, el rango de escalamiento es reducido cuando los datos sufren desviaciones fuertes de la invarianza a la escala (y de esta forma evita la introducción de sesgo).

4.4.6. Existencia de diferentes regímenes de escalamiento

En lo analizado hasta aquí, siempre supusimos que los datos muestran un único régimen de escalamiento. Sin embargo, existen situaciones en las que puede existir

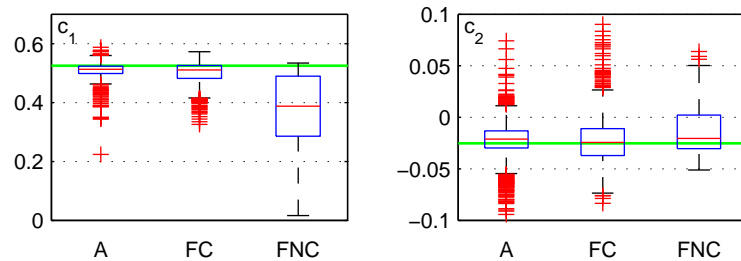


Figura 4.9: **Desviación del escalamiento en escalas toscas y finas:** CPC-fBm corrompido con ruido blanco aditivo con SNR aleatoria y filtrado con un filtro pasa-altos con frecuencia de corte aleatoria. \hat{c}_1 (izquierda) y \hat{c}_2 (derecha) obtenidos usando la selección automática propuesta (A), el rango fijo conservador $\underline{j} = (4, 6)$ (FC), y el rango fijo no conservador $\underline{j} = (3, 9)$ (FNC). Las líneas horizontales verdes indican los valores teóricos c_1 y c_2 .

Tabla 4.6: **Desviación del escalamiento en escalas toscas y finas.** Estadísticos para \hat{c}_1 y \hat{c}_2 .

		media	mediana	std	min	max
\hat{c}_1	A	0.51	0.51	0.03	0.21	0.59
	FC	0.49	0.51	0.04	0.27	0.57
	FNC	0.37	0.37	0.11	0.02	0.53
\hat{c}_2	A	-0.027	-0.024	0.028	-0.095	0.076
	FC	-0.019	-0.025	0.025	-0.071	0.095
	FNC	-0.014	-0.021	0.023	-0.051	0.059

más de uno de dichos regímenes. Esta situación ocurre, por ejemplo, en la Sec. 4.4.3, en donde los procesos multifractales son corrompidos con ruido blanco que introduce un nuevo régimen de escalamiento en las escalas finas.

Si los datos analizados exhibieran diferentes regímenes de escalamiento, el algoritmo seleccionaría aquel que produjera la mejor bondad de ajuste. Sin embargo, los regímenes adicionales podrían ser fácilmente detectados corriendo múltiples instancias del algoritmo con diferentes restricciones en el espacio de búsqueda \mathcal{V} . Por ejemplo, si se supone que los datos muestran un régimen de escalamiento en las escalas finas, y uno diferente en las escalas toscas, se puede correr dos veces el algoritmo con las regiones de búsqueda \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 tales que $j_1 \leq j_1^{max}$ en \mathcal{V}_1 y $j_2 \geq j_2^{min}$ en \mathcal{V}_2 , para elecciones adecuadas de j_1^{max} y j_2^{min} .

4.5. Variabilidad de la frecuencia cardíaca

En esta sección, evaluamos el funcionamiento del algoritmo propuesto en datos reales. Para ello, utilizamos señales de variabilidad de la frecuencia cardíaca de pacientes saludables, una aplicación en la que los autores tienen experiencia.

4.5.1. Invarianza a la escala en la variabilidad de la frecuencia cardíaca

La variabilidad de la frecuencia cardíaca (en inglés, *heart rate variability*, HRV) es, en la actualidad, ampliamente utilizada para evaluar el estado de salud del sistema cardiológico. Es reconocido que una variabilidad *fuerte* indica *buena* salud [17]. Desde la década pasada se acepta que la HRV puede describirse mediante los paradigmas multifractal y de invarianza a la escala, y por lo tanto cuantificada mediante atributos y propiedades de dichos modelos, cf. e.g. [66, 78, 96, 107]. Recientemente, se mostró que el formalismo multifractal basado en coeficientes ondita líderes permite un fructífero análisis de la HRV [13, 16, 54, 102].

En esta sección, estudiamos 54 registros de dos horas de duración, tomados de la base de datos *Normal Sinus Rhythm RR Interval Database*, disponible a través del proyecto Physionet (<http://www.physionet.org/physiobank/database/nsr2db/>, cf. [68]). Todos los registros corresponden a pacientes con ritmo sinusal normal, con una relación de masculinos a femeninos balanceada (30/24), y con una edad media (\pm desviación estándar) de 61,36(\pm 11,63) años. Los latidos fueron extraídos por un método automático estándar, con posterior corrección y revisión por cardiólogos expertos. Las secuencias de latidos fueron convertidas a una serie temporal uniformemente espaciada mediante interpolación con *splines* cúbicos, con una frecuencia de muestreo $f_S = 4$ Hz. Sólo estudiamos sujetos sanos por simplicidad.

4.5.2. Selección del rango de escalas y estimación de parámetros

Para estudiar el comportamiento del algoritmo propuesto en datos no simulados, aplicamos el formalismo multifractal basado en líderes, descrito en la Sec. 2.5.5,

a cada sujeto para estimar los parámetros c_1 y c_2 con tres elecciones de rango de escalamiento:

1. la selección automática propuesta (A),
2. el rango fijo conservador $\underline{j} = (8, 10)$ (FC), escogido cuidadosamente, mediante inspección visual, para estar dentro de la región de escalamiento de todos los sujetos,
3. el rango fijo no conservador $\underline{j} = (4, 13)$ (FNC), correspondiente al rango más amplio observado en todos los sujetos.

La Fig. 4.10 compara la calidad de los estimadores \hat{c}_1 y \hat{c}_2 , obtenidas con las tres elecciones de rangos de escalamiento. Por otro lado, las tablas 4.7 y 4.8 reportan las medianas de los rangos seleccionados j_1^D y j_2^D (así como sus valores extremos y las medianas de sus desviaciones absolutas), y la información estadística de \hat{c}_1 y \hat{c}_2 . Estos resultados llevan a los siguientes comentarios y discusión.

El rango FNC permite obtener, tanto para c_1 como para c_2 , estimadores con una varianza ligeramente inferior (comparada con la que resulta de los rangos A y FC). Esta variabilidad reducida se debe al uso de un rango de escalamiento amplio para las estimaciones. Sin embargo, las medianas de los estimadores parecen diferir de aquellos obtenidos con los rangos A y FC, sugiriendo la presencia de un sesgo que

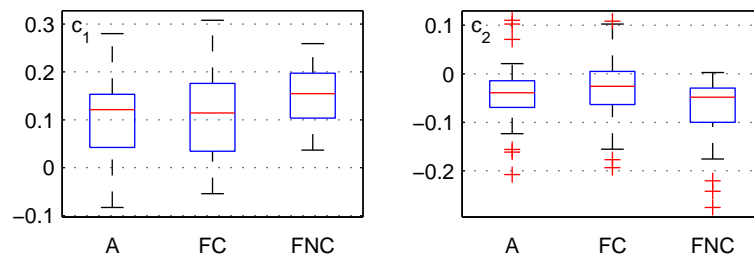


Figura 4.10: **Estimaciones en HRV.** Gráficos de caja para \hat{c}_1 (izquierda) y \hat{c}_2 (derecha), en donde las estimaciones fueron hechas a partir de la selección automática (A), el rango fijo conservador $\underline{j} = (8, 10)$ (FC) y el rango fijo no conservador $\underline{j} = (4, 13)$ (FNC).

Tabla 4.7: **Datos de HRV.** Estadísticos para j_1^D y j_2^D . La mitad superior muestra las octavas detectadas. La mitad inferior muestra los rangos detectados en unidades físicas (segundos).

		j_1^D				j_2^D			
		mediana	mad	min	max	mediana	mad	min	max
octavas	c_1	7	1	5	8	10	1	8	14
	c_2	6	1	4	8	11	1	7	14
	$c_1 \& c_2$	6	1	5	8	11	1	8	14
segundos	c_1	40	0.625	10	80	320	0.625	80	5120
	c_2	20	0.625	5	80	640	0.625	40	5120
	$c_1 \& c_2$	20	0.625	10	80	640	0.625	80	5120

Tabla 4.8: **Datos de HRV.** Estadísticos para \hat{c}_1 y \hat{c}_2 .

		media	mediana	std	min	max
\hat{c}_1	A	0.10	0.12	0.09	-0.08	0.28
	FC	0.11	0.11	0.09	-0.05	0.30
	FNC	0.15	0.15	0.05	0.04	0.26
\hat{c}_2	A	-0.04	-0.04	0.06	-0.22	0.11
	FC	-0.03	-0.03	0.05	-0.18	0.15
	FNC	-0.07	-0.05	0.06	-0.28	0.00

resulta de no tomar en cuenta adecuadamente las variaciones entre sujetos de los rangos de escalamiento.

La tabla 4.7 muestra que la mediana del rango seleccionado a partir del método automático propuesto, para una detección conjunta a partir de c_1 y c_2 , es $\langle \underline{j}^D \rangle = (6, 11)$. La dispersión alrededor de la mediana es pequeña, sugiriendo a posteriori una relativa homogeneidad de la base de datos y una variabilidad inter-sujeto reducida. La dispersión alrededor de la escala de corte superior parece ser mayor. Sin embargo, como se discutió en la Sec. 4.4.2, el MSE óptimo es relativamente plano como función de j_2 , y la exacta determinación de j_2 tiene un menor impacto en las estimaciones que la de j_1 . Aún más, la mediana del rango seleccionado automáticamente es cercana al rango FC, $\underline{j} = (8, 10)$. Además, la calidad de los estimadores es similar en ambos casos. Por lo tanto, estos resultados muestran que el rango seleccionado automáticamente se comporta en forma similar al rango conservador, pero permite evitar los problemas asociados a la inspección visual sistemática de toda la base de datos: factibilidad en términos del tiempo dedicado a dicha tarea y del tamaño de la base de datos, probabilidad de errores humanos, subjetividad entre practicantes, ...

Más aún, el método automático de selección del rango de escalamiento no sólo permite obtener estimadores con MSE cercano al óptimo, sino que también constituye en sí mismo una herramienta para el análisis de datos. En efecto, la salida del algoritmo indica un rango de escalamiento $\underline{j} = (6, 11)$; esto indica que la invarianza a la escala se manifiesta en escalas temporales que van de los 20 s a los 10,6 min (o, equivalentemente, en frecuencias que van desde los 0,0016 a los 0,05 Hz). Estas cantidades están en completo acuerdo con los resultados reportados para la HRV de adultos sanos [78, 96, 106]. Hay que notar que la inspección visual de los diagramas de escalamiento para cada sujeto llevaría a la conclusión de que el escalamiento se mantiene en escalas más finas que j_1^D . Sin embargo, como se observó en las simulaciones numéricas en procesos con escalamiento puro (cf. Sec. 4.4.2), el algoritmo propuesto tiene a seleccionar rangos estrechos para optimizar la calidad de las estimaciones.

Además, los rangos seleccionados independientemente para \hat{c}_1 y \hat{c}_2 , así como el seleccionado en forma conjunta, son notablemente similares. Como ya se mencionó, esto es un requerimiento proveniente de la teoría que subyace al paradigma del análisis multifractal y que no siempre se observa en datos reales. Por lo tanto, la similitud entre los rangos seleccionados en los tres casos puede interpretarse como una evidencia sólida que soporta el uso del paradigma multifractal para modelar la HRV, al menos en la base de datos analizada.

Para finalizar, el rango seleccionado automáticamente brinda estimadores de c_2 que son cuasi-sistemáticamente negativos, excluyendo valores no negativos excepto para unos pocos sujetos: esto constituye otra evidencia clara y sólida de que la HRV debe ser modelada con modelos multifractales en vez de los modelos auto-similares tradicionales como el fBm, en concordancia con e.g. [78, 96, 106].

4.6. Comentarios finales

En el presente capítulo, definimos un método para la detección automática del rango de escalamiento en dónde la estimación de los atributos multifractales debe ser realizada. A partir de las contribuciones [149, 151], el método propuesto se basa en un esquema de bootstrap no paramétrico en el plano tiempo escala. Evaluamos el desempeño del método mediante simulaciones de Monte Carlo, usando tanto procesos con escalamiento perfecto como procesos con desvíos significativos de la invarianza a la escala. Consideramos tanto desviaciones en las escalas finas como en las toscas. En todas las situaciones observamos que el método propuesto permite obtener estimadores con un MSE cercano al óptimo, optimizando de esta manera la relación de compromiso entre sesgo y varianza. A pesar de que fue estudiado sólo para señales unidimensionales, el procedimiento puede ser extendido en forma trivial al análisis multivariado o de campos de mayores dimensiones (e.g. imágenes).

Con el precio de un incremento moderado en el costo computacional, debido a la necesidad de efectuar un remuestreo de bootstrap, el método propuesto permite evitar la tarea subjetiva y tediosa (e incluso irrealizable en bases de datos grandes) de inspeccionar visualmente, y en forma sistemática, todos los sujetos. Al mismo tiempo, los resultados obtenidos son incluso ligeramente superiores en términos de calidad de las estimaciones.

Además de automatizar el proceso de análisis y de permitir una estimación cercana a la óptima, el método también contribuye al análisis del escalamiento en los datos. Al informar las cotas inferior y superior del escalamiento, provee a los practicantes con posibles indicadores de desviaciones de la invarianza a la escala. Aún más, la comparación de los rangos de escalamiento obtenidos a partir de distintos atributos multifractales (como c_1 y c_2 , por ejemplo) brinda información sobre la validez del paradigma multifractal subyacente al análisis de invarianza a la escala. Cabe enfatizar que la información de los rangos detectados puede ser tan importante en la práctica como los estimadores en sí mismos: la discriminación entre pacientes y sujetos sanos, por ejemplo, podría deberse a un cambio en el rango de escalamiento más que a un cambio en los atributos multifractales.

Ilustramos el funcionamiento del procedimiento propuesto en una base de datos biomédica real. Cabe remarcar que su naturaleza metodológica otorga al algoritmo propuesto un nivel de validez general, y por lo tanto puede ser aplicado a señales reales de diferente naturaleza.

Los resultados que presentamos en este capítulo dieron lugar a presentaciones en dos *workshops* internacionales [5, 6], así como a una publicación en la revista *Signal Processing* de Elsevier [7].

Capítulo 5

Análisis multifractal basado en p -exponentes y p -líderes

Sorprenderse, extrañarse, es comenzar a entender.

LA REBELIÓN DE LAS MASAS
José Ortega y Gasset

Contenidos

5.1. Introducción	91
5.2. Exponentes de regularidad puntual	92
5.2.1. Regularidad puntual de Hölder	92
5.2.2. Espacios de regularidad p	92
5.2.3. p -exponentes	93
5.2.4. Polinomio de Taylor	93
5.2.5. Propiedades de los p -exponentes	94
5.3. Caracterización mediante coeficientes ondita	95
5.3.1. Hipótesis de regularidad globales	95
5.3.2. Coeficientes ondita p -líderes	96
5.3.3. Caracterización del p -exponente	97
5.3.4. Extensión al caso $p < 1$	97
5.4. Análisis multifractal basado en p-exponentes	98
5.4.1. p -espectro multifractal	98
5.4.2. Formalismo multifractal basado en p -líderes	99
5.4.3. Cumulantes basados en p -líderes	99
5.5. Clasificación de singularidades	99
5.5.1. Singularidades <i>cusp</i> y singularidades <i>oscilantes</i>	100
5.5.2. p -exponentes y lacunaridad	102
5.5.3. Regularidad negativa	103
5.6. Estimación a partir de datos con resolución finita	107

5.6.1. Modelo basado en cascadas de onditas determinísticas . . .	108
5.6.2. Modelo basado en cascadas de onditas aleatorias	111
5.6.3. Conclusiones	117
5.7. Relación con MF DFA	117
5.7.1. MF DFA	118
5.7.2. p -exponentes y MF DFA	118
5.7.3. Conclusiones	122
5.8. Simulaciones numéricas	122
5.8.1. Procesos con p -espectro multifractal prescrito	122
5.8.2. Corrección del efecto de resolución finita	126
5.8.3. p -espectros p -invariantes y regularidad negativa	129
5.8.4. p -espectro y singularidades lacunares	135
5.9. Aplicación a frecuencia cardíaca fetal	137
5.9.1. Análisis de la frecuencia cardíaca fetal	137
5.9.2. Base de datos	138
5.9.3. Análisis multifractal basado en p -líderes de la FHR	139
5.9.4. Conclusiones	142
5.10. Comentarios finales	143

5.1. Introducción

En el capítulo 2 presentamos los conceptos fundamentales del análisis multifractal: el exponente de Hölder y el espectro multifractal; el primero permite medir la regularidad puntual, mientras que el segundo provee una descripción global del comportamiento singular de la función dada. Asimismo, discutimos el procedimiento que permite la estimación del espectro multifractal en la práctica: el formalismo multifractal. Presentamos y comparamos numerosas cantidades multirresolución en las que se puede basar un formalismo multifractal: incrementos, coeficientes ondita, coeficientes ondita líderes, entre otras. Más allá de las diferencias que presentan, todas son ampliamente utilizadas en la práctica, en distintas áreas de aplicación.

Sin embargo, dichas cantidades multirresolución discutidas, al estar basadas en el exponente de Hölder, sufren de una importante limitación: sólo permiten la medición de regularidad positiva. Es oportuno destacar un hecho habitualmente ignorado por los usuarios de estas técnicas: la elección de la cantidad multirresolución en la que se basa el formalismo multifractal determina la definición de la regularidad local subyacente al análisis multifractal. Por lo tanto, la forma en que una cantidad multirresolución está definida puede hacer que que no necesariamente mida el exponente de Hölder, o que sólo lo haga en condiciones particulares.

En este contexto, el objetivo del presente capítulo, que constituye la segunda contribución de este trabajo de tesis, es doble. En primer lugar, nos proponemos estudiar la definición de la regularidad local provista por los p -exponentes, y analizar un formalismo multifractal basado en una nueva cantidad multirresolución: los p -líderes. Mostraremos que este nuevo método permite medir, en forma natural, exponentes de regularidad negativos, y que además permite obtener mejores estimadores que los otros formalismos. En segundo lugar, nos proponemos comparar esta nueva técnica con MF DFA, tanto desde un punto de vista teórico como práctico. Esta comparación resultará en una mejor comprensión del soporte teórico de la cantidad multirresolución involucrada en MF DFA, así como de la definición de la regularidad local en la que se basa.

Más precisamente, el capítulo está organizado como se indica a continuación. En la Sec. 5.2 introducimos los p -exponentes, que proveen una definición de regularidad local en términos de ciertos espacios de regularidad propuestos en la década de 1960 para el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales. A continuación, en la Sec. 5.3 presentamos la caracterización de los p -exponentes mediante coeficientes ondita, lo que lleva a la introducción de una nueva cantidad multirresolución: los coeficientes ondita p -líderes, así como de un nuevo formalismo multifractal, basado en ellas, en la Sec. 5.4. Posteriormente, en la Sec. 5.5 discutimos cómo estas nuevas herramientas permiten refinar la clasificación de singularidades, tradicionalmente provista en términos de las singularidades tipo *cusp* y *oscilantes*. Luego, en la Sec. 5.6 analizamos el problema de la estimación de los p -líderes a partir de datos de resolución finita; mostramos el sesgo que se introduce y desarrollamos factores de corrección que permiten eliminarlo. Luego, en la Sec. 5.7 establecemos la conexión entre los formalismos basados en p -líderes y MF DFA, y realizamos una comparación exhaustiva entre ellos, tanto desde un punto de vista teórico como práctico. En la Sec. 5.8 presentamos un conjunto extenso de simulaciones numéricas que permiten validar en la práctica las características del formalismo multifractal propuesto,

con respecto a: 1) calidad de las estimaciones obtenidas, en comparación con los líderes “tradicionales” y MF DFA, 2) posibilidad de medir regularidad negativa, y 3) información adicional obtenida al realizar el análisis para diferentes valores de p . Finalmente, en la Sec. 5.9 presentamos una aplicación de la técnica propuesta a señales biomédicas; concretamente, estudiamos los beneficios de incorporar el formalismo basado en p -líderes al estudio de la frecuencia cardíaca de fetos sanos y fetos que sufren de hipoxia durante el parto. Para facilitar la lectura de este capítulo, comenzamos recordaremos oportunamente algunos conceptos ya introducidos.

5.2. Exponentes de regularidad puntual

5.2.1. Regularidad puntual de Hölder

Como se vio en la Sec. 2.3.1, la regularidad local de una función X tradicionalmente se mide mediante los espacios de Hölder locales y el exponente de Hölder. Recordamos a continuación estos conceptos.

Sea $\alpha \geq 0$. Se dice que la función X pertenece al espacio iso-Hölder $C^\alpha(x_0)$, en la posición $x_0 \in \mathbb{R}$, si existen una constante K y un polinomio P_{x_0} con grado menor a α , tales que:

$$|X(x_0 + a) - P_{x_0}(x_0 + a)| \leq K|a|^\alpha, \quad a \rightarrow 0^+. \quad (5.1)$$

El exponente de Hölder de X en x_0 se define como el mayor de los valores posibles de α : $h_X(x_0) = \sup\{\alpha : X \in C^\alpha(x_0)\}$.

Como ya se mencionó, el exponente de Hölder no puede tomar valores negativos y, por lo tanto, resulta inadecuado para analizar funciones en las que ocurre este comportamiento. Recordamos que los exponentes de regularidad negativos ocurren cuando la función bajo análisis no es localmente acotada.

Por lo tanto, es necesario introducir nuevos exponentes de regularidad que puedan tomar valores negativos. Este requisito es obligatorio en numerosas aplicaciones prácticas (cf. e. g. [15, 23, 153]). Una primera idea sería permitir que el exponente α en la ec. (5.1) tome valores negativos. Sin embargo, esta definición sería insatisfactoria porque si se satisface la ec. (5.1) para un valor de α dado (que puede ser negativo), entonces en una corona $0 < C_1 \leq |x - x_0| \leq C_2$ X necesariamente sería una función acotada. Por lo tanto, dicha extensión “natural” de la definición solo permitiría caracterizar *singularidades aisladas* de orden negativo, y resultaría inapropiada para su uso en análisis multifractal, en donde las singularidades con un exponente dado pueden ser densas, y usualmente forman conjuntos con dimensiones de Hausdorff positivas.

5.2.2. Espacios de regularidad p

A partir del análisis de la sección anterior, es necesario escoger una nueva definición de regularidad puntual que permita caracterizar la regularidad negativa. Dicha definición será provista por los espacios de regularidad $T_\alpha^p(x_0)$, que tienen la ventaja de sólo requerir que la función bajo estudio pertenezca localmente a $L^p(\mathbb{R})$ (a diferencia de los espacios $C^\alpha(x_0)$, en donde se requiere pertenencia a $L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$). Esta noción fue introducida por Calderón y Zygmund en la década de 1960, en el contexto

de las ecuaciones diferenciales parciales [37], y fueron recientemente reintroducidas en el contexto del análisis multifractal en [85, 86, 90]. Sin embargo, todavía no fueron estudiados en el contexto del análisis multifractal práctico ni en sus aplicaciones al análisis de datos reales.

Definición 5.2.1. Espacios de regularidad T_α^p .

Sea X una función que pertenece localmente a $L^p(\mathbb{R})$. Sean también $p \geq 1$, y $\alpha > -1/p$. X pertenece a $T_\alpha^p(x_0)$ si existen reales $C, R > 0$ y un polinomio P_{x_0} de grado menor que α , de forma tal que

$$T_\alpha^{(p)}(a, x_0) = \left(\frac{1}{a} \int_{B(x_0, a)} |X(u + x_0) - P_{x_0}(u + x_0)|^p du \right)^{1/p} \leq Ca^\alpha, \quad \forall a \leq R, \quad (5.2)$$

en donde $B(x_0, a)$ es la bola de radio $a > 0$ centrada en x_0 .

Esta definición constituye un sustituto natural para la regularidad puntual de Hölder, que puede ser utilizada en el análisis de funciones que no son localmente acotadas pero que pertenecen a $L^p(\mathbb{R})$. La relación entre ambas nociones se puede explicitar si consideramos que la ec. (5.1) debe cumplirse para todo punto en una vecindad de x_0 , y en particular para el valor supremo que toma en dicho entorno. Por lo tanto, la ec. (5.1) puede reescribirse como:

$$\sup_{B(x_0, a)} \left(|X(x_0 + a) - P_{x_0}(x_0 + a)| \right) \leq K|a|^\alpha, \quad a \rightarrow 0.$$

En consecuencia, resulta claro que la regularidad de Hölder corresponde al caso particular $p = +\infty$.

Obsérvese que la definición 5.2.1 no puede ser utilizada para valores $p < 1$. Esta restricción se debe principalmente al hecho de que los espacios L^p están mal definidos cuando $0 < p < 1$. En la Sec. 5.3 mostraremos cómo se puede utilizar la caracterización mediante onditas de los exponentes p para extenderlos al caso $0 < p < 1$.

5.2.3. p -exponentes

En forma análoga a lo hecho con la regularidad de Hölder, se puede definir el p -exponente:

Definición 5.2.2. p -exponente.

El p -exponente de X en x_0 se define como [90]:

$$h_p(x_0) = \sup\{\alpha : X \in T_\alpha^p(x_0)\}. \quad (5.3)$$

5.2.4. Polinomio de Taylor

El polinomio P_{X_0} definido implícitamente en la ec. (5.2) es único para un par (p, α) dado. Su grado puede cambiar con α : cuando α cruza por un valor entero N , P_{X_0} puede ser modificado por la adición de términos de grado N . Sin embargo, para dos pares (p_1, α_1) y (p_2, α_2) , los términos de grado menor a $\min(\alpha_1, \alpha_2)$ coinciden.

Para un valor de α fijo nos referiremos a P_{x_0} como el *polinomio de Taylor* de X de orden α . Por lo tanto, sus coeficientes no dependen de p ni de α cuando corresponden a términos de orden menor a este último.

Supongamos que $h_1(x_0) < +\infty$. Ya que la relación $p \mapsto h_p(x_0)$ es una función decreciente (ver teorema 5.2.1 más abajo), el polinomio de Taylor de mayor orden es obtenido para $p = 1$, siendo además su grado menor a $h_1(x_0)$. Nos referiremos a este polinomio de orden máximo como el polinomio de Taylor de X en x_0 . Observar que siempre se puede usar este polinomio de orden máximo en lugar de P_{x_0} en la ec. (5.2), ya que ambos comparten todos los términos de orden menor a α . Esto justifica el abuso de notación consistente en no indicar la dependencia con p y α .

Es importante notar que, por definición, el polinomio de Taylor P_{X_0} está profundamente asociado a la localización x_0 y por lo tanto puede cambiar con la posición, tanto en grado como en coeficientes.

La ec. (5.1) no brinda, sin embargo, una forma explícita para calcular el polinomio de Taylor. Afortunadamente, la formulación basada en coeficientes ondita de la Sec. 5.3 elimina la necesidad de su cálculo.

5.2.5. Propiedades de los p -exponentes

Al utilizar este nuevo exponente de regularidad, en cada punto x_0 en el que los datos no son C^∞ , tenemos a nuestra disposición una colección de p -exponentes. Surge con naturalidad la necesidad de entender qué tan rica es esta información, es decir, preguntarse que restricciones satisface la función $p \mapsto h_p(x_0)$. El siguiente teorema brinda una caracterización de las condiciones satisfechas por el p -exponente en torno a un punto dado.

Teorema 5.2.1. *Sea $X \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Sea*

$$p_0 = \sup \{p : X \in L^p_{loc}(\mathbb{R}) \text{ en una vecindad de } x_0\}.$$

La función $p \mapsto h_p(x_0)$ está definida al menos en $[1, p_0)$, y eventualmente en $[1, p_0]$, y posee las siguientes propiedades:

1. *Toma sus valores en $[-1/p, \infty]$.*
2. *Es una función decreciente de p .*
3. *La función $r \mapsto h_{1/r}(x_0)$ es cóncava.*

Aún más, las condiciones 1 a 3 son óptimas, es decir, si $p_0 \in (1, \infty)$ y ϕ es una función definida en $[1, p_0]$ que satisface dichas condiciones, entonces existe $X \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que

$$\forall p \in [1, p_0], \quad h_p(x_0) = \phi(p).$$

La demostración de este teorema, que escapa a los alcances de este trabajo de tesis, se puede encontrar en los apéndices A y B de [1].

El teorema 5.2.1 permite hacer los comentarios que se indican a continuación.

Continuidad. Como una consecuencia de la concavidad de la función $r \mapsto h_{1/r}(x_0)$, se deduce que, cuando toma valores finitos, $h_p(x_0)$ es continua como función de p , excepto tal vez en los extremos 1 y p_0 .

Dominio de definición. Los p -exponentes están definidos para $p \in (1, p_0]$ (aunque la caracterización mediante coeficientes ondita de la Sec. 5.3 nos permitirá extender el dominio de definición a $p \in (0, p_0]$), en dónde p_0 puede ser escrito en forma práctica como:

$$p_0 = \sup\{p : \zeta_d(p) > 0\}, \quad (5.4)$$

en dónde ζ_d es la función de escalamiento obtenida a partir de los coeficientes ondita. Esta ecuación permite verificar en la práctica, *a priori*, si un p -exponente está definido.

Regularidad negativa. Los p -exponentes pueden tomar valores menores a 0 hasta $-1/p$. Por lo tanto, permiten el uso de *exponentes de regularidad negativos*. Por ejemplo, permiten modelar comportamientos de la forma $|X(x)| \sim 1/|x - x_0|^\alpha$ para $\alpha < 1/p$.

p -exponentes para distintos valores de p . Por lo general, los p -exponentes no coinciden para distintos valores de p , sino que satisfacen la relación $h_p(x_0) \geq h_{p'}(x_0)$ para $p \leq p' \leq p_0$. Por lo tanto, el uso de dichos exponentes para diferentes p puede proveer información complementaria para la clasificación de singularidades. Esto será discutido en profundidad en la Sec. 5.5.

Exponente de Hölder. El exponente de Hölder tradicionalmente usado corresponde al p -exponente con $p = \infty$: $h(x) \equiv h_\infty(x)$. Sin embargo, es importante notar que los p -exponentes con p finito miden, en general, una regularidad en X que difiere de la capturada por el exponente de Hölder.

5.3. Caracterización mediante coeficientes ondita

5.3.1. Hipótesis de regularidad globales

Acotación local. Como se discutió en la Sec. 2.8 y en las secciones anteriores del presente capítulo, el exponente de Hölder sólo puede ser utilizado como medida de la regularidad local de funciones localmente acotadas [87]. En la Sec. 2.8 también se indicó que el requisito de acotación local puede ser verificado *a priori* mediante el cálculo del exponente de Hölder uniforme h_{min} , cuya definición recordamos aquí:

$$h_{min} = \liminf_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log(\sup_k |d_X(j, k)|)}{\log(2^j)}. \quad (5.5)$$

Si $h_{min} > 0$, entonces X es una función acotada; por el contrario, si $h_{min} < 0$, entonces X no es una función acotada [86, 88].

Regularidad L^p local. De la misma forma que en el caso del exponente de Hölder uniforme, los coeficientes ondita pueden ser utilizados para medir si la función X pertenece localmente a L^p o no. Por lo tanto, permiten verificar *a priori* el requisito teórico para el uso del p -exponente correspondiente [10, 87, 88]. Dicho criterio se toma teniendo en cuenta el uso de la función de escalamiento basada en coeficientes ondita, $\zeta_d(q)$ (ec. (2.41)):

- Si $\zeta_d(p) > 0$ entonces $X \in L^p_{loc}$.
- Si $\zeta_d(p) < 0$ entonces $X \notin L^p_{loc}$.

5.3.2. Coeficientes ondita p -líderes

La caracterización mediante onditas de los exponentes p requiere de la definición de una nueva cantidad multirresolución: los coeficientes ondita p -líderes.

Definición 5.3.1. p -líderes

Sea $X \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$. Los coeficientes ondita p -líderes de X se definen a partir de sus coeficientes ondita d_λ como [85, 86, 90]:

$$L^{(p)}(j, k) \equiv L_\lambda^{(p)} = \left(\sum_{\lambda' \subset 3\lambda} |d_{\lambda'}|^p 2^{-(j-j')} \right)^{1/p}, \quad (5.6)$$

en donde j' es la escala asociada con el sub-cubo λ' incluido en 3λ .

Observar que, cuando $p = +\infty$ (y por lo tanto $X \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, es decir, X es localmente acotada) la norma p en la ec. (5.6) se convierte en una norma ∞ . Entonces, los p -líderes se reducen en este caso a los líderes clásicos usados para caracterizar el exponente de Hölder:

$$L_\lambda = \sup_{\lambda' \subset 3\lambda} |d_{\lambda'}|. \quad (5.7)$$

5.3.2.1. Cálculo práctico

Los p -líderes en la octava j se pueden calcular eficientemente a partir de los valores que toman en la octava $j - 1$:

$$L_{\lambda_{j,k}}^{(p)} = \left(\sum_{\lambda' \subset (3\lambda \cap \Lambda_{j-1})} \left(L_{\lambda'}^{(p)} \right)^p + \sum_{\lambda' \subset (3\lambda \cap \Lambda_j)} |d_{\lambda'}|^p 2^{-(j-j')} \right)^{1/p}, \quad (5.8)$$

en donde $3\lambda \cap \Lambda_j$ denota los intervalos diádicos de escala 2^j incluidos en 3λ . La primera suma en la ec. (5.8) consta de sólo 6 términos, mientras que la segunda consta de 3. Por lo tanto, el cálculo de cada coeficiente se puede realizar en $O(1)$ operaciones.

5.3.3. Caracterización del p -exponente

Cuando $\zeta_d(p) > 0$, el p -exponente puntual puede ser recuperado de los p -líderes como [85, 86, 90]:

$$h_p(x_0) = \liminf_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log \left(L_{\lambda_{j,k}(x_0)}^{(p)} \right)}{\log(2^j)}, \quad (5.9)$$

en donde $\lambda_{j,k}(x_0)$ denota el cubo diádico de ancho 2^j que contiene a x_0 . Este resultado es el equivalente a la caracterización del exponente de Hölder mediante los líderes clásicos, que se desprende de la ec. (2.44) [84]:

$$h(x_0) = \liminf_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log \left(L_{\lambda_{j,k}(x_0)} \right)}{\log(2^j)}. \quad (5.10)$$

Cabe destacar que este resultado no requiere el cálculo del polinomio de Taylor para obtener una caracterización del p -exponente. Se puede interpretar que, al ser ortogonales a polinomios de orden menor a N_ψ , los coeficientes ondita miden directamente la diferencia entre la función y el polinomio de Taylor de la ec. (5.2) bajo la condición de que N_ψ sea lo suficientemente alto.

La ec. (5.9) indica que los p -líderes cumplen con el requerimiento natural para basar un formalismo multifractal en ellos (cf. Sec. 2.5). Esto será tratado en la Sec. 5.4.

5.3.4. Extensión al caso $p < 1$

En esta sección discutimos la limitación $p \geq 1$, que puede constituir una desventaja en algunas aplicaciones. En efecto, el hecho de que los exponentes p tengan que satisfacer necesariamente $h_p(x_0) > -1/p$ implica que sólo se puede tratar con singularidades con exponente mayor a -1 . Sin embargo, se podría esperar que la elección $p < 1$ permitiera medir exponentes menores y, por lo tanto, estudiar un mayor rango de aplicaciones. Como ya mencionamos, la restricción $p \geq 1$ proviene del hecho de que los espacios L^p no están bien definidos para $p < 1$.

Sin embargo, este problema puede ser evitado si se trabaja con substitutos de los espacios L^p tales como los espacios de Besov. No es el objetivo de este trabajo de tesis el desarrollar estas consideraciones en detalle. Por el contrario, sólo mencionaremos las ideas básicas y las implicaciones prácticas relevantes para el análisis multifractal.

Sea $p > 0$ y $s \in \mathbb{R}$. El espacio de Besov $B_p^{s,\infty}$ puede ser definido a través de una caracterización basada en el decaimiento de sus coeficientes ondita [83]:

$$\exists C : \forall j, \quad 2^j \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |d_\lambda|^p \leq C 2^{(s-1/p)j}, \quad (5.11)$$

Esta definición es independientemente de la base ondita utilizada, provisto que ésta sea lo suficientemente suave. Si $p \geq 1$, estos espacios y los L^p satisfacen las siguientes relaciones de encaje y, por lo tanto, están íntimamente relacionados [53, 83]:

$$\forall \epsilon > 0, \quad B_p^{\epsilon,\infty} \hookrightarrow L^p \hookrightarrow B_p^{-\epsilon,\infty}. \quad (5.12)$$

En particular, la condición $\zeta_d(p) > 0$ que adoptamos como evidencia de que los datos pertenecen a L^p , es equivalente al requerimiento de que X pertenezca localmente a $B_p^{0,\infty}$. Por lo tanto, podemos reemplazar en el desarrollo anterior la condición de que $X \in L_{loc}^p$ por la condición de que $X \in B_p^{0,\infty}$. La ventaja de este procedimiento es que, a diferencia de L^p , los espacios $X \in B_p^{0,\infty}$ están bien definidos cuando $p < 1$. Por lo tanto, de esta forma podemos evitar la condición $p \geq 1$ en la definición de los p -exponentes.

En este nuevo marco, la condición para poder tratar con los exponentes p sigue siendo $\zeta_d(p) > 0$; los p -líderes están dados por la ec. (5.6) y el p -exponente se puede definir directamente por la ec. (5.9). De la misma forma que antes, este exponente puede tomar valores negativos hasta $-1/p$. Sin embargo, como ahora p puede estar arbitrariamente cerca de 0, no existe una limitación en las singularidades que se pueden analizar.

5.4. Análisis multifractal basado en p -exponentes

En esta sección definimos y estudiamos un formalismo multifractal basado en P -exponentes, utilizando a los p -líderes como cantidad multirresolución.

5.4.1. p -espectro multifractal

Definimos al p -espectro multifractal como la dimensión de Hausdorff de los conjuntos iso- p -exponente.

Definición 5.4.1. p -espectro multifractal

El p -espectro multifractal $D^p(h)$ es la dimensión de Hausdorff del conjunto de puntos en los que el p -exponente toma el valor h :

$$D^{(p)}(h) = \text{Dim}_H(\{x \in, h_p(x) = h\}). \quad (5.13)$$

El soporte del espectro es la imagen de la transformación $x \mapsto h_p(x)$, es decir, la colección de valores h tales que $\{x \in \mathbb{R} : h_p(x) = h\} \neq \emptyset$.

Recordamos que por convención, $\text{Dim}_H(\emptyset) = -\infty$. Dado que un p -exponente necesariamente es mayor que $-1/p$, el soporte del espectro $D^{(p)}$ necesariamente está incluido en $[-1/p, \infty)$. La siguiente proposición brinda más información disponible *a priori*:

Proposición 5.4.1. *Sea $p > 0$ y sea X una función para la cual $\zeta_d(p) > 0$. Entonces,*

$$\forall h \leq 0, \quad D^{(p)}(h) \leq 1 + hp. \quad (5.14)$$

Esta proposición muestra que el p -espectro multifractal se encuentra necesariamente bajo la recta que conecta los puntos $(-1/p, 0)$ y $(0, 1)$. Esto está ilustrado en la Fig. 5.10. La demostración, que escapa a los alcances de este trabajo de tesis, se puede encontrar en el apéndice A de [3].

5.4.2. Formalismo multifractal basado en p -líderes

El formalismo multifractal basado en p -líderes se define en forma análoga a los presentados en la Sec. 2.5. Las funciones de estructura se definen como los promedios temporales de los p -líderes:

$$S_L^{(p)}(q, j) = \frac{1}{n_j} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \left(L_\lambda^{(p)} \right)^q. \quad (5.15)$$

La función de escalamiento se define como:

$$\zeta^{(p)}(q) = \liminf_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log S_L^{(p)}(q, j)}{\log 2^j}. \quad (5.16)$$

Finalmente, el espectro de Legendre se define como:

$$\mathcal{L}^{(p)}(h) = \inf_{q \in \mathbb{R}} \left(1 + hq - \zeta_L^{(p)}(q) \right).$$

Al igual que lo que ocurre con las otras cantidades multirresolución presentadas, el espectro de Legendre provee una cota superior al espectro multifractal:

$$D^{(p)}(h) \leq \mathcal{L}^{(p)}(h).$$

La demostración de este formalismo sigue de la demostración general dada en [84, 85, 90], y se basa en el hecho de que los p -líderes cumplen con la ec. (5.9).

5.4.3. Cumulantes basados en p -líderes

Replicando los argumentos de la Sec. 2.6, pero utilizando los p -líderes y la función de escalamiento $\zeta_L^{(p)}$, se pueden definir los correspondientes log-cumulantes. Los log-cumulantes $c_m^{(p)}$ son los coeficientes de la expansión de Taylor de $\zeta_L^{(p)}$ en torno al origen:

$$\zeta_L^{(p)}(q) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^{(p)} \frac{q^m}{m!}, \quad (5.17)$$

y se puede demostrar que son necesariamente de la forma

$$C_m^{(p)}(j) = c_{0,m}^{(p)} + c_m^{(p)} \log(2^j), \quad (5.18)$$

en donde $C_m^{(p)}(j)$ es el m -ésimo cumulante de la variable aleatoria $|L_X^{(p)}(j, \cdot)|^q$.

5.5. Clasificación de singularidades

En esta sección discutiremos la forma en que los p -exponentes permiten revisar la clasificación de singularidades puntuales. Hasta el momento, dicha clasificación se realizó en términos de dos exponentes: el exponente de Hölder, típico de las singularidades tipo *cusp*, y el exponente de oscilación, característico de las singularidades de tipo *chirp*. Comenzamos esta sección con una revisión de la clasificación general, para luego discutir la clasificación basada en p -exponentes y la propuesta de nuevas categorías: singularidades canónicas, lacunares y balanceadas.

5.5.1. Singularidades *cusp* y singularidades *oscilantes*

Consideramos en primer lugar la función *chirp* unidimensional:

$$\mathcal{C}_{\alpha,\beta}(x) = |x - x_0|^\alpha \sin\left(\frac{1}{|x - x_0|^\beta}\right), \quad \alpha > -1, \quad \beta > 0. \quad (5.19)$$

Si $\beta = 0$, $\mathcal{C}_{\alpha,0}(x)$ es la función *cusp* $\mathcal{C}_\alpha(x) = |x - x_0|^\alpha$, tradicionalmente considerada como el ejemplo paradigmático de singularidad con exponente de Hölder $h = \alpha$. El exponente β se conoce como *exponente de oscilación*, definido y estudiado en [91], y caracteriza las singularidades en la frecuencia instantánea de X en x_0 . Sean $\alpha > -1/p$ y $\beta > 0$. Cuando $p > \max(1, -1/\alpha)$, estas funciones tienen el mismo p -exponente $h_p(x_0) = \alpha$, y este exponente es independiente de β .

Una forma de clasificar el comportamiento oscilatorio de las funciones *chirp* cerca de x_0 se basa en el cálculo de la primitiva $\mathcal{D}_{\alpha,\beta}$ de $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$. Mediante integración por partes se demuestra que:

$$\mathcal{D}_{\alpha,\beta}(x) = \frac{|x - x_0|^{\alpha+\beta+1}}{\beta} \cos\left(\frac{1}{|x - x_0|^\beta}\right) + O(|x - x_0|^{\alpha+2\beta+2}). \quad (5.20)$$

Por lo tanto, el incremento en el p -exponente luego de la integración es de $\beta + 1$, a diferencia de lo que ocurre con singularidades de tipo *cusp*, en donde el incremento en el exponente es de 1 (cf. Sec. 2.8.2). Este cálculo sencillo proporciona una forma de distinguir entre singularidades *cusp* y oscilantes. Este es un problema importante en ciertas aplicaciones, tales como el estudio de la turbulencia, en donde la determinación de la existencia de singularidades oscilantes en los datos permite validar ciertos modelos [14, 20, 95].

Para permitir que la clasificación pueda ser extendida a señales multidimensionales, podemos reemplazar el rol de la primitiva de la función por el de su integral fraccionaria, según la Def. 2.8.2. Por otro lado, si consideramos que los datos no necesariamente son acotados localmente, debemos utilizar los p -exponentes. Recordamos que $X^{(-\gamma)}$ indica la integral fraccionaria de X de orden γ . Además, denotamos con $h_{p,\gamma}(x_0)$ al p -exponente de $X^{(-\gamma)}$. Observar que $h_{p,\gamma}(x_0)$ está definido si $\zeta_d(p) > -\gamma p$, como consecuencia de las ecs. (5.4) y (2.83).

A continuación definimos la noción de *singularidad canónica*, que se aplica a funciones que están localmente en L^p (una noción similar fue considerada en [91] para el caso de los exponentes de Hölder, cuando $p = \infty$).

Definición 5.5.1. *Singularidad canónica*

La función $X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una singularidad canónica en x_0 si existen $p > 0$ y $\gamma > 0$, tales que $X \in L^p$ (o $X \in B_p^{s,\infty}$ cuando $p < 1$) y

$$h_{p,\gamma}(x_0) = h_p(x_0) + \gamma. \quad (5.21)$$

Teorema 5.5.1. Sea $X : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ con una singularidad canónica en x_0 . Entonces, la ec. (5.21) se cumple $\forall p \leq p(x_0)$ y $\forall \gamma \geq 0$. Además, $h_p(x_0)$ no depende de p y la singularidad canónica es, por lo tanto, p -invariante.

La demostración de este teorema, que escapa a los alcances de este trabajo de tesis, se puede encontrar en el apéndice D de [1].

La doble independencia de la ec. (5.21) con p y γ justifica la elección del nombre *singularidad canónica*. Un ejemplo de este tipo es la función *cusp* \mathcal{C}_α . La Fig. 5.1 ilustra numéricamente la p -invarianza de la función \mathcal{C}_α . La fila superior ilustra ejemplos de la función para distintos valores de α , mientras que la fila inferior ilustra las estimaciones de $h_p(x_0)$ utilizando p -líderes (discos rojos) y la cantidad $T_\alpha^{(p)}$ de la ec. (5.2) (círculos azules). En primer lugar, se puede apreciar la excelente coincidencia entre las estimaciones obtenidas mediante los p -líderes y la definición de los p -exponentes, para todos los valores de p . Además, se aprecia que las estimaciones coinciden con el valor teórico (líneas negras) siempre que $p < p_0$: $h_{p'} = h_p, \forall p', p < p_0$. Finalmente, cuando $p > p_0$, la función \mathcal{C}_α no está en L^p y las estimaciones colapsan en el menor valor h_p aceptable para dicho espacio, indicado por las líneas grises.

La siguiente definición engloba a las singularidades que no son canónicas:

Definición 5.5.2. Singularidad oscilante

Las singularidades que no son canónicas son llamadas singularidades oscilantes.

Un ejemplo clásico de singularidad oscilante es provisto por la función *chirp* $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ (ec. (5.19)). Sin embargo, a pesar de ser oscilante, la singularidad de la función chirp en x_0 es también p -invariante. Esto es una consecuencia del teorema 5.5.1 y de la proposición 5.5.1, enunciada después de la siguiente definición:

Definición 5.5.3. Función no-despreciable

Sea g una función definida en una vecindad de x_0 . Se dice que g es no-despreciable (en inglés, non-negligible) si existen $r > 0$ y $\omega > 0$ tales que

$$\mathcal{M}(\{x \in B(x_0, r) : |g(x)| \leq a\}) \leq a^\omega, \quad \forall a > 0, \tag{5.22}$$

en donde $\mathcal{M}(A)$ denota la medida de Lebesgue del conjunto A .

Proposición 5.5.1. *Si X tiene una singularidad p -invariante en x_0 y si g es no-despreciable en x_0 , entonces gX tiene una singularidad p -invariante en x_0 .*

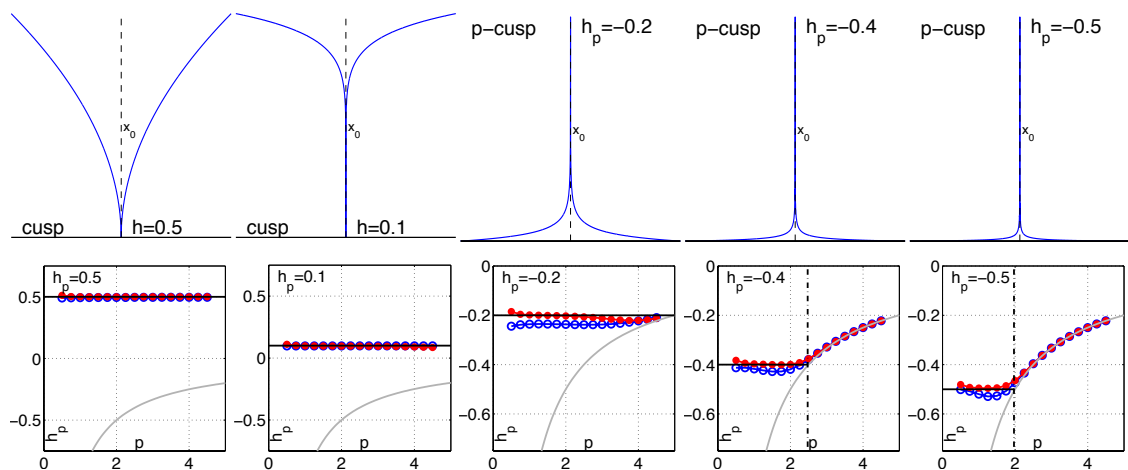


Figura 5.1: **Ilustración de funciones *cusp***. Funciones *cusp* con p -exponentes positivos y negativos (fila superior) y estimación de la regularidad (fila inferior): análisis $T_\alpha^{(p)}$ (círculos azules), con p -líderes (discos rojos), exponente teórico (líneas negras) y límite L^p (gris).

La demostración de esta proposición, que escapa a los alcances de este trabajo de tesis, se puede encontrar en el apéndice C de [1].

La proposición 5.5.1 implica que la multiplicación por $\sin(|x - x_0|)^{-\beta}$ no modifica al p -exponente del término $|x - x_0|^\alpha$ en la función $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$. Por otro lado, el teorema 5.5.1 indica que dicho exponente es p -invariante, con lo que se demuestra que la singularidad *chirp* es oscilante y p -invariante. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre con la función *chirp*, las singularidades oscilantes no son, por lo general, p -invariantes. De este hecho surge la necesidad de refinar la clasificación en la forma indicada en la siguiente sección.

5.5.2. p -exponentes y lacunaridad

Con el fin de comprender mejor las condiciones bajo las que los p -exponentes difieren, comenzamos esta sección describiendo un ejemplo constructivo de una función $F_{\alpha,\beta}$ en la que dicha situación ocurre.

Definición 5.5.4. *Función lacunar* $F_{\alpha,\beta}$

Sea $\alpha > 0$ y $\beta > 1$. Entonces

$$F_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} 2^{-\alpha j} & \text{si } |x| \in [2^{-j}, 2^{-j} + 2^{-\beta j}] \text{ con } j \in \mathbb{N}^+, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.23)$$

La función $F_{\alpha,\beta}$ es ilustrada en la Fig. 5.2. A continuación analizamos el comportamiento de la función $p \mapsto h_p(x_0)$ en este caso. Suponemos que $2^{-J} + 2^{-\beta J} \leq a \leq 2^{-J+1}$; entonces:

$$\frac{1}{a} \int_{-a}^a |F_{\alpha,\beta}(x)|^p dx = \frac{1}{a} \sum_{j=J}^{\infty} 2^{-\beta j} 2^{-\alpha p j} \sim 2^{-J(\beta + \alpha p - 1)}. \quad (5.24)$$

Por lo tanto, el valor crítico p_0 es:

$$p_0 = p(x_0) = \sup\{p : (5.24) \text{ converge}\}. \quad (5.25)$$

La elección $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ implica que $p_0 = +\infty$. No reproducimos acá la demostración de que el polinomio de Taylor es $P \equiv 0$ (cf. [1], apéndice B).

En primer lugar calculamos el exponente de Hölder de $F_{\alpha,\beta}$ en $x_0 = 0$. Hacemos notar que $F_{\alpha,\beta}$ es continua en 0, dónde se anula. Además, $|F_{\alpha,\beta}(x)| \leq |x|^\alpha$, y la igualdad se cumple en los puntos 2^{-j} . Por lo tanto, $h(0) = 0$.

Ahora calculamos los p -exponentes de $F_{\alpha,\beta}$ en $x_0 = 0$. Para ello, debemos calcular la cantidad $T_X^{(p)}(a, x_0)$ de la ec. (5.2). La ec. (5.24), junto con el hecho de que $P = 0$, indican que

$$T_X^{(p)}(a, x_0) \sim a^{\alpha + (\beta - 1)/p}. \quad (5.26)$$

Por lo tanto, el p -exponente de $F_{\alpha,\beta}$ en $x_0 = 0$ es:

$$h_p(0) = \alpha + \frac{\beta - 1}{p}, \quad \forall p \in [1, +\infty). \quad (5.27)$$

Este resultado indica que los p -exponentes $h_p(x_0 = 0)$ son diferentes para todos los valores de p y, en particular, son diferentes al exponente de Hölder.

Consideraremos ahora la situación en que $\alpha < 0$. En este caso, $F_{\alpha,\beta}$ no es acotada en una vecindad de $x_0 = 0$ y, por lo tanto, no se puede calcular el exponente de Hölder. Sin embargo, de la serie en la ec. (5.24) se ve que $F_{\alpha,\beta} \in L^p$ si y sólo si $p < p_0 = -\beta/\alpha$. Los cálculos anteriores siguen siendo válidos para estos valores de p y, por lo tanto, los p -exponentes son:

$$h_p(0) = \alpha + \frac{\beta - 1}{p}, \quad \forall p \in [1, p_0 = \beta/\alpha). \quad (5.28)$$

La mayor virtud del ejemplo constructivo provisto por la función $F_{\alpha,\beta}$ consiste en que permite mostrar que la dependencia con p de los p -exponentes está asociada a la noción de *lacunaridad temporal/espacial*. Otra característica importante es que la primitiva de $F_{\alpha,\beta}$ tiene exponente de Hölder $\alpha + \beta$ en $x_0 = 0$. Esto se deduce del hecho de que su integral en el intervalo $[2^{-l}, 2^{-l} + 2^{-\beta l}]$ es $2^{-(\alpha+\beta)l}$ y a que $F_{\alpha,\beta}$ es nula fuera del intervalo. Esta discusión es ilustrada en la Fig. 5.3, en donde se muestran las primitivas de las funciones de la Fig. 5.2. En consecuencia, la lacunaridad en la construcción también implica que la regularidad de la primitiva se incrementa en una cantidad mayor a 1; este comportamiento recuerda al de las singularidades oscilantes (*chirps*).

La discusión anterior lleva a refinar la clasificación de las singularidades oscilantes en la forma indicada en la siguiente definición.

Definición 5.5.5. Singularidad balanceada y lacunar

Se dice que una singularidad oscilantes es balanceada si la función $p \mapsto h_p(x_0)$ no depende de p , y que es lacunar en otro caso.

La clasificación de las singularidades propuesta en esta sección se esquematiza en la Fig.5.4.

5.5.3. Regularidad negativa

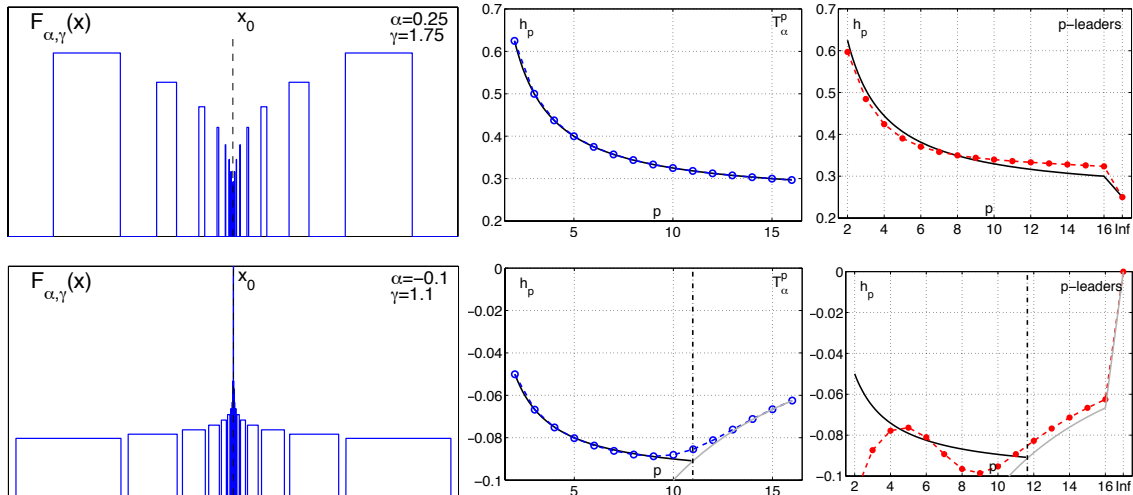
5.5.3.1. Integración fraccionaria

Como se discutió en la Sec. 2.8, una solución clásica al problema de caracterizar mediante exponentes de Hölder datos que muestran regularidad negativa (i. e. $h_{min} < 0$), es recurrir a la integración (fraccionaria). En el caso de funciones unidimensionales, a menudo se utiliza también una primitiva de X : $Y(x) = \int_{-\infty}^x X(u)du$. Este es típicamente el caso en señales biomédicas analizadas con MFDFA, como se discutirá en la Sec. 5.7. En mayores dimensiones, se requiere utilizar una integración fraccionaria (cf. Def. 2.8.2). Como se mencionó, una integración fraccionaria de orden γ provee una forma de asociar a cualquier distribución temperada X una función $X^{(-\gamma)}$ cuyo exponente h_{min} es positivo y que, por lo tanto, puede ser analizada mediante los exponentes de Hölder.

5.5.3.2. Limitaciones de la integración fraccionaria

El propósito del análisis multifractal es estudiar a los conjuntos *iso-Hölder* $E_X(h)$ (cf. Def. 2.3.3), es decir, los conjuntos de puntos con un valor determinado de su exponente de regularidad. Por lo tanto, es importante comprender la forma en que los conjuntos $E_X(h)$ se modifican ante una integración fraccionaria de orden γ .

Dos ejemplos de la función $F_{\alpha,\gamma}(x)$:
 exponente $h_p(x_0) = \alpha + (\gamma - 1)/p$



Izquierda: Funciones $F_{\alpha,\gamma}(x)$ con exponentes $h_p(x_0) = \alpha + (\gamma - 1)/p$

$(\alpha, \gamma) = (0,25; 1,75)$ (fila superior)

$(\alpha, \gamma) = (-0,1; 1,1)$ (fila inferior)

Centro: Estimación de $h_p(x_0)$ usando la definición de T_α^p en las ecs. (5.2) y (5.3) (azul)

Derecha: Estimación de $h_p(x_0)$ usando p -líderes (rojo)

Exponente teórico (negro), exponente estimado (azul y rojo) y límite L^p (gris)

Figura 5.2: **Función lacunar $F_{\alpha,\gamma}(x)$** . Dos ejemplos de la función $F_{\alpha,\gamma}(x)$, con p -exponentes positivos y negativos.

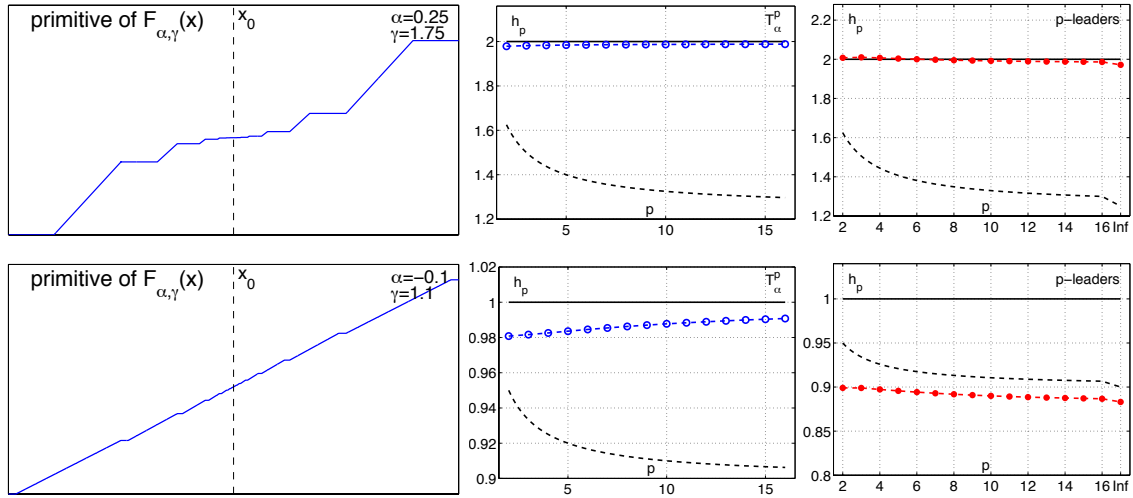
Pueden ocurrir dos situaciones. En la primera, los datos sólo contienen singularidades canónicas (por ejemplo, *cusps*). En este caso, el efecto de la integración es desplazar a los exponentes de regularidad puntuales una cantidad γ . Por lo tanto, los conjuntos *iso-Hölder* se mantienen iguales, salvo un cambio en su indexación: $E_X^{(-\gamma)}(h + \gamma) = E_X(h)$. En consecuencia, la información relacionada a la dimensión de los conjuntos originales puede ser recobrada bajo la integración fraccionaria.

La segunda situación ocurre cuando los datos contienen singularidades oscilantes. Entonces, bajo una integración fraccionaria los exponentes de regularidad puntuales se desplazan una cantidad que depende del comportamiento oscilatorio en ese punto en formas potencialmente complejas. Por lo tanto, los conjuntos $E_X(h)$ se verán mezclados y la información obtenida del análisis de los datos integrados no permitirá recuperar la información correspondiente a los datos originales.

La situación puede, incluso, volverse dramática, ya que la información cualitativa de que un punto es una singularidad oscilante puede perderse al realizar la integración fraccionaria. Ilustraremos cómo puede ocurrir esta situación con un ejemplo que muestra cómo parte de la información sobre la regularidad local se puede perder bajo la integración fraccionaria, si la función contiene singularidades oscilantes. Consideramos la siguiente función:

$$X(x) = |x - x_0|^\xi + |x - x_0|^\alpha \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right), \quad (5.29)$$

Dos ejemplos de primitivas de la función $F_{\alpha,\gamma}(x)$:
exponentes $h_p(x_0) = \alpha + \gamma \neq \alpha + (\gamma - 1)/p + 1$



Izquierda: Primitivas de las funciones $F_{\alpha,\gamma}(x)$ con exponentes $h_p(x_0) = \alpha + \gamma$

$(\alpha, \gamma) = (0,25, 1,75)$ — $h_p(x_0) = 2$ (fila superior)

$(\alpha, \gamma) = (-0,1, 1,1)$ — $h_p(x_0) = 1$ (fila inferior)

Centro: Estimación de $h_p(x_0)$ usando la definición de T_α^p en las ecs. (5.2) y (5.3) (azul)

Derecha: Estimación de $h_p(x_0)$ usando p -líderes (rojo)

Exponente teórico (negro), exponente estimado (azul y rojo) y límite L^p (gris)

negro en línea de trazos: exponentes esperados $\tilde{h}_p(x_0) = 1 + \alpha + (\gamma - 1)/p$ si $F_{\alpha,\gamma}(x)$ fuese una singularidad *cusps*.

Figura 5.3: **Primitivas de la función lacunar $F_{\alpha,\gamma}(x)$.** Primitivas de dos ejemplos de la función $F_{\alpha,\gamma}(x)$, con p -exponentes positivos y negativos.

es decir, la suma de una función *cusps* y una función *chirp*. Fijamos los parámetros de forma tal que

$$\alpha < \xi < \frac{\alpha}{1 + \beta} < 0.$$

Esto implica que la singularidad dominante en x_0 la provee la componente *chirp*. El exponente h_{min} de la componente *cusps* en x_0 es ξ , y el de la componente *chirp* es α . Por lo tanto, para poder estudiar esta función mediante exponentes de Hölder, es necesario realizar una integración fraccionaria de orden $\gamma > -\alpha$. Al realizar la integración, el exponente de Hölder de la componente *cusps* se vuelve $\xi + \gamma = \xi - \alpha$, mientras que el del *chirp* se vuelve $\alpha + \gamma(1 + \beta) = \alpha - \alpha(1 + \beta)$ [91]. Pero

$$\alpha + \gamma(1 + \beta) = (1 + \beta) \left(\frac{\alpha}{1 + \beta} - \alpha \right) > \xi + \gamma,$$

ya que $1 + \beta > 1$ y $\alpha/(1 + \beta) > \xi$ por hipótesis. En consecuencia, la componente oscilante está ahora dominada por la componente *cusps*, y la información concerniente a la singularidad originalmente dominante no puede ser recuperada por el exponente de Hölder. En otras palabras, la integración fraccionaria, requerida para calcular el exponente de Hölder, enmascara la contribución dominante que, en términos de irregularidad, estaba presente en los datos.

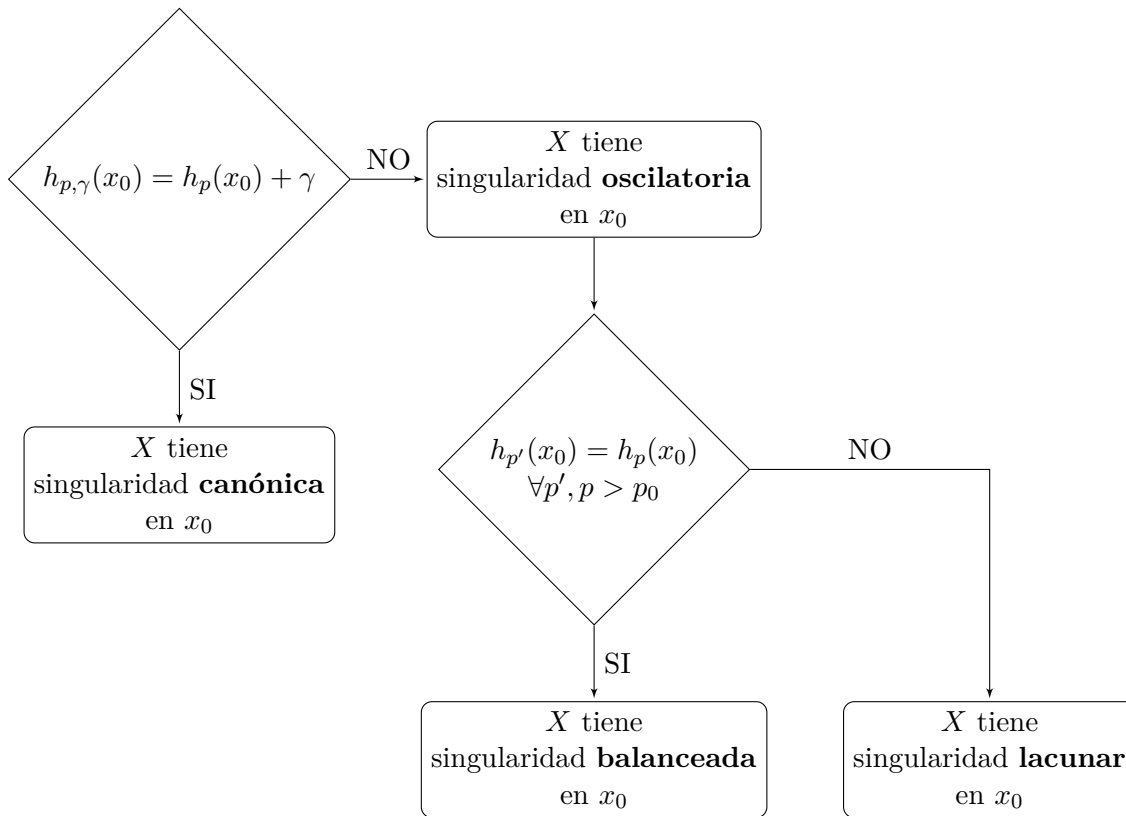


Figura 5.4: Esquema de la clasificación de singularidades basada en p -exponentes. $h_{p,\gamma}(x_0)$ denota el p -exponente de $X^{(-\gamma)}$. Además, $h_{p,0}(x_0) = h_p(x_0)$.

Esta situación es ilustrada numéricamente en la Fig. 5.5, fila inferior, y discutida con mayor detalle a continuación.

5.5.3.3. p -exponentes y regularidad negativa

Para medir regularidad negativa con $h > -1/p$, en lugar de recurrir a la integración fraccionaria y posterior medición del exponente de Hölder, se pueden utilizar los p -exponentes, siempre que $X \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$. Esto es ilustrado en la Fig. 5.5 para el ejemplo discutido en la sección anterior. La primera y segunda columna ilustran el análisis de las funciones *cusp* y *chirp* aisladas, mientras que la columna izquierda corresponde a la superposición de ambas. Se muestra el caso sin integración fraccionaria (filas superiores) y con integración fraccionaria (filas inferiores). Analizando los resultados mostrados en la columna derecha, se puede ver que cuando no se realiza integración fraccionaria (segunda fila), el análisis mediante p -exponentes recupera la contribución dominante correspondiente al *chirp*, $h_p = \alpha = -0,3$ (comparar la primera columna con la tercera), siempre que $p < p_0$ (si $p > p_0$ las estimaciones colapsan con el límite L^p indicado con la línea gris). Por el contrario, cuando se aplica la integración fraccionaria (última fila) se recupera el exponente $h_p = \xi + \gamma = 0,05$ correspondiente al *cusp* en lugar del valor $h_p = \alpha + \gamma(1 + \beta) = 0,12$ del *chirp* (comparar la segunda fila con la tercera). Cabe notar, por cierto, que al aplicar la integración fraccionaria se obtienen estimaciones

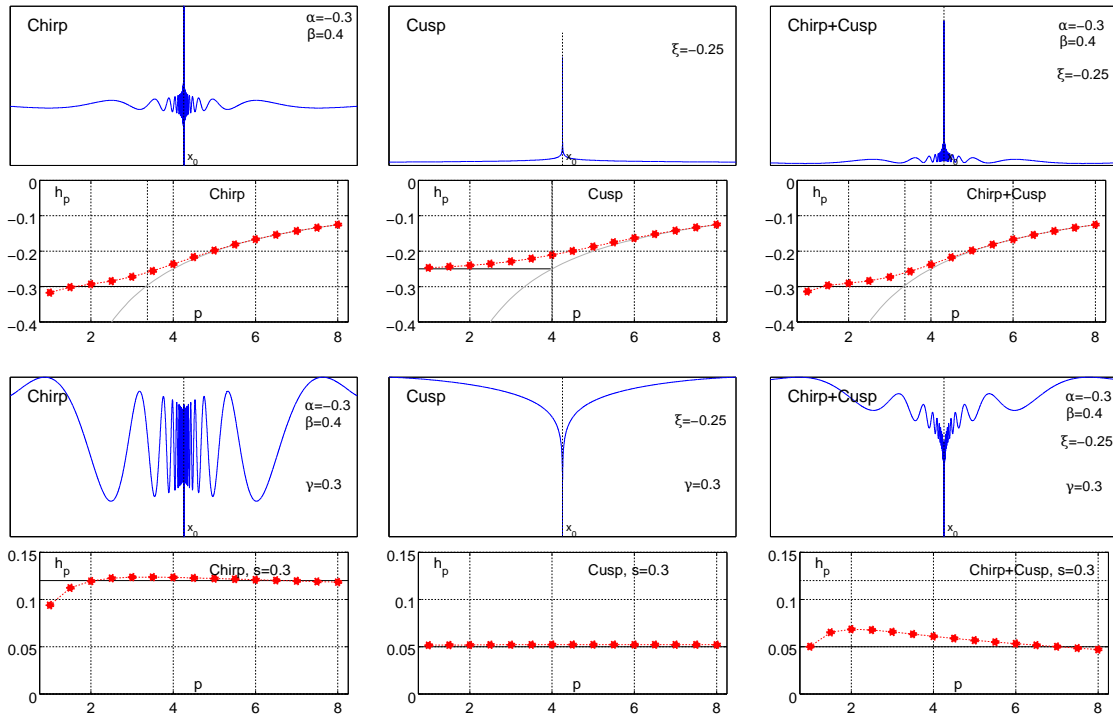


Figura 5.5: **Funciones *cusp* y *chirp***. Análisis mediante p -exponentes de la superposición de funciones *cusp* y *chirp*. Líneas rojas: análisis con p -líderes. Línea gris: límite L^p .

del exponente consistentes para todos los valores de p ya que las funciones integradas son localmente acotadas.

En conclusión, el uso de los p -exponentes permite estimar en forma correcta el exponente de regularidad dominante, independientemente del tipo de singularidad presente, evitando así los problemas que ocurren al aplicar una integración fraccionaria a los datos.

5.6. Estimación a partir de datos con resolución finita

En el cálculo del formalismo multifractal en las aplicaciones, realizado a partir de datos discretos, el practicante se enfrenta al hecho de que sólo dispone de muestras obtenidas a la resolución discreta 2^{j-1} . En consecuencia, la suma infinita en la definición de los p -líderes (ec. (5.6)) es truncada en la escala más fina disponible \check{j} .

El objetivo de esta sección es analizar el efecto que tiene la resolución finita en los p -líderes, así como proponer una modificación al formalismo multifractal que permita compensar este efecto. En primer lugar, utilizamos como modelo constructivo a las cascadas de onditas determinísticas, debido a su sencillez. Luego analizamos el modelo más general provisto por las cascadas de onditas aleatorias para verificar si las expresiones obtenidas con el modelo anterior siguen siendo válidas.

Posteriormente, en la Sec. 5.8, utilizaremos simulaciones numéricas para verificar si los factores de corrección propuestos son válidos en otros procesos multifractales.

5.6.1. Modelo basado en cascadas de onditas determinísticas

Consideramos las cascadas de onditas aleatorias presentadas en la Sec. 3.10. Por simplicidad, en esta sección denotamos con $d_{j,k}$ al coeficiente ondita $d_X(j, k)$. En forma similar, $L_{j,k,\check{j}}^{(p)} = L_{\lambda,\check{j}}^{(p)}$ denotará al p -líder $L_X^{(p)}(j, k)$ construido con resolución finita \check{j} . Consideramos que la escala más tosca disponible es $j = 0$, y que el límite de las escalas finas es $j \rightarrow -\infty$.

En la Sec. 3.10 dedujimos las expresiones para las funciones de estructura (ec. (3.90)) y los exponentes de escalamiento (ec. (3.91)) basados en coeficientes ondita, que reproducimos a continuación:

$$S_d(q, j) = 2^j \sum_{k=1}^{2^{-j}} |d_{j,k}|^q = \left(\frac{w_0^q + w_1^q}{2} \right)^j = 2^{j\zeta_d(q)}. \quad (5.30)$$

$$\zeta_d(q) = 1 - \log_2(w_0^q + w_1^q). \quad (5.31)$$

5.6.1.1. (Pseudo) líderes

Consideramos en primer lugar los “pseudo” líderes, definidos como

$$\ell_\lambda = \sup_{\lambda' \subset \lambda} |d_{\lambda'}|. \quad (5.32)$$

Observamos aquí que utilizamos la vecindad λ en lugar de la 3λ en la ec. (2.43). El uso de la vecindad λ no afecta a las propiedades de los líderes como cantidad multiresolución. De hecho, el uso de la vecindad 3λ es una formalidad teórica que permite resolver el problema de la definición de los líderes cuando los coeficientes dominantes se encuentran en la frontera de la vecindad, y no afecta a los resultados provistos por el análisis multifractal [84]. Sin embargo, su uso es preferible en nuestro contexto ya que los coeficientes $d_{\lambda'}$ con $\lambda' \subset \lambda$ corresponden a todos aquellos en el sub-árbol binario cuyo nodo raíz es d_λ . En consecuencia, el uso de los pseudo líderes permite considerar sólo los coeficientes en un mismo sub-árbol y evitar que el cálculo de cada coeficiente se “contamine” a causa del comportamiento fuertemente no estacionario impuesto por el mecanismo de construcción de la cascada.

Claramente la cascada es acotada en el caso en el que $w_1 < 1$, ya que los coeficientes d_λ disminuyen su magnitud al hacerse más fina la escala. Por lo tanto, se obtiene en forma trivial que:

$$\ell_\lambda \equiv d_\lambda \Rightarrow \zeta_d(q) \equiv \zeta_L(q).$$

Por el contrario, si $w_1 > 1$ la cascada no es acotada. En este caso, los líderes están dados por los coeficientes en las escalas más finas que han sido multiplicados sólo por w_1 :

$$\ell_{\lambda'} = d_\lambda w_1^{j'-j}, \quad \text{para } \lambda' \subset \lambda.$$

5.6.1.2. (Pseudo) p -líderes

Consideramos los pseudo p -líderes $\check{\ell}_\lambda^{(p)}$, obtenidos reemplazando la vecindad 3λ por λ en la ec. (5.6):

$$\check{\ell}_\lambda^{(p)} = \left(\sum_{\lambda' \subset \lambda} |d_{\lambda'}|^p 2^{j'-j} \right)^{1/p}. \quad (5.33)$$

Reemplazando los valores de los coeficientes dados por la ec. (3.88) y, mediante un razonamiento similar al que lleva a la ec. (3.90), tenemos que:

$$\check{\ell}_{\lambda, \check{j}}^{(p)} = d_\lambda \left(\sum_{l=0}^{j-\check{j}} \left(\frac{w_0^p + w_1^p}{2} \right)^l \right)^{1/p} = d_\lambda \left(\sum_{l=0}^{j-\check{j}} 2^{-\zeta_d(p)l} \right)^{1/p}. \quad (5.34)$$

5.6.1.3. Exponentes de escalamiento

Resolución infinita. Analizando en primer lugar lo que ocurre cuando la resolución es infinita, es decir $\check{j} \rightarrow -\infty$, a partir de la ec. (5.34) tenemos que

$$\sum_{l=0}^{j-\check{j}} 2^{-\zeta_d(p)l} = \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-\zeta_d(p)l} = \frac{1}{1 - 2^{-\zeta_d(p)l}} \quad \text{si } \zeta_d(p) < 0.$$

La suma converge si $\zeta_d(p) > 0$; en caso contrario, los p -líderes no están definidos. Como mencionáramos en la Sec. 5.3.1, la condición $\zeta_d(p) > 0$ es equivalente al requerimiento de que la función estudiada pertenezca localmente a $L^p(\mathbb{R})$. Entonces, si $\zeta_d(p) < 0$, los pseudo p -líderes son

$$\ell_{\lambda, \check{j}}^{(p)} = d_\lambda \left(\frac{1}{1 - 2^{-\zeta_d(p)l}} \right)^{1/p},$$

es decir, difieren de los coeficientes ondita sólo en un factor de escala. Por lo tanto, las funciones de estructura son

$$S_\ell^{(p)}(q, j) = 2^j \sum_{k=1}^{2^{-j}} |d_{j,k}|^q \left(\frac{1}{1 - 2^{-\zeta_d(p)l}} \right)^{q/p} = 2^{j\zeta_d(q)} \left(\frac{1}{1 - 2^{-\zeta_d(p)l}} \right)^{q/p} \sim 2^{j\zeta_d(q)}.$$

Este resultado confirma que, para este modelo, los exponentes de escalamiento basados en p -líderes son iguales a los basados en coeficientes ondita si se cumple la condición $\zeta_d(p) > 0$:

$$\zeta^{(p)}(q) \equiv \zeta_d(q) \quad \forall p \leq p_0.$$

Resolución finita. Cuando la resolución es finita, $\check{j} > -\infty$, tenemos que

$$\sum_{l=0}^{j-\check{j}} 2^{-\zeta_d(p)l} = \frac{1 - 2^{-(j-\check{j}+1)\zeta_d(p)}}{1 - 2^{-\zeta_d(p)}}.$$

En este caso, las funciones de estructura son:

$$S_{\check{\ell}}^{(p)}(q, j) = 2^{j\zeta_d(q)} \left(\frac{1 - 2^{-(j-\check{j}+1)\zeta_d(p)}}{1 - 2^{-\zeta_d(p)}} \right)^{q/p}. \quad (5.35)$$

Se puede ver que las funciones de estructura son modificadas por un factor que depende de la escala. Por tal razón, los exponentes de escalamiento basados en coeficientes ondita y en p -líderes no serán iguales.

p infinito. Por otro lado, se puede ver que

$$2^{j\zeta_d(q)} \left(\frac{1 - 2^{-(j-\check{j}+1)\zeta_d(p)}}{1 - 2^{-\zeta_d(p)}} \right)^{q/p} \rightarrow 2^{j\zeta_d(q)} \quad \text{cuando } p \rightarrow +\infty,$$

independientemente del valor de \check{j} . Por lo tanto, los líderes “convencionales” no se ven afectados por el efecto de resolución finita.

5.6.1.4. log-cumulantes

Consideramos el comportamiento de $\check{C}_m(j)$, el m -ésimo cumulante de la variable $\log(\check{\ell}_\lambda^{(p)})$. En el contexto determinístico estudiado, $\mathbb{E}[\log(\check{\ell}_\lambda^{(p)})] = \log(\check{\ell}_\lambda^{(p)})$. Por lo tanto, usando la ec. (5.34), tenemos que

$$\check{C}_1(j) = \log(\check{\ell}_\lambda^{(p)}) = \log(d_\lambda) + \frac{1}{p} \log \left(\frac{1 - 2^{-(j-\check{j}+1)\zeta_d(p)}}{1 - 2^{-\zeta_d(p)l}} \right).$$

Este resultado indica que también existe un efecto de resolución finita en el primer cumulante. Por el contrario, en el caso de los cumulantes para $m \geq 2$ no se observa esta situación ya que su definición implica la sustracción de $\check{C}_1(j)$ y, por lo tanto, su cancelación.

5.6.1.5. Estimación práctica

Según lo analizado en los párrafos anteriores, el truncamiento de la ec. (5.6) introduce un término dependiente de la escala, parametrizado por $\zeta_d(p)$ y \check{j} , en las funciones de estructura y el primer cumulante basados en p -líderes. Sin embargo, como $\zeta_d(p)$ puede ser estimado *a priori*, se pueden definir los siguientes estimadores que compensan el efecto de resolución finita, basados en las ecs. (2.69), (2.70) y (2.71):

$$\hat{\zeta}^{(p)}(q) = \sum_{j=j_m}^{j_M} w_j \left(\log_2 S^{(p)}(q, j) - \frac{q}{p} \log_2 \left(1 - 2^{-(j-\check{j}+1)\zeta_d(p)} \right) \right), \quad (5.36)$$

$$\hat{c}_1^{(p)} = (\log_2 e) \sum_{j=j_m}^{j_M} w_j \left(\hat{C}_1^{(p)}(j) - \frac{1}{p} \log \left(1 - 2^{-(j-\check{j}+1)\zeta_d(p)} \right) \right). \quad (5.37)$$

$$\hat{c}_m^{(p)} = (\log_2 e) \sum_{j=j_m}^{j_M} w_j \hat{C}_m^{(p)}, \quad m \geq 2. \quad (5.38)$$

5.6.2. Modelo basado en cascadas de onditas aleatorias

En esta sección consideramos el contexto más general proporcionado por las cascadas de onditas aleatorias. El objetivo es determinar si las expresiones obtenidas en la Sec. 5.6.1 siguen siendo válidas. Este análisis será complementado por las simulaciones numéricas de la Sec. 5.8.2.

Las cascadas de onditas aleatorias, presentadas en la Sec. 3.9, son construidas en forma similar a las cascadas determinísticas pero reemplazando los pesos w_0 y w_1 por realizaciones de una variable aleatoria positiva W (cf. ec. (3.76)). Entonces, la función de escalamiento ζ_d se define a partir del valor de esperado de la función de estructura basada en coeficientes onditas:

$$\mathbb{E} \left[2^j \sum_{k=1}^{2^{-j}} |d_{j,k}|^q \right] = 2^j \sum_{k=1}^{2^{-j}} \mathbb{E} [|d_{j,k}|^q] = \mathbb{E} [\{W^q\}^{(-j)}] = \mathbb{E} [W^q]^{-j} = 2^{-j \log_2 \mathbb{E}[W^q]} = 2^{j\zeta_d(q)},$$

en donde usamos el hecho de que los multiplicadores W son independientes, y de que $\zeta_d(q) = -\log_2 \mathbb{E}[W^q]$ (ec. (3.77)). La notación $\{X\}^{(n)}$ indica el producto de n copias independientes de la variable aleatoria X . Recordamos que, según la convención que utilizamos, j es negativo y la escala más tosca corresponde a $j = 0$. Por lo tanto, hay $-j = |j|$ multiplicadores involucrados en la construcción del coeficiente $d_{j,k}$.

Análogamente a lo realizado para la función de estructura basada en coeficientes onditas, podemos calcular los momentos de las funciones de estructura basadas en pseudo p -líderes:

$$S_\ell(q, j) = \mathbb{E} \left[2^j \sum_{k=1}^{2^{-j}} (\ell_{j,k}^{(p)})^q \right] = \mathbb{E} [(\ell_{j,k}^{(p)})^q] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\lambda' \subset \lambda} d_{\lambda'}^p 2^{j'-j} \right)^{q/p} \right].$$

Consideraremos por separado lo que ocurre con el momento de orden p y los de orden $q \neq p$.

5.6.2.1. Pseudo p -líderes, p -ésimo momento

La situación más sencilla es cuando $q = p$. En este caso, la función de estructura es:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [(\ell_{\lambda}^{(p)})^p] &= \mathbb{E} \left[\sum_{\lambda' \subset \lambda} d_{\lambda'}^p 2^{j'-j} \right] = \sum_{\lambda' \subset \lambda} 2^{j'-j} \mathbb{E} [d_{\lambda'}^p] = \\ &= \sum_{l=0}^{j-\check{j}} 2^{-l} \sum_{k=1}^{2^l} \mathbb{E} [d_{j-l,k}^p] = \sum_{l=0}^{j-\check{j}} \mathbb{E} [(\{W\}^{(l-j)})^p] = \\ &= \sum_{l=0}^{j-\check{j}} \mathbb{E} [W^p]^{l-j} = \mathbb{E} [W^p]^{-j} \sum_{l=0}^{j-\check{j}} \mathbb{E} [W^p]^l = \\ &= 2^{j\zeta_d(p)} \sum_{l=0}^{j-\check{j}} 2^{-\zeta_d(p)l} = \\ &= 2^{j\zeta_d(p)} \frac{1 - 2^{-(j-\check{j}+1)\zeta_d(p)}}{1 - 2^{-\zeta_d(p)}}, \end{aligned} \tag{5.39}$$

en donde utilizamos los índices l y k para referirnos a los coeficientes ondita correspondientes al cubo λ . Por lo tanto, en el caso $q = p$ recuperamos exactamente la misma expresión que fuera obtenida usando las cascadas determinísticas.

5.6.2.2. Pseudo p -líderes, q -ésimo momento

La función de estructura para $q \neq p$ es:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\ell_\lambda^{(p)})^q] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{\lambda' \subset \lambda} d_{\lambda'}^p 2^{j'-j}\right)^{q/p}\right] \\ &= \mathbb{E}[d_{j,\cdot}^q] \mathbb{E}\left[\left(\sum_{l=0}^{j-\check{j}} 2^{-l} \sum_{k=1}^{2^l} c_{-l,k}^p\right)^{q/p}\right] \\ &= 2^{j\zeta_d(q)} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{l=0}^{j-\check{j}} 2^{-l} \sum_{k=1}^{2^l} d_{-l,k}^p\right)^{q/p}\right]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

El valor esperado en la ec. (5.40) presenta dificultades en su cálculo explícito para todo q y p , debido a la correlación entre los coeficientes ondita. Sin embargo, se puede utilizar la desigualdad de Jensen para obtener cotas. Para $x > 0$ y $q > p$, la función $\varphi(x) = x^{q/p}$ es convexa y, por lo tanto, según la desigualdad de Jensen:

$$\begin{aligned} 2^{j\zeta_d(q)} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{l=0}^{j-\check{j}} 2^{-l} \sum_{k=1}^{2^l} d_{-l,k}^p\right)^{q/p}\right] &\geq 2^{j\zeta_d(q)} \left(\mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{j-\check{j}} 2^{-l} \sum_{k=1}^{2^l} d_{-l,k}^p\right]\right)^{q/p} \\ &\geq 2^{j\zeta_d(q)} \left(\sum_{l=0}^{j-\check{j}} 2^{-\zeta_d(p)l}\right)^{q/p} \\ &\geq 2^{j\zeta_d(q)} \left(\frac{1 - 2^{-(j-\check{j}+1)\zeta_d(p)}}{1 - 2^{-\zeta_d(p)}}\right)^{q/p}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

En forma análoga, para $x > 0$ y $q < p$, la función $\phi(x) = (x)^{q/p}$ es cóncava y, por lo tanto

$$2^{j\zeta_d(q)} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{l=0}^{j-\check{j}} 2^{-l} \sum_{k=1}^{2^l} d_{-l,k}^p\right)^{q/p}\right] \leq 2^{j\zeta_d(q)} \left(\frac{1 - 2^{-(j-\check{j}+1)\zeta_d(p)}}{1 - 2^{-\zeta_d(p)}}\right)^{q/p}. \quad (5.42)$$

Las ecs. (5.41) y (5.42) muestran que el factor de corrección obtenido para las cascadas determinísticas actúa como cota inferior o superior del factor de corrección necesario en el contexto aleatorio, dependiendo del valor de q relativo a p .

5.6.2.3. Pseudo p -líderes, $2p$ -ésimo momento

Con el fin de obtener un resultado más preciso que las cotas brindadas por la desigualdad de Jensen, estudiamos el comportamiento de las funciones de estructura

en un nuevo caso particular: $q = 2p$. A partir de la ec. (5.40), el $2p$ -ésimo momento de los pseudo p -líderes es:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(\ell_\lambda^{(p)})^{2p}\right] &= 2^{j\zeta_d(2p)} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{l=0}^{j-\check{j}} 2^{-l} \sum_{k=1}^{2^l} d_{-l,k}^p\right)^2\right] \\
&= 2^{j\zeta_d(2p)} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{l_1=0}^{j-\check{j}} 2^{-l_1} \sum_{k_1=1}^{2^{l_1}} d_{-l_1,k_1}^p\right) \left(\sum_{l_2=0}^{j-\check{j}} 2^{-l_2} \sum_{k_2=1}^{2^{l_2}} d_{-l_2,k_2}^p\right)\right] \\
&= 2^{j\zeta_d(2p)} \left(\sum_{l_1=0}^{j-\check{j}} \sum_{k_1=1}^{2^{l_1}} \sum_{l_2=0}^{j-\check{j}} \sum_{k_2=1}^{2^{l_2}} 2^{-l_1-l_2} \mathbb{E}\left[d_{-l_1,k_1}^p d_{-l_2,k_2}^p\right]\right). \quad (5.43)
\end{aligned}$$

Procedemos ahora a calcular $\mathbb{E}\left[d_{-l_1,k_1}^p d_{-l_2,k_2}^p\right]$. Recordamos que el coeficiente ondita $d_{j,k}$ se obtiene mediante el producto de $|j|$ realizaciones de la variable aleatoria W (cf. Sec. 3.9). Sea $\delta(l_1, l_2, k_1, k_2)$ la escala del menor ancestro común entre los coeficientes d_{-l_1,k_1}^p y d_{-l_2,k_2}^p . Hacemos notar que $\delta(l_1, l_2, k_1, k_2)$ toma valores en el intervalo $[0, \min(l_1, l_2)]$. Entonces, siguiendo a [22], podemos expresar a los coeficientes ondita como:

$$\begin{aligned}
d_{-l_1,k_1} &= W_1 \cdots W_{\delta(l_1, l_2, k_1, k_2)} W_{\delta(l_1, l_2, k_1, k_2)+1}^{(1)} \cdots W_{l_1}^{(1)}, \\
d_{-l_2,k_2} &= W_1 \cdots W_{\delta(l_1, l_2, k_1, k_2)} W_{\delta(l_1, l_2, k_1, k_2)+1}^{(2)} \cdots W_{l_2}^{(2)}, \quad (5.44)
\end{aligned}$$

en donde W_i , $W_i^{(1)}$ y $W_i^{(2)}$ son realizaciones independientes de W . El punto clave es que los primeros $\delta(l_1, l_2, k_1, k_2)$ multiplicadores son los mismos en los dos coeficientes ondita. Entonces,

$$\mathbb{E}\left[d_{-l_1,k_1}^p d_{-l_2,k_2}^p\right] = \mathbb{E}\left[W^{2p}\right]^{\delta(l_1, l_2, k_1, k_2)} \mathbb{E}\left[W^p\right]^{l_1+l_2-2\delta(l_1, l_2, k_1, k_2)}. \quad (5.45)$$

La función $\delta(l_1, l_2, k_1, k_2)$ depende en forma compleja de las posiciones relativas de los dos coeficientes en el árbol. Sin embargo, podemos analizar en forma sencilla los dos casos extremos.

Caso 1: $\delta(l_1, l_2, k_1, k_2) \equiv 0$. En este caso, los dos coeficientes ondita analizados no comparten multiplicadores y, por lo tanto, son independientes. Entonces,

$$\mathbb{E}\left[d_{-l_1,k_1}^p d_{-l_2,k_2}^p\right] = \mathbb{E}\left[W^p\right]^{l_1+l_2}.$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(\ell_\lambda^{(p)})^{2p}\right] &= 2^{j\zeta_d(2p)} \left(\sum_{l_1=0}^{j-\check{j}} \sum_{k_1=1}^{2^{l_1}} \sum_{l_2=0}^{j-\check{j}} \sum_{k_2=1}^{2^{l_2}} 2^{-l_1-l_2} \mathbb{E}[W^p]^{l_1+l_2} \right) \\
&= 2^{j\zeta_d(2p)} \left(\sum_{l_1=0}^{j-\check{j}} \sum_{k_1=1}^{2^{l_1}} 2^{-l_1} \mathbb{E}[W^p]^{l_1} \sum_{l_2=0}^{j-\check{j}} \sum_{k_2=1}^{2^{l_2}} 2^{-l_2} \mathbb{E}[W^p]^{l_2} \right) \\
&= 2^{j\zeta_d(2p)} \left(\sum_{l_1=0}^{j-\check{j}} \mathbb{E}[W^p]^{l_1} \sum_{l_2=0}^{j-\check{j}} \mathbb{E}[W^p]^{l_2} \right) \\
&= 2^{j\zeta_d(2p)} \left(\frac{1 - 2^{-(j-\check{j}+1)\zeta_d(p)}}{1 - 2^{-\zeta_d(p)}} \right)^2. \tag{5.46}
\end{aligned}$$

Es decir que en este caso recuperamos nuevamente el factor de corrección obtenido para las cascadas determinísticas.

Caso 2: $\delta(l_1, l_2, k_1, k_2) = \min(l_1, l_2)$. Ahora los dos coeficientes ondita comparten la mayor cantidad posible de multiplicadores y, por lo tanto, están altamente correlacionados. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $l_1 \leq l_2$ y que, por lo tanto, los coeficientes tienen l_1 multiplicadores en común. Entonces,

$$\mathbb{E}\left[d_{-l_1, k_1}^p d_{-l_2, k_2}^p\right] = \mathbb{E}\left[W^{2p}\right]^{l_1} \mathbb{E}\left[W^p\right]^{l_2-l_1}.$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(\ell_\lambda^{(p)})^{2p}\right] &= 2^{j\zeta_d(2p)} \left(\sum_{l_1=0}^{j-\check{j}} \sum_{k_1=1}^{2^{l_1}} \sum_{l_2=0}^{j-\check{j}} \sum_{k_2=1}^{2^{l_2}} 2^{-l_1-l_2} \mathbb{E}\left[W^{2p}\right]^{l_1} \mathbb{E}\left[W^p\right]^{l_2-l_1} \right) \\
&= 2^{j\zeta_d(2p)} \left(\sum_{l_1=0}^{j-\check{j}} \mathbb{E}\left[W^{2p}\right]^{l_1} \mathbb{E}\left[W^p\right]^{-l_1} \sum_{l_2=0}^{j-\check{j}} \mathbb{E}\left[W^p\right]^{l_2} \right) \\
&= 2^{j\zeta_d(2p)} \frac{1 - 2^{-(j-\check{j}+1)(\zeta_d(2p)-\zeta_d(p))}}{1 - 2^{-(\zeta_d(2p)-\zeta_d(p))}} \frac{1 - 2^{-(j-\check{j}+1)\zeta_d(p)}}{1 - 2^{-\zeta_d(p)}}. \tag{5.47}
\end{aligned}$$

Es interesante notar que si la función de escalamiento es lineal, entonces $\zeta_d(2p) = 2\zeta_d(p)$, y, por lo tanto, también se obtiene en este caso el mismo resultado que con la cascada determinística.

Comentarios. El análisis de los dos casos considerados permite observar lo siguiente:

- En el caso 1 se recupera la misma expresión que para la cascada determinística y que para la cascada aleatoria con $q = p$.
- Si la función de escalamiento es lineal, se obtiene el mismo resultado en ambos casos. Además, si $\zeta_d(2p) \approx 2\zeta_d(p)$, lo cual suele ocurrir en la práctica, los términos no lineales en ambos casos son parecidos.

En particular, esta es la situación para valores de p altos, cuando las funciones de estructura se ven afectadas por el efecto de linealización [12, 18, 19, 101]. Entonces, desde un punto de vista práctico, los dos casos extremos son equivalentes para valores de p altos.

- La situación descrita por el caso 1, i. e. $\delta(l_1, l_2, k_1, k_2) \equiv 0$, es la que ocurre con mayor frecuencia. De hecho, dado el nodo (coeficiente) indexado por (l_1, k_1) , los nodos (l_2, k_2) para los que $\delta(l_1, l_2, k_1, k_2) = 0$ son todos aquellos en el subárbol de la raíz que no contiene a (l_1, k_1) . Esta cantidad es exactamente la mitad de los coeficientes. De la misma manera, un cuarto de los coeficientes comparte un sólo multiplicador, un octavo comparte dos, etc.

Dado que las contribuciones de todos los valores de $\delta(l_1, l_2, k_1, k_2)$ son promediadas (ec. (5.43) y ec. (5.45)), es razonable suponer que el término no lineal que multiplica a las funciones de estructura es cercano al del caso 1. Esta aseveración se comprueba en las simulaciones numéricas de la Sec. 5.8.2.

- La discrepancia entre el término no lineal correspondiente al caso 2 y el obtenido para las cascadas determinísticas se debe a la alta correlación entre los coeficientes ondita en distintas posiciones del árbol impuesta por la construcción de la cascada. Por lo tanto, es razonable suponer que la diferencia entre los factores será menor en procesos en los que los coeficientes ondita estén más descorrelacionados.

5.6.2.4. Pseudo p -líderes, primer log-cumulante

Para simplificar la notación en esta sección, definiremos la función

$$\gamma(j, \zeta_d) = \frac{1 - 2^{-(j-\check{j}+1)\zeta_d}}{1 - 2^{-\zeta_d}}. \quad (5.48)$$

El primer cumulante $C_1(j)$ es $\mathbb{E}[\log(\ell_\lambda^{(p)})]$ para los p -líderes y $\mathbb{E}[\log(d_\lambda)]$ para los coeficientes ondita. El objetivo en esta sección es obtener una expresión para $\mathbb{E}[\log(\ell_\lambda^{(p)})]$ en términos de $\mathbb{E}[\log(d_\lambda)]$.

Utilizamos una expansión de Taylor de segundo orden de $\log(X)$ en torno a $\mathbb{E}[X]$:

$$\log(X) = \log(\mathbb{E}[X]) + \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[X]} - \frac{(X - \mathbb{E}[X])^2}{2\mathbb{E}[X]^2}.$$

Por lo tanto, el valor esperado de $\mathbb{E}[\log(X)]$ es:

$$\mathbb{E}[\log(X)] = \log(\mathbb{E}[X]) - \frac{\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]^2}{2\mathbb{E}[X]^2} = \log(\mathbb{E}[X]) - \frac{\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2}{2\mathbb{E}[X]^2}. \quad (5.49)$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\log(\ell_\lambda^{(p)})] &= \frac{1}{p} \mathbb{E}[\log(\ell_\lambda^{(p)})^p] \\ &= \frac{1}{p} \left(\log(\mathbb{E}[(\ell_\lambda^{(p)})^p]) - \frac{\mathbb{E}[(\ell_\lambda^{(p)})^{2p}] - \mathbb{E}[(\ell_\lambda^{(p)})^p]^2}{2\mathbb{E}[(\ell_\lambda^{(p)})^p]^2} \right). \end{aligned} \quad (5.50)$$

De las secciones anteriores (ecs. (5.39) y (5.43)) tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\log(\ell_\lambda^{(p)})^p\right] &= 2^{j\zeta_d(p)} \gamma(j, \zeta_d(p)), \\ \mathbb{E}\left[\log(\ell_\lambda^{(p)})^{2p}\right] &= \begin{cases} 2^{j\zeta_d(2p)} \gamma^2(j, \zeta_d(p)), & \text{caso 1,} \\ 2^{j\zeta_d(2p)} \gamma(j, \zeta_d(p)) \gamma(j, \zeta_d(2p) - \zeta_d(p)), & \text{caso 2.} \end{cases}\end{aligned}$$

Considerando en la ecuación anterior que $2^{j\zeta_d(p)} = \mathbb{E}[d_\lambda^p]$, para el primer término del lado derecho de la ec. (5.50) tenemos

$$\frac{1}{p} \log\left(\mathbb{E}\left[(\ell_\lambda^{(p)})^p\right]\right) = \frac{1}{p} \log\left(\mathbb{E}[d_\lambda^p]\right) + \frac{1}{p} \log\left(\gamma(j, \zeta_d(p))\right). \quad (5.51)$$

Si definimos la siguiente función, que contempla los dos términos no lineales en la sección anterior:

$$\theta(j, p) = \begin{cases} 1, & \text{caso 1,} \\ \frac{\gamma(j, \zeta_d(2p) - \zeta_d(p))}{\gamma(j, \zeta_d(p))}, & \text{caso 2,} \end{cases} \quad (5.52)$$

podemos expresar al segundo término del lado derecho de la ec. (5.50) como

$$\begin{aligned}\frac{1}{2p} \left(\frac{\mathbb{E}\left[(\ell_\lambda^{(p)})^{2p}\right]}{\mathbb{E}\left[(\ell_\lambda^{(p)})^p\right]^2} - 1 \right) &= \frac{1}{2p} \left(\frac{2^{-j\zeta_d(2p)}}{2^{-j2\zeta_d(p)}} \theta(j, p) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2p} \left(\frac{2^{j\zeta_d(2p)}}{2^{j2\zeta_d(p)}} - 1 \right) + \frac{1}{2p} \left(\frac{2^{j\zeta_d(2p)}}{2^{j2\zeta_d(p)}} \theta(j, p) - \frac{2^{j\zeta_d(2p)}}{2^{j2\zeta_d(p)}} \right). \quad (5.53)\end{aligned}$$

Combinando la ec. (5.51) y la ec. (5.53) tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\log(\ell_\lambda^{(p)})\right] &= \frac{1}{p} \log(\mathbb{E}[d_\lambda^p]) + \frac{1}{p} \log(\gamma(j, \zeta_d(p))) - \\ &\quad - \frac{1}{2p} \left(\frac{2^{j\zeta_d(2p)}}{2^{j2\zeta_d(p)}} - 1 \right) + \frac{1}{2p} \frac{2^{j\zeta_d(2p)}}{2^{j2\zeta_d(p)}} (\theta(j, p) - 1). \quad (5.54)\end{aligned}$$

En el primer y tercer términos de la ec. (5.54) podemos reconocer la expansión de Taylor de $\mathbb{E}[\log(d_\lambda)]$ alrededor de $\mathbb{E}[d_\lambda]$ (cf. ec. (5.49)):

$$\mathbb{E}[\log(d_\lambda)] = \log(\mathbb{E}[d_\lambda]) - \left(\frac{\mathbb{E}[d_\lambda^2]}{2\mathbb{E}[d_\lambda]^2} - 1 \right). \quad (5.55)$$

Por lo tanto, el primer cumulante de $\ell_\lambda^{(p)}$ es:

$$\mathbb{E}\left[\log(\ell_\lambda^{(p)})\right] = \mathbb{E}[\log(d_\lambda)] + \frac{1}{p} \log(\gamma(j, \zeta_d(p))) - \frac{1}{2p} \frac{2^{j\zeta_d(2p)}}{2^{j2\zeta_d(p)}} (\theta(j, p) - 1). \quad (5.56)$$

Comentarios. Podemos hacer las siguientes observaciones sobre el resultado en la ec. (5.56):

- Los dos primeros términos del lado derecho de la ec. (5.56) corresponden al primer cumulante con el término no lineal obtenido a partir de las cascadas determinísticas.
- El tercer término del lado derecho de la ec. (5.56) corresponde a las discrepancias observadas en el $2p$ -ésimo momento, que se deben a las correlaciones entre los coeficientes ondita en la cascada.
- En el caso 1 de la Sec. 5.6.2.3, $\theta(m, p) = 1$ y se recupera la relación obtenida para la cascada determinística.
- Si la función ζ_d es lineal, $\zeta_d(2p) = 2\zeta_d(p)$ implica que $\theta(j, p) = 0$ y también se recupera la relación obtenida para la cascada determinística.
- Conforme a lo discutido al final de la Sec. 5.6.2.3, el caso 1 es el más frecuente y, por lo tanto, su impacto es dominante. Este hecho se muestra numéricamente en la Sec. 5.8.2.

5.6.3. Conclusiones

En esta sección utilizamos el modelo sencillo provisto por las cascadas de onditas determinísticas para analizar el efecto de la resolución finita de los datos en los p -líderes. Demostramos que, bajo este modelo, tanto las funciones de estructura como el primer cumulante se ven afectados por un factor no lineal dependiente de la escala. También mostramos que el conocimiento de este factor no lineal permite cancelar su efecto al momento de realizar las regresiones lineales. A continuación utilizamos el modelo más complejo de las cascadas de onditas aleatorias para estudiar la validez de las expresiones obtenidas anteriormente. La obtención de los factores exactos en este caso es difícil, debido a las altas correlaciones entre los coeficientes ondita. Sin embargo, mostramos que, en situaciones seleccionadas, los términos no lineales se corresponden con, o son similares a, los obtenidos con el modelo determinístico. Bajo la hipótesis de que todos los coeficientes son independientes, se recupera el comportamiento del modelo determinístico. Dado que la cantidad de coeficientes fuertemente correlacionados es pequeña, hacemos la suposición de que su efecto en la práctica es pequeño y que, por lo tanto, los factores de corrección propuestos son válidos también en el contexto estocástico. En la Sec. 5.8.2 mostraremos mediante simulaciones numéricas que esta suposición parecería cumplirse en la práctica y que los factores de corrección propuestos son efectivos.

5.7. Relación con MF DFA

En la Sec. 2.5.6.1 presentamos el formalismo multifractal basado en MF DFA. Como discutimos en dicha sección, esta técnica es ampliamente utilizada en la práctica, en particular en las aplicaciones biomédicas. Sin embargo, fue propuesta originalmente como un algoritmo [93], y hasta el presente no existen resultados

teóricos que garanticen su validez. En esta sección mostramos que la cantidad multirresolución empleada en MF DFA puede ser interpretada en términos de los p -exponentes. Este resultado nos permitirá brindar un soporte teórico a dicha técnica. Además, realizamos una comparación exhaustiva entre el formalismo multifractal basado en p -líderes y MF DFA, tanto desde un punto de vista práctico como teórico.

5.7.1. MF DFA

Como discutimos en la Sec. 2.5.6.1, la técnica de MF DFA es una extensión de DFA que permite realizar un análisis multifractal. Originalmente, la técnica de DFA fue empleada para el estudio del parámetro H de autosimilaridad y está basada en la cantidad multirresolución

$$T_X^{(DFA)}(a, x) = |X(x) - P_{x,a,N_P}(x)|.$$

Como ya mencionamos, la extensión natural de DFA al análisis multifractal hubiera sido utilizar la cantidad $T_X^{(DFA)}(a, x)$ para formar las funciones de estructura y el consiguiente formalismo multifractal. Sin embargo, esta estrategia no hubiera brindado resultados satisfactorios, principalmente por la inestabilidad numérica con valores de q negativos. (cf. Sec. 2.5.6.1).

En lugar de esto, en un contribución sumamente ingeniosa [93], Kantelhardt y colaboradores propusieron utilizar la siguiente cantidad multirresolución:

$$F(a, k) = \left(\frac{1}{a} \sum_{i=1}^a |X(ak + i) - P_{k,a,N_P}(i)|^2 \right)^{1/2}, \quad k = 1, \dots, \frac{N}{a}, \quad (5.57)$$

en donde N es la cantidad de muestras disponibles. El polinomio P_{x,a,N_P} es de orden N_P , determinado *a priori*, y sus coeficientes se obtienen mediante un ajuste de mínimos cuadrados de los datos contenidos en un intervalo de ancho a y con origen en x_k . Recordamos que en la Sec. 2.5.6.1 presentamos el formalismo multifractal basado en esta cantidad multirresolución.

5.7.2. p -exponentes y MF DFA

Si se compara la definición de la cantidad multirresolución $T^{(p)}$ empleada en la definición del p -exponente (ec. (5.2)), con la de $F(a, k)$ (ec. (5.57)), se puede ver claramente que la segunda es equivalente a la primera, con $p = 2$, y con una versión discretizada de la integral continua de la ec. (5.2). Además, en la versión de MF DFA el polinomio de Taylor teórico es reemplazado por un polinomio empírico *guiado por los datos y ajustado localmente*.

Este análisis indica que MF DFA puede ser interpretado *a posteriori* en términos del análisis basado en p -exponentes. Esto permite, a su vez, realizar una fundamentación teórica del método. En lo que resta de la sección comparamos a las técnicas basadas en MF DFA y p -líderes desde un punto de vista tanto práctico como teórico.

5.7.2.1. Regularidad local

En primer lugar, MFDFA fue originalmente asociado al análisis de la regularidad local medida por el exponente de Hölder [93]. En este capítulo mostramos que $F(a, k)$ debe ser relacionado con una caracterización de la regularidad basada en p -exponentes. En particular, la aplicación de MFDFA mide el 2-exponente en lugar del exponente de Hölder, como se indica en [93]. Como vimos en la Sec. 5.5, ambos exponentes coinciden sólo en el caso de las singularidades p -invariantes.

5.7.2.2. Selección de p

En MFDFA, p se fija arbitrariamente en 2, mientras que los p -exponentes están teóricamente definidos para $p \in [1, p_0)$. El uso de menores valores de p permite analizar un mayor espectro de singularidades, y además existen otros beneficios prácticos que serán discutidos en la Sec. 5.8.

5.7.2.3. Regularidad local e integración

En señales reales, y particularmente en las aplicaciones biomédicas (e. g. variabilidad de la frecuencia cardíaca o resonancia magnética funcional), se observa que $h_{min} < 0$. Este hecho explica la razón por la cual el algoritmo de MFDFA comienza con la integración de la señal [93]. A la luz de los resultados de este capítulo, queda claro que este preprocesamiento de los datos no es necesario siempre que se cumpla la condición $\zeta_d(p) > 0$ y $h < -1/p$. De hecho, esta integración podría ser perjudicial si la señal contiene singularidades oscilantes, como se mostró en la Sec. 5.5.3 y en la Fig. 5.5.

5.7.2.4. Escalas disponibles para la estimación

En el caso del formalismo basado en p -líderes, la escala más fina disponible para el análisis sólo depende del período de muestreo con el que fueron adquiridos los datos; si los adquisición se realizó con un período Δx , entonces la escala más fina es $2\Delta x$. Por su parte, la escala más tosca está limitada por los efectos de borde del filtrado y, por lo tanto, depende de longitud del filtro usado en la DWT, que a su vez depende en forma directa de N_ψ .

En el caso de MFDFA ocurre la situación opuesta. La escala más tosca (i. e. la longitud N de la señal X) siempre puede ser analizada por MFDFA (ya que siempre se puede ajustar un único polinomio a todas las muestras). Sin embargo, la escala más fina que se puede analizar depende del orden N_P de los polinomios. En efecto, se necesitan al menos $N_P + 2$ puntos en la escala más fina para ajustar el polinomio correspondiente. En consecuencia, las $\Delta j = \lceil \log_2(N_P + 2) \rceil - 1$ escalas más finas pueden ser analizadas mediante p -líderes pero no con MFDFA. Como discutimos en la Sec. 4.4.2, desde un punto de vista estadístico es preferible tener acceso a las escalas finas antes que a las toscas para realizar las estimaciones.

5.7.2.5. Polinomio

Una ventaja de basar la cantidad multirresolución en los coeficientes ondita es que se elimina la necesidad de conocer el polinomio de Taylor. Por el contrario, en MF DFA se requiere una estimación explícita de dicho polinomio.

A pesar de estar inspirado en la definición del exponente de Hölder, el polinomio $P_{x,a,N_P}(x)$ se obtiene en la práctica mediante un ajuste por mínimos cuadrados de $X(u)$ para $u \in [x, x + a]$. Por lo tanto, dicho polinomio depende de la escala a , y su orden N_P es fijo y prescrito *a priori*. Esto contrasta con el requerimiento teórico del polinomio de Taylor, que no depende de la escala sino que sólo cambia (en sus coeficientes pero posiblemente también en su orden) con la posición x .

Desde un punto de vista práctico, ambos métodos requieren la elección de un parámetro relacionado con la regularidad de la cantidad multirresolución: el orden del polinomio N_P en MF DFA y la cantidad de momentos nulos N_ψ en los p -líderes.

La elección de N_ψ y N_P es considerada habitualmente en términos de la robustez a tendencias (cf. e. g. [118, 140, 143]). Supóngase que los datos analizados están corrompidos por una tendencia suave aditiva, considerada como ruido. Ya fue documentado (e.g. [118, 140]) que incrementar N_ψ disminuye el impacto de las tendencias aditivas en la estimación de los exponentes de escalamiento. El precio práctico de incrementar N_ψ consiste en la pérdida de coeficientes debido a los efectos de borde. En el caso de MF DFA, el aumento de N_P también brinda robustez ante las tendencias suaves [35, 77]. Sin embargo, esto depende más de la naturaleza de las tendencias que en el caso de las onditas (cf. Sec. 5.8). Además, el incremento de N_P tiene un efecto potencialmente importante en las estimaciones prácticas ya que, como se discutió en el punto anterior, conlleva la pérdida de escalas finas.

Resumiendo, la elección del parámetro N_ψ posee mejores fundamentos teóricos y tiene menores implicaciones prácticas que la de N_P . La substracción del polinomio involucrado en DFA y MF DFA es, por lo tanto, más intrincada de lo que pueda parecer, y al momento de escribir este trabajo no hay guías teóricas que ayuden en esta elección.

5.7.2.6. Extensión a mayores dimensiones

Desde un punto de vista teórico, la extensión de los formalismos basados en MF DFA y p -líderes a mayores dimensiones es directa y no presenta mayores complicaciones. En la práctica, sin embargo, el ajuste de los polinomios en MF DFA se vuelve complejo. Según el conocimiento del autor, sólo existen unos pocos intentos de una extensión bidimensional de MF DFA [73, 133]. Por el contrario, la extensión del formalismo basado en p -líderes es directa, ya que sólo requiere del cálculo de una DWT de orden superior [10, 88, 153], que se obtiene eficientemente mediante el producto tensorial de onditas unidimensionales.

5.7.2.7. Costo computacional

La implementación práctica del formalismo multifractal, como se desarrolló en la Sec. 2.7, es la misma independientemente de la cantidad multirresolución que se utilice. Por lo tanto, para comparar el costo computacional de los formalismos

basados en MF DFA y en p -líderes basta con analizar el costo correspondiente al cálculo de la cantidad multirresolución.

MF DFA. Sean N la cantidad de muestras disponibles, A la cantidad de escalas utilizadas y $N_a = \lceil N/a \rceil$ el número de segmentos de longitud a . El costo computacional de calcular la cantidad $F(a, k)$ en la ec. (5.57) se obtiene como sigue:

- Para a y k fijos:
 - Ajuste de P_{a,k,N_P} : $O(a)$.
 - La suma en la ec. (5.57): $O(a)$.
 - Costo total: $O(a)$.
- Para la escala a fija, considerando los N_a segmentos de longitud a , el costo es

$$N_a O(a) = O(N_a a) = O\left(\frac{N}{a} a\right) = O(N).$$

Cabe destacar que el costo de calcular todos los coeficientes en la escala a es independiente de la escala.

- Considerando finalmente las A escalas disponibles, el costo total es $A O(N) = O(AN)$.
- Para facilitar la comparación con los p -líderes, suponemos que $F(a, k)$ se calcula en un conjunto diádico de escalas: $a \in \{2^j\}, j = 1 \dots \log_2(N)$. En este caso tenemos que $A = \log_2(N)$ y, por lo tanto, la complejidad total es $O(N \log(N))$.

p -líderes. Sean N la cantidad de muestras, $N_j = N2^{-j}$ la cantidad de coeficientes en la escala j , y L la longitud de los filtros h y g utilizados en el cálculo de la DWT. El costo computacional para calcular la cantidad $L_\lambda^{(p)}$ en la ec. (5.6) es:

- Para una escala fija 2^j :
 - Aplicación de los filtros g y h : $O(LN_j)$
 - Submuestreo: $O(N_j)$
 - Los p -líderes se calculan eficientemente según la ec. (5.8) con un costo de $O(1)$ para cada posición k y, por lo tanto, un costo de $O(N_j)$ para toda la escala j .
 - Costo total: $O(N_j) = O(LN_j) + O(N_j) + O(N_j)$.
- Considerando todas las escalas $j \in [1, J]$, el costo total es:

$$\sum_{j=1}^J O(N_j) = O\left(N \sum_{j=1}^J 2^{-j}\right) = O(N).$$

Conclusión. Se puede ver que ambas técnicas pueden ser implementadas mediante algoritmos eficientes. Sin embargo, el cálculo de los p -líderes, al estar basado en el cálculo de la DWT mediante un banco de filtros y submuestreo, tiene un mejor desempeño, logrando una complejidad lineal.

5.7.3. Conclusiones

La conexión que realizamos en esta sección entre MF DFA y p -líderes brinda un soporte teórico a la elección de $F(a, k)$ como cantidad multirresolución en MF DFA que, de otra forma, hasta el presente se ha basado en una intuición relevante pero *ad hoc* usada para construir un formalismo multifractal. Además, mostramos explícitamente que MF DFA mide en realidad la regularidad local mediante el 2-exponente en lugar del exponente de Hölder. Por lo tanto, el formalismo multifractal basado en p -líderes puede ser considerado como una extensión (a diferentes p) y una reformulación en términos de onditas de MF DFA.

También es interesante notar que los p -exponentes y los p -líderes, por un lado, y MF DFA por el otro, fueron propuestos en forma independiente y en campos diferentes. Los primeros aparecieron en la literatura matemática alrededor de 2005 [85, 90], mientras que MF DFA lo hizo en la comunidad física alrededor del año 2002 [93]. El análisis realizado en este capítulo, y en los artículos que lo reportan [1, 3, 4], constituye, según el conocimiento del autor, la primera ocasión en que estas dos nociones son relacionadas y comparadas.

5.8. Simulaciones numéricas

El objetivo de esta sección es ilustrar y validar numéricamente el formalismo multifractal basado en p -líderes, y compararlo con el basado en MF DFA. Con este fin, aplicamos ambos formalismos a realizaciones de procesos aleatorios sintéticos con p -espectros multifractales prescritos. La calidad de las estimaciones obtenidas mediante el formalismo basado en p -líderes es estudiada en detalle, y comparada con MF DFA. Los resultados ilustran los beneficios de la flexibilidad adicional que brinda la posibilidad de variar p , tanto en términos de calidad de las estimaciones como en la posibilidad de revelar estructura en los casos en que los p -espectros no son p -invariantes.

5.8.1. Procesos con p -espectro multifractal prescrito

5.8.1.1. MRW diferenciado fraccionalmente

Para las simulaciones en esta sección escogimos el MRW, presentado en la Sec. 3.5, debido a la sencillez de su simulación y al hecho de que imita las propiedades multifractales de una clase amplia de procesos como las cascadas de Mandelbrot.

Mediante una diferenciación fraccionaria de orden $\nu > 0$ pudimos obtener realizaciones $X^{(\nu)}$ con diferentes valores de p_0 y de la regularidad uniforme h_{min} . Realizamos la diferenciación fraccionaria mediante una integración fraccionaria de orden negativo $-\nu$ (cf. definición 2.8.2). Dado que el MRW contiene únicamente singularidades canónicas, la diferenciación fraccionaria sólo causa un desplazamiento

del p -espectro de magnitud ν hacia valores menores de h . Además, dado que las singularidades canónicas son p -invariantes (cf. Sec. 5.5), los p -espectros multifractales de $X^{(\nu)}$ colapsan para $p \leq p_0$ y están dados por:

$$D_\nu^{(p)}(h_p) \equiv D_\nu(h) = \begin{cases} 1 + \frac{c_2}{2} \left(\frac{h_p - c_{1,\nu}}{c_2} \right)^2 & h_p \in [c_{1,\nu} - \sqrt{-2c_2}, c_{1,\nu} + \sqrt{-2c_2}], \\ -\infty & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (5.58)$$

en donde $c_{1,\nu} = H + \lambda^2/2 - \nu$, $c_2 = -\lambda^2$ y $c_m \equiv 0$ para todo $m \geq 3$ (cf. Sec. 3.5).

La función de escalamiento basada en coeficientes ondita del MRW diferenciado fraccionalmente está dada por (cf. Sec. 3.5 y Sec. 2.8.2):

$$\zeta_d(p) = \begin{cases} (H + \lambda^2/2 - \nu)p + \frac{c_2}{2}p^2 & 0 \leq p \leq \sqrt{-2/c_2}, \\ (H + \lambda^2/2 - \nu)\sqrt{-2/c_2} - 1 - \sqrt{-2c_2} + c_2p & p > \sqrt{-2/c_2}. \end{cases} \quad (5.59)$$

Mediante cálculos elementales, la evaluación de la condición dada por la ec. (5.4) indica que

$$p_0 = \begin{cases} \infty & \text{para } \nu \in [0, H + \lambda(\frac{\lambda}{2} - \sqrt{2})], \\ 1/(\nu - H - \lambda(\frac{\lambda}{2} - \sqrt{2})) & \text{para } \nu \in (H + \lambda(\frac{\lambda}{2} - \sqrt{2}), H + \lambda(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}})], \\ 2(H + \frac{\lambda^2}{2} - \nu)/\lambda^2 & \text{para } \nu \in (H + \lambda(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}), H + \frac{\lambda^2}{2}]. \end{cases} \quad (5.60)$$

y $\zeta_d(p) < 0$ para cualquier $p > 0$, si $\nu \geq H + \lambda^2/2$.

5.8.1.2. Proceso de Lévy diferenciado fraccionalmente

Para complementar los resultados obtenidos sobre el MRW, escogimos también al proceso α -estable de Lévy, introducido en la Sec. 3.4. Como ya mencionáramos, este proceso es “degenerado” en el sentido de que su espectro es lineal y su función de escalamiento es constante por tramos (cf. Sec. 3.4). Por lo tanto, sus propiedades multifractales son marcadamente diferentes a las del MRW y las cascadas estudiadas, que se caracterizan por tener un espectro “en forma de \cap ”.

Análogamente a lo que hicieramos en el caso del MRW, mediante una diferenciación fraccional de orden $\nu > 0$ pudimos obtener realizaciones $X^{(\nu)}$ con diferentes valores de p_0 y de la regularidad uniforme h_{min} . Dado que el proceso de Lévy contiene únicamente singularidades canónicas, la diferenciación fraccional sólo causa un desplazamiento del p -espectro de magnitud ν hacia valores menores de h . Además, dado que las singularidades canónicas son p -invariantes (cf. Sec. 5.5), los p -espectros multifractales de $X^{(\nu)}$ colapsan para $p \leq p_0$ y están dados por:

$$D_\nu^{(p)}(h_p) \equiv D_\nu(h) = \begin{cases} (h_p - \nu)\alpha & h_p \in [-\nu, -\nu + 1/\alpha], \\ -\infty & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.61)$$

Además, $c_1^{(p)} = -\nu + 1/\alpha$, y $c_m^{(p)} = 0$, $\forall m \geq 2$.

El valor de p_0 está determinado por el extremo izquierdo del espectro y, por lo tanto, es:

$$p_0 = \frac{1}{\nu}. \quad (5.62)$$

5.8.1.3. Series de onditas lacunares

Como ejemplo de proceso en el que las singularidades no son p -invariantes, escogimos las series onditas lacunares (LWS), introducidas en la Sec. 3.12. Debido a que estas funciones contienen singularidades oscilantes [81], nos permitirán ilustrar la riqueza de la información que se puede extraer del proceso mediante el uso de los p -exponentes.

El p -espectro multifractal de estos procesos todavía no fue estudiado teóricamente. Sin embargo, la forma de dichos espectros puede ser hipotetizada mediante una interpretación del espectro multifractal de las series onditas aleatorias, provisto por la ec. (3.102) (recordamos que las LWS son un caso particular de RWS):

$$D(h) = \begin{cases} h \sup_{\gamma \in (0, h]} \frac{\rho(\gamma)}{\gamma} & \text{si } h \in [h_{min}, h_{max}], \\ -\infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En donde la cantidad $\rho(\gamma)$, definida en la ec. (3.98), es el espectro de grandes desviaciones (LDS). Esta ecuación puede ser interpretada en forma gráfica como se indica en la Fig. 5.6 (izquierda): el espectro $D(h)$ se obtiene recorriendo el LDS $\rho(\alpha)$ con una semirrecta que nace en el punto $(0, 0)$ [27, 82].

Nuestra hipótesis es que, en el caso del p -espectro, el procedimiento es similar pero las semirrectas nacen en el punto $(-1/p, 0)$, como muestra la Fig. 5.6 (derecha). La demostración de esta propiedad se encuentra actualmente bajo estudio. Sin embargo, las simulaciones numéricas reportadas más adelante soportan dicha hipótesis.

Como se discutió en la Sec. 3.12, el LDS de las LWS es

$$\rho(h) = \begin{cases} \frac{\eta}{\alpha} & \text{si } h = \alpha, \\ -\infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto, el p -espectro multifractal se obtiene de la recta que une los puntos $(-1/p, 0)$ y $(\alpha, \eta/\alpha)$. Mediante cálculos elementales se obtiene que el p -espectro es:

$$D(h) = \begin{cases} \frac{\eta(1+ph)}{1+p\alpha} & \text{si } h \in [h_{min}, h_{max}], \\ -\infty & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (5.63)$$

en donde los extremos del soporte del p -espectro son (cf. ecs. (3.99) y (3.100)):

$$h_{min} = \alpha, \\ h_{max} = \left(\frac{1+p\alpha}{\eta} - 1 \right) \frac{1}{p}.$$

El procedimiento es ilustrado en la Fig. 5.7.

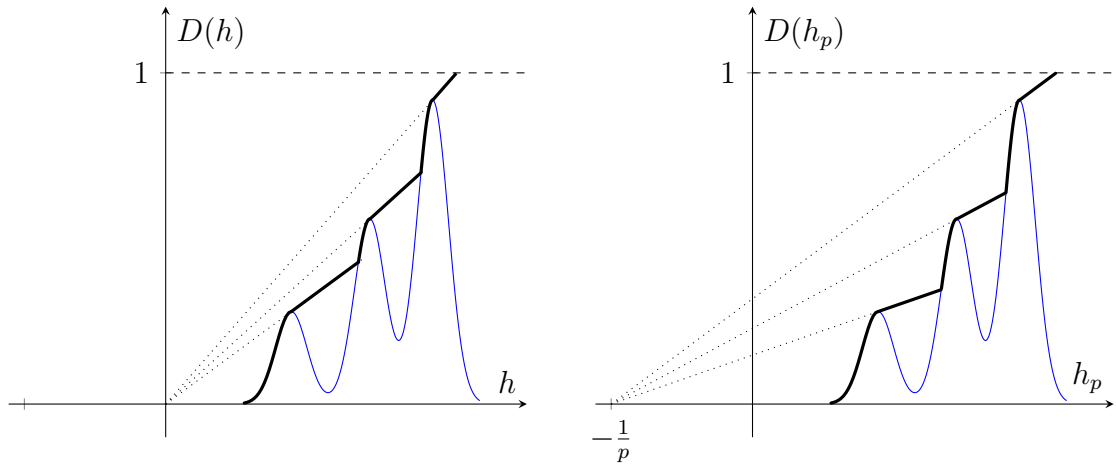


Figura 5.6: Obtención del espectro multifractal (línea negras) a partir del espectro de grandes desviaciones (línea azul), en el caso del exponente de Hölder (izquierda) y el p -exponente (derecha).

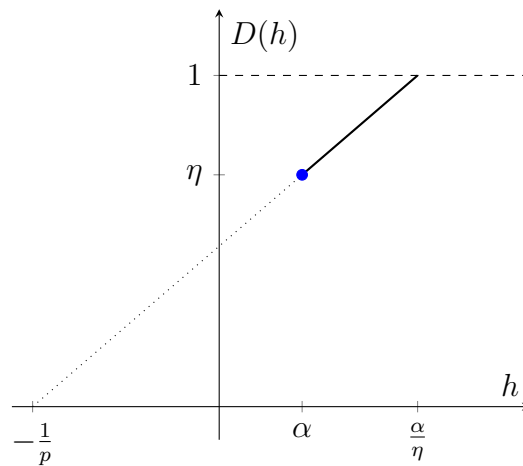


Figura 5.7: **Serie onditas lacunares.** Espectro de grandes desviaciones (punto azul) y p -espectro multifractal (línea negra).

Cabe destacar que al considerar el exponente de Hölder, es decir, $p \rightarrow \infty$, el p -espectro de la ec. (5.63) coincide con el espectro multifractal de las LWS dado por la ec. (3.107).

5.8.1.4. Configuración de las simulaciones

En todas las simulaciones numéricas de esta sección, calculamos los estimadores utilizando los factores de corrección indicados en la Sec. 5.6. Realizamos las regresiones lineales en el rango de escalamiento $[j_1, j_2]$, con $j_1 = 4$ y j_2 seleccionado como la escala más tosca disponible ($j_2 = 13$ para p -líderes debido a los efectos de borde, y $j_2 = 15$ para MFDFFA); además, utilizamos regresiones lineales pesadas: $b_j = n_j$ (cf. Sec. 2.7.2). Para el cálculo de los p -líderes, empleamos una ondita de Daubechies con $N_\psi = 2$ momentos nulos. En forma equivalente, el orden del polinomio en MFDFFA se fijó en $N_P = 1$. Realizamos las estimaciones con p -líderes para $p \in \{1/2, 1, 2, 4, 5, 8, 10, +\infty\}$.

5.8.2. Corrección del efecto de resolución finita

En la Sec. 5.6 utilizamos un modelo basado en cascadas de onditas determinísticas para proponer factores de corrección que cancelan los efectos de la resolución finita en la estimación de los atributos multifractales (ecs. (5.36), (5.37) y (5.38)). Además, mostramos que usando el modelo más realista de las cascadas aleatorias los factores son similares pero no exactamente iguales en todos los casos. Sin embargo, hicimos la suposición de que las diferencias no serían significativas en las aplicaciones prácticas.

Por lo tanto, en esta sección buscamos validar numéricamente a factores de corrección propuestos en la Sec. 5.6 en procesos multifractales no construidos a partir de una cascada, más similares a las señales encontradas en la práctica. Para ello, seleccionamos el MRW diferenciado fraccionalmente. Analizamos $N_{MC} = 500$ realizaciones independientes, con una longitud de $N = 2^{16}$ muestras cada una, de MRW con parámetros $H = 0,76$ y $\lambda = \sqrt{0,08}$ derivado fraccionalmente con orden ν . Utilizamos valores de $\nu \in \{0; 0,5; 0,7\}$; esta selección brinda $p_0 \in \{+\infty; 10; 2,5\}$, cf. ec. (5.60).

La Fig. 5.8 y la Fig. 5.9 muestran los valores de $\hat{C}_1(j) - C_1(j)$, promediados sobre todas las realizaciones independientes, para MRW diferenciado fraccionalmente, con $p_0 \in \{2,5; 10; \infty\}$, y para el proceso de Levy con $p_0 \in \{1,67; 10; \infty\}$ (columnas desde la izquierda a la derecha, respectivamente). Las estimaciones se realizaron con coeficientes ondita (líneas azules sólidas con puntos), líderes clásicos (líneas sólidas magenta con diamantes), p -líderes sin usar el factor de corrección (líneas a trazos negras con círculos), p -líderes con el factor de corrección correspondiente al caso 1 ($\theta(j, p) = 1$ en la ec. (5.56), líneas negras sólidas con cruces) y p -líderes con el factor de corrección correspondiente al caso 2 ($\theta(j, p) \neq 1$ en la ec. (5.56), líneas rojas sólidas con cuadrados). Para los p -líderes utilizamos $p \in \{0,1; 1; 4\}$ (filas superior a inferior, respectivamente). El análisis de ambas figuras permite hacer los siguientes comentarios:

- El comportamiento esperado es que $\hat{C}_1(j) - C_1(j)$ sea idénticamente 0.

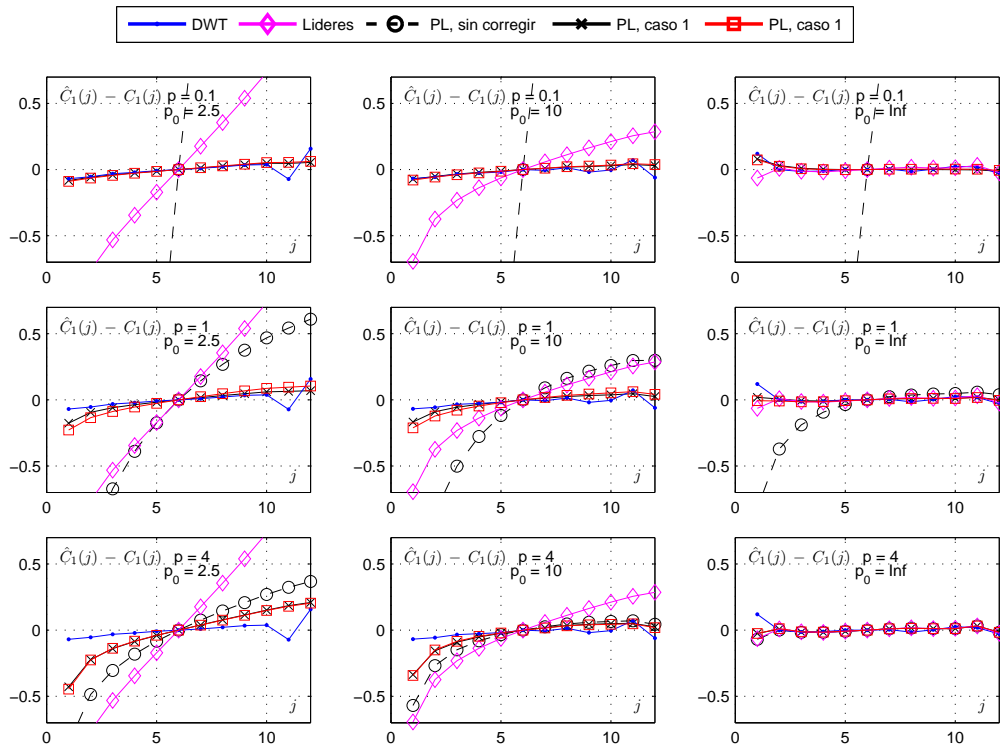


Figura 5.8: **MRW diferenciado fraccionalmente: $\hat{C}_1(j) - C_1(j)$.** $p_0 \in \{2,5; 10; \infty\}$ (columnas desde la izquierda a la derecha, respectivamente). Las estimaciones se realizaron con coeficientes ondita (líneas azules sólidas con puntos), líderes clásicos (líneas sólidas magenta con diamantes), p -líderes sin usar el factor de corrección (líneas a trazos negras con círculos), p -líderes con el factor de corrección correspondiente al caso 1 ($\theta(j, p) = 1$ en la ec. (5.56), líneas negras sólidas con cruces) y p -líderes con el factor de corrección correspondiente al caso 2 ($\theta(j, p) \neq 1$ en la ec. (5.56), líneas rojas sólidas con cuadrados). Para los p -líderes utilizamos $p \in \{0,1; 1; 4\}$ (filas superior a inferior, respectivamente).

- El comportamiento de los p -líderes sin corregir (líneas negras a trazos con círculos) es notablemente incorrecto para valores de p bajos (fila superior) y mejora a medida que aumenta p .
- Las estimaciones obtenidas utilizando los factores de corrección correspondientes al caso 1 de la Sec. 5.6.2 (líneas negras sólidas con cruces) y al caso 2 (líneas rojas sólidas con cuadrados) son prácticamente idénticos.
- Las estimaciones utilizando los factores de corrección son notablemente superiores a las obtenidas sin ellos, en todos los casos.
- A medida que el valor de p se aproxima a p_0 , las estimaciones utilizando p -líderes se aproximan a las obtenidas con los líderes tradicionales.
- En el caso en que $p_0 = \infty$ (columna derecha) todas las estimaciones proveen resultados en concordancia con el esperado, con excepción de los p -líderes sin corregir. Los p -líderes sin corregir brindan malas estimaciones para valores de p bajos (filas superior y central).

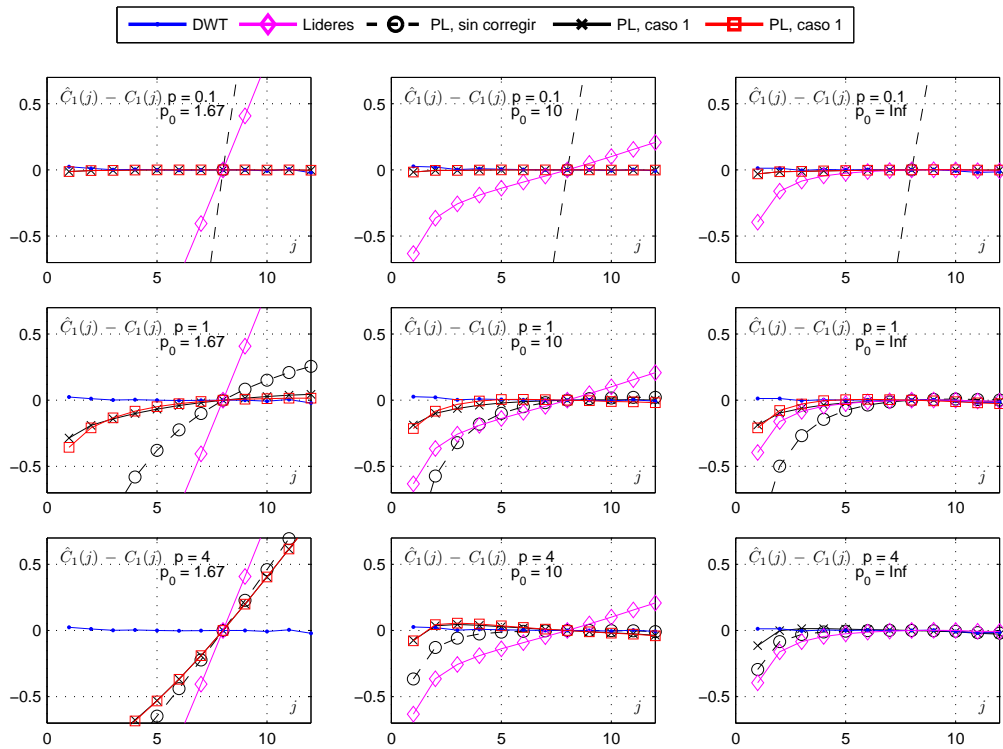


Figura 5.9: **Proceso de Lévy diferenciado fraccionalmente: $\hat{C}_1(j) - C_1(j)$.** $p_0 \in \{1,67; 10; \infty\}$ (columnas desde la izquierda a la derecha, respectivamente). Las estimaciones se realizaron con coeficientes ondita (líneas azules sólidas con puntos), líderes clásicos (líneas sólidas magenta con diamantes), p -líderes sin usar el factor de corrección (líneas a trazos negras con círculos), p -líderes con el factor de corrección correspondiente al caso 1 ($\theta(j, p) = 1$ en la ec. (5.56), líneas negras sólidas con cruces) y p -líderes con el factor de corrección correspondiente al caso 2 ($\theta(j, p) \neq 1$ en la ec. (5.56), líneas rojas sólidas con cuadrados). Para los p -líderes utilizamos $p \in \{0,1; 1; 4\}$ (filas superior a inferior, respectivamente).

- Cuando $p > p_0$ (fila inferior, columna derecha) las estimaciones con p -líderes son erróneas independientemente del factor de corrección, debido a que los datos no pertenecen localmente a L^p .
- Cuando $p < p_0 < \infty$ (filas superior y central, columnas izquierda y central) las estimaciones obtenidas con los p -líderes corregidos se aproximan notablemente a las obtenidas con los coeficientes ondita (línea azul con puntos), ilustrando la eficiencia del factor de corrección propuesto. Sin embargo, en estos casos se observa un sesgo, incluso con los coeficientes ondita, que no se observa cuando $p_0 = \infty$. Este efecto probablemente se deba a efectos de borde de la integración fraccional utilizada y se encuentra bajo investigación.
- En el caso de la Fig. 5.9, fila inferior y columna derecha, las estimaciones correspondientes al caso 2 (líneas rojas con cuadrados) no pueden ser calculadas. Esto se debe a la naturaleza de su función de escalamiento: $\zeta(q) = 1$ para $q \geq \alpha = 1,25$. Por lo tanto, $\zeta(2p) - \zeta(p) = 0$ cuando $p > 1,25$ y el factor de la ec. (5.56) se vuelve indeterminado.

Los resultados que obtuvimos para ambos procesos son notablemente similares. Este hecho ilustra que los factores de corrección propuestos son efectivos al ser aplicados sobre procesos multifractales de diferentes características, a pesar de haber sido derivados a partir del modelo restrictivo provisto por las cascadas de onditas.

En conclusión, las simulaciones numéricas de esta sección permiten verificar que los factores de corrección eliminan correctamente el efecto de la resolución finita sobre las funciones de estructura en los procesos estudiados, a pesar de haber sido obtenidas para modelos más sencillos como las cascadas de onditas. Por otro lado, verificamos numéricamente que las diferencias observadas entre los factores de corrección de los casos 1 y 2 de la Sec. 5.6.2 no son significativas en la práctica.

5.8.3. p -espectros p -invariantes y regularidad negativa

Para las simulaciones en esta sección, seleccionamos el MRW y el proceso α -estable de Levy fraccionalmente diferenciados, ya que permiten estudiar la regularidad negativa en forma controlada. Además, ya que los p -espectros son p -invariantes, nos permiten comparar el desempeño del formalismo para diferentes valores de p . Analizamos $N_{MC} = 500$ realizaciones independientes, con una longitud de $N = 2^{16}$ muestras cada una. Sintetizamos el MRW con parámetros $H = 0,76$ y $\lambda = \sqrt{0,08}$, y utilizamos órdenes de diferenciación $\nu \in \{0; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,73\}$; esta selección brinda $p_0 \in \{+\infty; 25; 7,14; 4; 1,5; 0,75\}$, cf. ec. (5.60). En el caso del proceso de Lévy, utilizamos $\alpha = 1,25$ y órdenes de diferenciación $\nu \in \{0; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7\}$; esta selección brinda $p_0 \in \{\infty; 5; 3,33; 2,5; 2; 1,66; 1,4\}$, cf. ec. (5.62). Para cada realización, calculamos los espectros de Legendre $\mathcal{L}^{(p)}(h_p)$ y $\mathcal{L}_F(h)$, así como los log-cumulantes $c_m^{(p)}$ para $m = 1, 2, 3, 4$.

5.8.3.1. Ilustraciones numéricas de p -espectros multifractales

La Fig. 5.10 y la Fig. 5.11 muestran los espectros de Legendre $\mathcal{L}^{(p)}(h_p)$ y $\mathcal{L}_F(h)$, promediados sobre realizaciones independientes (líneas sólidas coloreadas), junto con los espectros teóricos dados por la ec. (5.61) (líneas negras sólidas) y las respectivas cotas teóricas para $D^{(p)}(h)$ dadas por la ec. (5.14) (líneas a trazos coloreadas). El análisis de la Fig. 5.10 y de la Fig. 5.11 permite hacer los comentarios que se indican en los párrafos siguientes.

Realizaciones. La Fig. 5.10 y la Fig. 5.11, columna izquierda, muestran ejemplos representativos de las realizaciones del proceso $X^{(\nu)}$. Los valores de ν crecen desde la fila superior hacia la inferior (y, por lo tanto, la regularidad y p_0 decrecen). La inspección visual de dichas realizaciones indica los beneficios prácticos del uso de modelos con regularidad negativa. Mientras que la regularidad de Hölder (es decir, sólo positiva) se relaciona con realizaciones relativamente suaves (fila superior), el uso de p -exponentes negativos pone al alcance del practicante un rico conjunto de modelos para aplicaciones en las que se necesitan realizaciones altamente irregulares.

2-líderes y MF DFA. La Fig. 5.10 y la Fig. 5.11, columna central, muestran los espectros multifractales obtenidos con MF DFA y p -líderes con $p = 2$, junto con el espectro teórico $D^{(2)}(h)$. Se puede ver que las estimaciones $\mathcal{L}^{(p)}(h_p)$ y

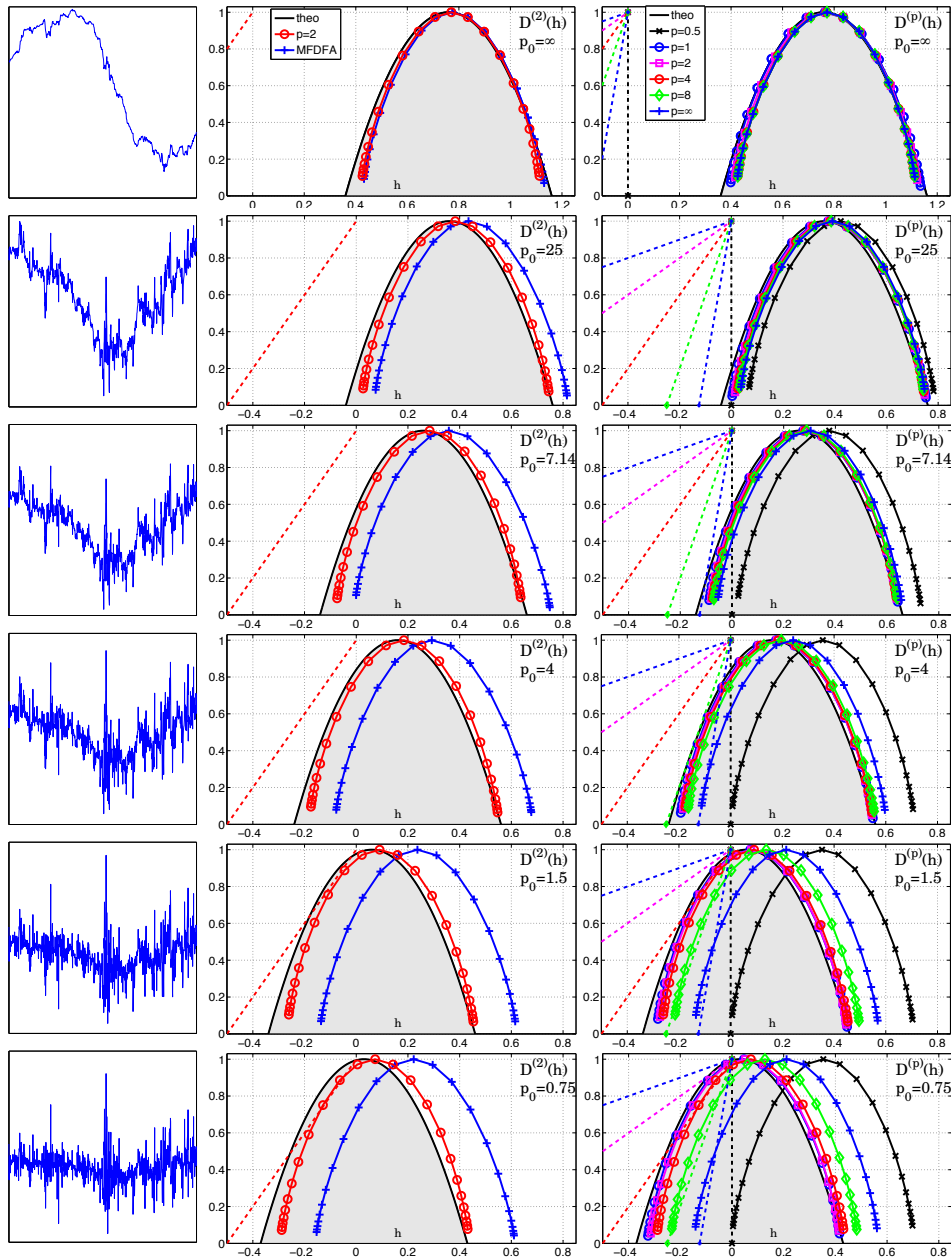


Figura 5.10: **MRW diferenciado fraccionalmente.** Desde la fila superior a la inferior, $p_0 = \{+\infty; 25; 7,14; 4; 1,5; 0,75\}$ (la fila superior corresponde a MRW sin diferenciar). Realizaciones seleccionadas (columna izquierda), p -espectros teóricos $\mathcal{D}(h)$ (líneas negras sólidas y área gris) y estimaciones $\mathcal{L}(h)$ (columnas central y derecha). Columna central: $\mathcal{L}_F(h)$ y $\mathcal{L}^{(2)}(h)$. Columna derecha: $\mathcal{L}^{(p)}(h)$. En ambos casos, $p = \{0,5, 1, 2, 4, 8, +\infty\}$. Las líneas a trazos indican las cotas teóricas dadas por la ec. (5.14).

$\mathcal{L}_F(h)$ son cualitativamente equivalentes cuando p_0 es alto (filas superiores). Sin embargo, para los casos en los que hay regularidad negativa ($2 < p_0 \ll +\infty$) el espectro $\mathcal{L}_F(h)$ obtenido con MFDFA sólo captura parcialmente al espectro real para valores negativos de h . Este efecto es particularmente notorio en el caso del

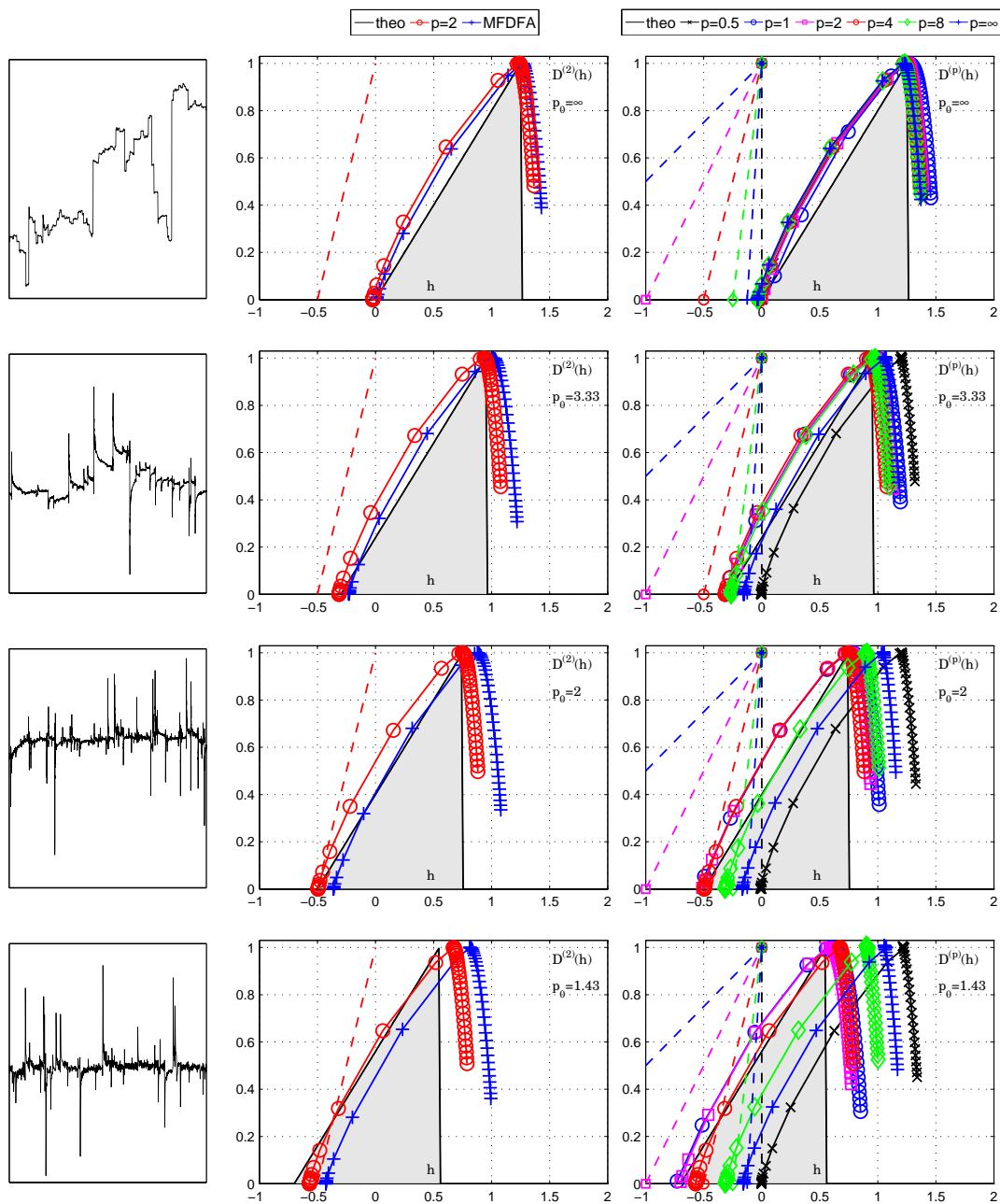


Figura 5.11: **Proceso de Lévy diferenciado fraccionalmente.** Desde la fila superior a la inferior, $p_0 = \{+\infty; 3,3; 2; 1,43\}$ (la fila superior corresponde al proceso sin diferenciar). Realizaciones seleccionadas (columna izquierda), p -espectros teóricos $\mathcal{D}(h)$ (líneas negras sólidas y área gris) y estimaciones $\mathcal{L}(h)$ (columnas central y derecha). Columna central: $\mathcal{L}_F(h)$ y $\mathcal{L}^{(2)}(h)$. Columna derecha: $\mathcal{L}^{(p)}(h)$. En ambos casos, $p = \{0,5, 1, 2, 4, 8, +\infty\}$. Las líneas a trazos indican las cotas teóricas dadas por la ec. (5.14).

MRW (e. g. Fig. 5.10, fila inferior). En contraste, el formalismo basado en 2-líderes provee estimadores excelentes de $D^{(2)}(h_2)$ para cualquier proceso $X^{(\nu)}$ con $\nu \geq 2$.

p -líderes para $p \neq 2$. En la Fig. 5.10 y la Fig. 5.11, columna derecha, se muestran los promedios de las estimaciones $\mathcal{L}^{(p)}(h_p)$ para distintos valores de p , y son comparados con los espectros teóricos $D_\nu^{(p)}(h_p)$ y las cotas teóricas dadas por la ec. (5.14). Dichos resultados permiten realizar los siguientes comentarios:

- Claramente, el formalismo basado en p -líderes proporciona excelentes estimaciones de $D_\nu^{(p)}(h_p)$ para $p < p_0$. Estos resultados proveen, por lo tanto, una validación del formalismo basado en p -líderes.
- Las estimaciones tienen una excelente calidad incluso para $p < 1$. Notablemente, la elección $p = 1/2 < 1$ permite estimar correctamente el p -espectro para $MRW^{(\nu)}$ con $p_0 = 0,75$ (Fig. 5.10, columna derecha, fila inferior), mientras que no se puede lograr con $p > 1$ ni, por lo tanto, tampoco con MF DFA.
- Cuando $p > p_0$, las estimaciones $\mathcal{L}^{(p)}(h)$ son tangentes a las cotas teóricas de la ec. (5.14). En consecuencia, muestran un desplazamiento hacia valores mayores de h con respecto al espectro teórico $D_\nu^{(p)}(h_p)$ y, entonces, están sesgadas. Esto es más llamativo visualmente en el caso $p = +\infty$ (es decir, los líderes clásicos asociados con el exponente de Hölder), para los que los espectros estimados están restringidos sólo a valores positivos de h .
- Finalmente, en forma consistente con el teorema 5.5.1, los espectros $\mathcal{L}^{(p)}(h)$ coinciden para todo $p < p_0$ en MRW y el proceso de Lévy diferenciados fraccionalmente.

5.8.3.2. Calidad de las estimaciones

En esta sección realizamos un análisis cuantitativo de la calidad de las estimaciones usando los formalismos multifractales basados en p -líderes y MF DFA. Con este objetivo, analizamos el error cuadrático medio (RMSE) de los log-cumulantes $c_m^{(p)}$ para $m = 1, 2, 3, 4$, definido como

$$\text{rmse}_{c_m^{(p)}} = \sqrt{\left\langle \left(\hat{c}_m^{(p)} - c_m^{(p)} \right)^2 \right\rangle_{N_{MC}}}$$

en donde $\langle \cdot \rangle_{N_{MC}}$ indica el promedio sobre realizaciones independientes.

La Fig. 5.12 muestra los resultados para MRW diferenciado fraccionalmente $X^{(\nu)}$, con $\nu \in \{0; 0,4; 0,6; 0,7\}$ (equivalentemente $p_0 \in \{+\infty; 25; 4; 1,5\}$) desde las filas superiores a las inferiores. En forma análoga, la Fig. 5.13 muestra los resultados para el proceso de Lévy, diferenciado usando $\nu \in \{0; 0,1; 0,2; 0,3\}$. El RMSE de los p -líderes se presenta como función de p en líneas sólidas negras, mientras que los valores correspondientes a MF DFA son superpuestos con círculos azules sobre el valor $p = 2$. Los valores de p a la derecha de las líneas rojas verticales son mayores que p_0 . Dado que para este proceso $c_m^{(p)} \equiv c_m$, omitimos el superíndice (p) en la discusión de los párrafos siguientes.

Estimación de c_1 . Los valores de RMSE para el primer log-cumulante están reportados en la primera columna de la Fig. 5.12 y de la Fig. 5.13, y permiten extraer las siguientes conclusiones:

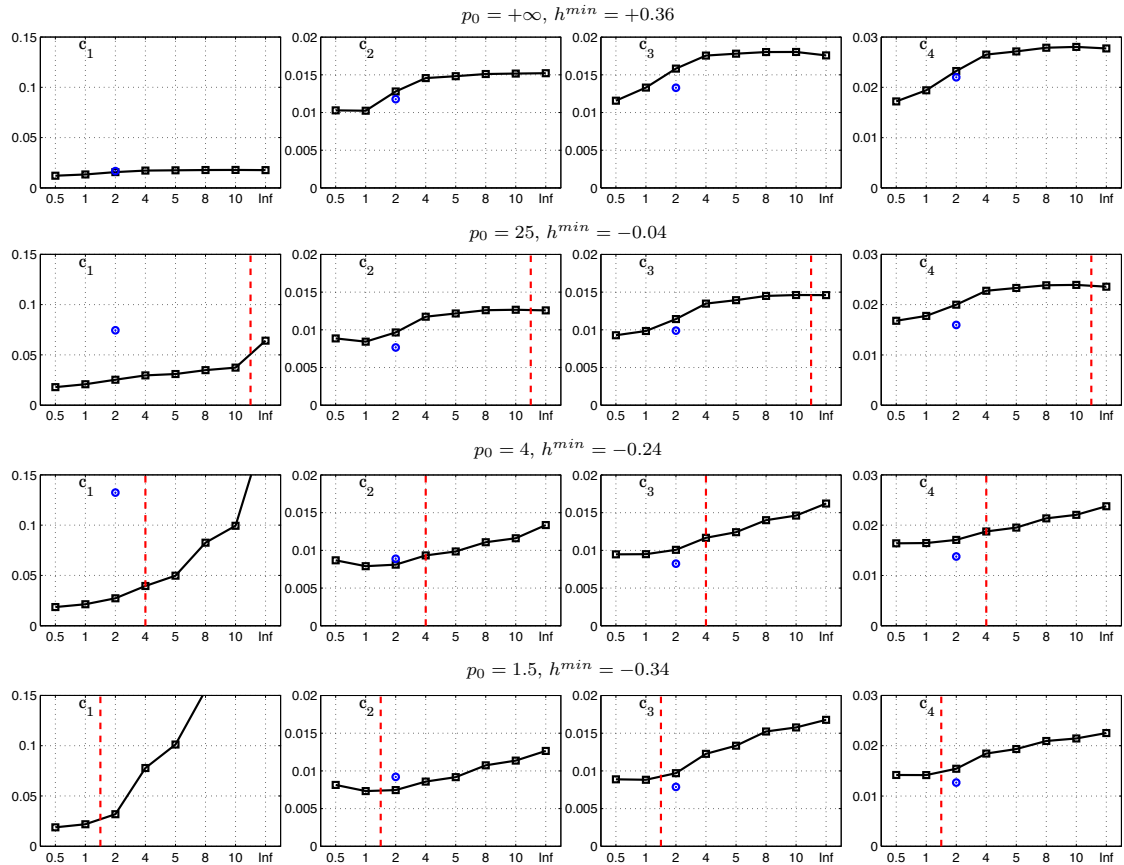


Figura 5.12: **log-cumulantes de MRW diferenciado fraccionalmente.** De la fila superior a la inferior, $p_0 = \{+\infty, 25, 4, 1,5\}$ (la fila superior corresponde a MRW sin diferenciar). RMSE de las estimaciones basadas en p -líderes en función de p (líneas negras sólidas con cuadrados) y de MF DFA (círculos azules en $p = 2$) para c_m , $m = \{1, 2, 3, 4\}$ (de la columna izquierda hacia la derecha, respectivamente).

- El formalismo basado en p -líderes sistemáticamente brinda estimaciones de mayor calidad a medida que p decrece, $p \leq p_0$. Se llega incluso a lograr un factor de 2 en la reducción del RMSE para $p = 1/2$ con respecto a valores de p mayores, considerando $p < p_0$. La disminución de RMSE para valores de p pequeños se debe esencialmente a una reducción en la varianza de los estimadores.
- Para $p > p_0$ se observa un incremento abrupto del RMSE debido al sesgo. En efecto, c_1 captura la posición del máximo del p -espectro y éste se encuentra desplazado con respecto al máximo teórico cuando $p > p_0$, como se discutió en la sec. 5.8.3.1.
- La calidad de las estimaciones basadas en p -líderes no parecen ser afectadas por el valor preciso de p_0 , siempre que $p < p_0$.

Estimación de c_m para $m \geq 2$. Las columnas segunda, tercera y cuarta de la Fig. 5.12 y de la Fig. 5.13 muestran los valores de RMSE para c_2 , c_3 y c_4 , respectivamente, y permiten extraer las siguientes conclusiones:

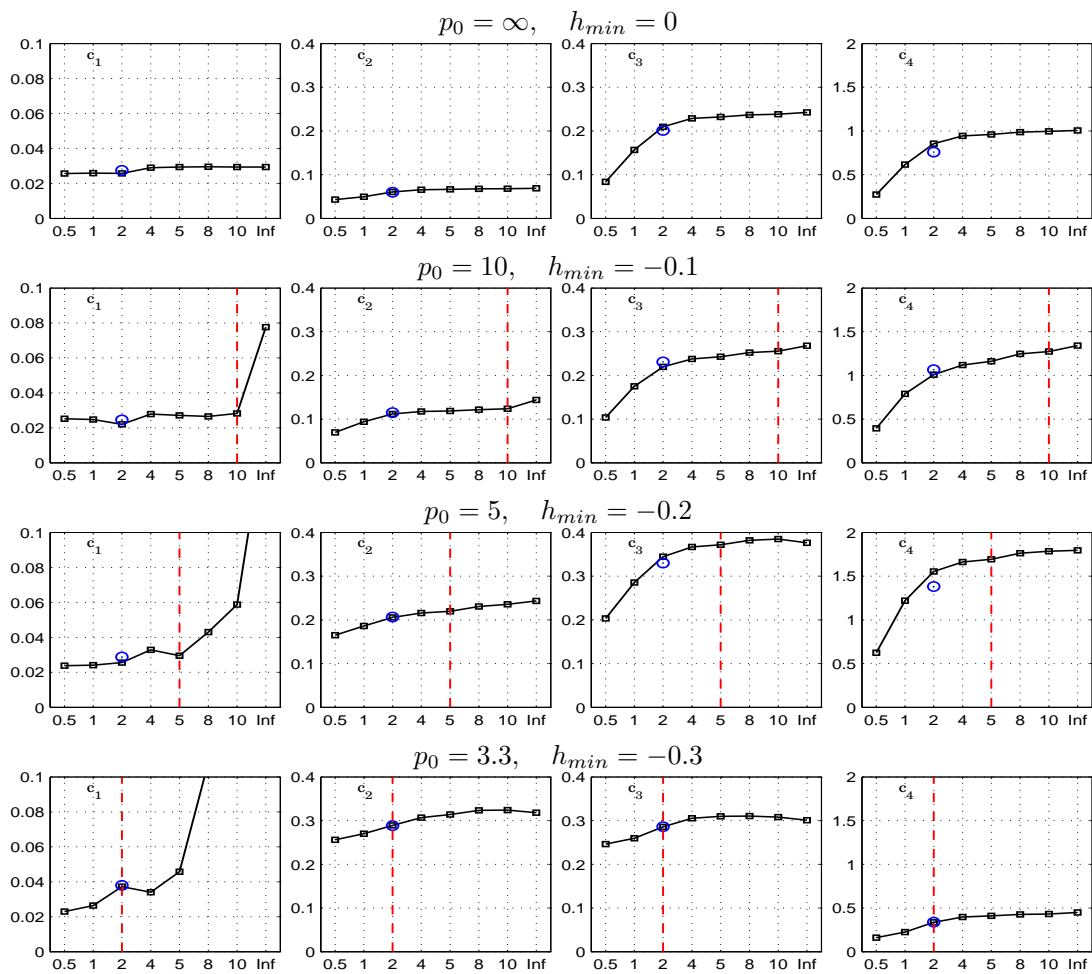


Figura 5.13: **log-cumulantes del proceso de Lévy diferenciado fraccionalmente.** De la fila superior a la inferior, $p_0 = \{+\infty, 10, 5, 3.3\}$ (la fila superior corresponde al proceso sin diferenciar). RMSE de las estimaciones basadas en p -líderes en función de p (líneas negras sólidas con cuadrados) y de MF DFA (círculos azules en $p = 2$) para c_m , $m = \{1, 2, 3, 4\}$ (de la columna izquierda hacia la derecha, respectivamente).

- Al igual que en el caso de c_1 , se observa un beneficio sistemático en el uso de valores pequeños de p . En efecto, el RMSE disminuye marcadamente para $p \leq 4$, y los menores valores de RMSE son obtenidos sistemáticamente para los valores de p más bajos ($p = 1/2$ o $p = 1$).
- A diferencia de los que ocurre con c_1 , la selección de $p > p_0$ no afecta significativamente la calidad de las estimaciones para c_m con $m \geq 2$.
- El formalismo basado en MF DFA brinda estimaciones con RMSE similar a las obtenidas con 2-líderes para valores moderadamente pequeños de $p \approx 2$.

Comparación con MF DFA. Los formalismos basados en MF DFA y en 2-líderes tienen una calidad similar para c_1 cuando $p = +\infty$. Sin embargo, cuando el soporte del p -espectro incluye valores negativos de h (es decir, cuando $p_0 < +\infty$),

MF DFA provee estimadores para c_1 que están sesgados. Esto es consistente con las observaciones realizadas en la Sec. 5.8.3.1, en donde se vio que $\mathcal{L}_F(h)$ se encuentra desplazado, con respecto a $D^{(p)}(h)$, hacia valores mayores de h . Por el contrario, las estimaciones de c_m para $m \geq 2$ brindan resultados similares con ambos métodos.

Conclusión. Los resultados reportados en esta sección sugieren que, para datos que contienen sólo singularidades p -invariantes, se debería seleccionar un valor pequeño de p para realizar el análisis. Cabe destacar que el formalismo basado en p -líderes con valores moderadamente pequeños de p , e. g. $p \leq 4$, muestra un desempeño significativamente superior al de los líderes tradicionales, con reducciones del RMSE de hasta un 50 %. Por otro lado, los formalismos basados en p -líderes y MF DFA muestran desempeños similares cuando $p_0 = +\infty$. Sin embargo, cuando los datos contienen exponentes de regularidad negativos, MF DFA brinda estimaciones sesgadas de c_1 mientras que los p -líderes no se ven afectados por este problema.

5.8.3.3. Robustez ante tendencias no polinomiales

En esta sección estudiamos la robustez de los formalismos basados en p -líderes en la estimación de los log-cumulantes c_m para $m = 1, 2, 3, 4$, en la situación en que se superpone aditivamente a las realizaciones de MRW ($\nu = 0$) una tendencia de la forma

$$\tau(x) = 100(x + 1/100)^{-1/2}, \quad x \in [0, 1].$$

Utilizamos una ondita de Daubechies con $N_\psi \in \{3, 4, 5\}$ momentos nulos para el análisis con p -líderes y, equivalentemente, polinomios con orden $N_p \in \{2, 3, 4\}$ para MF DFA. Realizamos las regresiones lineales en el rango de escalamiento $[j_1, j_2]$, en donde $j_1 = 4$ y fijamos j_2 en la escala más tosca disponible ($j_2 = 13$ para p -líderes debido a los efectos de borde, y $j_2 = 15$ para MF DFA); además, utilizamos regresiones lineales pesadas: $b_j = n_j$ (cf. Sec. 2.7.2).

La Fig. 5.14 muestran los resultados del análisis. En primer lugar, se observa que los resultados son similares a los obtenidos en ausencia de tendencias; esto indica que tanto la sustracción del polinomio como los momentos nulos en las onditas eliminan exitosamente este tipo de tendencias. Se puede ver que, efectivamente, la calidad de las estimaciones mejora en todos los casos a medida que se aumenta N_ψ o N_p . Además, se observa que, en todos los casos, las estimaciones obtenidas con p -líderes (líneas negras) son ligeramente superiores a las obtenidas con MF DFA (círculos azules). Este resultado sugiere que la transformada ondita subyacente a la construcción de los p -líderes es más efectiva en la extracción de tendencias suaves que el procedimiento de sustracción de polinomios ajustados localmente que se emplea en MF DFA.

5.8.4. p -espectro y singularidades lacunares

En los experimentos numéricos en esta sección utilizamos las series onditas lacunares (LWS) para ilustrar la dependencia con p del p -espectro multifractal, en el caso en que la señal bajo análisis contiene singularidades oscilantes.

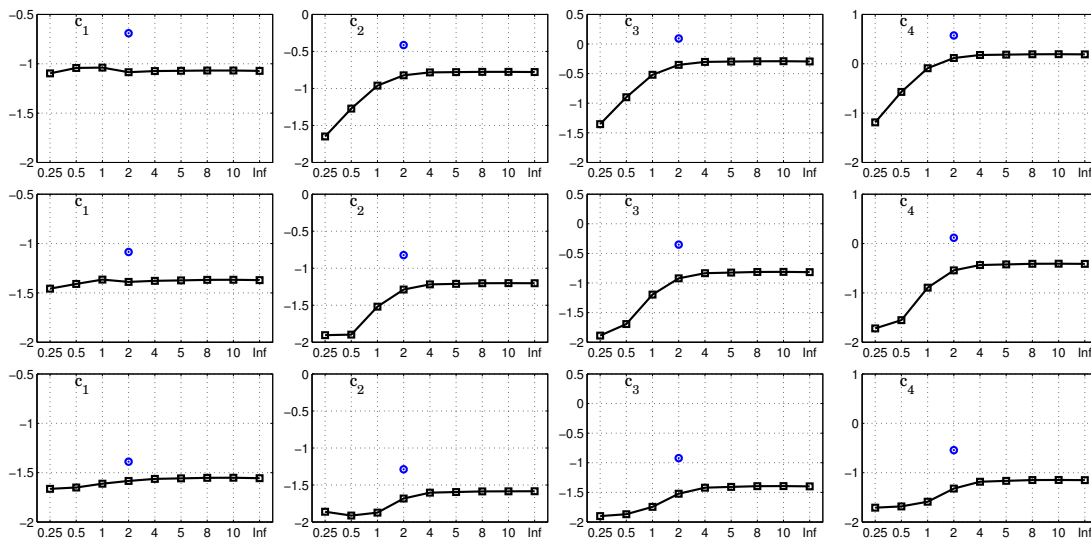


Figura 5.14: **MRW con tendencia no polinomial.** $\log_{10}(\text{RMSE})$ de c_m para p -líderes en función de p (líneas negras sólidas con cuadrados) y para MF DFA (círculo azul). $N_\psi = 3$, $N_P = 2$ (fila superior), $N_\psi = 4$, $N_P = 3$ (segunda fila), $N_\psi = 5$, $N_P = 4$ (tercera fila).

La Fig. 5.15, columna izquierda, muestra ejemplos de realizaciones seleccionadas de LWS, para distintos valores de los parámetros α y η . En la columna derecha se muestran las estimaciones de los p -espectros, promediados sobre 100 realizaciones independientes, para distintos valores de p . Asimismo, se muestran en líneas de trazos los p -espectros teóricos correspondientes. Analizando el máximo de los p -espectros, se puede ver que en todos los casos se desplazan hacia mayores valores de h al cambiar p , siguiendo a los espectros teóricos. Además, la magnitud del desplazamiento aumenta al aumentar p , como se espera. Por otro lado, aunque los valores de h_{min} estimados muestran un incremento al aumentar el valor de p , su magnitud es notablemente menor al desplazamiento sufrido por el máximo y, por lo tanto, puede considerarse en concordancia con la predicción teórica. Sin embargo, cabe destacar que las estimaciones se encuentran fuertemente sesgadas para todos los valores de p utilizados, incluso en el caso los líderes tradicionales (líneas negras); sin embargo, es sabido que las estimaciones de los espectros de Legendre son difíciles para este tipo de series y que las cotas superiores que proveen no son ajustadas, cf. e. g. [14, 100].

Estos resultados ponen en evidencia la posibilidad que brinda el formalismo multifractal basado en p -líderes de evidenciar la presencia de singularidades oscilantes p -dependientes. Esta característica del formalismo lo hace sumamente interesante para su uso en la práctica, ya que permitiría revelar información presente en los datos que hasta el momento no fue considerada. Esto se discutirá con mayor detalle en la Sec. 5.9, en donde se aplicará el formalismo multifractal basado en p -líderes al estudio de señales de variabilidad de la frecuencia cardíaca y se mostrarán resultados que sugieren que dichas señales parecerían contener singularidades oscilantes lacunares.

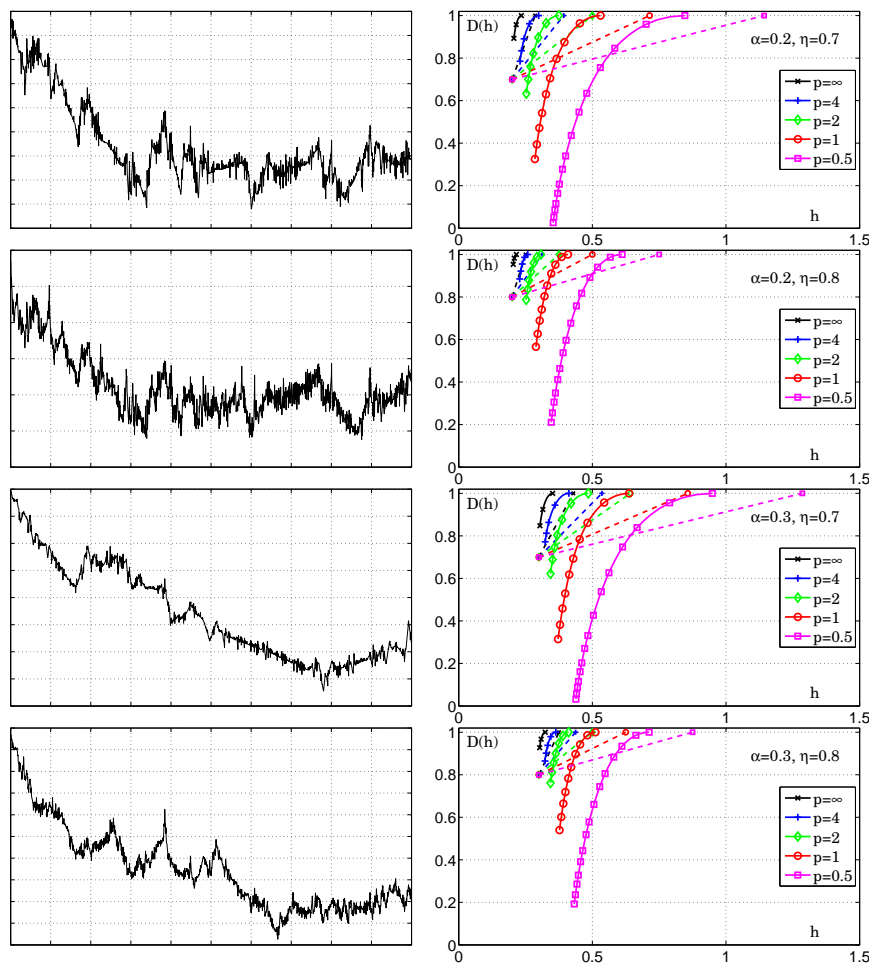


Figura 5.15: Series de ondas lacunares con $\alpha = 0,2$, $\eta = 0,7$ (primera fila), $\alpha = 0,2$, $\eta = 0,8$ (segunda fila), $\alpha = 0,3$, $\eta = 0,7$ (tercera fila) y $\alpha = 0,3$, $\eta = 0,8$ (cuarta fila). Realizaciones seleccionadas (columna izquierda), p -espectros teóricos (líneas a trazos) y p -espectros estimados (líneas sólidas con marcadores), para distintos valores de p .

5.9. Aplicación a frecuencia cardíaca fetal

En esta sección analizamos la aplicación del formalismo multifractal basado en p -líderes a una situación práctica que involucra señales biomédicas reales. En particular, estudiamos la detección de acidosis fetal a partir de la señal de frecuencia cardíaca. Comenzamos la sección con una breve descripción de la problemática y de la base de datos utilizada. A continuación, discutimos los resultados que obtuvimos mediante la aplicación de la técnica propuesta en las secciones anteriores.

5.9.1. Análisis de la frecuencia cardíaca fetal

La monitorización fetal es habitualmente realizada mediante la cardiotocografía, que es el registro simultáneo de la frecuencia cardíaca fetal (en inglés, *fetal heart rate*, FHR) y de las contracciones uterinas [46, 72, 137]. El análisis de la FHR permite al obstetra identificar fetos que estén en riesgo, y planificar extracciones

tempranas antes de que la asfixia genere consecuencias de largo plazo, entre las que se cuentan la encefalopatía neonatal y la parálisis cerebral [137]. La FHR provee información valiosa sobre el estado de oxigenación del feto, así como también permite estudiar los mecanismos de defensa que los fetos utilizan para adaptarse a la hipoxia [59]. La reacción de los fetos a los eventos hipóxicos resulta en un comportamiento complejo gobernado por múltiples bucles de retroalimentación que, en consecuencia, causan la aparición de patrones complejos en la dinámica de la FHR [59, 157]. Sin embargo, a pesar de que la monitorización de la FHR posee una alta sensibilidad en la detección de asfixia fetal y acidosis metabólica, su baja especificidad justifica el estudio de nuevas técnicas de análisis que ayuden en la identificación de falsos positivos [54, 105].

Dado que el análisis multifractal brinda una descripción de las fluctuaciones en la regularidad de los datos, es una herramienta natural para reemplazar el análisis de variabilidad temporal o espectral realizado tradicionalmente para caracterizar la frecuencia cardíaca [42, 97]. Por tal razón, ha sido ampliamente utilizado para el análisis de la frecuencia cardíaca en adultos [13, 16, 78, 96, 102]. Asimismo, ha sido utilizado recientemente para el análisis de la FHR, ver e. g. [16, 54].

En los trabajos mencionados se utilizó sólo el análisis multifractal basado en exponentes de Hölder. En esta sección nos proponemos como objetivo analizar el desempeño del análisis multifractal basado en p -exponentes para estudiar las señales de FHR. Existen numerosas razones que motivan este estudio. En primer lugar, las señales de FHR típicamente presentan regularidad negativa, por lo que su estudio mediante exponentes de Hölder requiere de su integración previa; por lo tanto, el uso de los p -exponentes, adecuados para medir la regularidad negativa, se adapta mejor a esta tarea. En segundo lugar, la dependencia respecto al parámetro p brinda información sobre las singularidades oscilantes en los datos y, por lo tanto, enriquece la descripción multifractal de las singularidades. Finalmente, como discutimos en la Sec. 5.8, las estimaciones basadas en los p -líderes tienen un desempeño estadístico más eficiente que las basadas en líderes tradicionales.

Por lo tanto, en esta sección estudiamos los beneficios del uso del formalismo multifractal basado en p -líderes para discriminar entre la FHR de fetos sanos y fetos que sufren de acidosis. Para ello, aplicamos esta técnica a aproximadamente 1000 series temporales, registradas en un hospital francés, y que describimos en la Sec. 5.9.2. A continuación, en la Sec. 5.9.3 analizamos los resultados obtenidos, tanto en términos de la dependencia con p de las estimaciones como del incremento en el poder de detección.

5.9.2. Base de datos

Registros. La señales de FHR en la base de datos fueron adquiridas en el hospital francés *Femme-Mère-Enfant in Bron*, entre los años 2000 y 2010. En total, consta de 3049 señales de cardiograma (CTG), adquiridas durante el parto utilizando electrodos superficiales ubicados en el cuero cabelludo del feto, 12 bits de resolución y una frecuencia de muestreo de 500 Hz, mediante un sistema STAN S21 o S31 (Neovinta Medical, Moelndal, Suecia). Se recolectó información clínica tanto sobre las madres como sobre los fetos por los obstetras encargados, cf. [55] para más

detalles. En todos los casos, se registró el pH umbilical una vez finalizado el parto para constatar el estado de acidosis neonatal.

Etapa de dilatación. Durante un parto normal se reconocen dos etapas: la etapa de dilatación y la de expulsión. A pesar de que existen estudios que describen la naturaleza de la FHR durante el parto, e. g. [69], las manifestaciones de ambas etapas en la dinámica temporal de la FHR siguen siendo poco claras. Debido a la mejor calidad de las señales, elegimos utilizar los últimos 20 minutos de la etapa de dilatación. Además, requerimos que la última medición de FHR sea lo más cercana posible a la medición del pH umbilical que se realiza una vez concluido el parto; por esta razón, imponemos el criterio adicional de que la duración de la etapa de expulsión sea menor a 10 minutos. La aplicación de ambos criterios lleva a la selección de 905 registros para el análisis. En 31 de tales registros la medición de pH de la arteria umbilical es menor a 7,05 y, por lo tanto, se considera que los fetos correspondientes sufren de acidosis neonatal. Durante el resto de esta sección nos referimos a este grupo como *patológico*, en oposición al grupo *sano*.

Preprocesamiento. Las mediciones de FHR están naturalmente muestreadas en forma irregular, en donde el tiempo entre muestras corresponde al intervalo entre dos ondas R consecutivas. Debido a que el análisis basado en onditas que utilizamos requiere que los datos estén muestreados uniformemente, realizamos una interpolación mediante *splines* cúbicos. Ya que la FHR no contiene información en las frecuencias mayores a 3 Hz, empleamos una frecuencia de muestreo de 10 Hz en la interpolación.

5.9.3. Análisis multifractal basado en p -líderes de la FHR

5.9.3.1. Configuración de las simulaciones

Aplicamos el formalismo multifractal basado en p -líderes a las señales de FHR seleccionadas, y analizamos el comportamiento de los atributos multifractales, su dependencia con p y su impacto en la clasificación entre fetos sanos y patológicos.

Utilizamos una ondita madre Daubechies con $N_\psi = 3$ momentos nulos. Realizamos las estimaciones con $p \in \{0,25; 0,5; 1; 2; 4; 10; \infty\}$ y un rango de escalamiento $(j_1, j_2) = (6, 10)$. Verificamos la condición de regularidad mínima $\zeta_d > 0$ en todos los sujetos antes del análisis basado en p -líderes, lo cual nos permitió determinar la necesidad de realizar una pseudo-integración fraccionaria de orden $\gamma = 0,5$ para garantizar su cumplimiento.

5.9.3.2. Frecuencia cardíaca fetal y atributos multifractales

La Fig. 5.16 muestra los espectros estimados para $p \in \{0,25; 1; 2; 4; \infty\}$, correspondientes a un sujeto sano (izquierda) y un sujeto patológico (derecha), representativos de cada clase. Se puede ver que, independientemente del valor de p , los espectros del sujeto patológico se ubican a la derecha de aquellos correspondientes al sujeto sano. La Fig. 5.17 muestra el promedio de las estimaciones de $c_1^{(p)}$ (izquierda) y $c_2^{(p)}$ (derecha), con intervalos de confianza al 95 %, para los sujetos sanos (líneas negras) y patológicos (líneas rojas). Se observa que los sujetos sanos

tienen menor $c_1^{(p)}$ y mayor $|c_2^{(p)}|$ que los patológicos, para todos los valores de p . Cabe destacar que la elevada diferencia en el ancho de los intervalos de confianza se debe a la falta de balance entre las clases (874 registros sanos y 31 registros patológicos). Por lo tanto, ambas figuras indican que la FHR de los sujetos patológicos está caracterizada por una mayor regularidad y, en consecuencia, por una disminución de la variabilidad de la frecuencia cardíaca. Estos resultados sugieren que el análisis multifractal puede ser potencialmente utilizado como una herramienta para la detección temprana de acidosis.

5.9.3.3. Frecuencia cardíaca fetal y dependencia con p

La Fig. 5.16 también sugiere que a medida que p decrece desde $+\infty$ (línea negra) hasta 0,25 (línea azul), los p -espectros se desplazan hacia valores mayores de h y se vuelven más estrechos. Además, la Fig. 5.17 indica que las estimaciones de $c_1^{(p)}$ y $c_2^{(p)}$ para ambos grupos de hecho muestran una dependencia con p . Para analizar si las diferencias entre $c_1^{(p)}$ y $c_2^{(p)}$ para diferentes valores de p son significativas o no, utilizamos tests de Kruskal-Wallis con la hipótesis nula de que no hay diferencia entre las estimaciones para diferentes valores de p . La Tabla 5.1 reporta los resultados. Se puede apreciar que la hipótesis nula es fuertemente rechazada para el grupo sano, con un p-value¹ bajo. Por el contrario, el test rechaza la hipótesis nula al nivel del 5% para $c_2^{(p)}$ en el grupo patológico; sin embargo no hay evidencia suficiente para rechazarla en el caso de $c_2^{(p)}$. En consecuencia, la dependencia con p es clara y significativa para el grupo sano, pero es difícil asegurarlo en el caso del grupo patológico. Esto se debe, probablemente, a la falta de potencia en el test provocada por el reducido tamaño de la muestra.

Como se discutió en la Sec. 5.5, el hecho de que los p -espectros cambien con p tiene un significado profundo e importante: brinda evidencia de que los datos contienen singularidades lacunares. Por lo tanto, las Figs. 5.16 y 5.17, así como la Tabla 5.1, que evidencian una dependencia significativa con p , indican que la FHR de los sujetos sanos está caracterizada por un comportamiento oscilatorio rico, que potencialmente contiene singularidades lacunares. Esto permite ampliar la descripción provista por el análisis basado en el exponente de Hölder, posibilitando la distinción entre singularidades lacunares y canónicas. Además, la Fig. 5.17 y la Tabla 5.1 también sugieren que la dependencia con p de la FHR patológica es menos significativa. Si esta hipótesis es confirmada, significaría que el comportamiento oscilatorio complejo presente en las dinámicas temporales de la FHR sana disminuye durante la acidosis.

5.9.3.4. Discriminación entre sujetos sanos y patológicos

Para estudiar el impacto de p en la clasificación entre sujetos sanos y patológicos, obtuvimos las estimaciones de $c_1^{(p)}$ y $c_2^{(p)}$ para todos los sujetos. Obtuvimos las curvas de característica operativa del receptor (en inglés, *receiver operating characteristic*, ROC) independientemente para $c_1^{(p)}$ y $c_2^{(p)}$ mediante la aplicación de umbrales a cada uno. Además, calculamos el área bajo la curva (en inglés, *area under curve*, AUC).

¹En este trabajo utilizaremos la nomenclatura en inglés “p-value” para referirnos al valor p de un test estadístico, con el fin de distinguirlo de los valores de p de los p -exponentes.

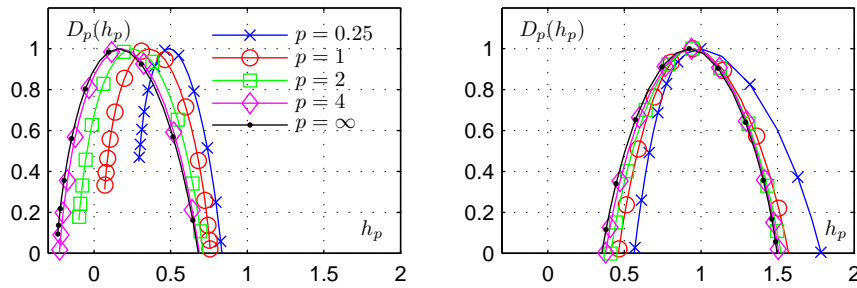


Figura 5.16: **Dependencia respecto a p** : p -espectros multifractales estimados para un sujeto sano (izquierda) y uno patológico (derecha), representativos de cada clase.

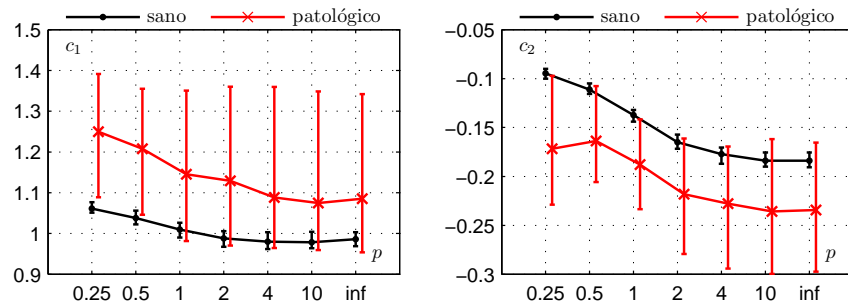


Figura 5.17: **Dependencia respecto a p** : media de las estimaciones de $c_1^{(p)}$ (izquierda) y $c_2^{(p)}$ (derecha), con intervalos de confianza no paramétricos al 95 %.

La Tabla 5.2 y la Fig. 5.18 reportan los resultados obtenidos, y muestran claramente que el uso de valores más pequeños de p permite lograr una mejora en la calidad de la clasificación. Para valores altos de p , la AUC disminuye notablemente. En particular, los estimadores obtenidos con $p = \infty$ (líderes tradicionales) son menos confiables debido a su alta varianza (cf. Sec. 5.8) y, por lo tanto, la clasificación es peor que al usar, e. g. $p = 0,25$. Cabe destacar que la diferencia entre la AUC para $c_1^{(p)}$ y $c_2^{(p)}$ se debe principalmente a la región inferior izquierda de las curvas ROC, en donde se puede apreciar una mejor sensibilidad y especificidad para $c_1^{(p)}$.

La mejora en la clasificación lograda al utilizar estimadores basados en p -líderes, con valores pequeños de p , se puede atribuir a dos factores. En primer lugar, como se ilustró en la Sec. 5.8, el error cuadrático medio de los estimadores es menor al disminuir p . En segundo lugar, el formalismo basado en p -líderes permite obtener una información más rica a partir de los datos al considerar el comportamiento oscilatorio que pueda estar presente.

Para estudiar los beneficios del uso conjunto de $c_1^{(p)}$ y $c_2^{(p)}$ utilizamos el discriminante lineal de Fisher (FLD). Sólo consideramos las estimaciones para $p = 0,25$ ya que fueron las que demostraron un mejor desempeño. La Fig. 5.19 (derecha) muestra las curvas ROC obtenidas utilizando c_1 (curva azul), c_2 (curva negra) y el FLD con validación cruzada de 5 iteraciones (curva roja). Se puede ver una leve mejora en la clasificación, particularmente en la esquina superior derecha de la curva. El valor de AUC obtenido es $0,73 \pm 0,09$, levemente superior a los valores indicados en la Tabla 5.2. Además, la Fig. 5.19 muestra la separación lineal de los sujetos sanos (a la izquierda de la línea negra) y los patológicos (a la derecha de la línea negra). En primer lugar, en el lado inferior derecho, la mayor densidad de casos

Tabla 5.1: **Dependencia respecto a p :** p -values para los tests de Kruskal-Wallis con $H_0 : c_m^{(p)} = c_m^{(p')}$ para $m = 1, 2$, y para los grupos normal y patológico.

	$c_1^{(p)}$	$c_2^{(p)}$
SANOS	$1,70E - 22$	$2,13E - 133$
PATOLÓGICOS	0,83	0,03

Tabla 5.2: **Calidad de la clasificación.** Valores del área bajo la curva ROC para diferentes valores de p .

	0.25	0.5	1	2	4	10	∞
c_1	0.71	0.70	0.69	0.67	0.67	0.67	0.67
c_2	0.66	0.63	0.62	0.61	0.60	0.60	0.60

no patológicos indica que c_1 y c_2 caracterizan aceptablemente la regularidad de los fetos que sufren de acidosis. En segundo lugar, en el lado superior izquierdo se puede apreciar la presencia de sujetos patológicos en el dominio sano. El análisis preliminar de estos sujetos indica que la dependencia con p de los atributos multifractales, en la forma descrita en la Fig. 5.16, se asemeja a la de los sujetos sanos. La razón de este comportamiento se encuentra en investigación al momento de la redacción de esta tesis.

5.9.4. Conclusiones

En esta sección hemos ilustrado los beneficios provistos por el formalismo multifractal basado en p -líderes para la caracterización y discriminación de datos de FHR durante el parto. En primer lugar, pusimos en evidencia que la FHR de los sujetos sanos muestra una regularidad más elevada y, por lo tanto, sus dinámicas temporales tienen menor variabilidad. En segundo lugar, observamos que las estimaciones dependen significativamente de p . Este hallazgo puede ser interpretado como evidencia de que la dinámica de la FHR involucra comportamientos singulares complejos, reminiscentes a las singularidades lacunares. Aún más, la dependencia con p para los sujetos patológicos parecería ser más débil, soportando la hipótesis de una variabilidad reducida. Finalmente, mostramos que la clasificación entre sujetos sanos y patológicos es mejorada mediante el uso de p -líderes con valores bajos de p , en concordancia con los resultados reportados en [155] para la frecuencia cardíaca en adultos. Esta mejora del desempeño puede deberse a dos razones: 1) el formalismo basado en p -líderes provee información más rica al considerar el comportamiento oscilatorio, y 2) las estimaciones basadas en p -líderes tienen mejor calidad estadística para valores bajos de p . Los resultados de esta sección fueron presentados en [2].

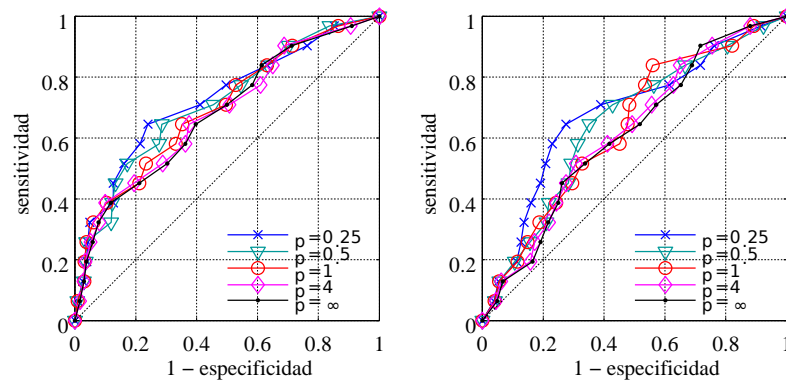


Figura 5.18: **Clasificación.** Curvas ROC para c_1 (izquierda) y c_2 (derecha), para diferentes valores de p .

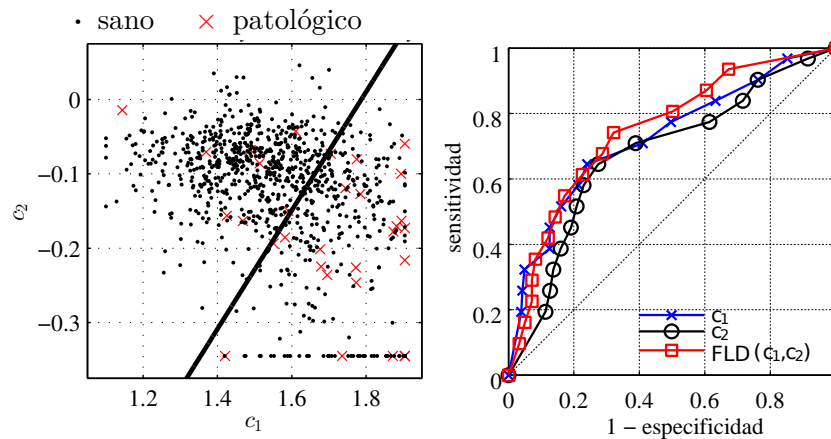


Figura 5.19: **Uso conjunto de $c_1^{(0,25)}$ y $c_2^{(0,25)}$.** Izquierda: gráfico de dispersión para c_1 y c_2 de los sujetos sanos (puntos negros) y patológicos (cruces rojas). Los puntos con $c_2 < -0,35$ son representados como $c_2 = -0,35$ para permitir una mejor visualización de los grupos principales. La línea negra es la frontera de separación de un clasificador basado en el análisis lineal de Fisher. Derecha: curva ROC para $c_1^{(0,25)}$, $c_2^{(0,25)}$ y FLD conjunto para $c_1^{(0,25)}$ y $c_2^{(0,25)}$.

5.10. Comentarios finales

En este capítulo presentamos una nueva definición de regularidad local en el contexto del análisis multifractal: los p -exponentes. Discutimos la caracterización mediante p -líderes de dicho exponente, así como el formalismo multifractal basado en dicha cantidad multirresolución. Esta caracterización basada en onditas permite extender la validez de la definición original al caso $p < 1$. El p -exponente permite medir regularidad negativa en forma natural, sin la necesidad de recurrir a la integración previa de los datos. Esta característica es de extrema utilidad en ciertas aplicaciones prácticas, en las cuales la existencia de exponentes de regularidad negativos es habitual.

La generalización del análisis multifractal provista por los p -exponentes permite analizar los casos en los que las estimaciones obtenidas no coinciden para diferentes valores de p , en particular con aquellas basadas en el exponente de Hölder ($p = \infty$).

Por lo tanto, la posibilidad de cambiar el valor de p utilizado provee una descripción más rica del comportamiento singular de los datos bajo estudio. Puntualmente, el estudio de la invariancia con p de las estimaciones posibilita distinguir entre los tipos de singularidades oscilantes presentes en los datos. Por lo tanto, la invariancia con p , junto con la invariancia frente a integraciones fraccionarias, permite clasificar las singularidades en canónicas, lacunares y balanceadas.

Analizamos también el formalismo basado en p -líderes desde el punto de vista de su cálculo en la práctica. Utilizando el modelo simple provisto por las cascadas de onditas determinísticas, mostramos que las estimaciones basadas en p -líderes sufren de una desviación del comportamiento invariante a la escala, particularmente en las escalas finas. Sin embargo, mostramos que el uso de dicho modelo dio lugar a la obtención de factores de corrección que corrigen dicho efecto y permiten realizar estimaciones correctas en la práctica. A continuación, validamos dichos factores de corrección en casos particulares del modelo más complejo provisto por las cascadas de onditas aleatorias. Finalmente, realizamos una validación numérica mediante el análisis de realizaciones independientes de procesos multifractales sintéticos.

Por otro lado, la formulación del análisis multifractal basado en p -exponentes permitió realizar una conexión explícita con la técnica de MF DFA, una propuesta *ad hoc* ampliamente utilizada en las aplicaciones prácticas. Esta conexión nos permitió brindar un soporte teórico a MF DFA en términos del análisis de regularidad basado en p -exponentes. Este resultado tiene una importante connotación: al realizar el análisis mediante MF DFA, no se mide el exponente de Hölder sino el 2-exponente. Desde un punto de vista práctico, comparamos ambos formalismos y llegamos a la conclusión de que el basado en p -líderes es preferible en las aplicaciones debido a que brinda mejores estimaciones (es decir, con menor error cuadrático), es más eficiente computacionalmente, y no requiere realizar el complejo proceso de sustracción de polinomios ajustados localmente.

Las simulaciones numéricas realizadas sobre realizaciones independientes de procesos multifractales nos permitieron comprobar las virtudes del formalismo multifractal basado en p -líderes. En primer lugar, ilustramos la correcta estimación de espectros cuyo soporte incluye valores negativos del exponente de regularidad. En segundo lugar, mostramos que las estimaciones basadas en p -líderes, para valores pequeños de p , proveen estimaciones con menor error cuadrático medio que las obtenidas con MF DFA o los líderes tradicionales. Este es el caso tanto en procesos multifractales “puros” como en aquellos sometidos al efecto de tendencias no polinomiales suaves.

Por último, ejemplificamos la aplicación del formalismo basado en p -líderes a señales biomédicas reales. En particular, consideramos la aplicación a señales de frecuencia cardíaca de fetos durante el parto. Mostramos que las estimaciones dependen significativamente con p , lo cual sugiere la presencia de un comportamiento singular complejo, reminiscente a las singularidades lacunares, en la dinámica temporal de la FHR. Además, mostramos que la clasificación entre sujetos sanos y patológicos es mejorada mediante el uso de p -líderes con valores bajos de p .

Los resultados que presentamos en este capítulo dieron lugar a una presentación en un congreso internacional [4]. Al momento de finalizar la redacción de esta tesis, se encuentran próximos a ser enviados para su publicación dos manuscritos que reportan los resultados de este capítulo [1, 3]. Dichos manuscritos contienen tanto

los desarrollos teóricos como prácticos presentados en este capítulo, y fueron escritos en colaboración con los Dres. S. Jaffard, C. Melot, H. Wendt y S. Roux, de las universidades de París, Provence, Toulouse y Lyon, Francia.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos futuros

“That my conclusions on these difficult questions are final, I am not so foolish as to pretend. I have changed my views repeatedly, and I am resolved to change them again with every change of the evidence, for like a chamaleon the candid inquirer should shift his colours with the shifting colour of the ground he treads.”

TOTEM Y TABÚ

Sigmund Freud, citando a James Frazer

En este trabajo estudiamos la técnica de análisis multifractal, y propusimos desarrollos que permiten su mejor uso en la práctica y brindan una mejor comprensión de sus propiedades teóricas.

Realizamos inicialmente con una revisión, que quiso ser exhaustiva, de la invarianza a la escala y el análisis multifractal, desde la perspectiva de su aplicación en la práctica. Pusimos especial énfasis en la descripción de las diversas cantidades multirresolución existentes, tanto de aquellas que principalmente tienen interés histórico como las que son utilizadas en la actualidad. Discutimos y comparamos los formalismos multifractales basados en ellas. El punto clave en dicho análisis es el hecho de que se puede basar un formalismo multifractal en cualquier cantidad multirresolución, bajo la condición de que su decaimiento permita recuperar algún exponente que mida la regularidad local. Las características particulares de cada cantidad afectarán a: i) el rango de órdenes estadísticos q (y por consiguiente de exponentes de regularidad h) que podrán ser analizados, ii) la robustez ante comportamientos suaves superpuestos a los datos, iii) la facilidad de su manipulación matemática, iv) la eficiencia de su implementación computacional. A la hora de comenzar este trabajo, los coeficientes óptimos eran la cantidad multirresolución óptima en el sentido de su buen comportamiento en las cuatro propiedades mencionadas.

Realizamos luego una extensa revisión de los procesos y modelos multifractales disponibles en la actualidad. Mencionamos las características principales de cada uno de ellos, e indicamos las expresiones explícitas de diversos atributos multifractales: la función de escalamiento, el espectro multifractal y sus log-cumulantes. En el caso de los procesos basados en cascadas, todas las expresiones formales fueron deducidas

por el autor para los dos tipos de multiplicadores más habitualmente utilizados en la práctica.

A continuación presentamos la primera contribución de este trabajo de tesis: un método para la detección automática del rango de escalamiento en el que se debe realizar la estimación de los atributos multifractales. Como indicamos, la selección de dicho rango es una tarea crucial en la práctica pero, paradójicamente, no siempre es considerada con la debida atención. El rango de escalamiento es habitualmente seleccionado por el practicante mediante inspección visual, lo que constituye una tarea tediosa y propensa a errores. Por lo tanto, el método propuesto apunta a una necesidad imperiosa en la práctica. Debido a su naturaleza metodológica, y al estar basado en técnicas no paramétricas, puede ser aplicado a una amplia clase de procesos y señales multifractales, con la imposición de mínimas hipótesis que son habitualmente cumplidas en la práctica (correlación de corto plazo de los coeficientes ondita). Mostramos, mediante un extenso conjunto de simulaciones numéricas, que el método propuesto detecta rangos que se corresponden con la región de escalamiento, y que, además, llevan a la obtención de estimadores con error cuadrático medio cercano al óptimo. Además de automatizar el proceso de análisis y de permitir una estimación cercana a la óptima, el método también contribuye al análisis de los datos. Al informar sobre las escalas de corte del escalamiento, proporciona al practicante indicadores adicionales que caracterizan la invarianza a la escala. Por ejemplo, el hecho de que el escalamiento deje de verificarse en ciertas escalas podría servir como un indicador de alguna patología. Por otro lado, la verificación de la coincidencia entre los rangos estimados para distintos órdenes estadísticos permite estudiar la validez del paradigma multifractal para modelar los datos.

El principal trabajo que queda planteado con respecto a este algoritmo de selección del rango de escalamiento es la verificación teórica de la optimalidad de los rangos detectados. Consideramos que esto podría ser abordado mediante la selección de algún proceso multifractal que permita obtener expresiones exactas para las distribuciones empíricas estimadas por el bootstrap.

La segunda contribución de este trabajo de tesis es la propuesta, desarrollo y validación del formalismo multifractal basado en p -exponentes, y su caracterización mediante p -líderes. La principal virtud de esta propuesta es la posibilidad de analizar, en forma natural, señales con exponentes de regularidad negativos. Esta característica es de extrema utilidad en numerosas aplicaciones prácticas, en donde la existencia de regularidad negativa es habitual. Por otro lado, mostramos que la generalización del análisis multifractal provista por los p -exponentes permite analizar los casos en los que las estimaciones no coinciden para diferentes valores de p . Esta característica posibilita una descripción más rica de los datos, en términos de sus singularidades oscilantes. En efecto, el uso de los p -exponentes nos permitió refinar la clasificación de singularidades oscilantes existente al momento de comenzar este trabajo. Analizamos también el formalismo propuesto desde el punto de vista de su cálculo en la práctica. Mostramos que, sobre ciertos modelos multifractales, la resolución finita de los datos genera un efecto aditivo y no lineal sobre las funciones de estructura. Sin embargo, dicho efecto puede ser predicho y cancelado mediante los factores de corrección propuestos.

La formulación del análisis multifractal basado en p -exponentes nos permitió realizar una conexión explícita con la técnica de MF DFA, ampliamente utilizada en

la práctica pero originalmente propuesta como un algoritmo *ad hoc*. Esta relación permitió brindar un soporte teórico a MF DFA en términos del análisis basado en p -exponentes, así como extraer una importante conclusión: las estimaciones obtenidas con MF DFA no miden el exponente de Hölder, como fue originalmente propuesto, sino que miden el 2-exponente. Esta distinción no tiene consecuencias prácticas al estudiar señales que contienen sólo singularidades canónicas (el caso más habitual), pero cobra relevancia si los datos contienen singularidades lacunares. Comparamos ambos métodos, tanto desde un punto de vista práctico como teórico, y concluimos que la formulación basada en 2-líderes es preferible debido a que brinda mejores estimaciones y es más eficiente computacionalmente.

Las simulaciones numéricas realizadas ilustraron que, además de permitir la medición de regularidad negativa, el formalismo basado en p -líderes provee un beneficio adicional frente al tradicional basado en coeficientes ondita líderes: las estimaciones logradas tienen un menor error cuadrático medio al disminuir p . Por lo tanto, los resultados sustentan la recomendación de que el análisis multifractal debería basarse, en forma habitual, en el uso de p -exponentes con $p = 1$ o $p = 2$. Esta elección asegura la posibilidad de medir un amplio rango de exponentes de regularidad negativa, así como una reducción de hasta 2 veces en el error cuadrático con respecto al obtenido con líderes tradicionales $p = \infty$.

Finalmente, aplicamos el formalismo basado en p -líderes a un problema biomédico real: la detección de la acidosis en fetos a partir de la señal de frecuencia cardíaca. Mostramos que las estimaciones para diferentes valores de p sugieren la presencia de un comportamiento singular más complejo que el habitualmente considerado, y que está caracterizado por singularidades reminiscentes a las lacunares. Por otro lado, mostramos que el incremento en la calidad de las estimaciones para valores pequeños de p se traduce en una mejora en los índices de clasificación entre fetos sanos y fetos que sufren de acidosis.

A pesar de que la exposición del análisis multifractal basado en p -líderes que realizamos es completa, quedan todavía numerosas cuestiones por dilucidar. En primer lugar, se debe completar el análisis de los efectos de la resolución finita en las cascadas aleatorias. Los resultados preliminares mostrados en este trabajo fueron obtenidos para un conjunto reducido de órdenes q , pero se debe continuar dicho análisis para lograr una caracterización completa de todas las funciones de estructura. La aplicación del formalismo basado en p -líderes a señales reales es sólo un ejemplo de las ventajas que brinda su uso. Por lo tanto, actualmente se encuentran en curso trabajos que exploran la aplicación de dicha técnica a otro tipo de señales de nuestro interés, como la frecuencia cardíaca en adultos y la señal de voz.

Para concluir, consideramos que los aportes presentados en este trabajo de tesis tienen la posibilidad de permitir un mejor uso del análisis multifractal en la práctica. La automatización en la selección del rango de escalas, la posibilidad de medir exponentes negativos, la disminución de la necesidad de realizar una integración fraccionaria, y la obtención de mejores estimadores, hacen del análisis multifractal una técnica más poderosa y fácil de usar. Por lo tanto, terminamos este trabajo de tesis con la esperanza de que las contribuciones propuestas ayuden a la adopción de esta técnica en un mayor número de aplicaciones.

Apéndice A

Demostraciones

Contenidos

A.1. Introducción	151
A.2. Demostración del teorema 5.2.1	151
A.3. Demostración de la condición óptima del Teorema 5.2.1	152
A.4. Demostración de la proposición 5.5.1	155
A.5. Demostración del teorema 5.5.1	156
A.6. Demostración de la proposición 5.4.1	158

A.1. Introducción

Este este capítulo reproducimos las demostraciones de los teoremas y proposiciones introducidos en el capítulo 5. Dichas demostraciones estuvieron a cargo del Dr. S. Jaffard y la Dra. C. Melot, coautores de los manuscritos en preparación [1, 3] que reportan los resultados del capítulo 5.

A.2. Demostración del teorema 5.2.1

Supóngase que $X \in T_\alpha^p(x_0)$, y sea $q < p$. Denotamos con P al polinomio de Taylor de X para la condición de regularidad $T_\alpha^p(x_0)$. Sean $B = B(x_0, r)$, $p' = p/q$ y q' el exponente conjugado de p' , i. e. q' satisface $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$. Entonces, utilizando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_B |X(x) - P(x - x_0)|^q dx &= \int_B |X(x) - P(x - x_0)|^q 1_B(x) dx \\
&\leq \left(\int_B |X(x) - P(x - x_0)|^{qp'} dx \right)^{1/p'} \left(\int_B (1_B(x))^{q'} dx \right)^{1/q'} \\
&= \left(\int_B |X(x) - P(x - x_0)|^p dx \right)^{1/p'} (Cr)^{1/q'} \\
&\leq C (r^{\alpha p + 1})^{1/p'} r^{1/q'} \\
&= Cr^{\alpha q + 1}.
\end{aligned}$$

Entonces, se observa que $X \in T_\alpha^p(x_0)$, y el mismo polinomio de Taylor puede ser utilizado para $T_\alpha^q(x_0)$ y para $T_\alpha^p(x_0)$. Por lo tanto, $p \rightarrow h_p(x_0)$ es decreciente, y se cumple la aseveración hecha con respecto al polinomio de Taylor.

Para demostrar la concavidad de la función $s \rightarrow h_{1/s}(x_0)$, suponemos que $X \in T_\alpha^p(x_0) \cap T_\beta^q(x_0)$. Escojemos $\gamma \in (0, 1)$ y definimos s como

$$\frac{1}{s} = \frac{\gamma}{p} + \frac{1 - \gamma}{q}.$$

Debemos demostrar que $X \in T_\delta^s(x_0)$, en dónde

$$\delta = \gamma\alpha + (1 - \gamma)\beta.$$

Seleccionamos a P como el polinomio de Taylor máximo de X . Denotamos con $\|X\|_p$ a la norma L^p de X sobre $B(x_0, r)$. Las suposiciones hechas implican que

$$\|X - P\|_p \leq Cr^{\alpha + 1/p} \quad \text{y} \quad \|X - P\|_q \leq Cr^{\beta + 1/q}.$$

Por interpolación, se deduce que

$$\|X - P\|_s \leq Cr^{\gamma(\alpha + d/p) + (1 - \gamma)(\beta + d/q)} = Cr^{\gamma\alpha + (1 - \gamma)\beta + 1/s},$$

y por lo tanto $X \in T_\delta^s(x_0)$. De esto se deduce la concavidad de $s \rightarrow h_{1/s}(x_0)$.

A.3. Demostración de la condición óptima del Teorema 5.2.1

Para demostrar la condición óptima del teorema 5.2.1, demostraremos que la función $p \rightarrow h_p(x_0)$ puede ser cualquier función que satisfaga las condiciones del teorema 5.2.1. Para ello, comenzamos introduciendo la siguiente proposición.

Proposición A.3.1. Sean $x_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 \in (1, \infty]$, y sea ϕ una función definida sobre $[1, p_0]$ y que satisfaga

- $\forall p \in [1, p_0], \phi(p) \geq -1/p,$
- ϕ es decreciente,
- la función $\rho(s) \Rightarrow \phi(1/s)$ es cóncava.

Entonces existe $X \in L^{p_0}(\mathbb{R})$ tal que $\forall p \in [1, p_0], h_p(x_0) = \phi(p)$.

La demostración consiste en un ejemplo constructivo.

Demostración: Consideraremos funciones que están parametrizadas por dos secuencias $\theta(j)$ y $\omega(j)$ que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $\omega(j) - j \rightarrow +\infty$
2. $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-\omega(j)-\theta(j)} < \infty$

La función $F_{\theta,\omega}$ se define como sigue (consideramos $x_0 = 0$):

$$F_{\theta,\omega}(x) = \begin{cases} 2^{-\theta(j)}, & \text{si } x \in [2^{-j}, 2^{-j} + 2^{-\omega(j)}], \text{ con } j \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Nótese que la primera condición implica la lacunaridad de la construcción: cuando $x \rightarrow 0$, $F_{\theta,\omega}$ se anula en una proporción mayor de puntos. La segunda condición impuesta sobre las secuencias $\theta(j)$ y $\omega(j)$ implica que $F_{\theta,\omega}$ pertenece a L^1 en torno a 0.

En primer lugar, resulta claro que $F_{\theta,\omega}$ está acotada en una vecindad de x_0 si y sólo si

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \forall j \geq 0, \quad \theta(j) \geq C. \quad (\text{A.2})$$

Lema A.3.1. Si se cumple la ec. (A.2), entonces el exponente de Hölder de $F_{\theta,\omega}$ en 0 está dado por

$$h_{\theta,\omega}(0) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\theta(j)}{j}. \quad (\text{A.3})$$

Demostración: De hecho, hacemos notar en primer lugar que $F_{\theta,\omega}$ es continua en 0, en dónde se anula. Además, los máximos locales de $F_{\theta,\omega}(x)/x^\alpha$ se obtienen en los puntos 2^{-j} y, por lo tanto, si escogemos $P = 0$ en la ec. (5.1), entonces obtenemos la ec. (A.3). Todavía falta verificar que el estimador obtenido tomando $P = 0$ es el mejor posible. En lo que respecta al término constante, observamos dos casos: si $\theta(j)$ no tiende a $+\infty$ entonces $F_{\theta,\omega}$ no es continua en 0, y por lo tanto $h_{\theta,\omega}(0) = 0$ y no hay nada que demostrar; por el contrario, si $\theta(j) \rightarrow +\infty$, entonces $F_{\theta,\omega}$ es continua en 0 y el término constante se debe anular. Para términos de mayor orden, se procede por inducción en el valor de P , notando que $F_{\theta,\omega}$ se anula en los intervalos $[2^{-l} + 2^{-\omega(l)}, 2^{-l+1}]$, lo que implica que, en tales intervalos, la elección $P \neq 0$ conduciría a peores resultados.

Ahora volvemos a la demostración de la proposición, pero sin la suposición de que se cumple la ec. (A.2). Para estimar el p -exponente de $F_{\theta,\omega}$ en 0, comenzamos considerando la siguiente expresión:

$$\frac{1}{a} \int_{-a}^a |F_{\theta,\omega}(x)|^p dx \quad (\text{A.4})$$

(consideramos $P = 0$ en la definición de la regularidad T_α^p).

En primer lugar, suponemos que $2^{-l} + 2^{-\omega(l)} \leq a \leq 2^{-l+1}$; entonces

$$\frac{1}{a} \int_{-a}^a |F_{\theta, \omega}(x)|^p dx = \frac{1}{a} \sum_{j=l}^{\infty} 2^{-\omega(j)} 2^{-p\theta(j)}. \quad (\text{A.5})$$

Por lo tanto, el valor crítico p_0 está dado por

$$p_0 = \sup\{p : \text{la ec. (A.5) converge}\}.$$

Para demostrar la proposición A.3.1, haremos elecciones explícitas de las secuencias $\theta(j)$ y $\omega(j)$. Seleccionamos la variable $s = 1/p$, por lo que la función ρ , definida en la proposición A.3.1, satisface las siguientes condiciones: es una función cóncava y creciente definida en $(1/p_0, 1]$, y tal que $\rho(s) \geq -s$. La concavidad implica que ρ puede ser obtenida como el ínfimo de una familia contable de funciones afines

$$\rho_n(s) = a_n s + b_n$$

que satisfacen $\forall s, \rho_n(s) > \rho(s)$. Seleccionamos ahora las funciones θ y ω de la siguiente manera: escogemos j de la forma $j = 2^n(2k+1)$ y

$$\begin{cases} \omega(j) = (a_n + 1)j \\ \theta(j) = b_n j. \end{cases}$$

El resultado se deduce del hecho que las sumas parciales en el lado derecho de la ec. (A.5) satisfacen

$$\frac{1}{a} \sum_{j=l}^m 2^{-\omega(j)} 2^{-p\theta(j)} \leq \frac{1}{a} \sum_{j=l}^m 2^{-(a_n+1+pb_n)j},$$

y que, usando $\rho_n(1/p) \geq \rho(1/p)$, la expresión anterior se puede acotar por

$$C 2^l \sum_{j=l}^m 2^{-(p\rho(1/p)+1)j}.$$

Como el exponente es estrictamente positivo, esta suma está acotada por

$$C 2^l 2^{-(p\rho(1/p)+1)l} \leq C \left(a^{\rho(1/p)} \right)^p, \quad (\text{A.6})$$

que es la cota superior requerida. La cota inferior se obtiene considerando un valor de n tal que la recta $\rho_n(s) = a_n s + b_n$ esté arbitrariamente cercana a ρ para el valor específico de p utilizado, y seleccionado a l como el entero correspondiente $2^n(2k+1)$. Entonces, el primer término de la suma está arbitrariamente cercano a la ec. (A.6).

Seleccionando $P = 0$, obtenemos que

$$T_X^{(p)}(a, x_0) \sim a^{\alpha+(\gamma-1)/p}. \quad (\text{A.7})$$

Si ahora tomamos a en el intervalo $[2^{-l}, 2^{-l} + 2^{-\gamma l}]$, la integral está acotada por el valor que toma la función en $2^{-l} + 2^{-\gamma l}$, que ya fue estimado, y por lo tanto la ec. (A.7) se satisface. Todavía falta determinar que el estimador que se obtiene utilizando $P = 0$ es el mejor posible. Como en el caso del exponente de Hölder, se

procede por inducción en el valor de P , notando que $F_{\theta,\omega}$ se anula en el intervalo $[2^{-l} + 2^{-\gamma l}, 2^{-l}]$, y por lo tanto el orden de magnitud de $\int |F_{\theta,\omega}(x) - P(x)|^p dx$ en tales intervalos está dado por la integral del primer término no nulo de P . Esta observación indica que, de hecho, $P = 0$ es la mejor elección posible. De esta forma obtenemos que el p -exponente de $F_{\theta,\omega}$ en el origen es

$$h_p(0) = \rho(1/p), \quad (\text{A.8})$$

y, por lo tanto, la proposición A.3.1 está demostrada.

A.4. Demostración de la proposición 5.5.1

La proposición 5.5.1 es un corolario de la proposición siguiente.

Proposición A.4.1. *Sea $p_0 > 1$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $X \in L_{loc}^{p_0}(\mathbb{R})$ en una vecindad de $x_0 \in \mathbb{R}$, y supóngase que $h_{p_0}(x_0) < +\infty$. Entonces, las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Todos los p -exponentes de X coinciden para $1 \leq p < p(x_0)$,*
2. *$\exists p_0 \in (1, p(x_0))$ tal que $\forall \alpha > h_{p_0}(x_0)$, el exponente de accesibilidad de $A_X(\alpha, x_0)$ se anula en x_0 .*

Demostración: Después de sustraer el polinomio de Taylor en x_0 , podemos suponer P que se anula. Sea $\alpha = h_X^{p_0}(x_0)$.

Comenzamos demostrando la afirmación directa. Sea $\epsilon' > 0$ fijo. Ya que los p -exponentes coinciden, y en particular $h_X^1(x_0) = \alpha$, podemos suponer que $X \notin T_{\alpha+\epsilon'}^1$ y, por lo tanto, $\exists r_n \rightarrow 0$ tal que

$$\int_{B(x_0, r_n)} |X| dx \geq 2 r_n^{\alpha+\epsilon'+1} \quad (\text{A.9})$$

Sea

$$A_n = \left\{ x \in B(x_0, r_n) : |X(x)| \geq r_n^{\alpha+\epsilon'} \right\}.$$

Fuera de A_n , y para $x \in B(x_0, r_n)$, $|X(x)| \leq r_n^{\alpha+\epsilon'}$, y entonces

$$\int_{A_n^c} |X| dx \leq 1 r_n^{\alpha+\epsilon'+1}.$$

En consecuencia, se deduce que

$$\int_{A_n} |X| dx \geq 1 r_n^{\alpha+\epsilon'+1}. \quad (\text{A.10})$$

Por hipótesis, $\forall \epsilon > 0$, $X \in T_{\alpha-\epsilon}^{p_0}$ y entonces

$$\int_{B(x_0, r_n)} |X|^{p_0} dx \leq r_n^{1+p_0(\alpha-\epsilon)}.$$

Denotamos con q_0 al exponente conjugado de p_0 . Usando la desigualdad de Hölder en A_n con las funciones 1 y X , obtenemos

$$\int_{A_n} |X| dx \leq M(A_n)^{1/q_0} \|X\|_{p_0} \leq M(A_n)^{1-1/p_0} r_n^{\alpha-\epsilon+1/p_0}.$$

Usando la ec. (A.10), podemos deducir que $M(A_n) \geq C r_n^{\alpha+\epsilon''}$ con $\epsilon'' = (\epsilon + \epsilon')/(1 - 1/p_0)$. Por lo tanto, ϵ'' puede ser seleccionado arbitrariamente pequeño, de lo que se deduce que se satisface la aseveración directa de la proposición A.4.1.

Ahora demostramos la afirmación inversa. Supóngase que

$$\forall \epsilon > 0, \exists r_n \rightarrow 0 : M \left\{ x \in B(x_0, r_n) : |X(x) - P(x - x_0)| \geq r_n^{\alpha+\epsilon} \right\} \geq r_n^{1+\epsilon}, \quad (\text{A.11})$$

entonces

$$\int_{B(x_0, r_n)} |X| dx \geq r_n^{\alpha+\epsilon} r_n^{1+\epsilon}$$

y $X \notin T_{\alpha+3\epsilon}^1$. Dado que esto se satisface $\forall \epsilon > 0$, se deduce que $h_X^1(x_0) \leq \alpha$ y que, en consecuencia, se satisface la afirmación inversa de la proposición A.4.1.

Esto completa la demostración de la proposición A.4.1. La proposición 5.5.1 es un corolario directo de la proposición A.4.1 y de la definición de función no-despreciable (definición 5.5.3).

A.5. Demostración del teorema 5.5.1

Comenzamos introduciendo la siguiente notación. Decimos que $L_\lambda^{(p)} \sim 2^{hj}$ en x_0 si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \text{para } j \text{ suficientemente pequeño, } L_{\lambda_j(x_0)}^{(p)} \leq 2^{(h-\epsilon)j} \quad (\text{A.12})$$

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists j_n \rightarrow -\infty : L_{\lambda_{j_n}(x_0)}^{(p)} \geq 2^{(h+\epsilon)j}. \quad (\text{A.13})$$

Hacemos notar que estas dos condiciones pueden ser reescritas como

$$\liminf_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log \left(L_{\lambda_j(x_0)}^{(p)} \right)}{\log(2^j)} = h.$$

Dado que $\zeta_d(p) > 0$, podemos utilizar la caracterización mediante onditas del p -exponente dada por la ec. (5.9), así como el hecho de que las integrales fraccionales y pseudo-fraccionales conducen al mismo p -exponente, cf. [85]. De esta forma, se deduce que X tiene una singularidad canónica en x_0 de exponente h si y sólo si

$$L_\lambda^{(p)} \sim 2^{hj} \text{ en } x_0 \quad \text{y} \quad \exists \gamma > 0: L_\lambda^{(p,\gamma)} \sim 2^{(h+\gamma)j} \text{ en } x_0.$$

El teorema 5.5.1 será entonces una consecuencia del resultado siguiente.

Proposición A.5.1. *La función X tiene una singularidad canónica en x_0 de exponente h si y sólo si se satisface la ec. (A.12), y si, para cualquier $\epsilon > 0$ existe una secuencia de cubos diádicos λ_n de escalas $j_n \rightarrow -\infty$ tales que*

$$\begin{cases} \text{dist}(x_0, \lambda_n) \leq 2^{(1-\epsilon)j_n} \\ |d_{\lambda_n}| \geq 2^{(h+\epsilon)j_n}. \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Nota: el hecho de que la ec. (A.14) no dependa de γ tiene la siguiente consecuencia: en la definición de singularidad canónica (definición 5.5.1), cuando la segunda propiedad se satisface para un $\gamma > 0$, entonces lo hace para cualquier $\gamma > 0$.

Demostración de la proposición A.5.1: Supongamos que X tiene una singularidad canónica de exponente h en x_0 . Demostramos en primer lugar la afirmación siguiente:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists j_n \rightarrow -\infty : \left(\sum_{\lambda' \subset 3\lambda_j(x_0), j \geq j' \geq (1+\epsilon)j} |d_{\lambda'}|^p 2^{(j-j')} \right)^{1/p} \geq 2^{(h+\epsilon)j}. \quad (\text{A.15})$$

Lo demostraremos por contradicción. De hecho, si la afirmación no fuese verdadera, entonces existiría $\epsilon > 0$ tal que,

$$\forall j \leq 0 \quad \left(\sum_{\lambda' \subset 3\lambda_j(x_0), j \geq j' \geq (1+\epsilon)j} |d_{\lambda'}|^p 2^{(j-j')} \right)^{1/p} \leq 2^{(h+\epsilon)j}. \quad (\text{A.16})$$

Consideremos ahora el p -líder correspondiente, asociado con una integración pseudo-fraccionaria de orden γ :

$$\left(\sum_{\lambda' \subset 3\lambda_j(x_0)} |d_{\lambda'}| 2^{\gamma j'} |d_{\lambda'}|^p 2^{(j-j')} \right)^{1/p}; \quad (\text{A.17})$$

dividimos la expresión anterior en dos partes, dependiendo de si $j' \geq (1+\epsilon)j$ o $j' < (1+\epsilon)j$.

Se deduce de la ec. (A.16) que en la ec. (A.17) la suma para $j' \geq (1+\epsilon)j$ está acotada por $2^{(h+\epsilon+\gamma)j}$. Consideremos ahora la suma para $j' < (1+\epsilon)j$; usando el hecho de que

$$2^{\gamma j'} \leq 2^{\gamma(1+\epsilon)j},$$

se deduce que esta suma está acotada por $2^{(h+\gamma(1+\epsilon))j}$. Por lo tanto, el p -exponente de la integral pseudo-fraccionaria de orden γ es mayor que $h+\gamma(1+\epsilon)$, lo que contradice al hecho de que x_0 es una singularidad canónica. En consecuencia, se satisface la ec. (A.15).

Ahora demostramos que la ec. (A.15) implica que se satisface la ec. (A.14). De hecho, hacemos notar que la suma en la ec. (A.15) tiene como máximo $C2^{-\epsilon j}$ términos; por lo tanto, al menos uno de ellos satisface que

$$|d_{\lambda'}|^p 2^{(j-j')} \geq 2^{(h+\epsilon)pj} 2^{\epsilon j}$$

lo cual, utilizando el hecho que $j \geq j' \geq j + \epsilon j$, implica que

$$|d_{\lambda'}| \geq 2^{hj'} 2^{C\epsilon j'}.$$

Además, las condiciones $\lambda' \subset 3\lambda_j(x_0)$ y $j \geq j' \geq j + \epsilon j$ implican que el cubo λ' satisface la primera condición de la ec. (A.14).

Ahora demostramos la afirmación inversa de la proposición A.5.1. Suponemos que la ec. (A.14) y la ec. (A.12) se satisfacen. Denotamos con $\tilde{\lambda}$ al menor cubo de la forma $\lambda_j(x_0)$ tal que $3\tilde{\lambda}$ contiene a λ' . Se deduce a partir de la ec. (A.14) que la escala \tilde{j} de $\tilde{\lambda}$ satisface $j'(1 - \epsilon) \geq \tilde{j} \geq j'$. Por lo tanto, el p -líder correspondiente satisface

$$L_{\tilde{\lambda}}^{(p)} \geq \left(|d_{\lambda'}|^p 2^{(j-j')} \right)^{1/p} \geq 2^{(h+\epsilon)j'} 2^{C\epsilon j} \geq 2^{h\tilde{j}} 2^{C\epsilon\tilde{j}},$$

y, en forma análoga, el p -líder correspondiente a la función integrada con orden γ satisface

$$L_{\tilde{\lambda}}^{(p,\gamma)} \geq \left(|d_{\lambda'}| 2^{\gamma j'} |p 2^{(j-j')}| \right)^{1/p} \geq 2^{(h+\gamma+\epsilon)j'} 2^{C\epsilon j} \geq 2^{(h+\gamma)\tilde{j}} 2^{C\epsilon\tilde{j}}.$$

En consecuencia, X tiene una singularidad canónica de exponente h en x_0 . Hacemos notar que el último argumento se puede aplicar con cualquier otro exponente $q \leq p$, con lo que se demuestra que la singularidad es p -invariante y que, por lo tanto, el teorema 5.5.1 se satisface.

A.6. Demostración de la proposición 5.4.1

Sea $H > -1/p$ dado. Denotemos con E_H al conjunto de puntos en los que el p -exponente de X es menor que H . Si $x_0 \in E_H$, entonces existe una secuencia $r_n \rightarrow 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{r_n^d} \int_{B(x_0, r_n)} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \geq r_n^H,$$

y por lo tanto existe una secuencia $j_n \rightarrow +\infty$ tal que los cubos diádicos $\lambda_{j_n}(x_0)$ satisfacen

$$\int_{3\lambda_{j_n}(x_0)} |f(x)|^p dx \geq C 2^{-j_n(1+Hp)}$$

(lo cual se logra seleccionando el cubo diádico $\lambda_{j_n}(x_0)$ más pequeño tal que $B(x_0, r_n) \subset 3\lambda_{j_n}(x_0)$). Uno de los 3^d cubos de ancho 2^{-j_n} que conforman $3\lambda_{j_n}$ (al cual denotamos con μ_{j_n}) satisface

$$\int_{\mu_{j_n}(x_0)} |f(x)|^p dx \geq C 3^{-1} 2^{-j_n(d+Hp)}$$

Consideramos ahora al mayor de tales cubos diádicos, con ancho menor a un ϵ fijo, que satisfaga esta desigualdad para todos los posibles valores de x_0 , y denotamos con \mathcal{R} a esta colección. Entonces, ya que los cubos diádicos máximos son necesariamente disjuntos de a 2,

$$C \sum_{\mu \in \mathcal{R}} 2^{-j(1+Hp)} \leq \sum_{\mu \in \mathcal{R}} \int_{\mu} |f(x)|^p dx \leq C.$$

Dado que $r_n \geq C2^{-j_n}$, hemos obtenido un recubrimiento de E_H tal que

$$\sum \text{diam}(B(x, r))^{1+Hp} \leq C.$$

El resultado se deduce de esta expresión.

Apéndice B

Transformación de Legendre

Contenidos

B.1. Introducción	161
B.2. Transformación de Legendre	161
B.2.1. Transformación de Legendre para funciones cóncavas . . .	162
B.2.2. Transformación de Legendre para funciones no cóncavas .	164

B.1. Introducción

En este capítulo brindaremos detalles sobre la transformación de Legendre, que cumple un rol central en el formalismo multifractal. Para mayores detalles e intuiciones, remitimos al lector a [141, 161] para un desarrollo a nivel básico, y a [36, 129] para un tratamiento con mayor profundidad.

B.2. Transformación de Legendre

La transformación de Legendre (TL), o de Legendre-Fenchel¹, es una herramienta ampliamente utilizada en física, en particular en el área de la mecánica hamiltoniana, la mecánica estadística y la termodinámica. La definimos a continuación:

Definición B.2.1. Transformación de Legendre

Sea $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Su transformación de Legendre, denotada con X^* , se define como [141]:

$$X^*(s) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{sx - X(x)\}. \tag{B.1}$$

Cabe destacar que la transformación también puede ser definida mediante el valor supremo en lugar del valor ínfimo mediante la introducción de cambios de signo adecuados.

¹ Estrictamente, la transformación de Legendre-Fenchel es una formulación más amplia que la transformación de Legendre. Sin embargo, en la literatura sobre análisis multifractal se utiliza el segundo nombre para referirse a la primera. Por lo tanto en este apéndice seguiremos esta convención.

El atractivo de la transformación de Legendre consiste en que permite expresar la información contenida en una función X mediante otra función X^* , *cuya variable independiente es la derivada de la primera*. De hecho, el ínfimo en la ec. (B.1) se encuentra en los puntos que satisfacen:

$$\frac{\partial}{\partial x}(sx - X(x)) = 0, \quad (\text{B.2})$$

es decir, aquellos valores en los que

$$s = X'(x), \quad (\text{B.3})$$

para un valor determinado de s .

B.2.1. Transformación de Legendre para funciones cóncavas

Analizaremos a continuación dos propiedades de la transformación importantes por sus implicaciones en el formalismo multifractal. En primer lugar, consideraremos el caso particular e importante de las funciones cóncavas.

Si la función X es estrictamente cóncava, entonces su derivada toma valores distintos en cada punto x , y la función X' en la ec. (B.3) es uno a uno. Por lo tanto, existe una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$X'(f(s)) = s, \quad (\text{B.4})$$

y, entonces, podemos escribir la TL como

$$X^*(s) = sf(s) - X(f(s)). \quad (\text{B.5})$$

Es pertinente enfatizar que, dado un valor s , la función f provee el valor $x = f(s)$ que hace que la expresión $sx - X(x)$ se minimice.

Demostramos ahora dos proposiciones importantes de la TL aplicada a funciones cóncavas.

Proposición B.2.1. *Concavidad de la TL para funciones cóncavas*

Sea $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cóncava diferenciable. Entonces X^ también es cóncava.*

Demostración. Comenzamos caracterizando a la función f de la ec. (B.4). Como X' es uno a uno por ser X cóncava, podemos escribir:

$$f(s) = X'^{-1}(s). \quad (\text{B.6})$$

Dado que X es diferenciable, f también lo es, y su derivada es:²

² Dadas una función diferenciable $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y su inversa X^{-1} , entonces sus derivadas cumplen:

$$[X^{-1}]'(X(x)) = \frac{1}{X'(x)}.$$

Esto se puede demostrar sencillamente derivando miembro a miembro la identidad $X^{-1}(X(x)) = x$ y aplicando la regla de la cadena.

$$f'(s) = \frac{1}{X''(f(s))}. \quad (\text{B.7})$$

Diferenciando miembro a miembro la ec. (B.5), y usando la ec. (B.4) y la ec. (B.7) obtenemos:

$$\begin{aligned} X^{*'}(s) &= f(s) + sf'(s) - X'(f(s))f'(s) \\ &= f(s) + \frac{s}{X''(f(s))} - \frac{s}{X''(f(s))} \\ &= f(s). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Diferenciando nuevamente, tenemos que:

$$X^{**}(s) = f'(s) = \frac{1}{X''(f(s))} > 0, \quad (\text{B.9})$$

ya que $X''(f(s)) > 0$ por ser X cóncava. Por lo tanto, X^* es cóncava. \square

Proposición B.2.2. Involución de la TL para funciones cóncavas

Sea $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cóncava. Entonces su transformación de Legendre es involutiva (es decir, coincide con su propia inversa):

$$X^{**} = (X^*)^* = X. \quad (\text{B.10})$$

Demostración. Comenzamos calculando $X^{**} = (X^*)^*$ a partir de la ec. (B.5):

$$X^{**}(z) = zg(z) - X^*(g(z)), \quad (\text{B.11})$$

en donde $g(z)$ es el valor que satisface (cf. ec. (B.4)):

$$X^{*'}(g(z)) = z. \quad (\text{B.12})$$

Usando la ec. (B.8) en la ec. (B.12) obtenemos:

$$X^{*'}(g(z)) = f(g(z)) = z. \quad (\text{B.13})$$

Además, aplicando la definición de X^* en la ec. (B.11), y usando la ec. (B.13), tenemos que:

$$\begin{aligned} X^{**}(z) &= zg(z) - g(z)f(g(z)) + X(f(g(z))) \\ &= zg(z) - zg(z) + X(z) \\ &= X(z). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Como la igualdad se cumple para cualquier valor z arbitrario, tenemos que $X^{**} = X$. \square

B.2.2. Transformación de Legendre para funciones no cóncavas

Analizamos en esta sección la concavidad e involución de la TL, en los casos en los que la función X no es cóncava. Mencionamos los siguientes resultados sin demostración. Las demostraciones se pueden encontrar en [36, 129].

Proposición B.2.3. *Concavidad de la TL para funciones no cóncavas*

Sea $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, X^ es cóncava independientemente de la forma de X .*

Proposición B.2.4. *Involución de la TL para funciones no cóncavas*

*Sea $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, X^{**} es el cascarón cóncavo de X , es decir, $X^{**}(x)$ es el menor valor tal que $X^{**}(x) \geq X(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Estas proposiciones indican que la propiedad de concavidad de la TL se mantiene al aplicarla a funciones no cóncavas. Por el contrario, la propiedad de involución se pierde. Este hecho tiene una importancia fundamental en el análisis multifractal, en donde medimos una función ζ que es la TL de la función D que deseamos obtener:

$$\zeta(q) = \inf_q \{1 + qh - D(h)\}. \quad (\text{B.15})$$

La función ζ es cóncava por construcción, al ser la transformación de Legendre de la función D . Sin embargo, D no es necesariamente cóncava. Por esta razón, la inversión de la ec. (B.15) deriva en la desigualdad que llamamos formalismo multifractal (cf. Sec. 2.4):

$$\mathcal{L}(h) = \zeta^*(h) = D^{**}(h) \leq D(h). \quad (\text{B.16})$$

Lista de publicaciones

- [1] S. Jaffard, C. Melot, R. Leonarduzzi, H. Wendt, S. Roux, M. E. Torres, and P. Abry. p-Exponent and p-Leaders: Negative pointwise regularity and beyond. *En preparación*, 2014.
- [2] R. Leonarduzzi, J. Spilka, H. Wendt, S. Jaffard, M. E. Torres, P. Abry, and M. Doret. p-leader based classification of first stage intrapartum fetal hrv. In *VI Congreso Latinoamericano de Ingeniería Biomédica (CLAIB)*, pages 669–672, Paraná, Entre Ríos, Argentina, Oct. 2014.
- [3] R. Leonarduzzi, H. Wendt, S. Roux, M. E. Torres, C. Melot, S. Jaffard, and P. Abry. p-Exponent and p-Leaders, Part I: Multifractal Analysis. Relations to Detrended Fluctuation Analysis. *En preparación*, 2014.
- [4] R. Leonarduzzi, H. Wendt, M. E. T. Stéphane Jaffard, Stéphane G. Roux, and P. Abry. Extending multifractal analysis to negative regularity: p-exponents and p-leaders. In *IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, and Signal Proc. (ICASSP)*, Florence, Italy, 2014.
- [5] R. F. Leonarduzzi, M. E. Torres, and P. Abry. Automated selection of scaling range in wavelet leader multifractal analysis. In *Workshop New Trends in Applied Harmonic Analysis: Sparse Representations, Compressed Sensing and Multifractal Analysis, CIMPA 2013*, 2013. Presentación en poster.
- [6] R. F. Leonarduzzi, M. E. Torres, and P. Abry. Automated selection of scaling range in wavelet leader multifractal analysis. In *Workshop Multifractal Analysis: From Theory to Applications and Back*, 2014. Presentación en poster.
- [7] R. F. Leonarduzzi, M. E. Torres, and P. Abry. Scaling range automated selection for wavelet leader multifractal analysis. *Signal Processing*, 105(0):243 – 257, 2014.

Referencias

- [8] P. Abry, P. Gonçalves, and P. Flandrin. Wavelets, spectrum analysis and 1/f processes. In *Wavelets and statistics*, pages 15–29. Springer, 1995.
- [9] P. Abry, S. Jaffard, and B. Lashermes. Revisiting scaling, multifractal, and multiplicative cascades with the wavelet leader lens. In *Proc. SPIE*, volume 5607, pages 103–117, 2004.
- [10] P. Abry, S. Jaffard, and H. Wendt. A bridge between geometric measure theory and signal processing: Multifractal analysis. In *Operator-Related Function Theory and Time-Frequency Analysis, The Abel Symposium 2012*. Springer, 2014. to appear.
- [11] P. Abry and V. Pipiras. Wavelet-based synthesis of the Rosenblatt process. *Signal processing*, 86(9):2326–2339, 2006.
- [12] P. Abry, V. Pipiras, and H. Wendt. Extreme values, heavy tails and linearization effect: A contribution to empirical multifractal analysis. In *Proc. GRETSI Symposium Signal and Image Processing*, Troyes, France, 2007.
- [13] P. Abry, S. G. Roux, V. Chudáček, P. Borgnat, P. Gonçalves, and M. Doret. Hurst exponent and intrapartum fetal heart rate: Impact of decelerations. In *Computer-Based Medical Systems (CBMS), 2013 IEEE 26th International Symposium on*, pages 131–136. IEEE, 2013.
- [14] P. Abry, S. G. Roux, and S. Jaffard. Detecting oscillating singularities in multifractal analysis: Application to hydrodynamic turbulence. In *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2011 IEEE International Conference on*, pages 4328–4331. IEEE, 2011.
- [15] P. Abry, H. Wendt, and S. Jaffard. When Van Gogh meets Mandelbrot: Multifractal classification of painting’s texture. *Signal Processing*, 93(3):554 – 572, 2013.
- [16] P. Abry, H. Wendt, S. Jaffard, H. Helgason, P. Gonçalves, E. Pereira, C. Gharib, P. Gaucherand, and M. Doret. Methodology for multifractal analysis of heart rate variability: From LF/HF ratio to wavelet leaders. In *Conf Proc IEEE Eng Med Biol Soc*, pages 106–109, 2010.

-
- [17] S. Akselrod, D. Gordon, F. A. Ubel, D. C. Shannon, A. Berger, and R. J. Cohen. Power spectrum analysis of heart rate fluctuation: a quantitative probe of beat-to-beat cardiovascular control. *Science*, 213(4504):220–222, 1981.
- [18] F. Angeletti, E. Bertin, and P. Abry. Critical moment definition and estimation, for finite size observation of log-exponential-power law random variables. *Signal Processing*, 92(12):2848–2865, 2012.
- [19] F. Angeletti, M. Mézard, E. Bertin, and P. Abry. Linearization effect in multifractal analysis: Insights from the random energy model. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 240(16):1245–1253, 2011.
- [20] A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard, and J. Muzy. Singularity spectrum of multifractal functions involving oscillating singularities. *Journal of Fourier analysis and applications*, 4(2):159–174, 1998.
- [21] A. Arneodo, E. Bacry, and J. Muzy. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 213(1):232–275, 1995.
- [22] A. Arneodo, E. Bacry, and J. F. Muzy. Random cascades on wavelet dyadic trees. *Journal of Mathematical Physics*, 39(8):4142–4164, August 1998.
- [23] A. Arneodo, N. Decoster, P. Kestener, and S. Roux. A wavelet-based method for multifractal image analysis: from theoretical concepts to experimental applications. *Advances in Imaging and Electron Physics*, 126:1–92, 2003.
- [24] A. Arneodo, N. Decoster, and S. . Roux. A wavelet-based method for multifractal image analysis. i. methodology and test applications on isotropic and anisotropic random rough surfaces. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 15(3):567–600, 2000.
- [25] A. Arneodo, J.-F. Muzy, and D. Sornette. "Direct" causal cascade in the stock market. *The European Physical Journal B: Condensed Matter and Complex Systems*, 2(2):277–282, 1998.
- [26] A. Arneodo, C. Vaillant, B. Audit, F. Argoul, Y. d'Aubenton Carafa, and C. Thermes. Multi-scale coding of genomic information: From DNA sequence to genome structure and function. *Physics Reports*, 498(2):45–188, 2011.
- [27] J.-M. Aubry and S. Jaffard. Random wavelet series. *Communications in mathematical physics*, 227(3):483–514, 2002.
- [28] J.-M. Aubry and S. Jaffard. Random wavelet series: theory and applications. *Preprints of Labo. d'Analyse et de Math. Appliquées / UMR CNRS 8050*, Disponible en <http://arxiv.org/abs/math-ph/0310061v1>, 2003.
- [29] E. Bacry, J. Delour, and J. Muzy. Multifractal random walk. *Phys. Rev. E*, 64(2):026103, 2001.

-
- [30] E. Bacry and J. Muzy. Multifractal stationary random measures and multifractal random walks with log-infinitely divisible scaling laws. *Phys. Rev. E*, 66:1063–1083, 2002.
- [31] E. Bacry and J. Muzy. Log-infinitely divisible multifractal processes. *Commun. Math. Phys.*, 236:449–475, 2003.
- [32] E. Bacry, J. F. Muzy, and A. Arneodo. Singularity spectrum of fractal signals from wavelet analysis: Exact results. *Journal of Statistical Physics*, 70(3):635–674, 1993.
- [33] J. Barral, A. Durand, S. Jaffard, and S. Seuret. Local multifractal analysis. In *Contemporary Mathematics, D. Carfi and M. Lapidus and E. J. Pearse and M. van Frankenhuijsen*, chapter Local multifractal analysis, pages 31 – 64. AMS, 2012.
- [34] J. Barral and B. Mandelbrot. Multifractal products of cylindrical pulses. *Probability Theory and Related Fields*, 124(3):409–430, 2002.
- [35] A. Bashan, R. Bartsch, J. W. Kantelhardt, and S. Havlin. Comparison of detrending methods for fluctuation analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(21):5080–5090, 2008.
- [36] A. Bossavit. A course in convex analysis, 2003. Disponible en: <http://butler.cc.tut.fi/~bossavit/BackupICM/CA.pdf>.
- [37] A. Calderon and A. Zygmund. Local properties of solutions of elliptic partial differential equations. *Studia Math.*, 20:171–223, 1961.
- [38] L. E. Calvet and A. J. Fisher. Extreme risk and fractal regularity in finance. *Fractal Geometry and Dynamical Systems in Pure and Applied Mathematics II: Fractals in Applied Mathematics*, 601:65, 2013.
- [39] B. Castaing. The temperature of turbulent flows. *Journal de Physique II*, 6(1):105–114, 1996.
- [40] B. Castaing, Y. Gagne, and E. Hopfinger. Velocity probability density functions of high reynolds number turbulence. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 46(2):177–200, 1990.
- [41] B. Castaing, Y. Gagne, and M. Marchand. Log-similarity for turbulent flows? *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 68(3):387–400, 1993.
- [42] S. Cerutti, A. M. Bianchi, and L. T. Mainardi. Spectral analysis of the heart rate variability signal. In *Heart Rate Variability, Marek Malik and A. John Camm eds.*, chapter Spectral Analysis of the Heart Rate Variability Signal, pages 63–74. Futura Publishing Co., 1995.
- [43] P. Chainais, R. Riedi, and P. Abry. Compound Poisson cascades. In *Autosimilarite et Applications, Universite Blaise Pascal, Clermont-Ferrand*, 2002.

-
- [44] P. Chainais, R. Riedi, and P. Abry. On non scale invariant infinitely divisible cascades. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(3), 2005.
- [45] P. Chainais, R. Riedi, and P. Abry. Warped infinitely divisible cascades: beyond scale invariance. *Traitement du Signal*, 22(1), 2005.
- [46] E. Chandrachan and S. Arulkumaran. Prevention of birth asphyxia: responding appropriately to cardiotocograph (CTG) traces. *Best Practice & Research Clinical Obstetrics & Gynaecology*, 21(4):609–624, 2007.
- [47] A. Chhabra and R. V. Jensen. Direct determination of the $f(\alpha)$ singularity spectrum. *Physical Review Letters*, 62(12):1327, 1989.
- [48] P. Ciuciu, P. Abry, and B. J. He. Interplay between functional connectivity and scale-free dynamics in intrinsic fmri networks. *NeuroImage*, 95:248–263, 2014.
- [49] I. Daubechies et al. *Ten lectures on wavelets*, volume 61. SIAM, 1992.
- [50] A. C. Davison and D. V. Hinkley. *Bootstrap methods and their applications*. Cambridge Press, 2009.
- [51] N. Decoster, S. Roux, and A. Arneodo. A wavelet-based method for multifractal image analysis. ii. applications to synthetic multifractal rough surfaces. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 15(4):739–764, 2000.
- [52] J. Delour, J. Muzy, and A. Arneodo. Intermittency of 1d velocity spatial profiles in turbulence: a magnitude cumulant analysis. *The European Physical Journal B*, 23(2):243–248, 2001.
- [53] R. A. DeVore and V. A. Popov. Interpolation of Besov spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 305(1):397–414, 1988.
- [54] M. Doret, H. Helgason, P. Abry, P. Goncalves, C. Gharib, P. Gaucherand, et al. Multifractal analysis of fetal heart rate variability in fetuses with and without severe acidosis during labor. *American Journal of Perinatology*, 28(4):259, 2011.
- [55] M. Doret, M. Massoud, A. Constans, and P. Gaucherand. Use of peripartum st analysis of fetal electrocardiogram without blood sampling: a large prospective cohort study. *European Journal of Obstetrics, Gynecology, and Reproductive Biology*, 156(1):35–40, May 2011.
- [56] A. Durand and S. Jaffard. Multifractal analysis of Lévy fields. *Probability Theory and Related Fields*, 153(1-2):45–96, 2012.
- [57] B. Efron. Bootstrap methods: another look at the jackknife. *The annals of Statistics*, pages 1–26, 1979.
- [58] B. Efron and G. Gong. A leisurely look at the bootstrap, the jackknife, and cross-validation. *The American Statistician*, 37(1):36–48, 1983.

-
- [59] FIGO. Guidelines for the use of fetal monitoring. *International Journal of Gynecology & Obstetrics*, 25:159–167, 1986.
- [60] G. Fitton, I. Tchiguirinskaia, D. Schertzer, and S. Lovejoy. Multifractal statistical methods and space-time scaling laws for turbulent winds. In *Wind Energy-Impact of Turbulence*, pages 51–57. Springer, 2014.
- [61] P. Flandrin. Wavelet analysis and synthesis of fractional brownian motion. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2):910–917, 1992.
- [62] P. Flandrin, P. Gonçalves, and P. Abry. Scale invariance and wavelets. In Abry, Gonçalves, and L. Véhel, editors, *Scaling, fractals and wavelets*, pages 71 – 102. Wiley, 2009.
- [63] U. Frisch. *Turbulence, the Legacy of A.N. Kolmogorov*. Addison-Wesley, 1993.
- [64] R. Galaska, D. Makowiec, A. Dudkowska, A. Koprowski, K. Chlebus, J. Wdowczyk-Szulc, and A. Rynkiewicz. Comparison of wavelet transform modulus maxima and multifractal detrended fluctuation analysis of heart rate in patients with systolic dysfunction of left ventricle. *Annals of Noninvasive Electrocardiology*, 13(2):155–164, 2008.
- [65] E. Gerasimova, B. Audit, S.-G. Roux, A. Khalil, O. Gileva, F. Argoul, O. Naimark, and A. Arneodo. A wavelet-based method for multifractal analysis of medical signals: Application to dynamic infrared thermograms of breast cancer. In *Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, pages 288–300. Springer, 2014.
- [66] J. Gierałowski, J. J. Żebrowski, and R. Baranowski. Multiscale multifractal analysis of heart rate variability recordings with a large number of occurrences of arrhythmia. *Phys. Rev. E*, 85:021915, Feb 2012.
- [67] A. C. Gilbert, W. Willinger, and A. Feldmann. Scaling analysis of conservative cascades, with applications to network traffic. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(3):971–991, 1999.
- [68] A. L. Goldberger and et al. PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a new research resource for complex physiologic signals. *Circulation*, 101(23):e215–e220, 2000.
- [69] H. Gonçalves, A. P. Rocha, D. Ayres-de Campos, and J. Bernardes. Linear and nonlinear fetal heart rate analysis of normal and acidemic fetuses in the minutes preceding delivery. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 44(10):847–855, Oct 2006.
- [70] P. Goncalves and R. Riedi. Wavelet analysis of fractional brownian motion in multifractal time. In *17 Colloque sur le traitement du signal et des images, FRA, 1999*. GRETSI, Groupe d’Etudes du Traitement du Signal et des Images, 1999.
- [71] D. Grahovac and N. N. Leonenko. Bounds on the support of the multifractal spectrum of stochastic processes. *arXiv preprint arXiv:1406.2920*, 2014.

-
- [72] R. Grivell, Z. Alfrevic, G. Gyte, and D. Devane. Antenatal cardiotocography for fetal assessment. *The Cochrane database of systematic reviews*, 12:CD007863–CD007863, 2011.
- [73] G.-F. Gu and W.-X. Zhou. Detrended fluctuation analysis for fractals and multifractals in higher dimensions. *Physical Review E*, 74(6):061104, 2006.
- [74] P. Hall, J. L. Horowitz, and B.-Y. Jing. On blocking rules for the bootstrap with dependent data. *Biometrika*, 82(3):561–574, 1995.
- [75] M. Hallam and J. Olmo. Forecasting daily return densities from intraday data: A multifractal approach. *International Journal of Forecasting*, 30(4):863–881, 2014.
- [76] R. Hardstone, S.-S. Poil, G. Schiavone, R. Jansen, V. V. Nikulin, H. D. Mansvelder, and K. Linkenkaer-Hansen. Detrended fluctuation analysis: a scale-free view on neuronal oscillations. *Frontiers in physiology*, 3, 2012.
- [77] K. Hu, P. C. Ivanov, Z. Chen, P. Carpena, and H. E. Stanley. Effect of trends on detrended fluctuation analysis. *Physical Review E*, 64(1):011114, 2001.
- [78] P. C. Ivanov and et al. Multifractality in human heartbeat dynamics. *Nature*, 399(6735):461–465, 1999.
- [79] S. Jaffard. Multifractal formalism for functions part i: results valid for all functions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 28(4):944–970, 1997.
- [80] S. Jaffard. The multifractal nature of Lévy processes. *Probability Theory and Related Fields*, 114:207–227, 1999.
- [81] S. Jaffard. On lacunary wavelet series. *Annals of Applied Probability*, pages 313–329, 2000.
- [82] S. Jaffard. On the Frisch–Parisi conjecture. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 79(6):525–552, 2000.
- [83] S. Jaffard. Wavelet expansions, function spaces and multifractal analysis. In *Twentieth Century Harmonic Analysis—A Celebration*, pages 127–144. Springer, 2001.
- [84] S. Jaffard. Wavelet techniques in multifractal analysis. In M. Lapidus and M. van Frankenhuysen, editors, *Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoît Mandelbrot, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, volume 72(2), pages 91–152. AMS, 2004.
- [85] S. Jaffard. Wavelet techniques for pointwise regularity. *Ann. Fac. Sci. Toul.*, 15(1):3–33, 2006.
- [86] S. Jaffard, P. Abry, and S. Roux. Function spaces vs. scaling functions: Tools for image classification. In *Mathematical Image Processing*, pages 1–39. Springer, 2011.

-
- [87] S. Jaffard, P. Abry, S. G. Roux, B. Vedel, and H. Wendt. The contribution of wavelets in multifractal analysis. In A. Damlamian and S. Jaffard, editors, *Wavelet Methods in Mathematical Analysis and Engineering*, A. Damlamian and S. Jaffard eds., Series in contemporary applied mathematics, pages 55–98. World scientific publishing, 2010.
- [88] S. Jaffard, P. Abry, and H. Wendt. Irregularities and scaling in signal and image processing: Multifractal analysis. In M. Frame, editor, *Benoit Mandelbrot: A Life in Many Dimensions*, Michael Frame ed. World scientific publishing, 2014. to appear.
- [89] S. Jaffard, B. Lashermes, and P. Abry. Wavelet leaders in multifractal analysis. In *Wavelet Analysis and Applications*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, pages 201–246. Birkhäuser, 2007.
- [90] S. Jaffard and C. Melot. Wavelet analysis of fractal boundaries. *Communications In Mathematical Physics*, 258(3):513–565, 2005.
- [91] S. Jaffard and Y. Meyer. *Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillations of functions*, volume 587. American Mathematical Soc., 1996.
- [92] C. R. Johnson and et al. Pursuing automated classification of historic photographic papers from raking light images. *Journal of the American Institute for Conservation*, 53(3):159–170, 2014.
- [93] J. W. Kantelhardt, S. A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde, and H. E. Stanley. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 316(1):87–114, 2002.
- [94] M. G. Kendall and A. Stuart. *The Advanced Theory of Statistics, Vol. I, 3rd Edition*. Wiley, 2010.
- [95] N.-R. Kevlahan and J. Vassilicos. The space and scale dependencies of the self-similar structure of turbulence. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 447(1930):341–363, 1994.
- [96] K. Kiyono, Z. R. Struzik, N. Aoyagi, and Y. Yamamoto. Multiscale probability density function analysis: non-Gaussian and scale-invariant fluctuations of healthy human heart rate. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 53(1):95–102, Jan. 2006.
- [97] R. Kleiger, P. Stein, M. Bosner, and J. Rottman. Time-domain measurement of heart rate variability. In M. Malik and A. J. Camm, editors, *Heart Rate Variability*, Marek Malik and A. John Camm eds., chapter Time-Domain Measurement of Heart Rate Variability, pages 50–63. Futura Publishing Co., 1995.
- [98] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 30, pages 299–303, 1941.

-
- [99] S. Lahiri, K. Furukawa, and Y.-D. Lee. A nonparametric plug-in rule for selecting optimal block lengths for block bootstrap methods. *Statistical Methodology*, 4(3):292 – 321, 2007.
- [100] B. Lashermes. *Analyse multifractal pratique: coefficients dominants et ordres critiques. Applications à la turbulence pleinement développée. Effets de nombre de Reynolds fini*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, 2005.
- [101] B. Lashermes, P. Abry, and P. Chainais. New insights into the estimation of scaling exponents. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 2:497–524, 2005.
- [102] R. F. Leonarduzzi, G. Schlotthauer, and M. E. Torres. Wavelet leader based multifractal analysis of heart rate variability during myocardial ischaemia. In *Conf Proc IEEE Eng Med Biol Soc*, pages 110 –113, 2010.
- [103] R. Lopes and N. Betrouni. Fractal and multifractal analysis: a review. *Medical image analysis*, 13(4):634–649, 2009.
- [104] S. Lovejoy and D. Schertzer. Low-frequency weather and the emergence of the climate. *Extreme Events and Natural Hazards: The Complexity Perspective*, pages 231–254, 2012.
- [105] J. A. Low, R. Victory, and E. J. Derrick. Predictive value of electronic fetal monitoring for intrapartum fetal asphyxia with metabolic acidosis. *Obstetrics & Gynecology*, 93(2):285–291, 1999.
- [106] S. B. Lowen and M. C. Teich. *Fractal-based Point Processes*. Wiley Series in Probability and Statistics, 2005.
- [107] R. Magrans, P. Gomis, P. Caminal, and G. Wagner. Complexity of the autonomic heart rate control in coronary artery occlusion in patients with and without prior myocardial infarction. *Medical Engineering & Physics*, 35(8):1070 – 1078, 2013.
- [108] R. Magrans, P. Gomis, P. Caminal, and G. Wagner. Complexity of the autonomic heart rate control in coronary artery occlusion in patients with and without prior myocardial infarction. *Medical engineering & physics*, 35(8):1070–1078, 2013.
- [109] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing: the sparse way*. Academic press, 2008.
- [110] B. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *Journal of Fluid Mechanics*, 62:331–358, 1974.
- [111] B. Mandelbrot. *Gaussian Self-Affinity and Fractals*. Selected Works of Benoit B. Mandelbrot. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [112] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM review*, 10(4):422–437, 1968.

-
- [113] J. F. Muzy, E. Bacry, and A. Arneodo. Multifractal formalism for fractal signals: The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method. *Physical review E*, 47(2):875–884, 1993.
- [114] J.-F. Muzy, E. Bacry, and A. Arneodo. The multifractal formalism revisited with wavelets. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(02):245–302, 1994.
- [115] P. Oświęcimka, J. Kwapien, and S. Drożdż. Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures. *Physical Review E*, 74(1):016103, 2006.
- [116] G. Parisi. On the singularity structure of fully developed turbulence, appendix to fully developed turbulence and intermittency by U. Frisch. In *Proc. Int. Summer school Phys. Enrico Fermi, North Holland*, pages 84 – 88, 1985.
- [117] J. Park and C. Park. Robust estimation of the Hurst parameter and selection of an onset scaling. *Statistica Sinica*, 19(4):1531–1555, 2009.
- [118] C.-K. Peng, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger. Mosaic organization of DNA nucleotides. *Physical Review E*, 49(2):1685, 1994.
- [119] C.-K. Peng, S. Havlin, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger. Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 5(1):82–87, 1995.
- [120] D. Percival, S. Sardy, and A. Davison. Wavestrapping time series: Adaptive wavelet-based bootstrapping. *Nonlinear and Nonstationary Signal Processing*, pages 442–471, 2000.
- [121] A. Phinyomark, P. Phukpattaranont, and C. Limsakul. Fractal analysis features for weak and single-channel upper-limb EMG signals. *Expert Systems with Applications*, 39(12):11156 – 11163, 2012.
- [122] V. Pipiras and M. S. Taqqu. Fractional calculus and its connections to fractional brownian motion. *Theory and applications of long-range dependence*, pages 165–201, 2003.
- [123] D. N. Politis and H. White. Automatic block-length selection for the dependent bootstrap. *Econometric Reviews*, 23(1):53–70, 2004.
- [124] U. Rasthofer and V. Gravemeier. Multifractal subgrid-scale modeling within a variational multiscale method for large-eddy simulation of turbulent flow. *Journal of Computational Physics*, 234:79–107, 2013.
- [125] C. Rego, H. Frota, and M. Gusmão. Multifractality of brazilian rivers. *Journal of Hydrology*, 495:208–215, 2013.

-
- [126] R. Riedi. Multifractal processes. In P. Doukhan, G. Oppenheim, and M. Taqqu, editors, *Theory and applications of long range dependence*, pages 625–717. Birkhäuser, 2003.
- [127] R. Riedi. Multifractal scaling: General theory and approach by wavelets. In Abry, Gonçalves, and L. Vêhel, editors, *Scaling, Fractals and Wavelets*, pages 139 – 177. Wiley, 2009.
- [128] F. G. C. Rocha and F. H. T. Vieira. Adaptive rate control based on loss probability estimation considering a cascade based multifractal model for the network traffic. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 11(03), 2013.
- [129] R. T. Rockafellar. *Convex analysis*. Number 28. Princeton university press, 1997.
- [130] A. M. Sabatini. Wavelet-based estimation of 1/f-type signal parameters: confidence intervals using the bootstrap. *Ieee Transactions On Signal Processing*, 47(12):3406–3409, 1999.
- [131] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu. *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman and Hall, 1994.
- [132] E. Serrano and A. Figliola. Wavelet leaders: a new method to estimate the multifractal singularity spectra. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 388(14):2793–2805, 2009.
- [133] F. Soares, M. M. Freire, M. Pereira, F. Janela, and J. Seabra. Towards the detection of microcalcifications on mammograms through multifractal detrended fluctuation analysis. In *IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing, 2009. PacRim 2009*, pages 677–681. IEEE, 2009.
- [134] F. Soares, F. Janela, M. Pereira, J. Seabra, and M. M. Freire. Classification of breast masses on contrast-enhanced magnetic resonance images through log detrended fluctuation cumulant-based multifractal analysis. *IEEE Systems Journal*, PP(99):1–10, 2013.
- [135] D. Sornette. *Critical phenomena in natural sciences: chaos, fractals, selforganization, and disorder: concepts and tools*. Springer Verlag, 2004.
- [136] C. Stan, M. T. Cristescu, B. I. Luiza, and C. Cristescu. Investigation on series of length of coding and non-coding DNA sequences of bacteria using multifractal detrended cross-correlation analysis. *Journal of theoretical biology*, 321:54–62, 2013.
- [137] P. J. Steer. Fetal distress. *Current Obstetrics & Gynaecology*, 12(1):15 – 21, 2002.
- [138] G. Strang and T. Nguyen. *Wavelets and filter banks*. SIAM, 1996.

-
- [139] L. Telesca and V. Lapenna. Measuring multifractality in seismic sequences. *Tectonophysics*, 423(1–4):115 – 123, 2006.
- [140] M. E. Torres and P. Abry. Comparison of different methods for computing scaling parameter in the presence of trends. In *Proc. XIV Congreso Argentino de Bioingenieria (SABI 2003)*, Cordoba, Argentina, 2003.
- [141] H. Touchette. Legendre-Fenchel transforms in a nutshell. Technical report, Reporte, University of London, 2007. Disponible en <http://www.physics.sun.ac.za/~htouchette/archive/lfth2.pdf>.
- [142] H. Touchette and C. Beck. Nonconcave entropies in multifractals and the thermodynamic formalism. *Journal of statistical physics*, 125(2):455–471, 2006.
- [143] D. Veitch and P. Abry. A wavelet-based joint estimator of the parameters of long-range dependence. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(3):878–897, 1999.
- [144] D. Veitch, P. Abry, and M. S. Taqqu. On the automatic selection of the onset of scaling. *Fractals*, 11(2):377–390, June 2003.
- [145] P. Venkatakrisnan and S. Sangeetha. Singularity detection in human EEG signal using wavelet leaders. *Biomedical Signal Processing and Control*, 13:282–294, 2014.
- [146] J. L. Véhel and C. Tricot. Fractal and multifractal analysis in signal processing. In Abry, Gonçalves, and L. Véhel, editors, *Scaling, Fractals and Wavelets*, pages 19 – 70. Wiley, 2009.
- [147] Y. Wang, Y. Wei, and C. Wu. Analysis of the efficiency and multifractality of gold markets based on multifractal detrended fluctuation analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 390(5):817 – 827, 2011.
- [148] H. Wendt and P. Abry. Bootstrap for multifractal analysis. In *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, and Signal Proc. (ICASSP)*, Toulouse, France, 2006.
- [149] H. Wendt and P. Abry. Multifractality tests using bootstrapped wavelet leaders. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(10):4811–4820, 2007.
- [150] H. Wendt and P. Abry. Time-scale block bootstrap tests for non gaussian finite variance self-similar processes with stationary increments. In *Proc. IEEE Workshop Statistical Signal Processing (SSP)*, Madison, Wisconsin, USA, 2007.
- [151] H. Wendt, P. Abry, and S. Jaffard. Bootstrap for empirical multifractal analysis. *IEEE Signal Processing Magazine*, 24(4):38–48, 2007.
- [152] H. Wendt, N. Dobigeon, J.-Y. Tourneret, and P. Abry. Bayesian estimation for the multifractality parameter. In *IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, and Signal Proc. (ICASSP)*, Vancouver, Canada, 2013.

-
- [153] H. Wendt and et al. Wavelet leaders and bootstrap for multifractal analysis of images. *Signal Processing*, 89:1100–1114, 2009.
- [154] H. Wendt, S. Jaffard, and P. Abry. Multifractal analysis of self-similar processes. In *Proc. IEEE Workshop Statistical Signal Processing (SSP)*, Ann Arbor, MI, USA, 2012.
- [155] H. Wendt, K. Kiyono, P. Abry, J. Hayano, E. Watanabe, and Y. Yamamoto. Multiscale Wavelet p-Leader based heart rate variability analysis for survival probability assessment in CHF patients. In *Conf Proc IEEE Eng Med Biol Soc*, 2014.
- [156] H. Wendt, S. G. Roux, and P. Abry. Bootstrap for log wavelet leaders cumulant based multifractal analysis. In *Proc. European Signal Processing Conf. (EUSIPCO)*, Florence, Italy, 2006.
- [157] K. P. Williams and F. Galerneau. Intrapartum fetal heart rate patterns in the prediction of neonatal acidemia. *American journal of obstetrics and gynecology*, 188(3):820–823, 2003.
- [158] X. Xia, G. Lazarou, and T. Butler. Automatic scaling range selection for long-range dependent network traffic. *IEEE Communications Letters*, 9(10):954 – 956, oct. 2005.
- [159] Y. Xu and H. Feng. Revisiting multifractality of TCP traffic using multifractal detrended fluctuation analysis. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2014(2):P02007, 2014.
- [160] Z.-G. Yu, Y. Leung, Y. D. Chen, Q. Zhang, V. Anh, and Y. Zhou. Multifractal analyses of daily rainfall time series in pearl river basin of china. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 405:193–202, 2014.
- [161] R. K. Zia, E. F. Redish, and S. R. McKay. Making sense of the legendre transform. *American Journal of Physics*, 77(7):614–622, 2009.
- [162] A. Zoubir and D. Iskander. *Bootstrap techniques for signal processing*. Cambridge University Press, 2004.

