PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS DE ZYGMUND SECUENCIALES CON SUMABILIDAD DE EXPONENTE VARIABLE

Radesca, Esteban

Facultad de Ingeniería Química (UNL)

Directora: Pradolini, Gladis

Codirectora: Dalmasso, Estefanía

Área: Ciencias Exactas

Palabras claves: Espacios de Zygmund secuenciales, Exponentes variables, Operadores maximales.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, el estudio de los espacios de Lebesgue con exponente variable $L^{p(\cdot)}$ y, más generalmente, los espacios de Zygmund generalizados $L^{p(\cdot)}(\log L)^{\delta(\cdot)}$ han sido motivo de gran interés debido a la estrecha conexión que tienen con operadores que surgen en relación a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales y sobre los cuales interesa conocer propiedades de continuidad.

La versión discreta de dichos espacios son los espacios de Zygmund secuenciales $\ell^{p_n}(\log \ell)^{\delta_n}$, sobre los cuales casi no existe bibliografía. Nuestra investigación se centró en el estudio de estos últimos espacios.

OBJETIVOS

- Estudiar las propiedades geométricas y analíticas de los espacios de Zygmund secuenciales $\ell^{p_n}(\log \ell)^{\delta_n}$.
- Encontrar condiciones en las sucesiones $\{p_n\}$ y $\{\delta_n\}$ para las cuales los operadores maximal de Hardy–Littlewood y fraccionario resulten acotados.

Título del proyecto: OPERADORES DEL ANÁLISIS ARMÓNICO Y GEOMETRÍA DE LOS ESPACIOS RELACIONADOS. NUEVOS CONTEXTOS DE ESTUDIO.
Instrumento: CAID
Año convocatoria: 2020
Organismo financiador: UNL
Directora: Pradolini, Gladis

METODOLOGÍA

En un primer paso se definieron de forma rigurosa los espacios de Zygmund secuenciales $\ell^{p_n}(\log \boldsymbol{\ell})^{\delta_n}$. Dadas dos sucesiones $\{p_n\}$ y $\{\delta_n\}$ de números reales, el espacio de Zygmund secuencial $\ell^{p_n}(\log \boldsymbol{\ell})^{\delta_n}$ se define como la colección de sucesiones $\boldsymbol{b} = \{b_n\}$ para las cuales existe un $\lambda > 0$ tal que

$$\varrho\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\lambda}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|b_n|}{\lambda}\right)^{p_n}\left(\log\left(e+\frac{|b_n|}{\lambda}\right)\right)^{\delta_n} \leq 1, \tag{1}$$

donde $p_n \geq 1$ y $\delta_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A partir del operador dado en (1), se pudo definir una norma del tipo Luxemburg, esto es, la norma de una sucesión $\boldsymbol{b} = \{b_n\}$ sobre $\ell^{p_n}(\log \boldsymbol{\ell})^{\delta_n}$ viene dada por

$$\|\boldsymbol{b}\| = \inf\left\{\lambda > 0 : \varrho\left(\frac{\boldsymbol{b}}{\lambda}\right) \leq 1\right\}, \tag{2}$$

siempre que $\delta_n \geq 2(1 - p_n)$. Para el espacio normado $\ell^{p_n}(\log \boldsymbol{\ell})^{\delta_n}$ con la norma dada en (2) se probaron distintos resultados y propiedades análogos a los que verifican los espacios ℓ^{p_n} (Dalmasso, 2009; Nekvinda, 2007).
Conocidas estas propiedades, el estudio se centró en analizar la continuidad sobre los espacios de Zygmund secuenciales del operador maximal fraccionario (discreto) M_α, el cual se define como (Hardy y Littlewood, 1930)

$$(M_\alpha \boldsymbol{b})_n = \inf\left\{k \leq n \leq l : \frac{1}{(k-l+1)^{1-\alpha}}\sum_{i=k}^{l}|b_i|\right\}, \tag{3}$$

con $0 \leq \alpha < 1$. El caso particular $\alpha = 0$ se analizó primero, ya que este es el operador maximal de Hardy-Littlewood M ($M_0 = M$), y luego, se pasó al estudio de la acotación del operador fraccionario M_α más general. Para ambos tipos de operadores, se estudió el caso continuo, es decir, sobre los espacios de Zygmund generalizados $L^{p(\cdot)}(\log L)^{\delta(\cdot)}$ (Melchiori, 2019) y las condiciones que tenían que cumplir las funciones $p(\cdot)$ y $\delta(\cdot)$ para que el operador maximal fraccionario esté acotado sobre dicho espacio.

CONCLUSIONES

Al estudiar los espacios $\ell^{p_n}(\log \boldsymbol{\ell})^{\delta_n}$, se comprobó que muchas de las propiedades de los espacios ℓ^{p_n} son también ciertas para estos espacios. En particular, se pudo demostrar una desigualdad de Hölder generalizada, la desigualdad de Minkowski y la propiedad de la bola unitaria, además de otras propiedades útiles para el análisis de la continuidad de diversos operadores en este contexto.
Posteriormente, al estudiar la continuidad del operador maximal de Hardy-Littlewood M, se probó que si la sucesión $\{p_n\}$ cumple una condición log-Hölder en el infinito, esto es, existen constantes $C > 0$ y $p_\infty > 0$ tales que

$$|p_n - p_\infty| \leq \frac{C}{\log(e+n)}, \tag{4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces el operador maximal M está acotado sobre $\ell^{p_n}(\log \ell)^{\delta_n}$. Cabe destacar que en el caso continuo, en cambio, además de una condición análoga a (4), son necesarias dos restricciones más, una referida a la continuidad local de $p(\cdot)$ y otra a la continuidad local de $\delta(\cdot)$. Estas no se requieren en el caso discreto, ya que la convergencia de las series implica que los valores de las sucesiones $\boldsymbol{b} = \{b_n\}$ sean necesariamente pequeños.

Finalmente, en el caso más general del operador maximal fraccionario M_α, se demostró que si $\{q_n\}$ es una sucesión que cumple

$$\frac{1}{q_n} = \frac{1}{p_n} - \alpha \tag{5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces el operador maximal fraccionario M_α está acotado de $\ell^{p_n}(\log \ell)^{\delta_n}$ en $\ell^{q_n}(\log \ell)^{\delta_n}$, a diferencia del maximal de Hardy-Littlewood M, que está acotado de $\ell^{p_n}(\log \ell)^{\delta_n}$ en sí mismo. Para probar la acotación de dicho operador se utilizó una desigualdad de tipo Hedberg, la cual relaciona a M con M_α y permitió deducir la acotación de la segunda conocida la acotación de la primera.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Dalmasso, E., 2009. Propiedades de los espacios de sucesiones con sumabilidad de exponente variable, monografía Cientibeca.

Hardy, G. H. y Littlewood, J. E., 1930. A maximal theorem with function-theoretic applications. Acta Math., 54, no. 1, 81-116.

Melchiori, L., 2019. Continuidad de operadores del análisis armónico en espacios de Zygmund generalizados, tesis doctoral. Universidad Nacional del Litoral. Argentina.

Nekvinda, A., 2007. A note on maximal operator on ℓ^{p_n} and $L^{p(x)}(\mathbb{R})$. J. Funct. Spaces Appl., 5, no. 1, 49-88.