



Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Humanidades y Ciencias
MAESTRÍA EN DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS

**La vinculación entre construcciones de rectángulo con
GeoGebra y la identificación de definiciones y propiedades.
Un estudio con futuros profesores en matemática**

Prof. Magali Lucrecia Freyre

Directora: Mg. Marcela Evangelina Götte

Codirectora: Mg. Ana María Mántica

Para optar por el grado académico de:

Magíster en Didácticas Específicas

Julio de 2022

Agradecimientos

A Marcela y Ana María, por su inmensa entrega en el recorrido de este estudio. Por sus luces, ayuda, cariño y guía amorosa, siempre.

A las estudiantes que participan de esta investigación y a la Facultad de Humanidades y Ciencias, por permitir que pueda desarrollarse.

A mis compañeros de trabajo e investigación, por las reflexiones compartidas, fuentes de ideas para estudiar.

A mi familia, por su amor incondicional.

A Nuestra Señora de Guadalupe, por acompañar siempre mis pasos.

Índice

Resumen	6
Capítulo 1. Problema, objetivos y organización de la investigación	7
1.1 Justificación de la relevancia del problema seleccionado.....	7
1.2 Delimitación del problema de investigación. Enunciado de objetivos	11
1.2.1 Problema de investigación	11
1.2.2 Objetivo general.....	11
1.2.3 Objetivos específicos:.....	11
1.3 Organización de la memoria	12
Capítulo 2. Marco de referencia	14
2.1 Estado del arte	14
2.1.1 Con respecto a las definiciones y al proceso de definir en matemática.....	14
2.1.2 Con respecto a las tecnologías digitales en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática	16
2.1.3 Con respecto a la resolución de problemas en entornos dinámicos	18
2.1.4 Con respecto a la formulación y validación de conjeturas con software de geometría dinámica	20
2.1.5 Con respecto al trabajo en grupo e interacciones	21
2.2 Orientación teórica del proceso de investigación	21
2.2.1 En cuanto al proceso de definir y las características de las definiciones en matemática	21
2.2.2 En cuanto a cuestiones relacionadas al quehacer geométrico.	33
2.2.3 Respecto a tipos de construcciones dinámicas y su producción	35
2.2.4 Respecto a la práctica de arrastre o desplazamiento	40
2.2.5 Respecto a la persuasión que brindan las representaciones de objetos geométricos en SGD	42
2.2.6 Respecto a la interacción con construcciones dinámicas.....	46
2.2.7 Respecto a interacciones entre estudiantes con SGD	50

Capítulo 3. Marco metodológico	53
3.1 Enfoque de la investigación	53
3.2 Contexto de la investigación	53
3.3 El instrumento principal para la producción de datos.....	54
3.3.1 La génesis del instrumento	54
3.3.2 El instrumento utilizado	55
3.4 Estrategias de recogida de datos.....	55
3.4.1 Las observaciones	57
3.4.2 Las entrevistas	57
3.4.3 Los archivos digitales	58
3.4.4 Las grabaciones de audio y video	58
3.5 Procesamiento de la información	59
3.5.1 Estructuración de artefactos para el análisis	59
3.5.2 Primeras miradas y reflexiones	60
3.5.3 Análisis y conclusiones.....	61
Capítulo 4. Análisis de construcciones de rectángulo con <i>GeoGebra</i> e identificación de definiciones y propiedades	62
4.1 Miradas a la resolución del problema	62
4.1.1 Producción de construcciones e identificación de propiedades empleadas en las mismas	62
4.1.2 Definiciones de rectángulo.....	91
4.2 Miradas a las entrevistas.....	95
4.2.1 Identificación de herramientas empleadas	97
4.2.2 Identificación de propiedades empleadas	113
4.2.3 Definiciones de rectángulo.....	126
4.3 Mirada holística de las producciones	134
4.3.1 Producción de construcciones de rectángulo.....	134
4.3.2 Definiciones de rectángulo consideradas en las construcciones..	145
4.3.3 Identificación de herramientas empleadas en las construcciones durante la entrevista.....	147
4.3.4 Determinación de propiedades empleadas en las construcciones durante la entrevista.....	152

4.3.5	Análisis y comparación de definiciones durante la entrevista	153
Capítulo 5. Discusiones, conclusiones y perspectivas 157		
5.1	Retornando a los objetivos propuestos	157
5.1.1	Definiciones, procedimientos y propiedades empleadas en construcciones con <i>GeoGebra</i>	157
5.1.2	Herramientas de <i>GeoGebra</i> y propiedades involucradas y empleadas en las construcciones	158
5.1.3	El cuadrado como caso particular del rectángulo	160
5.1.4	Las potencialidades de un uso holístico de características propias de <i>GeoGebra</i>	162
5.2	Contrastes destacados	164
5.3	Cuestiones derivadas de la investigación	167
5.3.1	Producciones generadas por este estudio	167
5.3.2	Posibles líneas derivadas de este estudio	170
Referencias bibliográficas 171		

Resumen

Se desarrolla una investigación cualitativa interactiva que tiene como objetivo estudiar la vinculación, que establecen estudiantes de Profesorado en Matemática de la UNL, entre construcciones de una figura geométrica realizadas con el software de geometría dinámica *GeoGebra* y la identificación de propiedades empleadas en la misma y su definición. Un problema de geometría constituye el principal instrumento para la producción de datos. Se realizan observaciones y entrevistas y se cuenta con los archivos digitales correspondientes a la resolución del problema y con grabaciones de audio y video de lo realizado. Se estudian las producciones de dos parejas de estudiantes, quienes realizan y analizan construcciones de rectángulo utilizando distintas herramientas disponibles del software y haciendo uso del arrastre o desplazamiento de objetos libres. Emplean definiciones de rectángulo que poseen condiciones redundantes y recurren a las propiedades empleadas y a los procedimientos de construcción tanto en el proceso de establecer la definición utilizada, como en el de identificar si las construcciones analizadas se corresponden con la misma. En el proceso de elaboración de las construcciones y en el de identificación de herramientas del software se observa un predominio de utilización de aspectos visuales. El uso holístico de las características de *GeoGebra* asiste en los procesos de construcción, de análisis de una figura ya construida y en la identificación de herramientas empleadas en las construcciones. Todo esto posibilita que se reflexione acerca de diversos procedimientos y se determinen propiedades empleadas en las construcciones. Se destacan contrastes en el estudio, relacionados con la definición y clasificación consideradas; con la necesidad de justificar y el valor de evidencia que provee *GeoGebra*, y con las ventajas del protocolo de construcción y la necesidad de su enseñanza.

Capítulo 1

Problema, objetivos y organización de la investigación

1.1 Justificación de la relevancia del problema seleccionado

Es interesante que se reflexione acerca de las características de las definiciones matemáticas y sobre las maneras de enseñarlas. Sinclair et al. (2016) sostienen que la enseñanza y el aprendizaje de las definiciones constituyen un foco de interés en varias investigaciones. De Villiers, Govender y Patterson (2009) sostienen que las definiciones en matemática son importantes en cuanto constituyen herramientas para reorganizar el conocimiento disponible y para construir nuevos conocimientos a través del desarrollo de pruebas. De esta manera, las definiciones presentan varios desafíos tanto para los estudiantes como para los profesores. Las definiciones matemáticas son concisas, contienen términos técnicos y requieren una inmediata síntesis hacia una imagen conceptual firme. Si se presentan las definiciones a los estudiantes antes de que los conceptos hayan evolucionado naturalmente desde el conocimiento existente, éstos pueden recurrir a una memorización de las mismas sin sentido.

Esta idea cobra vital relevancia en los estudiantes de profesorado. De Villiers (2004), en su trabajo, cita a Linchevski, Vinner y Karsenty (1992) quienes afirman que muchos estudiantes de profesorado no entienden que las definiciones deben ser económicas y que son arbitrarias. Por otro lado, Winicki-Landman (2006) sostiene que es importante que se traten explícitamente en la formación del profesor de matemática

las características comunes a las definiciones matemáticas, las diferencias entre una definición matemática y otros tipos de definiciones, los roles que las definiciones cumplen en el desarrollo de las matemáticas, la definición como objeto y el definir como proceso, los factores que influyen en la elección de una proposición como

definición de un concepto matemático, las consecuencias de esta elección. (p.528)

Es relevante que los estudiantes reflexionen sobre sus propias experiencias al definir conceptos matemáticos. Así, pueden desarrollar su propia concepción sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, particularmente, de los conceptos matemáticos y sus definiciones. Esto contribuye a un

escenario ideal para precisar los distintos componentes de la genuina actividad matemática: construir ejemplos (instancias positivas) para el nuevo concepto así como no-ejemplos (instancias negativas); buscar invariantes; conjeturar; relacionar el nuevo concepto con otros conceptos anteriormente definidos; formular preguntas; determinar condiciones necesarias o suficientes; etc. (Winicki-Landman, 2006, p.528)

Carreño y Climent (2019), por su parte, afirman que "el abordaje de la definición como práctica matemática, supone una oportunidad para identificar aspectos conceptuales y didácticos que requieren atención y, en consecuencia, reorientar los planes de estudio de asignaturas específicas o incluso de la estructura formativa" (p.51). Sostienen en su estudio vinculado a la formación de profesores que es importante que en ese ámbito se trabajen clasificaciones de figuras geométricas de acuerdo a criterios no convencionales, y la definición de las clases que resultan. Destacan la importancia de que se reflexione matemática y didácticamente sobre clasificaciones inclusivas, para explorar propiedades y relaciones entre las mismas. El análisis de definiciones, que en el trabajo de estos autores se relaciona con cuadriláteros, es una acción que posibilita reflexionar sobre las características matemáticas de una definición y cómo se desarrollan en un ámbito escolar.

Cabe mencionar, por otro lado, que con el transcurso de los años las tecnologías digitales se incorporaron en todas las prácticas sociales cotidianas, incluyendo en los procesos de enseñanza y aprendizaje. De esta manera, dichas tecnologías presentan un desafío a los docentes quienes deben seleccionar recursos disponibles y diseñar tareas fundamentando sus decisiones. Novembre, Nicodemo y Coll (2015) sostienen que la incorporación de tecnología debe generar verdaderas rupturas en el quehacer matemático escolar ya que "es posible abordar nuevos problemas matemáticos, con sus consecuentes nuevos conocimientos y saberes, y sus nuevas –y muchas veces, desconocidas– prácticas y tareas" (p.23). Las tecnologías digitales generan el surgimiento de nuevos problemas y producen cambios en la naturaleza de éstos y de sus resoluciones. Los docentes pueden emplear para la enseñanza tecnologías digitales que enriquezcan los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos, pero para esto deben aprender su uso. El proceso de elaboración de propuestas con tecnología implica una reflexión sobre las resoluciones esperadas, las gestiones de las clases y los modos de registros de los trabajos individuales y grupales.

Los Software de Geometría Dinámica (SGD), especialmente, promueven un trabajo basado en la visualización y experimentación, particularmente en el área de Geometría. Su carácter dinámico plantea múltiples diferencias con respecto a las tareas tradicionales con lápiz y papel. El desplazamiento de objetos libres permite que se consideren construcciones que conserven propiedades geométricas durante el movimiento y no dibujos particulares de una geometría estática. Laborde (1998) afirma que el reconocimiento visual puede jugar un papel importante en un entorno dinámico. Sin embargo, el reconocimiento visual de propiedades espaciales asociadas a las propiedades geométricas no se da de manera espontánea y debe ser objeto de aprendizaje. Esto justifica la importancia de que se investigue acerca del rol que juegan los entornos dinámicos en el reconocimiento y utilización de

propiedades geométricas y se reflexione acerca de las características de la enseñanza de la geometría con estos software.

Itzcovich y Murúa (2016) se preguntan al respecto de las construcciones con *GeoGebra* si las herramientas de este SGD, al ser portadoras de conocimiento geométrico favorecen “el paso del control de las propiedades a través de la percepción y los instrumentos a un control por medio de las definiciones, propiedades y deducciones” (p.75). Asumen que la actividad de construir en dicho entorno dinámico posibilitaría a los alumnos bajo ciertas condiciones realizar un estudio de las figuras en cuanto al conjunto de las relaciones que las caracterizan. Por esta razón resulta importante hacer énfasis en las relaciones que caracterizan cada dibujo-*GeoGebra*, más allá de los procedimientos utilizados.

Por otra parte, Horzum y Ünlü (2017) sostienen que los contenidos en los programas de profesorado de matemática se deben organizar de manera tal que se alcancen como objetivos adquirir conocimiento, habilidades, actitudes y hábitos que permitan adaptarse y entender la tecnología y tomar ventajas de las oportunidades que ofrece la misma para la enseñanza. Destacan que lo que los estudiantes pueden hacer para aprender conceptos relacionados a figuras geométricas con SGD es considerablemente distinto a lo que se puede hacer sin computadoras. Enfatizan también en la importancia de que los futuros profesores de matemática no solo usen *GeoGebra* para resolver actividades en sus clases si no que sean capaces de diseñar actividades con dicho SGD.

Resulta significativo estudiar qué aportes brinda un SGD a través de las construcciones dinámicas, para la identificación y utilización de propiedades geométricas, y cómo se relacionan estos procesos con las definiciones de los objetos matemáticos involucrados. Además, es primordial que estudiantes de profesorado reflexionen acerca de estos aspectos y reconozcan que las definiciones no son absolutas sino arbitrarias dentro de

una comunidad matemática y que la definición que se decida adoptar en cada caso delimita las propiedades geométricas relacionadas.

Por todo lo expuesto se considera relevante estudiar si tanto el proceso de elaboración de una construcción con *GeoGebra*, como el hecho de decodificar una construcción, a través del protocolo que brinda, contribuye a que estudiantes de profesorado en matemática reconozcan que una figura construida cumple con la definición y qué propiedades se ponen en juego.

1.2 Delimitación del problema de investigación. Enunciado de objetivos

1.2.1 Problema de investigación

Enmarcado el estudio en lo expuesto anteriormente, surgen las siguientes preguntas de investigación:

¿Cómo se vinculan las construcciones de una figura geométrica realizadas con *GeoGebra* con la identificación de las propiedades empleadas en las mismas y su definición? ¿Qué relaciones se establecen entre las propiedades de la figura y las herramientas de *GeoGebra* seleccionadas para su construcción?

1.2.2 Objetivo general

En el desarrollo de la investigación se propone alcanzar el siguiente objetivo:

Estudiar la vinculación, que establecen estudiantes de profesorado en matemática de la UNL, entre construcciones de una figura geométrica realizadas con el software de geometría dinámica *GeoGebra* y la identificación de propiedades empleadas en la misma y su definición.

1.2.3 Objetivos específicos

Con el objetivo de avanzar en el logro del objetivo general, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Estudiar las definiciones y propiedades de rectángulo que emplean los estudiantes.
- Analizar las construcciones que realizan los estudiantes con *GeoGebra*.
- Detectar la relación que establecen los estudiantes entre propiedades del rectángulo y herramientas de *GeoGebra* empleadas para su construcción.
- Indagar y describir cómo relacionan, los estudiantes, las propiedades empleadas en las construcciones y la definición considerada.

1.3 Organización de la memoria

El informe se organiza a partir de cinco Capítulos, referencias bibliográficas y dos anexos.

El Capítulo 1 expone el problema de investigación, la justificación de su relevancia y los objetivos de la investigación.

El Capítulo 2 refiere al estado del arte y a la orientación teórica del proceso de investigación. Se presentan características de las definiciones matemáticas, cuestiones relacionadas al quehacer geométrico, a la resolución de problemas con tecnologías digitales, particularmente con SGD, a la producción de construcciones dinámicas y a la interacción con las mismas. También se desarrollan particularidades del arrastre o desplazamiento de objetos libres, y respecto a las interacciones entre estudiantes cuando emplean un SGD.

El Capítulo 3 presenta el marco metodológico. En los dos primeros apartados se mencionan características del enfoque desarrollado en la investigación y del contexto de la misma. Se encuentra luego un apartado referido al instrumento principal para la producción de datos, otro a las estrategias de recogida de datos y por último otro en el que se describen las etapas llevadas a cabo en cuanto al procesamiento de la información.

En el Capítulo 4 puede encontrarse el análisis de las producciones. Consta de tres apartados, uno referido a la resolución del problema, otro a las entrevistas y otro en el que se presentan reflexiones desde una mirada holística a la luz de la orientación teórica establecida.

El Capítulo 5 se desarrolla en tres apartados, en el primero se hace alusión a los objetivos propuestos a modo de conclusiones del estudio. En el segundo se presentan contrastes que se destacan dentro de la investigación. El tercero expone aspectos que se derivan del estudio: producciones generadas y posibles líneas de investigación relacionadas.

Capítulo 2

Marco de referencia

2.1 Estado del arte

Delimitado el problema de investigación, se realiza una búsqueda bibliográfica, que de ningún modo pretende ser exhaustiva, relacionada a los objetivos que se plantean.

2.1.1 Con respecto a las definiciones y al proceso de definir en matemática

Winicki-Landman (2006) sostiene que existen diferencias entre la definición como producto y el definir como proceso dentro del quehacer matemático. En su trabajo cita a Borel (1965) quien sostiene que definir es un acto por el que se establece el significado preciso de un concepto de manera concreta. Retoman las ideas de Winicki-Landman y Leikin (2000) quienes afirman que en el proceso de definir influyen criterios que no siempre son revelados si se presentan las definiciones como hechos consumados. Esos criterios son lógicos, estéticos, y pedagógicos. Con respecto a los criterios lógicos, la definición debe ser precisa, consistente con anteriores definiciones en la que se apoya, arbitraria, debe basarse en conceptos previamente definidos y establecer condiciones necesarias y suficientes (bicondicionalidad). Por otro lado, en cuanto a los criterios estéticos, la definición no debe incluir partes que se puedan deducir lógicamente de otras partes de la misma definición (minimalista) y debe tener aspectos que permitan que se pueda entender de diferentes maneras (elegancia): sencillez en uso de simbolismo y simplicidad de su presentación, entre otros. Así,

El proceso de definir está compuesto por el enfoque elegido, la propia elección de una definición y su presentación. En este proceso, los criterios anteriormente mencionados pueden ser contradictorios. Por

intermedio del análisis de varias situaciones didácticas, se ilustrará parte de esas contradicciones que el futuro profesor deberá identificar y decidir sobre los posibles modos de resolverlas. (Winicki-Landman, 2006, p.531)

Por otra parte, Pachuca y Zubieta (2020) encuentran en estudiantes de licenciatura que recurren usualmente a la imagen evocada del concepto y no a la definición, lo que con frecuencia les trae dificultades para realizar tareas específicas.

Según Winicki-Landman y Leikin (2000) se puede definir un concepto matemático de muchas maneras, basadas en relaciones lógicas entre diferentes oraciones relacionadas al concepto. La elección de una de estas oraciones como definición juega un rol crucial en el proceso de aprendizaje. Para cada concepto matemático hay una variedad de enunciados que constituyen condiciones necesarias (las propiedades del concepto), o condiciones suficientes (las indicaciones del concepto). Algunas de las oraciones establecen condiciones necesarias y suficientes y por ende definen el concepto. Afirman que, al examinar conexiones lógicas entre las oraciones relacionadas al concepto puede establecerse una clase de equivalencia de enunciados de definición. De esta manera, cada oración que pertenece a esta clase puede ser elegida arbitrariamente como una definición, mientras las otras se convierten en teoremas que constituyen condiciones necesarias y suficientes del concepto. De tal forma, cada una de estas oraciones de la clase de equivalencia mencionada puede ser elegida como la definición puesto que matemáticamente no hay diferencia entre ellas. Así, cada definición determina un conjunto de objetos que satisface las condiciones de la definición y estos objetos ejemplifican el concepto. Si dos enunciados diferentes definen dos conceptos y sus correspondientes conjuntos de objetos ejemplo son conjuntos no disjuntos, entonces las siguientes relaciones son posibles: las definiciones son equivalentes, una de las

definiciones puede provenir de la otra o las definiciones pueden "competir". Si los conjuntos de objetos son iguales, entonces los enunciados son definiciones equivalentes de un mismo concepto. En este caso se puede aceptar una como definición y la otra como teorema dependiendo solo de consideraciones didácticas. Si uno de los conjuntos de objetos es un subconjunto propio del otro, entonces los conjuntos correspondientes de las condiciones definitorias establecidas por estos enunciados también están conectados por una relación de inclusión, y se dice que una de las definiciones proviene de la otra. Si los conjuntos de objetos se intersectan y el conjunto de intersección es un subconjunto propio de cada uno de ellos, entonces se dice que los enunciados son definiciones que compiten para dos conceptos matemáticos diferentes. Cabe destacar que la relación entre los conjuntos de objetos es inversa a la relación entre los conjuntos de las propiedades que los definen. Tener conciencia de esto puede prevenir que se transfieran de manera incorrecta las condiciones de un concepto a otro más general.

2.1.2 Con respecto a las tecnologías digitales en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática

Pueden encontrarse numerosos estudios que refieren al papel de las tecnologías digitales en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Particularmente, algunos se refieren al trabajo con SGD y a experiencias vinculadas a estudiantes de profesorado.

Olive et al. (2010) retoman el concepto de triángulo didáctico de Steinbring (2005), que considera concepto, objeto y signo, para desarrollar una adaptación del mismo al que le agregan un cuarto vértice que corresponde a la tecnología. De esta manera, transforman el modelo en un tetraedro cuyos vértices representan interacciones entre estudiante, profesor y conocimiento matemático, mediadas por tecnología. Se agrega, de esta manera, una nueva dimensión a la situación didáctica. Explican

también que existe una analogía en términos metafóricos en cuanto a la transformación que se da a través de la tecnología del triángulo didáctico al tetraedro didáctico y la que se da en las situaciones didácticas cuando la tecnología se adapta a las mismas en lugar de simplemente asimilarse.

Por otra parte, Mancebo (2015) define software de geometría dinámica como: "Todo software que permite dibujar figuras en función de sus relaciones geométricas y no de su apariencia, sus construcciones son dinámicas, es decir, permiten interactuar (mover, modificar...) con las construcciones realizadas, haciendo que las relaciones geométricas se mantengan" (p.10). En su estudio distingue los SGD de los software tipo diseño asistido por computadora (CAD). Los primeros poseen sencillez de uso, ya que su diseño se caracteriza por ser interactivo y descriptivo. Este aspecto proporciona a los estudiantes herramientas para representar y editar representaciones de conceptos, a través de la manipulación de las construcciones, contribuyendo a la comprensión de los conceptos, con un carácter intuitivo. Además, a diferencia de los programas tipo CAD, proveen la posibilidad de arrastre, conservando relaciones. De esta manera, los SGD permiten realizar construcciones geométricas, esto es dibujos que se definen por relaciones geométricas, característica que los diferencia de los software de dibujo técnico. Por otro lado, el dinamismo en dichas construcciones, permite interactuar con los objetos que las comprenden respetando las relaciones geométricas bajo las cuales se han realizado.

De acuerdo a los aportes de Khalil, Khalil y Haq (2019), una de las razones para utilizar tecnología en la educación es visualizar y explorar los conocimientos con posibilidades óptimas. Estos autores consideran las ventajas de *GeoGebra* en cuanto permite dar un significado visual a las ideas simbólicas con óptimas posibilidades dinámicas. Se proponen en su estudio conocer el efecto potencial de dicho software en el pensamiento matemático de diversos estudiantes. Por otra parte, afirman que los programas de

formación docente deben considerar la importancia de que el docente se equipe con herramientas tecnológicas que promuevan la cooperación y entorno de aprendizaje colaborativo, que apoyen la creatividad de los estudiantes en el desarrollo racional y la comprensión de conceptos matemáticos.

2.1.3 Con respecto a la resolución de problemas en entornos dinámicos

Algunos estudios desarrollan ideas acerca del trabajo de resolución de problemas en entornos dinámicos por parte de estudiantes de profesorado de matemática (Iglesias y Ortiz, 2018, 2019). Se destaca la importancia que tiene, además de estudiar los usos que les dan a los software de geometría dinámica, que estos estudiantes tengan contacto con actividades cercanas al quehacer matemático que puedan implementarse en la educación básica (Iglesias y Ortiz, 2019). Horzum y Ünlü (2017), por su parte, enfocan su estudio en los puntos de vista de los estudiantes de profesorado de matemática sobre el software *GeoGebra* luego de que diseñan actividades con el mismo. Asimismo, Reid, Botta y Prieto (2017) presentan una propuesta de enseñanza de geometría para escuela media, que es diseñada por estudiantes de futuros profesores de matemática junto con los profesores de secundaria de los grupos donde se implementa.

Tall (1989), en su estudio, rescata las posibilidades que brindan las computadoras de construir ambientes de software apropiados para que los estudiantes puedan explorar ideas complejas desde un primer momento. Este formato de aprendizaje trae consigo una negociación del significado de los conceptos matemáticos modelados en la computadora en la que la organización del currículum y el rol del docente es fundamental. Proponer este tipo de trabajo plantea un cambio con respecto a enseñar matemática partiendo de conceptos simples y familiares para los estudiantes para luego construir ideas más complejas a través de secuencias de actividades cada

vez más sofisticadas. Tall y Vinner (1981) en Tall (1989) definen imagen conceptual como la estructura cognitiva total asociada al concepto, que incluye todas las figuras mentales y las propiedades y procesos asociados. La imagen conceptual evocada es aquella porción de la imagen conceptual que se activa en un determinado momento. En diferentes momentos se pueden evocar imágenes aparentemente conflictivas, y es solo cuando los aspectos en conflicto se evocan simultáneamente que es necesario que haya algún sentido real de conflicto o confusión. Por esta razón, sostienen que a medida que la imagen conceptual se desarrolla no necesita ser coherente todo el tiempo.

Por otra parte, Sánchez, Prieto, Gutiérrez y Díaz-Urdaneta (2020) realizan su estudio utilizando *GeoGebra* en el contexto de elaboración de simuladores con estudiantes de escuela media. El trabajo de Arnal-Bailera y Oller-Marcén (2020) se enfoca en futuros maestros de primaria que utilizan *GeoGebra* para realizar construcciones en distintos sistemas de representación.

Se destacan también los aportes de Weinhandl, Lavicza, Hohenwarter y Schallert (2020) quienes combinan el uso de *GeoGebra* con el enfoque de aprendizaje invertido de la educación. En su trabajo los alumnos de secundaria utilizan *GeoGebra* antes de la clase y durante la misma, así como en espacios de aprendizaje individuales y grupales trabajando activamente en el desarrollo de sus conocimientos. Hacen referencia a las posibilidades que brinda la comunidad de *GeoGebra* y su desarrollo de más de un millón de aplicaciones en los últimos años, compartidas a través de la página principal del software. Las aplicaciones abiertas de la comunidad son importantes en su estudio ya que facilitan a los profesores el desarrollo de entornos de aprendizaje y el hecho de ayudar a los alumnos a encontrar materiales según sus necesidades de aprendizaje, personalizando así los entornos de aprendizaje.

2.1.4 Con respecto a la formulación y validación de conjeturas con software de geometría dinámica

Algunas investigaciones estudian particularmente la formulación y validación de conjeturas con software de geometría dinámica en futuros profesores de matemática (Cruz y Mántica, 2017, 2019). Se resalta que el hecho de acercar a los futuros profesores de matemática actividades que emplean recursos tecnológicos y son propias del quehacer matemático, tales como conjeturar y validar, puede potenciar su trabajo como docentes logrando establecer mejoras en la enseñanza de la matemática (Cruz y Mántica, 2019).

Sua y Camargo (2019), por su parte, estudian el papel que juega *GeoGebra* al apoyar el razonamiento científico de estudiantes y promover la actividad matemática (acciones, procesos, lenguajes y problemas que utilizan herramientas, técnicas y lenguajes matemáticos). Concluyen que surge una sinergia entre el razonamiento científico de los estudiantes y el uso de *GeoGebra*, impulsando procesos propios de la actividad matemática que se espera obtener en la escuela.

Por otra parte, Itzcovich y Murúa (2016) retoman la definición de figura geométrica establecida por Laborde (1997) y se inclinan a sostener que una figura geométrica en la geometría dinámica se considera como el único par formado por el referente y la familia de dibujos que la representa. Estudian acerca de la igualdad de figuras en *GeoGebra* y se preguntan bajo qué condiciones puede asegurarse que dos dibujos-*GeoGebra* son iguales. Así, afirman que "dos dibujos podrían considerarse iguales si es posible aparejar uno de una familia con uno de la otra" (p.78). Justifican también la importancia de estudiar las relaciones que caracterizan cada dibujo-*GeoGebra*, más allá de los procedimientos utilizados.

2.1.5 Con respecto al trabajo en grupo e interacciones

Algunos estudios se enfocan en las características del trabajo en grupo con tecnologías digitales, y las posibilidades de interacción que las prácticas colaborativas brindan. Este es el caso de Beatty y Geiger (2010), quienes distinguen en su estudio cuatro tipos de tecnologías digitales de acuerdo a su rol en las prácticas colaborativas. Algunas tecnologías fueron diseñadas para matemática y prácticas colaborativas, otras para prácticas colaborativas, algunas para matemática y otras no se diseñaron ni para matemática ni para prácticas colaborativas. Desarrollan ideas en torno a algunos software que fueron diseñados teniendo en cuenta ideas matemáticas, pero no necesariamente para que se promueva la interacción social. Dentro de éstos nombran a algunos de geometría dinámica e identifican aspectos colaborativos en ellos, tales como: la co-construcción, por estudiantes y profesores, del uso de una herramienta en matemática otorgándole sentido, la creación de significado matemático en el que la tecnología media la interacción y el aprendizaje en contextos de grupos pequeños y el uso de la tecnología para estimular las conjeturas y el debate en la discusión de toda la clase. Las distintas tecnologías digitales continúan desarrollándose y perfeccionándose, a medida que ofrecen nuevas formas de interpretar la comunicación, colaboración e interacción social y, por tanto, cambiar la disponibilidad y viabilidad de diferentes tipos de comunidades de práctica.

2.2 Orientación teórica del proceso de investigación

2.2.1 En cuanto al proceso de definir y las características de las definiciones en matemática

Al respecto de la definición, Vinner (1991) expresa que la misma genera un serio problema en el aprendizaje de la matemática ya que representa el conflicto entre la estructura de la matemática, tal como fue concebida por los matemáticos profesionales, y los procesos cognitivos de adquisición de

conceptos. La visión común de los matemáticos sobre las matemáticas consiste de una manera corta y simplificada en que es una teoría deductiva que comienza con nociones primarias y axiomas a partir de las cuales se definen todas las demás nociones. Así, todos los teoremas se pueden demostrar por medio de ciertas reglas de inferencia a partir de los axiomas. Sostienen que esta idea no refleja el proceso por el que se crean las matemáticas, pero suele ser la forma en la que se presenta la matemática en libros de texto y publicaciones. De esta manera, no es posible comenzar con nociones primarias y axiomas en cada situación. Sin embargo, de manera típica, se suele comenzar con nociones y teoremas bien conocidos para proceder definiendo nuevas nociones y probando nuevos teoremas. Esto puede tener consecuencias en la forma de enseñar matemática ya que los profesores podrían establecer en sus clases una secuencia de definiciones, teoremas y pruebas que sirva como esqueleto para su curso. Agregan que la presentación y organización de la matemática en algunos libros de texto y en clases se basan en parte en los siguientes supuestos: 1- Los conceptos se adquieren principalmente a través de sus definiciones. 2- Los estudiantes utilizan definiciones para resolver problemas y probar teoremas cuando sea necesario desde un punto de vista matemático. 3- Las definiciones deben ser mínimas, esto significa que no deben contener partes que puedan deducirse matemáticamente de otras partes de las definiciones. 4- Es deseable que las definiciones sean elegantes. 5- Las definiciones son arbitrarias. Definir en matemática es dar un nombre y las definiciones por tanto son hechas por el hombre. Asimismo, el nombre de un concepto (visto o escuchado) constituye un estímulo para la memoria, teniendo en cuenta que por lo general no es la definición del concepto lo que se evoca sino lo que se llama imagen conceptual. La imagen conceptual, de esta manera, constituye algo no verbal que se asocia en la mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual en el caso de que el concepto tenga representaciones visuales, aunque también puede ser una colección

de impresiones o experiencias. De esta manera, las representaciones visuales, imágenes mentales, impresiones y experiencias asociadas con el nombre del concepto se pueden traducir en formas verbales; aunque no es lo primero que se evoca en la memoria. Con respecto a la formación de conceptos, el autor supone que adquirir un concepto significa formar una imagen conceptual para él. Así, conocer de memoria una definición de un concepto no garantiza que se comprenda. Para entender, se debe tener una imagen conceptual. Distingue también el rol de las definiciones en los conceptos de la vida cotidiana, del rol de las mismas en aquellos que refieren a aspectos técnicos. Cabe destacar que la mayoría de los primeros se adquieren sin ninguna implicación de definiciones. Si bien algunos pueden introducirse a través de algunas de ellas, una vez que se forma la imagen conceptual se puede prescindir de la definición. En contextos técnicos, por el contrario, ayudan a formar la imagen conceptual pero muy frecuentemente tienen un papel crucial en las tareas cognitivas. Así, en estos contextos, las definiciones pueden tener funciones extremadamente importantes ya que imponen a los estudiantes algunos hábitos de pensamiento que son totalmente diferentes a los típicos que se dan en los contextos de la vida cotidiana. De esta manera, el papel de la definición en clases de matemática debe determinarse de acuerdo a los objetivos que se persiguen. Además, los estudiantes avanzados deben poder usar las definiciones como un criterio final en las tareas matemáticas, por lo que deben ser dadas y discutidas. Luego, resulta interesante la propuesta de tareas que no se puedan resolver únicamente acudiendo a la imagen conceptual, sino que requieran el uso de la definición.

Por otro lado, Tall (1992) destaca que, si bien la presentación formal de la matemática avanzada se realiza a través de la definición y prueba, los educadores deben reflexionar acerca de la manera en que los estudiantes realizan transición hacia la construcción del conocimiento. Los estudiantes utilizan las definiciones de manera fortuita, empleando diferentes versiones

apropiadas para diferentes ejemplos. En algunos contextos, las definiciones operan como descripciones y es allí donde las pruebas son entendidas como relaciones coherentes entre definiciones que funcionan tanto para describir los objetos como para definirlos. Así es que la imagen conceptual de la definición y la prueba del estudiante, que se basa en sus experiencias previas, puede estar en desacuerdo con las nociones de definición y prueba que se consideran en la matemática avanzada.

En relación con los tipos de clasificaciones en matemática, se encuentra el trabajo de De Villiers (1994). En las clasificaciones jerárquicas, la clasificación de un conjunto de conceptos se organiza de manera tal que conceptos más particulares formen subconjuntos de los más generales. En contraste pueden encontrarse las clasificaciones particionales de los conceptos, en las que los subconjuntos de los conceptos son considerados disjuntos unos de otros. El autor aclara que los procesos de clasificación y definición no son considerados independientes entre sí. Así, una clasificación y sus correspondientes definiciones son arbitrarias y no absolutas. Por esta razón se puede afirmar que la elección entre clasificaciones jerárquicas o particionales es una cuestión de elección personal y conveniencia. Las funciones importantes de las clasificaciones jerárquicas que destaca son: llevar a definiciones más económicas del concepto y a la formulación de teoremas, simplificar la sistematización deductiva y la derivación de propiedades de conceptos más especiales, proveer frecuentemente un esquema conceptual útil para la resolución de problemas, sugerir a veces definiciones alternativas y nuevas proposiciones y brindar una perspectiva global útil. De esta manera, la economía de las definiciones y teoremas formulados asociados a clasificaciones jerárquicas es una de las ventajas más importantes que estas otorgan. Las definiciones jerárquicas son más cortas que las particionales, ya que éstas últimas deben incluir propiedades adicionales que excluyan ciertos objetos. La simplificación de la sistematización deductiva que facilitan las

clasificaciones jerárquicas también es destacable ya que, si un concepto A es un subconjunto de un concepto B resulta innecesario repetir las pruebas de las propiedades del concepto B para el concepto A, debido a la inclusión jerárquica. Sin embargo, resulta importante que no se impongan a los estudiantes clasificaciones y definiciones jerárquicas sin conocer las características de los tipos de clasificación que existen. El hecho de que los estudiantes participen en los procesos de clasificación y definición, y no se les presenten ya realizados, les permiten comparar las alternativas de una manera crítica contribuyendo a la construcción de los conceptos con mayor sentido.

De acuerdo a los aportes de De Villiers et al. (2009), para que los estudiantes participen activamente en la construcción de definiciones deben conocer qué características califican a una definición como correcta. Una definición que contiene condiciones (propiedades) que son necesarias y suficientes se dice que es correcta. Para que una condición en una definición dada sea necesaria, debe poder aplicarse a todos los elementos del conjunto que se quiere definir. Así, el concepto implica la propiedad, entonces la propiedad es necesaria para el concepto. Sin embargo, para que una condición sea suficiente, se debe asegurar que siempre que se cumpla se obtengan todos los elementos del conjunto que se quiere definir. Así, la propiedad implica el concepto, entonces la propiedad es suficiente para el concepto. Es útil recurrir lógicamente a la bicondicional $p \Leftrightarrow q$, la condición p es vista como necesaria y suficiente para la condición q . Esto significa que se puede concluir que q proviene de p y viceversa. Las condiciones que definen un conjunto deben ser necesarias y suficientes. Además, una definición correcta puede ser económica o no económica. Es económica si posee el conjunto mínimo de propiedades necesarias y suficientes, es decir no contiene información superflua. Si posee propiedades redundantes, es no económica. El principio de minimidad, a partir del cual las definiciones son económicas, es un elemento estructural crucial de las matemáticas

como un sistema deductivo ya que muestra la manera en que éstas progresan cuando se presentan deductivamente. Teniendo en cuenta que luego de que se presenta la definición, se formulan y prueban teoremas que dan información adicional acerca del concepto, una buena definición debe ser económica y debe permitir deducir otras propiedades del concepto fácilmente (económica deductiva).

Govender (2002), por su parte, distingue particularidades relacionadas a las definiciones en matemática. Expresa que éstas son arbitrarias dado que existen diferentes definiciones correctas para el mismo concepto, lo que implica que se lleve a cabo una elección. Con respecto a las condiciones necesarias y suficientes, argumenta que para que una condición en una definición sea suficiente debe contener suficiente información (propiedades) para asegurar que sólo se obtienen los elementos del conjunto que se quiere definir y no otros. Sin embargo, sostiene que normalmente se utiliza la menor información posible, considerando sólo aquella que es realmente necesaria. Además, caracteriza a las definiciones correctas e incorrectas, incompletas, económicas y no económicas.

Definiciones correctas: Una definición es correcta si contiene condiciones suficientes. En una definición correcta todas las condiciones pueden ser necesarias o algunas de las condiciones pueden ser innecesarias.

Definiciones incorrectas: Una definición es incorrecta si contiene una propiedad incorrecta o si contiene propiedades insuficientes.

Definiciones incompletas: Una definición es incompleta si contiene propiedades necesarias, pero no suficientes. Es incorrecta.

Definiciones económicas y no económicas: Una definición económica tiene solo propiedades necesarias y suficientes, contiene información que no es redundante. Una definición no económica tiene propiedades suficientes,

pero algunas no necesarias. En otras palabras, contiene más información que la necesaria. De esta manera, una definición correcta puede ser económica o no económica.

Por otra parte, en relación con las características de una buena definición, Zaslavsky y Shir (2005) en Codes, Climent y Oliveros (2019) expresan en primer lugar, que debe ser *no contradictoria*. Esto significa que todas las condiciones de la definición deben coexistir. En segundo lugar, tiene que ser *no ambigua*, lo que refiere a que su significado debe ser interpretado de manera única. Mencionan además otras características que resultan imperativas cuando se aplican las definiciones: Una definición matemática debe ser *invariante* bajo el cambio de representación y debe ser *jerárquica*, lo que significa estar basada en conceptos básicos definidos previamente de una manera *no circular*.

Por otro lado, en la investigación de Zazkis y Leikin (2008) se realiza una distinción entre definiciones apropiadas e inapropiadas a partir de criterios de corrección y riqueza. La condición de corrección refiere al uso de propiedades necesarias y suficientes que están mediadas por el rigor. Asimismo, la riqueza está relacionada con el uso de elementos no tradicionales. De este modo, se consideran definiciones ricas a aquellas en las que se identifican oraciones relacionadas con otros elementos más allá de lados y ángulos de figuras geométricas. Resulta propicio aclarar que el aspecto de riqueza no asegura que sea correcta. La circularidad se da al definir un concepto X con referencia a Y, y al mismo tiempo definir Y con referencia a X.

Con respecto a las concepciones de definiciones geométricas de profesores de matemática de escuela secundaria, se recupera el trabajo de Yahia, Daher y Swidan (2019). En su investigación indagan, a través de un cuestionario acerca de equivalencia entre definiciones, condiciones necesarias y suficientes y acerca del razonamiento geométrico deductivo

relacionado a definiciones. Encuentran que generalmente los profesores participantes tienen dificultades en distinguir cuáles son las características opcionales y cuáles las imperativas en cuanto a definiciones matemáticas. Algunos profesores de la muestra realizan distinciones entre definiciones y propiedades no aceptando como definiciones de paralelogramo a aquellas que describen a la figura en términos de sus ángulos o diagonales. Algunos de ellos afirman que no son definiciones, pero sí propiedades. Otros, aseguran que la definición de paralelogramo debe contener información relativa a los lados. De esta manera, si contiene información relacionada a otros elementos, como ángulos, consideran que no es definición sino propiedad.

Asimismo, se recuperan los aportes de De Villiers (2004), quien estudia otras funciones de la prueba además de la verificación (explicación, descubrimiento y sistematización), particularmente en el contexto de definir y clasificar algunos cuadriláteros. Sostiene que tradicionalmente los profesores suelen sembrar dudas en sus alumnos y utilizar la prueba para obtener seguridad. Esto resulta problemático en la enseñanza con geometría dinámica porque los estudiantes tienen un alto nivel de confianza ya que la manipulación les brinda cierta seguridad. Distingue dos tipos de definiciones: definición descriptiva (a posteriori) y constructiva (a priori). En la descriptiva la imagen conceptual fue desarrollada antes de que la definición del concepto se formule, por lo que se selecciona un subconjunto apropiado del conjunto de propiedades del concepto desde las cuales todas las otras propiedades pueden ser deducidas. Este subconjunto sirve como la definición y el resto de las propiedades pueden derivarse lógicamente de ahí como teoremas. Por otro lado, la definición constructiva tiene lugar cuando una definición dada de un concepto se cambia con la exclusión, generalización, especialización, reemplazo o adición de propiedades a la definición. Así, un nuevo concepto es construido en el proceso constituyendo esta producción de nuevo conocimiento, la principal función

de la definición. Destaca que ambos procesos no son disjuntos, a veces colaboran mano a mano para la generación de una definición particular. Además, es importante que los estudiantes noten que cuando realizan ciertas “cosas” para construir una figura, otras “cosas” resultan. De esta manera, pueden reflexionar sobre la diferencia de categoría entre las relaciones que aplican en una figura (las “cosas” sobre las que tuvieron control) y las relaciones que resultaron sin ninguna acción de su parte. Finalmente, la diferencia entre esas dos categorías puede asociarse con la diferencia entre las condiciones dadas y la conclusión, entre la parte "si" y la parte "entonces" de la proposición. La posibilidad de elegir entre definiciones permite que los estudiantes reflexionen sobre cuál es mejor empleando ciertos criterios. Un criterio puede ser que permita deducir las propiedades restantes de manera sencilla. Otro criterio puede ser que permita construir la figura de manera sencilla directamente.

Aya Corredor, Echeverry Gaitán y Samper (2016) trabajan, en su estudio, en un programa de formación inicial de maestros de matemática. Sostienen que las definiciones de los objetos geométricos tienen un rol relevante en la actividad demostrativa. Esto se debe a que ciertas dificultades en la comprensión de las características y el papel de las definiciones conllevan dificultades en el proceso deductivo. Esto también se ocasiona a partir de conflictos en diferenciar condiciones necesarias y suficientes de las definiciones. Distinguen la definición del concepto de la definición personal que se tiene del mismo y argumentan que si estas no concuerdan, pueden generarse justificaciones sin éxito. Además, consideran importante que, en el proceso de construir definiciones, se trabajen diversidad de definiciones para un mismo objeto y que los estudiantes acepten la equivalencia entre las mismas. Dentro de las actividades desarrolladas en su trabajo, pretenden que se discuta la definición particional o jerárquica de cuadrado respecto al rectángulo reflexionando en torno a qué propiedades son necesarias y cuáles suficientes para elaborar

una definición económica de cada uno de los objetos mencionados. Sustentan su propuesta a partir de considerar que la geometría dinámica constituye un apoyo para la aceptación de una clasificación jerárquica, en este caso de cuadriláteros. De esta manera, analizan la correspondencia construcción-definición y abordan la necesidad de evidencia empírica y de definiciones que sirvan de referencia. En las tareas presentadas a los estudiantes, analizan la correspondencia entre definición escrita y construcción realizada de rectángulo. Destacan que el rol del docente es relevante dado que es quien destaca la necesidad de que esta correspondencia exista y hace ostensiva la definición que subyace a las construcciones realizadas, con el objetivo de que se comprenda lo que es una definición matemática. El trabajo muestra evidencias de que la utilización de SGD influye en la formulación de la definición por parte de los estudiantes. Los mismos discuten acerca de las definiciones de rectángulo y cuadrado, y acerca de las condiciones que hacen que de acuerdo a la definición considerada el segundo sea un caso particular o no del primero. Cabe mencionar que la jerarquía no es una cuestión clara inicialmente para ellos ya que solo tienen un acercamiento informal a conceptos geométricos y aún no están trabajando con un sistema axiomático de geometría. Los autores concluyen que

el uso de geometría dinámica contribuye a la elaboración, aceptación y uso de definiciones de naturaleza jerárquica y económica para cuadrado y rectángulo. El diseño de las actividades proveyó evidencia empírica acerca de la reducción de condiciones para definir un objeto; se puede evidenciar cómo añadir una propiedad modifica el objeto, mostrando que algunos son subconjuntos de otros. (p.156)

Mencionan también que, si bien los aspectos de economía y jerarquía son deseables desde un punto de vista matemático pueden no llegar a serlo para los procesos de argumentación. Esto se ilustra en una de las

actividades realizadas por los estudiantes en la que considerar una definición jerárquica de cuadrado implica que se efectúe una demostración más extensa. De esta manera, resulta ideal que el estudiante sea capaz de adecuar definiciones en distintos contextos. Por otro lado, destacan que son las acciones del docente, junto con el uso del software, las que pueden ayudar a la conceptualización de los objetos. Así, el docente “promueve la evocación de actividades realizadas en el ambiente de geometría dinámica, no solo para cuestionar las definiciones personales, sino para relacionar la definición del concepto en los procesos de argumentación con dichas definiciones y con las imágenes conceptuales” (Aya Corredor et al., 2016, p.156).

Al respecto de construcciones de cuadriláteros y sus definiciones, Furinghetti y Paola (2002) estudian cómo se relacionan las definiciones de cuadriláteros con las construcciones de los mismos con un SGD (Cabri). Los sujetos de estudio son veintiún estudiantes de quince años con previa experiencia de uso del software en la resolución de problemas geométricos. Trabajan en grupos conformados por dos y tres estudiantes a los que se les propone la actividad de construir cuadriláteros con el software a partir de una clasificación dada por ellos mismos. Destacan especialmente que todos los estudiantes comienzan por la construcción de un cuadrado. Algunos argumentos que dan los estudiantes es que el cuadrado constituye el cuadrilátero con más propiedades, es el que pueden imaginar más fácilmente y es el cuadrilátero más fácil. De esta manera, los autores sostienen que las figuras particulares que poseen ciertas regularidades son más fáciles de concebir que las genéricas. El hecho de comenzar construyendo un cuadrado tiene ciertas implicancias con la clasificación de cuadriláteros considerada. Si bien se solicita de manera previa a la elaboración de las construcciones que den una clasificación de cuadriláteros, no todos los estudiantes la realizan. Algunos de ellos simplemente nombran cuadriláteros y otros eligen establecer una

clasificación que se organiza desde el cuadrado hacia el trapecio. Se evidencia de esta manera que el trabajo con el SGD los orienta a un criterio diferente de clasificación, utilizando una especie de jerarquía inversa, en la que se comienza desde la figura más específica que posee mayor número de propiedades (el cuadrado) y se avanza hacia las otras dejando atrás ciertas propiedades.

En relación con el lenguaje en matemática, Berté (2000) menciona algunas convenciones implícitas. El verbo “ser” permite indicar identidad o inclusión, de acuerdo a las características de la frase en la que sea usado. Por otro lado, el artículo “un” es un cuantificador existencial o un número cardinal. Además, describe el principio de máxima información relacionado con la información truncada. En la vida cotidiana, si se oculta información se asimila a una mentira, cuestión que no ocurre de la misma manera en matemática. Por ejemplo, si se conoce que cierto cuadrilátero es un cuadrado, es perfectamente lícito decir que dicho cuadrilátero es un rectángulo.

Por otra parte, Ortega y Ortega (2001) en Götte (2019) afirman que el lenguaje matemático es un lenguaje específico que designa exactamente sus contenidos ofreciendo claridad y simplificando la comunicación en algunos casos. Las afirmaciones que se exponen en lenguaje matemático, no presentan ambigüedades y se presentan con demostraciones de su veracidad, de manera propia y tajante. Así, cada uno de los símbolos de escritura que se definen y utilizan se exponen con una estructura idónea para su comprensión y tienen una tarea específica y exacta sin solapamientos ni posibles equívocos. De esta manera, conocer defectuosamente el lenguaje matemático, considerando tanto la simbología como la estructura y presentación de los contenidos, puede generar que se cometan errores de construcción o de interpretación complejizando la comunicación en el área. Resaltan también que el rigor y el uso del lenguaje

matemático dependen del nivel de conocimiento de los estudiantes involucrados en el trabajo.

2.2.2 En cuanto a cuestiones relacionadas al quehacer geométrico

Los aportes de Itzcovich (2005) contribuyen a la reflexión acerca del rol que juegan los dibujos que representan figuras geométricas en la identificación de propiedades. Aquellos aspectos que los alumnos reconocen en el dibujo de la figura dependen de sus conocimientos disponibles, por lo que es una ilusión falsa asumir que con solo mostrar el dibujo a los alumnos éstos pueden reconocer las propiedades que se supone están representadas. Para que las características y propiedades de las figuras geométricas se hagan explícitas es necesario que se propongan situaciones que impacten en procesos intelectuales con el objetivo de indagar e identificar propiedades de la figura, más allá de los dibujos que se utilicen para representarlas. De esta manera, se debe apelar a relaciones entre los conocimientos disponibles de los alumnos, las actividades de construcción, aciertos, ensayos y errores y las interacciones entre los alumnos y con el docente, en un proceso en el que se identifiquen las particularidades de los elementos de las figuras. Así, las propiedades y características de las mismas son herramientas necesarias en el proceso deductivo.

Por su parte, Berté (2000) menciona ejemplos de obstáculos que pueden presentarse en la construcción del saber en matemática. Sostiene que estos obstáculos son producidos a partir de la construcción de nuevos conocimientos que parten de los que el estudiante ya posee. Considera que, en la mayoría de las oportunidades, el nuevo conocimiento debe producir una reestructuración del anterior para que sea integrado. En este proceso ocurre que el conocimiento anterior resiste ya que se está construyendo uno nuevo contra el ya existente. Los modelos implícitos o representaciones que posee el alumno frecuentemente se convierten en obstáculos y son necesarios para que pueda construir los saberes. “No se trata de destruir,

se trata de explicar, luego de transformar y de enriquecer el modelo implícito o la representación” (p.103). Algunos obstáculos que pueden presentarse son los que la autora llama de las direcciones privilegiadas, horizontal y vertical. Estos obstáculos se dan debido a la influencia cultural fuerte de la horizontalidad y verticalidad. Como ejemplos, menciona el sentido de la escritura y el hecho de estar de pie. De esta manera, “Todos los alumnos del mundo tienen los mismos problemas con el ángulo recto porque lo que prima es la experiencia de mantenerse de pie que da la horizontal y la vertical, por lo tanto el ángulo recto” (p.118). Así, la vertical y la horizontal son nociones científicas que se dan en ciencias como la física y la geografía, y se eliminan en matemática. Esto puede generar un obstáculo, sobre todo para los principiantes, para los conceptos de rectas perpendiculares y la noción de ángulo recto, a partir del cual este último puede ser concebido solamente en algunos casos como aquel formado por la horizontal y la vertical. Con respecto al rectángulo, menciona que en algunos casos los docentes no suelen presentar ejemplos de rectángulos que sean cuadrados, ni muy pequeños, ni muy grandes, ni muy alargados. Afirma que lo que a los alumnos les impactan son las acciones y no las palabras, por lo que las motivaciones secundarias que tiene el profesor al elegir los ejemplos típicos que presenta tienen la misma importancia que la teoría para los estudiantes. El docente concibe al rectángulo como un concepto, con propiedades que se pueden deducir independientemente de la forma. En cambio, el estudiante que está construyendo el concepto percibe al rectángulo como un dibujo.

El alumno se construye una definición de rectángulo que permanece implícita, pero que se puede explicitar: el rectángulo es un cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos, un lado mayor L llamado “largo” y un lado menor l , llamado “ancho”, de manera que el cuadrilátero sea claramente visto en la hoja y que la razón L/l sea cercana a una relación armoniosa, es decir, entre 1,5 y 2. (p.116)

De esta manera, el dinamismo que puede darse a partir de una deformación continua de un rectángulo que pase de ser “normal” a ser un cuadrado o a ser muy alargado puede ayudar al alumno a poner a funcionar la teoría.

2.2.3 Respecto a tipos de construcciones dinámicas y su producción

En cuanto a tipos de construcciones con SGD, Healy (2000) distingue entre construcciones robustas y construcciones blandas. En las construcciones robustas, una relación permanece invariante a través del desplazamiento pudiéndose generar una familia de dibujos con las mismas propiedades geométricas. En las construcciones blandas, en cambio, el desplazamiento es parte de la construcción, no una verificación. Así, en una construcción blanda no se utilizan todas las propiedades geométricas dadas y aquellas que no son consideradas se satisfacen manual y visualmente a través del desplazamiento.

González López (2001) afirma que para realizar algunas actividades con SGD, se requiere la elaboración de un proceso de construcción de una figura que se describe a través de ciertas propiedades geométricas. Este modo de proceder algorítmico establece una diferencia entre trazado y procedimiento de trazado. Por esto, resulta importante que el docente promueva la reflexión por parte del alumno acerca de “la necesidad de ser consciente de los pasos que realiza al resolver una determinada tarea, pasos que tienden a clarificarse tras una actividad exploratoria inicial no controlada” (p. 282). Así, si se requiere la construcción de una figura geométrica determinada, es necesario que se hagan explícitas un mínimo de propiedades geométricas que describan formalmente la figura. Estas propiedades pueden ser conocidas por los estudiantes y también reconocidas visualmente. Sin embargo, es necesario que deduzcan que dichas propiedades que

determinan esa figura son incumplidas por otras, definiendo formalmente por exclusión dicha clase de figuras.

Laborde (1998), por su parte, se refiere al uso de SGD en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, especialmente con el software Cabri. Destaca como característica la coexistencia de primitivas de dibujo puro y primitivas geométricas y la manipulación directa del dibujo. De suma importancia es la distinción que realiza entre dibujo y figura. El dibujo corresponde a un referente de un referente teórico que es objeto de una teoría geométrica. La figura geométrica, por su parte, se define como el conjunto de pares formados por dos elementos: el elemento referente y uno de los dibujos que lo representa (tomado del universo de todos los posibles dibujos que representan al referente). Vale resaltar que las relaciones entre dibujo y objeto geométrico son complejas y el paso del primero al segundo es objeto de interpretación por parte de un sujeto. De esta manera, se puede deducir que no necesariamente un lector interpreta un dibujo geométrico como algo que le remita a un objeto geométrico. Las interpretaciones de un mismo dibujo son múltiples ya que dependen del lector, de sus conocimientos y del contexto, teniendo en cuenta además que el dibujo por sí solo no puede caracterizar a un objeto geométrico. El dibujo se asocia, por tanto, a un dominio de interpretación. Por otro lado, el sistema de representación de objetos geométricos que ofrecen los SGD permite que los dibujos en la pantalla se produzcan a través de comandos en lenguaje geométrico, con un dominio de funcionamiento más amplio que aquellos realizados con lápiz y papel, haciendo por tanto más evidentes los límites del dominio de interpretación. Así, "la exigencia de comunicar al programa un procedimiento geométrico de construcción permite caracterizar al objeto geométrico" (p.38). De esta manera, en la producción de dibujos dentro del entorno dinámico, los estudiantes deciden utilizar ciertas primitivas geométricas. Sus estrategias empíricas se refuerzan por el número limitado de comandos de construcción, eligiendo diversas combinaciones de

herramientas. “No es el uso de conocimientos geométricos lo que controla el proceso de trazado sino la búsqueda de una serie de menús que conduzcan a un Cabri-dibujo, que será validado por el desplazamiento” (p.45). En el caso en que los estudiantes deben producir un dibujo dinámico a partir de una caracterización discursiva, se establece un juego entre una actividad perceptiva que se favorece por el desplazamiento, una estrategia combinatoria y ciertos conocimientos geométricos.

Los alumnos atacan el problema mediante combinaciones sistemáticas de menús sobre los objetos existentes, pero puede suceder que descubran en el momento del desplazamiento uno de los invariantes geométricos pedidos pero asociado a otros objetos distintos de los deseados. Se sitúan entonces en una problemática geométrica al intentar volver a obtener este invariante entre los objetos deseados y, para ello, analizan geoméricamente lo que han hecho de forma empírica: la geometría se convierte en un medio que les permite controlar la reproducción de un invariante obtenido de forma aleatoria. (Laborde, 1998, p.45)

En el trabajo de investigación de Sánchez y Prieto (2019) se indaga acerca de las posibles relaciones que establecen los estudiantes entre aspectos espaciales de los dibujos y las propiedades teóricas de los objetos geométricos que se evocan en el discurso. Definen dibujo dinámico como aquel creado con un SGD, que conserva propiedades espaciales a través del desplazamiento. Las propiedades espaciales que se mantienen permiten dar cuenta de las propiedades geométricas aplicadas en la construcción. Existen dos elementos prácticos intervinientes en la elaboración de un dibujo dinámico: la tarea de construcción y la técnica de construcción correspondiente. La tarea de construcción es el problema matemático al que se enfrentan los alumnos, que puede ser declarado como no. La técnica de construcción se asocia a la tarea de construcción y está referida al

procedimiento que se emplea para la elaboración del dibujo que da respuesta a la tarea. La técnica de construcción posee contenidos conceptuales específicos que están referidos a la construcción de los objetos geométricos que son modelados por los dibujos dinámicos. *GeoGebra* provee de ciertos contenidos conceptuales en forma de herramientas de construcción y medida, entre otras. Proporciona un espacio de experimentación con los contenidos conceptuales que permite la construcción de dibujos dinámicos de maneras novedosas. Por otro lado, sostienen que el hecho de que una técnica de construcción permita que se reproduzca un dibujo con consistencia geométrica no asegura el reconocimiento del dibujo como un significante de un objeto geométrico. Así, hacen referencia a ciertas dificultades por parte de los estudiantes en el otorgamiento de sentido a los pasos de la técnica de acuerdo a las relaciones entre el dibujo construido y el referente teórico correspondiente. Citan a Laborde (1997) quien afirma que debe ser objeto de aprendizaje el reconocimiento visual de propiedades espaciales que se asocian a las propiedades geométricas, ya que no se da de manera espontánea. En algunas ocasiones los alumnos utilizan técnicas de construcción consistentes, pero aun así no logran dar explicaciones plausibles de sus procedimientos de construcción, evidenciando dificultades en la vinculación de sus acciones con el saber geométrico que subyace en el uso de las herramientas utilizadas. “Para que el saber geométrico que subyace en el uso de *GeoGebra* se revele a la conciencia, es necesario que los contenidos conceptuales incrustados en las herramientas, aparezcan durante la reflexión conjunta en torno a la técnica de construcción asociada” (p.60). La comunicación de técnicas de construcción permite a profesores y estudiantes que movilicen los saberes geométricos a partir de discursos orales que se basan en percepción visual o en teoría geométrica por medio también de otras formas de reflexión y expresión humana.

Furinghetti y Paola (2002) sostienen que encuentran cierta “ansiedad” manifestada por los estudiantes quienes se ven más preocupados por utilizar las facilidades del software que en diseñar procedimientos que le permitan resolver la tarea (construir y clasificar cuadriláteros). Por otro lado, el uso del software fomenta que se utilicen simetrías para construir, cosa que no ocurre generalmente en las construcciones con lápiz y papel. Asimismo, la persistencia de aspectos figurales en las construcciones y la reticencia a la utilización del arrastre de objetos evidencia una deficiencia por parte de los estudiantes a relacionar las construcciones de una figura con la teoría matemática, considerando la actividad de construir como puramente práctica.

González y Lupinacci (2012) presentan en su trabajo algunos problemas para abordar con *GeoGebra* que se relacionan a la construcción de cuadriláteros y tienen como objetivos la exploración de propiedades de los mismos y el análisis de unicidad, multiplicidad o inexistencia de soluciones. Destacan la ventaja que brinda el software con respecto a la interacción que posibilita efectuar movimientos en distintos elementos de las construcciones. De esta manera, los elementos que permanecen invariantes son aquellos que se definen en la construcción utilizando de manera explícita propiedades geométricas. Sostienen que las herramientas habilitadas en el software influyen de manera significativa en la elección de los procedimientos de construcción. Es posible establecer en *GeoGebra* una barra de herramientas personalizada dejando solo activas las herramientas que se consideren convenientes de acuerdo a los objetivos perseguidos. Particularmente, la cuadrícula que puede encontrarse en la pantalla de *GeoGebra* puede propiciar la realización de construcciones que se apoyen en el mismo. Esta cuadrícula puede activarse y desactivarse en el menú Vista, siendo esta variable un elemento de comando para las construcciones que se desarrollen. “Su utilización puede propiciar construcciones en las que se establezcan condiciones de medida a partir de contar cuadraditos o

bien establecer relaciones de paralelismo apoyándose en ella” (p.31). Estos autores sugieren, para la elaboración de construcciones basadas en relaciones y propiedades de los objetos involucrados (paralelismo e igualdad de lados, por ejemplo), el trabajo sobre la pantalla en blanco.

2.2.4 Respecto a la práctica de arrastre o desplazamiento

Restrepo (2008) considera al desplazamiento como

un elemento fundamental de la geometría dinámica. Nos permite pasar de una geometría estática, en la cual los objetos sobre los cuales se trabaja son dibujos en configuraciones particulares, a una geometría dinámica, en la cual las construcciones conservan las propiedades geométricas durante el movimiento. (p.1)

Afirma que la apropiación del uso del desplazamiento no es evidente ni inmediato, por lo que deben diseñarse tareas que permitan a los alumnos introducirse en ese proceso. Los problemas que se presenten deben propiciar que el uso del desplazamiento no se limite a constatar propiedades geométricas, sino que se lo utilice para conjeturar a partir de una construcción geométrica.

Restrepo (2008) describe distintos tipos de desplazamiento:

Desplazamientos para ajustar: son utilizados por los estudiantes que no logran construir una figura teniendo en cuenta propiedades geométricas. Blandos o guiados: se utilizan cuando se le quiere dar momentáneamente a la construcción una forma o propiedad particular. Para identificar los invariantes de la figura. Para constatar las variaciones durante el movimiento: permiten analizar las regularidades de la figura y determinar cuáles son los elementos que cambian y cuáles no. Para encontrar la trayectoria de un punto y determinar el objeto geométrico que describe la misma. Para validar/invalidar una construcción: se realizan al desplazar los puntos básicos para verificar si la construcción conserva las

propiedades aparentes del estado inicial. Si esto no ocurre, la figura es invalidada ya que no está construida a partir de las propiedades geométricas esperadas. Para validar/invalidar una conjetura: se desplazan los puntos básicos de la construcción para validar una conjetura establecida teniendo en cuenta los invariantes de la figura. Esta conjetura se invalida si se encuentra una posición en la que no es verdadera. Si no es posible encontrar un contraejemplo, la conjetura debe ser demostrada.

Por otra parte, Arzarello (2001) afirma que el trabajo con SGD puede modificar el estado de los objetos geométricos teniendo en cuenta que la naturaleza de la relación entre los niveles perceptivo y teórico es compleja. Las prácticas de medir y arrastrar pueden mediar la relación teórica-perceptual de una manera específica creando entidades con un nuevo status. En un nivel perceptual se entienden las actividades en la que los alumnos usan la percepción en un sentido amplio. En un nivel teórico se consideran las actividades en las que producen una conjetura de una manera condicional y la validan con una prueba. Destaca que el arrastre y la medición son herramientas fuertes para construir conocimiento matemático. Éstas ayudan a la producción de conjeturas al explorar figuras a través del desplazamiento observando la manera en que cambian y no cambian sus medidas y formas, lo que permite descubrir las propiedades invariantes. Además, la posibilidad de arrastre y medida ofrece una retroalimentación en la fase de descubrimiento contribuyendo a considerar a la prueba como una real explicación de conjeturas y propiedades.

Itzcovich (2020) asegura, con respecto al arrastre, que no hay que conformarse con que una figura lo soporte. En efecto, el hecho de que una figura no soporte el arrastre no implica que las propiedades no estén presentes. Así, si no lo soporta, es conveniente que se produzcan relaciones geométricas para entender por qué esto ocurre. Además, las herramientas que se habilitan en el software tienen que ver con aquello que se desea

discutir en la clase. Menciona también que la comunicación con *GeoGebra* tiene características específicas ya que en algunas ocasiones el software no toma por totalidad lo que se ofrece como información al seleccionar determinadas herramientas.

2.2.5 Respecto a la persuasión que brindan las representaciones de objetos geométricos en SGD

Larios y González González (2010) describen el potencial de los SGD en cuanto a la posibilidad que brindan de explorar situaciones geométricas posibilitando la identificación de propiedades invariantes y la generalización. Por otro lado, hacen referencia a Chazán (1993) para explicar el fenómeno que transforma la prueba en evidencia y la evidencia en prueba, teniendo en cuenta el valor de evidencia que proporcionan las imágenes dinámicas en SGD. Mencionan que se produce una falta de necesidad por parte de los estudiantes por elaborar justificaciones basadas en deducciones locales o demostraciones.

Los aportes de Sánchez y Samper (2017) corresponden al trabajo con geometría dinámica y a las posibilidades que brinda en cuanto a percibir y discernir más allá de conocer la definición de los objetos matemáticos. Mencionan que el hecho de conocer la definición de un objeto no garantiza que este se comprenda, ni que se tome conciencia de la necesidad de las propiedades que lo definen. Distinguen los procesos de percibir y discernir cuando se utiliza geometría dinámica. Desde un punto de vista cognitivo, una representación gráfica se puede percibir o también se puede pensar a partir de ésta. Retoman los estudios de Leung, Baccaglini y Mariotti (2013) quienes afirman que la percepción se da directa e inmediatamente, sin esfuerzo. El pensamiento, por el contrario, es indirecto y no depende totalmente de la experiencia inmediata que tenga la persona con la representación gráfica. De esta manera, para que un estudiante pueda realizar una interpretación geométrica de las propiedades de los objetos

representados no basta la percepción. Debe asociarse a la misma un tipo de pensamiento que lo lleve a evocar aspectos conceptuales. Si esto ocurre, hay discernimiento. Asimismo, estudian situaciones en las que estudiantes que resuelven un problema en un SGD, construyen representaciones que les permiten percibir ciertas propiedades, y luego discernirlas, especialmente cuando experimentan la variación. El hecho de reconocer cuándo el estudiante discierne propiedades y relaciones geométricas al explorar una situación representada en un SGD permite identificar cómo desarrollan significados de determinados conceptos. Por esto resulta importante que se presenten tareas en el aula que promuevan el reconocimiento de lo que es necesario en una definición. Leung et al. (2013) en Sánchez y Samper (2017) sostienen que los estudiantes pueden discernir propiedades y relaciones entre objetos geométricos cuando trabajan en SGD involucrados en experiencias que se basan en contraste, separación, generalización y fusión.

Por otra parte, Itzcovich (2020) sostiene que las verdades a las que se arriba con el trabajo geométrico deberían surgir de las relaciones que se establecen a través de razonamientos deductivos. Los objetos geométricos tienen diferentes modos de representarse, mediante escrituras algebraicas, fórmulas y dibujos, entre otros. Las relaciones entre los objetos geométricos y sus representaciones constituyen una manera de comenzar el tratamiento con dichos objetos, por lo que resultan complejas. Los objetos geométricos suelen comenzar a tratarse a partir de los dibujos, lo que puede ocasionar que se considere que el dibujo es el objeto geométrico. Las diferencias entre el objeto geométrico y sus representaciones es un asunto clave, especialmente cuando se involucra *GeoGebra*. No todas las representaciones brindan lo mismo ni permiten tratar los mismos problemas, cada una posee determinados significados.

Mántica y Freyre (2018) destacan en su trabajo que la constatación empírica que los estudiantes realizan con las herramientas de *GeoGebra*

contribuye a que para ellos una respuesta en el dibujo signifique una respuesta en la teoría. En su estudio, la mayoría de los alumnos utilizan sólo constataciones empíricas con *GeoGebra* para validar conjeturas acerca de las propiedades de las diagonales del rectángulo. Las construcciones dinámicas proporcionan cierto valor de evidencia posibilitando que los estudiantes no se cuestionen a partir de propiedades geométricas lo que observan en las construcciones. Así, en algunas ocasiones, lo devuelto por el software es suficiente para justificar sus conjeturas.

Novembre et al. (2015) sostienen que el trabajo con *GeoGebra* favorece la distinción entre dibujo y figura. La figura se considera como un referente teórico y el dibujo es un representante particular de la misma. Así, es posible analizar qué propiedades corresponden a la figura y cuáles se agregan en un dibujo particular que representa a la misma. De acuerdo a las propiedades geométricas que se tengan en cuenta, el dibujo resiste o no el arrastre de objetos libres. Esto plantea diferencias con el trabajo tradicional con lápiz y papel, en el que “una tarea puede ser resuelta sin apelar a propiedades geométricas, con los alumnos situados en el plano del dibujo. Con *GeoGebra*, los alumnos no están haciendo un dibujo, sino comunicando su procedimiento de construcción a un programa” (p.37). Por otra parte, *GeoGebra* contribuye visualmente a la comprensión de conceptos, promueve el trabajo en interacción entre distintos marcos: numérico, geométrico y algebraico; y entre distintos registros de representación: gráfico, tabular y simbólico. También posibilita que se desplieguen nuevas estrategias de resolución o de control, como por ejemplo el protocolo de construcción, que permite revisar los pasos realizados.

Freyre y Mántica (2021) realizan una investigación con estudiantes de profesorado en matemática en la resolución de un problema de geometría utilizando *GeoGebra*. La consigna es construir un rombo de maneras distintas. El grupo de estudiantes que analizan construye un caso

particular de rombo y esto produce algunas dificultades para distinguir propiedades que son empleadas en las construcciones realizadas y propiedades que se pueden deducir de las mismas. Las propiedades que se ponen en juego provienen del cuadrado, caso particular construido. Durante una entrevista a los estudiantes, estos reflexionan acerca de la imposibilidad de generalizar desde un caso particular. Concluyen sobre la importancia del reconocimiento de propiedades geométricas como objeto de enseñanza, dado que no se garantiza solo con el reconocimiento visual de las imágenes asociadas que provee el software.

Por otra parte, Aya Corredor et al. (2016) recuperan la noción de concepto figural, citando a Fischbein (1993), para dar cuenta de la naturaleza dual de los objetos geométricos, que involucran aspectos tanto teóricos como figurales. Expresan que el proceso que se lleva a cabo mediado por la utilización de SGD, contribuye a que tanto aspectos figurales como conceptuales “se armonicen en un todo coherente, y que lo figural eventualmente quede subordinado a lo conceptual” (p.156). Para esto resulta primordial el rol del profesor, quien debe promover las acciones de construcción y de arrastre de los objetos, resaltando la naturaleza dinámica del software, ya que las propiedades que permanecen invariantes al efectuar arrastre constituyen las condiciones necesarias y suficientes en la definición del objeto. Asimismo, los autores reflexionan en torno a las representaciones prototípicas que realizan los estudiantes con los que trabajan en su investigación, relacionándolas con la dificultad de superar el predominio de los aspectos figurales. Agregan que la definición jerárquica y económica de cuadrado puede verse influenciada por la imagen conceptual que los estudiantes tienen de cuadrilátero, o rombo, que generalmente se asocian a representaciones prototípicas.

2.2.6 Respecto a la interacción con construcciones dinámicas

González López (2001) sostiene que al trabajar con SGD se cambia la naturaleza del conocimiento matemático con respecto al contexto de lápiz y papel. El conocimiento está centrado, en cambio, en el estudio de propiedades invariantes de las construcciones geométricas, que pueden ser observadas por el estudiante a través de la manipulación de las construcciones. Así, “El SGD interpreta las acciones del alumno, devolviéndole una información sobre su producción, información que el alumno puede utilizar a su vez para continuar progresando en la construcción de conocimientos” (p.280). La retroacción es una característica que hace evolucionar a los estudiantes ya que el sistema ofrece determinada información que pueden interpretar. El autor describe, de acuerdo a su experiencia, que a medida que los alumnos tienen mayor manejo técnico de las herramientas del software realizan con mayor soltura una actividad frenética de uso de comandos sin reflexionar sobre la información que el SGD brinda como consecuencias de sus acciones. Así, resulta común que ante una respuesta inesperada del SGD los alumnos comiencen la actividad nuevamente. El trabajo con SGD brinda a los estudiantes un medio para validar sus construcciones, a través de herramientas que les permiten reflexionar acerca de las decisiones tomadas.

El alumno recibe una transferencia de responsabilidad que tiene como objetivo que comprenda el alcance de sus decisiones en el contexto geométrico que se esté trabajando; queda así más claro que dichas decisiones son un apoyo a la construcción de conocimiento geométrico y no un aprendizaje técnico de uso de unos botones de un software. (González López, 2001, p.287)

De esta manera, al utilizar un SGD, la comunicación se basa en la visualización dinámica. Resulta fundamental que se relacione cierta

información geométrica con la que se observa en un dibujo dinámico que a partir de distintos desplazamientos genera nuevos dibujos que cumplen con las propiedades geométricas iniciales.

En relación con las actividades de copiado de figuras, Itzcovich (2020) expresa que pueden ayudar a los estudiantes a caracterizar a las figuras ya que implican que se interroga a los dibujos haciéndoles preguntas para identificar características en los mismos que se reproduzcan en la copia. Expresa la importancia de extraer información de la figura original de diferentes maneras. Por otra parte, son los conocimientos disponibles de cada alumno los que comandan la identificación e interpretación de esa información y permiten que se individualicen ciertas relaciones presentes en la figura. La información que devuelve *GeoGebra*, a partir de una actividad intencional que promueva la discusión entre las decisiones que se toman y lo que ocurre con el software, permite que se continúe pensando en dichas relaciones. *GeoGebra* posibilita representar a los objetos geométricos de manera diferente a la tradicional con lápiz y papel, obteniendo, por lo tanto, aportes distintos. Las propiedades de los objetos geométricos permanecen invariantes, lo que cambia es el modo de acceder a las relaciones que los caracterizan.

También se destacan los aportes de Arcavi y Hadas (2000), quienes describen características de ambientes computarizados dinámicos: visualización, experimentación, sorpresa, retroalimentación y necesidad de pruebas y demostraciones. Estos aspectos tienen el potencial de favorecer la actividad matemática. La retroalimentación que ofrece el software es externa a los estudiantes. Les permite revisar sus predicciones, realizar verificaciones y motivar la necesidad de demostrar. De esta manera, posee características distintas a las correcciones que puede realizar un docente al carecer de juicio de valor, lo que lo hace más efectivo. Cuando se genera una desigualdad entre la expectativa y el resultado de una acción se provoca una

sorpresa. Las tareas que generan sorpresas colaboran para que los estudiantes comprendan la necesidad de justificación. Se establece así un ciclo de experimentación-retroalimentación-reflexión que el ambiente dinámico propicia.

Por otra parte, Laborde (1998) afirma que trabajar con un entorno dinámico posibilita que se originen situaciones que den sentido a la noción de figura geométrica poniendo en juego un dibujo que puede ser interpretado como un representante de un objeto con ayuda de cierto análisis geométrico propiciado en la resolución de un problema. Si se realizan acciones en el software, se obtienen retroacciones de dicho medio. Estas retroacciones pueden ser solicitadas por el estudiante “que decide entregarse a algunas acciones cuya sanción por el medio proporcionará elementos de información sobre su producción” (p.40). Es el entorno informático quien, de esta manera, proporciona un modo de experimentación en el modelo a través del uso de primitivas geométricas y el desplazamiento. El sujeto puede experimentar basándose en ciertos cálculos de inferencias. “Por ejemplo, para verificar que ha construido bien un rombo, puede trazar la mediatriz de una diagonal y verificar la coincidencia de esta mediatriz con la otra diagonal en el transcurso del desplazamiento” (p.40). Por otra parte, si se analiza una construcción realizada en entorno dinámico con el objetivo de identificar dependencias geométricas entre propiedades del objeto geométrico, se puede experimentar suprimiendo ciertas relaciones geométricas entre elementos y verificando si las relaciones que se suponen dependientes siguen o no cumpliéndose. Así, los aspectos perceptivos focalizan la atención en elementos del dibujo no pertinentes para la lectura geométrica.,

Incluso un mismo dibujo geométrico se puede interpretar de múltiples formas y, en particular, la percepción interviene en la construcción de una interpretación siempre y cuando el lector no tenga sólidos

conocimientos teóricos geométricos que le permitan ir más allá de la primera lectura perceptiva (Laborde, 1998, p.34).

Las influencias perceptivas y culturales, no sólo en sentido escolar, han generado que se formen ciertos dibujos prototipo de objetos geométricos. Para que se eliminen las ambigüedades que son inherentes al dibujo es necesario que se dé una descripción discursiva que logre caracterizar al objeto geométrico (Duval, 1988, Parzysz, 1988, en Laborde, 1998).

Considerando los aportes de Healy (2000) se destaca que, en el contexto de SGD, resulta interesante investigar relaciones entre las propiedades de una figura organizándolas en términos de propiedades dadas y de aquellas que se pueden deducir de la construcción. Este paso es importante para el proceso de prueba, aunque no es suficiente. Los objetos construidos con el software necesitan ser manipulados de manera que se puedan identificar esas propiedades, clarificar las transformaciones y los pasos intermedios por los cuales esas propiedades pueden ser inferidas de aquellas establecidas por los estudiantes como las dadas. Cabe mencionar que el software tiene un rol fundamental en ambos procesos, ya que asiste en la formulación y validación de conjeturas y ofrece diferentes métodos a partir de los cuales los pasos de la prueba se pueden hacer más visibles. Es importante que los estudiantes empleen las herramientas de construcción de Cabri para manipular y verificar relaciones geométricas, recibiendo retroalimentación de la computadora acerca de sus actividades, lo que podría ayudar hacia la prueba de las conjeturas formuladas sobre propiedades. La experiencia que describe corresponde a dos pares de alumnos de catorce y quince años que trabajan en criterios de congruencia. Luego se les proponen pruebas formales correctas e incorrectas para discutir usando propiedades conocidas, aunque no demostradas. Se les solicita a los estudiantes que mencionen los procedimientos de construcción y que hagan una lista con las propiedades dadas consideradas en sus

construcciones y una lista con las propiedades deducidas de las mismas. Con respecto al proceso de construcción de una prueba de geometría, afirma que es un proceso complejo en cuanto implica no solo una apreciación de que ciertos hechos geométricos emergen como consecuencia de ciertos otros sino también la organización de una secuencia coherente de transformaciones por la cual el segundo conjunto de propiedades se puede inferir del primero. Si la forma deductiva-axiomática se introduce a los estudiantes sin conexión a referencias empíricas, la prueba será vista como un ritual inaccesible que implica solo memorización y reproducción. Por otro lado, si se retrasa la atención al razonamiento deductivo y se introducen pruebas en el contexto de la experimentación empírica, los estudiantes parecen entender mejor lo que se requiere de una prueba, aunque no puedan construir una (Healy y Hoyles, 1998 en Healy, 2000). Una tercera alternativa es buscar contextos de aprendizaje que ayuden a los estudiantes a cambiar naturalmente entre aspectos deductivos e inductivos. En estos contextos tiene sentido formular declaraciones y definiciones mediante procedimientos de deducción acordados sin cortar ninguna conexión con la justificación empírica.

2.2.7 Respecto a interacciones entre estudiantes con SGD

En cuanto a las interacciones de los estudiantes en los procesos de prueba cuando trabajan con SGD, Teasley y Roschelle (1993) en Olivero (2003) afirman que cuando dos estudiantes trabajan juntos hacen continuamente un esfuerzo por coordinar su lenguaje y actividad para construir un problema del espacio compartido. Así, no se da por sentado que se comunican automáticamente y realmente "trabajan juntos". Boero (1995) en Olivero (2003) introduce el concepto de campo de experiencia. Menciona un sistema de tres componentes evolutivos: contexto interno, contexto externo y contexto interno del docente. El contexto interno es lo que pasa en la mente de los estudiantes. El externo es lo que es producido y visible, tales como oraciones y figuras con SGD. Cuando dos estudiantes

resuelven juntos un problema en la computadora, cada uno le cuenta al otro su propia historia, pero al mismo tiempo las dos historias necesitan intersectarse dado que solo tienen disponible una computadora. De esta manera, comienzan desde un estado de asincronía, y durante el proceso hay una continua retroalimentación del contexto externo a las acciones de los estudiantes y modificación de sus contextos internos. Así, ellos ven ciertos aspectos en el software y los relacionan con su contexto interno, observando diferentes cuestiones en la misma figura. Es interactuando con las intenciones y el contexto interno del otro que se puede alcanzar un punto en el que las proyecciones de los dos contextos internos se intersecten. El entorno dinámico y la interacción con el otro estudiante modifican el contexto interno de cada uno. Si la intersección mencionada se da, se desarrollan momentos de construcción conjunta de conocimiento y entendimiento que posibilitan la producción de conjeturas y pruebas, aunque estos momentos de sincronización no coincidan necesariamente con el desarrollo de proposiciones formuladas lógicamente. Pareciera que si hay tal sincronía cada uno de los estudiantes se entiende perfectamente con el otro a través del espacio externo (principalmente el SGD) sin necesidad de desarrollar un lenguaje lógico formal. Las cosas pueden ser vistas y entendidas en el software sin necesidad de explicaciones lógicas, volviéndose parte éste de las interacciones de los estudiantes.

Al respecto de la comunicación, Novembre et al. (2015) afirman que es importante que se generen instancias de trabajo colectivo en las que se transmitan procedimientos de construcción. Es así que los alumnos comparten sus producciones y las comparan. Una vez realizadas las construcciones se pueden cotejar estrategias al registrar cómo fueron resueltas. Citan a Mariotti (2002) quien sostiene que la escritura se considera a primera vista como una forma de mejorar la expresión oral, teniendo en cuenta que aquello que se dice puede ser registrado. Es así como una vez escrito se puede decir todas las veces que sea necesario. Sin

embargo, es limitado y engañoso el hecho de considerar a la escritura solo como una simulación de la expresión oral, dado que la primera introduce transformaciones en la manera de pensar. De esta manera, “La validación de la construcción estará dada, por un lado, porque se mantenga la figura a través de desplazamientos. Por el otro, podrá explicarse a través del relato de la construcción realizada y las propiedades puestas en juego” (p.47). Los alumnos, al comunicar las estrategias, utilizan lenguaje específico con cierta precisión. Así, se transforma en un recurso necesario para lograr la comprensión. Para saber si una construcción es correcta no basta con observar, sino que es necesario recurrir a propiedades. La validación de la construcción implica que se salga del programa y se elabore una explicación. “La discusión acerca de las distintas estrategias de construcción permite explicitar las propiedades que se tienen en cuenta en cada caso –y las que no-.” (p.49). Así, resulta importante que se propicien espacios donde cada grupo de alumnos comparta las propiedades que puso en juego para realizar construcciones y explique por qué cree que se obtienen ciertas figuras. El trabajo con *GeoGebra* permite que progresivamente los estudiantes den explicaciones basadas más en cuestiones matemáticas que en observables, mientras se persiga este aspecto como objetivo de enseñanza.

Capítulo 3

Marco metodológico

3.1 Enfoque de la investigación

Teniendo en cuenta la clasificación que realizan McMillan y Schumacher (2005) de las investigaciones, la presente es cualitativa interactiva, ya que "consiste en un estudio en profundidad mediante el empleo de técnicas cara a cara para recoger los datos de la gente en sus escenarios naturales" (p.44). Así, se describe el contexto del estudio y las perspectivas de los informantes. Constituye una investigación aplicada ya que "se centra en un campo de práctica habitual y se preocupa por el desarrollo y la aplicación del conocimiento obtenido en la investigación sobre dicha práctica" (p.23). Se pretende en este estudio realizar un análisis cualitativo de los datos que tiene como propósitos comprender el contexto y describir las experiencias de los sujetos de estudio relacionando dicho análisis con la orientación teórica de la investigación.

3.2 Contexto de la investigación

Los sujetos de estudio de la investigación son estudiantes que cursan la asignatura Didáctica de la Matemática del Profesorado en Matemática de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), durante el año 2019. La elección de los sujetos se da considerando el acceso que se tiene a dicha cátedra. Los estudiantes tienen aprobadas tres asignaturas referidas a geometría en las que se trabaja especialmente con *GeoGebra* en las vistas gráfica y algebraica con diversas herramientas y haciendo uso del arrastre de objetos libres como característica relacionada al dinamismo en el software, en la formulación y validación de conjeturas.

3.3 El instrumento principal para la producción de datos

En las investigaciones cualitativas, es el investigador quien se encarga de obtener y analizar datos de distintos tipos, a partir de uno o varios instrumentos. Los datos pueden ser lenguaje escrito, verbal o no verbal, conductas observables e imágenes (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2006). En esta investigación, un problema de geometría constituye el instrumento principal para la producción de los datos.

3.3.1 La génesis del instrumento

El problema presentado surge como fruto del análisis de una investigación previa referida a la resolución de un problema en el que se trabaja con propiedades empleadas y deducidas de construcciones de un rombo¹. Teniendo en cuenta los resultados de la resolución de dicho problema por parte de los estudiantes, se considera propicio enfocar especialmente el análisis en la presente investigación en las propiedades empleadas que los estudiantes identifican en construcciones. Asimismo, se decide solicitar la construcción de un rectángulo de tres maneras distintas ya que se espera que los estudiantes desplieguen variedad de procedimientos de construcción, recurriendo al uso de distintas herramientas en *GeoGebra*. Además, el análisis que se realiza de acuerdo a los objetivos de la investigación no requiere de la elaboración de construcciones complejas, ya que el foco no está puesto en la construcción de un contenido matemático sino en las relaciones entre definición, propiedades empleadas y construcciones dinámicas. El enunciado del problema para el presente trabajo se formula teniendo en cuenta estos aspectos.

¹ Parte de dicho estudio puede encontrarse en Freyre y Mántica (2021)

3.3.2 El instrumento utilizado

El problema que se presenta es:

- a) Construyan con *GeoGebra* de tres maneras distintas un rectángulo.
- b) En cada caso expliciten las propiedades empleadas en la construcción.
- c) Escriban la definición de rectángulo que utilizaron para construir.

Tabla 1: Problema presentado

Se propone que sea resuelto en grupos de dos estudiantes. Esta decisión se fundamenta en que, como afirma Olivero (2003), el hecho de que dos estudiantes trabajen juntos implica que coordinen lenguaje y actividad de manera tal que construyan un problema del espacio compartido. Teniendo en cuenta que la interacción con otro estudiante y la utilización del entorno dinámico modifican el contexto interno de cada estudiante, se pretende que el software se vuelva parte de las interacciones. Por otra parte, los aportes de Itzcovich (2005) también resaltan la importancia de las interacciones entre alumnos y con el docente, que relacionen conocimientos y características de las construcciones.

3.4 Estrategias de recogida de datos

Según McMillan y Schumacher (2005), “Las estrategias son técnicas que sirven para recoger muestras y datos que son perfeccionadas constantemente durante todo el proceso de la adquisición de datos para aumentar la validez de éstos” (p.441).

Se recogen las producciones de las estudiantes en la resolución del problema, lo que constituye el método de recolección de datos principal en este estudio (Gutiérrez, 2005). En este trabajo se analizan las producciones de dos grupos. El grupo A, que está formado por las estudiantes M y S, y el grupo B, formado por las estudiantes J y C.

Gutiérrez (2005) sostiene que para realizar un análisis en detalle del proceso de resolución de un problema con SGD,

el investigador debe tener información lo más completa posible sobre la interacción de los estudiantes con el ordenador, pues las claves para entender qué han hecho los estudiantes y por qué lo han hecho, en qué estaban pensando, cuándo y por qué han tomado una decisión, etc. casi nunca están en el resultado (archivo o texto en papel), sino en el proceso. (p.28)

Por esta razón, se deciden realizar observaciones y generar grabaciones de audio y video de la resolución del problema por parte de los estudiantes.

Por otra parte, se realizan entrevistas semiestructuradas a los grupos en una etapa posterior a la resolución del problema, que son grabadas en video.

Una fuente valiosa de datos cualitativos son distintos documentos, materiales y artefactos. En este caso, se cuenta con elementos elaborados por los estudiantes que les son solicitados a propósito del estudio (Hernández Sampieri et al., 2006). Estos datos provienen de los archivos digitales (de texto y de *GeoGebra*), que son artefactos producidos por los estudiantes en la resolución del problema. Asimismo, se cuenta con las grabaciones de audio y video de la resolución del problema y los videos generados en las entrevistas. El análisis de artefactos constituye otra estrategia de recogida de datos en esta investigación (McMillan y Schumacher, 2005).

Se describen a continuación las estrategias consideradas para la recogida de datos: las observaciones, las entrevistas y los artefactos para el análisis (los archivos digitales y las grabaciones de audio y video).

3.4.1 Las observaciones

Con respecto a los datos cualitativos, Hernández Sampieri et al. (2006) sostienen que en general consisten “en la descripción profunda y completa (lo más que sea posible) de eventos, situaciones, imágenes mentales, interacciones, percepciones, experiencias, actitudes, creencias, emociones, pensamientos y conductas reservadas de las personas, ya sea de manera individual, grupal o colectiva” (p.451).

Dentro de las observaciones, se toman notas de las acciones que describen lo que ocurre. "Las observaciones de campo cualitativas son descripciones detalladas de sucesos, personajes, acciones y objetos en escenarios" (McMillan y Schumacher, 2005, p.51).

3.4.2 Las entrevistas

Considerando la flexibilidad de la entrevista cualitativa (Hernández Sampieri et al., 2006), se decide llevar a cabo entrevistas semiestructuradas a los estudiantes, posteriormente a la resolución del problema, para indagar acerca de los procedimientos llevados a cabo.

La situación de pandemia que se atraviesa en 2020 imposibilita la realización de las entrevistas de manera presencial, por lo que se decide que se efectúen de manera virtual y se graben a través de la plataforma Zoom, utilizando la licencia adquirida por la Secretaría de Investigación de la Facultad de Humanidades y Ciencias (UNL).

Se realiza una entrevista a cada grupo de estudiantes con una duración aproximada de noventa minutos. Cada entrevista es llevada a cabo por dos personas, en un caso la autora y la directora de la tesis y en otro, la autora y la codirectora. En cada entrevista realizada se identifican dos etapas: análisis de las construcciones del otro grupo y análisis y comparación de definiciones de rectángulo.

3.4.3 Los archivos digitales

En la resolución del problema, los estudiantes realizan construcciones en *GeoGebra*² y registran las propiedades empleadas y la definición de rectángulo considerada en un editor de texto. Los archivos de *GeoGebra* permiten analizar ciertas características de las construcciones, tales como la posición en la que se encuentran las figuras elaboradas por los estudiantes. También permiten identificar, a partir de la función protocolo de construcción, qué herramientas son utilizadas y en qué orden. Asimismo, los archivos de texto permiten analizar otra parte de las producciones. Por un lado, posibilitan conocer de qué manera escriben los estudiantes las propiedades que consideran empleadas en cada construcción. Por otro lado, en los archivos de texto quedan plasmadas las definiciones de rectángulo que se consideran en cada grupo.

3.4.4 Las grabaciones de audio y video

Los archivos de audio y video de la resolución del problema son creados a partir de grabadores de pantalla y de voz. Así, es posible plasmar las acciones y el diálogo correspondiente al trabajo en grupos durante la resolución de la actividad. Cabe señalar que el protocolo de construcción de *GeoGebra* no registra las construcciones de objetos que luego son borrados ni las acciones de desplazamiento o arrastre que se realizan sobre objetos libres. Por estos motivos, la grabación de la pantalla en video actúa como un complemento al protocolo, que permite conocer, entre otros aspectos, todas las herramientas que son empleadas y todas las acciones de desplazamiento o arrastre de objetos que hayan sido ejecutadas por los estudiantes.

Por otra parte, se cuenta con videos de las entrevistas. Estos son generados a partir de la misma plataforma de videoconferencia utilizada.

² El grupo A trabaja con la versión de *GeoGebra* 3.2.0.0 y el grupo B con *GeoGebra* Clásico.

Representan un insumo para analizar las interacciones que se dan durante el desarrollo de la entrevista, relacionándolas particularmente con lo que se presenta en pantalla y las acciones que se realizan con el software en cada momento.

A partir de las grabaciones mencionadas, se obtienen los diálogos desarrollados durante la resolución del problema y en las entrevistas.

3.5 Procesamiento de la información

3.5.1 Estructuración de artefactos para el análisis

En esta etapa se estructura el material que sirve de insumo para el análisis.

Elaboración de un archivo unificado de las producciones de cada grupo

Se elabora un archivo de texto unificado con las producciones de cada grupo. Este archivo contiene una imagen de cada construcción realizada, su respectivo protocolo de construcción y una copia textual de las propiedades empleadas y la definición presentada.

Elaboración de archivos con las transcripciones de las grabaciones de audio y video y notas de las observaciones

Teniendo en cuenta el video generado por el grabador de pantalla y el archivo de audio que actúa como complemento ante incertidumbres que pueden generarse, se transcribe el audio de la resolución del problema por parte de cada grupo. A partir de los datos que provee el video y las notas de las observaciones realizadas se complementa el texto con acotaciones que dan mayores detalles sobre lo que acontece durante la resolución del problema. Estas aclaraciones se identifican dentro del texto entre corchetes. Además, se elabora una tabla que distingue y numera las interacciones llevadas a cabo durante la resolución del problema con la inicial de cada estudiante (Anexo 1).

Con respecto a las entrevistas, se transcribe el audio de cada una de ellas que se encuentra en el video generado por la plataforma de videoconferencias. Las intervenciones se organizan en una tabla distinguiendo al estudiante que las realiza con la inicial de su nombre. Pueden encontrarse además las denominaciones E, E1 y E2 para referirse a las intervenciones de investigadora, directora y codirectora. Las aclaraciones elaboradas posteriormente a la realización de las entrevistas se encuentran entre corchetes. También se capturan imágenes de los videos de las entrevistas, lo que posibilita que se tenga más claridad sobre su desarrollo (Anexo 2).

3.5.2 Primeras miradas y reflexiones

En esta etapa se realiza un primer acercamiento a lo realizado por las estudiantes en la resolución del problema y en el desarrollo de las entrevistas. Esto permite recuperar, resignificar y enriquecer aspectos del marco de referencia en virtud de los objetivos de la investigación.

Sobre construcciones realizadas

Se recurre a los archivos unificados de producciones de cada grupo, para identificar tipos de construcciones y herramientas utilizadas. También se recurre a las transcripciones que corresponden a la resolución del problema, particularmente a las interacciones que se refieren a la elaboración de las construcciones.

Sobre definiciones de rectángulo

Se acude a los archivos unificados de producciones de cada grupo. También se consultan las transcripciones correspondientes a la resolución del problema, especialmente aquellas relacionadas con la determinación de la definición empleada.

Sobre propiedades empleadas en las construcciones

Se consultan los archivos unificados de producciones de cada grupo, además de las interacciones de la resolución del problema que corresponden a la identificación de propiedades empleadas en las construcciones.

Sobre identificación de herramientas, propiedades empleadas y características de las definiciones en la entrevista

Se consideran las transcripciones de las entrevistas de cada grupo, especialmente aquellas que corresponden a cada uno de estos aspectos.

3.5.3 Análisis y conclusiones

En esta etapa se consultan las reflexiones elaboradas en la etapa anterior, para la producción de nuevos análisis y conclusiones en torno a los objetivos planteados para la investigación. Así, se analizan especialmente las relaciones entre herramientas de *GeoGebra* y propiedades empleadas en las construcciones y definiciones que se dan por parte de los estudiantes durante la resolución del problema y en el desarrollo de la entrevista.

Capítulo 4

Análisis de construcciones de rectángulo con GeoGebra e identificación de definiciones y propiedades

4.1 Miradas a la resolución del problema

4.1.1 Producción de construcciones e identificación de propiedades empleadas en las mismas

En este apartado se presentan la descripción y un primer análisis de las producciones de cada grupo en relación a la elaboración de las construcciones y a la identificación y formulación de propiedades empleadas en cada una, en las consignas a) y b) del problema dado.

Se presentan para cada grupo: elementos descriptivos de las construcciones, análisis del proceso de elaboración de las construcciones y análisis del proceso de identificación de propiedades empleadas por parte de las estudiantes. A continuación, se describe con detalle cuál es el contenido de cada una de estas secciones.

Elementos descriptivos de las construcciones

Se presentan como elementos descriptivos de cada construcción dos imágenes y una descripción. Una de las imágenes ilustra la construcción tal como es entregada por los estudiantes y la otra muestra el Protocolo de Construcción (PC) de *GeoGebra* correspondiente (capturada del archivo entregado por cada grupo). La descripción desarrolla específicamente los pasos realizados en la construcción, con la intención de esclarecer la imagen del PC.

La imagen del PC que se expone muestra las columnas Número, Nombre, Ícono de la barra de herramientas, Descripción y Valor. En la columna Número se puede encontrar un número que corresponde al orden en que se utilizó cada herramienta. En la columna Nombre se exponen los

objetos relacionados con la aplicación de cada herramienta, con su respectivo nombre (por ejemplo, Punto A). La columna Ícono de la barra de herramientas muestra una imagen del ícono correspondiente a cada herramienta utilizada. En Descripción se puede encontrar una caracterización del objeto correspondiente (por ejemplo, recta paralela a eje X por A). De acuerdo al tipo de objeto, la columna Valor detalla algunas características de los mismos. Si se trata de un punto, muestra sus coordenadas cartesianas (por ejemplo, (1,08; 2,36)). En el caso de tratarse de una recta o circunferencia, se muestran sus ecuaciones (por ejemplo, b: $2x-3y=3$). En el caso de un segmento se puede encontrar en dicha columna su longitud, (por ejemplo, $d=3,14$) y en el caso de tratarse de un polígono, su área (por ejemplo, polígono 1= $5,11$). Si se trata de un ángulo, esta columna muestra su amplitud (por ejemplo, $\alpha = 90^\circ$). Ferragina y Lupinacci (2012) mencionan las características del PC, que se puede activar desde la opción vista del menú y brinda una descripción de los pasos de construcción llevados a cabo. “Permite volver a ejecutar una construcción paso a paso usando la barra de navegación que aparece al pie de la pantalla y también intercalar pasos de construcción y modificar su secuencia” (p.76). Por otra parte, destacan que la información se puede observar en una tabla que tiene un nivel de detalle que se elige en la ventana donde se encuentra el protocolo. Vale aclarar, que en el caso de la versión de *GeoGebra*³ utilizada por la investigadora en el presente estudio, las columnas de información que aparecen por defecto son Número, Nombre, Descripción, Valor y Rótulo. Sin embargo, en la opción Columnas se puede configurar de manera tal que se visualicen otras columnas de información.

Análisis del proceso de elaboración de las construcciones

Se presenta un análisis relacionado con el proceso de elaboración de cada construcción y algunas características de las mismas. Para este

³ *GeoGebra Classic 5*

análisis se consideran datos del trabajo de cada grupo (diálogos y resoluciones en la pantalla) en relación a la elaboración de las construcciones.

Estos aspectos posibilitan que se estudie en profundidad cada construcción, cuestión que resulta esencial para el análisis de los procesos de identificación y formulación de propiedades, teniendo en cuenta la estrecha relación entre las herramientas seleccionadas en los procedimientos y las propiedades geométricas empleadas.

Análisis del proceso de identificación de propiedades empleadas por parte de las estudiantes

Se exponen en primer lugar las propiedades tomadas de manera textual del trabajo que presenta cada grupo. Luego, se presenta un análisis que tiene en cuenta los diálogos del trabajo en grupo y las acciones que realizan en la pantalla, en relación a la identificación de propiedades.

Grupo A

Este grupo está formado por las estudiantes M y S. Estas realizan cada una de las tres construcciones en un archivo distinto de *GeoGebra*. Además, en un archivo de texto presentan escritas las consignas b) y c).

Respecto a la construcción 1

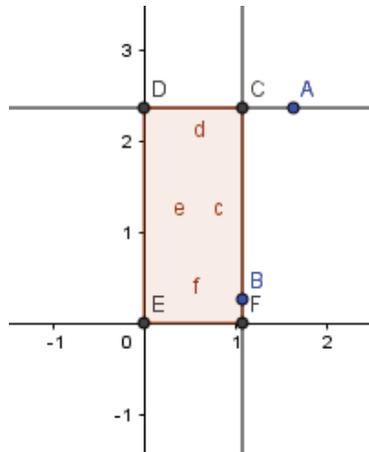


Figura 1: Construcción 1 del grupo A

Nº	Nombre	Icono de la Barra de H...	Descripción	Valor
1	Punto A			$A = (1.64, 2.36)$
2	Recta a		Recta paralela a EjeX por A	$a: y = 2.36$
3	Punto B			$B = (1.08, 0.26)$
4	Recta b		Recta paralela a EjeY por B	$b: x = 1.08$
5	Punto C		Intersección de a, b	$C = (1.08, 2.36)$
6	Punto D		Intersección de a, EjeY	$D = (0, 2.36)$
7	Punto E		Intersección de EjeX, EjeY	$E = (0, 0)$
8	Punto F		Intersección de b, EjeX	$F = (1.08, 0)$
9	Cuadrilátero polígono1		Polígono D, C, F, E	$\text{polígono1} = 2.55$

Figura 2 : PC 1 del grupo A

En esta construcción se trazan dos rectas paralelas a los ejes x e y (a y b respectivamente). Se marca el punto C de intersección entre ellas, los puntos de intersección D y F de las rectas a y b con los ejes y y x

respectivamente y se nombra el origen de coordenadas como punto E. Finalmente, se determina el rectángulo CDEF.

Las estudiantes comienzan escribiendo en el archivo de texto: “Primera forma de construir un rectángulo. Se utilizaron las propiedades de”. Luego, en *GeoGebra* comienzan a realizar la primera construcción. En ese momento, se desarrollan las siguientes intervenciones (Tabla 2):

1	M	De que tomando como referencia los ejes, sabiendo que ese ángulo es recto ponele, y...
2	S	Claro, y se buscan dos paralelas a los ejes... Vos sabés que los ángulos interiores de un rectángulo son rectos y que los lados son paralelos

[Construyen trazando paralelas a los ejes y completan las propiedades]

Tabla 2 : Fragmento de diálogo del grupo A (Anexo 1-A)

Puede observarse que los pasos de construcción que este grupo elige llevar a cabo parecen estar influenciados por los ejes cartesianos que muestra el software en su vista gráfica. Cabe destacar que, si bien es posible establecer distintas configuraciones en el SGD, por defecto cuando se abre la vista gráfica se observan los ejes cartesianos. Esta particularidad de *GeoGebra* contribuye a que se trabaje relacionando distintas representaciones, en este caso referidas a la geometría sintética y analítica.

Las estudiantes en este caso utilizan los ejes para establecer relaciones de paralelismo apoyadas en ellos. Por esta razón, los ejes actúan como un elemento de comando en la construcción.

En cuanto a las propiedades empleadas, las estudiantes presentan el texto de la Tabla 3.

Se utilizaron las propiedades de un rectángulo tiene dos pares de lados opuestos paralelos y sus ángulos interiores miden un recto.

Tabla 3: Propiedades empleadas, expresadas por las estudiantes

Puede decirse en primer lugar que las propiedades que mencionan las estudiantes son empleadas en la construcción. Así, si se relacionan con las herramientas de *GeoGebra* utilizadas, se puede afirmar que las rectas que trazan paralelas a los ejes aseguran el paralelismo de lados opuestos. Asimismo, la perpendicularidad de los ejes asegura que los ángulos interiores son rectos. De esta manera, el hecho de trazar una paralela a cada eje permite aplicar la propiedad de que, en un plano, una recta perpendicular a otra es perpendicular a todas sus paralelas, por lo que no sólo el ángulo interior cuyo vértice es el origen de coordenadas es recto si no los tres restantes, aunque esto no es expresado por las estudiantes.

Tal como se describe anteriormente y según se observa en el video generado por el grabador de pantalla, esta construcción es realizada luego de escribir en el archivo de texto “Primera forma de construir un rectángulo. Se utilizan las propiedades de”. Esto puede evidenciar que la construcción se realiza considerando especialmente las propiedades empleadas en la misma. En las interacciones de las estudiantes mientras construyen se menciona que toman como referencia los ejes dado que el ángulo que forman entre sí es recto. También expresan que trazan dos paralelas a los ejes sabiendo que los ángulos interiores de un rectángulo son rectos y que los lados son paralelos. En este caso, puede decirse que trabajan con direcciones privilegiadas (horizontal y vertical), para construir los lados del rectángulo. Las estudiantes hacen referencia al ángulo recto que forman los ejes y se basan en ese dato para construir rectas paralelas y asegurarse ángulos interiores rectos en el cuadrilátero a construir.

Luego de finalizada la construcción, debaten acerca de las propiedades empleadas a través del diálogo de la Tabla 4.

3	S	La propiedad es que los lados son paralelos...
4	M	Los lados son paralelos, o que tienen dos pares de lados opuestos paralelos, y que la suma...
5	S	Como ya tenía el ángulo de 90...

[Vuelven a la construcción señalando el ángulo que forman los ejes cartesianos entre sí]

6	S	La propiedad es que la suma de sus ángulos, o que cada ángulo mide 90, porque todos van a medir lo mismo
---	---	--

Tabla 4: Fragmento de diálogo del grupo A (Anexo 1-A)

Luego de las intervenciones anteriores, escriben las propiedades que figuran en el texto que es entregado (Tabla 3).

Respecto a la construcción 2

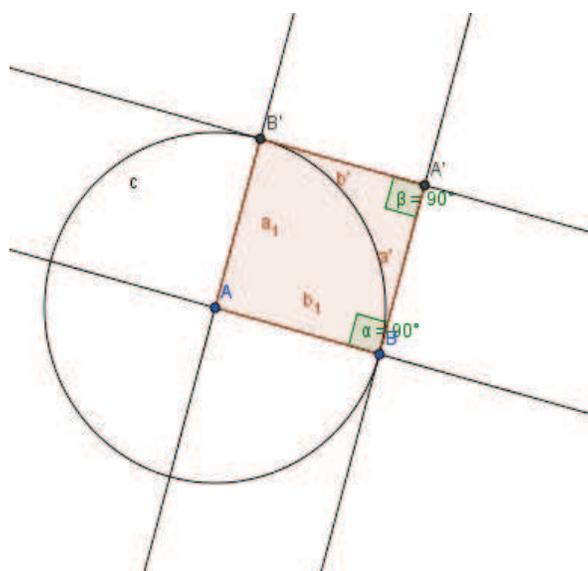


Figura 3: Construcción 2 del grupo A

En esta construcción se marca en primer lugar una circunferencia que tiene como centro el punto A y pasa por el punto B. Se traza la recta a que pasa por A y B y se utiliza la herramienta Ángulo dada su amplitud. Esta herramienta requiere que se determinen: un punto que pertenece a un lado del ángulo que se quiere generar, su vértice, la amplitud en grados y el sentido (horario ó antihorario). De esta manera, al emplear dicha herramienta, el software realiza una rotación del punto que pertenece a un lado del ángulo con respecto al vértice determinado, de un ángulo con la amplitud ingresada y en el sentido considerado. En este caso, realiza una rotación del punto A con centro en B, 270° en sentido antihorario. Esta

acción genera el punto A' . A continuación, se marca la recta BA' y se vuelve a utilizar la herramienta Ángulo dada su amplitud, de manera tal que se realiza una rotación del punto B con centro en A' , 270° en sentido antihorario. Se marcan las rectas d y e que pasan por $B'A'$ y $B'A$ respectivamente. Por último, se determina el rectángulo $B'A'BA$ con la herramienta Polígono.

Nº	Nombre	Icono de la B...	Descripción	Definición	Valor
1	Punto A				$A = (1.28, 1.74)$
2	Punto B				$B = (3.46, 1.14)$
3	Circunferencia c		Circunferencia que pasa por B con centro A	Circunferencia(A, B)	$c: (x - 1.28)^2 + (y - 1.74)^2 = 5.11$
4	Recta a		Recta A B	Recta(A, B)	$a: 0.6x + 2.18y = 4.56$
5	Punto A'		A rotado por el ángulo 270°	Rota(A, 270° , B)	$A' = (4.06, 3.32)$
6	Ángulo α		Ángulo entre A', B, A	Ángulo(A', B, A)	$\alpha = 90^\circ$
7	Recta b		Recta B A'	Recta(B, A')	$b: -2.18x + 0.6y = -6.86$
8	Punto B'		B rotado por el ángulo 270°	Rota(B, 270° , A')	$B' = (1.88, 3.92)$
9	Ángulo β		Ángulo entre B', A', B	Ángulo(B', A', B)	$\beta = 90^\circ$
10	Recta d		Recta B' A'	Recta(B', A')	$d: 0.6x + 2.18y = 9.67$
11	Recta e		Recta B' A	Recta(B', A)	$e: 2.18x - 0.6y = 1.75$
12	Cuadrilátero polígono1		Polígono B', A', B, A	Polígono(B', A', B, A)	polígono1 = 5.11

Figura 4: PC 2 del grupo A

Las estudiantes realizan la construcción 2 luego de haber identificado las propiedades empleadas en la primera. La estudiante M manifiesta desde el primer momento la intención de construir un cuadrado como caso particular de rectángulo. Comienzan la construcción con los ejes activos en la vista gráfica. Luego de graficar una circunferencia los desactivan para continuar la construcción. Se desarrolla el siguiente diálogo (Tabla 5):

8	M	A partir de una circunferencia, un cuadrado y el cuadrado es un rectángulo
9	S	Pero también, o sea nosotros decimos que una circunferencia, también tenés que buscar las paralelas para la intersección

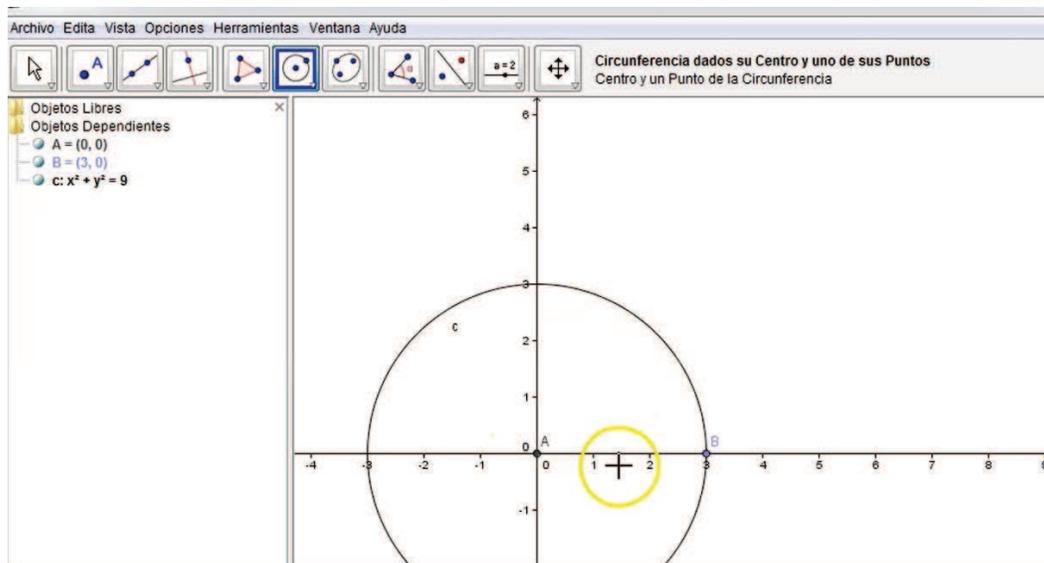


Figura 5: Inicio de la construcción 2

[Construyen una circunferencia de centro el origen de coordenadas que pasa por un punto B, sobre el eje x] [Al referirse a las paralelas, la estudiante S mueve el cursor en dirección a rectas paralelas a los ejes]

Tabla 5: Fragmento de diálogo del grupo A (Anexo 1-A)

Se puede observar que comienzan a trabajar con los ejes cartesianos activos y luego, por sugerencia de la estudiante M, deciden ocultarlos. Esto evidencia, por un lado, que conocen la posibilidad de activar y desactivar los ejes en *GeoGebra*. Por otro lado, los ejes son utilizados por este grupo en la construcción 1. Sin embargo, deciden no apoyarse en los mismos en la realización de la construcción 2, en la que los ocultan. Cabe señalar que comienzan a realizar una construcción con los ejes activos trazando una circunferencia. Esta primera construcción parece indicar que el rectángulo que pretenden construir posee un ángulo interior recto formado por una recta horizontal y otra vertical, recurriendo a direcciones privilegiadas, tal como el que generan en la construcción 1. No obstante, deciden borrar la circunferencia. De esta manera, los ejes cartesianos que ofrece el software podrían influenciar a la construcción de rectángulos en posiciones prototípicas. En la construcción de rectángulo cuadrado que finalmente

realizan luego de borrar la circunferencia y de ocultar los ejes, los lados del cuadrado no están incluidos en rectas horizontales y verticales.

Finalizada la construcción, una de las estudiantes se refiere a que el cuadrado se sigue manteniendo luego del desplazamiento de puntos libres. A continuación de decir la siguiente frase (Tabla 6), genera a través del desplazamiento distintas posiciones del cuadrado.

29	M	Y, ponete que ahora nosotros movemos algo, el cuadrado se sigue manteniendo [<i>Desplaza para encontrar distintas posiciones del cuadrado</i>]
----	---	--

Tabla 6: Fragmento de diálogo del grupo A (Anexo 1-A)

De esta manera, se evidencia que la estudiante M valida la construcción a través del desplazamiento del punto libre A. En este caso, el recurso del desplazamiento o arrastre se convierte, a través de la visualización dinámica, en un medio para la reflexión por parte de los estudiantes acerca de las decisiones tomadas durante la elaboración de la construcción.

La alumna M manifiesta intención de construir un caso particular de rectángulo desde el primer momento. Puede decirse que emplea una clasificación jerárquica y, al considerar que un cuadrado es un rectángulo, el hecho de construir un cuadrado cumple con la consigna solicitada. Puede evidenciarse que la otra estudiante duda acerca de si dicha construcción permite cumplir con lo pedido, dada la última pregunta que realiza (¿Se puede también?) antes de utilizar la herramienta Polígono para finalizar la construcción. Sin embargo, no se evidencia que reflexionen acerca de ciertas características de la clasificación jerárquica, ni de cómo influye la misma en el hecho de construir un cuadrado como caso particular de rectángulo en la identificación de propiedades empleadas.

Las propiedades empleadas presentadas para esta construcción se exponen en la Tabla 7.

Para la segunda forma de construir un rectángulo se utilizaron las propiedades de que todos sus ángulos formados por lados consecutivos miden 90° y como utilizamos el radio de la circunferencia como longitud del lado del rectángulo entonces nos quedó construido un cuadrado, que es un caso particular del rectángulo.

Tabla 7: Propiedades empleadas, expresadas por las estudiantes

Las estudiantes mencionan, por un lado, la propiedad de que los ángulos formados por lados consecutivos miden 90° . Esta propiedad es empleada en la construcción dado que utilizan la herramienta Ángulo dada su amplitud, a partir de la cual efectúan la rotación de un vértice del rectángulo con respecto a su consecutivo dos veces (primero A con respecto a B y luego B con respecto a A'). Luego mencionan que el hecho de utilizar como longitud del lado del rectángulo el radio de la circunferencia hace que quede construido un cuadrado. En relación a este aspecto, es importante aclarar que, si bien construyen la circunferencia, es la herramienta Ángulo dada su amplitud la que posibilita que los lados del rectángulo sean iguales (ya que el software realiza una rotación y por propiedad de rotación se conservan las distancias). La circunferencia es construida antes de efectuar las rotaciones. Sin embargo, puede servir para visualizar la igualdad de lados. De hecho, la visualización lleva a las estudiantes a considerar que todos los lados del rectángulo coinciden con el radio de la circunferencia inicial.

En las interacciones que se generan entre las estudiantes mientras realizan la construcción, se evidencia que en un momento dudan acerca del rol que juega la circunferencia en la misma. Concluyen que los lados AB y BA' son iguales, luego de que la alumna S se refiere a la construcción de la circunferencia (Tabla 8).

²²	M	Pero porque empezamos desde la circunferencia...
---------------	---	--

23	S	Igual no tiene nada que ver... ah sí, porque este lado... quedaría igual a este [Señala en la pantalla los lados AB y BA]
24	M	Claro, exacto... Y ahora... quedaría hacer...

Tabla 8: Fragmento de diálogo grupo A (Anexo 1-A)

De acuerdo al diálogo anterior, puede decirse que las estudiantes manifiestan una dificultad con respecto al otorgamiento de sentido al paso de la técnica en el que se traza una circunferencia, de acuerdo a la relación entre el dibujo construido y su correspondiente referente teórico.

Según se evidencia en el video, las estudiantes dudan acerca de qué propiedades nombrar como empleadas, por lo que vuelven a mirar la construcción, aunque sin realizar ninguna acción sobre ella. Mientras, se desarrollan las intervenciones de la Tabla 9.

30	S	Yo no entiendo a qué se refiere con propiedades, ¿Las propiedades de las medidas?
31	M	La propiedad para mi es del rectángulo, qué propiedad del rectángulo usamos
32	S	Porque en todas es parecida, se usa la de los ángulos son de 90 grados. Bueno, y también que el cuadrado es un caso particular...

Tabla 9: Fragmento de diálogo del grupo A (Anexo 1-A)

Puede decirse que las estudiantes validan la construcción al elaborar una explicación de lo realizado fuera del software. Sin embargo, recurren a las estrategias de construcción ya que vuelven a mirar la pantalla para la identificación de propiedades.

En primer lugar, se traza una circunferencia con centro en un punto O que pasa por un punto D . Luego se traza la recta a que contiene a O y D . Con la herramienta Intersección se encuentra el punto C_1 (renombrado B en la Figura 6, intersección de la circunferencia con la recta a). Se marca luego un punto A que pertenece a la circunferencia (distinto de C_1 y D) y con la herramienta Polígono se construye el triángulo ADC_1 . Luego, se utiliza la herramienta Simetría Central para encontrar el simétrico del punto C_1 con centro O . Este punto se denomina C' y coincide con D . Después se halla el simétrico del punto A con centro O con la herramienta Simetría Central. Esta última acción genera el punto D' (renombrado C en la Figura 6). Se marca luego el segmento b cuyos extremos son C' y D' . A continuación, se vuelve a aplicar simetría central al punto A con centro O . Esto hace que se genere el punto C (que coincide con D'). Seguidamente se aplica simetría central al punto D con centro O , obteniendo el punto B (que coincide con C_1). Con la herramienta Segmento se marca el segmento e , cuyos extremos son C y B . Se determina por último el rectángulo $BADC$, con la herramienta Polígono.

Vale mencionar que en esta construcción se pueden observar puntos con distintas denominaciones. Esto ocurre porque aplican dos veces simetría central a ciertos puntos.

Las estudiantes comienzan a elaborar esta construcción a partir del trazado de una circunferencia y de un triángulo inscripto en la misma de modo que uno de sus lados coincide con el diámetro de la circunferencia, acciones que son sugeridas por la estudiante M . Luego, surge la idea de aplicar una simetría axial cuyo eje sea una recta que incluya al lado del triángulo que coincide con el diámetro de la circunferencia. Puede observarse en las interacciones de la Tabla 10 que aplican la simetría axial, pero ese procedimiento no les permite construir el rectángulo, por lo que descartan esa idea y aplican simetría central.

36	M	De la circunferencia, viste que sabemos que tres puntos de una circunferencia determinan un... un triángulo... ¿Equilátero? Un triángulo recto
37	S	Si uno de los lados pasa por la...
38	M	Claro
39	S	Por la... ¿Cómo se llama?
40	M	Por el diámetro
41	S	El diámetro
42	M	Pará y cuáles sería...
43	S	¿Para qué querés encontrar un triángulo?
44	M	Y después le podemos hacer como una simetría
45	S	Ah, sí, podemos empezar, claro, por una circunferencia, trazamos el diámetro... y bueno, hallamos la intersección de... y un punto cualquiera
46	M	O lo podemos hacer si no con un triángulo ¿Cómo va a ser este triángulo? va a ser isósceles... [Se refiere al triángulo C_1AD]
47	S	¿Este?
48	M	Ajá..
49	S	No necesariamente
50	M	O podemos hacer un isósceles, hacemos la simetría, mirá...
51	S	Lo que pasa es que si hacemos una simetría con respecto al eje ponele, capaz que igual te queda así con eso
52	M	A ver, vamos a intentar...
53	S	Sin que sea isósceles, o sea uniendo este con este formás... el tri.... ¿Lo estoy diciendo mal? Este con este... y ahí una simetría...
54	M	Respecto...
55	S	De la recta esta [Se refiere a la recta a]
56	M	Esta
57	S	Sería...objeto a reflejar, y luego eje de reflexión, el triángulo...

[Aplican la simetría axial pero no se genera un rectángulo]

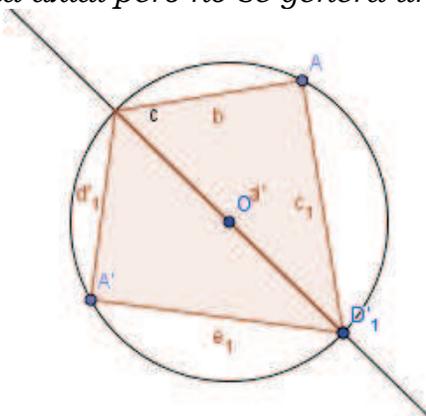


Figura 8: Figura obtenida al aplicar simetría axial

58	S	Ah
59	M	No, nada que ver, ¿Y si empezamos haciendo un isósceles?

Tabla 10: Fragmento de diálogo del grupo A (Anexo 1-A)

Lo expresado muestra que se produce una sorpresa entre lo que las estudiantes esperan encontrar y lo que se genera en el software al aplicar la simetría axial. Así, comunican al SGD un procedimiento de construcción relacionado con la aplicación de una simetría axial y esto genera un objeto geométrico que no es rectángulo.

Asimismo, utilizan las herramientas que ofrece *GeoGebra* sin reflexionar sobre la información que el software les brinda. Si bien pueden observar que la aplicación de la simetría axial no permite la construcción de un rectángulo, no se cuestionan por qué esto ocurre y continúan aplicando una simetría central. Esto se expresa en las intervenciones 60 a 64 (Anexo 1-A). Las estudiantes comunican al software la aplicación de la simetría axial a un triángulo, pero no reflexionan sobre las propiedades que se tienen en cuenta en dicha estrategia. Así, sin dar explícitamente justificaciones matemáticas más allá de lo observable, continúan aplicando simetría central.

Por otra parte, la misma estudiante (M) que recurre al desplazamiento de puntos libres para validar la construcción 2, hace lo mismo con esta (intervenciones 65 a 67, Anexo 1-A).

En este caso, la práctica del desplazamiento o arrastre ofrece retroalimentación al observar de qué manera cambia la forma del rectángulo construido. El arrastre resulta una herramienta que contribuye a otorgar a las construcciones un nuevo status, relacionando los aspectos perceptivos y teóricos del rectángulo como objeto geométrico.

En relación con las propiedades empleadas en esta construcción, las estudiantes presentan el texto que figura en la Tabla 11.

Para la tercera construcción se utilizó que todo triángulo inscrito en una circunferencia cuyo lado sea el diámetro de la circunferencia es rectángulo en el vértice opuesto al lado formado por el diámetro. Otra de las propiedades es que los lados paralelos y opuestos de un rectángulo son simétricos en la simetría central de centro O , donde O es la intersección de las diagonales del rectángulo. En nuestro caso, en la construcción O es el punto medio de la hipotenusa del triángulo construido anteriormente, que luego por propiedad de esta simetría obtenemos los lados paralelos opuestos que estamos buscando para construir el rectángulo.

Tabla 11: Propiedades empleadas, expresadas por las estudiantes

Una de las propiedades que mencionan: “todo triángulo inscrito en una circunferencia cuyo lado sea el diámetro de la circunferencia es rectángulo en el vértice opuesto al lado formado por el diámetro” es aplicada en la construcción. Así, el hecho de marcar un punto A sobre la circunferencia c , distinto de C_1 y D (extremos de un diámetro), permite asegurar que el ángulo C_1AD es recto (Figura 6). Los puntos C_1 (que coincide con B según las coordenadas que aparecen en la vista algebraica), A y D son vértices del rectángulo. Luego, aplican la simetría central de centro O del punto C_1 que genera el punto C' y la simetría central del mismo centro del punto A que genera el punto D' . De este modo, el segmento $C'D'$ es paralelo al segmento C_1A , ya que segmentos homólogos a partir de una simetría central son paralelos entre sí. De la misma manera, aplican simetría central de centro O de los puntos A y D , generando los puntos C y B que coinciden con D' y C_1 respectivamente. Por la propiedad de simetría central antes mencionada se cumple también que el segmento CB es paralelo al segmento AD . Así, los lados opuestos de un rectángulo son simétricos en la simetría central cuyo centro es la intersección de las diagonales, cuestión que es expresada por las estudiantes.

En el diálogo desarrollado, referido a la identificación de propiedades, se evidencia que construyen de forma conjunta lo que expresan en el texto entregado (Tabla 11). En un primer momento se puede distinguir un intercambio de ideas referido a la propiedad que mencionan en la primera oración (Tabla 12).

76	S	Si, se utilizaron las propiedades... ¿Se utilizó qué?
77	M	Primero, que por una circunferencia... o sea que tres puntos... ¿Cómo era la definición?
78	S	Que todo triángulo... donde uno de los lados...
79	M	Es el diámetro de la circunferencia...
80	S	Es el diámetro de la circunferencia... <i>[Escriben esa oración]</i>
81	M	Tiene...
82	S	Todo triángulo inscripto...
83	M	Claro
84	S	En una circunferencia cuyo lado sea... el diámetro de la circunferencia, es rectángulo en el vértice opuesto al lado formado por el diámetro <i>[Escriben esa oración]</i>

Tabla 12: Fragmento de diálogo del grupo A (Anexo 1-A)

Por otra parte, si bien las estudiantes hacen referencia a las diagonales, no expresan de manera explícita una propiedad relacionada con las mismas. Parecería que se están refiriendo a que las diagonales del rectángulo se cortan en su punto medio cuando afirman que el punto O es el punto medio de la hipotenusa del triángulo. En las intervenciones 86 a 114 (Anexo 1-A) se refieren a los procedimientos realizados en relación con las diagonales del rectángulo.

El hecho de que la diagonal del rectángulo no es eje de simetría de esa figura constituye una justificación para comprender por qué no se construye un rectángulo a partir de la simetría axial aplicada, pero las estudiantes no reflexionan explícitamente sobre esta cuestión. Reflexionan de manera conjunta acerca de los contenidos conceptuales relacionados a cada herramienta de la técnica de construcción, en cuanto relacionan las características del triángulo que construyen en un primer momento con el rectángulo que queda determinado luego de aplicar simetría central a

algunos puntos. En este caso la identificación de propiedades no es evidente, ya que se manifiestan dificultades en el reconocimiento visual de propiedades espaciales asociadas a las propiedades geométricas. Posteriormente, se da en las estudiantes un diálogo en torno a las propiedades de ángulos alternos determinados entre dos rectas paralelas (las que incluyen los lados opuestos del rectángulo) cortadas por una recta transversal (la recta a). Debaten acerca de si estos ángulos que quedan determinados son complementarios y una de las estudiantes recurre a Internet para disipar dicha duda. Finalmente, deciden no incluir eso dentro de las propiedades empleadas aún sin haber aclarado este aspecto, dado que la simetría central garantiza que ángulos homólogos tengan la misma amplitud, en este caso 90 grados. Esto se expresa en las intervenciones 128 a 151 (Anexo 1-A).

Al finalizar la identificación de propiedades de la construcción 3, la estudiante S manifiesta no estar convencida con la construcción 2. Argumenta que se usaron propiedades parecidas a las empleadas en la construcción 1 (intervenciones 153 a 159, Anexo 1-A).

Las estudiantes apelan durante la realización de la actividad a comparar las técnicas llevadas a cabo en cada construcción, estableciendo relaciones con las mismas y con los conocimientos que poseen, a través de ensayos, aciertos y errores. Esto se da también a través de interacciones entre miembros del grupo, con el objetivo de identificar las propiedades empleadas en cada construcción.

Grupo B

Este grupo está constituido por las estudiantes J y C. Las mismas entregan un solo archivo de *GeoGebra* con las tres construcciones de rectángulo y un archivo de texto en el que dan respuesta a las consignas b) y c).

Respecto a la construcción 1

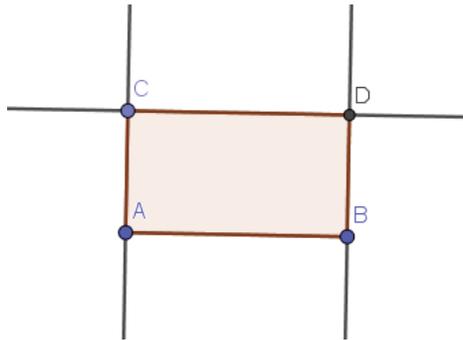


Figura 9: Construcción 1 del grupo B

Nº	Nombre	Icono de la ...	Descripción	Definición	Valor
1	Punto A				$A = (-3.95, -1.29)$
2	Punto B				$B = (0.35, -1.37)$
3	Segmento f		Segmento [A, B]	Segmento(A, B)	$f = 4.3$
4	Recta g		Recta que pasa por A perpendicular a f	Perpendicular(A, f)	$g: -4.3x + 0.08y = 16.88$
5	Recta h		Recta que pasa por B perpendicular a f	Perpendicular(B, f)	$h: -4.3x + 0.08y = -1.61$
6	Punto C		Punto sobre g	Punto(g)	$C = (-3.91, 1.06)$
7	Recta i		Recta paralela a f por C	Recta(C, f)	$i: 0.08x + 4.3y = 4.26$
8	Punto D		Intersección de i, h	Interseca(i, h)	$D = (0.39, 0.98)$
9	Cuadrilátero c1		Polígono B, A, C, D	Polígono(B, A, C, D)	$c1 = 10.13$

Figura 10: PC 1 del grupo B

En esta construcción se marca en primer lugar un segmento f de extremos A y B. A continuación, con la herramienta Recta perpendicular se trazan las rectas g y h perpendiculares a f que pasan por A y por B

respectivamente. Luego se marca un punto C que pertenece a la recta g y se traza, con la herramienta Recta paralela, la recta i paralela a f que pasa por C. Se determina el punto D de intersección entre las rectas i y h , con la herramienta Intersección. El rectángulo que se construye es BACD, con la herramienta Polígono.

Durante la elaboración de la construcción las estudiantes realizan arrastre o desplazamiento de puntos libres y reflexionan acerca de las modificaciones que pueden darse en la figura construida (agrandar, achicar y girar), de acuerdo a las características de dichos puntos. Las intervenciones 4 a 28 ilustran estos aspectos (Anexo 1-B).

Las estudiantes no mencionan explícitamente las propiedades que emplean, aunque recurren al desplazamiento de puntos libres para validar la construcción, retomando los pasos realizados al mencionar que no establecieron puntos fijos. Realizan desplazamientos de los puntos A y C, generando distintas posiciones del rectángulo construido.

Es importante mencionar que la estudiante J duda acerca del rol del artículo “un” en la consigna a) (*Construyan con GeoGebra de tres maneras distintas un rectángulo*). En la frase anterior, “tres” representa un cuantificador, mientras que “un” constituye un artículo indeterminado. Sin embargo, parecería que la estudiante J interpreta “un” como un cuantificador. En una de sus intervenciones, se pone de manifiesto que desconoce si la construcción solicitada de “un” rectángulo implica construir específicamente uno, o uno a partir del cual se puedan generar otros rectángulos en distintas posiciones. Esta duda puede ser la razón por la que la estudiante J sugiere los desplazamientos de puntos libres luego de finalizada la construcción (“fijate de última después si no se mueve”). También puede verse que es quien sugiere otras modificaciones posibles sobre la figura (“¿No se achica también?”). Así, esta estudiante reflexiona acerca de la posibilidad de generar o no distintos rectángulos a partir de la

construcción realizada. En la intervención 27 (Anexo 1-B) se refiere a que no se estableció ningún punto fijo en la construcción. Así, parecería que considera las características de los distintos rectángulos generados a partir de la construcción y encuentra una justificación de por qué ésta no corresponde explícitamente a un solo rectángulo.

La estudiante C, por su parte, no evidencia tener la misma duda sobre el artículo “un” que su compañera. Por el contrario, sugiere que es mejor si se pueden generar otros rectángulos. Esto puede deberse a la influencia del desplazamiento para validar las construcciones, en gran parte de las actividades que se proponen. Si bien la estudiante C no sugiere que se efectúen desplazamientos de puntos, reflexiona en torno a las posibles modificaciones que pueden generarse en la figura construida.

La Tabla 13 expone el texto entregado por las estudiantes en relación con las propiedades empleadas en esta construcción.

Paralelismo de los lados y ángulos rectos

Tabla 13: Propiedades empleadas, expresadas por las estudiantes

Estas estudiantes realizan primero las tres construcciones, en el mismo archivo de *GeoGebra*, y recién luego de finalizadas proceden a la identificación de propiedades geométricas empleadas.

Para determinar las propiedades que escriben en el texto entregado se da un breve diálogo en el que recurren a los pasos realizados en la construcción 1 (Tabla 14).

56	J	Bueno, en el primero usamos el paralelismo de los lados... y los ángulos rectos
57	C	Y los ángulos rectos
58	J	No trazamos diagonales, nada... claro podríamos haber hecho también un triángulo, y hacerle la axial... otra opción...
59	C	Paralelismo de los lados y ángulos rectos [<i>Escribe esta oración</i>]

Tabla 14: Fragmento de diálogo del grupo B (Anexo 1-B)

Puede observarse que se refieren a otra manera de realizar un rectángulo, a partir de la construcción de un triángulo y aplicando simetría axial, aunque no dan mayores detalles sobre cuál sería el eje de simetría ni de qué tipo de triángulo se trataría. Aunque el lenguaje utilizado por las estudiantes no es acorde a su nivel académico, las propiedades mencionadas son correctas dado que se corresponden con las herramientas que se utilizan para construir. Trazan dos rectas perpendiculares a un segmento por sus extremos y una recta paralela al mismo para determinar por intersecciones entre ellas los vértices de un rectángulo. De esta manera, garantizan el paralelismo de los lados del rectángulo y sus ángulos interiores rectos.

Respecto a la construcción 2

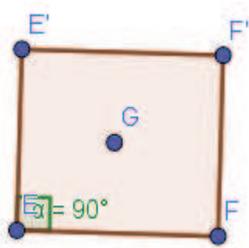


Figura 11: Construcción 2 del grupo B

En esta construcción se comienza por marcar un segmento j de extremos E y F . A continuación, se traza con la herramienta Recta paralela una recta k paralela a j que pasa por un punto G arbitrario, que no pertenece a j . Luego, con la herramienta Simetría axial se halla el simétrico del segmento j con respecto al eje de simetría k . Este segmento es j' , cuyos extremos son los puntos E' y F' . Seguidamente, con la herramienta Segmento se marcan los segmentos $E'E$ y $F'F$ y con la herramienta Ángulo se marca el ángulo FEE' . Queda determinado, por último, con la herramienta Polígono, el rectángulo $FEE'F'$.

10	Punto E				$E = (-10.35, -4.35)$
11	Punto F				$F = (-6.89, -4.45)$
12	Segmento j		Segmento [E, F]	Segmento(E, F)	$j = 3.46$
13	Punto G				$G = (-8.67, -2.89)$
14	Recta k		Recta paralela a j por G	Recta(G, j)	$k: 0.1x + 3.46y = -10.87$
15	Punto E'		Simétrico de E según k	Refleja(E, k)	$E' = (-10.26, -1.34)$
16	Punto F'		Simétrico de F según k	Refleja(F, k)	$F' = (-6.8, -1.44)$
17	Segmento j'		Segmento [E', F']	Segmento(E', F')	$j' = 3.46$
18	Segmento l		Segmento [E', E]	Segmento(E', E)	$l = 3.02$
19	Segmento m		Segmento [F', F]	Segmento(F', F)	$m = 3.02$
20	Ángulo α		Ángulo entre F, E, E'	Ángulo(F, E, E')	$\alpha = 90^\circ$
21	Cuadrilátero c2		Polígono F, E, E', F'	Polígono(F, E, E', F')	$c2 = 10.44$

Figura 12: PC 2 del grupo B

Para la realización de la construcción, la estudiante C propone la aplicación de simetría axial de un segmento. Sin embargo, es la estudiante J la que determina que el eje de simetría debe ser una recta paralela al segmento. La estudiante C sugiere la aplicación de simetría central argumentando que resulta más dificultoso el proceso a partir de la simetría axial. Finalmente, aplican la simetría axial al segmento cuyo eje es una recta paralela al mismo, pero dudan acerca de si el ángulo interior del cuadrilátero construido es recto. Por esta razón, marcan la amplitud del ángulo interior, y al observar que es recto concluyen en que el polígono construido es rectángulo. Esto se evidencia en las intervenciones de la Tabla 15.

32	C	Podemos hacer un segmento... simetría... axial...
33	J	Y después segmento el otro punto... sí, porque tenés que hacer el eje y eso...
34	C	Vamos a hacer esto... <i>[Traza un segmento]</i>
35	J	Ahora tenés que hacer una recta... paralela a esa... <i>[Se refiere a la recta que contiene al segmento EF]</i> , tiene que ser paralela
36	C	No, ¿Por qué paralela?

37	J	Y porque si no que te va a quedar... ¿Así? Si vos hacés la recta cruzada, ponele así... cuando le hagas la cosa no te va a quedar como un rectángulo
38	C	Y si hacemos simetría central
39	J	Y pero con una axial con una paralela a esa ya te da el otro lado y después...
40	C	Claro pero es mucho más lío digamos...

[Traza una paralela al segmento y aplica simetría axial del segmento con respecto a esa recta y une puntos homólogos]

41	J	No sé, no sé
42	C	No sé
43	J	Sí, porque esta es paralela al lado... es perpendicular... <i>[Marca la amplitud de un ángulo interior]</i>
44	C	Si si
45	J	Está bien, ese es el polígono... <i>[Marca polígono]</i>

Tabla 15: Fragmento de diálogo del grupo B (Anexo 1-B)

Puede decirse que la estudiante J, al referirse a una recta “cruzada” está teniendo en cuenta una dirección privilegiada, en la que la recta debe ser horizontal, y de otra manera se considera “cruzada”. Esto puede evidenciarse en la posición del rectángulo construido, en la que el ángulo recto se da a partir de rectas aproximadamente verticales y horizontales.

La utilización de la herramienta de medición Ángulo, con el objetivo de marcar un ángulo interior del cuadrilátero, posibilita comprobar que el ángulo es recto. Antes de determinar el rectángulo, las estudiantes marcan el ángulo FEE' para verificar que es recto (Figura 11). Así, la herramienta Ángulo actúa como una primitiva de medición de magnitudes, que permite medir una amplitud definida gráficamente. Las estudiantes se aseguran que el ángulo mide 90° a partir de la herramienta disponible en el software, pero sin emplear propiedades geométricas que les permitan asegurarlo. De esta manera, no recurren a las propiedades de la simetría axial para deducir que el ángulo en cuestión es recto. Así, reconocen visualmente una propiedad espacial pero no la asocian explícitamente a las propiedades geométricas asociadas. Esto puede deberse al valor de evidencia que ofrece el software a través de las herramientas en las construcciones dinámicas. Para estas

estudiantes es suficiente con la constatación empírica, sin manifestar necesidad de plantear justificaciones basadas en propiedades geométricas.

En lo que refiere a propiedades empleadas en esta construcción, las estudiantes presentan el texto que figura en la Tabla 16.

Paralelismo de los lados y eje de simetría del rectángulo

Tabla 16: Propiedades empleadas, expresadas por las estudiantes

Las herramientas elegidas para construir parecen corresponder a las propiedades mencionadas, ya que estas están expresadas con un lenguaje impreciso. Las estudiantes trazan una recta k paralela a un segmento EF y aplican simetría axial con eje k a los puntos E y F . Así, los segmentos homólogos EF y $E'F'$ son paralelos entre sí por propiedad de simetría axial, aunque esto no es explicitado en la producción de las estudiantes. Los segmentos determinados por puntos homólogos (EE' y FF') son perpendiculares a k y por lo tanto perpendiculares a los segmentos EF y $E'F'$, incluidos en rectas paralelas. La recta k es eje de simetría del rectángulo $FEE'F'$, pero no nombran esto en las propiedades enunciadas. Puede inferirse de la construcción que están considerando una recta paralela a un lado. Si bien no mencionan nada acerca de la medida de los ángulos interiores, puede observarse en el protocolo de construcción que marcan el ángulo FEE' y verifican que mide 90° .

Para determinar las propiedades empleadas, las estudiantes recuerdan los pasos de construcción y vuelven a mirar la pantalla de *GeoGebra*, aunque no realizan acciones sobre la misma, sólo observan. Esto se expresa en las intervenciones de la Tabla 17.

60	J	Bueno, en el b hicimos, usamos, o sea nosotros hicimos simetría axial, pero... por el eje de simetría del rectángulo sería... si usamos la propiedad de que el eje de simetría... el eje de simetría axial sería...
61	C	Pará, porque en este usamos...

[Observan la construcción]

62	J	Trazamos un segmento <i>[Se refiere al segmento EF]</i> ...una recta paralela a este... <i>[Se refiere a la recta k]</i> .
63	C	Y bueno, entonces está también el paralelismo de los lados
64	J	Claro, o sea, el paralelismo de los lados... y el eje de simetría
65	C	Sería...
66	J	Sería la propiedad del eje del rectángulo... o sea el eje de simetría como eje de simetría central de... axial sería...
67	C	Si, que el eje de simetría del rectángulo <i>[Escribe: eje de simetría del rectángulo]</i>

Tabla 17: Fragmento de diálogo del grupo B (Anexo 1-B)

Puede destacarse que, en el momento de identificación de propiedades, las estudiantes clarifican los pasos de construcción que llevaron a cabo. Esto resulta luego de la actividad exploratoria inicial a partir de la que construyen el rectángulo.

Respecto a la construcción 3

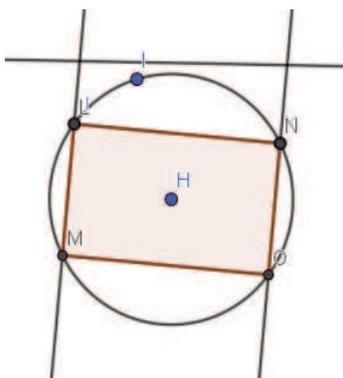


Figura 13: Construcción 3 del grupo B

Se comienza con el trazado de una circunferencia que pasa por un punto I con centro en H, empleando la herramienta Circunferencia (centro, punto). Se marca luego con la herramienta Segmento una cuerda de la circunferencia (segmento n) cuyos extremos son dos puntos J y K (renombrados L y N en la Figura 13). A continuación, con la herramienta Recta perpendicular se trazan dos rectas q y r perpendiculares a n por J y K respectivamente. Con la herramienta Intersección se determinan los

puntos L y M (intersección de la circunferencia con la recta q) y los puntos N y O (intersección de la circunferencia con la recta r). L coincide con J y N con K. Seguidamente, con la herramienta Segmento se marca la cuerda cuyos extremos son M y O. Queda determinado, con la herramienta Polígono, el rectángulo OMJK (renombrado OMLN en la Figura 13).

Nº	Nombre	Icono...	Descripción	Definición	Valor
22	Punto H				$H = (6.03, -2.05)$
23	Punto I				$I = (5.27, 0.53)$
24	Circunferenci...		Circunferencia que pasa por I con centro H	Circunferencia(H, I)	$p: (x - 6.03)^2 + (y + 2.05)^2 = \dots$
25	Punto J		Punto sobre p	Punto(p)	$J = (3.88, -0.43)$
26	Punto K		Punto sobre p	Punto(p)	$K = (8.44, -0.85)$
27	Segmento n		Segmento [J, K]	Segmento(J, K)	$n = 4.57$
28	Recta q		Recta que pasa por J perpendicular a n	Perpendicular(J, n)	$q: -4.55x + 0.42y = -17.86$
29	Recta r		Recta que pasa por K perpendicular a n	Perpendicular(K, n)	$r: -4.55x + 0.42y = -38.76$
30	Punto L		Punto de intersección de p, q	Interseca(p, q)	$L = (3.88, -0.43)$
30	Punto M		Punto de intersección de p, q	Interseca(p, q)	$M = (3.62, -3.25)$
31	Punto N		Punto de intersección de p, r	Interseca(p, r)	$N = (8.44, -0.85)$
31	Punto O		Punto de intersección de p, r	Interseca(p, r)	$O = (8.18, -3.67)$
32	Segmento s		Segmento [M, O]	Segmento(M, O)	$s = 4.57$
33	Cuadrilátero c3		Polígono O, M, J, K	Polígono(O, M, J, K)	$c3 = 12.96$

Figura 14: PC 3 del grupo B

Para la elaboración de la construcción, la estudiante J sugiere comenzar construyendo una circunferencia. Las interacciones que se generan entre las estudiantes permiten que decidan de manera conjunta los procedimientos a seguir para realizar la construcción. Mientras la realizan, la estudiante C reflexiona sobre las propiedades empleadas (intervenciones 46 a 52, Anexo 1-B).

Las estudiantes logran entenderse a través del espacio externo, representado en este caso por *GeoGebra*, aún sin desarrollar explícita y claramente un lenguaje formal. El software se vuelve parte de sus interacciones sin necesidad de explicaciones lógicas. De esta manera, comienzan a partir de la sugerencia de la estudiante J construyendo una circunferencia y deciden conjuntamente los procedimientos de construcción que efectúan a continuación.

Puede notarse que la estudiante J reflexiona sobre las propiedades geométricas relacionadas a los procedimientos de construcción (“¿Qué vamos a usar ahí?” “¿Qué propiedad?”). Esto puede deberse a la consigna b) del problema, en la que se pide que expliciten las propiedades geométricas empleadas. Se evidencia de este modo la intención de las estudiantes de hacer explícitas las propiedades geométricas que describen el rectángulo, detallando los pasos de construcción elegidos a través de propiedades geométricas.

Las estudiantes presentan el texto que figura en la Tabla 18 en relación con las propiedades empleadas en esta construcción.

Igualdad de lados opuestos, ángulos rectos y lados opuestos paralelos

Tabla 18: Propiedades empleadas, expresadas por las estudiantes

Para determinar las propiedades empleadas, las estudiantes comienzan por observar la construcción. Las siguientes interacciones ilustran el proceso de identificación de propiedades, mientras recurren a los procedimientos realizados (Tabla 19).

70	C	Primero hicimos una circunferencia... trazamos alguna...
71	J	Alguna...
72	C	Una cuerda cualquiera...
73	J	Y después le trazamos las perpendiculares al rectángulo, o sea a ese segmento, a esa cuerda por los puntos extremos

74	C	Y bueno, es como que usamos que los lados opuestos son iguales
75	J	Claro
76	C	Igualdad de lados opuestos
77	J	Si, igualmente, o sea...
78	C	Si porque no sería, o sea... simetría acá
79	J	No hicimos simetría, hicimos las perpendiculares al segmento por ese punto, al segmento por este punto y listo, como nos quedó los puntos de intersección...
80	C	Bueno, pero como esto es una circunferencia sabíamos que este iba a ser igual a este y este iba a ser igual a este, o sea usamos de que los lados opuestos son iguales, también que los ángulos son rectos... porque hicimos las paralelas... las perpendiculares, y nada más... y bueno, pero que los lados opuestos son paralelos también, porque... o sea...
81	J	Hicimos las perpendiculares
82	C	Si vos hacés dos perpendiculares a la misma recta estos van a ser paralelos
83	J	Si

[Escriben: igualdad de lados opuestos]

84	J	Ángulos rectos, o sea también podríamos haber usado el diámetro... como una diagonal del cuadrado, hacer un rectángulo... otra opción
85	C	Ángulos rectos... y ... lados opuestos paralelos...

[Continúan escribiendo la oración, que queda finalmente: Igualdad de lados opuestos, ángulos rectos y lados opuestos paralelos]

Tabla 19: Fragmento de diálogo del grupo B (Anexo 1-B)

Cabe destacar que para la identificación de propiedades las estudiantes observan la construcción y esta percepción que se da de manera directa no resulta suficiente para que realicen una interpretación geométrica de las propiedades empleadas.

4.1.2 Definiciones de rectángulo

En esta sección se describen y analizan las producciones en relación a la definición de rectángulo considerada para las construcciones, lo que corresponde a la consigna c) del problema. Se analizan las definiciones presentadas y se describe el proceso a partir del cual son establecidas.

El grupo A presenta la siguiente definición:

Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos y al menos uno de sus ángulos mide 90° .

Tabla 20: Definición de rectángulo del grupo A

Puede decirse que esta definición contiene condiciones suficientes para definir rectángulo:

- tiene dos pares de lados paralelos.
- al menos uno de sus ángulos mide 90° .

Por lo tanto, se puede decir que es correcta.

La expresión “al menos uno” refiere a que al menos uno de los ángulos del cuadrilátero con dos pares de lados paralelos debe ser recto. Esto incluye que uno, dos, tres o cuatro ángulos deben ser rectos, lo que constituiría en algunos de estos casos una condición redundante. Dado que es suficiente con un ángulo de 90° para que un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos sea un rectángulo, la expresión utilizada “al menos uno” se considera una imprecisión del lenguaje teniendo en cuenta el diálogo que se establece al respecto y que se presenta en la Tabla 21.

Vale mencionar que la definición presentada es determinada rápidamente por las estudiantes, a partir de un breve intercambio (Tabla 21).

163	S	Es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos, esa es la definición
164	M	Si, y cuyos ángulos miden 90 grados, ¿O no? Que sus ángulos miden 90 grados... al menos uno de sus ángulos... porque con que uno mida 90 en un cuadrilátero sabés que tienen que ser suplementarios, entonces el otro va a ser 90, 90 y 90. ¿Estaría?
165	S	Si

Tabla 21: Fragmento de diálogo del grupo B (Anexo 1-A)

El grupo B presenta la siguiente definición:

Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos y dos pares de lados opuestos paralelos e iguales.

Tabla 22: Definición de rectángulo del grupo B

Esta definición posee condiciones suficientes para determinar un rectángulo dado que con la información que brinda sólo se puede construir esa figura. Sin embargo, posee condiciones redundantes, las que contribuyen a que la definición opere como una descripción del rectángulo.

La definición enuncia tres condiciones que debe poseer un cuadrilátero para ser rectángulo:

- 1) Todos sus ángulos rectos.
- 2) Dos pares de lados opuestos paralelos.
- 3) Dos pares de lados opuestos iguales.

Si solo se considera la primera condición, las otras dos no son necesarias. Además, la palabra “todos” en la condición "todos sus ángulos son rectos" resulta redundante ya que, al tratarse de un cuadrilátero, sin considerar las condiciones 2 y 3, alcanza con tres ángulos rectos para asegurar que el cuarto ángulo también lo es. Así, las condiciones 2 y 3, en este caso, resultan redundantes. Siempre un cuadrilátero con todos sus ángulos rectos tiene sus dos pares de lados opuestos paralelos e iguales. Considerando estos aspectos, puede decirse que la condición 1 es suficiente y redundante.

Asimismo, puede afirmarse que, si un cuadrilátero cumple la condición 2, entonces cumple la condición 3. También puede decirse que, si un cuadrilátero cumple con la condición 3, entonces cumple con la condición 2. Además, si se consideran las condiciones 1 y 2, la condición 1 sería redundante ya que sólo sería necesario que el cuadrilátero tenga un ángulo recto. Lo mismo ocurre si se consideran las condiciones 1 y 3.

Cabe señalar que el diálogo para establecer la definición presentada para realizar las construcciones es más extenso que el del grupo A. En este caso, las estudiantes debaten en torno a si es necesario o no agregar la condición 3, teniendo en cuenta la condición 2. Finalmente, concluyen en que deben agregarla y si bien la estudiante J manifiesta tener dudas al respecto, la estudiante C se refiere especialmente a las propiedades empleadas en las construcciones, cuestión que es asentida por la estudiante J (Tabla 23).

103	J	En realidad, como que usamos... sería el cuadrilátero que tiene cuatro ángulos rectos y dos pares de lados...
104	C	Opuestos paralelos
105	J	O eso es más fácil porque ahí ya insinuás que son rectos, si tenés dos paralelas y dos paralelas... mentira, no, sí, las dos cosas hay que ponerle

[Escribe: un rectángulo es un cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos y dos pares de lados opuestos paralelos e iguales]

106	C	¿Así?
107	J	Si, y vos decís cuadrilátero y son opuestos...no, iguales no... ah si...
108	C	Dos pares de lados opuestos e iguales ¿Está bien?
109	J	Ya dudo

[Lee lo que escribieron]

110	C	Porque usamos el paralelismo de los lados, ángulo recto, lados opuestos iguales
111	J	Si

Tabla 23: Fragmento de diálogo del grupo B (Anexo 1-B)

4.2 Miradas a las entrevistas

Las entrevistas se estructuran en dos etapas que se describen a continuación.

Primera etapa: Análisis de las construcciones entre grupos

En primer lugar, se propone a cada grupo un análisis de las construcciones correspondientes al otro grupo. Es necesario aclarar que la idea original en el diseño de las entrevistas es que los estudiantes cuenten con las construcciones del otro grupo en sus computadoras de manera tal que puedan explorar sobre ellas. Así, se pretende en un primer momento que uno de los integrantes, comparta en la pantalla de Zoom las construcciones, de manera que puedan interactuar sobre las mismas mientras se desarrolla la entrevista. Sin embargo, en la primera entrevista realizada se manifiestan dificultades técnicas por parte de los estudiantes en abrir los archivos de *GeoGebra* que les son enviados con anterioridad. Esto motiva la decisión de que una de las entrevistadoras sea la que comparta las construcciones en la pantalla, aclarando a los estudiantes que pueden solicitarle cualquier acción que deseen sobre el archivo. Esta decisión se extiende a la entrevista del otro grupo, en la que se procede del mismo modo para generar las mismas condiciones.

Las construcciones son presentadas inicialmente mostrando la vista gráfica y la vista algebraica que aparecen por defecto en la versión de *GeoGebra* utilizada por la investigadora. Los elementos en la vista algebraica aparecen ordenados según la configuración “Orden de construcción”, que es la que se establece por defecto. De este modo, pueden observarse en la lista los objetos a partir del orden en que son creados en la construcción.

Para comenzar el análisis de las construcciones realizadas, se indaga acerca de las herramientas utilizadas en cada una de ellas. Se considera importante que los estudiantes puedan identificar las herramientas que se

utilizaron en cada construcción ya que esto les permite conocer el procedimiento utilizado en cada caso y familiarizarse con las mismas. Como afirman Sánchez y Prieto (2019), la explicación de las técnicas de construcción posibilita la comprensión de las mismas, que se favorece a través del diálogo de ideas argumentadas sobre las acciones con el software que materializan la técnica. En este caso, se pretende que los estudiantes identifiquen los pasos de construcción y dialoguen sobre los mismos con el objetivo de comprender las técnicas de construcción, fundamental para la identificación de propiedades geométricas.

Luego de que los estudiantes identifican herramientas de construcción, se indaga acerca de cuáles son las propiedades geométricas empleadas. Esto se relaciona con la identificación de herramientas de *GeoGebra* ya que posibilita que se visualice el vínculo existente entre las herramientas y el saber matemático que subyace en ellas (Sánchez y Prieto, 2019). De esta manera, se apela a la reflexión conjunta en torno a ciertas técnicas de construcción, recurriendo a relacionar aspectos fundamentales para la identificación de particularidades de elementos de figuras según Itzcovich (2005): conocimientos disponibles, actividades de construcción e interacciones entre alumnos.

Segunda etapa: Análisis y comparación de definiciones de rectángulo

Se presenta la definición de rectángulo dada por el otro grupo durante la resolución del problema. Se les pide a los estudiantes entrevistados que determinen si las construcciones realizadas por el otro grupo corresponden a rectángulos de acuerdo a dicha definición. Esto permite poner en relación la correspondencia de las construcciones con la definición tenida en cuenta (Aya Corredor, Echeverry Gaitán y Samper, 2016).

A continuación, se presenta la definición de rectángulo que corresponde al grupo entrevistado, con la consigna de comparar dichas

definiciones entre sí. También se indaga acerca de qué definición consideran más apropiada y por qué razones. Esto se justifica en la arbitrariedad de las definiciones (Vinner, 1991; De Villiers, 1994; Govender, 2002). Además, la propuesta de comparar definiciones implica que se analicen distintas características de las mismas, relacionadas con las condiciones necesarias y suficientes para definir rectángulo, lo que justifica la elección de una como más apropiada (Govender, 2002).

Se exponen las primeras reflexiones sobre las etapas mencionadas en los siguientes apartados.

4.2.1 Identificación de herramientas empleadas

Se presentan a continuación la descripción y análisis del proceso de identificación de herramientas utilizadas en las construcciones, que se desarrolla durante la primera etapa de la entrevista a cada grupo.

Entrevista al grupo A

Al comienzo de la entrevista, las estudiantes se basan en lo que se observa en la pantalla del archivo para nombrar las herramientas empleadas en las construcciones. De esta manera, en un primer momento no solicitan realizar ninguna acción sobre las mismas. Sólo observan las características de las figuras construidas en *GeoGebra*, qué elementos presentan y con qué denominación cuentan. A continuación, se exponen las ideas que surgen en la entrevista en esta primera etapa, en relación a las tres construcciones.

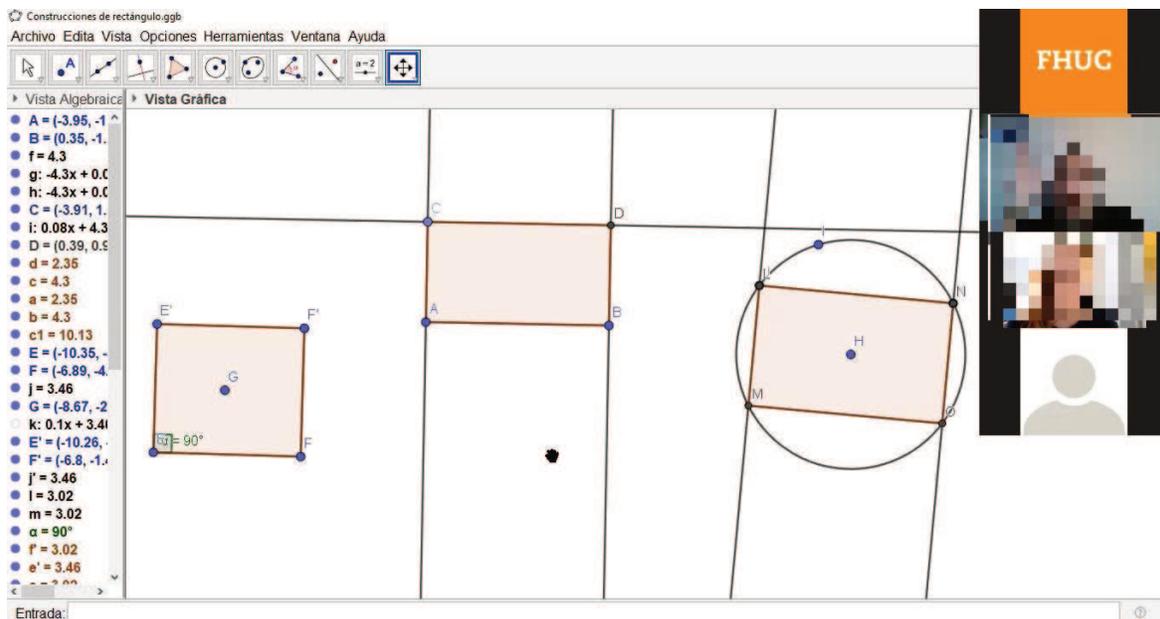


Figura 15: Construcciones del grupo B

Con respecto a la construcción 1, la estudiante M expresa ciertos procedimientos que considera que son realizados (Tabla 24).

5	M	Para mi ahí lo que dijo S, primero traza una recta, después traza una recta perpendicular, con el comando de perpendicular, por ejemplo, la que tiene el punto C y A, la recta que pasa por esos dos puntos, después como una recta paralela a esa, que pasa por dos puntos el D y el B y después una paralela a la horizontal, a la recta que pasa los puntos C y D. No sé S...
---	---	--

Tabla 24: Fragmento de diálogo entrevista al grupo A (Anexo 2-A)

La estudiante S, por su parte, se refiere a la utilización de las herramientas Recta, Polígono e Intersección.

En relación a la construcción 3 del grupo B, que es la que analizan en segundo lugar, la estudiante S expresa que primero se traza una circunferencia con un centro cualquiera y que pasa por un punto cualquiera. La estudiante M manifiesta estar de acuerdo con esta idea.

A continuación, se desarrollan interacciones relacionadas a una posible aplicación de simetrías en los procedimientos de construcción.

La estudiante S expresa ciertos procedimientos que involucran la aplicación de simetrías en la construcción. La explicación que desarrolla corresponde a la intervención 14 (Anexo 2-A).

En la intervención 18 (Anexo 2-A), la estudiante M analiza la denominación de los puntos en cada construcción y expresa que no está de acuerdo con que se haya aplicado simetría en la construcción. Recuerda que cuando se aplica con *GeoGebra* una simetría a un punto, el software lo nombra de una manera específica, usando el nombre del punto acompañado del símbolo '. Así, como esto no aparece en la construcción analizada, la estudiante M concluye que no hay simetría aplicada dentro de los pasos de construcción. Luego de la explicación dada por la estudiante M, la estudiante S expresa estar de acuerdo con lo que sostiene su compañera. Expresan en las intervenciones 22 y 23 (Anexo 2-A) que no se aplica simetría en la construcción e identifican la utilización de la herramienta Recta paralela.

La estudiante M nombra finalmente las herramientas que considera que son utilizadas en la construcción 3 (Tabla 25).

27	M	Circunferencia centro punto, después la de recta, que esa recta digamos interseque a la circunferencia por dos puntos y que no sea el diámetro, y después paralela a esa recta que también pase por la... que interseque a la circunferencia en dos puntos, y por último la de polígono...
----	---	--

Tabla 25: Fragmento de diálogo entrevista al grupo A (Anexo 2-A)

En el análisis de la construcción 2 del grupo B, que es la que analizan en tercer lugar, las estudiantes hacen alusión nuevamente a la denominación de los puntos a los que se les aplica simetría en *GeoGebra*, concluyendo que en este caso sí se evidencia simetría (intervenciones 30 a 41, Anexo 2-A).

Es posible analizar distintos aspectos que se evidencian en el diálogo anterior. Por un lado, la estudiante S hace referencia a la aplicación de una

simetría central dentro de los pasos de construcción, teniendo en cuenta el símbolo ' en la denominación de algunos puntos. Por otro lado, la misma estudiante se refiere a la aplicación de la herramienta Ángulo dada su amplitud para determinar el ángulo recto E. En relación a esto, es cierto que tanto la herramienta Simetría central como la herramienta Ángulo dada su amplitud generan puntos con una denominación que utiliza el símbolo '. Esto evidencia que la visualización de la figura en la pantalla, sin realizar ninguna acción sobre la construcción no permite determinar con exactitud qué herramientas se utilizan dentro de los pasos de construcción, ya que es posible que se hayan aplicado distintas herramientas que generen los elementos que se observan en la construcción, incluso con la misma denominación. El hecho de basarse solo en la percepción de la construcción las lleva a que piensen que se trata de un cuadrado.

La investigadora pregunta a continuación cuáles son las herramientas que se utilizan en la construcción analizada y es la estudiante S quien responde que las herramientas son Punto, Ángulo dada su amplitud y Polígono regular. De esta manera, puede decirse que finalmente no consideran la aplicación de una simetría.

A continuación, se indaga a las estudiantes acerca de si están seguras de las herramientas nombradas y se les pregunta si existe alguna manera que permita corroborar sus afirmaciones. Esto genera un intercambio en el que se nombra por primera vez en la entrevista al PC (intervenciones 45 a 51, Anexo 2-A).

Luego de que la investigadora recuerda que pueden solicitarle cualquier acción sobre la pantalla, la estudiante S expresa su intención de abrir el protocolo para ver la construcción 2 del grupo B, dado que posee los puntos con el símbolo ', lo que parece indicar que se aplica una simetría. Sin embargo, como las tres construcciones se encuentran en el mismo archivo de *GeoGebra*, al abrir el protocolo, se pueden encontrar los pasos realizados desde la construcción 1.

Se presentan las interacciones que se generan en la entrevista al observar el PC de las tres construcciones. En esta etapa, las estudiantes logran comparar las herramientas nombradas con los pasos de construcción que se visualizan en el protocolo, en el orden en que se realizan las construcciones del grupo B.

Luego de revisar los pasos realizados en la construcción 1, las estudiantes notan que la herramienta Segmento no había sido nombrada por ellas. Identifican los pasos de construcción en el protocolo, y los comparan con su interpretación previa en las intervenciones 57 a 60 (Anexo 2-A).

Continuando con la construcción 2 del grupo B, se revisan todos los pasos en el protocolo y luego de observarlos la estudiante S manifiesta que no entiende qué simetría se aplica. Por esta razón, se vuelven a revisar los pasos, mientras debaten al respecto de la recta k , que figura como objeto oculto (intervenciones 71 a 76, Anexo 2-A).

Las estudiantes logran identificar la existencia de la recta k solo luego de revisar el protocolo y de que se muestren los objetos ocultos.

A continuación, la investigadora decide revisar el PC una vez más. La estudiante S identifica que se aplica simetría axial con respecto a la recta k . Se vuelve a preguntar acerca de qué herramientas se utilizan y la estudiante M nombra a la herramienta Segmento y manifiesta tener una duda con respecto a cómo se construye el punto G. Se desarrollan las intervenciones que se exponen en la Tabla 26.

82	S	Para mí ahí lo marcó aleatoriamente [<i>se refiere al punto G</i>]
83	M	Mmm no, para mí aleatoriamente no...
84	S	Para mí lo marcó como, cualquier lugar arriba del segmento...
85	E	¿Cómo se puede saber eso? si se marcó aleatoriamente, en cualquier lugar
86	S	Yo porque ahí según donde dice el valor de G como que tienen coordenadas con coma, y los decimales no son exactos...
87	E	No se convence M...

88	M	No, porque yo lo miro así y parece que si vos medís ahí el GE y el F te queda como un triangulito isósceles, así a la vista, sin hacerlo...
----	---	---

Tabla 26: Fragmento de diálogo entrevista al grupo A (Anexo 1-B)

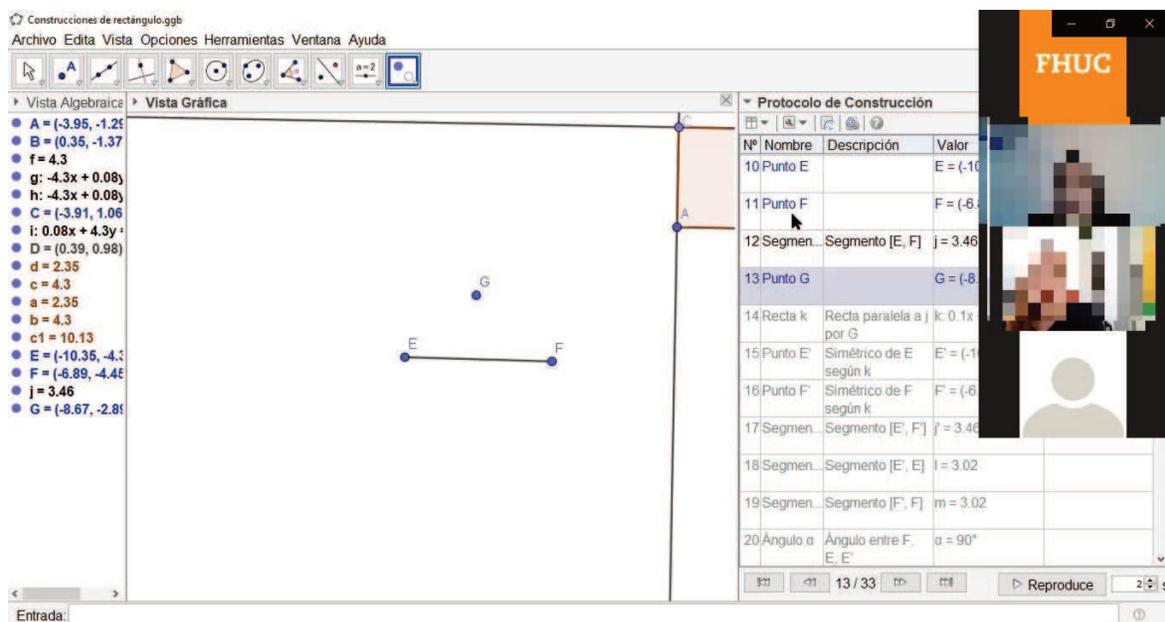


Figura 16: Análisis del punto G en construcción 2 del grupo B

La estudiante S hace referencia a un aspecto importante en *GeoGebra*, las representaciones de los objetos geométricos en las distintas vistas que ofrece el software. Observa las coordenadas cartesianas correspondientes al punto G y supone que como no corresponden a números enteros, el punto se ubica en una posición arbitraria. Sin embargo, un punto puede ser dependiente de otros objetos y aún poseer coordenadas cartesianas no enteras.

Por otro lado, la alumna M acude a la representación en la vista gráfica e infiere que el punto G es un vértice de un triángulo isósceles (EGF). El hecho de observar una construcción no permite identificar sus propiedades. En este caso la estudiante aclara que su conjetura proviene de considerar en la construcción un aspecto puramente visual.

La entrevista continúa con una pregunta a las estudiantes: cómo se puede hacer para saber si el triángulo es isósceles. La estudiante M

responde que para eso hay que construir un polígono con tres puntos. Así, se traza sobre la construcción con la herramienta Polígono el triángulo EGF (Figura 17).

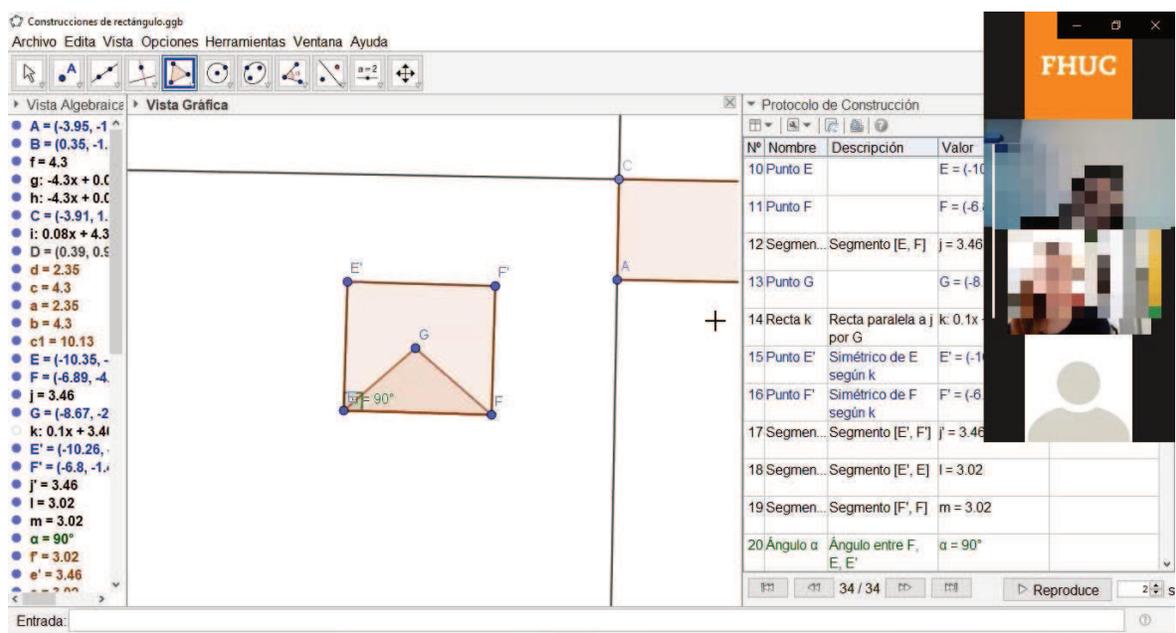


Figura 17: Trazado de triángulo EGF en construcción 2 del grupo B

La investigadora pregunta a las estudiantes qué acción desean que realice para continuar. La estudiante S expresa que considera que ese triángulo no es isósceles y la estudiante M acuerda con la misma idea. A continuación, se desarrolla un diálogo en el que debaten acerca de cómo verificar que el triángulo no es isósceles utilizando herramientas del software (Tabla 27).

97	S	Y... o sea, para verificar que no es isósceles yo lo que haría es trazar el punto medio entre F y E, el punto medio del segmento, y trazaría una perpendicular que pase por P
98	M	Y ahí ya...
99	S	Una perpendicular al segmento que pase por P y ver si corta a G
100	M	Tendría que pasar por G
101	S	Claro

Tabla 27: Fragmento de diálogo entrevista al grupo A (Anexo 2-A)

Se realizan sobre la construcción las acciones que nombran las estudiantes. Se utiliza la herramienta Medio o centro para ubicar el punto medio del segmento EF y luego la herramienta Recta perpendicular para trazar una recta perpendicular al segmento EF que pase por P. Puede observarse que esta recta no pasa por el punto G, por lo que las estudiantes concluyen que el triángulo EGF no es isósceles. Esto ilustra el empleo de propiedades geométricas que subyacen en la utilización de las herramientas seleccionadas.

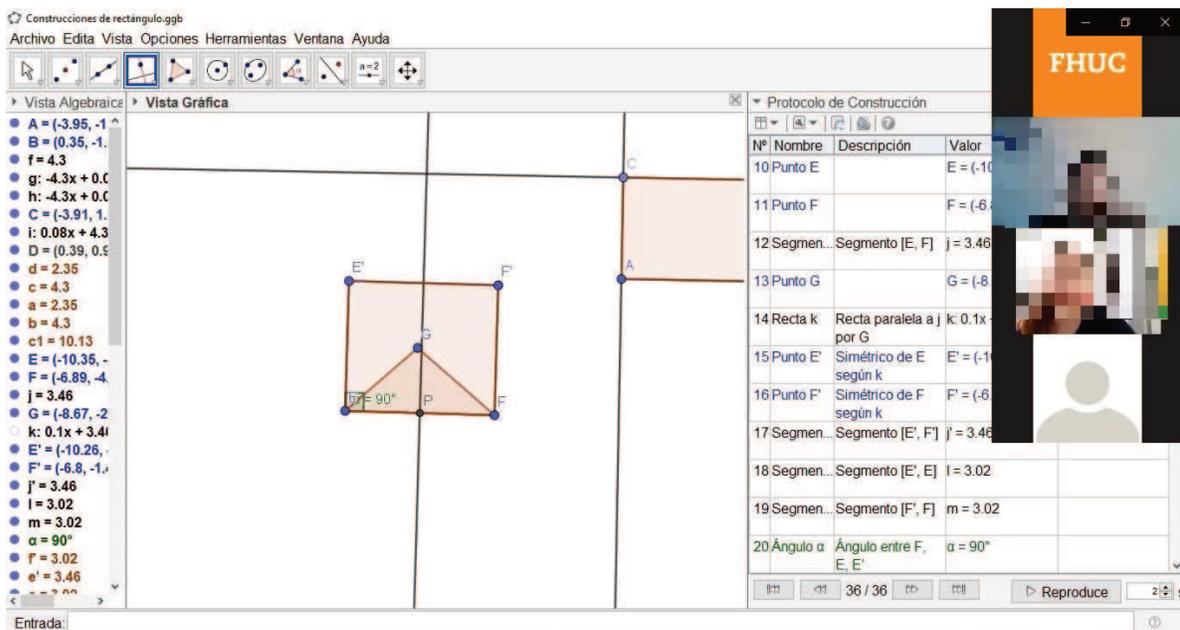


Figura 18: Trazado de recta perpendicular en construcción 2 del grupo B

Durante el desarrollo de esta parte de la entrevista puede observarse de qué manera se utilizan las herramientas que provee el software para manipular y verificar relaciones geométricas. La retroalimentación que ofrece el entorno dinámico posibilita de esta manera que puedan identificar de qué manera es construido el punto G en la construcción. Las estudiantes interrogan a la construcción, identificando características y extrayendo información de distintos modos.

La entrevistadora continúa preguntando qué se puede decir del punto G. Se desarrolla el siguiente diálogo (Tabla 28).

103	E	Entonces, en este caso ¿Qué podemos decir del punto G?
-----	---	--

104	S	Que para mí es aleatorio
105	M	Sí, ahora sí...
106	S	Como que no está igual de ninguna medida...
107	E	Bueno, deshago esto así volvemos a mirar la construcción como estaba [<i>Se deshacen las últimas acciones sobre la construcción</i>]
108	S	Bueno
109	E	Y vamos a ver qué herramientas entonces, si podemos determinar eso
110	S	Claro ahí también estaría como dijo ella antes, lo de bueno primero hacer un punto cualquiera, hacer el segmento
111	E	Ajá
112	S	Después bueno hacer el punto G aleatoriamente arriba del segmento y trazar una paralela al segmento que pase por G, que esa sería la k , la recta k
113	M	La recta k , ajá
114	S	Y después hacer una simetría axial respecto a esa recta del punto E y después del F y trazar los segmentos correspondientes y el polígono, lo que sí no entiendo es para qué hace lo del ángulo, por ahí para verificar que sea recto

Tabla 28: Fragmento de diálogo entrevista al grupo A (Anexo 2-A)

Es importante señalar que los objetos construidos con *GeoGebra* pueden ser libres o dependientes⁴. En el caso de los objetos libres, su posición o valor no depende de ningún otro objeto. Los objetos dependientes, en cambio, dependen de algún otro elemento creado con las herramientas disponibles. La configuración a partir de la que se ordenan los objetos en *GeoGebra* en la vista algebraica presentada en la entrevista no permite distinguir con facilidad objetos libres y dependientes. Sin embargo, esto puede observarse claramente desde la configuración que ordena los objetos a partir de la Dependencia. En esta opción, la vista algebraica genera una lista con los objetos libres y otra con los objetos dependientes. El hecho de observar estas listas de elementos podría haber permitido a las estudiantes determinar más fácilmente que el punto G es un objeto libre. Además, el aspecto por defecto en la vista gráfica de los

⁴ https://wiki.geogebra.org/es/Objetos_libres,_dependientes_y_auxiliares

objetos libres y dependientes es distinto, lo cual podría ayudar también a distinguirlos.

Las estudiantes logran identificar los pasos de construcción, aunque la estudiante S duda acerca del paso en el que se marca el ángulo recto con vértice E. La estudiante M, por su parte, no expresa ninguna idea relacionada a ese paso de la construcción. La entrevistadora pregunta si desean agregar alguna idea relacionada con esta construcción y ambas responden que no, que desean pasar a la otra.

Seguidamente, se reproducen dos veces los pasos de la construcción 3 del grupo B y se desarrollan intervenciones en las que las estudiantes comparan los pasos de construcción nombrados anteriormente con lo que observan en el PC (Tabla 29).

123	M	Es al revés de como habíamos pensado...
124	S	Claro, yo ahí no sé si usaría paralela o directamente perpendicular, también utiliza la herramienta de segmento...
125	M	Sí, el segmento, la intersección... ¿Y por qué decís S perpendicular?
126	S	Para mi después traza una perpendicular, eh... por J no sé qué punto es ese, que sea perpendicular al segmento, y luego otra por K.
127	M	Ah
128	E	¿Qué herramientas entonces?
129	S	La de punto, la de circunferencia centro punto, la de segmento
130	M	Intersección
131	S	La de paralela, digo perpendicular, después vuelve a utilizar el segmento y por último el polígono...

Tabla 29: Fragmento de diálogo entrevista al grupo A (Anexo 2-A)

Las estudiantes logran determinar las herramientas utilizadas en la construcción y distinguir que los pasos de construcción no son los mismos que habían pensado antes de observar el PC.

En relación a las tres construcciones, la estudiante S menciona que en todas se utiliza la herramienta Segmento, aunque aclara que no es una herramienta que hubiese sido utilizada por ella para realizar la construcción 3 (intervenciones 133 a 137, Anexo 2-A).

Durante el desarrollo de la entrevista en relación a la identificación de herramientas se observa de qué manera las estudiantes ponen en juego sus conocimientos para determinar las herramientas que se utilizan en la construcción. En este proceso no sólo se ponen en juego los conocimientos de geometría que poseen si no aquellos conocimientos relacionados con el empleo de *GeoGebra* para construir figuras geométricas. Así, si bien las estudiantes del grupo A identifican herramientas utilizadas en las construcciones basándose en lo que muestra el protocolo, no pueden comprender por qué se realizan algunos pasos de las construcciones, que en este caso corresponden a decisiones tomadas por el grupo B, también influenciadas por los conocimientos de sus integrantes. Puede observarse también que las estudiantes del grupo A dan su opinión acerca de qué herramientas utilizarían ellas para esas construcciones y cuáles no.

Entrevista al grupo B

Se presenta el archivo de la construcción 1 y las estudiantes comienzan observando la figura construida durante algunos segundos en silencio y sin requerir acciones sobre la misma. Luego, la estudiante J manifiesta que piensa que en la construcción primero se traza un punto y luego una recta que pasa por el mismo. Vale destacar que esta estudiante se expresa refiriéndose a los pasos de construcción como si fueran de su autoría, razón por la cual la entrevistadora aclara que no necesariamente las construcciones analizadas son las realizadas por ellas.

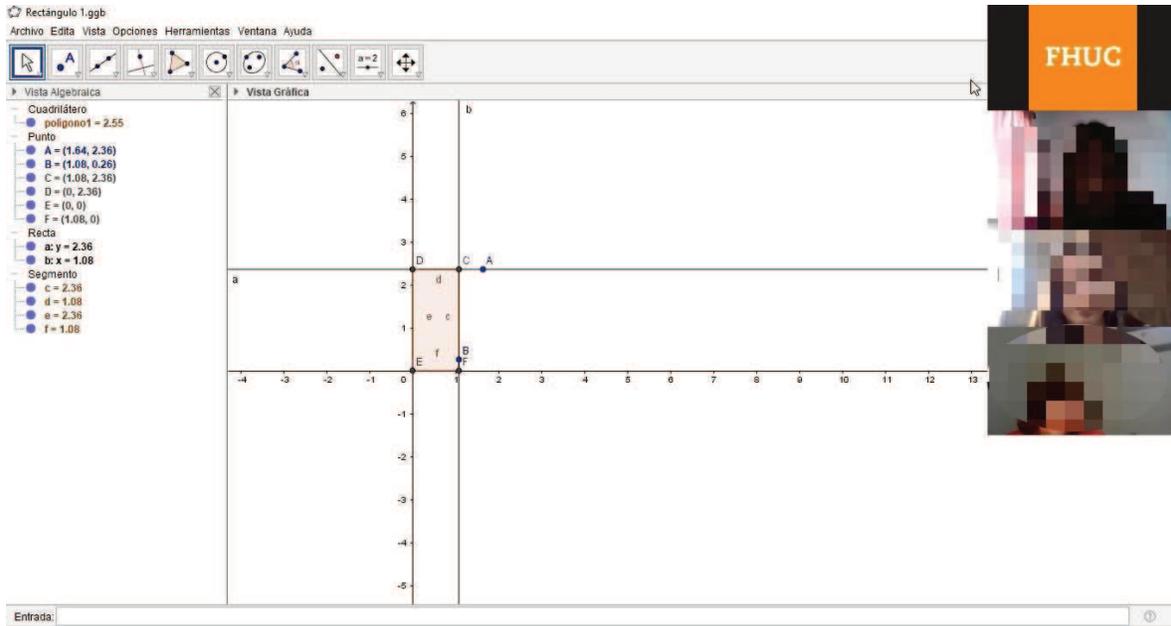


Figura 19: Construcción 1 del grupo A

Se desarrolla el siguiente diálogo en el que las estudiantes mencionan algunas herramientas que consideran son utilizadas en la construcción, a partir de una mera observación de la misma (Tabla 30).

6	J	Bueno igual, no se vos C que pensás, creo que bueno, el punto A, una recta que pase por el punto A, después se marcó un punto B y se trazó una recta perpendicular a la recta que antes se trazó por ese punto B...
7	C	Si
8	J	Y después se encontraron la intersección con el eje y , y la recta primera marcada digamos, y después la intersección con el eje x y la segunda recta y se utilizó la herramienta de polígono con los cuatro puntos, con los puntos D, C, F, E...
9	C	Igual el E queda ahí como que lo marcás aparte sería...
10	J	Claro, como el origen
11	C	Yo pensé que habían usado paralelas, pero no...
12	E	¿Cómo pueden estar seguras de eso?
13	C	Porque el punto A y el B como que están trazados, pero no los usan como un vértice del polígono sería...
14	E	Ajá, ¿Y cómo sabés si usaron paralela o perpendicular?
15	C	Claro por eso, ahora cuando lo ves bien podría ser perpendicular...

Tabla 30: Fragmento de diálogo entrevista al grupo B (Anexo 2-B)

En estas interacciones se evidencian las múltiples posibilidades que ofrece *GeoGebra* para la construcción. Las variadas herramientas posibilitan que ésta se realice a través de distintas técnicas. En este caso se puede observar claramente cómo el hecho de basarse exclusivamente en un aspecto visual no garantiza que se identifiquen correctamente las herramientas empleadas.

La entrevistadora pregunta de qué manera pueden determinar si se emplea la herramienta Recta paralela o Recta perpendicular. La estudiante J expresa que no recuerda en qué parte se encuentra disponible en *GeoGebra* una opción que permite observar los pasos en orden. La entrevistadora detalla que esa opción se denomina Protocolo de construcción y que se encuentra disponible en el menú Vista. Luego, les consulta a las estudiantes si les parece que la observación de dicho protocolo les permitiría estar seguras de las herramientas utilizadas. La respuesta de la estudiante C es que quizás sí, ya que podrían ver de esa manera qué acciones se realizan desde el principio. La entrevistadora les pregunta entonces si desean que abra el protocolo de construcción y las estudiantes responden que sí.

Luego de revisar el PC, se desarrollan las intervenciones de la Tabla 31.

27	C	Claro usó lo de paralela, no lo de perpendicular...
28	E	Bien, entonces ¿Qué herramientas se usaron?
29	C	La de recta paralela que pasa por un punto...
30	E	¿Alguna más?
31	J	Las intersecciones y la de polígono también

Tabla 31: Fragmento de diálogo entrevista al grupo B (Anexo 2-B)

Las estudiantes reconocen las herramientas utilizadas al observar los procedimientos de construcción a partir del protocolo. Además, logran determinar que la herramienta Recta perpendicular no es empleada en la construcción, aunque su utilización constituye una alternativa en la misma. Este aspecto representa un ejemplo en el que puede evidenciarse la

variedad de herramientas que pueden combinarse de manera distinta para lograr la construcción de una figura.

Al continuar con el análisis de la construcción 2, las estudiantes no solicitan que se abra el protocolo de construcción correspondiente. Comienzan, tal como en el primer caso, solamente observando la construcción.

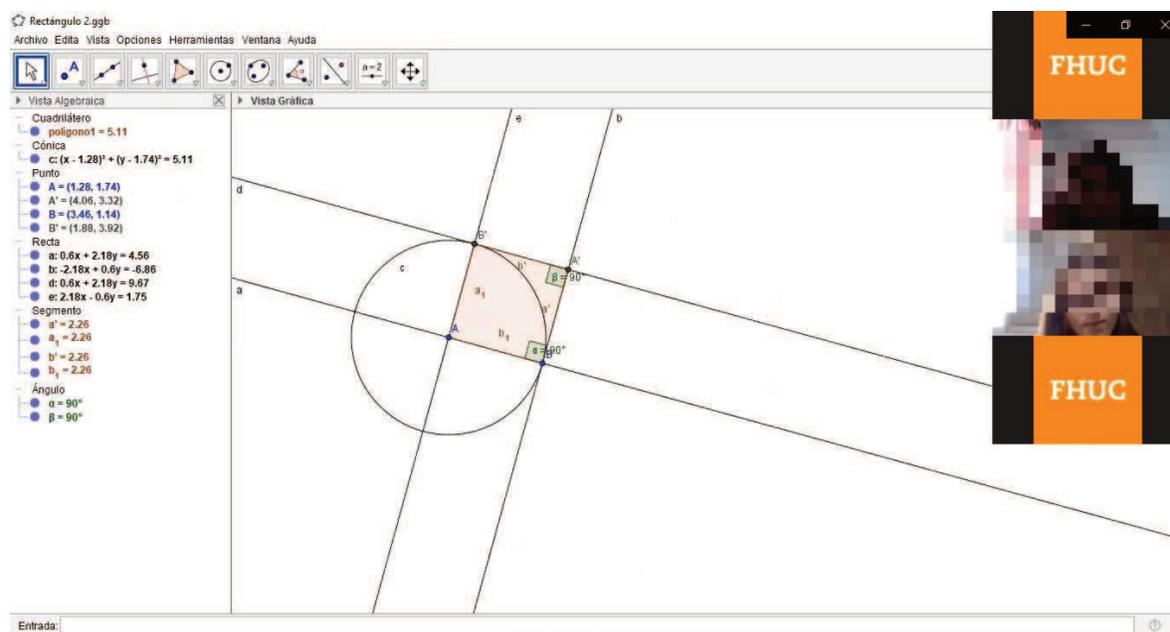


Figura 20: Construcción 2 del grupo A

Tal como se muestra en las intervenciones 38 a 49 (Anexo 2-B), donde se nombran algunas herramientas que consideran que son utilizadas en la construcción, se evidencian duda acerca de la denominación de los puntos con el símbolo ', al suponer que pueden indicar la aplicación de simetrías. Las estudiantes recurren a distintas representaciones de *GeoGebra*. Por un lado, a los dibujos en la vista gráfica y a la denominación que poseen algunos elementos. Por otro lado, apelan a la vista algebraica con la intención de determinar si se aplica o no una simetría. La estudiante C manifiesta no recordar si en la vista algebraica queda registrada de una manera particular la aplicación de simetrías. Sin embargo, las estudiantes no solicitan que se abra el protocolo de construcción en este momento. Es

luego de que la entrevistadora pregunta qué pueden hacer para identificar los pasos que las estudiantes responden que pueden determinarlos a partir del PC.

A continuación, se revisa el PC y posteriormente las estudiantes determinan algunas herramientas que son utilizadas en la construcción (intervenciones 53 a 62, Anexo 2-B).

Las estudiantes identifican que se realizan giros en la construcción. Si bien esto es correcto, es en realidad la herramienta Ángulo dada su amplitud la que se utiliza, la cual realiza una rotación. Sin embargo, en el PC no se evidencian diferencias significativas entre cómo aparece la herramienta Rotación y cómo lo hace la herramienta Ángulo dada su amplitud.

Seguidamente, la entrevistadora pregunta a las estudiantes si desean agregar algo más en relación a las herramientas utilizadas en esa construcción. La estudiante C reflexiona en torno a si es posible o no la construcción de un rectángulo no cuadrado a partir de esos pasos de construcción. Piensa que tal vez solo es posible construir un cuadrado, aunque duda acerca del objetivo del trazado de la circunferencia. Mientras se vuelve a reproducir el protocolo, dicha estudiante identifica especialmente el paso de construcción de la circunferencia, y tiene lugar un debate en el que se reflexiona acerca de la aplicación de una rotación en la construcción de un cuadrado (intervenciones 72 a 85, Anexo 2-B). La estudiante J concluye que solo se va a poder construir un cuadrado, ya que AB y BA' tienen la misma longitud. Vale aclarar que utiliza la palabra “traslada”, aun cuando no se aplica una traslación, sino una rotación (del punto A con respecto a B'). La estudiante C, por su parte, identifica el ángulo de 270° que se muestra en el protocolo.

Finalmente, ambas estudiantes concluyen en que sólo es posible construir cuadrados a partir de los pasos de construcción identificados. Sin embargo, manifiestan dudas con respecto al trazado de la circunferencia.

Este aspecto también genera incertidumbre a las alumnas del grupo A, quienes realizan esta construcción. Además, estas dificultades se extienden al proceso de identificación de propiedades empleadas en la construcción por parte de estas estudiantes. En el caso de las integrantes del grupo B, no logran comprender dicho paso de construcción, el cual surge de una decisión de las estudiantes del grupo A.

Para la identificación de herramientas en la construcción 3, comienzan de la misma manera que con las otras construcciones, a partir de realizar solo observación, a pesar de que la entrevistadora aclara nuevamente que pueden pedirle que realice cualquier acción que deseen en el archivo.

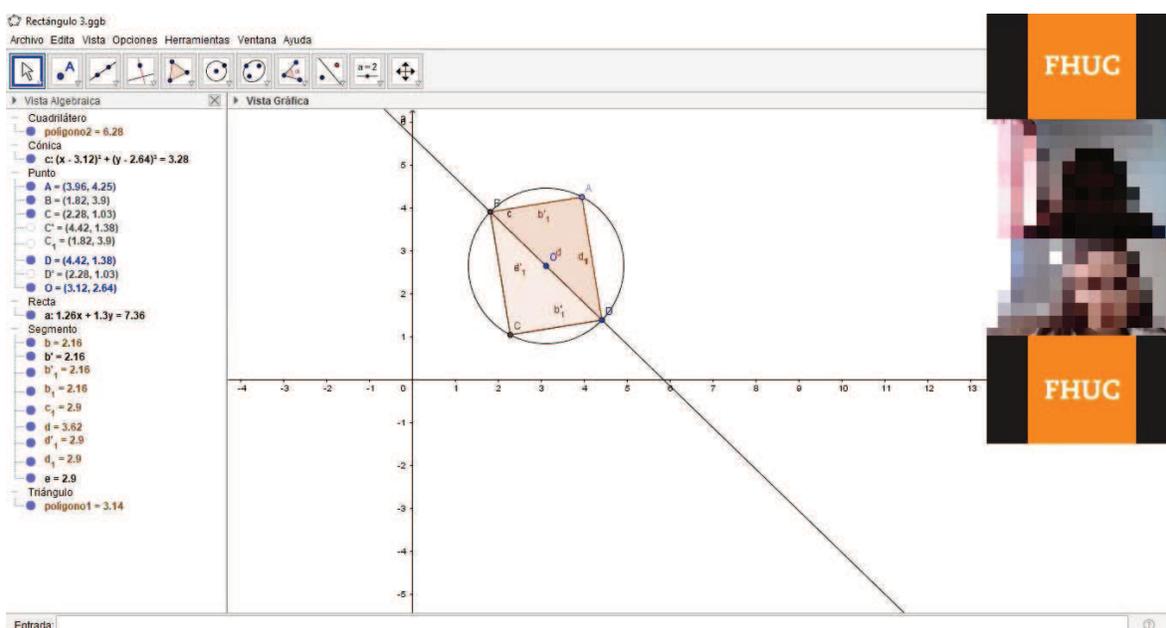


Figura 21: Construcción 3 del grupo A

Las estudiantes preguntan acerca de las distintas denominaciones del segmento BC en las intervenciones 125 a 135 (Anexo 2-B).

La entrevistadora vuelve a aclarar a las estudiantes que pueden solicitar cualquier acción sobre el archivo y les explica que la idea no es que puedan identificar herramientas sólo a partir de un análisis visual. Luego de esto manifiestan que desean abrir el PC, sobre todo para saber de qué

manera comienza la construcción. Así, las estudiantes debaten en torno a las herramientas empleadas en la construcción (Tabla 32).

151	J	Sí, me parece que es como dijo C que primero arma el triángulo, pero después bueno hacen simetría respecto de O, igual no entiendo por qué hace A, el simétrico de A que le da el D' que estaba oculto, pero de ahí podría ya como unir los puntos, pero también hace el simétrico...
152	C	Claro hace el simétrico de D que le da D' pero no se o sea qué simetría...o si hace D, a D'...que sería como... porque dice simétrico de A según O, ah claro y te da D', ah no dije nada, me había confundido con los...
153	J	Claro y después dice simétrico de D según O, pero ya tenía ese punto...
154	C	Claro, pero para mí como que hace la simetría de los tres igualmente para formar el otro triángulo
155	E	Bien, entonces, ¿Qué herramientas se usaron?
156	C	Circunferencia, bueno recta...polígono, simetría central y otra vez polígono, claro porque después termina formando en realidad el polígono con la unión de esos dos polígonos, bah que no sé si...

Tabla 32: Fragmento de diálogo entrevista al grupo B (Anexo 2-B)

Las distintas denominaciones que poseen los puntos generan dificultades a las estudiantes para identificar las herramientas utilizadas. Además, el hecho de aplicar simetría a los puntos más de una vez también presta a confusiones. Sin embargo, el hecho de recurrir al PC posibilita que puedan determinar de manera correcta las herramientas seleccionadas en el procedimiento.

4.2.2 Identificación de propiedades empleadas

Se presentan a continuación la descripción y el análisis del proceso de determinación de propiedades empleadas en las construcciones, que se desarrolla durante la primera etapa de la entrevista a cada grupo.

Entrevista al grupo A:

Las estudiantes comienzan observando la construcción 1 del grupo B. La estudiante M solicita que se reproduzca el protocolo y recurre a las

herramientas para determinar las propiedades ya que enuncia que en la construcción se trabaja con rectas perpendiculares y las rectas perpendiculares forman ángulos de 90° . La estudiante S expresa una afirmación que no es correcta: todo cuadrilátero que tiene dos ángulos de 90° es un rectángulo. Agrega que, en el caso de la construcción analizada, necesita dos rectas perpendiculares (intervenciones 149 a 157, Anexo 2-B).

La estudiante S también recurre a los pasos de construcción que fueron identificados previamente en la entrevista, ya que afirma que se construyen dos perpendiculares al segmento. Sin embargo, continúa afirmando que un cuadrilátero que tiene dos ángulos rectos es rectángulo. La investigadora decide indagar acerca de esta afirmación, y se desarrolla el diálogo de la Tabla 33.

158	E	¿Y eso lo decís porque construyó a partir de perpendiculares? ¿Pero sólo a partir de perpendiculares construyó? ¿Es correcto eso?
159	S	Eh, y bueno... y a lo último una paralela... paralela a la recta f por C, claro que sería la paralela al segmento...
160	E	¿Cuál sería la propiedad entonces?
161	S	Que un cuadrilátero que tiene dos ángulos rectos y un par de lados paralelos...
162	M	Paralelos...
163	S	Es un cuadrilátero, es un rectángulo perdón...

Tabla 33: Fragmento de diálogo entrevista al grupo A (Anexo 2-A)

En las intervenciones anteriores, la estudiante S enuncia que “un cuadrilátero con dos ángulos rectos y un par de lados paralelos es rectángulo”. De esta manera, agrega a la afirmación considerada previamente el paralelismo de un par de lados. Esto ocurre luego de recordar que en la construcción se traza una recta paralela.

En un fragmento de la entrevista (intervenciones 165 a 170, Anexo 2-A), se evidencia que la estudiante M reflexiona acerca de la afirmación de su compañera, manifestando que está de acuerdo con la misma. Sin embargo, la estudiante S duda acerca de si es necesario que se agregue

como condición el paralelismo de un par de lados reafirmando que solo con dos ángulos rectos se obtiene un rectángulo.

La investigadora continúa indagando acerca del rol de la herramienta Recta paralela en la construcción y se desarrolla un intercambio en el que las dos estudiantes responden acerca de la utilización de dicha herramienta en la construcción (intervenciones 171 a 175, Anexo 2-A).

A continuación, tienen lugar algunas intervenciones en las que ambas estudiantes enuncian propiedades que consideran empleadas, teniendo en cuenta ahora dos pares de lados paralelos y opuestos (Tabla 34).

177	S	Para mi es esa de dos ángulos... un cuadrilátero que tiene dos ángulos rectos y un par de lados paralelos, eh... es un cuadrilátero, es un rectángulo perdón, me sale cuadrilátero...
178	M	Rectángulo
179	S	Pero ese lado paralelo tiene que ser opuesto al que tiene los dos ángulos rectos...
180	E	¿Cómo sería eso?
181	S	Claro, porque al tener dos ángulos rectos ahí ya se tiene dos lados opuestos y paralelos, entonces como que también necesitamos que el otro también sea paralelo, los otros dos... entonces ahí capaz que le agregaría que sea...todo cuadrilátero que tiene dos ángulos rectos y dos pares de lados paralelos y opuestos...
182	M	Paralelos y opuestos
183	S	Claro

Tabla 34: Fragmento de diálogo entrevista al grupo A (Anexo 2-A)

La investigadora pregunta nuevamente si esas son las propiedades que consideran que se emplean en la construcción. La estudiante M contesta que sí y solicita que se revise una vez más el PC. Luego de esa acción sobre el archivo, expresan que esas son las propiedades que efectivamente se emplean.

Dado que las tres construcciones se encuentran en el mismo archivo, el hecho de que se abra el protocolo para la construcción 1 y se reproduzcan los pasos, posibilita que las otras figuras construidas no se encuentren en

la pantalla. Por esta razón, se continúan reproduciendo los pasos en el protocolo para generar la construcción 2.

La estudiante S solicita que se vuelva a reproducir el PC, por lo que se realiza esta acción nuevamente.

La estudiante M alude a la utilización de la herramienta Segmento en la construcción. La estudiante S, por su parte, se refiere a la posibilidad de que se empleen propiedades de las diagonales del rectángulo. Sin embargo, descarta que esto ocurra recurriendo al tipo de simetría que se aplica en la construcción (intervenciones 203 y 204, Anexo 2-A)

A continuación, las estudiantes se refieren a que los lados opuestos del rectángulo tienen la misma longitud. Recurren a una propiedad conocida del rectángulo y la relacionan con los procedimientos de construcción, particularmente con la simetría axial que se aplica. Como se evidencia en las intervenciones 206 a 214 (Anexo 2-A), relacionan la aplicación de la simetría axial con los lados iguales del rectángulo.

La investigadora indaga acerca de las propiedades empleadas en la construcción, y surge un diálogo en el que la estudiante S se refiere a la perpendicularidad y al paralelismo de lados del rectángulo. Las estudiantes recuperan los procedimientos de construcción, relacionando la simetría axial que se aplica con la perpendicularidad y el paralelismo de lados del rectángulo. Puede evidenciarse que las propiedades que nombran no son expresadas de manera clara ni concreta. Esto puede ser lo que genere algunas dificultades por parte de la estudiante M en entender a qué se refiere específicamente la estudiante S (intervenciones 216 a 229, Anexo 2-A).

A continuación, la estudiante S solicita que se muestre en el archivo la recta k , ya que figura como objeto oculto. Se realiza esta acción y a continuación se genera el intercambio que presenta la Tabla 35.

231	M	Paralela a j por G , y si, j debe ser la que tiene al segmento EF
232	S	Claro
233	E	¿Qué pasaría si k no sería paralela al segmento EF ?
234	S	Y se podría haber formado un paralelogramo pero que no sea rectángulo
235	E	Entonces, ¿Qué propiedades se emplearon?
236	S	La de que todo cuadrilátero cuyos lados paralelos y opuestos tienen la misma longitud y dos pares de lados consecutivos forman 90 grados es un rectángulo, o sea esa propiedad del ángulo recto tiene que estar...
237	M	Si
238	S	Porque si no, no se forma el rectángulo
239	E	¿M estás de acuerdo con esa propiedad que enunció recién S?
240	M	Sí, no sé si así redactada, como era la propiedad, pero esas ideas, sí

Tabla 35: Fragmento de diálogo entrevista al grupo A (Anexo 2-A)

Puede observarse en el diálogo anterior que la estudiante M se refiere a la manera en que se enuncian las propiedades, ya que hace alusión a la redacción de las mismas, aunque aclara que acuerda con las ideas que se expresan en relación a las propiedades empleadas en la construcción.

Seguidamente, la investigadora pregunta si desean mencionar alguna propiedad más que consideran que fue empleada en la construcción. La estudiante M contesta que no, y la estudiante S se refiere al eje de simetría del rectángulo, aunque no termina de determinar la propiedad con claridad y ambas estudiantes deciden sólo considerar las nombradas anteriormente (intervenciones 243 a 246, Anexo 2-A). También pueden evidenciarse imprecisiones con respecto al lenguaje utilizado, por ejemplo, la expresión “partes de la simetría”.

Para el análisis de la construcción 3, se procede de la misma manera que en la construcción 2 y se repasa el PC una vez más ya que la estudiante M lo solicita.

La estudiante S pregunta a la investigadora si las propiedades que deben identificar son del rectángulo particularmente o pueden ser también

de la circunferencia. La respuesta que le da la entrevistadora es que deben determinar propiedades empleadas.

En el siguiente diálogo, la estudiante S recurre a la construcción de la circunferencia para referirse a una propiedad empleada (Tabla 36).

257	S	O sea yo partiría de lo que es la paralela a la recta, que se trazó antes, que interseca a la circunferencia y esas intersecciones de las paralelas forman segmentos perpendiculares, y ahí si es una propiedad de la circunferencia
258	E	¿Cuál sería la propiedad de la circunferencia?
259	S	Eh, o sea la circunferencia sería simétrica por el diámetro y...

Tabla 36: Fragmento de diálogo entrevista al grupo A (Anexo 2-A)

A continuación, la estudiante M solicita que se muestren algunos pasos de construcción previos a los que se presentan en pantalla. Así, se muestran los primeros renglones de las columnas del PC, aunque sin reproducir los pasos correspondientes.

La investigadora indaga acerca de los pasos de construcción realizados y su relación con las propiedades que se emplean (intervenciones 265 a 279, Anexo 2-A). Las estudiantes recurren a los pasos de construcción para identificar las propiedades empleadas en las tres construcciones. En la intervención 275 (Anexo 2-A) se enuncia como propiedad empleada que “las longitudes de las diagonales del rectángulo son iguales”, a partir de identificar el trazado de la circunferencia en la construcción.

Las estudiantes de este grupo, en la determinación de propiedades empleadas en las tres construcciones, solicitan que se realicen acciones sobre el archivo con el objetivo de determinar los pasos de construcción llevados a cabo.

En síntesis, las propiedades empleadas en las construcciones del grupo B, determinadas por el grupo A, son:

Construcción 1:

Mencionan como propiedad empleada que un cuadrilátero que tiene dos ángulos rectos y dos pares de lados paralelos y opuestos es un rectángulo.

Construcción 2:

Se refieren a dos propiedades de simetría axial, aunque no las nombran claramente en esta parte de la entrevista:

- La distancia de un punto y su homólogo a partir de una simetría axial, al eje de simetría es la misma.
- El segmento que une puntos homólogos a partir de una simetría axial es perpendicular al eje de simetría.

Además, mencionan como propiedad empleada que todo cuadrilátero cuyos lados paralelos y opuestos tienen la misma longitud y dos pares de lados consecutivos forman 90 grados es un rectángulo. También se refieren a la recta k como el eje de simetría del rectángulo, aunque deciden no nombrar la propiedad relacionada.

Construcción 3:

Mencionan como propiedades empleadas:

- Un cuadrilátero que tiene dos ángulos rectos y dos pares de lados paralelos y opuestos es un rectángulo.
- Las longitudes de las diagonales del rectángulo son iguales.

Entrevista al grupo B

Las estudiantes del grupo B comienzan el proceso de identificación de propiedades con la construcción 3 del grupo A, que es la que se encuentra presentada en la pantalla, con el protocolo de construcción, luego de finalizar el proceso previo de identificación de herramientas, en la entrevista.

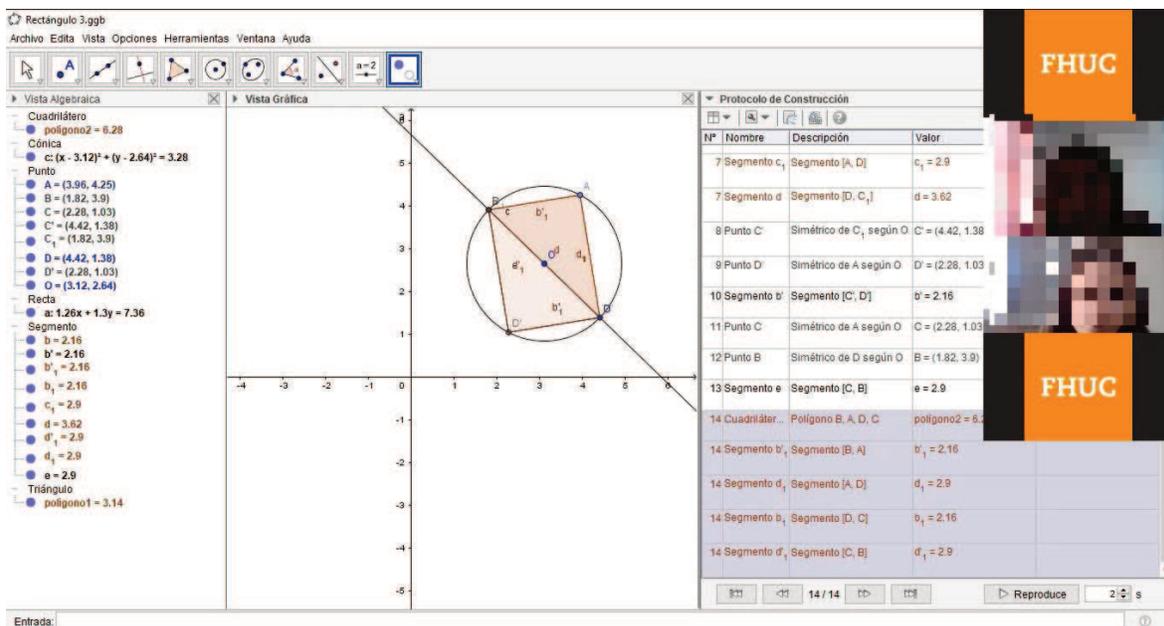


Figura 22: Construcción 3 del grupo B

Las estudiantes mencionan algunas propiedades haciendo referencia a ciertas afirmaciones que realizaron anteriormente en la entrevista, en relación a la construcción. Así, determinan una propiedad empleada en la construcción, relacionada con el trazado de un ángulo recto (intervenciones 160 a 167, Anexo 2-B).

La investigadora indaga acerca de qué otra propiedad se emplea y la estudiante J menciona que se aplican propiedades de la simetría central. La estudiante C cuestiona si se trata de identificar propiedades específicas del rectángulo. La investigadora aclara que se refiere a propiedades que se emplean. A continuación, la estudiante J desarrolla las propiedades relacionadas a la simetría central, a las que se refiere anteriormente.

Por su parte, la estudiante C manifiesta estar pensando en congruencia de triángulos en la construcción, aunque no nombra la propiedad de manera específica, dado que considera que la congruencia se justifica con la simetría central (intervenciones 182 a 184, Anexo 2-B).

Luego de que la entrevistadora pregunte si identifican alguna otra propiedad empleada, la estudiante C manifiesta que desea continuar con el análisis de otra construcción, dado que tal vez, el hecho de identificar otras propiedades, permite que determinen si también fueron utilizadas en ésta.

Las estudiantes continúan analizando las propiedades empleadas en la construcción 1. Así, se presenta el archivo tal cual como quedó luego de haberlo abierto para trabajar en la identificación de herramientas. De esta manera, se pueden observar la construcción y el protocolo correspondiente (Figura 23).

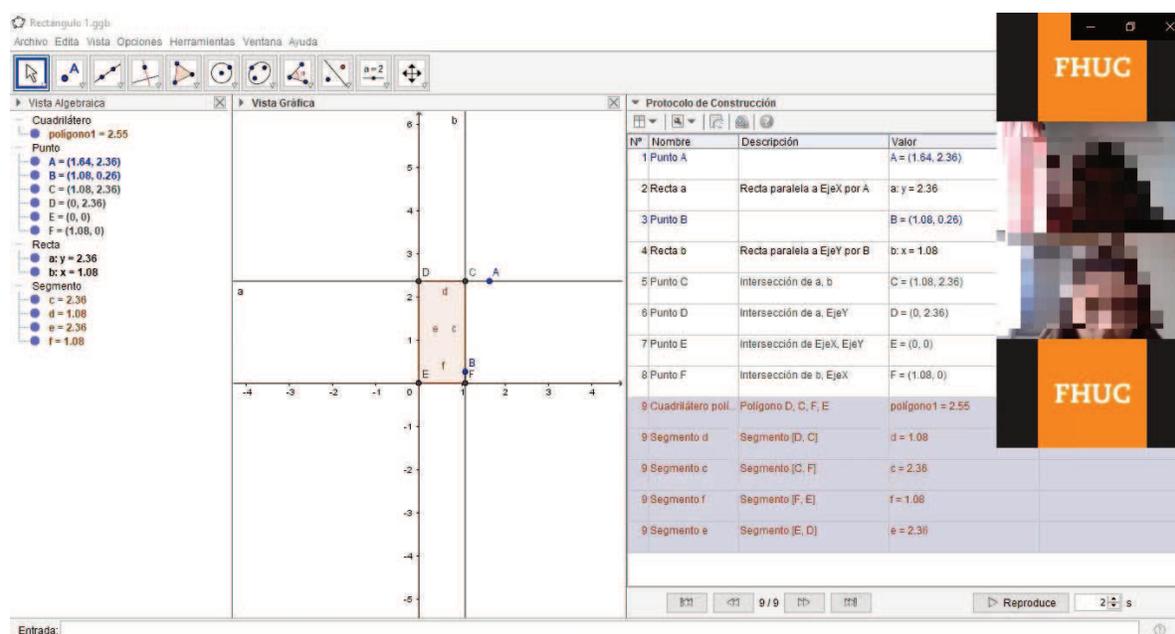


Figura 23: Construcción 1 del grupo B y su PC

La estudiante C nombra propiedades empleadas en la construcción, y se refiere especialmente al rol que juegan los ejes cartesianos en la misma (Tabla 37).

194	C	El paralelismo entre lados, ángulos rectos... sí, yo creo que acá más de paralelismo entre rectas y perpendicularidad no sé si hay otras... porque este se había hecho así creo, punto, la paralela, intersecciones...no en este no se usaba perpendicular, claro...
-----	---	--

195	E	Bueno, ¿Entonces cuál sería la propiedad?
196	C	El paralelismo entre rectas creo yo
197	E	Bueno
198	C	Porque no usaba... sería la perpendicularidad si no que usaba con la intersección de los ejes y hacía las paralelas
199	E	¿Y así se asegura que queda rectángulo?
200	C	Porque se guía de los ejes me parece, porque lo hace paralelo al eje x y paralelo al eje y... creo que en ese sentido se asegura la perpendicularidad
201	E	Bueno
202	E2	Porque usa los ejes, ¿Y qué tienen los ejes?
203	C	Son perpendiculares
204	E2	Claro
205	C	Son rectas perpendiculares...claro porque creo que el de la circunferencia ese como que escondía los ejes y lo hacía sería como sin referencia, creo que eran dos me parece, entonces en esta como que se basa en la perpendicularidad de los ejes
206	E	¿Esa sería otra propiedad que se aplicó?
207	C	Si para mí sí, es como algo, como una referencia, o sea es una propiedad de los ejes, si, y lo toma como referencia

Tabla 37: Fragmento de diálogo entrevista al grupo B (Anexo 2-B)

Se evidencia a partir del diálogo anterior que la estudiante C relaciona los pasos de construcción en los que se utilizan los ejes con las propiedades empleadas. Además, compara estos pasos con los realizados en la construcción 3, en la que no se utilizan los ejes como referencia.

Las estudiantes continúan analizando la construcción 2. Se presenta el archivo tal como queda luego de la identificación de herramientas utilizadas. Se pueden observar entonces, vista gráfica, vista algebraica y PC (Figura 24).

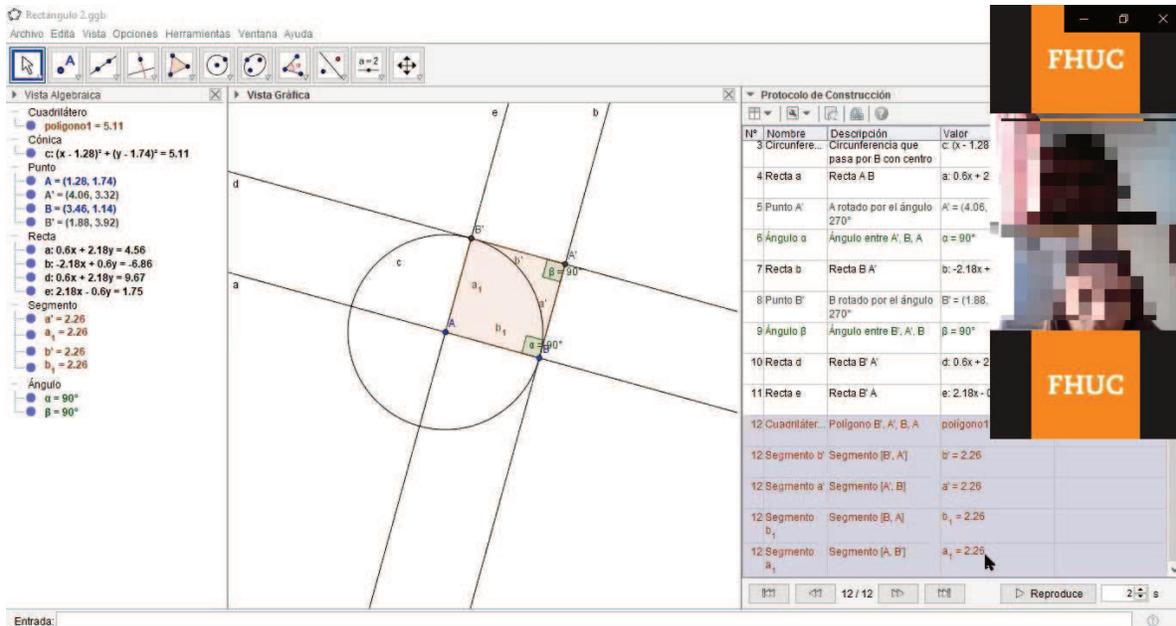


Figura 24: Construcción 2 del grupo B y su PC

Las estudiantes comienzan nombrando propiedades empleadas relacionadas con la utilización de rotaciones en la construcción. Sin embargo, manifiestan tener dudas con respecto al centro de rotación, teniendo en cuenta que la amplitud utilizada no es 90° , si no 270° . La estudiante C, por su parte, solicita ver nuevamente este paso en la construcción, por lo que se revisa el PC (intervenciones 215 a 222, Anexo 2-B)

La estudiante C solicita conocer qué pide como datos la herramienta Rotación del software, dado que, para realizar dicha construcción, ella no hubiese utilizado un ángulo de rotación de 270° , sino uno de 90° . Así, se puede observar que para utilizar dicha herramienta se debe seleccionar el objeto a rotar, el centro de rotación y la amplitud del ángulo (Figura 25).

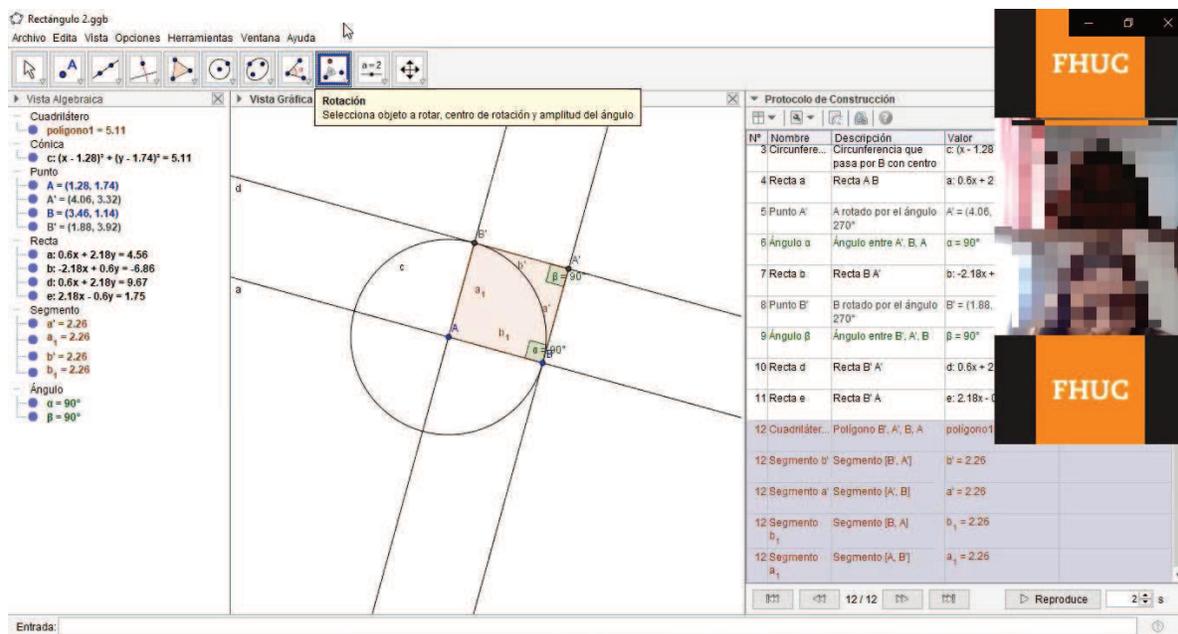


Figura 25: Herramienta rotación, en construcción 2 del grupo B

A continuación, se analiza el protocolo de construcción con la intención de determinar cuál es el punto considerado como centro de rotación (intervenciones 232 a 242, Anexo 2-B). Las intervenciones anteriores muestran que se interroga a la construcción acerca de los procedimientos utilizados a partir de los elementos disponibles. En el protocolo de construcción no es posible identificar el centro de rotación considerado. No obstante, a partir de las aclaraciones realizadas por las entrevistadoras las estudiantes logran determinar por qué se utiliza una amplitud de 270° . Es necesario señalar que no es la herramienta Rotación la que se utiliza en la construcción, si no la herramienta Ángulo dada su amplitud, que efectúa una rotación. Sin embargo, en ambas herramientas, *GeoGebra* establece un ángulo de rotación en sentido antihorario por defecto, aunque puede modificarse seleccionando sentido horario dentro de las opciones.

El diálogo continúa y la estudiante C menciona una propiedad relacionada con el ángulo recto construido (intervención 252, Anexo 2-B).

A continuación, las intervenciones giran en torno al rol de la circunferencia dentro de la construcción. Las estudiantes afirman que el cuadrado analizado no requiere del trazado de la circunferencia para su construcción (intervenciones 254 a 264, Anexo 2-B).

Resulta interesante destacar que las estudiantes consideran que la circunferencia trazada, si bien no juega un rol necesario en la construcción, posibilita que se visualice la igualdad de los lados del rectángulo. Además, la estudiante C reflexiona en torno a otra propiedad que puede ser empleada en la construcción: “dos rectas perpendiculares a otra recta son paralelas entre sí”. Esto se desarrolla con más profundidad en las intervenciones 269 a 287 (Anexo 2-B).

Las estudiantes de este grupo recurren a las herramientas involucradas en los procedimientos de construcción para la determinación de propiedades empleadas en las tres construcciones. Además, logran establecer comparaciones entre las distintas construcciones del grupo A, en cuanto a las herramientas y propiedades utilizadas en cada una.

En síntesis, el grupo B, a partir de analizar las construcciones del grupo A, determina las siguientes propiedades empleadas:

Construcción 1:

Mencionan como propiedades empleadas el paralelismo entre lados del rectángulo y la perpendicularidad de los ejes cartesianos.

Construcción 2:

De lo que las estudiantes expresan se infiere que se refieren a dos propiedades:

- Un segmento y su homólogo a partir de una rotación tienen la misma longitud.

- Dos rectas perpendiculares a una misma recta son paralelas entre sí.

Construcción 3:

De lo expresado por las estudiantes se infiere que se refieren a dos propiedades:

- Si un ángulo inscrito en una circunferencia subtiende un diámetro de la misma, es recto.
- Un punto y su homólogo a partir de una simetría central están a la misma distancia del centro de simetría.

Cabe destacar que en un tramo posterior de la entrevista logran probar el paralelismo de lados del rectángulo e identificar esa propiedad como empleada en esta construcción.

4.2.3 Definiciones de rectángulo

Se presenta en este apartado la descripción y análisis de la segunda etapa de las entrevistas, en relación con el análisis y comparación de definiciones de rectángulo.

Entrevista al grupo A

Se presenta a las estudiantes la definición de rectángulo expresada por el grupo B (Tabla 38).

Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos y dos pares de lados opuestos paralelos e iguales.

Tabla 38: Definición de rectángulo del grupo B

La entrevistadora les pregunta a las estudiantes si las construcciones analizadas se corresponden con la definición presentada. Las dos estudiantes responden que sí. La estudiante S manifiesta que la definición presentada es “bien completa”. Luego, establece relación entre la condición de ángulos rectos en la definición y la herramienta Recta perpendicular

empleada en las construcciones. También, relaciona la condición de lados opuestos paralelos con la herramienta Recta paralela aplicada. La misma estudiante afirma que, en el caso de la construcción 2, la simetría aplicada (axial) se relaciona con la condición de lados opuestos iguales. Aclara además que la condición de ángulos rectos y de dos pares de lados paralelos también se cumple en dicha construcción.

En la Tabla 39 que se presenta a continuación, se desarrollan intervenciones en torno a la construcción 2.

317	S	O sea incluso me parece que esa es la construcción que más se ve en la que utiliza esa definición
318	E	¿Por qué?
319	S	Y, más que nada o sea relacionándolo con la simetría que conservan las medidas, conserva el paralelismo, la perpendicularidad entonces como que estaría usando esa definición
320	E	¿Y en el caso de las otras?
321	S	En las otras más que nada vería lo de los lados paralelos y los cuatro ángulos rectos
322	E	¿Pero son rectángulos según esa definición?
323	S	Eh, si
324	M	Si si, estaba pensando cómo era la definición de rectángulo que nos mostró recién, pero sí, para mí son rectángulos

Tabla 39: Fragmento de diálogo entrevista al grupo A (Anexo 2-A)

Se indaga acerca de la construcción 2 y la definición de rectángulo considerada. Tienen lugar las intervenciones de la Tabla 40.

326	M	No sé si la que más se cumple, si no yo pondría como la más directa para mí, que quiere decir S, que se ve esas propiedades en cuanto al aplicar la simetría, por las propiedades justamente que tiene la simetría, no sé si a eso te referías S
327	S	Si si, a eso, porque en la primera no se ve tanto lo de los lados iguales, porque al construir nomás las perpendiculares y las paralelas como que por ahí eso mucho lo de los lados iguales no sé si queda, bueno en este caso también quedaría, pero no se ve directo
328	E	¿Y en la otra?

329	S	Y en la otra, si, también diría que se ve y esto también lo que había dicho de las diagonales, que las diagonales del rectángulo son iguales, pero que bueno en este caso no estaría en la definición
330	M	¿Pero se corresponden o no?
331	S	Si, se corresponden...

Tabla 40: Fragmento de diálogo entrevista al grupo A (Anexo 2-A)

La entrevista continúa proponiendo a las estudiantes la comparación entre la definición anterior y la considerada por ellas (Tabla 41)

Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos y al menos uno de sus ángulos mide 90° .

Tabla 41: Definición de rectángulo del grupo A

Se establece un debate en el que se hace alusión a la economía de la segunda definición (Tabla 42).

337	M	En la segunda definición te pide solo lados opuestos paralelos y no te pide la igualdad
338	S	Ajá...
339	M	Y bueno, y lo de al menos un ángulo recto, en la otra teníamos todos sus ángulos rectos
340	S	Claro, coinciden en cuanto a que los dos pares de lados opuestos son paralelos, pero no dice que sean iguales en la segunda, y en la primera te pide que sí o sí todos sus ángulos sean rectos y en la otra al menos uno, y ahí podría ser que uno sea que tenga el ángulo de 90
341	E	¿En la primera?
342	S	En la segunda, ¿Se podría dar el caso que tenga un solo ángulo de 90 ? porque dice al menos uno, o sea, puede ser uno, dos...
343	E	¿Definen lo mismo?
344	S	Si, para mí en ambos casos se define el rectángulo, solo que en la segunda como que es más concisa
345	E	¿Por qué sería más concisa?
346	S	Porque solamente nombra digamos lo mínimo y necesario para que sea un rectángulo, porque si uno nombra que solamente tenga el ángulo de 90 como que no se podría formar el rectángulo y por eso agrega lo de que tiene dos pares

		de lados opuestos paralelos, como que eso es lo mínimo que uno puede decir en la segunda definición
--	--	---

Tabla 42: Fragmento de diálogo entrevista al grupo A (Anexo 2-A)

La entrevistadora pregunta qué dice de más la primera definición y la estudiante S responde que lo que dice de más es que “todos los ángulos tienen que ser rectos y que los lados opuestos son iguales”.

A continuación, tienen lugar interacciones al respecto de cuál de las definiciones se considera más adecuada por parte de las estudiantes (Tabla 43).

353	E	¿Por cuál se inclinarían entonces de las dos? ¿Cuál les parece que sería más adecuada?
354	S	Yo iría por la segunda en cuanto a una definición para rectángulo, pero si estoy usando la definición en las construcciones iría más la primera
355	E	¿Por qué?
356	S	No sé, siento como que la primera definición uno podría estar realizando distintas construcciones en la primera y llegando al rectángulo, en cambio como que la segunda definición por ahí al ser más concisa no te permite pensar en otras construcciones
357	M	Para mí es al revés
358	S	¿Al revés?
359	M	Yo entiendo como que la segunda es una definición más amplia de rectángulo mientras que la primera te dice todos sus lados iguales y los cuatro ángulos rectos, para mí esa es más concisa, no sé a qué te referís con concisa. Para mí la segunda es una definición más amplia, porque lo de los lados iguales no está, y al menos un ángulo de 90 te dice... mientras que la primera te dice los cuatro ángulos rectos y los lados opuestos paralelos iguales, no sé yo veo la segunda definición como una definición más amplia de rectángulo
360	S	Claro, pero como que ahí... para mí sería más amplia en cuanto a que nombra más propiedades del rectángulo en la primera definición, y en la segunda definición como que nombra las propiedades mínimas que tiene que tener
361	M	Sí, eso sí
362	S	El cuadrilátero para que sea un rectángulo
363	E	¿Definen lo mismo?
364	S	Sí, para mí sí, en ambas define lo que es un rectángulo

Tabla 43: Fragmento de diálogo entrevista al grupo A (Anexo 2-A)

Puede observarse que las estudiantes reflexionan en torno a criterios para determinar qué definición es mejor. Identifican la definición que menciona más propiedades y determinan cuál es la definición que les permite probar de manera más sencilla que una figura construida es un rectángulo (Tabla 44).

365	E	Si tendría que probar si una figura es rectángulo, ¿Con cuál de las dos definiciones les parece que sería mejor, o más adecuado, o más sencillo?
366	S	Para mí sería la segunda
367	M	Si, en cuanto a más sencillo para mí, si, la segunda
368	E	¿Por qué?
369	M	Porque bueno, no te pide necesariamente la igualdad de los lados opuestos y con al menos un ángulo recto, en comparación del otro tenés, bueno como dijimos hoy, tenés los lados opuestos paralelos iguales y los cuatro ángulos rectos
370	E	¿S estás de acuerdo?
371	S	Sí, estoy de acuerdo

Tabla 44: Fragmento de diálogo entrevista al grupo A (Anexo 2-A)

Entrevista al grupo B

Las estudiantes del grupo B comienzan leyendo la definición de rectángulo del grupo A (Tabla 45), la cual se les presenta en pantalla.

Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos y al menos uno de sus ángulos mide 90° .

Tabla 45: Definición de rectángulo del grupo A

La estudiante J se refiere a la construcción 1, afirmando que las rectas paralelas trazadas y el ángulo recto que forman los ejes x e y aseguran que dicha construcción se corresponda con la definición presentada.

Ambas estudiantes analizan la construcción 2 sosteniendo que las rotaciones realizadas en la misma aseguran que se cumpla que al menos

uno de los ángulos mida 90° . Así, afirman que la construcción 2 también se corresponde con la definición.

Con respecto a la construcción 3, manifiestan no recordar los pasos de la misma, por lo que ésta se presenta en pantalla, con el PC correspondiente (Figura 26).

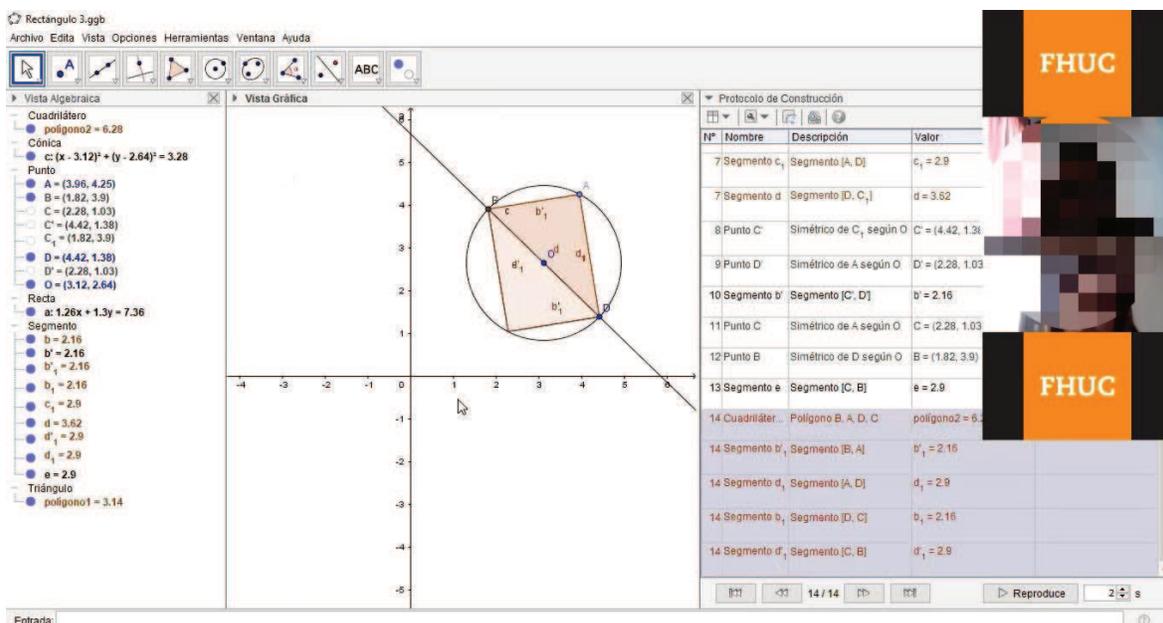


Figura 26: Construcción 3 del grupo A y su PC

Se genera el siguiente diálogo en el que se recuperan propiedades empleadas en la construcción (Tabla 46).

321	C	Claro, ahí para mí el ángulo recto ya se lo asegura con la propiedad que había dicho yo antes, de que usás el diámetro como lado del triángulo y bueno cualquier punto que tomes en la circunferencia, el ángulo que va a formar ahí va a ser recto
322	J	Y con la simetría central también lo de las paralelas
323	C	Eso

Tabla 46: Fragmento de diálogo entrevista al grupo B (Anexo 2-B)

La entrevistadora pregunta si la construcción 3 cumple con las condiciones expresadas en la definición. La estudiante J responde que sí, y

se llevan a cabo ciertas intervenciones en torno a propiedades empleadas en la construcción que no habían sido consideradas por las estudiantes anteriormente en la entrevista. Así, logran probar el paralelismo de lados en la figura (intervenciones 326 a 344, Anexo 2-B). Ambas estudiantes afirman que la construcción se trata de un rectángulo según la definición presentada. La estudiante J se refiere a las particularidades de la construcción 3 con respecto a las otras dos en cuanto a la facilidad para determinar si se corresponde o no con la definición. Esto se desarrolla en las intervenciones 345 a 349 (Anexo 2-B).

Se les presenta la definición de rectángulo expresada por ellas mismas (Tabla 47), con el objetivo de que establezcan una comparación entre ambas definiciones.

Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos y dos pares de lados opuestos paralelos e iguales.

Tabla 47: Definición de rectángulo del grupo B

Las estudiantes mencionan que la definición de la Tabla 47 contiene información de más y proponen reformularla como “Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos” (intervenciones 367 a 384, Anexo 2-B). En la intervención 380 la estudiante C manifiesta dentro de los criterios solicitados a la definición la confusión que puede causar en un estudiante la cantidad de información que establece.

La entrevistadora pregunta si ambas definiciones se refieren a un rectángulo. La estudiante J menciona que aquella información que está de más en la segunda definición presentada corresponde a propiedades del rectángulo en este caso (intervenciones 389 a 403, Anexo 2-B).

Seguidamente, se indaga acerca de cuál es la definición por la que se inclinan las estudiantes. La estudiante C responde que elige la primera que se analiza en la entrevista, en este caso la definición presentada por el grupo

A. Tal como se evidencia en su respuesta, dicha estudiante considera que esa definición posibilita que se relacionen cuadriláteros, tales como rectángulos y cuadrados entre sí (intervenciones 404 a 409, Anexo 2-B)

4.3 Mirada holística de las producciones

En este apartado se exponen algunas consideraciones que surgen del análisis y descripción de lo acontecido en la resolución del problema por parte de los estudiantes y en las entrevistas, a la luz de la orientación teórica de la investigación.

4.3.1 Producción de construcciones de rectángulo

Se presentan algunas reflexiones que corresponden al trabajo de las estudiantes en la resolución de la consigna a) del problema, en cuanto a la producción de construcciones dinámicas de rectángulo.

Tipos de construcciones

Las construcciones de rectángulo realizadas por los dos grupos de estudiantes son robustas, según la categorización de Healy (2000). Todas las construcciones efectuadas por los dos grupos cumplen con las propiedades geométricas esperadas de rectángulo, y a través del desplazamiento o arrastre es posible generar distintos rectángulos.

La construcción 2 del grupo A corresponde a un cuadrado, caso particular de rectángulo. En ella es posible generar distintos cuadrados efectuando el desplazamiento de objetos libres. No es posible encontrar a partir de la misma rectángulos no cuadrados. El hecho de considerar un caso particular produce algunas dificultades para identificar propiedades empleadas en las construcciones y propiedades que se pueden deducir de las mismas, coincidiendo con Freyre y Mántica (2021). Las propiedades que se ponen en juego provienen del cuadrado, caso particular de rectángulo construido. No se evidencia que estas estudiantes deliberen expresamente sobre las funciones importantes de la clasificación jerárquica de cuadriláteros utilizada, mencionadas por De Villiers (1994).

El arrastre como medio de validación

Ambos grupos realizan operaciones de arrastre o desplazamiento de objetos libres en algunas de sus construcciones. El objetivo de las acciones de arrastre de las estudiantes de ambos grupos es la validación de la construcción. De esta manera, validan las construcciones según lo definen Novembre et al. (2015), a partir del desplazamiento de puntos libres y del relato de la construcción y las propiedades puestas en juego. Con respecto a estas últimas, en el caso del grupo A no se explicitan de manera concreta, separadas de los procedimientos empleados y en el caso del grupo B, no se mencionan todas.

En el caso de la construcción 2 del grupo A, se consigue validar la construcción a través del desplazamiento de un punto. Tal como afirma González López (2001), el recurso del desplazamiento o arrastre, desde una visualización dinámica, se convierte en un medio para la reflexión sobre las decisiones que se tomaron al elaborar la construcción.

En el caso del grupo B, las estudiantes no mencionan de manera explícita las propiedades que emplean en la construcción 1, aunque efectúan el desplazamiento de puntos libres para validarla. Para esto, retoman los pasos de construcción y reflexionan sobre el establecimiento o no de puntos fijos, mientras realizan desplazamientos de puntos, generando distintas posiciones del rectángulo construido. De esta manera, como sostiene Restrepo (2008), verifican que la construcción conserva las propiedades invariantes del estado inicial, lo que permite asegurar que es válida.

El entorno informático, constituido por el SGD, permite que se considere la variabilidad de los elementos de los objetos geométricos y de su dominio de variación. De esta manera, como plantea Laborde (1997), permite que se pongan en evidencia los límites del dominio de

interpretación. En este sentido las estudiantes de ambos grupos, al deformar el dibujo en cada una de las construcciones en las que realizan desplazamientos, analizan qué ocurre con las propiedades que atribuyen al objeto a partir de una lectura en un dibujo estático. Así, amplían el dominio de interpretación, descalifican interpretaciones no pertinentes, y concluyen finalmente que la construcción es válida para responder a la consigna de la actividad.

Puede observarse en ambos grupos de qué manera la práctica del arrastre brinda aspectos de retroalimentación, al observar el modo en que se modifican formas y posiciones de los rectángulos construidos. Así, se ponen en evidencia las características del arrastre que estudia Arzarello (2001), como una herramienta que contribuye a considerar a las construcciones como entidades con un nuevo status, mediando en una relación teórica perceptual de los objetos geométricos, en este caso del rectángulo.

Herramientas del software y procedimientos de construcción:

González y Lupinacci (2012) sostienen que las herramientas que están disponibles en *GeoGebra* influyen significativamente en la elección de los procedimientos de construcción. Si bien es posible personalizar la barra de herramientas dejando solo algunas activas, en los casos analizados se trabaja con la barra de herramientas sin restricciones.

Las estudiantes del grupo A utilizan en la construcción 1 las herramientas Recta paralela, Intersección y Polígono. En la construcción 2 emplean Circunferencia (centro, punto), Ángulo dada su amplitud y Polígono. En la construcción 3 usan las herramientas Circunferencia (centro, punto), Punto, Segmento, Simetría central y Polígono.

Las estudiantes del grupo B utilizan en la construcción 1 las herramientas Segmento, Punto, Recta perpendicular, Recta paralela, Intersección y

Polígono. En la construcción 2 hacen uso de Segmento, Punto, Simetría axial, Recta paralela, Ángulo y Polígono. En la construcción 3 emplean las herramientas Circunferencia (centro, punto), Punto, Segmento, Recta perpendicular, Intersección y Polígono.

Las estudiantes del grupo B, específicamente en la construcción 2, marcan un ángulo interior del cuadrilátero a partir de la herramienta de medición Ángulo, que según González López (2001) constituye una herramienta analítica que posibilita medir una amplitud definida gráficamente. Con la mera aplicación de la misma, las estudiantes comprueban y se aseguran que el ángulo es recto, dado que no emplean propiedades geométricas para justificar su amplitud. Como afirman Sánchez y Prieto (2019), no relacionan explícitamente un aspecto espacial del dibujo con las propiedades teóricas de los objetos geométricos. Reconocen visualmente que el ángulo es recto, pero no vinculan dicha propiedad espacial a las propiedades geométricas asociadas. De este modo, realizan una constatación empírica a través del empleo de herramientas del software, considerando la respuesta en el dibujo que obtienen al observar el ángulo recto, como una respuesta en la teoría. Así, el valor de evidencia que proveen las construcciones dinámicas puede posibilitar que no se realicen cuestionamientos acerca de las propiedades geométricas en las mismas. Como afirma Chazán, citado en Larios y González González (2010), se transforma la prueba en evidencia y la evidencia en prueba, dado el valor de evidencia que brindan las imágenes dinámicas y puede producirse una falta de necesidad de elaboración de justificaciones.

Es importante destacar que ambos grupos consideran realizar una simetría axial con respecto a un lado de un triángulo rectángulo para generar el rectángulo. En el caso del grupo A, las estudiantes construyen un cuadrilátero con la herramienta Simetría axial y concluyen que no logran construir un rectángulo con ese procedimiento luego de ver la figura que se

muestra en la pantalla. Se produce de esta manera una sorpresa entre la figura que esperan construir y la que efectivamente se genera en la pantalla del SGD a partir de las herramientas utilizadas. Arcavi y Hadas (2000) sostienen que estas sorpresas contribuyen a que los estudiantes comprendan la necesidad de elaborar justificaciones. Sin embargo, si bien el software les brinda como retroalimentación externa una figura que no es rectángulo (Figura 27), las estudiantes no elaboran justificaciones ni se plantean por qué la figura que obtienen no es un rectángulo.

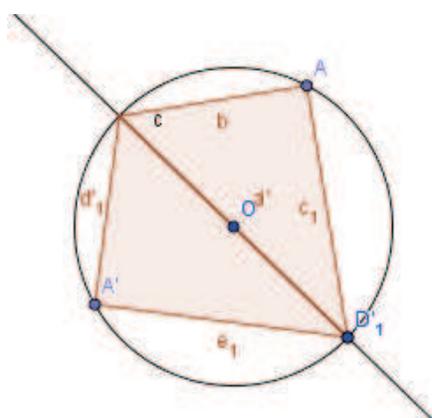


Figura 27: Figura obtenida al aplicar simetría axial en la elaboración de la construcción 3 del grupo A

Es importante destacar que una estudiante se refiere a las características del triángulo al cual se le aplica simetría, sugiriendo que sea isósceles⁵. La acción de aplicar simetría axial a un triángulo isósceles rectángulo con respecto a una recta que incluya a la hipotenusa posibilita que se construya un cuadrado, caso particular de rectángulo. Sin embargo, este procedimiento no es realizado por las estudiantes, solo insinuado por una de ellas. De esta manera, realizan una construcción en *GeoGebra* comunicando procedimientos y logrando un dibujo como representante de la figura (Novembre et al., 2015). Tampoco realizan arrastre o desplazamiento del punto A sobre la circunferencia antes o después de

⁵ Intervenciones 46, 50, 52 y 59 (Anexo 1-A)

aplicar la simetría axial, exploración que permitiría reflexionar acerca de qué condiciones aseguran que se construya un rectángulo aplicando la simetría axial, apelando a propiedades geométricas. En términos de Laborde (1998), estas alumnas aplican una combinación de herramientas en el entorno dinámico, comunicándole de esa manera un procedimiento de construcción que no permite construir un rectángulo en todos los casos. En dicha producción están utilizando primitivas geométricas, aunque no son explicitadas en este caso por las estudiantes.

Las estudiantes aplican simetría axial a un triángulo en el software para determinar un rectángulo y el SGD les devuelve un objeto que no lo es. Teniendo en cuenta los aportes de Jaime Pastor y Gutiérrez Rodríguez (1996), las estudiantes utilizan una concepción de simetría axial errónea de tipo visual, originando un error relacionado a una interpretación reducida o deformada de la simetría axial. Tal como expresan los autores mencionados, los errores que tienen origen en estos aspectos pueden proceder de prototipos inducidos en los cuales se trabaja mayormente con ejes de simetría verticales. Sostienen que las dificultades pueden provenir también de la posición eje-objeto, ya que si el eje corta al objeto se pueden inducir más errores. En este caso, el eje de simetría es una recta que incluye a un lado del triángulo al que aplican la simetría axial y además no es vertical ni horizontal.

Por otro lado, según Furinghetti y Paola (2002) el trabajo con SGD promueve que se consideren simetrías en las construcciones, procedimiento que no es tan habitual al construir con lápiz y papel. González López (2001) sostiene que la interpretación que hace el software de las acciones de los alumnos hace que les devuelva cierta información sobre la producción realizada. Sin embargo, de acuerdo a su experiencia afirma que mientras los estudiantes poseen mayor manejo técnico de los comandos, más los utilizan de manera frenética, sin reflexionar sobre la información que el

SGD les proporciona. Puede resultar habitual de esta manera que, ante una respuesta inesperada, los estudiantes comiencen la actividad nuevamente, tal como ocurre en el trabajo de las estudiantes del grupo A. Esto se relaciona también con lo planteado por Furinghetti y Paola (2002) en cuanto a la ansiedad que provoca en los estudiantes la utilización de características del SGD, más allá de la planificación de un procedimiento de construcción.

Las estudiantes del grupo B, en cambio, no aplican la simetría axial que mencionan. Sólo se refieren a ese procedimiento como otra manera de lograr la construcción de un rectángulo.

Trascendencia de los ejes cartesianos y direcciones privilegiadas:

Según Novembre et al. (2015), *GeoGebra* propicia un trabajo que relaciona distintas representaciones. Así, aunque es posible establecer diversas configuraciones en la pantalla de la vista gráfica, por defecto los ejes cartesianos aparecen visibles. Esta particularidad parece haber influenciado ciertos procedimientos de construcción por parte de las estudiantes del grupo A. Los pasos que eligen estas estudiantes para la elaboración de la construcción 1 parecen estar condicionados por la presencia de los ejes cartesianos, dado que utilizan la perpendicularidad de los mismos para asegurar la amplitud de los ángulos rectos interiores del rectángulo, a través del trazado de rectas paralelas a los ejes. Tal como afirman González y Lupinacci (2012), la elección de los procedimientos de construcción está influenciada de manera notoria por las herramientas disponibles en el software. Los ejes cartesianos, en este caso, actúan como elementos de comando en la construcción, ya que las estudiantes los utilizan para determinar relaciones de paralelismo que se apoyan en los mismos. Con respecto a la construcción 2 que elabora este grupo, comienzan a abordarla con los ejes activos, y construyen algunos objetos. Si bien descartan estos objetos, a partir de sus características y del diálogo que se genera entre las estudiantes puede deducirse que el rectángulo que

pretenden construir posee un ángulo recto interior que se forma a partir de una recta horizontal y otra vertical. Luego de eliminar los objetos construidos en la primera etapa, deciden ocultar los ejes y construir un rectángulo cuadrado, cuyos lados no están incluidos en rectas horizontales y verticales. La presencia de los ejes cartesianos activos en la pantalla podría ejercer influencia hacia la construcción de figuras en posiciones prototípicas.

Esto se relaciona con el obstáculo que plantea Berté (2000) referido a las direcciones privilegiadas, horizontal y vertical. La influencia cultural que ejerce la horizontalidad y verticalidad propicia que los estudiantes en algunos casos solo conciban al ángulo recto como aquel que se forma por una recta horizontal y otra vertical. Ambos grupos consideran direcciones privilegiadas (horizontal y vertical), para construir lados de rectángulos.

En el caso del grupo A, una de las construcciones es presentada a partir de direcciones privilegiadas, ya que los lados del rectángulo están incluidos en rectas horizontales y verticales. Algo similar ocurre con el grupo B, dado que los lados de los rectángulos que presentan en las tres construcciones están incluidos en rectas cuyas direcciones son muy aproximadas a la horizontal y a la vertical. Particularmente, durante la realización de la construcción 2, una estudiante del grupo B utiliza la frase “una recta cruzada” y esto puede evidenciar la concepción de que si la recta no tiene una dirección privilegiada (horizontal o vertical), se considera “cruzada”.

Por otro lado, el nivel de formación de las estudiantes de estos grupos posibilita que comprendan que las propiedades que se pueden deducir del concepto rectángulo son independientes de la relación existente entre las dimensiones de sus lados. Sin embargo, aunque al desplazar objetos libres en la pantalla se pueden generar distintas longitudes en los lados, en ninguna de las construcciones tal como fueron presentadas se observa que algún rectángulo sea muy alargado. Según Berté (2000), en algunos casos

permanecen implícitas en la definición de rectángulo características del rectángulo en la que la razón entre las medidas de los lados toma valores que están entre 1,5 y 2, por lo que es cercana a una relación armoniosa. En el caso de las estudiantes del grupo A esto no ocurre ya que las razones entre las longitudes de los lados del rectángulo en las tres construcciones son 2,18; 1 (caso particular cuadrado) y 1,34. En las construcciones del grupo B, las razones correspondientes son: 1,82; 1,14 y 1,61. Puede decirse entonces que en las construcciones 1 y 3 del grupo B la relación que guardan los lados de cada rectángulo es cercana a la armoniosa.

La dualidad lenguaje natural – lenguaje matemático en la interpretación de la consigna

Berté (2000) explica que el artículo “un” puede representar un cuantificador existencial o un número cardinal. Una estudiante evidencia tener dudas acerca del papel que juega el artículo “un” en la consigna a) del problema ya que parecería interpretar “un” como un cuantificador. Expresa no conocer si lo que solicita la consigna es construir específicamente un rectángulo o uno a partir del cual se puedan generar otros. Esta duda es manifestada en la construcción 1 y puede ser la razón por la que se propone desplazar puntos libres de la construcción una vez finalizada.

Otra estudiante sugiere, en cambio, que si la construcción permite generar otros rectángulos resulta mejor. Según Restrepo (2008), los estudiantes pueden utilizar el desplazamiento para validar construcciones, de manera tal que si la construcción no conserva las propiedades aparentes del estado inicial es válida. La influencia de la utilización de este tipo de desplazamiento en gran parte de los problemas que se proponen puede ser la causa por la que esta estudiante considera mejor a una construcción en la que se generen distintos rectángulos.

Identificación de propiedades empleadas en las construcciones

Se presentan algunas reflexiones que corresponden al trabajo de las estudiantes en la resolución de la consigna b) del problema, en cuanto a la identificación de propiedades empleadas en las construcciones de rectángulo producidas.

Ambos grupos recurren en algunos casos a observar las construcciones antes de determinar las propiedades empleadas en cada una de ellas. En ningún momento realizan acciones sobre las construcciones, solo efectúan análisis visuales. Cabe destacar que, si bien hacen referencia a los procedimientos de construcción, no alcanza con la observación para asegurar que la construcción es correcta ya que para esto se debe apelar a propiedades, como afirman Novembre et al. (2015). Así, la percepción directa sobre la construcción no permite que interpreten geoméricamente las propiedades de los objetos, teniendo en cuenta que el pensamiento es indirecto, según Leung, et al. (2013), en Sánchez y Samper (2017). De este modo, si bien ambos grupos de estudiantes evocan aspectos conceptuales, no logran a partir de la mera percepción una interpretación geométrica completa. De esta manera, la identificación de propiedades en algunos casos no se torna evidente, dadas las dificultades que se evidencian en el reconocimiento visual de propiedades espaciales que se asocian a las geométricas. El hecho de que las estudiantes utilicen técnicas de construcción consistentes no garantiza que puedan dar explicaciones correctas acerca de sus procedimientos de construcción, coincidiendo con lo que sostienen Sánchez y Prieto (2019). Más aún, como afirman Furinghetti y Paola (2002) si se considera a las construcciones con predominio de aspectos figurales, se las concibe como una actividad práctica separada de la teoría matemática que las sustenta.

Las estudiantes deliberan respecto de los contenidos conceptuales que se incrustan en cada comando presente en las técnicas de construcción, en

línea con lo que plantean Sánchez y Prieto (2019). Luego de una actividad exploratoria que tiene lugar en el momento de la construcción de las figuras, las estudiantes refinan los procedimientos de construcción que llevaron a cabo (González López, 2001). Así, relacionan las técnicas puestas en juego en cada construcción con los conocimientos, en un proceso de ensayos, errores y aciertos, mediado por interacciones entre pares como afirma Itzcovich (2005).

Las estudiantes del grupo A, puntualmente, realizan además comparaciones de las técnicas que emplean en cada construcción. Además, evidencian, en el proceso de identificación de propiedades empleadas en la construcción 2, una dificultad relacionada al otorgamiento de sentido a un paso de la técnica (trazado de una circunferencia), no pudiendo relacionar el dibujo construido con los referentes teóricos correspondientes, cuestión que se expresa en Sánchez y Prieto (2019).

Escritura de propiedades

Las estudiantes de cada grupo logran entenderse, en línea con Olivero (2003), a través del espacio externo, a partir de sus interacciones y en el software, aún sin utilizar un lenguaje lógico formal durante todo el proceso de identificación de propiedades. No escriben de manera correcta ni completa las propiedades empleadas en las construcciones. Ambos grupos señalan propiedades que están relacionadas con sus procedimientos de construcción, pero éstas no están formuladas de manera correcta ni explícita. No expresan cuáles son específicamente las propiedades que se encuentran relacionadas con cada herramienta de *GeoGebra* en cada construcción.

En particular, las estudiantes del grupo A nombran algunas propiedades geométricas involucradas, pero lo hacen acompañadas de explicaciones sobre los pasos de construcción. Como sostienen Novembre et

al. (2015), las construcciones se validan a partir de desplazamientos, del relato de la construcción y de las propiedades en juego. Es engañoso considerar la escritura como una simulación de la expresión oral ya que introduce transformaciones en la manera de pensar. En este caso, las estudiantes utilizan lenguaje específico, pero no lo hacen con precisión, dado que no logran escribir las propiedades empleadas separadas de los procedimientos de construcción.

Con respecto al grupo B, las estudiantes no acompañan las propiedades mencionadas por explicaciones, pero tampoco aclaran cómo se relacionan las propiedades con los pasos de construcción. Por un lado, la propiedad “paralelismo de lados” se menciona como empleada en las tres construcciones, aunque solo en la construcción 1 se utiliza la herramienta Recta paralela. Esto evidencia que, si bien la propiedad es empleada, no se aclara qué otras propiedades (relacionadas con las herramientas seleccionadas en cada caso y distintas en las tres construcciones) permiten que esta se verifique. Análogamente la propiedad “igualdad de lados opuestos” es empleada en la construcción 3, aunque las estudiantes no mencionan propiedades que aseguren que se cumpla.

4.3.2 Definiciones de rectángulo consideradas en las construcciones

Se presentan algunas reflexiones que corresponden al trabajo de las estudiantes en la resolución de la consigna c) del problema, en cuanto a la determinación de la definición de rectángulo que considera cada grupo para realizar las construcciones y las características de las definiciones presentadas.

Proceso de determinación y características de las definiciones

Un grupo logra rápidamente escribir la definición presentada luego de una breve instancia de interacciones. En el otro, en cambio, deliberan de

manera más extensa para establecer la definición. En el diálogo acuden a las propiedades empleadas en las construcciones que identificaron en la consigna anterior.

De acuerdo a la categorización de Govender (2002), las dos definiciones presentadas se consideran correctas, ya que contienen condiciones suficientes para definir rectángulo. Además, ambas son no económicas ya que contienen condiciones redundantes.

Tall (1992) afirma que algunas definiciones operan como descripciones. Este es el caso de la definición del grupo B, que describe al rectángulo además de definirlo. Esto puede deberse a que las estudiantes de este grupo retoman las propiedades empleadas en las construcciones para escribir la definición que presentan.

De acuerdo a las características de las definiciones mencionadas por Zazkis y Leikin (2008), en ambas definiciones presentadas se menciona "lados paralelos opuestos". Como el paralelismo solo es posible en lados opuestos, se evidencia circularidad. Con respecto al criterio de riqueza, en ambas definiciones se utilizan características convencionales para definir al rectángulo (paralelismo e igualdad de lados y ángulos), por lo que no cumplen con el criterio de riqueza.

Las dos definiciones comienzan de la misma manera: "un rectángulo es un cuadrilátero...". De esta manera se asocia el rectángulo a un concepto más general (cuadrilátero), evidenciando jerarquía. Sin embargo, aunque las estudiantes emplean una clasificación jerárquica de cuadriláteros, no acuden a la definición de rectángulo: "paralelogramo con un ángulo recto". Esta definición reconoce explícitamente al rectángulo como un caso particular de paralelogramo (concepto inmediatamente superior en jerarquía al concepto rectángulo), es económica y es deductiva, en términos de De Villiers et al. (2009), ya que permite deducir fácilmente otras

propiedades del concepto rectángulo, en este caso las propiedades del paralelogramo.

4.3.3 Identificación de herramientas empleadas en las construcciones durante la entrevista

Se presentan algunas reflexiones que corresponden a la primera etapa de la entrevista, en cuanto a la identificación por parte de las estudiantes de herramientas empleadas en las construcciones del otro grupo.

Aproximación a las construcciones

Las estudiantes comienzan el proceso de identificación de herramientas empleadas observando las construcciones sin solicitar que se realice ninguna acción sobre las mismas. En ambos grupos puede notarse que las estudiantes conocen la existencia del PC, aunque no recuerdan exactamente cómo se denomina dicha opción ni en qué lugar del menú se encuentra. Las intervenciones de las entrevistadoras en ambos casos son las que promueven que las estudiantes soliciten que se abra el PC.

Las estudiantes en un primer momento perciben las construcciones a través de la observación de los dibujos en la pantalla y de las denominaciones de los elementos en las distintas vistas que están activas, sin ejecutar ninguna acción sobre los archivos.

Las estudiantes del grupo A se refieren a distintas herramientas que consideran empleadas en las construcciones. Esta identificación la realizan utilizando sólo la observación de la construcción.

Construcción 1: Punto, Recta, Recta Paralela, Recta perpendicular, Intersección y Polígono.

Construcción 2: Circunferencia (centro, punto), Recta, Intersección, Recta paralela y Polígono.

Construcción 3: Punto, Ángulo dada su amplitud y Polígono regular.

Las estudiantes del grupo B, por su parte, se refieren a algunas herramientas realizando también observación de las construcciones en un primer momento

Construcción 1: Manifiestan tener dudas sobre si se utiliza la herramienta Recta paralela o Recta perpendicular. Además, se refieren a las herramientas Punto, Recta, Intersección y Polígono.

Construcción 2: Manifiestan tener dudas acerca de si se aplica una simetría o se utilizan las herramientas Recta paralela o Recta perpendicular. Además, se refieren a las herramientas Circunferencia (centro, punto) y Recta.

Construcción 3: Manifiestan dudas acerca de las denominaciones de los puntos. Nombran las herramientas Segmento, Circunferencia, Recta y Simetría. Si bien no mencionan la herramienta Polígono, puede decirse que hacen referencia a ella cuando nombran la construcción de un triángulo.

Durante esta primera etapa del proceso de identificación, las estudiantes perciben las distintas representaciones de los elementos tal como aparecen en el SGD. Así, relacionan la información que les brinda el software con sus conocimientos geométricos y de *GeoGebra* disponibles. Como afirma Itzcovich (2020), las relaciones entre los objetos geométricos y sus representaciones son complejas, sobre todo cuando se involucra *GeoGebra*. En este caso, el hecho de solo observar la construcción no les permite identificar con claridad las herramientas que se emplean en las construcciones. Las denominaciones que presentan los objetos construidos no posibilitan la identificación correcta dado que pueden haber sido renombrados, y generar de esta manera interpretaciones incorrectas sobre los pasos de construcción. Las estudiantes con solo observar la construcción 2 del grupo B asumen la posibilidad de que corresponda a un cuadrado.

Esto lleva a que en un primer momento nombren Polígono regular dentro de las herramientas empleadas en dicha construcción.

Novembre et al. (2015) afirman que el protocolo de construcción constituye una función de *GeoGebra* que posibilita que se desarrollen formas de resolución y control distintas a las que se dan con lápiz y papel. En este caso, el análisis del protocolo posibilita en mayor medida la identificación de herramientas. Sin embargo, las estudiantes no solicitan que éste se abra en una primera etapa.

Ambos grupos solicitan que el protocolo se active luego de que la entrevistadora les pregunte cómo pueden asegurar que las herramientas que mencionan son las que efectivamente se emplean. Uno de ellos debido a ciertas dudas que se presentan en relación a la denominación de los puntos con el símbolo ', y la posibilidad de aplicación de simetrías que esto supone. El otro lo hace para determinar si se utiliza Recta paralela o Recta perpendicular en una construcción, duda que manifiesta tener. Abrir el PC les permite revisar los pasos e identificar correctamente las herramientas empleadas. Al observar las otras construcciones, también manifiestan dudas acerca de la aplicación de herramientas. Sin embargo, resulta notorio en uno de los grupos que luego de haber utilizado el protocolo para identificar las herramientas en una construcción, solo observen las otras, antes de solicitar que se abran los respectivos PC.

Representaciones de elementos en GeoGebra

Las estudiantes observan distintos elementos en el archivo de *GeoGebra*. Para esto acuden a sus representaciones, dado que constituyen el modo de acercarse a los objetos geométricos, según Itzcovich (2020). Analizan las denominaciones de los elementos graficados en *GeoGebra*, en las vistas disponibles. Consideran que los puntos con símbolo ' en su denominación pueden ser generados a partir de una simetría. Además,

acuden a la vista algebraica del software para analizar las coordenadas de un punto, con la intención de determinar si corresponde a un objeto libre o dependiente.

Las distintas denominaciones de los puntos a los que se les aplica dos veces simetría central generan dificultades para la identificación de herramientas empleadas.

Con respecto al PC, puede observarse que en algunos casos la información que brinda no permite distinguir con facilidad qué herramienta es utilizada en la construcción. Por ejemplo, en una de ellas se utiliza la herramienta Ángulo dada su amplitud, que las estudiantes identifican como la herramienta Rotación. Esto puede deberse a que se presenta el mismo ícono en el PC para ambas. La diferencia radica en que cuando se emplea Ángulo dada su amplitud, en el protocolo se generan dos renglones. En el primero se describe el punto generado a partir de un ángulo de rotación, mostrando el ícono correspondiente, y en el renglón siguiente se nombra y describe el ángulo generado, mostrando el ícono de la herramienta Ángulo. En cambio, si se utiliza la herramienta Rotación para rotar un punto, en el protocolo sólo se observa un renglón relacionado a esta acción. En este renglón se nombra y describe el punto que se genera a partir del giro y el ícono correspondiente.

Búsqueda de información en las construcciones a partir de herramientas de GeoGebra

Las estudiantes utilizan herramientas disponibles en *GeoGebra* para identificar ciertas características de las construcciones sobre las que manifiestan tener dudas.

Tal como afirma Laborde (1998), un mismo dibujo geométrico puede interpretarse de distintas formas, y son en este caso los conocimientos

geométricos que tienen disponibles los que les permiten a los estudiantes ir más allá de la percepción.

Las estudiantes interrogan a las construcciones para determinar ciertas características de la misma, coincidiendo con Itzcovich (2020). Puntualmente, emplean herramientas disponibles del software para verificar si un triángulo construido es o no isósceles. Para esto, aprovechan la retroalimentación que brinda el software, para manipular y verificar relaciones geométricas presentes en la construcción que analizan (Healy, 2000). Buscan caracterizar al objeto geométrico, conscientes de que para esto no alcanza con la percepción sobre el dibujo, tal como afirma Laborde (1998).

Las decisiones dentro del proceso de construcción

En el proceso de elaborar una construcción las estudiantes eligen combinar distintas herramientas. El software interpreta las acciones y devuelve información sobre las mismas, como sostiene González López (2001). Basadas en estas retroacciones, las estudiantes seleccionan herramientas para realizar distintas acciones. Si a esto se suman las variadas herramientas disponibles en *GeoGebra*, se obtienen como resultado múltiples opciones para abordar la construcción de una figura. Esto explica las dudas que se manifiestan dentro de los grupos acerca de qué herramienta se utiliza en cada caso, a partir de una mera observación de las construcciones.

El proceso de construcción que lleva adelante cada grupo implica la selección de ciertas herramientas, de acuerdo a los conocimientos con los que cuentan y a las retroacciones que reciben desde el primer momento. Por esta razón, resulta dificultoso en algunos casos reconstruir el sentido de la utilización de ciertas herramientas por parte del grupo que no realiza la construcción.

El trazado de una circunferencia en una de las construcciones y el de un ángulo recto en otra son ejemplos en los que se visualiza la dificultad de distinguir el sentido de las herramientas utilizadas.

Puede observarse también en el desarrollo de las entrevistas que las estudiantes manifiestan su opinión acerca de los procedimientos de construcción analizados. De esta manera, una de las estudiantes expresa que no hubiese utilizado una de las herramientas empleadas en una construcción por el otro grupo.

4.3.4 Determinación de propiedades empleadas en las construcciones durante la entrevista

Se presentan algunas reflexiones que corresponden a la primera etapa de la entrevista, en cuanto a la determinación por parte de las estudiantes de propiedades empleadas en las construcciones del otro grupo.

Las estudiantes recurren a las herramientas utilizadas en las construcciones para determinar las propiedades empleadas en las mismas. Interrogan a las construcciones a partir de los elementos disponibles en el software, y revisan qué herramientas se utilizan en cada una de manera minuciosa, aun cuando estas herramientas ya son determinadas previamente en la entrevista.

Se evidencian ciertas imprecisiones en el lenguaje utilizado por las estudiantes mientras debaten acerca de las propiedades empleadas y de ciertas características de las construcciones.

Además, detectan elementos que no son necesarios para la construcción del objeto solicitado. Laborde (1998) sostiene que para determinar dependencias geométricas cuando se analizan construcciones en entorno dinámico, se puede explorar a partir de suprimir ciertas relaciones entre elementos. En este caso, las estudiantes analizan la

dependencia de un cuadrado con una circunferencia, aunque no realizan la acción de suprimir en el archivo.

4.3.5 Análisis y comparación de definiciones durante la entrevista

Se presentan algunas reflexiones que corresponden a la segunda etapa de la entrevista, en cuanto al análisis y comparación de definiciones de rectángulo por parte de las estudiantes.

Definiciones, construcciones, propiedades y sistematización

Las estudiantes determinan que las construcciones realizadas se corresponden con las definiciones presentadas. Para esto establecen relaciones con los procedimientos de construcción desarrollados en cada una de ellas, acudiendo al PC. En línea con lo que plantea De Villiers (2004) se evidencia en este proceso la interrelación que existe entre las construcciones, las propiedades y las definiciones. Además, las estudiantes logran identificar y probar propiedades empleadas en las construcciones. Elaboran pruebas de propiedades conocidas y realizan una organización a posteriori de ciertos resultados que se conocen verdaderos en un todo coherente y unificado.

Análisis de definiciones

Con respecto a la definición: un rectángulo es un cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos y dos pares de lados opuestos paralelos e iguales, ambos grupos identifican que posee información de más.

Una estudiante manifiesta que se trata de una definición “bien completa”, y que la información que tiene de más es que todos los ángulos tienen que ser rectos y que los lados opuestos son iguales. Se propone realizar una reformulación de la misma: un rectángulo es un cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos y manifiestan que la información que la definición posee de más corresponde a propiedades del rectángulo.

Jaime Pastor, Chapa Aguilera y Gutiérrez Rodríguez (1992) analizan definiciones de triángulos y cuadriláteros en libros de texto y diversos errores o contradicciones que pueden encontrarse en ellas. Sostienen que ciertos errores pueden originar conflictos que produzcan aprendizajes incorrectos. Mencionan la importancia de que los estudiantes reemplacen progresivamente la concepción de las definiciones como lista descriptiva de propiedades para utilizar, por definiciones que contengan propiedades necesarias y suficientes. Las estudiantes manifiestan que la información que dicha definición contiene de más puede causar confusiones en quienes están construyendo el concepto, hecho que justifica la conveniencia de ser reformulada. Esto puede contribuir especialmente a que no se considere a la definición como una descripción de las propiedades de la figura.

Con respecto a la definición: un rectángulo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos y al menos uno de sus ángulos mide 90° , las estudiantes consideran que no debe ser reformulada y que se trata de una definición concisa porque contiene la información mínima y necesaria para determinar un rectángulo.

Se evidencia que las estudiantes reflexionan en torno a determinados aspectos de las definiciones, si es completa, concisa y si es pertinente.

Comparación de definiciones

En cuanto a la comparación de definiciones, las estudiantes coinciden en que ambas definen lo mismo. Además, tienen en cuenta algunos criterios que les permiten caracterizarlas y compararlas.

Las estudiantes no acuerdan en el análisis de las definiciones presentadas. Una de ellas expresa que la definición: Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene todos sus ángulos rectos y dos pares de lados opuestos paralelos e iguales es más concisa. Otra considera que se trata de

una definición más amplia que la del otro grupo, por exigir menos condiciones.

Cuando se les pregunta a las estudiantes qué definición consideran más adecuada de las dos, argumentan que en cuanto a definición se inclinan por: un rectángulo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos y al menos uno de sus ángulos mide 90° , mientras que si se trata de utilizar la definición en las construcciones o de probar que una figura es rectángulo se inclinan por la otra ya que es menos concisa, permite que se realicen distintas construcciones, y no exige probar la igualdad de lados opuestos.

Una estudiante expresa también que la definición: un rectángulo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos y al menos uno de sus ángulos mide 90° , posibilita que se relacionen cuadriláteros entre sí.

De Villiers (2004) plantea que se tienen en cuenta distintos criterios para determinar qué definición es más adecuada, y esto se evidencia en el proceso de comparación de definiciones por parte de estas estudiantes. En este caso, analizan no solo si es amplia o concisa sino lo que posibilita cada definición con mayor facilidad. Reflexionan en torno a cuál es más adecuada si el objetivo de la definición es solo definir, si se utiliza para realizar construcciones o si se aplica para probar que una figura es rectángulo. También analizan cuál permite de mejor manera relacionar cuadriláteros. Esto evidencia la utilización por parte de los estudiantes de distintas definiciones, de acuerdo a su pertinencia en distintos ejemplos, en línea con lo que sostiene Tall (1992).

De Villiers (2004) destaca la importancia de que los estudiantes noten que, si bien al construir una figura se tiene control sobre algunos aspectos, ciertas relaciones resultan sin acción de su parte. Esto se relaciona con la parte si y la parte entonces de la definición. El hecho de que los estudiantes

seleccionen entre definiciones para determinar cuál es la mejor exige que desplieguen ciertos criterios, tales como que permita deducir las propiedades restantes con facilidad, o que permita construir la figura directamente.

En este estudio resulta interesante que luego de comparar las definiciones en la entrevista, las estudiantes pueden reconocer una definición económica luego de reflexionar sobre las características de cada definición, y sobre qué condiciones son no necesarias y cuáles suficientes. Esto puede deberse a que se pide esta comparación al final de la entrevista, luego de haber reflexionado sobre herramientas y propiedades empleadas en cada construcción. Luego del proceso de análisis de propiedades empleadas pueden determinar correctamente un subconjunto del conjunto de propiedades del concepto rectángulo desde las cuales todas las otras pueden ser deducidas.

Capítulo 5

Discusiones, conclusiones y perspectivas

5.1 Retornando a los objetivos propuestos

5.1.1 Definiciones, procedimientos y propiedades empleadas en construcciones con *GeoGebra*

Las estudiantes recurren a las propiedades empleadas y a los procedimientos de construcción, tanto en el proceso de establecer la definición empleada, como en el de identificar si las construcciones analizadas se corresponden con la misma. Furinghetti y Paola (2002) hacen referencia a la relación entre la definición de cuadriláteros y sus construcciones. Esto se observa en la correspondencia que realizan las estudiantes entre definición propuesta y construcciones realizadas.

Los procedimientos de construcción posibilitan determinar las propiedades empleadas. Estas propiedades se analizan para determinar si las construcciones se corresponden o no con la definición. Yahia et al. (2019) establecen en su estudio que los sujetos presentan dificultades en distinguir qué características son opcionales y cuáles imperativas en definiciones matemáticas. Esto se evidencia en el trabajo realizado por las estudiantes que participan de la presente investigación, en el que relacionan características opcionales e imperativas de definiciones de rectángulo y propiedades involucradas.

GeoGebra juega un papel central en este proceso ya que ciertas acciones tales como recuperar cómo se realiza una construcción o desplazar objetos con el fin de validarla, no podrían ser realizadas con lápiz y papel. Esto coincide con lo expresado por González López (2001) respecto a las particularidades del trabajo con SGD, quien afirma que representa un medio para la reflexión acerca de los procedimientos y las decisiones tomadas en las construcciones, a través de las herramientas utilizadas.

El proceso de determinar si las construcciones se corresponden o no con las definiciones consideradas representa una tarea en la que los estudiantes usan especialmente la definición; lo cual contribuye a reflexionar acerca de las características de las mismas, para que sean trabajadas como criterio final en las tareas matemáticas de estudiantes avanzados, cuestión resaltada como importante por Vinner (1991). Si bien las estudiantes ponen en juego la definición de rectángulo, esto no garantiza necesariamente que tomen conciencia de la importancia de las propiedades involucradas. Para esto, el trabajo con *GeoGebra* posibilita que no sólo se perciban los dibujos en la pantalla, sino que se produzca discernimiento. Según Sánchez y Samper (2017) esto ocurre cuando se evocan aspectos conceptuales más allá de la percepción. En el caso estudiado ocurre cuando se revisan las herramientas utilizadas en las construcciones y se las relaciona con las propiedades empleadas.

Además, las características de los SGD contribuyen a la formulación de definiciones por parte de las estudiantes, quienes recuperan lo realizado en las construcciones para establecer la definición de rectángulo. Se evidencia también, que utilizan definiciones en distintos contextos pudiendo establecer justificaciones en base a ciertos criterios para determinar cuál es más conveniente en cada caso (Aya Corredor et al., 2016).

5.1.2 Herramientas de *GeoGebra* y propiedades involucradas y empleadas en las construcciones

Tanto en el proceso de elaboración de las construcciones como en el de identificación de herramientas por parte de las estudiantes se observa un predominio de utilización de aspectos visuales. En ciertas situaciones se consideran evidentes las imágenes dinámicas que observan en el SGD. Este valor de evidencia es resaltado en el estudio de Larios y González González (2010).

Cuando las estudiantes producen las construcciones se guían de aspectos visuales sin acudir a justificaciones que involucren propiedades geométricas en todos los casos. En algunas ocasiones si no obtienen lo que esperan continúan utilizando herramientas en otros procedimientos sin preguntarse por qué los resultados no reflejan lo esperado, como es el caso de la aplicación de la simetría axial de un triángulo rectángulo respecto de su hipotenusa, que determina un cuadrilátero no rectángulo. La retroacción que les brinda el software no genera que se reflexione acerca de lo incorrecto de la acción propuesta, solo visualizan que ese paso de construcción no devuelve un rectángulo. Esto coincide con lo que afirma González López (2001), al respecto de la utilización desmedida de herramientas del software sin reflexión.

En el proceso de identificación de herramientas también recurren en algunos casos a aspectos visuales en las construcciones. En otros, emplean herramientas de *GeoGebra* disponibles y analizan denominaciones de los objetos geométricos para interrogar a la construcción más allá de lo percibido. Este proceso realizado con SGD posibilita que se armonicen aspectos figurales y conceptuales de rectángulo, dejando subordinados a los primeros, en coincidencia con lo que sostienen Aya Corredor et al. (2016). Asimismo, no solicitan que se abra el PC en primera instancia para determinar con claridad los pasos llevados a cabo. Sin embargo, para establecer las propiedades empleadas en las construcciones durante la entrevista, las estudiantes apelan a las herramientas utilizadas. Esto posibilita una reflexión que tiene como objetivo reconocer las propiedades empleadas incrustadas en los procedimientos, en términos de lo concluido por Sánchez y Prieto (2019). De todas maneras, las estudiantes identifican sólo algunas propiedades empleadas en las construcciones, y no en todos los casos logran relacionar correctamente las mismas con las herramientas utilizadas.

En lo que respecta a las propiedades empleadas en las construcciones, no son expresadas con lenguaje preciso, tanto en la etapa de resolución del problema como en la de identificación de propiedades empleadas en las entrevistas. En la resolución del problema uno de los grupos las expresa junto a un relato de construcción y el otro no desarrolla relaciones correctas entre propiedades empleadas y procedimientos de construcción. Si bien puede decirse que las propiedades empleadas que presentan escritas evidencian mayor rigurosidad que lo que expresan oralmente, no utilizan lenguaje matemático preciso. Tal como afirman Novembre et al. (2015), la escritura mejora la expresión oral, no la simula. No obstante, las propiedades expresadas de manera escrita por las estudiantes pueden ser reformuladas con mayor precisión. Resulta importante este punto ya que la imprecisión en el lenguaje puede ocasionar dificultades o confusiones en la presentación de distintos contenidos, generando conflictos relacionados con la comunicación en matemática, sobre todo considerando la rigurosidad que implica el nivel de los estudiantes en este caso (Ortega y Ortega, 2001, en Götte, 2019). Es fundamental que futuros profesores de matemática realicen tareas que requieran utilizar lenguaje preciso y que posibiliten la reflexión acerca de la trascendencia de expresarse de esa manera.

5.1.3 El cuadrado como caso particular del rectángulo

Se evidencia una construcción de cuadrado como caso particular de rectángulo realizada por uno de los grupos. Esta construcción cumple con lo solicitado en la consigna ya que se pide que construyan un rectángulo de tres maneras distintas. Sin embargo, resulta enriquecedor reflexionar en torno a lo que implica considerar un caso particular y no uno genérico de un objeto geométrico.

Las estudiantes discuten acerca de si la construcción de cuadrado cumple con lo solicitado por la consigna y deciden que sí, teniendo en cuenta una clasificación jerárquica de cuadriláteros. Además, identifican

propiedades empleadas en la construcción, por lo que el hecho de haber construido un cuadrado parece no generar ninguna dificultad. Sin embargo, esto puede traer dificultades al determinar propiedades, obteniendo algunas que correspondan particularmente al cuadrado y no a cualquier rectángulo, generando una contradicción entre la clasificación jerárquica que se utiliza y las propiedades de cuadriláteros que podrían obtenerse. Ante la propuesta de construir un rectángulo consideran un caso particular, que tiene más propiedades. Así, tienen en cuenta una figura más específica que según se observa en el estudio de Furinghetti y Paola (2002), resulta más fácil de concebir por parte de los estudiantes.

Tal como afirma González López (2001), para construir una figura geométrica determinada, deben hacerse explícitas ciertas propiedades geométricas mínimas que describan la figura, conociendo que las mismas son incumplidas por otras figuras, lo que contribuye a la definición del objeto. En este caso, el cuadrado como figura elegida por las estudiantes verifica propiedades que son incumplidas particularmente por rectángulos no cuadrados. De este modo, no consideran las propiedades geométricas mínimas que describen al rectángulo.

Las estudiantes consideran que el cuadrado es un caso particular de rectángulo, por lo que se basan en una clasificación jerárquica de cuadriláteros. Sin embargo, cuando definen y debaten acerca de si es correcto o no presentar la construcción de un cuadrado de acuerdo a lo solicitado en la consigna, no se hace explícita la apropiación de esa clasificación, por ejemplo, al no definir rectángulo como paralelogramo. De Villiers (1994) resalta las bondades de las clasificaciones jerárquicas, sobre todo por su economía en la demostración de propiedades, contra la clasificación por partición que requiere de definiciones más extensas que excluyan a los distintos objetos. Por otro lado, Aya Corredor et al. (2016) señalan que en algunos casos una demostración puede resultar más

extensa a partir de una clasificación jerárquica. Este hecho es manifestado por las estudiantes cuando afirman que la utilización de una definición que impone más condiciones de las necesarias, no económica, sería beneficioso porque hay propiedades que ya están enunciadas en la definición y no requerirían de prueba.

Se considera relevante que se reflexione especialmente acerca de las implicancias de las construcciones de casos particulares en las clasificaciones jerárquicas, estableciendo relaciones entre definición y construcciones y deliberando en torno a cómo influye esto en la determinación de propiedades empleadas y deducidas de la construcción. Resulta esencial de esta manera, coincidiendo con De Villiers (1994), que se tenga una mirada crítica acerca de las clasificaciones que permita comparar distintas alternativas y dotar de sentido a los conceptos, sin preferencia de una sobre la otra.

Aya Corredor et al. (2016) destacan que el docente es quien promueve que se evoquen actividades con SGD que cuestionen las definiciones personales y las relacionen con la definición del concepto en procesos de argumentación. De esta manera, cobra especial relevancia que estudiantes de profesorado en matemática reflexionen acerca de las características de las clasificaciones y de las definiciones de conceptos.

5.1.4 Las potencialidades de un uso holístico de características propias de *GeoGebra*

Resulta provechoso que los estudiantes conozcan las particularidades de *GeoGebra*, de manera que se aprovechen al máximo las ventajas de las vistas, la práctica de arrastre o desplazamiento, además de las herramientas disponibles.

Es conveniente que los estudiantes conozcan las denominaciones en *GeoGebra* de los objetos construidos para que puedan, a partir de

personalizar las vistas, observar de manera conveniente las representaciones de las figuras geométricas. Estas acciones contribuyen a que se identifiquen correctamente las herramientas utilizadas y a que se relacionen con las propiedades empleadas. De la misma manera, resulta fundamental agregar también la práctica del arrastre o desplazamiento y la utilización del protocolo de construcción.

Según sostiene González López (2001), para realizar algunas actividades con SGD, es requerido que se elabore un proceso de construcción que es descrito a partir de propiedades geométricas. De esta manera, se establece un modo algorítmico de proceder que marca una diferencia entre el trazado y el procedimiento del mismo. Esto significa que múltiples elecciones de herramientas permiten el trazado de las mismas figuras geométricas.

El PC, por su parte, posibilita revisar los pasos seguidos en una construcción y por esto no tiene correlato con el trabajo a partir de lápiz y papel, coincidiendo con lo que afirman Novembre et al. (2015). Considerando estas particularidades, puede decirse que dicha función pone especialmente en evidencia la diferencia entre procedimiento de trazado y trazado mencionada anteriormente. Así, por sus características, contribuye a relacionar especialmente las herramientas utilizadas en *GeoGebra*, con los procedimientos de construcción y las propiedades empleadas en construcciones dinámicas.

Se deriva de esta investigación que la utilización del PC no se da de manera innata o natural del mismo modo que la apropiación del uso del desplazamiento no se da de manera inmediata ni evidente, como afirma Restrepo (2008). Por esta razón, ambas funciones requieren ser enseñadas. Es beneficioso que se diseñen propuestas que posibiliten que los estudiantes utilicen las distintas características que ofrece *GeoGebra*, incluida el PC.

En el trabajo particular de los sujetos de estudio, se evidencia la apropiación del uso del desplazamiento o arrastre para validar las construcciones. Sin embargo, no muestran la apropiación del uso del PC. Así, aunque las estudiantes logran establecer relaciones entre los procedimientos de construcción y propiedades empleadas, a través del PC, no reconocen con certeza las características de las herramientas que se muestran en sus columnas. Es necesario destacar que sí conocen la existencia del PC pero no la identifican claramente y no recurren al uso del mismo de manera sistemática, para la identificación de herramientas o revisión de los pasos de construcción. Por esto, es necesario que su uso sea promovido, a partir de conocer la posibilidad de personalizar las columnas que se ofrecen, de extenderlas de manera que se lea la información completa y la forma en la que se visualiza cada herramienta en el mismo, entre otras particularidades. Es enriquecedor que se construya el sentido de sus cualidades como función de *GeoGebra*.

El uso holístico de las características de *GeoGebra* potencia especialmente las relaciones que se dan al identificar particularidades de elementos de figuras, lo que se suma a los procesos de relacionar conocimientos, actividades de construcción e interacciones entre estudiantes, cuestiones propuestas por Itzcovich (2005). Además, ese uso holístico asiste en los procesos de construcción, de análisis de una figura ya construida y en la identificación de herramientas empleadas en las construcciones. Todo esto posibilita que se reflexione acerca de diversos procedimientos y se determinen propiedades empleadas en las construcciones.

5.2 Contrastes destacados

Se señalan particularmente aspectos referidos a la definición y a la determinación de propiedades geométricas en construcciones con *GeoGebra* que generan contrastes que atraviesan este estudio.

La definición de un concepto: clasificación elegida y sus alcances

Existe una tensión inherente al proceso de definir un concepto relacionada con las clasificaciones que pueden adoptarse, considerando que las clasificaciones jerárquicas y las particionales se diferencian por ciertas características distintivas. Las estudiantes de esta investigación reflexionan acerca de la utilidad de la definición de rectángulo al discutir acerca de una definición presentada y el análisis de construcciones realizadas. La propuesta de comparación de definiciones de rectángulo parece haber promovido que argumenten acerca de que no hay una definición más beneficiosa por naturaleza, si no que esto depende de la finalidad para la que es considerada. Deciden acerca de la conveniencia de las definiciones analizadas y se cuestionan por qué utilizar una y no otra en algunos casos. Proponer el análisis de construcciones con *GeoGebra*, en la que se determinen propiedades geométricas y se estudien y comparen definiciones, posibilita que se reflexione acerca de las ventajas y limitaciones de las clasificaciones jerárquicas o particionales, para así decidir cuál resulta más conveniente de acuerdo a los objetivos que se persiguen. Resulta enriquecedor que las definiciones de objetos geométricos y las clasificaciones vinculadas sean objeto de reflexión por parte de futuros profesores.

La justificación de una conjetura: evidencia y dinamismo de GeoGebra

Otro contraste se constituye entre evidencia y dinamismo que provee *GeoGebra*, y la falta de necesidad de elaborar justificaciones que puede originar. La retroalimentación que provee *GeoGebra* se hace presente como respuestas inmediatas a una sencilla aplicación de herramientas. Aquello que devuelve el software revestido de dinamismo, en sus múltiples vistas y con distintas denominaciones, puede generar sorpresas entre las predicciones acerca de lo construido y lo que se obtiene realmente. Esto puede provocar que los estudiantes se involucren en justificaciones basadas

en propiedades geométricas que expliquen el porqué de la sorpresa. Sin embargo, el gran valor de evidencia que ofrece *GeoGebra* a partir de sus funciones, puede motivar que consideren no necesario elaborar justificaciones.

El SGD posibilita cierta facilidad en la aplicación de herramientas, lo cual no siempre resulta beneficioso para motivar la necesidad de demostrar ya que pueden aplicarse de manera desmedida, sin reflexión alguna acerca de lo que se obtiene en cada acción. Así, es posible que se descarten procedimientos automáticamente sin preguntarse las razones por las que no son correctos. Las propuestas de trabajo con *GeoGebra* enfrentan la tensión entre las ventajas que ofrece el SGD -superadoras del trabajo con lápiz y papel- y la utilización de herramientas y funciones que van en detrimento de emplear propiedades geométricas.

El protocolo de construcción: ventajas y necesidad de su enseñanza

El PC, como función de *GeoGebra*, posibilita que se consulten las herramientas empleadas en construcciones. Sin embargo, en la investigación no logra el protagonismo esperado. Las particularidades del PC deben conocerse especialmente para que sus virtudes puedan ser aprovechadas y su uso debe ser enseñado específicamente. El PC protagoniza una tensión entre las ventajas de su utilización para la determinación de herramientas, reflexión acerca de los procedimientos de construcción, propiedades empleadas y definición considerada; y la necesidad de su enseñanza. Sin un conocimiento previo de sus características, quien lo utilice no podrá aprovechar al máximo sus potencialidades.

Para finalizar, enfatizar en la riqueza que conlleva que estudiantes de profesorado en matemática sean formados para advertir e interpretar los

contrastes que puedan suscitarse al poner en práctica un uso holístico de *GeoGebra* para la reflexión acerca de la vinculación entre herramientas, propiedades empleadas en construcciones geométricas y definiciones consideradas.

5.3 Cuestiones derivadas de la investigación

5.3.1 Producciones generadas por este estudio

Freyre, M. y Mántica, A. (2016). *El uso de la definición y la representación del concepto de rectángulo mediada por GeoGebra*. Memorias REPEM. Santa Rosa: Ed UNLPam. Recuperado de http://redi.exactas.unlpam.edu.ar/xmlui/bitstream/handle/2013/210/CB10%20-%20Mantica_Freyre.pdf?sequence=1

Cavatorta, P., Freyre, M. y Renzulli, F. (2017). Análisis previo de un problema sobre cuadriláteros inscritos usando SGD en la formación de profesores. *VIII Encuentro Nacional y Latinoamericano: la universidad como objeto de investigación*. Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral. Recuperado de <http://www.unl.edu.ar/u17/wp-content/uploads/2016/08/Libro-de-res%C3%BAmenes-U17-2.pdf>

Renzulli, F., Cavatorta, P. y Freyre, M. (2017). Valoración de una tarea de geometría sobre cuadriláteros inscritos y sus propiedades para resolver utilizando GeoGebra. *VI Jornadas de Educación Matemática y III Jornadas de Investigación en Educación Matemática*. Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral. Recuperado de http://www.fhuc.unl.edu.ar/media/investigacion/publicaciones/MATEMATICA/MATEMATICA_ebook_memoriaFHUC_2017.pdf

Freyre, M. y Mántica, A. (2019). Construcciones con software de geometría dinámica. Aportes para la producción de demostraciones. *Acta de comunicaciones Congreso Latinoamericano Prácticas, problemáticas y desafíos contemporáneos de la Universidad y del Nivel Superior*.

Recuperado de <https://rehip.unr.edu.ar/bitstream/handle/2133/17668/LIBRO%20SIMPOSIOS%2C%20CONVERSATORIO%20Y%20PANEL-%20FINAL.pdf?sequence=4&isAllowed=y>

Freyre, M. y Mántica, A. Construcciones, definiciones y propiedades en un problema geométrico resuelto con GeoGebra. XLII Reunión de Educación Matemática de la Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina (virtUMA 2020). 21 al 25 de septiembre de 2020.

Freyre, M y Mántica, A. (2021). Propiedades empleadas, deducidas y reconocidas en una construcción. El caso del rombo. En S. Scaglia, F. Kiener y M. Götte (Comp.) *Actas de las VII Jornadas de Educación Matemática y IV Jornadas de Investigación en Educación Matemática*. (pp. 210-218). Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral. Recuperado de: <https://www.fhuc.unl.edu.ar/institucional/wp-content/uploads/sites/3/2018/08/Ebook-Actas-Jornadas-Matem%C3%A1tica-2021.pdf>

Freyre, M. Götte, M y Mántica, A. (2021). Definición de rectángulo en un problema con GeoGebra. *Noticiero de la Unión Matemática Argentina. Reunión de Educación Matemática. Resúmenes extensos*, 56(2), 127-130. Recuperado de <http://www.union-matematica.org.ar/archivo/wp-content/uploads/2021/11/Noticiero-de-la-UMA-Vol-56-N%C2%BA2-2021-5.pdf>

Freyre, M. Götte, M y Mántica, A. (2021). Procedimientos de construcción con GeoGebra e identificación de propiedades empleadas por parte de futuros profesores de matemática. En O. Lossio, M. Coudannes Aguirre y J. Bernik (Comp.) *Pensar la enseñanza y la formación desde los desafíos del presente. Libro de ponencias de las Terceras Jornadas*

de divulgación de experiencias de docencia, extensión e investigación educativa de la FHUC-UNL (pp.281-288). Santa Fe. Universidad Nacional del Litoral. Recuperado de: <https://www.fhuc.unl.edu.ar/institucional/wp-content/uploads/sites/3/2018/08/Pensar-la-ense%C3%B1anza-y-la-formaci%C3%B3n.pdf>

Freyre, M. Götte, M y Mántica, A. Interrogando construcciones con GeoGebra. Eje 6. Integración de tecnologías en las prácticas docentes en Matemática. Experiencias en las que el uso de TIC potencia el hacer Matemática. Segundas Jornadas de Práctica Profesional Docente en Profesorados Universitarios en Matemática. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario. 25 a 29 de octubre de 2021.

Freyre, M. y Cavatorta, P. (2021). Conjeturar y validar en un problema de geometría mediado por GeoGebra. ¿Qué construcciones se ponen en juego? *Unión*, 17(62), 1-21. Recuperado de <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/183>

Freyre, M., Götte, M. y Mántica, A. Aportes de una construcción en GeoGebra para la recuperación de definición y propiedades del rectángulo. Reunión latinoamericana de matemática educativa (RELME 35). Universidad Autónoma de Santo Domingo. 3 al 8 de julio de 2022.

5.3.2 Posibles líneas derivadas de este estudio

- Indagar acerca de la relación que establecen estudiantes entre propiedades empleadas en construcciones dinámicas y propiedades deducidas de las mismas.
- Diseñar tareas que involucren el uso del PC para la identificación de herramientas utilizadas y propiedades empleadas en las construcciones, apuntando a una apropiación del uso del mismo por parte de los estudiantes.
- Profundizar el estudio de distintas características que ofrece *GeoGebra* que pueden asistir a la identificación de propiedades empleadas, tales como las herramientas de razonamiento automático.
- Estudiar las interacciones entre estudiantes que se dan en torno a un trabajo grupal de identificación de propiedades involucradas en una construcción dinámica.

Referencias bibliográficas⁶

- Arcavi, A y Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, (5), 25-45. Recuperado de https://serveiseducatius.xtec.cat/cesire/wp-content/uploads/usu2650/2021/07/mat_58_arcavi_computer.pdf
- Arnal-Bailera, A. y Oller-Marcén, A. (2020). Construcciones geométricas en *GeoGebra* a partir de diferentes sistemas de representación: un estudio con maestros de primaria en formación. *Educación Matemática*, 32(1), 67-98. Recuperado de <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol32/1/04REM32-1.pdf>
- Arzarello, F. (2001). Dragging, perceiving and measuring physical practices and theoretical exactness in Cabri-environments. *Proc. Cabriworld 2*. Montreal, Canadá. Recuperado de <https://patrickmoisan.net/documents/publications/cw2001/2001/contributions/Arzarello.pdf>
- Aya Corredor, O., Echeverry Gaitán, A. y Samper, C. (2016). ¿Es el cuadrado un rectángulo?. *Sophia*. 12(1), 139-158. Recuperado de <https://revistas.ugca.edu.co/index.php/sophia/article/view/451>
- Beatty, R. y Geiger, V. (2010). Technology, Communication and Collaboration: Re-thinking Communities of Inquiry, Learning and Practice. En C. Hoyles y J. Lagrange (Eds.) *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*. (pp. 251-284). Nueva York, Estados Unidos: Springer. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/266943671_Mathematic

⁶ Se utiliza Normas APA 6

[s_education_and_technology-
rethinking_the_terrain_The_17th_ICMI_study](#)

Berté, A. (2000). *Matemática Dinámica*. Buenos Aires, Argentina: A.Z editora. S.A.

Carreño, E. y Climent, N. (2019). Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros. *PNA*, 14(1), 23-53. Recuperado de <https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/9265>

Codes, M., Climent, N., Oliveros, I. (2019). Prospective primary teachers' knowledge about the mathematical practice of defining. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht University. Utrecht, Netherlands. Recuperado de <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02430452/document>

Cruz, M. y Mántica, A. (2017). El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas. *Unión*, (51), 69-82. Recuperado de <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/386>

Cruz, M. y Mántica, A. (2019). La puesta en juego de actividades propias del quehacer matemático mediadas por el empleo de un software de geometría dinámica. *Épsilon*, (101), 121-136. Recuperado de https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon101_8.pdf

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18. Recuperado de <https://flm-journal.org/Articles/58360C6934555B2AC78983AE5FE21.pdf>

- De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(5), 703-724. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/229002411_Using_dynamic_geometry_to_expand_mathematics_teachers'_understanding_of_proof
- De Villiers, M., Govender, R. y Patterson, N. (2009). Defining in Geometry. En T. Craine y R. Rubinstein (Eds.). *Geometry for a Changing World*. (pp. 189-203). Reston, Estados Unidos: NCTM. Recuperado de <http://dynamicmathematicslearning.com/NCTM-Yearbook09-defining.pdf>
- Ferragina, R. y Lupinacci, L. (2012). Los puntos en su lugar. En R. Ferragina (Ed.). *GeoGebra entra al aula de Matemática*. (pp.73-84) Buenos Aires, Argentina: Miño y Dávila editores.
- Freyre, M. y Mántica, A. (2021). Propiedades empleadas, deducidas y reconocidas en una construcción. El caso del rombo. En S. Scaglia, F. Kiener y M. Götte (Comp.) *Actas de las VII Jornadas de Educación Matemática y IV Jornadas de Investigación en Educación Matemática*. (pp. 210-218). Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral. Recuperado de: <https://www.fhuc.unl.edu.ar/institucional/wp-content/uploads/sites/3/2018/08/Ebook-Actas-Jornadas-Matem%C3%A1tica-2021.pdf>
- Furinghetti, F. y Paola, D. (2002). Defining within a dynamic geometry environment: notes from the classroom. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.) *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 392-399. Recuperado de <https://www.researchgate.net/profile/Fulvia->

[Furinghetti/publication/250779325_2002_-_Defining_within_a_dynamic_geometry_environment_notes_from_the_classroom/links/5b6b7146299bf14c6d95f500/2002-Defining-within-a-dynamic-geometry-environment-notes-from-the-classroom.pdf](https://www.furinghetti.com/publication/250779325_2002_-_Defining_within_a_dynamic_geometry_environment_notes_from_the_classroom/links/5b6b7146299bf14c6d95f500/2002-Defining-within-a-dynamic-geometry-environment-notes-from-the-classroom.pdf)

González, C. y Lupinacci, L. (2012). Buscando cuadriláteros y sus definiciones. En R. Ferragina (Ed.). *GeoGebra entra al aula de Matemática*. (pp.29-38) Buenos Aires, Argentina: Miño y Dávila editores.

González López, M. (2001). La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica. En P. Gómez, y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 277-290). Granada, España: Universidad de Granada.

Götte, M. (2019). *Resoluciones de problemas de geometría espacial. Errores y dificultades en futuros profesores de matemática*. (Tesis de maestría). Facultad de Humanidades y Ciencias, Santa Fe.

Govender, R. (2002). Constructive Evaluation Of Definitions In A Sketchpad Context. Presentado en *Associated Mathematics Educators of South Africa AMESA 2002*, University of Natal, Durban, South Africa. Recuperado de <https://koreascience.kr/article/JAKO200311921733953.page>

Gutierrez, A. (2005). Aspectos metodológicos sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez, M. Torralbo (Eds.) *Investigación en Educación Matemática IX* (pp.27-44). SEIEM. Recuperado de <https://redined.educacion.gob.es/xmlui/handle/11162/48006?locale-attribute=en>

- Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Volume 1* (pp. 103-117). Hiroshima: Nishiki Print Co. Recuperado de <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED452031.pdf>
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación*. Cuarta Edición. México DF, México: McGraw Hill.
- Horzum, T. y Ünlü, M. (2017). Pre-service mathematics teachers' views about GeoGebra and its use. *Acta Didáctica Napocensia*, 10(3), 77-89. Recuperado de <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1160574.pdf>
- Iglesias, M y Ortiz, J. (2018). Usos del software de geometría dinámica en la formación inicial de profesores de matemáticas. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 1(2), 21-35. Recuperado de <http://mesjournal.es/ojs/index.php/mes/article/view/13>
- Iglesias, M. y Ortiz, J. (2019). La Demostración en Geometría desde una Perspectiva Didáctica. *Unión*, (55). 159-183. Recuperado de <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2019/55/aula01.pdf>
- Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Itzcovich, H. y Murúa, R. (2016). GeoGebra: nuevas preguntas sobre viejas tareas. *Yupana*, (10), 71-85. Recuperado de <https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/publicaciones/index.php/Yupana/article/view/7698/11098>

Itzcovich, H. (2020). [Departamento de Matemática - UNS]. (2020, octubre 21). Taller Esp. Horacio Itzcovich [Archivo de video]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=5a1Y4Aj7fdM>

Jaime Pastor, A., Chapa Aguilera, F. y Gutiérrez Rodríguez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon*, (23), 49-62. Recuperado de <https://docplayer.es/23209601-Definiciones-de-triangulos-y-cuadrilateros-errores-e-inconsistencias-en-libros-de-texto-de-e-g-b.html>

Jaime Pastor, A. y Gutierrez Rodriguez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid, España: Síntesis

Khalil, M., Khalil, U. y Haq, Z. (2019). GeoGebra as a scaffolding tool for exploring analytic geometry structure and developing mathematical thinking of diverse achievers. *International electronic journal of mathematics education*. 14(2), 427-434. Recuperado de <https://www.iejme.com/download/geogebra-as-a-scaffolding-tool-for-exploring-analytic-geometry-structure-and-developing-mathematical-5746.pdf>

Laborde, C. (1998). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la Educación Matemática* (pp. 33-48). Bogotá, Colombia: Una empresa docente. Universidad de los Andes.

Larios, V. y González González, N. (2010). Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de geometría dinámica. *Relime*. Vol. 13 (4-I). pp. 147-160. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/335/33529137010.pdf>

Mancebo, P. (2015). *GeoGebra en la enseñanza del Dibujo Técnico*. Universidad de Cantabria. Facultad de Educación. Recuperado de <https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/6844>

Mantica, A. y Freyre, M. (2018). El trabajo con GeoGebra, ¿Contribuye en la elaboración y validación de conjeturas? Propiedades de las diagonales del rectángulo. En P. Lestón, (Ed.) *Acta del XII Congreso Argentino de Educación* (pp. 875-884). Buenos Aires, Argentina: SOAREM. Recuperado de http://www.soarem.com.ar/Documentos/Acta_XII_CAREM_2018.pdf

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación educativa*. 5° edición. Madrid: Pearson. Addison Wesley.

Novembre, A., Nicodemo, M. y Coll, P. (2015). *Matemática y TIC - Orientaciones para la enseñanza*. Buenos Aires, Argentina: ANSES. Recuperado de <https://literacias.net/bibliodigital/index.php?page=13&id=7&db=>

Olive, J., Makar, K., Hoyos, V., Kee Kor, L., Kosheleva, O. y Sträber, R. (2010). Mathematical Knowledge and Practices Resulting from Access to Digital Technologies. En C. Hoyles y J. Lagrange (Eds.) *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*. (pp. 251-284). Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/266943671_Mathematics_education_and_technology-rethinking_the_terrain_The_17th_ICMI_study

Olivero, F. (2003). Cabri as a shared workspace within the proving process. *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*, 3, (pp. 429-436). Honolulu, Estados Unidos. Recuperado de <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED500858.pdf>

- Pachuca, Y. y Zubieta, G. (2020). Definiciones e imágenes del concepto de ángulo y su medida en estudiantes que inician la educación superior. *Educación Matemática*, 32(1), 38-66. Recuperado de <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol32/1/03REM32-1.pdf>
- Reid, M., Botta, R. y Prieto, F. (2017). Mandala: Otra forma de abordar conceptos geométricos. *Unión*, (49), 217-230. Recuperado de <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2017/49/Reid.pdf>
- Restrepo, A. (2008). *Génesis instrumental del desplazamiento en Cabri - Geometre por alumnos de 11 - 12 años*. IberoCabri Argentina. Recuperado de <https://docplayer.es/88883472-Genesis-instrumental-del-desplazamiento-en-cabri-geometre-por-alumnos-de-anos.html>
- Sánchez, C. y Samper, C. (2017). Geometría dinámica: la diferencia entre percibir y discernir. En P. Perry (Ed.), *Memorias 23 Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*. (pp. 149-154). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de http://encuentrodegeometria.upn.edu.co/docs/memorias/Encuentro_23.pdf
- Sánchez, I. y Prieto, J. (2019). Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *PNA*, 14(1), 55-83. Recuperado de <https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/8657/9385>
- Sánchez, I., Prieto, J., Gutiérrez, R. y Díaz-Urdaneta, S. (2020). Sobre os processos de objetivação de saberes geométricos. Análise de uma experiência de elaboração de simuladores com o GeoGebra. *Educación*

Matemática, 32(1), 99-131. Recuperado de <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol32/1/05REM32-1.pdf>

Sinclair, N., Bartolini, M., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leng, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education* (48), 691–719. Recuperado de https://eprints.soton.ac.uk/400195/1/_filestore.soton.ac.uk_users_dkj_mydocuments_Files_Research_eprints%2520files%2520%2528%2526%2520published%2520versions%2529_Published%2520versions_Sinclair-etc%2520-%2520geom_ed_ICME%25E2%2580%259113_survey_2016.pdf

Sua, C. y Camargo, L. (2019). Geometría dinámica y razonamiento científico: Dúo para resolver problemas. *Educación Matemática*, 31(1), 7-37. Recuperado de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol31/1/01_REM_31-1.pdf

Tall, D. (1989). Concept images, computers and curriculum change. For *the learning of Mathematics*, 9(3), 37-42. Recuperado de <https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1989e-conim-genorg-flm.pdf>

Tall, D. (1992). Construction of objects through definition and proof. *PME Working Group on Advanced Mathematical Thinking*. Recuperado de <https://pdfs.semanticscholar.org/e357/4fca27a0f4d5353aefffb4fa9ced82db.pdf>

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

- Weinhandl, R., Lavicza, Z., Hohenwarter, M. y Schallert, S. (2020). Enhancing flipped mathematics education by utilising GeoGebra. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST)*, 8(1), 1-15. Recuperado de <https://ijemst.net/index.php/ijemst/article/view/832/206>
- Winicki-Landman, G. (2006). Las definiciones en matemáticas y los procesos de su formulación: algunas reflexiones. En G. Martínez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 528-537). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperado de <https://www.clame.org.mx/documentos/alme19.pdf>
- Winicki-Landman, G. y Leikin, R. (2000). On Equivalent and Non-Equivalent Definitions Part I. *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 17-21. Recuperado de <https://flm-journal.org/Articles/2F441EA45617F5B5BCAB5F0949C5D.pdf>
- Yahia, A., Daher, W., Swidan, O. (2019). In-service teachers' conceptions of parallelogram definitions. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Utrecht University. Utrecht, Netherlands*. Recuperado de <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02402193/>
- Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 131-148. Recuperado de <https://typeset.io/pdf/exemplifying-definitions-a-case-of-a-square-3e7rfvs9lq.pdf>