



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA QUÍMICA

TESIS PRESENTADA COMO PARTE DE LOS REQUISITOS DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL PARA LA OBTENCIÓN DEL
GRADO ACADÉMICO DE

Doctor en Tecnología Química, Industrial y de los Materiales

EN EL CAMPO DE: **Control Óptimo de Procesos**

TÍTULO DE LA TESIS:

Control Óptimo Multiobjetivo con Matriz de Ganancias Variables Aplicado a Procesos Industriales Utilizando Desigualdades Lineales Matriciales

INSTITUCIÓN DONDE SE REALIZÓ:
Departamento de Ingeniería Química
Facultad de Ingeniería Química, UNL

AUTOR: Ing. Carlos A. Cappelletti

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Eduardo J. Adam

MIEMBROS DEL JURADO:
Dra. Marta S. Basualdo
Dr. Jorge R. Vega
Dr. Alejandro H. González

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2023

Dedicatoria

A mis Viejitos Lindos, Roberto y Lidia.

A mi Amada Esposa, Patricia.

A mis Hermanos y Amigos, Roberto, Adrián y Hernán.

A mi Dios y mi Madre del Cielo, por tantas y tantas Bendiciones...

Gracias!

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) por haberme incentivado a realizar esta tesis, y a la Facultad de Ingeniería Química (FIQ) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), por brindarme un lugar donde poder desarrollar y concluir el presente trabajo.

Especialmente quiero agradecer a mi director Eduardo, por su constante orientación, empeño y dedicación a lo largo de todo este tiempo, y también a mis compañeros Hugo y Emanuel por la infinidad de horas dedicadas al intercambio constructivo de ideas. Sin su paciente ayuda no hubiera sido posible concluir este trabajo.

Por último quiero agradecer a mis colegas y compañeros de cátedra Gustavo, Mónica, Fernando y Sergio, y a todas las personas que de algún modo, me han animado y apoyado durante el desarrollo de esta Tesis Doctoral.

Carlos A. Cappelletti.

Índice general

1. Introducción a la Tesis	1
1.1. Introducción	1
1.1.1. Valor Científico -Técnico del Trabajo a Realizar	1
1.2. Análisis de la principal bibliografía relacionada con el tema propuesto	5
1.2.1. Breve Reseña Histórica de la Teoría de Control Moderna .	5
1.2.2. Breve reseña histórica de las LMI en la teoría de control. .	8
1.2.3. Breve reseña histórica de las LMI dentro del control predic- tivo basado en modelo	10
1.3. Aspectos que lo hacen diferente de lo ya existente y conocido en el área:	12
2. Conceptos básicos sobre LMI	15
2.1. Introducción	15
2.2. Teoría Básica de LMI	15
2.3. Representación gráfica de las LMI	17
2.3.1. Ejemplo de Programación Lineal	17
2.3.2. Restricciones no lineales	19
2.3.3. Múltiples LMI, Intersección de Regiones	21
2.3.4. Restricciones en las variables de decisión	24
2.4. Transformación de las Desigualdades Matriciales Cuadráticas en LMI	26
2.4.1. Variables Matriciales	26
2.4.2. Complemento de Schur	27
2.4.3. Uso de LMIs en problemas de control	29
2.5. Resumen	33
3. Regiones LMI	35
3.1. Introducción	35
3.2. Regiones LMI	35
3.3. Estabilidad asintótica nominal: elipsoide invariante contractivo . .	41
3.3.1. Modelo LTI en tiempo continuo	41
3.3.2. Modelo LTI en tiempo discreto	45
3.4. Resumen	47
4. Formulación del LQR robusto con restricciones vía LMI	49
4.1. Introducción	49
4.2. Formulación del problema LQR para modelos LTI	49

4.2.1.	Formulación del LQR en tiempo continuo	49
4.2.2.	Formulación del LQR en tiempo discreto	52
4.3.	LQR para sistemas LTI con restricciones en el vector de entradas .	56
4.3.1.	Restricción en la amplitud del módulo de la variable mani- pulada	56
4.3.2.	Restricción en la amplitud de cada componente	58
4.4.	LQR robusto para modelos LPV representados mediante modelos politópicos	60
4.4.1.	Modelo con incertidumbres en tiempo continuo	60
4.4.2.	Modelo con incertidumbres en tiempo discreto	64
4.5.	LQR robusto con restricción en la variable manipulada	66
4.6.	Obtención de una ganancia de realimentación variable, F_k	68
4.6.1.	Planteo del problema	69
4.7.	Prueba y mejora de los reguladores	72
4.7.1.	Utilización de un conjunto terminal para reducir la carga computacional y mejorar la utilización del algoritmo de cálculo	75
4.8.	Resumen	83
5.	Ejemplo: Regulación de un CSTR	85
5.1.	Introducción	85
5.2.	Planteo del problema	85
5.3.	Comportamiento del reactor en lazo abierto	87
5.3.1.	Variación en los parámetros	89
5.4.	Modelo politópico para el CSTR con incertidumbres paramétricas	91
5.4.1.	Modelo politópico para el CSTR en tiempo continuo	96
5.5.	Diseño del regulador en tiempo continuo	98
5.5.1.	Regulador sin restricciones	98
5.5.2.	Regulador con restricción en la variable manipulada	103
5.5.3.	Regulador con vector de ganancias variables	106
5.6.	Diseño del regulador en tiempo discreto	111
5.6.1.	Discretización de los modelos LTI vértices	111
5.6.2.	Diseño de un regulador robusto con vector de ganancias va- riable en tiempo discreto	113
5.6.3.	LQR con ganancia variable y eliposoide terminal	116
5.6.4.	Resumen	118
6.	Saturación en el actuador	121
6.1.	Introducción	121
6.2.	Conceptos preliminares y modelo politópico para la realimentación con señales saturadas	121
6.2.1.	Repaso sobre cáscara convexa (politopo)	122
6.2.2.	Modelo politópico para la señal saturada	124
6.2.3.	Modelo politópico para la realimentación de estados saturada	129
6.3.	Estabilidad asintótica del origen para un modelo LTI realimentado con señal de control saturada	130
6.3.1.	Cálculo del regulador	136

6.4.	LQR para modelos LPV en tiempo discreto con entrada saturada .	137
6.4.1.	Formulación del problema	137
6.4.2.	Diseño del regulador	140
6.5.	Simulación	144
6.6.	Resumen	149
7.	Diseño de un LQR robusto con saturación en el actuador mediante una función de Lyapunov dependiente de la saturación	151
7.1.	Introducción	151
7.2.	Estabilidad asintótica del origen para un modelo LTI	152
7.2.1.	Determinación de un nuevo dominio de atracción	152
7.2.2.	Función de Lyapunov dependiente de la saturación	155
7.3.	Estabilidad asintótica y desempeño robusto para el modelo LPV .	159
7.3.1.	Planteo del problema	159
7.4.	Simulación	171
7.4.1.	Ejemplo 1	171
7.4.2.	Ejemplo 2: Cambio del nivel de saturación	175
7.4.3.	Ejemplo 3: Incorporación de un conjunto terminal	176
7.4.4.	Ejemplo 4	178
7.5.	Resumen	180
8.	Conclusiones	183
8.1.	Resumen y conclusiones de la tesis	183
8.2.	Trabajos Futuros	186
A.	Artículos Publicados	189
B.		191
B.1.	Demostración del teorema 3.1	191
C.	Modelo del Reactor	193
C.1.	Modelo del Reactor	193
C.1.1.	Puntos Estacionarios	196
C.1.2.	Curva de reacción y curva de disipación	197

Índice de figuras

2.1. Restricciones lineales, región convexa poligonal	18
2.2. Restricciones lineal, cuadrática y cúbica, y sus curvas de nivel. . .	21
2.3. Región Factible	21
2.4. Región Factible $\mathcal{F}_B(x) < 0$	22
2.5. Múltiples LMI. Intersección de regiones convexas.	23
2.6. Región Factible $\mathcal{F}(x) < 0$ y $X(x) < 0$	23
2.7. Dominios rectangular y cónico donde las variables de decisión son positivas	26
2.8. Respuesta en frecuencia de $G(s)$	31
2.9. Curvas de nivel y región factible.	34
3.1. Región polos, en el plano complejo s , para el modelo LTI entrada- salida asintóticamente estable	37
3.2. Región circular	38
3.3. Región polos, en el plano complejo z , para el modelo LTI entrada- salida asintóticamente estable	40
3.4. Ubicación de los autovalores de la matriz A	41
3.5. Superficies de nivel de $V[x(t)]$ y trayectoria de estados para $n = 2$	43
3.6. Ubicación de los autovalores de la matriz A	45
3.7. Superficies de nivel de $V[x(k)]$ y trayectoria de estados para $n = 2$	46
4.1. Diagrama ilustrativo del CSTR y el control aplicado	72
4.2. Curva de racción y recta de disipación para $q_c = 111,72 \text{ L min}^{-1}$	74
4.3. Diagrama de estados para los tres sistemas	74
4.4. Evolución de la concentración y la temperatura	74
4.5. Caudal manipulado	75
4.6. Ganancias de realimentación estática y variable	75
4.7. Evolución de los estados y región terminal	81
4.8. Concentración e incremento del caudal	82
4.9. Ganancia y tiempo de cómputo.	83
5.1. Rango de operación	87
5.2. Comportamiento de la dinámica del sistema cuando evoluciona de un estado inicial intermedio, hacia los dos extremos del rango de operación	88
5.3. Resultado de la simulación	90
5.4. Representación entrada-salida del CSTR perturbado	91

5.5. Caudal refrigerante (q_c) vs. Concentración (C_A)	92
5.6. Politopo de incertidumbres.	94
5.7. Puntos de linealización del sistema no lineal	95
5.8. Curvas de reacción y rectas de disipación	95
5.9. Ubicación de los polos de los modelos LTI vértices en el dominio s	97
5.10. Ubicación de los polos de los modelos LTI vértices realimentados en el dominio s	99
5.11. Tres sistemas elegidos para la simulación	99
5.12. Evolución de los tres sistemas en lazo abierto	100
5.13. Evolución de los tres sistemas realimentados	101
5.14. Evolución de los tres sistemas realimentados con una perturbación de estados (en los dos sentidos) que abarca todo el rango de operación	102
5.15. Caudal requerido para regular al CSTR dentro del rango de operación	103
5.16. Evolución de los tres sistemas perturbados. Regulador diseñado con restricción en la amplitud del caudal refrigerante	105
5.17. Caudal del líquido refrigerante acotado a las especificaciones de diseño	106
5.18. Comparación de la respuesta del sistema con restricción para los dos tipos de ganancias.	107
5.19. Comparación de la respuesta del sistema realimentado, con vec- tor de ganancias estático sin restricción y ganancia variable con restricción. La línea continua muestra la simulación con ganancia constante, y la línea a tramos muestra la simulación con ganancia variable.	108
5.20. Perturbación en concentración de entrada C_{Ae}	109
5.21. Comparación de la respuesta del sistema nominal, utilizando vector de ganancias estático y variable, ambos con restricción en la variable manipulada.	109
5.22. Comparación de la respuesta del sistema nominal, utilizando vector de ganancias estático y variable, ambos con restricción en la variable manipulada.	110
5.23. Ubicación de los polos de los modelos LTI vértices realimentados con vector de ganancias variable	111
5.24. Diagrama de Bode de los 7 modelos entrada-salida LTI estables . .	112
5.25. Proceso de discretización	112
5.26. Ubicación de los polos de los modelos LTI vértices en el dominio z	113
5.27. Concentración de entrada C_{Ae}	114
5.28. Comparación de la respuesta del sistema nominal con perturbacio- nes en los estados y en la entrada C_{Ae} , utilizando vector de gana- ncias estático (gráficas en color verde) y variable (gráficas en color marrón).	115
5.29. Comparación de desempeño entre los reguladores propuestos: En color azul, regulador con ganancia variable. En color rojo, regulador con ganancia variable y conjunto terminal.	116

5.30. Comparación entre las simulaciones con los reguladores propuestos: En color azul, regulador con ganancia variable. En color rojo, regulador con ganancia variable y conjunto terminal.	117
6.1. Representación de $\text{sat}[u_i(t)]$ en cuatro tiempos distintos mediante combinación convexa de $u_i(t)$ y $v_i(t)$. Representación de un politopo, en distintos tiempos, en \mathfrak{R}^1	126
6.2. Politopo en \mathfrak{R}^2 . Representación del politopo en tres tiempo distintos, mediante combinación convexa de $u(t)$ y $v(t)$	128
6.3. Representación del politopo en el tiempo t_2 mediante una cáscara convexa de 4 puntos $\in \mathfrak{R}^2$	128
6.4. Inclusión: $\epsilon(P, 0,5) \subset \mathfrak{L}(H)$	134
6.5. Perturbación en C_{Ae}	144
6.6. Diagrama esquemático del proceso.	145
6.7. Respuesta del sistema, con entrada saturada (color verde) y con entrada restringida (en color gris).	145
6.8. Caudal manipulado, con entrada saturada (color verde) y con entrada restringida (en color gris).	146
6.9. Comparación de desempeño entre un regulador que satura y otro que restringe la acción del actuador.	147
6.10. Respuestas del sistema con entrada saturada, con y sin conmutación con vector de ganancias estático sin restricciones.	147
6.11. Comparación entre simulaciones que utilizan entrada saturada, con y sin conjunto terminal	148
7.1. Resultados de la simulación	171
7.2. Respuesta del sistema realimentado con los dos reguladores en presencia de la perturbación en C_{Ae}	172
7.3. Dominio de atracción en los instantes t_1 y t_2	173
7.4. Elipsoide inicial, función de Lyapunov e índice de desempeño (ρ). En color verde: función de Lyapunov cuadrática, y en color rojo: función de Lyapunov dependiente de la saturación.	174
7.5. Resultado de la simulación para ambos reguladores con $q_{sat} = 114 \text{ l/min}$, y $q_{sat} = 110 \text{ l/min}$ para el regulador que utiliza FLDS.	175
7.6. Evolución de los estados y región terminal para $C_{A_{ss}} = 0,12 \text{ mol/l}$ y $q_{sat} = 110 \text{ l/min}$	176
7.7. Aumento de la región terminal mediante la unión de elipsoides	176
7.8. Resultados de la simulación para un regulador que conmuta entre un LQR con FLDS y un LQR con ganancia estática.	177
7.9. Perturbación en C_{Ae}	178
7.10. Evolución de los estados y región terminal	178
7.11. Entrada y salida del reactor	179
7.12. Ganancia en la concentración y tiempo requerido para su cálculo	180
C.1. Generación y disipación del calor vs temperatura	199

Capítulo 1

Introducción a la Tesis

1.1. Introducción

1.1.1. Valor Científico -Técnico del Trabajo a Realizar

En esta tesis doctoral se aborda el problema de regulación de sistemas típicos de la tecnología química. Estos sistemas además de ser no lineales y de tener parámetros inciertos tienen restricciones en sus estados. De igual modo, los elementos intervinientes en el lazo de control (sensores y actuadores) son componentes físicos que adolecen de las mismas limitaciones, y es común que se produzcan saturaciones en las variables manipuladas y/o sensadas.

El diseño de controladores para procesos tecnológicos persigue la obtención de un sistema de control que funcione en forma óptima. Para lograr este funcionamiento óptimo es necesario que se garanticen características dinámicas adecuadas ante diversas situaciones, tales como:

- cambios de consigna, donde se busca reducir o eliminar el error de seguimiento y acotar el tiempo de respuesta dentro de ciertos valores límites razonables,
- buen rechazo de perturbaciones, donde se busca reducir al mínimo la variabilidad que se produce en las señales controladas ante entradas no deseadas, o reducir la sensibilidad al ruido producida en los sensores de las variables medidas y,
- lograr cierta robustez en el sistema de control ante las incertidumbres propias del modelado.

En este último aspecto se puede decir que los modelos utilizados en procesos de Ingeniería Química provienen mayoritariamente de la formulación matemática de sus principios físico-químicos, en general de ecuaciones de balance adecuadamente simplificadas o bien, del tratamiento numérico de datos experimentales y de la elección de una forma analítica simplificada para expresar la dinámica y posterior ajuste de sus parámetros. Un claro ejemplo de esto son los reactores químicos (CSTR¹, por sus siglas en inglés) donde a pesar de disponer de modelos

¹Continuous-Stirred Tank Reactor

matemáticos rigurosos existen incertidumbres en sus parámetros y simplificaciones en su modelo matemático.

Así, cuando se desarrolla un sistemas de control, el diseño se realiza sobre el modelo matemático del proceso específico, y como se mencionó, tal modelo no es exacto sino sólo una aproximación de la dinámica real.

Además, aunque los valores nominales de los parámetros del proceso sean muy precisos, el punto de operación cambia respecto al punto de equilibrio cuando el sistema está en funcionamiento, ya sea porque el sistema se ve afectados por perturbaciones externas o simplemente porque sus parámetros varían con el tiempo.

Todos estos factores provocarán, si no se toma el recaudo necesario, un pobre desempeño en el comportamiento del sistema respecto a las especificaciones exigidas y, lo que es peor, pueden producir inestabilidad en el sistema de control a lazo cerrado.

Por otro lado, y a pesar de los inconvenientes antes mencionados, linealizar en distintos puntos de operación y obtener modelos (LTI², por sus siglas en inglés) tiene una importancia fundamental, ya que estos modelos no sólo sirven para la representación local de sistemas no lineales, sino que también permiten utilizar numerosas técnicas en el diseño de controladores en los dominios temporal y frecuencial [2]. Por lo tanto, si bien al linealizar una planta se sacrifica información, se tiene la posibilidad de utilizar una gran cantidad de resultados teóricos ya existentes.

Dentro de la teoría de control lineal, algunos métodos que han sido utilizados para estudiar aspectos del problema de estabilización robusta, hacen su análisis en el dominio de la frecuencia (métodos de Bode o de Nysquit) [42].

La técnica de *control robusto* busca encerrar todo lo que esta fuera del modelo nominal en lo que se denomina modelo de *incertidumbres*, de forma tal que la planta real que se quiere gobernar, esté incluida dentro de una familia de modelos LTI formados por la planta nominal más las incertidumbres.

En las últimas décadas, se ha mostrado que una amplia gama de problemas para el diseño de controladores robustos, que satisfacen restricciones, pueden ser reducidos a un problema de optimización convexa estándar utilizando *Desigualdades Matriciales Lineales* (LMI³, por sus siglas en inglés). Respecto al uso de esta herramienta matemática, resulta significativo mencionar que uno de los primeros trabajos que realiza un gran aporte en el área es el de Boyd [7].

Es importante destacar que técnicas clásicas para el cálculo de controladores como el (PID⁴, por sus siglas en inglés) y el (LQR⁵, por sus siglas en inglés) como así también las técnicas robustas, realizan el cálculo del controlador fuera de línea, es decir, se utiliza el modelo matemático de la planta para realizar el cálculo del controlador y una vez determinado se aplica a la planta real.

Por otro lado es bien conocido, en la industria de control de procesos, que la estrategia de *control predictivo* es una de las estrategias más populares de control

²Linear Time Invariant

³Linear Matrix Inequalities

⁴Proportional Integral Derivative

⁵Linear Quadratic Regulator

digital, la cual ha sido utilizada por la industria de procesos en plantas químicas y refinerías de petróleo desde la década de 1980.

El control predictivo basado en modelo (MPC⁶, por sus siglas en inglés) requiere, como su nombre indica, un modelo del sistema a controlar para predecir la evolución futura de los estados y/o salidas. A diferencia de otras técnicas clásicas para el cálculo de controladores, el MPC es una técnica que realiza el cálculo de la señal de control en línea.

El modelo del proceso es conocido como *modelo de predicción*, en tanto que el intervalo de tiempo finito, expresado en instantes de muestreo, sobre el que se predice la evolución de las salidas es conocido como *horizonte de predicción*.

Para calcular las señales (o secuencias) de control que regulan la evolución del proceso, se utiliza algún criterio o índice de desempeño. Luego, mediante técnicas de optimización se minimiza o maximiza dicho índice proporcionando, según este criterio, la mejor acción del controlador.

Una característica fundamental del control predictivo es la estrategia de horizonte deslizante (RHC⁷, por sus siglas en inglés), la cual consiste en aplicar solo la primera componente de la secuencia de actuaciones calculadas, descartándose el resto, y repitiéndose este proceso en cada instante de muestreo. Lo expresado implica la existencia de dos elementos fundamentales en MPC, el **modelo de predicción** y el **optimizador**.

El MPC tiene como ventaja que es aplicable a prácticamente cualquier tipo de proceso, especialmente a los procesos de dinámica lenta. De manera natural pueden obtenerse formulaciones multivariadas, especialmente si se emplean modelos de predicción en espacio de estados. Tiene la capacidad de considerar restricciones en las variables de control y en las variables del proceso al momento de calcular la ley de control, y esta característica es muy apreciada desde el punto de vista industrial [9].

Si bien la técnica RHC provee al MPC de cierto grado de robustez, es necesario disponer de un modelo lo suficientemente realista del proceso a controlar y como ya se dijo, esto no siempre es posible de obtener.

Existen diferentes técnicas para mejorar la robustez del MPC que consideran en el proceso de optimización las incertidumbre en el modelo. Entre ellas, se destaca la *optimización Min-Max* de las especificaciones donde se resuelve el problema de control óptimo para el peor modelo en una región de incertidumbre acotada.

Esta técnica tiene como inconveniente que requiere de una enorme potencia de cálculo para resolver el problema de optimización en línea, por lo tanto, la dinámica del proceso a ser controlado es relevante. Confinar el intervalo de predicción a un horizonte finito lo más reducido posible resulta ser una solución, aunque durante mucho tiempo esta solución no daba garantías de estabilidad. Sin embargo hoy en día, la base teórica del MPC es bien conocida y la estabilidad asintótica está garantizada por medio de una apropiada penalización del estado final y añadiendo una restricción final [31] [21].

Alternativamente a la utilización de un horizonte de predicción finito, el uso de

⁶Model Predictive Control

⁷Receding Horizont Control

las LMI en el diseño MPC permite llevar el intervalo de predicción a tiempo infinito sin necesitar de un tiempo de cálculo excesivo como el necesitado en la técnica de optimización Min-Max. La estrategia consiste en aplicar una cota superior al funcional a minimizar, que representa un costo cuadrático en un intervalo infinito, y minimizar dicha cota [25].

La principal ventaja que tienen las LMI es que las mismas permiten el diseño de controladores multiobjetivos, tratando a los errores de modelado mediante un politopo de incertidumbres paramétricas, y transformando las especificaciones de diseño, como así también las restricciones en los estados y las restricciones o saturaciones en la variable manipulada, en un problema de optimización convexo para lo cual existen algoritmos de búsqueda especializados, como son los métodos de punto interior, que resuelven el problema en tiempos polinómicos [7].

La contrapartida de utilizar las LMI en MPC, es que se le quita grado de libertad al cálculo de la variable manipulada. Esto es, en lugar de determinar una ley de control en cada iteración se fija de antemano una ley de realimentación lineal de estados, y solamente se calcula en cada iteración el vector de ganancias para la realimentación.

El objetivo de esta tesis apunta al diseño de controladores lineales, multiobjetivos con matriz de ganancias variables mediante el uso de LMI. Los cuales, son capaces de lograr en un sistema o proceso químico tecnológico, un funcionamiento óptimo cumpliendo con las condiciones dinámicas especificadas, respetando restricciones operativas, y asegurando las condiciones de robustez necesarias de manera que se garantice la estabilidad asintótica en el sistema controlado a pesar de las incertidumbres presentes en sus parámetros y posibles saturaciones en el actuador.

Así, la plataforma teórica de la tesis resulta en abordar:

- La teoría de programación matemática lineal y programación semidefinida.

- La conexión entre las teorías de control moderna y los problemas de optimización mediante las LMI.

- La teoría básica de control predictivo con horizonte de predicción infinito y su vinculación con las LMI.

- El diseño óptimo de controladores multiobjetivos en línea con limitaciones en la variable manipulada.

- El diseño óptimo de controladores multiobjetivos en línea con saturaciones en el actuador.

1.2. Análisis de la principal bibliografía relacionada con el tema propuesto

1.2.1. Breve Reseña Histórica de la Teoría de Control Moderna

Muchas de las técnicas modernas de diseño de sistemas de control han mostrado ser exitosas en aplicaciones de la ingeniería electrónica, robótica o aeroespacial. Sin embargo, inconvenientes adicionales propios de la industria de procesos impiden alcanzar buenos desempeños con estas técnicas. La razón de esto se debe a los problemas que se presentan en la mayoría de los sistemas hallados en la ingeniería química, estos son, sistemas lentos (grandes constantes de tiempo), fuertemente acoplados y con claras características no lineales. Además, debe mencionarse que la región de operación de una planta química está generalmente limitada por una serie de restricciones que el sistema de control debe tener explícitamente en cuenta, y éstas restricciones no solamente se deben a condiciones para una operación conveniente sino frecuentemente a razones de seguridad.

Concretamente podemos decir que existen dos formas muy utilizadas para representar y analizar sistemas lineales de control. La primera, conocida como la teoría de control clásica [22] [35] [48] [46] (entre muchos otros) utiliza funciones de transferencias o función respuesta en frecuencia entre la salida controlada y la entrada manipulada, y un análisis en el espacio transformado por Laplace o por Fourier, donde el sistema queda caracterizado por un cociente de polinomios cuyas raíces determinan su comportamiento. Así, modificar el comportamiento dinámico del sistema implica tener algún grado de libertad para reubicar las raíces del polinomio del denominador del sistema controlado. A medida que el orden de la planta aumenta, la representación matemática del sistema y su posterior análisis y control se complican. La segunda forma, llamada teoría de control moderna [22] [35] [47] [41] (entre muchos otros), utiliza el recurso de representar a la planta mediante ecuaciones diferenciales vectoriales de primer orden haciéndose necesario el uso de funciones matriciales.

La teoría de control moderna se basa en un sistema de control que tiene en cuenta las llamadas variables de estados. A diferencia de la teoría clásica que considera una descripción entrada-salida del sistema, esta teoría utiliza tres tipos de variables, las entradas, las salidas y los estados, donde la cantidad de estados determina el orden del modelo. El uso de la notación matricial simplifica enormemente la representación matemática del sistema de ecuaciones. El incremento en la cantidad de variables de estados, de entradas y/o salidas, prácticamente no aumenta la complejidad de la formulación. De hecho, el análisis de sistemas complicados con entradas y salidas múltiples (MIMO⁸, por sus siglas en inglés), se realiza mediante procedimientos solo ligeramente más complicados que los requeridos para el análisis de sistemas de simple entrada – simple salida (SISO⁹, por sus siglas en inglés)[42]. La ventaja que representa esta descripción frente a la

⁸Multiple-Input Multiple-Output

⁹Single-Input Single-Output

descripción clásica radica en que sus métodos permiten obtener soluciones óptimas más generales, tanto para sistemas SISO como MIMO.

En una representación por variable de estados el modelo lineal queda caracterizado con las matrices A , B , C y D . Las matrices A y C describen el comportamiento no forzado del sistema, mientras que la matriz B caracteriza el efecto de la entrada (o control) sobre la dinámica del sistema, y la matriz D representa la transmisión directa de la entrada a la salida sin que se involucren los estados.

En la teoría de control moderna, dada la representación matricial, es necesario responder ciertas preguntas que brinden información elemental sobre la característica del sistema a la hora de construir un mecanismo de control. Estas preguntas son:

1. ¿Existe una entrada de control mediante la cual se pueda transferir al sistema desde un estado inicial x_0 a cualquier otro estado x_f deseado en un tiempo finito?
2. ¿El estado inicial x_0 del que parte un sistema puede identificarse mediante la observación de la salida y de la entrada sobre un tiempo finito?

Estas dos preguntas llevan a dos conceptos fundamentales, el de controlabilidad y el de observabilidad, que fueron introducidos por Kalman a principio de 1960. Ellas condicionan la relación que existe entre la entrada y el estado (la controlabilidad) y entre el estado y la salida (la observabilidad) respectivamente [41].

Gracias a esta teoría, las preguntas antes formuladas pueden ser contestadas mediante la inspección de las propiedades de las matrices A , B , C . Las matrices A y B relacionan las entradas con los estados y se las conoce como el par de controlabilidad. En cambio, las matrices A y C relacionan a los estados con las salidas, y se las conoce como el par de observabilidad.

Que el sistema sea completamente controlable quiere decir que se puede tener control sobre todos los estados del mismo, y que el sistema sea completamente observable, quiere decir que cada uno de los estados puede ser estimado.

Esta necesidad de determinar si el sistema es controlable y observable que se presenta en teoría de control moderna, no aparece en la teoría de control clásico. La razón es debido a que en control clásico no se tiene acceso a cada estado en particular, sino que solo se puede sensar y controlar las salidas del sistema, la cual es una combinación lineal de los mismos.

La gran ventaja que tiene la teoría de control moderna es que previo al diseño del controlador es posible determinar la controlabilidad del sistema, y al disponer de un sistema controlable, se garantiza poder realizar un control individual de cada uno de los estados mediante una realimentación o feedback de estado, lo que literalmente significa que se puede, al menos teóricamente, manejar la dinámica del sistema en lazo cerrado con gran simplicidad.

El desarrollo de la teoría del control óptimo se inició en la década de 1960 con el inicio de la carrera espacial. El problema a resolver fue el de llevar un vehículo espacial de algún punto en la tierra a algún otro, con un tiempo mínimo y consumiendo la menor cantidad de combustible posible. Es decir, de lo que se

trataba era de encontrar trayectorias óptimas en el espacio tridimensional. La solución de este problema no resultó en principio sencilla. El control óptimo tiene que ver con el cálculo de variaciones que es el nombre dado a la optimización de integrales o funcionales respecto a algún criterio dado.

Los criterios de optimización suelen ser muy diversos y determinados por el problema a resolver. Éstos pueden ser, la minimización del tiempo transcurrido al transferir el sistema desde un estado a otro, la minimización de la energía consumida para realizar dicha transferencia, o la maximización o minimización de otros indicadores de la economía del proceso, en los que es frecuente utilizar índices de desempeño cuadráticos.

Así, al diseñar un sistema de control óptimo interesa determinar el vector de control tal que un índice de desempeño determinado sea optimizado. Por ejemplo, en el caso en que se minimice la energía consumida para llevar un sistema a su punto estacionario luego de ser perturbado, se está diseñando un regulador óptimo cuadrático LQR, que lleva a una ley de control lineal.

Por lo tanto, el diseño de los sistemas de control óptimo y los reguladores óptimos basados en tales índices de desempeño cuadráticos se reduce a la determinación de los elementos de una matriz de ganancias de realimentación que reubicará los polos del sistema controlado en las posiciones óptimas deseadas. Una ventaja de usar el esquema de control óptimo cuadrático es que el sistema diseñado será asintóticamente estable, (excepto en el caso de que el sistema original no sea controlable), mediante la simple resolución de la ecuación algebraica de Riccati (ARE¹⁰, por sus siglas en inglés) [41].

Las técnicas clásicas, dentro de la teoría de control moderno, que resuelven esta ecuación son bien conocidas y en principio, utilizar una técnica diferente para resolverla parecería no aportar ninguna ventaja adicional frente a lo ya existente. De hecho, modificando las matrices de peso se pueden limitar las ganancias que ocasionalmente podrían conducir a excesivos movimientos de la variable manipulada y saturar el elemento de control final, y/o limitar el movimiento de los estados para no superar el rango de trabajo preestablecido.

Sin embargo, el diseño del LQR vía LMI es una técnica multiobjetivo, es decir, cada uno de los objetivos planteados, para la regulación del sistema realimentado, se presentan de manera explícita junto con el índice de desempeño que se desea minimizar, más allá de modificar o no las matrices de peso de la función objetivo.

Las LMI hacen su aporte, abordando los siguientes puntos:

- 1) Diseñar el LQR sin que se produzcan saturaciones o desbordes en las variables físicas, condicionando el diseño con nuevas restricciones. Por ejemplo, restricciones en los estados y/o restricciones en la variable manipulada.
- 2) Permitir que haya saturaciones en el actuador sin que se afecte la garantía de estabilidad del sistema realimentado. Esto implica replantear el problema y condicionar el diseño con nuevas restricciones.

En ambos casos el uso de la formulación con las LMI tiene su ventaja operativa, ya que un sistema de control óptimo con múltiples restricciones (múltiples LMI)

¹⁰Algebraic Riccati Equation

puede ser tratado como una única LMI de mayor tamaño, sin que ello implique alguna complejidad adicional en su resolución.

Otros objetivos de desempeño del sistema en lazo cerrado como ser, la minimización de la norma H_∞ , o la ubicación de polos en regiones predefinidas para lograr respuestas acotadas en amplitud y tiempo, pueden agregarse al diseño LQR como restricciones LMI sin mayor dificultad.

En los últimos años, el elevado poder computacional unido a la aparición de poderosos algoritmos de optimización convexa han contribuido a que su uso sea cada vez más popular.

1.2.2. Breve reseña histórica de las LMI en la teoría de control.

Las LMI, como su nombre lo indica, son desigualdades de matrices donde sus elementos son matrices constantes y matrices variables que aparecen formando una combinación lineal o afín.

Además geoméricamente una LMI define una región convexa y varias LMI determinan una región que es la intersección de varias regiones convexas, y dicha intersección, por propiedad de convexidad, también resulta ser una región convexa.

Por lo tanto, al minimizar o maximizar alguna función objetivo lineal dentro de dicha región convexa, siendo esta la forma en que se plantea un problema de optimización utilizando LMI, se tiene la garantía de encontrar (si es que existe) un óptimo único y global.

En su forma canónica, la desigualdad matricial puede ser representada por la siguiente formulación:

$$F(x) > 0,$$

donde $F(x)$ es una combinación afín de matrices simétricas conocidas, pesadas por variables de decisión x (variables a determinar), de tal manera que $F(x)$ resulta ser una matriz simétrica. La condición $F(x) > 0$ significa que $F(x)$ es positiva definida, con todas las propiedades que esto implica [34].

En 1890 Lyapunov demostró que el sistema modelado por el par de ecuaciones en variables de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

es estable, si y sólo si, existe una matriz $P = P' > 0$ tal que cumpla la siguiente desigualdad matricial:

$$A'P + PA < 0.$$

El requerimiento simultáneo de

$$A'P + PA < 0,$$

y

$$P > 0,$$

es lo que se conoce como desigualdad de Lyapunov en la matriz P .

Es decir, históricamente hablando, las primeras LMI utilizadas para analizar la estabilidad de un sistema que evoluciona en el tiempo, fue la desigualdad de Lyapunov, la cual puede ser resuelta analíticamente al resolver un conjunto de ecuaciones lineales como se muestra en muchos textos clásicos [36] [22][41].

En 1940 se utilizó la desigualdad de Lyapunov para analizar la estabilidad de un sistema de control que poseía una no linealidad en el actuador, el criterio de estabilidad tenía la forma LMI, pero con la particularidad de que la condición de estabilidad y la restricción del actuador fueron posibles de ser reducidas a un conjunto de desigualdades polinómicas, estas LMI fueron resueltas analíticamente en forma manual, por lo que su aplicación estaba limitada a sistemas pequeños de segundo o tercer orden [7].

En 1960 se logró reducir la solución de las LMI a un simple criterio gráfico, este criterio podía ser aplicado a sistemas de alto orden, pero que no contengan más de una no linealidad. Su contribución, desde el punto de vista histórico de la aplicación de estos métodos en sistemas de control, fue mostrar cómo resolver ciertas familias LMI por procedimientos gráficos.

Al comienzo de 1970, los investigadores observando ciertas simetrías en la ecuación algebraica de Riccati relacionadas con el control cuadrático óptimo en estado estacionario, vieron que se trataba de otra forma de LMI, si la condición de definida positiva se expresa en términos del complemento de Schur [7] [28], y por lo tanto, algunos tipos especiales de LMI pudieron ser resueltas utilizando métodos analíticos como los utilizados para resolver la ecuación algebraica de Riccati o ARE.

Existen entonces para esta fecha, distintos métodos para la solución de algunos tipos de LMI:

- a) Métodos directos y métodos gráficos (aplicables a sistemas de bajo orden) y,
- b) métodos analíticos de forma cerrada para la resolución de las ecuaciones de Lyapunov y Riccati.

En 1971 Willen¹¹ dijo, “la importancia de las LMI parece estar ampliamente despreciada, debe ser interesante ver si éstas pueden ser o no explotadas con nuevos algoritmos computacionales”.

Willen mismo sugirió que las LMI deben tener alguna ventaja computacional comparando, por ejemplo, con los algoritmos utilizados para resolver la ARE.

El próximo gran avance fue la simple observación de que las LMI utilizadas con la teoría de sistemas de control, permitía reformular a los problemas de control como un problema de optimización convexo, el que resulta amigable para ser resuelto en forma computacional.

Esta simple observación tuvo importantes consecuencias, la principal es que se pudieron resolver problemas vía LMI para los cuales ninguna solución analítica había sido encontrada.

Los problemas de optimización convexa pueden ser resueltos numéricamente eliminando la necesidad de una encontrar una solución analítica, utilizando algo-

¹¹Extraído del texto [7].

ritmos basados en métodos de punto interior. Estos algoritmos se desarrollaron principalmente en la década de 1980.

El hecho de poder reformular un problema de control como un problema de optimización convexo es otra gran ventaja que tienen las LMI, ya que tal convexidad garantiza encontrar, si es que existe, una solución única. Y si tal solución no existe, el algoritmo de búsqueda determina que el problema es infactible y en tal caso, previo a un replanteo del mismo, se pueden relajar las restricciones hasta lograr una solución.

Resumiendo, la idea de incorporar las LMI en un problema de control es el de reducir dicho problema a un problema de optimización convexo, y así tal reducción y posterior solución, constituyen la solución del problema original.

A continuación se mencionan algunos de los problemas de control que se resuelven con las LMI:

- Estabilidad de sistemas representados por modelos LTI utilizando función de Lyapunov cuadrática.
- Estabilidad robusta de sistemas representados por modelos (LPV¹², por sus siglas en inglés) utilizando función de Lyapunov cuadrática.
- Estabilidad robusta de sistemas representados por modelos LPV utilizando función de Lyapunov dependientes de parámetros.
- Estabilidad robusta de sistemas representados por modelos LPV utilizando función de Lyapunov dependientes de la saturación.
- Síntesis mezclada de las normas H_2 y H_∞ , para el diseño de reguladores con el rechazo a ruido de estados, ruido de medición y perturbaciones externas de norma acotada.
- Ubicación de polos en regiones LMI para garantizar desempeño robusto del vector de salida en los sistemas representados por modelos LPV.

Como ya se mencionó, además de los problemas respecto a la estabilidad y desempeño robusto para sistemas representados por modelos LPV, esta técnica permite manejar restricciones asociadas a la operación de los sistemas como pueden ser los valores máximos permitidos para alguna o varias variables dentro del proceso

1.2.3. Breve reseña histórica de las LMI dentro del control predictivo basado en modelo

En los últimos años, el control predictivo basado en modelo ha sido ampliamente adoptado como un método eficaz para tratar los problemas de control con restricciones [31].

¹²Linear Parameter Varying

Sin embargo, en el trabajo de Kothare et al [26], se destaca que la principal desventaja de las técnicas de diseño convencionales para el control predictivo del modelo o MPC, es su incapacidad para lidiar explícitamente con la incertidumbre del modelo de planta.

En dicho documento, se presenta un nuevo enfoque para la síntesis robusta de MPC que permite la incorporación explícita de la descripción de la incertidumbre de la planta en la formulación del problema. La incertidumbre se expresa tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia.

Como se ha mencionado en la sección anterior, el objetivo ahora es calcular, en sucesivos instantes de tiempo, una matriz de ganancias para construir y aplicar una realimentación de estado lineal, que minimice una función objetivo de horizonte infinito para el “peor de los casos”, sujeta a restricciones en la entrada de control.

Utilizando técnicas estándar, el problema de minimizar el límite superior de una función objetivo robusta (que incorpore a el caso más desfavorable), sujeto a restricciones de entradas, estados y salidas, se reduce a un problema de optimización convexo que involucra a las LMI.

El control predictivo basado en modelo robusto (RMPC¹³, por sus siglas en inglés), como una rama importante de MPC debido a su importancia en la práctica, ha atraído una atención notable de la comunidad de investigación [4] [15] [26].

Como se ha mencionado, en [26] se propone un diseño RMPC que garantiza la estabilidad asintótica del sistema en lazo cerrado.

A partir de este trabajo, se han presentado varias mejoras adicionales. En [6] se asume que los parámetros del sistema son medibles en línea, y en [15] se propuso un algoritmo MPC robusto mejorado mediante la aplicación de una función de Lyapunov dependiente de parámetros. La medición de estos parámetros proporciona información en tiempo real sobre las variaciones de las características de la planta, y es deseable diseñar controladores que se programen en base a esta información porque son menos conservadores que los que se diseñan utilizando una función de Lyapunov cuadrática. Además, también se han propuesto algunos diseños de reguladores fuera de línea que reducen la carga computacional del RMPC [4] [19] [52].

Por otro lado, el análisis de estabilidad y la síntesis de sistemas dinámicos con no linealidades en los actuadores han recibido una atención creciente en los últimos años. A menudo, el problema de la saturación del actuador se trataba diseñando leyes de control de baja ganancia con el fin de evitarla. Actualmente se permite la saturación del actuador estimando el dominio de atracción.

Es bien sabido que cuando el actuador se satura, el rendimiento de los sistemas en lazo cerrado diseñados sin considerar esta saturación puede deteriorarse seriamente [3] [24]. Por lo tanto, considerar la saturación del actuador en un diseño RMPC es de importancia crítica y se ha abordado bien en la literatura, al poder expresar la saturación mediante una cáscara convexa de un grupo de leyes de retroalimentación lineal auxiliar y ley de realimentación lineal real [24].

En [9] se propone un método de diseño RMPC en presencia de saturación. En dicho trabajo, se diseña una ley de control, utilizando el concepto del elipsoide

¹³Robust Model Predictive Control

invariante, para obtener una matriz de ganancias de realimentación para los sistemas con modelos LPV bajo representación politópica, sujetos a una saturación en el actuador. Primero se establece una condición de invariancia. Luego, al utilizar esta condición, el diseño de una ley de realimentación de estado se formula y resuelve como un problema de optimización con restricciones LMI.

La estabilidad de los sistemas representados por modelos lineales en tiempo discreto sujetos a la saturación del actuador se analiza utilizando una función de Lyapunov dependiente de la saturación (SDLF¹⁴, por sus siglas en inglés). Esta SDLF captura la información en tiempo real sobre la gravedad de la saturación del actuador y conduce a una estimación menos conservadora del dominio de atracción. Este método de diseño conduce a una mejora considerable en el rendimiento del sistema en lazo cerrado.

En el problema LQR formulado y resuelto en [9], se asigna una misma ponderación a los sistemas en lazo cerrado que resultan de las leyes de realimentación lineal auxiliar y real, esto deja espacio para una mejora adicional.

En [23] se propone un nuevo algoritmo de diseño de control predictivo de modelo robusto (RMPC) para un sistema lineal incierto con una descripción politópica y sujeto a la saturación del actuador. Concretamente, propone un nuevo diseño de RMPC que tenga en cuenta la ponderación relativa entre las leyes de realimentación auxiliar y real. La motivación de este artículo es reducir aún más el conservadurismo en el diseño del controlador. La libertad de diseño adicional al elegir la ponderación relativa en las leyes de realimentación real y auxiliar permite una mejora adicional del rendimiento del sistema en lazo cerrado en comparación con los resultados de los algoritmos existentes.

También en [54], se propone un algoritmo para el cálculo de un controlador que se basa en resolver a un problema $min - max$ para un sistema representados por un modelo LPV que incorpora la saturación del actuador dentro de la formulación LMI, utilizando una SDLF, y conduce a una estimación menos conservadora del dominio de atracción.

1.3. Aspectos que lo hacen diferente de lo ya existente y conocido en el área:

El objetivo del diseño óptimo en un sistema de control es lograr plantas que funcionen con robustez ante incertidumbres en su modelo y tengan adecuadas características dinámicas ante diversas situaciones, como cambios en la consigna y/o rechazo de perturbaciones, cumpliendo con restricciones operativas y evitando o incorporando saturaciones en las variables manipuladas.

En la literatura de control de procesos, se pueden encontrar estrategias de control asociadas con una descripción multimodelo de una planta no lineal. De esta manera, los sistemas no lineales se representan por una familia finita de modelos lineales, donde las no linealidades se contemplan por modelos LTI en diferentes puntos de operación.

¹⁴Saturation Dependent Lyapunov Function

El camino común para obtener la representación politópica consiste en construir un politopo que, a modo de envolvente convexa, encierra al modelo no lineal en todo su intervalo de operación y luego incorporar al modelo otra matriz asociada que incluya un vector de perturbaciones externas [32]. Estas representaciones politópicas son útiles cuando se implementan estrategias de control avanzadas, por ejemplo en [38] [39] [40], donde se utiliza un sistema no lineal modelado por un entorno de múltiples modelos y los controladores se formulan considerando un horizonte de predicción finito y restricciones terminales para garantizar la estabilidad asintótica.

En contraste con este camino, en la presente tesis se propone un nuevo procedimiento que incorpora las alinealidades en el modelo y las variaciones de los parámetros, debido a cambios en el punto de operación y a las perturbaciones externas, dentro de una única representación politópica reducida en vértices.

Para ello, se lleva a cabo un estudio cuidadoso del comportamiento dinámico del reactor de tanque agitado continuo (CSTR) con el fin de definir una representación multimodelo válida en la región de operación del reactor.

Otro aspecto a tener en cuenta es que, a diferencia del RMPC donde se utiliza un modelo discreto y el cálculo de la ganancia se realiza en los instantes de muestreo [26], en este trabajo para el diseño del controlador, los instantes en que se recalcula el vector de ganancias pueden coincidir o no con los intervalos de muestreo, de hecho también puede utilizarse modelos en tiempo continuo para el cálculo del vector de ganancias.

Además, en este trabajo al igual que en [54], se utiliza un regulador con saturación en el actuador y que utiliza, para el cálculo de su vector de ganancias, una función de Lyapunov que depende del nivel de saturación. Sin embargo, el empleo de este regulador tiene como desventaja un mayor tiempo de cálculo, y para reducir este tiempo, en esta tesis se propone el uso de un conjunto terminal que abarca todo el rango de operación [5]. La ventaja de utilizar este conjunto terminal reside en que, en dicha región, se puede aplicar directamente una ganancia de realimentación estática y sin restricciones para la cual el consumo de tiempo del algoritmo es ínfimo.

Capítulo 2

Conceptos básicos sobre LMI

2.1. Introducción

Las LMI, son desigualdades matriciales donde las variables de decisión, que normalmente son matrices, aparecen en forma afín¹.

En las últimas décadas se ha comprobado que una amplia gama de problemas de diseño de controladores pueden ser reducidos al problema de optimización convexo estándar, utilizando Desigualdades Matriciales Lineales o LMI.

Su principal ventaja radica en que las mismas definen regiones convexas, es decir, el conjunto de especificaciones de diseño para el controlador es transformado en una intersección de regiones convexas.

Planteadas las especificaciones como restricciones en formato LMI, la solución de encontrar un controlador que las satisfaga se resume a resolver un problema de optimización, y al ser este convexo, se tiene la certeza de que si existe solución, esta es única.

En el presente capítulo se realiza una introducción a la teoría de las LMI, se ejemplifica su convexidad, y se muestra cómo las LMI pueden adaptarse a los problemas de diseño en los sistemas de control.

2.2. Teoría Básica de LMI

Se dice que una matriz \mathcal{F} es negativa (o positiva) definida, si y sólo si, es simétrica y la función cuadrática asociada $v'\mathcal{F}v$, es menor (o mayor) que cero para todo $v \neq 0$ [7], simbólicamente

$$\mathcal{F} < 0, \iff \mathcal{F} = \mathcal{F}' \wedge v'\mathcal{F}v < 0, \quad \forall v \neq 0, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{F} > 0, \iff \mathcal{F} = \mathcal{F}' \wedge v'\mathcal{F}v > 0, \quad \forall v \neq 0.$$

Si la matriz \mathcal{F} depende de un vector $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]'$ del siguiente modo:

$$\mathcal{F}(x) \triangleq F_o + x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_m F_m, \quad (2.2)$$

¹Una combinación afín, es una combinación lineal más un término constante.

donde las matrices $F_0, F_1, F_2, \dots, F_m$, son matrices simétricas, constantes y cono-
cidas, entonces su condición de definida negativa (o positiva), esto es,

$$\mathcal{F}(x) = F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_m F_m < 0, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{F}(x) = F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_m F_m > 0,$$

recibe el nombre de la desigualdad matricial lineal o LMI.

Las componentes del vector $x : \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, se llaman variables de decisión,
y son las variables a determinar para las cuales se verifican las desigualdades (2.3).

A continuación se demostrará formalmente [44] que las LMI definen regiones
convexas en el espacio \mathfrak{R}^m sobre la variable vectorial x .

Considérese los vectores $x_a = [x_{a1} \ x_{a2} \ \dots \ x_{am}]'$ y $x_b = [x_{b1} \ x_{b2} \ \dots \ x_{bm}]'$, de
manera que para ambos vectores se cumple

$$F(x_a) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_{ai} F_i < 0, \quad (2.4)$$

y

$$F(x_b) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_{bi} F_i < 0. \quad (2.5)$$

Además, considérese un escalar λ , tal que $0 \leq \lambda \leq 1$. Multiplicando por λ la
Ec.(2.4) y por $(1 - \lambda)$ la Ec.(2.5), se tiene

$$\lambda F(x_a) = \lambda F_0 + \sum_{i=1}^m \lambda x_{ai} F_i < 0, \quad (2.6)$$

y

$$(1 - \lambda) F(x_b) = (1 - \lambda) F_0 + \sum_{i=1}^m (1 - \lambda) x_{bi} F_i < 0. \quad (2.7)$$

Sumando las Ec. (2.6) y (2.7), resulta

$$F_0 + \sum_{i=1}^m (\lambda x_{ai} + (1 - \lambda) x_{bi}) F_i < 0, \quad (2.8)$$

y definiendo como

$$x^* \triangleq (\lambda x_a + (1 - \lambda) x_b) = x_b + \lambda(x_a - x_b), \quad (2.9)$$

un punto cualquiera que pertenece al segmento de recta que une al punto
 x_a con el punto x_b , se cumple que

$$F(x^*) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i^* F_i < 0, \quad (2.10)$$

es decir, el punto x^* también satisface la desigualdad (2.4), quedando de-
mostrada su convexidad.

2.3. Representación gráfica de las LMI

A continuación se desarrollan algunos ejemplos para mostrar gráficamente que las LMI representan regiones convexas.

2.3.1. Ejemplo de Programación Lineal

En un problema de programación matemática lineal[34], tanto la función objetivo que se desea optimizar como las restricciones impuestas, son combinaciones lineales de las variables de decisión.

Ejemplo 2.1:

Considérese el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathcal{R}^2} \{f(x) = c'x\}, \\ \text{s.a: } Ax - b \leq 0, \\ x \geq 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 70 \\ 40 \\ 90 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Resolución 2.1. Reemplazando los valores de la Ec.(2.12), el problema de la Ec.(2.11), se reformula como:

Maximizar la función escalar

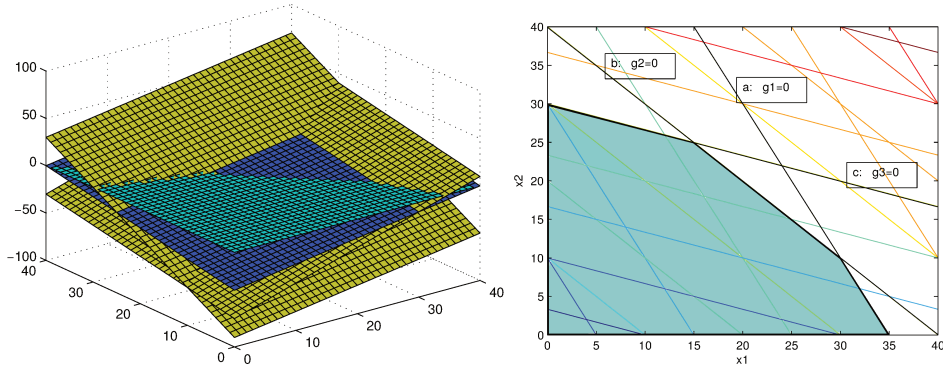
$$f(x) = 40x_1 + 60x_2, \quad (2.13)$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 2x_1 + x_2 - 70 \leq 0, \\ g_2(x) &= x_1 + x_2 - 40 \leq 0, \\ g_3(x) &= x_1 + 3x_2 - 90 \leq 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} g_4(x) &= x_1 \geq 0, \\ g_5(x) &= x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Este problema está representado gráficamente en la Fig.(2.1). Obsérvese que las rectas (a), (b) y (c), son las cotas superiores de las desigualdades (2.14), y junto con los ejes $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, que son las cotas inferiores de las desigualdades (2.15), conforman un polígono que es la frontera de la región convexa en la cual el punto (x_1, x_2) debe estar confinado.



(a) $g_1(x) \cap g_2(x) \cap g_3(x) \cap g_4(x) \cap g_5(x)$. (b) Curvas de nivel y región factible.

Figura 2.1: Restricciones lineales, región convexa poligonal

A esta región poligonal delimitada por las restricciones se la denomina *región factible*.

La solución óptima se puede obtener gráficamente, ya que para distintos valores de $f(x) = \text{constante}$, se tiene un conjunto de rectas paralelas, y al alejarse en dirección perpendicular a éstas, $f(x)$ se maximiza.

Al maximizar $f(x)$, x_1 y x_2 no pueden tomar sino aquellos valores que pertenecen a la región factible.

Es sabido que en los problemas de programación lineal, el óptimo está siempre en un vértice de la frontera, sin embargo, la intención de este ejemplo no es encontrar el óptimo sino mostrar la convexidad de la región factible y su representación mediante una LMI, que se realiza a continuación.

Representación del interior del polígono mediante LMI

Obsérvese que el interior de la región poligonal, puede expresarse como

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 70 \\ 40 \\ 90 \end{pmatrix} < 0^{(3 \times 1)}. \quad (2.16)$$

El objetivo ahora, es representar la desigualdad anterior como una LMI. Para ello, se premultiplica el lado izquierdo de la desigualdad (2.16) por la matriz identidad ($I^{(3 \times 3)}$), y definiéndose

$$\mathcal{F}(x) \triangleq x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{F_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{F_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} -70 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -90 \end{pmatrix}}_{F_0}, \quad (2.17)$$

se obtiene

$$\mathcal{F}(x) = F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2.$$

A continuación se pide que $\mathcal{F}(x)$ sea negativa definida, para lo cual se reagrupa la suma (2.17) en una única matriz, y se impone tal condición

$$\mathcal{F}(x) \triangleq \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 70 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 + x_2 - 40 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 + 3x_2 - 90 \end{pmatrix} < 0, \quad (2.18)$$

y como se dijo, esta desigualdad matricial se satisface si los autovalores de $\mathcal{F}(x)$ son negativos, por tanto los elementos de la diagonal deberán cumplir que,

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 70 &< 0, \\ x_1 + x_2 - 40 &< 0, \\ x_1 + 3x_2 - 90 &< 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

De esta manera, parte del conjunto de restricciones que determinan el interior de la región poligonal, quedan definidas por la LMI (2.18).

Por otro lado, la restricción de positividad sobre las variables de decisión, también puede reformularse mediante una LMI, definiendo la matriz

$$X(x) \triangleq \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} > 0, \quad (2.20)$$

lo cual significa $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$. Resultando así la región convexa marcada en color verde de la Fig.(2.1)

2.3.2. Restricciones no lineales

En el ejemplo anterior se ha mostrado cómo una región poligonal (convexa) puede representarse mediante una LMI, en dicho ejemplo, la matriz además de ser simétrica es diagonal.

Se generalizará este concepto para otras matrices simétricas y negativa definidas que no son diagonales, y como se verá, la región convexa que determinan no será poligonal.

Recuérdese que una matriz $F(x)$ es negativa definida, si y sólo si, la función escalar: $v'F(x)v < 0$, para todo $v \neq 0$.

Las siguientes proposiciones son equivalentes, y garantizan que $F(x) < 0$:

1. Todos los autovalores de $F(x)$ deben ser negativos.
2. Los determinantes de las submatrices principales deben alternar su signo, comenzando con el signo menos.

A esta segunda condición se la conoce como teorema de Sylvester, y se la desarrolla mediante el siguiente ejemplo [7].

Ejemplo 2.2:

Considérese la matriz simétrica, en la que sus elementos son combinaciones afines en las variables x_1 y x_2 ,

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 & -1 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Se desea determinar el conjunto de valores de estas variables, para las cuales la matriz $\mathcal{F}(x)$ es negativa definida.

Esto es, encontrar x_1 y x_2 tal que $\mathcal{F}(x) < 0^a$.

^aEn este ejemplo no se pondrán restricciones sobre las variables de decisión.

Resolución 2.2. Obsérvese que aunque $\mathcal{F}(x)$ puede representarse como una combinación afín ,

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

que da lugar a la forma canónica con que se han definido las LMP²,

$$\mathcal{F}(x) = F_0 + \sum_{i=1}^2 x_i F_i < 0.$$

Retomando la Ec.(2.21), las submatrices principales de $\mathcal{F}(x)$ son:

$$\left(x_1 - 3 \right), \quad \begin{pmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 & -1 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Haciendo uso de la condición (2), se obtienen las siguientes desigualdades polinómicas que deben cumplirse simultáneamente para garantizar que $\mathcal{F}(x)$ sea definida negativa:

$$\begin{aligned} (x_1 - 3) &< 0, \\ (x_1 - 3)(x_2 - 4) - (x_1 + x_2)(x_1 + x_2) &> 0, \\ x_1[(x_1 - 3)(x_2 - 4) - (x_1 + x_2)(x_1 + x_2)] + (x_2 - 4) &< 0. \end{aligned}$$

Las mismas pueden reescribirse³ como:

$$\begin{aligned} g_1(x) &\triangleq (x_1 - 3) < 0, \\ g_2(x) &\triangleq (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - 3)(x_2 - 4) < 0, \\ g_3(x) &\triangleq x_1[(x_1 - 3)(x_2 - 4) - (x_1 + x_2)^2] + (x_2 - 4) < 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

y se observa que:

²Cabe aclarar que no es habitual que las LMI se presenten con este formato canónico en los problemas de control.

³Notar que se cambió el signo en la segunda desigualdad, para poder graficarla e interpretarla con mayor comodidad.

1. $g_1(x)$ es una función lineal,
2. $g_2(x)$ es una función cuadrática, y
3. $g_3(x)$ es una función cúbica.

En la Fig.(2.2) se grafican las tres superficies $g_1(x)$, $g_2(x)$ y $g_3(x)$, y también se grafican sus trazas o curvas de nivel, la intersección de las mismas con el plano (x_1, x_2) , es la frontera o cota superior de la región factible para cada una de las restricciones.

El conjunto factible para x_1 y x_2 , es el interior de la región formada por la intersección de estas tres regiones, y como se observa en la Fig.(2.3) es un conjunto convexo.

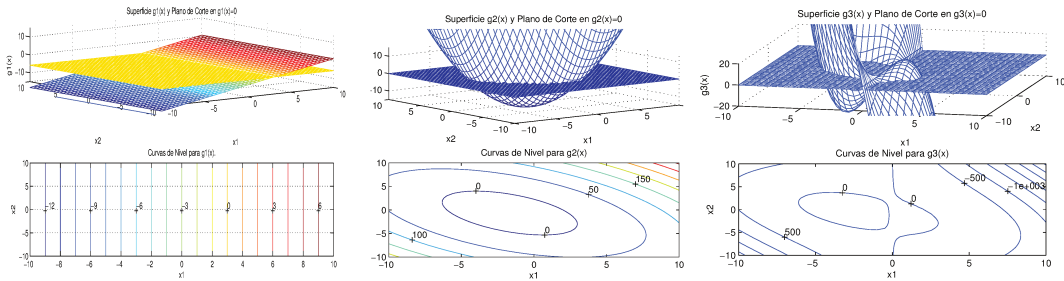


Figura 2.2: Restricciones lineal, cuadrática y cúbica, y sus curvas de nivel.

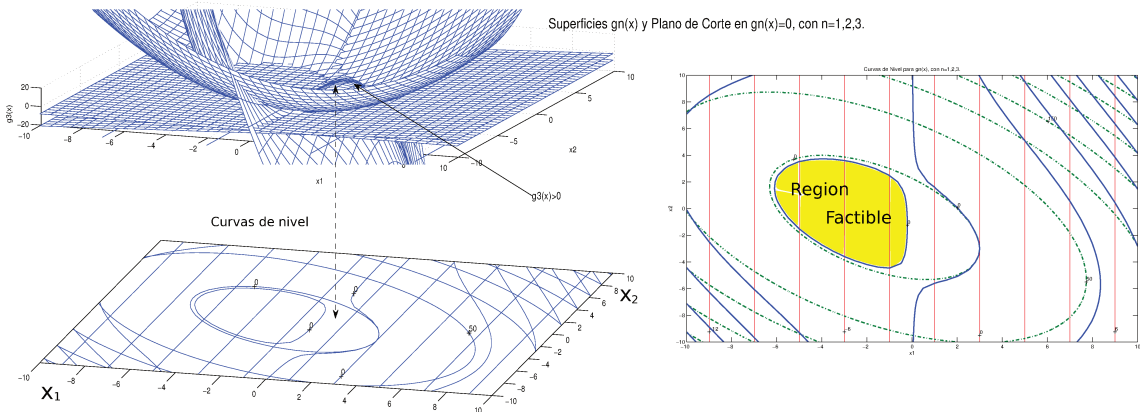


Figura 2.3: Región Factible

2.3.3. Múltiples LMI, Intersección de Regiones

Cuando se tiene múltiples LMI, éstas pueden ser combinadas en una sola.

Sabiendo que cada LMI define una región convexa de valores factibles, la LMI ampliada definirá una región que será la intersección de las regiones individuales. Esto se ve en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.3:

Considérese las siguientes LMI:

$$\mathcal{F}_A(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 & -1 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 \end{pmatrix} < 0, \quad (2.24)$$

$$\mathcal{F}_B(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 2 & 0 \\ 0 & -x_1 - 5 \end{pmatrix} < 0. \quad (2.25)$$

Se desea determinar el conjunto de valores para los cuales x_1 y x_2 satisfacen estas dos condiciones.

Resolución 2.3. La desigualdad matricial (2.25) implica que

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2 < 0, \quad y \\ -x_1 - 5 < 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

En la Fig. 2.4 se muestra la región factible generada por la segunda LMI, mientras que la región factible generada por $\mathcal{F}_A(x) < 0$, fue mostrada en el ejemplo anterior.

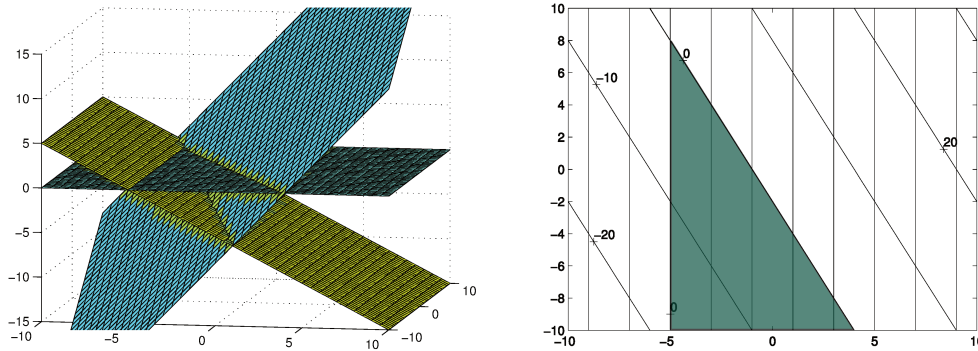


Figura 2.4: Región Factible $\mathcal{F}_B(x) < 0$.

Las matrices correspondientes a las dos LMIs pueden combinarse en una única matriz, cuya diagonal está formada por bloques simétricos que corresponden a las LMI individuales, como se muestra a continuación:

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 & -1 & 0 & 0 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1 + x_2 + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 - 5 \end{pmatrix} < 0. \quad (2.27)$$

De acuerdo con el teorema de Sylvester, los determinantes de las submatrices principales deben alternar su signo comenzando por el signo menos.

Los primeros tres determinantes correspondientes al primer bloque de la Ec.(2.27), ya fueron calculados en el ejemplo anterior y están dados por las Ecs.(2.23).

Los determinantes correspondientes a las otras dos submatrices principales son los siguientes:

$$\begin{aligned} g_4(x) \triangleq g_3(x)[2x_1 + x_2 + 2] > 0, & \Rightarrow [2x_1 + x_2 + 2] < 0, \\ g_5(x) \triangleq g_4(x)[-x_1 - 5] < 0, & \Rightarrow [-x_1 - 5] < 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Obsérvese que las desigualdades (2.28) se corresponden con la condición expresada en (2.26) para $\mathcal{F}_B(x)$.

En la Fig.(2.5) se muestra la región factible para la desigualdad (2.27).

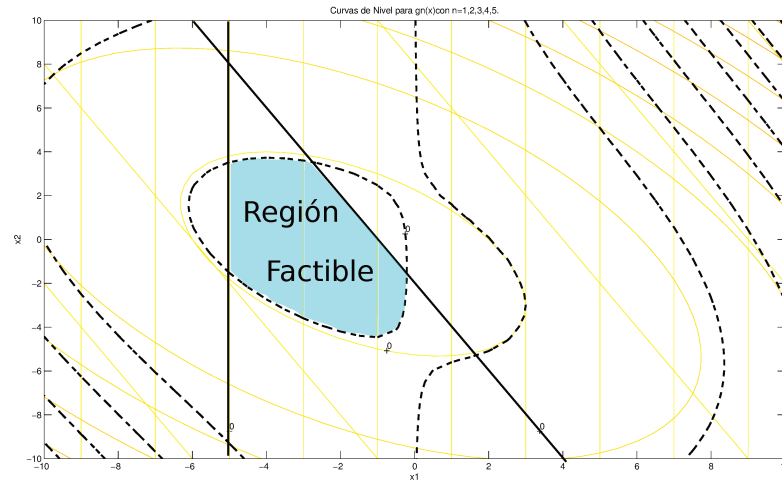


Figura 2.5: Múltiples LMI. Intersección de regiones convexas.

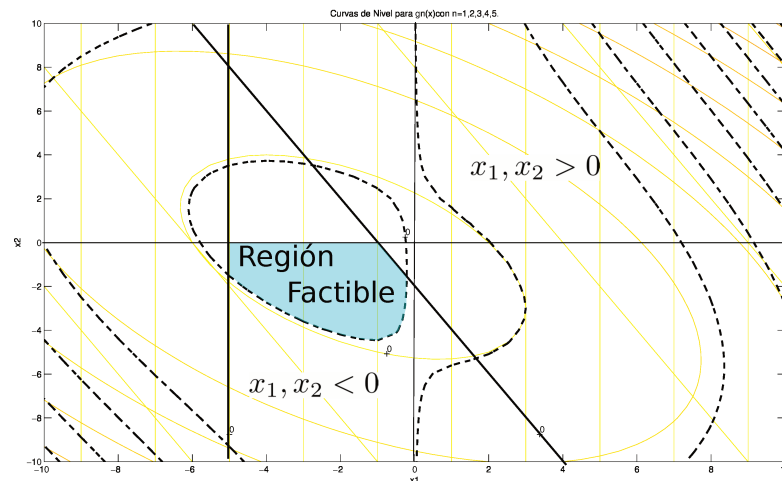


Figura 2.6: Región Factible $\mathcal{F}(x) < 0$ y $X(x) < 0$.

En la Fig.(2.6), se ha agregado la restricción sobre las variables de decisión

$$X(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} < 0, \quad (2.29)$$

la región factible mostrada en esta figura, se corresponde con la condición $\mathcal{F}(x) < 0$ y $X(x) < 0$.

Nótese que de haberse pedido $\mathcal{F}(x) < 0$ y $X(x) > 0$, el resultado hubiera sido infactible, porque las dos regiones $\mathcal{F}(x) < 0$ y $X(x) > 0$, no tienen elementos en común.

Nótese además, que la restricción dada en la LMI (2.29) también podría agregarse como bloque simétrico en la diagonal de $\mathcal{F}(x)$, quedando esta última expresada como

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1 + x_2 + 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 - 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} < 0. \quad (2.30)$$

Nota: Si la restricción dada en la LMI (2.29) fuese positiva definida, debería multiplicarse por (-1) , para poder ser agregada en la LMI (2.30).

2.3.4. Restricciones en las variables de decisión

Del mismo modo en que las matrices diagonales se generalizan a matrices simétricas no diagonales y la región poligonal que las primeras definen se transforma en regiones no poligonales convexas; el espacio rectangular que forman los ejes de referencias determinados por las variables de decisión, es transformado a un espacio cónico como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.4:

Considérese la siguiente LMI en el espacio tridimensional \mathfrak{R}^3 , formado por las variables de decisión x_1, x_2 y x_3 ,

$$\mathcal{F}(x) = F_0 + \sum_{i=1}^3 x_i F_i > 0, \quad F_i = F_i', \quad \text{con } i = 0, 1, 2, 3. \quad (2.31)$$

Como se vio en la Sección (2.2), esta desigualdad define un espacio convexo. A continuación, se mostrará que con dicha LMI se puede definir un subespacio rectangular o un subespacio cónico, dependiendo de la elección de las matrices F_i .

Resolución 2.4. a) *Subespacio rectangular:*

Si se elijen las matrices F_i como:

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la LMI (2.31) queda expresada del siguiente modo:

$$\mathcal{F}(x) = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} > 0,$$

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \triangleq X > 0. \quad (2.32)$$

La desigualdad (2.32) se satisface si los autovalores de la matriz X , que son las variables de decisión, son estrictamente positivos, esto es:

$$\lambda_1 = x_1 > 0, \quad \lambda_2 = x_2 > 0, \quad \lambda_3 = x_3 > 0.$$

b) *Subespacio cónico:*

Ahora bien, si se elijen las matrices F_i como:

$$F_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

la LMI (2.31) queda expresada del siguiente modo:

$$\mathcal{F}(x) = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} > 0,$$

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \triangleq X > 0. \quad (2.33)$$

La desigualdad (2.33) se satisface si los autovalores de la matriz X son estrictamente positivos, o de manera equivalente según la condición de Sylvester, si los determinantes de las submatrices principales son estrictamente positivos, esto es:

$$g_1(x) = x_1 > 0, \quad g_2(x) = x_1 x_2 - x_3^2 > 0.$$

Las dos regiones determinadas por las desigualdades (2.32) y (2.33), se muestran en la Fig. (2.7).

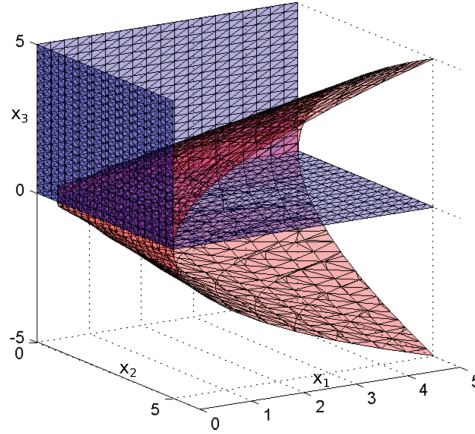


Figura 2.7: Dominios rectangular y cónico donde las variables de decisión son positivas

Cabe destacar que en los problemas de control que involucran LMI, las variables de decisión son matrices simétricas como la mostrada en la desigualdad matricial (2.33), por lo que el dominio de búsqueda de la solución es cónico, como se verá en la Sección (2.4.3).

2.4. Transformación de las Desigualdades Matriciales Cuadráticas en LMI

En esta sección se mostrará a través de un ejemplo, aunque sin pérdida de generalidad, algunas características de las LMI que permitirán relacionarlas con las desigualdades matriciales cuadráticas que aparecen frecuentemente en problemas de control.

2.4.1. Variables Matriciales

Retomando la LMI del Ej.(2.2) de la sección (2.3.2), se observa que la misma puede ser representada mediante el siguiente formato:

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} L(x) & Q(x) \\ Q'(x) & R(x) \end{pmatrix} < 0, \quad (2.34)$$

donde,

$$L(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R(x) = (x_1). \quad (2.35)$$

Se observa también, que en los elementos de estos cuatro bloques matriciales, las variables de decisión o no aparecen, o aparecen en combinaciones afines, siendo además $L(x)$ y $R(x)$ matrices simétricas.

Nota: La forma en que la desigualdad (2.34) representa una LMI, junto con la fórmula del **complemento de Schur**, que se verá en la próxima subsección, permite transformar Desigualdades Matriciales Cuadráticas en LMI, y esta transformación es la clave para reformular los problemas de control en problemas de optimización convexos.

Si se reescriben $L(x)$ y $R(x)$ del siguiente modo,

$$L(x) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y definiendo

$$L_0 \triangleq \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad L_1 \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$X \triangleq \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix},$$

se tiene,

$$L(x) = L_0 + L_1 X + X L_2,$$

$$R(x) = R_1' X R_1. \tag{2.36}$$

Reemplazando las Ecs.(2.36) en la Ec.(2.34), la LMI (2.21) queda representada como:

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} L_0 + L_1 X + X L_2 & Q \\ Q' & R_1' X R_1 \end{pmatrix} < 0. \tag{2.37}$$

En esta última expresión, se observa que las variables de decisión también pueden estar expresadas como *variables matriciales*, y estas variables matriciales, no aparecen o aparecen en forma afín en cada término de la LMI.

2.4.2. Complemento de Schur

En esta subsección, se darán condiciones equivalentes para determinar cuándo una matriz simétrica es positiva definida o negativa definida⁴.

La fórmula del complemento de Schur, establece que [17]:

⁴Se recuerda que al tratar con matrices definidas y no semidefinidas, los valores factibles de las variables de decisión son interiores al conjunto delimitado por la LMI, sin alcanzar su frontera.

Teorema 2.1:

Las siguientes proposiciones son equivalentes

$$a) \text{ Si } L > 0, \quad y \quad R - Q'L^{-1}Q > 0, \quad (2.38)$$

ó

$$b) \text{ Si } R > 0, \quad y \quad L - QR^{-1}Q' > 0, \quad (2.39)$$

entonces

$$S_1 = \begin{pmatrix} L & Q \\ Q' & R \end{pmatrix} > 0. \quad (2.40)$$

Demostración teorema 2.1. .

Téngase en cuenta que una matriz simétrica y positiva definida, tiene todos sus autovalores reales y positivos, es decir, dicha matriz es de rango completo y por lo tanto tiene inversa.

Considerando la proposición (a), si $L > 0 \Rightarrow \exists L^{-1}$, y por lo tanto es posible construir la siguiente matriz regular⁵

$$T_1 \triangleq \begin{pmatrix} I & -L^{-1}Q \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Con esta matriz se puede realizar una diagonalización de la matriz S_1 , en efecto, definiendo $D_1 \triangleq T_1' S_1 T_1$ se tiene

$$D_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -Q'L^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & Q \\ Q' & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -L^{-1}Q \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & R - Q'L^{-1}Q \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Según se vió en la subsección (2.3.3), D_1 es una LMI formada por la intersección de dos LMI, por lo tanto, si la Ec.(2.42) cumple con la proposición (a), entonces $D_1 > 0$.

Ahora bien, S_1 puede reescribirse como

$$S_1 = (T_1')^{-1} D_1 (T_1)^{-1}, \quad (2.43)$$

y siendo T_1 una matriz regular entonces $S_1 > 0$.

Procediendo de manera similar con la proposición (b), se define la siguiente matriz regular de transformación:

$$T_2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}Q' & I \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

⁵No tiene autovalores nulos, es decir, es una matriz cuadrada e invertible.

Definiendo $D_2 \triangleq T_2' S_2 T_2$, se tiene

$$D_2 = \begin{pmatrix} L - QR^{-1}Q' & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

y si se cumple con la proposición (b), resulta que $D_2 > 0$.

Reescribiendo a S_2 como

$$S_2 = (T_2')^{-1} D_2 (T_2)^{-1}, \quad (2.46)$$

y siendo T_2 una matriz regular, entonces $S_2 > 0$.

Teorema 2.2:

Para las matrices negativas definidas, se tienen las siguientes proposiciones equivalentes:

$$a) \text{ Si } L < 0 \quad y \quad R - Q'L^{-1}Q < 0, \quad (2.47)$$

ó

$$b) \text{ Si } R < 0 \quad y \quad L - QR^{-1}Q' < 0, \quad (2.48)$$

entonces,

$$c) \quad S_1 = \begin{pmatrix} L & Q \\ Q' & R \end{pmatrix} < 0.$$

Su demostración es similar a la realizada anteriormente.

2.4.3. Uso de LMIs en problemas de control

En esta subsección se realizará un ejemplo numérico para visualizar cómo las Desigualdades Matriciales Cuadrática, asociadas a los problemas de control, definen regiones convexas.

Lema 2.1:

De acuerdo con [17], si un sistema representado por un modelo LTI, cuya función de transferencia está dada por

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B, \quad (2.49)$$

es estable y tiene una norma \mathcal{H}_∞ menor que un escalar positivo γ , entonces existe una matriz positiva definida P que verifica la siguiente desigualdad matricial:

$$A'P + PA + \gamma^{-2}PBB'P + C'C < 0. \quad (2.50)$$

Este lema trata de un problema de factibilidad, ya que la afirmación anterior garantiza que si existe (es decir, si es factible encontrar) $P > 0$, tal que satisfaga la desigualdad matricial (2.50), entonces

$$\|G(j\omega)\|_{\infty} < \gamma, \quad (2.51)$$

para algún $\gamma > 0$. Por el contrario, si $\gamma < \|G(j\omega)\|_{\infty}$, entonces no existe $P > 0$ que la satisfaga.

La Ec.(2.50) es una ecuación matricial cuadrática⁶, que tiene a la matriz P como incógnita, el objetivo ahora es mostrar que las desigualdades

$$\begin{aligned} A'P + PA + \gamma^{-2}PBB'P + C'C < 0, \\ P > 0, \end{aligned} \quad (2.52)$$

definen o representan el interior de una región convexa que tiene a la ecuación

$$A'P + PA + \gamma^{-2}PBB'P + C'C = 0$$

como frontera, siempre y cuando se verifique (2.51).

Para lograr dicho objetivo, el primer paso consiste en transformar la desigualdad cuadrática (2.52) en una LMI utilizando el complemento de Schur.

Definiendo

$$L(P) \triangleq \begin{pmatrix} A'P + PA + C'C \\ PB \end{pmatrix}, \quad Q(P) \triangleq \begin{pmatrix} PB \end{pmatrix},$$

$$Q(P)' \triangleq \begin{pmatrix} B'P \end{pmatrix}, \quad R \triangleq \begin{pmatrix} -\gamma^2 \end{pmatrix},$$

y utilizando la proposición (2.47), la desigualdad cuadrática (2.52) puede reescribirse como

$$\mathcal{F}(P) = \begin{pmatrix} A'P + PA + C'C & PB \\ B'P & -\gamma^2 \end{pmatrix} < 0, \quad P > 0. \quad (2.53)$$

A continuación se realizará un ejemplo, para visualizar estos conceptos.

⁶Observar que el tercer término ($PBB'P$), no es lineal.

Ejemplo 2.5:

Considérese un sistema representado por el siguiente modelo LTI en el espacio de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t), \\ z(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (2.54)$$

cuya función de transferencia, resulta

$$G(s) = \frac{z(t)}{w(t)} = C(sI - A)^{-1}B. \quad (2.55)$$

Asúmase que las matrices A , B y C , tienen los siguientes valores numéricos:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \ 0). \quad (2.56)$$

La traza de Bode, en escala lineal, de este sistema se muestra en la Fig.(2.8). Como se muestra en dicha figura su norma \mathcal{H}_∞ , es decir, el valor máximo de su traza es: $\|G(j\omega)\|_\infty = 1$.

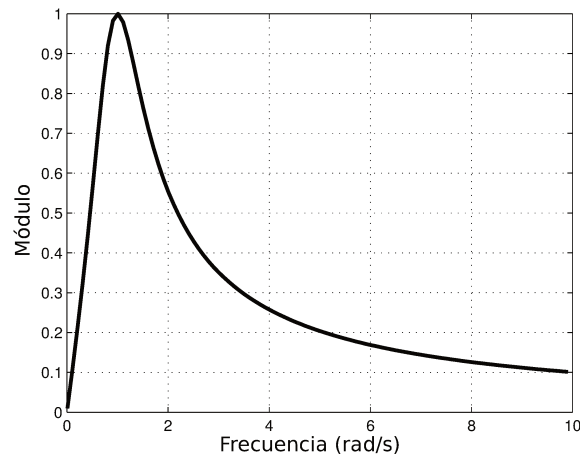


Figura 2.8: Respuesta en frecuencia de $G(s)$

Resolución 2.5. Según lo dicho, si se elige $\gamma \geq 1$ en las LMI (2.53) el problema es factible, pero si se elige $\gamma < 1$, ya no es posible encontrar $P > 0$ que la satisfaga.

Para comprobar ésto se define a la matriz incógnita, cuyos elementos son las variables de decisión, como

$$P \triangleq \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} > 0.$$

Con las matrices del sistema, Ecs.(2.56), se construyen los 4 bloques matriciales de la LMI (2.53), como se muestra a continuación:

Bloque: 1,1

$$L(P) = (A'P + PA + C'C),$$

$$L(P) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L(P) = \begin{pmatrix} -p_1 + p_3 & -p_3 + p_2 \\ -p_1 & -p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p_1 + p_3 & -p_1 \\ -p_3 + p_2 & -p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resultando

$$L(P) = \begin{pmatrix} 2(-p_1 + p_3) + 1 & -p_3 + p_2 - p_1 \\ -p_1 - p_3 + p_2 & -2p_3 \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Bloque: 1,2

$$Q(P) = (PB),$$

$$Q(P) = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

resultando

$$Q(P) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_3 \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Bloque: 2,1

$$Q'(P) = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Bloque: 2,2

$$R = \begin{pmatrix} -\gamma^2 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Componiendo estos 4 bloques, se reescribe la desigualdad (2.53) del siguiente modo:

$$\mathcal{F}(P) = \begin{pmatrix} 2(p_3 - p_1) + 1 & p_2 - p_1 - p_3 & p_1 \\ p_2 - p_1 - p_3 & -2p_3 & p_3 \\ p_1 & p_3 & -\gamma^2 \end{pmatrix} < 0, \quad (2.61)$$

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} > 0.$$

Planteadas la LMI de esta forma, se puede aplicar el teorema de Sylvester, es decir, la matriz $\mathcal{F}(P)$ es negativa definida, si y sólo si, los determinantes de las submatrices principales alternan su signo, comenzando con el signo negativo.

Por lo tanto la matriz⁷

$$\mathcal{F}(P) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & -\gamma^2 \end{pmatrix} < 0, \quad (2.62)$$

si y sólo si,

$$g_1 \triangleq f_{11} < 0, \quad (2.63)$$

$$g_2 \triangleq -(f_{11}f_{22} - f_{12}^2) < 0, \quad (2.64)$$

⁷ $\mathcal{F}(P)$ se expresa de esta forma para simplificar la notación.

$$g_3 \triangleq f_{13}[f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22}] - f_{23}[f_{11}f_{32} - f_{31}f_{12}] - \gamma^2[f_{11}f_{22} - f_{12}^2] < 0. \quad (2.65)$$

Nótese, que de manera intencional no se ha reemplazado el elemento $[f_{33}]$ para dejar en evidencia que la desigualdad (2.65) depende del parámetro γ .

Aplicando el mismo teorema, la matriz P es positiva definida, si y sólo si los determinantes de las submatrices principales son todos positivos; por lo tanto debe cumplirse que⁸

$$g_4 \triangleq -p_1 < 0, \quad (2.66)$$

$$g_5 \triangleq -(p_1p_2 - p_3^2) < 0. \quad (2.67)$$

A continuación, se representan gráficamente los subespacios que delimitan estas desigualdades.

Como en el ejemplo bidimensional (2.2), la región factible es el interior de la intersección de todas estas regiones generadas por las desigualdades $g_i < 0$, con $i = 1, \dots, 5$.

Las superficies mostradas en la Fig.(2.9) son las cotas superiores para estas desigualdades, es decir, estas superficies de nivel se obtienen haciendo $g_i = 0$, con $i = 1, \dots, 5$.

Obsérvese que solamente la superficie que representa a $g_3 = 0$ (color amarillo) depende paramétricamente de γ , y es en el interior de esta superficie donde se debe encontrar $P > 0$, tal que satisfaga la LMI (2.52).

En las sucesivas gráficas se observa, que a medida que el parámetro γ se reduce y se acerca a 1, la superficie $g_3 = 0$ reduce su volumen dentro de la región factible y comienza a crecer fuera de ésta.

Las subfiguras (e) y (f) representan el problema de infactibilidad.

Para $\gamma = 1$, la superficie $g_3 = 0$ dentro del conjunto factible es un punto (no puede apreciarse en el dibujo).

Para $\gamma < 1$, la superficie $g_3 = 0$ está totalmente fuera de la región delimitada por las otras desigualdades, es decir, para estos últimos dos casos no existe $P > 0$ que satisfaga simultáneamente todas las restricciones, y por lo tanto, el problema no tiene solución o es infactible.

2.5. Resumen

En este capítulo se ha realizado una introducción teórica sobre una herramienta matemática denominada Desigualdades Matriciales Lineales (LMI).

Analíticamente, y a través de distintos ejemplos y mediante representaciones gráficas, se ha mostrado que las LMI definen regiones convexas. También se ha mostrado que múltiples LMI implica la intersección de dichas regiones, la cual puede o no, dar como resultado un conjunto vacío.

Además, se ha demostrado cómo el complemento de Schur permite transformar una Desigualdad Matricial Cuadrática en una Desigualdad Matricial Lineal. Y por último, se ha realizado un ejemplo donde se utilizan las LMI para determinar la norma \mathcal{H}_∞ de un sistema LTI.

⁸Obsérvese que tanto en g_2 como en g_4 y g_5 , se ha multiplicado por (-1) para mantener el mismo tipo de desigualdad.

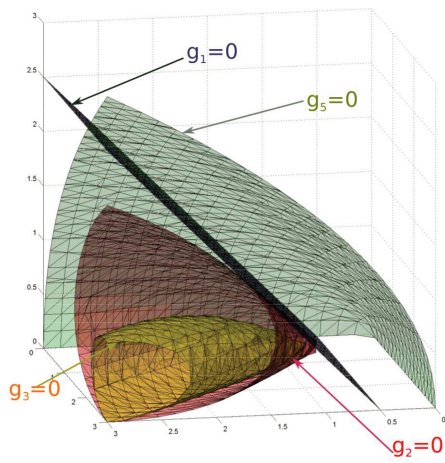
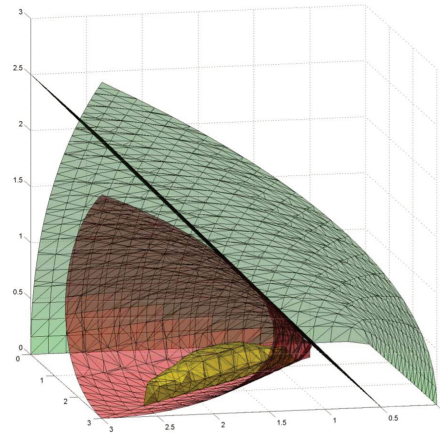
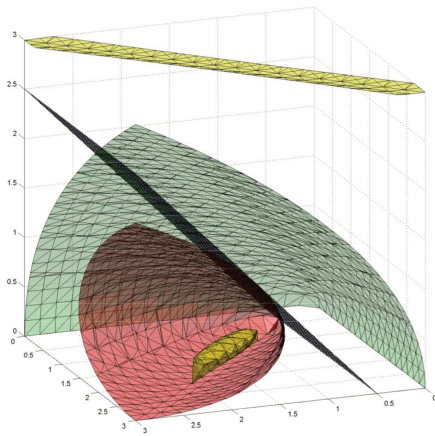
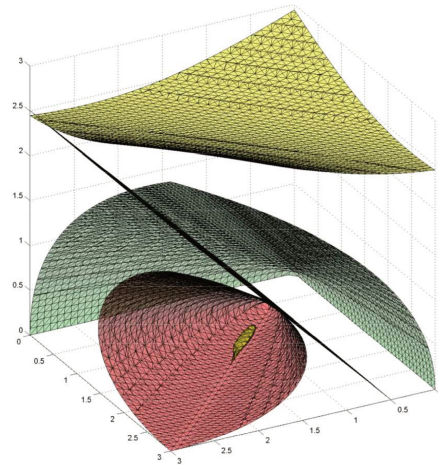
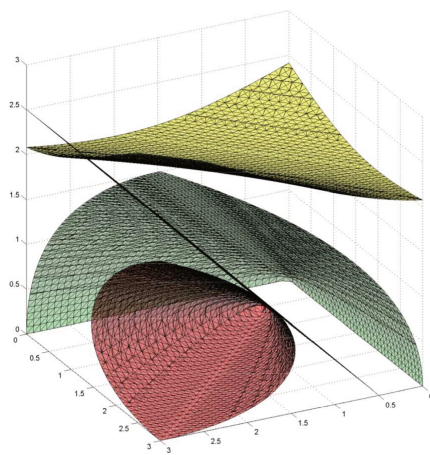
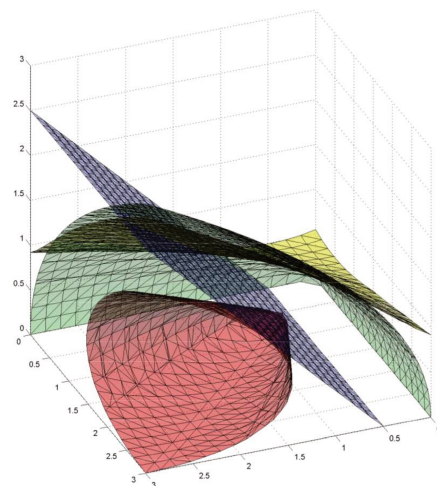
(a) $\gamma = 1.6$.(b) $\gamma = 1.3$.(c) $\gamma = 1.2$.(d) $\gamma = 1.1$.(e) $\gamma = 1$. Problema infactible.(f) $\gamma = 0.7$. Problema infactible.

Figura 2.9: Curvas de nivel y región factible.

Capítulo 3

Regiones LMI

3.1. Introducción

En este capítulo se presenta una breve introducción sobre las *regiones LMI* y los modelos *D-estables*, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto.

Mediante algunos ejemplos se mostrará la relación que existe entre los autovalores de la matriz dinámica de un modelo LTI y su conjunto *invariante* en el espacio de estados.

3.2. Regiones LMI

De acuerdo con [16], a continuación se introducen las definiciones de la región LMI y la de su función característica.

Definición 3.1:

Una región LMI es un subconjunto D del plano complejo \mathcal{C} , que puede ser definido como:

$$D \triangleq \{s \in \mathcal{C} : L + Ms + M's^* < 0\}, \quad (3.1)$$

donde M y L son matrices reales, y L además es simétrica, esto es, $L = L'$.

Definición 3.2:

La función matricial $f_D(s)$ definida como:

$$f_D(s) \triangleq L + Ms + M's^*, \quad (3.2)$$

se denomina función característica de la región LMI, o función característica del subconjunto D .

Una propiedad de las regiones LMI es que son regiones convexas y simétricas respecto del eje real del plano complejo \mathcal{C} .

La intersección de las regiones LMI es otra región LMI, por lo tanto, cualquier región convexa y simétrica respecto al eje real, puede ser representada con suficiente aproximación por la intersección de regiones LMI.

En este punto, cabe aclarar que las matrices L y M toman valores según la región que está definida por la función característica, esto es, $D = \{s \in \mathcal{C} : f_D < 0\}$.

El hecho más destacable se expresa en el siguiente teorema [16] [20]:

Teorema 3.1:

Una matriz A es D -estable, es decir, tiene todos sus autovalores en el interior de una región D del plano complejo, si y sólo si, existe una matriz Q simétrica y positiva definida, tal que la matriz $M_D(A, Q)$ definida como:

$$M_D(A, Q) \triangleq L \otimes Q + M \otimes (AQ) + M' \otimes (AQ)', \quad (3.3)$$

es negativa definida.^{ab}

^aEl símbolo \otimes es el producto Kronecker, definido como:

$$A \otimes B \triangleq [A_{ij}B]_{ij}. \quad (3.4)$$

Este operador satisface ciertas propiedades, algunas de ellas se exponen a continuación ya que serán de utilidad para la demostración del teorema.

$$a \otimes A = aA, \quad a : \text{escalar}, \quad (3.5)$$

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C, \quad (3.6)$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD. \quad (3.7)$$

^bLa demostración de este teorema se encuentra en el anexo (B)

A continuación se muestra, mediante un ejemplo, que el teorema de Lyapunov aplicado a modelos LTI es un caso particular del teorema (3.1).

Ejemplo 3.1: Estabilidad para modelos LTI en tiempo continuo[10]

Considérese el siguiente modelo LTI autónomo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0. \quad (3.8)$$

El teorema de Lyapunov establece que el origen del modelo LTI de la Ec.(3.8) es un punto de equilibrio asintóticamente estable, si y solo si, existe una función escalar $V[x(t)] > 0$, tal que, $\dot{V}[x(t)] < 0, \quad \forall t \geq 0$.

Específicamente, si se elige $V[x(t)] = x(t)'Px(t)$, el origen es asintóticamente estable $\Leftrightarrow \exists P > 0, \quad A'P + PA < 0$.

Se arribará a la condición anterior partiendo de que los autovalores de la matriz dinámica A tienen parte real negativa, o de manera equivalente, que los polos de la función de transferencia, de su modelo LTI entrada-salida, se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo s .

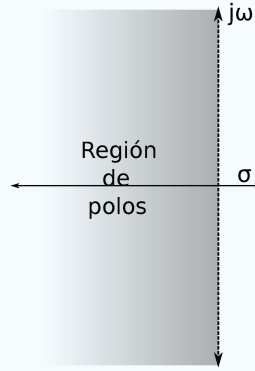


Figura 3.1: Región polos, en el plano complejo s , para el modelo LTI entrada-salida asintóticamente estable

Resolución 3.1. La condición $\Re(s) < 0$ puede expresarse como una región LMI, mediante la Def.(3.1), de la siguiente forma:

$$D = \{s \in \mathcal{C} : s + s^* < 0\}. \quad (3.9)$$

Luego, utilizando la función característica, la región LMI queda expresada como:

$$D = \{s \in \mathcal{C} : \underbrace{0 + 1 \ s + 1 \ s^*}_{f_D(s)} < 0\}, \quad (3.10)$$

donde claramente se tiene que, $L = 0$ y $M = M' = 1$.

De acuerdo con la Ec.(3.3) y según estos valores de L y M , debe cumplirse $\forall Q > 0$, que

$$\begin{aligned} M_D(A, Q) &= 0 \otimes Q + 1 \otimes (AQ) + 1' \otimes (AQ)' < 0, \\ &= (AQ) + (AQ)' < 0, \\ &= AQ + QA' < 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pre y posmultiplicando en la desigualdad anterior por Q^{-1} y definiendo $P \triangleq Q^{-1} > 0$, se tiene

$$Q^{-1}A + A'Q^{-1} = PA + A'P < 0. \quad (3.12)$$

Finalmente, si en la desigualdad matricial (3.12) se pre y pos multiplica por $x(t)'$ y $x(t)$ respectivamente, se tiene

$$x(t)'(PA + A'P)x(t) = \frac{\overbrace{d(x(t)'Px(t))}^{V[x(t)]>0}}{dt} < 0. \quad (3.13)$$

De esta forma, queda probado que el teorema de Lyapunov para sistemas LTI puede ser derivado de la aplicación del teorema (3.1).

Ejemplo 3.2: Sector Circular

Se desea determinar qué condiciones se deben cumplir, en términos de LMI, para que los autovalores de una matriz A se encuentren dentro de un sector circular con centro en $(-c, j0)$, y radio r .

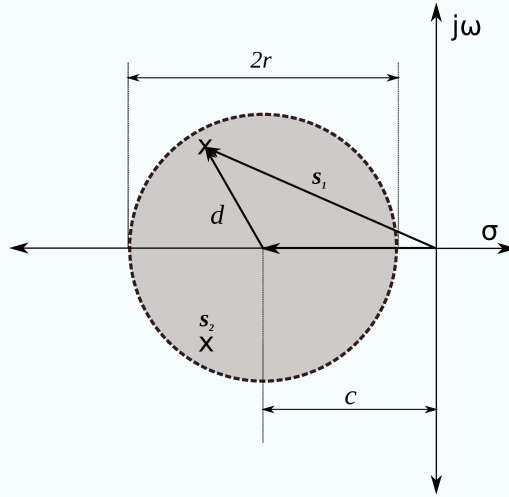


Figura 3.2: Región circular

Resolución 3.2. En la Fig.(3.2) se observa que

$$\begin{aligned} s_2 &= s_1^*, \\ s_1 &= -c + d, \quad \Rightarrow s_1 + c = d. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Se observa además que

$$|d| < r, \quad \Rightarrow d d^* - r^2 < 0, \quad (3.15)$$

por lo tanto, es posible escribir

$$\begin{aligned} -r^2 + (s_1 + c)(s_1^* + c) &< 0, \\ -r + (s_1 + c) \left(\frac{1}{r} \right) (s_1^* + c) &< 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Luego, utilizando el complemento de Schur y generalizando para todos los puntos complejos conjugados en el interior del círculo, la desigualdad (3.16) puede expresarse como la siguiente LMI:

$$f_D(s) = \begin{pmatrix} -r & (s+c) \\ (s^*+c) & -r \end{pmatrix} < 0. \quad (3.17)$$

$$f_D(s) = \underbrace{\begin{pmatrix} -r & c \\ c & -r \end{pmatrix}}_L + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_M s + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M'} s^* < 0. \quad (3.18)$$

Haciendo uso del teorema (3.1), se determina que la matriz A tiene todos sus autovalores en $f_D(s) < 0$, si satisface la siguiente LMI:

$$M(A, Q) = \underbrace{\begin{pmatrix} -r & c \\ c & -r \end{pmatrix}}_L \otimes Q + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_M \otimes AQ + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M'} \otimes (AQ)' < 0. \quad (3.19)$$

$$M(A, Q) = \underbrace{\begin{pmatrix} -rQ & cQ \\ cQ & -rQ \end{pmatrix}}_{L \otimes Q} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & AQ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M \otimes AQ} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (AQ)' & 0 \end{pmatrix}}_{M' \otimes (AQ)'} < 0. \quad (3.20)$$

$$M(Q, A) = \begin{pmatrix} -r Q & (QA + c Q) \\ (A'Q + c Q) & -r Q \end{pmatrix} < 0. \quad (3.21)$$

Nótese que la desigualdad (3.21) puede obtenerse directamente desde la desigualdad (3.17), aplicando la siguiente regla práctica:

Regla 3.1:

Una forma práctica para pasar de $f_D(s)$ a $M(A, Q)$, es haciendo corresponder la tríada $(1, s, s^*)$ en la desigualdad (3.1), con la tríada $(Q, AQ, (AQ)')$ respectivamente.

A continuación se utilizará la regla (3.1) para mostrar que el teorema de Lyapunov para un sistema representado por un modelo LTI en tiempo discreto también es un caso particular del teorema (3.1).

Ejemplo 3.3: Estabilidad para modelos LTI en tiempo discreto

Considérese el siguiente modelo LTI autónomo:

$$x(k+1) = Ax(k), \quad x(0) = x_0. \quad (3.22)$$

El teorema de Lyapunov establece que el origen del modelo LTI representado por la Ec.(3.22) es un punto de equilibrio asintóticamente estable, si y solo si, existe una secuencia escalar $\{V[x(k)]\} > 0$, tal que sus valores, $\forall k \geq 0$, satisfacen la siguiente desigualdad: $V[x(k+1)] < V[x(k)]$.

Específicamente, si se elige $V[x(k)] = x(k)'Px(k)$, el origen es asintóticamente estable $\Leftrightarrow \exists P > 0 \quad A'PA - P < 0$.

Se arribará a la condición anterior partiendo de que los autovalores de la matriz dinámica A tienen módulo menor a 1, o de manera equivalente, que los polos de la función de transferencia, de su modelo LTI entrada-salida, se encuentran en el interior de un círculo de radio unitario del plano complejo z .

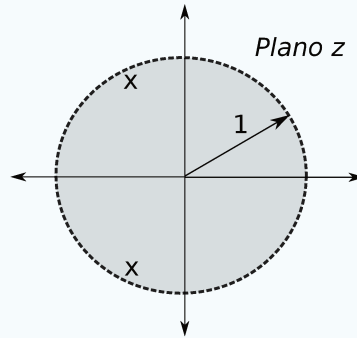


Figura 3.3: Región polos, en el plano complejo z , para el modelo LTI entrada-salida asintóticamente estable

Resolución 3.3. La condición $|z| < 1$, puede expresarse mediante la Def.(3.1) como una región LMI de la forma,

$$D = \{z \in \mathcal{C} : z z^* - 1 < 0\}. \quad (3.23)$$

Utilizando la desigualdad de Schur en la desigualdad (3.23), o bien, adaptando y utilizando la desigualdad (3.17), la región LMI, mediante su función característica, puede expresarse como

$$f_D(z) = \begin{pmatrix} -1 & z \\ z^* & -1 \end{pmatrix} < 0, \quad (3.24)$$

Haciendo uso de la regla (3.1), y de acuerdo al teorema (3.1), los polos estarán dentro del círculo de radio unitario, si la siguiente LMI es satisfecha:

$$M(A, Q) = \begin{pmatrix} -Q & QA \\ A'Q & -Q \end{pmatrix} < 0. \quad (3.25)$$

Luego, utilizando el complemento de Schur, resulta

$$\begin{aligned} -Q + A'Q Q^{-1} QA < 0, \\ A'Q A - Q < 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Finalmente, pre y posmultiplicando la desigualdad (3.26) por $x(k)'$ y $x(k)$ respectivamente, se obtiene

$$\underbrace{x(k)'}_{x(k+1)'} \underbrace{A' Q}_{Ax(k)} \underbrace{x(k)}_{x(k+1)} - \underbrace{x(k)'}_{x(k)'} \underbrace{Q}_{x(k)} x(k) = V[x(k+1)] - V[x(k)] < 0. \quad (3.27)$$

De esta forma, y haciendo $Q = P$, queda probado que el teorema de Lyapunov para modelos LTI discretos, es un caso particular del teorema (3.1).

3.3. Estabilidad asintótica nominal: elipsoide invariante contractivo

En esta sección se vinculará la ubicación de los polos de un modelo asintóticamente estable con un conjunto invariante, en el espacio de estados, que contiene al origen, y que se contrae hacia el mismo a medida que t (o k) tiende a infinito.

3.3.1. Modelo LTI en tiempo continuo

Ejemplo 3.4: Ubicación de polos y restricciones LMI

Considérese el siguiente modelo LTI autónomo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad (3.28)$$

y asúmase que los autovalores de la matriz dinámica A se ubican en el semiplano complejo negativo a una distancia mayor a α del eje $j\omega$, como muestra la Fig.(3.4).

Se utilizará el teorema (3.1) para determinar cual es la restricción LMI que, correspondiéndose con este caso, debe ser satisfecha.

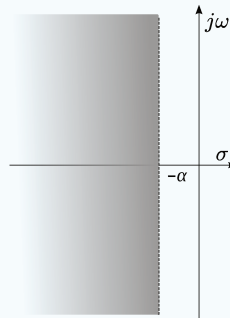


Figura 3.4: Ubicación de los autovalores de la matriz A

Resolución 3.4. La condición $\Re(s) < -\alpha$, siendo α un escalar positivo, puede expresarse mediante la Def.(3.1) como una región del plano complejo, en la forma

$$D = \{s \in \mathcal{C} : s + s^* < -2\alpha\}. \quad (3.29)$$

Por lo tanto, utilizando la función característica, la región D puede expresarse como:

$$D = \{s \in \mathcal{C} : \underbrace{2\alpha + s + s^*}_{f_D(s)} < 0\},$$

Por el teorema (3.1), y utilizando la regla (3.1), se puede afirmar que la matriz A tiene sus autovalores en la región D de la Ec.(3.29) $\Leftrightarrow \exists Q > 0$, tal que satisfaga la siguiente restricción LMI:

$$M_D(A, Q) = 2\alpha Q + AQ + QA' < 0. \quad (3.30)$$

Elipsoide invariante en tiempo continuo

A continuación se utilizará la desigualdad (3.30), para determinar la correspondencia que existe entre la ubicación de los polos del modelo LTI (3.28) con la trayectoria de sus estados.

Pre y posmultiplicando dicha desigualdad por Q^{-1} , definiendo $P \triangleq Q^{-1}$ y luego reemplazando, se tiene

$$A'P + PA + 2\alpha P < 0. \quad (3.31)$$

Luego, pre y posmultiplicando en la desigualdad (3.31) por $x(t)'$ y $x(t)$ respectivamente y definiendo $V[x(t)] \triangleq x'(t)Px(t)$, resulta

$$\begin{aligned} x(t)'A'P x(t) + x(t)'PA x(t) + 2\alpha x(t)'P x(t) < 0, \\ \underbrace{\dot{x}(t)'P x(t) + x(t)'P\dot{x}(t)}_{\dot{V}[x(t)]} + 2\alpha \underbrace{x(t)'P x(t)}_{V[x(t)]} < 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

por lo que es lícito escribir

$$\frac{\dot{V}[x(t)]}{V[x(t)]} < -2\alpha. \quad (3.33)$$

Integrando entre t_1 y t_2 , siendo $t_2 - t_1 = \Delta t > 0$, se obtiene

$$V[x(t_2)] < V[x(t_1)] e^{-2\alpha\Delta t}. \quad (3.34)$$

Si la integral se realiza entre 0 y t , se tiene

$$V[x(t)] < V[x(0)] e^{-2\alpha t}, \quad \forall t > 0. \quad (3.35)$$

Dado que $V[x(t)]$ es una función cuadrática, y siendo $P > 0$, resulta que $V[x(t)] > 0 \forall x \neq 0$ y $\forall t \geq 0$. Además, su superficie de nivel, en distintos tiempos, es un elipsoide.

La desigualdad (3.35) indica que conforme el tiempo aumenta, el elipsoide reduce su volumen ya que $V[x(t)]$ disminuye, y por lo tanto, en el instante inicial el elipsoide toma su máximo valor, esto es, $V[x(0)] = x(0)'Px(0)$.

Según se observa en la Fig.(3.5), la proyección de este elipsoide sobre el espacio de estados determina el conjunto donde las variables del sistema autónomo pueden evolucionar.

El hecho de que $V[x(t)]$ decrezca conforme t aumenta, significa que

$$\dot{V}[x(t)] = \nabla V[x(t)] \dot{x}(t) < 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.36)$$

La desigualdad (3.36), implica que estos dos vectores forman, entre si, un ángulo mayor a $90^\circ \forall t \geq 0$. Por lo tanto, la trayectoria de los estados se ve obligada a dirigirse siempre hacia el interior del elipsoide como se muestra, para $n = 2$, en la Fig.(3.5 (b)).

Es decir, la trayectoria de los estados del sistema no puede salir del elipsoide, y como además, a medida que el tiempo aumenta éste reduce su volumen, la trayectoria de los estados se ve obligada a converger hacia origen cuando $t \rightarrow \infty$.

Este conjunto dentro del cual está confinada la evolución de los estados del sistema (3.28) a partir del tiempo $t = 0$, recibe el nombre de *elipsoide invariante contractivo*.

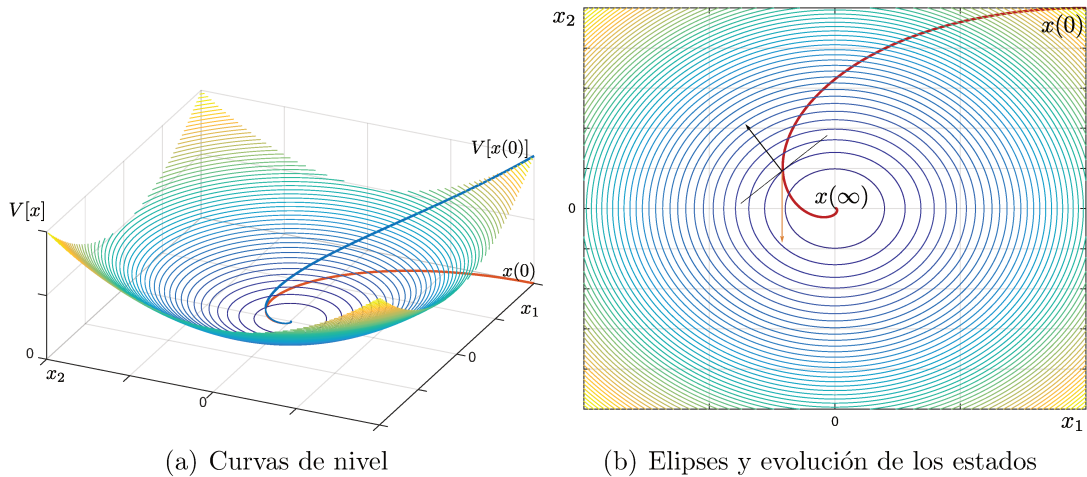


Figura 3.5: Superficies de nivel de $V[x(t)]$ y trayectoria de estados para $n = 2$.

En relación con el análisis previo, se formulan las siguientes definiciones[24]:

Definición 3.3:

Dado el modelo (3.28), se denota con $\psi(t, x_0)$ a la trayectoria que comienza en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y describe la evolución de su vector de estados $x(t)$. Luego, se define como dominio de atracción del origen al siguiente conjunto:

$$\mathcal{S} \triangleq \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t, x_0) = 0\}. \quad (3.37)$$

Esto es, \mathcal{S} es el conjunto de todos los estados iniciales del modelo (3.28) cuyas trayectorias convergen asintóticamente al origen.

Definición 3.4:

Un conjunto de puntos en el espacio de estados es un conjunto invariante, si todas las trayectorias $\psi(t, x_0)$ que comienzan en él, permanecen dentro de él. Claramente, \mathcal{S} es un conjunto invariante.

Definición 3.5:

Considérese el modelo (3.28) y la función cuadrática $V[x(t)] = x(t)'Px(t)$ con $P = P' > 0$.

Sea el elipsoide $\epsilon(P, \rho)$ el conjunto en el espacio de estados, de todos los puntos que satisfacen la siguiente desigualdad: $V(x) \leq \rho$, con $\rho > 0$.

Simbólicamente, el elipsoide $\epsilon(P, \rho)$ se define como

$$\epsilon(P, \rho) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = x'Px \leq \rho\}. \quad (3.38)$$

Se dice que el elipsoide $\epsilon(P, \rho)$ es un invariante contractivo del modelo autónomo (3.28), si $V[x(t)]$ es estrictamente decreciente para todo $t \geq 0$, esto es,

$$\dot{V}[x(t)] < 0, \quad \forall x \in \epsilon(P, \rho) \text{ y } \forall t > 0. \quad (3.39)$$

Obsérvese que si $\epsilon(P, \rho)$ es un invariante contractivo, entonces $\epsilon(P, \rho) \subset \mathcal{S}$, es decir, el elipsoide está incluido en el dominio de atracción del origen ya que todas las trayectorias de estados que comiencen desde cualquier punto x_0 dentro de él tienden asintóticamente a cero, cumpliendo con la definición de \mathcal{S} en (3.37).

3.3.2. Modelo LTI en tiempo discreto

Ejemplo 3.5: Ubicación de polos y restricciones LMI

Considérese el siguiente modelo LTI autónomo:

$$x(k+1) = Ax(k), \quad \text{con } x(0) = x_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.40)$$

Asumiendo que los autovalores de la matriz dinámica A se ubican en el interior de un círculo de radio $\sigma \leq 1$, centrado en el origen del plano complejo z , como muestra la Fig.(3.6), se utilizará el teorema (3.1) para determinar cual es la restricción LMI que, correspondiéndose con este caso, debe ser satisfecha.

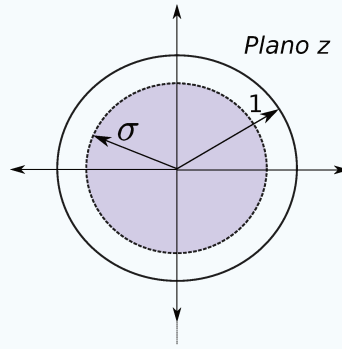


Figura 3.6: Ubicación de los autovalores de la matriz A

Resolución 3.5. La restricción $|z| < \sigma$, puede expresarse mediante la Def.(3.1) como una región LMI de la forma,

$$D = \{z \in \mathbb{C} : z z^* - \sigma^2 < 0\}. \quad (3.41)$$

Utilizando (3.17) su función característica resulta

$$f_D(z) = \begin{pmatrix} -\sigma^2 & z \\ z^* & -1 \end{pmatrix} < 0, \quad (3.42)$$

De acuerdo con la regla (3.1), los polos estarán dentro de dicha región si la siguiente LMI es satisfecha:

$$M(A, Q) = \begin{pmatrix} -Q\sigma^2 & QA \\ A'Q & -Q \end{pmatrix} < 0. \quad (3.43)$$

De manera equivalente, utilizando la desigualdad de Schur, se tiene

$$-Q + A'Q \left(\frac{Q^{-1}}{\sigma^2} \right) QA < 0. \quad (3.44)$$

Por lo tanto, por el teorema (3.1) y utilizando la regla (3.1), se puede afirmar que la matriz A tiene sus autovalores en la región D de la Ec.(3.41) $\Leftrightarrow \exists Q > 0$, tal que satisfaga la siguiente restricción LMI:

$$A'Q A - Q\sigma^2 < 0. \quad (3.45)$$

Elipsoide invariante en tiempo discreto

Haciendo $P = Q$ en la desigualdad (3.44), pre y posmultiplicando por $x(k)'$ y $x(k)$ respectivamente, resulta

$$\underbrace{\overbrace{x(k+1)'}^{x(k+1)'} A' P}_{V[x(k+1)]} \underbrace{\overbrace{Ax(k)}^{x(k+1)}}_{V[x(k)]} - \sigma^2 \underbrace{x(k)' P x(k)}_{V[x(k)]} < 0, \quad (3.46)$$

$$V[x(k+1)] < \sigma^2 V[x(k)]. \quad (3.47)$$

Aplicando en forma recursiva la Ec.(3.47), comenzando en $k = 0$, el valor de la función cuadrática $V[x(k)]$, resulta

$$V[x(k)] < \sigma^{2k} V[x(0)]. \quad (3.48)$$

Luego, $\forall \sigma \in (0, 1]$, cuando $k \rightarrow \infty$, $V[x(k)] \rightarrow 0$. Las siguientes gráficas ilustran el comportamiento de los estados en tiempo discreto.

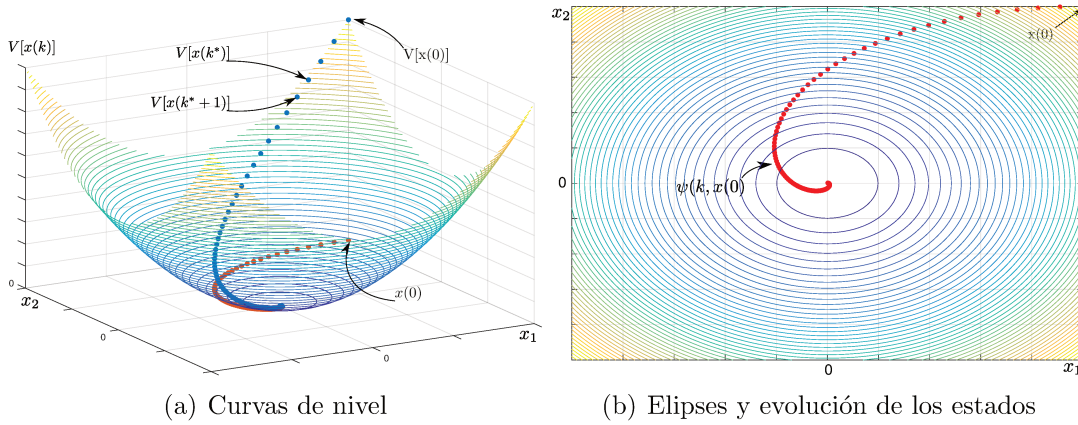


Figura 3.7: Superficies de nivel de $V[x(k)]$ y trayectoria de estados para $n = 2$.

A continuación se formulan las siguientes definiciones [24]:

Definición 3.6:

Se denota con $\psi(k, x_0)$ a la trayectoria discreta que comienza en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y describe la evolución de los estados $x(k)$ del modelo (3.40). Luego, se define como dominio de atracción del origen al siguiente conjunto:

$$\mathcal{S} \triangleq \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(k, x_0) = 0\}. \quad (3.49)$$

Definición 3.7:

Un conjunto de puntos en el espacio de estados es un conjunto invariante, si todas las trayectoria $\psi(k, x_0)$ que comienzan en él, permanecen dentro de él. Claramente, \mathcal{S} es un conjunto invariante.

Definición 3.8:

Considérese la función cuadrática

$$V[x(k)] = x(k)'Px(k), \quad \text{con } P = P' > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

y sea $\epsilon(P, \rho)$ un conjunto de puntos en el espacio de estados que satisface la siguiente desigualdad: $V(x) \leq \rho$, con $\rho > 0$.

Simbólicamente, el elipsoide $\epsilon(P, \rho)$ se define como

$$\epsilon(P, \rho) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = x'Px \leq \rho\}. \quad (3.50)$$

Se dice que el elipsoide $\epsilon(P, \rho)$ es un invariante contractivo del modelo (3.40), si la función $V[x(k)]$ es estrictamente decreciente conforme la variable temporal k aumenta desde cero a infinito, esto es,

$$V[x(k+1)] < V[x(k)], \quad \forall x \in \epsilon(P, \rho) \text{ y } \forall k \geq 0. \quad (3.51)$$

Obsérvese que si $\epsilon(P, \rho)$ es un invariante contractivo, entonces $\epsilon(P, \rho) \subset \mathcal{S}$, es decir, el elipsoide está incluido en el dominio de atracción del origen ya que todas las trayectorias de estados que comiencen desde cualquier punto x_0 dentro de él tienden asintóticamente a cero, cumpliendo con la definición de \mathcal{S} en (3.49).

3.4. Resumen

En este capítulo se han definido las regiones LMI y los sistemas D -estables. Se ha hecho uso del teorema (3.1) que permite vincular las regiones LMI con regiones simétricas en el plano s o z , de la frecuencia compleja.

A través de ejemplos, se ha mostrado que el concepto de estabilidad de Lyapunov para modelos LTI es un caso particular de la aplicación de este teorema.

También a través de ejemplos y utilizando este teorema, se ha mostrado la relación que existe entre la ubicación de los polos en el semiplano izquierdo o en el interior de un círculo de radio unitario, con la existencia de un elipsoide invariante y contractivo que limita la evolución de los estados a una convergencia asintótica hacia origen.

En los capítulos siguientes se utilizará este concepto, el de la existencia de un elipsoide invariante, para dar garantía de estabilidad de los sistemas representados por modelos LTI, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto.

Capítulo 4

Formulación del LQR robusto con restricciones vía LMI

4.1. Introducción

En este capítulo se formularán las especificaciones para el diseño, siempre en el marco de las LMI, de un regulador robusto con ganancia variable para ser aplicado a un sistema no lineal con incertidumbres en sus parámetros. El diseño contempla además otras restricciones operativas, como ser, restricciones en la amplitud de la variable manipulada y también restricciones en el rango de operación de los estados.

Primeramente se realizará la formulación de un regulador lineal cuadrático (o LQR) para un modelo LTI, tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto, que utiliza un vector ganancias de realimentación estático. Luego, al mismo problema se le agregará restricciones en la amplitud en la variable manipulada. Posteriormente se realizará una formulación para un LQR robusto con restricciones y se extenderán los resultados obtenidos a una realimentación de estados con vector de ganancias variable. Finalmente, a través de un ejemplo, se incorporará el uso de una región terminal que tiene en cuenta restricciones en los estados.

4.2. Formulación del problema LQR para modelos LTI

4.2.1. Formulación del LQR en tiempo continuo

Considérese el siguiente modelo LTI:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad \text{con } x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (4.1)$$

y una ley de control lineal por realimentación de estados, dada por

$$u(t) = Fx(t). \quad (4.2)$$

El sistema en lazo cerrado, resulta

$$\dot{x}(t) = A_{cl}x(t), \quad \text{con } x(0) = x_0, \quad \text{donde } A_{cl} \triangleq A + BF. \quad (4.3)$$

Teorema 4.1: Estabilidad y desempeño nominal [43][11]

Dada una condición inicial $x_0 \neq 0$ para un instante inicial $t = 0$ en el modelo LTI representado por la Ec.(4.1), y una entrada $u(t)$ dada por la Ec.(4.2). Entonces, si se satisfacen las siguientes LMI^a:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0' \\ x_0 & Q \end{pmatrix} > 0, \quad (4.4)$$

$$\begin{pmatrix} QA' + AQ + Y'B' + BY & QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ R_x^{1/2}Q & -I\rho & 0 \\ R_u^{1/2}Y & 0 & -I\rho \end{pmatrix} < 0,$$

$$\text{siendo } R_x \geq 0, \quad R_u > 0, \quad \rho > 0, \quad Q = P^{-1}\rho,$$

la matriz ganancia de realimentación estática F , definida como:

$$F \triangleq YQ^{-1}$$

garantiza que el origen es asintóticamente estable para el modelo dado por la Ec.(4.3), y que la función de costo cuadrático, definida como

$$J_\infty(x, u) \triangleq \int_0^\infty (x(t)'R_x x(t) + u(t)'R_u u(t)) dt, \quad (4.5)$$

tiene al escalar ρ como cota superior, esto es

$$J_\infty(x, u) < \rho. \quad (4.6)$$

^a Q e Y son las matrices variables de decisión

Demostración teorema 4.1. a) Utilizando el complemento de Schur, es fácil ver que la primera LMI en (4.4) define el siguiente elipsoide inicial

$$\epsilon(P, \rho) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n | x_0' P x_0 < \rho\}. \quad (4.7)$$

b) La segunda LMI en (4.4) muestra que¹

$$\forall x \in \epsilon(P, \rho), \quad \text{y} \quad \forall t \geq 0, \quad \dot{V}[x(t)] = 2\dot{x}(t)' P A_{cl} < 0.$$

¹Recordar que $\epsilon(P, \rho) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n | x_0' P x_0 < \rho\}$ es un invariante contractivo del modelo (4.3), es decir, es un conjunto incluido en el dominio de atracción del origen, si

$$\dot{V}[x(t)] = 2x' P A_{cl} x(t) < 0, \quad \forall x(t) \in \epsilon(P, \rho), \quad \text{y} \quad \forall t \geq 0.$$

En efecto, utilizando el complemento de Schur la misma puede escribirse como

$$\left(QA' + AQ + Y'B' + BY \right) + \begin{pmatrix} QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{I}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{I}{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_x^{1/2}Q \\ R_u^{1/2}Y \end{pmatrix} < 0. \quad (4.8)$$

Operando matricialmente y luego, reemplazando $Y = FQ$, se tiene

$$\begin{aligned} QA' + AQ + Y'B' + BY + Q\left(\frac{R_x}{\rho}\right)Q + Y'\left(\frac{R_u}{\rho}\right)Y &< 0, \\ QA' + AQ + QF'B' + BFQ + Q\left(\frac{R_x}{\rho}\right)Q + QF'\left(\frac{R_u}{\rho}\right)FQ &< 0, \\ Q(A' + F'B') + (A + BF)Q + Q\left(\frac{R_x}{\rho} + F'\frac{R_u}{\rho}F\right)Q &< 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Pre y pos multiplicando la desigualdad (4.9) por Q^{-1} , resulta

$$(A' + F'B')Q^{-1} + Q^{-1}(A + BF) + \left(\frac{R_x}{\rho} + F'\frac{R_u}{\rho}F\right) < 0, \quad (4.10)$$

y reemplazando Q^{-1} por $\left(\frac{P}{\rho}\right)$, se obtiene

$$(A' + F'B')\left(\frac{P}{\rho}\right) + \left(\frac{P}{\rho}\right)(A + BF) + \left(\frac{R_x}{\rho} + F'\frac{R_u}{\rho}F\right) < 0. \quad (4.11)$$

Multiplicando por ρ y siendo $A + BF = A_{cl}$, la desigualdad anterior puede expresarse del siguiente modo:

$$\begin{aligned} A'_{cl}P + PA_{cl} + R_x + F'R_uF &< 0, \\ A'_{cl}P + PA_{cl} &< -(R_x + F'R_uF). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Finalmente, pre y posmultiplicando la desigualdad (4.12) por $x'(t)$ y $x(t)$ respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned} x(t)'(A'_{cl}P + PA_{cl})x(t) &< -x(t)'(R_x + F'R_uF)x(t), \\ 2x(t)'PA_{cl}x(t) &< -x(t)'(R_x + F'R_uF)x(t), \\ \dot{V}[x(t)] &< -(x(t)'R_x x(t) + u(t)'R_u u(t)). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Siendo $R_x \geq 0$ y $R_u > 0$, es claro que $\forall x(t) \neq 0$ y $\forall u(t) \neq 0$ el lado derecho de la desigualdad (4.13) es negativo, lo que garantiza que el origen es asintóticamente estable para el modelo en lazo cerrado (4.3).

Además, a partir de la desigualdad (4.13), se puede mostrar que la función de costo cuadrático dada por (4.5) es menor que ρ , del siguiente modo:

$$\begin{aligned} V[x(t)]|_0^\infty &< - \int_0^\infty (x(t)'R_x x(t) + u(t)'R_u u(t)) dt . \\ V[x(\infty)] - V[x(0)] &< - \int_0^\infty (x(t)'R_x x(t) + u(t)'R_u u(t)) dt . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Siendo el origen asintóticamente estable para el modelo (4.3),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

y por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V[x(t)] = 0.$$

Luego, se tiene que

$$V[x(0)] > \int_0^\infty (x(t)'R_x x(t) + u(t)'R_u u(t)) dt, \quad (4.15)$$

y siendo $V[x(0)] = x_0' P x_0 < \rho$, resulta que

$$J_\infty(x, u) < \rho. \quad (4.16)$$

De esta forma, el problema LQR puede ser resuelto vía LMI, resolviendo el siguiente problema de minimización²:

$$\min_{\rho, Y, Q > 0} \rho, \quad \text{s.a: (4.4)}. \quad (4.17)$$

4.2.2. Formulación del LQR en tiempo discreto

Considérese el siguiente modelo LTI

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad \text{con } x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (4.18)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

y una ley de control por realimentación de estados, dada por

$$u(k) = Fx(k). \quad (4.19)$$

El sistema en lazo cerrado, resulta

$$x(k+1) = A_{cl}x(k), \quad \text{con } x(0) = x_0, \quad \text{donde } A_{cl} \triangleq A + BF. \quad (4.20)$$

²La acción de control que se obtiene al minimizar $J_\infty(x, u)$, resuelve en forma óptima el compromiso entre la velocidad de respuesta y la energía de control. La solución a dicho compromiso se debe a que cuanto mayor sea la energía de la señal de control el sistema responderá más rápidamente, pero mayores serán los sobrevalores o sobrepicos de la respuesta, y mayor será el costo de la señal manipulada, pudiendo provocar saturaciones o variables fuera de sus cotas [37].

Teorema 4.2: Estabilidad y desempeño nominal [52][25]

Dada una condición inicial $x_0 \neq 0$ para un instante inicial $k = 0$ en el modelo LTI representado por la ecuación (4.18), y una entrada $u(k)$ dada por la ecuación (4.19). Entonces, si se satisfacen las siguientes LMIs^a:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0' \\ x_0 & Q \end{pmatrix} > 0,$$

$$\begin{pmatrix} Q & QA' + Y'B' & QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ AQ + BY & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2}Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2}Y & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0, \quad (4.21)$$

siendo $R_x \geq 0$, $R_u > 0$, $\rho > 0$, $Q = P^{-1}\rho$,

la matriz ganancia de realimentación estática F , dada por

$$F = YQ^{-1},$$

garantiza que el origen es asintóticamente estable para el modelo dado por la Ec.(4.20), y que la función de costo cuadrático, definida como

$$J_\infty(x, u) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} x(k)'R_x x(k) + u(k)'R_u u(k), \quad (4.22)$$

tiene al escalar ρ como cota superior, esto es

$$J_\infty(x, u) < \rho. \quad (4.23)$$

^a Q e Y son las matrices variables de decisión

Demostración teorema 4.2. a) De manera análoga al caso en tiempo continuo, utilizando el complemento de Schur es fácil ver que la primera LMI en (4.21) determina el siguiente elipsoide inicial:

$$\epsilon(P, \rho) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid x_0' P x_0 < \rho\}. \quad (4.24)$$

b) La segunda LMI en (4.21) muestra que³

$$\forall x(k) \in \epsilon(P, \rho), \quad \text{y} \quad \forall k \geq 0, \quad V[x(k)] - V[x(k+1)] > 0.$$

³Recordar que el elipsoide $\epsilon(P, \rho)$ es un invariante contractivo del sistema (4.20), es decir, es un conjunto incluido en el dominio de atracción del origen, si

$$V[x(k)] - V[x(k+1)] > 0, \quad \forall x(k) \in \epsilon(P, \rho), \quad \text{y} \quad \forall k \geq 0. \quad (4.25)$$

En efecto, agrupando en bloques en dicha desigualdad, se tiene

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & QA' + Y'B' \\ AQ + BY & Q \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} R_x^{1/2}Q & 0 \\ R_u^{1/2}Q & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \rho I & 0 \\ 0 & \rho I \end{pmatrix} \end{pmatrix} > 0, \quad (4.26)$$

y utilizando el complemento de Schur, se puede escribir

$$\begin{pmatrix} Q & QA' + Y'B' \\ AQ + BY & Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^{-1}I & 0 \\ 0 & \rho^{-1}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_x^{1/2}Q & 0 \\ R_u^{1/2}Q & 0 \end{pmatrix} > 0. \quad (4.27)$$

Operando matricialmente, resulta

$$\begin{pmatrix} Q & QA' + Y'B' \\ AQ + BY & Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q \left(\frac{R_x}{\rho} \right) Q + Y' \left(\frac{R_u}{\rho} \right) Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} > 0, \quad (4.28)$$

$$\begin{pmatrix} Q - Q \left(\frac{R_x}{\rho} \right) Q - Y' \left(\frac{R_u}{\rho} \right) Y & QA' + Y'B' \\ AQ + BY & Q \end{pmatrix} > 0, \quad (4.29)$$

Según el complemento de Schur la desigualdad anterior se satisface, si se satisfacen simultáneamente las siguientes desigualdades:

$$Q > 0, \quad y$$

$$Q - Q \left(\frac{R_x}{\rho} \right) Q - Y' \left(\frac{R_u}{\rho} \right) Y - (QA' + Y'B')Q^{-1}(AQ + BY) > 0.$$

Ordenando los términos, y luego reemplazando $Y = FQ$, se obtiene

$$Q - (QA' + Y'B')Q^{-1}(AQ + BY) > Q \left(\frac{R_x}{\rho} \right) Q + Y' \left(\frac{R_u}{\rho} \right) Y,$$

$$Q - (QA' + QF'B')Q^{-1}(AQ + BFQ) > Q \left(\frac{R_x}{\rho} \right) Q + QF' \left(\frac{R_u}{\rho} \right) FQ. \quad (4.30)$$

Pre y posmultiplicando por Q^{-1} , resulta

$$Q^{-1} - (A' + F'B')Q^{-1}(A + BF) > \left(\frac{R_x}{\rho} \right) + F' \left(\frac{R_u}{\rho} \right) F.$$

Reemplazando $Q^{-1} = \frac{P}{\rho}$ y $A + BF = A_{cl}$, se tiene

$$\left(\frac{P}{\rho}\right) - A'_{cl} \left(\frac{P}{\rho}\right) A_{cl} > \left(\frac{R_x}{\rho}\right) + F' \left(\frac{R_u}{\rho}\right) F.$$

Multiplicando por ρ , y luego premultiplicando por $x'(k)$ y posmultiplicando por $x(k)$, es posible escribir

$$x'(k) \underbrace{P x(k)}_{[x'(k+1)]} - \underbrace{x'(k) A'_{cl} P A_{cl} x(k)}_{x(k+1)} > \underbrace{x'(k) R_x x(k)}_{u'(k)} + \underbrace{x'(k) F' R_u F x(k)}_{u(k)},$$

obteniéndose finalmente

$$V[x(k)] - V[x(k+1)] > x'(k) R_x x(k) + u'(k) R_u u(k). \tag{4.31}$$

Como en el caso previo analizado en tiempo continuo, siendo $R_x \geq 0$ y $R_u > 0$, es claro que $\forall x(k) \neq 0$ y $\forall u(k) \neq 0$ el lado derecho de la desigualdad (4.31) es positivo, lo que garantiza que el origen es asintóticamente estable para el modelo en lazo cerrado (4.20).

Además, a partir de la desigualdad (4.31), se puede mostrar que la función de costo cuadrático dada por (4.22) es menor que ρ , del siguiente modo:

$$V[x(k)] - V[x(k+1)] > x(k)' \underbrace{[R_x + F' R_u F]}_{\triangleq \Phi} x(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty. \tag{4.32}$$

Expandiendo y sumando los términos en la desigualdad (4.32), se tiene

$$\begin{aligned} V[x(0)] - V[x(1)] &> x(0)' \Phi x(0) \\ + &+ \\ V[x(1)] - V[x(2)] &> x(1)' \Phi x(1) \\ + &+ \\ V[x(2)] - V[x(3)] &> x(2)' \Phi x(2) \\ + &+ \\ \vdots &> \vdots \\ + &+ \\ V[x(m)] - V[x(l+1)] &> x(l)' \Phi x(l) \\ \dots &\dots \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$V[x(0)] - V[x(l+1)] > \sum_{k=0}^l x(k)' \underbrace{[R_x + F' R_u F]}_{\Phi} x(k).$$

Siendo el origen asintóticamente estable para el modelo (4.20),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$$

y por lo tanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V[x(k)] = 0.$$

De esta manera la sumatoria en (4.33) para $l \rightarrow \infty$, resulta

$$V[x(0)] > \sum_{k=0}^{\infty} x(k)' [R_x + F' R_u F] x(k), \quad (4.34)$$

o bien,

$$V[x(0)] > J_{\infty}(x, u), \quad (4.35)$$

y siendo $V[x(0)] = x_0' P x_0 < \rho$, resulta que

$$J_{\infty}(x, u) < \rho. \quad (4.36)$$

De esta forma, el problema LQR en tiempo discreto puede ser resuelto vía LMI, resolviendo el siguiente problema de minimización:

$$\min_{\rho, Y, Q > 0} \rho, \quad \text{s.a: (4.21)}. \quad (4.37)$$

4.3. LQR para sistemas LTI con restricciones en el vector de entradas

4.3.1. Restricción en la amplitud del módulo de la variable manipulada

Las limitaciones físicas inherentes al equipamiento dentro del proceso, imponen restricciones “duras” sobre la variable manipulada⁴ $u(t)$ o $u(k)$.

En esta sección se verá cómo los límites sobre la señal de control pueden incorporarse al diseño del controlador mediante el uso de LMI.

Considérese que para todo $t \geq 0$ o $k \geq 0$, debe cumplirse que

$$|u(\cdot)|_2 < u_{\text{máx}}. \quad (4.38)$$

A continuación, se desarrollará una formulación LMI para garantizar que la restricción (4.38) sea satisfecha.

En primer lugar, téngase en cuenta que $\forall x(\cdot) \in \epsilon(P, \rho)$, y $\forall t$ (ó k) ≥ 0 , se satisface $x(\cdot)' Q^{-1} x(\cdot) \leq 1$. Definiendo $\varepsilon(\cdot) \triangleq Q^{-1/2} x(\cdot)$, se tiene

$$\varepsilon(\cdot)' \varepsilon(\cdot) \leq 1. \quad (4.39)$$

⁴Indistintamente la dependencia temporal de las variables, sea en tiempo continuo o en tiempo discreto, se expresa mediante (\cdot) .

Siendo $u(\cdot) = Fx(\cdot)$, con $x \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}^m$

$$|u(\cdot)|_2^2 = x(\cdot)' F' F x(\cdot). \quad (4.40)$$

Recordando que $F = YQ^{-1}$, se puede escribir⁵

$$|u|_2^2 = x' Q^{-1} Y' Y Q^{-1} x. \quad (4.41)$$

$$|u|_2^2 = \underbrace{x' Q^{-1/2}}_{\varepsilon'} \underbrace{Q^{-1/2} Y' Y Q^{-1/2}}_{\triangleq H' H} \underbrace{Q^{-1/2} x}_{\varepsilon}, \quad (4.42)$$

definiendo

$$H \triangleq Y Q^{-1/2}, \quad (4.43)$$

la desigualdad (4.41) puede escribirse como

$$|u|_2^2 = \varepsilon' H' H \varepsilon. \quad (4.44)$$

La matriz $H' H$ es simétrica, por lo tanto, puede ser diagonalizada ortonormalmente del siguiente modo [41][11]:

$$H' H = T' \Lambda T, \quad (4.45)$$

resultando

$$|u|_2^2 = \varepsilon' T' \Lambda T \varepsilon, \quad (4.46)$$

y definiendo $v \triangleq T \varepsilon$, se tiene

$$v' \Lambda v = \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_l v_l^2 \leq \lambda_{\max}(\Lambda) \sum_{l=1}^{l=n} v_l^2, \quad (4.47)$$

donde λ_l , con $l = 1, 2, \dots, n$, representa los valores singulares de H , siendo λ_{\max} su máximo valor singular.

Luego, se puede escribir

$$|u(\cdot)|_2^2 \leq \lambda_{\max}(\Lambda) \sum_{l=1}^{l=n} v_l^2(\cdot). \quad (4.48)$$

La matriz T es ortonormal, por lo tanto, el vector $v(\cdot)$ es solo una rotación de vector $\varepsilon(\cdot)$, es decir, ambos vectores tienen el mismo módulo, resultando

$$|u(\cdot)|_2^2 \leq \lambda_{\max}(\Lambda) \underbrace{\varepsilon'(\cdot) \varepsilon(\cdot)}_{\leq 1}, \quad (4.49)$$

y por lo tanto,

$$|u(\cdot)|_2^2 \leq \lambda_{\max}(\Lambda). \quad (4.50)$$

De esta manera, si se impone la condición

$$\lambda_{\max}(\Lambda) < u_{\max}^2, \quad (4.51)$$

se garantiza el cumplimiento de la desigualdad (4.38).

⁵Para mayor claridad en la notación, en lo que sigue, se omite el argumento temporal en las variables.

Formulación de la restricción (4.51) vía LMI

Teniendo en cuenta que los autovalores no nulos de $H'H$ y HH' son los mismos, se tiene que

$$\lambda_{\max}(\Lambda) = \lambda_{\max}(H'H) = \lambda_{\max}(HH'), \quad (4.52)$$

y reemplazando por la ecuación (4.43), resulta

$$\lambda_{\max}(Q^{-1/2}Y'YQ^{-1/2}) = \lambda_{\max}(YQ^{-1}Y') < u_{\max}^2. \quad (4.53)$$

La desigualdad escalar (4.53) implica la siguiente desigualdad matricial

$$YQ^{-1}Y' < u_{\max}^2 I, \quad (4.54)$$

y utilizando el complemento de Schur, la desigualdad (4.54) puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} u_{\max}^2 I & Y \\ Y' & Q \end{pmatrix} > 0. \quad (4.55)$$

De esta forma, si se satisface la LMI (4.55) se garantiza el cumplimiento de la desigualdad (4.38).

4.3.2. Restricción en la amplitud de cada componente

Considérese ahora que debe cumplirse la siguiente restricción en la amplitud pico de cada componente del vector $u(\cdot)$:

$$|u_r(\cdot)| < u_{r\max}, \quad \forall t, k \leq 0, \quad r = 1, 2, \dots, m. \quad (4.56)$$

Siendo

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{r1} & \cdots & f_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{1m} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

$$u_r = f_r x = y_r Q^{-1} x. \quad (4.58)$$

Luego, se puede escribir

$$|u_r(\cdot)|^2 = x(\cdot)' Q^{-1} y_r' y_r Q^{-1} x(\cdot) < u_{r\max}^2, \quad \forall t, k \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, m. \quad (4.59)$$

Haciendo

$$x' Q^{-1} y_r' y_r Q^{-1} x = \underbrace{x' Q^{-1/2}}_{\varepsilon'} \underbrace{Q^{-1/2} y_r' y_r Q^{-1/2}}_{\triangleq h_r' h_r} \underbrace{Q^{-1/2} x}_{\varepsilon}, \quad (4.60)$$

y procediendo en forma análoga a lo realizado anteriormente, se arriba a las siguientes restricciones LMI:

$$\begin{pmatrix} u_{r\max}^2 & y_r \\ y_r' & Q \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } r = 1, 2, \dots, m. \quad (4.61)$$

Con este análisis se concluye que si se satisface las LMIs (4.61), entonces se garantiza el cumplimiento de la desigualdad (4.56).

A continuación se muestra un resumen para el cálculo de un controlador LQR vía LMI con restricciones en la manipulada, en tiempo continuo y en tiempo discreto.

LQR para modelos LTI con restricciones en la manipulada

$\min_{\rho, Y, Q > 0} \rho, \text{ s.a:}$

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_0 \\ x_0 & Q \end{pmatrix} > 0,$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} QA' + AQ + Y'B' + BY & QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ R_x^{1/2}Q & -I\rho & 0 \\ R_u^{1/2}Y & 0 & -I\rho \end{pmatrix}} < 0,$$

Para tiempo continuo

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Q & QA' + Y'B' & QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ AQ + BY & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2}Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2}Y & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix}} > 0,$$

Para tiempo discreto

$$\begin{pmatrix} u_{\text{máx}}^2 I & Y \\ Y' & Q \end{pmatrix} > 0, \quad (\text{Restricción en amplitud del módulo}),$$

$$\begin{pmatrix} u_{r,\text{máx}}^2 & y_r \\ y'_r & Q \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } r = 1, 2, \dots, m, \quad (\text{Restricción en amplitud de cada componente}),$$

donde $Q = P^{-1}\rho$, $Y = FQ$, $\rho > 0$, $R_x \geq 0$, $R_u > 0$.

Siendo la ganancia de realimentación estática: $F = YQ^{-1}$.

4.4. LQR robusto para modelos LPV representados mediante modelos politópicos

En el diseño de un sistema de control, es fundamental disponer de un modelo matemático que represente lo mejor posible a la planta o sistema físico a controlar, de lo contrario es poco probable que los resultados obtenidos sean los deseados.

La técnica de control robusto busca encerrar todo lo que está fuera del modelo nominal en lo que se denomina *modelo de incertidumbres*, de forma tal que la planta real que se quiere gobernar esté incluida dentro de una familia de modelos formada por la planta nominal más las incertidumbres.

Hasta aquí se ha visto como las LMI se aplican a modelos LTI, en esta sección se extienden los resultados obtenidos en las secciones previas, para resolver problemas de control que involucren modelos lineales con incertidumbres paramétricas o modelos LPV.

Se partirá de un modelo LPV del cual se sabe que sus parámetros, aunque sean inciertos, se encuentran acotados dentro de un intervalo determinado.

4.4.1. Modelo con incertidumbres en tiempo continuo

Modelo para sistemas inciertos

Considérese el siguiente modelo LPV:

$$\dot{x}(t) = A(\eta(t)) x(t) + B(\eta(t)) u(t), \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (4.62)$$

donde $\eta(t)$ es un parámetro vectorial que toma en cuenta las incertidumbres en el modelo, como ser no linealidad del sistema y variación en sus parámetros de entrada []. La matriz de estado $A(\cdot)$ y de entrada $B(\cdot)$, dependen de este parámetro $\eta(t)$.

Luego, es posible incorporar la dinámica del modelo incierto (4.62) dentro de un politopo convexo de n_m vértices que dependen en forma afín del parámetro $\eta(t)$ [13], del siguiente modo:

$$[A(\eta(t)) \mid B(\eta(t))] \in \Omega, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.63)$$

donde Ω es un politopo, con n_m modelos LTI en sus vértices, el cual es definido como:

$$\Omega \triangleq Co\{[A_1 \mid B_1], [A_2 \mid B_2], \dots, [A_{n_m} \mid B_{n_m}]\}, \quad (4.64)$$

donde Co significa cáscara convexa, y las duplas $[A_j \mid B_j]$ son las matrices de cada modelo LTI vértice.

Esto es, $\forall t \geq 0$ existen n_m coeficientes no negativo $\alpha_j(t)$, con $j = 1, 2, \dots, n_m$, tal que:

$$[A(\eta(t)) \mid B(\eta(t))] = \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j(t) [A_j \mid B_j], \quad (4.65)$$

$$\sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j(t) = 1.$$

$n_m = 1$ corresponde al modelo LTI nominal, y en tal caso $\alpha_1(t) = 1, \forall t$.

Es importante destacar que la representación politópica abarca también a los sistemas no lineales, modelados por

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t),$$

siempre y cuando sus matrices jacobianas $\begin{bmatrix} \frac{\delta f}{\delta x} & \frac{\delta f}{\delta u} \end{bmatrix}$ calculadas en distintos instantes de tiempo o en distintos puntos de operación, estén dentro del politopo de incertidumbres Ω .

Formulación del problema LQR robusto

En esta sección se presenta la formulación de un regulador robusto que tiene en cuenta las incertidumbres en el modelo planteadas bajo una representación politópica como se vió previamente.

En particular, se modificará el problema de la minimización de una función objetivo nominal, de la teoría clásica de LQR, minimizando una función objetivo que representa el peor de los casos posibles tomando en cuenta todo el conjunto de incertidumbre [9].

Considérese el modelo LPV de la Ec.(4.62) asociado a un conjunto de incertidumbres representado por el politopo Ω de la Ec.(4.64). Se plantea la optimización de la siguiente función objetivo de desempeño robusto como sigue⁶:

$$\min_{u(t) \in \mathbb{L}^2} \quad \max_{[A(\eta) \mid B(\eta)] \in \Omega} \quad J_\infty(x, u), \quad (4.66)$$

donde

$$J_\infty(x, u) = \int_0^\infty (x'(t)R_x x(t) + u'(t)R_u u(t)) dt. \quad (4.67)$$

La maximización hecha sobre el conjunto Ω corresponde a la elección de aquella planta $[A(\eta) \mid B(\eta)] \in \Omega$ y $\forall t \geq 0$, tal que si es utilizada como modelo de representación, conduce al mayor valor de la función objetivo $J_\infty(x, u)$, conocido como *worst-case*. Mientras que la minimización corresponde a la elección de aquella acción de control $u(t)$, de cuadrado integrable, que minimice el *worst-case*.

Este es un problema mín-máx que aunque resulte convexo, es computacionalmente muy costoso [25]. En su lugar, y siguiendo el mismo planteo del capítulo anterior, se buscará una cota superior para la función objetivo robusta Ec.(4.67), y luego, se minimizará esa cota utilizando una ley de control por realimentación lineal⁷ de estado vía LMI.

Considérese el modelo LPV representado por la Ec.(4.62) asociado a un conjunto de incertidumbres representado por el politopo Ω de la Ec.(4.64), y considérese la entrada $u(t)$, dada por

$$u(t) = Fx(t). \quad (4.68)$$

⁶Para simplificar la notación se omitirá la dependencia temporal del parámetro y se reemplazará a las matrices $A(\eta(t))$ y $B(\eta(t))$ por $A(\eta)$ y $B(\eta)$, respectivamente

⁷Es importante recordar que en el problema original, al tener incertidumbres y/o restricciones, la realimentación de estados óptima no es necesariamente lineal. Aquí se fuerza a que sea lineal para poder utilizar las LMI y lo que se busca como resultado de la optimización es el vector de ganancias F .

El modelo LPV en lazo cerrado, resulta

$$\dot{x}(t) = A_{cl}(\eta)x(t), \quad \text{con } x(0) = x_0, \quad \text{donde } A_{cl}(\eta) = A(\eta) + B(\eta)F. \quad (4.69)$$

Cada modelo LTI vértice del polígono, es representado por

$$\dot{x}(t) = A_j x(t) + B_j u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (4.70)$$

$$\text{con } j = 1, 2, \dots, n_m,$$

y cada modelo vértice en lazo cerrado, está dado por

$$\dot{x}(t) = A_{j_{cl}} x(t), \quad \text{con } x(0) = x_0, \quad \text{donde } A_{j_{cl}} = A_j + B_j F, \quad (4.71)$$

de manera que $A_{cl}(\eta)$, puede ser representada mediante la siguiente combinación convexa:

$$A_{cl}(\eta) = \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j A_{j_{cl}}. \quad (4.72)$$

Teorema 4.3: Estabilidad y desempeño robusto

Considérese el modelo LPV dado por la Ec.(4.62) y un conjunto de incertidumbres Ω asociado a él descrito por la Ec.(4.64). Asumiendo que las siguientes LMI son satisfechas:

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_0 \\ x_0 & Q \end{pmatrix} > 0, \quad (4.73)$$

$$\begin{pmatrix} QA'_j + A_j Q + Y' B'_j + B_j Y & QR_x^{1/2} & Y' R_u^{1/2} \\ R_x^{1/2} Q & -I\rho & 0 \\ R_u^{1/2} Y & 0 & -I\rho \end{pmatrix} < 0, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n_m. \quad (4.74)$$

Siendo^a $Q = P^{-1}\rho$, $Y = FQ$, $R_x \geq 0$, $R_u > 0$, y $\rho > 0$.

Entonces, la ley de control dada por (4.68) con matriz ganancia de realimentación estática dada por $F = YQ^{-1}$, garantiza que el origen es asintóticamente estable para el modelo LPV (4.62) y que la función objetivo robusta (4.67) tiene al escalar ρ por cota superior.

^a Q e Y son las matrices de decisión.

Demostración teorema 4.3. La demostración es similar a la del teorema (4.1) para el modelo nominal. La LMI en (4.73) conduce a la determinación del elipsoide inicial

$$\epsilon(P, \rho) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n | x'_0 P x_0 < \rho\}, \quad (4.75)$$

y las n_m LMI en (4.74) conducen a

$$A'_{j_{cl}} P + P A_{j_{cl}} < -(R_x + F' R_u F), \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n_m. \quad (4.76)$$

Realizando una combinación convexa a cada lado de la desigualdad, se tiene

$$\sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j (A'_{jcl} P + P A_{jcl}) < -\sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j (R_x + F' R_u F),$$

$$\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j A'_{jcl} \right)}_{A'_{cl}(\eta)} P + P \underbrace{\sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j A_{jcl}}_{A_{cl}(\eta)} < -(R_x + F' R_u F) \underbrace{\sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j}_{=1}.$$

Resultando,

$$A_{cl}(\eta)' P + P A_{cl}(\eta) < -(R_x + F' R_u F). \quad (4.77)$$

Luego, pre y posmultiplicando por $x(t)'$ y $x(t)$, respectivamente, se obtiene

$$x(t)' (A_{cl}(\eta)' P + P A_{cl}(\eta)) x(t) < -x(t)' (R_x + F' R_u F) x(t),$$

y de (4.69), resulta

$$\underbrace{2x(t)' P \dot{x}(t)}_{\dot{V}[x(t)]} < -(x(t)' R_x x(t) + u(t)' R_u u(t)) < 0. \quad (4.78)$$

$$\Rightarrow \dot{V}[x(t)] < 0.$$

Esta última desigualdad demuestra que $\epsilon(P, \rho)$ es un elipsoide invariante contractivo para todos los estados del sistema incierto, por lo tanto, la acción de control $u(t) = YQ^{-1}x(t)$ garantiza la estabilidad robusta.

Luego, integrando (4.78) en un intervalo de tiempo infinito

$$\underbrace{V[x(\infty)] - V[x(0)]}_0 < -\int_0^{\infty} (x(t)' R_x x(t) + u(t)' R_u u(t)) dt, \quad (4.79)$$

se tiene

$$J_{\infty}(x, u) = \int_0^{\infty} (x(t)' R_x x(t) + u(t)' R_u u(t)) dt < x'_0 P x_0 < \rho, \quad (4.80)$$

lo cual muestra que la acción de control $u(t) = YQ^{-1}x(t)$, además de estabilizar al sistema incierto le fija una cota superior a la función objetivo robusta.

Por lo tanto, el problema LQR robusto se puede formular como el siguiente problema de minimización:

$$\min_{\rho, Y, Q > 0} \rho, \quad \text{s.a.: (4.73) y (4.74)}. \quad (4.81)$$

4.4.2. Modelo con incertidumbres en tiempo discreto

Modelo para sistemas inciertos

De manera análoga a lo realizado para tiempo continuo se formulará el problema LQR para sistemas inciertos en tiempo discreto.

Considérese el siguiente modelo LPV:

$$x(k+1) = A(\eta(k))x(k) + B(\eta(k))u(k), \quad \text{con } x(0) = x_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty, \quad (4.82)$$

donde las matrices $A(\eta(k))$ y $B(\eta(k))$ dependen del parámetro $\eta(k)$.

Luego, es posible incorporar la dinámica del modelo incierto (4.82) dentro de un politopo convexo de n_m vértices que dependen en forma afín del parámetro $\eta(k)$ [50], del siguiente modo:

$$[A(\eta(k)) \mid B(\eta(k))] \in \Omega, \quad \forall k \geq 0, \quad (4.83)$$

donde Ω es un politopo, con n_m modelos LTI en sus vértices, el cual es definido como:

$$\Omega \triangleq Co \{ [A_1 \mid B_1], [A_2 \mid B_2], \dots, [A_{n_m} \mid B_{n_m}] \}, \quad (4.84)$$

donde Co significa cáscara convexa, y las duplas $[A_j \mid B_j]$ son las matrices de cada modelo LTI vértice.

Esto es, $\forall k \geq 0$ existen n_m coeficientes no negativos $\alpha_j(k)$, con $j = 1, 2, \dots, n_m$, tal que:

$$[A(\eta(k)) \mid B(\eta(k))] = \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j(k) [A_j \mid B_j], \quad (4.85)$$

$$\sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j(k) = 1.$$

Formulación del problema LQR robusto

Siguiendo el mismo razonamiento de la sección (4.4.1), pero aplicado a modelos LPV en tiempo discreto, se pretende optimizar la siguiente función objetivo de desempeño robusto⁸:

$$\min_{u(k), k=0,1,\dots,\infty} \quad \max_{[A(\eta) \mid B(\eta)] \in \Omega, k \geq 0} \quad J_\infty(x, u), \quad (4.86)$$

donde

$$J_\infty(x, u) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} x(k)' R_x x(k) + u(k)' R_u u(k), \quad \text{con } R_x \geq 0 \text{ y } R_u > 0. \quad (4.87)$$

Considérese el modelo LPV representado en la Ec.(4.82) asociado a un conjunto de incertidumbres representado por el politopo Ω de la Ec.(4.84), y considérese la entrada $u(k)$ dada por

$$u(k) = Fx(k). \quad (4.88)$$

⁸Para simplificar la notación se omitirá la dependencia temporal del parámetro ($\eta(k)$), es decir, se reemplazará a las matrices $A(\eta(k))$ y $B(\eta(k))$ por $A(\eta)$ y $B(\eta)$, respectivamente.

El modelo LPV en lazo cerrado, resulta

$$x(k+1) = A_{cl}(\eta)x(k), \quad \text{con } x(0) = x_0, \quad \text{donde } A_{cl}(\eta) = A(\eta) + B(\eta)F. \quad (4.89)$$

Cada modelo LTI vértice del polígono, es representado por

$$x(k+1) = A_j x(k) + B_j u(k), \quad x(0) = x_0, \quad (4.90)$$

$$\text{con } j = 1, 2, \dots, n_m,$$

y cada modelo vértice en lazo cerrado, está dado por

$$x(k+1) = A_{j_{cl}} x(k), \quad \text{con } x(0) = x_0, \quad \text{donde } A_{j_{cl}} = A_j + B_j F, \quad (4.91)$$

de esta manera $A_{cl}(\eta)$, puede ser representado mediante la siguiente combinación convexa:

$$A_{cl}(\eta) = \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j A_{j_{cl}}. \quad (4.92)$$

Teorema 4.4: Estabilidad y desempeño robusto[25]

Considérese el modelo LPV dado por la Ec.(4.82) y un conjunto de incertidumbres Ω asociado a él descrito por la Ec.(4.84). Asumiendo que las siguientes LMI son satisfechas:

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_0 \\ x_0 & Q \end{pmatrix} > 0, \quad (4.93)$$

$$\begin{pmatrix} Q & QA'_j + Y'B'_j & QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ A_j Q + B_j Y & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2} Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2} Y & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n_m. \quad (4.94)$$

Siendo^a $Q \triangleq P^{-1} \rho > 0$, $Y \triangleq FQ$, $R_x \geq 0$, $R_u > 0$, $\rho > 0$.

Entonces, la ley de control dada por (4.88) con matriz ganancia de realimentación estática dada por $F = YQ^{-1}$, garantiza que el origen es asintóticamente estable para el modelo LPV (4.82) y que la función objetivo robusta (4.87) tiene al escalar ρ como cota superior.

^a Q e Y son las matrices de decisión.

Demostración teorema 4.4. La LMI en (4.93) conduce a la determinación del elipsoide inicial

$$\epsilon(P, \rho) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n | x'_0 P x_0 < \rho\}. \quad (4.95)$$

A continuación se demostrará que si se satisfacen las n_m LMI en (4.94), entonces el elipsoide $\epsilon(P, \rho)$ es un invariante contractivo para el modelo en lazo cerrado (4.89), esto es,

$$V[x(k)] - V[x(k+1)] > 0, \quad \forall x(k) \in \epsilon(P, \rho). \quad (4.96)$$

Realizando una combinación convexa con las n_m LMI en (4.94), se obtiene

$$\sum_{s=1}^{n_m} \alpha_j \begin{pmatrix} Q & Q(A_{jcl})' & QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ A_{jcl}Q & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2}Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2}Y & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & Q \left(\sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j A'_{jcl} \right) & QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ \left(\sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j A_{jcl} \right) Q & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2}Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2}Y & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0, \quad (4.97)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} Q & QA'_{cl}(\eta) & QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ A_{cl}(\eta)Q & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2}Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2}Y & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0. \quad (4.98)$$

A partir de aquí, la demostración es similar a la del teorema (4.2) para el sistema nominal, arribándose a

$$V[x(k)] - V[x(k+1)] > \underbrace{x(k)'[R_x + F'R_u F]x(k)}_{>0, \forall x \neq 0}, \quad \forall k \geq 0, \quad y \quad \forall [A(\eta) \mid B(\eta)] \in \Omega, \quad (4.99)$$

que a su vez implica

$$V[x(0)] > \sum_{k=0}^{\infty} x(k)'[R_x + F'R_u F]x(k), \quad \forall k \geq 0, \quad y \quad \forall [A(\eta) \mid B(\eta)] \in \Omega, \quad (4.100)$$

y dado que $V[x(0)] < \rho \Rightarrow J_{\infty}(x, u) < \rho$.

Por lo tanto, la función objetivo de desempeño robusto

$$\min_{u(k), k=0,1,\dots,\infty} \max_{[A(\eta) \mid B(\eta)] \in \Omega, k \geq 0} J_{\infty}(k), \quad (4.101)$$

se ve optimizada al resolver el siguiente problema de minimización vía LMI:

$$\min_{\rho, Y, Q > 0} \rho, \quad \text{s.a: (4,93) y (4,94)}. \quad (4.102)$$

4.5. LQR robusto con restricción en la variable manipulada

En la sección (4.3) se vió, tanto para modelos en tiempo continuo como para modelos en tiempo discreto, que si se requiere que $\|u(\cdot)\|_2 < u_{\text{máx}}, \quad \forall t, k \geq 0$,

entonces, debe ser satisfecha la siguiente LMI:

$$\begin{pmatrix} u_{\text{máx}}^2 I & Y \\ Y' & Q \end{pmatrix} > 0. \quad (4.103)$$

Mientras que si se requiere que $|u_r(\cdot)| \leq u_{r\text{máx}}$, $\forall t, k \geq 0$, $r = 1, 2, \dots, m$, se deben satisfacer la siguientes LMI:

$$\begin{pmatrix} u_{r\text{máx}}^2 & y_r \\ y_r' & Q \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } r = 1, 2, \dots, m. \quad (4.104)$$

Como se observa, en ninguna de ellas aparece el modelo LPV, por lo tanto, estas restricciones para el caso LTI nominal, son las mismas que las requeridas para el modelo LPV con incertidumbres.

A continuación se resumen en dos cuadros, para el modelo en tiempo continuo y el modelo en tiempo discreto, el problema LQR robusto con restricciones en la variable manipulada.

LQR robusto con restricciones en tiempo continuo

$\min_{\rho, Y, Q > 0} \rho$, s.a :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0' \\ x_0 & Q \end{pmatrix} > 0.$$

$$\begin{pmatrix} QA_j' + A_j Q + Y' B_j' + B_j Y & QR_x^{1/2} & Y' R_u^{1/2} \\ R_x^{1/2} Q & -I\rho & 0 \\ R_u^{1/2} Y & 0 & -I\rho \end{pmatrix} < 0, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n_m.$$

$$\begin{pmatrix} u_{\text{máx}}^2 I & Y \\ Y' & Q \end{pmatrix} > 0, \quad \text{para } \|u(t)\|_2 \leq u_{\text{máx}}, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\begin{pmatrix} u_{r\text{máx}}^2 & y_r \\ y_r' & Q \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } r = 1, 2, \dots, m, \quad \text{para } |u_r(t)| \leq u_{r\text{máx}}, \quad \forall t \geq 0.$$

LQR robusto con restricciones en tiempo discreto

$$\min_{\rho, Y, Q > 0} \rho, \quad \text{s.a. :}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_0 \\ x_0 & Q \end{pmatrix} > 0.$$

$$\begin{pmatrix} Q & QA'_j + Y'B'_j & QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ A_jQ + B_jY & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2}Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2}Y & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n_m.$$

$$\begin{pmatrix} u_{\text{máx}}^2 I & Y \\ Y' & Q \end{pmatrix} > 0, \quad \text{para } \|u(k)\|_2 \leq u_{\text{máx}}, \quad \forall k \geq 0.$$

$$\begin{pmatrix} u_{r\text{máx}}^2 & y_r \\ y'_r & Q \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } r = 1, 2, \dots, m, \quad \text{para } |u_r(k)| \leq u_{r\text{máx}}, \quad \forall k \geq 0.$$

4.6. Obtención de una ganancia de realimentación variable, F_k

Hasta aquí se ha visto como obtener una ganancia de realimentación estática que garantice la estabilidad del origen y minimice una función de costo cuadrática (o función objetivo) de un modelo LPV sujeto a restricciones en su señal de control.

Una forma de ser menos conservador y aumentar la velocidad de respuesta sin comprometer la estabilidad y las restricciones impuestas en el problema original, es recalcular la ganancia del controlador en distintos instantes de tiempo en lugar de utilizar una única ganancia para todo el proceso de regulación.

El punto clave aquí es mostrar que al realimentar al sistema con un vector de ganancias variable, el cual es recalculado en distintos instantes de tiempo, se mantiene la garantía de estabilidad y todas las demás especificaciones de diseño. La estrategia aplicada es similar a la de un controlador predictivo basado en modelo MPC con horizonte de predicción infinito [25].

Pero a diferencia de este no es necesario que el intervalo de tiempo, en que se recalculan y aplican las ganancias, coincida con el período de muestreo del sistema. En efecto, esta técnica también se puede aplicar a sistemas modelados en tiempo continuo [14]. Otra diferencia importante, como se mencionó anteriormente, es que no se calcula una ley de control, ya que ésta es siempre una realimentación lineal de estados, sino solamente el vector de ganancias.

Para demostrar que esta metodología mantiene la estabilidad robusta del sistema realimentado, a continuación, se hará uso de dos conceptos fundamentales propuesto por Kothare⁹[25].

4.6.1. Planteo del problema

Considérese indistintamente el problema de las subsecciones (4.4.1) o (4.4.2).

- I) Según la definición del elipsoide invariante Def.(3.5) o Def.(3.8), si el problema de optimización es factible en $t = 0$ o $k = 0$, también lo será en $t = \mathcal{T}$ o $k = \mathcal{K}$. Siendo \mathcal{T} algún intervalo de tiempo dado y $\mathcal{K} \triangleq \frac{\mathcal{T}}{T_M}$, donde T_M el tiempo de muestreo del sistema discreto. Es decir, que si los estados del sistema son medidos en $t = \mathcal{T}$ o $k = \mathcal{K}$, se satisface la siguiente desigualdad en el dominio temporal:

- a) Para modelos en tiempo continuo

$$x'_{\mathcal{T}} Q^{-1} x_{\mathcal{T}} < 1, \quad (4.105)$$

- b) Para modelos en tiempo discreto

$$x'_{\mathcal{K}} Q^{-1} x_{\mathcal{K}} < 1, \quad (4.106)$$

o de manera equivalente, se satisface la siguiente LMI:

- a) Para modelos en tiempo continuo

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_{\mathcal{T}} \\ x_{\mathcal{T}} & Q \end{pmatrix} > 0, \quad (4.107)$$

- b) Para modelos en tiempo discreto

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_{\mathcal{K}} \\ x_{\mathcal{K}} & Q \end{pmatrix} > 0. \quad (4.108)$$

Nótese además, que ésta es la única LMI (para tiempo continuo o tiempo discreto) que depende explícitamente de la variable temporal en el problema de minimización visto en las secciones (4.4) y (4.5). Por lo tanto, tomando el estado $x_{\mathcal{T}}$ (o $x_{\mathcal{K}}$) como condición inicial, se plantea ahora el siguiente problema de optimización:

⁹Kothare plantea estos conceptos solamente en tiempo discreto.

LQR robusto con restricción. Cálculo de las ganancias en \mathcal{T}

$$\begin{aligned}
& \min_{\rho, Y, Q > 0} \rho, \quad \text{s.a. :} \\
& \begin{pmatrix} 1 & x'_{\mathcal{T}} \\ x_{\mathcal{T}} & Q \end{pmatrix} > 0, \\
& \begin{pmatrix} QA'_j + A_j Q + Y' B'_j + B_j Y & QR_x^{1/2} & Y' R_u^{1/2} \\ R_x^{1/2} Q & -I\rho & 0 \\ R_u^{1/2} Y & 0 & -I\rho \end{pmatrix} < 0, \quad (4.109) \\
& \text{con } j = 1, 2, \dots, n_m. \\
& \begin{pmatrix} u_{\text{máx}}^2 & Y \\ Y' & Q \end{pmatrix} > 0.
\end{aligned}$$

LQR robusto con restricción. Cálculo de las ganancias en \mathcal{K}

$$\begin{aligned}
& \min_{\rho, Y, Q > 0} \rho, \quad \text{s.a. :} \\
& \begin{pmatrix} 1 & x'_{\mathcal{K}} \\ x_{\mathcal{K}} & Q \end{pmatrix} > 0, \\
& \begin{pmatrix} Q & QA'_j + Y' B'_j & QR_x^{1/2} & Y' R_u^{1/2} \\ A_j Q + B_j Y & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2} Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2} Y & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0, \quad (4.110) \\
& \text{con } j = 1, 2, \dots, n_m. \\
& \begin{pmatrix} u_{\text{máx}}^2 & Y \\ Y' & Q \end{pmatrix} > 0.
\end{aligned}$$

La solución a este problema en tiempo continuo (o discreto), son los valores óptimos de Q e Y , que a continuación se definirán como $Q_{\mathcal{T}}$ e $Y_{\mathcal{T}}$ ($Q_{\mathcal{K}}$ e $Y_{\mathcal{K}}$) respectivamente, los cuales debido a la incertidumbre del modelo y a la restricción impuesta en la variable manipulada, tendrán, muy probablemente, valores diferentes a los valores de Q e Y óptimos obtenidos en el problema de minimización con condición inicial x_0 .

Como antes, el valor de la ganancia $F_{\mathcal{T}} = Y_{\mathcal{T}} Q_{\mathcal{T}}^{-1}$ ($F_{\mathcal{K}} = Y_{\mathcal{K}} Q_{\mathcal{K}}^{-1}$), minimiza la función objetivo robusta (4.67) o (4.87), que ahora se define como $J_{\mathcal{T}}(x, u)$ ($J_{\mathcal{K}}(x, u)$), y su valor mínimo resulta ser:

$$J_{\mathcal{T}}(x_{\text{ópt}}, u_{\text{ópt}}) = x'_{\mathcal{T}} P_{\mathcal{T}} x_{\mathcal{T}} < \rho_{\mathcal{T}}, \quad \text{para tiempo continuo, o} \quad (4.111)$$

$$J_{\mathcal{K}}(x_{\text{ópt}}, u_{\text{ópt}}) = x'_{\mathcal{K}} P_{\mathcal{K}} x_{\mathcal{K}} < \rho_{\mathcal{K}}, \quad \text{para tiempo discreto.}$$

II) Lo clave aquí, es notar que¹⁰

$$x'_{\mathcal{T}} Q_{\mathcal{T}}^{-1} x_{\mathcal{T}} \leq x'_{\mathcal{T}} Q^{-1} x_{\mathcal{T}}. \quad (4.112)$$

Esto es debido a que $Q_{\mathcal{T}}^{-1}$ es óptimo, mientras que Q^{-1} es solo factible en el tiempo $t = \mathcal{T}$. Por lo tanto, y utilizando la desigualdad (4.105), se tiene

$$\overbrace{x'_0 Q^{-1} x_0}^{\text{elipsoide invariante contractivo}} > \underbrace{x'_{\mathcal{T}} Q^{-1} x_{\mathcal{T}}}_{\text{factible en } \mathcal{T}} \geq \underbrace{x'_{\mathcal{T}} Q_{\mathcal{T}}^{-1} x_{\mathcal{T}}}_{\text{óptimo en } \mathcal{T}}. \quad (4.113)$$

El desarrollo previo realizado entre los instantes de tiempo $t = 0$ y $t = \mathcal{T}$, puede repetirse entre los instantes de tiempos $t = \mu\mathcal{T}$ y $t = (\mu + 1)\mathcal{T}$ con $\mu = 1, 2, \dots, \infty$.

Lo mismo para el modelo en tiempo discreto, el desarrollo realizado entre los instantes de tiempo $k = 0$ y $k = \mathcal{K}$, puede repetirse entre los instantes de tiempos $k = \mu\mathcal{K}$ y $k = (\mu + 1)\mathcal{K}$ con $\mu = 1, 2, \dots, \infty$.

Sin pérdida de generalidad estableciendo a $\mathcal{T} = 1$ o $\mathcal{K} = 1$, y definiendo

$$x(\mu\mathcal{T}) = x(\mu) \triangleq x_{\mu}, \quad \circ$$

$$x(\mu\mathcal{K}) = x(\mu) \triangleq x_{\mu},$$

se puede escribir:

$$x'_{\mu+1} Q_{\mu+1}^{-1} x_{\mu+1} < x'_{\mu} Q_{\mu}^{-1} x_{\mu}, \quad (4.114)$$

$$\forall \mu = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

Notar que en cada instante de tiempo $t = \mu$, se resuelve un problema de optimización convexo, por lo que cada mínimo obtenido es único y corresponde a la solución óptima para ese instante.

Como resultado de este planteo, la función cuadrática $V(x_{\mu}) = x'_{\mu} Q_{\mu}^{-1} x_{\mu}$, con $\mu = 1, 2, \dots, \infty$, decrece monótonamente conforme μ aumenta garantizando la estabilidad asintótica del origen para el modelo LPV de la sección (4.5).

Siendo ρ_{μ} la cota superior de la función objetivo robusta, esto es

$$J_{\mu}(x_{\acute{o}pt}, u_{\acute{o}pt}) = x'_{\mu} P_{\mu} x_{\mu} < \rho_{\mu}, \quad \text{con } \mu = 1, 2, \dots, \infty, \quad (4.115)$$

la misma reduce en cada instante, conforme el tiempo aumenta, a medida en que se recalcula la ganancia.

¹⁰Por simplicidad, se continúa con la notación para modelos en tiempo continuo, para modelos en tiempo discreto solo se debe reemplazar \mathcal{K} por \mathcal{T} .

4.7. Prueba y mejora de los reguladores

En esta sección se analizará el comportamiento de un CSTR en lazo cerrado utilizando los distintos reguladores visto hasta aquí, estáticos, dinámicos, sin y con restricciones, en tiempo continuo y en tiempo discreto. Se partirá de un modelo politópico que solo tiene en cuenta la no linealidad del sistema. Un análisis detallado para la construcción del modelo LPV de un sistema no lineal con incertidumbre en sus parámetros de entrada se realizará en el capítulo siguiente.

Ejemplo 4.1: Regulación de un CSTR^[14]

En este ejemplo se aplica la técnica de sintonización robusta, presentada previamente, a un reactor continuo de tanque agitado CSTR propuesto por Morningred et al [33], donde el reactante A se transforma en el producto B mediante una reacción química exotérmica modelada por las siguientes ecuaciones^a

$$\dot{C}_A(t) = \frac{q_e(t)}{V(t)} (C_{Ae} - C_A(t)) - k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t),$$

$$\dot{T}(t) = \frac{q_e(t)}{V(t)} (T_{Ae} - T(t)) + k_1 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t) + \frac{q_c(t)}{V(t)} \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}} \right) (T_{ce} - T(t)).$$

La reacción toma lugar en un tanque cilíndrico agitado como se muestra en la siguiente figura:

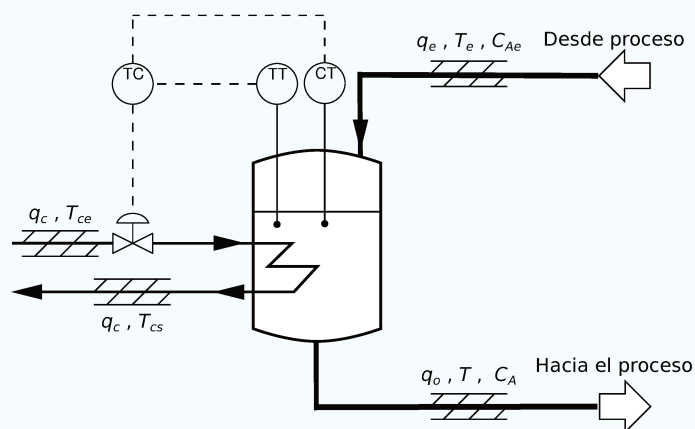


Figura 4.1: Diagrama ilustrativo del CSTR y el control aplicado

La concentración del reactante $C_A(t)$ y la temperatura del reactor $T(t)$ son consideradas variables medibles. La concentración del reactante es indirectamente controlada mediante la manipulación del caudal de líquido refrigerante $q_c(t)$ que circula a través de una serpentina.

Los objetivos del diseño son:

- Garantizar la estabilidad del sistema no lineal
- Minimizar el ruido de proceso y ruido de medición
- Satisfacer la restricción en la amplitud del caudal refrigerante cuyo rango de operación es:

$$85 \leq q_c(t) \leq 116 \quad L \text{ min}^{-1}.$$

^a El desarrollo de este modelo y los valores de sus parámetros constantes, también se pueden ver en el Apéndice (C).

Como se mencionó al comienzo, para el diseño del regulador en tiempo continuo se construye un politopo de manera simplificada que solo tiene en cuenta la no linealidad del sistema. Para esto, se linealiza el sistema en tres puntos de operación diferentes y se toman los valores extremos de dos parámetros de las matrices A_j y B_j que tuvieron mayor variabilidad. Con los valores máximo y mínimo de estos dos parámetros, se construyen 4 modelos LTI vértices, en la forma:

$$\dot{x}(t) = A_j x(t) + B_j u(t), \quad x(0) = x_0, \quad \text{con } j = 1, 2, 3, 4.$$

Luego, en cada instante $t = \mu\mathcal{T}$, se resuelve el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} & \underset{\rho, Y, Q > 0}{\text{mín}} \quad \rho, \quad \text{s.a. :} \\ & \begin{pmatrix} 1 & x'_{\mu\mathcal{T}} \\ x_{\mu\mathcal{T}} & Q \end{pmatrix} > 0, \\ & \begin{pmatrix} QA'_j + A_j Q + Y' B'_j + B_j Y & QR_x^{1/2} & Y' R_u^{1/2} \\ R_x^{1/2} Q & -I\rho & 0 \\ R_u^{1/2} Y & 0 & -I\rho \end{pmatrix} < 0, \\ & \text{con } j = 1, 2, 3, 4. \\ & \begin{pmatrix} 1 & Y \\ Y' & Q \end{pmatrix} > 0, \end{aligned}$$

donde se fijan los siguientes valores para la matrices de peso:

$$R_x = I \text{ y } R_u = 1.$$

La solución a este problema son los valores óptimos de Q e Y los cuales se redefinen como $Q_{\mu\tau}$ e $Y_{\mu\tau}$ respectivamente, de manera que la matriz ganancia de realimentación dinámica que satisface los objetivos planteados en ese instante resulta ser $F_{\mu\tau} = Y_{\mu\tau} Q_{\mu\tau}^{-1}$.

La Fig.(4.2) muestra la curva de reacción y la recta de disipación, además se observan dos puntos cuya ubicación se explica a continuación:

Para analizar el desempeño del sistema de control con el regulador propuesto, se introduce una perturbación de estados que ubica a los mismos en los siguientes valores: $C_A = 0,08 \text{ mol } L^{-1}$ y $T = 443,16 \text{ K}$. Este vector de estado perturbado está representado con un círculo de color rojo sobre la curva de reacción. En color azul se representa el punto de operación en estado estacionario, intersección entre ambas curvas, la ubicación de este punto se corresponde con un caudal de líquido refrigerante $q_c = 111,72 \text{ L } \text{min}^{-1}$, un nivel de concentración $C_A = 0,14 \text{ mol } L^{-1}$ y una temperatura del reactor $T = 431,32 \text{ K}$.

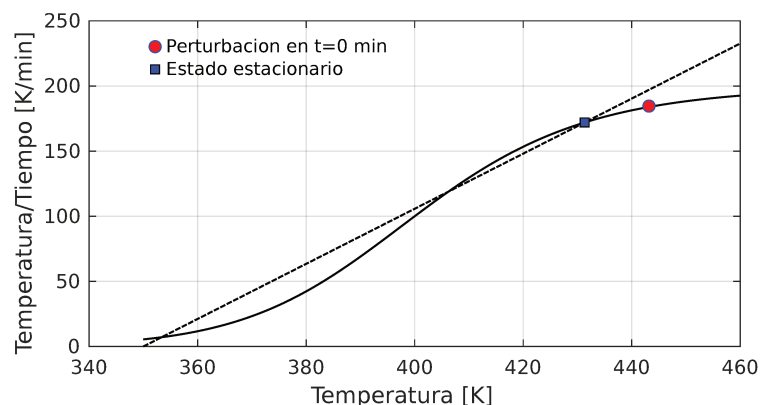


Figura 4.2: Curva de ración y recta de disipación para $q_c = 111,72 \text{ L min}^{-1}$

Resolución 4.1. *Se realizaron tres simulaciones, la primera de ellas es en lazo abierto, la segunda se realizó implementando el regulador con una ganancia de realimentación estática, mientras que en la tercera se implementó el regulador con una ganancia de realimentación variable que es actualizada cada seis segundos. La evolución de los estados para los tres sistemas es representada en la Fig. (4.3)*

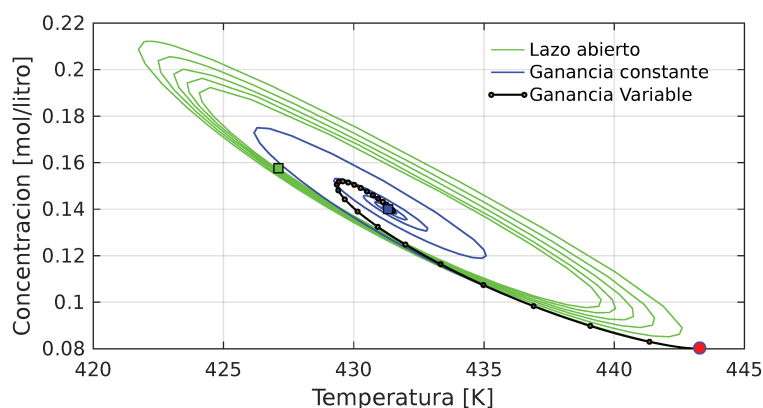


Figura 4.3: Diagrama de estados para los tres sistemas

En las Fig.(4.4) se representan, para los tres sistemas, la evolución de la concentración y la temperatura en función del tiempo.

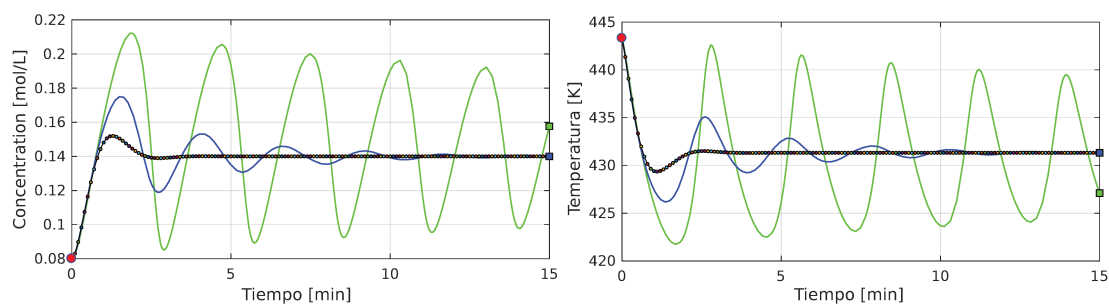


Figura 4.4: Evolución de la concentración y la temperatura

La Fig.(4.5) muestra la variable manipulada. Esta variable tiene una restricción sobre su amplitud $|\Delta q_c| < 4$. La cota se estableció al hacer la diferencia entre el máximo caudal disponible y el valor del caudal que opera en el punto de equilibrio. La Fig.(4.5(a)) muestra el incremento $\Delta q_c(t)$, mientras que la Fig.(4.5(b)) muestra todo el rango de $q_c(t)$.

Nótese que la respuesta dinámica del caudal manipulado presenta discontinuidades. Este comportamiento es debido al recálculo del vector de ganancias ya que cada 6 segundos un nuevo problema de optimización con una nueva condición inicial es resuelto. Además, también se puede notar que aunque el vector ganancia se mantiene constante durante todo el intervalo, el caudal manipulado varía según cambian los estados. Esto no ocurre cuando el control se realiza en tiempo discreto en el que el caudal también se mantiene constante durante todo el intervalo.

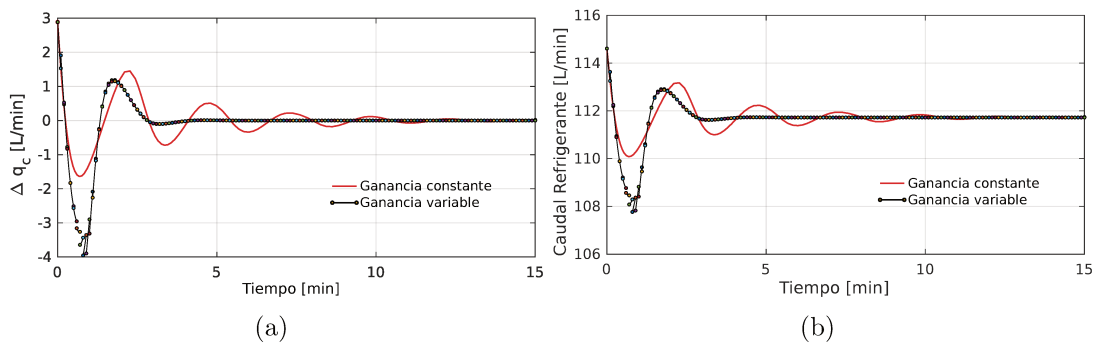


Figura 4.5: Caudal manipulado

La Fig.(4.6) muestra las ganancias calculadas vía LMI para el diseño del controlador con vector de ganancias constante y con vector de ganancias variable.

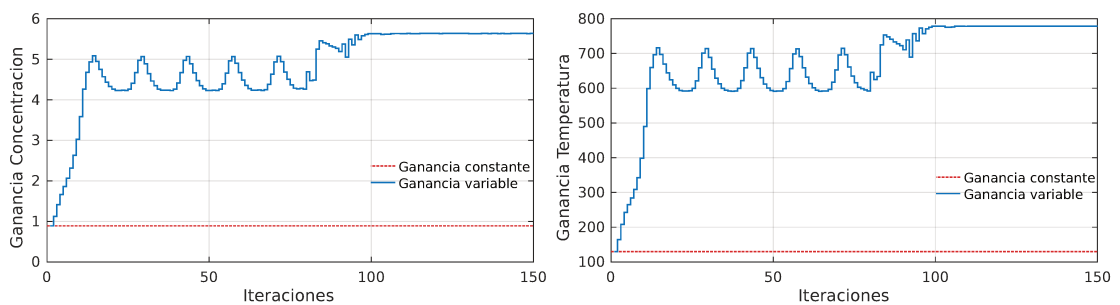


Figura 4.6: Ganancias de realimentación estática y variable

4.7.1. Utilización de un conjunto terminal para reducir la carga computacional y mejorar la utilización del algoritmo de cálculo

En la Fig.(4.6) se observa una fluctuación en los valores de las ganancias, esto ocurre a partir de la iteración número 11 aproximadamente. La razón de este

comportamiento se debe a que los estados están cerca del punto de equilibrio y el algoritmo de optimización debe realizar su cálculo con valores muy pequeños¹¹.

Para evitar esta oscilación, en este trabajo se propone agregar un conjunto terminal y conmutar entre dos vectores de ganancias, uno estático y el otro variable, como se detalla a continuación:

- Paso 1: Determinar un vector de ganancias estático inicial sin restricciones F_{SR} , que tenga en cuenta el mayor alejamiento de los estados respecto al punto equilibrio.
- Paso 2: Determinar el tamaño máximo del conjunto terminal, que no exceda los límites de la región de operación y donde el vector de ganancia F_{SR} pueda ser aplicado sin violar las restricciones impuestas (en este ejemplo, a la amplitud del módulo variable manipulada).
- Paso 3: Imponer una condición que permita conmutar entre el vector de ganancias variable F_τ y el vector de ganancias estático F_{SR} , preservando las restricciones de diseño.

Nota: A efecto de utilizar la formulación para el diseño de reguladores en tiempo discreto, expuesta en la Ec.(4.110), se continúa el ejemplo utilizando un politopo cuyos vértices resultan ser $n_m = 4$ modelos LTI discretos.

Para el paso(1) se hace uso de las LMI del teorema (4.4) aplicado a cada uno de los vértices del politopo para obtener F_{SR} . Es decir, el primer paso consiste en resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\rho, Y, Q > 0} \rho, \quad \text{s.a. :}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_0 \\ x_0 & Q \end{pmatrix} > 0.$$

$$\begin{pmatrix} Q & QA'_j + Y'B'_j & QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ A_jQ + B_jY & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2}Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2}Y & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } j = 1, 2, 3, 4.$$

Obteniéndose,

$$F_{SR} = YQ^{-1}. \quad (4.116)$$

¹¹Recordar que el vector de estados, que utiliza una de las LMI, está en variable de desviación.

Paso(2) : Para la determinación del conjunto terminal, se definirá el siguiente elipsoide:

$$\epsilon_f(W, 1) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x(k)' W x(k) \leq 1\}, \quad \text{con } W > 0, \quad (4.117)$$

el cual debe ser contractivo para los siguientes modelos LTI (vértices) realimentados:

$$x(k+1) = (A_j + B_j F_{SR}) x(k), \quad \text{con } j = 1, 2, 3, 4, \quad (4.118)$$

es decir, se debe cumplir $\forall x(k)$ que pertenezca a dicha región terminal la siguiente condición:

$$x(k)' W x(k) - x(k+1)' W x(k+1) > 0. \quad (4.119)$$

Además también debe cumplirse, $\forall x(k)$ que pertenezca a dicha región, las siguientes restricciones:

a)

$$|F_{SR} x(k)|_2 < u_{\text{máx}}. \quad (4.120)$$

donde $u_{\text{máx}}$ es la distancia mínima entre los valores extremos del módulo de la manipulada y u_{ss} .

b)

$$|x_i(k+1)| < x_{i_{\text{máx}}}, \quad \text{con } i = 1, 2. \quad (4.121)$$

donde $x_{i_{\text{máx}}}$ es la distancia mínima entre los valores extremos del estado x_i dentro de la región de operación $x_{i_{ss}}$ ¹².

Maximización del volumen del elipsoide terminal

En este ejemplo donde $x \in \mathfrak{R}^2$, el elipsoide es una elipse y su volumen es simplemente el área de la elipse. El siguiente desarrollo es fácilmente escalable a \mathfrak{R}^n con $n > 2$.

Siendo la matriz $W > 0$, es posible diagonalizarla ortonormalmente en la forma: $W = T_W' \Lambda T_W$, donde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Por lo tanto, la desigualdad (4.117), puede representarse como

$$x(k)' T_W' \Lambda T_W x(k) \leq 1, \quad (4.122)$$

definiendo $w(k) \triangleq T_W x(k)$, resulta¹³

$$w_1^2 \lambda_1 + w_2^2 \lambda_2 \leq 1. \quad (4.123)$$

Tomando solamente la igualdad en la expresión anterior se tiene la ecuación canónica de la elipse, esta es:

$$\frac{w_1^2}{\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)} + \frac{w_2^2}{\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)} = 1, \quad (4.124)$$

¹² u_{ss} y $x_{i_{ss}}$ son los valores en estado estacionario de la manipulada y el estado x_i respectivamente.

¹³Por simplicidad en la notación se omitirá la dependencia temporal.

donde

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \triangleq r_1, \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \triangleq r_2, \quad (4.125)$$

son sus radios.

El área de la elipse viene dada por la siguiente expresión:

$$\text{Área} = \pi r_1 r_2, \quad (4.126)$$

por lo tanto, para maximizar el área es suficiente con maximizar $\left(\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}\right)$, o bien minimizar

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det(W). \quad (4.127)$$

Reemplazando en la desigualdad (4.119) por la Ec.(4.118), el problema planteado en el paso(2) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} & \min_{W>0} \det(W), \quad \text{s.a:} \\ & W - (A_j + B_j F_{SR})' W (A_j + B_j F_{SR}) > 0, \quad \text{con } j = 1, 2, 3, 4. \\ & |F_{SR} x(k)|_2 < u_{\text{máx}}. \\ & |x_i(k+1)| < x_{i\text{máx}}, \quad \text{con } i = 1, 2. \\ & \forall x(k) \in \epsilon_f(W, 1). \end{aligned} \quad (4.128)$$

Planteo del paso(2) mediante LMI

Los problemas de optimización mediante LMI maximizan o minimizan funciones lineales, a tal efecto, se reemplaza la función $\det(W)$ por $\log \det(W)$.

Las restricciones en la variable manipulada y en los estados, se plantean de manera similar a lo realizado en las secciones (4.3.1) y (4.3.2), del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & |u(k)|_2^2 = x(k)' F_{SR}' F_{SR} x(k). \\ \text{b)} \quad & |x_i(k+1)|^2 = x(k)' A_{cl_{ji}}' A_{cl_{ji}} x(k), \end{aligned} \quad (4.129)$$

$$\text{donde } A_{cl_{ji}} \triangleq (A_{ji} + B_{ji} F_{SR}), \quad \text{con } j = 1, 2, 3, 4 \quad \text{e} \quad i = 1, 2.$$

$\forall x(k) \in \epsilon_f(W, 1)$, se realiza el siguiente cambio de variable:

$$z(k) \triangleq W^{1/2} x(k), \quad \text{resultando} \quad z(k)' z(k) \leq 1. \quad (4.130)$$

Representando a $x(k)$ como:

$$x(k) = W^{-1/2} z(k), \quad (4.131)$$

se tiene,

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & |u(k)|_2^2 = z(k)' \left(W^{-1/2} F'_{SR} F_{SR} W^{-1/2} \right) z(k), \\ \text{b)} \quad & |x_i(k+1)|^2 = z(k)' \left(W^{-1/2} A'_{cl_{ji}} A_{cl_{ji}} W^{-1/2} \right) z(k). \end{aligned} \quad (4.132)$$

Diagonalizando ortonormalmente y definiendo

$$\begin{aligned} T'_a \Lambda_a T_a &\triangleq \left(W^{-1/2} F'_{SR} F_{SR} W^{-1/2} \right), \\ T'_b \Lambda_b T_b &\triangleq \left(W^{-1/2} A'_{cl_{ji}} A_{cl_{ji}} W^{-1/2} \right), \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & |u(k)|_2^2 = z(k)' T'_a \Lambda_a T_a z(k), \\ \Rightarrow \quad & |u(k)|^2 \leq \lambda_{\max}(\Lambda_a) \underbrace{z(k)' T'_a T_a z(k)}_{\leq 1}, \quad \text{y} \\ \text{b)} \quad & |x_i(k+1)|^2 = z(k)' T'_b \Lambda_b T_b z(k), \\ \Rightarrow \quad & |x_i(k+1)|^2 \leq \lambda_{\max}(\Lambda_b) \underbrace{z(k)' T'_b T_b z(k)}_{\leq 1}. \end{aligned} \quad (4.133)$$

Por lo tanto, imponiendo las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}(\Lambda_a) &= \lambda_{\max}(F_{SR} W^{-1} F'_{SR}) < u_{\max}^2, \quad \text{y} \\ \lambda_{\max}(\Lambda_b) &= \lambda_{\max}(A_{cl_{ji}} W^{-1} A'_{cl_{ji}}) < x_{i_{\max}}^2, \end{aligned} \quad (4.134)$$

se tiene que, $\forall x(k) \in \epsilon_f(W, 1)$ y $\forall k \geq 0$,

$$\begin{aligned} |u(k)|_2 &< u_{\max}, \\ |x_i(k+1)| &< x_{i_{\max}}, \quad \text{con } i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Luego, utilizando el complemento de Schur, resulta lícito expresar las restricciones en (4.128) del siguiente modo:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} W & (A_j + B_j F_{SR})' W \\ W(A_j + B_j F_{SR}) & W \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } j = 1, 2, 3, 4. \\ & \begin{pmatrix} u_{\max}^2 I & F_{SR} \\ F'_{SR} & W \end{pmatrix} > 0, \\ & \begin{pmatrix} x_{i_{\max}}^2 I & A_{cl_{ji}} \\ A'_{cl_{ji}} & W \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.136)$$

El siguiente cuadro resume la formulación LMI para los pasos (1) y (2).

P.(1): Obtener la ganancia sin restricciones $F_{SR} = YQ^{-1}$, resolviendo el siguiente problema de minimización:

$$\min_{\rho, Y, Q > 0} \rho, \quad \text{s.a. :}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_0 \\ x_0 & Q \end{pmatrix} > 0.$$

$$\begin{pmatrix} Q & QA'_j + Y'B'_j & QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ A_jQ + B_jY & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2}Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2}Y & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } j = 1, 2, 3, 4.$$

P.(2): Con la ganancia F_{SR} fija, obtenida en el paso anterior, maximizar el conjunto terminal resolviendo el siguiente problema de minimización:

$$\min_{W > 0} \log \det(W), \quad \text{s.a. :}$$

$$\begin{pmatrix} W & (A_j + B_jF_{SR})'W \\ W(A_j + B_jF_{SR}) & W \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } j = 1, 2, 3, 4.$$

$$\begin{pmatrix} u_{\max}I & F_{SR} \\ F'_{SR} & W \end{pmatrix} > 0.$$

$$\begin{pmatrix} x_{i_{\max}}^2 I & A_{cl_{ji}} \\ A'_{cl_{ji}} & W \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } i = 1, 2, \quad \text{y } j = 1, 2.$$

(4.137)

Para el **paso(3)**, la condición que se debe comprobar antes de realizar el cálculo en cada iteración es:

$$x(k)' W x(k) \leq 1.$$

Si dicha condición se satisface, es porque el sistema se encuentra dentro del conjunto terminal y, en tal caso, se aplica directamente F_{SR} . Si la condición no se satisface, se recalcula F_{τ} utilizando las LMI en (4.110).

Simulación

Se realizaron dos simulaciones, en la primera no se tuvo en cuenta la región terminal utilizando un único vector de ganancias variable para toda la simulación. Mientras que en la segunda simulación, se creó una región terminal y se realizó una conmutación del vector de ganancias variable al vector de ganancias estático cuando el sistema ingresa en la misma.

En estas simulaciones se tomó como tiempo de muestreo $T_M = 0,1$ minutos, y se realizaron 50 iteraciones correspondiéndose a una corrida de 5 minutos. Los resultados obtenidos se muestran en las siguientes figuras:

En la Fig.(4.7) se grafica la evolución de los estados, también se grafican un elipsoide inicial en color celeste y el elipsoide terminal en color verde. En esta gráfica no se observan diferencias entre las dos simulaciones excepto en un entorno muy cercano al origen.

En la misma figura, sí se puede observar que el sistema ingresa a la región terminal a partir de la iteración número 11, que se encuentra prácticamente en su borde.

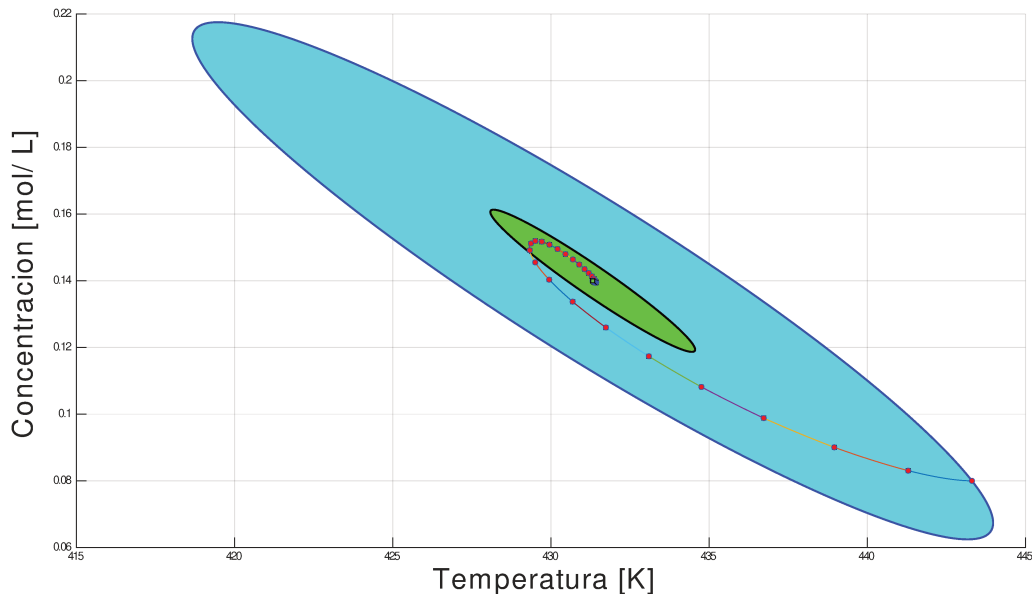
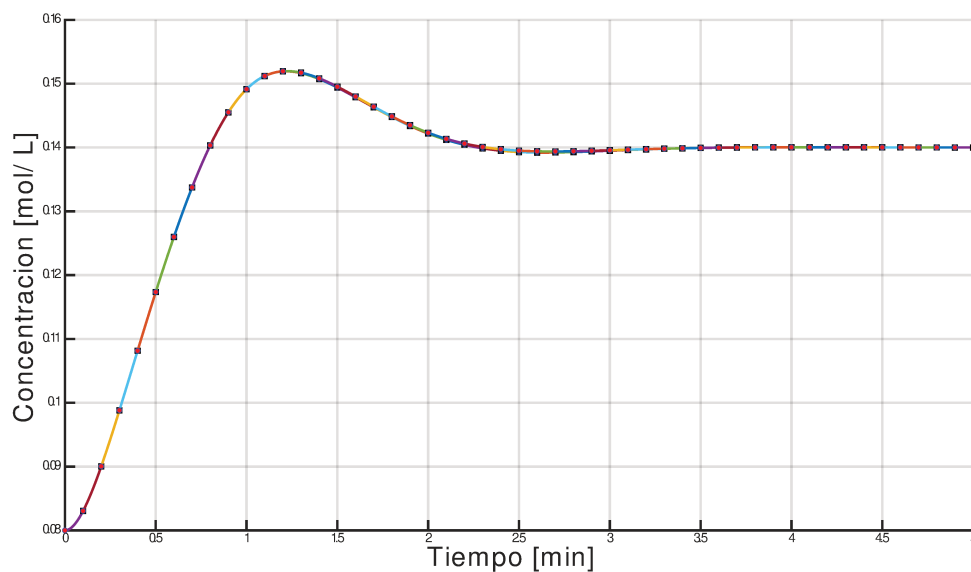
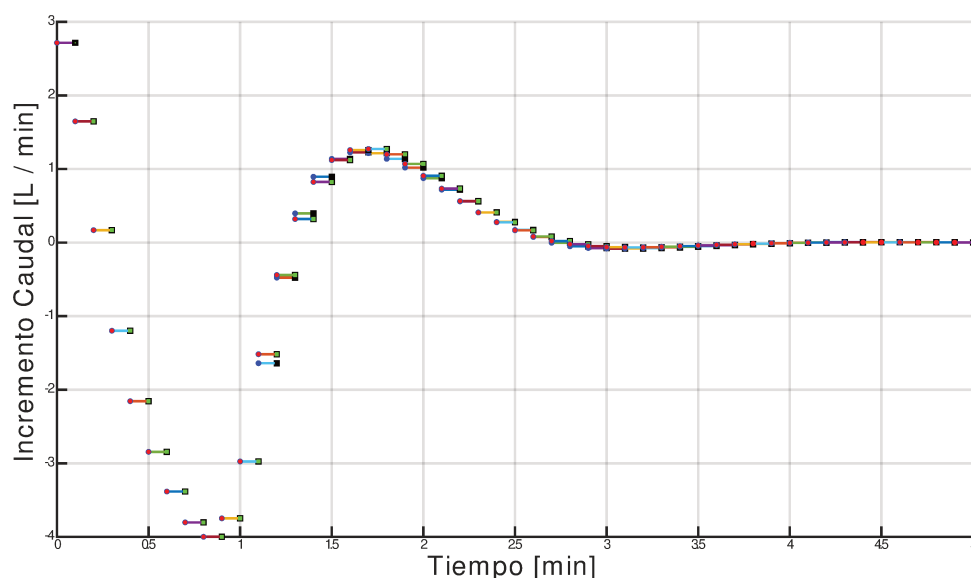


Figura 4.7: Evolución de los estados y región terminal

En la Fig.(4.8), se observa la dinámica de la concentración y el incremento del caudal manipulado (figuras (a) y (b) respectivamente). En la primera no se percibe diferencias entre las dos simulaciones, mientras que en la segunda sí se nota una pequeña diferencia entre las iteraciones 12 a 21, lo que coincide con el intervalo de tiempo en el que el sistema ingresa a la región terminal hasta que este se encuentra muy cercano al punto de equilibrio.



(a) Evolución de la concentración

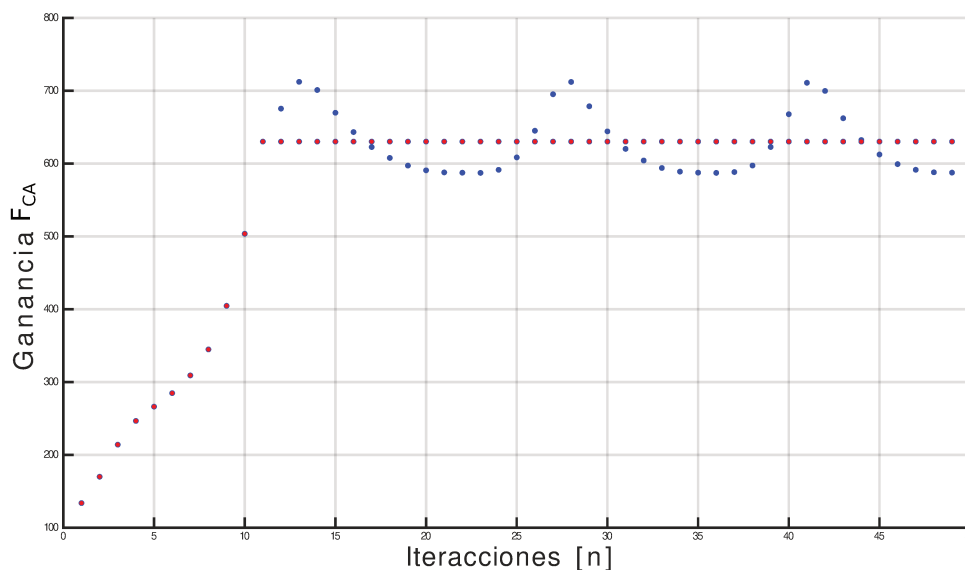


(b) Incremento del caudal refrigerante

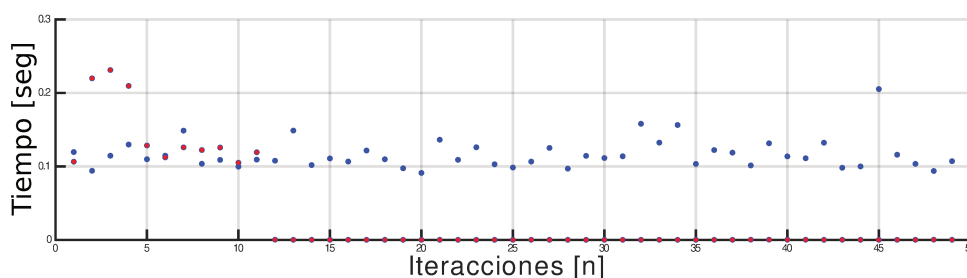
Figura 4.8: Concentración e incremento del caudal

Finalmente en la Fig.(4.9) se grafican la ganancia de la concentración y el tiempo de cómputo del regulador (figuras (a) y (b) respectivamente). El color rojo corresponde a la simulación realizada utilizando, para el cálculo del regulador, la región terminal.

Es claro que, utilizando esta metodología, solamente es necesario repetir el cálculo de las ganancias en las primeras 11 iteraciones (tiempo en que se ingresa a la región terminal) y luego conmutar a un vector de ganancias de realimentación estático hasta el final del proceso. De esta forma, se logra un ahorro importante en el uso de los recursos digitales.



(a) Ganancia de la concentración



(b) Tiempo de cómputo del regulador

Figura 4.9: Ganancia y tiempo de cómputo.

4.8. Resumen

En este capítulo se ha analizado y desarrollado un procedimiento que permite formular las especificaciones en el diseño de reguladores lineales cuadráticos, tanto para modelos LTI como para modelos LPV. En este último caso se ha hecho uso de una técnica de control robusto que se basa en la construcción de una cáscara convexa o politopo utilizando modelos LTI.

Se han formulado las especificaciones que contemplan restricciones en la variable manipulada como así también en los estados y se han extendido los resultados obtenidos al diseño de un LQR que utiliza, para la realimentación de estados, un vector de ganancias variable. El desarrollo del procedimiento de diseño se ha realizado para modelos en tiempo continuo y en tiempo discreto, siempre en el marco de las desigualdades matriciales lineales.

Como ejemplo, se eligió una aplicación típica de la ingeniería química, como lo es un CSTR. La simplicidad del modelo politópico en la que solo se tuvo en cuenta la no linealidad, fue para destacar los beneficios de aplicar un regulador con características dinámicas. La comparación entre un regulador con características

estáticas y otro con características dinámicas probó que este último tiene una significativa mejora en el tiempo de establecimiento, al menos tres veces más rápido, lo cual es signo de un mejor aprovechamiento del caudal del líquido refrigerante.

Sin embargo, en la simulación también se observó la ineficacia de mantener una ganancia de realimentación variable, cuando el sistema se aproxima a su punto de equilibrio, ya que la misma empieza a fluctuar.

Como solución para evitar este comportamiento, se propuso la idea de utilizar una región terminal. Dicha región se delimita a partir de maximizar un conjunto (elipsoide) en donde la ganancia de realimentación estática más agresiva no viola las restricciones impuestas a la variable manipulada ni a los estados. Los resultados mostraron que la aplicación de este concepto es viable, logrando una mejor utilización de los recursos del controlador.

En el próximo capítulo, se retomará este ejemplo enfocándolo con mayor detalle en la construcción del modelo, respondiendo a situaciones más realistas, y se implementará un regulador LQR dinámico con restricciones operativas tanto en tiempo continuo como en tiempo discreto.

Capítulo 5

Ejemplo: Regulación de un CSTR

5.1. Introducción

En esta sección se aplicará la técnica de sintonización robusta de reguladores lineales cuadráticos analizada en el capítulo precedente.

Retomando el ejemplo (4.1), se analizará con mayor detalle la dinámica del reactor en lazo abierto utilizando un rango de operación más amplio e ingresándole perturbaciones en sus parámetros de entrada.

A partir del análisis realizado, se construirá un modelo LPV empleando un politopo que contemple simultáneamente la no linealidad del sistema y las posibles perturbaciones en sus parámetros de entrada.

Luego de haber obtenido el modelo robusto del CSTR, se diseñarán diferentes reguladores con la técnica prevista y para compararlos, observando la dinámica del sistema realimentado, se realizarán las siguientes simulaciones:

Primero, trabajando en tiempo continuo, se realimentará el sistema con un regulador estabilizante que utiliza un vector de ganancias estático calculado sin restricciones. Seguidamente, se agregará una restricción en la amplitud de la variable manipulada y luego, se realimentará el sistema con un vector de ganancias variable recalculado, cada cierto intervalo de tiempo, con restricción en la amplitud de la variable manipulada.

Posteriormente se discretizará el modelo y se repetirán las simulaciones en base al diseño de reguladores en tiempo discreto, y por último, se hará uso de una región terminal para el diseño de un regulador que, sin perder desempeño, tenga un menor tiempo de cálculo.

5.2. Planteo del problema

A continuación, para una lectura más clara, se reescriben las ecuaciones diferenciales que modelan al CSTR del ejemplo (4.1).

Ecuaciones del CSTR a volumen constante

$$\dot{C}_A(t) = \frac{q_e(t)}{V(t)} (C_{Ae} - C_A(t)) - k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t). \quad (5.1)$$

$$\dot{T}(t) = \frac{q_e(t)}{V(t)} (T_{Ae} - T(t)) + k_1 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t) + \frac{q_c(t)}{V(t)} \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}}\right) (T_{ce} - T(t)). \quad (5.2)$$

El rango de operación deseado para la concentración C_A , está dado por el siguiente intervalo de valores:

$$1,4 \text{ mol L}^{-1} \leq C_A \leq 0,05 \text{ mol L}^{-1},$$

que se corresponde con el siguiente rango de temperatura:

$$431,32 \text{ K} \leq T \leq 453,40 \text{ K}.$$

Los extremos de este rango de temperatura son alcanzados respectivamente, con los siguientes valores de caudal del líquido refrigerante:

$$q_c = 111,72 \text{ L min}^{-1}, \quad q_c = 83,77 \text{ L min}^{-1}. \quad (5.3)$$

En la figura (5.1 (a)) en color negro se observa la curva de reacción, esta curva muestra la velocidad con que se incrementa la temperatura en el interior del tanque debido a la reacción química exotérmica producida.

Las rectas en color rojo y azul muestran la velocidad con que es disipado el calor por el sistema refrigerante. La recta en color rojo corresponde a un caudal de líquido refrigerante $q_c = 111,72 \text{ L min}^{-1}$, y la recta en color azul corresponde a un caudal de líquido refrigerante $q_c = 83,77 \text{ L min}^{-1}$.

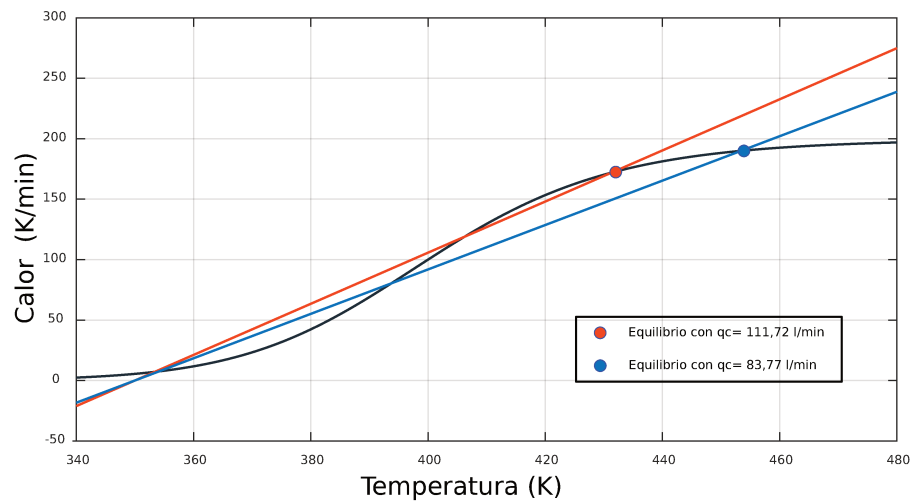
La intersección de estas rectas con la curva de reacción determinan los puntos de equilibrio entre el calor generado y el calor disipado, los puntos marcados son los extremos del rango de operación donde se desea que el CSTR opere, y se obtienen de la siguiente ecuación¹:

$$\underbrace{\frac{q_e}{V} \left(\frac{C_{Ae}}{\rho c_p} \Delta H_R \frac{X}{(1+X)} \right)}_{\text{función sigmoide}} = - \underbrace{\left[\frac{q_e}{V} T_{Ae} + \frac{q_c(t)}{V} \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}}\right) T_{ce} \right] + \left[\frac{q_e}{V} + \frac{q_c(t)}{V} \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}}\right) \right] T(t)}_{\text{función lineal de disipación}}$$

$$\text{donde } X \triangleq \frac{V}{q_e(t)} k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}}. \quad (5.4)$$

La figura (5.1 (b)) muestra la relación que existe, en estado estacionario, entre la concentración del producto A y la temperatura del tanque, como así también el rango de operación mencionado.

¹Se recuerda que el desarrollo del modelo del CSTR y el de esta ecuación se puede ver en el Apéndice (C).



(a) Generación y disipación del calor vs temperatura

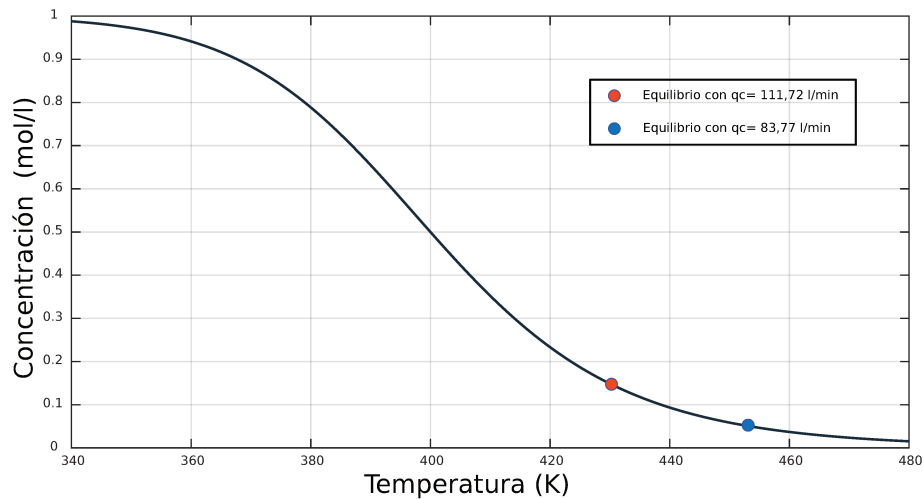
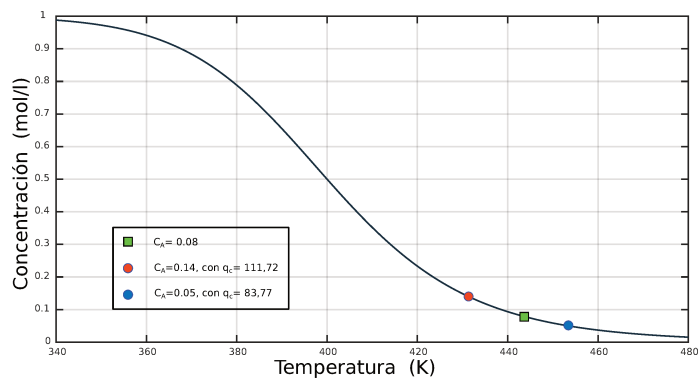
(b) Concentración del producto A vs temperatura

Figura 5.1: Rango de operación

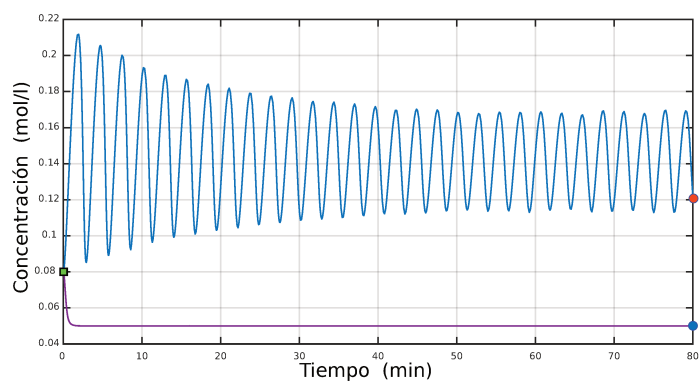
5.3. Comportamiento del reactor en lazo abierto

Para visualizar la dinámica de este sistema no lineal en lazo abierto, se parte de una concentración inicial de valor $C_A = 0,08$ mol/l, y manipulando el caudal q_c se fuerza al sistema para que se establezca en los extremos del intervalo donde se desea operar.

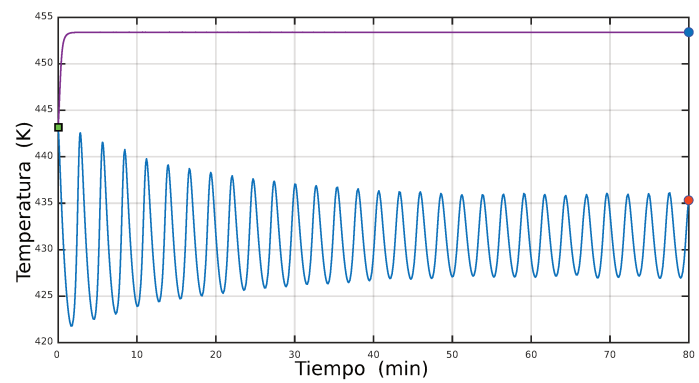
En la Fig.(5.2) se muestra el resultado de dicha simulación. En ella se observa que el sistema alcanza rápidamente el punto de equilibrio donde la concentración es $C_A = 0,05$ mol/l, pero no ocurre lo mismo para el punto de operación donde la concentración es $C_A = 0,14$ mol/l. En este último, el estado estacionario no es alcanzado al menos en el tiempo de simulación elegido, y esto se debe a que dicho punto está cerca de un punto de equilibrio marginalmente estable para el CSTR en lazo abierto.



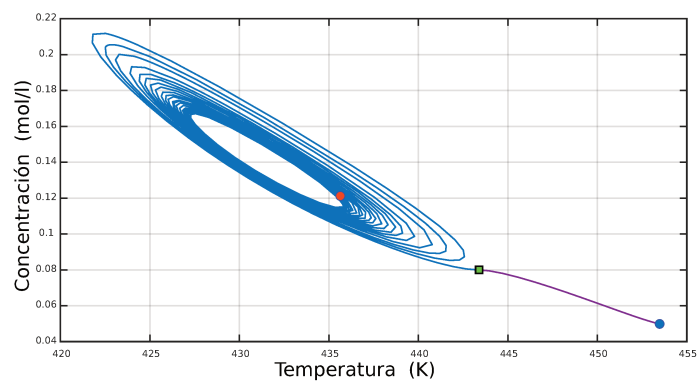
(a) Concentración producto A



(b) Evolución de la concentración



(c) Evolución de la temperatura



(d) Evolución de los estados

Figura 5.2: Comportamiento de la dinámica del sistema cuando evoluciona de un estado inicial intermedio, hacia los dos extremos del rango de operación

5.3.1. Variación en los parámetros

Según la Ec.(5.1) y la Ec.(5.2), existen tres² parámetros cuyos valores se asumen constantes, pero en realidad podrían ser perturbados durante el funcionamiento del reactor. Estos parámetros son:

1. La temperatura de entrada del producto A (T_{Ae}),
2. la concentración de entrada del producto A (C_{Ae}), y
3. la temperatura de entrada del líquido refrigerante (T_{ce}).

Estudiando la Ec.(5.4) se puede comprender cómo es afectado el comportamiento del sistema cuando alguno de estos tres parámetros es perturbado. En esta ecuación se aprecia que la variación en T_{Ae} y/o T_{ce} afecta la ordenada al origen de la recta de disipación, mientras que la variación de C_{Ae} afecta a la curva de reacción. Se analizará este último caso.

El análisis consiste en ingresar una perturbación transitoria en la planta, modificando en $\pm 5\%$ el valor de C_{Ae} con una variación senoidal³ y observar la respuesta. La planta se encuentra operando en un punto de equilibrio estable cuyo valor de concentración es $C_A = 0,12$ mol/l.

En la Fig.(5.3) se muestra el resultado de esta simulación. En la Fig.(5.3 (a)) en color azul está representada la concentración de entrada C_{Ae} , y en color rojo la concentración $C_A(t)$, se nota que cuando la perturbación en C_{Ae} es positiva el sistema se recupera retornando a su punto de equilibrio, pero cuando la perturbación invierte el sentido, el reactor no retorna a su punto de equilibrio original sino que evoluciona hacia un nuevo equilibrio en donde el CSTR se apaga. La evolución de la temperatura se ve en la Fig.(5.3 (b)).

Este comportamiento desigual, según el sentido con que ingresa la perturbación, se entiende observando la Fig.(5.3 (c)). En dicha figura se ve que al desplazarse la curva de reacción hacia arriba, consecuente con la perturbación en sentido positivo, siempre encuentra un punto de intersección con la recta de disipación. Sin embargo, cuando el sentido de la perturbación se invierte, la curva de reacción se desplaza hacia abajo (línea azul) volviéndose tangente con la recta de disipación dentro de la región de operación e intersectándose mucho más abajo, indicado con un punto en color rojo, en donde el sistema encuentra su nuevo equilibrio.

²En este trabajo, se asume que el caudal de entrada q_e , el volumen V , y las constantes físicas no cambian.

³Se eligió este tipo de perturbación para tener una variación suave de este parámetro en los dos sentidos.

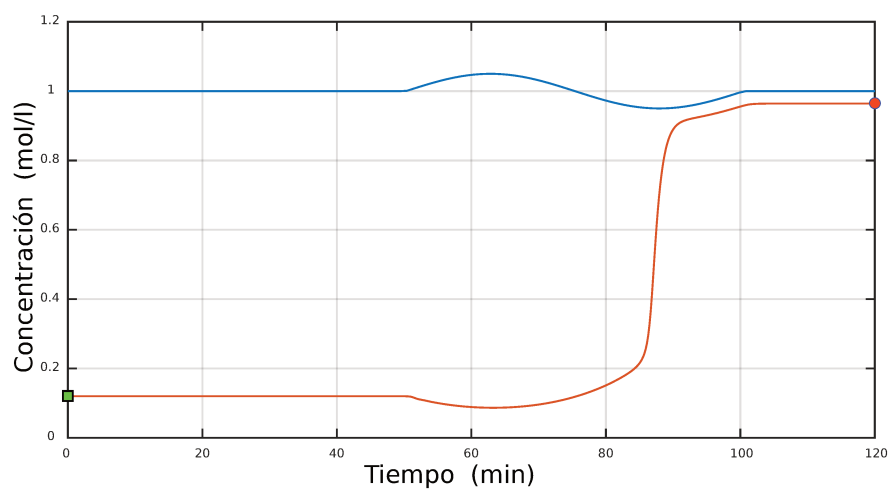
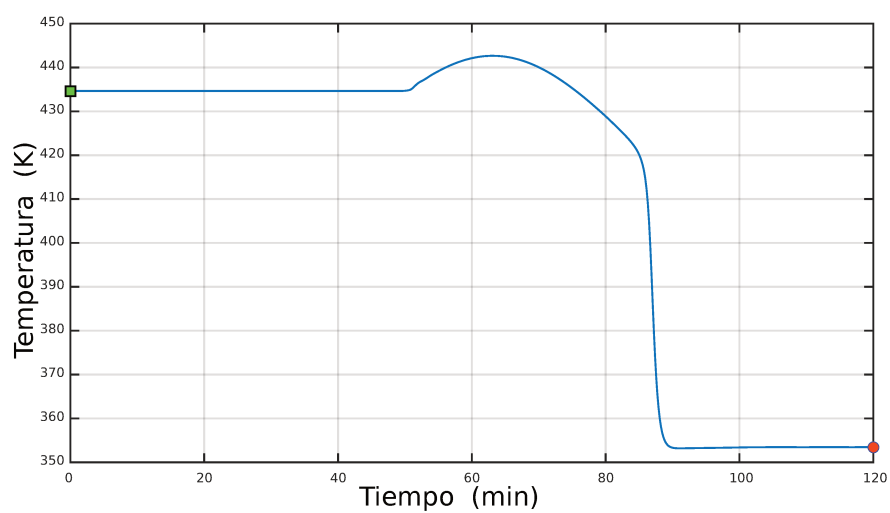
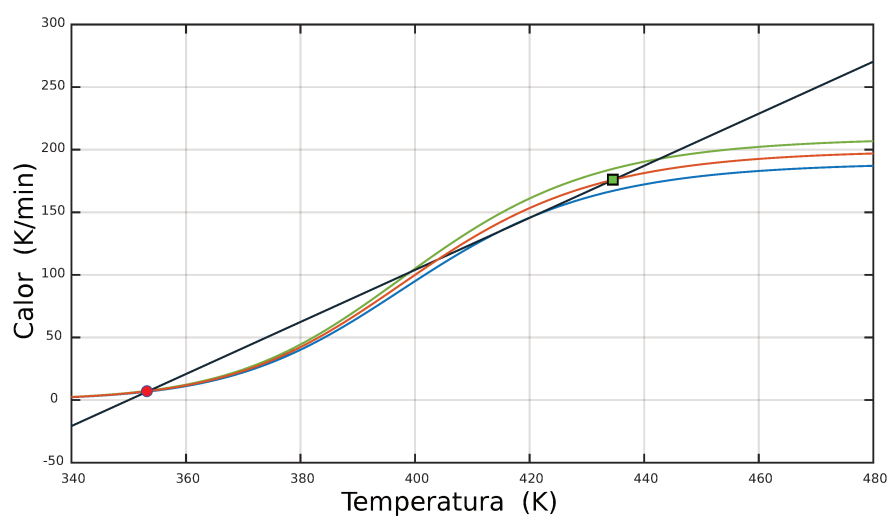
(a) Perturbación en C_{Ae} y evolución en $C_A(t)$ (b) Evolución de $T(t)$ debido a la perturbación en C_{Ae} (c) Desplazamiento de la curva de reacción debido a la perturbación en C_{Ae}

Figura 5.3: Resultado de la simulación

5.4. Modelo politópico para el CSTR con incertidumbres paramétricas

En la sección (5.3) se ha realizado un análisis del CSTR en lazo abierto, donde ha quedado evidenciado su comportamiento debido a su naturaleza no lineal y a una posible perturbación en sus parámetros de entrada.

Si la idea fuese diseñar un regulador para que el sistema trabaje en un punto de operación determinado, entonces para la construcción del modelo LPV bastaría con linealizar al sistema en dicho punto, y a partir del modelo lineal nominal obtenido construir un politopo con los $N = 8$ modelos LTI vértices⁴.

Sin embargo, esto podría no ser adecuado para el diseño de un sistema de control donde se pretende trabajar no en un punto sino en una región de operación. En este caso, una opción podría ser crear un politopo que, como cáscara convexa, encierre a la planta nominal no lineal en todo su intervalo de operación, y luego incorporar en el modelo politópico una matriz mediante la cual ingresa el vector de perturbaciones que modela la variación de los parámetros. Finalmente, para el diseño del controlador se impondría una restricción que acote o minimice la norma H_∞ de la matriz de transferencia que relaciona dicho vector de perturbaciones con el vector de salidas. Esta forma de diseño se utiliza cuando las perturbaciones externas son acotadas en amplitud pero sostenidas en el tiempo [12].

Aquí, asumiendo que la variación de los parámetros es transitoria se procederá en forma diferente, esto es, se incluirán tanto a las incertidumbres del modelado, debido a la no linealidad del sistema, como al vector de perturbaciones externas dentro de un único modelo politópico, de la siguiente manera:

1. Dadas las ecuaciones diferenciales Ec.(5.1) y Ec.(5.2) se grafican los ocho sistemas SISO no lineales, con entrada $q_c(t)$ y salida $C_A(t) \in [0,05 ; 0,14]$ mol/l, para los valores máximo y mínimo de los tres parámetros inciertos C_{Ae} , T_{Ae} y T_{ce} . Esto se muestra en la Fig.(5.4) y en la Fig.(5.5), correspondiéndose con esta última la tabla (5.1).

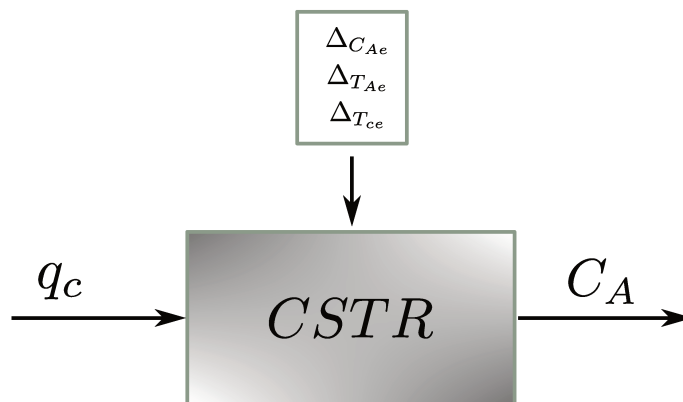
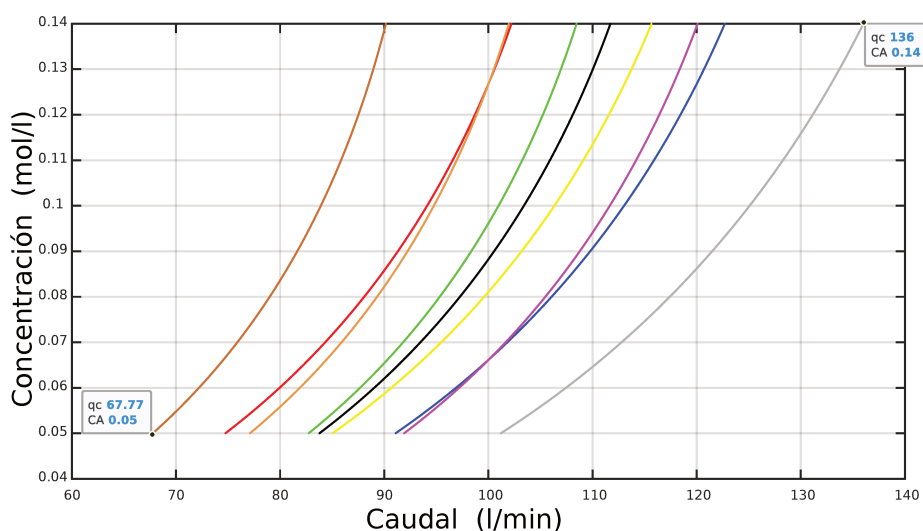


Figura 5.4: Representación entrada-salida del CSTR perturbado

⁴Recordar que se tienen tres parámetros ($n = 3$) y el número de vértices del politopo es $N = 2^n$.

<i>Sistema</i>	C_{Ae}	T_{Ae}	T_{ce}
0 (negro)	nominal	nominal	nominal
1 (marrón)	mín	mín	mín
2 (rojo)	mín	mín	máx
3 (naranja)	mín	máx	mín
4 (amarillo)	mín	máx	máx
5 (verde)	máx	mín	mín
6 (azul)	máx	mín	máx
7 (violeta)	máx	máx	mín
8 (gris)	máx	máx	máx

Tabla 5.1: Referencia de colores para la Fig.(5.5)

Figura 5.5: Caudal refrigerante (q_c) vs. Concentración (C_A)

En la Fig.(5.5) también se observa el rango del caudal refrigerante necesario para que el sistema incierto pueda ser regulado, esto es, $q_c \in [67,77 ; 136]$ l/min.

2. Luego, utilizando estas ocho plantas y mediante la función `convhull` de MATLAB, se contruye una región de operación como se muestra en la Fig.(5.6). Este polígono convexo, que encierra a todos los posibles puntos de operación, tiene 94 vértices que están representados mediante círculos en color azul en la Fig.(5.6 (a)). Cada vértice puede ser asociado con un modelo LTI. Aunque es posible operar computacionalmente con este gran número de modelos LTI, el tiempo empleado por el algoritmo de cálculo utilizado en el diseño del regulador es muy grande. Por esta razón, es necesario reducir el número de vértices aproximando el conjunto original a uno tan bueno como sea posible y que al mismo tiempo mantenga la robustez del sistema de control.

Por las razones expuestas anteriormente, en esta tesis se propone implementar un procedimiento general que permita reducir el número de vértices de la región convexa obtenida a partir de la respuesta de un sistema no lineal perturbado. El procedimiento aplicado se representa esquemáticamente en la Fig.(5.6 (b)) y a continuación se detalla:

Procedimiento para construir una región de operación politópica alternativa

Paso 1. Considérese tres vértices, por ejemplo v_1 , v_2 y v_3 .

Paso 2. Compute los ángulos θ_1 y θ_2 , si la diferencia angular es menor que un valor predeterminado, v_2 es eliminado y vaya al Paso 3. De lo contrario, v_2 no es eliminado y se salte al Paso 4.

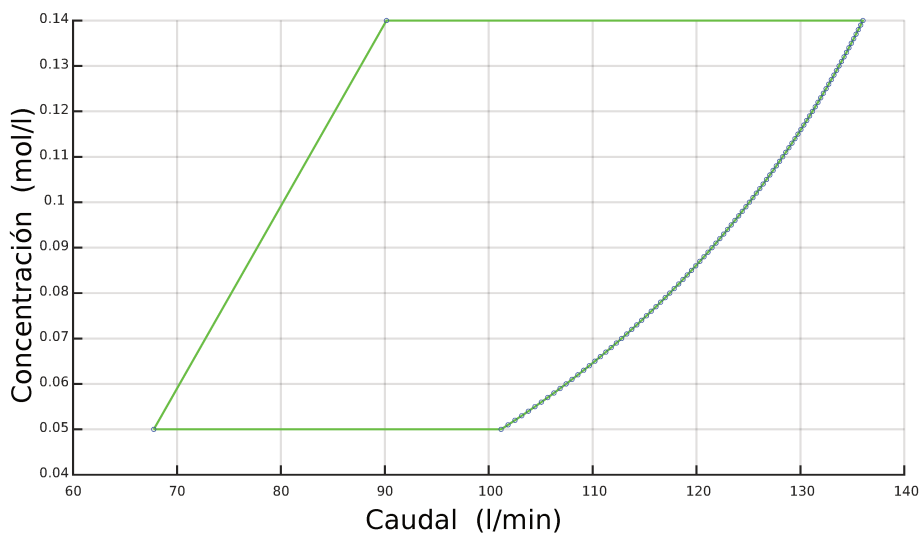
Téngase en cuenta que:

- (a) Cuando varios vértices consecutivos son eliminados, la diferencia angular se incrementa respecto al ángulo θ_1 original, pero mientras el valor prefijado de la diferencia angular no es excedido, los vértices consecutivos continuarán siendo eliminados. Cuando este límite angular es superado, el último vértice no es eliminado, luego, considerando a éste y los dos vértices siguientes, se vuelve al Paso 2.
- (b) El límite impuesto al valor de esta diferencia angular depende de algún criterio impuesto por el diseñador.

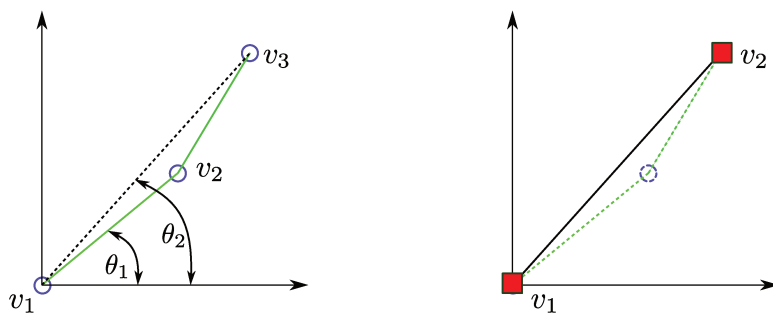
Paso 3. Si v_2 es eliminado, redefina a v_3 como v_2 y vaya al próximo paso.

Paso 4. Teniendo en cuenta los dos últimos vértices no borrados como vértices iniciales, se reinicia el procedimiento con el siguiente vértice.

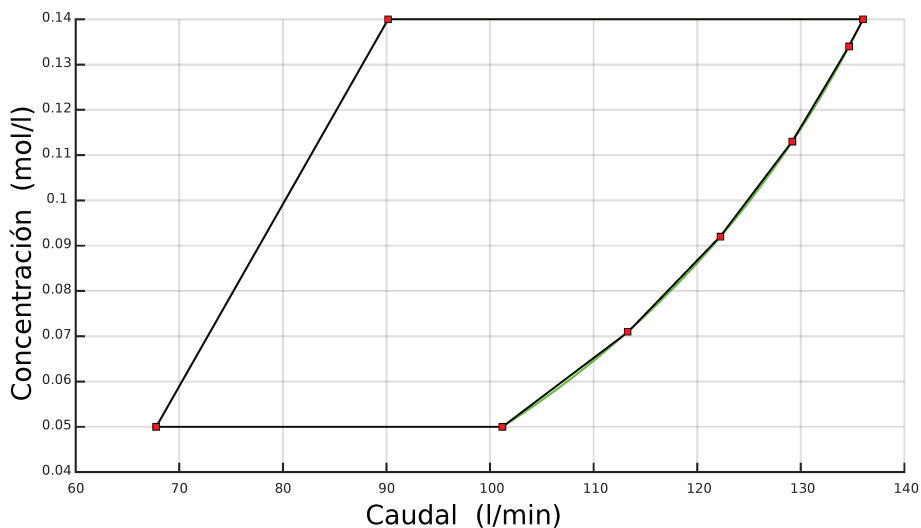
El resultado final obtenido, al aplicar este procedimiento a todos los vértices de la región de operación politópica asociada con el reactor, se muestra en la Fig.(5.6 (c)). La región reducida, la cual es una aproximación de la región de operación original, tiene solo ocho puntos de operación vértices sin que se observe una diferencia significativa entre ambas.



(a) Politopo de incertidumbres original (94 vértices)



(b) Reducción de vértices



(c) Politopo de incertidumbres reducido (8 vértices)

Figura 5.6: Politopo de incertidumbres.

Finalmente, en la Fig.(5.7) se muestran los puntos en donde las ecuaciones diferenciales deben ser linealizadas para obtener los ocho modelos LTI vértices asociados con los ocho puntos de operación encontrados. En la misma figura tam-

bién se puede apreciar el rango de temperatura en el que operará la planta, esto es, $T \in [430,2 ; 454,5]$ K.

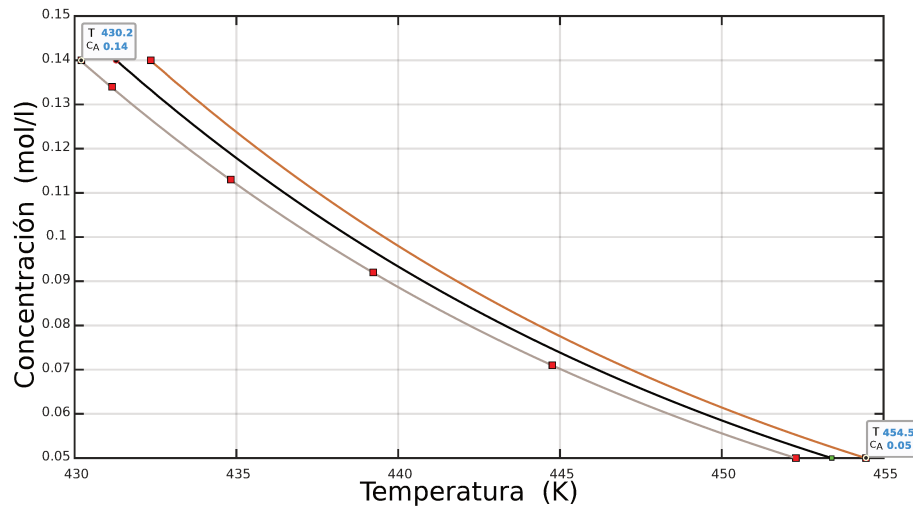


Figura 5.7: Puntos de linealización del sistema no lineal

Del análisis previo se concluye que para que el reactor opere en el siguiente rango de concentración:

$$1,4 \text{ mol l}^{-1} \leq C_A \leq 0,05 \text{ mol l}^{-1},$$

es necesario tener en su interior el siguiente rango de temperatura:

$$430,2 \text{ K} \leq T \leq 454,5 \text{ K},$$

y los extremos de este rango de temperatura son logrados con los siguientes valores de caudal del líquido refrigerante:

$$q_c = 136 \text{ l min}^{-1}, \quad q_c = 67,77 \text{ l min}^{-1}. \quad (5.5)$$

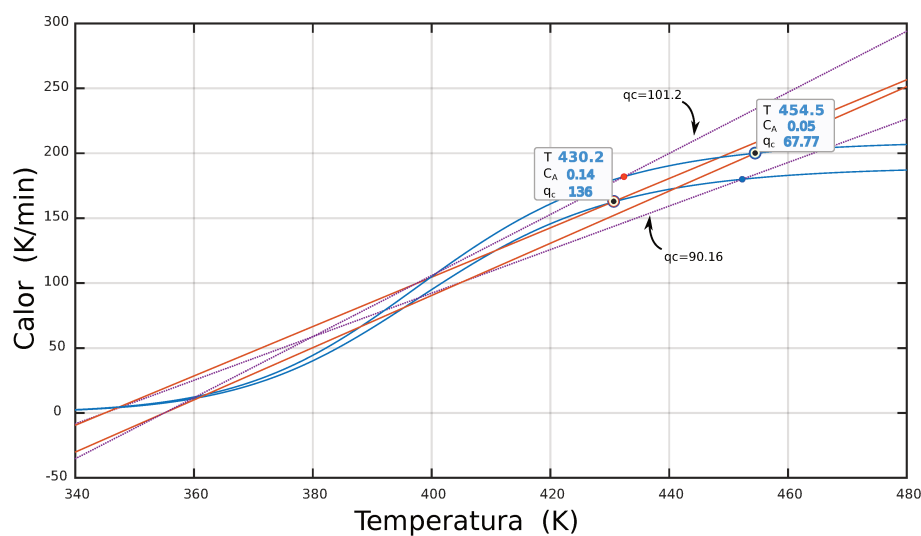


Figura 5.8: Curvas de reacción y rectas de disipación

En la Fig.(5.8) se muestran los puntos de equilibrio que delimitan el intervalo de operación en donde se desea que el reactor opere, como así también el caudal necesario para poder controlarlo dentro de dicho rango. Nótese la diferencia con la Fig.(5.1 (a)) en donde solamente se tuvo en cuenta el sistema no lineal nominal.

5.4.1. Modelo politópico para el CSTR en tiempo continuo

En esta sección, de acuerdo con los resultados de la sección anterior, se determinarán los ocho modelos LTI que conformarán la cáscara convexa del politopo que modela al sistema incierto dentro de la región de operación.

Linealizando las ecuaciones diferenciales Ec.(5.1) y la Ec.(5.2) en los puntos marcados en la Fig.(5.7), se obtuvieron los ocho modelos LTI vértices.

La tabla (5.2) muestra las matrices A_j y B_j , y la función de transferencia $H_j(s)$ de los sistemas LTI.

Como se vio en la sección (4.4.1), las ecuaciones (5.6) y (5.7) determinan su modelo LPV robusto.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\eta(t))x(t) + B(\eta(t))u(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde $x \in \mathfrak{R}^2$ es el vector de estados ($[C_A \ T]'$), $u \in \mathfrak{R}^1$ es la variable manipulada (q_c), $A \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ es la matriz de estados, $B \in \mathfrak{R}^{2 \times 1}$ es la matriz de entrada, $C \in \mathfrak{R}^{1 \times 2}$ es la matriz de salida, $D = 0$ y η es un vector de parámetros que tiene en cuenta la no linealidad de las Ecs.(5.1) y (5.2), y la variación de sus parámetros (C_{Ae} , T_{Ae} , y T_{ce}) [45].

Utilizando la combinación convexa de los modelos LTI, se tiene el modelo del reactor dentro de la región de operación

$$\begin{aligned} A(\eta(t)) &= \sum_{j=1}^8 \alpha_j(t) A_j, \\ B(\eta(t)) &= \sum_{j=1}^8 \alpha_j(t) B_j, \\ \sum_{j=1}^8 \alpha_j(t) &= 1, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

donde α_j es el vector de pertenencia que relaciona el modelo LPV con los modelos vértices LTI.

$Mod.LTI_j$	A_j	B_j	$H_j(s) = \frac{C_A(s)}{q_c(s)}$	polos
1	$\begin{pmatrix} -0,0190 & 0,0000 \\ 3,6000 & 0,0071 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1,0725 \end{pmatrix}$	$\frac{0,04719}{s^2 + 11,88s + 23,08}$	-9,4321 -2,4466
2	$\begin{pmatrix} -0,0190 & 0,0000 \\ 3,6000 & 0,0068 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1,0645 \end{pmatrix}$	$\frac{0,0468}{s^2 + 12,21s + 29,41}$	-8,9122 -3,2997
3	$\begin{pmatrix} -0,0148 & 0,0000 \\ 2,7577 & 0,0077 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,9054 \end{pmatrix}$	$\frac{0,04438}{s^2 + 7,116s + 21,7}$	$-3,5578 + 3,0075i$ $-3,5578 - 3,0075i$
4	$\begin{pmatrix} -0,0114 & 0,0000 \\ 2,0826 & 0,0076 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,8447 \end{pmatrix}$	$\frac{0,04154}{s^2 + 3,796s + 15,48}$	$-1,8980 + 3,4469i$ $-1,8980 - 3,4469i$
5	$\begin{pmatrix} -0,0093 & 0,0000 \\ 1,6584 & 0,0075 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,7964 \end{pmatrix}$	$\frac{0,03908}{s^2 + 1,764s + 11,43}$	$-0,8819 + 3,2635i$ $-0,8819 - 3,2635i$
6	$\begin{pmatrix} -0,0078 & 0,0000 \\ 1,3672 & 0,0074 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,7563 \end{pmatrix}$	$\frac{0,0369}{s^2 + 0,4181s + 8,573}$	$-0,2090 + 2,9204i$ $-0,2090 - 2,9204i$
7	$\begin{pmatrix} -0,0075 & 0,0000 \\ 1,3000 & 0,0078 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,7709 \end{pmatrix}$	$\frac{0,03752}{s^2 - 0,3342s + 4,524}$	$0,1671 + 2,1203i$ $0,1671 - 2,1203i$
8	$\begin{pmatrix} -0,0075 & 0,0000 \\ 1,3000 & 0,0074 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,7461 \end{pmatrix}$	$\frac{0,0363}{s^2 + 0,1168s + 7,906}$	$-0,0584 + 2,8112i$ $-0,0584 - 2,8112i$

Nota: Multiplicar las matrices A_j por 10^3 . $C = (1 \ 0)$ y $D = 0$ para todos los modelos.

Tabla 5.2: Modelos LTI vértices del politopo

En la Fig.(5.9) se representan los polos de los 8 modelos LTI. En la misma se observa que existe un modelo LTI entrada-salida inestable (indicado en color rojo), lo que implica que el punto de equilibrio es inestable en el sentido de Lyapunov. Además, se observan dos modelos subamortiguados, asintóticamente estables pero muy cerca de la estabilidad crítica (indicado en color magenta).

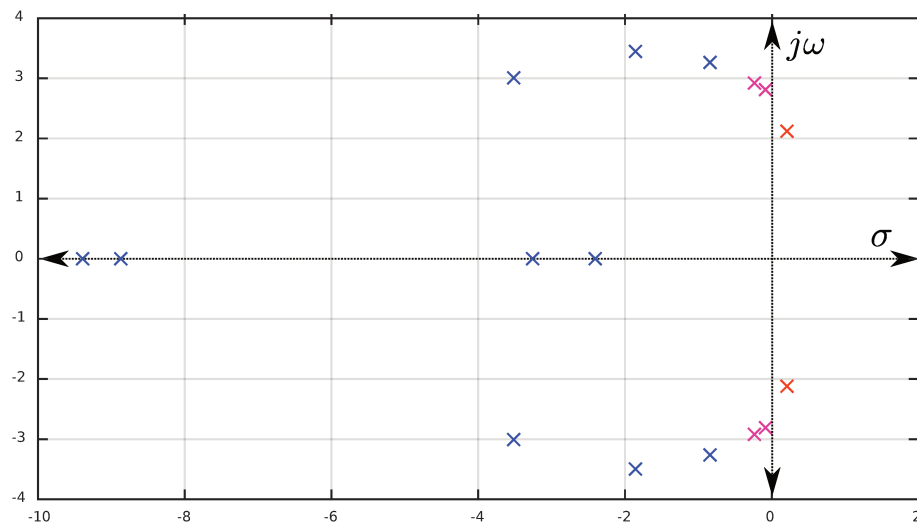


Figura 5.9: Ubicación de los polos de los modelos LTI vértices en el dominio s

5.5. Diseño del regulador en tiempo continuo

5.5.1. Regulador sin restricciones

Como se vio en la sección previa, existe un modelo LTI entrada-salida inestable y otros dos modelos muy próximo a la estabilidad crítica, por lo tanto, en primer lugar se calculará un controlador que solamente garantice la estabilidad del politopo. Por lo que a continuación, se realiza el diseño de un LQR robusto que hace uso del teorema (4.3), y que fue planteado en la Ec.(4.81), esto es:

$$\begin{aligned} \min_{\rho, Y, Q > 0} \quad & \rho, \quad \text{s. a.} : & (5.8) \\ & \begin{pmatrix} 1 & x'_0 \\ x_0 & Q \end{pmatrix} > 0, \\ & \begin{pmatrix} QA'_j + A_jQ + Y'B'_j + B_jY & QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ R_x^{1/2}Q & -I\rho & 0 \\ R_u^{1/2}Y & 0 & -I\rho \end{pmatrix} < 0, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n_m. \end{aligned}$$

$$\text{Siendo } Y = FQ, \quad R_x \geq 0, \quad R_u > 0, \quad \text{y } \rho > 0.$$

Los valores de las matrices A_j y B_j son tomados de la tabla (5.2), y para determinar la condición inicial, se considera el ensayo realizado en la sección (5.3), es decir, partiendo de $C_A = 0,08$ mol/l, se manipula el caudal q_c para forzar al sistema a que se estabilice en los extremos del intervalo de operación.

Al resolver el problema de optimización (5.8), las ganancias de realimentación estática para cada caso, resultaron ser:

$C_A : 0,08 \rightarrow 0,05 \text{ mol/l}$		
$x_0 = X_0 - x_{ss}$	F_{C_A}	F_T
$\Delta_{C_A} = 0,03$ $\Delta_T = -10,09$	1028,2	7,04

$C_A : 0,08 \rightarrow 0,14 \text{ mol/l}$		
$x_0 = X_0 - x_{ss}$	F_{C_A}	F_T
$\Delta_{C_A} = -0,06$ $\Delta_T = 12$	1145,4	7,87

Tabla 5.3: Ganancias del controlador

Como se observa en la tabla (5.3) el vector de ganancia estática, sensible a las condiciones iniciales, cambia según sea la evolución del sistema hacia uno u otro extremo del intervalo de operación.

Los polos de los ocho modelos LTI realimentados con los dos vectores de ganancias, se muestran en la Fig.(5.10). Estos modelos LTI realimentados, conforman la

cáscara convexa del politopo que modela al sistema incierto en lazo cerrado. En color verde se representan los polos para una concentración en estado estacionario $C_{A_{ss}} = 0,05$ mol/l, y en color azul para $C_{A_{ss}} = 0,14$ mol/l.

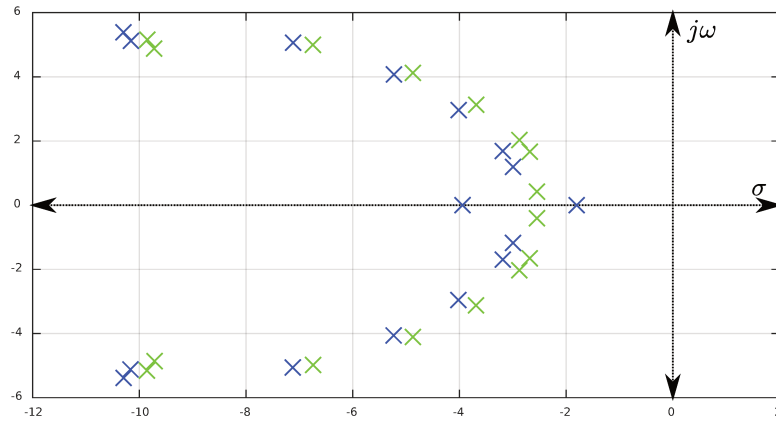


Figura 5.10: Ubicación de los polos de los modelos LTI vértices realimentados en el dominio s .

Simulación

Para analizar el comportamiento del sistema se procederá del mismo modo a lo efectuado en la sección (5.3), solo que ahora se hará en la planta nominal y en dos plantas perturbadas, primero en lazo abierto y luego en lazo cerrado.

Concretamente, se simularán tres plantas: la planta nominal (en color negro) y las plantas número 1 y número 8 (en colores marrón y gris respectivamente) de la Fig.(5.5), ya que son los sistemas perturbados más alejados del CSTR nominal.

Sin embargo, debió hacerse una corrección. Se ha corrido levemente hacia la izquierda al sistema número 8, de manera que quedara en el interior del politopo de vértices reducido, como se muestra en la Fig.(5.11). El corrimiento se hizo modificando solamente el parámetro $T_{ce_{máx}}$ llevándolo de 355 K a 354 K. Por este motivo, el caudal máximo requerido cambió de 136 l/min a 134,7 l/min.

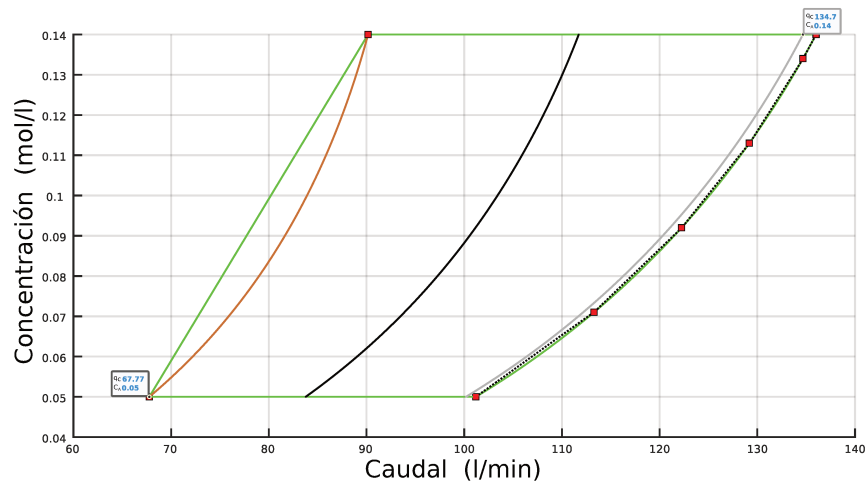
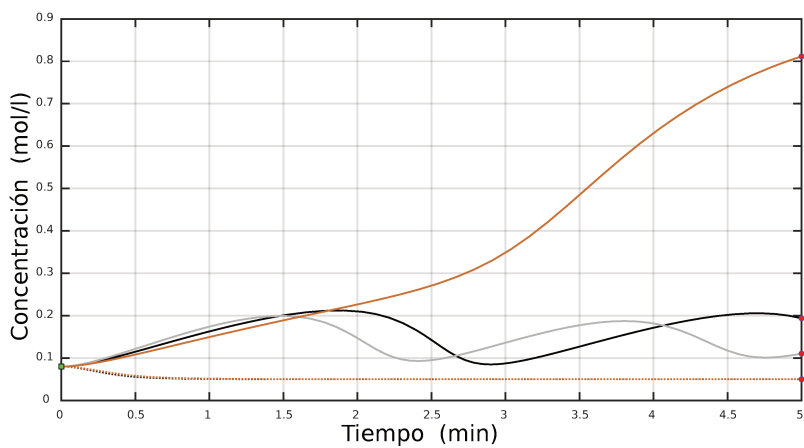
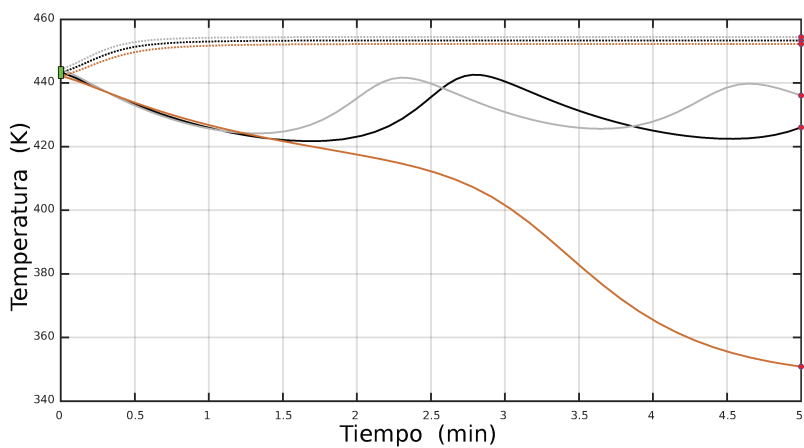


Figura 5.11: Tres sistemas elegidos para la simulación

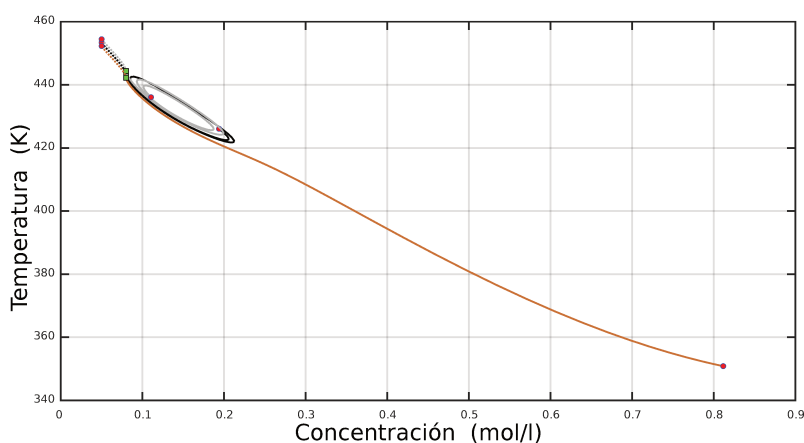
En la Fig.(5.12) se muestra el resultado de la simulación de estos tres sistemas en lazo abierto.



(a) Evolución de la concentración



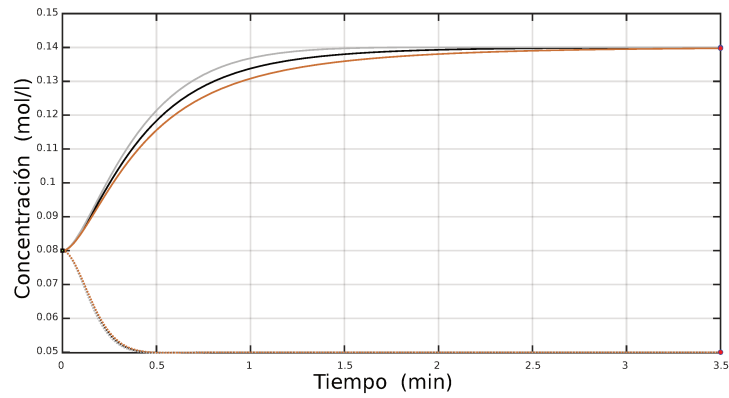
(b) Evolución de la temperatura



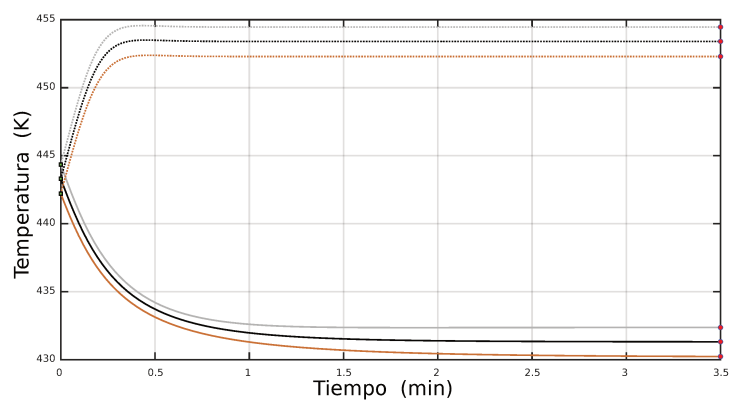
(c) Evolución de los estados

Figura 5.12: Evolución de los tres sistemas en lazo abierto

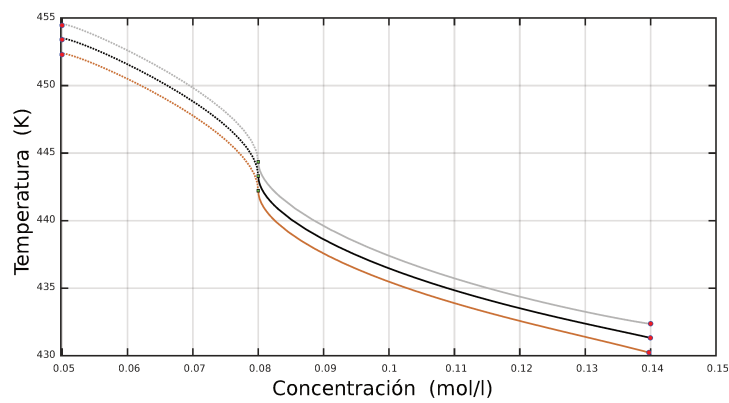
En la Fig.(5.13) se muestran las simulaciones realizadas sobre los tres sistemas en el lazo cerrado, empleando los reguladores calculados.



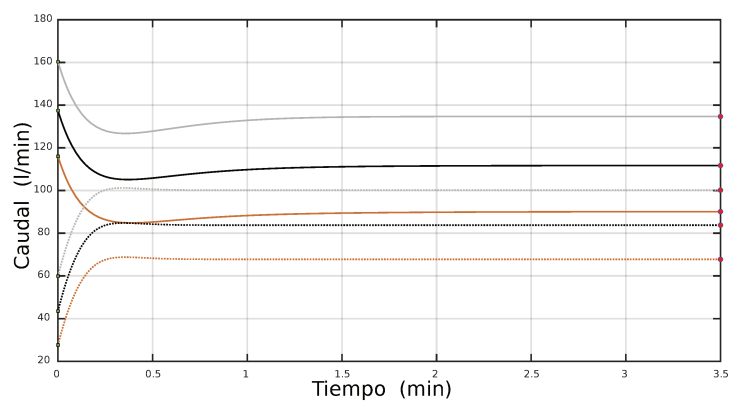
(a) Evolución de la concentración



(b) Evolución de la temperatura



(c) Evolución de los estados



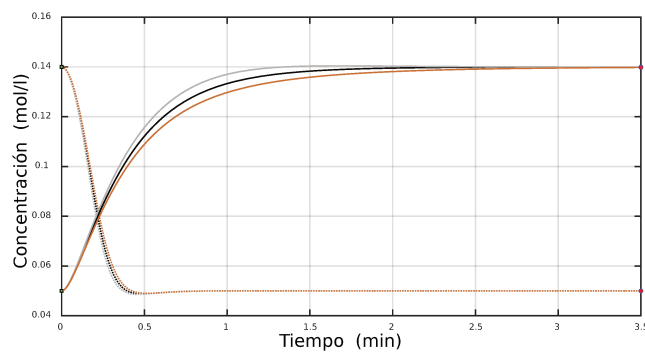
(d) Caudal del líquido refrigerante

Figura 5.13: Evolución de los tres sistemas realimentados

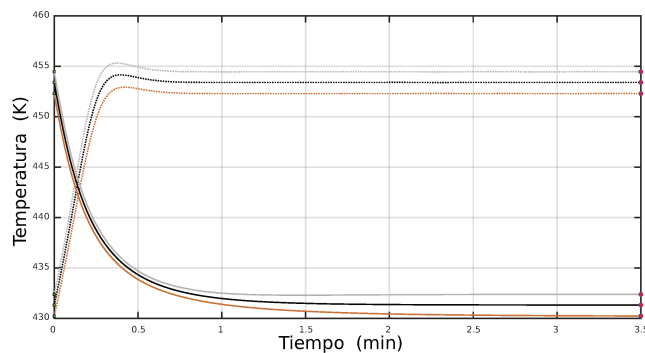
Determinación del rango de caudal de refrigeración requerido

A continuación, para ver los requerimientos de caudal refrigerante, se simulará una perturbación de estado que abarque todo el rango de operación ($C_A \in [0,05 ; 0,14]$ mol/l) en los dos sentidos. Es decir, para un caudal de equilibrio que se corresponda con una concentración $C_{A_{ss}} = 0,14$ mol/l, se parte de una condición inicial $C_A = 0,05$ mol/l, y para un caudal de equilibrio que se corresponda con una concentración $C_{A_{ss}} = 0,05$ mol/l, se parte de una condición inicial $C_A = 0,14$ mol/l. De esta forma, en lo que respecta a la concentración, $\Delta C_A(0) = \pm 0,09$ mol/l.

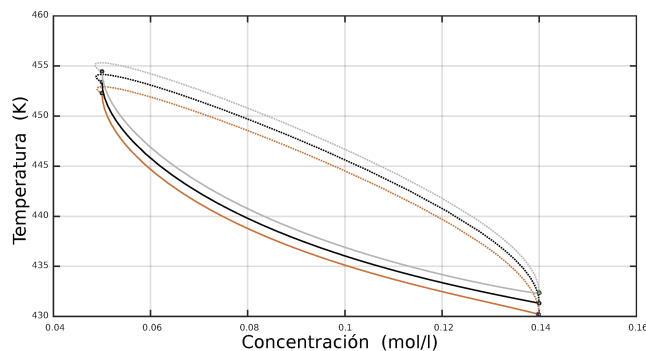
En las Figs.(5.14) y (5.15) se muestran los resultados de esta simulación.



(a) Evolución de la concentración



(b) Evolución de la temperatura

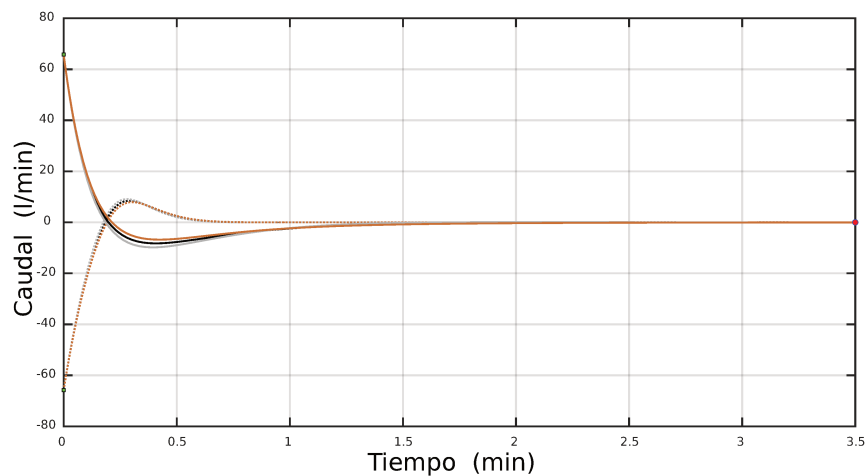


(c) Evolución de los estados

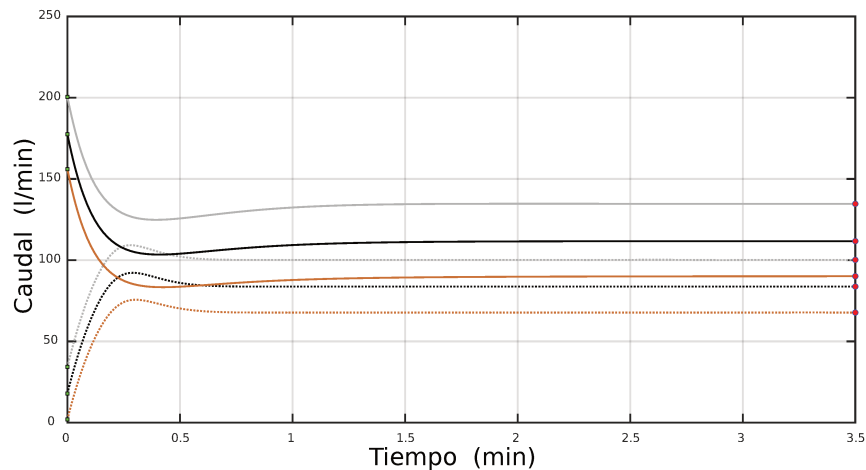
Figura 5.14: Evolución de los tres sistemas realimentados con una perturbación de estados (en los dos sentidos) que abarca todo el rango de operación

En la Fig.(5.15 (a)) se observa que al pasar de una condición inicial $C_A(0) = 0,05$ (0,14) mol/l a la concentración en estado estacionario $C_{A_{ss}} = 0,14$ (0,05) mol/l, en el instante inicial el caudal manipulado tiene una variación levemente superior (inferior) a ± 65 l/min.

Como consecuencia de esto, en la Fig.(5.15 (b)) se puede apreciar que en la planta número 1 (color marrón) al pasar de $C_A = 0,14 \rightarrow 0,05$ mol/l se requiera que $q_c(0) < 2$ l/min, y que en la planta número 8 (color gris) al pasar de $C_A = 0,05 \rightarrow 0,14$ mol/l se requiera que $q_c(0) > 200$ l/min. Estos dos valores de caudal del líquido refrigerante, determinan el rango de caudal requerido para que el sistema de control pueda regular al CSTR dentro del rango de operación preestablecido.



(a) Variación del caudal del líquido refrigerante



(b) Caudal del líquido refrigerante

Figura 5.15: Caudal requerido para regular al CSTR dentro del rango de operación

5.5.2. Regulador con restricción en la variable manipulada

Con la finalidad de acotar el rango de operación del caudal del líquido refrigerante, se calculará una nueva ganancia en la que se impondrá, como condición

adicional, una restricción sobre el valor máximo y mínimo del caudal manipulado. Se fijará como cota superior $q_{c_{máx}} = 160$ l/min y como cota inferior $q_{c_{mín}} = 5$ l/min.

El problema con restricción en la amplitud del módulo de la variable manipulada de la sección (4.5), se reescribe a continuación:

$$\begin{aligned} \min_{\rho, Y, Q > 0} \quad & \rho, \quad \text{s.a.:} \\ & \begin{pmatrix} 1 & x'_0 \\ x_0 & Q \end{pmatrix} > 0, \\ & \begin{pmatrix} QA'_j + A_j Q + Y' B'_j + B_j Y & QR_x^{1/2} & Y' R_u^{1/2} \\ R_x^{1/2} Q & -I\rho & 0 \\ R_u^{1/2} Y & 0 & -I\rho \end{pmatrix} < 0, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n_m. \\ & \begin{pmatrix} u_{máx}^2 I & Y \\ Y' & Q \end{pmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Siendo: $Y = FQ$, $R_x \geq 0$, $R_u > 0$, y $\rho > 0$.

Los valores de las matrices A_j y B_j se tomaron de la tabla (5.2), y se fijó el caudal máximo y el caudal mínimo, para cada caso, del siguiente modo:

$$u_{máx} = \min \{ (160 - q_{c_{ss}}) ; (q_{c_{ss}} - 5) \}.$$

El vector ganancia de realimentación estática obtenido al resolver el problema de optimización (5.9), resultó ser:

$C_A: 0,05 \rightarrow 0,14 \text{ mol/l}$

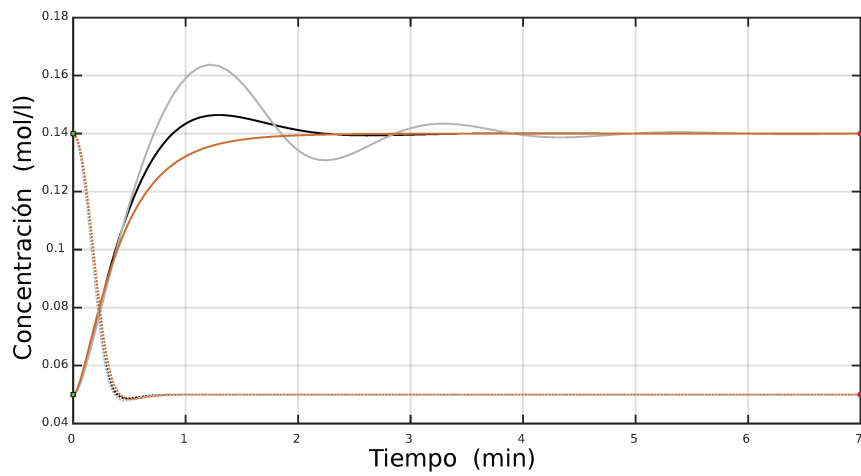
$Sist_j$	$x_0 = X_0 - x_{ss}$	$\Delta u_{máx}$	F_{C_A}	F_T
0	$\begin{pmatrix} -0,09 \\ 22,08 \end{pmatrix}$	48,28	616,83	4,50
1	$\begin{pmatrix} -0,09 \\ 22,08 \end{pmatrix}$	25,33	309,51	2,37
8	$\begin{pmatrix} -0,09 \\ 22,08 \end{pmatrix}$	69,84	936,64	6,50

$C_A: 0,14 \rightarrow 0,05 \text{ mol/l}$

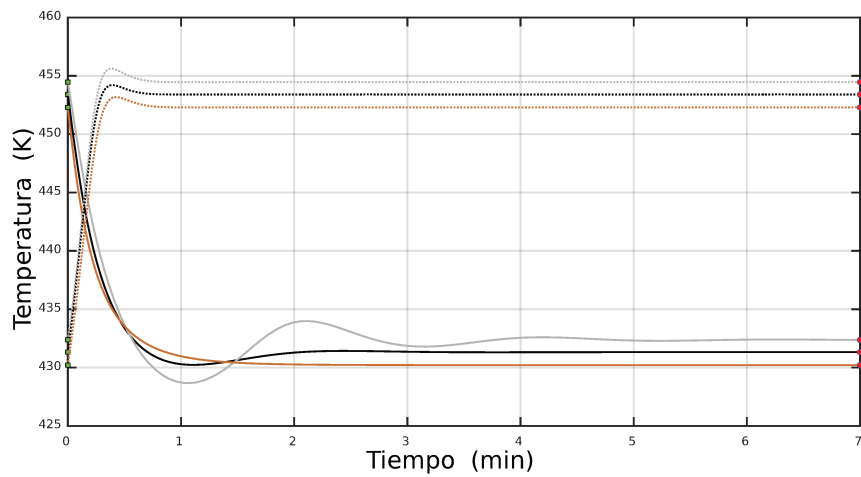
$Sist_j$	$x_0 = X_0 - x_{ss}$	$\Delta u_{máx}$	F_{C_A}	F_T
0	$\begin{pmatrix} 0,09 \\ -22,08 \end{pmatrix}$	76,23	1031,90	7,10
1	$\begin{pmatrix} 0,09 \\ -22,08 \end{pmatrix}$	59,82	787,89	5,60
8	$\begin{pmatrix} 0,09 \\ -22,08 \end{pmatrix}$	62,77	831,62	5,85

Tabla 5.4: Ganancias del controlador

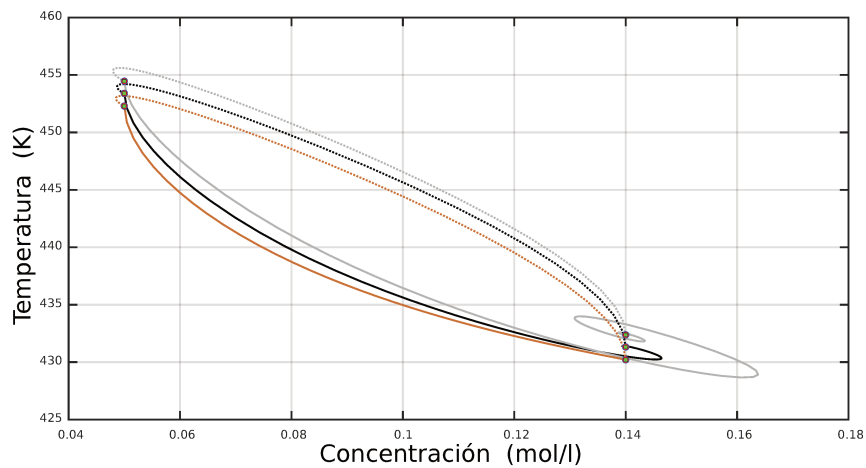
El resultado de la simulación está representado en las Figs.(5.16) y (5.17).



(a) Evolución de la concentración



(b) Evolución de la temperatura

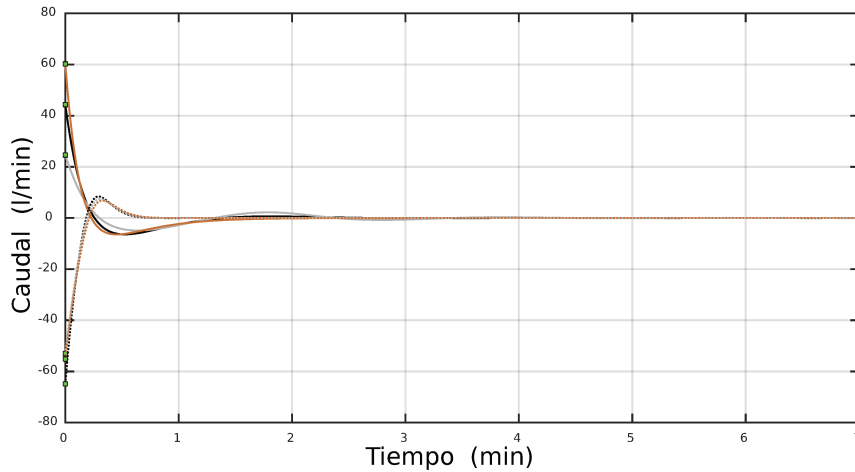


(c) Evolución de los estados

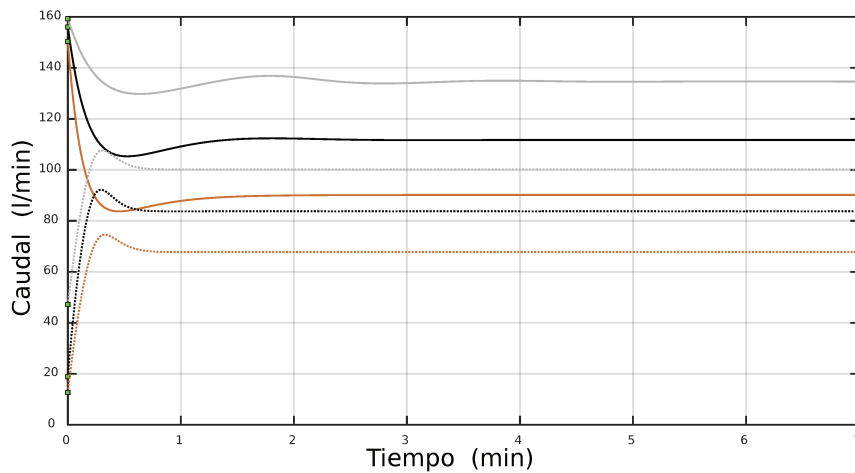
Figura 5.16: Evolución de los tres sistemas perturbados. Regulador diseñado con restricción en la amplitud del caudal refrigerante

En la Fig.(5.17(b)) puede observarse que se satisface el requerimiento impuesto

al caudal manipulado. Esta mejora se obtuvo a expensas de aumentar el tiempo de establecimiento, como se aprecia especialmente en la evolución de la planta número 8 (color gris) al pasar de $C_A = 0,05 \text{ mol/l}$ a $C_A = 0,14 \text{ mol/l}$.



(a) Variación del caudal del líquido refrigerante



(b) Caudal del líquido refrigerante

Figura 5.17: Caudal del líquido refrigerante acotado a las especificaciones de diseño

5.5.3. Regulador con vector de ganancias variables

Como se dijo en la sección anterior, la restricción impuesta al cálculo del vector ganancia del regulador, para evitar que la variable manipulada se sature, aumentó el tiempo de establecimiento del sistema. Teniendo en cuenta que la restricción actúa principalmente en el instante inicial, ya que allí el error de estado es máximo y por ende es máximo el incremento del caudal manipulado, es lógico pensar que si el vector ganancia se recalcula a medida que el sistema evoluciona, esta restricción va perdiendo su efecto, y por lo tanto, el regulador se vuelve menos conservador aumentando la velocidad de respuesta.

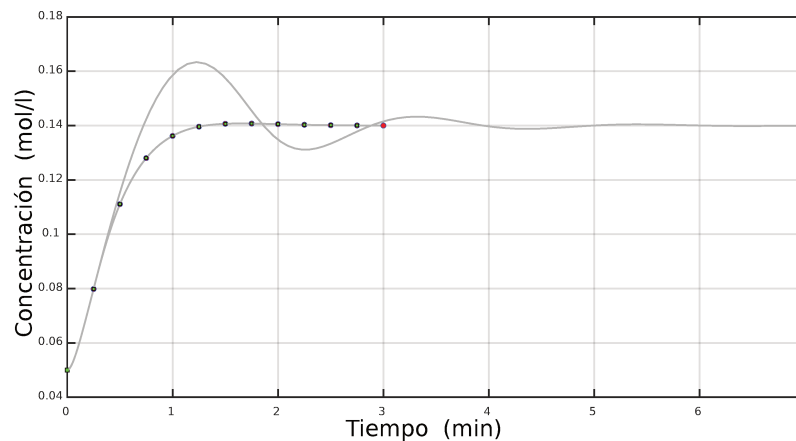
A continuación se realiza el diseño de un LQR robusto, que fue planteado en la Ec.(4.109). Esto es, en cada instante de tiempo $t = \mu T$ con $\mu = 0, 1, 2, \dots, \infty$,

se recalcula y aplica el vector de ganancias, resolviendo el siguiente problema de optimización convexo:

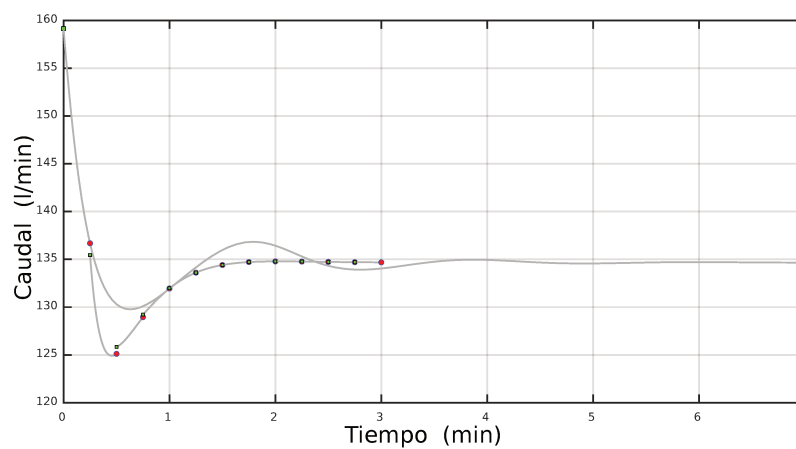
$$\begin{aligned} \min_{\rho, Y, Q > 0} \quad & \rho, \quad \text{s. a. :} \\ & \begin{pmatrix} 1 & x'_{\mu T} \\ x_{\mu T} & Q \end{pmatrix} > 0, \\ & \begin{pmatrix} QA'_j + A_jQ + Y'B'_j + B_jY & QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ R_x^{1/2}Q & -I\rho & 0 \\ R_u^{1/2}Y & 0 & -I\rho \end{pmatrix} < 0, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n_m. \\ & \begin{pmatrix} 1 & Y \\ Y' & Q \end{pmatrix} > 0. \end{aligned}$$

Siendo: $Y = FQ$, $R_x \geq 0$, $R_u > 0$, y $\rho > 0$.

En las figuras (5.18) y (5.19) se grafica la simulación de la planta más lenta, planta número 8, al pasar de $C_A = 0,05 \text{ mol/l}$ a $C_A = 0,14 \text{ mol/l}$.



(a) Evolución de la concentración

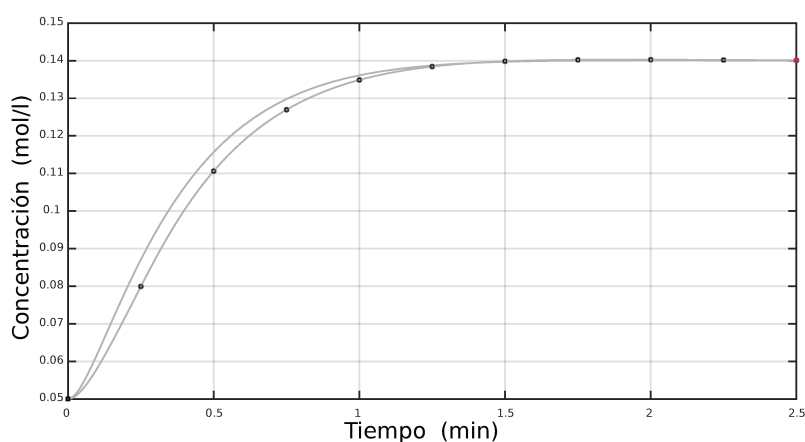


(b) Caudal manipulado

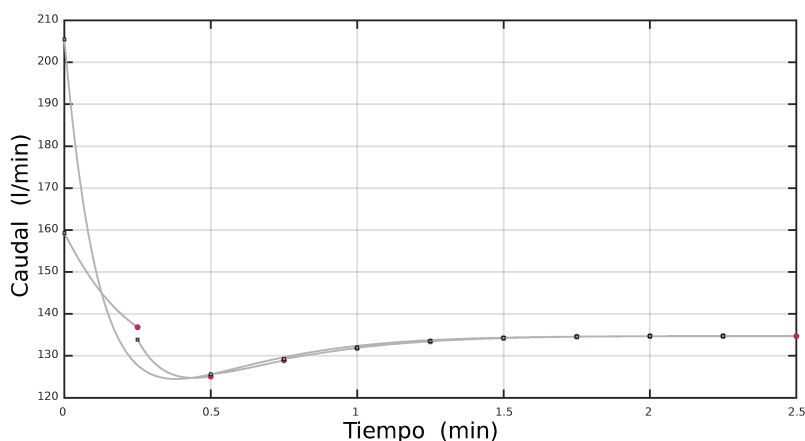
Figura 5.18: Comparación de la respuesta del sistema con restricción para los dos tipos de ganancias.

En la Fig.(5.18) se compara la dinámica del sistema cuando es realimentado con un vector de ganancias estático (línea continua) y con un vector de ganancias variable (línea a tramos), cuyo período de recálculo es $\mathcal{T} = 0,25 \text{ min}$, ambos vectores fueron calculados con restricción en la manipulada. Se observa que en los dos casos se respeta el caudal máximo disponible, sin embargo, el tiempo de establecimiento del sistema realimentado con vector ganancias variable es mucho más rápido.

En la Fig.(5.19) se vuelve a comparar la dinámica del sistema realimentado, pero en este caso el vector de ganancias estático fue calculado sin restricción, mientras que el de ganancias variable fue calculado con restricción en la variable manipulada. Se observa que la velocidad de respuesta es similar en ambos casos, sin embargo la diferencia de caudal requerido es notable.



(a) Evolución de la concentración



(b) Caudal manipulado

Figura 5.19: Comparación de la respuesta del sistema realimentado, con vector de ganancias estático sin restricción y ganancia variable con restricción. La línea continua muestra la simulación con ganancia constante, y la línea a tramos muestra la simulación con ganancia variable.

Por último, para concluir este ensayo donde se analizan los distintos reguladores en tiempo continuo, se continúa la simulación alterando al sistema nominal con una perturbación inicial de estados que abarca todo el rango de operación, y una

perturbación de $\pm 5\%$ en su concentración de entrada C_{Ae} . Como antes, para el parámetro de entrada, se eligió una perturbación suave en los dos sentidos. La misma se muestra en la Fig.(5.20).

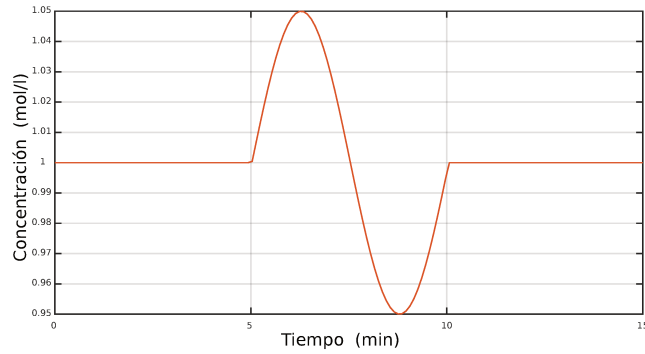
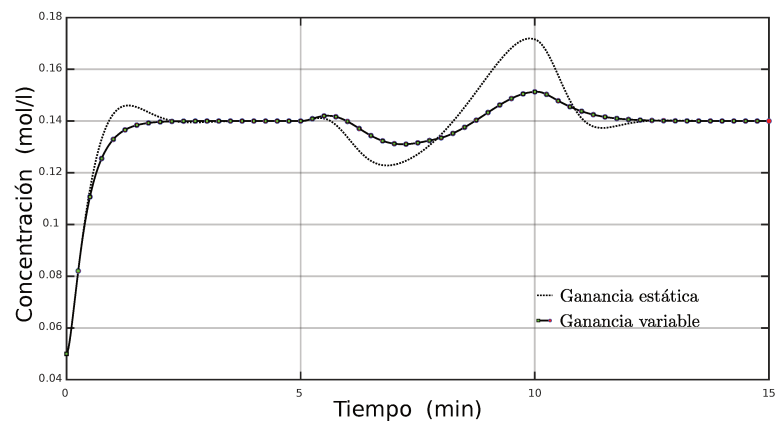
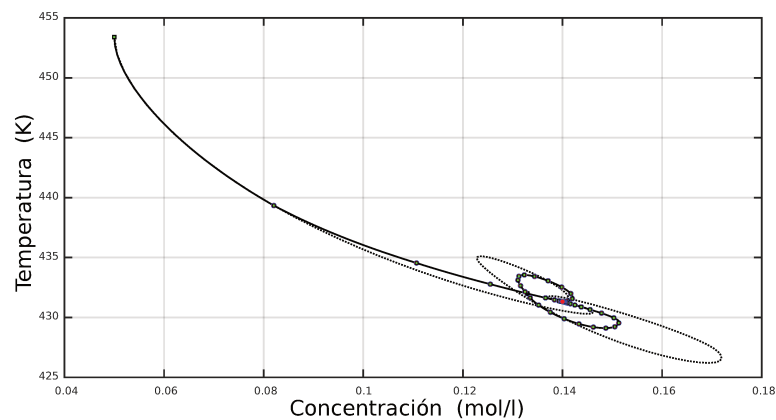


Figura 5.20: Perturbación en concentración de entrada C_{Ae}

En las Fig.(5.21) se muestra la respuesta del sistema y en las Fig.(5.22), la variable manipulada y la ganancia en la concentración para esta simulación.

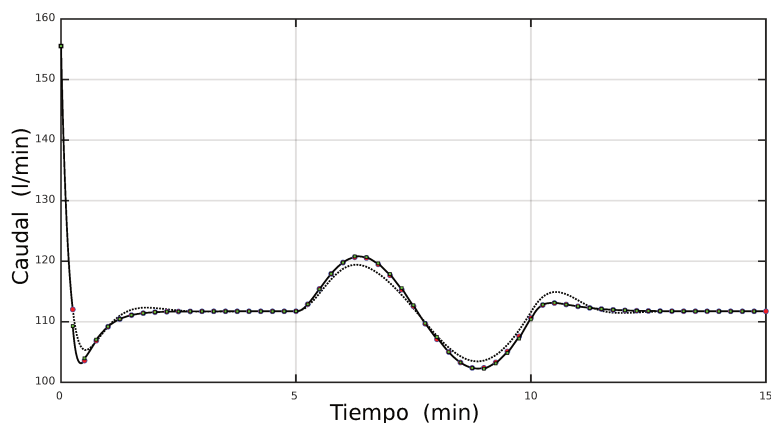


(a) Evolución de la concentración

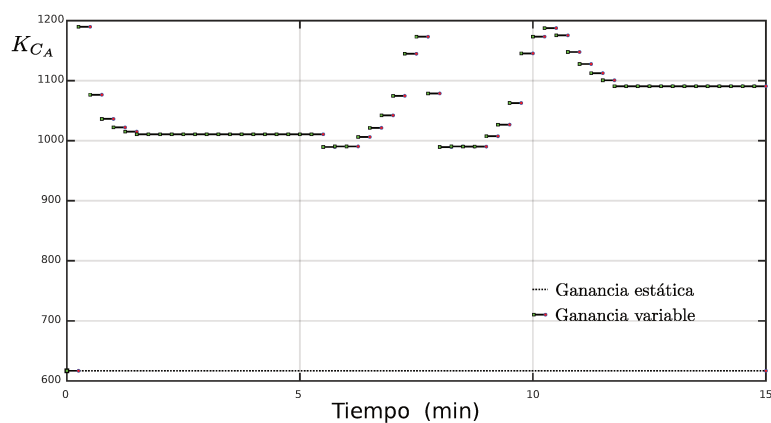


(b) Evolución de los estados

Figura 5.21: Comparación de la respuesta del sistema nominal, utilizando vector de ganancias estático y variable, ambos con restricción en la variable manipulada.



(a) Caudal manipulado



(b) Ganancia para la concentración

Figura 5.22: Comparación de la respuesta del sistema nominal, utilizando vector de ganancias estático y variable, ambos con restricción en la variable manipulada.

En la Fig.(5.22) se puede observar que esta restricción tiene lugar solamente en la corrida inicial donde la perturbación de estado es máxima, allí las dos ganancias coinciden ($K_{CA} \simeq 615$). Por otro lado, la restricción no tiene efecto cuando ingresa la perturbación en C_{Ae} , y por lo tanto, no es necesario tenerla en cuenta como bien lo hace el regulador de ganancia variable y no así el de ganancia estática. Esto último queda evidenciado en la figura (5.21) al observar la lentitud que tiene la respuesta en recuperarse cuando se utiliza el regulador estático.

Ubicación de los polos de los modelos LTI en lazo cerrado

La Fig.(5.23) muestra la ubicación de los polos de los ocho modelos LTI vértices realimentados con un vector de ganancias estático, calculado con restricción y sin restricción en la variable manipulada, círculos en color rojo y cuadrados en color verde, respectivamente.

También se muestra con el símbolo asterisco (*) los polos de los modelos LTI realimentado con un vector de ganancias variable. En la misma se observa cómo estos se desplazan desde una ubicación inicial, donde el diseño del regulador tiene

en cuenta la restricción, hacia una ubicación final en donde esta restricción es sensiblemente ignorada.

El desplazamiento mencionado está representado tomando cuatro momentos de la simulación: al principio marcado en la gráfica con el número (1), en un instante intermedio marcado con el números (2), y hacia el final de la simulación marcados en la gráfica con los números (3) y (4).

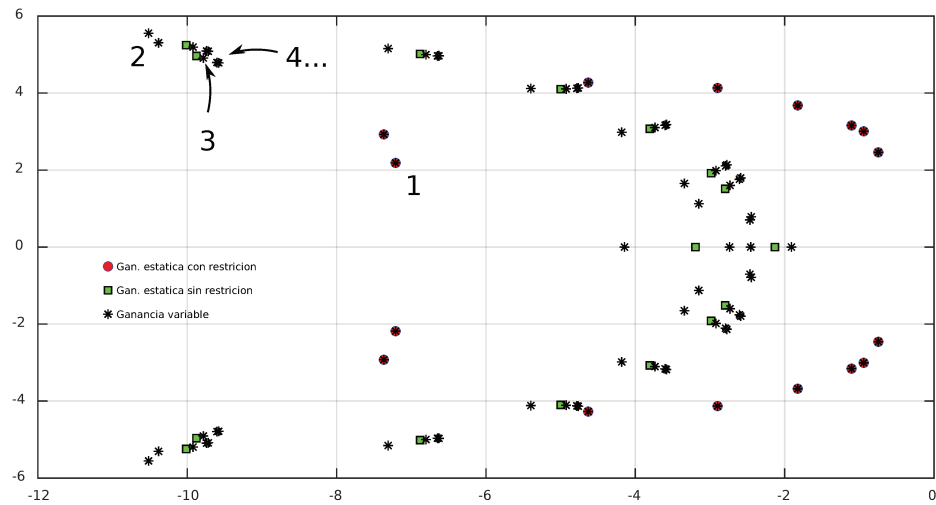


Figura 5.23: Ubicación de los polos de los modelos LTI vértices realimentados con vector de ganancias variable

5.6. Diseño del regulador en tiempo discreto

5.6.1. Discretización de los modelos LTI vértices

En esta sección se realizará un LQR en tiempo discreto, mediante el procedimiento de muestreo y retención, para ser aplicado al CSTR bajo análisis.

Para poder discretizar el modelo politópico acotando el error por distorsión (aliasing), es necesario determinar el tiempo máximo de muestreo. Con este fin, se trazó el diagrama de la respuesta en frecuencia de los siete modelos entrada-salida LTI estables y se estableció como máxima frecuencia angular, $\omega_{m\acute{a}x} = 100$ rad/min. En esta frecuencia el módulo de la respuesta del modelo más rápido, y por ende el de todos los demás, está atenuado en 50 dB respecto de su valor en continua⁵, como se observa en las Fig.(5.24).

⁵Esto equivale a que $H(\omega_{m\acute{a}x}) = 0,003 H(0)$.

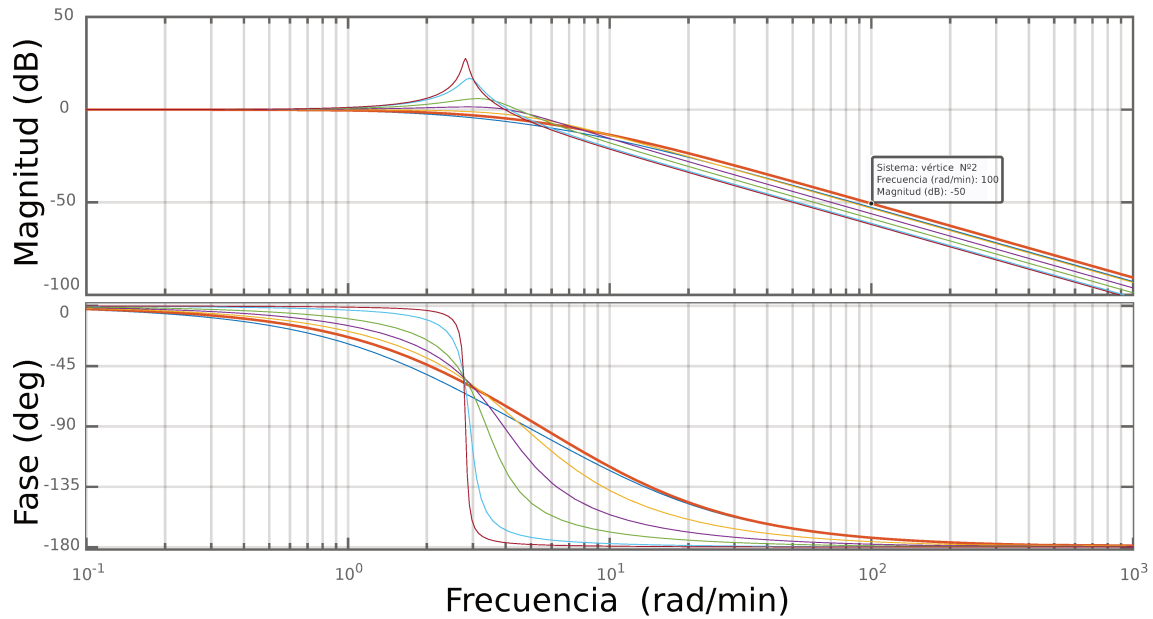


Figura 5.24: Diagrama de Bode de los 7 modelos entrada-salida LTI estables

Utilizando el teorema de Nyquist [49], el intervalo entre muestras, resulta

$$T_M \leq \frac{\pi}{\omega_{m\acute{a}x}} = 0,031415927 \text{ min}, \quad (5.10)$$

por lo que se estableció $T_M = 0,03$ min. En la Fig.(5.25) se muestra el proceso de discretización con retenedor de orden cero.

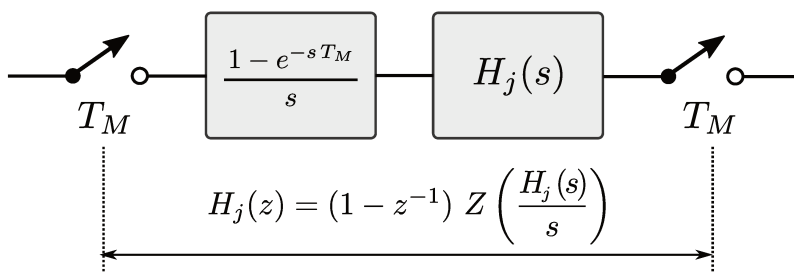


Figura 5.25: Proceso de discretización

En la tabla (5.5) están representados las funciones de transferencia $H(z)$ de los ocho modelos LTI, sus polos, y sus matrices de estado A_j y de entrada B_j , que serán utilizadas para el diseño del regulador.

En la Fig.(5.26) se grafica la ubicación de los polos de estos ocho modelos y un sector del círculo de radio unitario. En la misma se observa, como en el caso continuo, que hay un modelo LTI entrada-salida inestable (indicado con color rojo) y dos modelos muy cercanos a la estabilidad crítica (indicado con color magenta).

Mod.LTI _j	A _j	B _j	H _j (z) = $\frac{C_A(z)}{q_e(z)}$	polos
1	$\begin{pmatrix} 0,5129 & -0,0011 \\ 90,5390 & 1,1699 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,0351 \end{pmatrix}$	$\frac{1,889z + 1,677}{z^2 - 1,683z + 0,7002}$	0,7535 0,9292
2	$\begin{pmatrix} 0,5131 & -0,0011 \\ 90,0292 & 1,1580 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,0347 \end{pmatrix}$	$\frac{1,868z + 1,653}{z^2 - 1,671z + 0,6933}$	0,7654 0,9057
3	$\begin{pmatrix} 0,5927 & -0,0013 \\ 74,2560 & 1,1975 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,0300 \end{pmatrix}$	$\frac{1,859z + 1,732}{z^2 - 1,79z + 0,8078}$	0,8951 + 0,0810i 0,8951 - 0,0810i
4	$\begin{pmatrix} 0,6704 & -0,0014 \\ 58,9150 & 1,2088 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,0281 \end{pmatrix}$	$\frac{1,798z + 1,731}{z^2 - 1,879z + 0,8924}$	0,9396 + 0,0975i 0,9396 - 0,0975i
5	$\begin{pmatrix} 0,7239 & -0,0014 \\ 48,3758 & 1,2145 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,0265 \end{pmatrix}$	$\frac{1,727z + 1,696}{z^2 - 1,938z + 0,9485}$	0,9692 + 0,0952i 0,9692 - 0,0952i
6	$\begin{pmatrix} 0,7629 & -0,0015 \\ 40,7064 & 1,2170 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,0252 \end{pmatrix}$	$\frac{1,652z + 1,646}{z^2 - 1,98z + 0,9875}$	0,9899 + 0,0870i 0,9899 - 0,0870i
7	$\begin{pmatrix} 0,7720 & -0,0015 \\ 39,1695 & 1,2340 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,0258 \end{pmatrix}$	$\frac{1,694z + 1,699}{z^2 - 2,006z + 1,01}$	1,0030 + 0,0639i 1,0030 - 0,0639i
8	$\begin{pmatrix} 0,7721 & -0,0015 \\ 38,8856 & 1,2173 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,0248 \end{pmatrix}$	$\frac{1,631z + 1,629}{z^2 - 1,989z + 0,9965}$	0,9947 + 0,0841i 0,9947 - 0,0841i

Nota: Multiplicar H_j(z) por 10⁻⁵. C = (1 0) y D = 0 para todos los modelos.

Tabla 5.5: Modelos LTI, vértices del politopo discreto

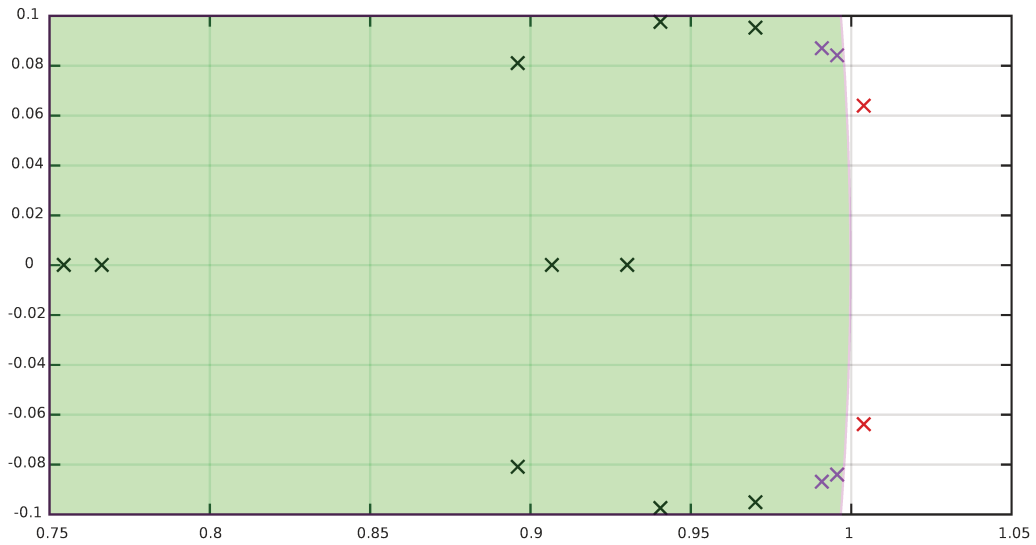


Figura 5.26: Ubicación de los polos de los modelos LTI vértices en el dominio z

5.6.2. Diseño de un regulador robusto con vector de ganancias variable en tiempo discreto

A continuación se realiza el diseño de un LQR robusto que fue planteado en la Ec.(4.110). Este diseño se aplica al CSTR nominal de las ecuaciones (5.1) y (5.2), para establecer el equilibrio cuando el sistema es alterado por una perturbación inicial de estados que abarca todo el rango de operación, y por una perturbación de $\pm 5\%$ en su concentración de entrada C_{Ae} .

Como antes, para el parámetro de entrada se eligió una perturbación suave en los dos sentidos, mostrada en la Fig.(5.27).

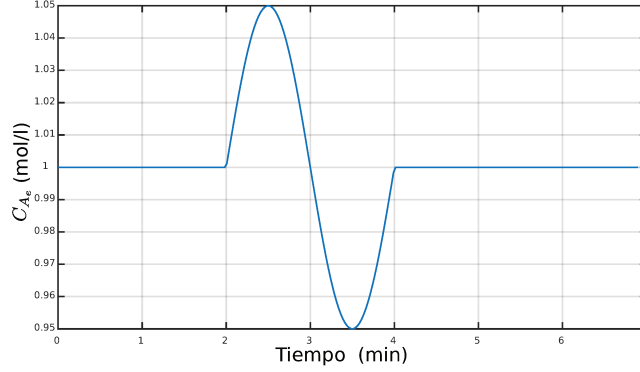


Figura 5.27: Concentración de entrada C_{Ae}

Nuevamente, como se hizo en tiempo continuo, se compara un regulador estático y otro con vector de ganancias variable. Ambos se calculan con restricción en la amplitud de la variable manipulada, cuyo valor se fija en: $q_{c\acute{m}ax} = 160$ l/min.

Para determinar las ganancias de realimentación, se resuelve el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\rho, Y, Q > 0} \rho, \quad \text{s. a} \quad (5.11)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_{\mu\mathcal{K}} \\ x_{\mu\mathcal{K}} & Q \end{pmatrix} > 0,$$

$$\begin{pmatrix} Q & QA'_j + Y'B'_j & QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ A_jQ + B_jY & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2}Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2}Y & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0,$$

$$\text{con } j = 1, 2, \dots, n_m.$$

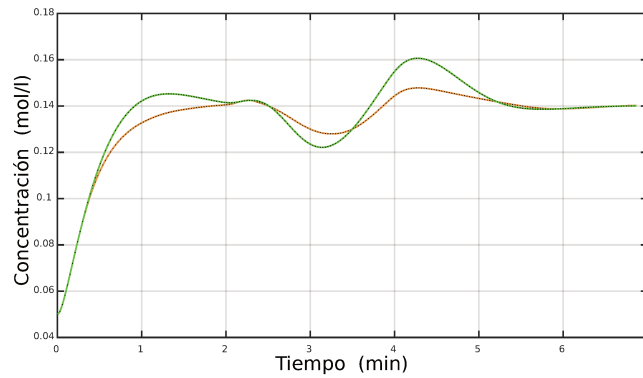
$$\begin{pmatrix} u_{max}^2 & Y \\ Y' & Q \end{pmatrix} > 0.$$

$$\text{Siendo: } Y = FQ, \quad R_x \geq 0, \quad R_u > 0, \quad \text{y } \rho > 0.$$

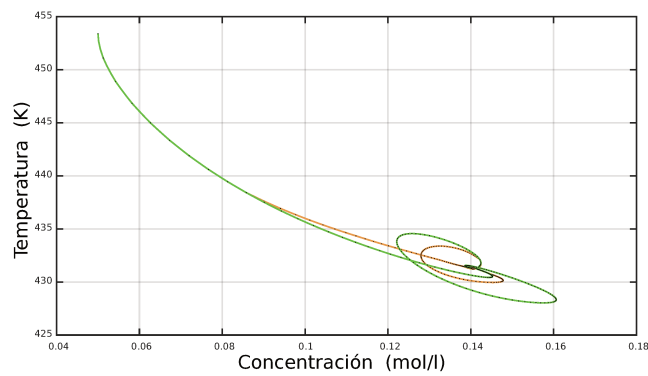
En el caso del regulador estático se resuelve este problema una vez, y en el caso del regulador de ganancias variables, se lo resuelve en cada instante de tiempo $k = \mu\mathcal{K}$, con $\mu = 0, 1, 2, \dots, \infty$.

Las matrices A_j y B_j , que conforman el modelo politópico discreto, son tomadas de la tabla (5.5), y se fijan los siguientes valores para las matrices de peso $R_x = I$ y $R_u = 1$.

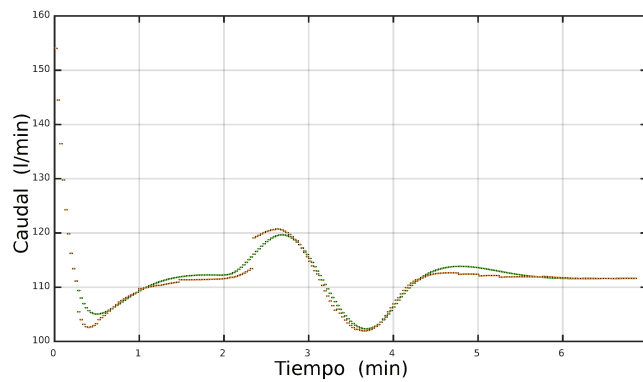
El resultado de la simulación se muestra en las Fig.(5.28).



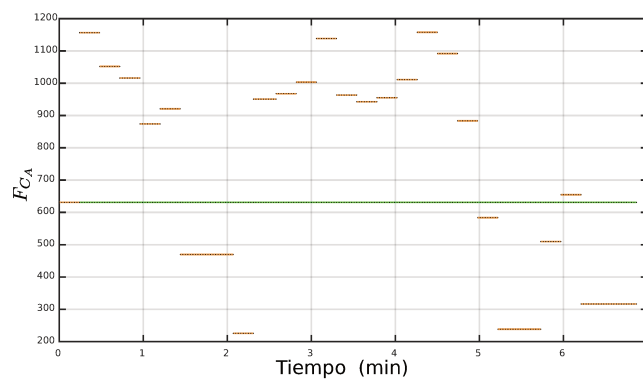
(a) Evolución de la concentración



(b) Evolución de los estados



(c) Caudal manipulado



(d) Ganancia para la concentración

Figura 5.28: Comparación de la respuesta del sistema nominal con perturbaciones en los estados y en la entrada C_{A_e} , utilizando vector de ganancias estático (gráficas en color verde) y variable (gráficas en color marrón).

Los resultados obtenidos al comparar estos dos reguladores, son comparables a los obtenidos en la sección (5.5.3) y visualizados en las Figs.(5.21) y (5.22).

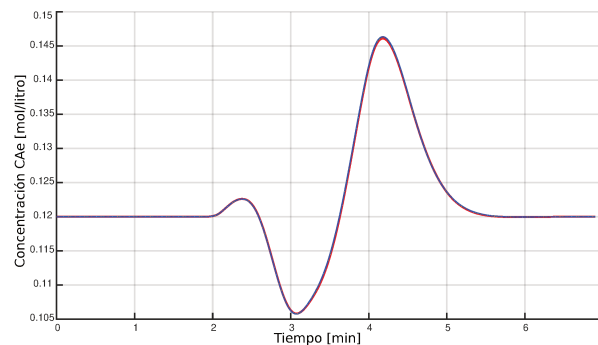
Para comparar el desempeño del sistema al utilizar ambos modelos, continuo y discreto⁶, el vector de ganancias variable se actualizó cada ocho instantes de muestreo, es decir, $\mathcal{K} = 8 T_M = 0,24 \text{ min}$, de manera que el período de cálculo sea similar al período utilizado para la simulación en tiempo continuo, el cual fue $\mathcal{T} = 0,25 \text{ min}$.

5.6.3. LQR con ganancia variable y eliposoide terminal

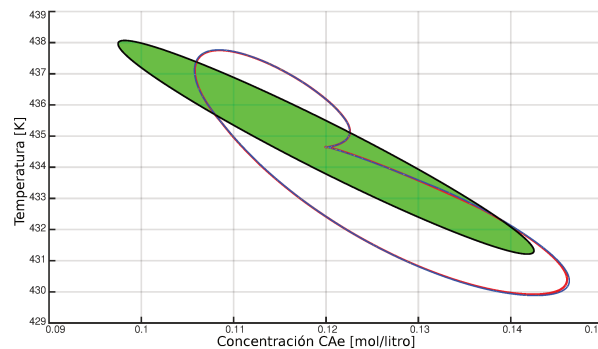
Finalmente, en el siguiente ejemplo, se agrega al diseño del regulador una región terminal, como se hizo en en la sección (4.7.1), para detener el cálculo de la ganancia variable y conmutar a un regulador de ganancias estáticas cuando sea posible.

Para la simulación se eligió como punto de operación $C_A = 0,12 \text{ [mol/litro]}$ y como caudal máximo disponible a $q_{\text{máx}} = 114 \text{ [L/min]}$. La perturbación aplicada es solo en el parámetro de entrada C_{Ae} y es la misma que en el ejemplo anterior, mostrada en la Fig.(5.27).

Los resultados de la simulación se muestran en la Figs.(5.29) y (5.30). En las mismas se compara el desempeño del regulador de ganancia variable (color azul), con uno que conmuta según se encuentre o no dentro de la región terminal (color rojo).



(a) Concentración

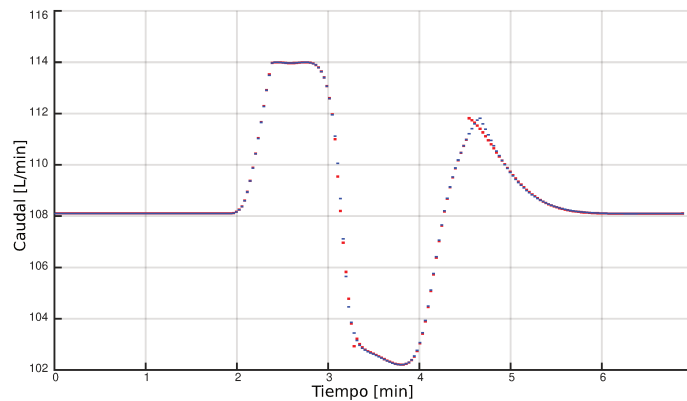


(b) Espacio de estados y conjunto terminal

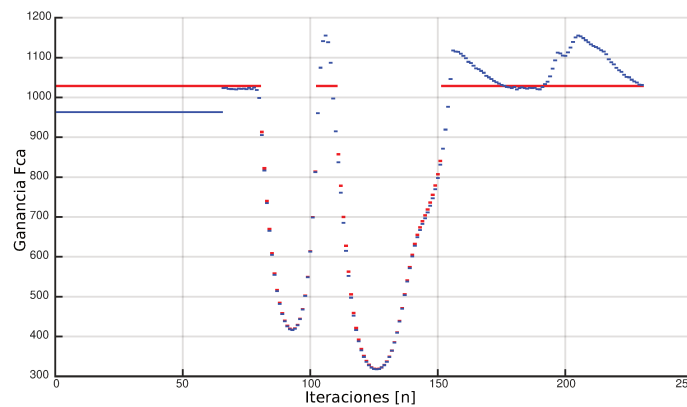
Figura 5.29: Comparación de desempeño entre los reguladores propuestos: En color azul, regulador con ganancia variable. En color rojo, regulador con ganancia variable y conjunto terminal.

⁶Respecto al caso continuo, se aplicó una perturbación más rápida y se redujo el tiempo de simulación, para observar la diferencia entre los tiempos de muestreo y cambio de ganancia.

Como se observa en la Fig.(5.29), prácticamente no hay diferencia en la respuesta del sistema entre ambos casos, pero sí en el consumo de tiempo del algoritmo para el cálculo del regulador, Fig.(5.30 (c)). En este ejemplo se actualiza la ganancia junto con los instantes de muestreo, siendo $T_M = 0,03$ min.



(a) Caudal manipulado



(b) Ganancia en la concentración



(c) Consumo de tiempo en segundos

Figura 5.30: Comparación entre las simulaciones con los reguladores propuestos: En color azul, regulador con ganancia variable. En color rojo, regulador con ganancia variable y conjunto terminal.

5.6.4. Resumen

En este capítulo se ensayaron, sobre un CSTR, reguladores robustos diseñados mediante LMI⁷ utilizando modelos politópicos, tanto en tiempo continuo y como en tiempo discreto.

En primer lugar se analizó el comportamiento del sistema en lazo abierto dentro de un rango de operación determinado. A partir de las ecuaciones diferenciales no lineales que caracterizan al reactor, y de la incertidumbre en sus parámetros previamente acotada, se determinaron ocho plantas no lineales que junto con el rango de operación, permitió determinar el rango del caudal refrigerante necesario para que el sistema opere en estado estacionario dentro del margen establecido. También se pudo constatar que algunos puntos de equilibrio dentro de dicho rango eran inestables en el sentido de Lyapunov.

Luego con las ocho plantas obtenidas y utilizando la función `convehull` de MATLAB se construyó un polígono convexo que abarca todos los posibles puntos de operación. Utilizando los puntos vértices de este polígono y mediante un procedimiento particular detallado en la sección (5.4), se construyó el modelo politópico utilizado para realizar el cálculo del vector ganancia del regulador a través de un algoritmo basado en LMI.

El primer regulador diseñado ha sido un LQR robusto con ganancia de realimentación estática y sin restricciones. Con el mismo, se simularon tres plantas en lazo cerrado, la planta nominal y dos plantas perturbadas que se ubicaban dentro, pero muy cerca de los bordes laterales del politopo. A través de los resultados, se comprobó que el regulador los estabiliza y con un buen desempeño, pero necesita una excesiva cantidad de caudal refrigerante, especialmente en el instante inicial de la regulación.

Posteriormente se propuso un regulador LQR robusto con restricción en la amplitud de la variable manipulada. La simulación se realizó sobre las mismas plantas de manera satisfactoria en cuanto a la estabilidad y a la restricción impuesta, no así en cuanto al desempeño, ya que al menos en una de las plantas perturbadas las oscilaciones y el tiempo de establecimiento se incrementaron notoriamente.

Para mejorar el tiempo de respuesta, se realizó un LQR robusto con restricciones en el caudal manipulado, utilizando un vector de ganancias variable que se actualiza cada cierto intervalo de tiempo. La simulación sobre las mismas plantas, mostró que el comportamiento de estas mejoró mucho su desempeño respecto a su comportamiento con regulador anterior. Prácticamente los sistemas respondieron de forma similar a cuando se le aplicaba un regulador sin restricciones. También resultó satisfactoria la simulación realizada sobre la planta nominal a la que se la perturbó ingresándole una variación temporal en uno de sus parámetros.

Luego, se continuó con la discretización del modelo el politópico, y se repitió la última simulación realizada en tiempo continuo, es decir, se construyó un LQR robusto en tiempo discreto con restricciones en la variable manipulada y vector de ganancias variable. Si bien el tiempo de muestreo está determinado por la velocidad de respuesta de la planta, la actualización de las ganancias no necesariamente debe

⁷Los resultados de la simulación numérica presentados aquí fueron logrados utilizando MATLAB con el toolbox de Yalmip [29].

coincidir con este. Y aprovechando este concepto, se eligió para su actualización un tiempo similar al utilizado en tiempo continuo, notándose en la comparación entre ambos casos un resultado similar.

Finalmente, y para el caso discreto, se construyó un conjunto terminal, dentro del cual el vector de ganancias de realimentación estático y sin restricciones no satura a la variable manipulada.

Con la utilización de este conjunto terminal, se tuvo la opción de poder conmutar entre un regulador de ganancias variables con restricciones, y uno de ganancias estáticas sin restricciones, sin que se vea alterado el desempeño del sistema. De esta manera, se logró un mejor aprovechamiento en la utilización del algoritmo de cálculo.

En el próximo capítulo, se abordará el diseño de LQR en el que se permite a la variable manipulada saturar con el objetivo de construir un regulador menos conservador.

Capítulo 6

Saturación en el actuador

6.1. Introducción

En este capítulo se diseñará un LQR en el que se permite que la acción de control sature. Sin embargo, es sabido que la saturación del actuador puede degradar severamente el desempeño del sistema en lazo cerrado e incluso producir inestabilidad [8].

Por otro lado, restringir la variable de control de manera que no se violen los límites del actuador conduce a diseños más conservativos, haciendo que el sistema de control trabaje lejos de su capacidad total.

Por lo general, hay dos enfoques para tratar el problema de la saturación en el actuador: 1) diseñar leyes de control de baja ganancia que evitan la saturación como se realizó en el capítulo anterior, o bien, 2) determinar el dominio de atracción dentro del cual el sistema saturado mantiene la garantía de estabilidad [54]. Como se verá, este último tiene la ventaja de ser menos conservador.

En el presente capítulo se explicita la saturación mediante una combinación convexa de realimentaciones lineales. Luego, basado sobre la condición del conjunto invariante, se establece la garantía de estabilidad. De esta manera se permite al actuador saturar, y por lo tanto, operar a la máxima capacidad. Además dado que la señal saturada es representada por medio de una simple realimentación lineal, este regulador puede ser fácilmente implementado mediante las LMI.

6.2. Conceptos preliminares y modelo politópico para la realimentación con señales saturadas

A continuación, se dará un conjunto de lemas y definiciones que serán de utilidad para la representación de una señal saturada mediante combinación convexa de realimentaciones lineales [51].

6.2.1. Repaso sobre cáscara convexa (politopo)

Recuérdese que para un grupo de puntos, $a_1, a_2, \dots, a_{\mathcal{R}}$, un politopo (o cáscara convexa) está definido como:

$$\text{Co} \{a_r : r \in [1, \mathcal{R}]\} \triangleq \left\{ \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} \alpha_r a_r : \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} \alpha_r = 1, \alpha_r \geq 0 \right\}. \quad (6.1)$$

El siguiente lema extiende el concepto de cáscara convexa a un vector formado por puntos que pertenecen a distintos politopos e incluso de distintas dimensiones:

Lema 6.1:

Dados los puntos, $\sigma_a, a_1, a_2, \dots, a_{\mathbb{R}} \in \mathfrak{R}^{m_1}$ y los puntos $\sigma_b, b_1, b_2, \dots, b_{\mathbb{T}} \in \mathfrak{R}^{m_2}$. Si $\sigma_a \in \text{Co} \{a_r : r \in [1, \mathbb{R}]\}$ y $\sigma_b \in \text{Co} \{b_t : t \in [1, \mathbb{T}]\}$, entonces^a

$$\begin{pmatrix} \sigma_a \\ \sigma_b \end{pmatrix} \in \text{Co} \left\{ \begin{pmatrix} a_r \\ b_t \end{pmatrix} : r \in [1, \mathbb{R}], t \in [1, \mathbb{T}] \right\}. \quad (6.2)$$

^a \mathfrak{R}^{m_1} es la dimensión del punto y \mathbb{R} es la cantidad de vértices del politopo, lo mismo con \mathfrak{R}^{m_2} y \mathbb{T} .

Demostración lema 6.1. Si $\sigma_a \in \text{Co} \{a_r : r \in [1, \mathbb{R}]\}$ y $\sigma_b \in \text{Co} \{b_t : t \in [1, \mathbb{T}]\}$, entonces existen $\alpha_r \geq 0$ con $r = 1, 2, \dots, \mathbb{R}$ y $\beta_t \geq 0$ con $t = 1, 2, \dots, \mathbb{T}$, tal que

$$\sigma_a = \sum_{r=1}^{\mathbb{R}} \alpha_r a_r, \quad \sigma_b = \sum_{t=1}^{\mathbb{T}} \beta_t b_t. \quad (6.3)$$

siendo

$$\sum_{r=1}^{\mathbb{R}} \alpha_r = \sum_{t=1}^{\mathbb{T}} \beta_t = 1, \quad (6.4)$$

Por lo tanto¹,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_a \\ \sigma_b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{r=1}^{\mathbb{R}} \alpha_r a_r \\ \sum_{t=1}^{\mathbb{T}} \beta_t b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{r=1}^{\mathbb{R}} \alpha_r a_r & \left(\sum_{t=1}^{\mathbb{T}} \beta_t \right) \\ \sum_{t=1}^{\mathbb{T}} \beta_t b_t & \left(\sum_{r=1}^{\mathbb{R}} \alpha_r \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{r=1}^{\mathbb{R}} \sum_{t=1}^{\mathbb{T}} \beta_t \alpha_r & a_r \\ \sum_{t=1}^{\mathbb{T}} \sum_{r=1}^{\mathbb{R}} \alpha_r \beta_t & b_t \end{pmatrix} = \sum_{r=1}^{\mathbb{R}} \sum_{t=1}^{\mathbb{T}} \alpha_r \beta_t \begin{pmatrix} a_r \\ b_t \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

¹Notar que:

$$\sum_{r=1}^{\mathbb{R}} \sum_{t=1}^{\mathbb{T}} \alpha_r \beta_t = \sum_{r=1}^{\mathbb{R}} \alpha_r \sum_{t=1}^{\mathbb{T}} \beta_t = 1.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_a \\ \sigma_b \end{pmatrix} \in \text{Co} \left\{ \begin{pmatrix} a_r \\ b_t \end{pmatrix} \right\}, \text{ con } r \in [1, \mathbb{R}] \text{ y } t \in [1, \mathbb{T}]. \quad (6.6)$$

Ejemplo 6.1:

Asumiendo que $\mathbb{R} = 2$ y $\mathbb{T} = 3$ en el lema anterior, resulta que

$$\sigma_a \in \text{Co} \{a_r : r \in [1, 2]\} \text{ y } \sigma_b \in \text{Co} \{b_t : t \in [1, 3]\},$$

según la Ec.(6.5), se tiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_a \\ \sigma_b \end{pmatrix} &= \sum_{r=1}^2 \sum_{t=1}^3 \alpha_r \beta_t \begin{pmatrix} a_r \\ b_t \end{pmatrix}, \\ &= \alpha_1 \left\{ \beta_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\} \\ &+ \alpha_2 \left\{ \beta_1 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \alpha_1 \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \sum_{t=1}^3 \beta_t \\ \sigma_b \end{pmatrix} \right\} + \alpha_2 \left\{ \begin{pmatrix} a_2 \sum_{t=1}^3 \beta_t \\ \sigma_b \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 \\ \sigma_b \sum_{r=1}^2 \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_a \\ \sigma_b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede escribir

$$\begin{pmatrix} \sigma_a \\ \sigma_b \end{pmatrix} \in \text{Co} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\}. \quad (6.7)$$

Definición 6.1:

Considérese el conjunto \mathfrak{D} , formado por matrices diagonales de dimensión $m \times m$ cuyos elementos sobre la diagonal son 0 y/o 1. Por ejemplo si $m = 2$, se tiene

$$\mathfrak{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Existen 2^m matrices en \mathfrak{D} . Supóngase que cada matriz en \mathfrak{D} es definida como D_s , con $s = 1, 2, \dots, 2^m$. Luego, se define al conjunto \mathfrak{D} como

$$\mathfrak{D} \triangleq \{ D_s : s \in [1, 2^m] \}. \quad (6.8)$$

Además, si se define a la matriz \overline{D}_s como,

$$\overline{D}_s \triangleq I - D_s,$$

\overline{D}_s es una matriz diagonal, cuya diagonal es el complemento a 1 de la diagonal de D_s , y por lo tanto, \overline{D}_s es un elemento de \mathfrak{D} .

Definición 6.2:

Dados dos vectores $u, v \in \mathfrak{R}^m$, entonces se define a

$$\mathfrak{V} \triangleq \{ D_s u + \overline{D}_s v : s \in [1, 2^m] \}, \quad (6.9)$$

como el conjunto de vectores formados por algunos (o todos) elementos de u y el resto (o ninguno) de v .

Ejemplo 6.2:

Dado un par de vectores $u, v \in \mathfrak{R}^2$, según la definición anterior, se tiene

$$\mathfrak{V} = \{ (D_1 u + \overline{D}_1 v), (D_2 u + \overline{D}_2 v), (D_3 u + \overline{D}_3 v), (D_4 u + \overline{D}_4 v) \}. \quad (6.10)$$

Al desarrollar los cuatro elementos por separado, resulta

$$\begin{aligned} (D_1 u + \overline{D}_1 v) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}^u + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}^v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \\ (D_2 u + \overline{D}_2 v) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\ (D_3 u + \overline{D}_3 v) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \\ (D_4 u + \overline{D}_4 v) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\implies \mathfrak{V} = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\}. \quad (6.12)$$

6.2.2. Modelo politópico para la señal saturada**Definición 6.3:**

En tiempo continuo, la función $\text{sat}[u(t)]$ es la función vectorial de saturación estándar, definida como:

$$\begin{aligned} \text{sat}[u(t)] &\triangleq [\text{sat}[u_1(t)], \text{sat}[u_2(t)], \dots, \text{sat}[u_m(t)]]', \quad \text{donde} \\ \text{sat}[u_i(t)] &\triangleq \text{sign}[u_i(t)] \min\{1, |u_i(t)|\}, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Definición 6.4:

En tiempo discreto, la función $\text{sat}[u(k)]$ es la función vectorial de saturación estándar, definida como:

$$\begin{aligned} \text{sat}[u(k)] &\triangleq [\text{sat}[u_1(k)], \text{sat}[u_2(k)], \dots, \text{sat}[u_m(k)]]', \quad \text{donde} \\ \text{sat}[u_i(k)] &\triangleq \text{sign}[u_i(k)] \min\{1, |u_i(k)|\}, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Lema 6.2:

Sean los vectores $u(\cdot) \in \mathfrak{R}^m$ y $v(\cdot) \in \mathfrak{R}^m$,

$$u(\cdot) = \begin{pmatrix} u_1(\cdot) \\ u_2(\cdot) \\ \vdots \\ u_m(\cdot) \end{pmatrix}, \quad v(\cdot) = \begin{pmatrix} v_1(\cdot) \\ v_2(\cdot) \\ \vdots \\ v_m(\cdot) \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

Supóngase que $|v_i(\cdot)| \leq 1 \quad \forall i \in [1, m]$, y $\forall t, k \geq 0$, entonces

$$\text{sat}[u(\cdot)] \in \text{Co} \{ D_s u(\cdot) + \overline{D}_s v(\cdot) : s \in [1, 2^m] \}. \quad (6.16)$$

Demostración lema 6.2. *Utilizando la definición de saturación en tiempo continuo, se tiene²*

$$\text{sat}[u_i(t)] = \begin{cases} u_i(t), & \text{si } |u_i(t)| < 1, \\ \pm 1, & \text{si } |u_i(t)| \geq 1. \end{cases} \quad \forall i \in [1, m], \quad y \quad \forall t \geq 0. \quad (6.17)$$

Mientras $|v_i(t)| \leq 1$, se puede escribir

$$\text{sat}[u_i(t)] \in \text{Co} \{ u_i(t), v_i(t) \}, \quad \forall i \in [1, m], \quad \forall t \geq 0, \quad (6.18)$$

como se muestra en la siguiente figura:

²Para mayor claridad en la ilustración, la demostración solo se realiza en tiempo continuo.

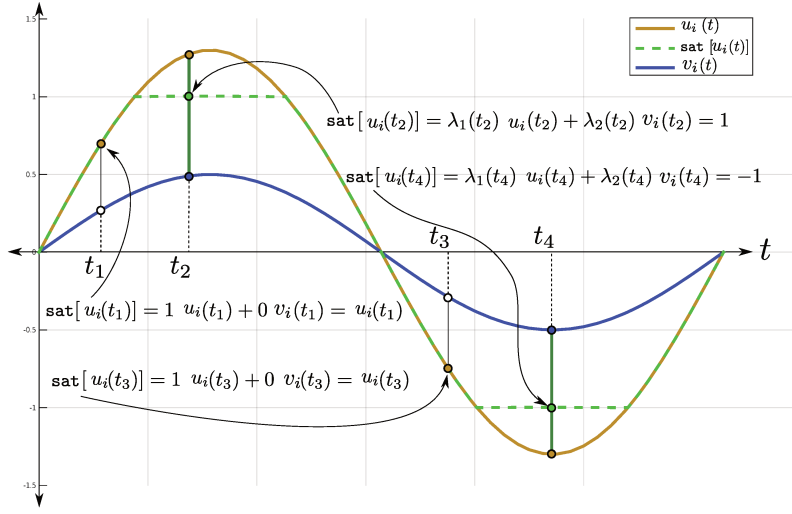


Figura 6.1: Representación de $\text{sat}[u_i(t)]$ en cuatro tiempos distintos mediante combinación convexa de $u_i(t)$ y $v_i(t)$. Representación de un politopo, en distintos tiempos, en \mathfrak{R}^1 .

Luego, para todo $t \geq 0$ y para todo i , con $i = 1, 2, \dots, m$, se tiene m politopos dependientes del tiempo en \mathfrak{R}^2 , esto es,

$$\begin{aligned} \text{sat}[u_1(t)] &\in \text{Co}\{u_1(t), v_1(t)\}, \\ \text{sat}[u_2(t)] &\in \text{Co}\{u_2(t), v_2(t)\}, \\ &\dots \quad \dots \\ \text{sat}[u_m(t)] &\in \text{Co}\{u_m(t), v_m(t)\}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Al aplicar inductivamente el lema (6.1), se tiene³:

- para⁴ $m = 2$

$$\text{sat} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sat}[u_1] \\ \text{sat}[u_2] \end{pmatrix} \in \text{Co} \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\}; \tag{6.20}$$

- para $m = 3$

$$\begin{aligned} \text{sat} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} \text{sat}[u_1] \\ \text{sat}[u_2] \\ \text{sat}[u_3] \end{pmatrix} \\ &\in \text{Co} \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ v_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ u_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned} \tag{6.21}$$

³Para mayor claridad se omite la dependencia temporal.

⁴Para poder comparar con el lema (6.1), considere $a_1 = u_1$, $a_2 = v_1$, y $b_1 = u_2$, $b_2 = v_2$.

utilizando la definición (6.2), la representación (6.21) se puede escribir como:

$$\text{sat} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in \text{Co} \{ D_s u + \overline{D_s} v : s \in [1, 2^3] \}. \quad (6.22)$$

- Generalizando, mientras $|v_i(t)| \leq 1, \quad \forall t \geq 0$

$$\implies \text{sat}[u(t)] \in \text{Co} \{ D_s u(t) + \overline{D_s} v(t) : s \in [1, 2^m], \text{ y } \forall t \geq 0 \}, \quad (6.23)$$

con lo que concluye la demostración.

Ejemplo 6.3:

Considérese las siguientes señales $u(t)$ y $v(t)$, para $\omega_0 t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) = 1,6 \cos \omega_0 t \\ u_2(t) = 1,6 \sin \omega_0 t \end{pmatrix}, \quad v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) = 0,5 \cos \omega_0 t \\ v_2(t) = 0,5 \sin \omega_0 t \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\text{sat}[u(t)] = \begin{pmatrix} \text{sat}[u_1(t)] \\ \text{sat}[u_2(t)] \end{pmatrix} \in \text{Co} \left\{ \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} \right\}.$$

Las Figs.(6.2) y (6.3) muestran el politopo generado por $v(t)$ y $u(t)$ en el cual está confinado el vector $\text{sat}[u(t)]$.

En la Fig.(6.3) se puede observar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \text{sat}[u] &= p_1 + \mu \underbrace{\Delta p_1^*}_{\triangleq (p_1^* - p_1)}, & p_1 &= v + \theta \underbrace{\Delta av}_{\triangleq (a-v)}, & p_1^* &= b + \delta \underbrace{\Delta ub}_{\triangleq (u-b)}, \\ \text{sat}[u] &= \underbrace{(1-\mu)}_{\triangleq \mu_1} p_1 + \underbrace{(\mu)}_{\triangleq \mu_2} p_1^*, & p_1 &= \underbrace{(1-\theta)}_{\triangleq \theta_1} v + \underbrace{(\theta)}_{\triangleq \theta_2} a, & p_1^* &= \underbrace{(1-\delta)}_{\triangleq \delta_1} b + \underbrace{(\delta)}_{\triangleq \delta_2} u, \\ \text{sat}[u] &= \mu_1 p_1 + \mu_2 p_1^*, & p_1 &= \theta_1 v + \theta_2 a, & p_1^* &= \delta_1 b + \delta_2 u, \\ \text{con } \mu_1 + \mu_2 &= 1. & \text{con } \theta_1 + \theta_2 &= 1. & \text{con } \delta_1 + \delta_2 &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{sat}[u] = \mu_1 (\theta_1 v + \theta_2 a) + \mu_2 (\delta_1 b + \delta_2 u),$$

$$\text{sat}[u] = \underbrace{\mu_1 \theta_1}_{\triangleq \lambda_1} v + \underbrace{\mu_1 \theta_2}_{\triangleq \lambda_2} a + \underbrace{\mu_2 \delta_1}_{\triangleq \lambda_3} b + \underbrace{\mu_2 \delta_2}_{\triangleq \lambda_4} u,$$

$$\text{sat}[u] = \lambda_1 v + \lambda_2 a + \lambda_3 b + \lambda_4 u,$$

$$\text{donde } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1.$$

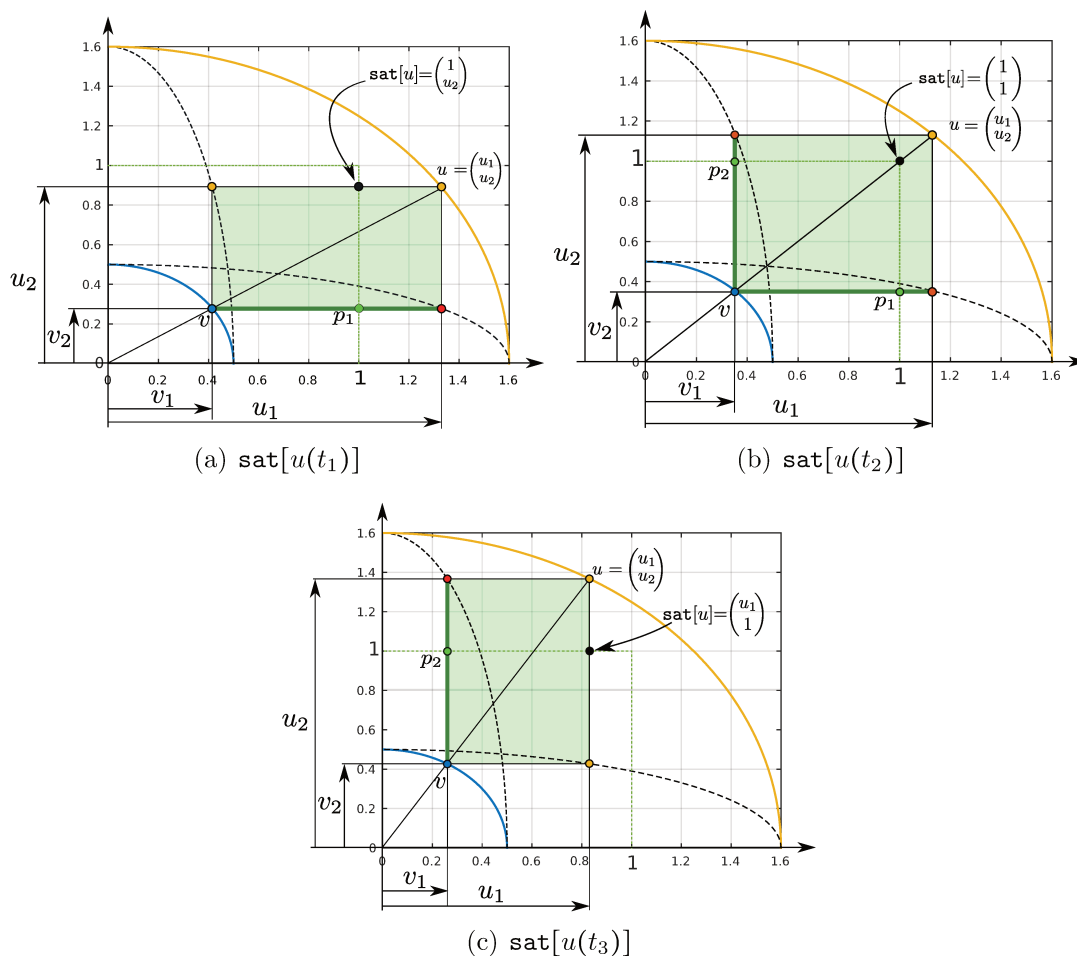


Figura 6.2: Politopo en \mathfrak{R}^2 . Representación del politopo en tres tiempo distintos, mediante combinación convexa de $u(t)$ y $v(t)$.

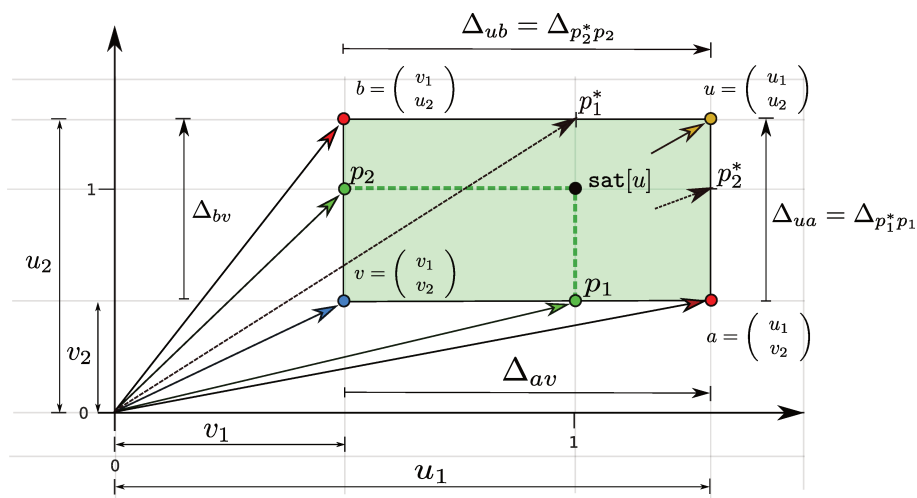


Figura 6.3: Representación del politopo en el tiempo t_2 mediante una cáscara convexa de 4 puntos $\in \mathfrak{R}^2$.

Resultando

$$\begin{aligned} \text{sat} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} u_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} v_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\ \text{sat} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &\in C_o \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\}, \\ \text{sat}[u] &\in C_o \{ D_s u + \overline{D}_s v : s \in [1, 4] \}. \end{aligned}$$

6.2.3. Modelo politópico para la realimentación de estados saturada

Definición 6.5:

Dadas dos matrices F y $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, entonces se define a

$$\mathfrak{M} \triangleq \{ D_s F + \overline{D}_s H : s \in [1, 2^m] \}, \quad (6.24)$$

como el conjunto de matrices formadas por algunas (o todas) filas de F y el resto (o ninguna) filas de H .

Ejemplo 6.4:

Dado un par de matrices $F, H \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$, según la definición anterior, se tiene

$$\mathfrak{M} = \{ (D_1 F + \overline{D}_1 H), (D_2 F + \overline{D}_2 H), (D_3 F + \overline{D}_3 H), (D_4 F + \overline{D}_4 H) \}. \quad (6.25)$$

Al desarrollar los cuatro elementos por separado, resulta

$$\begin{aligned} (D_1 F + \overline{D}_1 H) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}}^F + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}}^H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \\ (D_2 F + \overline{D}_2 H) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \\ (D_3 F + \overline{D}_3 H) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \\ (D_4 F + \overline{D}_4 H) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\implies \mathfrak{M} = \left\{ \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \right\}. \quad (6.27)$$

Asumiendo que $u(\cdot) = Fx(\cdot)$, el objetivo de esta sección es ubicar a $\text{sat}[Fx(\cdot)]$ dentro de un politopo cuyos vértices resultan ser un grupo de realimentaciones lineales, como indica el siguiente lema:

Lema 6.3:

Dadas dos matrices de realimentación F y $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, supóngase que $|Hx(\cdot)| \leq 1$. Entonces, por el lema (6.2) y haciendo uso de la definición (6.5), resulta

$$\text{sat}[Fx(\cdot)] \in \text{Co} \left\{ D_s Fx(\cdot) + \overline{D}_s Hx(\cdot) : s \in [1, 2^m] \right\}. \quad (6.28)$$

De esta forma se ubica a $\text{sat}[Fx(\cdot)]$ dentro de una cáscara convexa de un grupo de realimentaciones lineales.

En la próxima sección el objetivo será encontrar una formulación que garantice que la señal auxiliar $v(\cdot) = Hx(\cdot)$, tenga un módulo menor o igual a uno, para todo tiempo (continuo o discreto) mayor o igual a cero.

6.3. Estabilidad asintótica del origen para un modelo LTI realimentado con señal de control saturada

Considérese el modelo LTI en tiempo discreto⁵ representado por la siguiente ecuación:

$$x(k+1) = A x(k) + B \text{sat}[u(k)], \quad x(0) = x_0, \quad (6.29)$$

con una ley de realimentación de estados, dada por

$$u(k) = Fx(k). \quad (6.30)$$

Luego, el modelo en lazo cerrado, realimentado por $u(k)$, resulta

$$x(k+1) = A x(k) + B \text{sat}[Fx(k)], \quad \text{con } x(0) = x_0. \quad (6.31)$$

Definición 6.6:

Sea f_i la fila i de la matriz $F \in \mathfrak{R}^{m \times n}$. Se define como $\mathfrak{L}(F)$ al siguiente conjunto^a:

$$\mathfrak{L}(F) \triangleq \{ x \in \mathfrak{R}^n : |f_i x| \leq 1, i = 1, 2, \dots, m \}, \quad (6.32)$$

y se le denomina región lineal de la saturación.

^aObservar que $\mathfrak{L}(F)$ es la región donde la señal de control no satura, $\text{sat}[f_i x] = f_i x$.

Se analiza ahora una condición de estabilidad asintótica para el origen de este modelo LTI.

⁵En lo que resta de esta tesis se trabajará en tiempo discreto.

Considérese los siguientes subconjuntos en \mathfrak{R}^n :

$$\begin{aligned}\epsilon(P, \rho) &= \{ x \in \mathfrak{R}^n : x'Px < \rho, P > 0 \}, \quad y \\ \mathfrak{L}(H) &= \{ x \in \mathfrak{R}^n : |h_i x| \leq 1, i = 1, 2, \dots, m \}.\end{aligned}\tag{6.33}$$

Teorema 6.1: Estabilidad para mod. LTI con entrada saturada

El elipsoide $\epsilon(P, \rho)$ es un conjunto invariante contractivo del modelo en lazo cerrado representado por la Ec.(6.31), si existen una matriz $P > 0$ y una matriz H , tal que se satisfagan las siguientes restricciones:

$$\epsilon(P, \rho) \subset \mathfrak{L}(H), \quad y \quad \begin{pmatrix} P & [A + B(D_s F + \overline{D}_s H)]' \\ A + B(D_s F + \overline{D}_s H) & P^{-1} \end{pmatrix} > 0, \tag{6.34}$$

$$\forall s \in [1, 2^m].$$

Demostración teorema 6.1. Dada la función cuadrática $V[x(k)] = x(k)'Px(k)$, es necesario probar que:

$$\forall x \in \epsilon(P, \rho) \subset \mathfrak{L}(H) \quad y \quad \forall k \geq 0, \quad se \quad verifica \quad que \quad V[x(k)] > V[x(k+1)].$$

- Se asume, en primer lugar, que la condición $\epsilon(P, \rho) \subset \mathfrak{L}(H)$ se satisface.

Dada la definición (6.6), la condición $\epsilon(P, \rho) \subset \mathfrak{L}(H)$ implica que $\forall x(k) \in \epsilon(P, \rho)$ se cumple que $|h_i x(k)| \leq 1$, con $i = 1, 2, \dots, m$. Por lo tanto, utilizando el lema (6.3), la señal $\text{sat}[Fx(k)]$ puede representarse mediante la siguiente combinación convexa:

$$\begin{aligned}\text{sat}[Fx(k)] &= \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) (D_s F + \overline{D}_s H) x(k), \\ \text{con} \quad \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) &= 1, \quad y \quad \delta_s(k) \geq 0, \quad \forall k \geq 0.\end{aligned}\tag{6.35}$$

Luego, el modelo en lazo cerrado dado por la Ec.(6.31), puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A x(k) + B \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) (D_s F + \overline{D}_s H) x(k), \\ x(k+1) &= \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) \underbrace{(A + B(D_s F + \overline{D}_s H))}_{\triangleq A_{cl_s}} x(k), \quad \text{con} \quad x(0) = x_0.\end{aligned}\tag{6.36}$$

Definiendo

$$A_{cl_s} \triangleq A + B(D_s F + \overline{D}_s H), \tag{6.37}$$

como la matriz dinámica de cada modelo vértice del politopo de saturación, se tiene que

$$A_{cl}(\delta(k)) = \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) A_{cl_s}, \tag{6.38}$$

es la matriz dinámica del sistema realimentado con entrada saturada bajo representación politópica. De esta manera, el modelo de la Ec.(6.31) puede representarse mediante la siguiente ecuación:

$$x(k+1) = A_{cl}(\delta(k)) x(k), \quad \text{con } x(0) = x_0. \quad (6.39)$$

- Considérese ahora las 2^m LMI en las restricciones (6.34). Realizando con ellas una combinación convexa y teniendo en cuenta las ecuaciones (6.37) y (6.38), resulta

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) \begin{pmatrix} P & [A + B(D_s F + \overline{D}_s H)]' \\ A + B(D_s F + \overline{D}_s H) & P^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) & \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) A'_{cl_s} \\ \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) A_{cl_s} & P^{-1} \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P & A_{cl}(\delta(k))' \\ A_{cl}(\delta(k)) & P^{-1} \end{pmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Aplicando el complemento de Schur, y luego premultiplicando y posmultiplicando por $x(k)'$ y $x(k)$ respectivamente, se obtiene

$$x(k)' P x(k) - \underbrace{x(k)' A_{cl}(\delta(k))'}_{x(k+1)'} P \underbrace{A_{cl}(\delta(k)) x(k)}_{x(k+1)} > 0, \quad (6.41)$$

$$\therefore V[x(k)] - V[x(k+1)] > 0,$$

lo que demuestra el teorema.

Condición $\epsilon(P, \rho) \subset \mathfrak{L}(H)$

La demostración anterior se realizó a partir de suponer que se satisface la restricción $\epsilon(P, \rho) \subset \mathfrak{L}(H)$. A continuación se verá la manera de garantizar el cumplimiento de esta inclusión mediante una LMI.

La restricción $\epsilon(P, \rho) \subset \mathfrak{L}(H)$, puede expresarse mediante la siguiente formulación [24]:

$$\min \{ x' P x : |h_i x| = 1 \} \geq \rho, \quad P > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (6.42)$$

Para ver esto, nótese que $\epsilon(P, \rho) \subset \mathfrak{L}(H)$, si y solo si, todos los hiperplanos $h_i x = \pm 1$, $i = 1, 2, \dots, m$, están completamente fuera del elipsoide

$$\{ x \in \mathfrak{R}^n : x' P x < \rho \},$$

es decir, en cada punto x sobre los hiperplanos $h_i x = \pm 1$, se tiene que $x'Px \geq \rho$, para algún valor de ρ . El siguiente ejemplo ilustra este concepto:

Ejemplo 6.5:

Sea $x \in \mathfrak{R}^2$, y considerando las matrices

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.43)$$

$\mathcal{L}(H)$ es el polígono delimitado por las siguientes rectas:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, & x_1 + x_2 &= -1, \\ x_1 - x_2 &= 1, & x_1 - x_2 &= -1, \end{aligned} \quad (6.44)$$

y $\epsilon(P, \rho)$, es la región donde se satisface

$$x_1^2 + x_2^2 < \rho. \quad (6.45)$$

La inclusión $\epsilon(P, \rho) \subset \mathcal{L}(H)$ se observa en la Fig.(6.5).

Determinación analítica de la condición $\epsilon(P, \rho) \subset \mathcal{L}(H)$ y su formulación mediante LMI

La desigualdad (6.42) representa un problema de optimización convexo con restricciones de igualdad, cuyo mínimo resulta ser:

$$x'_{op} P x_{op} = (x' P x)_{min} = \rho,$$

por lo tanto, se resuelve este problema de optimización utilizando el método de Lagrange⁶.

Definiendo⁷

$$\mathcal{L}(x, \lambda) \triangleq x' P x - \lambda (h_i x - 1), \quad (6.46)$$

la condición necesaria⁸ para encontrar un mínimo, resulta

$$\nabla [\mathcal{L}(x, \lambda)] = \nabla [(x' P x) - \lambda (h_i x - 1)] = 0. \quad (6.47)$$

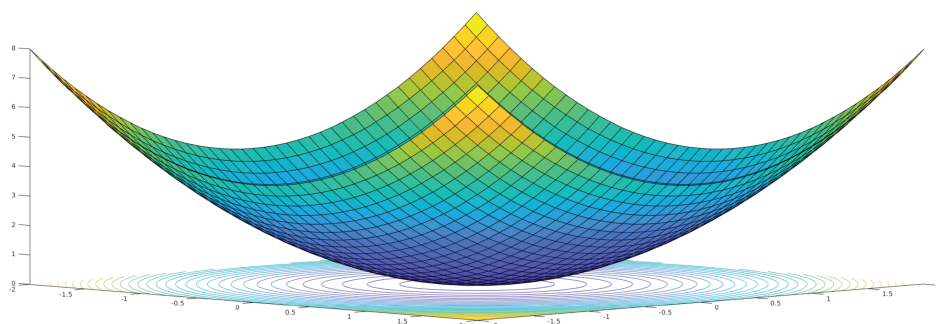
Derivando respecto a x y λ e igualando a cero, se tiene la siguiente igualdad matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x} \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2P x_{op} - \lambda_{op} h'_i \\ 1 - h_i x_{op} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.48)$$

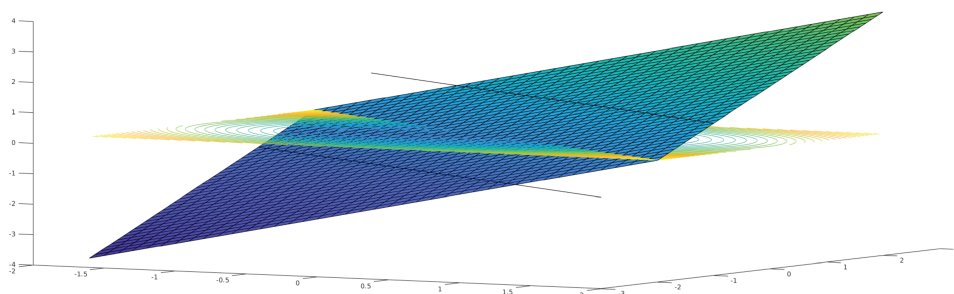
⁶Se trabaja con la condición $h_i x = 1$, es fácil mostrar que al mismo resultado se llega con la condición $h_i x = -1$

⁷Esta demostración se realiza para una i genérica, es decir, se toma solo una restricción de igualdad, por lo tanto, λ es un escalar. Luego, habrá tantas restricciones como filas tenga H .

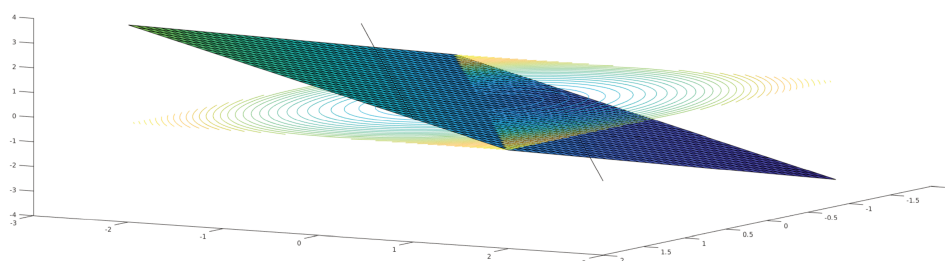
⁸Al ser $P > 0$ es claro que el punto obtenido es un mínimo, por lo tanto, en este caso la Ec.(6.48) es una condición necesaria y suficiente.



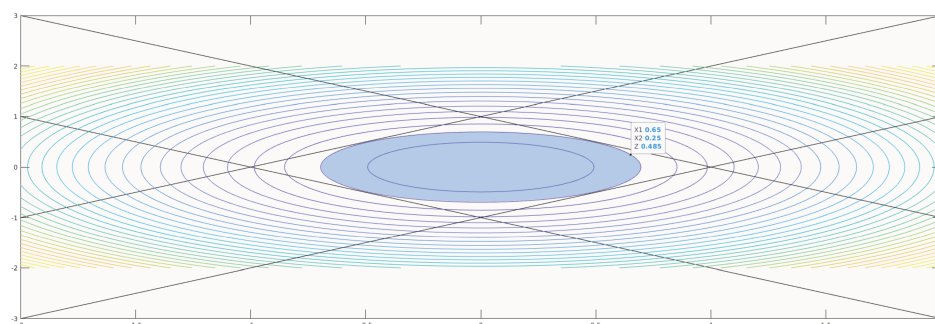
(a) $V(x) = x_1^2 + x_2^2$, y trazas para distintos valores de ρ .



(b) Plano $L_1(x) = x_1 + x_2$, y rectas $L_1(x) = \pm 1$.



(c) Plano $L_2(x) = x_1 - x_2$, y rectas $L_2(x) = \pm 1$.



(d) Trazas sobre el plano $z = 0$. En color celeste se representa el mayor elipsoide $\epsilon(P, \rho)$ totalmente incluido en $\mathcal{L}(H)$. La inclusión completa es con $\rho < 0,5$.

Figura 6.4: Inclusión: $\epsilon(P, 0,5) \subset \mathcal{L}(H)$.

de la cual se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

a)

$$2P x_{op} = \lambda_{op} h'_i$$

b)

$$h_i x_{op} = 1.$$

Premultiplicando la ecuación (a) por x'_{op} , teniendo en cuenta la ecuación (b) y que $x'_{op} P x_{op} = (x' P x)_{min} = \rho$, resulta

$$2 \underbrace{x'_{op} P x_{op}}_{\rho} = \lambda_{op} \underbrace{x'_{op} h'_i}_1 \quad (6.49)$$

$$2 \rho = \lambda_{op}.$$

Luego, reemplazando λ_{op} en (a), se obtiene

$$P x_{op} = \rho h'_i, \quad (6.50)$$

y su transpuesta

$$x'_{op} P = \rho h_i. \quad (6.51)$$

De la Ec.(6.50) se tiene

$$x_{op} = P^{-1} \rho h'_i, \quad (6.52)$$

y multiplicando la Ec.(6.51) por la Ec.(6.52), se obtiene

$$\begin{aligned} \underbrace{x'_{op} P x_{op}}_{\rho} &= \rho h_i P^{-1} \rho h'_i, \\ \rho &= \rho^2 (h_i P^{-1} h'_i), \\ 1 &= \rho (h_i P^{-1} h'_i). \end{aligned} \quad (6.53)$$

En consecuencia, la restricción de inclusión: $\epsilon(P, \rho) \subset \mathfrak{L}(H)$ es equivalente a

$$\rho (h_i P^{-1} h'_i) < 1, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, m. \quad (6.54)$$

El siguiente paso es utilizar el complemento de Schur para representar a la desigualdad (6.54) en formato LMI, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} 1 - h_i \left(\frac{P}{\rho} \right)^{-1} h'_i &> 0, \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & h_i \\ h'_i & \left(\frac{P}{\rho} \right) \end{array} \right) &> 0, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Se concluye que el origen del modelo LTI representado por la Ec.(6.31), es un punto de equilibrio asintóticamente estable si se satisfacen las siguientes LMI:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & h_i \\ h'_i & \left(\frac{P}{\rho}\right) \end{pmatrix}}_{\epsilon(P, \rho) \subset \mathcal{L}(H)} > 0, \quad \forall i \in [1, m], \text{ y}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P & [A + B(D_s F + \overline{D}_s H)]' \\ A + B(D_s F + \overline{D}_s H) & P^{-1} \end{pmatrix}}_{V[x(k)] > V[x(k+1)]} > 0, \quad \forall s \in [1, 2^m], \quad (6.56)$$

lo que se corresponde con el enunciado del teorema (6.1).

6.3.1. Cálculo del regulador

A continuación, se modificarán las LMI en (6.56) para presentarlas de una forma más conveniente para el cálculo del regulador.

Partiendo de la desigualdad (6.54), se puede escribir

$$\frac{1}{\rho} - h_i P^{-1} P \quad P^{-1} h'_i > 0, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} & h_i P^{-1} \\ P^{-1} h'_i & P^{-1} \end{pmatrix} > 0, \quad \forall i \in [1, m],$$

Luego, multiplicando por ρ , la primera LMI en (6.56) puede representarse como

$$\begin{pmatrix} 1 & h_i \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1} \\ \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1} h'_i & \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1} \end{pmatrix} > 0, \quad \forall i \in [1, m]. \quad (6.57)$$

Mientras que en la segunda LMI en (6.56), si se pre y posmultiplica por $\text{diag}\{P^{-1}, I\}$ y luego se multiplica por ρ , resulta⁹

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1} & \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1} [A + B(D_s F + \overline{D}_s H)]' \\ [A + B(D_s F + \overline{D}_s H)] \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1} & \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1} \end{pmatrix} > 0, \quad \forall s \in [1, 2^m]. \quad (6.58)$$

⁹Dado que $P > 0$ y $\rho > 0$, estas operaciones no modifican su condición de positiva definida.

Definiendo

$$Q \triangleq \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1}, \quad Y \triangleq F \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1}, \quad Z \triangleq H \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1}, \quad y \quad z_i \triangleq h_i \left(\frac{P}{\rho}\right)^{-1}, \quad (6.59)$$

donde z_i es la i -ésima fila de Z , las LMI en (6.56) pueden ser representadas como:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Q & [QA + B(D_s Y + \overline{D}_s Z)]' \\ AQ + B(D_s Y + \overline{D}_s Z) & Q \end{pmatrix} &> 0, \quad \forall s \in [1, 2^m], \\ \begin{pmatrix} 1 & z_i \\ z_i' & Q \end{pmatrix} &> 0, \quad \forall i \in [1, m]. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Nótese que si $F = H$, entonces $Y = Z$, y siendo que $D_s + \overline{D}_s = I$, las LMIs en (6.60) se reducen a

$$\begin{pmatrix} Q & [QA + BY]' \\ AQ + BY & Q \end{pmatrix} > 0, \quad (6.61)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & y_i \\ y_i' & Q \end{pmatrix} > 0, \quad \forall i \in [1, m]. \quad (6.62)$$

Las LMIs (6.61) y (6.62) se corresponden con la condición de estabilidad para un modelo LTI realimentado con $u = Fx$, donde las entradas, al aplicar una restricción en amplitud a cada componente, no saturan. Esto se vio en en la subsección (4.3.2) siendo, en este caso, $u_{i_{\max}} = 1$, $\forall i \in [1, m]$.

6.4. LQR para modelos LPV en tiempo discreto con entrada saturada

6.4.1. Formulación del problema

1. Considérese para un instante inicial $k = 0$ y una condición inicial $x(0) \neq 0$, un modelo LPV representado por la siguiente ecuación [9]:

$$x(k+1) = A(\eta(k))x(k) + B(\eta(k)) \text{ sat}[u(k)], \quad (6.63)$$

$$\text{con } x(0) = x_0, \quad \text{y } k = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

siendo su entrada

$$u(k) = Fx(k), \quad (6.64)$$

reemplazando (6.64) en (6.63) el sistema en lazo cerrado, resulta

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\eta(k))x(k) + B(\eta(k)) \text{sat}[Fx(k)], \\ \text{con } x(0) &= x_0, \quad \text{y } k = 0, 1, 2, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (6.65)$$

2. Considérese que las matrices $A(\eta(k))$ y $B(\eta(k))$, varían dentro de una región convexa delimitada por un politopo como se vio en la sección (4.4.2), esto es,

$$[A(\eta(k)) \mid B(\eta(k))] \in \text{Co} \{ [A_1 \mid B_1], [A_2 \mid B_2], \dots, [A_{n_m} \mid B_{n_m}] \}, \quad \therefore$$

$$[A(\eta(k)) \mid B(\eta(k))] = \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j(k) [A_j \mid B_j],$$

$$\text{donde } \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j(k) = 1, \quad \text{y } \alpha_j(k) \geq 0, \quad \forall k \geq 0. \quad (6.66)$$

3. Considérese que se cumple la condición establecida por el lema (6.3), luego la entrada saturada puede ser representada por la siguiente combinación convexa de realimentaciones lineales:

$$\text{sat}[Fx(k)] \in \text{Co} \{ D_s Fx(k) + \overline{D}_s Hx(k), \quad s \in [1, 2^m] \}, \quad \therefore$$

$$\text{sat}[Fx(k)] = \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) (D_s F + \overline{D}_s H)x(k), \quad (6.67)$$

$$\text{donde } \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) = 1, \quad \text{y } \delta_s(k) \geq 0, \quad \forall k \geq 0.$$

Al utilizar la representación politópica de las matrices en el sistema realimentado, el sistema (6.65) puede expresarse como

$$x(k+1) = \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j(k) (A_j x(k) + B_j \text{sat}[Fx(k)]), \quad (6.68)$$

y luego al utilizar la representación politópica de la saturación en la Ec.(6.68), se tiene

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j(k) \left(A_j x(k) + B_j \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) (D_s F + D_s H)x(k) \right), \\ x(k+1) &= \sum_{j=1}^{n_m} \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_j(k) \delta_s(k) \underbrace{(A_j + B_j (D_s F + \overline{D}_s H))}_{\triangleq A_{cl_{js}}} x(k). \end{aligned} \quad (6.69)$$

Definiendo

$$A_{cl_{j_s}} \triangleq A_j + B_j(D_s F + \overline{D_s} H), \quad (6.70)$$

el sistema LPV en lazo cerrado de la Ec.(6.65), puede ser representado como el siguiente sistema autónomo:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{cl}(\eta(k), \delta(k))x(k), \quad \text{con } x(0) = x_0, \\ \text{donde } A_{cl}(\eta(k), \delta(k)) &\triangleq \sum_{j=1}^{n_m} \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_j(k) \delta_s(k) A_{cl_{j_s}}. \end{aligned} \quad (6.71)$$

En este problema LQR, la meta es obtener una ganancia de realimentación estática F , tal que se logre el siguiente objetivo de desempeño robusto:

Problema LQR robusto con entrada saturada

$$\min_{u(k), k=0,1,\dots,\infty} \max_{[A(\eta(k)) \mid B(\eta(k))] \in \Omega, k \geq 0} J_\infty(x, \text{sat}[u]), \quad (6.72)$$

donde

$$J_\infty(x, \text{sat}[u]) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} [x(k)' R_x x(k) + (\text{sat}[u(k)])' R_u (\text{sat}[u(k)])],$$

con $R_x \geq 0$ y $R_u > 0$.

(6.73)

6.4.2. Diseño del regulador

Teorema 6.2: LQR para un modelo LPV con entrada saturada

Para el modelo LPV con saturación en el actuador dado por la Ec.(6.63), y para una entrada dada por la Ec.(6.64), el elipsoide $\epsilon(P, \rho)$ es un conjunto invariante contractivo del sistema en lazo cerrado dado por la Ec.(6.68), si existe una matriz $Q > 0$ y una matriz $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, tal que se satisfagan las siguientes desigualdades matriciales:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0' \\ x_0 & Q \end{pmatrix} > 0, \quad (6.74)$$

$$\begin{pmatrix} Q & QA_j' + (D_s Y + \overline{D_s Z})' B_j' & QR_x^{1/2} & (D_s Y + \overline{D_s Z})' R_u^{1/2} \\ A_j Q + B_j (D_s Y + \overline{D_s Z}) & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2} Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2} (D_s Y + \overline{D_s Z}) & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0, \quad (6.75)$$

$\forall s \in [1, 2^m]$ y $j \in [1, n_m]$.

$$\begin{pmatrix} 1 & z_i \\ z_i' & Q \end{pmatrix} > 0, \quad \forall i \in [1, m]. \quad (6.76)$$

Siendo

$$\rho > 0, \quad Q \triangleq P^{-1} \rho, \quad Y \triangleq FQ, \quad Z \triangleq HQ, \quad z_i \triangleq h_i Q. \quad (6.77)$$

Más aún, utilizando la matriz ganancia de realimentación estática dada por $F = YQ^{-1}$, para cualquier condición inicial $x_0 \in \epsilon(P, \rho)$, se tiene que la función objetivo de desempeño robusto dada por la Ec.(6.73) satisface la siguiente desigualdad: $J_\infty(x, \text{sat}[u]) < x_0' P x_0 < \rho$.

Demostración teorema 6.2. La LMI en (6.74) conduce a la determinación del elipsoide inicial

$$\epsilon(P, \rho) = \{x_0 \in \mathfrak{R}^n : x_0' P x_0 < \rho\}. \quad (6.78)$$

Mientras que la LMI en (6.76) conduce a la existencia del conjunto

$$\mathfrak{L}(H) = \{x \in \mathfrak{R}^n : |h_i x| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m\},$$

tal que

$$\epsilon(P, \rho) \subset \mathfrak{L}(H),$$

y que permite expresar a $\text{sat}[Fx(k)]$, como

$$\text{sat}[Fx(k)] = \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) (D_s F + \overline{D_s H}) x(k), \quad \text{con} \quad \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) = 1.$$

A continuación se demostrará que si se satisfacen las $(n_m + 2^m)$ LMI en (6.75), entonces el elipsoide $\epsilon(P, \rho)$ es un invariante contractivo para el modelo en lazo cerrado (6.68), lo que garantiza su estabilidad asintótica.

Para ello, téngase en cuenta que utilizando las definiciones en (6.77), el elemento (2,1) de la matriz en (6.75) puede escribirse como

$$\begin{aligned} A_j Q + B_j(D_s Y + \overline{D}_s Z) &= (A_j + B_j(D_s F + \overline{D}_s H)) Q, \\ &= A_{cl_{j_s}} Q, \end{aligned} \quad (6.79)$$

y el elemento (4,1) de dicha matriz, puede escribirse como

$$R_u^{1/2}(D_s Y + \overline{D}_s Z) = R_u^{1/2}(D_s F + \overline{D}_s H) Q, \quad (6.80)$$

y dado su simetría, las LMI en (6.75) pueden reescribirse del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} Q & Q A'_{cl_{j_s}} & Q R_x^{1/2} & Q (D_s F + \overline{D}_s H)' R_u^{1/2} \\ A_{cl_{j_s}} Q & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2} Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2}(D_s F + \overline{D}_s H) Q & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0, \quad (6.81)$$

$$\forall s \in [1, 2^m] \quad \text{y} \quad j \in [1, L].$$

Si se satisfacen las $(n_m + 2^m)$ desigualdades en (6.81), agrupándolas en una combinación convexa, es posible escribir:

$$\sum_{j=1}^{n_m} \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_j(k) \delta_s(k) \begin{pmatrix} Q & Q A'_{cl_{j_s}} & Q R_x^{1/2} & Q (D_s F + \overline{D}_s H)' R_u^{1/2} \\ A_{cl_{j_s}} Q & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2} Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2}(D_s F + \overline{D}_s H) Q & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0, \quad (6.82)$$

y utilizando (6.71), resulta¹⁰

$$\begin{pmatrix} Q & Q A'_{cl}(\eta \delta_k) & Q R_x^{1/2} & Q \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) (D_s F + \overline{D}_s H) \right)' R_u^{1/2} \\ A_{cl}(\eta \delta_k) Q & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2} Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2} \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) (D_s F + \overline{D}_s H) \right) Q & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0. \quad (6.83)$$

Luego, utilizando el complemento de Schur, la desigualdad anterior puede representarse como sigue:

$$\begin{pmatrix} Q & Q A'_{cl}(\eta \delta_k) \\ A_{cl}(\eta \delta_k) Q & Q \end{pmatrix}^{-} \begin{pmatrix} Q R_x^{1/2} & Q \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) (D_s F + \overline{D}_s H) \right)' R_u^{1/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{I}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{I}{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_x^{1/2} Q & 0 \\ R_u^{1/2} \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) (D_s F + \overline{D}_s H) \right) Q & 0 \end{pmatrix} > 0. \quad (6.84)$$

¹⁰Para simplificar la notación, se redefine $A_{cl}(\eta(k)\delta(k))$ como $A_{cl}(\eta\delta_k)$.

Resolviendo el segundo término matricial, reagrupando en una única matriz y aplicando nuevamente el complemento de Schur, se obtiene

$$Q - Q A'_{cl}(\eta\delta_k)Q^{-1}A_{cl}(\eta\delta_k)Q - Q \frac{R_x}{\rho} Q + Q \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k)(D_s F + \overline{D_s} H) \right)' \frac{R_u}{\rho} \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k)(D_s F + \overline{D_s} H) \right) Q > 0, \quad (6.85)$$

pre y posmultiplicando por Q^{-1} ,

$$Q^{-1} - A'_{cl}(\eta\delta_k)Q^{-1}A_{cl}(\eta\delta_k) - \frac{R_x}{\rho} + \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k)(D_s F + \overline{D_s} H) \right)' \frac{R_u}{\rho} \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k)(D_s F + \overline{D_s} H) \right) > 0, \quad (6.86)$$

y siendo $Q^{-1} = \begin{pmatrix} P \\ \rho \end{pmatrix}$, se puede escribir

$$P - A'_{cl}(\eta\delta_k)PA_{cl}(\eta\delta_k) - R_x + \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k)(D_s F + \overline{D_s} H) \right)' R_u \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k)(D_s F + \overline{D_s} H) \right) > 0. \quad (6.87)$$

Pre y posmultiplicando la desigualdad (6.87) por $x'(t)$ y $x(t)$ respectivamente y realizando un pasaje de término, se tiene

$$\underbrace{x'(k)Px(k)}_{V[x(k)]} - \underbrace{x'(k)A'_{cl}(\eta\delta_k)PA_{cl}(\eta\delta_k)x(k)}_{V[x(k+1)]} > x'(k)R_x x(k) + x'(k) \underbrace{\left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k)(D_s F + \overline{D_s} H) \right)' R_u \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k)(D_s F + \overline{D_s} H) \right)}_{\text{sat}[Fx(k)]} x(k), \quad (6.88)$$

y finalmente utilizando (6.67), resulta

$$V[x(k)] - V[x(k+1)] > \underbrace{x(k)'R_x x(k) + (\text{sat}[Fx(k)])'R_u(\text{sat}[Fx(k)])}_{>0, \forall x \neq 0}, \quad (6.89)$$

$$\forall k \geq 0, \quad \text{y} \quad \forall [A(k) \ B(k)] \in \Omega.$$

Lo cual muestra que el elipsoide $\epsilon(P, \rho)$ de la desigualdad (6.78), es un invariante contractivo para el modelo (6.68).

Partiendo de la desigualdad (6.89), realizando la sumatoria en un intervalo de tiempo infinito, y siendo que el modelo realimentado es asintóticamente estable, se tiene

$$V[x(0)] > \sum_{k=0}^{\infty} x(k)'R_x x(k) + (\text{sat}[u(k)])'R_u(\text{sat}[u(k)]), \quad (6.90)$$

$$\forall k \geq 0, \quad \text{y} \quad \forall [A(\eta(k)) \ | \ B(\eta(k))] \in \Omega.$$

Finalmente, dado que $V[x(0)] = x'_0 P x_0 < \rho, \Rightarrow J_{\infty}(x, \text{sat}[u]) < \rho$.

Por lo tanto, el objetivo de desempeño robusto

$$\min_{u(k), k=0,1,\dots,\infty} \max_{[A(k)|B(k)] \in \Omega, k \geq 0} J_{\infty}(x, \text{sat}[u]), \quad (6.91)$$

se satisface al resolver el siguiente problema de minimización vía LMI :

$$\min_{\rho, Y, Z, Q > 0} \rho, \quad \text{s.a: (6,74), (6,75) y (6,76).} \quad (6.92)$$

$$\text{siendo } F = YQ^{-1}.$$

A continuación se muestra un resumen comparativo para obtener la solución de un LQR robusto en tiempo discreto, con entrada saturada y entrada sin saturar:

LQR robusto con restricción en la amplitud de la entrada para tiempo discreto vía LMI

$$\min_{\rho, Y, Q > 0} \rho, \quad \text{s.a:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_0 \\ x_0 & Q \end{pmatrix} > 0.$$

$$\begin{pmatrix} Q & QA'_j + Y'B'_j & QR_x^{1/2} & Y'R_u^{1/2} \\ A_jQ + B_jY & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2}Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2}Y & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0, \quad \forall j \in [1, n_m].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & y_i \\ y'_i & Q \end{pmatrix} > 0, \quad \forall i \in [1, m].$$

$$\text{Siendo } \rho > 0, \quad Q \triangleq P^{-1}\rho, \quad Y \triangleq FQ, \quad y_i \triangleq f_iQ,$$

LQR robusto con entrada saturada en tiempo discreto vía LMI

$$\min_{\rho, Y, Z, Q > 0} \rho, \quad \text{s.a:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_0 \\ x_0 & Q \end{pmatrix} > 0.$$

$$\begin{pmatrix} Q & QA'_j + (D_sY + \overline{D_sZ})'B'_j & QR_x^{1/2} & (D_sY + \overline{D_sZ})'R_u^{1/2} \\ A_jQ + B_j(D_sY + \overline{D_sZ}) & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2}Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2}(D_sY + \overline{D_sZ}) & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0,$$

$$\forall s \in [1, 2^m] \quad y \quad j \in [1, n_m].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & z_i \\ z'_i & Q \end{pmatrix} > 0, \quad \forall i \in [1, m].$$

$$\text{Siendo } \rho > 0, \quad Q \triangleq P^{-1}\rho, \quad Y \triangleq FQ, \quad Z \triangleq HQ, \quad z_i \triangleq h_iQ,$$

Como se dijo previamente, si no se permite saturar, esto es, si $|Fx| \leq 1$, entonces

las LMI del segundo cuadro se reducen a las del primero. Es decir, el problema con restricción en la variable manipulada es un caso particular del problema con saturación, por lo que este último es menos conservador.

Nota: En las formulaciones previas para el cálculo del controlador se tomó como condición inicial $x_0 = x(0)$, obteniéndose una ganancia de realimentación estática F . De la misma forma que se hizo en el capítulo (4) y en el capítulo (5), esta ganancia de realimentación puede recalcularse¹¹ en forma periódica en los instantes de tiempo $k = \mu\mathcal{K}$, donde la única LMI a ser modificada es la que define el elipsoide inicial, reemplazando x_0 por $x_{\mu\mathcal{K}}$, con $\mu = 0, 1, 2, \dots, \infty$. En adelante, entiéndase que x_0 es la condición inicial del algoritmo de cálculo, es decir, $x_{\mu\mathcal{K}}$.

6.5. Simulación

En esta sección, se compara el comportamiento de la respuesta del sistema realimentado con entrada acotada y entrada saturada. A tal efecto, se aplica una perturbación en la concentración C_{Ae} , como se muestra en la Fig.(6.5). El sistema está estabilizado en $C_{Ass} = 0,12 \text{ mol/l}$, y el límite máximo del caudal manipulado se ha fijado en 114 l/min .

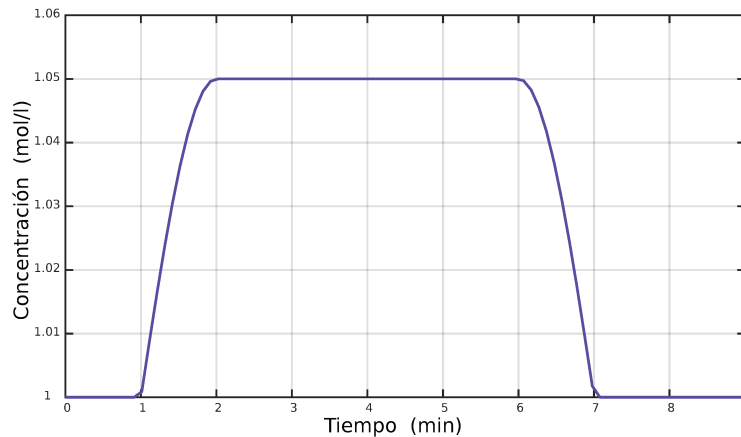


Figura 6.5: Perturbación en C_{Ae}

La Fig.(6.6) muestra un diagrama esquemático del proceso que se explica brevemente a continuación: Luego de muestrear y tomar la desviación de los estados respecto al equilibrio (X_{ss}), el regulador LMI calcula la ganancia para el incremento de caudal a ser aplicado (Δq_{c_n}), dicho incremento se suma al caudal de estado estacionario ($q_{c_{ss}}$), para posteriormente ingresar al limitador. Finalmente, la manipulada saturada ingresa al sistema.

¹¹ver sección (4.6)

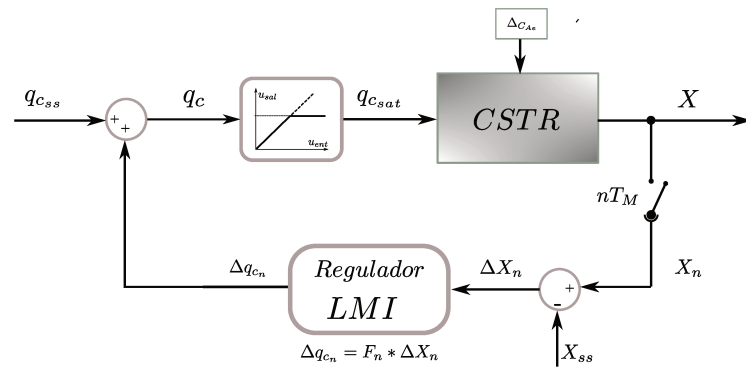
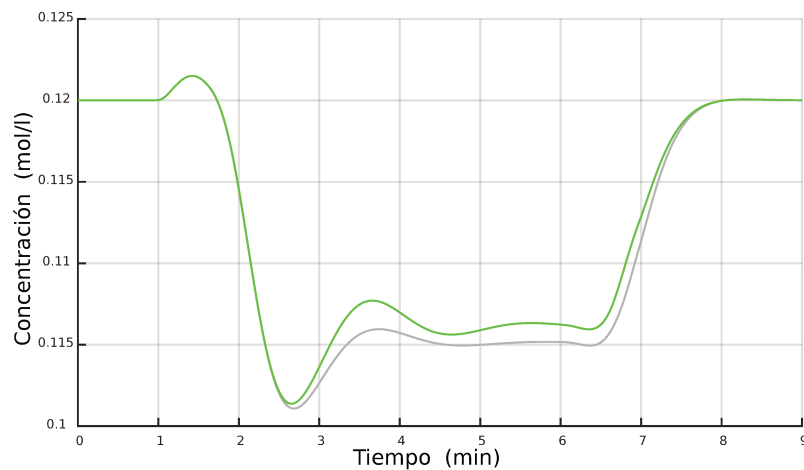
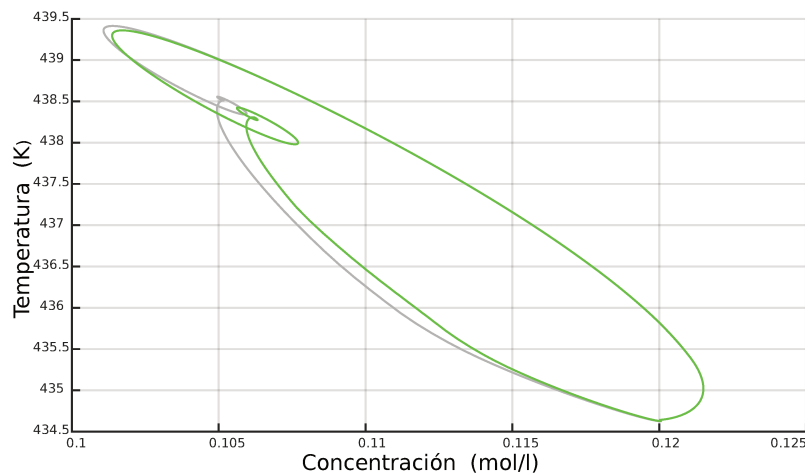


Figura 6.6: Diagrama esquemático del proceso.

En las figuras (6.7) y (6.8) se muestra el resultado de la simulación, el color verde corresponde a la utilización del regulador con saturación y el gris al regulador con entrada restringida.



(a) Concentración

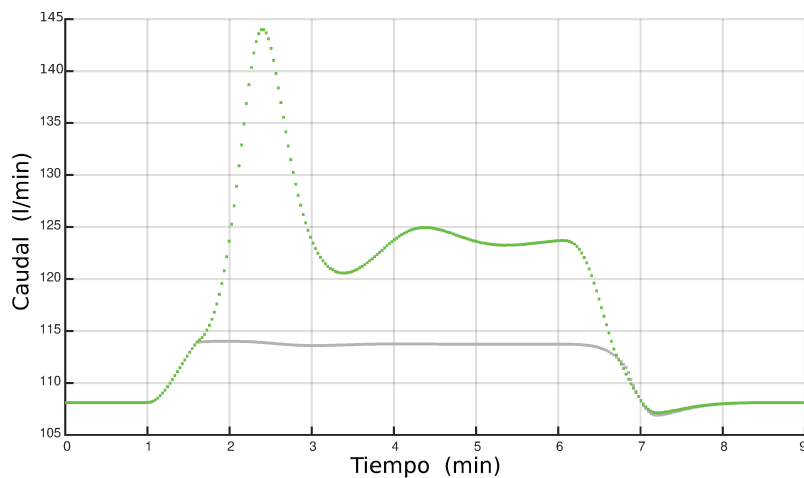


(b) Evolución de los estados

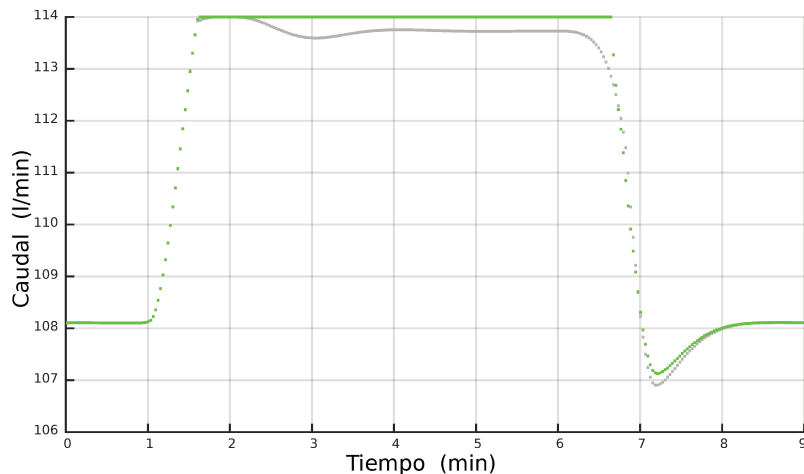
Figura 6.7: Respuesta del sistema, con entrada saturada (color verde) y con entrada restringida (en color gris).

Obsérvese en la figura (6.8 (a)) que el regulador entrega una señal manipulada sin restricciones (color verde), ésta luego pasa por el limitador, simulando al actuador saturado, donde se trunca Fig.(6.8 (b)).

No obstante, utilizando esta señal truncada como entrada al sistema, se mantiene la garantía de estabilidad y desempeño. Esto último se debe a que la señal saturada está incluida en la cáscara convexa de realimentaciones lineales (una sin restricción $u(k) = Fx(k)$ y la otra restringida $v(k) = Hx(k)$), y aunque solo se aplique $u(k)$, que posteriormente el actuador limita, la señal truncada pertenece a la cáscara convexa formada entre $u(k)$ y $v(k)$.



(a) Caudal a la entrada del limitador



(b) Caudal a la entrada del sistema

Figura 6.8: Caudal manipulado, con entrada saturada (color verde) y con entrada restringida (en color gris).

La Fig.(6.9) muestra, para este ejemplo, que el índice de desempeño del sistema que utiliza entrada saturada es mejor que el sistema que utiliza entrada acotada, dando un ρ un poco más chico en cada iteración.

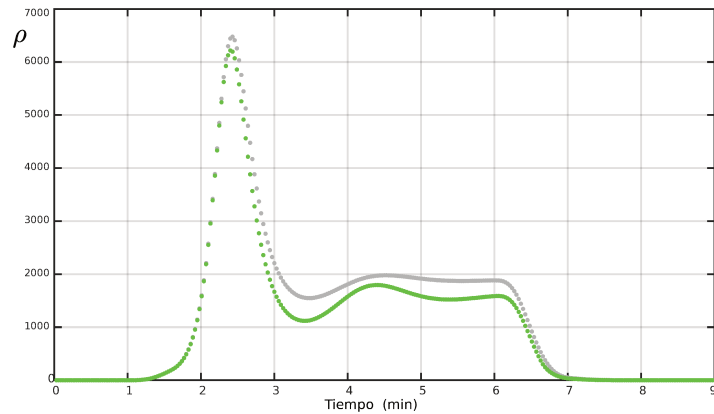
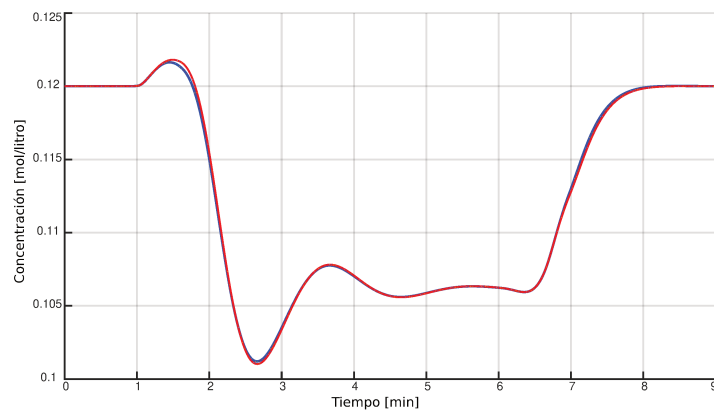
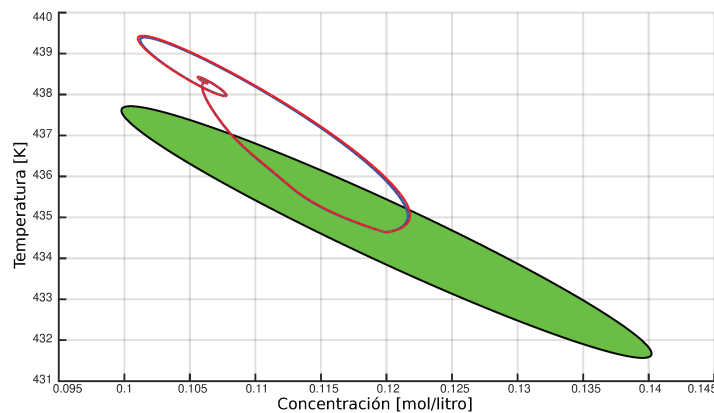


Figura 6.9: Comparación de desempeño entre un regulador que satura y otro que restringe la acción del actuador.

Para finalizar esta prueba se hace uso del conjunto terminal, cuyos resultados se grafican en las figuras (6.10) y (6.11). En las mismas, se compara el comportamiento del sistema con entrada saturada con y sin conmutación, cuando le ingresa una perturbación representada en la Fig.(6.5).



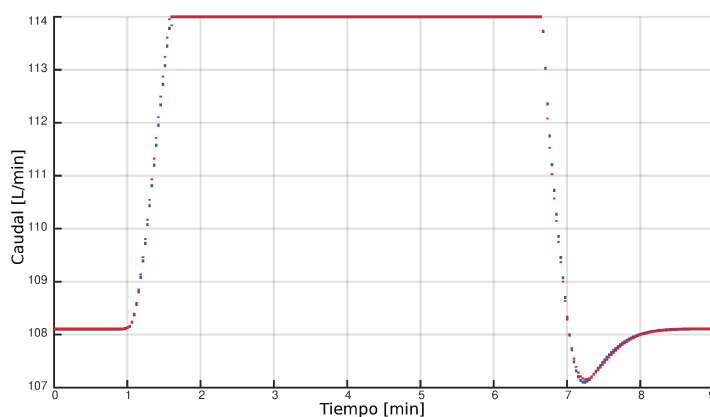
(a) Concentración



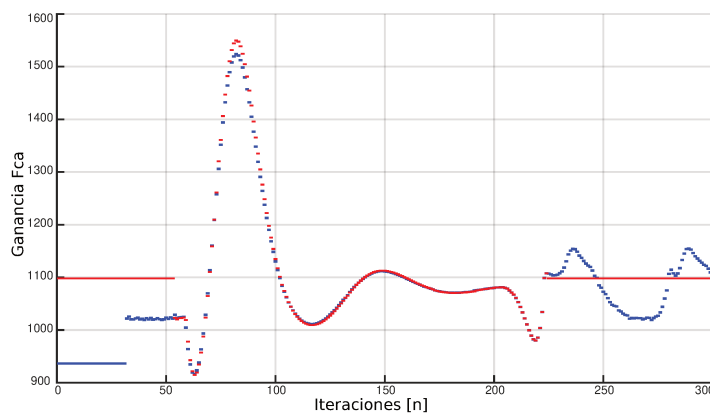
(b) Evolución de los estados y conjunto terminal

Figura 6.10: Respuestas del sistema con entrada saturada, con y sin conmutación con vector de ganancias estático sin restricciones.

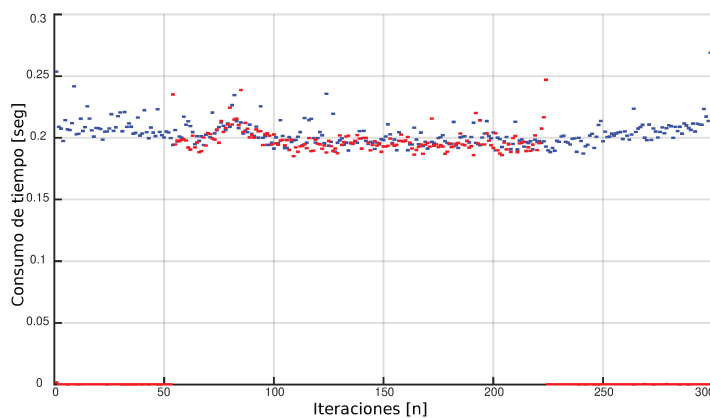
En color azul se muestra la simulación cuando se utiliza un regulador con vector de ganancias variable que no conmuta, y en color rojo se muestra la simulación cuando se utiliza el mismo regulador pero que conmuta con otro que hace uso de un vector de ganancias estático sin restricciones al ingresar los estados al conjunto terminal.



(a) Caudal de entrada al sistema



(b) Ganancia concentración



(c) Tiempo de cálculo

Figura 6.11: Comparación entre simulaciones que utilizan entrada saturada, con y sin conjunto terminal

Como en la simulación realizada en el capítulo anterior, se observa que en la respuesta del sistema, Fig.(6.10), no hay prácticamente diferencias respecto al uso de la conmutación entre reguladores. Sin embargo, sí se nota la diferencia respecto al tiempo de cálculo que le lleva a los algoritmos para determinar las ganancias Fig.(6.11 (c)).

6.6. Resumen

En este capítulo se desarrolló una formulación para el diseño de reguladores que permiten la saturación en el actuador, con el objetivo de lograr un diseño menos conservador haciendo que el actuador opere a su máxima capacidad.

En la sección (6.2) se analizó y determinó qué condiciones deben ser satisfechas para poder representar una señal saturada como una combinación convexa de realimentaciones lineales.

En la sección (6.3) utilizando el concepto del elipsoide invariante se formuló, dentro del marco de las LMI, el diseño de un regulador con saturación para modelo LTI con garantía de estabilidad. Luego en la sección (6.4), se expuso el diseño de un LQR con saturación en la variable manipulada para un modelo LPV.

En la sección (6.5) se realizaron dos simulaciones, primero se comparó la respuesta del sistema y su índice de desempeño cuando éste es realimentado con una entrada saturada y con una entrada sin saturar, donde se notó una sutil mejora del sistema que utiliza entrada saturada. En la segunda simulación, determinando un elipsoide terminal, se comparó la respuesta del sistema y el consumo de tiempo en el algoritmo de cálculo, donde se notó una sensible mejora para el regulador con entrada saturada que utiliza conmutación.

En el próximo capítulo, buscando reducir aún más el conservadurismo, en lugar de utilizar una función de Lyapunov cuadrática como se ha hecho hasta ahora, se utilizará una función de Lyapunov dependiente de la saturación.

Capítulo 7

Diseño de un LQR robusto con saturación en el actuador mediante una función de Lyapunov dependiente de la saturación

7.1. Introducción

El propósito de este capítulo es reducir aún más el conservadurismo en el diseño del controlador, utilizando como enfoque una función Lyapunov dependiente de la saturación. Este enfoque captura información sobre la gravedad de la saturación y conduce a la creación de un controlador menos conservador, ampliando así el dominio de atracción [54].

Durante este capítulo, se analizará la estabilidad de un sistema discreto con saturación en la señal de control mediante el uso de una función de Lyapunov que depende de la saturación. Como se ha mencionado previamente y se demostrará más adelante, esta función proporciona información en cada instante de tiempo sobre la severidad de la saturación en el actuador, lo que a su vez lleva a la implementación de un controlador menos conservador [9].

Es importante destacar estudios previos en sistemas LPV [18] [1], en donde el regulador se diseña basándose en la información obtenida de la variación de los parámetros de la planta e introduciendo en dicho diseño una variable auxiliar, en tal caso, se hizo uso de una función de Lyapunov dependiente de parámetros. En este caso, el procedimiento de análisis es similar, pero en lugar de tener en cuenta la variación de los parámetros de la planta, se tendrá en cuenta el nivel de saturación de la variable manipulada.

7.2. Estabilidad asintótica del origen para un modelo LTI

7.2.1. Determinación de un nuevo dominio de atracción

Según el lema (6.3) $\forall x(k) \in \mathfrak{L}(H)$, es decir, para todo $x(k)$ que satisfaga $|Hx(k)| \leq 1$, la señal saturada puede representarse como

$$\text{sat}[F(k)] = \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) (D_s F + \overline{D_s} H) x(k), \quad s \in [1, 2^m]. \quad (7.1)$$

Y según el teorema (6.1), si se cumplen las restricciones correspondientes, el elipsoide $\epsilon(P, \rho)$ es un invariante contractivo para el sistema (6.31). Garantizando, de esta forma, que el origen sea un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Como se ha visto previamente, en cada iteración $k = \mu\mathcal{K}$ del algoritmo de cálculo, se utiliza un elipsoide inicial como dominio de atracción. Este elipsoide es la proyección sobre el espacio de estado de la función de Lyapunov cuadrática, expresada por $V[x_\mu] = x_\mu' P_\mu x_\mu$, donde se asume $\mathcal{K} = 1$ para mayor claridad. El hecho de que este elipsoide se contraiga a medida que el tiempo aumenta implica que la función de Lyapunov decrece monótonamente, garantizando así la estabilidad asintótica del origen en el espacio de estados.

Ahora bien, la idea es ampliar el dominio de atracción mediante el uso de una función de Lyapunov en la cual la matriz P_μ depende del nivel de saturación. Esto implica que el conjunto de atracción ya no será necesariamente un único elipsoide.

A continuación, se mostrará mediante un ejemplo complementario a la demostración realizada para el lema (6.2), cómo el vector $\delta(k)$ depende de los estados y del grado de saturación. Luego, se definirá una función de Lyapunov dependiente de dicho vector. Es importante destacar que en el capítulo anterior se utilizó una combinación convexa de vectores de coeficientes que dependían del tiempo, representados por $\delta(k)$, pero para ser precisos, este vector realmente depende de los estados y debería ser denotado por $\delta(x(k))$ [9]. No obstante, por simplicidad en la notación, en este texto se continuará utilizando la notación anterior, es decir, $\delta(k)$ para el vector y δ_s para sus elementos.

Ejemplo 7.1:

Considérese el siguiente modelo LTI:

$$x(k+1) = Ax(k) + B \text{ sat}[Fx(k)]. \quad (7.2)$$

Se asume que la matriz de ganancias para la regulación por realimentación lineal de estados F , y la matriz auxiliar H son conocidas.

Luego, para todo $x(k)$ que satisfaga la condición $|Hx(k)| \leq 1$ (lema (6.3)), se puede escribir

$$\text{sat}[Fx(k)] = \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s (D_s F + \overline{D}_s H) x(k), \quad (7.3)$$

y por lo tanto el modelo (7.2), resulta

$$x(k+1) = A_{cl}(\delta(k)) x(k), \quad \forall x(k) \in \mathfrak{L}(H), \quad \text{donde} \quad (7.4)$$

$$A_{cl}(\delta(k)) \triangleq \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s (A + B(D_s F + \overline{D}_s H)), \quad \text{y} \quad \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s = 1.$$

Se desea determinar el vector $\delta(k)$, para tres instantes de tiempo k_1 , k_2 y k_3 , que se correspondan con los siguientes valores de la señal realimentada:

$$a) Fx(k_1) < 1, \quad b) Fx(k_2) = 2, \quad c) Fx(k_3) = 3. \quad (7.5)$$

Resolución 7.1. Se asume una única entrada $u(k) = Fx(k)$, por lo tanto, $m = 1$, y según la definición (6.2), el conjunto \mathfrak{D} , resulta ser

$$\mathfrak{D} = \{D_1 = 0, D_2 = 1\}. \quad (7.6)$$

A continuación, se reescribe la matriz dinámica del modelo realimentado y la señal saturada para esta condición:

$$A_{cl}(\delta(k)) = \delta_1 (A + B(D_1 F + \overline{D}_1 H)) + \delta_2 (A + B(D_2 F + \overline{D}_2 H)), \quad (7.7)$$

$$\text{sat}[Fx(k)] = (\delta_1 (D_1 F + \overline{D}_1 H) + \delta_2 (D_2 F + \overline{D}_2 H)) x(k),$$

resultando

$$A_{cl}(\delta(k)) = \delta_1 (A + BH) + \delta_2 (A + BF),$$

$$\text{sat}[Fx(k)] = (\delta_1 H + \delta_2 F) x(k), \quad (7.8)$$

$$\text{siendo} \quad \delta_1 + \delta_2 = 1.$$

Ahora se procederá al análisis de cada caso para algún valor dado de H , que cumple la condición de que $|Hx(k)| < 1$.

En particular, se supone que para los tres instantes de tiempo, $H = \frac{1}{3}F$ para alguna F conocida.

- a) Para $Fx(k_1) < 1$ la señal no satura, por lo tanto, $\text{sat}[Fx(k_1)] = Fx(k_1)$. Reemplazando en la Ec.(7.8), se obtiene

$$\begin{aligned} Fx(k_1) &= (\delta_1 H + \delta_2 F) x(k_1), \\ Fx(k_1) &= (\delta_1 \frac{1}{3} + \delta_2) Fx(k_1), \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$1 = \delta_1 \frac{1}{3} + \delta_2.$$

Por otro lado, debe cumplirse que $\delta_1 + \delta_2 = 1$.

Resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\delta_1 + \delta_2 &= 1, \\ \delta_1 + \delta_2 &= 1, \end{aligned} \quad (7.10)$$

resulta,

$$\delta_1 = 0, \quad \text{y} \quad \delta_2 = 1. \quad (7.11)$$

Por último, al reemplazar estos coeficientes en la matriz dinámica de la Ec.(7.8), se obtiene:

$$A_{cl}(\delta(x(k_1))) = A + BF, \quad (7.12)$$

Este resultado es el esperado, ya que la variable manipulada no satura.

- b) Para $Fx(k) = 2$, se tiene que $\text{sat}[Fx(k)] = 1$ y reemplazando en la Ec.(7.8), resulta

$$1 = (\delta_1 \frac{1}{3} + \delta_2) \times 2, \quad \text{y} \quad \delta_1 + \delta_2 = 1, \quad (7.13)$$

resolviendo este sistema de ecuaciones, se tiene

$$\delta_1 = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad \delta_2 = \frac{1}{4}. \quad (7.14)$$

Reemplazando en la matriz dinámica de la Ec.(7.8), se tiene

$$\begin{aligned} A_{cl}(\delta(k)) &= \frac{3}{4}(A + BH) + \frac{1}{4}(A + BF), \\ A_{cl}(\delta(k)) &= A + B(\frac{3}{4}H + \frac{1}{4}F), \\ A_{cl}(\delta(k)) &= A + B(\frac{3}{4} \frac{1}{3} + \frac{1}{4})F, \\ A_{cl}(\delta(k)) &= A + B(\frac{1}{2})F, \end{aligned} \quad (7.15)$$

Luego, multiplicando por $x(k)$

$$x(k+1) = Ax(k) + B \underbrace{(\frac{1}{2}) Fx(k)}_2, \quad (7.16)$$

$$x(k+1) = Ax(k) + B \times 1,$$

lo que coincide con la Ec.(7.2).

c) Para $Fx(k) = 3$, se tiene que $\text{sat}[Fx(k)] = 1$ y reemplazando en (7.8), resulta

$$1 = (\delta_1 \frac{1}{3} + \delta_2) \times 3, \quad \text{y} \quad \delta_1 + \delta_2 = 1. \quad (7.17)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se tiene que

$$\delta_1 = 1 \quad \text{y} \quad \delta_2 = 0, \quad (7.18)$$

y reemplazando en la matriz dinámica de la Ec.(7.8), se obtiene

$$\begin{aligned} A_{cl}(\delta(k)) &= A + BH, \\ A_{cl}(\delta(k)) &= A + B(\frac{1}{3})F. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Luego, multiplicando por $x(k)$

$$x(k+1) = Ax(k) + B(\underbrace{\frac{1}{3}}_3)Fx(k), \quad (7.20)$$

$$x(k+1) = Ax(k) + B \times 1,$$

que coincide con la Ec.(7.2).

En este ejemplo se ha representado el modelo (7.2) mediante la ecuación (7.4), y se ha observado cómo los coeficientes varían según el nivel de saturación. A continuación, se utilizará una función de Lyapunov que esté condicionada por estos coeficientes.

7.2.2. Función de Lyapunov dependiente de la saturación

Considérese el modelo del ejemplo (7.1) para un instante inicial $k \geq 0$ y una condición inicial $x(k) \neq 0$.

Sea la matriz $P(\delta(k))$ definida como¹

$$P(\delta(k)) \triangleq \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s P_s, \quad (7.21)$$

siendo $P_s > 0, \quad \forall s \in [1, 2^m]$.

¹[30] Para dos instantes de tiempo consecutivos (k) y $(k+1)$, se tiene:

$$P(\delta(k)) = \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k) P_s(k), \quad \text{y} \quad P(\delta(k+1)) = \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s(k+1) P_s(k+1).$$

Para diferenciarlos, se denomina a $\delta_s(k)P_s(k)$ como $\delta_s P_s$, y a $\delta_s(k+1)P_s(k+1)$ como $\delta_r P_r$.

Definición 7.1:

Se define a la siguiente función:

$$V(x(k)) \triangleq x(k)'P(\delta(k))x(k), \quad (7.22)$$

como función de Lyapunov dependiente de la saturación, y además, se define al siguiente conjunto:

$$\mathfrak{E}(P(\delta(k)), \rho) \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n : V(x(k)) < \rho\}, \quad (7.23)$$

como conjunto de nivel de $V(x(k))$.

El siguiente teorema asegura la estabilidad del origen del modelo LTI retroalimentado a través de una retroalimentación lineal de estados, utilizando una función de Lyapunov dependiente de la saturación:

Teorema 7.1: Condición de conjunto invariante

El conjunto $\mathfrak{E}(P(\delta(k)), \rho)$ es un invariante contractivo para el sistema en lazo cerrado representado por la Ec.(7.4), si existen las matrices $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $G \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, y $P_{s,r} \in \mathfrak{R}^{n \times n} > 0$, $\forall s, r \in [1, 2^m]$, tal que satisfagan las siguientes restricciones:

$$\mathfrak{E}(P(\delta(k)), \rho) \subset \mathfrak{L}(H), \text{ y } \begin{pmatrix} P_s & [G(A + B(D_s F + \overline{D}_s H))]'] \\ G(A + B(D_s F + \overline{D}_s H)) & G + G' - P_r \end{pmatrix} > 0, \quad (7.24)$$

$\forall s, r \in [1, 2^m]$.

Demostración teorema 7.1. *La demostración es similar a la realizada en el teorema (6.1) de la sección (6.3), con algunas variantes debido a la dependencia de la matriz P respecto del vector $\delta(k)$.*

Si las restricciones (7.24) se satisfacen, es lícito escribir

$$\sum_{s=1}^{2^m} \sum_{r=1}^{2^m} \delta_s \delta_r \begin{pmatrix} P_s & [G(A + B(D_s F + \overline{D}_s H))]'] \\ G(A + B(D_s F + \overline{D}_s H)) & G + G' - P_r \end{pmatrix} > 0, \quad (7.25)$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s P_s & \left[G \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s (A + B(D_s F + \overline{D}_s H)) \right]' \\ G \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s (A + B(D_s F + \overline{D}_s H)) & G + G' - \sum_{r=1}^{2^m} \delta_r P_r \end{pmatrix} > 0,$$

resultando

$$\begin{pmatrix} P(\delta(k)) & [GA_{cl}(\delta(k))]'] \\ GA_{cl}(\delta(k)) & G + G' - P(\delta(k+1)) \end{pmatrix} > 0. \quad (7.26)$$

Utilizando el complemento de Schur, se puede afirmar que la desigualdad (7.26) implica:

$$P(\delta(k)) > 0, \quad \text{y} \quad G + G' - P(\delta(k+1)) > 0. \quad (7.27)$$

Además, si se tiene en cuenta la siguiente desigualdad²:

$$(G - P)P^{-1}(G - P)' \geq 0,$$

se puede deducir que:

$$GP^{-1}G' \geq G + G' - P.$$

Por lo tanto, para todo $k \geq 0$, se cumple lo siguiente:

$$GP^{-1}(k+1)G' \geq G + G' - P(k+1) > 0. \quad (7.28)$$

En conclusión, se puede afirmar que si se satisface la desigualdad (7.26), también se satisface la siguiente desigualdad matricial:

$$\begin{pmatrix} P(\delta(k)) & [GA_{cl}(\delta(k))]' \\ GA_{cl}(\delta(k)) & GP^{-1}(k+1)G' \end{pmatrix} > 0. \quad (7.29)$$

Pre y pos multiplicando la desigualdad (7.29) por³

$$\text{diag}\{I, G^{-1}\} \quad \text{y} \quad \text{diag}\{I, (G^{-1})'\} \quad (7.30)$$

respectivamente, se obtiene

$$\begin{pmatrix} P(\delta(k)) & A_{cl}(\delta(k))' \\ A_{cl}(\delta(k)) & P^{-1}(k+1) \end{pmatrix} > 0. \quad (7.31)$$

Aplicando el complemento de Schur, para luego pre y posmultiplicar por $x(k)'$ y $x(k)$ respectivamente, resulta

$$x(k)'P(k)x(k) - \underbrace{x(k)'A_{cl}(\delta(k))'}_{x(k+1)'} P(\delta(k+1)) \underbrace{A_{cl}(\delta(k))x(k)}_{x(k+1)} > 0, \quad (7.32)$$

$$V(x(k)) - V(x(k+1)) > 0,$$

que es lo que se quería demostrar.

Como se comentó en la introducción, la utilización de la variable auxiliar G , fue introducida por [18] y utilizada por [1] para la determinación de una matriz de Lyapunov dependiente de los parámetros del sistema.

Es importante observar que si en el teorema (7.1), se igualan $P_{s,r} = G = P$, $\forall s, r \in [1, 2^m]$, se recupera el teorema (6.1). Es decir, este último es un caso particular del primero, y esto de por sí implica que el teorema (7.1) es menos conservador.

²Esta desigualdad siempre se satisface $\forall P > 0$.

³Con esta multiplicación, la matriz resultante sigue siendo positiva definida como la original.

Con todos los conjuntos de nivel que satisfacen las condiciones de este teorema, se puede hacer una elección del más grande de ellos para obtener la estimación menos conservadora del dominio de atracción [24] [51].

Sin embargo, una simple elección de $\mathfrak{E}(P(\delta(k)), \rho)$ es la intersección de los elipsoides $\epsilon_s(P_s, \rho)$, esto es,

$$\mathfrak{E}(P(\delta(k)), \rho) = \cap_{s=1}^{2^m} \epsilon_s(P_s, \rho). \quad (7.33)$$

Aunque esta estimación es la más sencilla, no obstante, es menos conservadora que la estimación basada en una función de Lyapunov cuadrática [54].

A continuación se reformula el teorema (7.1) para que contenga una restricción LMI que garantice la inclusión $\mathfrak{E}(P(\delta(k)), \rho) \subset \mathfrak{L}(H)$, cuando el conjunto de nivel es el representado por la Ec.(7.33). Se utiliza la desigualdad (6.55) de la sección (6.3) para cada elipsoide correspondiente a la matriz P_s , con $s = 1, 2, \dots, 2^m$.

Esto es, el elipsoide $\epsilon_s(P_s, \rho) \subset \mathfrak{L}(H)$ si

$$1 - h_i \left(\frac{P_s}{\rho} \right)^{-1} h'_i > 0, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, m, \quad (7.34)$$

lo que equivale a que sean factibles las siguiente LMI:

$$\begin{pmatrix} 1 & h_i \\ h'_i & \left(\frac{P_s}{\rho} \right) \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.35)$$

Luego, $\cap_{s=1}^{2^m} \epsilon_s(P_s, \rho) \subset \mathfrak{L}(H)$, si se satisfacen simultáneamente

$$\begin{pmatrix} 1 & h_i \\ h'_i & \left(\frac{P_s}{\rho} \right) \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } i \in [1, m], \text{ y } s \in [1, 2^m]. \quad (7.36)$$

Finalmente, para este conjunto de nivel, el teorema (7.1) puede reformularse del siguiente modo:

Reformulación del teorema (7.1)

El conjunto $\mathfrak{E}(P(\delta(k)), \rho) = \cap_{s=1}^{2^m} \epsilon_s(P_s, \rho)$ es un invariante contractivo para el sistema en lazo cerrado representado por la Ec.(7.4), si existen las matrices $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, $G \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, y $P_{s,r} \in \mathfrak{R}^{n \times n} > 0$, $\forall s, r \in [1, 2^m]$, tal que las siguientes restricciones sean factibles:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & h_i \\ h'_i & \left(\frac{P_s}{\rho}\right) \end{pmatrix}}_{\cap_{s=1}^{2^m} \epsilon_s(P_s, \rho) \subset \mathfrak{L}(H)} > 0, \quad \forall i \in [1, m], \quad \text{y} \quad \forall s \in [1, 2^m], \quad (7.37)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P_s & [G(A + B(D_s F + \overline{D}_s H))] \\ G(A + B(D_s F + \overline{D}_s H)) & G + G' - P_r \end{pmatrix}}_{V(x(k)) > V(x(k+1))} > 0, \quad \forall s, r \in [1, 2^m]. \quad (7.38)$$

7.3. Estabilidad asintótica y desempeño robusto para el modelo LPV

7.3.1. Planteo del problema

Considérese el mismo problema de la subsección (6.4.1), pero con la diferencia de que ahora se considera $P(\delta(k)) > 0$ y $V[x(k)] = x(k)'P(\delta(k))x(k)$, para definir el conjunto de nivel $\mathfrak{E}(P(\delta(k)), \rho) = \{x \in \mathfrak{R}^n : V(x(k)) < \rho\}$.

La meta es obtener una ganancia de realimentación estática F , tal que se logre el siguiente objetivo de desempeño robusto:

$$\min_{u(k), k=0,1,\dots,\infty} \quad \max_{[A(\eta(k)) \mid B(\eta(k))] \in \Omega, k \geq 0} \quad J_\infty(x, \text{sat}[u]), \quad (7.39)$$

donde

$$J_\infty(x, \text{sat}[u]) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} [x(k)'R_x x(k) + (\text{sat}[u(k)])'R_u (\text{sat}[u(k)])],$$

con $R_x \geq 0$ y $R_u > 0$.

(7.40)

El siguiente teorema garantiza la estabilidad del origen y el desempeño robusto de un modelo LPV realimentado mediante una realimentación lineal de estados, utilizando una función de Lyapunov dependiente de la saturación [54]:

Teorema 7.2: Condición de conjunto invariante. Estabilidad y desempeño robusto

Sea $F \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ una matriz de realimentación de estados. El conjunto de nivel $\mathfrak{E}(P(\delta(k)), \rho)$ es un conjunto invariante contractivo para el modelo en lazo cerrado de la Ec.(6.65), si existe una matriz $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ que satisface las siguientes restricciones:

a)

$$P_s - (A_j + B_j (D_s F + \overline{D}_s H))' P_r (A_j + B_j (D_s F + \overline{D}_s H)) > R_x + (D_s F + \overline{D}_s H)' R_u (D_s F + \overline{D}_s H), \quad y \quad (7.41)$$

b)

$$\mathfrak{E}(P(\delta(k)), \rho) \subset \mathfrak{L}(H),$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, n_m, \quad y \quad \forall s, r = 1, 2, \dots, 2^m.$$

c) Además, para cualquier condición inicial $x_0 \in \mathfrak{E}(P(\delta(k)), \rho)$, el índice de desempeño satisface la siguiente desigualdad:

$$J_\infty(x, \text{sat}[u]) < \rho.$$

Para la demostración del teorema (7.2) se utilizará el siguiente lema [53]:

Lema 7.1:

Sean las matrices $M_g \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $g = 1, 2, \dots, l$, y $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $P > 0$.

Si $\sum_{g=1}^l b_g = 1$, y $0 \leq b_g \leq 1$, entonces

$$\left(\sum_{g=1}^l b_g M_g \right)' P \left(\sum_{g=1}^l b_g M_g \right) \leq \sum_{g=1}^l b_g M_g' P M_g. \quad (7.42)$$

Demostración lema 7.1. La demostración formal se encuentra en [53], aquí se ejemplificará para $l = 3$.

A partir de la siguiente desigualdad:

$$(M_g - M_h)' P (M_g - M_h) \geq 0, \quad (7.43)$$

se tiene

$$M_g' P M_g + M_h' P M_h \geq M_g' P M_h + M_h' P M_g. \quad (7.44)$$

El desarrollo del siguiente producto:

$$\left(\sum_{g=1}^3 b_g M_g \right)' P \left(\sum_{g=1}^3 b_g M_g \right), \quad (7.45)$$

resulta igual a

$$\begin{aligned} & b_1^2 M_1' P M_1 + b_2^2 M_2' P M_2 + b_3^2 M_3' P M_3 + \\ & b_1 b_2 (M_1' P M_2 + M_2' P M_1) + b_2 b_3 (M_2' P M_3 + M_3' P M_2) + b_3 b_1 (M_3' P M_1 + M_1' P M_3). \end{aligned} \quad (7.46)$$

Utilizando la desigualdad (7.44), se tiene

$$\begin{aligned} b_1 b_2 (M_1' P M_2 + M_2' P M_1) &\leq b_1 b_2 (M_1' P M_1 + M_2' P M_2), \\ b_2 b_3 (M_2' P M_3 + M_3' P M_2) &\leq b_2 b_3 (M_2' P M_2 + M_3' P M_3), \\ b_3 b_1 (M_3' P M_1 + M_1' P M_3) &\leq b_3 b_1 (M_3' P M_3 + M_1' P M_1), \end{aligned} \quad (7.47)$$

por lo tanto, se puede escribir

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{g=1}^3 b_g M_g \right)' P \left(\sum_{g=1}^3 b_g M_g \right) \leq \\ & b_1^2 M_1' P M_1 + b_2^2 M_2' P M_2 + b_3^2 M_3' P M_3 + \\ & b_1 b_2 (M_1' P M_1 + M_2' P M_2) + b_2 b_3 (M_2' P M_2 + M_3' P M_3) + b_3 b_1 (M_3' P M_3 + M_1' P M_1). \end{aligned} \quad (7.48)$$

Agrupando el segundo miembro de la desigualdad anterior, se tiene

$$M_1' P M_1 \underbrace{b_1 (b_1 + b_2 + b_3)}_{=1} + M_2' P M_2 \underbrace{b_2 (b_1 + b_2 + b_3)}_{=1} + M_3' P M_3 \underbrace{b_3 (b_1 + b_2 + b_3)}_{=1}. \quad (7.49)$$

Finalmente, resulta

$$\left(\sum_{g=1}^3 b_g M_g \right)' P \left(\sum_{g=1}^3 b_g M_g \right) \leq \sum_{g=1}^3 b_g M_g' P M_g, \quad (7.50)$$

que es lo que se quería comprobar.

Utilizando la desigualdad (7.42), se procede a la demostración del teorema (7.2).

Demostración teorema 7.2. Como se hizo anteriormente, la condición de estabilidad y desempeño robusto se establece exigiendo que se cumpla la siguiente desigualdad:

$$\underbrace{V[x(k)] - V[x(k+1)]}_{\Delta V[x(k)]} > x(k)' R_x x(k) + (\text{sat } [u(k)])' R_u (\text{sat } [u(k)]). \quad (7.51)$$

Si la inclusión (b) en (7.41) es satisfecha, utilizando la Ec.(6.67) en la Ec.(6.71), se tiene

$$V[x(k+1)] = x(k)' \left(\sum_{j=1}^{n_m} \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_j \delta_s A'_{cl_{js}} \right) P(k+1) \left(\sum_{j=1}^{n_m} \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_j \delta_s A_{cl_{js}} \right) x(k), \quad (7.52)$$

Por otro lado, utilizando la Ec.(6.67) en el segundo miembro de la desigualdad (7.51), resulta

$$x(k)' \left[R_x + \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s (D_s F + \overline{D}_s H) \right)' R_u \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s (D_s F + \overline{D}_s H) \right) \right] x(k), \quad (7.53)$$

Por lo que la desigualdad (7.51) puede reescribirse como,

$$\begin{aligned} & x(k)' \left[P(k) - \left(\sum_{j=1}^{n_m} \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_j \delta_s A'_{cl_{js}} \right) P(k+1) \left(\sum_{j=1}^{n_m} \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_j \delta_s A_{cl_{js}} \right) \right] x(k) \\ & > x(k)' \left[R_x + \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s (D_s F + \overline{D}_s H) \right)' R_u \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s (D_s F + \overline{D}_s H) \right) \right] x(k). \end{aligned} \quad (7.54)$$

Lo cual implica que la condición de estabilidad y desempeño robusto, se satisface si se mantiene la siguiente desigualdad matricial:

$$\begin{aligned} & P(k) - \left(\sum_{j=1}^{n_m} \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_j \delta_s A'_{cl_{js}} \right) P(k+1) \left(\sum_{j=1}^{n_m} \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_j \delta_s A_{cl_{js}} \right) \\ & > R_x + \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s (D_s F + \overline{D}_s H) \right)' R_u \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s (D_s F + \overline{D}_s H) \right). \end{aligned} \quad (7.55)$$

Por el lema (7.1), se puede asegurar que

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=1}^{n_m} \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_j \delta_s A'_{cl_{js}} \right) P(k+1) \left(\sum_{j=1}^{n_m} \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_j \delta_s A_{cl_{js}} \right) \\ & = \left(\sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j \underbrace{\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s A_{cl_{js}}}_{M_j} \right)' P(k+1) \left(\sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j \underbrace{\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s A_{cl_{js}}}_{M_j} \right) \\ & \leq \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j \underbrace{\left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s A'_{cl_{js}} \right)}_{M'_j} P(k+1) \underbrace{\left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s A_{cl_{js}} \right)}_{M_j} \\ & \leq \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s A'_{cl_{js}} P(k+1) A_{cl_{js}} \\ & = \sum_{j=1}^{n_m} \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_j \delta_s A'_{cl_{js}} P(k+1) A_{cl_{js}}, \end{aligned} \quad (7.56)$$

y

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s (D_s F + \overline{D}_s H) \right)' R_u \left(\sum_{s=1}^{2^m} \delta_s (D_s F + \overline{D}_s H) \right) \\ & \leq \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s (D_s F + \overline{D}_s H)' R_u (D_s F + \overline{D}_s H). \end{aligned} \quad (7.57)$$

Por lo tanto, si se mantiene la siguiente desigualdad:

$$P(k) - \sum_{j=1}^{n_m} \sum_{s=1}^{2^m} \alpha_j \delta_s A'_{cl_{js}} P(k+1) A_{cl_{js}} - R_x - \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s (D_s F + \overline{D}_s H)' R_u (D_s F + \overline{D}_s H) > 0, \quad (7.58)$$

se satisface la desigualdad (7.51).

Reemplazando (7.21), en los tiempos (k) y $(k+1)$, en la desigualdad (7.58), y teniendo en cuenta que

$$\sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j = 1, \quad \sum_{s=1}^{2^m} \delta_s = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{r=1}^{2^m} \delta_r = 1,$$

es posible reescribir la desigualdad (7.58) como la siguiente combinación convexa:

$$\sum_{j=1}^{n_m} \sum_{s=1}^{2^m} \sum_{r=1}^{2^m} \alpha_j \delta_s \delta_r \left[P_s - A'_{cl_{js}} P_r A_{cl_{js}} - R_x - (D_s F + \overline{D}_s H)' R_u (D_s F + \overline{D}_s H) \right] > 0, \quad (7.59)$$

lo que es equivalente a que se satisfagan las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} & P_s - A'_{cl_{js}} P_r A_{cl_{js}} - R_x - (D_s F + \overline{D}_s H)' R_u (D_s F + \overline{D}_s H) > 0, \\ & \forall j \in [1, n_m], \quad \text{y} \quad \forall s, r \in [1, 2^m]. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Finalmente, si se reemplaza (6.70) en (7.60), resulta

$$\begin{aligned} & P_s - (A_j + B_j (D_s F + \overline{D}_s H))' P_r (A_j + B_j (D_s F + \overline{D}_s H)) \\ & > R_x + (D_s F + \overline{D}_s H)' R_u (D_s F + \overline{D}_s H), \end{aligned} \quad (7.61)$$

$$\forall j \in [1, n_m], \quad \text{y} \quad \forall s, r \in [1, 2^m].$$

de esta forma, queda demostrado la primer parte del teorema (7.2). Esto es, si se satisfacen los items (a) y (b) en (7.41), el conjunto de nivel $\mathfrak{E}(P(\delta(k)), \rho)$ es un invariante contractivo.

Para demostrar el item (c) se procede como se hizo anteriormente, es decir, si se satisface la desigualdad (7.61), se satisface (7.51). Luego, tomando esta última desigualdad y haciendo la sumatoria en un intervalo de tiempo infinito, resulta

$$V[x(0)] > \sum_{k=0}^{\infty} [x(k)' R_x x(k) + (\text{sat}[u(k)])' R_u (\text{sat}[u(k)])], \quad (7.62)$$

y dado que

$$\mathfrak{E}(P(\delta(k)), \rho) = \{x \in \mathfrak{R}^n : V(x(k)) < \rho\} \quad \forall k \geq 0, \quad (7.63)$$

$$J_{\infty}(x, \text{sat}[u]) < \rho.$$

lo cual completa la prueba.

Diseño de regulador

Con base en la condición de conjunto invariante establecida en el teorema (7.2), se plantea a continuación un problema de minimización para calcular el vector de ganancias del regulador, junto con una formulación LMI para resolverlo.

$$\min_{P_s > 0, P_r > 0, F, H} \rho, \quad \text{s.a. :} \quad (7.64)$$

1.

$$x(0)' P_s x(0) < \rho,$$

2.

$$\cap_{s=1}^{2^m} \epsilon_s(P_s, \rho) \subset \mathcal{L}(H),$$

3.

$$P_s - (A_j + B_j (D_s F + \overline{D_s H})')' P_r (A_j + B_j (D_s F + \overline{D_s H})) >$$

$$R_x + (D_s F + \overline{D_s H})' R_u (D_s F + \overline{D_s H}),$$

con $s = 1, 2, \dots, 2^m$, $r = 1, 2, \dots, 2^m$, y $j = 1, 2, \dots, n_m$.

Teorema 7.3: Solución al problema (7.64) vía LMI.

En el intervalo $k = \mu \mathcal{K}^a$, la ganancia de realimentación F puede ser obtenida mediante $F = YG^{-1}$, donde Y y G son soluciones del siguiente problema de optimización LMI:

$$\min_{Q_s > 0, Q_r > 0, Y, Z, G} \rho, \quad \text{s.a. :} \quad (7.65)$$

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_{\mu \mathcal{K}} \\ x_{\mu \mathcal{K}} & G' + G - Q_s \end{pmatrix} > 0,$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & z_i \\ z'_i & Q_s \end{pmatrix} > 0.$$

3.

$$\begin{pmatrix} Q_s & (A_j G + B_j (D_s Y + \overline{D_s Z})') & G' R_x^{1/2} & (D_s Y + \overline{D_s Z})' R_u^{1/2} \\ (A_j G + B_j (D_s Y + \overline{D_s Z})) & G' + G - Q_r & 0 & 0 \\ R_x^{1/2} G & 0 & \rho & 0 \\ R_u^{1/2} (D_s Y + \overline{D_s Z}) & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} > 0.$$

Donde $s = 1, 2, \dots, 2^m$, $r = 1, 2, \dots, 2^m$, $i = 1, 2, \dots, m$, y $j = 1, 2, \dots, n_m$.

Además, siendo $G \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ invertible, se han definido las siguientes variables

$$Q_s \triangleq G' \frac{P_s}{\rho} G, \quad Q_r \triangleq G' \frac{P_r}{\rho} G, \quad Y \triangleq FG, \quad Z \triangleq HG, \quad z_i \triangleq h_i G.$$

^aComo ya se sabe, $k = \mu \mathcal{K}$ es el instante inicial para el algoritmo de cálculo.

Demostración teorema 7.3. *Se comenzará con el ítem (3) del problema (7.64), dado que es allí donde se define la variable matricial G de la que dependen las otras variables matriciales.*

- *En la desigualdad del ítem (3) dividiendo por ρ , se tiene*

$$\begin{aligned} & \left(\frac{P_s}{\rho} \right) - (A_j + B_j \ (D_s F + \overline{D_s} H))' \left(\frac{P_r}{\rho} \right) (A_j + B_j \ (D_s F + \overline{D_s} H)) \\ & - \left(\frac{R_x}{\rho} \right) - (D_s F + \overline{D_s} H)' \left(\frac{R_u}{\rho} \right) (D_s F + \overline{D_s} H) > 0. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Renombrando

$$A_{cl_{js}} = A_j + B_j \ (D_s F + \overline{D_s} H), \quad (7.67)$$

y definiendo

$$M \triangleq D_s F + \overline{D_s} H. \quad (7.68)$$

Se reescribe la desigualdad (7.66) como

$$\left(\frac{P_s}{\rho} \right) - A'_{cl_{js}} \left(\frac{P_r}{\rho} \right) A_{cl_{js}} - \left(\frac{R_x}{\rho} \right) - M' \left(\frac{R_u}{\rho} \right) M > 0, \quad (7.69)$$

la cual, utilizando el complemento de Schur, puede ser representada como la siguiente LMI:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{P_s}{\rho} \right) - \left(\frac{R_x}{\rho} \right) - M' \left(\frac{R_u}{\rho} \right) M & A'_{cl_{js}} \\ A_{cl_{js}} & \left(\frac{P_r}{\rho} \right)^{-1} \end{pmatrix} > 0. \quad (7.70)$$

Considérese una matriz $K \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ invertible. Luego, premultiplicando por $\text{diag}(I, K)$ y posmultiplicando por $\text{diag}(I, K')$, resulta

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{P_s}{\rho} \right) - \left(\frac{R_x}{\rho} \right) - M' \left(\frac{R_u}{\rho} \right) M & A'_{cl_{js}} K' \\ K A_{cl_{js}} & K \left(\frac{P_r}{\rho} \right)^{-1} K' \end{pmatrix} > 0. \quad (7.71)$$

Teniendo en cuenta que

$$\left(K - \frac{P_r}{\rho} \right) \left(\frac{P_r}{\rho} \right)^{-1} \left(K - \frac{P_r}{\rho} \right)' \geq 0, \quad (7.72)$$

se obtiene

$$K \left(\frac{P_r}{\rho} \right)^{-1} K' \geq K' + K - \left(\frac{P_r}{\rho} \right). \quad (7.73)$$

Por lo tanto, si se satisface

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{P_s}{\rho} \right) - \left(\frac{R_x}{\rho} \right) - M' \left(\frac{R_u}{\rho} \right) M & A'_{cl_{js}} K' \\ KA_{cl_{js}} & K' + K - \left(\frac{P_r}{\rho} \right) \end{pmatrix} > 0, \quad (7.74)$$

con $P_s > 0$ y $P_r > 0$, también se satisface la desigualdad (7.71).

La desigualdad (7.74) puede representarse de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{P_s}{\rho} \right) & A'_{cl_{js}} K' \\ KA_{cl_{js}} & K' + K - \left(\frac{P_r}{\rho} \right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{R_x}{\rho} \right) + M' \left(\frac{R_u}{\rho} \right) M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} > 0, \quad (7.75)$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{P_s}{\rho} \right) & A'_{cl_{js}} K' \\ KA_{cl_{js}} & K' + K - \left(\frac{P_r}{\rho} \right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_x^{\frac{1}{2}} & M' R_u^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_x^{\frac{1}{2}} & 0 \\ R_u^{\frac{1}{2}} M & 0 \end{pmatrix} > 0, \quad (7.76)$$

y utilizando el complemento de Schur, resulta

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{P_s}{\rho} \right) & A'_{cl_{js}} K' \\ KA_{cl_{js}} & K' + K - \left(\frac{P_r}{\rho} \right) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} R_x^{\frac{1}{2}} & M' R_u^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} R_x^{\frac{1}{2}} & 0 \\ R_u^{\frac{1}{2}} M & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \end{pmatrix} > 0. \quad (7.77)$$

Premultiplicando por $\text{diag}(K^{-1}, K^{-1}, I, I)$ y posmultiplicando por $\text{diag}(K^{-T}, K^{-T}, I, I)$, se obtiene⁴

⁴Aquí se optó por escribir K^{-T} en lugar de $(K')^{-1}$, por ser una representación más concisa.

$$\begin{pmatrix} K^{-1} \left(\frac{P_s}{\rho} \right) K^{-T} & K^{-1} A'_{cl_{js}} & K^{-1} R_x^{\frac{1}{2}} & K^{-1} M' R_u^{\frac{1}{2}} \\ A_{cl_{js}} K^{-T} & \left(K^{-1} + K^{-T} - K^{-1} \left(\frac{P_r}{\rho} \right) K^{-T} \right) & 0 & 0 \\ R_x^{\frac{1}{2}} K^{-T} & 0 & \rho & 0 \\ R_u^{\frac{1}{2}} M K^{-T} & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} > 0. \quad (7.78)$$

Definiendo $G \triangleq K^{-T}$ y reemplazando esta variable en la desigualdad anterior, resulta

$$\begin{pmatrix} G' \left(\frac{P_s}{\rho} \right) G & G' A'_{cl_{js}} & G' R_x^{\frac{1}{2}} & G' M' R_u^{\frac{1}{2}} \\ A_{cl_{js}} G & \left(G' + G - G' \left(\frac{P_r}{\rho} \right) G \right) & 0 & 0 \\ R_x^{\frac{1}{2}} G & 0 & \rho & 0 \\ R_u^{\frac{1}{2}} M G & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} > 0. \quad (7.79)$$

Reemplazando en esta desigualdad con la Ec.(7.67) y la Ec.(7.68), se puede escribir

$$\begin{pmatrix} G' \left(\frac{P_s}{\rho} \right) G & G' (A_j + B_j (D_s F + \overline{D}_s H))' & G' R_x^{\frac{1}{2}} & G' (D_s F + \overline{D}_s H)' R_u^{\frac{1}{2}} \\ (A_j + B_j (D_s F + \overline{D}_s H)) G & G' + G - G' \left(\frac{P_r}{\rho} \right) G & 0 & 0 \\ R_x^{\frac{1}{2}} G & 0 & \rho & 0 \\ R_u^{\frac{1}{2}} (D_s F + \overline{D}_s H) G & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} > 0. \quad (7.80)$$

Finalmente, definiendo

$$Q_s \triangleq G' \left(\frac{P_s}{\rho} \right) G, \quad Q_r \triangleq G' \left(\frac{P_r}{\rho} \right) G, \quad Y \triangleq FG, \quad Z \triangleq HG, \quad (7.81)$$

se obtiene

$$\begin{pmatrix} Q_s & (A_j G + B_j (D_s Y + \overline{D}_s Z))' & G' R_x^{\frac{1}{2}} & (D_s Y + \overline{D}_s Z)' R_u^{\frac{1}{2}} \\ A_j G + B_j (D_s Y + \overline{D}_s Z) & G' + G - Q_r & 0 & 0 \\ R_x^{\frac{1}{2}} G & 0 & \rho & 0 \\ R_u^{\frac{1}{2}} (D_s Y + \overline{D}_s Z) & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} > 0, \quad (7.82)$$

con lo cual queda demostrado que si se satisface el ítem (3) del teorema (7.3), se satisface el ítem (3) del problema (7.64).

- La condición inicial del ítem (1) del problema (7.64), es reemplazada por $x_{\mu\mathcal{K}}$. Luego, la desigualdad

$$x'_{\mu\mathcal{K}} P_s x_{\mu\mathcal{K}} < \rho, \quad \text{con } s = 1, 2, \dots, 2^m, \quad (7.83)$$

equivale a la siguiente LMI:

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_{\mu\mathcal{K}} \\ x_{\mu\mathcal{K}} & \left(\frac{P_s}{\rho}\right)^{-1} \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } s = 1, 2, \dots, 2^m. \quad (7.84)$$

Cada LMI en (7.84) puede reescribirse como

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_{\mu\mathcal{K}} \\ x_{\mu\mathcal{K}} & G G^{-1} \left(\frac{P_s}{\rho}\right)^{-1} G^{-T} G' \end{pmatrix} > 0, \quad (7.85)$$

o bien, como

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_{\mu\mathcal{K}} \\ x_{\mu\mathcal{K}} & G \left(G' \left(\frac{P_s}{\rho}\right) G\right)^{-1} G' \end{pmatrix} > 0, \quad (7.86)$$

siendo $Q_s = G' \left(\frac{P_s}{\rho}\right) G$, se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_{\mu\mathcal{K}} \\ x_{\mu\mathcal{K}} & G Q_s^{-1} G' \end{pmatrix} > 0. \quad (7.87)$$

Utilizando la desigualdad

$$G Q_s^{-1} G' \geq G' + G - Q_s, \quad (7.88)$$

se puede afirmar que si la siguiente desigualdad se mantiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_{\mu\mathcal{K}} \\ x_{\mu\mathcal{K}} & G' + G - Q_s \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } s = 1, 2, \dots, 2^m, \quad (7.89)$$

entonces se mantiene la desigualdad (7.87). Por lo tanto, si se satisface el ítem (1) del teorema (7.3), se satisface el ítem (1) del problema (7.64).

- Como ya se ha visto en la desigualdad (7.36) para la reformulación del teorema (7.1), la condición $\cap_{s=1}^{2^m} \epsilon_s(P_s, \rho) \subset \mathfrak{L}(H)$, con $s \in [1, 2^m]$, se satisface, si se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$1 - h_i \left(\frac{P_s}{\rho} \right)^{-1} h'_i > 0, \quad \text{con } s = 1, 2, \dots, 2^m, \quad \text{e } i = 1, 2, \dots, m, \quad (7.90)$$

las que pueden reescribirse como

$$1 - h_i G \left(G' \left(\frac{P_s}{\rho} \right) G \right)^{-1} G' h'_i > 0, \quad \text{con } s = 1, 2, \dots, 2^m, \quad \text{e } i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.91)$$

Siendo $z_i = h_i G$, se tiene

$$1 - z_i Q_s^{-1} z'_i > 0, \quad \text{con } s = 1, 2, \dots, 2^m, \quad \text{e } i = 1, 2, \dots, m, \quad (7.92)$$

y expresando esta última desigualdad como una LMI, resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & z_i \\ z'_i & Q_s \end{pmatrix} > 0, \quad \text{con } s = 1, 2, \dots, 2^m, \quad \text{e } i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.93)$$

A continuación se muestra un resumen comparativo para obtener la solución de un LQR robusto en tiempo discreto, con entrada saturada utilizando una función de Lyapunov cuadrática y utilizando una función de Lyapunov dependiente de la saturación.

LQR Robusto con entrada saturada. Función de Lyapunov cuadrática

$$\min_{\rho, Y, Q > 0} \rho, \quad \text{s.a. :}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_{\mu\mathcal{K}} \\ x_{\mu\mathcal{K}} & Q \end{pmatrix} > 0.$$

$$\begin{pmatrix} Q & QA'_j + (D_s Y + \overline{D_s Z})' B'_j & QR_x^{1/2} & (D_s Y + \overline{D_s Z})' R_u^{1/2} \\ A_j Q + B_j (D_s Y + \overline{D_s Z}) & Q & 0 & 0 \\ R_x^{1/2} Q & 0 & \rho I & 0 \\ R_u^{1/2} (D_s Y + \overline{D_s Z}) & 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix} > 0,$$

$$\forall s \in [1, 2^m] \quad \text{y} \quad j \in [1, n_m].$$

$$\begin{pmatrix} 1 & z_i \\ z'_i & Q \end{pmatrix} > 0, \quad \forall i \in [1, m].$$

$$\text{Siendo} \quad \rho > 0, \quad Q \triangleq P^{-1}\rho, \quad Y \triangleq FQ, \quad Z \triangleq HQ, \quad z_i \triangleq h_i Q,$$

LQR robusto con entrada saturada. Función de Lyapunov dependiente de la saturación

$$\min_{Q_s > 0, Q_q > 0, Y, Z, G} \rho, \quad \text{s.a. :}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x'_{\mu\mathcal{K}} \\ x_{\mu\mathcal{K}} & G' + G - Q_s \end{pmatrix} > 0,$$

$$\begin{pmatrix} Q_s & (A_j G + B_j (D_s Y + \overline{D_s Z}))' & G' R_x^{1/2} & (D_s Y + \overline{D_s Z})' R_u^{1/2} \\ (A_j G + B_j (D_s Y + \overline{D_s Z})) & G' + G - Q_r & 0 & 0 \\ R_x^{1/2} G & 0 & \rho & 0 \\ R_u^{1/2} (D_s Y + \overline{D_s Z}) & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} > 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & z_i \\ z'_i & Q_s \end{pmatrix} > 0,$$

$$\text{donde} \quad s = 1, 2, \dots, 2^m, \quad r = 1, 2, \dots, 2^m, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \text{y} \quad j = 1, 2, \dots, n_m.$$

Además, siendo $G \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ invertible, se han definido las siguientes variables:

$$Q_s \triangleq G' \frac{P_s}{\rho} G, \quad Q_r \triangleq G' \frac{P_r}{\rho} G, \quad Y \triangleq FG, \quad Z \triangleq HG, \quad z_i \triangleq h_i G.$$

7.4. Simulación

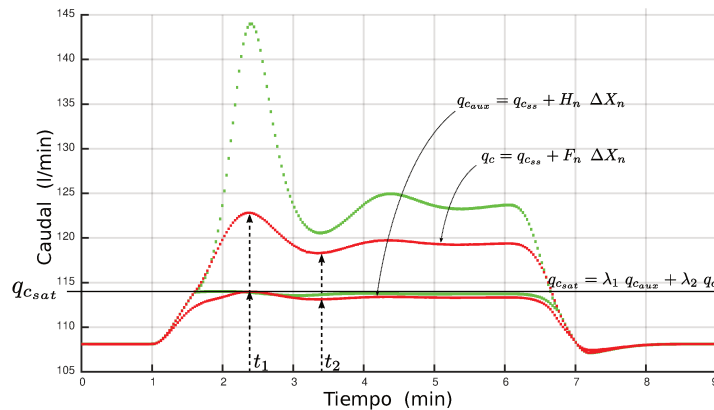
Para comparar el comportamiento de la respuesta del sistema realimentado con entrada saturada en la que se han utilizado, para el cálculo de la ganancia, una función de Lyapunov cuadrática y una función de Lyapunov dependiente de la saturación, se repiten las condiciones planteadas en la sección (6.5).

En la Fig.(6.5) se muestra la perturbación aplicada en la concentración C_{Ae} , y en la Fig.(6.6) se presenta el diagrama esquemático del proceso. El sistema está estabilizado en $C_{A_{ss}} = 0,12 \text{ mol/l}$, y el límite máximo del caudal manipulado se fijó en 114 l/min .

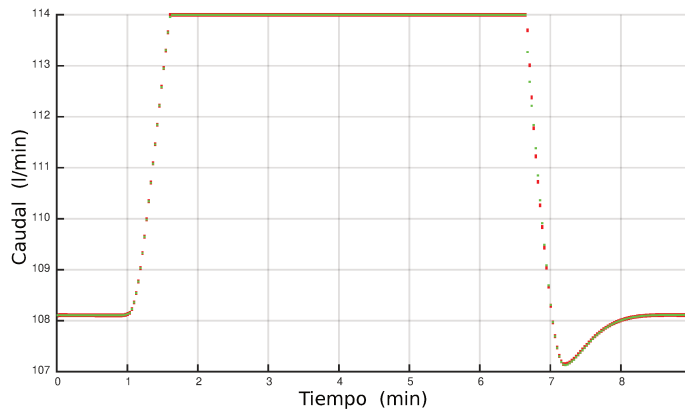
Para realizar esta comparación se van a presentar cuatro ejemplos.

7.4.1. Ejemplo 1

En la figuras (7.1 y 7.2) se exhiben los resultados de la simulación. Las gráficas en color verde corresponden al uso de un regulador con entrada saturada que emplea una función cuadrática, y en rojo corresponden a la utilización de un regulador con entrada saturada que emplea una función dependiente de la saturación (SDLF).



(a) Caudal a la entrada del limitador y caudal auxiliar

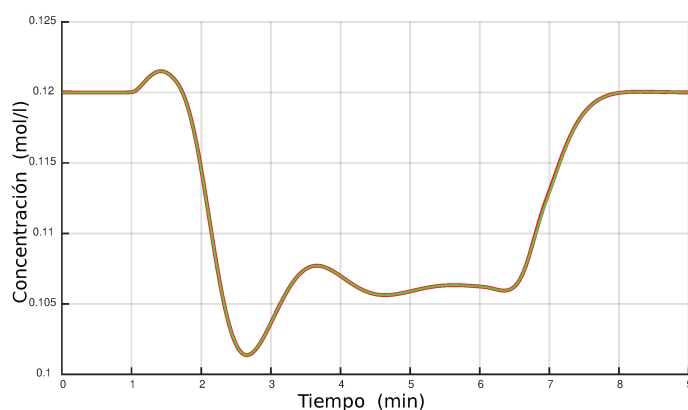


(b) Caudal a la entrada del sistema

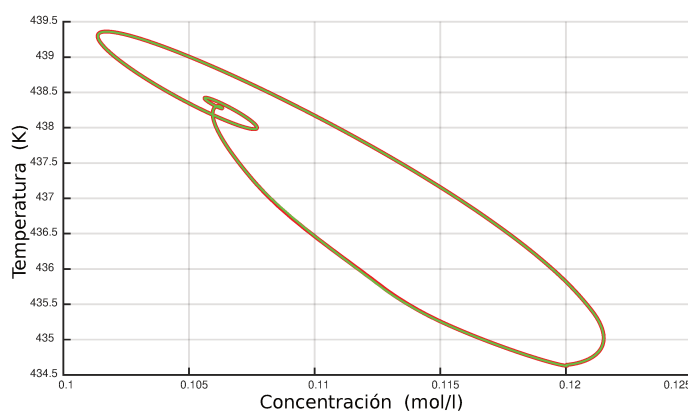
Figura 7.1: Resultados de la simulación

En la figura (7.1 (a)) se observa que ambos reguladores generan los caudales manipulados sin restricciones, y también los caudales auxiliares. Si bien estos últimos no se aplican, son necesarios para dar garantía de estabilidad. En color negro se muestra el nivel de saturación fijado, y cómo puede ser construido con una combinación convexa de los dos caudales mencionados.

La figura (7.1 (b)) muestra que durante la saturación, al sistema le ingresa la misma señal independientemente del regulador utilizado, solo se aprecia una pequeña diferencia entre sus flancos, por lo tanto, para ambos sistemas de control la respuesta de la variable controlada es prácticamente la misma, como se observa en la Fig.(7.2).



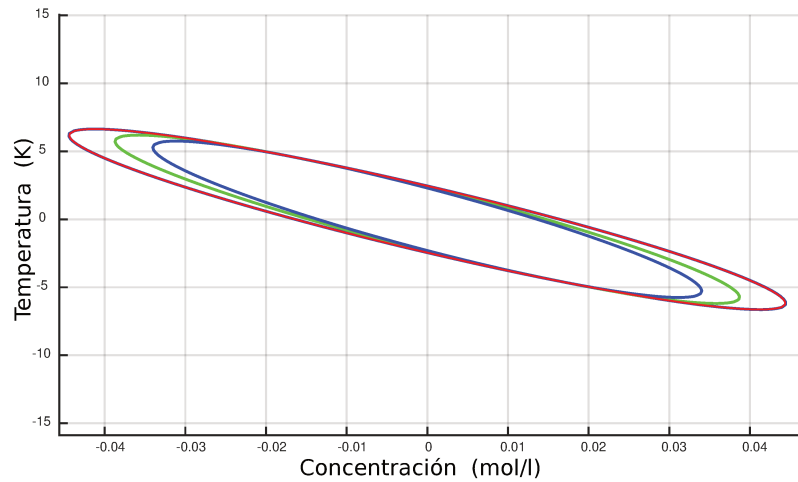
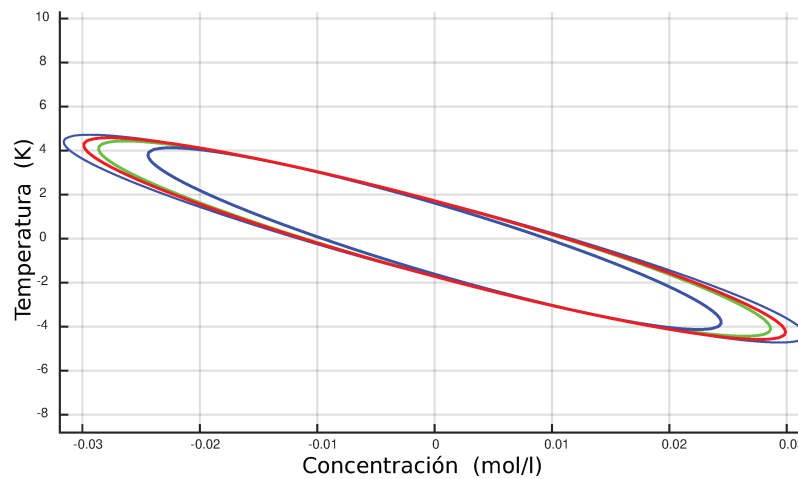
(a) Concentración



(b) Evolución de los estados

Figura 7.2: Respuesta del sistema realimentado con los dos reguladores en presencia de la perturbación en C_{A_c} .

Sin embargo, existe una notoria diferencia entre sus dominios de atracción, como se muestra en las figuras (7.3 (a)) y (7.3 (b)). Estas gráficas se explican a continuación:

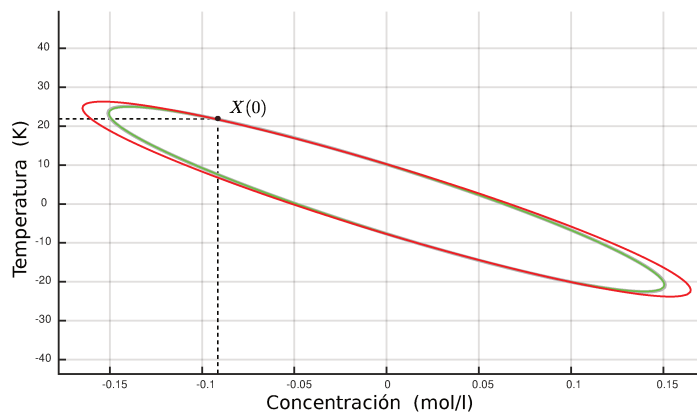
(a) Dominio de atracción en t_1 (b) Dominio de atracción en t_2 Figura 7.3: Dominio de atracción en los instantes t_1 y t_2 .

La Fig.(7.1 (a)) indica, para dos tiempos diferentes (t_1 y t_2), que se toma una muestra del valor del caudal entregado y el valor del caudal auxiliar, calculados por el regulador SDLF, ambos caudales están representados en color rojo. Con dichos valores y el valor del caudal con el que se satura la manipulada, representado por la línea negra, se determinan los coeficientes λ_1 y λ_2 . También en esos tiempos el algoritmo entrega los valores de las matrices P_1 y P_2 , con los cuales simplemente se calcula la matriz P como su combinación convexa, esto es, $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$.

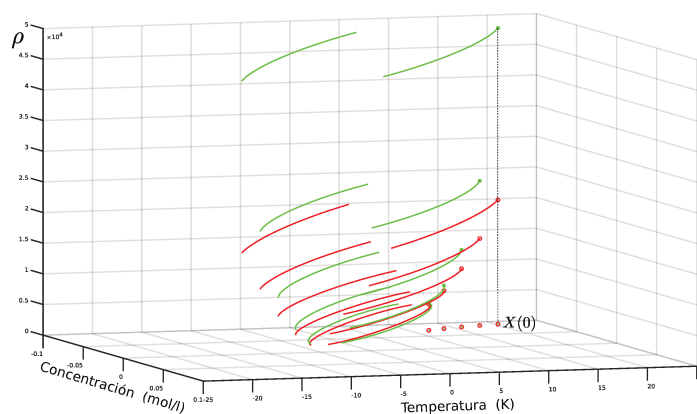
En cada una de las figuras (7.3 (a)) y (7.3 (b)) que se corresponden con los tiempo t_1 y t_2 respectivamente, las elipses correspondientes a P_1 y P_2 están representadas con color azul, y con color rojo está representada la elipse correspondiente a la matriz P , mientras que en color verde se representa la elipse generada por el algoritmo que utiliza una función cuadrática. Claramente se observa, en ambas figuras, que la elipse en color rojo es más grande que la elipse en color verde.

Aumentar el dominio de atracción significa que el regulador, calculado para una determinada condición inicial, tiene mayor alcance. Es decir, hay estados que

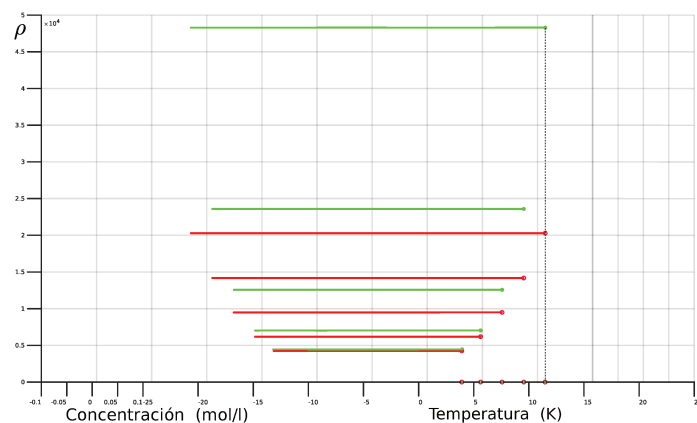
este regulador puede controlar, mientras que otro con menor alcance no. Pero además, como muestra la Fig.(7.4) y solo a modo ilustrativo, aumentar el dominio de atracción implica mejorar (disminuir) el índice de desempeño ρ .



(a) Elipsoide inicial



(b) F. de Lyapunov



(c) F. de Lyapunov

Figura 7.4: Elipsoide inicial, función de Lyapunov e índice de desempeño (ρ). En color verde: función de Lyapunov cuadrática, y en color rojo: función de Lyapunov dependiente de la saturación.

7.4.2. Ejemplo 2: Cambio del nivel de saturación

Continuando con el análisis del comportamiento del sistema con este tipo de reguladores, se realizó otro ensayo en el que se redujo el nivel de saturación, llevándolo de 114 l/min a 110 l/min, obteniéndose los siguientes resultados que se comentan a continuación.

El algoritmo que utiliza una función de Lyapunov cuadrática para el cálculo del vector ganancia, arrojó un resultado infactible. Mientras que el algoritmo que utiliza SDLF encontró los valores de las ganancias sin inconveniente. Esto se muestra en la Fig.(7.5). Como antes, en color verde y rojo está representada la simulación para ambos reguladores cuando el nivel de saturación es 114 l/min, mientras que en color negro está representada la simulación para el regulador que utiliza SDLF, con un nivel de saturación de 110 l/min.

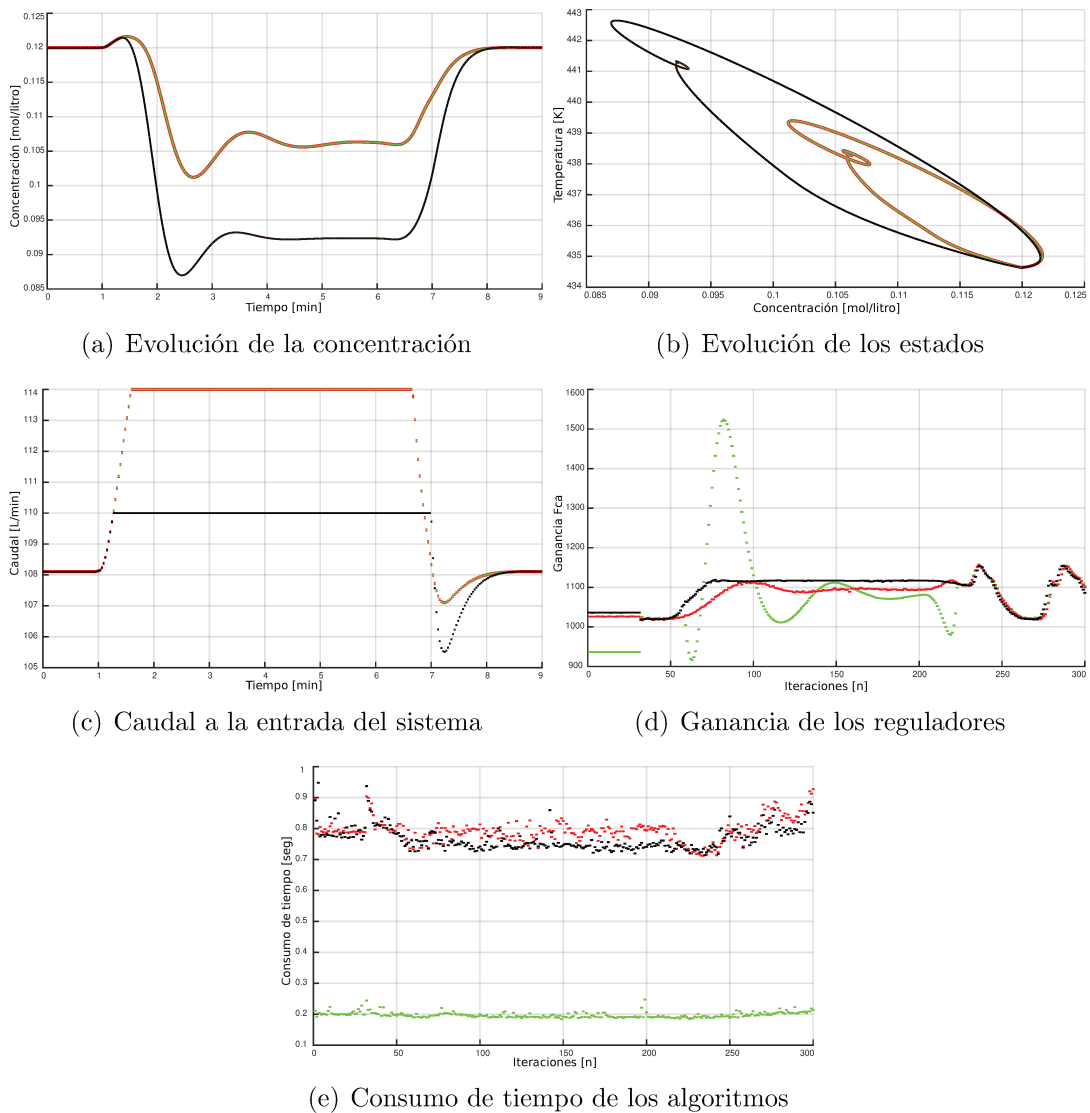


Figura 7.5: Resultado de la simulación para ambos reguladores con $q_{sat} = 114$ l/min, y $q_{sat} = 110$ l/min para el regulador que utiliza FLDS.

7.4.3. Ejemplo 3: Incorporación de un conjunto terminal

En la Fig.(7.5 (e)) se observa el consumo de tiempo de los dos algoritmos para cada iteración, notándose que el algoritmo SDLF es aproximadamente cuatro veces más lento que el que solo utiliza una función cuadrática. Claramente la ventaja de construir un regulador menos conservador tiene como contrapartida un aumento notable en el tiempo de cálculo.

Con la finalidad de reducir el tiempo de cálculo cuando sea posible, se construyó un elipsoide terminal para poder aplicar una ganancia estática sin restricciones.

Sin embargo, este conjunto terminal resultó ser muy pequeño debido a la restricción impuesta en la variable manipulada, téngase en cuenta que ahora $q_{sat} = 110$ l/min. Esto se puede apreciar en la Fig.(7.6).

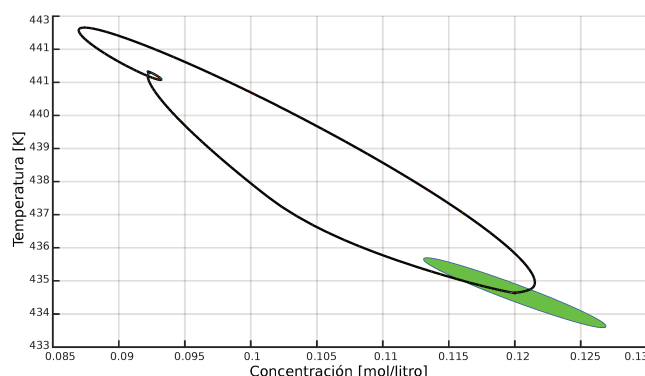


Figura 7.6: Evolución de los estados y región terminal para $C_{A_{ss}} = 0,12$ mol/l y $q_{sat} = 110$ l/min.

Aumento del tamaño del conjunto terminal

Para poder aumentar el tamaño del conjunto terminal, se calcularon diferentes elipsoides siguiendo la evolución de los estados durante la perturbación. Es decir, se construyeron otros conjuntos terminales para distintos puntos de equilibrio del sistema realimentado, y se modificó el algoritmo de cálculo para que pueda conmutar entre estos conjuntos, de esta forma, la región terminal resultante es la unión de todos ellos. Esto se observa en la Fig.(7.7).

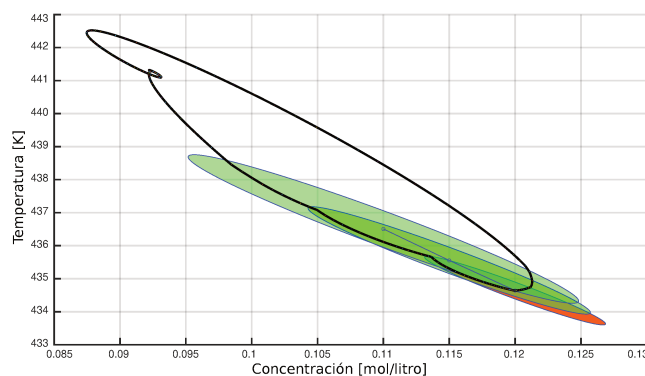
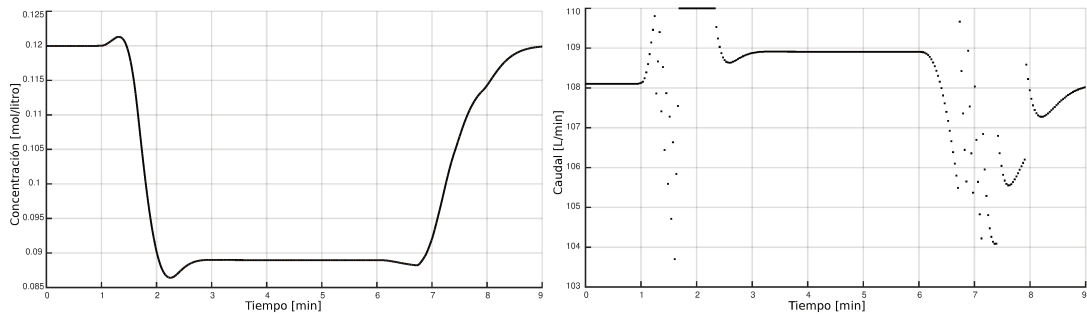


Figura 7.7: Aumento de la región terminal mediante la unión de elipsoides

Aplicando este concepto se repite la simulación cuyo resultado se puede observar en la Fig.(7.8).

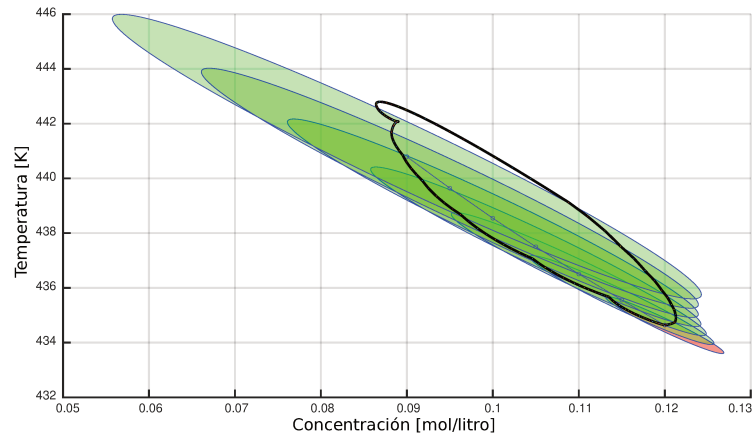
Para esta simulación se construyeron siete elipsoides terminales centrados en los puntos de equilibrio que van desde $C_{A_{ss}} = 0,12 \text{ mol/l}$ a $C_{A_{ss}} = 0,09 \text{ mol/l}$, con incrementos $\Delta C_{A_{ss}} = -0,005 \text{ mol/l}$.

Se puede observar que el LQR con FLDS, siendo $q_{sat} = 110 \text{ l/min}$, actúa solamente durante un pequeño intervalo de tiempo, cuando los estados están fuera del conjunto terminal. Dentro del mismo, actúa un LQR con ganancia estática reduciéndose considerablemente el tiempo de cómputo del algoritmo de cálculo.

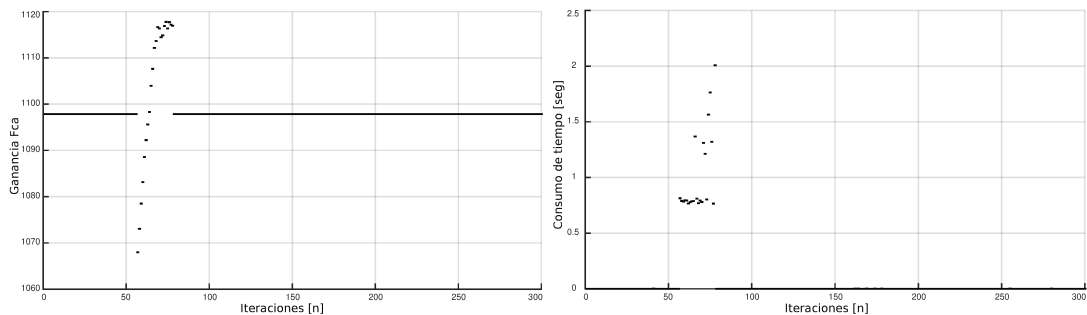


(a) Evolución de la concentración

(b) Caudal manipulado



(c) Evolución de los estados y región terminal



(d) Ganancia del regulador

(e) Consumo de tiempo del algoritmo

Figura 7.8: Resultados de la simulación para un regulador que conmuta entre un LQR con FLDS y un LQR con ganancia estática.

7.4.4. Ejemplo 4

Para finalizar este estudio, se realizó otra simulación que tuvo en cuenta una perturbación de estados y una perturbación en el parámetro C_{A_e} del sistema.

Esto es, para el sistema que está estabilizado en $C_{A_{ss}} = 0,12 \text{ mol/l}$ se parte de una concentración inicial $C_A = 0,06 \text{ mol/l}$, y se aplica una perturbación en C_{A_e} en ambos sentidos, como se muestra en la Fig.(7.9).

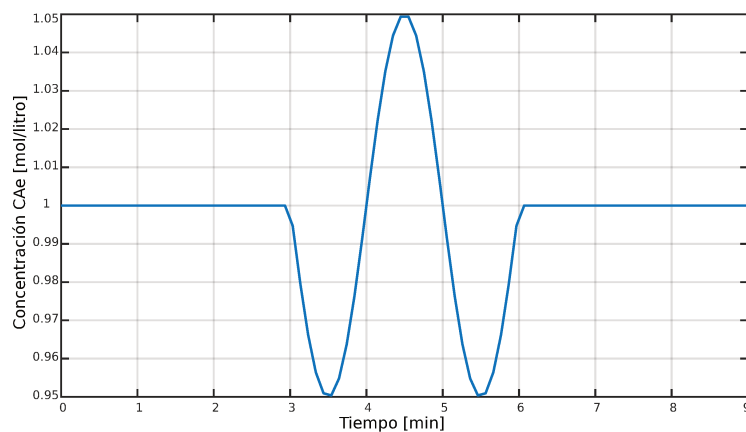


Figura 7.9: Perturbación en C_{A_e}

Para poder aplicar el regulador con ganancia de realimentación estática sin restricciones, se construyó un conjunto terminal para $q_{sat} = 110 \text{ l/min}$ que abarca todo el rango de operación, esto puede observarse en la Fig.(7.10). En la misma también se observa, en color rojo, la evolución de los estados donde el tramo en color negro destaca el intervalo en el que el regulador con FLDS satura.

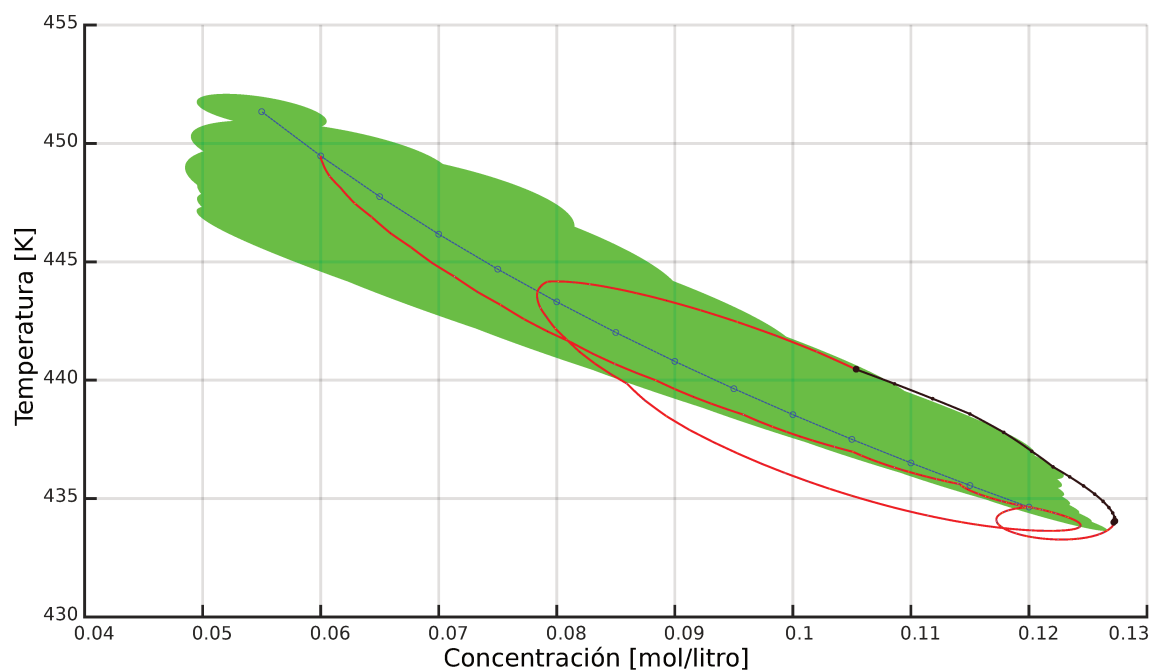
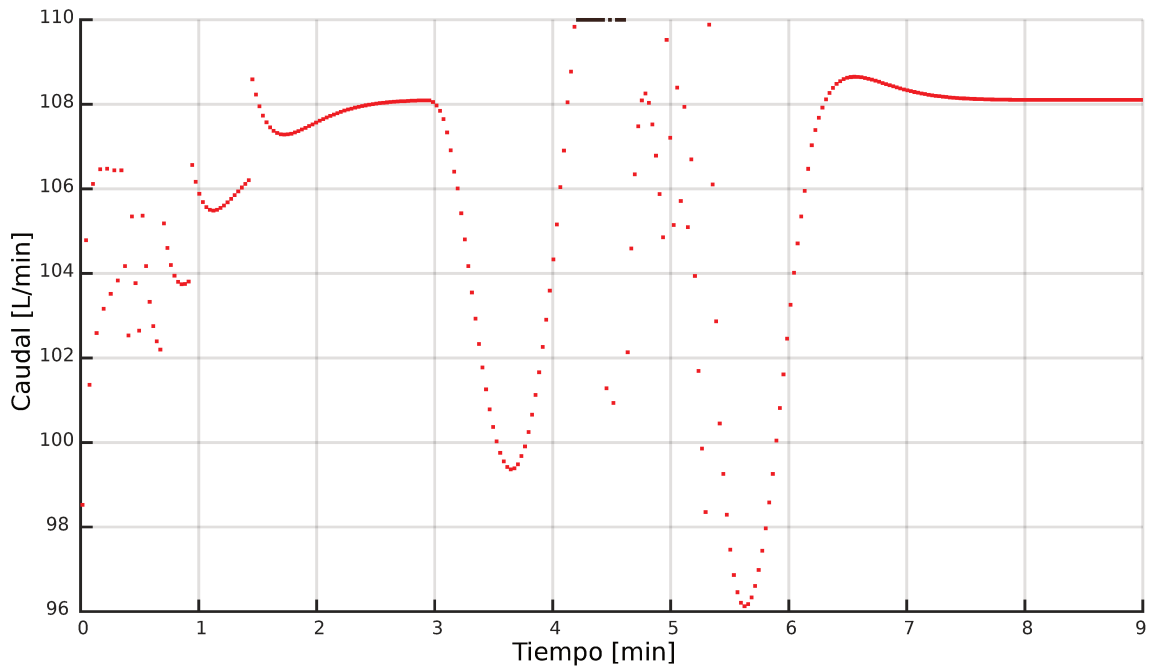
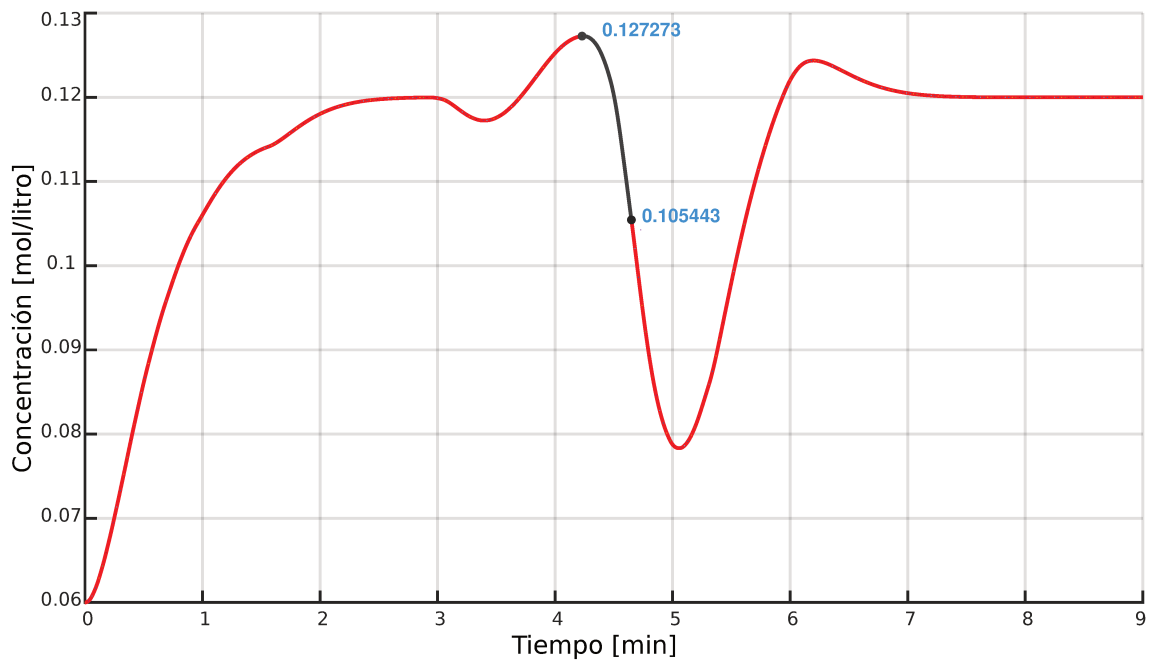


Figura 7.10: Evolución de los estados y región terminal

En la Fig.(7.11) se muestra el caudal manipulado y la evolución de la concentración, también se destaca en color negro el intervalo en el que la variable manipulada satura.



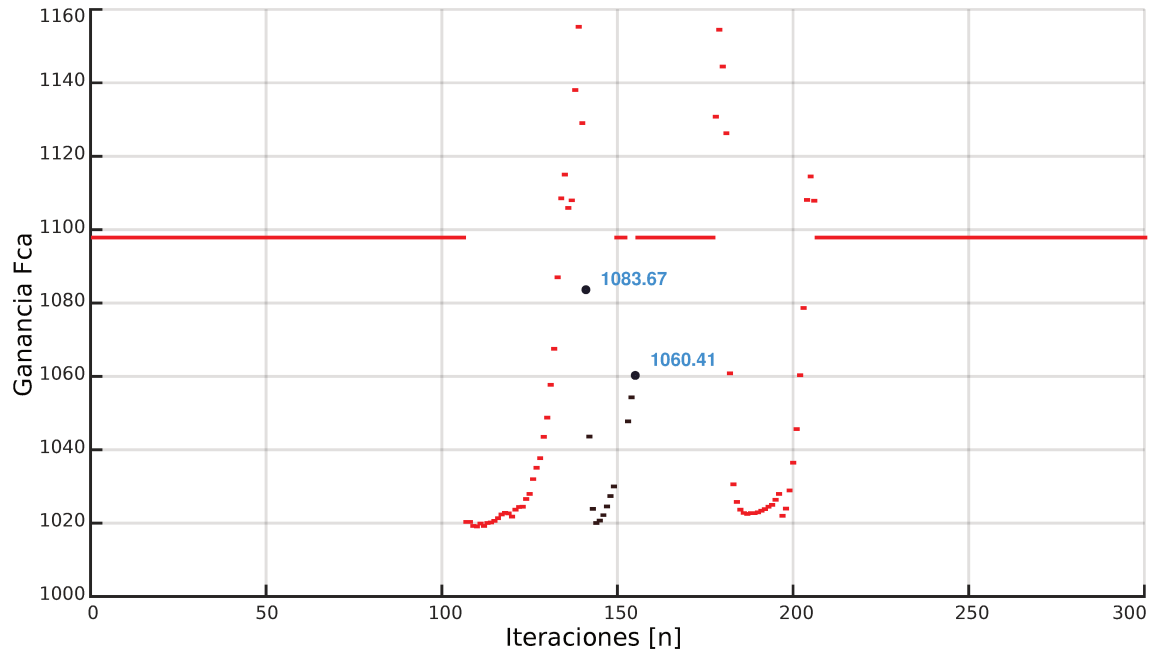
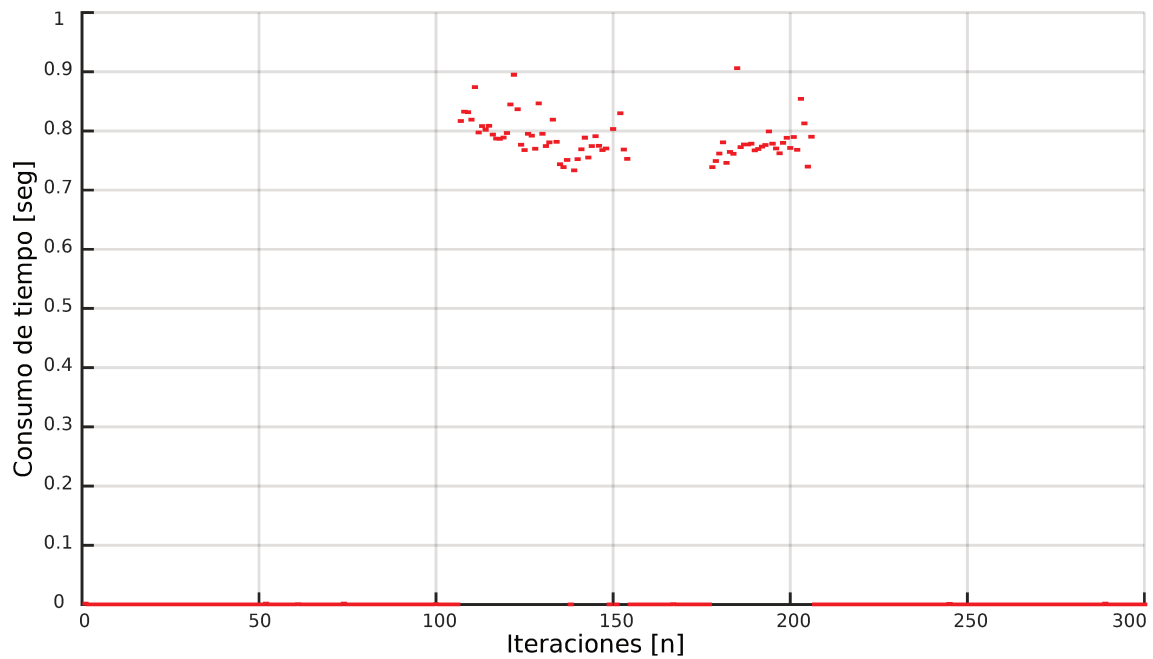
(a) Caudal manipulado



(b) Evolución de la concentración

Figura 7.11: Entrada y salida del reactor

Finalmente, en la Fig.(7.12) se muestra la ganancia en la concentración y el consumo de tiempo del algoritmo.

(a) Ganancia en C_A 

(b) Consumo de tiempo del algoritmo

Figura 7.12: Ganancia en la concentración y tiempo requerido para su cálculo

7.5. Resumen

En este capítulo se hizo uso de un regulador con saturación en el actuador y que utiliza, para el cálculo de su vector ganancia, una función de Lyapunov que depende del nivel de saturación (SDLF).

Se pudo mostrar que este regulador es más eficiente que aquél que utiliza una

función de Lyapunov cuadrática en cuanto al uso del caudal manipulado. Es decir, el LQR que utiliza FLDS permite regular al sistema empleando menor caudal que el LQR que utiliza función cuadrática, el cual para el mismo valor de la variable manipulada arroja un resultado infactible.

Sin embargo, esta mejora es a expensa de un mayor tiempo de cálculo, téngase en cuenta que se utilizó una sola entrada, es decir $m = 1$, y el número de LMI que utiliza el algoritmo para el cálculo de la ganancia es: $2^m n_m$, donde n_m es el número de modelos LTI vértices del politopo.

Para reducir este tiempo, se hizo uso de un conjunto terminal que abarca todo el rango de operación, ya que en dicha región se puede aplicar directamente una ganancia de realimentación estática y sin restricciones para la cual el consumo de tiempo del algoritmo es ínfimo.

Este conjunto terminal es la unión de elipsoides terminales calculados en distintos puntos de equilibrio del sistema, y el algoritmo de cálculo en función del valor de los estados conmuta entre estos.

Capítulo 8

Conclusiones

8.1. Resumen y conclusiones de la tesis

En las últimas décadas se ha comprobado que una amplia gama de problemas de diseño de controladores pueden ser reducidos al problema de optimización convexa estándar, utilizando Desigualdades Matriciales Lineales o LMI.

Las LMI han resultado ser una herramienta muy potente para el diseño multiobjetivo de controladores. Sin embargo, aunque esta herramienta matemática posee una representación concisa y efectiva, tiene como contraparte, que la formulación del problema desde el punto de vista conceptual es muy poco intuitiva.

Teniendo en cuenta esta dificultad, a lo largo de esta tesis se ha tratado de abordar el desarrollo de un controlador que satisfaga múltiples especificaciones de diseño, utilizando la formulación LMI, con un aumento gradual en su complejidad.

Para ello, se comenzó con un regulador estático aplicado a un modelo LTI en tiempo continuo y sin restricciones, hasta llegar al diseño de un regulador variable para un modelo LPV en tiempo discreto, con restricciones en sus estados y saturación en el actuador. Utilizando como garantía de estabilidad una función de Lyapunov que dependa del nivel de saturación y finalmente, incorporando el concepto de conjunto terminal de manera de optimizar el uso de los recursos digitales.

A continuación se hace un resumen de como fueron tratados los temas:

En el capítulo (2), se ha realizado una introducción teórica sobre las LMI. Analíticamente y mediante representaciones gráficas, se ha mostrado que las LMI definen regiones convexas, y que múltiples LMI implica la intersección de dichas regiones, la cual también resulta ser una región convexa.

Luego, se ha mostrado cómo el complemento de Schur permite la transformación de una Desigualdad Matricial Cuadrática, muy común en la especificación propia de un problema de control, en una Desigualdad Matricial Lineal.

En el capítulo (3), se han definido las regiones LMI y los modelos D -estables, en tiempo continuo y en tiempo discreto. Se ha demostrado y utilizado un teorema que permite vincular a dichas regiones LMI con conjuntos simétricos del plano s o del plano z .

A través de ejemplos, se ha visto que el concepto de estabilidad de Lyapunov

para modelos LTI es un caso particular de la aplicación de este teorema, y se ha mostrado que la convergencia asintótica al origen de un modelo LTI, debido a la ubicación de sus polos en el semiplano izquierdo o dentro del interior de un círculo de radio unitario, tiene su equivalente en el dominio temporal con la existencia de un elipsoide invariante y contractivo que limita la evolución de los estados.

El concepto del elipsoide invariante contractivo, el cual también se representó gráficamente para modelos en tiempo continuo y discreto, es fundamental para dar garantías de estabilidad en el diseño del controlador bajo formulación LMI.

En el capítulo (4), se ha analizado y desarrollado el procedimiento para formular las especificaciones que permitan el diseño de reguladores lineales cuadráticos, tanto para modelos LTI como para modelos LPV. En este último caso se ha hecho uso de la técnica de control robusto, utilizando una cáscara convexa (politopo) de modelos LTI, para incorporar la incertidumbre en los parámetros del sistema.

Se han formulado las especificaciones que contemplan restricciones en la variable manipulada como así también en los estados, y se han extendido los resultados obtenidos para formular las especificaciones de diseño que contemplen una realimentación de estados variables. El desarrollo se ha realizado para modelos en tiempo continuo y en tiempo discreto.

Como ejemplo, se eligió una aplicación típica de la ingeniería química, como lo es un CSTR. La simplicidad tanto del ejemplo como la del modelo politópico, fue prevista para destacar los beneficios de proponer un regulador con características dinámicas. La comparación entre un regulador con características estáticas y otro con características dinámicas muestra que este último tiene una significativa mejora en el tiempo de establecimiento (al menos tres veces más rápido), y esto es debido a un mejor uso del caudal del líquido refrigerante.

Sin embargo, en la simulación también se observó la ineficacia de mantener al vector de ganancias variable cuando el sistema se aproxima a su punto de equilibrio, ya que la misma empieza a fluctuar. Este hecho se debe a que, para el cálculo de dicho vector, se requiere utilizar valores de desviación de los estados cercanos a cero.

Como solución, para evitar este comportamiento, se propuso la idea de la región terminal. Esta región se delimita a partir de la maximización de un conjunto (elipsoide) en donde la ganancia de realimentación estática más agresiva no viola las restricciones impuestas a la variable manipulada ni en los estados. Los resultados mostraron que la aplicación de este concepto es viable, logrando una mejor utilización de los recursos del controlador.

En el capítulo (5), se ensayaron sobre un CSTR, todos los procedimientos de diseño desarrollados anteriormente. Esto es, se aplicaron las especificaciones en el diseño de reguladores robustos mediante LMI, utilizando modelos politópicos en tiempo continuo y en tiempo discreto.

En primer lugar se analizó el comportamiento del sistema en lazo abierto dentro de un rango de operación determinado. A partir del modelo no lineal y de la incertidumbre en sus parámetros previamente acotada, se construyeron ocho plantas no lineales que junto con el margen de operación, permitió determinar el rango del caudal refrigerante necesario para que el sistema opere en estado estacionario

dentro del rango establecido. También se pudo observar que el comportamiento del sistema para algunos puntos dentro dicho rango, es inestable.

Luego con las plantas obtenidas y a partir de un procedimiento original, se construyó el modelo politópico de vértices reducido que contempla todas las incertidumbres tanto en el modelo como en los parámetros del sistema, utilizado para realizar el cálculo del vector ganancia del regulador a través de un algoritmo basado en LMI.

El primer regulador diseñado ha sido un LQR robusto con ganancia de realimentación estática y sin restricciones. Con el mismo, se simularon tres plantas en lazo cerrado, la planta nominal y dos plantas perturbadas que se ubicaban dentro del politopo pero muy cerca de sus bordes laterales. A través de los resultados se comprobó que el regulador los estabiliza y con un buen desempeño, pero necesita una excesiva cantidad de caudal refrigerante especialmente en el instante inicial de la regulación.

Posteriormente se propuso un regulador LQR robusto con restricción en la amplitud de la variable manipulada. La simulación se realizó sobre las mismas plantas de manera satisfactoria en cuanto a la estabilidad y a la restricción impuesta, no así en cuanto al desempeño, ya que al menos en una de las plantas perturbadas las oscilaciones y el tiempo de establecimiento se incrementaron notoriamente.

Para mejorar el tiempo de respuesta se realizó un LQR robusto con restricciones en el caudal manipulado utilizando un vector de ganancias variable que se actualiza cada cierto intervalo de tiempo. La simulación sobre las mismas plantas, mostró que el comportamiento de éstas mejoró mucho su desempeño respecto a su comportamiento con regulador anterior. Prácticamente los sistemas respondieron de forma similar a cuando se le aplicaba un regulador sin restricciones. También resultó satisfactoria la simulación realizada sobre la planta nominal a la que se la perturbó ingresándole una variación temporal en uno de sus parámetros.

Se continuó con la discretización del modelo politópico y se repitió la última simulación realizada en tiempo continuo, es decir, se construyó un LQR robusto en tiempo discreto con restricciones en la variable manipulada y vector de ganancias variable. Si bien el tiempo de muestreo está determinado por la velocidad de respuesta de la planta, la actualización de las ganancias no necesariamente debe coincidir con este. Y aprovechando este concepto, se eligió para su actualización un tiempo similar al utilizado en tiempo continuo notándose, en la comparación entre ambos casos, un resultado similar.

Finalmente, y para el caso discreto, se contruyó un conjunto terminal dentro del cual el vector de ganancias de realimentación estático y sin restricciones no satura a la variable manipulada.

Con la utilización de este conjunto terminal se tuvo la opción de poder conmutar entre un regulador de ganancias variables con restricciones y uno de ganancias estáticas sin restricciones sin que se vea alterado el desempeño del sistema. De esta manera, se logró un mejor aprovechamiento en la utilización del algoritmo reduciendo su tiempo de cálculo.

En el capítulo (6), se abordó el diseño del LQR en el que se permite a la variable manipulada saturar con el objetivo de construir un regulador menos conservador.

Esto es porque al restringir la variable manipulada, de manera que no se violen los límites del actuador, conduce a que el sistema de control trabaje lejos de su capacidad total.

Se desarrolló una formulación para el diseño de reguladores que permiten la saturación en el actuador haciendo que el mismo opere a su máxima capacidad. Se determinó qué condiciones, en término de LMI, deben ser satisfechas para poder representar a la señal saturada como una combinación convexa de realimentaciones lineales. Para ello se agregó una restricción que confinaba al dominio de atracción a un elipsoide $\epsilon(P, \rho)$ inscripto en un poliedro $\mathcal{L}(H)$.

Empleando el concepto del elipsoide invariante, primero se desarrolló el diseño de un regulador con saturación para modelos LTI con garantía de estabilidad. Luego, utilizando el mismo concepto de estabilidad, se formuló el diseño de un LQR con saturación en la variable manipulada para un modelo LPV.

Se realizaron simulaciones que permitieron comparar la respuesta del sistema y su índice de desempeño cuando éste es realimentado con una entrada saturada y con una entrada sin saturar. En esta simulación se notó una leve mejora del LQR con entrada saturada cómo también un aumento en el tiempo de cálculo.

Posteriormente, empleando un elipsoide terminal, se comparó la respuesta del sistema y el consumo de tiempo en el algoritmo de cálculo, para el regulador con entrada saturada con y sin conmutación.

En el capítulo (7), se hizo uso de un regulador con saturación en el actuador y que además utiliza, para el cálculo de su vector de ganancias, una función de Lyapunov que depende del nivel de saturación (SDLF).

Se pudo mostrar que este regulador tiene un mayor dominio de atracción y es más eficiente, que aquél que utiliza una función de Lyapunov cuadrática, en cuanto al uso del caudal manipulado. Es decir, el LQR que utiliza FLDS permite regular al sistema donde el LQR con función cuadrática, para el mismo valor de la variable manipulada, arrojó un resultado infactible.

Sin embargo, esta mejora es a expensa de un mayor tiempo de cálculo, téngase en cuenta que se utilizó una sola entrada, es decir $m = 1$, y el número de LMI que utiliza el algoritmo para el cálculo de las ganancias es: $2^m n_m$, siendo n_m el número de modelos LTI vértices del politopo.

Para superar esta dificultad y reducir el tiempo de cálculo, se hizo uso de un conjunto terminal que abarca todo el rango de operación aplicando un vector ganancia de realimentación estático y sin restricciones, para el cual el consumo de tiempo del algoritmo es ínfimo.

Este conjunto terminal, que abarca todo el rango de operación, se realizó mediante la unión de elipsoides terminales calculados en distintos puntos de equilibrio del sistema, y el algoritmo de cálculo, en función del valor de los estados, conmuta entre estos.

8.2. Trabajos Futuros

Se plantean las siguientes tareas a realizar en el futuro:

1. Extender el politopo a más de una entrada manteniendo la convexidad, para poder modelar sistemas más complejos.
2. Abordar el diseño de controladores para sistemas que presentan saturación del actuador y perturbaciones acotadas y sostenidas en el tiempo, con el fin de minimizar sus efectos sobre la variable controlada y mejorar el desempeño del sistema.
3. Llevar estas implementaciones a ejemplos prácticos, tanto en la ingeniería Química como en otras disciplinas de la ingeniería, donde se detecte la necesidad de emplear estos algoritmos para reducir el tiempo de cómputo.
4. Evaluar los resultados de estas implementaciones prácticas y continuar investigando para mejorar las teorías existentes y aplicarlas.

Apéndice A

Artículos Publicados

Durante el desarrollo de esta tesis se presentaron a diversos congresos resultados que fueron obteniéndose a lo largo del desarrollo de la misma. A continuación se presenta un listado de los trabajos publicados:

1. Carlos Alberto Cappelletti and E J Adam. *Sintonización Robusta de Controladores Lineales Mediante el uso de LMI*. Parte I. In XXIII Congreso Argentino de Control Automático, AADECA 2012, Buenos Aires, Argentina, 2012.
2. Carlos Alberto Cappelletti and E J Adam. *Aplicación de una Estrategia de Control para Seguimiento Sin Saturaciones*. In XXIV Congreso Argentino de Control Automático, AADECA 2014, Buenos Aires, Argentina, 2014.
3. Carlos Alberto Cappelletti and E J Adam. *Problema de Seguimiento de Consigna en un Reactor Químico usando LMI*. In XVI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, RPIC 2015, Córdoba, Argentina, 2015.
4. Carlos Alberto Cappelletti and E J Adam. *Control Óptimo de Procesos Industriales Utilizando Desigualdades Lineales Matriciales*. 2016.
5. Carlos Alberto Cappelletti, Emanuel Bernardi, Hugo Pipino, and Eduardo J Adam. *Optimum Multiobjective Regulator with Variable Gain Matrix Applied to an Industrial Process*. In 2018 Argentine Conference on Automatic Control (AADECA), pages 1–6. IEEE, 2018.
6. Hugo Pipino, Emanuel Bernardi, Carlos A. Cappelletti, and Eduardo J. Adam. *Predictive control methods for multi-model systems*. 2020 IEEE Congreso Bienal de Argentina, ARGENCON 2020 - 2020 IEEE Biennial Congress of Argentina, ARGENCON 2020, 2020.
7. Hugo A. Pipino, Emanuel Bernardi, Marcelo Menezes Morato, Carlos Alberto Cappelletti, Eduardo J. Adam, and Julio Elias Normey-Rico. *Formulación de un LPV-MPC Adaptativo para Procesos Industriales No Lineales*. 2020 Argentine Conference on Automatic Control (AADECA), pages 195–200, 2020.

8. Hugo A. Pipino, Carlos A. Cappelletti, and Eduardo J. Adam. *Adaptive multi-model predictive control applied to continuous stirred tank reactor*. Computers and Chemical Engineering, 145(xxxx):107195, 2021.
9. Emanuel Bernardi, Hugo Pipino, Carlos A. Cappelletti, and Eduardo J. Adam. *Adaptive Predictive Control for Industrial Processes*. 2021 19th Workshop on Information Processing and Control, RPIC 2021, 2021.

Apéndice B

B.1. Demostración del teorema 3.1

Demostración teorema B.1. : *Considérese en primer lugar, que si $\lambda_i(A)$ es un autovalor de la matriz $A \in \mathfrak{R}^{n,n}$, y si $\lambda_i(A) \in \mathcal{C}$, entonces $\lambda_i^*(A)$ también será un autovalor de A , la razón es, que en los sistemas reales los polos (autovalores) son reales o aparecen de a pares conjugados [27].*

Siendo además $v \in \mathcal{C}$ los autovectores de la matriz A , por álgebra lineal clásica [41], se sabe que

$$\begin{aligned} v^* A &= \lambda v^*, \\ (v^* A)^* &= (\lambda v^*)^*, \\ A'v &= v\lambda^*, \end{aligned} \tag{B.1}$$

donde

$$\lambda \triangleq \text{diag} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Utilizando directamente la definición (3.4), se puede demostrar que si $M_D(A, Q) < 0$, entonces el producto

$$(I \otimes v^*)M_D(A, Q)(I \otimes v) < 0. \tag{B.2}$$

Con esta afirmación y reemplazando la Ec.(3.3) en (B.2) , se tiene

$$(I \otimes v^*)[L \otimes Q + M \otimes (AQ) + M' \otimes (AQ)'](I \otimes v) < 0. \tag{B.3}$$

Distribuyendo el producto de la desigualdad anterior, y utilizando las Ecs.(3.7) y (B.1), se obtiene para cada uno de sus términos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} (I \otimes v^*)(L \otimes Q)(I \otimes v) &= L \otimes v^*Qv, \\ (I \otimes v^*)(M \otimes (AQ))(I \otimes v) &= M \otimes \lambda v^*Qv, \\ (I \otimes v^*)(M' \otimes (AQ)')(I \otimes v) &= M' \otimes v^*Qv\lambda^*, \end{aligned}$$

lo que permite reescribir a la Ec.(B.2) como sigue:

$$L \otimes v^*Qv + M \otimes \lambda v^*Qv + M' \otimes v^*Qv\lambda^* < 0.$$

*Siendo el producto v^*Qv un escalar, puede extraerse como factor común,*

$$(L \otimes I + M \otimes \lambda + M' \otimes \lambda^*)v^*Qv < 0,$$

y siendo además $Q = Q' > 0$, entonces v^*Qv es un escalar positivo, por lo que necesariamente la matriz

$$(L \otimes I + M \otimes \lambda + M' \otimes \lambda^*) < 0. \quad (\text{B.4})$$

La desigualdad anterior puede ser reescrita como sigue:

$$L \otimes \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} + M \otimes \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix} + M' \otimes \begin{pmatrix} \lambda_1^* & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \lambda_n^* \end{pmatrix} < 0,$$

$$\begin{pmatrix} L \otimes 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & L \otimes 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M \otimes \lambda_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & M \otimes \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M' \otimes \lambda_1^* & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & M' \otimes \lambda_n^* \end{pmatrix} < 0.$$

Es decir, la desigualdad matricial (B.4) puede escribirse como n desigualdades matriciales, en la forma

$$(L \otimes 1 + M \otimes \lambda_i + M' \otimes \lambda_i^*) < 0, \quad \text{con } i = 1, \dots, n.$$

Teniendo en cuenta la Ec.(3.5), se tiene

$$(L + M\lambda_i + M'\lambda_i^*) < 0, \quad \text{con } i = 1, \dots, n, \quad (\text{B.5})$$

y por la Def.(3.2), se concluye que

$$f_D(\lambda_i) = L + sM + s^*M' < 0, \quad \text{con } i = 1, \dots, n \text{ y } \forall s = \lambda_i.$$

Por lo tanto, queda demostrado que los autovalores de la matriz A pertenecen a la región D , es decir,

A es D -estable, si $\exists Q > 0$ tal que

$$M_D(A, Q) = L \otimes Q + M \otimes (AQ) + M' \otimes (AQ)' < 0.$$

Apéndice C

Modelo del Reactor

C.1. Modelo del Reactor

1. Balance global de masa

$$\dot{V}(t) = q_e(t) - \overbrace{q_s(t)}^{k_A \sqrt{V(t)}} \left[\frac{\text{litros}}{\text{minutos}} \right]. \quad (\text{C.1})$$

2. Balance de masa para el producto A

Cantidad de sustancia del producto A dentro del volumen es:

$$V(t)C_A(t) \left[(\text{litros}) \left(\frac{\text{mol}}{\text{litros}} \right) \right],$$

y la variación temporal de sustancia del producto A dentro del volumen, resulta

$$\frac{d [V(t)C_A(t)]}{dt} = q_e(t)C_{Ae} - q_s(t)C_A(t) - \overbrace{V(t)k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t)}^{\text{Consumo}_A} \quad (\text{C.2})$$

$v_{R(A): A \rightarrow B}$

Resolviendo, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(t)C_A(t) + V(t)\dot{C}_A(t) &= \\ q_e(t)C_{Ae} - q_s(t)C_A(t) - V(t)k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t), \\ (q_e(t) - q_s(t))C_A(t) + V(t)\dot{C}_A(t) &= \\ q_e(t)C_{Ae} - q_s(t)C_A(t) - V(t)k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$
$$\begin{aligned} V(t)\dot{C}_A(t) &= \\ q_e(t)(C_{Ae} - C_A(t)) - V(t)k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t), \end{aligned}$$

y finalmente se obtiene

$$\dot{C}_A(t) = \frac{q_e(t)}{V(t)} (C_{Ae} - C_A(t)) - k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t) \left[\frac{\text{mol}}{\text{minutos litros}} \right]. \quad (\text{C.4})$$

3. Balance de energía

Cantidad de energía dentro del volumen es:

$$\rho c_p V(t) T(t) \left[\left(\frac{\text{gramos}}{\text{litros}} \right) \left(\frac{\text{calorías}}{\text{gramos Kelvin}} \right) (\text{litros}) (\text{Kelvin}) \right]. \quad (\text{C.5})$$

La variación temporal de energía dentro del volumen, resulta

$$\begin{aligned} \frac{d [\rho c_p V(t) T(t)]}{dt} &= \rho c_p q_e(t) T_{Ae} - \rho c_p q_s(t) T(t) - \\ &\underbrace{\left(-\Delta H_R \right)}_{\text{Cambio de entalpía}} \underbrace{V(t) k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t)}_{v_R(A): A \rightarrow B} + \underbrace{q_c(t) \rho c_p \left(1 - e^{\frac{-h_a}{\rho c_p q_c(t)}} \right)}_{\text{Calor disipado en la serpentina}} (T_{ce} - T(t)), \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{d [V(t) T(t)]}{dt} &= \\ q_e(t) T_{Ae} - q_s(t) T(t) &+ \left(k_0 \frac{\Delta H_R}{\rho c_p} \right) V(t) e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t) + q_c(t) \left(1 - e^{\left(\frac{-h_a}{\rho c_p} \right) \frac{1}{q_c(t)}} \right) (T_{ce} - T(t)), \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Resolviendo, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) T(t) + V(t) \dot{T}(t) &= \\ q_e(t) T_{Ae} - q_s(t) T(t) &+ k_1 V(t) e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t) + q_c(t) \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}} \right) (T_{ce} - T(t)), \\ (q_e(t) - q_s(t)) T(t) &+ V(t) \dot{T}(t) = \\ q_e(t) T_{Ae} - q_s(t) T(t) &+ k_1 V(t) e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t) + q_c(t) \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}} \right) (T_{ce} - T(t)), \\ V(t) \dot{T}(t) &= \\ q_e(t) (T_{Ae} - T(t)) &+ k_1 V(t) e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t) + q_c(t) \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}} \right) (T_{ce} - T(t)), \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

y finalmente se obtiene

$$\dot{T}(t) = \frac{q_e(t)}{V(t)} (T_{Ae} - T(t)) + k_1 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t) + \frac{q_c(t)}{V(t)} \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}} \right) (T_{ce} - T(t)) \left[\frac{\text{Kelvin}}{\text{minutos}} \right]. \quad (\text{C.9})$$

En las ecuaciones previas se han definido las siguientes constantes:

$$k_1 \triangleq k_0 \frac{\Delta H_R}{\rho c_p} \underbrace{\left[\frac{\frac{1}{\text{minutos}} \frac{\text{calorías}}{\text{mol}}}{\frac{\text{gramos}}{\text{litros}} \frac{\text{calorías}}{\text{gramos Kelvin}}} \right]}_{\left[\frac{\text{litros Kelvin}}{\text{minutos mol}} \right]}, \quad y \quad k_3 \triangleq \frac{h_a}{\rho c_p} \underbrace{\left[\frac{\frac{\text{calorías}}{\text{minutos Kelvin}}}{\frac{\text{calorías}}{\text{litros Kelvin}}} \right]}_{\left[\frac{\text{litros}}{\text{minutos}} \right]} \quad (\text{C.10})$$

En resumen, las ecuaciones diferenciales no lineales para el modelo del reactor, resultan

Ecuaciones del sistema no lineal

1. Balance global de masa en $\left[\frac{\text{litros}}{\text{minutos}} \right]$

$$\dot{V}(t) = q_e(t) - k_4 \sqrt{V(t)}. \quad (\text{C.11})$$

2. Del balance de masa para el producto A se obtiene la variación de la concentración en función del tiempo en $\left[\frac{\text{mol}}{\text{minutos litros}} \right]$

$$\dot{C}_A(t) = \frac{q_e(t)}{V(t)} (C_{Ae} - C_A(t)) - k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t). \quad (\text{C.12})$$

3. Del balance de energía se obtiene la variación de la temperatura en función del tiempo en $\left[\frac{\text{Kelvin}}{\text{minutos}} \right]$

$$\dot{T}(t) = \frac{q_e(t)}{V(t)} (T_{Ae} - T(t)) + k_1 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t) + \frac{q_c(t)}{V(t)} \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}} \right) (T_{ce} - T(t)). \quad (\text{C.13})$$

Constante	Símbolo	Valor	Unidades
Densidad	ρ	$1 * 10^3$	$\frac{\text{gramos}}{\text{litros}}$
Calor específico	c_p	1	$\frac{\text{calorías}}{\text{gramos Kelvin}}$
Coefficiente transferencia de calor	h_a	$7 * 10^5$	$\frac{\text{calorías}}{\text{minutos Kelvin}}$
Cambio de entalpía	Δ_{HR}	$-2 * 10^5$	$\frac{\text{calorías}}{\text{mol}}$
$\frac{\text{Energ. activ.}}{R} \left[\frac{\frac{\text{cal}}{\text{mol}}}{\frac{\text{cal}}{\text{mol K}}} \right]$	E_R	$1 * 10^4$	Kelvin
Factor frecuencia de colisión	k_0	$7,2 * 10^{10}$	$\frac{1}{\text{minutos}}$
$k_0 \frac{\Delta_{HR}}{\rho c_p}$	k_1	$18 * 10^{12}$	$\frac{\text{litros Kelvin}}{\text{minutos mol}}$
$\frac{h_a}{\rho c_p}$	k_3	$7 * 10^2$	$\frac{\text{litros}}{\text{minutos}}$
Coefficiente de la válvula	k_4	10	$\frac{\text{litros}^{\frac{1}{2}}}{\text{minutos}}$

C.1.1. Puntos Estacionarios

En estado estacionario las variaciones de volumen, concentración y temperatura resultan nulas, esto es:

$$\dot{V}(t) = 0, \quad \dot{C}_A(t) = 0, \quad \dot{T}(t) = 0. \quad (\text{C.14})$$

1. De la Ec.(C.11), se tiene

$$q_e(t) - k_4 \sqrt{V(t)} = 0. \quad (\text{C.15})$$

2. De la Ec.(C.12), se tiene

$$\frac{q_e(t)}{V(t)} (C_{Ae} - C_A(t)) - k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t) = 0. \quad (\text{C.16})$$

3. De la Ec.(C.13), se tiene

$$\frac{q_e(t)}{V(t)} (T_{Ae} - T(t)) + k_1 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t) + \frac{q_c(t)}{V(t)} \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}} \right) (T_{ce} - T(t)) = 0. \quad (\text{C.17})$$

A partir de la Ec(C.12), se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{q_e(t)}{V(t)} C_{Ae} &= \left(\frac{q_e(t)}{V(t)} + k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} \right) C_A(t), \\ C_{Ae} &= \left(1 + \underbrace{\frac{V(t)}{q_e(t)} k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}}}_{\triangleq X} \right) C_A(t), \\ C_A(t) &= \frac{C_{Ae}}{(1 + X)}. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Notar que a volumen y concentración de entrada constantes, $C_A(t)$ es solo función de la temperatura de la reacción.

C.1.2. Curva de reacción y curva de disipación

A continuación se reescribe la Ec.(C.13), del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) = & \underbrace{k_1 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t)}_{\text{velocidad de aumento de temperatura}} + \underbrace{\frac{q_c(t)}{V(t)} \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}} \right) (T_{ce} - T(t)) + \frac{q_e(t)}{V(t)} (T_{Ae} - T(t))}_{\text{velocidad de disminución de temperatura}}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

En la ecuación anterior, se observa que se produce un aumento de la temperatura debido a la reacción y una disminución de la temperatura debido a la disipación y también una disminución debido al ingreso de reactante. En estado estacionario la temperatura del reactor se estabiliza, resultando $\dot{T}(t) = 0$, lo que conduce a la

siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
 k_1 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t) &= \\
 -\frac{q_e(t)}{V(t)} (T_{Ae} - T(t)) - \frac{q_c(t)}{V(t)} \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}}\right) (T_{ce} - T(t)), \\
 \underbrace{\frac{k_1}{\rho c_p}}_{\frac{\Delta H_R}{\rho c_p}} k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t) &= \\
 -\frac{q_e(t)}{V(t)} (T_{Ae} - T(t)) - \frac{q_c(t)}{V(t)} \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}}\right) (T_{ce} - T(t)), \tag{C.20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta H_R}{\rho c_p} \underbrace{\frac{V(t)}{q_e(t)} k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} C_A(t)}_{\triangleq X} &= \\
 -(T_{Ae} - T(t)) - \frac{q_c(t)}{q_e(t)} \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}}\right) (T_{ce} - T(t)),
 \end{aligned}$$

y al reemplazar $C_A(t)$ por la Ec.(C.18), se tiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta H_R}{\rho c_p} C_{Ae} \frac{X}{(1+X)} &= -(T_{Ae} - T(t)) - \frac{q_c(t)}{q_e(t)} \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}}\right) (T_{ce} - T(t)), \\
 \underbrace{\frac{C_{Ae}}{\rho c_p} \Delta H_R \frac{X}{(1+X)}}_{(Kelvin)} &= -(T_{Ae} - T(t)) - \frac{q_c(t)}{q_e(t)} \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}}\right) (T_{ce} - T(t)), \tag{C.21}
 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{q_e(t)}{V(t)} \left(\frac{C_{Ae}}{\rho c_p} \Delta H_R \frac{X}{(1+X)}\right)}_{funcion\ sigmoide\ de\ T} = -\underbrace{\left(\frac{q_e(t)}{V(t)} (T_{Ae} - T(t)) + \frac{q_c(t)}{V(t)} \left(1 - e^{\frac{-k_3}{q_c(t)}}\right) (T_{ce} - T(t))\right)}_{funcion\ lineal\ de\ T}. \tag{C.22}$$

El lado izquierdo de la Ec.(C.22) representa la velocidad de calentamiento de la mezcla dentro del reactor, que como se observa, a volumen constante y concentración de entrada constante solo es función de la temperatura. Mientras que el lado derecho de dicha ecuación representa la velocidad de enfriamiento de la mezcla dentro del reactor, la que a volumen constante, temperaturas de entrada del reactante y del fluido refrigerante constante y para un caudal refrigerante fijo, es una función lineal de la temperatura.

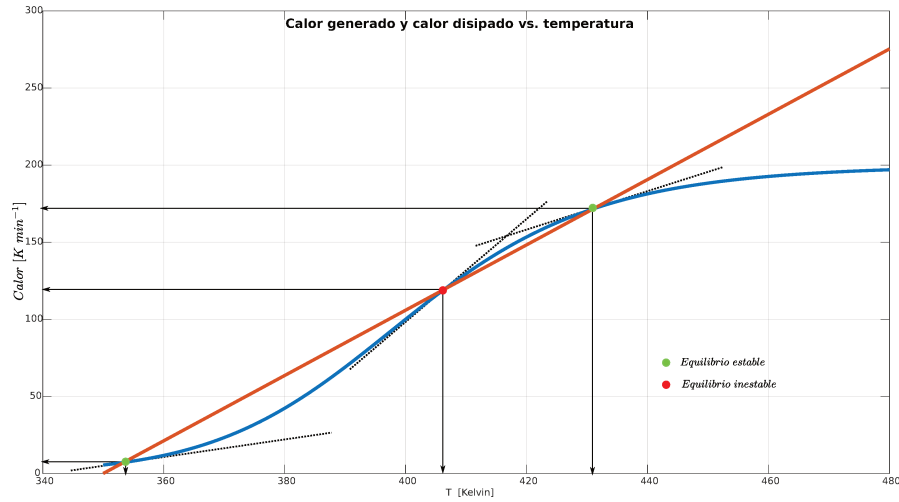


Figura C.1: Generación y disipación del calor vs temperatura

A continuación se expresa la temperatura de la mezcla en función de su concentración

$$\begin{aligned}
 (1 + X) &= \frac{C_{Ae}}{C_A(t)}, \\
 \left(1 + \frac{V(t)}{q_e(t)} k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}}\right) &= \frac{C_{Ae}}{C_A(t)}, \\
 \frac{V(t)}{q_e(t)} k_0 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} &= \left(\frac{C_{Ae}}{C_A(t)} - 1\right), \\
 e^{\frac{-E_R}{T(t)}} &= \left(\frac{C_{Ae}}{C_A(t)} - 1\right) \frac{q_e(t)}{k_0 V(t)}, \\
 \frac{-E_R}{T(t)} &= \ln\left(\left(\frac{C_{Ae}}{C_A(t)} - 1\right) \frac{q_e(t)}{k_0 V(t)}\right), \\
 T(t) &= \frac{-E_R}{\ln\left(\left(\frac{C_{Ae}}{C_A(t)} - 1\right) \frac{q_e(t)}{k_0 V(t)}\right)}.
 \end{aligned} \tag{C.23}$$

Bibliografía

- [1] Francesco A. Cuzzola, Jose C. Geromel, and Manfred Morari. An improved approach for constrained robust model predictive control. *Automatica*, 38(7):1183–1189, 2002. (Citado en páginas 151 y 157.)
- [2] Eduardo J Adam. *Instrumentación y Control de Procesos. Notas de Clase*. Ediciones UNL, Santa Fe, 3 edition, 2018. (Citado en página 2.)
- [3] T. Alamo, A. Cepeda, D. Limon, and E. F. Camacho. A new concept of invariance for saturated systems. *Automatica*, 42(9):1515–1521, 2006. (Citado en página 11.)
- [4] David Angeli, Alessandro Casavola, Giuseppe Franzè, and Edoardo Mosca. An ellipsoidal off-line MPC scheme for uncertain polytopic discrete-time systems. *Automatica*, 44(12):3113–3119, 2008. (Citado en página 11.)
- [5] Emanuel Bernardi, Hugo Pipino, Carlos A. Cappelletti, and Eduardo J. Adam. Adaptive Predictive Control for Industrial Processes. *2021 19th Workshop on Information Processing and Control, RPIC 2021*, 2021. (Citado en página 13.)
- [6] Christoph Böhm, Shuyou Yu, and Frank Allgöwer. Predictive control for constrained discrete-time periodic systems using a time-varying terminal region. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, 14(PART 1):537–542, 2009. (Citado en página 11.)
- [7] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1994. (Citado en páginas 2, 4, 9, 15 y 19.)
- [8] Yong Yan Cao and Zongli Lin. Stability analysis of discrete-time systems with actuator saturation by a saturation-dependent Lyapunov function. *Automatica*, 39(7):1235–1241, 2003. (Citado en página 121.)
- [9] Yong Yan Cao and Zongli Lin. Min-max MPC algorithm for LPV systems subject to input saturation. *IEEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 152(3):266–272, 2005. (Citado en páginas 3, 11, 12, 61, 137, 151 y 152.)

- [10] Carlos Alberto Cappelletti and E J Adam. Sintonización Robusta de Controladores Lineales Mediante el uso de LMI. Parte I. In *XXIII Congreso Argentino de Control Automático, AADECA 2012*, Buenos Aires, Argentina, 2012. (Citado en página 37.)
- [11] Carlos Alberto Cappelletti and E J Adam. Aplicación de una Estrategia de Control para Seguimiento Sin Saturaciones. In *XXIV Congreso Argentino de Control Automático, AADECA 2014*, Buenos Aires, Argentina, 2014. (Citado en páginas 50 y 57.)
- [12] Carlos Alberto Cappelletti and E J Adam. Problema de Seguimiento de Consigna en un Reactor Químico usando LMI. In *XVI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, RPIC 2015*, Córdoba, Argentina, 2015. (Citado en página 91.)
- [13] Carlos Alberto Cappelletti and E J Adam. Control Óptimo de Procesos Industriales Utilizando Desigualdades Lineales Matriciales. 2016. (Citado en página 60.)
- [14] Carlos Alberto Cappelletti, Emanuel Bernardi, Hugo Pipino, and Eduardo J Adam. Optimum Multiobjective Regulator with Variable Gain Matrix Applied to an Industrial Process. In *2018 Argentine Conference on Automatic Control (AADECA)*, pages 1–6. IEEE, 2018. (Citado en páginas 68 y 72.)
- [15] Alessandro Casavola, Monica Giannelli, and Edoardo Mosca. Min-max predictive control strategies for input-saturated polytopic uncertain systems. *Automatica*, 36(1):125–133, 2000. (Citado en página 11.)
- [16] M Chilali and P Gahinet. Hinf Design whit Pole Placement Constraints: an LMI Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):358–367, 1996. (Citado en páginas 35 y 36.)
- [17] W Colmenares and F Tadeo. *Apuntes sobre Control Robusto y Multiobjetivos de Sistemas*. Ed. Equinoccio, ISBN 980-237-233-4, 2005. (Citado en páginas 27 y 29.)
- [18] J C Geromel de Oliveira J. Bernussou. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, (37):261–265, 1999. (Citado en páginas 151 y 157.)
- [19] Baocang Ding, Yugeng Xi, and Shaoyuan Li. A synthesis approach of on-line constrained robust model predictive control. *Automatica*, 40(1):163–167, 2004. (Citado en página 11.)
- [20] Guang-Ren Duan and Hai-Hua Yu. *LMIs in Control Systems*. Taylor & Francis, 2013. (Citado en página 36.)

- [21] Le Feng, Jianliang Wang, Engkee Poh, and Fang Liao. Improved robust model predictive control with structural uncertainty. *9th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, 2006, ICARCV '06*, 2006. (Citado en página 3.)
- [22] Farid Golnaraghi and Benjamin C Kuo. *Automatic Control Systems*. Wiley, 9 edition, 2009. (Citado en páginas 5 y 9.)
- [23] Zongli Lin b Yugeng Xi He Huang Dewei Li. An improved robust model predictive control design in the presence of actuator saturation. *Automatica*, (47):861–864, 2011. (Citado en página 12.)
- [24] Tingshu Hu and Zongli Lin. *Control Systems with Actuator Saturation*. Number January 2001. 2001. (Citado en páginas 11, 43, 46, 132 y 158.)
- [25] M Khotare, V Balakrishman, and M Morari. Robust Constrained Model Predictive Control Using Linear Matrix Inequalities. *Automatica*, 32(10):1361–1379, 1996. (Citado en páginas 4, 53, 61, 65, 68 y 69.)
- [26] Mayuresh V. Kothare, Venkataramanan Balakrishnan, and Manfred Morari. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(10):1361–1379, 1996. (Citado en páginas 11 y 13.)
- [27] H Y F Lam. *Analog and digital filters; design and realization*. Prentice-Hall, 1979. (Citado en página 191.)
- [28] C.-K. Li and R Mathias. External Characterization of the Schur Complement and Resulting Inequalities. *SIAM-Review*, 42(2):233–246, 2000. (Citado en página 9.)
- [29] Johan Löfberg. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design*, (May):284–289, 2004. (Citado en página 118.)
- [30] Wei-Jie Mao. Robust stabilization of uncertain time-varying discrete systems and comments on “an improved approach for constrained robust model predictive control”. *Automatica*, (39):1109–1112, 2003. (Citado en página 155.)
- [31] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, and P. O.M. Scokaert. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6):789–814, 2000. (Citado en páginas 3 y 10.)
- [32] Javad Mohammadpour and Carsten W Scherer. *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*. Springer Science & Business Media, 2012. (Citado en página 13.)
- [33] J Duane Morningred, Bradley E Paden, Dale E Seborg, and Duncan A Mellischamp. An Adaptive Nonlinear Predictive Controller. *Chemical Engineering Science*, 47(4):755–762, 1992. (Citado en página 72.)

- [34] B Noble and J Daniel. *Álgebra Lineal Aplicada*. Prentice-Hall Hispanoamerica S.A., 1989. (Citado en páginas 8 y 17.)
- [35] K Ogata. *Modern Control Engineering (5th Edition)*. Prentice Hall, 5th edition, 2009. (Citado en página 5.)
- [36] Katsuhiko Ogata. *Modern Control Engineering*. Pearson Education, 5 edition, 2010. (Citado en página 9.)
- [37] R.S. Sanchez Pena. *Introducción a la Teoría de Control Robusto*. Buenos Aires, Argentina, segunda ed edition, 1999. (Citado en página 52.)
- [38] Hugo Pipino, Emanuel Bernardi, Carlos A. Cappelletti, and Eduardo J. Adam. Predictive control methods for multi-model systems. *2020 IEEE Congreso Bienal de Argentina, ARGENCON 2020 - 2020 IEEE Biennial Congress of Argentina, ARGENCON 2020*, 2020. (Citado en página 13.)
- [39] Hugo A. Pipino, Emanuel Bernardi, Marcelo Menezes Morato, Carlos Alberto Cappelletti, Eduardo J. Adam, and Julio Elias Normey-Rico. Formulación de un LPV-MPC Adaptativo para Procesos Industriales No Lineales. *2020 Argentine Conference on Automatic Control (AADECA)*, pages 195–200, 2020. (Citado en página 13.)
- [40] Hugo A. Pipino, Carlos A. Cappelletti, and Eduardo J. Adam. Adaptive multi-model predictive control applied to continuous stirred tank reactor. *Computers and Chemical Engineering*, 145(xxxx):107195, 2021. (Citado en página 13.)
- [41] C. N. Rautenberg and C. E. D’attellis. *Control Lineal Avanzado y Control ‘Optimo*. Asociación Argentina de Control Automático (AADECA), 2004. (Citado en páginas 5, 6, 7, 9, 57 y 191.)
- [42] R S Sánchez. *Introducción a la Teoría de Control Robusto*. AADECA, 1992. (Citado en páginas 2 y 5.)
- [43] C Scherer, P Gahinet A., and M Chilali. Multiobjetivo Output-Feedback Control via LMI Optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(896–911), 1997. (Citado en página 50.)
- [44] Carsen Scherer. *Linear Matrix Inequalities in Control*. Delft University of Technology, 1998. (Citado en página 16.)
- [45] Shamma. An Overview of LPV Systems. *Control of linear parameter varying systems with applications*, pages 3–26, 2012. (Citado en página 96.)
- [46] C Smith and A Corripio. *Principles and Practice of Automatic Process Control*. Wiley, 2004. (Citado en página 5.)
- [47] Eduardo Sontag. *Mathematical Control Theory*. Springer International, 1998. (Citado en página 5.)

- [48] G Stephanopoulos. *Chemical Process Control*. Prentice Hall, 1984. (Citado en página 5.)
- [49] F G Stremmer. *Introducción a los Sistemas de Comunicación*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1993. (Citado en página 112.)
- [50] Kazuo Tanaka and Hua O. Wang. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis*. 2001. (Citado en página 64.)
- [51] Ben M Chen Tingshu Hu Zongli Lin. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. *Automatica*, (38):351–359, 2002. (Citado en páginas 121 y 158.)
- [52] Zhaoyang Wan and Mayuresh V. Kothare. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 39(5):837–846, 2003. (Citado en páginas 11 y 53.)
- [53] Yacov Shamash Yong-Yan Cao Zongli Lin. Set invariance analysis and gain-scheduling control for LPV systems subject to actuator saturation. *Systems & Control Letters*, (46):137–151, 2002. (Citado en página 160.)
- [54] Langwen Zhang, Jingcheng Wang, and Kang Li. Min-max MPC for LPV systems subject to actuator saturation by a saturation-dependent Lyapunov function. *Chinese Control Conference, CCC*, pages 4087–4092, 2013. (Citado en páginas 12, 13, 121, 151, 158 y 159.)